Øvelser i Mikroøkonomi

Baseret på Varian (2019)

Vejledende besvarelser

Spørgsmål, kommentarer eller rettelser bedes henvendt til Carl-Emil Pless

Indholdsfortegnelse

1 Nytte og præferencer

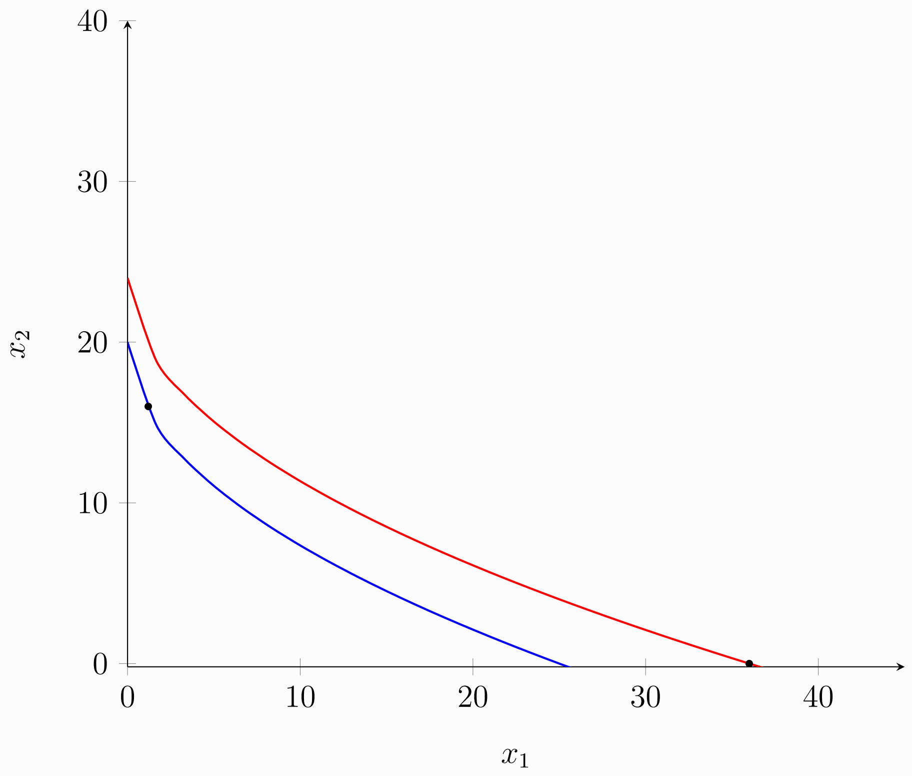
Baseret på kapitel 1-4 i Varian (2019). De handler om nytte og præferencer.

Opgave 1

Ambrose forbruger udelukkende nødder og bær. Heldigvis, kan han godt lide begge goder. Det varebundt hvor Ambrose forbruger x_1 enheder nødder per uge og x_2 enheder bær per uge noteres (x_1, x_2). Sættet af forbrugsgoder (x_1, x_2), hvor Ambrose er indifferent mellem (x_1, x_2) og $(1, 16)$ er det sæt bundter der opfylder $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, og $x_2 = 20 - 4\sqrt{x_1}$. Det sæt bundter (x_1, x_2) således at $(x_1, x_2) \sim (36, 0)$ er det sæt bundter hvor $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ og $x_2 = 24 - 4\sqrt{x_1}$.

(a) Indtegn, i et diagram, forskellige punkter som ligger på indifferenskurven, der går igennem punktet (1,16). Gør det samme for indifferenskurven, som går gennem punktet (36,0).

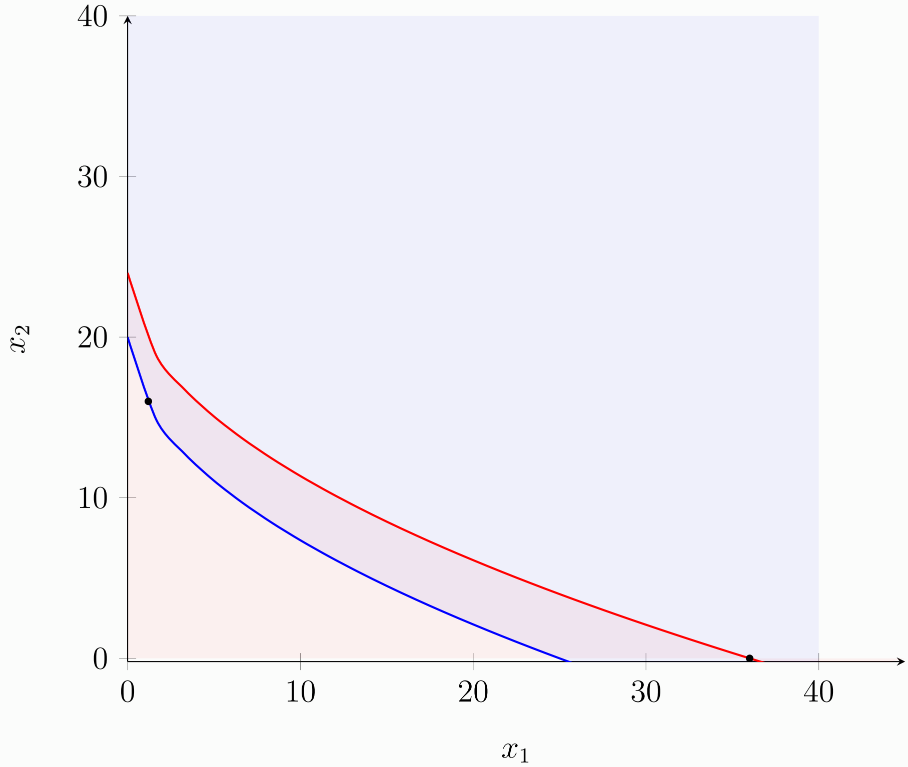
Løsning



(b) Marker de sæt bundter, som Ambrose svagt foretrækker fremfor (1,16). Marker desuden de sæt bundter (x_1, x_2), således at Ambrose svagt foretrækker (36,0) over disse bundter. Er de bundter, som Ambrose foretrækker til (1,16) et konvekst sæt?

Løsning

Vi markerer de bundter, som Ambrose svagt foretrækker fremfor (1,16) med det blå område i nedenstående figur. De bundter som Ambrose foretrækker (36,0) over, er området markeret med rødt. Med vores viden om konvekse funktioner, kan vi grafisk bestemme at de bundter som Ambrose foretrækker til (1,16) er et **konvekst sæt**. Dette gælder da alle kombinationer af x_1 og x_2, som Ambrose foretrækker over (1,16) vil give ham højere nytte end indifferenskurven $x_2 = 20 - 4\sqrt{x_1}$. Dette er området markeret med blåt.



Vi kan også bestemme dette analytisk. For en konveks funktion gælder:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad \text{for alle} \quad t \in [0, 1]. \tag{1}$$

Hvilket indebær, at hvis en linje imellem hvilke som helst to punkter på grafen for funktionen er over eller på grafen, så kaldes funktionen konveks. I

Varian (2010) (og til forelæsning) er dette forklaringen på at gennemsnit er foretrukket fremfor ekstremer. Intuitionen er relativt ligefrem, venstresiden er den givne funktion skaleret med t. Højresiden er derimod et gennemsnit af to punkter på funktionen (og derfor en linje). En funktion er altså konveks, når en hvilken som helst blanding af to punkter (goder for indifferenskurver) er foretrukket. Hvordan ser dette ud for en ret linje (perfekte substitutter)?

At en funktion er konveks implicerer også at den har et lokalt minimum. Dette kan vises at holde for (1), men lad det bare være givet. Vi kan derfor vise, at bundterne er et konvekst sæt, hvis den dobbeltafledte er ikke-negativ. Derfor:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -2x_1^{-0.5}$$
$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial x_1^2} = -0.5 \cdot -2x_1^{-0.5-1} = x_1^{-1.5} = \frac{1}{x_1^{1.5}}, \quad \text{for} \quad x_1 \neq 0$$

Vi har nu vist, at bundterne er et konvekst sæt for alle $x_1 > 0$.

(c) Hvad er hældningen på Ambroses indifferenskurve i punktet (9,8)?

Løsning

Vi udleder et generelt udtryk:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -2x_1^{-0.5} = -\frac{2}{\sqrt{x}} \tag{2}$$

Hvor vi indsætter $(9, 8)$ og finder $-\frac{2}{\sqrt{9}} = -\frac{2}{3}$.

(d) Hvad er hældningen på hans indifferenskurve i punktet (4,12)? Hvad med i (9,12)? Og i punktet (4,16)?

Løsning

Vi indsætter (4,12) i (2) og finder -1. Det samme gøres for (9,12) og (4,16), hvor vi får $-\frac{2}{3}$ og -1, henholdsvis.

(e) Udviser de indifferenskurver du har tegnet for Ambrose et aftagende marginalt substitutionsforhold?

Løsning

Vi kan udlede dette direkte af (2). For voksende værdier af x_1 må det gælde af den partielt afledte bliver mindre. Formelt, for $x_1 \to \infty$ vil $\frac{\partial x_2}{\partial x_1} \to 0$. Svaret er altså ja, vores indifferenskurver udviser et aftagende marginalt substitutionsforhold.

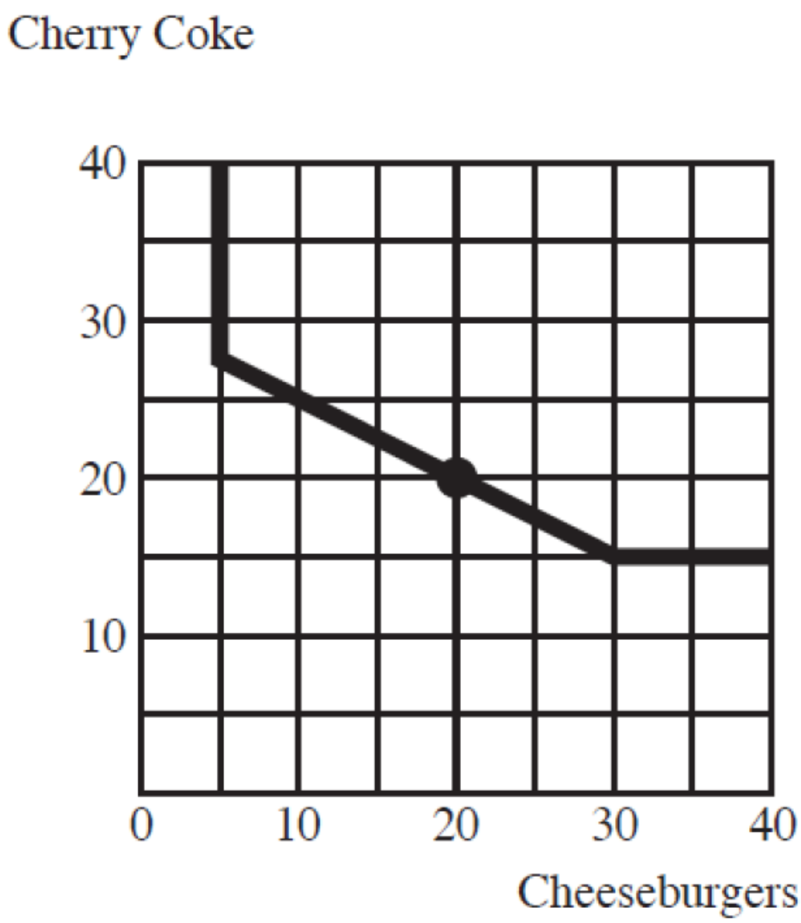
(f) Har Ambrose konvekse præferencer?

Løsning

Ja, idet $\frac{\partial^2 x_2}{\partial x_1^2} \geq 0$. Se (b) for uddybning.

Opgave 2

Henry Hanover forbruger i øjeblikket 20 cheeseburgere og 20 Cherry Cola'er om ugen. En typisk indifferenskurve for Henry er repræsenteret ved nedenstående:



(a) Hvis nogen tilbød Henry at bytte en ekstra cheeseburger for hver Cola han opgav, ville Henry så tage imod?

Løsning

Vi bestemmer MRS ved at aflæse nogle punkter på grafen:

$$MRS = \frac{x_{21} - x_{11}}{x_{22} - x_{12}} = \frac{25 - 15}{10 - 30} = \frac{10}{-20} = -\frac{1}{2}.$$

Dette betyder, at Henry Hanover værdsætter en cheeseburger halvt så meget, som en Cherry Cola. Med andre ord, skal Henry kompenseres med to cheeseburgere for hver Cola han giver afkald på, for stadigt at være indifferent. Derfor vil han **ikke** tage imod dette tilbud.

(b) Hvad nu hvis det var den anden vej rundt; for hver cheeseburger Henry giver afkald på, modtager han en ekstra cola. Vil han acceptere dette tilbud?

Løsning

Da bytteforholdet tilbudt er højere end Henrys egen værdisætning (MRS), vil han **gerne** tage imod dette tilbud.

(c) Ved hvilket bytteforhold ville Henry være villig til at forblive på hans nuværende forbrugs niveau?

Løsning

Dette fandt vi allerede ud af i (a). Henry Hanover vil gerne have to cheeseburgere for hver Cherry cola. Det er altså først ved dette bytteforhold at Henry vil forblive på hans nuværende forbrugs niveau.

Opgave 3

(a) Hvad forstås ved en indifferenskurve? Hvorfor arbejder vi med denne kurve?

Løsning

En indifferenskurve er et forhold hvor individet er akkurat lige tilfreds med alle de forskellige kombinationer af goder.

(b) Kan indifferenskurver krydse hinanden? Begrund dit svar.

Løsning

Nej, da rangordningen er invariant til transformationer.

(c) Hvorfor har vi antagelsen om transitivitet? Opskriv dine præferencer for følgende varebundter, og se om de opfylder antagelsen om transitivitet.

	A	B	C	D
Antal æg	2	1	1	0
Antal skiver bacon	5	2	0	2
Antal små pølser	0	5	7	3
Antal skiver lyst brød	1	5	2	1

Løsning

Transitivitet sikrer, at indifferenskurverne ikke krydser. Dette er relativt essentielt, da man ellers risikerer *moneypumps*. Et eksempel på en rangordning kunne være: $A \succ B \succ D \succ C$.

(d) Indtegn dine egne præferencer for varerne:

- Øl og snaps
- Coca cola og Pepsi
- Kaffe og sukker
- Øl og cigaretter
- Tid brugt på TV om aftenen og tid brugt på at studere

(e) Hvad forstås ved det marginale substitutionsforhold, MRS? Giv både en verbal og en grafisk besvarelse.

Løsning

MRS er hældningen på en indifferenskurve i et givent punkt. Det er således ens private bytteforhold mellem to goder ved en given allokering, hvorimod prisforholdet kan anskues som markedets bytteforhold.

(f) Hvad er MRS, hvis præferencerne er sådan, at x_1 og x_2 er:

- perfekte substitutter,
- perfekte komplementer?

Løsning

For *perfekte substitutter* er indifferenskurven en ret linje, da man er villig til at bytte mellem de to varer én-for-én. Marginalnytten af hvert gode er altså ens.

For *perfekte komplementer* er hældningen ikke defineret, da funktionen ikke er differentiabel.

(g) Hvad kan siges om MRS, hvis indifferenskurverne er konvekse?

Løsning

Hvis vores indifferenskurver er strengt konvekse så har vi aftagende marginal nytte. Dette indebær, at forbrugeren får relativt mindre nytte af flere goder x_1, jo flere vedkommende i forvejen har. Bemærk, at dette kun gælder for *strengt* konvekse indifferenskurver. Tænk på perfekte substitutter. Her er vores indifferenskurve også (svagt) konvekst, da det er en ret linje, men her vil forbrugeren ikke udvise aftagende marginalnytte, da MRS er konstant.

Opgave 4

(a) Hvad forstås ved en nyttefunktion?

Løsning

En nyttefunktion er en repræsentation af præferencer, der sikrer at noget foretrukket for også har en højere numerisk værdi. Altså, at når $x \succ y$ så er $u(x) > u(y)$.

(b) En positiv monoton transformation af en nyttefunktion repræsenterer de samme præferencer. Hvorfor?

Løsning

Når en transformation er positivt monoton ændres rangordningen af præferencer ikke. Desuden ændrer de afledte ikke fortegn.

(c) Der er givet følgende nyttefunktion $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Hvilke af nedenstående nyttefunktioner repræsenterer de samme præferencer?

- $v(x_1, x_2) = \ln(u(x_1, x_2)) = \ln(x_1, x_2)$
- $v(x_1, x_2) = (u(x_1, x_2))^2 = (x_1 x_2)^2$
- $v(x_1, x_2) = A(u(x_1, x_2)) = A(x_1 x_2)$, hvor $A > 0$
- $v(x_1, x_2) = B(u(x_1, x_2)) = B(x_1 x_2)$, hvor $B < 0$

Løsning

Det er kun den *sidste* transformation, som ikke er positivt monoton.

Opgave 5

En forbruger har følgende nyttefunktion: $u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$.

