

EL PROCESO DE ANÁLISIS JERÁRQUICO (AHP) Y LA TOMA DE DECISIONES MULTICRITERIO. EJEMPLO DE APLICACIÓN.

Analitic hierarchic process and multicriteria decisión making. Application example

RESUMEN

Los problemas de toma de decisiones son procesos complejos en los cuales intervienen múltiples criterios, por lo cual es necesario utilizar herramientas que permitan discernir entre estos para obtener una solución que satisfaga en mejor grado la combinación de alternativas posibles. Una de estas herramientas, es el AHP (Proceso de Análisis Jerárquico). En este artículo se presenta el método, y un ejemplo de aplicación del mismo.

PALABRAS CLAVES: Toma de Decisiones, Problemas Multicriterio, Proceso de Análisis Jerárquico (AHP).

ABSTRACT

The problems of decision making are complex processes in which multiple criteria take part, thus it is necessary to use tools that allow to discern between these to obtain a solution that satisfies in better degree the combination of possible alternatives. One of these tools, is the AHP (Analitic Hierarchie Procesess). In this article the method appears, and an example of application of the same one.

KEYWORDS: *Decisión making, multicriteria problems, Analitic Hierarchie Procesess*

1. INTRODUCCIÓN

Es claro, que en el ambiente competitivo actual, las organizaciones enfrentan diariamente la toma de decisiones, tanto en el nivel estratégico, como en el táctico, siendo muchas veces de consecuencias fundamentales para la supervivencia de la misma. Cuando se enfrenta el proceso de toma de decisiones o selección de alternativas, generalmente se tienen múltiples objetivos, que se contraponen entre ellos, haciendo más complejo éste proceso y generándose entonces la necesidad de una herramienta o un método que permita comparar esos múltiples criterios frente a la gama de alternativas posibles.

Una de las metodologías propuestas para la solución de los problemas multicriterio es el Proceso de Análisis Jerárquico AHP, el cual es el centro de este artículo, que busca hacer una introducción a los problemas de decisión multicriterio y realizar la presentación del método AHP a partir de la presentación de un ejemplo teórico, diseñado para mostrar su aplicación.

El artículo entonces presenta primero una introducción a los problemas de decisión multicriterio. A continuación se hace una presentación del AHP, sus principales bases y el desarrollo de la metodología, concluyendo con la

JUAN CARLOS OSORIO GÓMEZ

Ingeniero Industrial, M. Sc.
Profesor Asistente
Universidad del Valle
josorio@pino.univalle.edu.co

JUAN PABLO OREJUELA CABRERA

Ingeniero Industrial, M. Sc.
Profesor Auxiliar
Universidad del Valle
Juanp77@pino.univalle.edu.co

presentación del ejemplo y la aplicación para la toma de decisión en un problema de localización.

2. LOS PROBLEMAS DE DECISIÓN MULTICRITERIO.

La toma de decisiones multicriterio es un problema crítico de la vida real. Cualquier actividad involucra de una u otra manera, la evaluación de un conjunto de alternativas en términos de un conjunto de criterios de decisión, donde muy frecuentemente estos criterios están en conflicto unos con otros [1]. La figura 1, ilustra la situación compleja a la que se ve enfrentado el responsable de tomar una decisión. Es claro, que éste se encuentra influenciado por sus patrones o modelos mentales, por la influencia de quienes se encuentran en una posición jerárquica superior o inferior, incluyéndose también el estado de ánimo y sus relaciones familiares y sociales, lo cual determina las prioridades al momento de abordar el problema, y añaden desde luego, mayores elementos de complejidad.

Dentro de este marco, es vital contar con la información adecuada para tomar la mejor decisión, la cual se determinará dentro de un conjunto de posibles alternativas, las cuales deben ser evaluadas frente a múltiples criterios que se definan para este propósito. El resultado entonces, es un proceso complejo y delicado en el cual la subjetividad y la dependencia de la información

juegan un papel preponderante. Por esta razón es necesario contar con herramientas que mejoren este proceso y permitan un análisis más científico de las alternativas. [2]

Esta complejidad ha llevado al desarrollo de modelos de preferencia, es decir, herramientas que permiten abordar el problema de decisión multicriterio de una forma sistemática y científica, buscando favorecer el proceso y ayudar a quien toma la decisión. Entre estos modelos de preferencia, se hará referencia específica al AHP. Este método, facilita la toma de decisiones en problemas en los cuales se involucran múltiples criterios [3]

