Sucesiones de números reales

13

El concepto de límite es básico en Cálculo y, de entre las diversas posibilidades, hemos elegido que haga su aparición asociado a sucesiones de números reales. La idea intuitiva de sucesión es sencilla: una sucesión es una lista ordenada.

13.1 Definición y propiedades

Definición 13.1. Una *sucesión* de números reales es una aplicación del conjunto de los números naturales en el conjunto de los números reales, esto es,

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R},$$
$$n \mapsto x_n.$$

Llamamos *término general* a x_n y, usualmente, no mencionaremos la función sino sólo la imagen de la función. Dicho de otra manera, hablaremos de sucesión con término general x_n y la notaremos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejemplo 13.2. Hay dos formas usuales de definir una sucesión: mediante una fórmula general que nos permita obtener todos los términos de la sucesión o, por recurrencia, o sea obtenemos cada término en función de los anteriores. Por ejemplo, la sucesión $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión 1, 3, 5, 7,... Como puedes ver, sabemos todos los términos de la sucesión. El que ocupa el lugar 53 es $\frac{1}{105}$. En cambio, la sucesión definida como $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ conocida como sucesión de Fibonacci está definida por recurrencia. Para calcular un término tenemos que conocer previamente el valor de los dos anteriores. No importa. Puesto que sabemos los dos primeros, podemos calcular el tercero y así sucesivamente: $0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

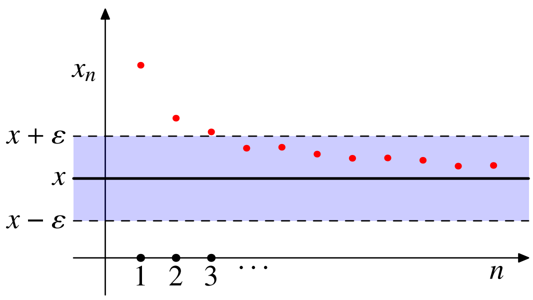

Figura 13.1 Límite de una sucesión

Definición 13.3. Diremos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *convergente* si existe $x \in \mathbb{R}$ verificando que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$, para cualquier $n \geq n_0$. En ese caso escribiremos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ o $\{x_n\} \to x$.

Se puede comprobar fácilmente que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ si, y sólo si, } \lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0.$$

Ejemplo 13.4.

a) La sucesión constantes son convergentes y su límite es dicha constante.

b) La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a cero.

c) La sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente.

d) La sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente.

13.1.1 Sucesiones y acotación

Definición 13.5.

a) La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está *acotada superiormente* (respectivamente inferiormente) si existe $M \in \mathbb{R}$ verificando que $x_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (respectivamente $x_n \geq M$).

b) La sucesión está *acotada* si lo está superior e inferiormente o, lo que es lo mismo, si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq M$, para cualquier natural n.

Proposición 13.6. *Toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración. Aplicamos la definición de convergencia para $\varepsilon = 1$. Entonces existe un natural n_0 tal que $|x_n - x| < 1$ para $n \geq n_0$. En particular, el conjunto $\{x_n : n \geq n_0\}$ está acotado superiormente por $x+1$ e inferiormente por $x-1$. El resto de los términos de la sucesión también está acotado por ser un conjunto finito. Por tanto, la unión de ambos está acotado. □

Observación 13.7. El recíproco no es cierto. La sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada pero no es convergente.

13.1.2 Álgebra de límites

Después de definir el límite de una sucesión, los siguientes resultados relacionan su comportamiento y las operaciones usuales de números reales. En primer lugar, comenzamos con la suma y el producto.

Proposición 13.8. *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones convergentes. Entonces*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n\right)$,

c) si $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *se tiene que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$.

Proposición 13.9. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente a cero e $\{y_n\}$ una sucesión acotada. Entonces $\{x_n y_n\}$ es convergente a cero.*

Ejemplo 13.10. Vamos a calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log\left(3n^4 - 2n + 7\right)}{\log\left(2n^2 + 2n - 1\right)}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\log(3n^4-2n+7)}{\log(2n^2+2n-1)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(n^4(3-\frac{2}{n^3}+\frac{7}{n^4})\right)}{\log\left(n^2(2+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2})\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n^4)+\log\left(3-\frac{2}{n^3}+\frac{7}{n^4}\right)}{\log(n^2)+\log\left(2+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4\log(n)+\log\left(3-\frac{2}{n^3}+\frac{7}{n^4}\right)}{2\log(n)+\log\left(2+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}
\end{aligned}$$

dividimos por $\log(n)$ numerador y denominador

$$=\frac{4}{2}=2.$$

13.1.3 Convergencia y orden

En esta sección vamos a hacer relacionar convergencia y orden. El primer resultado nos dice que las desigualdades entre los términos de dos sucesiones se trasladan a sus respectivos límites. De hecho, no hace falta que todos los términos verifican la desigualdad. Es suficiente con que, por ejemplo, para los términos pares o los impares tengamos la desigualdad.

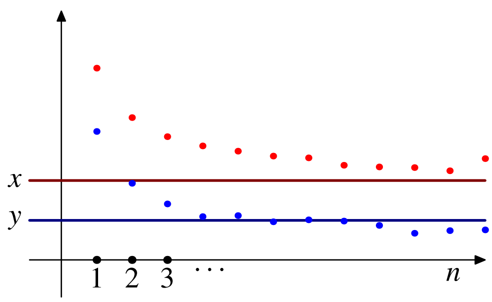

Figura 13.2 El orden se conserva al tomar límites

Proposición 13.11. *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones convergentes. Supongamos que el conjunto $\{n\in\mathbb{N} : x_n \le y_n\}$ es infinito. Entonces $\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n$.*

Proposición 13.12 (Regla del sandwich). *Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ sucesiones de números reales verificando que*

a) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$ *y que*

b) $x_n \le y_n \le z_n$, *para cualquier n natural.*

Entonces $\{y_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n$.