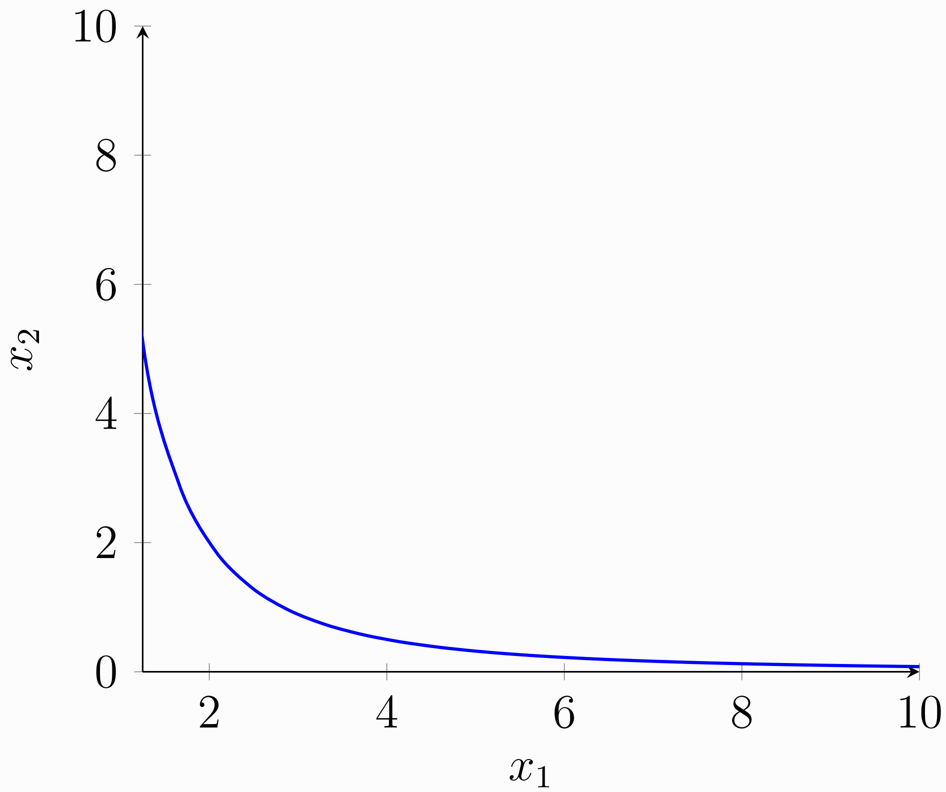
(a) Indtegn indifferenskurven der går gennem punktet (2,2) og angiv nytteniveauet.

Løsning

Vi bestemmer først nytteniveauet for (2,2):

$$u(2,2) = 2^2 \cdot 2 = 8.$$

Vi kan da indtegne vores indifferenskurve.



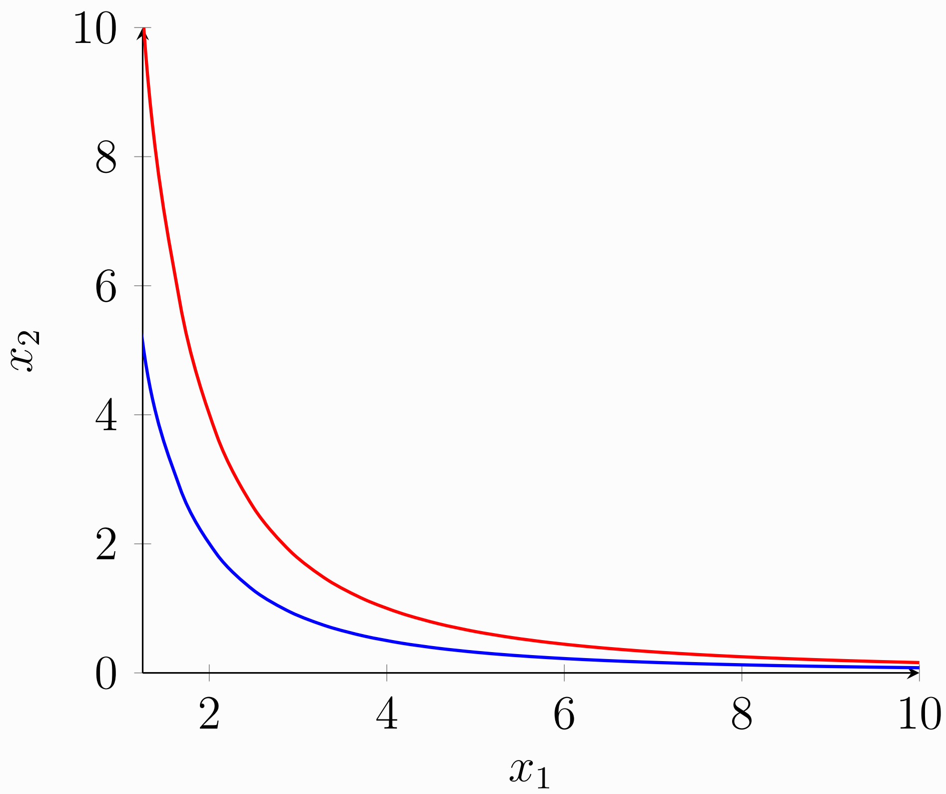
(b) Indtegn indifferenskurven der går gennem punktet (2,4) og angiv nytteniveauet.

Løsning

Vi gør det samme som før:

$$u(2,4) = 2^2 \cdot 4 = 16,$$

og kan da tegne vores nye indifferenskurve.



En anden forbruger har nyttefunktionen: $u(x_1, x_2) = x_1\sqrt{x_2}$.

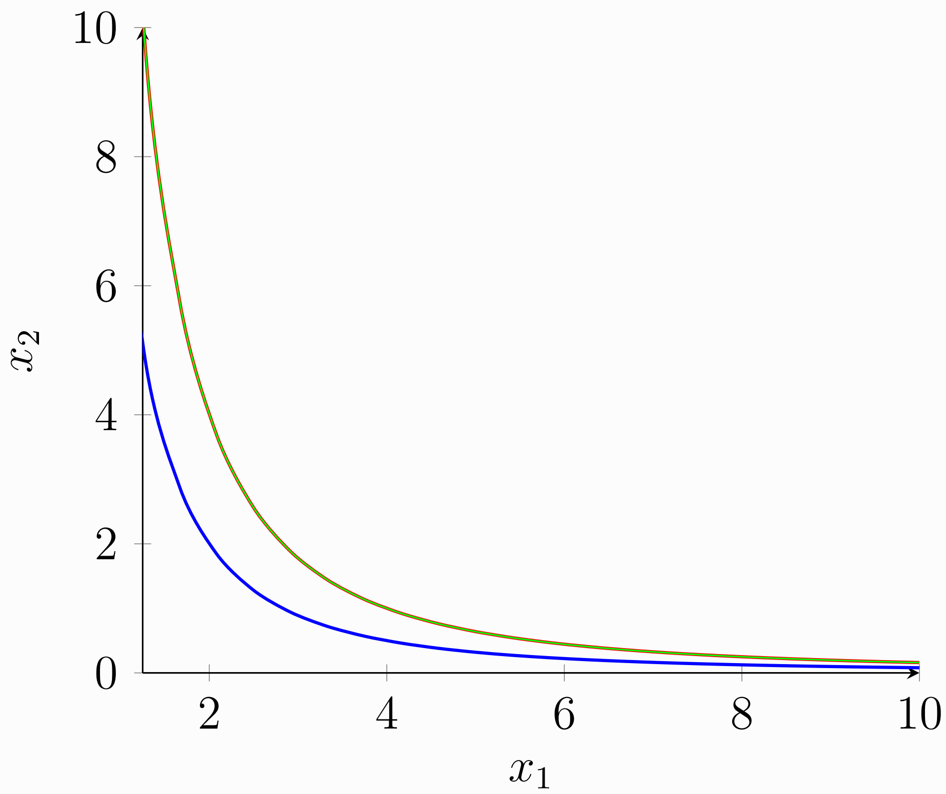
(c) Indtegn indifferenskurven der går gennem punktet (2,4) og angiv nytteniveauet.

Løsning

Vi bestemmer igen nytteniveauet først:

$$u(2,4) = 2 \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4,$$

og indtegner i figuren fra før.



Som det ses af de figuren lader de til at være ens.

(d) Udled ligningerne for indifferenskurverne for de to nyttefunktioner.

Løsning

Lad k angive et givent nytteniveau. Vi løser først $k = x_1^2 x_2$ for x_2:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{k}{x_1^2} \\ x_2 &= k\frac{1}{x_1^2}. \end{aligned}$$

Dernæst for $k = x_1\sqrt{x_2}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x_2} &= \frac{k}{x_1} \\ x_2 &= \left(\frac{k}{x_1}\right)^2 \\ &= k^2\frac{1}{x_1^2}. \end{aligned}$$

(e) Hvad kan vi sige om de to forbrugeres præferencer?

Løsning

Deres præferencer er ens. De to nyttefunktioner er nødvendigvis bare positive monotone transformationer af hinanden.

Opgave 6

(a) Betragt nyttefunktionen $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$. Find MRS mellem vare 1 og vare 2 ved hjælp af de to varers grænsenytter.

Løsning

Vi bestemmer MU_1:

$$MU_1 = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \cdot x_1^{-0.5} \cdot x_2^{0.5} = \frac{x_2^{0.5}}{2x_1^{0.5}} = \frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}}.$$

Da funktionen er symmetrisk må $MU_2 = \frac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}$. Vi bestemmer så MRS:

$$\begin{aligned}\frac{MU_1}{MU_2} &= \frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} \Big/ \frac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}} = \frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} \cdot \frac{2\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} \\ &= \frac{\sqrt{x2}\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}\sqrt{x_1}} = \frac{x_2}{x_1}.\end{aligned}$$

(b) Betragt nyttefunktionen $u(x_1, x_2) = 1/2 \ln(x_1) + 1/2 \ln(x_2)$. Find MRS mellem vare 1 og vare 2 ved hjælp af de to varers grænsenytter.

Løsning

Vi bestemmer MRS på samme måde som før:

$$MU_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{1}{2x_1}$$

Ved symmetri er det givet: $MU_2 = \frac{1}{2x_2}$. Vi bestemmer MRS:

$$\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{1}{2x_1} \Big/ \frac{1}{2x_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

(c) Hvorfor er MRS i a) og b) ens?

Løsning

Nyttefunktionerne er positive monotone transformationer:

$$\begin{aligned}\ln(u(x_1, x_2)) &= \ln(x_1^{0.5} x_2^{0.5}) = \ln(x_1^{0.5}) + \ln(x_2^{0.5}) \\ &= 1/2 \ln(x_1) + 1/2 \ln(x_2).\end{aligned}$$

2 Nytte og præferencer (fortsat)

Baseret på kapitel 1-5 i Varian (2019). De handler om nytte, præferencer, budget og valg.

Opgave 1

Ambrose, forbrugeren af nødder og bær fra Opgavesæt 1,har en nyttefunktion $U(x_1, x_2) = 4\sqrt{x_1} + x_2$, hvor x_1 er hans forbrug af nødder og x_2 er hans forbrug af bær.

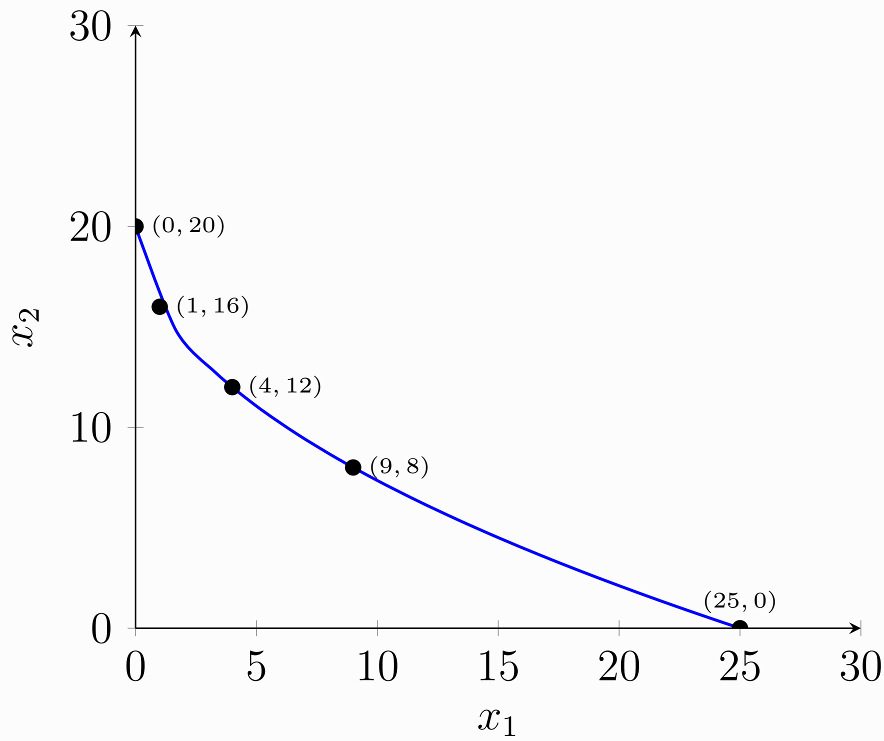
(a) Bundet af goder (25,0) giver Ambrose en nytte på 20. Andre punkter, der giver ham samme nytte er (16,4), (9, _____), (4, _____), (1, _____) og (0, _____). Plot disse punkter i et diagram med (x_1, x_2) ud af akserne.

Løsning

Først bestemmer vi nytteniveauet for (25,0) ved at indsætte i den givne nyttefunktion $4 \cdot \sqrt{25} + 0 = 20$. Vi kan nu løse nyttefunktionen $4\sqrt{x_1} + x_2 = 20$ for x_2:

$$x_2 = 20 - 4\sqrt{x_1}.$$

Vi indsætter herefter de givne værdier af x_1 og finder punkterne (9,8), (4,12), (1,16) og (0,20).



(b) Forestil jer, at prisen for en enhed nødder er 1, prisen for en enhed bær er 2 og Ambroses indkomst er 24. Tegn Ambroses budgetlinje. Hvor mange enheder nødder vælger han at købe? Hvad med bær?

Løsning

Vi bestemmer Ambroses budgetbegrænsning ved at løse for x_2:

$$m = p_1x_1 + p_2x_2$$

$$\Rightarrow m - p_1x_1 = p_2x_2$$

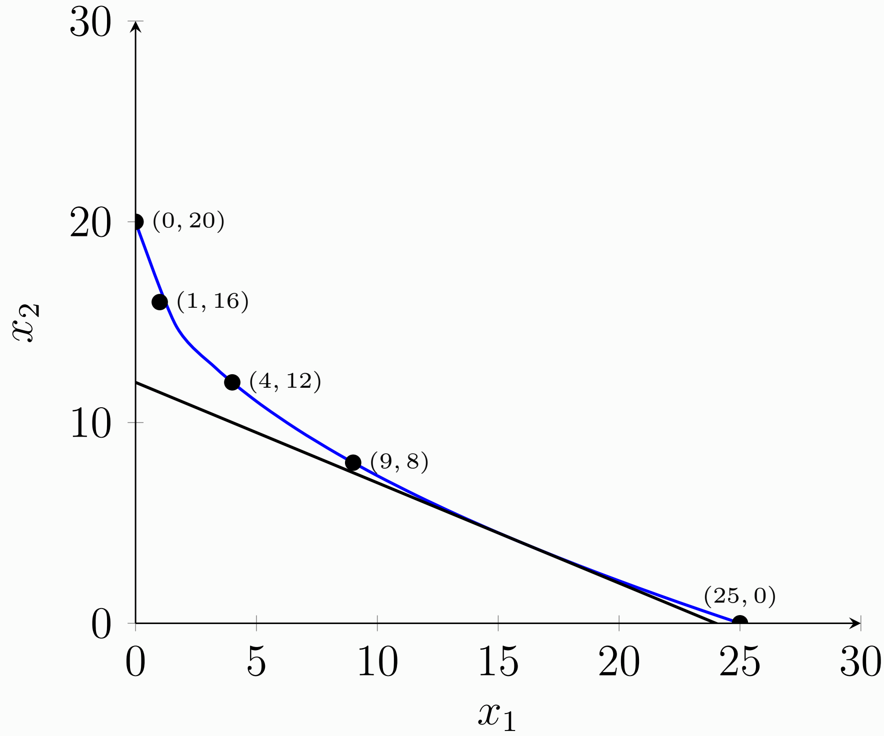
$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1,$$

hvor $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ og $m = 24$:

$$\frac{24}{2} - \frac{1}{2}x_1 = x_2$$

$$x_2 = 12 - \frac{1}{2}x_1,$$

eller $x_1 = 24 - 2x_2$. Vi kan da indtegne Ambroses budgetbegrænsning i figuren fra før.



