

Informes del Laboratori d'Electromagnetisme

Carles Falcó i Gandia

Raquel Garcia Bellés

Miquel Saucedo Cuesta

Marc Seguí Coll

Universitat Autònoma de Barcelona

Juny 2018

Índex

| | |
|--|-----------|
| 1 Representació de camps | 4 |
| 1.1 Introducció | 4 |
| 1.2 Mètode experimental | 5 |
| 1.3 Resultats i discussió | 6 |
| 1.3.1 Capacitat | 6 |
| 1.3.2 Superfícies equipotencials | 7 |
| 1.4 Conclusions | 8 |
| 2 Força entre corrents | 9 |
| 2.1 Introducció | 9 |
| 2.2 Mètode experimental | 10 |
| 2.2.1 Força entre fils | 10 |
| 2.2.2 Camp magnètic de la Terra | 11 |
| 2.3 Resultats i discussió | 11 |
| 2.3.1 Força en funció del corrent | 11 |
| 2.3.2 Força en funció de la separació | 11 |
| 2.3.3 Camp magnètic de la Terra | 12 |
| 2.4 Conclusions | 13 |
| 3 Circuit RLC en sèrie | 15 |
| 3.1 Introducció | 15 |
| 3.1.1 Règim permanent. Senyal sinusoidal | 15 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.1.2 | Règim transitori. Senyal rectangular | 16 |
| 3.2 | Mètode experimental | 16 |
| 3.2.1 | Règim permanent. Senyal sinusoidal | 16 |
| 3.2.2 | Règim transitori. Senyal rectangular | 17 |
| 3.3 | Resultats i discussió | 18 |
| 3.3.1 | Règim permanent. Senyal sinusoidal | 18 |
| 3.3.2 | Règim transitori. Senyal rectangular | 19 |
| 3.4 | Conclusions | 19 |
| 4 | Inductància mútua i transformadors | 22 |
| 4.1 | Introducció | 22 |
| 4.2 | Mètode experimental | 23 |
| 4.2.1 | Estudi de les variables d'un transformador | 23 |
| 4.2.2 | Estudi de les intensitats d'entrada i sortida | 24 |
| 4.3 | Resultats i discussió | 24 |
| 4.3.1 | Estudi de les variables d'un transformador | 24 |
| 4.3.2 | Estudi de les intensitats d'entrada i sortida | 25 |
| 4.4 | Conclusions | 27 |
| 5 | Mesura de la resistència d'un metall | 28 |
| 5.1 | Introducció | 28 |
| 5.2 | Mètode experimental | 29 |
| 5.2.1 | Muntatge previ | 29 |
| 5.2.2 | Mesures a temperatura ambient | 29 |
| 5.2.3 | Mesures a temperatures elevades | 29 |
| 5.2.4 | Mesures a temperatures baixes | 30 |
| 5.3 | Resultats i discussió | 30 |
| 5.3.1 | Temperatura ambient | 30 |
| 5.3.2 | Temperatures altes | 30 |
| 5.3.3 | Temperatures baixes | 30 |
| 5.3.4 | Determinació de β i discussió | 31 |
| 5.4 | Conclusions | 32 |
| 6 | Camps magnètics d'espires i bobines | 34 |
| 6.1 | Introducció | 34 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 6.2 | Mètode experimental | 35 |
| 6.2.1 | Camp magnètic generat per espires | 35 |
| 6.2.2 | Camp magnètic generat per bobines | 36 |
| 6.3 | Resultats i discussió | 36 |
| 6.3.1 | Camp magnètic generat per espires | 36 |
| 6.3.2 | Camp magnètic generat per bobines | 38 |
| 6.3.3 | Camp radial i axial d'una bobina | 38 |
| 6.4 | Conclusions | 40 |
| A | Figures addicionals P.1 | 41 |
| B | Codis simulacions | 43 |
| B.1 | Resolució numèrica equació de Laplace | 43 |
| B.2 | Camp radial i axial d'una bobina | 47 |

PRÀCTICA 1

Representació de camps

1.1 Introducció

A molts materials existeixen relacions lineals entre el camp \mathbf{D} i la densitat de corrent \mathbf{J} , i el camp elèctric \mathbf{E} ¹. Tenim per exemple els materials òhmics conductors on

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.1)$$

i els dielèctrics on

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.2)$$

Aquestes relacions impliquen que \mathbf{J} i \mathbf{D} tindran el mateix caràcter conservatiu que \mathbf{E} i en conseqüència es podran derivar d'un potencial escalar. En particular satisfaran l'equació de Laplace. Conseqüentment, sabem que la solució pels camps, una vegada fixades unes determinades condicions de contorn, serà única. Emprarem això en diferents situacions.

En una d'elles s'estudiarà un sistema format per dues plaques planes i paral·leles on es visualitzaran les línies de camp i les línies equipotencials. Si considerem dues línies equipotencials a una diferència de potencial ΔV podem emprar la llei de Gauss per estimar la càrrega per unitat de longitud $\frac{Q}{Z}$ del condensador segons:

$$\frac{Q}{Z} \approx \epsilon \Delta V \sum_i \frac{\Delta l_i}{\Delta r_i} \quad (1.3)$$

on Δl_i i Δr_i són les distàncies longitudinals i radials respectivament. I així la capacitat per unitat de longitud:

$$\frac{C}{Z} = \frac{Q/Z}{V_a - V_b} \quad (1.4)$$

on $V_a - V_b$ és la diferència de potencial entre plaques.

Tot plegat, podem resumir els objectius de l'experiment en:

- Observar les línies equipotencials i línies de camp per diferents configuracions.

¹Recordem que \mathbf{E} és conservatiu en condicions d'electrostàtica.

- Comprovar l'equació de Laplace per medis dielèctrics i conductors.
- Calcular la capacitat per unitat de longitud d'un condensador de plaques planes i paral·leles.

1.2 Mètode experimental

Les distribucions a estudiar seran els casos particulars de dos fils conductors infinites carregats, dues plaques planoparal·leles (condensador) i una configuració lliure. Per tal de poder observar-ne les propietats, disposarem de fulls de paper impregnats amb carbó, amb un rang de resistències entre $5\text{ k}\Omega$ a $20\text{ k}\Omega$ per quadrat, de conductivitat homogènia que serà on construirem el circuit amb els respectius conductors.

D'aquesta manera, farem que el full sigui un pla perpendicular als dos fils. Així doncs, estarem analitzant realment la secció dels fils determinada per la intersecció d'aquests amb el pla, corresponent a dos punts. El mateix succeirà amb les plaques del condensador, a la pràctica suposarem que dos segments conductors representen la secció d'un pla perpendicular a les plaques.

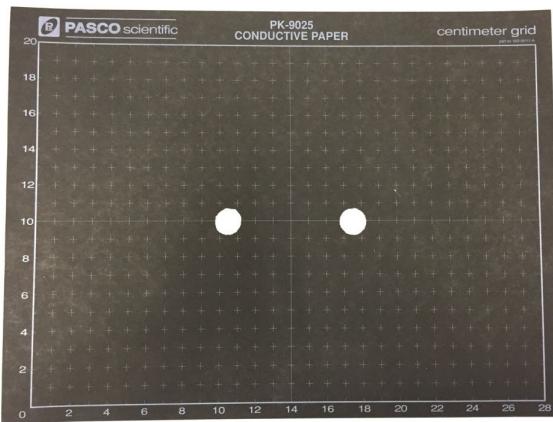


Figura 1.1: Full on es representa la secció de dos fils infinites conductors.

Els conductors els crearem amb un retolador mitjançant el qual es poden dibuixar traçats amb tinta conductora (degut que la tinta emprada és en realitat un líquid amb partícules de plata en suspensió). Previ al seu us, convé agitar-lo tapat per distribuir la plata de la forma més homogènia possible. A l'hora de dibuixar els electrodes sobre el paper, es recomana apretar una mica la punta del retolador a la vegada que es tracen les configuracions, cadascuna en un full separat.

Una vegada acabat el procés anterior, deixem eixugar la tinta durant uns 20 minuts per tal que s'assoleixi la màxima conductivitat. El procediment que ara descriurem s'aplica a qualsevol de les tres configuracions esmentades.

S'enganxa el full corresponent sobre un suro amb quatre claus o xinxetes als extrems, de forma que quedí ben estirat i pla. Mitjançant una sèrie de cables, es connecten els electrodes a la font de corrent DC. Amb dos dels claus que han sobrat fem que els cables quedin ben subjectats i fent contacte amb els conductors dibuixats. D'altra banda, mitjançant un altre cable, connectem un dels electrodes a un multímetre (en posició DC), considerant així aquest electrode com a referència de l'origen de potencial. L'altre cable sortint del multímetre està dotat d'un punxó al final. Aquest punxó es situa a qualsevol punt del full on es vulgui determinar el potencial.

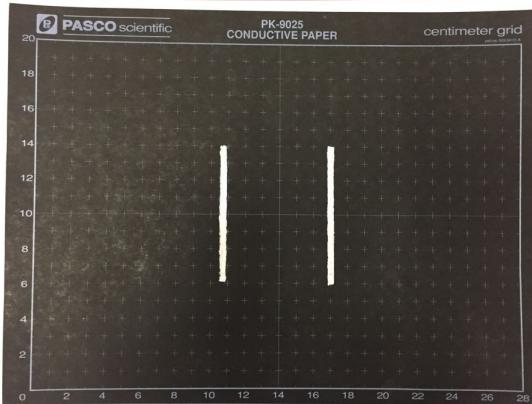


Figura 1.2: Full on es representa la secció d'un condensador planoparal·lel.

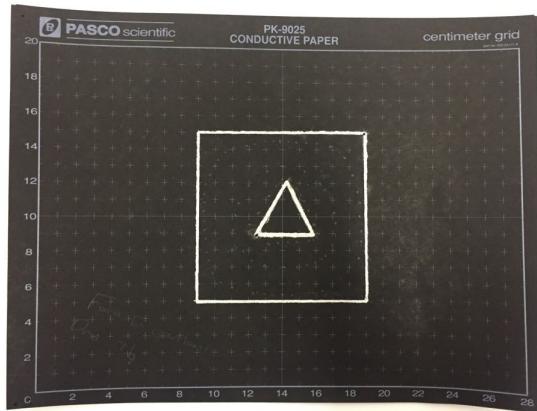


Figura 1.3: Full on es representa la configuració lliure escollida.

D'aquesta manera, fixem una diferència de potencial entre l'elèctrode i un punt qualsevol on vulguem determinar una línia equipotencial amb el punxó. A intervals més o menys regulars, anem determinant i marcant els punts del full tals que la diferència de potencial entre aquests i l'origen és igual al valor fixat inicialment. D'aquesta manera, una vegada tornats al punt d'inici, simplement hem d'unir els punts per obtenir la línia equipotencial corresponent.

Seguidament es repeteix el procediment per a altres valors del voltatge. Així anirem determinant diverses línies equipotencials al llarg del full. En haver acabat, dibuixem les línies de camp, és a dir, línies perpendiculars a les equipotencials. Aquestes es poden comparar amb les teòriques, calculades a partir de la diferència de potencial entre els elèctrodes.

Finalment, amb les dades obtingudes es calcula la capacitat per unitat de longitud del cas del condensador.

1.3 Resultats i discussió

1.3.1 Capacitat

A partir de l'Equació 1.3, on les diferències de potencial s'han mesurat amb un voltímetre, Δl_i correspon a la distància entre dos punts consecutius a la mateixa equipotencial i Δr_i és la

longitud del segment que va des d'un punt de l'equipotencial interior amb direcció perpendicular a la mateixa fins l'exterior, es troba un valor per la capacitat de $(1.87 \pm 0.48) \cdot 10^{-10} \text{ Fm}^{-1}$ que no és compatible amb el teòric $1.18 \cdot 10^{-10} \text{ Fm}^{-1}$. Aquest fet no és d'estranyar perquè per fer el càlcul teòric se suposa que les plaques són infinites, a la realitat, però, no només són finites sinó que tenen una mida semblant a la seva distància. Tot i això, ambdós resultats tenen el mateix ordre de magnitud.

1.3.2 Superfícies equipotencials

Observem que les escales pels valors teòrics i experimentals de les Figures d'aquesta part no fan referència als mateixos valors de potencial. Això es deu al fet que a les simulacions només s'ha fixat una diferència de potencial entre conductors. Tot i això, podem observar el comportament similar de les línies teòriques i experimentals en tots els casos.

Així doncs, també representem amb caràcter local les línies de camp experimental. Aquestes només indiquen la direcció del camp elèctric en un punt situat entre dos punts d'una línia equipotencial. D'aquesta forma ens fem una idea de com farà aquest camp globalment.

1.3.2.1 Fils

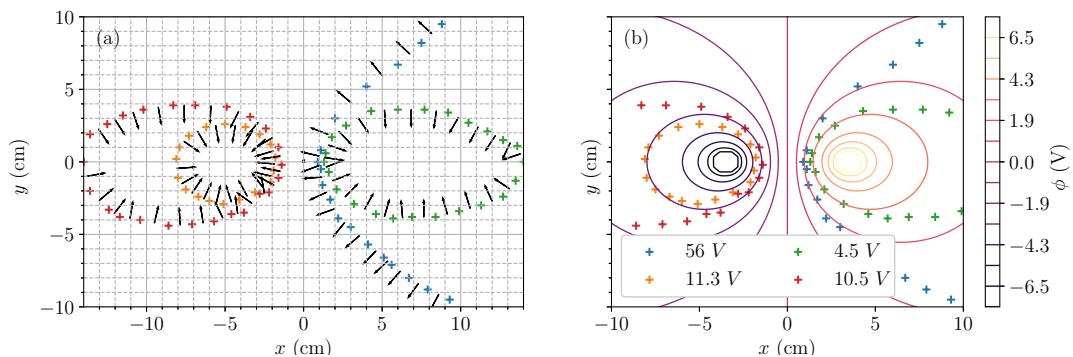


Figura 1.4: (a) Línies equipotencials amb punts experimentals (b) Línies equipotencials teòriques

Pel cas de dos fils infinitis, les línies equipotencials són cercles, com es veu a la figura 1.4(b). Els punts trobats experimentalment, figura 1.4(a), s'ajusten als teòrics a la part entre els dos fils. Tanmateix, a mesura que es van allunyant del centre es separen de la línia teòrica. Una explicació per la desviació és que a la part entre els conductors el potencial varia més ràpid, de manera que es pot mesurar la posició de la línia amb més precisió i el contrari passa a la zona més allunyada, on el potencial varia més lentament.

1.3.2.2 Plans

Per dos plans paral·lels finits, les línies equipotencials són paral·leles als mateixos a la zona entre els plans, com es veu a 1.5(b). Experimentalment s'ha reproduït aquest fet, com es veu a 1.5(a). Els resultats experimentals tornen a diferir dels teòrics en la part més allunyada del centre, se suposa que per la mateixa raó d'abans.