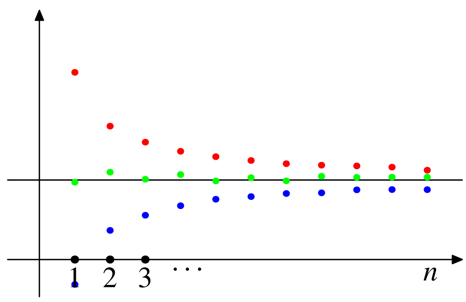

Figura 13.3 Límites y sucesiones encajadas

Ejemplo 13.13. Vamos a calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n}}+\frac{2}{n^2\sqrt{n}}+\cdots+\frac{n}{n^2\sqrt{n}}.$$

Usando que

$$\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\le\frac{m}{n^2\sqrt{n}}\le\frac{n}{n^2\sqrt{n}}$$

para cualquier natural m entre 1 y n, podemos acotar superior e inferiormente la sucesión:

$$n\frac{1}{n^2\sqrt{n}} \le \frac{1}{n^2\sqrt{n}} + \frac{2}{n^2\sqrt{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2\sqrt{n}} \le n\frac{n}{n^2\sqrt{n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como nuestra sucesión está encajada entre dos sucesiones que tienden a cero, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}} + \frac{2}{n^2\sqrt{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2\sqrt{n}} = 0.$$

13.2 Sucesiones parciales

Si una sucesión es una “lista” de números, podemos construir una lista nueva escogiendo algunos de estos, por ejemplo los que ocupan un lugar par o impar. A este tipo de sucesiones las llamaremos parciales de la sucesión original.

Definición 13.14. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Diremos que $\{y_n\}$ es una *sucesión parcial* de $\{x_n\}$ si existe una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{\sigma(n)}$ para cualquier natural n.

Ejemplo 13.15.

a) El primer ejemplo de sucesión parcial de una sucesión dada es simple: eliminemos una cantidad finita de términos al inicio de la sucesión. Por ejemplo, eliminar los tres primeros términos se consigue con la aplicación $\sigma(n) = n + 3$. La sucesión $\{x_{n+3}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es lo que se llama una *cola* de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
En general, si p es un número natural, las sucesión parcial $\{x_{n+p}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una *cola* de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. La convergencia de una sucesión y de sus colas es equivalente: la sucesión converge si, y sólo si, lo hacen todas o alguna de sus colas.

b) Quedarnos sólo con los términos que ocupan una posición par o impar consiste en considerar las parciales $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $\{x_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposición 13.16. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales convergente. Entonces cualquier parcial es convergente y con el mismo límite.*

Este resultado se suele usar para demostrar que una sucesión *no* es convergente: si existe alguna parcial no convergente o existen parciales distintas convergentes a límites distintos, la sucesión original no es convergente.

Ejemplo 13.17. La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente puesto que la parcial de los pares converge a 1 mientras que la de los impares lo hace a -1.

13.3 Monotonía

La definición de monotonía para funciones cualesquiera se puede enunciar para sucesiones.

Definición 13.18. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *creciente* si cumple que $x_n \le x_{n+1}$ para todo natural n. Dicho de otra forma, cuando avanzamos en la lista los términos son mayores:

$$n \le m \implies x_n \le x_m.$$

Análogamente, diremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *decreciente* si cumple que $x_n \ge x_{n+1}$ para todo natural n o, lo que es lo mismo, $n \le m \implies x_n \ge x_m$.

Evidentemente no todas las sucesiones son monótonas al igual que no todas las funciones son monótonas. Por ejemplo, la sucesión $\{\cos(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es monótona ni tampoco lo es la sucesión $\{(-1)^n\}$.

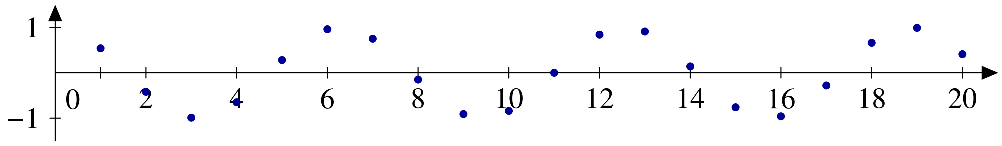

Figura 13.4 La sucesión $\{\cos(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es monótona

Eso sí, de cualquier sucesión siempre podemos elegir términos cada vez mayores o cada vez menores. En otras palabras, siempre podemos elegir una sucesión parcial monótona.

Proposición 13.19. *Toda sucesión tiene una parcial monótona.*

¿Cuál es el interés de las sucesiones monótonas? Son más fáciles de estudiar. Por ejemplo, la convergencia de las sucesiones monótonas se reduce al estudio de su acotación.

Proposición 13.20. *Una sucesión monótona es convergente si, y sólo si, está acotada. De hecho, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

El hecho de que las sucesiones monótonas y acotadas sean convergentes nos permite demostrar que una sucesión es convergente sin, teóricamente, conocer su límite.

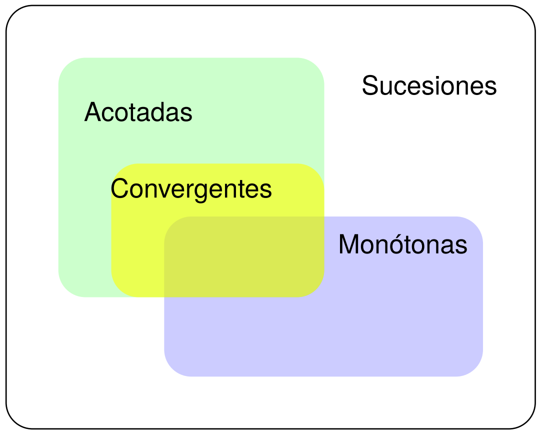

Figura 13.5 Distintos tipos de sucesiones

Ejemplo 13.21. Vamos a estudiar la convergencia de la sucesión

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1},\ \forall n \geq 1.$$

Para demostrar que esta sucesión es convergente vamos a comprobar que es una sucesión monótona y acotada.

a) Observa que $x_2 = \sqrt{2} > x_1 = 1$. Vamos a demostrar por inducción que la sucesión es creciente.

   i) El primer paso ya lo tenemos dado: $x_2 = \sqrt{2} > x_1 = 1$.

   ii) Si ahora suponemos que $x_n < x_{n+1}$, veamos que $x_{n+2} > x_{n+1}$:

   $$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} + 1} > \sqrt{x_n + 1} = x_{n+1}.$$

   Luego la sucesión es monótona creciente.

b) Veamos que también está mayorada, concretamente que $x_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De nuevo lo comprobamos por inducción.

   i) Es inmediato para $n = 1$.

   ii) Si $x_n \leq 2$, veamos que para x_{n+1} también se verifica:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1} \le \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \le 2.$$

Por tanto, existe $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ y lo calculamos haciendo uso de la fórmula de recurrencia. Tomando límites

$$x_{n+1}^2 = x_n + 1 \implies x^2 - x - 1 = 0 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como $\{x_n\}$ es creciente y el primer término es 1, la única posibilidad que cabe es que $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

E **Ejemplo 13.22.** Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recurrencia como $x_1 = -\frac{3}{2}$ y $3x_{n+1} = 2 + x_n^3$ para cualquier natural n. Estudia si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y, caso de que lo sea, calcula su límite.

a) Si calculas algunos términos de la sucesión, parece que la sucesión es creciente. Vamos a comprobarlo por inducción.

   i) $x_1 = -\frac{3}{2} \le x_2 = -\frac{11}{24}$.

   ii) Supongamos que $x_n \le x_{n+1}$ para un natural n, entonces

   $$x_{n+1} = \frac{2 + x_n^3}{3} \le \frac{2 + x_{n+1}^3}{3} = x_{n+2}$$

   ya que la función $f(x) = x^3$ es creciente.