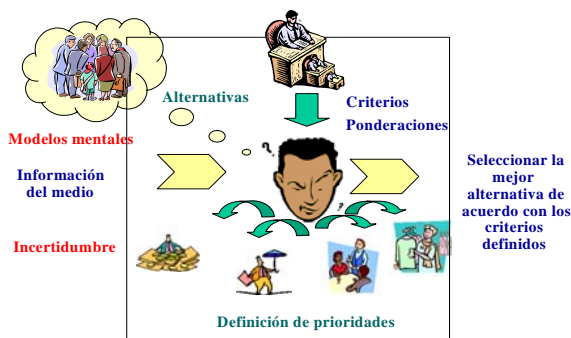


Figura 1. Elementos de complejidad en los procesos de decisión multicriterio.

3. AHP (PROCESO DE ANÁLISIS JERÁRQUICO)

Fue desarrollado a finales de los 60 por Thomas Saaty, quien a partir de sus investigaciones en el campo militar y su experiencia docente formuló una herramienta sencilla para ayudar a las personas responsables de la toma de decisiones.

Su simplicidad y su poder han sido evidenciados en las cientos de aplicaciones en las cuales se han obtenido importantes resultados y en la actualidad, es la base de muchos paquetes de software diseñados para los procesos de tomas de decisiones complejas. Además, ha sido adoptado por numerosas compañías para el soporte de los procesos de toma de decisiones complejas e importantes.

El AHP es una metodología para estructurar, medir y sintetizar. Ha sido aplicado ampliamente en la solución de una gran variedad de problemas, entre los cuales se pueden mencionar los presentados en [4], [5], [6], [7], [8] y [9] entre otros.

Es un método matemático creado para evaluar alternativas cuando se tienen en consideración varios criterios y está basado en el principio que la experiencia y el conocimiento de los actores son tan importantes como los datos utilizados en el proceso.

Los primeros usos del AHP fueron dados en la solución de problemas de decisión en ambientes multicriterio. [2]

Entre sus principales ventajas se pueden comentar:

- Se puede analizar el efecto de los cambios en un nivel superior sobre el nivel inferior.
- Da información sobre el sistema y permite una vista panorámica de los actores, sus objetivos y propósitos.
- Permite flexibilidad para encarar cambios en los elementos de manera que no afecten la estructura total.

El AHP utiliza comparaciones entre pares de elementos, construyendo matrices a partir de estas comparaciones, y usando elementos del álgebra matricial para establecer prioridades entre los elementos de un nivel, con respecto a un elemento del nivel inmediatamente superior, esto podrá verse con mayor claridad en el desarrollo del ejemplo que se encuentra en el siguiente apartado de este artículo.

Cuando las prioridades de los elementos en cada nivel se tienen definidas, se agregan para obtener las prioridades globales frente al objetivo principal. Los resultados frente a las alternativas se convierten entonces en un importante elemento de soporte para quien debe tomar la decisión.

La notación utilizada es la siguiente:

- Para i objetivos dados $i = 1, 2, \dots, m$; se determinan los respectivos pesos w_i .
- Para cada objetivo i , se comparan las $j = 1, 2, \dots, n$ alternativas y se determinan los pesos w_{ij} con respecto al objetivo i
- Se determina el peso final de la alternativa W_j con respecto a todos los objetivos así $W_j = w_{1j}w_1 + w_{2j}w_2 + \dots + w_{mj}w_m$

Las alternativas se ordenan de acuerdo con el W_j en orden descendente, donde el mayor valor indica la alternativa más preferida. Las diferentes metodologías para la solución de problemas multicriterios se diferencian en la forma como determinan el objetivo y las ponderaciones a los factores. La validez general del AHP está fundamentada en las múltiples y variadas aplicaciones que ha tenido para la solución de problemas de toma de decisiones.

Algunos autores plantean que el AHP no ha sido bien comprendido, ya que va más allá de ser una simple metodología para situaciones de elección [10]. Se plantea entonces, que la mejor manera de entender el método es describiendo sus tres funciones básicas: **estructurar la complejidad, medir en una escala y sintetizar**. A continuación se describen éstas de una manera breve [11].

- **Estructuración de la Complejidad.** Saaty buscó una manera para resolver el problema de la complejidad, y utilizó la estructuración jerárquica de los problemas

en subproblemas homogéneos. De hecho, el uso de la descomposición jerárquica es una de las grandes virtudes del método, puesto que se descompone una meta u objetivo en factores más simples, es decir, un problema se descompone en subproblemas, los cuales están relacionados directamente con el problema inicial, y al lograr la solución de los subproblemas y manteniendo la relación existente entre ellos, se consigue la solución del problema inicial.