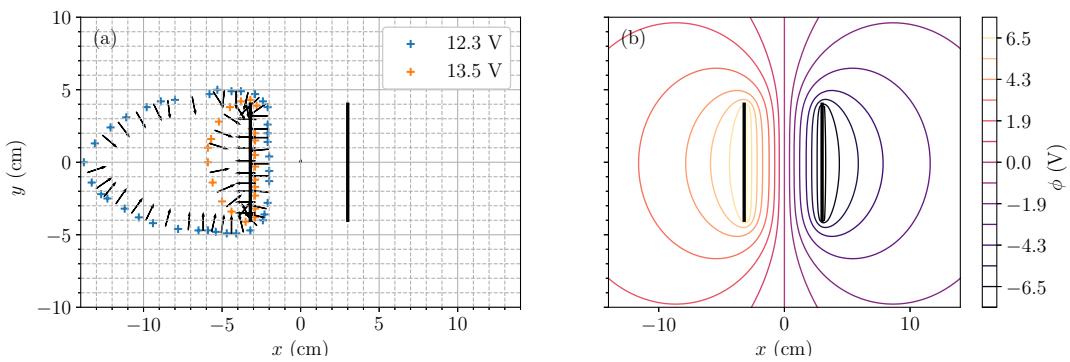


Figura 1.5: (a) Línes equipotencials amb punts experimentals (b) Línes equipotencials teòriques

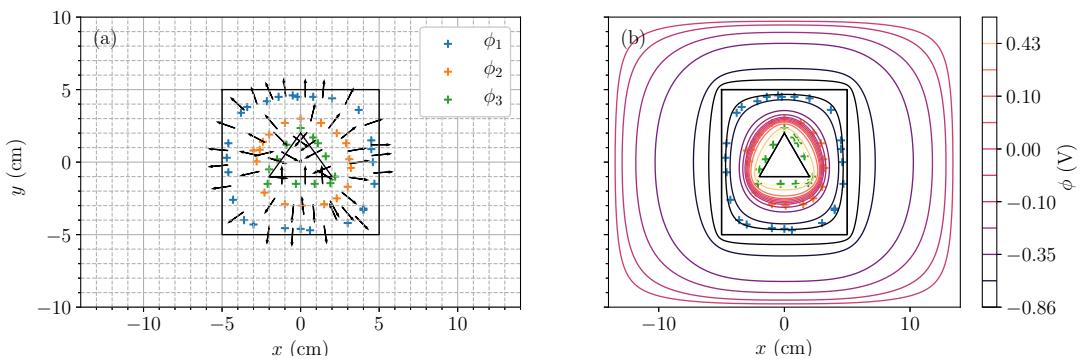


Figura 1.6: (a) Línes equipotencials amb punts experimentals (b) Línes equipotencials teòriques

1.3.2.3 Lliure

Per la forma lliure s'ha escollit un triangle dintre d'un quadrat. Com que tant el triangle com el quadrat són conductors, les línes equipotencials molt pròximes a cadascun han de tenir forma de triangle i quadrat respectivament. Així doncs, s'espera veure una transició de forma de les equipotencials des de triangle fins a quadrat, com s'observa a la Figura 1.6(b). Els punts experimentals concideixen amb els teòrics, com es veu a la Figura 1.6(a), com que no s'han realitzat mesures a la zona allunyada dels conductors, de variació lenta de potencial, no s'esperen desviacions per la causa comentada anteriorment.

1.4 Conclusions

- Hem mesurat la capacitat per unitat de longitud d'un condensador de plaques planes i paral·leles. El resultat obtingut $(1.87 \pm 0.48) \cdot 10^{-10} \text{ F m}^{-1}$ no ha estat compatible amb el teòric, però pot ser degut a la finitud de les plaques utilitzades. Notem però que és del mateix ordre de magnitud.
- Hem observat les superfícies equipotencials i línies de camp per a tres configuracions diferents. En les zones on el potencial varia més ràpidament el resultat ha estat compatible amb l'esperat, però lluny dels conductors apareixen desviacions.
- Hem comprovat la validesa de l'equació de Laplace pel potencial electrostàtic.

PRÀCTICA 2

Força entre corrents

2.1 Introducció

Sabem que un corrent elèctric constant crea un camp magnètic. Aquest pot calcular-se mitjançant la llei de Biot i Savart, i només depén de la geometria del conductor, de la intensitat i del punt on es calculi. Per a un fil rectilini infinit pel qual hi circula una intensitat I , el mòdul de la inducció magnètica B que genera, val:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (2.1)$$

on μ_0 és la permeabilitat magnètica del buit, I la intensitat que hi circula, i r és la distància al fil.

D'altra banda, un corrent elèctric I situat en una regió de l'espai on hi ha un camp magnètic experimenta una força de Lorentz segons:

$$\mathbf{F} = I \oint d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (2.2)$$

on \mathbf{F} és la força, $d\mathbf{l}$ és el diferencial de longitud del corrent i \mathbf{B} és la inducció magnètica. Veurem que raonant sobre aquesta expressió podem calcular la component horitzontal del camp magnètic terrestre.

Si el camp magnètic considerat és el creat per un fil rectilini infinit, d'acord amb l'Equació (2.1), i a una distància r d'aquest es posa un altre fil rectilini de longitud L i paral·lel al primer pel qual hi circula també una intensitat I , aquest experimentarà una força que en mòdul és:

$$F = \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi r} \quad (2.3)$$

Si les intensitats circulen en el mateix sentit la força serà atractiva, i si circulen en sentits opositos serà repulsiva. En aquesta pràctica es comprovarà que la força entre dos fils pels quals hi circula un corrent elèctric constant obedeix l'Equació (2.3).

2.2 Mètode experimental

Per a dur a terme aquesta pràctica s'utilitza una balança especial per a mesurar la força deguda a un camp magnètic sobre un fil rectilini pel qual circula una intensitat coneguda.

Cal remarcar que en certs punts de la balança el metall que s'utilitza per a fer les connexions és el gal·li. Aquest fon a 29.76°C , temperatura pròxima a la temperatura ambient, i a diferència del mercuri, que també és líquid a temperatura relativament baixa, no és tòxic. El fet que aquest conductor estigui en estat líquid permet que el circuit tingui certa mobilitat, ja que la distància entre els fils ha de poder variar.

2.2.1 Força entre fils

En aquesta primera part de la pràctica l'objectiu serà comprovar l'Equació (2.3). La disposició del circuit fa que les intensitats que circulen pels fils sobre els quals es mesurarà la força siguin paral·leles i tinguin la mateixa magnitud (menyspreant la resistència del circuit), però tinguin sentits opositius, de manera que quan circuli corrent per ambdós tendiran a repelir-se. El fil inferior està fixat i conseqüentment l'únic que podrà moure's serà el superior. Serà sobre aquest on es mesurarà la força.

En aquesta part, per a minimitzar l'error es disposa d'una brúixola que permet conèixer la direcció Nord-Sud del camp magnètic terrestre. Al orientar la balança de manera que els fils siguin paral·lels a aquesta direcció, s'assegura que aquesta component del camp magnètic de la Terra no exerceix cap之力 sobre els fils.

Abans de començar caldrà fonder el gal·li, mesurar la longitud L del fil superior i equilibrar la balança.

2.2.1.1 Força en funció del corrent

Primerament es fixa la separació dels fils en $r = (8.1 \pm 0.1)$ mm sense que hi passi cap corrent per ells. El fil superior té una cassoleta que permet col·locar-hi pesos, quan s'hi col·loca un pes la balança es desequilibra, aleshores cal variar la intensitat I dels fils fins que torni a equilibrar-se. Per tant es té que $F = mg$, on F és la之力 entre els fils, m és la massa que s'hagi posat i g és l'acceleració de la gravetat terrestre. És a dir, el mòdul de la之力 entre els fils és igual al pes quan la balança torna a estar en equilibri.

Es comença posant una massa de 5 mg i es repeteix el procés afegint 5 mg més cada vegada fins arribar a 25 mg. El valor de la intensitat I es troba com a mitjana aritmètica de quatre mesures. Amb els valors de la之力 F i la intensitat a l'equilibri al quadrat I^2 es realitza una regressió lineal, prenent F a l'eix d'ordenades i I^2 a l'eix d'abscisses. A partir del pendent obtingut, comparant-lo amb l'Equació (2.3) s'obté un valor de μ_0 i es compara amb el teòric $4\pi \times 10^{-7}$ en unitats en el SI.

2.2.1.2 Força en funció de la separació

En aquesta part s'igualarà la之力 entre els conductors a la之力 de torsió d'un fil del qual disposa la balança. La之力 de torsió és $F_T = k\theta$, on k és la constant de torsió del fil i θ és l'angle.

Primer cal determinar quant val k . Per a fer-ho, sense que passi cap intensitat pels fils, es posa 20 mg a la cassoleta, i es torna a equilibrar la balança variant l'angle de torsió amb el dial, es repeteix el procediment llevant 5 mg cada vegada fins a 5 mg. La之力 de torsió F_T serà

igual al pes mg en cada mesura. Prencent F_T com a ordenada i θ com abscissa es realitza una regressió lineal, i es pren el pendent com a valor de k , també s'utilitza l'ordenada en l'origen com una correcció de l'error de zero.

A continuació es fixa una intensitat $I = (5.18 \pm 0.01)$ A i una separació entre els fils r d'uns (13.1 ± 0.1) mm, amb el dial es varia l'angle per tal d'equilibrar la balança. A l'equilibri la força entre els fils serà igual a la força de torsió. Es fa el mateix reduint la distància 1 mm cada vegada fins a (5.1 ± 0.1) mm i es realitza una regressió lineal prenent F com a ordenada i $1/r$ com abscissa, a partir del pendent obtingut i comparant amb l'Equació (2.3) es calcula μ_0 i es compara amb el valor teòric.

2.2.2 Camp magnètic de la Terra

En aquesta part l'objectiu és mesurar la component horitzontal del camp magnètic terrestre. Aleshores cal orientar la balança de manera que els fils siguin perpendiculars a la direcció Nord-Sud del camp magnètic. També s'han de canviar les connexions per tal que només passi corrent pel fil superior.

Es fa circular una intensitat $I = (6.00 \pm 0.01)$ A pel fil superior i s'equilibra la balança girant el dial. La força F que exerceix la component horitzontal del camp magnètic de la Terra B_H serà igual a la força de torsió a l'equilibri. A partir de l'Equació (2.2) es dedueix que $F = ILB_H$, on L és la longitud del fil. A partir d'aquesta equació es troba B_H .

Tot i que el fil es troba horitzontal i per tant la component vertical del camp magnètic terrestre li és perpendicular, la força associada a aquesta component té una direcció en la qual el fil està fixat i per tant no influeix.

2.3 Resultats i discussió

En tota la pràctica s'ha pres $L = (31.0 \pm 0.3)$ cm com a longitud del fil superior i $g = 9.8$ m/s² com a valor de l'acceleració de la gravetat.

2.3.1 Força en funció del corrent

Comencem amb l'anàlisi de resultats de la força en funció del corrent amb una separació entre els fils fixada. La força no té cap incertesa associada ja que els valors de la massa dels pesos i de la gravetat s'han pres com a exactes. La incertesa en la intensitat prové de la precisió instrumental i de la desviació estàndard de la mitjana ja que s'han fet diverses mesures per a estimar el seu valor. En la Figura 2.1 es representen els valors trobats.

A partir del pendent de la regressió lineal i l'Equació (2.3) estimem un valor de la permeabilitat magnètica del buit de $\mu_0 = (1.26 \pm 0.02) \cdot 10^{-6}$ N/A², que és compatible amb el valor teòric $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A² amb un error relatiu del 0.3%. El valor de l'ordenada en l'origen no és compatible amb zero, però el seu ordre de magnitud, 10^{-6} , no és significatiu front a l'ordre de magnitud de les forces mesurades, 10^{-4} .

2.3.2 Força en funció de la separació

A continuació es determina la constant de torsió del fil. La força no té incertesa associada pel mateix motiu que a l'apartat anterior. La incertesa en l'angle prové de la precisió instrumental.

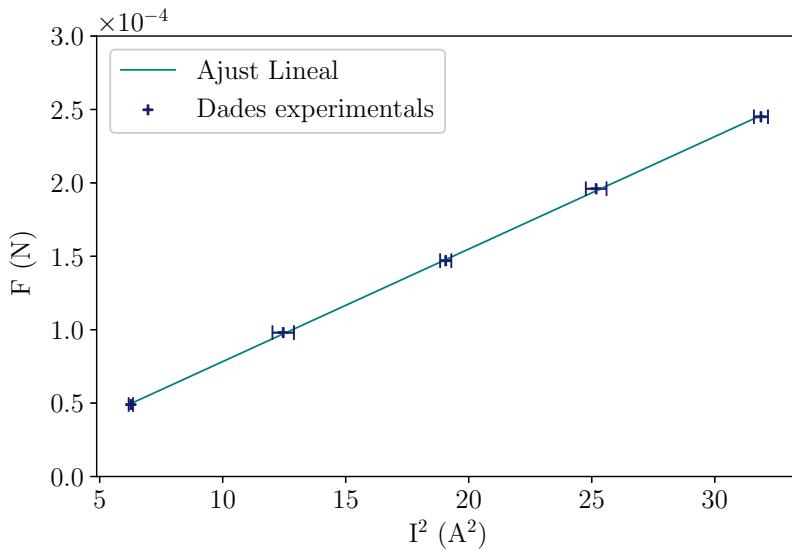


Figura 2.1: Força entre els fils en funció de la intensitat al quadrat. Resultats de la regressió lineal: Pendent= $(7.662 \pm 0.003) \cdot 10^{-6} \text{ N/A}^2$, Ordenada en l'origen= $(1.65 \pm 0.06) \cdot 10^{-6} \text{ N}$, $r^2 = 0.999$

En la Figura 2.2 es representen les mesures fetes.

El pendent de la regressió lineal en la Figura 2.2 es correspon amb la constant de torsió del fil, per tant $k = (2.976 \pm 0.005) \cdot 10^{-6} \text{ N}^\circ$. No tenim cap valor teòric amb el qual comparar-lo. El valor de la ordenada en l'origen no és compatible amb zero, per tant el prendrem com una correcció de l'error de zero en les mesures a continuació. Tot i que com abans, el seu ordre de magnitud no és significatiu front a l'ordre de les forces que es mesuraran.

Seguidament s'analitzen els resultats de mesurar la força en funció de la separació entre fils amb una intensitat fixada. La incertesa en la força prové de la incertesa en la constant de torsió del fil, de l'angle i de l'ordenada en l'origen de l'ajust lineal anterior. La incertesa en la separació dels fils prové de la precisió instrumental. En la Figura 2.3 es representen els valors obtinguts.

Comparant el pendent de l'ajust lineal de la Figura 2.3 amb l'Equació (2.3) s'estima un valor de la permeabilitat magnètica del buit de $\mu_0 = (1.41 \pm 0.01) \cdot 10^{-6} \text{ N/A}^2$ que no és compatible amb el valor teòric amb error relatiu del 12%. Cal tenir en compte però, que en l'ajust lineal no s'utilitzen les incerteses en la força, i tampoc podem estar segurs de com d'acurat és el valor de la constant de torsió del fil que hem trobat. L'ordenada en l'origen tampoc és compatible amb zero. Els motius poden ser els exposats anteriorment.

2.3.3 Camp magnètic de la Terra

En aquesta última part, les incerteses en la força provenen també de les incerteses associades a la constant de torsió del fil, a l'angle i a l'ordenada en l'origen de l'ajust lineal de la Figura 2.2. La intensitat està fixada i la seua incertesa prové de la precisió instrumental.

