GEOMETRÍA I.

Relación de problemas 2: DETERMINANTES

Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas

1. Estudiar si las siguientes matrices tienen inversa y, en su caso, calcularla:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

   Calcular la matriz X de orden 2×2 que resuelve las ecuaciones matriciales:

$$(a)\; BX = C, \quad (b)\; AX - B = C, \quad (c)\; XC^t = B.$$

3. Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 14 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

4. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2-x & 3-x \\ 2-x & 3-x & 4-x \\ 3-x & 4-x & 5-x \end{vmatrix} = 0\,, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^4 & x^6 \\ 1 & x^3 & x^6 & x^9 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Calcular el valor de los determinantes de orden n siguientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & a & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & 2 & 1 & \dots & 1 \\ n & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}.$$

6. Analizar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden entonces $|A+B| = |A| + |B|$.

7. Determinar el rango de las siguientes matrices en función de los valores de los parámetros:

$$A = \begin{pmatrix} a & a+3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} m^2-1 & (m+1)^2 \\ m+1 & m-1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} m^2-1 & (m+1)^2 & m+1 \\ m+1 & m-1 & m+1 \end{pmatrix}.$$

8. Discutir y resolver, cuando sea posible, los sistemas de ecuaciones lineales siguientes en función del parámetro a. Cuando el sistema sea de Cramer, resolverlo también usando la regla de Cramer.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 1 \\ -x-y+z & = & -2 \\ x+az & = & -1 \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+4ay-2az & = & 2 \\ x-3az & = & 1 \\ x+3ay+(a-1)z & = & 2 \end{array} \right.,$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x+5y+az & = & 2 \\ 5x+3y+az & = & 2 \\ ax+5y+3z & = & 2 \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 2 \\ ax+ay+2z & = & a+2 \\ -ax-y+az & = & a^2+a-2 \end{array} \right.,$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 1 \\ x+ay+z & = & a \\ x+y+az & = & a^2 \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+3y-az & = & 4 \\ -ax+y+az & = & 0 \\ -x+2ay & = & a+2 \\ 2x-y-2z & = & 0 \end{array} \right..$$

9. Sea M una matriz cuadrada de orden n que se escribe por cajas de la forma:

$$D = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right),$$

donde $A \in M_m(K)$, $B \in M_{m\times(n-m)}(K)$, $C \in M_{n-m}(K)$ y $0 \in M_{(n-m)\times m}(K)$. Probar que $\det D = \det A \det C$.

Ayuda: Usar inducción sobre el orden de la matriz A.

10. Demostrar que si u, $v \in M_{n\times 1}(K)$, entonces

$$\det(I_n + u\,v^t) = 1 + v^t\,u.$$

Ayuda: Usar la igualdad

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & u \\ \hline 0 & 1+v^t\,u \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline v^t & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_n + u\,v^t & u \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -v^t & 1 \end{array}\right).$$

11. *Lema del determinante matricial.* Demostrar que si $A \in M_n(K)$ es una matriz regular de orden n y u, $v \in M_{n\times 1}(K)$, entonces

$$\det(A + u\,v^t) = (1 + v^t A^{-1} u)\det A.$$

Ayuda: Aplicar el ejercicio anterior teniendo en cuenta que $A + u\,v^t = A(I + (A^{-1}u)\,v^t)$.

SOLUCIONES

1.
$$A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 6\\ 5 & -3\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2.
$$\text{(a)}\quad X=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 4\\ 1 & 10\end{pmatrix},\quad \text{(b)}\quad X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 & 14\\ -3 & 1\end{pmatrix},\quad \text{(c)}\quad X=\begin{pmatrix} 2 & 0\\ -7 & 2\end{pmatrix}.$$

3. (a) 30, (b) -8, (c) -11, (d) 0,
(e) $(a-b)(a-c)(b-c)$, (f) $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$.

4. (a) $\mathbb{R}$, (b) $x=-1$, $x=0$ y $x=1$.

5. (a) $(a+1)^{n-1}$, (b) $n!$, (c) $(-1)^{n-1}n!$.

6. Falso.

7. (a) A tiene rango 2 para $a=-19/7$. Si $a\neq -19/7$, la matriz A tiene rango 3.
   (b) Si $a\neq 0$, $\mathrm{rg}(B)=3$. Para $a=0$ el rango de B es 2.
   (c) Si $m=-1$ ó $m=0$, entonces $\mathrm{rg}(C)=1$. En cualquier otro caso, el rango de C es 2.
   (d) Si $m=-1$ el rando de D es 1. Para el resto de valores de m el rango es 2.

8. (a) Si $a=-3$ el sistema es SI.
   Si $a\neq -3$ el sistema es SCD y su solución es $x=\frac{3a-3}{a+3}$, $y=\frac{5-a}{a+3}$, $z=-\frac{4}{a+3}$.
   (b) Si $a=1$, SI.
   Si $a=0$, SCI y su solucón es $x=1$, $y=\alpha$, $z=-1$.
   Si $a\neq 0$ y $a\neq 1$, el sistema es SCD y su solución es $x=\frac{4a-1}{a-1}$, $y=\frac{1}{1-a}$, $z=\frac{1}{a-1}$.
   (c) Si $a=-8$, el sistema es SI.
   Si $a=3$, el sistema es SCI y su solución es $x=-3\alpha/8+2/8$, $y=-3\alpha/8+2/8$, $z=\alpha$.
   Si $a\neq -8$ y $a\neq 3$, el sistema es SCD y su solución es $x=\frac{2}{a+8}$, $y=\frac{2}{a+8}$, $z=\frac{2}{a+8}$.
   (d) Si $a=0$, el sistema es SI.
   Si $a=1$ el sistema es SCI y su solución es $x=1-\alpha$, $y=\alpha$, $z=1$.
   Si $a=-1$ el sistema es SCI y su solución es $x=\frac{3}{2}(\alpha-1)$, $y=\frac{1}{2}(\alpha+1)$, $z=\alpha$.
   Si $a\neq 0$, $a\neq 1$ y $a\neq -1$, el sistema es SCD y su solución es $x=\frac{2-a}{a}$, $y=0$, $z=a$.
   (e) Si $a=-2$, el sistema es SI.
   Si $a=1$, el sistema es SCI y su solución es $x=1-\alpha-\beta$, $y=\alpha$, $z=\beta$.
   Si $a\neq 1$ y $a\neq -2$, el sistema es SCD y su solución es $x=-\frac{a+1}{a+2}$, $y=\frac{1}{a+2}$, $z=\frac{a^2+2a+1}{a+2}$.

(f) Si $a \neq 2$ y $a \neq -3$ el sistema es SI.
Si $a = 2$, el sistema es SCI y su solución es $x = \frac{4}{7}(2\alpha + 1)$, $y = \frac{2}{7}(\alpha + 4)$, $z = \alpha$.
Si $a = -3$, el sistema es SCD y su solución es $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.