Vi kan bestemme mængden af nødder og bær Ambrose vælger at forbruge, ved at benytte vores optimalitetskriterie:

$$MRS = \frac{p_1}{p_2}.$$

Vi bestemmer derfor først MRS:

$$MRS = -\frac{MU_1}{MU_2} = -\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\left(-\frac{2}{\sqrt{x_1}}\right) = \frac{2}{\sqrt{x_1}}.$$

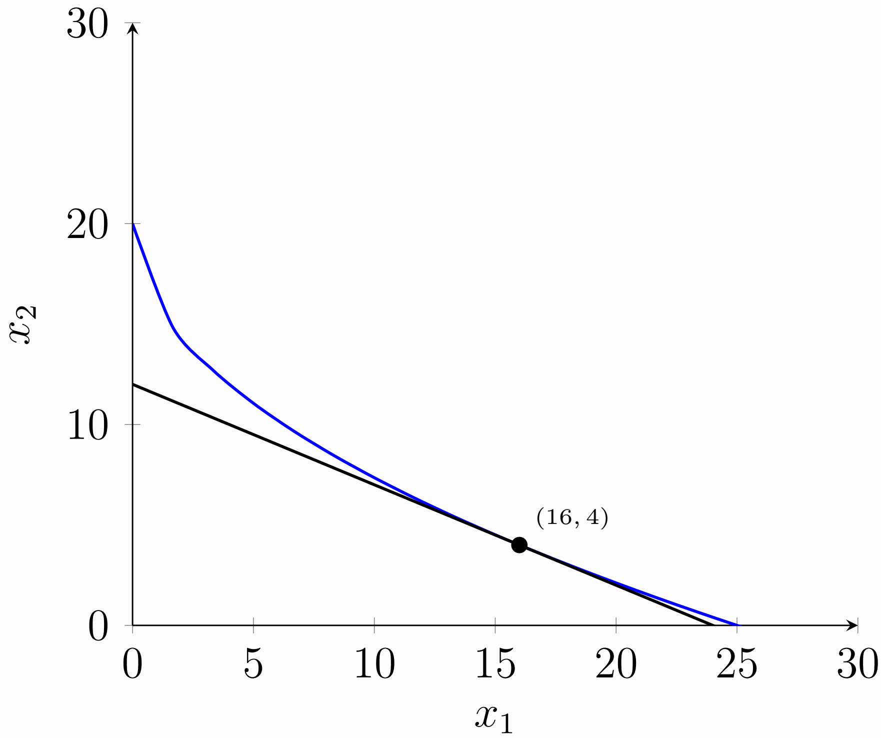
Hvilket vi sætter lig prisforholdet, når $p_1 = 1$ og $p_2 = 2$ og løser for x_1:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{x_1}} &= \frac{1}{2} \\ 2 &= \frac{1}{2}\sqrt{x_1} \\ \sqrt{x_1} &= 4 \\ x_1 &= 4^2 = 16. \end{aligned}$$

Ambrose forbruger altså 16 enheder nødder i sit optimale punkt. Så mangler vi bare at bestemme x_2, som lettest findes ved at indsætte $x_1 = 16$ i budgetbegrænsning:

$$x_2 = 12 - \frac{1}{2} \cdot 16$$
$$x_2 = 4.$$

Ambrose forbruger altså $(x_1, x_2) = (16, 4)$ med givne budgetbegrænsning. Dette lader også til at passe når vi kigger på figuren:



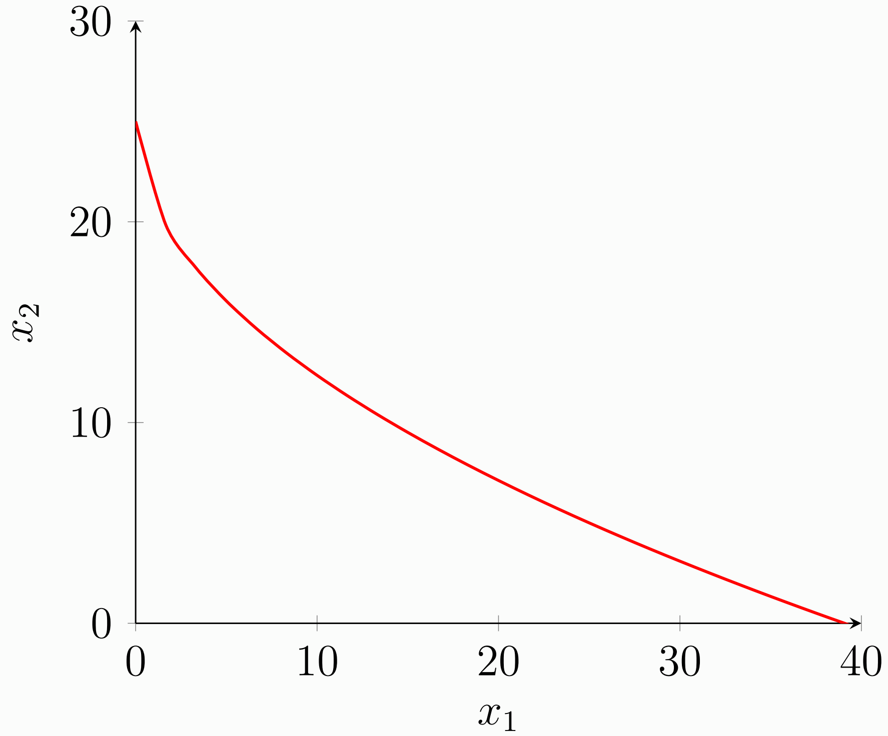
(c) Find nogle punkter på den indifferenskurve, som giver ham en nytte på 25 og indtegn denne i et diagram.

Løsning

Vi indsætter 25 og bestemmer den dertilhørende indifferenskurve:

$$u(x_1, x_2) = 25 = 4\sqrt{x_1} + x_2$$
$$\Rightarrow x_2 = 25 - 4\sqrt{x_1},$$

som vi så kan indtegne



(d) Forestil dig nu i stedet, at Ambroses indkomst er 34, mens priserne forbliver det samme. Hvor mange enheder af nødder vil han købe? Hvor mange bær?

Løsning

Vi ved at MRS er uændret for den nye indifferenskurve, da det bare er en parallelforskydning opad. Derfor vil han forbruge samme mængde x_1, netop 16 enheder nødder. Derimod vil hans forbrug af bær øges:

$$x_2 = 25 - 4\sqrt{x_1} \Rightarrow x_2 = 25 - 4\sqrt{16} = 9.$$

Ambrose vil altså købe 9 enheder bær.

(e) Nu skal vi udforske det vi kalder en "hjørneløsning". Forestil dig stadigt at prisen på en enhed nødder er 1 og prisen på bær er 2, men Ambroses indkomst er nu kun 9. Tegn hans budgetlinje. Skitser den indifferenskurve, der går igennem punktet (9,0). Hvad er hældningen på hans indifferenskurve i punktet (9,0)?

Løsning

Vi bestemmer på ny nytteniveauet (og derved indifferenskurven), som passerer igennem (9,0) for $u(x_1, x_2) = 4\sqrt{9} + 0$:

$$u(x_1, x_2) = 12 = 4\sqrt{x_1} + x_2$$
$$\Rightarrow x_2 = 12 - 4\sqrt{x_1},$$

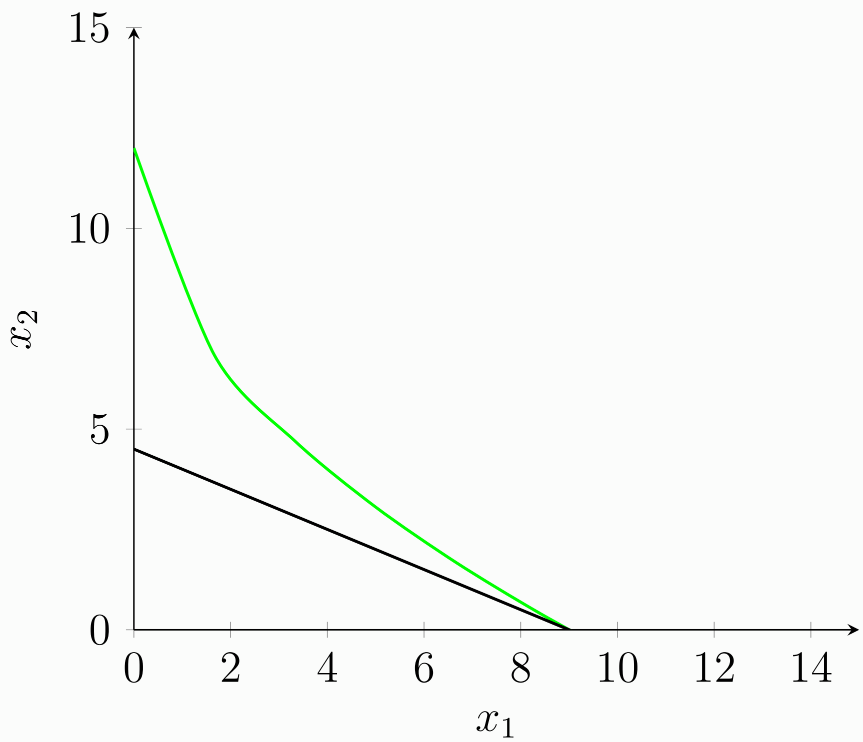
som vi på ny indtegner sammen med den nye budgetbegrænsning:

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$
$$\Rightarrow x_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} x_1 = 4.5 - \frac{1}{2} x_1.$$

Vi kan så bestemme hældningen på Ambroses indifferenskurve ved at indsætte (9,0):

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{2}{\sqrt{x_1}}$$
$$\Rightarrow = -\frac{2}{\sqrt{9}} = -\frac{2}{3}.$$

Hældningen er altså stadigt uændret.



(f) Hvad er hældningen på hans budgetlinje? Hvilken er stejlest i dette punkt; indifferenskurven eller budgetlinjen?

Løsning

Vi ved, at hældningen på budgetlinjen er givet ved prisforholdet. Derfor må hældningen nødvendigvis være $-\frac{1}{2}$. I og med, at $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, så er hældningen stejlest på indifferenskurven.

(g) Har Ambrose råd til nogle bundter, som han foretrækker frem for (9,0)?

Løsning

Ved at kigge på figuren, kan vi se at Ambrose **ikke** har råd til nogle bundter, som han foretrækker frem for (9,0).

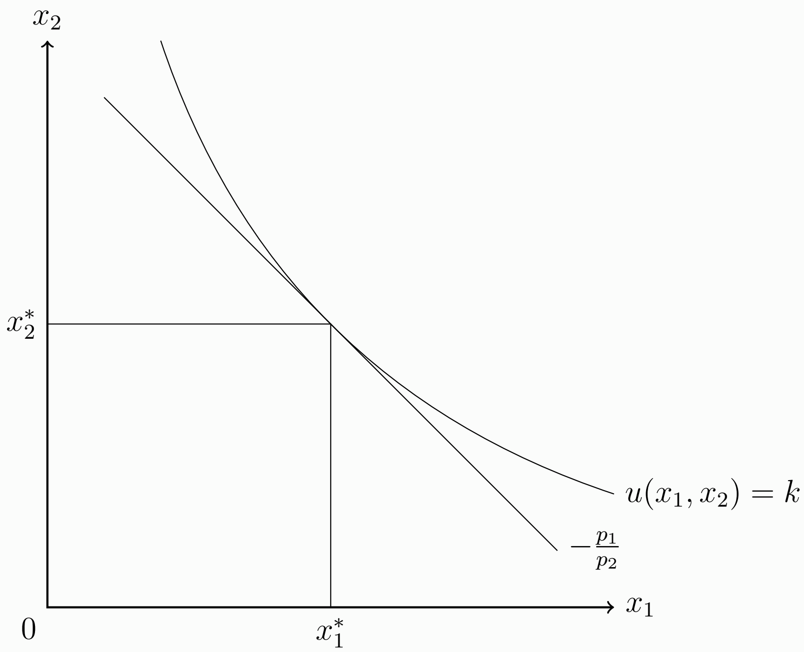
Opgave 2

Antag, at en forbruger har strengt konvekse præferencer. Hans budgetbegrænsning er:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

(a) Antag en arbitrær nyttefunktion. Vis grafisk forbrugerens optimale valg.

Løsning



(b) Der indføres nu en stykskat på vare 1 (x_1). Hvordan ændrer det budgetbegrænsningen? Vis grafisk, hvordan det påvirker forbrugerens optimale valg.

Løsning

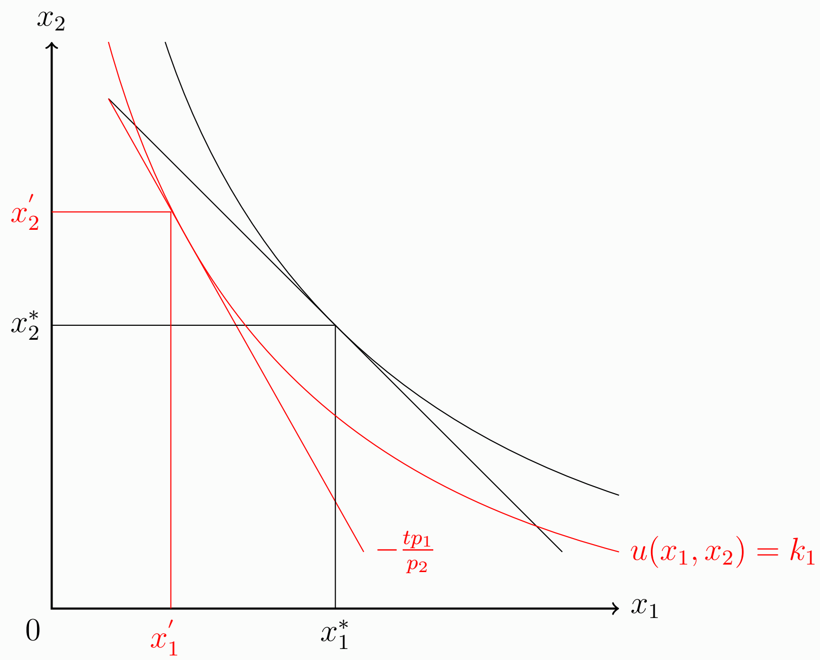
For en given stykskat $t > 1$ på x_1, er budgetbegrænsningen givet ved:

$$m = tp_1x_1 + p_2x_2,$$

hvor vi ved at løse for x_2 kan bestemme hældningen:

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{tp_1}{p_2}x_1.$$

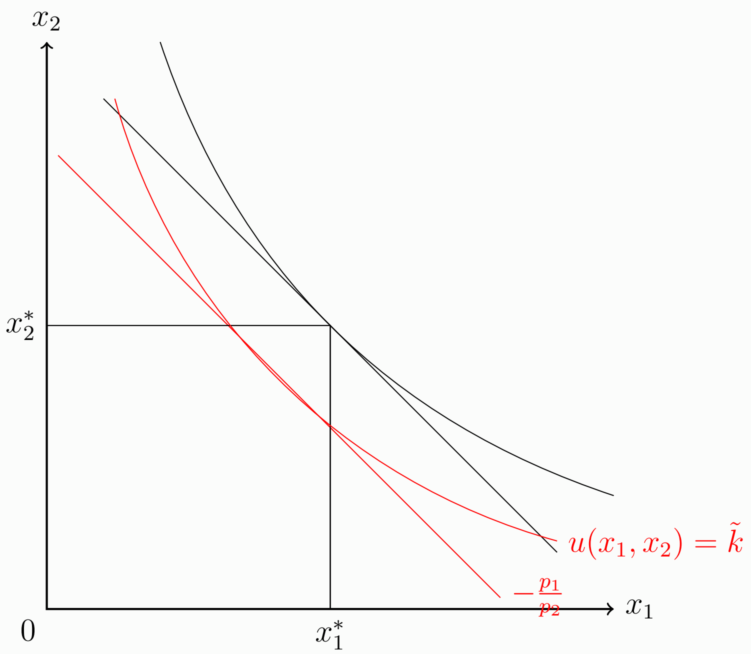
Intuitivt, indebærer stykskatten, at forbrugeren vil købe relativt mindre x_1 og mere x_2. Dette er markeret på nedenstående figur med rød. Bemærk at $x_1^{'} < x_1^*$, $x_2^{'} > x_2^*$, $\frac{tp_1}{p_2} > \frac{p_1}{p_2}$ samt $u(x_1, x_2) = k_1 < u(x_1, x_2) = k_0$.



(c) Stykskatten afskaffes. I stedet indføres en lump-sum-skat af en størrelse, så forbrugeren lige nøjagtigt kan forbruge samme mængde af vare 1 og vare 2, der var optimal med stykskatten. Vil forbrugeren vælge samme optimale varekombination som under stykskatten? Begrund dit svar.

Løsning

Nej, lump-sum skatten ændrer ikke på prisforholdet og derfor vil forbrugeren vælge samme *relative* fordeling som inden stykskatten. Den eneste ændring er at forbrugerens absolutte indkomst mindskes, således at vi befinder os på et lavere nytteniveau, $\tilde{k}$. Til fredagens forelæsning skal I udforske dette nærmere med det vi kalder substitutions- og indkomsteffekter. I figuren er ændringerne markeret med rød.



Opgave 3

Orwell har en ven, der hedder Gershwin. De mødes tit og drikker Gin/Tonics (x_1) eller Sundowners (x_2) ved solnedgangstid. Gershwin køber dog selv drinks for sit budget på m_G og har desuden andre præferencer end Orwell. Disse kan beskrives ved følgende nyttefunktion: $u(x_1, x_2) = x_1^{0.2} \cdot x_2^{0.6}$.

(a) Opskriv den Lagrange-funktion, der kan bruges til at finde Gershwins efterspørgsel efter drinks.

Løsning

Vi står overfor følgende maksimeringsproblem:

$$\max_{u(x_1,x_2)} u(x_1, x_2) = x_1^{0.2} \cdot x_2^{0.6}$$

$$s.t. \quad m_G = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

Lagrangefunktionen for ovenstående maksimeringsproblem er givet ved:

$$\mathcal{L} = x_1^{0.2} \cdot x_2^{0.6} - \lambda \left(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m_G \right), \tag{3.1}$$

Vi bemærker desuden, at de er tale om en Cobb-Douglas nyttefunktion. Lad

$c = 0.2$ og $d = 0.6$. Vi kan så opløfte vores nyttefunktion i $1/(c+d)$'ne potens:

$$u(x_1, x_2)^{\frac{1}{c+d}} = x_1^{\frac{c}{c+d}} x_2^{\frac{d}{c+d}}.$$

Hvis vi yderligere definerer $\alpha = \frac{c}{c+d}$ har vi:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha},$$

hvor α er andelen af sit budget forbrugeren vælger at bruge på x_1. Omvendt er $1 - \alpha$ budgetandelen for x_2. Denne transformation er ofte meget nyttig. Bemærk, at hvis $c + d = 1$ er c og d i sig selv de respektive budgetandele. Hvis vi slutteligt log-transformere får vi:

$$\begin{aligned}\ln(u(x_1, x_2)^{\frac{1}{c+d}}) &= \frac{c}{c+d}\ln(x_1) + \frac{d}{c+d}\ln(x_2)\\ &= \alpha \ln(x_1) + (1-\alpha)\ln(x_2).\end{aligned}$$

Vi kan altså også opskrive vores Lagrangefunktion som:

$$\mathcal{L} = \frac{c}{c+d}\ln(x_1) + \frac{d}{c+d}\ln(x_2) - \lambda\left(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m_G\right).$$

Eller ved at indsætte $c = 0.2$ og $d = 0.6$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{0.2}{0.2+0.6}\ln(x_1) + \frac{0.6}{0.2+0.6}\ln(x_2) - \lambda\left(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m_G\right)\\ &= \frac{1}{4}\ln(x_1) + \frac{3}{4}\ln(x_2) - \lambda\left(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m_G\right) \qquad (3.2)\end{aligned}$$

(b) Find første ordensbetingelserne og løs for λ, x_1 og x_2.