L'angle mesurat $\theta = (19 \pm 1)^\circ$ fa que la balança es trobi en equilibri. Amb aquest valor trobem que la component horitzontal del camp magnètic terrestre val $B_H = (25800 \pm 1600) \text{ nT}$, que és molt pròxim al valor que se'n havia donat com a referència de 24700 nT. No obstant això, eren d'esperar variacions en tant que sabem que el camp magnètic terrestre varia.

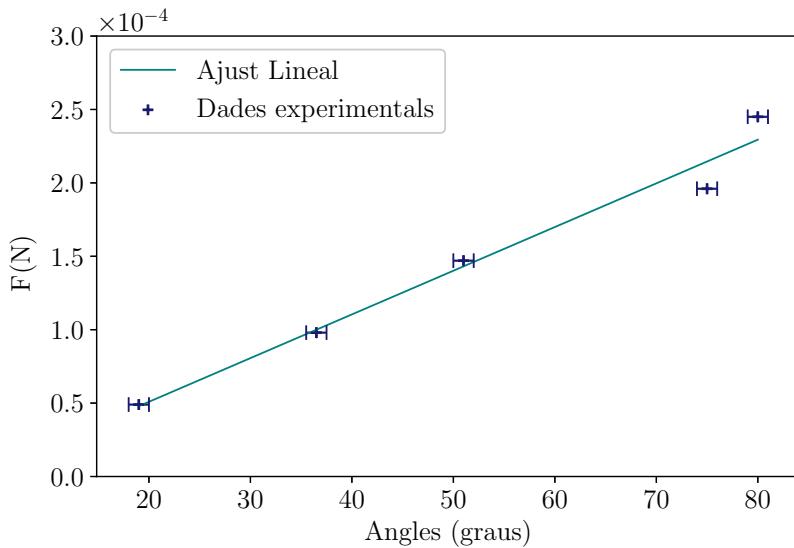


Figura 2.2: Força en funció de l'angle de torsió. Resultats de la regressió lineal: Pendent = $(2.976 \pm 0.005) \cdot 10^{-6} \text{ N/}^\circ$, Ordenada en l'origen = $(-8.64 \pm 0.03) \cdot 10^{-6} \text{ N}$, $r^2 = 0.975$

2.4 Conclusions

- A partir del valor de $\mu_0 = (1.26 \pm 0.02) \cdot 10^{-6} \text{ N/A}^2$ i la relació lineal entre la força i la intensitat al quadrat trobats en la primera part de la pràctica concloem que l'Equació (2.3) és vàlida per a descriure la força entre fils paral·lels pels quals circula la mateixa intensitat.
- Tot i que l'Equació (2.3) suposa que un dels dos fils és infinit i en aquesta pràctica ambdós són finits, el fet que la seua separació r sigui en tot moment molt menor que la seua longitud, ens permet considerar que el camp que crea el fil inferior en els punts del fil superior és aproximadament com el d'un fil infinit. Els resultats ens mostren que aquesta és una bona aproximació.
- Hem comprovat que hi ha una relació lineal entre la força de torsió i l'angle de torsió i hem determinat que la constant de proporcionalitat val $k = (2.976 \pm 0.005) \cdot 10^{-6} \text{ N/}^\circ$.
- Hem mesurat de manera acurada la component horitzontal del camp magnètic terrestre a partir de la força que aquest exerceix sobre un corrent. Per tant també comprovem la validesa de l'Equació (2.2).

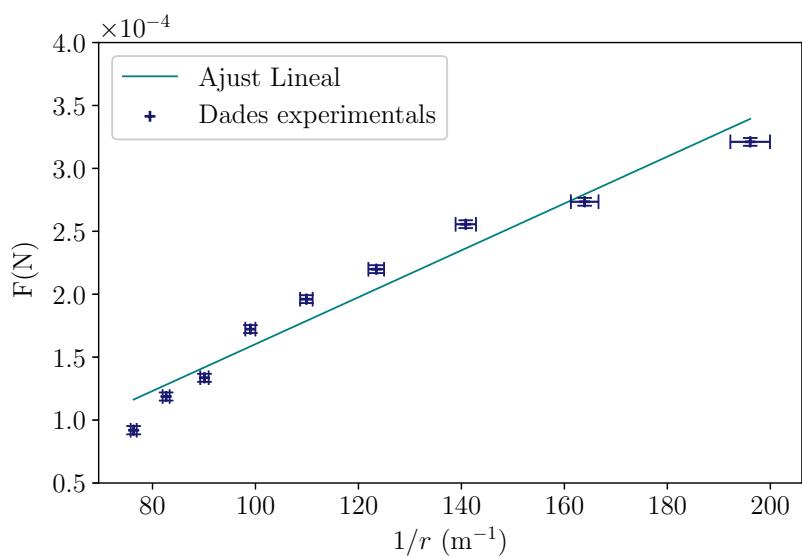


Figura 2.3: Força entre els fils en funció de la inversa de la distància que els separa. Resultats de la regressió lineal: Pendent = $(1.863 \pm 0.001) \cdot 10^{-6}$ Nm, Ordenada en l'origen = $(-2.59 \pm 0.02) \cdot 10^{-5}$ N, $r^2 = 0.953$

PRÀCTICA 3

Circuit RLC en sèrie

3.1 Introducció

Els objectius d'aquesta pràctica són:

- Estudiar els valors de les freqüències de ressonància i de tall per a un circuit RLC en sèrie en règim permanent sotmès a un senyal sinusoidal d'entrada
- Estudiar els diferents tipus de solucions que presenta l'equació d'un oscil·lador harmònic amortit mitjançant un circuit RLC en sèrie en règim transitori sotmès a un senyal rectangular d'entrada amb resistència variable.

3.1.1 Règim permanent. Senyal sinusoidal

Per a un circuit RLC en sèrie amb resistència total R , capacitat C i inductància L es defineix la impedància com $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$ i l'angle de desfasament ϕ com aquell en què $\tan(\phi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$

Resolent l'equació corresponent, s'obté que la intensitat que travessa un circuit RLC en sèrie a què s'està subministrant un voltatge $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ és $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \phi)$, on $I_0 = \frac{V_0}{Z}$.

Es defineix la freqüència de ressonància com aquella en què la impedància és mínima per un circuit fixat, compleix

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad (3.1)$$

Observem que per aquesta freqüència $\phi = 0$, és a dir, el voltatge subministrat està en fase amb la intensitat.

Es defineix el guany a la resistència com $T_R(\omega) = \frac{V_R}{V_0}$, on $V_R = IR_R$ és la caiguda de

potencial a la resistència i R_R és la resistència de la resistència. Es té que

$$T_R(\omega) = \frac{R_R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (3.2)$$

Es defineixen les freqüències de tall com aquelles en què $T_R(\omega) = \frac{R_R}{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, o en què equivalentment,

$$R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 = 2R_R^2 \quad (3.3)$$

Manipulant algebràicament, s'arriba a que la diferència entre les dues freqüències de tall, coneguda com amplada de banda complexa

$$\Delta\omega = \frac{\sqrt{2R_R^2 - R^2}}{L} \approx \frac{R}{L} \quad (3.4)$$

essent vàlida l'aproximació quan la resistència del circuit prové pràcticament íntegrament de la resistència.

3.1.2 Règim transitori. Senyal rectangular

Quan un circuit RLC és sotmés a un senyal rectangular periòdic el tipus de resposta depèn del signe de

$$\Delta = \left(\frac{R}{L} \right)^2 - \frac{4}{LC} \quad (3.5)$$

Quan és negatiu, descriu oscil·lacions amortides al voltant del voltatge de la font amb freqüència

$$\omega_p = \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \right)} \quad (3.6)$$

Quan és zero, es diu que està en amortiment crític i quan és positiu, sobreamortit. En cap d'aquests casos s'observen oscil·lacions.

3.2 Mètode experimental

3.2.1 Règim permanent. Senyal sinusoidal

A aquesta secció s'explica com s'han obtingut les freqüències de ressonància i tall, així com el guany a la resistència a freqüència de ressonància d'un circuit RLC sotmès a un voltatge d'entrada sinusoidal.

Es munta el circuit tal com apareix a la Figura 3.1. La inductància és de 22 mH; la capacitat, de 15 nF; i la resistència, primer de 2700 Ω i després, de 270 Ω. Es connecta a una font de corrent alterna i sinusoidal de freqüència variable i a un oscil·loscopi de doble traça.

3.2.1.1 Freqüència de ressonància i guany

Es configura l'oscil·loscopi en mode DUAL perquè mostri la caiguda de potencial a la font i a la resistència, a on està en fase amb la intensitat, simultàniament. Es varia la freqüència de la

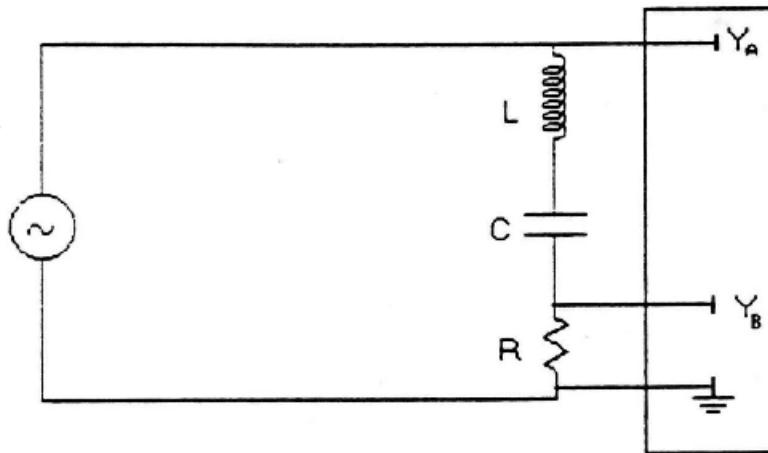


Figura 3.1: Circuit règim permanent. Y_a i Y_b marquen les connexions amb l'oscil·oscopi.

font fins que ambdues caigudes estiguin en fase. D'acord amb la teoria de la introducció, això correspon a la ressonància. Es mesura la freqüència a la que això ocorre i els voltatges de la font i caigut a la resistència.

3.2.1.2 Freqüències de tall

Amb l'oscil·oscopi en la mateixa configuració, es varia la freqüència de la font fins arribar a les freqüències de tall. D'acord amb l'Equació (3.3), n'existeixen dues. Es mesuren les dues freqüències a què això ocorre.

3.2.2 Règim transitori. Senyal rectangular

A aquesta secció s'explica com s'han obtingut el pseudo-període en règim transitori d'un circuit sotmès a un voltatge d'entrada rectangular i com s'han visualitzat els diferents tipus de solucions que apareixen en l'oscil·lador amortit.

Es munta el circuit tal com apareix a la Figura 3.2. La inductància és de 33 mH; la capacitat, de 330 pF; i la resistència, de 180 Ω . Es connecta a una font de corrent alterni rectangular de freqüència variable i a un oscil·oscopi. Si es realitza el muntatge a partir del de l'apartat anterior, cal tenir en compte que s'ha intercanviat l'ordre de la resistència i el condensador i que només hi ha un canal cap a l'oscil·oscopi.

3.2.2.1 Pseudo-període

Es subministra voltatge a freqüència igual a $\frac{1}{10T_p}$, on T_p és l'obtingut amb l'Equació (3.6). Es mesura el període de les oscil·lacions mostrades a l'oscil·oscopi.

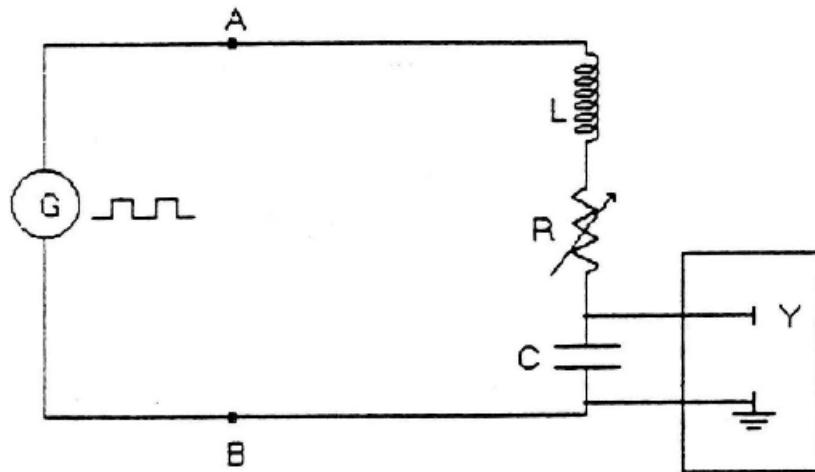


Figura 3.2: Circuit règim transitori. Y marca la connexió amb l'oscil·loscopi.

3.2.2.2 Visualització distintes solucions

Es substitueix la resistència fixa per una de variable que pugui donar de 0 a 100 k Ω . Es varia la resistència per observar els tres tipus de solucions descrites a la introducció. Quan s'observa l'amortiment crític, es mesura el valor de la resistència a què això ocorre.

3.3 Resultats i discussió

3.3.1 Règim permanent. Senyal sinusoidal

Els valors per la inductància i la capacitat exposats a la metodologia, a saber, 22 mH i 15 nF, així com les resistències, 2700 Ω i 270 Ω s'han suposat sense incertesa.

3.3.1.1 Freqüència de ressonància i guany

A partir de l'Equació 3.1 es troba un valor per la freqüència angular de ressonància ω_r que correspon a una freqüència $f_r = 8.761$ kHz pels dos casos. Assumint que la resistència total del circuit és la de la resistència, car no coneixem la contribució de la resta de components, i a partir de l'Equació (3.2) obtenim un guany teòric de 1 pels dos casos a la ressonància.

Per la resistència de 2700 Ω , la freqüència mesurada és de (8.7 ± 0.2) kHz, compatible amb la teòrica amb un error relatiu de 0.7%. El guany a la resistència és (0.99 ± 0.01) , compatible amb el teòric amb un error relatiu de 1%.

Per la resistència de 270 Ω , la freqüència mesurada és de (8.4 ± 0.2) kHz, compatible amb la teòrica dintre de dues incerteses amb un error relatiu de 4%. El guany a la resistència és (0.73 ± 0.01) , incompatible amb el teòric amb un error relatiu de 27%.

Per entendre la gran desviació del guany teòric respecte l'experimental en el segon cas s'ha de tenir en compte que s'ha suposat que la resistència total del circuit és la de la resistència. En el primer cas, la resistència addicional és menyspreable en comparació a la de la resistència; en el segon, no. A partir de l'Equació (3.2) es troba que la incompatibilitat es pot explicar

amb una resistència addicional de $100\ \Omega$.

3.3.1.2 Freqüències de tall

A partir de l'Equació (3.3) es troben valors de $F_{t1} = 22.886\ \text{kHz}$, compatible amb la mesurada, $F_{m1} = (23.2 \pm 0.2)\ \text{kHz}$ en dues incerteses amb error de 1.4% i $F_{t2} = 3.353\ \text{kHz}$, compatible amb la mesurada, $F_{m2} = (3.5 \pm 0.2)\ \text{kHz}$ amb error de 2.2% per les freqüències de tall pel valor gran de la resistència.

Per la resistència petita, es troben valors de $f_{t1} = 9.792\ \text{kHz}$, incompatible amb la mesurada, $f_{m1} = (8.6 \pm 0.2)\ \text{kHz}$ amb error de 12% i $f_{t2} = 7.838\ \text{kHz}$, compatible amb la mesurada, $f_{m2} = (3.5 \pm 0.2)\ \text{kHz}$ en dues incerteses amb error de 4.1% per les freqüències de tall.