- **Medición en escalas.** El AHP permite realizar mediciones de factores tanto subjetivos como objetivos a partir de estimaciones numéricas, verbales o gráficas, lo cual le provee una gran flexibilidad, permitiendo esto, gran variedad de aplicaciones en campos tan distintos unos de otros. El hecho de tener definida una escala general, aplicable a cualquier situación, permite la universalidad del método y lo hace sencillo de aplicar para quien toma la decisión. Además, la escala es clara y provee una gran amplitud para las comparaciones. En la tabla 1 se presenta la escala propuesta por Saaty [2]
- **Síntesis.** Aunque el nombre incluya la palabra Análisis, el enfoque del AHP es totalmente sistémico, ya que aunque analiza las decisiones a partir de la descomposición jerárquica, en ningún momento pierde de vista el objetivo general y las interdependencias existentes entre los conjuntos de factores, criterios y alternativas, por lo tanto, este método está enfocado en el sistema en general, y la solución que presenta es para la totalidad, no para la particularidad.

Una vez revisadas estas tres funciones básicas y para completar la visión acerca de la base sobre la cual se establece el AHP, es importante conocer los principios y axiomas de esta metodología.

3.1 PRINCIPIOS. [4]

El principio de Descomposición:

Para resolver la complejidad, el AHP permite estructurar un problema complejo en subproblemas jerárquicos con dependencias de acuerdo con el nivel de descomposición en el que se encuentren.

Escala	Definición	Explicación
1	Igualmente preferida	Los dos criterios contribuyen igual al objetivo
3	Moderadamente preferida	La experiencia y el juicio favorecen un poco a un criterio frente al otro
5	Fuertemente preferida	La experiencia y el juicio favorecen fuertemente a un criterio frente al otro
7	Muy fuertemente preferida	Un criterio es favorecido muy fuertemente sobre el otro. En la práctica se puede demostrar su dominio
9	Extremadamente preferida	La evidencia favorece en la más alta medida a un factor frente al otro

Tabla 1. Escalas de comparación de Saaty

Los valores **2, 4, 6 y 8** se utilizan cuando no se puede definir con claridad la preferencia entre los factores. Estos son valores intermedios de preferencia.

Fuente: Saaty, Thomas. How to make a decision: the analytic hierarchy process. University of Pittsburgh. 1994

Juicios Comparativos:

Permite realizar combinaciones en parejas de todos los elementos de un sub-grupo con respecto al criterio principal del subgrupo, por ello se habla de comparaciones biunívocas.

Composición Jerárquica o Síntesis de prioridades:

Permite producir prioridades globales a través de las multiplicaciones de las prioridades locales, es decir, que una vez se tienen soluciones locales, se agregan para obtener la solución general que se está buscando.

3.2 AXIOMAS [3]

Axioma recíprocal

Si frente a un criterio, una alternativa A es n veces mejor que B, entonces B es 1/n veces mejor que A. Este principio es utilizado en el análisis matricial que se realiza a los criterios y las alternativas. Garantiza que el análisis se haga de manera bidireccional.

Axioma de homogeneidad

Los elementos que son comparados no deben diferir en mucho en cuanto a la característica de comparación establecida.

Axioma de la síntesis

Los juicios acerca de las prioridades de los elementos en una jerarquía no dependen de los elementos del nivel más bajo. Este axioma es rebatible y en algunos análisis no se aplica puesto que puede ser posible que exista dependencia de la importancia de un objetivo con el nivel más bajo.

4. EJEMPLO DE APLICACIÓN

A continuación, se presenta un ejemplo con el fin de mostrar el desarrollo de la metodología. El ejemplo, ha sido diseñado para trabajar el problema de la localización, el cual es multicriterio puesto que intervienen en esta decisión una gran variedad de criterios que en ocasiones llegan a ser antagónicos. Es un ejemplo académico, en el cual se busca de una manera sencilla ilustrar una situación que fácilmente se presenta en un contexto real. El problema consiste en seleccionar el mejor sitio para establecer un centro de atención de primer nivel que incluya los servicios de medicina general y odontología para cubrir la demanda de la población del norte del Cauca (Colombia) y se han definido tres alternativas de lugares, con algunas

características de los sitios¹, a continuación se presentan las características del proyecto y de las alternativas posibles:

Características del proyecto:

Población beneficiada: 15000 habitantes

Infraestructura física: Un local con 2 consultorios médicos, un consultorio para promoción y prevención y un consultorio odontológico, equipo de cirugía ambulatorio y ayudas diagnósticas y laboratorio clínico (rayos X) Área aproximada 200 m²

Inversión: \$120.000.000 (equipos, construcción y licencias)

Personal: 6 médicos generales (media jornada)
1 odontólogo, 1 enfermera jefe, 1 bacteriólogo, 1 auxiliar de enfermería y 1 auxiliar de laboratorio, 1 higienista oral, 1 recepcionista, 1 director médico administrativo, 1 auxiliar de oficina, 1 conductor (La ambulancia se tendrá en convenio con el hospital departamental del Valle del Cauca)

Jornada de atención: 7 a.m a 9 p.m lunes a sábado y 8 a.m a 1 p.m domingos y festivos.

Se han planteado las siguientes alternativas para localizar el centro de atención:

Puerto Tejada

Población objeto 3500 habitantes

Costo del m² construido = \$25.000

Servicios de energía, agua, teléfono y alcantarillado.

El agua debe ser procesada por ser de pozo costo \$ 5000/m³

Energía a \$90/Kw

Nivel de inseguridad alto. Presencia fuerte de guerrilla

Acceso a la vía panamericana

Estación de policía

A 25 minutos del hospital de Santander de Quilichao (nivel 2)

A 45 minutos del hospital departamental del Valle

Servicio continuo de transporte para el Cauca y Valle

Caloto

Población objeto 1500 habitantes

Costo del m² construido = \$20.000

Servicios de energía, agua, teléfono y alcantarillado

El agua debe ser procesada por ser de pozo costo \$

Criterio o factor:	Población		
Alternativas	Santander	Caloto	Puerto Tejada
Santander	1	7	5
Caloto	1/7	1	1/3
Puerto Tejada	1/5	3	1

6500/m³

Energía a \$100/Kw

Nivel de inseguridad medio

Acceso a la vía panamericana

Estación de policía

A 45 minutos del hospital de Santander de Quilichao

A 120 minutos del hospital departamental del Valle

Servicio periódico de transporte para el Cauca y Valle

Santander de Quilichao

Población objeto 6500 habitantes

Costo del m² construido = \$35.000

Servicios de energía, agua, teléfono y alcantarillado

Energía a \$80/Kw

Nivel de inseguridad alto

Acceso a la vía panamericana

Estación de policía

Hospital de segundo nivel

A 60 minutos del hospital departamental del Valle

Servicio continuo de transporte para el Cauca y Valle

A continuación, se deben establecer los criterios sobre los cuales se tomará la decisión. Es claro que en este proceso debe intervenir el personal capacitado y con experiencia en el tema que se busca decidir. Para el caso del ejemplo, se definirán los siguientes criterios de decisión:

- **Población:** es decir, la mayor cobertura posible sobre la población objeto
- **Cercanía al hospital:** en caso de presentarse una emergencia no tratable en este centro de salud
- **Costo del terreno:** para ubicar el centro
- **Seguridad:** de la zona, tanto para los empleados como para los pacientes que demanden el servicio
- **Servicios públicos:** disponibles de la zona
- **Transporte:** se refiere a la disponibilidad de transporte para la zona

Una vez se han definido los criterios, se realiza el análisis por pares, es decir, se comparan cada una de las alternativas frente a cada uno de los criterios de manera biunívoca, es decir, par a par. Por ejemplo, si se quiere evaluar el criterio población, se tendría una matriz como la que se presenta en la tabla 2 en la cual, el valor de 7 indica que se esta prefiriendo muy fuertemente a Santander frente a Caloto y el valor de 5 muestra una preferencia fuertemente de Santander sobre Puerto Tejada, igualmente, el 3 indica que se prefiere moderadamente a Puerto Tejada sobre Caloto. De igual manera, los valores 1/7, 1/5 y 1/3 corresponden a los inversos, es decir, que la comparación se realiza en los dos sentidos: Caloto vs Santander y Santander vs Caloto, lo cual explica que la diagonal corresponda a valores de 1, pues refleja la comparación del factor contra el mismo.