Løsning

Vi bestemmer førsteordensbetingelserne for (3.2):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{1}{4x_1} - \lambda p_1 = 0 \qquad (3.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{3}{4x_2} - \lambda p_2 = 0 \qquad (3.5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -p_1 x_1 - p_2 x_2 + m_G = 0 \qquad (3.6)$$

I stedet for at løse de tre ligninger med tre ubekendte, så gør vi brug af det generelle resultat for Cobb-Douglas nyttefunktioner på side 84 i Varian (2010). Udledningerne findes på side 94-95. For Cobb-Douglas funktioner gælder:

$$x_1^* = \frac{c}{c+d}\frac{m_G}{p_1}$$
$$x_2^* = \frac{d}{c+d}\frac{m_G}{p_2}$$
$$\lambda = \frac{c+d}{m_G}.$$

Ved at indsætte $c = 0.2$ og $d = 0.6$ får vi:

$$x_1^* = \frac{0.2}{0.2+0.6}\frac{m_G}{p_1} = \frac{m_G}{4p_1} \tag{3.7}$$
$$x_2^* = \frac{0.6}{0.2+0.6}\frac{m_G}{p_2} = \frac{3m_G}{4p_2} \tag{3.8}$$
$$\lambda = \frac{0.2+0.6}{m_G} = \frac{0.8}{m_G}. \tag{3.9}$$

(c) Lad $m_G = 200$ mens priserne på x_1 og x_2 er $p_1 = p_2 = 8$. Hvad bliver efterspørgslen efter Gin/Tonics og Sundowners?

Løsning

Vi indsætter værdierne i (3.7), (3.8):

$$x_1^* = \frac{200}{4 \cdot 8} = \frac{200}{32} = 6.25$$
$$x_2^* = \frac{3 \cdot 200}{4 \cdot 8} = \frac{600}{32} = 18.75.$$

Opgave 4

Vores tanker er endnu engang på Ambrose og hans nødder og bær. Ambroses nyttefunktion er $u(x_1, x_2) = 4\sqrt{x_1} + x_2$, hvor x_1 er hans forbrug af nødder og x_2 er hans forbrug af bær.

(a) Lad os finde Ambroses efterspørgsel efter nødder. Hældningen på Ambroses indifferenskurve i (x_1, x_2) er ______________. Ved at sætte denne hældning lig hældningen på budgetbegrænsningen, kan du løse for x_1 uden overhovedet at bruge budgetbegrænsningen. Hvad er efterspørgslen efter x_1?

Løsning

Vi er efterhånden ret bekendte med Ambrose og hans præferencer for nødder og bær. Vi har fundet at Ambroses indifferenskurve er givet ved:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{2}{\sqrt{x_1}}.$$

Vi ved også, at hældningen på budgetbegrænsningen er givet ved prisforholdet. Ved at sætte disse lig hinanden har vi:

$$\frac{2}{\sqrt{x_1}} = \frac{p_1}{p_2},$$

hvor vi løser for x_1:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{x_1}} &= \frac{p_1}{p_2} \\
2 &= \frac{p_1}{p_2}\sqrt{x_1} \\
\frac{2p_2}{p_1} &= \sqrt{x_1},
\end{aligned}$$

hvor vi finder Ambroses efterspørgsel efter x_1:

$$x_1^* = \left(\frac{2p_2}{p_1}\right)^2.$$

(b) Vi vil nu gerne finde Ambroses efterspørgsel efter bær. Modsat før, skal vi nu bruge budgetbegrænsningen. I (a) fandt du efterspørgslen efter x_1. Budgetbegrænsningen dikterer, at $p_1x_1+p_2x_2 = m$. Indsæt løsningen du fandt for x_1 i budgetbegrænsningen og løs for x_2 som en funktion af indkomst og priser. Hvad er efterspørgslen for x_2?

Løsning

Hvis vi løser budgetbegrænsningen for x_2 fås:

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1.$$

Vi indsætter vores udtryk for x_1 og reducerer:

$$x_2^* = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} \cdot \left(\frac{2p_2}{p_1}\right)^2$$
$$x_2^* = \frac{m}{p_2} - \frac{4p_2}{p_1}.$$

(c) Lad $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ og $m = 9$. Hvis du indsætter disse tal i dine svar fra (a) og (b) finder du $x_1 =$ ____________ og $x_2 =$ ____________. I og med vi finder en negativ løsning for x_2, må det gælde at budgetbegrænsningen $x_1 + 2x_2 = 9$ ikke er tangent til en indifferenskurve for $x_2 \geq 0$. Med priser p_1 og p_2 vil Ambrose kun efterspørge en positiv mængde af x_1 og x_2 såfremt m antager hvilke værdier?

Løsning

Vi indsætter og finder $x_1 = 16$ og $x_2 = -3.5$. For at kunne bestemme den minimale værdi af m, der sikrer at $x_2 \geq 0$ skal vi løse følgende:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m,$$

for $x_1 = 16$ og $x_2 = 0$. Dette skyldes, at vi allerede har bestemt, at Ambrose efterspørger 16 x_1 for $x_2 < 0$. Når vi også indsætter $p_1 = 1$ og $p_2 = 2$ fås:

$$16 + 2 \cdot 0 = m$$
$$m = 16.$$

Det vil sige, at $m > 16$ for $x_1 \geq 0$ og $x_2 \geq 0$.

Opgave 5

Jens Otto bruger alle sine penge på guldkarameller og DVD-film. Lad x_1 være en stor pose guldkarameller og x_2 være en DVD-film, og se bort fra at han ikke kan købe halve poser og halve film. Jens Otto har følgende nyttefunktion: $u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$. Prisen på en pose guldkarameller og en DVD-film er henholdsvis p_1 og p_2. Derudover har Jens Otto m penge at købe for.

(a) Vis hvordan (og forklar hvorfor) Jens Otto's præferencer også kan repræsenteres af nyttefunktionen $v(x_1, x_2) = \alpha \ln(x_1) + (1 - \alpha) \ln(x_2)$, hvor α er et "tal" defineret ud fra c og d.

Løsning

Vi bruger samme trick som i Opgave 3, netop de to monotone transformationer $u(x_1, x_2)^{\frac{1}{c+d}}$ og $\ln\left(u(x_1, x_2)^{\frac{1}{c+d}}\right)$:

$$u(x_1, x_2)^{\frac{c}{c+d}} = x_1^{\frac{c}{c+d}} x_2^{\frac{d}{c+d}},$$

hvor vi definerer $\alpha = \frac{c}{c+d}$:

$$x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}.$$

Ved at tage den naturlige logaritme ender vi med det givne udtryk:

$$\begin{aligned} v(x_1, x_2) &= \ln\left(u(x_1, x_2)^{\frac{1}{c+d}}\right) \\ &= \alpha \ln(x_1) + (1 - \alpha) \ln(x_2) \end{aligned}$$

(b) Opskriv den Lagrangefunktion, der kan bruges til at finde Jens Otto's efterspørgsel efter guldkarameller og DVD-film.

Løsning

Vi skal løse følgende maksimeringsproblem:

$$\begin{aligned} \max_{v(x_1,x_2)} v(x_1, x_2) &= \alpha \ln(x_1) + (1 - \alpha) \ln(x_2) \\ s.t. \quad m &= p_1 x_1 + p_2 x_2. \end{aligned}$$

Hvilket svarer til at løse følgende Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L} = \alpha \ln(x_1) + (1 - \alpha) \ln(x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$$

(c) Opskriv ligevægtsbetingelser og find efterspørgslen efter guldkarameller og DVD-film

Løsning

Vi bestemmer førsteordensbetingelserne:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\alpha}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1-\alpha}{x_2} - \lambda p_1 = 0 \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -p_1 x_1 - p_2 x_2 + m = 0 \tag{5.3}$$

Vi kender allerede efterspørgslen, givet at der er tale om Cobb-Douglas nyttefunktioner:

$$\text{Guldkarameller}: \quad x_1^* = \alpha \cdot \frac{m}{p_1}$$

$$\text{DVD - film}: \quad x_2^* = (1-\alpha) \cdot \frac{m}{p_2}$$

(d) Hvis $c = 2$ og $d = 3$, hvor stor en del af indkomsten vil Jens Otto bruge på guldkarameller og DVD-film?

Løsning

Vi husker at $\alpha = \frac{c}{c+d}$:

$$\alpha = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$$

$$1 - \alpha = 1 - \frac{2}{2+3} = \frac{3}{5}.$$

Jens Otto vil altså bruge $\frac{2}{5}$ af sin indkomst på guldkarameller og de resterende $\frac{3}{5}$ på DVD-film.

Opgave 6 (bonus)

Orwell sidder tit og nyder solnedgangen med en drink. Han kan rigtig godt lide Gin og Tonics, men han drikker også andre drinks.

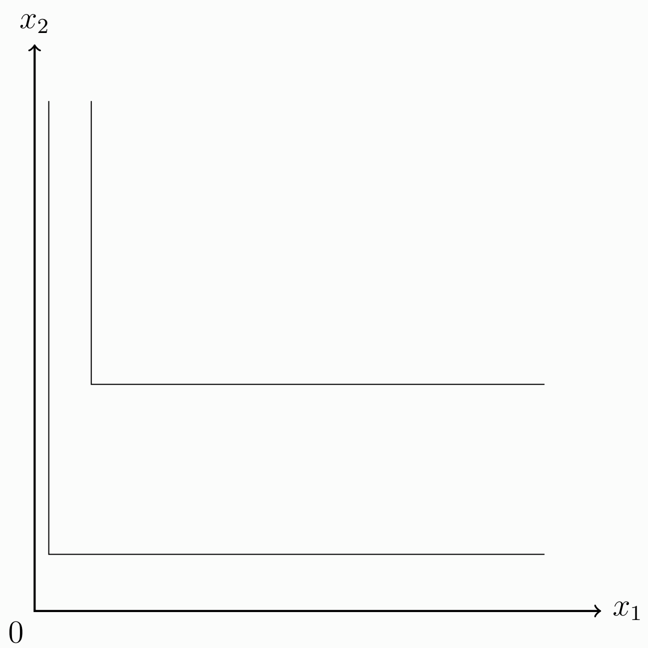
(a) Orwells præferencer for Gin og Tonic kan repræsenteres ved nyttefunktionen: $min\{1/5 \text{ cl. Gin}; 1/20 \text{ cl. Tonic}\}$. Skitser nogle indifferenskurver for Orwell og forklar hans præferencer.

Løsning

Vi bestemmer andelene af x_1 og x_2 for $u(x_1, x_2) = 1$, hvilket implicerer at $1/5 \cdot x_1 \geq 1$ og $1/20 \cdot x_2 \geq 1$. Altså, $1/5 \cdot x_1 = 1/20 \cdot x_2$:

$$x_2 = 4x_1.$$

Vi kan da indtegne vores indifferenskurver:



Hvor hvert hjørne er i forholdet $x_2 = 4x_1$. Det vil sige, at Orwells præferencer for Gin og Tonic er komplementære.

(b) Antag at Orwell bruger et bestemt beløb, $\hat{m}$, på Gin og Tonic hver måned, og find Orwells efterspørgsel efter Gin og Tonic som en funktion af p_g, p_t og $\hat{m}$, hvor p_g er prisen på gin og p_t prisen på tonic.

Løsning

Budgetbegrænsningen er som sædvanligt givet ved:

$$p_g x_1 + p_t x_2 = \hat{m},$$

hvor vi ved at indsætte $x_2 = 4x_1$ kan løse for x_1:

$$\begin{aligned} p_g x_1 + p_t 4x_1 &= \hat{m} \\ x_1(p_g + 4p_t) &= \hat{m} \\ x_1^* &= \frac{\hat{m}}{p_g + 4p_t}. \end{aligned}$$

Vi gør det samme for x_2, og husker at $x_1 = 1/4x_2$.

$$\begin{aligned} p_g \frac{1}{4} x_2 + p_t x_2 &= \hat{m} \\ x_2(\frac{1}{4} p_g + p_t) &= \hat{m} \\ x_2 &= \frac{\hat{m}}{\frac{1}{4} p_g + p_t}. \end{aligned}$$

(c) Lad $p_g = 100$ pr. liter, $p_t = 10$ pr. liter og $\hat{m} = 140$. Hvor mange Gin og Tonics drikker Orwell om måneden?

Løsning

Vi indsætter og finder først x_1:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{140}{100 + 4 \cdot 10} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Dernæst for x_2:

$$\begin{aligned} x_2^* &= \frac{140}{\frac{1}{4} \cdot 100 + 10} \\ &= 4. \end{aligned}$$

Hvis en drink svarer til en nytteenhed - altså 5cl og 20 cl, svarer dette altså til 20 drinks om måneden.

(d) Hvor meget stiger/falder Orwells efterspørgsel på Tonic, hvis p_g falder en krone, med udgangspunkt i ovennævnte priser?

Løsning

Vi indsætter $p_g = 99$:

$$x_2 = \frac{140}{\frac{1}{4} + 10}$$
$$= 4.029.$$

Det vil sige, at efterspørgslen stiger med $4.029 - 4 = 0.29$.

(e) Er Gin og Tonic substitutter eller komplimenter?

Løsning

Komplimenter.

3 Efterspørgsel, substitutions- og indkomsteffekter

Baseret på kapitel 1-6 i Varian (2019). Opdateres løbende med Tikz figurer istedet for de "håndlavede".

Opgave 1

Bestem den inverse efterspørgselsfunktion for hver af de følgende efterspørgselsfunktioner:

(a) $D(p) = \max\{10 - 2p, 0\}$

Løsning

Når vi skriver $\max\{10 - 2p, 0\}$ definerer vi, at $D(p) \geq 0$. Vi skal altså løse for ikke negative værdier af $D(p)$. Husk at $D(p) = q$. Derfor:

$$\begin{aligned} D(p) &= 10 - 2p \\ 2p &= 10 - q \\ p(q) &= 5\frac{1}{2}q, \end{aligned}$$

for $q < 10$.

(b) $D(p) = \frac{100}{\sqrt{p}}$

Løsning

$$\begin{aligned} q\sqrt{p} &= 100 \\ \sqrt{p} &= \frac{100}{q} \\ p(q) &= \frac{10,000}{q^2}. \end{aligned}$$

(c) $\ln D(p) = 10 - 4p$

Løsning

$$\begin{aligned}
\ln(q) + 4p &= 10 \\
4p &= 10 - \ln(q) \\
p &= \frac{10 - \ln(q)}{4}.
\end{aligned}$$

(d) $D(p) = \ln(20) - 2\ln(p)$

Løsning

Vi kan omskrive efterspørgselsfunktionen til:

$$q = \ln\left(\frac{20}{p^2}\right),$$

hvilket vi så tager eksponentialfunktionen til:

$$\begin{aligned}
q &= \exp\left\{\ln\left(\frac{20}{p^2}\right)\right\} \\
q &= \frac{20}{p^2},
\end{aligned}$$

og løser for p:

$$\begin{aligned}
p^2 &= \frac{20}{q} \\
p &= \sqrt{\frac{20}{q}}.
\end{aligned}$$

Opgave 2

Her er nogle øvelser om priselasticiteter. For hver efterspørgselsfunktion skal I finde et udtryk for priselasticiteten, som vil være en funktion af prisen, p. Tænk eksempelvis på den lineære efterspørgselskurve, givet ved $D(p) = 30 - 6p$. Vi kan da bestemme $\frac{\partial D(p)}{\partial p} = -6$ og $\frac{p}{q} = \frac{p}{30-6p}$, sådan at priselasticiteten er $\varepsilon_p = \frac{-6p}{(30-6p)}$.

(a) $D(p) = 60 - p$

Løsning

Lad $D(p) = q$. Priselasticiteten er givet ved:

$$\varepsilon_p = \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{p}{q}.$$

Vi bestemmer derfor først $\frac{\partial q}{\partial p} = -1$. Og indsætter $q = 60 - p$:

$$\varepsilon_p = -1 \cdot \frac{p}{60 - p} = -\frac{p}{60 - p}.$$

(b) $D(p) = a - bp$

Løsning

Vi gør det samme som før og finder:

$$\varepsilon_p = -b \cdot \frac{p}{a - bp} = \frac{-bp}{a - bp}.$$

(c) $D(p) = 40p^{-2}$

Løsning

$$\begin{aligned}
\varepsilon_p &= -2 \cdot 40p^{-3} \cdot \frac{p}{40p^{-2}} \\
&= -80p^{-3} \cdot \frac{p}{40p^{-2}} \\
&= \frac{-80p^{-2}}{40p^{-2}} = \frac{-80}{40} \\
&= -2.
\end{aligned}$$

(d) $D(p) = Ap^{-b}$

Løsning

Efter samme metode som de andre opgaver:

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= -bAp^{-b-1} \cdot \frac{p}{Ap^{-b}} \\ &= \frac{-bAp^{-b-1} \cdot p^1}{Ap^{-b}} = \frac{-bAp^{-b-1+1}}{Ap^{-b}} \\ &= \frac{-bAp^{-b}}{Ap^{-b}} \\ &= -b.\end{aligned}$$

(e) $D(p) = (p+3)^{-2}$

Løsning

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= -2(p+3)^{-3} \cdot \frac{p}{(p+3)^{-2}} \\ &= \frac{-2}{(p+3)^3} \cdot \frac{p}{(p+3)^{-2}} \\ &= \frac{-2p}{(p+3)}.\end{aligned}$$

(f) $D(p) = (p+a)^{-b}$

Løsning

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= -b(p+a)^{-b-1} \cdot \frac{p}{(p+a)^{-b}} \\ &= \frac{-b}{(p+a)^{b+1}} \cdot \frac{p}{(p+a)^{-b}} \\ &= \frac{-bp}{(p+a)}.\end{aligned}$$

Opgave 3

Jens Otto fra Opgave 5 i sidste uges øvelser bruger stadigt alle sine penge på guldkarameller og DVD-film. Lad x_1 være guldkarameller og x_2 være DVD-film. Jens Otto har nyttefunktionen $u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$ eller den lineære variant $v(x_1, x_2) = \alpha \ln(x_1) + (1 - \alpha)\ln(x_2)$, hvor $\alpha = \frac{c}{c+d}$. Vi kender allerede Jens Ottos efterspørgsel efter x_1 og x_2:

$$\begin{aligned} \text{Guldkarameller}: \quad & x_1^* = \alpha \cdot \frac{m}{p_1}, \\ \text{DVD - film}: \quad & x_2^* = (1 - \alpha) \cdot \frac{m}{p_2}, \end{aligned}$$

da der er tale om en Cobb-Douglas nyttefunktion.

(a) Er guldkarameller og DVD-film luksus-varer, nødvendighedsgoder eller ingen af delene for Jens Otto? Kan vi i den forbindelse sige noget specielt om Jens Ottos præferencer?