Observem que l'amplada de banda és major en el segon cas que en el primer, fet que concorda amb la dependència de l'amplada amb la resistència descrita a l'Equació (3.4). Per tant, per tenir una amplada estreta cal una resistència petita.

3.3.2 Règim transitori. Senyal rectangular

3.3.2.1 Pseudo-període

A partir de l'Equació (3.6) s'obté un valor pel pseudo-període de $2.1 \cdot 10^{-5}\ \text{s}$ que és incompatible amb el mesurat, $(2.5 \pm 0.1) \cdot 10^{-5}\ \text{s}$ amb un error del 19%. L'explicació d'aquesta desviació serà exposada al següent apartat.

3.3.2.2 Visualització distintes solucions

S'ha aconseguit veure les tres classes de solucions descrites a la teoria. Les diferents solucions corresponen a les Figures 3.3, 3.4 i 3.5.

A partir de l'Equació (3.5) s'obté un valor per la freqüència crítica de $20\ \text{k}\Omega$ incompatible amb l'experimental, $(16.1 \pm 0.1)\ \text{k}\Omega$.

Per explicar aquesta incoherència s'ha de tenir en compte que el condensador utilitzat té una capacitat molt baixa, de manera que al menysprear la capacitat dels components del circuit es comet un error considerable. Un argument que corrobora aquesta hipòtesi és que si s'utilitza el valor per $\frac{1}{LC}$ obtingut a partir de l'Equació (3.5) i el valor experimental per la resistència crítica i es substitueix a l'Equació (3.6), es troba un valor pel pseudo-període de $2.6 \cdot 10^{-5}\ \text{s}$, que és compatible amb l'experimental amb error de 4%.

3.4 Conclusions

- Hem comprovat experimentalment com depèn la freqüència de ressonància d'un circuit RLC en sèrie de la resistència, obtenint resultats compatibles amb la teoria pels dos valors de resistència.
- Hem vist que l'ample de banda a resistències grans és major que a resistències petites, tal com havíem predit.
- Hem après que s'introduceix error al no considerar la resistència i la capacitat totals del circuit.



Figura 3.3: Oscil·lacions amortides.

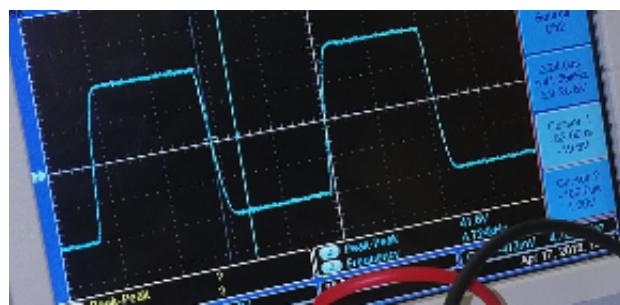


Figura 3.4: Oscil·lacions críticament amortides.

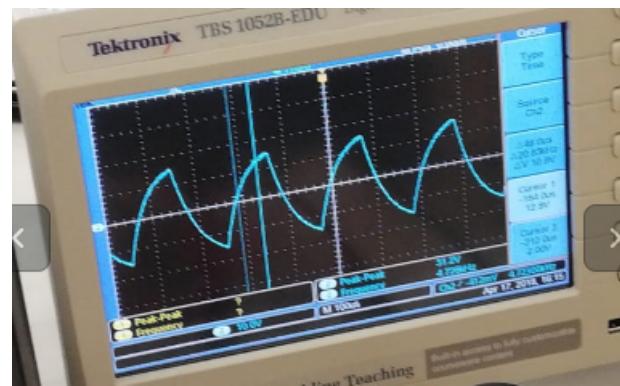


Figura 3.5: Oscil·lacions sobreamortides.

- Hem visualitzat els tres tipus de solucions de l'equació de l'oscil·lador amortit.

PRÀCTICA 4

Inductància mútua i transformadors

4.1 Introducció

Un transformador és un dispositiu que mitjançant el fenomen d'inducció electromagnètica permet modificar el voltatge i la intensitat d'un corrent altern. Més precisament, està format per dues bobines que generen un flux magnètic variable a l'interior de les quals es col·loca un nucli de permeabilitat elevada per tal de concentrar les línies de camp magnètic.

D'ara endavant els subíndexs 1 i 2 faran referència a la bobina primària, on entra el corrent de la font; i a la bobina secundària, d'on surt el corrent transformat, respectivament. D'aquesta manera, a partir de la llei de Faraday es pot deduir que a un transformador en què tot el flux magnètic Φ passa d'una bobina a l'altra la relació entre voltatges d'entrada i sortida V_1 i V_2 compleix:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(d\Phi_1/dt)}{(d\Phi_2/dt)} = \frac{n_1}{n_2} \quad (4.1)$$

on n és el nombre d'espires de cada bobina.

No obstant això, a la realitat sempre hi ha pèrdues energètiques i generalment el voltatge de sortida obtingut és menor que l'esperat segons l'Equació (4.1). Així doncs, s'obtenen resultats més acurats si es considera el sistema com un circuit de corrent altern amb una impedància Z connectada a la bobina secundària. Plantejant el problema emprant les lleis de Kirchhoff s'obtenen solucions aproximades pels casos ¹:

- Impedància molt més gran que les reactàncies de les bobines, $Z \gg X, \alpha^2 X$. $X, \alpha^2 X$ amb $\alpha = \frac{n_2}{n_1}$ són les reactàncies de la bobina primària i secundària respectivament. Hom troba:

$$\frac{V_2}{V_1} = k\alpha \quad (4.2)$$

$$X = \frac{V_1}{I_1} \quad (4.3)$$

¹ A la realització de l'experiment sempre es considerarà que les reactàncies de les bobines són molt més grans que les seues resistències ôhmiques.

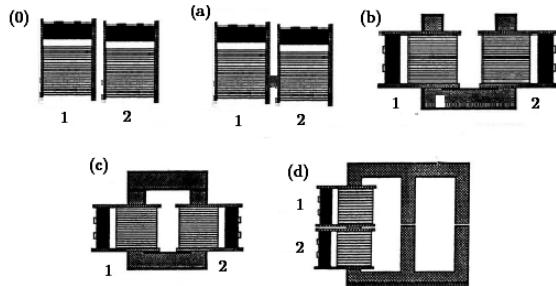


Figura 4.1: Diverses configuracions de transformadors. Indicades bobina primària i bobina secundària.

on k és el *coeficient d'acoblament*. Aquest quantifica l'eficiència d'un transformador i $0 < k \leq 1$. Veiem que per $k = 1$ tenim el cas ideal.

- Impedància molt petita, $Z \ll X, \alpha X$:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{k\alpha Z}{\sqrt{Z^2 + X^2\alpha^4(k^2 - 1)^2}} \quad (4.4)$$

- Si la impedància és de l'ordre de les reactàncies del secundari, $Z \approx \alpha^2 X$ i $k \approx 1$ pot emprar-se com a aproximació l'Equació (4.2).

Tot plegat, estudiarem el fenomen de la inducció mútua entre dues bobines amb dos objectius principals:

- Analitzar de què i com depén l'eficiència d'un transformador mitjançant l'estudi de diverses configuracions.
- Estudiar el comportament d'aquests sistemes als casos en què es varia l'impedància de càrrega connectada a la bobina secundària.

4.2 Mètode experimental

4.2.1 Estudi de les variables d'un transformador

En aquesta part es mesurarà primerament com es transforma el voltatge per diverses configuracions i un mateix corrent altern. El muntatge consisteix d'un generador connectat a la bobina primària i un voltímetre connectat a la bobina secundària. Ambdues bobines inicialment amb 400 voltes.

D'aquesta manera es mesuraran els voltatges de sortida per les 5 configuracions diferents que es mostren a la Figura 4.1. Es compararà el guany $\frac{V_2}{V_1}$ amb l'ideal donat per l'Equació (4.1). Notem que la configuració (0) i la configuració (a) només difereixen en el nucli de ferro que hi ha a la segona.

A continuació es prendrà la configuració més eficient, ço és, la que doni un millor resultat del voltatge de sortida. Amb aquesta, es provaran totes les combinacions possibles de bobines primàries i secundàries tenint en compte que es disposa de bobines de 200, 400, 800, 1600 i 3200 voltes i es comprovaran els resultats segons l'Equació (4.1).

4.2.2 Estudi de les intensitats d'entrada i sortida

En aquesta segona part es mantindrà la configuració (d). Primerament es mesuraran les reactàncies de les bobines de 400 i 800 voltes col·locant-les al circuit primari i deixant la sortida del transformador sense connexions. Es pot entendre que tenim una impedància de càrrega infinita de forma que podem emprar l'Equació (4.3).

Posteriorment, es connectarà al circuit secundari una impedància de càrrega per mesurar voltatge i corrent d'entrada i sortida. Variarem aquesta impedància per valors de 10,100 i 100 Ω . Les bobines seran de 400 voltes al primari i emprarem les de 400 i 800 al secundari. Per conèixer el valor dels guanys teòrics necessitarem el valor de k que haurem calculat prèviament emprant l'Equació (4.2) fent l'aproximació $Z \rightarrow \infty$. Per això es mesuraran novament els voltatges de sortida a circuit obert per aquestes configuracions.

En aquesta última part podríem preguntar-nos què ocorrerà amb els voltatges de sortida atenent al caràcter no conservatiu del camp elèctric a l'experiment, es mantindran constants? O també, com depenen les intensitats als circuits primari i secundari de la impedància de càrrega col·locada al secundari?

4.3 Resultats i discussió

4.3.1 Estudi de les variables d'un transformador

Primerament s'ha fixat un voltatge d'entrada a la bobina primària de $V_1 = (6.07 \pm 0.01)$ V. Aquest es mantindrà constant durant la secció.

A continuació estudiem els resultats corresponents a fer $n_1 = n_2 = 400$ en diferents configuracions. Es mostren a la Taula 4.1.

Taula 4.1: Voltatges de sortida i guanys per les diferents configuracions. Voltatge V_2 amb incertesa ± 0.01 V.

| Configuració | V_2 (V) | $\frac{V_2}{V_1}$ |
|--------------|-----------|---------------------|
| 0 | 0.24 | 0.0400 ± 0.0016 |
| a | 2.55 | 0.4201 ± 0.0018 |
| b | 2.20 | 0.3624 ± 0.0018 |
| c | 5.33 | 0.8781 ± 0.0022 |
| d | 5.91 | 0.9736 ± 0.0023 |

Observem primerament que atenent a la relació entre el nombre d'espires d'ambdues bobines i a l'Equació (4.1) hauríem d'esperar en cada cas un guany d'1. No obstant això, és evident que els resultats disten molt de la situació ideal. Només a les dos últimes configuracions s'obtenen voltatges de sortida pròxims als d'un transformador ideal sent la configuració (d) la que dóna un millor resultat.

Creiem que val la pena mencionar també la notòria millora que s'aconsegueix col·locant un nucli de ferro a l'interior de les bobines. En aquest sentit, només hem d'observar els resultats de les configuracions (0) i (a), que només difereixen en la presència d'aquest nucli.

El millor rendiment de la configuració (d) es deu precisament a que un major nombre de línies de camp generades per la bobina primària arriben a la bobina secundària. Això es deu principalment a dos motius: a la proximitat entre ambdues bobines i a la presència d'un nucli més gran entre les bobines que gràcies a la seu alta permeabilitat augmenta el camp generat per la primària.

Taula 4.2: Voltatges de sortida per diferents combinacions de les bobines primàries i secundàries en la configuració (d) i valors experimentals de $\frac{V_2}{V_1} \frac{n_1}{n_2}$. Voltatges V_2 amb incertesa ± 0.01 V.

(a) $n_1 = 200$

| n_2 | V_2 (V) | $\frac{V_2}{V_1} \frac{n_1}{n_2}$ |
|-------|-----------|-----------------------------------|
| 400 | 11.87 | 0.9778 ± 0.0018 |
| 800 | 23.20 | 0.9555 ± 0.0016 |
| 1600 | 46.80 | 0.9638 ± 0.0016 |
| 3200 | 94.5 | 0.9730 ± 0.0016 |

(b) $n_1 = 400$

| n_2 | V_2 (V) | $\frac{V_2}{V_1} \frac{n_1}{n_2}$ |
|-------|-----------|-----------------------------------|
| 200 | 2.97 | 0.9786 ± 0.0037 |
| 400 | 5.91 | 0.9736 ± 0.0023 |
| 800 | 11.42 | 0.9405 ± 0.0018 |
| 1600 | 22.50 | 0.9267 ± 0.0016 |
| 3200 | 46.00 | 0.9473 ± 0.0016 |

(c) $n_1 = 800$

| n_2 | V_2 (V) | $\frac{V_2}{V_1} \frac{n_1}{n_2}$ |
|-------|-----------|-----------------------------------|
| 200 | 1.43 | 0.9417 ± 0.0068 |
| 400 | 2.71 | 0.8929 ± 0.0036 |
| 1600 | 11.35 | 0.9349 ± 0.0017 |
| 3200 | 22.70 | 0.9349 ± 0.0016 |

(d) $n_1 = 1600$

| n_2 | V_2 (V) | $\frac{V_2}{V_1} \frac{n_1}{n_2}$ |
|-------|-----------|-----------------------------------|
| 200 | 0.71 | 0.9344 ± 0.0013 |
| 400 | 1.43 | 0.9410 ± 0.0068 |
| 800 | 2.83 | 0.9325 ± 0.0036 |
| 3200 | 11.49 | 0.9465 ± 0.0018 |

(e) $n_1 = 3200$

| n_2 | V_2 (V) | $\frac{V_2}{V_1} \frac{n_1}{n_2}$ |
|-------|-----------|-----------------------------------|
| 200 | 0.35 | 0.923 ± 0.026 |
| 400 | 0.71 | 0.937 ± 0.013 |
| 800 | 1.40 | 0.9226 ± 0.0068 |
| 1600 | 2.82 | 0.9292 ± 0.0036 |

Ara presentem a la Taula 4.2 les mesures dels voltatges de sortida per totes les combinacions possibles de bobines en la configuració (d) -la que ha resultat més eficient-.

En vista dels resultats, podem afirmar que els resultats no són compatibles amb els predicts per l'Equació (4.1). Tanmateix, això era d'esperar en tant que no tenim transformadors ideals. En aquesta línia mencionem que tot i existir pèrdues energètiques el comportament dels diferents transformadors és bastant pròxim a l'ideal ja que per tots els casos s'obtenen valors de $\frac{V_2}{V_1} \frac{n_1}{n_2}$ propers a l'1 ideal. Més precisament, aquests valors són tots ells majors a 0.9 a excepció del cas $n_1 = 800, n_2 = 400$ la qual cosa mostra el bon rendiment de tots els transformadors estudiats.

Altre aspecte interessant és que el fet d'intercanviar bobina primària i secundària no dóna lloc al mateix rendiment. De fet s'observa que són més eficients els transformador amb menor nombre de voltes a la bobina primària. Això es pot explicar tenint en compte que per un menor nombre de voltes el flux generat serà menor i en conseqüència serà més difícil que un major nombre de línies de camp escapi del nucli de ferro, evitant així pèrdues d'energia.

