

10 EJERCICIOS FUNDAMENTALES: NÚMEROS COMPLEJOS Y BODE

Plantilla para la Creación de un Compendio de 100 Ejercicios

8 de octubre de 2025

Índice

1. Números Complejos: Formas, Módulo y Argumento	2
1.1. Ejercicio 1: Conversión Cartesiana a Polar	2
1.2. Ejercicio 2: Conversión Polar a Cartesiana y Exponencial	2
2. Números Complejos: Operaciones Algebraicas	3
2.1. Ejercicio 3: Suma y Resta (Forma Cartesiana)	3
2.2. Ejercicio 4: Multiplicación (Forma Polar)	3
2.3. Ejercicio 5: División (Forma Polar)	3
3. Diagrama de Bode: Factores Elementales	4
3.1. Ejercicio 6: Factor de Ganancia Constante	4
3.2. Ejercicio 7: Polo en el Origen (Comportamiento de Baja Frecuencia) . . .	4
3.3. Ejercicio 8: Cero Real (Factor de Primer Orden)	4
3.4. Ejercicio 9: Polo Real (Factor de Primer Orden)	5
3.5. Ejercicio 10: Polo Complejo (Factor de Segundo Orden)	5

1. Números Complejos: Formas, Módulo y Argumento

1.1. Ejercicio 1: Conversión Cartesiana a Polar

1. Expresa el número complejo $\mathbf{Z} = -3 + \mathbf{j}4$ en su forma polar (módulo y argumento principal).

Solución (Paso a Paso)

1. **Cálculo del Módulo ($|Z|$):**

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

2. **Cálculo del Argumento Preliminar (ϕ'):**

$$\phi' = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{4}{-3}\right) \approx -53,13^\circ$$

3. **Ajuste al Cuadrante:** Dado que la parte real ($a = -3$) es negativa y la parte imaginaria ($b = 4$) es positiva, el número se encuentra en el **Segundo Cuadrante**. Se debe sumar 180° :

$$\theta = 180^\circ + \phi' = 180^\circ - 53,13^\circ = 126,87^\circ$$

4. **Resultado:**

$$\mathbf{Z} = 5\angle 126,87^\circ$$

1.2. Ejercicio 2: Conversión Polar a Cartesiana y Exponencial

1. Un fasor de tensión está dado por $\mathbf{V} = 10\angle -60^\circ$. Expresa \mathbf{V} en las formas Cartesiana y Exponencial.

Solución (Paso a Paso)

1. **Conversión a Cartesiana ($a + jb$):**

$$a = |V| \cos(\theta) = 10 \cos(-60^\circ) = 10 \cdot (0,5) = 5$$

$$b = |V| \sin(\theta) = 10 \sin(-60^\circ) = 10 \cdot (-0,866) = -8,66$$

$$\mathbf{V} = 5 - \mathbf{j}8,66$$

2. **Conversión a Exponencial:** La forma exponencial es directa desde la polar, solo requiere el argumento en radianes para la notación matemática:

$$\theta_{\text{rad}} = -60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = -\frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\mathbf{V} = 10\mathbf{e}^{-\mathbf{j}\pi/3}$$

2. Números Complejos: Operaciones Algebraicas

2.1. Ejercicio 3: Suma y Resta (Forma Cartesiana)

1. Calcule $\mathbf{Z}_{\text{suma}} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_{\text{resta}} = \mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2$, donde $\mathbf{Z}_1 = 4 + \mathbf{j}2$ y $\mathbf{Z}_2 = -1 + \mathbf{j}5$.

Solución (Paso a Paso)

1. **Suma de $\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$:** Se suman las partes reales y las partes imaginarias por separado.

$$Z_{\text{suma}} = (4 + (-1)) + j(2 + 5)$$

$$\mathbf{Z}_{\text{suma}} = \mathbf{3} + \mathbf{j}7$$

2. **Resta de $\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2$:** Se restan las partes reales y las partes imaginarias por separado.

$$Z_{\text{resta}} = (4 - (-1)) + j(2 - 5)$$

$$Z_{\text{resta}} = (4 + 1) + j(-3)$$

$$\mathbf{Z}_{\text{resta}} = \mathbf{5} - \mathbf{j}3$$

2.2. Ejercicio 4: Multiplicación (Forma Polar)

1. Calcule el producto $\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}_3 \cdot \mathbf{Z}_4$ si $\mathbf{Z}_3 = 2\angle 30^\circ$ y $\mathbf{Z}_4 = 4\angle 15^\circ$.

Solución (Paso a Paso)

1. **Multiplicación de Módulos:**

$$|Z_p| = |Z_3| \cdot |Z_4| = 2 \cdot 4 = 8$$

2. **Suma de Argumentos:**

$$\theta_p = \theta_3 + \theta_4 = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$$

3. **Resultado:**

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{8}\angle\mathbf{45^\circ}$$

2.3. Ejercicio 5: División (Forma Polar)

1. Calcule el cociente $\mathbf{Z}_c = \mathbf{Z}_5 / \mathbf{Z}_6$ si $\mathbf{Z}_5 = 12\angle 150^\circ$ y $\mathbf{Z}_6 = 3\angle 60^\circ$.