Løsning

Jens Otto har det vi kalder *homotetiske præferencer*. Dette skyldes, at Cobb-Douglas nyttefunktioner har en konstant *substitutionselasticitet*. Hvis I tænker tilbage, så vil I huske, at α udgjorde budgetandelen brugt på x_1 og $(1 - \alpha)$ er budgetandelen for x_2. I og med at $\alpha = \frac{c}{c+d}$, så er budgetandelen uafhængig af indkomst.

Formelt kan vi beregne indkomstelasticiteten for x_1^* og x_2^* som:

$$\begin{aligned} \varepsilon_d^1 &= \frac{\partial x_1^*}{\partial m} \cdot \frac{m}{x_1^*} \\ \varepsilon_d^2 &= \frac{\partial x_2^*}{\partial m} \cdot \frac{m}{x_2^*}, \end{aligned}$$

hvor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1^*}{\partial m} &= \frac{\alpha}{p_1} \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial m} &= \frac{(1 - \alpha)}{p_2}. \end{aligned}$$

Vi kan så bestemme indkomstelasticiteterne ved at indsætte, først for x_1:

$$\begin{aligned} \varepsilon_d^1 &= \frac{\alpha}{p_1} \cdot \frac{m}{\alpha \cdot \frac{m}{p_1}} \\ &= \frac{\alpha}{p_1} \cdot \frac{m}{\alpha} \cdot \frac{p_1}{m} = 1. \end{aligned}$$

Det samme gøres for x_2:

$$\begin{aligned}\varepsilon_d^2 &= \frac{(1-\alpha)}{p_2} \cdot \frac{m}{(1-\alpha)\cdot\frac{m}{p_2}} \\ &= \frac{(1-\alpha)}{p_2} \cdot \frac{m}{(1-\alpha)} \cdot \frac{p_2}{m} = 1.\end{aligned}$$

Da både $\varepsilon_d^1 > 0$ og $\varepsilon_d^2 > 0$ er der tale om normale goder. Dette betyder, at en stigning i Jens Ottos indkomst vil medføre, at han efterspørger mere x_1 og x_2. Hvis $\varepsilon_d > 1$ er der tale om et luksus gode. Omvendt, hvis $0 < \varepsilon_d < 1$ så har vi at gøre med et nødvendighedsgode. Det vil sige, at godet er et man vil købe uanset sin indkomst. Da Jens Ottos præferencer er homotetiske - og derfor ikke hører under nogle af kategorierne, er der tale om et normalt gode, som hverken er et luksus- eller nødvendighedsgode.

(b) Lad $c = 2$, $d = 3$ og $m = 100$. Tegn Jens Ottos inverse efterspørgselsfunktion efter guldkarameller og DVD-film.

Løsning

Vi husker, at den inverse efterspørgselsfunktion er givet ved $p(q)$. Derfor løser vi for p_1 og p_2 i de efterspørgselsfunktioner vi fik givet indledningsvist. Først for x_1:

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha \cdot \frac{m}{p_1} \\ \Leftrightarrow p_1 &= \alpha \cdot \frac{m}{x_1}.\end{aligned}$$

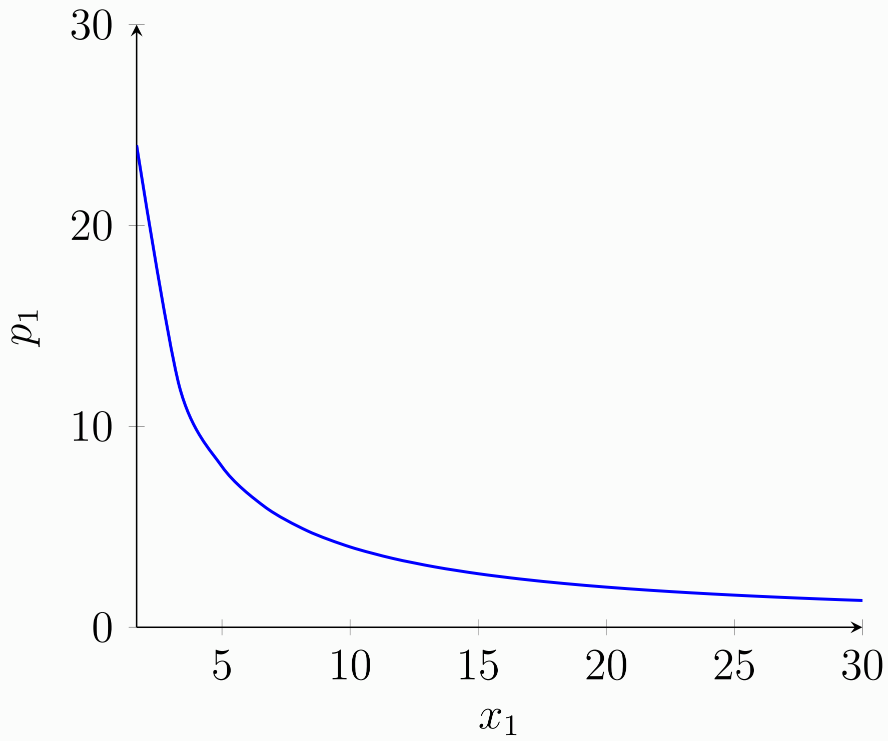
Dernæst for x_2:

$$\begin{aligned}x_2 &= (1-\alpha) \cdot \frac{m}{p_2} \\ \Leftrightarrow p_2 &= (1-\alpha) \cdot \frac{m}{x_2}.\end{aligned}$$

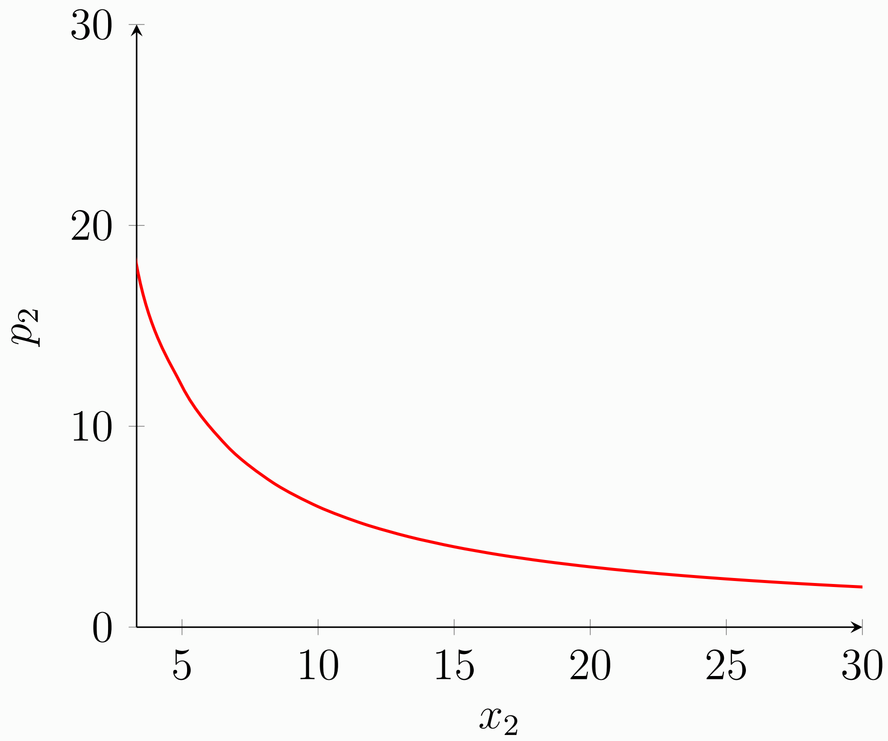
Vi indsætter givne værdier af c, d og m:

$$\begin{aligned}p_1 &= \frac{2}{2+3} \cdot \frac{100}{x_1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{100}{x_1} = \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{x_1}} \\ p_2 &= \frac{3}{2+3} \cdot \frac{100}{x_2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{100}{x_2} = \frac{\mathbf{60}}{\mathbf{x_2}}.\end{aligned}$$

Vi indtegner først for x_1:



Dernæst for x_2:



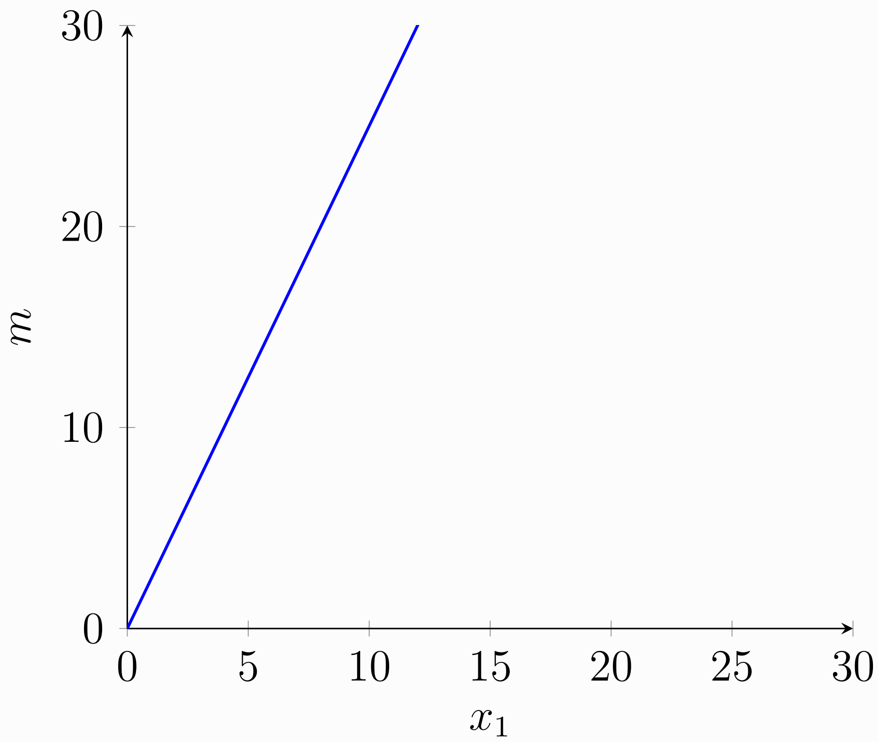
(c) Tegn Jens Ottos engelkurver for guldkarameller og DVD-film når $p_1 = p_2 = 1$.

Løsning

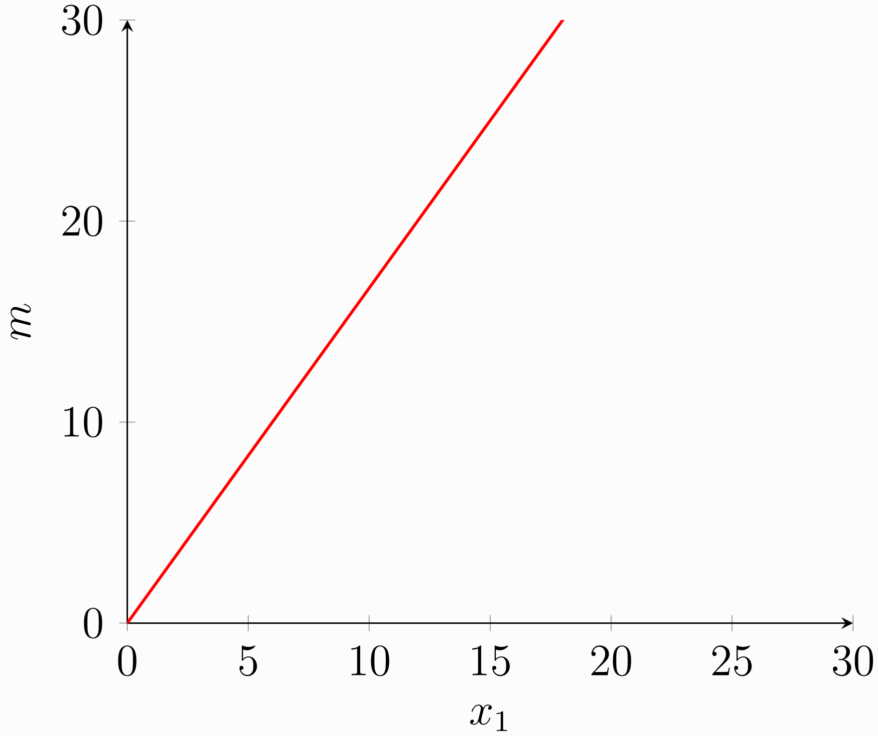
Vi løser for m i begge vores indledende efterspørgselsfunktioner, hvor $c = 2$, $d = 3$ og $p_1 = p_2 = 1$:

$$x_1 = \frac{2}{5} \cdot m \Leftrightarrow m = \frac{5}{2} x_1$$
$$x_2 = \frac{3}{5} \cdot m \Leftrightarrow m = \frac{5}{3} x_2.$$

Hvilket vi så kan indtegne i et diagram. Først for x_1:



Og så for x_2:

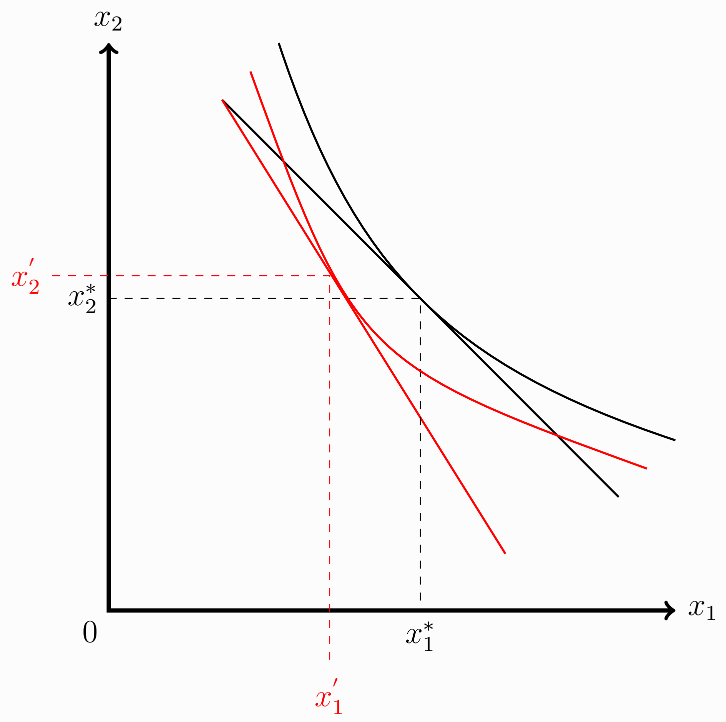


Opgave 4

(a) Illustrer i et varediagram med strengt konvekse indifferenskurver effekten af en relativ prisstigning på x_1.

Løsning

Givet *the Law of Demand* så vil vi forvente et fald i efterspørgslen efter x_1 ved en prisstigning. Intuitivt, kan vi nedbryde substitutions- og indkomsteffekten som følger: Først vil det nye prisforhold forårsage en substitution fra x_1 til x_2. Det relative fald i budgettet, vil forårsage indkomsteffekten. De ændrede faktorer ved prisstigningen er markeret med rød:

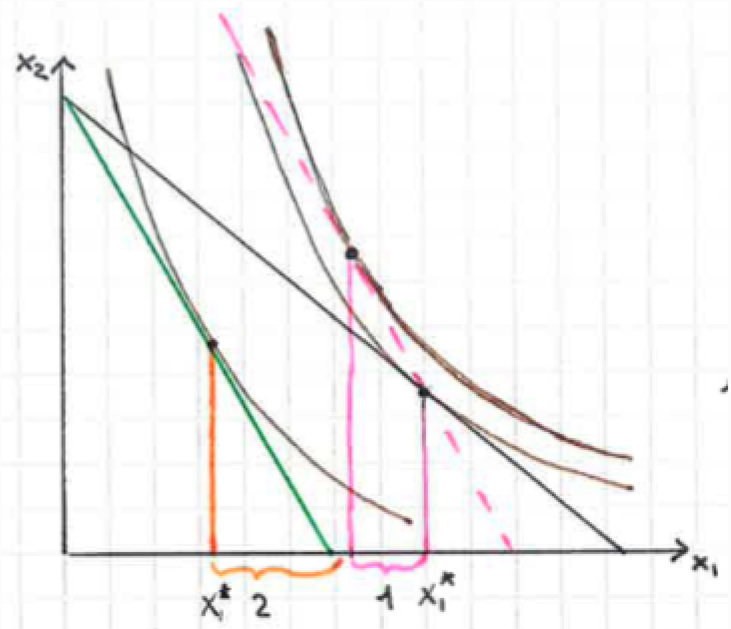


(b) Illustrer Slutsky-substitutionseffekten og indkomsteffekten for denne prisstigning, når x_1 er et ordinært og normalt gode, et ordinært og inferiørt gode og et Giffen gode.