   Acabamos de demostrar que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \ x_n \le x_{n+1}\}$ es inductivo y que, por tanto, la sucesión es creciente.

b) ¿Está acotada la sucesión? Por ser una sucesión creciente, está acotada inferiormente. Sólo nos falta encontrar una cota superior. De hecho, la sucesión será convergente si, y sólo si, está acotada superiormente. Si la sucesión fuera convergente a un número L, como $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$, se tiene que cumplir que $3L = 2 + L^3$. Las soluciones de este polinomio son 1 y -2 (compruébalo por ejemplo por el método de Ruffini). Dado que la sucesión es creciente y su primer término es $-\frac{3}{2}$, queda descartado que el límite sea -2. Vamos a comprobar por inducción que 1 es una cota superior.

   i) Es evidente que $x_1 = -\frac{3}{2} \le 1$.

   ii) Supongamos que $x_n \le 1$ para un natural n, entonces

   $$x_{n+1} = \frac{2 + x_n^3}{3} \le \frac{2+1}{3} \le 1.$$

En resumen, la sucesión es creciente y mayorada y, por lo visto anteriormente, su límite es 1.

Ejemplo 13.23. Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y consideremos la siguiente sucesión: $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Vamos a ver que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y que su límite, x, verifica $x^2 = a$. Estudiamos en primer lugar si la sucesión es monótona:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n^2 + a}{x_n}\right) - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n}.$$

La sucesión será decreciente si $x_{n+1} - x_n \leq 0$ o, equivalentemente, si $a - x_n^2 \leq 0$. Si se da la desigualdad opuesta, la sucesión será creciente. En cualquier caso, tenemos que estudiar la relación entre x_n^2 y a. Como no tenemos una fórmula para x_n, vamos a trabajar con x_{n+1}.

$$\begin{aligned} x_{n+1} \geq x_{n+2} &\iff a - x_{n+1}^2 \leq 0 \iff a \leq \left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\right)^2 \\ &\iff 4a \leq x_n^2 + \frac{a^2}{x_n^2} + 2a \iff 0 \leq x_n^2 + \frac{a^2}{x_n^2} - 2a \\ &\iff 0 \leq \left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2. \end{aligned}$$

Esta última afirmación es claramente cierta. Por tanto la sucesión $\{x_{n+1}\}$ es decreciente. Al mismo tiempo hemos demostrado que está acotada inferiormente: $\sqrt{a} \leq x_n$, para cualquier n natural. Por tanto, la sucesión $\{x_{n+1}\}$ (que no es más que la sucesión $\{x_n\}$ comenzando en el segundo término) es convergente. Llamemos L a su límite. Debe verificar que

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right) \iff L = \sqrt{a}.$$

Volveremos a este ejemplo más adelante.

Si unimos los dos resultados anteriores: toda sucesión acotada tiene una parcial monótona que, por ser parcial, sigue siendo acotada y, por tanto, convergente.

Teorema 13.24 (de Bolzano-Weierstrass). *Toda sucesión acotada tiene una parcial convergente.*

Aunque lo usaremos poco en los ejemplos prácticos, este teorema es la clave que permite probar la existencia de máximo y mínimo de funciones continuas en intervalos cerrados y acotados.

13.4 Sucesiones divergentes

La sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente, pero tiene un comportamiento muy particular. Los términos de esta sucesión toman valores tan grandes como se desee siempre que dicho términos sean lo suficientemente avazandos. A esto nos solemos referir como que la sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $+\infty$.

Definición 13.25.

a) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Diremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge positivamente* o *tiende a* $+\infty$ si para cualquier $M \in \mathbb{R}$ existe un natural n_0 tal que $x_n \geq M$ para cualquier $n \geq n_0$. En ese caso escribiremos $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

b) De manera similar, diremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge negativamente* o que *tiende a* $-\infty$ si para cualquier $K \in \mathbb{R}$ existe un natural n_0 tal que $x_n \leq K$ para cualquier $n \geq n_0$. En ese caso escribiremos $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

c) En general, diremos que una sucesión es *divergente* si diverge positiva o negativamente.

De la definición se deduce directamente que las sucesiones divergentes no están acotadas: las sucesiones divergentes positivamente no están acotadas superiormente y las que divergen negativamente no están acotadas inferiormente.

Observación 13.26. Un error muy común es decir que una sucesión tiende a $+\infty$ si "sus términos son cada vez más grandes" o "si hay términos tan grandes como se quiera". Compruébalo en los siguientes ejemplos:

a) La sucesión 1, 1, 2, 4, 3, 9,...,n, n^2,... no es creciente pero es divergente.

b) La sucesión 1, 1, 2, 1, 3, 1,...,n, 1,... tiene términos tan grandes como se quiera pero no es divergente.

Proposición 13.27. *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales.*

a) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y $\{y_n\}$ está acotada inferiormente, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = +\infty$.

b) $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$ si, y sólo si, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$.

c) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y existe un natural n_0 y un número positivo k tal que $y_n \geq k$ para $n \geq n_0$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$.

Ejemplo 13.28. Vamos a probar que

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } x > 1, \\ 0, & \text{si } |x| < 1. \end{cases}$$

Comencemos con el caso $x > 1$. Vamos a demostrar que la sucesión $\{x^n\}$, que claramente es creciente, no está acotada. Por reducción al absurdo, supongamos que sí está acotada. En ese caso, la sucesión es convergente al supremo de sus elementos por ser creciente. Notemos L a dicho supremo. Se tiene que $x^n \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En particular,

$$x^{n+1} \leq L,\ \forall n \in \mathbb{N} \implies x^n \leq \frac{L}{x} < L,$$

lo que contradice que L sea el supremo.
Si $x < 1$, entonces $\frac{1}{x} > 1$ y podemos aplicar el apartado anterior para obtener que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = +\infty$ y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

13.5 Criterios de convergencia

El primer criterio que vamos a ver, el criterio de Stolz, permite resolver indeterminaciones de la forma "$\frac{0}{0}$" o "$\frac{\infty}{\infty}$". En cierta manera juega un papel similar a la regla de L'Hôpital para cocientes de funciones.

Proposición 13.29 (Criterio de Stolz). *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales. Supongamos que se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

a) $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y diverge positivamente, o bien

b) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona.