Tabla 2. Matriz de comparación del criterio Población

Después de haber realizado las comparaciones de todos los factores, estas matrices son normalizadas, es decir, se

¹ Esta información no corresponde estrictamente a la realidad, ha sido diseñada para el ejemplo.

divide cada término de la matriz sobre la suma de sus columnas, y en este caso se obtendría una matriz tal como se presenta en la tabla 3. Con esta matriz, se obtiene el vector de prioridad del criterio al promediar los valores de las filas. Este procedimiento se repite para todos los criterios y también se realiza para comparar los criterios entre sí (Tablas 4, 5 y 6)*

Criterio o factor:	Población			Vector de prioridad
Alternativas	1	2	3	
Santander	35/47	7/11	15/19	
Caloto	5/47	1/11	1/19	
Puerto Tejada	7/47	3/11	3/19	
				15/217
				1/12
				17/88

Tabla 3. Matriz normalizada y vector de prioridad del criterio población

Con cada vector de prioridad obtenido para los criterios, se conforma una matriz de prioridad la cual se multiplica matricialmente con el vector de prioridad obtenido al realizar la comparación entre los criterios (Tabla 6). El resultado, es un vector denominado vector de prioridad de las alternativas, el cual se constituye en la solución del problema, al presentar cada una de las alternativas y un porcentaje de preferencia para cada una de ellas; para el caso de este ejemplo se tiene el vector de la tabla No 7.

	1	2	3	4	5	6
Población	1	5	7	2	1/2	1
Distancia hospital	1/5	1	3	1/5	1/5	1/5
Costo terreno	1/7	1/3	1	1/5	1/5	1/5
Seguridad	1/2	5	5	1	1/3	5
Servicios públicos	2	5	5	3	1	7
Transporte	1	5	5	1/5	1/7	1

Tabla 4. Matriz de comparación de criterios

	1	2	3	4	5	6
Población	70/339	15/64	7/26	10/33	105/499	5/72
Distancia hospital	14/339	3/64	3/26	1/33	42/499	1/72
Costo terreno	10/339	1/64	1/26	1/33	42/499	1/72
Seguridad	35/339	15/64	5/26	5/33	70/499	25/72
Servicios públicos	140/339	15/64	5/26	5/11	210/499	35/72
Transporte	70/339	15/64	5/26	1/33	30/499	5/72

Tabla 5. Matriz normalizada

Criterio	Prioridad
Población	203/942
Distancia hospital	13/235
Costo terreno	13/368

* Los valores fraccionarios presentados en el vector de prioridad, corresponden a datos redondeados en el programa Excell®, utilizando fracciones de hasta tres dígitos.

Seguridad	128/657
Servicios públicos	62/169
Transporte	76/575

Tabla 6. Vector de prioridad de los criterios

	Alternativas	prioridades
Santander	1	52.45%
Caloto	2	23.53%
Puerto	3	24.02%
		100.00%

Tabla No 7. Vector de prioridad de las alternativas

Según esto, la principal opción es Santander de Quilichao con un 52.45% y quedan en iguales condiciones de comparación las otras dos alternativas. Es claro, que el método propone una solución, pero quien finalmente toma la decisión es la persona o grupo encargado de hacerlo. Antes de concluir este análisis, debe calcularse el coeficiente de consistencia, el cual valida que los juicios no tengan errores entre ellos, es decir, que no se haya producido contradicciones en los mismos. Un valor de este coeficiente inferior a 0.10 es considerado aceptable. Para aquellos casos en que sea mayor, las opiniones y los juicios deben ser reevaluados.

A continuación se presenta un algoritmo para el cálculo de éste (este debe aplicarse para todos los criterios) [12]:

- Para cada línea de la matriz de comparación por pares determinar una suma ponderada con base a la suma del producto de cada celda por la prioridad de cada alternativa o criterio correspondiente.
 - Para cada línea, dividir su suma ponderada por la prioridad de su alternativa o criterio correspondiente.
 - Determinar la media λ_{\max} del resultado de la etapa anterior.
 - Calcular el índice de consistencia para cada alternativa o criterio
- $$CI = (\lambda_{\max} - m) / (m - 1)$$
- Donde m = No de alternativas
- Determinar el IA de la tabla 8
 - Determinar el índice de cociente de consistencia (CCi): $CCi = CI/IA$

Número de alternativas de decisión, m	Índice aleatorio, IA
3	0.58
4	0.9
5	1.12
6	1.24
7	1.32
8	1.41

Tabla 8. Índice aleatorio para el cálculo del coeficiente de consistencia

Fuente: Tomado de Vidal Carlos Julio. Material de clase Sistemas de transporte y redes de abastecimiento [12]

En la tabla 9 se encuentran los valores de los coeficientes de consistencia para el ejemplo presentado, y como se puede observar, todos ellos son menores que 0.1 por lo tanto, se pueden utilizar los resultados dados por el método.