Solución (Paso a Paso)

1. **División de Módulos:**

$$|Z_c| = \frac{|Z_5|}{|Z_6|} = \frac{12}{3} = 4$$

2. **Resta de Argumentos:**

$$\theta_c = \theta_5 - \theta_6 = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$$

3. **Resultado:**

$$\mathbf{Z}_c = \mathbf{4}\angle\mathbf{90^\circ}$$

3. Diagrama de Bode: Factores Elementales

3.1. Ejercicio 6: Factor de Ganancia Constante

1. Dibuje el diagrama de Bode (Módulo y Fase) para la ganancia $\mathbf{T}(\omega) = 50$.

Solución (Paso a Paso)

1. **Módulo en dB:** La ganancia es constante.

$$|T(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(50) \approx \mathbf{34 \text{ dB}}$$

2. **Diagrama de Módulo:** Línea horizontal en 34 dB para todas las frecuencias. Pendiente: 0 dB/década.
3. **Diagrama de Fase:** Dado que 50 es un número real positivo, la fase es $\mathbf{0^\circ}$ para todas las frecuencias.

3.2. Ejercicio 7: Polo en el Origen (Comportamiento de Baja Frecuencia)

1. Dibuje el diagrama de Bode (Módulo y Fase) para el factor $\mathbf{T}(\omega) = \frac{1}{j\omega}$.

Solución (Paso a Paso)

1. **Módulo:** El factor tiene la forma $\frac{1}{(j\omega)^N}$ con $N = 1$.
 - **Pendiente:** $\mathbf{-20 \text{ dB/década}}$.
 - **Punto de Referencia:** En $\omega = 1 \text{ rad/s}$, $|T(1)| = 20 \log_{10}(\frac{1}{1}) = 0 \text{ dB}$. La asíntota pasa por $(1 \text{ rad/s}, 0 \text{ dB})$.
2. **Fase:** El factor es $\frac{1}{j\omega} = \frac{1}{1\angle 90^\circ} = 1\angle -90^\circ$. La fase es constante en $\mathbf{-90^\circ}$.

3.3. Ejercicio 8: Cero Real (Factor de Primer Orden)

1. Dibuje el diagrama de Bode (Módulo y Fase) para el factor $\mathbf{T}(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{10}$.

Solución (Paso a Paso)

1. **Frecuencia de Corte:** La frecuencia de corte es $\omega_c = \mathbf{10 \text{ rad/s}}$.
2. **Módulo:**
 - Para $\omega < 10$: Línea horizontal en $\mathbf{0 \text{ dB}}$.
 - Para $\omega > 10$: La asíntota tiene una pendiente de $\mathbf{+20 \text{ dB/década}}$.
3. **Fase:**
 - $\omega < 1$: Fase $\approx 0^\circ$.
 - $\omega = 10$: Fase = $\mathbf{45^\circ}$.
 - $\omega > 100$: Fase $\approx 90^\circ$.

3.4. Ejercicio 9: Polo Real (Factor de Primer Orden)

1. Dibuje el diagrama de Bode (Módulo y Fase) para el factor $\mathbf{T}(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$.

Solución (Paso a Paso)

1. **Frecuencia de Corte:** La frecuencia de corte es $\omega_c = 1$ rad/s.
2. **Módulo:**
 - Para $\omega < 1$: Línea horizontal en **0** dB.
 - Para $\omega > 1$: La asíntota tiene una pendiente de **-20** dB/década.
3. **Fase:**
 - $\omega < 0,1$: Fase $\approx 0^\circ$.
 - $\omega = 1$: Fase = **-45°**.
 - $\omega > 10$: Fase $\approx -90^\circ$.

3.5. Ejercicio 10: Polo Complejo (Factor de Segundo Orden)

1. Describa las asíntotas del diagrama de Bode (Módulo y Fase) para el factor $\mathbf{T}(\omega) = \frac{1}{1+j0,2\frac{\omega}{5}-(\frac{\omega}{5})^2}$.

Solución (Paso a Paso)

1. **Frecuencia Natural (ω_n):** Por la forma del denominador, $\omega_n = 5$ rad/s.
2. **Módulo (Polo de Segundo Orden):**
 - Para $\omega < 5$: Línea horizontal en **0** dB.
 - Para $\omega > 5$: La asíntota tiene una pendiente de **-40** dB/década.
 - **Nota de Resonancia:** Dado que $\zeta = 0,1$ (de $2\zeta\omega/\omega_n$), el factor de amortiguamiento es pequeño, por lo que el diagrama real mostrará un pico de resonancia notable en $\omega = 5$ rad/s por encima de la asíntota.
3. **Fase (Polo de Segundo Orden):**
 - $\omega < 0,5$: Fase $\approx 0^\circ$.
 - $\omega = 5$: Fase = **-90°**.
 - $\omega > 50$: Fase $\approx -180^\circ$.