Entonces se verifica que:

a) Si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = L \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = L$.

b) *Si* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = +\infty$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

c) *Si* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = -\infty$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$.

Veamos un ejemplo de su uso.

Ejemplo 13.30. Vamos a calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}.$$

Aplicando el criterio de Stolz, tenemos que estudiar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2)-(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{(n+1)^3-n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2+3n+1} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$.

Proposición 13.31 (Criterio de la raíz). *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales positivos. Se verifica que:*

a) *Si* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L \in \mathbb{R}$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L$.

b) *Si* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = +\infty$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = +\infty$.

Ejemplo 13.32. Aplicando el criterio de la raíz, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Proposición 13.33 (Regla del número e). *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales convergente a uno, y sea* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión cualquiera. Entonces se verifica que:*

a) $\lim_{n\to\infty} y_n(x_n-1) = L \in \mathbb{R} \iff \lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = e^L$.

b) $\lim_{n\to\infty} y_n(x_n-1) = +\infty \iff \lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = +\infty$.

c) $\lim_{n\to\infty} y_n(x_n-1) = -\infty \iff \lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = 0$.

Ejemplo 13.34. Calcular $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2}\right)^{n+3}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2}\right)^{n+3} = e^L \iff \lim_{n\to\infty} (n+3)\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2} - 1\right) = L.$$

Para terminar, resolvemos el segundo límite

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (n+3)\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} (n+3)\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2} - \frac{n^2+2n-2}{n^2+2n-2}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)(-3n+5)}{n^2+2n-2} = -3.\end{aligned}$$

Ejemplo 13.35. La sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y tiene límite e.

Para comprobar que, en efecto, es creciente vamos a escribir el término n-ésimo utilizando el binomio de Newton

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\frac{1}{n^k}\\
&= 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\
&= 1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\frac{1}{3!}+\cdots\\
&\qquad\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}.
\end{aligned}$$

Es fácil imaginar cuál es el término siguiente:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &= 1+1+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)\frac{1}{3!}+\cdots\\
&\qquad\cdots+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\frac{1}{n!}\\
&\qquad\cdots+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Observa los dos términos que acabamos de escribir. Hay dos diferencias:

a) Este último tiene un sumando más que el término n-ésimo. Dicho término de más, el último, es positivo. En realidad, todos los sumandos son positivos.

b) Si nos fijamos en el resto de sumandos y vamos comparando uno a uno

$$\begin{gathered}
1\le 1,\\
1-\frac{1}{n}\le 1-\frac{1}{n+1},\\
\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\le\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right),
\end{gathered}$$

y así sucesivamente.

Uniendo estos dos apartados, obtenemos la desigualdad que estábamos buscando, esto es, que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.
El cálculo del límite es fácil utilizando la Proposición 13.33 (la regla del número e):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^L \iff \lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{1}{n}-1\right)=L,$$

y este segundo límite es inmediato comprobar que vale uno.

13.6 Velocidad de convergencia

Las sucesiones $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\frac{1}{n^2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tienen límite cero, pero un rápido vistazo a sus términos en la Tabla 13.1 nos convence de que los términos de la segunda se acercan más rápidamente al límite.

Otra forma de ver esto es la siguiente. El cociente entre los términos generales de las dos sucesiones es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

lo que indica que la sucesión del denominador, $\frac{1}{n}$, es mucho mayor que la del numerador, $1/n^2$.

Definición 13.36. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente con límite l y sea $\{b_n\}$ otra sucesión convergente a otro número m.

a) Diremos que la velocidad o el orden de convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ es $O(b_n)$ si existe una constante K tal que

$$\frac{|a_n - l|}{|b_n - m|} \leq K, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Diremos que la velocidad o el orden de convergencia de la sucesión es $o(b_n)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n - l|}{|b_n - m|} = 0.$$

n	$1/n$	$1/n^2$
1	1.0	1.0
2	0.5	0.25
3	0.3333333333333333	0.1111111111111111
4	0.25	0.0625
5	0.2	0.04
6	0.1666666666666667	0.02777777777777778
7	0.1428571428571428	0.02040816326530612
8	0.125	0.015625
9	0.1111111111111111	0.01234567901234568
10	0.1	0.01

Tabla 13.1 Primeros términos de las sucesiones $1/n$ y $1/n^2$

La notación "O grande" y "o pequeña" es bastante común a la hora de describir la convergencia de un algoritmo. Obsérvese que $\{b_n\} - m$ es una sucesión que converge a 0. Lo que se hace, en esencia, es comparar la velocidad de convergencia de $\{a_n\}$ a su límite con la velocidad de la convergencia de otra sucesión que converge a 0. Normalmente como sucesión $\{b_n\}$ se toma la sucesión $\{\frac{1}{n^p}\}$ para un natural p.

La definición anterior también tiene también una versión para sucesiones divergentes:

Definición 13.37. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión divergente y sea $\{b_n\}$ otra sucesión divergente.

a) Diremos que la velocidad o el orden de divergencia de la sucesión $\{a_n\}$ es $O(b_n)$ si existe una constante K tal que

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} \leq K, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Diremos que la velocidad o el orden de divergencia de la sucesión $\{a_n\}$ es $o(b_n)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = 0.$$

Análogamente a lo que es usual en sucesiones convergentes, para comparar con sucesiones divergentes suelen utilizarse las sucesiones $\{n^p\}$ con p natural.

Ejemplo 13.38. Con la nomenclatura anterior la sucesión $\left\{\frac{n^2+2n+1}{n^3-2n^2+3n+1}\right\}$ tiende a cero con velocidad $O(1/n)$. En el caso de divergencia se tiene que $\log(n)$ diverge con velocidad $o(n)$.

13.7 Ejercicios

13.7.1 Sucesiones

Ejercicio 13.1. Prueba que si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x}$.

Ejercicio 13.2. Sea a un número real positivo y definamos $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero.

Ejercicio 13.3. Demuestra que la sucesión $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$, $\forall n \geq 1$ es convergente y calcular su límite.

E **Ejercicio 13.4.** Se considera la sucesión definida por recurrencia por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ para $n \in \mathbb{N}$. Estudia si es convergente y, en caso de que lo sea, calcula el límite.

E **Ejercicio 13.5.** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n} - 1$. Calcula $\lim_{n\to\infty} x_n$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}}$.

E **Ejercicio 13.6.** Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25}$.

a) Demuestra que $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$ para cualquier natural n.

b) Demuestra que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

c) Calcula su límite.