Criterio	CC
Población	0.0567
Distancia hospital	0.0334
Costo terreno	0.0565
Seguridad	0.0469
Servicios públicos	0.0567
Transporte	0.0465

Tabla 9. Coeficientes de Consistencia

5. CONCLUSIONES

- Una de las ventajas del AHP como herramienta de apoyo a la toma de decisiones en problemas de selección de múltiples criterios es la posibilidad que brinda frente a la agregación de diferentes tipos de información, tanto cualitativa como cuantitativa, lo cual facilita la participación en el proceso de personas con una marcada tendencia técnica, así como personas que no lo son.
- De igual manera, se pueden realizar análisis muy variados, en los cuales se contemplan situaciones netamente cuantitativas, como por ejemplo un balance general, un análisis financiero, con situaciones cualitativas tales como el impacto ambiental, el grado de desarrollo social entre otros.
- No importa que tipo de organización o qué clase de problema se esté analizando, el AHP ha demostrado ser una herramienta poderosa y útil para ayudar en la toma de decisiones multicriterios.
- Sin querer presentar éste método como el único o el mejor en el problema de toma de decisiones multicriterio, se ha realizado la presentación del mismo dada su relativa sencillez en la aplicación y la variada aplicación registrada en la literatura.
- Con respecto al ejemplo, es importante notar que se consideraron criterios que en algunos momentos pueden ser contradictorios, pero en este caso, la solución permite la tranquilidad que no solo se han considerado todos ellos, sino que cada uno ha recibido la importancia que se merecen de acuerdo con el conocimiento y experiencia de los expertos.
- La aplicación del método con hojas electrónicas evidencia la facilidad de acceso al mismo sin necesidad de adquirir software costoso para poder aplicarlo. Cómo se observó en el ejemplo, todo es

producto de la aplicación de matemáticas matriciales que puede realizarse en un programa como Excel®.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Sánchez, Ramiro. La toma de decisiones con múltiples criterios. Un resumen conceptual y teórico. Centro de Planificación y Gestión, Universidad Mayor de San Simón. 2001
- [2] Saaty, Thomas. How to make a decision: the analytic hierarchy process. University of Pittsburgh. 1994
- [3] Bryson N. and Mobolurin A. An approach to using The analytic Hierarchy for solving multiple criteria decision making problems. European Journal of Operational Research. 1994
- [4] Subramaniam,V. Lee K. Dynamic selection of dispatching rules for job shop scheduling. Production Planning and control. 2000. Vol 11, No 1, pp. 73-81.
- [5] Evaluación ambiental comparativa de dos sitios considerados para la ubicación del nuevo aeropuerto internacional de la ciudad de México. Universidad Nacional Autónoma de México. Julio 2001
- [6] Frei F. Harker P. Measuring aggregate process performance using AHP. Working Paper. The Wharton School. University of Pennsylvania .1998
- [7] Fulcrum Ingeniería Ltda. Proyectos y Asesorías con el Analitiy Hierarchy Proccess (AHP). Chile. 2000
- [8] Asma M. A. Bahurmoz. The Analytic Hierarchy Process at Dar Al-Hekma, Saudi Arabia. Interfaces, Vol. 33, No. 4, July–August 2003, pp. 70–78
- [9] Bascetin A. An application of the analytic hierarchy process in equipment selection at Orhaneli open pit coal mine. Technical note. Mining Technology: Transactions of the Institute of Mining and Metallurgy. Vol 113, No 3. Septiembre 2004 pp. 192 - 199
- [10] Forman, E. Gass, Saul. The analytic Hierarchy Process – An exposition. Operations Research. 2001, Vol 49, No 4, pp. 469 - 486
- [11] Saaty, Thomas. The seven pillars of the analytic hierarchy process. University of Pittsburgh. 2001
- [12] Anderson, David R., D. J. Sweeney y T. A. Williams, An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making, West Publishing Company, Minneapolis, 1994, pp. 390-392. Citado por Vidal Carlos Julio en Material de clase Sistemas de Transporte y Redes de Abastecimiento. Módulo Selección del modo de transporte y transportista. Universidad del Valle. 2004.