Estimation Statistique Avancée

Centrale Lille Institut – G3 SDI
Année universitaire 2025/2026

Exercice 1. Soit le modèle hiérarchique suivant :

$$\lambda \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta), \tag{1}$$
$$x|\lambda \sim \mathcal{P}(\lambda). \tag{2}$$

1. Déterminer la loi a posteriori de λ : $p(\lambda|x_1, ..., x_n)$.
2. En déduire l'estimateur MAP et l'estimateur MMSE de λ.
3. Déterminer la loi prédictive a posteriori de x : $p(x|x_1, ..., x_n)$.

Exercice 2.

1. *Completing the square.* Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ symétrique, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$.
   Montrer que
   $$-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x} = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})^\top \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}) + \frac{1}{2}\mathbf{b}^\top \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \tag{3}$$
2. Soit le modèle hiérarchique suivant :
   $$\mu \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2), \tag{4}$$
   $$x|\mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2). \tag{5}$$
   On suppose que σ^2 est connu. Déterminer la loi a posteriori de μ : $p(\mu|x_1, ..., x_n)$, puis la loi prédictive a posteriori de x : $p(x|x_1, ..., x_n)$.
3. Soit le modèle hiérarchique suivant :
   $$\tau \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta), \tag{6}$$
   $$x|\tau \sim \mathcal{N}(\mu, \tau^{-1}). \tag{7}$$
   On suppose que μ est connu. Déterminer la loi a posteriori de τ : $p(\tau|x_1, ..., x_n)$, puis la loi prédictive a posteriori de x : $p(x|x_1, ..., x_n)$.
4. Soit le modèle hiérarchique suivant :
   $$\boldsymbol{\mu} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu_0}, \boldsymbol{\Sigma}_0) \tag{8}$$
   $$\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\mathbf{I}_d). \tag{9}$$
   On suppose que σ^2 est connu. Déterminer la loi a posteriori de $\boldsymbol{\mu}$: $p(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$.

Exercice 3. Soit un contexte de régression avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ et $y \in \mathbb{R}$. On considère le modèle hiérarchique suivant :

$$\beta_p \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Laplace}(0, b), \tag{10}$$

$$y_i | \boldsymbol{\beta} \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}, \sigma^2). \tag{11}$$

On note les données $\mathcal{D} = \{(\mathbf{x}_1, y_1), ..., (\mathbf{x}_n, y_n)\}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ la matrice des données, et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des sorties.

En supposant σ^2 connu, montrer que le problème de l'estimation MAP (maximum a posteriori) :

$$\max_{\boldsymbol{\beta}} \; p(\boldsymbol{\beta} | \mathcal{D}) \tag{12}$$

est équivalent au problème du LASSO, en précisant la valeur prise par le paramètre de régularisation.

P.d.f. de la loi de Laplace, $\mu \in \mathbb{R}, \; b > 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x; \mu, b) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{b}\right).$$

Exercice 4. Soit un vecteur gaussien de taille d : $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. On partitionne arbitrairement $\mathbf{x}$ en deux morceaux de taille m et $d - m$ de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_d\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_a \\ \boldsymbol{\mu}_b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{aa} & \boldsymbol{\Sigma}_{ab} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{ba} & \boldsymbol{\Sigma}_{bb} \end{pmatrix}\right). \tag{13}$$

On introduit également $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ la matrice de *précision*, que l'on partitionne de manière similaire :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{aa} & \boldsymbol{\Lambda}_{ab} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{ba} & \boldsymbol{\Lambda}_{bb} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

1. Rappeler la méthode canonique d'échantillonnage de la loi de $\mathbf{x}$ (vue en TP).
2. Déterminer la loi conditionnelle $p(\mathbf{x}_a | \mathbf{x}_b)$ (utiliser l'astuce *completing the square*).
3. Application au cas $d = 2$: donner les deux lois conditionnelles permettant d'implémenter un échantillonneur de Gibbs pour la loi de $\mathbf{x}$.

Exercice 5. Soit le modèle hiérarchique suivant :

$$\tau \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta), \tag{15}$$

$$\mu \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2), \tag{16}$$

$$x | \mu, \tau \sim \mathcal{N}(\mu, \tau^{-1}). \tag{17}$$

Déterminer les lois conditionnelles permettant d'implémenter un échantillonneur de Gibbs pour la loi a posteriori $p(\mu, \tau | x_1, ..., x_n)$.