Ejercicio 13.7. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Estudiar el comportamiento de la sucesión $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2+a}{2}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

13.7.2 Criterios de convergencia

Ejercicio 13.8. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones y calcular su límite cuando exista.

a) $\left\{\dfrac{1+2^4+3^4+\cdots+n^4}{n^5}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}\right\}$

c) $\left\{\dfrac{1+1/2+1/3+\cdots+1/n}{n}\right\}$

d) $\left\{\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right\}$

Ejercicio 13.9. Calcula el límite de las siguientes sucesiones

a) $\left\{\dfrac{\log(1\cdot 2\cdots n)}{n\log(n)}\right\}$,

b) $\left\{\dfrac{n^2\sqrt{n}}{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\ldots+n\sqrt{n}}\right\}$

c) $\left\{\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots\sqrt[n]{n}}{n^2}\right\}$

Ejercicio 13.10. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}\right\}$

c) $\left\{\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}\right\}$

d) $\left\{\dfrac{\sqrt[n]{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}}{n+1}\right\}$

Ejercicio 13.11. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+56n+5}\right\}$

b) $\left\{\left(\dfrac{n^2-5n+6}{n^2+2n+1}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}\right\}$

c) $\{(1+\log(n+1)-\log(n))^n\}$

Ejercicio 13.12. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\log(n)}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{\log(n+1)!}{\log(n+1)^n}\right\}$

Ejercicio 13.13. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\left(\dfrac{n+1}{n^2+n+5}\right)^{\frac{1}{1+\log(n)}}\right\}$

b) $\left\{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$

c) $\left\{\dfrac{\cos(\sqrt{n^2+1})\log(n)}{n}\right\}$

Ejercicio 13.14. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\sqrt[n]{\dfrac{n!}{(2n)^{n+1}}}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{\log(n!)}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}\right\}$

E **Ejercicio 13.15.** Calcula el límite de la sucesión

$$\left\{ \frac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2} \right\}.$$

E **Ejercicio 13.16.** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \log\left(\frac{3n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 5n}\right)\right)^{4n+1}.$$

Series

14

En el siglo XVIII muchos matemáticos buscaban, sin demasiado éxito, el valor de la expresión

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots$$

La primera aportación relevante fue hecha por Jacobo Bernoulli en 1689 cuando demostró la convergencia de dicha serie. Más tarde, en 1728–1729, D. Bernoulli calculó su valor con una precisión de una centésima. Stirling aumentó la precisión hasta los ocho primeros decimales al año siguiente. Cuatro años después, Euler calculó el valor con dieciocho cifras decimales y se dio cuenta de que coincidían con la expresión de $\pi^2/6$. En años posteriores, Euler no sólo demostró que, efectivamente, ese era el valor de dicha suma sino que calculó $1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\dots$ para k par.

En este tema vamos a estudiar sucesiones de esta forma. Veremos que, en algunos casos concretos, seremos capaces de calcular su límite. En el resto de ocasiones intentaremos, al menos, decidir sobre la convergencia o no de dichas sucesiones.

14.1 Definición y propiedades

Las series de números reales son un caso particular de sucesiones. Comencemos con una sucesión $\{a_n\}$ y construimos la sucesión

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1+a_2, \\ s_3 &= a_1+a_2+a_3, \\ s_2 &= a_1+a_2+a_3+a_4 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. A las sucesiones de la forma $\{s_n\}$ las llamaremos series y hablaremos de la suma de la serie para referirnos a su límite.

Definición 14.1. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Consideremos la sucesión $\{s_n\}$ definida como

$$s_n = a_1+a_2+\cdots+a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

A esta sucesión $\{s_n\}$ la llamaremos *serie de término general* a_n y la notaremos $\sum_{n\geq 1} a_n$. A los términos s_n se les suele llamar *sumas parciales* de la serie. Si $\{s_n\}$ tiene límite, lo notaremos

$$\lim_{n\to\infty} a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,.$$

La principal dificultad para estudiar la convergencia de una serie es que normalmente no disponemos de una fórmula para las sumas parciales. En aquellos casos en que sí, la convergencia de una serie se reduce al cálculo de un límite. Vamos a empezar por un ejemplo sencillo.

Ejemplo 14.2. Vamos a estudiar si la serie $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^n}$ es convergente o, lo que es lo mismo, vamos a calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \,.$$

Los términos de la sucesión de sumas parciales son

n	**sumas parciales**	s_n
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
4	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	$\frac{14}{16}$
	...	
n	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{2^n}$	$1 - \frac{1}{2^n}$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1.$

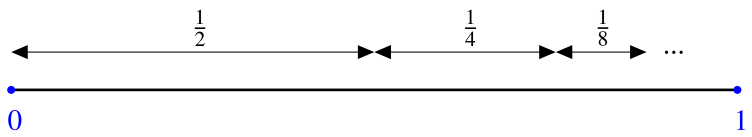

Figura 14.1 La suma de una progresión geométrica de razón $1/2$

Vale, pero ¿de dónde ha salido la fórmula de la suma de los n términos? Gráficamente es muy fácil de ver. El segmento $[0, 1]$ se obtiene uniendo el $[0, \frac{1}{2}]$, y luego vamos añadiendo la mitad de la mitad que nos falta.

Este ejemplo se basa en la suma de los términos de una progresión geométrica. Recordemos cuál es la fórmula para calcular su suma.

Progresiones geométricas

Ejemplo 14.3. Una *progresión geométrica de razón r* es una sucesión de la forma

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^n,$$

donde cada término se obtiene del anterior multiplicándolo por una cantidad fija r, la razón. Esta forma particular hace que se puede calcular su suma de manera explícita. Fijémonos que

$$(1-r)\sum_{k=0}^{n} r^k = \sum_{k=0}^{n} r^k - r\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 - r^{n+1}$$

de donde se deduce que

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = a\sum_{k=0}^{n} r^k = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}. \tag{14.1}$$

Por ejemplo, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$.
El hecho de que tengamos la fórmula (14.1) nos pone en bandeja el cálculo del límite cuando n tiende a $+\infty$. Es fácil comprobar que

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & \text{si } r \in]-1, 1[, \\ 1, & \text{si } r = 1, \\ \text{no existe}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

si, y sólo si, $|r| < 1$.

Estamos dando una definición de suma de infinitos números. La primera condición parece inmediata: los números que sumemos tienen que ser pequeños (cercanos a cero) si no queremos que el resultado final se dispare.

