El Problema de la Suma de Subconjuntos es NP-Completo

Carla Sunami Pérez Valera

Septiembre 2024

Problema de la Suma de Subconjuntos: Dados N enteros no negativos $a_1 \dots a_N$ y una suma objetivo K, la tarea es decidir si existe un subconjunto con una suma igual a K.

Explicación: Una instancia del problema es una entrada especificada al problema. Una instancia del problema de la suma de subconjuntos es un conjunto $S = \{a_1, \dots, a_N\}$ y un entero K. Dado que un problema NP-completo es un problema que está tanto en NP como en NP-hard, la prueba de que un problema es NP-Completo consta de dos partes:

1. El problema en sí está en la clase NP.
2. Todos los demás problemas en la clase NP pueden reducirse en tiempo polinómico a ese problema. (Se denota como $B \leq_P^C$ que B se reduce en tiempo polinómico a C).

Si solo se satisface la segunda condición, entonces el problema se llama NP-Hard.

Pero no siempre es posible reducir cada problema NP a otro problema NP para mostrar su NP-Completitud. Es por eso que si queremos mostrar que un problema es NP-Completo, simplemente mostramos que el problema está en NP y cualquier problema NP-Completo se puede reducir a ese, entonces hemos terminado, es decir, si B es NP-Completo y $B \leq_P^C$ para C en NP, entonces C es NP-Completo. Por lo tanto, podemos verificar que el Problema de la Suma de Subconjuntos es NP-Completo usando las siguientes dos proposiciones:

La Suma de Subconjuntos está en NP:

Si cualquier problema está en NP, entonces dado un certificado, que es una solución al problema y una instancia del problema (un conjunto S de enteros $a_1 \dots a_N$ y un entero K), podremos identificar (si la solución es correcta o no) el certificado en tiempo polinómico. Esto se puede hacer verificando que la suma de los enteros en el subconjunto S' sea igual a K.

La Suma de Subconjuntos es NP-Hard:

Para probar que la Suma de Subconjuntos es NP-Hard, realiza una reducción de un problema conocido como NP-Hard a este problema. Lleva a cabo una reducción desde la cual se puede reducir el Problema de Cubierta de Vértices al problema de la Suma de Subconjuntos. Supongamos un grafo $G(V, E)$ donde $V = \{1, 2, \ldots, N\}$. Ahora, para cada vértice i, $a_i = i$. Para cada arista (i, j) definimos un componente llamado b_{ij}. Representaremos los enteros en formato de matriz, donde cada fila se expresa en la representación base-4 del valor entero correspondiente de $|E| + 1$ dígitos. La matriz tiene las siguientes propiedades:

- La primera columna contiene un valor entero 1 para a_i y 0 para b_{ij}.
- Cada una de las columnas E comenzando desde el lado derecho de la matriz representa un dígito para cada arista. La columna $(i, j) = 1$ para a_i, a_j y b_{ij}, de lo contrario, es igual a 0.
- Definimos una constante k' tal que:

$$k' = k(4^{|E|}) + \sum_{i=0}^{|E|-1} 2(4^i)$$

Ahora, se cumplen las siguientes proposiciones:

1. Consideremos un subconjunto de vértices y aristas a (V', E') respectivamente, de modo que:

$$\sum_{i \in V'} a_i + \sum_{(i,j) \in E'} b_{ij} = k'$$

2. b_{ij} puede contener como máximo 1 en cada columna. Además, el parámetro k' tiene un 2 en todos los dígitos menos significativos hasta $|E|$. Nunca tendremos un acarreo en estos dígitos. Ahora, estos dígitos suman como máximo tres 1's en cada columna. Esto implica que para cada arista (i, j), V' debe contener i o j. Por lo tanto, V' se convierte en una cubierta de vértices.
3. Supongamos que hay una Cubierta de Vértices de tamaño k, elegiremos enteros a_i tales que i se encuentre en V' y todos los b_{ij} tales que i o j estén en V'. Al sumar todos estos enteros en representación base 4 (que elegimos de la matriz), obtenemos la suma de enteros $= k'$. Por lo tanto, los enteros elegidos forman el subconjunto de enteros con suma $= k'$. Por lo tanto, se cumple la suma de subconjuntos.

Consideremos el siguiente ejemplo: Dado es una cubierta de vértices $V = \{1, 3\}$ y $k = 2$.

a_1	a_2	a_3	a_4
1	2	3	4

La matriz se puede construir de la siguiente manera:

a_1	a_2	a_3	a_4	b_{12}	b_{14}	b_{23}	b_{34}
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0

$$\begin{aligned} k' &= k(4^4) + \sum_{i=0}^{3} 2(4^i) \\ &= 2(4^4) + 2(4^0) + 2(4^1) + 2(4^2) + 2(4^3) \\ &= 2(256 + 1 + 4 + 16 + 64) \\ &= 682 \end{aligned}$$

Ahora, para probar el valor de k', elijamos a_i tal que i se encuentre en V', elegimos a_1 y a_3 y b_{ij} tal que i o j se encuentre en V', es decir, elegimos b_{12}, b_{14}, b_{23} y b_{34} de la matriz. En representación base 4, tenemos los siguientes valores:

$$a_1 = 321, a_3 = 276, b_{12} = 64, b_{23} = 16, b_{14} = 1, b_{34} = 4$$

Estos valores se calculan usando la matriz. Al sumar estos valores, obtenemos:

$$k' = 321 + 276 + 64 + 16 + 1 + 4 = 682$$

Por lo tanto, el valor de k' se puede calcular y verificar.

En consecuencia, el Problema de la Suma de Subconjuntos es NP-Completo.