Løsning

Ordinær og normal vare

Vi definerer en ordinær vare som en der har en negativ priselastictet, $\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} < 0$. For at en vare er normal skal det gælde at indkomstelasticiteten er positiv, $\frac{\partial x_1^*}{\partial m} > 0$. Med en negativ priselasticitet, vil en højere pris på x_1 medføre et faldt i efterspørgslen. Samtidigt, medfører en positiv indkomstelasticitet at indkomsteffekten er stor. Ændringerne kan ses af følgende illustration:



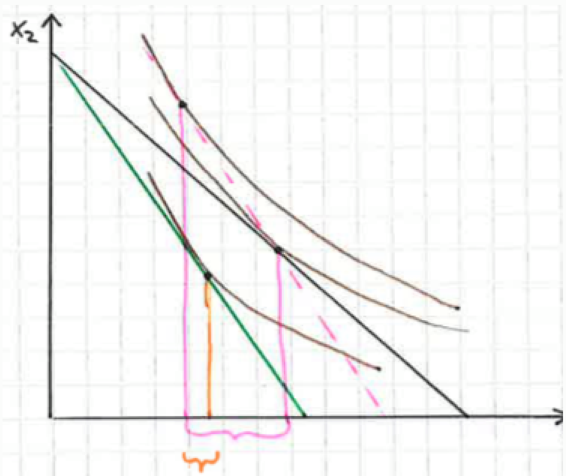
Faldet er således beskrevet i to stadier:

1. Substitutionseffekten, x_1^s, for den kompenseret indkomst. Den er negativ i denne situation.

2. Indkomsteffekten, x_1^m, for den lavere indkomst. Den er negativ i denne situation.

Ordinær og inferiør vare

Det gælder stadigt at priselasticiteten er negativ, $\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} < 0$, da vi har at gøre med et ordinært gode. For inferiøre goder er indkomstelasticiteten negativ, $\frac{\partial x_1^*}{\partial m}$, hvilket indebærer at efterspørgslen falder når indkomsten stiger. Processen er vist i nedenstående figur:



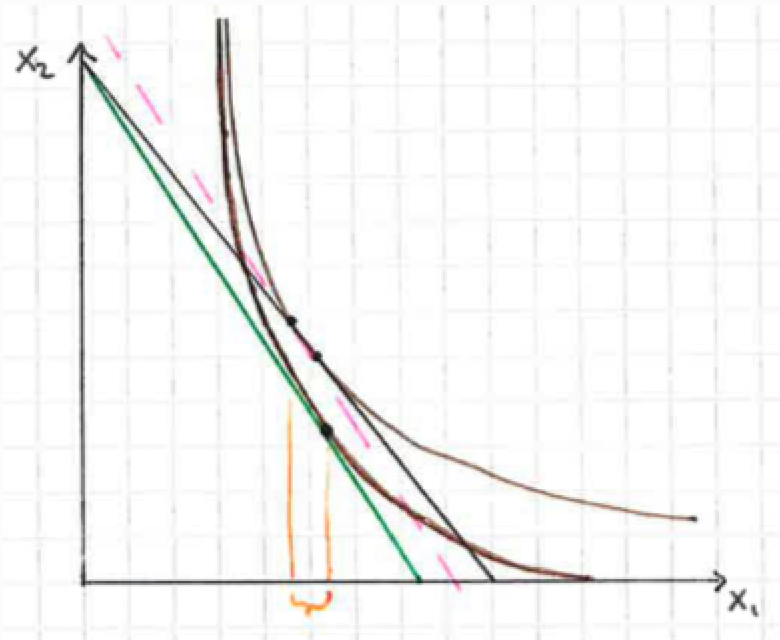
Vi kan da beskrive faldet i efterspørgsel i to stadier:

1. Substitutionseffekten, x_1^s, for den kompenseret indkomst. Den er negativ i denne situation.

2. Indkomsteffekten, x_1^m, for den lavere indkomst. Den er negativ i denne situation.

Giffen gode

For et Giffen gode vil en prisstigning give en samlet stigning i efterspørgslen efter x_1, som det kan ses af nedenstående figur:



Bemærk, at Giffen goder er et meget specifikt (og primært teoretisk) eksempel på et ikke ordinært gode. Min erfaring er, at de er svære at finde i virkeligheden. De er derfor primært en økonomisk kuriositet.

Opgave 5

(a) Indtegn substitutions- og indkomsteffekten ved en prisstigning på x_1 når forbrugeren har følgende nyttefunktioner:

$$u(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \tag{1}$$

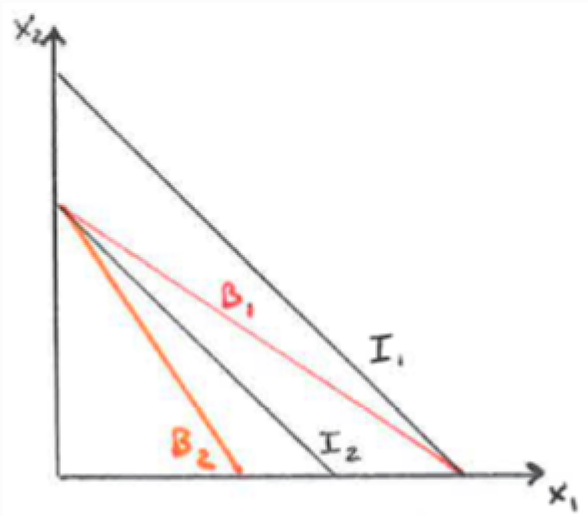
$$u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\} \tag{2}$$

$$u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2. \tag{3}$$

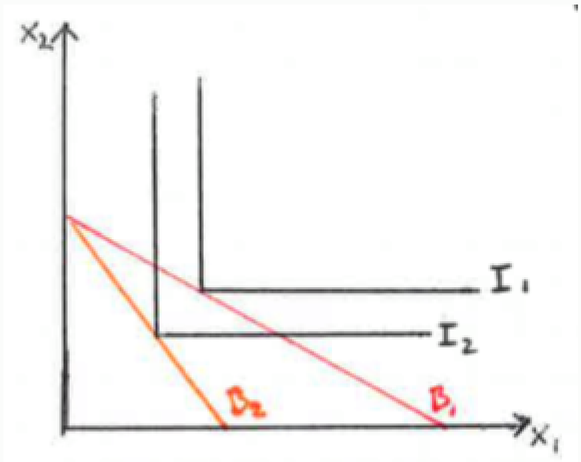
Forklar ligheder og forskelle og hvorfor effekterne bliver som de gør, *ex ante*.

Løsning

1. Ligning (1) er et eksempel på en nyttefunktion, hvor agentens præferencer for de to varer er perfekte substitutter. Derfor er indifferenskurven lineær. For en højere p_1 (og så længe at $p_1 < p_2$), vil vi kun opleve en substitutionseffekt, da forbrugeren frit kan substituere over til x_2. Bemærk, at dette kun gælder for en pris $\tilde{p}_1 > p_2 > p_1$.



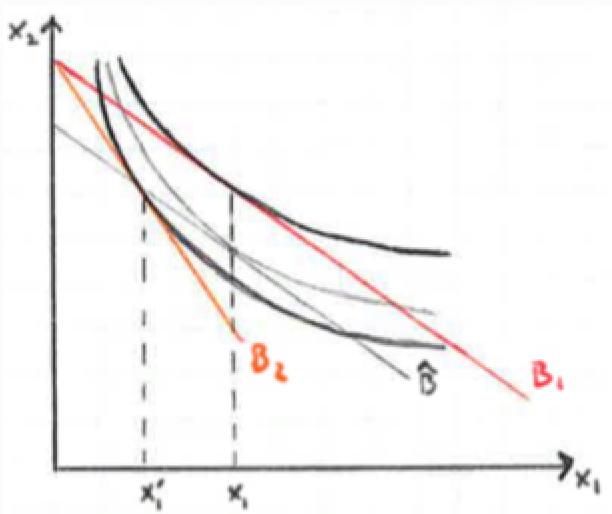
2. Ligning (2) er et eksempel på perfekte komplementer. For en prisstigning for x_1 vil den faldende efterspørgsel skyldes indkomsteffekten, da det ikke giver megen mening at substituere over til x_2 når man bedst nyder goderne sammen. Dette er illustreret i nedenstående:



3. Ligning (3) er et eksempel på en quasi-lineær præferencer. I vil måske huske denne type nyttefunktion fra alle opgaverne med Ambrose og hans nødder og bær. For quasi-lineære præferencer gælder, at indifferenskurverne er vertikal lineære. Det vil sige, at man foretrækker en hvis mængde x_1 og derudover vil bruge resten af sit budget på x_2. Ved en prisændring $\tilde{p}_1 > p_1$ vil vi derfor udelukkende have en substitutionseffekt. Dette ses også af hældningen på indifferenskurven som kun er givet ved x_1:

$$MRS = -\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{v^{'}(x_1)}{1} = v^{'}(x_1)$$

Vi kan illustrere dette som i nedenstående figur:



(b) Betragt en vare, som udgør en meget lille del af et samlede budget (f.eks. Colgate tandpasta). Hvis prisen ændres på Colgate tandpasta, hvilken effekt må så formodes at dominere: Substitutions- eller indkomsteffekten?

Løsning

For en vare, som udgør en lille budgetandel (såsom Colgate tandpasta), vil vi forvente at substitutionseffekten dominerer. Dette skyldes til dels, at mange tætte substitutter eksisterer, hvorfor du nemmere vil kunne vælge andre produkter. I dit valg af produkt er det nok i højere grad prisen på det nye produkt (og ikke din indkomst) der afgør dit valg.

(c) Hvis prisen ændres på en vare, som udgør en stor del af budgettet (f.eks. bolig), vil der så være nogen stor forskel på substitutions- og indkomsteffekten i forhold til situationen, hvor budgetandelen er lille?

Løsning

For en vare der udgør en stor del af dit samlede budget vil vi forvente at indkomsteffekten dominerer. Dette skyldes, at du i langt højere grad vil være begrænset af din indkomst, hvis du eksempelvis skal til at købe hus.

Opgave 6

Jens Ottos far, Lucas, er også vild med guldkarameller og DVD-film. Hans præferencer kan dog beskrives med nyttefunktionen $u(x_1, x_2) = x_1^a + x_2^b$.

(a) Har Lucas monotone præferencer?

Løsning

Monotonicitet indebær, at hvis (x_1, x_2) er et varebundt og (y_1, y_2) er et bundt med mindst lige så meget af begge goder, men mere af en, så er $(y_1, y_2) \succ (x_1, x_2)$. Det må derfor gælde, at præferencer udelukkende er montone, hvis nyttefunktionen er voksende. Dette må svare til, at den første afledte med hensyn til x_1 og x_2 er positiv:

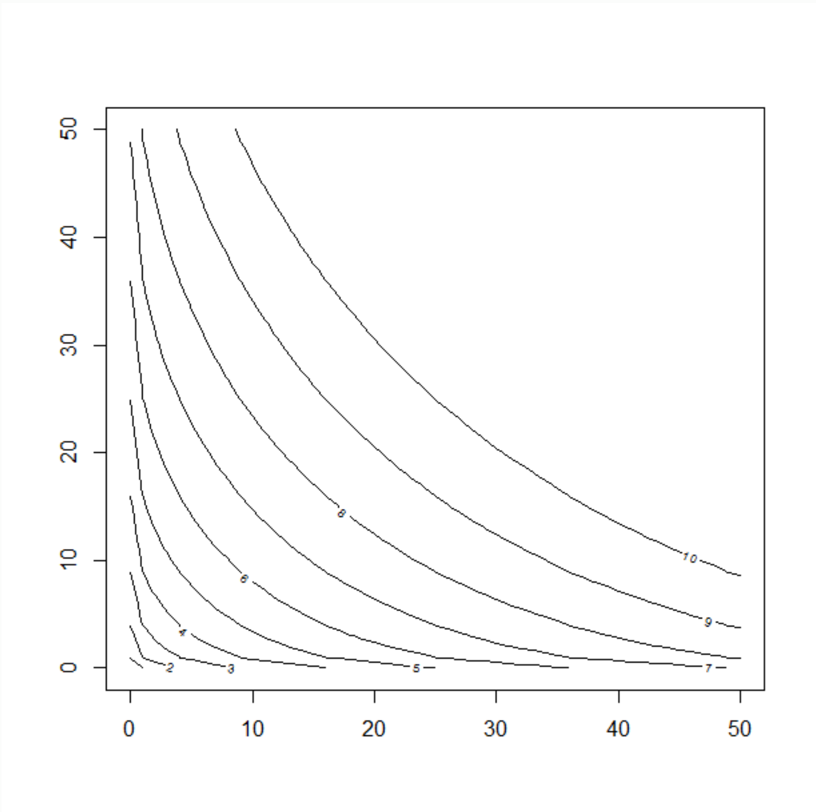
$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = a x_1^{a-1}$$
$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = b x_1^{b-1},$$

hvor det ses at disse må være positive for alle $a, b \geq 0$.

(b) Tegn nogle indifferenskurver for $a = 0.5$ og $b = 0.5$.

Løsning

Vi tegner nogle eksempler på disse indifferenskurver med R: u ¡- function(x,y) x^0.5 $+ y^0.5 x < -seq(0, 50, by = 1) y < -seq(0, 50, by = 1) a < -seq(0, 10, by = 1) contour(x, y, outer(x, y, u), levels = a)$



(c) Er Lucas' præferencer konvekse ved disse værdier?

Løsning

Hvis vi kigger på plottet ovenfor, så er de strengt konvekse. Ellers ville man skulle kigge på den dobbeltafledte.

(d) Lad $a = 0.5$ og $b = 1$. Hvad er indkomst- og substitutionseffekten for guldkarameller når $p_2 = 1$ og p_1 sænkes fra 2 til 1 (forudsat at Lucas' budget er stort nok)?

Løsning

Vi bestemmer optimum ved at sætte MRS lig prisforholdet. Vi bestemmer først MRS:

$$MRS = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}}.$$

Vi sætter lig $\frac{p_1}{p_2}$ og løser for x_1:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x_1}} &= \frac{p_1}{p_2} \\
\frac{p_2}{p_1} &= 2\sqrt{x_1} \\
\sqrt{x_1} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{p_2}{p_1} \\
x_1^* &= \frac{1}{4}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2.
\end{aligned}$$

Vi bemærker, at m ikke indgår i x_1^*. Dette vil betyde, at efterspørgslen efter x_1 kun er afhængig af substitutionseffekten. For $p_1^{'} < p_1$ vil Lucas derfor efterspørge en større mængde x_1. Derfor er Slutsky substitutionseffekten i dette tilfælde givet ved:

$$\Delta x_1^s = x_1(p_1^{'}, p_2) - x_1(p_1, p_2),$$

som vi kan bestemme ved at indsætte $p_1 = 2$ og $p_1^{'} = 1$:

$$\begin{aligned}
\Delta x_1^s &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{10} \\
&= \frac{3}{16}.
\end{aligned}$$

4 Producenten, omkostninger og udbud

Opgaver omkring optimering som producent. Nogle af opgaverne er fra tidligere eksamenssæt, hvorimod nogle er fra Varian (2019).

Opgave 1

Markedet består af to virksomheder med hver deres omkostningsfunktion:

$$\begin{aligned} c_1(y) &= y^2 \\ c_2(y) &= 2y^2. \end{aligned}$$

Find markedsudbuddet.

Løsning

For at kunne bestemme markedsudbuddet, skal vi først finde de enkelte virksomheders udbudskurver. Vi ved, at det sociale optimum findes når $MC_i = p$ og at de enkelte virksomheder ikke har incitament til at sætte en pris lavere end deres marginalomkostning. Vi løser først for $c_1(y)$:

$$\begin{aligned} MC_1 &= 2y = p \\ &\Rightarrow y_1(p) = \frac{1}{2}p. \end{aligned}$$

Dernæst for $c_2(y)$:

$$\begin{aligned} MC_2 &= 4y = p \\ &\Rightarrow y_2(p) = \frac{1}{4}p. \end{aligned}$$

Vi kan nu lægge de to udbudskurver sammen for at bestemme det aggregerede udbud:

$$S(p) = y_1(p) + y_2(p) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}p = \frac{3}{4}p,$$

som svarer til *markedsudbuddet*.

Opgave 2

Markedet består nu af n ens virksomheder, der har omkostningsfunktion:

$$c_j = y^2 + 1,$$

for alle $j = 1, 2, \ldots, n$.

(a) Find markedsudbuddet på kort sigt, som en funktion af antallet af virksomheder.

Løsning

Vi følger det samme princip som før.

$$MC_j = 2y = p$$
$$y_j = \frac{1}{2}p.$$

For n identiske virksomheder må markedsudbuddet derfor være:

$$S(p, n) = n \cdot \frac{1}{2}p \tag{2.1}$$

(b) Tegn markedsudbuddet for $n = 2$ og $n = 4$.

Løsning

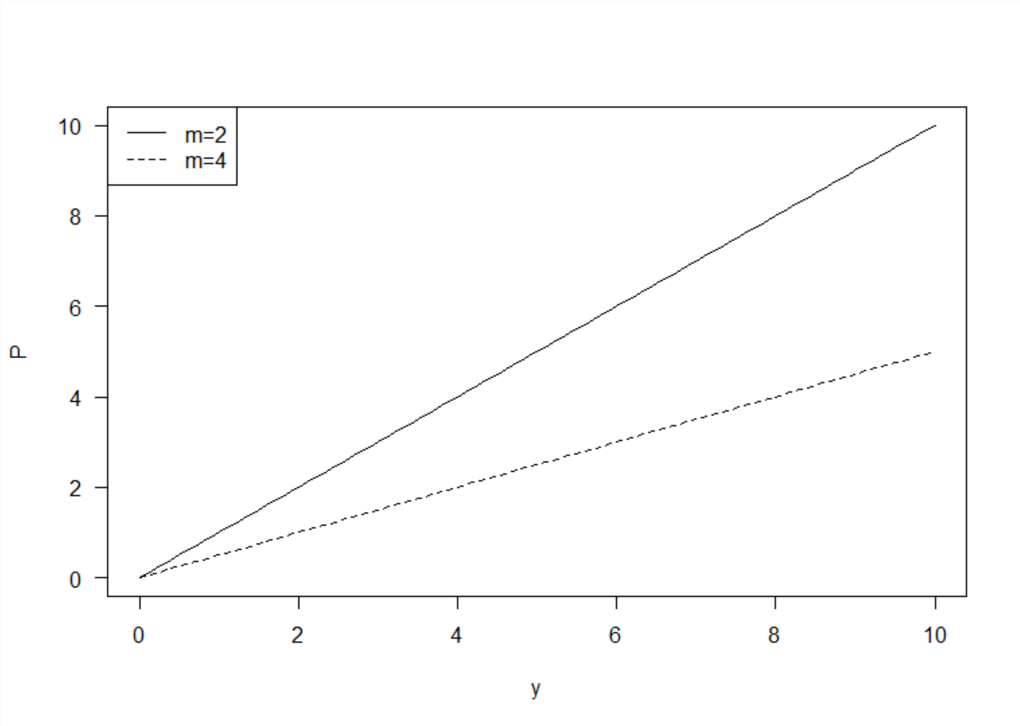
Vi indsætter $n = 2$ og $n = 4$ i (2.1):

$$S(p, n = 2) = y = 2 \cdot \frac{1}{2}p = p$$
$$S(p, n = 4) = y = 4 \cdot \frac{1}{2}p = 2p$$

Vi husker, at vi tegner med p ud af y-aksen. Derfor:

$$p = y$$
$$p = \frac{1}{2}p.$$

Hvilket vi så kan indtegne:



(c) Hvis der er fri adgang på markedet for virksomheden, hvad vil markedsprisen så blive på langt sigt? Husk at de faste omkostninger også skal dækkes på lang sigt.