Condición necesaria de convergencia

Proposición 14.4. *Si la serie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *es convergente, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración. Si $\{A_n\}$ es la sucesión de sumas parciales,

$$A_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Restamos y obtenemos que $A_{n+1} - A_n = a_{n+1} \to 0$. □

La serie armónica no es convergente

Ejemplo 14.5. Este resultado nos da una condición necesaria para la convergencia de la serie. Sin embargo, esta condición no es suficiente. El término general de la serie $\sum \frac{1}{n}$, usualmente llamada *serie armónica* converge a cero, pero la serie no es convergente.

a) Vamos a comprobarlo estudiando las sumas parciales hasta un índice que sea potencia de 2.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \overbrace{\cdots}^{n} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Como consecuencia $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

b) También podemos usar el Ejercicio 13.11. Recordemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log(n)} = 1$$

y que, por tanto, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = +\infty$.

c) También podemos utilizar integrales para calcular la suma. Fijado un natural n, consideremos la función $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, n]$ y consideremos la partición $P = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ de dicho intervalo. ¿Cuánto valen las sumas superiores e inferiores?

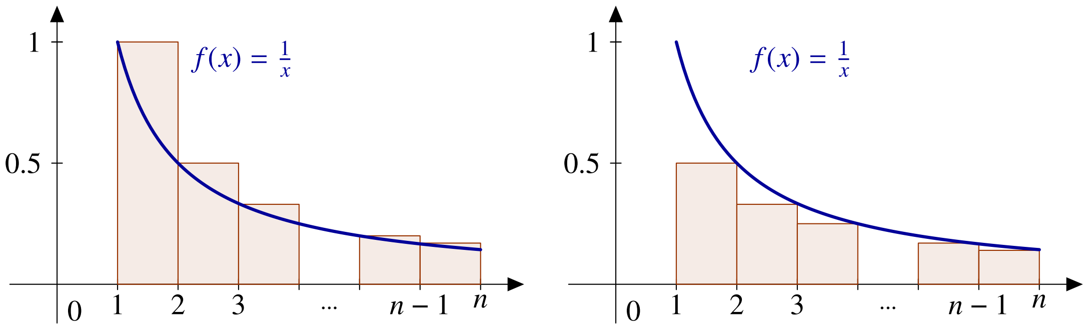

Figura 14.2 Sumas superiores e inferiores de la función $1/x$ en el intervalo $[1, n]$

Sumando las área de los rectángulos de la Figura 14.2, podemos acotar la integral superiormente por

$$\log(n) = \int_1^n \frac{dx}{x} \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} \tag{14.2}$$

e inferiormente

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \le \int_1^n \frac{dx}{x} = \log(n)\,. \tag{14.3}$$

De la desigualdad (14.2), obtenemos que

$$\log(n+1) \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

y desigualdad (14.3) se deduce que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \le 1 + \log(n).$$

En resumen,

$$\log(n+1) \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \le 1 + \log(n)\,.$$

Como la función logaritmo diverge positivamente en $+\infty$, obtenemos que la serie no es convergente, aunque la anterior desigualdad nos da más información sobre el valor de las sumas parciales del que hemos conseguido en los dos apartados anteriores.

Dado que una serie de números reales no es más que una sucesión, las propiedades que ya conocemos de límites de sucesiones siguen siendo ciertas en este ambiente. La siguiente proposición nos dice que el límite de una serie es lineal: parte sumas y saca fuera escalares.

Proposición 14.6. *Sean $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ dos series convergentes. Sean λ y μ números reales. Entonces la serie $\sum_{n\geq 1}(\lambda a_n + \mu b_n)$ es convergente y* **Linealidad**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Trabajando con sucesiones es inmediato comprobar (de hecho, ya lo hemos usado en varias ocasiones) que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si, y sólo si, lo son sus colas $\{a_{n+k}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Además, ambas tienen el mismo límite. Si consideramos la serie asociada a cada de una ellas, la convergencia de ambas está también muy relacionada.

Proposición 14.7. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y k un número natural fijo. Entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente si, y sólo si, lo es la serie $\sum_{n\geq 1} a_{n+k}$. Además, caso de que sean convergentes, se cumple que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k},$$

o lo que es lo mismo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

De nuevo obtenemos que la convergencia de una serie depende de las colas de dicha serie aunque la suma total sí depende de que añadamos o no los primeros términos.

14.2 Convergencia absoluta e incondicional

Definición 14.8.

a) Diremos que la serie $\sum a_n$ es *absolutamente convergente* si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

b) La serie $\sum a_n$ es *incondicionalmente convergente* si para cualquier aplicación biyectiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la serie $\sum a_{\sigma(n)}$ es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Observación 14.9. La convergencia incondicional de una serie es el análogo a la propiedad conmutativa para una suma infinita. Una serie es incondicionalmente convergente si se puede sumar en cualquier orden y el resultado siempre es el mismo. Este es el motivo de que en algunos textos se hable de series conmutativamente convergentes.

La convergencia absoluta y la convergencia incondicional son condiciones más fuertes que la convergencia de una serie. El siguiente resultado nos dice que están relacionadas.

Teorema 14.10 (de Riemann). *Sea $\sum a_n$ una serie de números reales. La serie converge incondicionalmente si, y sólo si, converge absolutamente.*

En la práctica, es sumamente difícil comprobar la convergencia incondicional de una serie directamente. No es sencillo trabajar con todas las reordenaciones posibles de una sucesión de números reales. Lo que sí haremos es estudiar la convergencia absoluta.

El primer criterio y, posiblemente, el más importante que vamos a utilizar en el estudio de la convergencia de series de números reales es el criterio de comparación. Esencialmente nos dice que si una serie se puede sumar también se puede sumar otra más pequeña y, recíprocamente, si una serie no se puede sumar, otra mayor tampoco se puede.

Teorema 14.11 (Criterio de comparación). *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales verificando que $|a_n| \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

a) Si $\sum b_n$ es convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\sum a_n$ es divergente, entonces $\sum b_n$ es divergente.

Si aplicamos el criterio de comparación tomando $b_n = |a_n|$, se obtiene que las series absolutamente convergentes son convergentes, esto es, una de las implicaciones del teorema de Riemann. El recíproco del criterio de comparación no es cierto.

Ejemplo 14.12. La serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente pero no absolutamente convergente.

Dado que la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ no es incondicionalmente convergente, si la sumamos en distinto orden nos puede dar un resultado diferente pero ¿cuántos?. La respuesta es que muchos. Más concretamente, la serie se puede reordenar de forma que su suma sea el número real que queramos.

Teorema 14.13 (Teorema de Riemann). *Sea $\sum a_n$ una serie convergente pero no absolutamente convergente. Dado un número real x cualquiera, existe una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = x$.*

14.3 Criterios de convergencia para series de términos no negativos

El primer criterio es una versión del criterio de comparación usando límites.