4.3.2 Estudi de les intensitats d'entrada i sortida

El voltatge d'entrada en aquesta segona part ha continuat sent $V_1 = (6.07 \pm 0.01)$ V i s'ha emprat durant tot l'experiment la configuració (d).

Com hem esmentat, primerament en circuit obert s'han mesurat les reactàncies de les bobines emprades. Els voltatges han resultat els mateixos que a la secció anterior i per les intensitats s'ha obtingut: $I_{1400} = (0.0138 \pm 0.0001)$ A i $I_{800} = (0.0534 \pm 0.0001)$ A on els subíndex fan referència al nombre d'espires de la bobina primària en cada cas. Emprant l'Equació (4.3) hom troba: $X_{400} = (113.67 \pm 0.28)$ Ω i $X_{800} = (439.9 \pm 3.3)$ Ω . Segons [1],

la reactància d'una bobina és directament proporcional al seu nombre de voltes al quadrat de manera que s'hauria de donar $X_{800} = 4X_{400}$. Els resultats obtinguts confirmen aquesta relació en bona aproximació tot i que no són compatibles.

A la següent part emprarem com ja s'ha esmentat 3 impedàncies de càrrega diferents. Per calcular els diferents guanys teòrics s'ha procedit segons:

- Si $Z = 10$ llavors $Z \ll X_{400}, X_{800}$ i s'ha fet servir l'Equació (4.4).
- I si $Z = 1000$ o $Z = 100$ llavors $Z \gg X_{400}, X_{800}$ al primer cas, o bé Z és de l'ordre de la bobina secundària. Així s'ha emprat l'Equació (4.2).

Al seu torn els valors dels coeficients d'acoblament, necessaris pel càlcul dels guanys teòrics s'han estimat en: $k_{4/4} = (0.9539 \pm 0.0022)$ i $k_{4/8} = (0.9217 \pm 0.0017)$ pels casos en què al secundari hi ha una bobina de 400 i 800 voltes respectivament. Prèviament, ja hem comentat, s'han mesurat els voltatges a circuit obert per cada transformador. Es presenten els resultats segons els dos transformadors a la Taula 4.3.

Taula 4.3: Intensitats d'entrada i sortida, voltatges de sortida, guanys teòrics i experimentals i errors relatius d'aquests per les diferents impedàncies de càrrega. Intensitats amb incertesa ± 0.0001 A i voltatges amb incertesa ± 0.01 V.

| (a) $n_2 = 400$ | | | | | |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|----------------------------------|---------------------------------|
| Z | I_1 (A) | I_2 (A) | V_2 (V) | $(\frac{V_2}{V_1})_{\text{exp}}$ | $(\frac{V_2}{V_1})_{\text{th}}$ |
| 10 | 0.3300 | 0.3100 | 3.30 | 0.5437 ± 0.0019 | 0.6663 |
| 100 | 0.0725 | 0.0425 | 5.22 | 0.8600 ± 0.0022 | 0.9539 |
| 1000 | 0.0527 | 0.0052 | 5.44 | 0.8962 ± 0.0022 | 0.9539 |

| (b) $n_2 = 800$ | | | | | |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|----------------------------------|---------------------------------|
| Z | I_1 (A) | I_2 (A) | V_2 (V) | $(\frac{V_2}{V_1})_{\text{exp}}$ | $(\frac{V_2}{V_1})_{\text{th}}$ |
| 10 | 0.5300 | 0.2500 | 2.60 | 0.4283 ± 0.0018 | 0.2668 |
| 100 | 0.1433 | 0.0626 | 9.80 | 1.6145 ± 0.0031 | 1.8435 |
| 1000 | 0.0613 | 0.0101 | 10.60 | 1.7463 ± 0.0033 | 1.8435 |

Observem doncs que en general els guanys no són compatibles amb els valors teòrics. No obstant això en la majoria dels casos s'obtenen valors molt aproximats els errors relatius dels quals oscil·len entre un 9% i un 15%. El casos que més difereixen del valor teòric són els corresponents a les mesures amb $Z = 10 \Omega$. Això es deu d'una banda a la gran influència del coefficient k que pot presentar errors en tant que ha estat determinat experimentalment; i d'altra al fet que l'Equació (4.4) és realment una aproximació.

D'altra banda mirant la Taula 4.3 hom podria preguntar-se per què si es fixa una determinada configuració i es varien les impedàncies de càrrega no només canvia la intensitat sinó que també ho fa el voltatge de sortida. Com el propi nom indica, s'estan mesurant voltatges, és a dir, integrals de línia del camp elèctric i no diferències del potencial escalar. Recordem que a l'experiment no ens trobem davant d'una situació estàtica i per tant el camp elèctric deixa de ser conservatiu.

Per últim, repassem breument en vista dels resultats el que ocorre dins del transformador. Sabem que el flux variable de la bobina primària induceix un corrent a la bobina secundària. A més, tret de pèrdues de potència, el producte entre voltatge i intensitat serà el mateix als dos circuits i hem vist que podem relacionar també els voltatges d'entrada i sortida. Així doncs, per una menor impedància del circuit secundari hi haurà un corrent de sortida més gran i seguint les relacions comentades, aquest permetrà un corrent al circuit primari més elevat també. Precisament és aquesta dependència la que s'observa als resultats experimentals i es

poden observar grans variacions en els corrents d'ambdós circuits en fer variar les impedàncies de càrrega. En particular observem que pels dos transformadors estudiats el fet d'augmentar la impedància de càrrega dos ordres de magnitud implica una disminució de la intensitat d'entrada d'almenys un factor 10.

4.4 Conclusions

- S'han pogut entendre els fonaments teòrics en què es basen els transformadors. Així s'ha comprovat que aquests sempre comporten pèrdues d'energia i s'ha analitzat de quines variables depén l'eficiència d'un transformador.
- S'ha pogut comprovar la relació entre voltatge d'entrada i voltatge de sortida d'un transformador tot tenint en compte el seu caràcter no ideal.
- S'ha comprovat la dependència de les intensitats d'entrada i sortida amb la impedància de càrrega connectada al circuit secundari.
- Més generalment s'ha pogut observar el caràcter no conservatiu del camp elèctric a situacions fóra de l'electrostàtica.

PRÀCTICA 5

Mesura de la resistència d'un metall

5.1 Introducció

Es coneix que els materials condueixen electricitat sempre que al seu interior hi existeixin càrregues mòbils. En el cas dels metalls, són majoritàriament els electrons els que actuen com a portadors de càrrega. A la teoria de l'Estat Sòlid s'estableix que la resistivitat ρ d'un metall (capacitat d'un material a oposar-se a la circulació de corrent elèctric) depèn d'una banda de les propietats estructurals de la xarxa cristal·lina que forma i d'altra, de les impureses presents al material.

L'energia de vibració d'una xarxa està quantificada i el quàntum energètic d'una ona elàstica rep el nom de fonó, que presenta certes similituds amb el fotó. Quan més gran és el nombre de fonons presents en un metall, més dificultat tenen els electrons per moure's dins la xarxa. És per això que la probabilitat que un electró colisioni en un temps τ és proporcional a la resistivitat. Ara bé, com el nombre de fonons és lineal amb la temperatura T , es pot concluir que la resistivitat ho és també. En tant que la resistència R és igual a la resistivitat multiplicada per un valor que depèn de la geometria de la mostra, amb els arguments emprats es té que:

$$R(T) = R_0(1 + \beta T) \quad (5.1)$$

On T és la temperatura en $^{\circ}\text{C}$, R_0 la resistència del metall a $0\ ^{\circ}\text{C}$ i β el coeficient de temperatura de la resistència. L'aproximació de la linealitat és vàlida sempre i quant es la temperatura sigui superior a $15\ \text{K}$ ($-258\ ^{\circ}\text{C}$), ja que a temperatures inferiors a aquest valor la resistència de bastants materials és gairebé constant.

Així doncs, els objectius d'aquesta pràctica són mesurar experimentalment els valors de la resistència d'un fil de platí en funció de la temperatura en un rang de temperatures comprès entre els $-130\ ^{\circ}\text{C}$ i els $290\ ^{\circ}\text{C}$, i comprovar que la dependència entre aquestes dues magnituds és, com prediu la teoria, lineal.

A l'hora de realitzar el procés experimental, s'emprarà un circuit molt semblant al dispositiu del Pont de Wheatstone, anomenat pont de fil. Aquest permet mesurar de forma ràpida i

precisa el valor de resistències elèctriques.

5.2 Mètode experimental

5.2.1 Muntatge previ

Abans de començar amb la presa de mesures, es procedeix al muntatge del pont de fil.

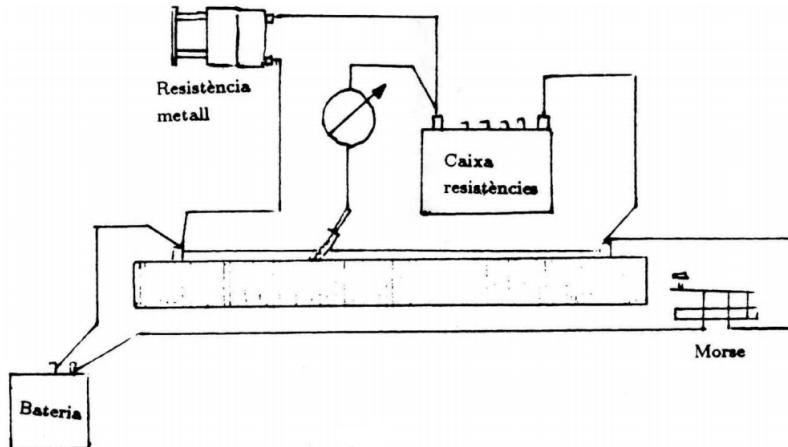


Figura 5.1: Muntatge del circuit amb el pont de fil

La font del circuit és una pila que proporciona un voltatge d'uns 3 V. El corrent hi circula quan es pressiona un interruptor Morse connectat al circuit. Els components restants són una caixa de resistències (la qual permet seleccionar resistències fins a $1000\ \Omega$ aproximadament, amb una precisió de l'ordre dels deciohms), una resistència de platí (un dispositiu metàl·lic amb un fil de platí a dins), el pont de fil i un multímetre que mesuri el pas de corrent d'un punt situat entre les dues resistències mencionades i el cursor del fil del pont (convé situar-lo al punt mig, cada meitat del fil actua com una resistència del mateix valor). La disposició hauria de ser com la de la Figura 5.1.

5.2.2 Mesures a temperatura ambient

Una vegada els elements del circuit estan ben connectats, es procedeix a mesurar la resistència del fil de platí a temperatura ambient. Per tal de fer-ho, com s'ha situat el cursor a la meitat del fil del pont, si no passa corrent pel multímetre llavors la resistència de la caixa és igual a la del fil de platí. En aquest moment es diu que s'ha balancejat el Pont de Wheatstone (o de fil en el nostre cas). S'activa l'interruptor Morse i s'ajusta la resistència de la caixa fins que la intensitat mesurada a l'amperímetre sigui nul·la. S'anota el valor i es pren la temperatura ambient al laboratori amb el termòmetre que s'utilitzarà primer, el de temperatures elevades. Aquesta mesura s'ha de realitzar a posteriori, prèviament al començament de les mesures a temperatures baixes, ja que la temperatura ambient pot haver variat.

5.2.3 Mesures a temperatures elevades

El procés d'escalfament de la resistència es duu a terme mitjançant un forn elèctric. Una vegada engegat, s'hi introduceix la resistència a dins, col·locant el termòmetre per a temperatures altes dins del dispositiu que subjecta el fil de platí. En aquest instant s'ha de manipular la caixa

de resistències de forma que a augment regulars de temperatura (intervals de $4 - 5$ °C) el corrent indicat al multímetre sigui marcant 0 A. Convé que inicialment l'escala sigui de l'ordre de 10 A i posteriorment anar-la baixant per a major precisió. Entre intervals s'anota el valor corresponent de la resistència a la temperatura seleccionada. Es continua amb aquesta seqüència fins que el termòmetre marca uns 290 °C.

Una vegada assolida aquesta temperatura, s'apaga el forn i es treu amb cura la resistència. A continuació es deixen refredar tant la resistència com el termòmetre. Per tal de no esgotar la bateria, convé que entre mesures no es pressioni l'interruptor Morse.

5.2.4 Mesures a temperatures baixes

Quan la resistència torni a ser manipulable, es mesura la temperatura ambient al laboratori però ara amb el termòmetre de baixes temperatures. Per tal de refredar el fil de platí, es submergeix la resistència -només superficialment- dins un recipient amb nitrogen líquid. La forma d'aconseguir mesurar-ne la temperatura és recolzant el termòmetre i situar-lo en contacte amb el fil de platí. Convé regular l'alçada a la qual esta situada el dispositiu de la resistència de tant en tant deguda l'evaporació del nitrogen.

Es deixa refredar el sistema fins que el termòmetre marqui uns -130 °C. El procediment és el mateix que abans, però ara es deixa que la resistència es vagi escalfant a mesura que va assolint l'equilibri tèrmic amb l'entorn. Una vegada preses totes les dades en els dos casos, es representa R en funció de T i es determina el valor de β de l'Equació 5.1 per al platí.

5.3 Resultats i discussió

5.3.1 Temperatura ambient

Tenim que el valor del voltatge subministrat per la pila és $V = (3.00 \pm 0.01)$ V. En tancar el circuit, a una temperatura ambient $T' = (26 \pm 1)$ °C el valor mesurat per a la resistència de platí balancejant el pont es correspon a $R' = (109.4 \pm 0.1)$ Ω.

5.3.2 Temperatures altes

Es presenten a continuació els resultats obtinguts a la primera part de la pràctica. Els valors presos experimentalment es representen amb un total de 62 punts.

Els intervals entre mesura i mesura són gairebé constants. El muntatge afavoreix el fet que tant la punta del termòmetre com la resistència estiguin en equilibri tèrmic amb el forn i per tant, estiguin ambdós a temperatura molt semblant. Es pot observar que no hi ha cap desviació exagerada.

L'incertesa associada tant a la resistència com a la temperatura té origen únicament instrumental, corresponent a ± 0.1 Ω i ± 1 °C respectivament. Per aquest motiu i la disposició de dades de la Figura 5.2, pot semblar que les barres d'error no hi apareixen. Les dades sobre la regressió lineal es detallen més endavant.

