Pregunta BONUS

Matemàtiques

<u>Instruccions</u>

A continuació tens la demostració que $\mathbf{0} = \mathbf{1}$. Evidentment, la demostració és errònia.

La pregunta bonus consta en **explicar** quin és l'error clarament.

No cal que sigui una explicació llarga, només cal que demostris que saps quin és l'error i com el corretgeries.

Partim de la següent igualtat

$$-20 = -20 \tag{1}$$

Expressem el -20 com una resta

$$25 - 45 = 16 - 36 \tag{2}$$

El 25 i el 16 els podem expressar com quadrats de 5 i 4, i el 45 i el 36 com a multiplicacions

$$5^2 - 9 \cdot 5 = 4^2 - 9 \cdot 4 \tag{3}$$

Sumem als dos costats de la igualtat $\frac{81}{4}$ i la igualtat es queda igual

$$5^2 - 9 \cdot 5 + \frac{81}{4} = 4^2 - 9 \cdot 4 + \frac{81}{4} \tag{4}$$

Podem expressar $\frac{81}{4}$ com $\left(\frac{9}{2}\right)^2$

$$5^2 - 9 \cdot 5 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 4^2 - 9 \cdot 4 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \tag{5}$$

En ambdós costats de la igualtat podem aplicar la identitat $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$$\left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 \tag{6}$$

Podem aplicar l'arrel quadrada als dos costats per poder cancel·lar els quadrats

$$\cancel{\sqrt{\left(5 - \frac{9}{2}\right)^{\cancel{2}}}} = \cancel{\sqrt{\left(4 - \frac{9}{2}\right)^{\cancel{2}}}} \tag{7}$$

Com tenim el mateix terme en ambdós costats de la igualtat es pot eliminar

$$5 - \cancel{\frac{9}{2}} = 4 - \cancel{\frac{9}{2}} \tag{8}$$

$$5 = 4$$

Si restem 4 a ambdós costats de la igualtat ens queda

$$\boxed{1 = 0} \tag{9}$$

Fins a l'equació 6 tot el procediment és correcte.

Les funcions inverses

A continuació, es diu que podem aplicar l'arrel quadrada a banda i banda de la igualtat per eliminar el quadrat. I aquí hi ha el primer problema. Vegem una analogia primer per entendre perquè no es pot fer això:

Imaginem que tenim un valor x i ha vingut algú que ens ha modificat aquest valor ficant-lo a una "màquina" anomenada elevadora al quadrat (que en matemàtiques s'expressa com a $f(x) = x^2$ que significa "màquina f que agafa valors x per transformar-los en valors x^2") provocant que el seu valor s'hagi modificat segons els criteris de l'artefacte.

Nosaltres, que se'ns havia oblidat quin era el valor de x inicialment, vam decidir construir una màquina que feu **exactament el mateix que la primera però a la inversa**, d'aquesta manera podríem recuperar el nostre valor inicial x i mirar quin era.

Ens adonem, però, que és impossible construir una segona màquina tal que ens torni el resultat original. El problema de la màquina $f(x) = x^2$ és que no és **injectiva** el que significa quins valors diferents de x en ficar-los a la màquina es converteixen en el mateix resultat ($3^2 = (-3)^2 = 9$). Per tant, per cada valor i que introduïm en el nostre *intent de màquina inversa* ens tornarà **dos resultats!** Quin dels dos era el nostre?

I això, amics, és un greu problema. Passant a termes matemàtics (màquina en matemàtiques és funció), el que ens vol dir això és que no hi ha una funció aplicada sobre la funció quadràtica tal que el resultat que obtinguem sigui **exactament l'original**, és a dir, no hi ha $g(x)$ tal que aplicada sobre $f(x)$ (el que en matemàtiques s'expressa com una composició, $g(f(x))$ o també $(f \circ g))(x))$ sigui igual a x.

Això vol dir que la funció quadràtica no té cap inversa! Pel que dir que $\sqrt{x^2} = x$ és totalment incorrecte doncs la funció arrel quadrada no es pot titllar amb el quadrat, això passaria si l'una fos la funció inversa de l'altra.

Diferència entre el concepte d'arrel quadrada i la funció arrel quadrada

Les principals confusions vénen de saber diferenciar bé què és el concepte de l'arrel quadrada i la funció.

El concepte de l'arrel quadrada d'un número x és un altre número y tal que $y^2 = x$. Per tant, per saber la arrel quadrada d'un nombre x hem de trobar els números y tal que compleixin l'equació anterior. Pel Teorema Fonamental de l'Àlgebra sabem que totes les equacions d'aquest tipus tenen **dues solucions** o, com es diu en matemàtiques, **dues arrels**.

D'altra banda, es defineix la **funció arrel quadra de x** com l'**arrel positiva** de la solució $y^2 = x$ o, ho que és el mateix:

$$\sqrt{x^2} \equiv |x|$$

on el símbol $\equiv$ significa que és una definició. Alhora, a l'arrel positiva se la coneix com el **valor principal de l'arrel quadrada**. Posem un exemple perquè quedi clar:

Les solucions/arrels de $y^2 = 4$ sabem que són 2 i -2, mentre que la $\sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{2^2} = |-2| = |2| =$ **2 únicament**, que no és més que l'**arrel positiva** de l'equació anterior.

Per tant, les solucions de l'equació $y^2 = x$ són $\sqrt{x}$ i $-\sqrt{x}$.

Necessitat de definir així la funció arrel quadrada

En primer lloc, no podem treballar amb funcions multivaluades en equacions ja que llavors portaríem a contradiccions com la següent:

Considerem que el símbol $\sqrt{}$ ens defineix la funció multivaluada tal que $\sqrt{4} = 2$ i -2. Aleshores:

$$\sqrt{4} = 2$$
$$\sqrt{4} = -2$$

Recordem que la igualtat és una relació d'equivalència que ha de complir la propietat de **transitivitat** és a dir, si $a = b$ i $a = c$ aleshores $a = c$. Però veient les igualtats anteriors arribem a la conclusió que $2 = -2$ pel qual arribem a un absurd.

Aquest és un motiu fonamental perquè l'operació $\sqrt{}$ no ha de representar una funció multivaluada. Deu ser sí o sí una funció de tota la vida.

Resolució correcta del problema

Si apliquem l'arrel quadrada a ambdós costats de la igualtat de la manera correcta:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(5-\frac{9}{2}\right)^2} &= \sqrt{\left(4-\frac{9}{2}\right)^2} \\
\left|5-\frac{9}{2}\right| &= \left|4-\frac{9}{2}\right| \\
\left|\frac{1}{2}\right| &= \left|-\frac{1}{2}\right| \\
\frac{1}{2} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Havent fet servir com Déu mana la funció arrel quadrada veiem que no arribem a cap contradicció.

Conclusions

L'error està en utilitzar l'arrel quadrada a banda i banda de la igualtat i cancel·lar-ho amb el quadrat doncs no són funcions inverses per la qual cosa cal fer servir de manera correcta la definició de la funció $\sqrt{}$.