Proposición 14.14 (Criterio de comparación por paso al límite). *Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sucesiones de números reales verificando $a_n \geq 0$, y $b_n > 0$. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

a) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$ entonces, $\sum a_n$ converge $\iff \sum b_n$ converge.

b) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ entonces, $\sum b_n$ converge $\implies \sum a_n$ converge.

c) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ entonces, $\sum a_n$ converge $\implies \sum b_n$ converge.

Ejemplo 14.15. Las series $\sum \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{3n^2-n+7}$ tienen el mismo carácter de convergencia. La ventaja del criterio de comparación por paso al límite es que no hace falta saber que una de ellas es mayor que la otra. Es suficiente con que sean “aproximadamente” iguales:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{3n^2-n+7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-n+7}{n^2} = 3.$$

Por ahora no sabemos si ambas series son convergentes o no (dentro de poco veremos que sí lo son) pero sí podemos aplicarlo a otras series. Por ejemplo, $\sum \frac{1}{2^n-n}$ y $\sum \frac{1}{2^n}$ tiene el mismo carácter. Como sabemos que $\sum \frac{1}{2^n}$ es convergente, también lo es $\sum \frac{1}{2^n-n}$. Observa que el criterio de comparación *no* nos resuelve este mismo problema: $\frac{1}{2^n-n}$ es mayor que $\frac{1}{2^n}$ y, por tanto, el criterio de comparación no da información.

Proposición 14.16 (Criterio de la raíz o de Cauchy). *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.*

a) Si $\sqrt[n]{a_n} \le L < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, entonces $\sum a_n$ no es convergente.

Corolario 14.17. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.*

a) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, entonces $\sum a_n$ no es convergente.

Ejemplo 14.18. Vamos a estudiar la convergencia de la serie $\sum \left(\frac{n}{7n+3}\right)^{2n+1}$ utilizando el criterio de la raíz. Para ello calculamos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{7n+3}\right)^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{7n+3}\right)^{\frac{2n+1}{n}} = \frac{1}{7^2}.$$

Como dicho límite es menor que uno, la serie es convergente.

Para calcular el límite de una raíz n-ésima podemos aplicar el criterio de la raíz (véase Proposición 13.31).

Proposición 14.19 (Criterio del cociente o de D'Alembert). *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.*

a) Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le L < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, entonces $\sum a_n$ no es convergente.

Corolario 14.20. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.*

a) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, entonces $\sum a_n$ no es convergente.

Ejemplo 14.21. Vamos a estudiar la convergencia de la serie $\sum \frac{2n^2}{2^n+3}$ utilizando el criterio del cociente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(n+1)^2}{2^{n+1}+3}}{\frac{2n^2}{2^n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^2}{2n^2} \frac{2^n+3}{2^{n+1}+3} = \frac{1}{2}.$$

Como el límite es menor que uno la serie es convergente.

Proposición 14.22 (Criterio de Raabe). *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.*

a) Si $n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq L > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1$, entonces la serie $\sum a_n$ no es convergente.

Corolario 14.23. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.*

a) Si $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ no es convergente.

Ejemplo 14.24. Vamos a estudiar la convergencia de la series cuyo término general es

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!\, n!}\, \frac{1}{(2n+1)\, 2^{2n}}.$$

Aplicamos, en primer lugar, el criterio del cociente.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\, \frac{1}{(2n+3)\,2^{2n+2}}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}\, \frac{1}{(2n+1)\,2^{2n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n+1)}{4(n+1)(n+1)(2n+3)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2}{2(n+1)(2n+3)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6} = 1.
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6} \leq 1$$

el criterio del cociente no da información útil. Aplicamos ahora el criterio de Raabe:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+5n}{4n^2+10n+6} = \frac{6}{4} > 1,
\end{aligned}$$

y, por tanto, el criterio de Raabe nos dice que la serie es convergente.

Proposición 14.25 (Criterio de condensación). *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números no negativos tal que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente a cero. Entonces se verifica que*

$$\sum a_n \text{ es convergente} \iff \sum 2^n\, a_{2^n} \text{ es convergente}.$$

Ejemplo 14.26. Vamos a estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$, con $a \in \mathbb{R}$.

Serie armónica generalizada

a) Si $a \leq 0$, el término general $\frac{1}{n^a}$ no tiende a cero y, por tanto, la serie no es convergente.

b) Si $a > 0$, el término general es decreciente y converge a cero. Podemos aplicar el criterio de condensación: las series $\sum \frac{1}{n^a}$ y $\sum \frac{2^n}{(2^n)^a}$ tienen el mismo comportamiento. Como

$$\sum \frac{2^n}{(2^n)^a} = \sum \frac{1}{2^{(a-1)n}},$$

aplicamos el criterio de la raíz:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^{(a-1)n}}} = \frac{1}{2^{a-1}} < 1 \iff a > 1.$$

Resumiendo, si $a > 1$ la serie es convergente. Si $a < 1$, la serie no es convergente y si $a = 1$ ya sabíamos que no era convergente.

A esta serie se la suele llamar *serie armónica generalizada de exponente a*.

El ejemplo anterior será clave en muchos ejercicios para poder aplicar el criterio de comparación. Es por esto que lo resaltamos:

Proposición 14.27. $\sum \frac{1}{n^a}$ *es convergente si, y sólo si,* $a > 1$.

Por ejemplo, si comparamos $\frac{1}{n^a}$ con a_n tenemos que estudiar el cociente

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^a}} = n^a a_n .$$

El siguiente resultado recoge las diferentes posibilidades que se pueden presentar.

Proposición 14.28 (Criterio de Pringsheim). *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números no negativos.*

a) Si existe $a > 1$ tal que la sucesión $\{n^a a_n\}$ está acotada entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si existe $a \leq 1$ tal que $\{n^a a_n\}$ converge a $L \neq 0$ o es divergente entonces $\sum a_n$ no es convergente.

14.4 Otros criterios

La principal herramienta para estudiar la convergencia de series de términos cualesquiera serán los criterios de Dirichlet y Abel.

Teorema 14.29. *Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales.*

a) Si $\{a_n\}$ es monótona, converge a cero y la serie $\sum b_n$ tiene sumas parciales acotadas, entonces $\sum a_n b_n$ converge. **Criterio de Dirichlet**

b) Si $\{a_n\}$ es monótona, acotada y la serie $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n b_n$ es convergente. **Criterio de Abel**

La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente pero sus sumas parciales siempre valen -1 o 0 y, en particular, están acotadas. Tomando $b_n = (-1)^n$ en el criterio de Dirichlet obtenemos lo siguiente.

Proposición 14.30 (Criterio de Leibniz). *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales no negativos. Si la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente a cero, entonces la serie alternada $\sum(-1)^n x_n$ es convergente.*

Ejemplo 14.31. La serie alternada $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$, que ya comentamos en el Ejemplo 14.12, es convergente porque $\frac{1}{n}$ es decreciente y convergente a cero.