5.3.3 Temperatures baixes

En aquesta part, els intervals de temperatura són una mica més irregulars, amb un total de 57 punts experimentals. El dispositiu que subjecta la resistència i el termòmetre s'han hagut de

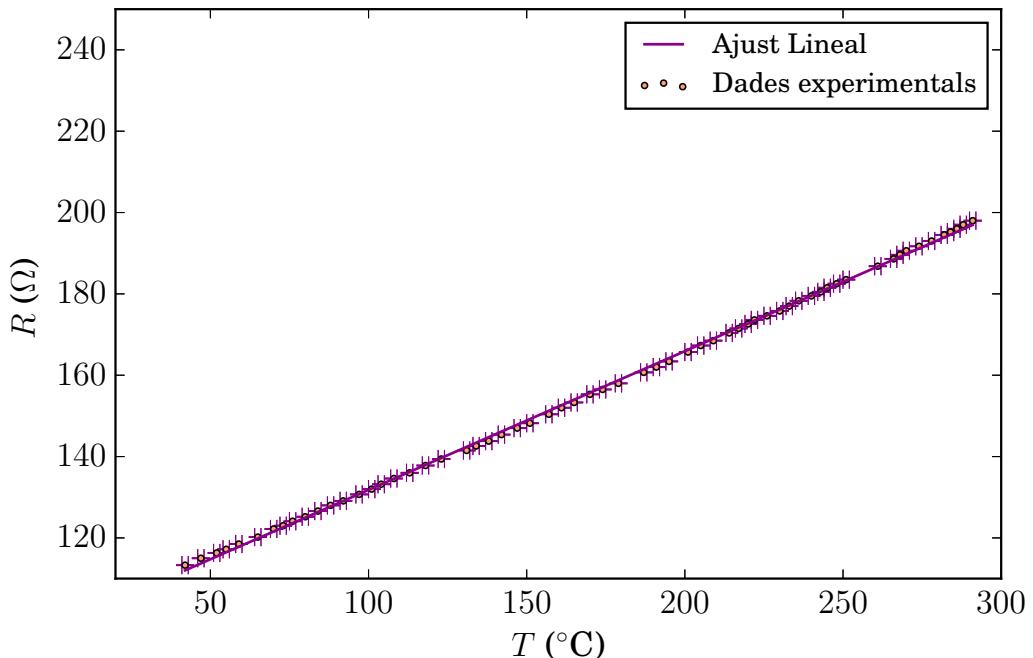


Figura 5.2: Resistència en funció de la temperatura (rang de temperatures altes).

regular per tal que es mantingués el contacte amb el nitrogen i la temperatura no es disperi. Seguidament es representen els valors obtinguts.

Notis que ara el muntatge no permet que els resultats siguin tan exactes com a la primera part. El fet que el termòmetre, a part d'estar amb contacte amb la resistència del fil de platí, toqui també el metall del dispositiu, pot haver influït en els resultats. El dispositiu és el que esta en contacte directe amb el nitrogen i es refreda més ràpidament. A l'inici de les mesures possiblement no s'hagi assolit l'equilibri tèrmic i la temperatura mesurada sigui inferior a la pròpia del fil de platí. Això explica el fet que els primers punts estiguin una mica per sota de la recta de regressió, ampliat a la Figura 5.3 per a major detall. A mesura que la temperatura s'acosta a la temperatura ambient del laboratori, per tal com és el muntatge, gran part de la punta del termòmetre intercanvia calor amb el l'aire del laboratori i les temperatures mesurades són una mica superiors a les esperades, com es pot veure també al *zoom* dret de la Figura 5.3.

La part de les incerteses és exactament igual ja que els dispositius de mesura emprats tenen la mateixa incertesa d'origen instrumental. El mateix comentari sobre les barres d'incertesa de la Figura 5.2 es pot fer per la Figura 5.3.

5.3.4 Determinació de β i discussió

Per tal de comprovar la linealitat entre les dues magnituds, es pot fer una regressió lineal amb $Y = R$ i $X = T$ de forma que la recta de regressió sigui de la forma $Y = AX + B$. Comparant aquesta expressió amb l'Equació 5.1 es té que $R_0 = B$ i $\beta R_0 = A$. Per tal d'obtenir el valor de β simplement s'ha de dividir A entre R_0 . Analitzarem aquestes dades per a cada cas separat. Es consideren els subíndex a i b per als resultats de temperatures altes i temperatures baixes, respectivament.

A la primera part, s'obté que $B_a = (97.6947 \pm 0.0003) \Omega$ i $A_a = (341.101 \pm 0.001) \cdot 10^{-3}$

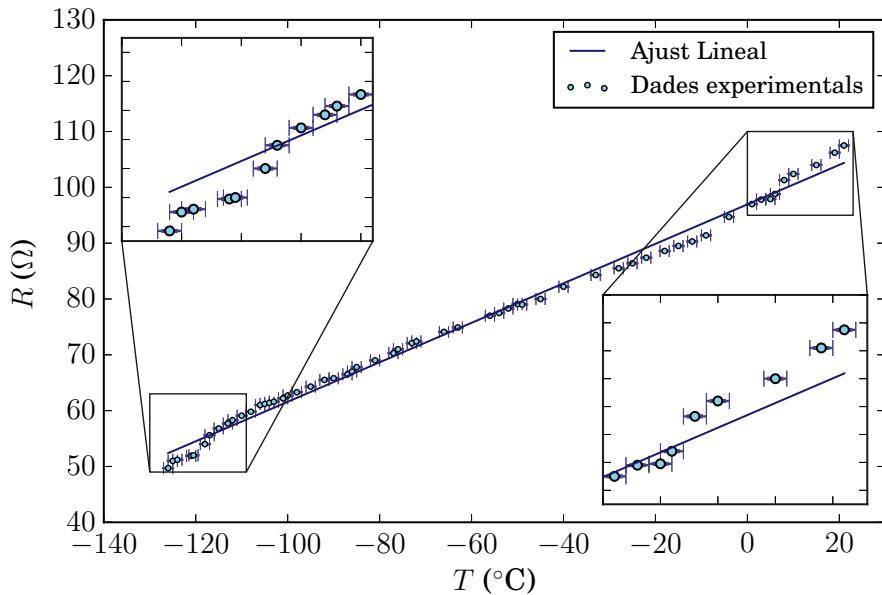


Figura 5.3: Resistència en funció de la temperatura (rang de temperatures baixes).

$^{\circ}\text{C}\cdot\Omega^{-1}$. Per tant, $R_{0_a} = (97.6947 \pm 0.0003) \Omega$ i $\beta_a = (34.91 \pm 0.01) \cdot 10^{-4} ^{\circ}\text{C}^{-1}$.

D'altra banda, a la segona, $B_b = (96.9493 \pm 0.0008) \Omega$ i $A_b = (353.641 \pm 0.012) \cdot 10^{-3} ^{\circ}\text{C}\cdot\Omega^{-1}$. D'aquesta forma, $R_{0_b} = (97.6947 \pm 0.0009) \Omega$ i $\beta_b = (36.48 \pm 0.03) \cdot 10^{-4} ^{\circ}\text{C}^{-1}$.

Té sentit que la incertesa en el pendent sigui major en el segon cas degudes les desviacions que s'han comentat abans. Aquest mateix fet provoca que els valors de β no siguin compatibles. Tot i això, l'error relatiu entre els dos valors obtinguts sigui del 4%. Es pot afirmar que la correlació entre les dues magnituds és lineal ja que en realitzar els ajusts lineals, els valors de r^2 calculats són $r_a^2 = 0.999$ i $r_b^2 = 0.996$.

Segons [2] el coeficient de temperatura del platí és $\beta_{Pt} = 39.2 \cdot 10^{-4} ^{\circ}\text{C}^{-1}$. Aquest és del mateix ordre que els valors que han resultat de l'experiment. La desviació respecte aquest és de l'11% per a β_a i del 7% per a β_b . Un metall amb impureses té un coeficient de temperatura (en general) menor que el mateix metall en estat pur. Aquest és un dels motius pels quals pot ser que els resultats difereixin. Tot i això, la majoria d'errors comesos, possibles causants de les desviacions, siguin deguts a la dificultat de mesurar amb exactitud la temperatura del fil de platí. A més a més, la impossibilitat d'aïllar el sistema també provoca diferències de temperatura no desitjades.

Com s'explica a [3], els termòmetres de platí són dispositius molt semblants a l'utilitzat en aquesta pràctica. La majoria d'aquests empren un fil de platí pur de forma que estan calibrats quan la resistència a $0 ^{\circ}\text{C}$ és de 100Ω . Aquest valor també és compatible amb les dades experimentals.

5.4 Conclusions

- S'ha pogut determinar amb èxit el valor de la resistència del fil de platí a temperatura ambient ($26 ^{\circ}\text{C}$) al laboratori, $R' = (109 \pm 0.1) \Omega$.

- Es pot afirmar que amb el material analitzat a la pràctica, la resistència d'aquest depèn de la temperatura de forma lineal, deguda la proximitat dels coeficients de correlació de les regressions lineals a 1.
- Tot i no entrar en els mateixos rangs, s'han determinat dos valors de β (un per a cada rang de temperatures) corresponents a $\beta_a = (34.91 \pm 0.01) \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ i $\beta_b = (36.48 \pm 0.03) \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, molt propers als vists en la bibliografia.

PRÀCTICA 6

Camps magnètics d'espries i bobines

6.1 Introducció

Les càrregues en moviment generen un camp magnètic, en concret, una intensitat de corrent a través d'un conductor crea un camp magnètic. Aquest, segons la llei de Biot i Savart depén de la geometria del conductor, de la intensitat i del punt on es calculi.

L'objectiu d'aquesta pràctica és comprovar, fixada una intensitat, la dependència del camp magnètic al centre d'una espira respecte del seu radi. Els resultats teòrics prediuen:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \mathbf{e}_z \quad (6.1)$$

on \mathbf{B} és la inducció magnètica, R el radi de l'espira, I la intensitat que hi circula, μ_0 la permeabilitat magnètica del buit i \mathbf{e}_z el vector unitari en la direcció del seu eix. I també, fixat el radi, la dependència respecte del nombre d'espries, que d'acord amb la llei de Biot i Savart obereix:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I N}{2R} \mathbf{e}_z \quad (6.2)$$

on N és el nombre d'espries. Conèixer aquestes dependències ens permetrà trobar la permeabilitat del buit μ_0 .

D'una altra banda, també mesurarem el camp magnètic en els punts de l'eix a l'interior d'una bobina. Veurem com canvia en variar el radi i el nombre de voltes i compararem els resultats amb l'expressió teòrica que determina aquests valors:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I N}{2R} \left(\frac{z + L/2}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} \right) \mathbf{e}_z \quad (6.3)$$

on L és la longitud de la bobina, N és el nombre d'espries, R és el radi i I és la intensitat que circula. S'ha pres con a origen $z = 0$ el punt situat al centre de la bobina. Igualment d'acord amb l'expressió anterior veurem que la relació entre els camps de dos bobines de les mateixes dimensions és justament el respectiu quotient entre el nombre d'espries de cadascuna.

Per a realitzar aquestes mesures s'utilitzarà una sonda Hall, el funcionament de la qual es basa en l'efecte Hall. Aquest consisteix en l'aparició d'un camp elèctric en un conductor pel

qual hi circula un corrent elèctric, degut a la separació de càrregues que produeix un camp magnètic extern amb direcció perpendicular al corrent.

6.2 Mètode experimental

Per a dur a terme la part experimental, es requereix el muntatge d'un circuit al qual es connecten els diversos aparells necessaris per les mesures amb cables conductors. Per tal de fer circular corrent al circuit s'utilitza un generador que permet la tria tant del voltatge com de la intensitat. Aquest només cal engegar-lo a l'hora de prendre les mesures, mentre es prepara el muntatge convé que estigui apagat. Les espires i bobines es col·loquen sobre un suport mòbil al llarg d'un regle graduat per a determinar-ne la posició. En sèrie amb aquests components es connecta un amperímetre, sempre a l'escala de 10 A.

D'altra banda, l'aparell destinat a determinar el camp magnètic al centre de les espires i a l'eix de les bobines, com s'ha mencionat a la introducció, és una sonda Hall. Aquesta està annexada a un teslàmetre que mostra el valor de la intensitat magnètica en mT. Dita sonda es fixa a un suport semblant al de les espires, també situat al regle.

Previ al començament de les mesures, és necessari que s'engegui el teslàmetre i esperar uns minuts fins que el valor del camp magnètic mostrat per pantalla sigui estable. Després s'ha d'ajustar el zero de l'aparell amb la finalitat de no tenir en compte fonts de camp magnètic que no siguin les espires o bobines. Convé anar revisant que el zero estigui correctament ajustat periòdicament al llarg de l'experiment.

6.2.1 Camp magnètic generat per espires

Per a major precisió en els resultats, primer es realitzen mesures del camp al centre d'espires en funció del radi d'aquestes i després en funció del nombre de voltes. Els radis es determinen amb un regle milimetrat. Per tal que no es concentri càrrega en alguna de les parts de la sonda Hall, cada valor de la intensitat de camp magnètic serà la mitjana aritmètica de quatre mesures. La primera i la tercera serà amb la intensitat de corrent en un sentit i la segona i la quarta en sentit contrari. D'aquesta manera també s'eviten camps magnètics residuals. En aquests casos, la intensitat de corrent proporcionada pel generador es fixa a 4 A amb ajuda de l'amperímetre.

6.2.1.1 Camp en funció del nombre de voltes

En aquesta part s'utilitzaran espires amb 1,2 i 3 voltes però amb el mateix radi. Prèviament es mesuraran els radis. Una vegada col·locat el muntatge, d'una volta al suport corresponent. S'ajusta la posició de la sonda Hall de forma que la punta estigui al centre de la circumferència aproximadament -s'ha de tenir en compte que el sensor es troba sobre el primer centímetre de la sonda-. S'engeguen el generador i l'amperímetre, ajustant la intensitat de 4A mencionada. Per a major exactitud, es determina el punt on el camp magnètic és màxim, movent la sonda Hall al llarg de l'eix perpendicular al pla de l'espira que passa pel centre d'aquesta. Una vegada trobat, es pren el valor mostrat per la pantalla del teslàmetre. Posteriorment, es repeteix la mesura intercanviant el sentit del corrent i es reproduceix el mateix procediment -dues vegades en total, per un total de quatre-.

Arribats a aquest punt, s'apaga la font de corrent i es canvia l'espira per una amb dues voltes. Es repeteixen els mateixos passos seguits per la primera. Finalment es fa el mateix amb una espira amb tres voltes. Amb les dades obtingudes i l'Equació (6.2) es calcula el valor de μ_0 mitjançant una regressió lineal.

6.2.1.2 Camp en funció del radi

Novament, com als dos paràgrafs anteriors, tenint el muntatge preparat, es col·loca cada espira al suport i s'ajusta la punta de la sonda Hall. Els passos a seguir són exactament els mateixos però en aquesta part les espires tenen només una volta. S'utilitzen tres espires de radis diferents per a la realització de les mesures. Prèviament s'hauran de mesurar. Amb els resultats es determina el valor de la constant de μ_0 a partir de l'Equació (6.1) i una regressió lineal de B en funció de R^{-1} .

6.2.2 Camp magnètic generat per bobines

En aquesta part de la pràctica, es substitueix el suport de les espires per uns taulons de fusta sobre els quals es situen les diferents bobines. Convé novament ajustar l'alçada i la posició de la sonda per tal que la vareta es situi a l'eix de les bobines. La intensitat de corrent que es fa circular per les bobines ha de ser 1A. La presa de mesures es realitza de forma molt similar a la de la subsecció anterior. Tot i això, ara es pren el valor del camp magnètic a diferents punts de l'eix. Així doncs, necessitem fixar les posicions inicials i finals de la bobina i la posició relativa a un d'aquests punts del suport de la sonda Hall. No és estrictament necessari intercanviar el sentit de corrent en aquesta part en tant que és més interessant aconseguir un gran nombre de mesures per cada bobina.

Es mesura la intensitat de camp magnètic en punts de l'eix de cada bobina separats 1 cm cadascun. Es prendran mesures fóra i dins de les bobines. S'utilitzaran quatre bobines amb de característiques diferents, les dimensions de les quals s'hauran de determinar prèviament. Observem que per tal de poder quantificar l'efecte d'incrementar el nombre de voltes, algunes de les bobines hauran de tenir dimensions si no iguals, molt semblants. Amb els resultats obtinguts s'analitza la dependència del camp magnètic amb el nombre de voltes i el radi. Les dades resultants es comparen amb les calculades teòricament amb l'Equació (6.3).