Løsning

På langt sigt er alle omkostninger variable. Derfor skal vi minimere de totale gennemsnitsomkostninger ATC. Dette gøres ved at sætte disse lig virksomhedens marginalomkostning, $MC = ATC$:

$$\begin{aligned} \frac{y^2+1}{y} &= 2y \\ y^2+1 &= 2y^2 \\ y^2 &= 1 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Alternativt kan vi løse for $\frac{\partial ATC}{\partial y} = 0$, hvilket vil give samme resultat. Vi har da fundet, at hver virksomhed $i = 1, 2, \ldots, n$ vil udbyde 1 på langt sigt. Vi kan så indsætte dette i hver virksomheds udbudsfunktion for at bestemme prisen på langt sigt:

$$p = 2y$$
$$\Rightarrow = 2 \cdot 1$$
$$p = 2.$$

Opgave 3

Vi arbejder videre med udbudsfunktionen fra opgaven ovenfor. Lad efterspørgslen være givet ved:

$$D(p) = a - bp,$$

hvor a og b er parametre.

(a) Find ligevægtsprisen som en funktion af n. Hvad sker der med prisen når antallet af virksomheder (n) vokser?

Løsning

Vi bestemmer ligevægtsprisen ved at sætte markedsudbuddet lig efterspørgslen og løse for p:

$$\begin{aligned} D(p) &= S(p, n) \\ a - bp &= n \cdot \frac{1}{2}p \\ a &= n \cdot \frac{1}{2}p + bp \\ a &= \left(\frac{1}{2}n + b\right)p \\ p &= \frac{a}{\left(\frac{1}{2}n + b\right)}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Af (3.1) kan vi se, at $p \to 0$ for $n \to \infty$. Den intuitive forklaring er også relativt ligefrem; jo flere virksomheder, desto mere konkurrence vil der være på markedet. Virksomheder vil da kæmpe om at kapre en større del af markedet ved at sænke prisen. Forskellige konkurrence former (og typer) er noget vi vil bruge mere tid på den kommende tid.

(b) Før fandt vi hvad prisen vil blive på langt sigt. Nu kan vi regne ud, hvor mange virksomheder der er plads til i denne industri, når vi har et udtryk for efterspørgslen. Find dette antal virksomheder (som en funktion af a og b).

Løsning

Vi sætter igen $D(p) = S(p = 2, n)$ og husker at vi fandt $p = 2$:

$$a - 2b = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2$$
$$n = a - 2b.$$

Opgave 4

Betragt en virksomhed der agerer på et marked, som kan karakteriseres ved fuldkommen konkurrence. Denne virksomheds totale omkostninger på kort sigt (TC^{SR}) og langt sigt (TC^{LR}) er givet ved:

$$TC^{SR}(y) = y^3 - 8y^2 + 25y + 40$$
$$TC^{LR}(y) = y^3 - 6y^2 + 16y,$$

hvor SR og LR angiver hvilken tidshorisont funktionen gælder for.

(a) Udled på både kort og langt sigt virksomhedes totale gennemsnitlige omkostninger, $AC(y)$, gennemsnitlige variable omkostninger, $AVC(y)$, gennemsnitlige faste omkostninger, $AFC(y)$ og marginalomkostninger $MC(y)$.

Løsning

Vi bestemmer først på *kort sigt*:

$$AC^{SR} = \frac{TC^{SR}(y)}{y} = y^2 - 8y + 25 + \frac{40}{y} \tag{4.1}$$
$$AVC^{SR} = \frac{VC(y)}{y} = y^2 - 8y + 25 \tag{4.2}$$
$$AFC^{SR} = \frac{FC}{y} = \frac{40}{y} \tag{4.3}$$

Husk definitionerne af de forskellige omkostninger. For eksempel har vi i (4.2) og (4.3) husket at det kun er de omkostninger der afhænger af y, som er variable omkostninger, sådan at $AC(y) = AVC(y) + AFC$. Til sidst bestemmer vi de marginale omkostninger:

$$MC^{SR}(y) = \frac{\partial TC(y)}{\partial y} = \frac{\partial VC(y)}{\partial y} = 3y^2 - 16y + 25 \tag{4.4}$$

Dernæst på *langt sigt*:

$$AC^{LR}(y) = \frac{TC(y)}{y} = y^2 - 6y + 16 \tag{4.5}$$

$$AVC^{LR}(y) = AC^{LR}(y) \tag{4.6}$$

$$FC^{LR} = 0 \tag{4.7}$$

$$MC^{LR}(y) = \frac{\partial TC(y)}{\partial y} = 3y^2 - 12y + 16, \tag{4.8}$$

hvor vi igen husker vores definitioner. I (4.6) og (4.7) bruger vi det faktum, at der kun er variable omkostninger på langt sigt.

(b) Hvis virksomheden kun har én produktionsfaktor og prisen på denne er lig én, angiv da, hvordan man i princippet kan bestemme produktionsfunktionen på kort og langt sigt.

Løsning

Såfremt $w_1 = 1$ så er $VC(y)$ den inverse produktionsfunktion. Dette skyldes at:

$$\begin{aligned} VC^{SR}(y) &= w_1 \cdot x_1 \\ &= x_1 = y^3 - 8y^2 + 25y, \end{aligned}$$

for $w_1 = 1$. Hvor at løse for y vil give produktionsfunktionen. Givet at alle omkostninger er variable på langt sigt, må det gælde at $TC(y)$ er den inverse produktionsfunktion:

$$TC^{LR}(y) = w_1 \cdot x_1 = y^3 - 6y^2 + 16y,$$

for $w_1 = 1$. Her vil man igen skulle løse for y for at bestemme produktionsfunktionen.

Opgave 5

Dent Carr er mekaniker og vil gerne have lidt hjælp til at bestemme sine omkostninger. Hans totale omkostninger ved at reparere s biler er givet ved:

$$TC(s) = 2s^2 + 10. \tag{1}$$

(a) Hvad er Dents totale variable omkostninger?

Løsning

Dents totale variable omkostninger må nødvendigvis være givet ved: $VC(s) = 2s^2$.

(b) Ved at kigge på (1) kan vi så bestemme Dents faste omkostninger? Hvis ja, hvad er de så?

Løsning

Det kan vi i hvert fald! Vi husker at de faste omkostninger er dem, som ikke varierer med hensyn til s. Derfor må de i Dents tilfælde svare til 10.

(c) Bestem først Dents gennemsnitlige variable omkostninger. Derefter, skal du finde Dents gennemsnitlige faste omkostninger. Hvad er Dents gennemsnitlige totale omkostninger?

Løsning

Dents gennemsnitlige variable omkostninger må svare til $AVC(s) = 2s$. Ligeledes må de gennemsnitlige faste omkostninger være givet ved $AFC(s) = \frac{10}{s}$. Når vi husker at $ATC(s) = AVC(s) + AFC(s)$, må det gælde at de totale gennemsnitlige omkostninger svarer til:

$$ATC(s) = 2s + \frac{10}{s}.$$

(d) Hvad er Dents marginale omkostning ved at reparere biler?

Løsning

Dents marginale omkostning svarer til den første afledte med hensyn til s:

$$\frac{\partial TC(s)}{\partial s} = 4s.$$

Opgave 6

Dent Carr har en bror Dint, som er bilproducent. Dint Carr har følgende omkostningsfunktion:

$$c(y) = 4y^2 + 16,$$

hvor y er antallet af biler Dint producerer. Du bedes nu bestemme følgende:

(a) Hvad er Dints gennemsnitlige omkostninger? Hvad med hans marginale omkostninger?

Løsning

Dints gennemsnitlige omkostninger må være givet ved:

$$\begin{aligned} AC(y) &= \frac{c(y)}{y} = \frac{4y^2 + 16}{y} \\ &= 4y + \frac{16}{y}. \end{aligned}$$

De marginale omkostninger:

$$MC(y) = \frac{\partial c(y)}{\partial y} = 8y.$$

(b) Bestem det niveau af output (y), som svarer til Dints minimale gennemsnitlige produktionsomkostninger.

Løsning

Vi bestemmer minimum af $AC(y)$ ved at sætte den afledte med hensyn til y

lig nul:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial AC(y)}{\partial y} &= 4 - \frac{16}{y^2} = 0 \\
\frac{16}{y^2} &= 4 \\
16 &= 4y^2 \\
y^2 &= 4 \\
y &= 2.
\end{aligned}$$

(c) Hvad er Dints gennemsnitlige variable omkostninger?

Løsning

Dette må nødvendigvis svare til $AVC(y)$:

$$AVC(y) = \frac{VC(y)}{y} = \frac{4y^2}{y} = 4y.$$

(d) Hvor mange biler (y) skal Dint producere før hans gennemsnitlige variable omkostninger svarer til de marginale omkostninger?

Løsning

Vi sætter $AVC(y) = MC(y)$:

$$\begin{aligned}
4y &= 8y \\
y &= 0.
\end{aligned}$$

Dint skal altså producere nul biler, før dette gælder.

Opgave 7

En producent opererer under en produktionsfunktion af formen $y = f(x_1, x_2)$, dvs. bruger to inputs $\{1, 2\}$ i mængderne x_1 og x_2 til at producere et output y.

(a) Antag at produktionsfunktionen er givet ved $y = 4x_1\sqrt{x_2}$. Bestem et generelt udtryk for isokvanterne. Hvilken form for skalaafkast er der i produktionen?

Løsning

Ved at løse for x_2 i vores produktionsfunktion kan vi bestemme et udtryk for isokvanterne:

$$\sqrt{x_2} = \frac{y}{4x_1}$$
$$x_2 = \left(\frac{y}{4x_1}\right)^2$$

Vi bestemmer skalaafkastet ved at skalere hvert input med $t > 1$:

$$\begin{aligned} y = f(t \cdot x_1, t \cdot x_2) &= t \cdot 4x_1\sqrt{t \cdot x_2} \\ &= t\sqrt{t} \cdot 4x_1\sqrt{x_2} \\ &= t^{1.5} \cdot 4x_1\sqrt{x_2}. \end{aligned}$$

Det må gælde at:

$$t \cdot 4x_1\sqrt{x_2} < t^{1.5} \cdot 4x_1\sqrt{x_2},$$

for alle $t > 1$. Derfor er der stigende skalaafkast.

(b) Lad nu forbrug af inputs være givet ved (20,50). Hvor meget output kan der produceres?

Løsning

Vi indsætter $(x_1, x_2) = (20, 50)$ i vores givne produktionsfunktion:

$$y = 4 \cdot 20 \cdot \sqrt{50}$$
$$y = 565.68.$$

(c) Antag at priser på input er givet ved $w = (10, 5)$. Hvad er det omkostningsminimerende input-mix når vi producerer 565.68 enheder y?

Løsning

Vi kan opstille vores minimeringsproblem som følger:

$$\min_{x_1,x_2} \quad 10x_1 + 5x_2$$
$$s.t. \quad 4x_1\sqrt{x_2} = 565.68$$

Hvilket giver Lagrangefunktionen:

$$\mathcal{L} = 10x_1 + 5x_2 - \lambda\left(565.68 - 4x_1\sqrt{x_2}\right),$$

med dertilhørende førsteordensbetingelser:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 10 + 4\lambda\sqrt{x_2} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 5 + \frac{2\lambda x_1}{\sqrt{x_2}} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -565.68 + 4x_1\sqrt{x_2} = 0$$

Vi løser først for λ i den første betingelse:

$$\lambda = -\frac{10}{4\sqrt{x_2}}$$

og i den anden:

$$\lambda = -\frac{5\sqrt{x_2}}{2x_1}.$$

Vi sætter disse lig hinanden og løser for x_1:

$$-\frac{10}{4\sqrt{x_2}} = -\frac{5\sqrt{x_2}}{2x_1}$$
$$-10 \cdot 2x_1 = -20\sqrt{x_2}$$
$$x_1 = x_2$$

Vi indsætter i vores sidste betingelse og finder:

$$-565.68 + 4x_2\sqrt{x_2} = 0$$
$$4x_2\sqrt{x_2} = 565.68$$
$$4x_2^{1.5} = 565.68$$
$$x_2^{1.5} = 141.42$$
$$x_2 = \sqrt[1.5]{141.42}$$
$$x_2 = 27.14,$$

Da vi før fandt at $x_1 = x_2$ må det også gælde at $x_1 = 27.14$

5 Ufuldkommen konkurrence: Monopol og duopol

Baseret på gamle eksamensopgaver og tidligere afleveringer i kurset.

Opgave 1

Jane ejer Bornholms eneste mejer og er eneleverandør af mælk til bornholmerne. Det koster F kroner dagligt at holde anlægget kørende og marginalomkostningerne er c kroner pr. liter mælk. Den daglige efterspørgsel efter mælk er givet ved den lineære efterspørgselsfunktion $D(p) = \alpha - \beta p$, hvor α og β er parametre imens p er prisen pr. liter mælk.

(a) Opskriv Janes profitmaksimeringsproblem og udregn hvor meget mælk Jane vil udbyde.

Løsning

Da Jane er eneleverandør kan hun selv sætte pris og mængde. Markedet vil efterspørge en mængde q til pris p:

$$\begin{aligned} q &= \alpha - \beta p \\ \Rightarrow p(q) &= \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta}q \end{aligned}$$

Vi kan så bestemme Janes profit som en funktion af mængden q:

$$\pi_j(q) = p(q) \cdot q - c \cdot q - F,$$

hvor vi kan indsætte vores fundne udtryk for $p(q)$:

$$\pi_j(q) = \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta}q\right) q - c \cdot q - F.$$

Vi har nu følgende maksimeringsproblem:

$$\max_q \pi_j(q) = \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta}q\right) q - c \cdot q - F,$$

som vi løser ved at differentiere og sætte lig nul:

$$\frac{\partial \pi_j(q)}{\partial q} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{2}{\beta}q - c = 0$$
$$q = \frac{\alpha - \beta \cdot c}{2}. \tag{1.1}$$

Ved at indsætte vores fundne udtryk for q i $p(q)$ kan vi bestemme p:

$$p = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta}\left(\frac{\alpha - \beta \cdot c}{2}\right). \tag{1.2}$$

Vi har da bestemt den profitmaksimerende mængde og markedsprisen til det udbudte niveau.

(b) Den lineære efterspørgselsfunktion kan bestemmes ud fra følgende oplysninger. Den maksimale daglige efterspørgsel efter mælk er 80,000 liter (ca. 2 liter pr. bornholmer), men ved 20 kr. pr. liter er der ikke længere nogen, som vil købe mælk. Marginalomkostningerne pr. liter er 2 kroner. Med disse oplysninger, hvad er så den udbudte mængde og hvad er prisen?

Løsning

Med de oplysninger ved vi at $D(p = 0) = 80,000$. Således må det gælde at $\alpha = 80,000$. Ved en pris på 20 kr. pr. liter er $D(p = 20) = 0$, hvorfor $\beta = \frac{80,000}{20} = 4,000$. Vi har altså følgende efterspørgsel efter mælk på Bornholm:

$$D(p) = 80,000 - 4,000p.$$

Ved at løse for p kan vi også bestemme prisen:

$$p = 20 - \frac{1}{4,000}q. \tag{1.3}$$

Ved at indsætte de fundne værdier af α, β og c i (1.1) kan vi først bestemme mængden:

$$q = \frac{80,000 - 4,000 \cdot 2}{2}$$
$$= 36,000.$$

Ved at indsætte vores fundne q i (1.3) kan vi bestemme markedsprisen:

$$p = 20 - \frac{1}{4000} \cdot 36,000$$
$$p = 11.$$

(c) For disse værdier, hvad er så den maksimale daglige faste omkostning, F, for hvilken Jane vil fortsætte driften på længere sigt?

Løsning

For at kunne besvare dette spørgsmål, skal vi bestemme den værdi af F, hvor Jane ikke længere får nogen profit ved hendes produktion:

$$\pi_j = 36,000 \cdot 11 - 36,000 \cdot 2 = 324,000.$$

Jane vil altså fortsætte driften på længere sigt så længe $F \leq 324,000$.

(d) Hvad er priselasticiteten ved den fundne pris og mængde, og hvad er mark-up'en? Hvad ville elasticiteten have været, hvis marginalomkostningerne var nul?

Løsning

Priselasticiteten er givet ved:

$$\varepsilon_p = \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{p}{q}$$

Ved at indsætte får vi:

$$\varepsilon_p = -4,000 \cdot \frac{11}{36,000}$$
$$= -1.22.$$

Mark-up'en er den faktor prisen er større end marginalomkostningerne:

$$k \cdot MC = p \tag{1.4}$$
$$k = \frac{p}{MC},$$

hvor k er mark-up'en. Alternativt er denne givet ved:

$$k = 1 - \frac{1}{1- \mid \varepsilon_p \mid}.$$

I denne situation svarer Janes mark-up til:

$$k = \frac{11}{2} = 5.5.$$

Givet vores definition af mark-up'en kan vi bestemme ε_p ved at indsætte i en omskrevet (1.4):

$$\begin{aligned}
MC &= \frac{p}{k} \\
\Rightarrow 0 &= \frac{p}{1 - \frac{1}{1-|\varepsilon_p|}} \\
0 &= -\frac{p(1- \mid \varepsilon_p \mid)}{\mid \varepsilon_p \mid}
\end{aligned}$$

Før det sidste udtryk holder, må det gælde at:

$$p(1- \mid \varepsilon_p \mid) = 0,$$

hvilket må betyde at $\mid \varepsilon_p \mid = 1$.

(e) Staten kunne godt tænke sig at folk drak mere mælk. De vil derfor indføre et forsøg på Bornholm, hvor staten refunderer 2 kr. pr. liter mælk en bornholmer køber. Hvor meget ekstra mælk vil der blive solgt, hvor meget vil prisen falde og hvor stor en andel af det samlede tilskud vil ende i Janes lomme?

