École Centrale de Lille — Année universitaire 2024-2025
G3 - Parcours SDI — **Devoir Surveillé**

Examen de Probabilités-Statistiques

Documents interdits et calculatrices autorisés.
Durée : 1h45

Exercice 1 On considère (X_1, X_2, X_3, X_4) un vecteur gaussien de matrice de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice de covariance de (X_1, X_3).
2. Les v.a.r. X_1 et X_3 sont-elles indépendantes ? Justifier.
3. Quelle est la loi de $\dfrac{(X_1 - E(X_1))^2}{2} + (X_3 - E(X_3))^2$?
4. Les v.a.r. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ? Justifier.
5. Étudier l'indépendance des v.a.r. $U = X_1 - X_2$ et $V = X_4 - X_2$.

Exercice 2 Un champ de blé d'un hectare de surface est divisé en parcelles carrées de un mètre de côté. Des études statistiques on montré que le rendement X_i d'une parcelle élémentaire i (nombre de kilos de blé produit par cette parcelle) suit une loi normale de paramètres μ et σ. Bien entendu, le rendement dépend de l'engrais utilisé.

1. Pour déterminer μ et σ, l'exploitant décide de contrôler le rendement prévisible avant la récolte sur un échantillon de 300 parcelles élémentaires. L'examen de cet échantillon montre que 100 parcelles auront une production supérieure à $0,8$ kg et que 50 parcelles auront une production inférieure à $0,7$ kg. Déterminer alors les valeurs de μ et σ.
2. L'année suivante, l'exploitant décide de changer la concentration d'engrais. Le rendement d'une parcelle suit toujours une loi normale de paramètres μ et σ. Il contrôle alors avant la récolte le rendement prévisible sur un échantillon de 500 parcelles. Il trouve une moyenne empirique de $0,78$ et une variance empirique $S^{*2} = 0,0004$. Donner un intervalle de confiance pour μ avec une probabilité de 95%.

À toutes fins utiles, on rappelle le théorème suivant : *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. indépendantes et suivant toutes la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\sigma > 0$. La moyenne $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et l'estimateur sans biais de la variance $S_n^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ sont des v.a.r. indépendantes avec $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ et $\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$. En particulier, $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n^*}$ suit la loi de Student de paramètre $n-1$.*

Exercice 3 Dans cet exercice, U et V sont deux v.a.r. indépendantes, U de loi uniforme sur $[0,1]$ et V de densité $x \mapsto xe^{-x}\chi_{[0;+\infty[}(x)$. On pose $Z = UV$.

1. Que vaut $E(U|V)$?

2. Calculer la loi du vecteur (V, Z).
3. En déduire la loi de Z.
4. Les v.a.r. V et Z sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $E(V|Z)$.

Exercice 4 Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes de L^2, de même loi et indépendantes. On note $\mu = E(X_1)$ et $\sigma^2 = \mathrm{var}(X_1)$. On suppose $\sigma \neq 0$. On pose aussi, pour tout $n \geqslant 1$, $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)$.

1. La suite (Z_n) converge-t-elle en loi ?
2. On pose $Z'_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{2n} (X_k - \mu)$. Exprimer $(Z_{2n} - Z_n)$ en fonction de Z'_n et Z_n.
3. Établir la convergence en loi de la suite $(Z_{2n} - Z_n)$ et donner sa limite.
4. Montrer que si (Z_n) converge en probabilité vers une v.a.r. Y alors $(Z_{2n} - Z_n)$ converge en probabilité vers la v.a.r. nulle.
5. En déduire que (Z_n) ne converge pas en probabilité.
6. Que peut-on en déduire sur le théorème central-limite ?

Répartition de la loi Normale centrée réduite

$\mathbb{P}\{\mathcal{N}(0;1) \leq .\} = p$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	

$\mathbb{P}\{\mathcal{N}(0;1) \leq x\} = p$

x	p	x	p
0	0,5	3	0,998650
0,253347	0,6	3,09	0,998999
0,430728	0,666667	3,1	0,999032
0,524401	0,7	3,2	0,999313
0,674490	0,75	3,3	0,999517
0,841621	0,8	3,4	0,999663
1,281551	0,9	3,5	0,999767
1,644853	0,95	3,6	0,999841
1,959961	0,975	3,8	0,999928
2,326342	0,99	4	0,999968
2,575835	0,995	4,5	0,999997

Table de la loi de Student

Utilisation : en fonction du nombre de degré de liberté qu'on lit sur la première colonne et du risque d'erreur r (qu'on lit sur la première ligne), on trouve la valeur de l'écart t qui possède la probabilité r d'être dépassée en valeur absolue (i.e. P(|T|>t)).

	0.50	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001	0.0001
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.281	63.657	127.32	318.31	636.62	6366.2
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	34.599	99.992
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924	28.000
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610	15.544
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869	11.178
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959	9.082
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408	7.885
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041	7.120
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781	6.594
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587	6.211
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437	5.921
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318	5.694
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221	5.513
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140	5.363
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073	5.239
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015	5.134
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965	5.044
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922	4.966
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883	4.897
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850	4.837
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819	4.784
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792	4.736
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768	4.693
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745	4.654
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725	4.619
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646	4.482
35	0.682	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	2.996	3.340	3.591	4.389
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551	4.321
45	0.680	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	2.952	3.281	3.520	4.269
50	0.679	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496	4.228
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460	4.169
70	0.678	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	2.899	3.211	3.435	4.127
80	0.678	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416	4.096
90	0.677	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	2.878	3.183	3.402	4.072
100	0.677	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390	4.053
150	0.676	1.287	1.655	1.976	2.351	2.609	2.849	3.145	3.357	3.998
200	0.676	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	2.839	3.131	3.340	3.970
300	0.675	1.284	1.650	1.968	2.339	2.592	2.828	3.118	3.323	3.944
500	0.675	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	2.820	3.107	3.310	3.922
1000	0.675	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	2.813	3.098	3.300	3.906
infini	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291	3.891