6.3 Resultats i discussió

A continuació distingirem entre els resultats obtinguts pels camps creats per espires i pels creats per bobines. Primerament però, comentem que les incerteses del teslàmetre, amperímetre i regle mil·límètric han estat estimades segons la seva precisió.

6.3.1 Camp magnètic generat per espires

Comencem amb l'anàlisi dels resultats procedents de fer servir espires amb diferent nombre de voltes però mateix radi. S'ha mesurat primerament que el radi d'aquestes és de $R = (0.0600 \pm 0.0015)$ m. El nombre d'espires de cadascuna és de 1, 2 i 3 voltes respectivament. Així doncs, seguint el procediment esmentat a la secció anterior s'han obtingut els valors de camp magnètic que es representen a la Figura 6.1.

Al mateix gràfic es pot observar la compatibilitat dels tres valors mesurats amb els calculats teòricament. A més a més, aquests difereixen molt poc dels valors teòrics com prova el fet que l'error relatiu de tots tres és aproximadament del 5%. En fer la regressió lineal mitjançant la qual s'estimarà μ_0 s'obté una pendent $(3.875 \pm 0.072) \cdot 10^{-5}$ T, una ordenada a l'origen $(5.8 \pm 1.6) \cdot 10^{-6}$ T i un coeficient de correlació $r^2 = 0.999$.

Remarquem que en aquest cas la regressió lineal és només una eina per trobar μ_0 ja que el gràfic correspon a un conjunt de dades que intenten ajustar-se a una funció discreta. Procedint d'aquesta manera s'obté un valor de la permeabilitat magnètica del buit de $\mu_0 = (1.162 \pm 0.036)$

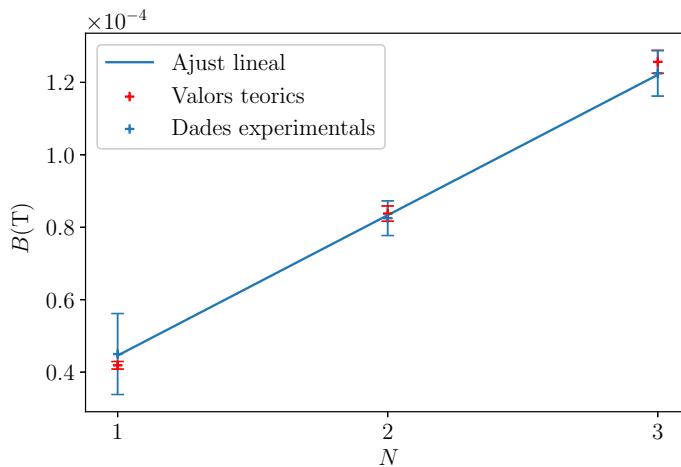


Figura 6.1: Camp magnètic en funció del nombre d'espires i comparació amb els valors teòrics.

$\text{N}\cdot\text{A}^{-2}$. Aquest, tot i que no és compatible amb el valor exacte que té la constant al SI és molt proper, diferint tan sols en un 7%.

Si ara el que fem és mesurar el camp d'espires amb una volta però amb diferents radis els resultats no són molt diferents. Així doncs prèviament es mesuren radis de $R_1 = (0.0300 \pm 0.0015)$ m, $R_2 = (0.0425 \pm 0.0015)$ m i $R_3 = (0.0600 \pm 0.0015)$ m per cadascuna de les espires. Representem a la Figura 6.2 els resultats pels camp magnètics de les diferents espires.

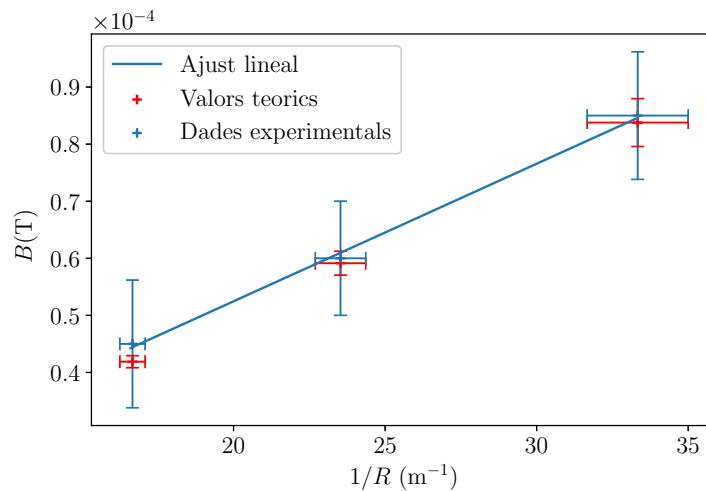


Figura 6.2: Camp magnètic en funció de R^{-1} , comparació amb els valors teòrics i recta de regressió lineal.

Novament observem com els resultats empírics són compatibles amb els valors teòrics. A més, els errors relatius tornen a ser al voltant del 5%. En aquest cas la funció camp magnètic al centre de l'espira en funció del radi d'aquesta és contínua i per això apareix representada la recta de regressió lineal. Obtenim una pendent $(2.41 \pm 0.10) \cdot 10^{-6}$ T·m, una ordenada a l'origen $(4.3 \pm 2.3) \cdot 10^{-6}$ T, i un coeficient de correlació $r^2 = 0.998$.

De forma anàloga s'obté un valor de la permeabilitat magnètica del buit de $\mu_0 = (1.205 \pm 0.051) \cdot 10^{-6}$ $\text{N}\cdot\text{A}^{-2}$ que, tot i que tenint en compte l'interval d'incertesa és molt proper al valor del SI, no és compatible amb aquest. Això no obstant l'error relatiu és de tan sols un 5%.

6.3.2 Camp magnètic generat per bobines

Prèviament a la presa de dades es mesura la longitud de les diferents bobines, necessària per realitzar la comparació amb els valors teòriques. Tot i que són molt semblants totes, hi ha petites diferències. Aquestes, juntament amb altres dades proporcionades es recullen a la Taula 6.1.

Taula 6.1: Característiques geomètriques de les diferents bobines.

| Bobina | Radi (m) | N | Longitud (± 0.002) (m) |
|--------|----------|-----|------------------------------|
| 1 | 0.0165 | 300 | 0.152 |
| 2 | 0.0130 | 75 | 0.159 |
| 3 | 0.0130 | 150 | 0.154 |
| 4 | 0.0130 | 300 | 0.152 |

D'aquesta manera els resultats de les diferents mesures al llarg de l'eix de les bobines es presenten a les gràfiques de la Figura 6.3. Els camps de les bobines es troben separats per poder apreciar millor l'efecte d'incrementar el nombre de voltes mantenint les dimensions -bobines 2,3 i 4.

Observem que per la bobina 1 totes les dades obtingudes són compatibles amb el valor teòric puix aquest està sempre dins de l'interval determinat pel valor empíric i la seua incertesa. A més a més la dependència és l'esperada. És a dir, el camp té un creixement molt ràpid si la distància del centre al punt sobre el qual es mesura és aproximadament $L/2$, i el valor del camp s'estabilitza per punts que es troben totalment a dintre de la bobina.

Pel que fa a les bobines 2,3 i 4 trobem que tots els valors del camp per punts a distància del centre menor a $L/2$ són compatibles amb els valors teòrics. En aquest cas els resultats per la bobina 2 són millor que per la 3 i la 4. No obstant això quan es mesura el camp a distàncies del centre majors a $L/2$ s'observa, sobretot al cas de la bobina 4, petites desviacions que originen incompatibilitats entre valors experimentals i valors teòrics. Observem doncs que aquestes es troben gairebé únicament al cas de la bobina amb major nombre de voltes.

Finalment, observem que l'efecte d'augmentar el nombre de voltes és l'esperat. Tot i que les longituds de les bobines 2,3 i 4 no són exactament iguals podem tractar-les com si tinguéssin les mateixes dimensions. Així doncs, tenim que les relacions entre els camps de les bobines són les predites per l'Equació (6.3). És a dir, el camp creat per la bobina 3 és aproximadament el doble que el camp generat per la bobina 2, i el camp generat per la bobina 4 és el doble que el de la bobina 3. A dintre de les bobines, els quocients entre les mitjanes del camp de la bobina 3 i de la bobina 2, i entre les mitjanes del camp de la bobina 4 i la bobina 3 confirmen aquest resultat: 2.1 i 1.8 respectivament.

6.3.3 Camp radial i axial d'una bobina

Amb el programa que es presenta a l'annex hem calculat les components B_r i B_z del camp magnètic que crea una bobina finita. Presentem a la Figura 6.4 el resultat del programa per la bobina 4 d'aquesta pràctica.

Notem que a les vores de la bobina el camp varia molt ràpidament com a conseqüència dels efectes de vora. Si ens situem totalment a fóra veiem que el camp és molt menor que a l'interior.

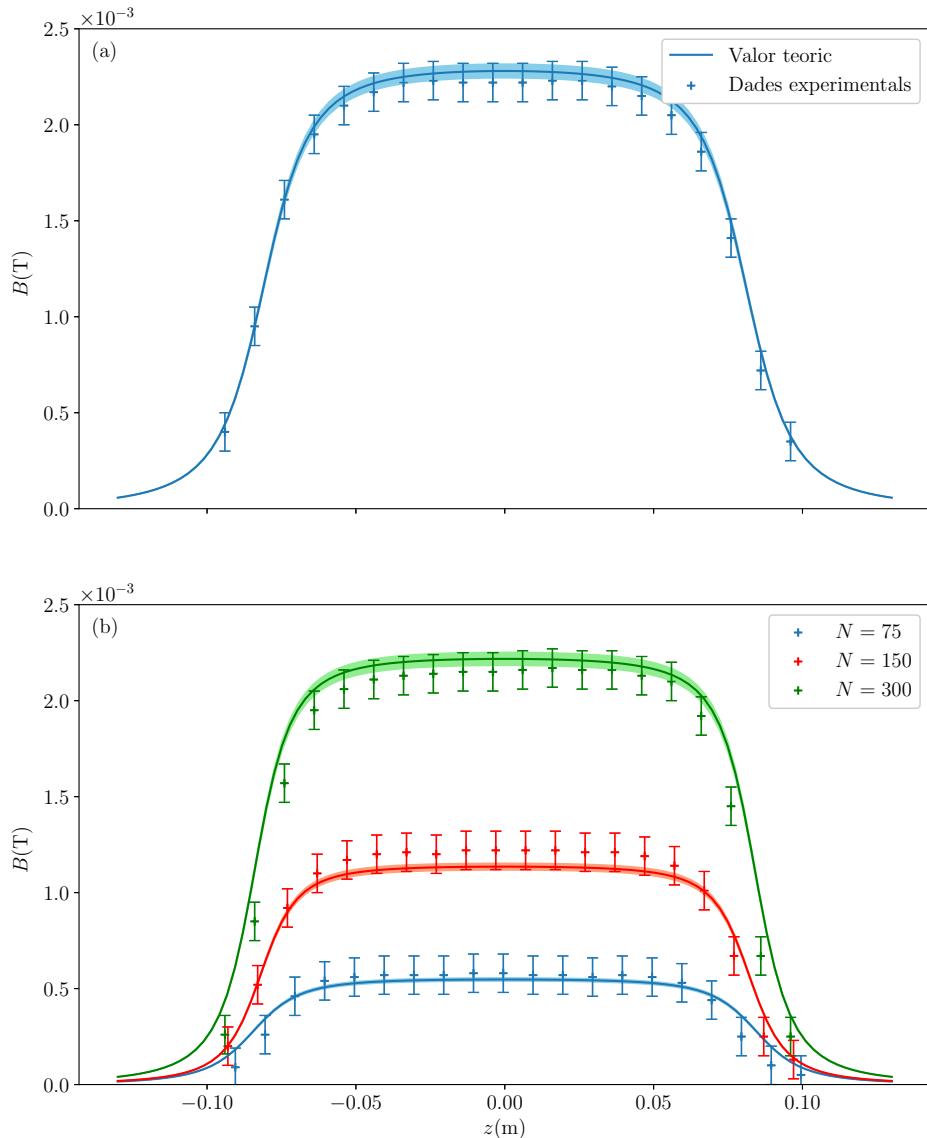


Figura 6.3: Al gràfic (a) es presenten les dades experimentals per la bobina 1 i la seua comparació amb els resultats teòrics que es troben en línia contínua. Al gràfic (b) s'observen les dades experimentals de les bobines 2,3 i 4 on s'aprecia l'efecte d'incrementar el nombre de voltes. Igualment apareixen els valors teòrics del camp en línia contínua. Pels dos casos s'han agafat punts sobre l'eix dins i fóra de les bobines. Les línies teòriques tenen bandes d'incertesa.

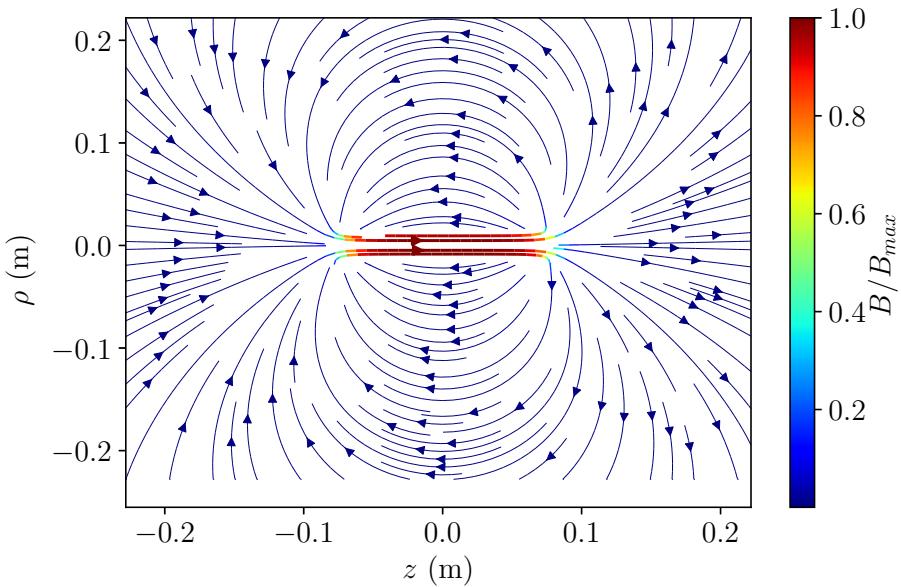


Figura 6.4: Camp adimensional per la bobina 4 centrada horitzontalment a l'origen. Projecció sobre eixos ρz .

6.4 Conclusions

- A la primera part de la pràctica les mesures preses han estat compatibles en tots els casos amb els valors teòrics predictius per l'Equació (6.2). Però, el valor per μ_0 obtingut mitjançant el pendent no ha estat compatible amb el real i ha tingut un error relatiu del 7%.
- A la primera part de la pràctica les mesures preses han estat compatibles en tots els casos amb els valors teòrics predictius per l'Equació (6.1). Novament el valor per μ_0 obtingut mitjançant el pendent no ha estat compatible amb el real i ha tingut un error relatiu del 5%.
- A la segona part, on s'ha mesurat el camp magnètic de bobines, les mesures preses han estat compatibles en tots els casos amb els valors teòrics predictius per l'Equació (6.3).
- S'ha pogut observar la dependència esperada del camp amb el nombre de voltes descrita per l'Equació (6.3).
- Hem pogut observar els efectes de vora en una bobina finita. Així doncs s'ha tornat a comprovar que el camp a dintre és gairebé constant.