Løsning

Hvis staten refunderer 2 kr. pr liter vil Janes marginalomkostninger falde med 2, sådan at $c = 0$. For at bestemme mængden af solgt mælk løser vi nu for $c = 0$:

$$\begin{aligned}
\tilde{q} &= \frac{80,000 - 4,000 \cdot 0}{2} \\
&= 40,000.
\end{aligned}$$

Prisen vil så blive:

$$\tilde{p} = \frac{80,000}{4,000} - \frac{1}{4,000} \cdot 40,000$$
$$= 10.$$

Vi kan så bestemme ændringen i profit :

$$\Delta\pi_j = \tilde{\pi}_j - \pi_j = 40,000 \cdot 10 - (36,000 \cdot 11 - 36,000 \cdot 2)$$
$$= 76,000.$$

Jane vil altså tjene en ekstra 76,000 kr. i profit.

(f) Alternativt overvejer staten at købe mejeriet af Jane. Hvis det bliver tilfældet hvor stor en mængde vil det være optimale for staten at udbyde fra et velfærdssynspunkt?

Løsning

Vi ved at det sociale optimum findes når $p = MC$. Et statsejet mejeri vil derfor sætte en pris, der svarer til denne. Givet at staten vil overtage mejeriet så vil $c = 2$. Vi løser derfor ved at sætte (1.3) lig $c = 2$:

$$20 - \frac{1}{4,000}q = 2$$
$$18 = \frac{1}{4,000}q$$
$$q = 18 \cdot 4,000$$
$$q = 72,000.$$

Det optimale vil altså være at udbyde $72,000$ liter mælk til 2 kr. pr liter.

(g) Et helt tredje alternativ er, at staten regulerer Janes mejeri som et naturligt monopol ved at sætte en maxpris. Fra et velfærdssynspunkt, hvad skal denne maxpris så være? Hvad vil problemet være ved at sætte denne maxpris?

Løsning

Maxprisen skulle i så fald svare til det socialt optimale 2 kr. pr. liter. I et sådant tilfælde vil forbrugeren være stillet bedre, men Jane vil stadigt kun udbyde hendes optimale mængde på $36,000$. Dette betyder, at der vil være et relativt underudbud på $72,000 - 36,000 = 36,000$ når man sammenligner med fuldkommen konkurrence. Noget af dette underudbud vil så efterspørges til en højere pris, som selvfølgeligt vil være inefficient.

Opgave 2

De relativt høje priser på Bornholm får Arla til at overveje at gå ind på det bornholmske marked. Efter de har etableret sig forudser Arla at den samlede efterspørgsel efter mælk bliver $D(p) = 40,000 - 2,000p$. Arla har konstante marginalomkostninger på c_a kroner pr. liter og er i første omgang blot interesseret i at få del i markedet og maksimere deres profit.

(a) Opskriv Arlas reaktionsfunktion som en funktion af Janes mængde, q_j, og deres egne marginalomkostninger c_a.

Løsning

Vi omskriver den givne efterspørgselsfunktion, hvor vi husker at mængden nu er givet ved $Q = q_j + q_a$:

$$p = 20 - \frac{1}{2,000}(q_j + q_a).$$

Vi kan så bestemme Arlas reaktionsfunktion ved først at bestemme det q_a, som maksimerer deres profit:

$$\max_{q_a} \pi_a(q_a, q_j) = \left(20 - \frac{1}{2,000}(q_j + q_a)\right) q_a - c_a q_a, \tag{2.1}$$

hvor vi (som sædvanligt) differentierer, sætter lig nul og løser for q_a:

$$\frac{\partial \pi_a(q_a, q_j)}{\partial q_a} = 20 - \frac{1}{2,000} q_j - \frac{1}{1,000} q_a - c_a = 0$$

$$q_a^*(q_j) = 20,000 - \frac{1}{2} q_j - 1,000 c_a \tag{2.2}$$

(b) Hvis Jane tror at $c_a = 4$, hvad vil Jane så udbyde som Stackelberg-leder?

Løsning

Vi kan indsætte vores fundne udtryk for q_a^* og $c_a = 4$ i Janes profitmaksimeringsproblem:

$$
\begin{aligned}
\max_{q_j} \pi_j &= \left(20 - \frac{1}{2,000}(q_a + q_j)\right) \cdot q_j - c_j q_j \\
\Rightarrow &= \left(20 - \frac{1}{2,000}\left(\left((20,000 - \frac{1}{2}q_j - 1,000 \cdot 4\right) + q_j\right)\right) \cdot q_j - c_j q_j \\
&= \left(12 + \frac{1}{4,000}q_j - \frac{1}{2,000}q_j\right) q_j - c_j q_j \\
&= \left(12 - \frac{1}{4,000}q_j\right) q_j - c_j q_j
\end{aligned}
$$

Vi husker at $c_j = 2$ og kan så differentiere og løse for q_j:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_j}{\partial q_j} &= 12 - \frac{1}{2,000}q_j - 2 = 0 \\
\frac{1}{2,000}q_j &= 10 \\
q_j^* &= 20,000,
\end{aligned}
$$

når $c_j = 2$.

(c) Hvad vil Arla udbyde og hvad bliver prisen?

Løsning

Arla kender den mængde, som vil være optimal for Jane at udbyde. De vil derfor maksimere med hensyn til dette ved at indsætte Janes q_j^* i (2.2):

$$
\begin{aligned}
q_a^* &= 20,000 - \frac{1}{2} \cdot 20,000 - 4 \cdot 1,000 \\
&= 6,000.
\end{aligned}
$$

Vi finder markedsprisen ved at indsætte $q_j = 20,000$ og $q_a = 6,000$ i (2.1):

$$
\begin{aligned}
p^* &= 20 - \frac{1}{2,000}(20,000 + 6,000) \\
&= 7.
\end{aligned}
$$

(d) Det viser sig imidlertid at fragten til Bornholm er temmelig dyr. Marginalomkostningerne for Arla bliver derfor $c_a = 6$. Hvis Jane kender denne pris, hvad bliver Stackelberg-ligevægten så?

Løsning

Reaktionsfunktionerne vil stadigt være de samme. Vi bestemmer derfor først q_j^* for $c_a = 6$:

$$\max_{q_j} \pi_j = \left(13 - \frac{1}{4,000} q_j\right) q_j - 2q_j,$$

hvorefter vi kan finde q_j^*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_j}{\partial q_j} &= 13 - \frac{1}{2,000} q_j - 2 \\ \frac{1}{2,000} &= 11 \\ q_j^* &= 22,000. \end{aligned}$$

Vi kan så bestemme q_a^* på samme måde som i (c):

$$\begin{aligned} q_a^* &= 20,000 - \frac{1}{2} \cdot 22,000 - 6 \cdot 1,000 \\ &= 3,000. \end{aligned}$$

Prisen til disse værdier af q_j^* og q_a^* er så:

$$\begin{aligned} p^* &= 20 - \frac{1}{2,000} (22,000 + 3,000) \\ &= 7.5 \end{aligned}$$

(e) Hvem er vinderne og hvem er taberne ved $c_a = 6$ i forhold til $c_a = 4$?

Løsning

Givet at den nye markedspris er højere end før, samt at Janes nye producerede mængde er større, så er Jane den entydige vinder. Dette er også ret intuitivt, da Arla selvfølgeligt ikke har en *ceteris paribus* gevinst ved at have højere omkostninger. Da det samlede udbud nu er lavere, og tilmed til en højere pris, så har samfundet heller ikke nogen gevinst ved Arlas højere omkostning.

Opgave 3

Virksomhed A og B er Cournot konkurrenter. Efterspørgslen i markedet er $D(p) = 100 - 2p$ og begge virksomheder har marginalomkostninger $MC_1 = MC_2 = 10$. Se bort fra eventuelle faste omkostninger.

(a) Opskriv virksomhed A's profitfunktion, som en funktion af mængderne q_A og q_B.

Løsning

Vi bestemmer virksomhed A's profitfunktion, ved først at bestemme den inverse efterspørgselsfunktion:

$$p = 50 - \frac{1}{2}Q,$$

hvor $Q = q_A + q_B$. Vi kan så opstille virksomhed A's profitfunktion:

$$\begin{aligned}\pi_A &= \left(50 - \frac{1}{2}(q_A + q_B)\right) q_A - 10q_A \\ &= \left(40 - \frac{1}{2}(q_A + q_B)\right) q_A.\end{aligned}$$

(b) Find virksomhed A's reaktionsfunktion.

Løsning

Vi bestemmer virksomhed A's reaktionsfunktion $(R_A(q_A, q_B))$, som den optimale mængde de kan producere, givet hvad virksomhed B producerer:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_A}{\partial q_A} &= 40 - q_A - \frac{1}{2}q_B = 0 \\ q_A &= 40 - \frac{1}{2}q_B.\end{aligned}$$

(c) Find Cournot-ligevægtsmængderne q_A^* og q_B^*.

Løsning

Givet at virksomhederne er symmetriske, må det gælde at B har følgende reaktionsfunktion:

$$q_B = 40 - \frac{1}{2}q_A.$$

Vi kan så bestemme Cournot-ligevægten ved at indsætte en af de to reaktionsfunktioner i den anden:

$$\begin{aligned}
q_A &= 40 - \frac{1}{2}\left(40 - \frac{1}{2}q_A\right) \\
q_A &= 20 + \frac{1}{4} \\
\frac{3}{4}q_A &= 20 \\
q_A &= 20 \cdot \frac{4}{3} \\
q_A^* &= 26.67.
\end{aligned}$$

Givet symmetri, må $q_B^* = 26.67$.

(d) Hvad er den samlede mængde og pris i ligevægten?

Løsning

Den samlede mængde er $Q = q_A + q_B = 26.67 + 26.67 = 53.33$. Vi indsætter i vores inverse efterspørgsel og bestemmer ligevægtsprisen:

$$\begin{aligned}
p &= 50 - \frac{1}{2} \cdot 53.33 \\
&= 23.33.
\end{aligned}$$

Opgave 4

Betragt en situation, hvor tre virksomheder $N = \{1, 2, 3\}$ indgår i Cournot-konkurrence. Den inverse efterspørgselsfunktion er givet ved $p(Q) = a - bQ$, hvor $Q = \sum_{i=1}^{3} q_i$ er den samlede markedsmængde. Alle tre virksomheder har konstante marginalomkostninger, men disse er forskellige: $c_1 = 2, c_2 = 6$ og $c_3 = 10$.

(a) Find Cournot-ligevægten i en situation, hvor alle tre virksomheder vælger deres produktionsmængde simultant. Hvad bliver prisen? Hvad bliver hvert firmas profit og hvad bliver den samlede produktionsmængde Q? *Hint: Start med at opstille førsteordens-betingelserne for hver virksomhed, $p(Q) + \frac{\partial p}{\partial Q} \cdot q_i = MC_i$. Isoler q_1 for hver af de tre førsteordens-betingelser og læg dem sammen. Du kan nu løse for Q og bruge dette til at finde den optimale produktion for hver af de tre virksomheder.*

Løsning

Givet at ligevægtsbetingelsen for $i = 1, 2, 3$ er:

$$p(Q) + \frac{\partial p}{\partial Q} \cdot q_i = MC_i,$$

hvor vi kan indsætte $p(Q) = a - bQ$, under forudsætning af, at vi har konstante marginalomkostninger:

$$a - b \cdot Q - b \cdot q_i = c_i,$$

for $i = 1, 2, 3$. Lidt omskrivning giver:

$$\begin{aligned} b \cdot q_i &= a - c_i - b \cdot Q, \\ q_i &= \frac{a - c_i - b \cdot Q}{b} = \frac{a - c_i}{b} - Q \end{aligned} \tag{4.1}$$

hvor vi så kan bestemme for den samlede produktion Q, ved at summere disse ligninger for $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} b\,(q_1 + q_2 + q_3) &= a - c_1 - b \cdot Q + a - c_2 - b \cdot Q + a - c_3 - b \cdot Q \\ b \cdot Q &= 3 \cdot a - 3 \cdot b \cdot Q - c_1 - c_2 - c_3, \end{aligned}$$

hvor vi kan løse for Q:

$$\begin{aligned} 4b \cdot Q &= 3a - c_1 - c_2 - c_3 \\ Q &= \frac{3a - c_1 - c_2 - c_3}{4b} \end{aligned}$$

Ved at indsætte $c_1 = 2, c_2 = 6$ og $c_3 = 10$ kan vi bestemme Q:

$$Q = \frac{3a - 2 - 6 - 10}{4b} = \frac{3a - 18}{4b} \tag{4.2}$$

Vi kan så indsætte (4.2) i (4.1):

$$q_i = \frac{a - c_i}{b} - \frac{3a - 18}{4b}$$

Så er q_1, q_2 og q_3 givet ved:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{a-2}{b} - \frac{3a-18}{4b} = \frac{4a-8}{4b} - \frac{3a-18}{4b} = \frac{a+10}{4b} \\ q_2 &= \frac{a-6}{b} - \frac{3a-18}{4b} = \frac{4a-24}{4b} - \frac{3a-18}{4b} = \frac{a-6}{4b} \\ q_3 &= \frac{a-10}{b} - \frac{3a-18}{4b} = \frac{4a-40}{4b} - \frac{3a-18}{4b} = \frac{a-22}{4b} \end{aligned}$$

Prisen er givet ved:

$$\begin{aligned} p(Q) &= a - b \cdot \frac{3a-18}{4b} \\ &= a - \frac{3a-18}{4} \\ &= \frac{4a}{4} - \frac{3a-18}{4} = \frac{a+18}{4}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Profitten for firma i er givet ved:

$$\pi_i \left(q_i, p(Q)\right) = \left(p(Q) - c_i\right) q_i,$$

hvor vi kan indsætte (4.1) og (4.3):

$$\begin{aligned} \pi_1 \left(q_i, p(Q)\right) &= \left(\frac{a+18}{4} - c_i\right) \cdot \left(\frac{a-c_i}{b} - \frac{3a-18}{4b}\right) \\ &= \left(\frac{a+18-4c_i}{4}\right) \cdot \left(\frac{a+18-4c_i}{4b}\right) \\ &= \frac{(a+18-4c_i)^2}{16b}. \end{aligned}$$

Nu hvor vi har et generelt udtryk for hver virksomhed i's profit kan vi indsætte vores givne værdier af c_1, c_2 og c_3:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{(a+18-4\cdot 2)^2}{16b} = \frac{(a+10)^2}{16b} \\ \pi_2 &= \frac{(a+18-4\cdot 6)^2}{16b} = \frac{(a-6)^2}{16b} \\ \pi_3 &= \frac{(a+18-4\cdot 10)^2}{16b} = \frac{(a-22)^2}{16b} \end{aligned}$$

(b) Virksomhed 2 opkøber nu virksomhed 3 sådan at de fusionere til én. Den nye virksomhed 2 har konstante marginalomkostninger $\frac{c_2+c_3}{2}$. Hvad bliver den nye Cournot-ligevægt? Kan det betale sig for virksomhederne at fusionere? *Hint: Opgaven er nu at bestemme en Cournot-ligevægt i et marked med to virksomheder.*

Løsning

Nu har denne nye virksomhed 2 marginalomkostninger:

$$\tilde{c}_2 = \frac{c_2 + c_3}{2} = \frac{6 + 10}{2} = 8.$$

Med samme fremgangsmåde som før kan vi bestemme $\tilde{Q}$, men vi kan også bruge det generelle resultat:

$$Q = \sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{N \cdot a - \sum_{i=1}^{N} c_i}{b(N+1)},$$

hvor N er antallet af virksomheder. I vores tilfælde er $N = 2$ Ved at indsætte fås:

$$\tilde{Q} = \frac{2 \cdot a - (8 + 2)}{b(2+1)} = \frac{2a - 10}{3b}.$$

Dette kan vi så indsætte i (4.1) for q_1 og $\tilde{q}_2$:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{a-2}{b} - \frac{2a-10}{3b} = \frac{a+4}{3b} \\ \tilde{q}_2 &= \frac{a-8}{b} - \frac{2a-10}{3b} = \frac{a-14}{3b} \end{aligned}$$

Den nye pris bliver så:

$$p(\tilde{Q}) = a - b \cdot \frac{2a-10}{3b} = \frac{a+10}{3}$$

Profitten for det fusionerede firma bliver så:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_2 &= (p(\tilde{Q}) - \tilde{c}_2) \cdot \tilde{q}_2 \\ \Rightarrow \tilde{\pi}_2 &= \left(\frac{a+10}{3} - 8\right) \cdot \left(\frac{a-14}{3b}\right) \\ &= \left(\frac{a+10}{3} - \frac{24}{3}\right) \cdot \left(\frac{a-14}{3b}\right) \\ &= \left(\frac{a-14}{3}\right) \cdot \left(\frac{a-14}{3b}\right) \\ &= \frac{(a-14)^2}{9b}. \end{aligned}$$

For at kunne bestemme om det kan betale sig for den nye virksomhed at fusionere, skal det gælde at deres profit er større end før fusionen:

$$
\begin{aligned}
\frac{(a-14)^2}{9b} &> \frac{(a-6)^2}{16b} + \frac{(a-22)^2}{16b} \\
\frac{a^2-28a+196}{9b} &> \frac{a^2-12a+36}{16b} + \frac{a^2-44a+484}{16b} \\
\frac{a^2-28a+196}{9} &> \frac{2a^2-56a+520}{16} \\
\frac{a^2-28a+196}{9} &> \frac{2\left(a^2-28a+260\right)}{16}
\end{aligned}
$$

I den sidste ulighed kan vi så reducere højre siden:

$$
\frac{a^2-28a+196}{9} > \frac{a^2-28a+260}{8}
$$

Den sidste ulighed ses ikke at holde da $\frac{a^2-28a}{9} < \frac{a^2-28a}{8}$ for alle $a \in \mathbb{R}$. Det kan derfor *aldrig* betale sig for firmaerne at fusionere, medmindre de kan reducere deres marginal omkostninger til et niveau lavere end $\min\{c_2, c_3\}$.

Referencer

Varian, H. R. (2019). *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*. W.W. Norton Co., New York, nihth (media update) edition.