APÈNDIX A

Figures addicionals P.1

Mostrem a continuació els gràfics corresponents a les línies de camp teòriques de diferents configuracions per tal de no sobrecarregar alguns gràfiques corresponents a la Pràctica 1: Representació de camps.

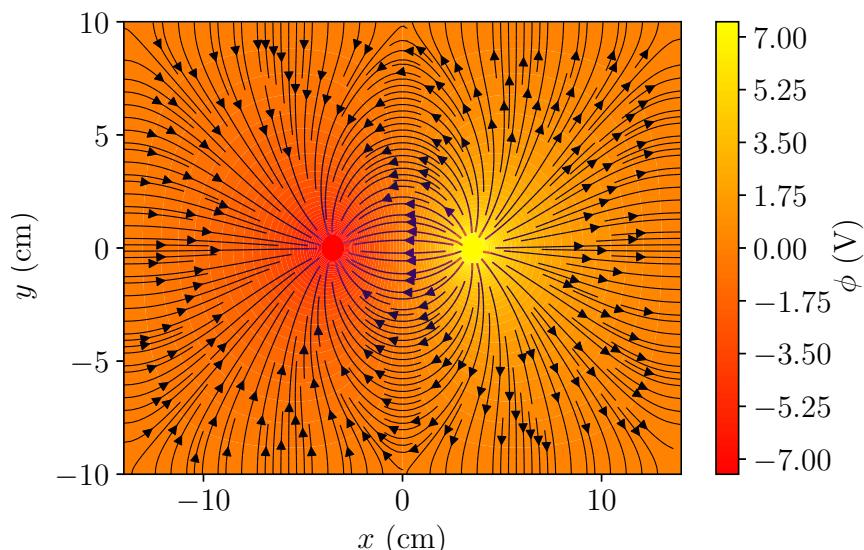


Figura A.1: Potencial electrostàtic i línies de camp teòriques per dos fils paral·lels.

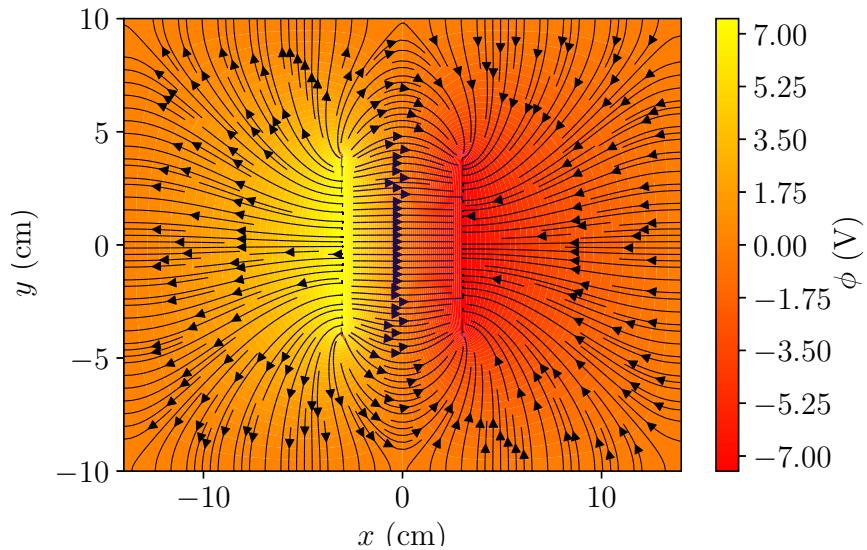


Figura A.2: Potencial electrostàtic i línies de camp teòriques per dos plans finits paral·lels.

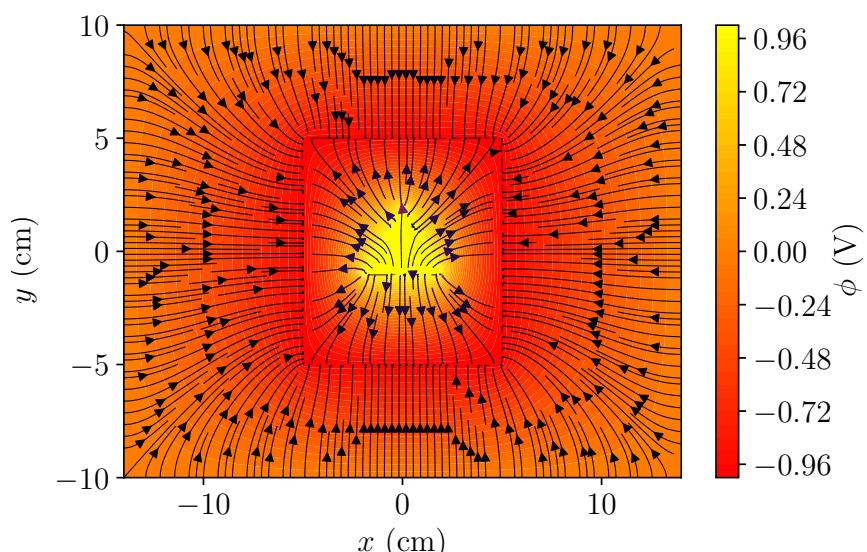


Figura A.3: Potencial electrostàtic i línies de camp teòriques per la forma lliure.

APÈNDIX B

Codis simulacions

B.1 Resolució numèrica equació de Laplace

Es presenta a continuació el codi en C d'un algorisme que implementa el mètode de les diferències finites per resoldre numèricament l'equació de Laplace en dues dimensions. Al codi es trobaran els comentaris oportuns, però la idea és emprar un algorisme iteratiu que aproxima les segones derivades de la funció potencial per diferències finites. Pel cas dels fils i el condensador s'han fixat potencials constants als conductors i a l'infinít. Pel cas lliure, com a l'exterior el potencial ja era zero s'ha fixat el potencial als conductors només.

```
#include <stdio.h>

void iteracio (int midax, int miday, double matriu[midax][miday],
                double matriuc[midax][miday]);

int main () {

    int div = ; //Nombre de divisions a cada cm
    int n = ; //n nombre de cel·les (28div)x(20div)
    int nx = 28*div; //Nombre total de punts x
    int ny = 20*div; //Nombre total de punts y
    double phi[n*nx][n*ny], phic[n*nx][n*ny]; //Matrius potencial i check de
        cond inicials
    int i,j;
    int k = 0;
    int nmax = ; //Max iteracions

    //Inicialitzem matrius
    for (i = 0; i < n*nx; i++) {
        for (j = 0; j < n*ny; j++) {
            phi[i][j] = 0;
            phic[i][j] = 0;
        }
    }
    //Fixem condicions inicials, mostrem els tres casos

    //1. Fils: dues circumferències radi i centres determinats (per n=5 i div=6)
```

```

double radi = div/2.0+3/2.0;
int y1 = 2*ny+10*div;
int y2 = 2*ny+10*div;
int x1 = 2*nx+10*div+div/2.0;
int x2 = 2*nx+17*div+div/2.0;

for (j=0;j<ny;j++) {
    phi[0][j]=0;
    phi[nx-1][j]=0;
    phic[0][j]=1;
    phic[nx-1][j]=1;
}

for (i=0;i<nx;i++) {
    phi[i][0]=0;
    phi[i][ny-1]=0;
    phic[i][0]=1;
    phic[i][ny-1]=1;
}

for (i = 0; i < nx; i++) {
    for (j = 0; j < ny; j++) {
        if ((x1-i)*(x1-i)+(y1-j)*(y1-j)<radi*radi) {
            phi[i][j] = -7.5;
            phic[i][j] = 1;
        }

        if ((x2-i)*(x2-i)+(y2-j)*(y2-j)<radi*radi) {
            phi[i][j] = +7.5;
            phic[i][j] = 1;
        }
    }
}

//2. Condensador: plaques a potencial constant (per n=5 i div=6)

for (j = 2*ny+6*div; j < 2*ny+14*div; j++) {
    phi[2*nx+17*div+1][j] = -7.5;
    phi[2*nx+17*div][j] = -7.5;
    phi[2*nx+11*div-1][j] = 7.5;
    phi[2*nx+11*div][j] = 7.5;
    phic[2*nx+17*div][j] = 1;
    phic[2*nx+17*div+1][j] = 1;
    phic[2*nx+11*div-1][j] = 1;
    phic[2*nx+11*div][j] = 1;
}

//3. Pel cas lliure trobem les equacions de les rectes de la configuració i procedim igual
//S'ha fet n=1 perque fora el potencial ja era zero.
//En aquest cas s'han girat nx=20*div i ny=28*div, així com i i j
//Quadrat exterior
for (j = 9*div; j < 19*div; j++) {
    phi[15*div][j] = -1;
    phi[5*div][j] = -1;
    phic[15*div][j] = 1;
    phic[5*div][j] = 1;
}

for (i = 5*div; i < 15*div; i++) {
    phi[i][9*div] = -1;
    phi[i][19*div] = -1;
    phic[i][9*div] = 1;
    phic[i][19*div] = 1;
}

//Triangle interior
for (j = 12*div; j < 16*div; j++) {
    phi[9*div][j] = 1;
    phic[9*div][j] = 1;
}

```

```

    }
    for (j = 12*div; j < 14*div; j++) {
        if (j%2 == 0) { //Comprovem que te sentit
            phi[3*j/2-9*div][j] = 1;
            phic[3*j/2-9*div][j] = 1;
        }
    }

    for (j = 14*div; j < 16*div; j++) {
        if (j%2 == 0) { //Comprovem que te sentit
            phi[-3*j/2+33*div][j] = 1;
            phic[-3*j/2+33*div][j] = 1;
        }
    }
    //Apliquem l'algorisme
    while em (k < nmax) {
        iteracio(n*nx,n*ny,phi,phic);
        k++;
    }

    //Escrivim el resultat en un fitxer
    FILE* sortida;
    sortida = fopen("filspot.dat","w");
    if(sortida == NULL) {
        printf("ERROR: aquest fitxer no es pot obrir\n");
        return 1;
    }

    for(i = 0; i < n*nx; i++){
        for(j = 0; j < n*ny; j++){
            fprintf(sortida,"%lf \n",phi[i][j]);
        }
    }

    fclose(sortida);

    return 0; //Acaba el main
}

void iteracio (int midax, int miday, double matriu[midax][miday], double
               matriuc[midax][miday]) {
    int i,j;
    double w = 1.8; //Parametre de relaxacio, accelera la convergencia 1<w<2

    for (i = 0; i < midax-1; i++) {
        for (j = 0; j < miday-1; j++) {
            if (matriuc[i][j] != 1) { //check no es cond inicial, punt fix
                matriu[i][j] = (1-w)*matriu[i][j]+w*(matriu[i+1][j] + matriu[i-1][j] +
                    matriu[i][j-1]+ matriu[i][j+1])/4.0;
                //Sense parametre de relaxacio es simplement la mitjana
            }
        }
    }
}

```

A més a més s'ha utilitzat Python per fer l'anàlisi de dades i la representació dels camps i potencials. Les funcions que s'han emprat són bàsicament les que es presenten.

```

import numpy as np
#Funcio que fa el -gradient d'un camp escalar

def gradient(pot,cx,cy,delta):
    for i in range(0,len(pot)-1):
        for j in range(0,len(pot[0])-1):
            cx[i][j] = -1/delta*(pot[i+1][j]-pot[i][j])
            cy[i][j] = -1/delta*(pot[i][j+1]-pot[i][j])

#Funcio que calcula la direccio del camp electric
#entre dos punts d'una línia equipotencial

```

```
def campelectric(vv,E):
    v=vv.transpose()

    for i in range(0,len(v)-1):
        x=(v[i][0]+v[i+1][0])/2
        y=(v[i][1]+v[i+1][1])/2
        a=(v[i+1][1]-v[i][1]);
        b=(v[i+1][0]-v[i][0]);
        n=np.sqrt(a*a+b*b)
        if n==0:
            n=1
        E[i][0]=x
        E[i][1]=y
        E[i][2]=-a/n
        E[i][3]=b/n
```

B.2 Camp radial i axial d'una bobina

Les següents funcions permeten calcular el camp radial i axial d'una bobina sense menysprear efectes de vora. S'ha de dir que entenem per bobina un conjunt de espires col·locades una darrere de l'altra. Així, es calcula el camp d'un espira i s'aproxima el camp de la bobina com la suma d' N espires, que resulta en una integral. Hem plantejat les integrals del camp d'una espira i bàsicament el que fa el programa és resoldre aquestes integrals numèricament per després aplicar superposició. Ens basem en l'exposat a [4]. A continuació presentem el codi en Python.

```
from scipy.integrate import quad, dblquad #Funció que fa dobles integrals
import numpy as np

muo=4.*np.pi*10**(-7)

#La variable rho és la distància del punt on es calcula el camp fins a l'eix
#z (suposat eix paral·lel a la bobina)
#La variable z és l'alçada del punt on es calcula el camp
#La variable d és l'alçada del centre de l'espira corresponent
#La variable R és el radi de les espires

#Expressions prèvies a la integral:
def IntBr(theta,R,z,d,rho):
    return np.cos(theta)*(z-d)/((rho-R*np.cos(theta))**2+(R*np.sin(theta))
        **2+(z-d)**2)**(3./2)

def IntBz(theta,R,z,d,rho):
    return (R-rho*(np.cos(theta)))/((rho-R*np.cos(theta))**2+(R*np.sin(theta)
        )**2+(z-d)**2)**(3./2)

#Integral doble amb bobina centrada a l'origen
def Bz(N,L,R,z,rho,I):
    bz=dblquad(lambda d, theta: IntBz(theta,R,z,d,rho), 0, 2*np.pi, lambda d:
        -L/2, lambda d: L/2)
    Bztot=bz[0]*R*N*I*muo/4/np.pi
    return Bztot

def Br(N,L,R,z,rho,I):
    br=dblquad(lambda d, theta: IntBr(theta,R,z,d,rho), 0, 2*np.pi, lambda d:
        -L/2, lambda d: L/2)
    Brtot=br[0]*R*N*I*muo/4/np.pi
    return Brtot

def B(N,L,R,z,rho,I):
    Camp=[Br(N,L,R,z,rho,I),Bz(N,L,R,z,rho,I)]
    return Camp
```

Bibliografia

- [1] Paul A. Tipler, René Mosca (2010). *Physics for Scientists and Engineers* (6th ed.). Editorial Reverte, Barcelona.
- [2] Raymond A. Serway (1998). *Principles of Physics* (2nd ed.). Fort Worth, Texas; London: Saunders College Pub. p. 602. ISBN 0-03-020457-7.
- [3] National Physical Laboratory (2014). *What is a platinum resistance thermometer?* [http://www.npl.co.uk/reference/faqs/what-is-a-platinum-resistance-thermometer-\(faq-thermal\)](http://www.npl.co.uk/reference/faqs/what-is-a-platinum-resistance-thermometer-(faq-thermal))
- [4] Edmund E. Callaghan and Stephen H. Maslen (1960). *The magnetic field of a finite solenoid* NASA