14.5 Suma de series

Sólo en contadas ocasiones es factible calcular de manera explícita la suma de una serie. La mayoría de las veces serán necesarios medios indirectos como veremos, por ejemplo, en la siguiente sección. La dificultad radica en el cálculo explícito del valor de las sumas parciales. Si sabemos cuánto valen, el problema de estudiar la convergencia de la serie se reduce a un problema de cálculo de límites, cosa normalmente mucho más sencilla.

Observación 14.32. Hasta ahora sólo hemos estudiado la convergencia y no el valor de la suma de la serie. No es lo mismo $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$. ¡Hay un sumando de diferencia!

14.5.1 Series telescópicas

Las series telescópicas son aquellas series $\sum a_n$ cuyo término general se puede escribir de la forma $a_n = b_n - b_{n+1}$ para alguna sucesión $\{b_n\}$. El cálculo de su suma equivale al cálculo del límite de la sucesión $\{b_n\}$. Para verlo sólo tienes que calcular las sumas parciales:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (b_1 - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + \cdots + (\cancel{b_n} - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Resumiendo,

Proposición 14.33. *Sea $\{b_n\}$ una sucesión de números reales. Entonces la serie que tiene como término general $a_n = b_n - b_{n+1}$ es convergente si, y sólo si, $\{b_n\}$ es convergente. En ese caso*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Ejemplo 14.34. Vamos a calcular el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Como $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, las sucesión de sumas parciales es

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

con lo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$

14.5.2 Series geométricas

La serie $\sum r^n$ se puede sumar utilizando que conocemos sus sumas parciales, como ya hicimos en el Ejemplo 14.3. Sabemos que

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

y tomando límites cuando n tiende a infinito obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 14.35. *La serie $\sum r^n$ es convergente si, y sólo si, $|r| < 1$. En ese caso* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

Demostración. Sólo hay que usar la fórmula de la suma de una progresión geométrica que vimos en el Ejemplo 14.3:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} r^k = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}-1}{r-1} = \frac{1}{1-r},$$

ya que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ si $|r| < 1$. En cualquier otro caso el término general de la serie no converge a cero y, por tanto, la serie no es convergente. □

Veamos un ejemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{5^n} = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{4}{1-\frac{1}{5}} = 5\,.$$

Si la serie no comienza en $n = 0$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = [m = n-2] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+2}} = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,.$$

14.5.3 Series aritmético-geométricas

Las series aritmético-geométricas son series de la forma $\sum p(n)r^n$, donde p es un polinomio. Para calcular su suma, transformamos la serie en otra en la que el grado del polinomio es menor hasta obtener una serie geométrica. Si $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)r^n = S$, entonces

$$\begin{aligned}(1-r)S &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n)r^n - \sum_{n=0}^{\infty} p(n)r^n + 1\\ &= p(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(p(n) - p(n-1)\right) r^n.\end{aligned}$$

Observa que $p(n) - p(n-1)$ sigue siendo un polinomio, pero con grado estrictamente menor que el grado de $p(n)$. Repitiendo este proceso las veces necesarias, acabamos obteniendo una serie geométrica. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 14.36. Vamos a calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(n^2-n)r^n$. Si su suma es S, entonces

$$(1-r)S = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n^2-n) - ((n-1)^2 - (n-1))\right] r^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2nr^n,$$

o, lo que es lo mismo,

$$S = \frac{2}{1-r}\sum_{n=1}^{\infty} nr^n.$$

Repetimos el proceso anterior, si $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} nr^n$, entonces

$$(1-r)S_1 = r + \sum_{n=2}^{\infty}[n-(n-1)]r^n = r + \frac{1}{1-r} - 1 - r = \frac{r}{1-r}.$$

Por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n)r^n = \frac{2}{1-r}\cdot\frac{r}{1-r} = \frac{2r}{(1-r)^2}.$$

14.5.4 Cocientes de polinomios

En algunos casos se pueden sumar descomponiendo el término general en fracciones simples. También pueden ser de utilidad algunas identidades como, por ejemplo, la que define la constante de Euler.

La constante de Euler-Mascheroni

En el Ejercicio ?? vimos que

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$$

se cumple para cualquier x positivo. En particular, para $x = \frac{1}{n} \in \mathbb{N}$ obtenemos que

$$\log(1+n) - \log(n) = \log\left(\frac{1+n}{n}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

y que

$$\frac{1}{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

.

Si definimos $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$ y $a_{2n} = \log(n+1) - \log(n)$, las desigualdades anteriores se escriben como

$$a_{2n+1} < a_{2n} < a_{2n-1},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

o, lo que es lo mismo, la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente. El criterio de Leibniz nos da que la serie $\sum(-1)^{n+1}a_n$ es convergente, o sea que existe el límite

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} -a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n &= \lim_{n\to\infty} 1 - (\cancel{\log(2)} - \log(1)) \\ &+ \frac{1}{2} - (\cancel{\log(3)} - \cancel{\log(2)}) + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - (\log(n+1) - \cancel{\log(n)}) \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1).\end{aligned}$$

Este límite recibe el nombre de *constante de Euler-Mascheroni* y se denota por γ: **Constante de Euler-Mascheroni**

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n).$$

14.6 Ejercicios

14.6.1 Convergencia de series numéricas

Ejercicio 14.1. Aplicar el criterio de la raíz para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$
b) $\sum \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}$
c) $\sum \frac{n^n}{(2n+1)^n}$
d) $\sum \frac{n^n}{e^{(n^2+1)}}$
e) $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

Ejercicio 14.2. Aplicar el criterio del cociente para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{1}{n2^n}$
b) $\sum \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$
c) $\sum \frac{(n+1)^n}{3^n n!}$
d) $\sum \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}$
e) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$

Ejercicio 14.3. Aplicar el criterio de comparación para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{\log(n)}{n}$
b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
c) $\sum \frac{1}{2n-1}$
d) $\sum \frac{1}{2^n-n}$
e) $\sum \frac{1}{(2n-1)2n}$
f) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$
g) $\sum \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

Ejercicio 14.4. Aplicar el criterio de condensación para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{1}{n\log(n)}$

b) $\sum \frac{1}{n(\log(n))^2}$

c) $\sum \frac{1}{n(\log(n))\log(\log(n))}$

Ejercicio 14.5. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{2^n}{n}$
b) $\sum \frac{n+1}{2n+1}$
c) $\sum \frac{1}{n^2\log(n)}$
d) $\sum \frac{n^2}{(3n-1)^2}$
e) $\sum \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$

Ejercicio 14.6. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{1}{n!}$
b) $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$
c) $\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$
d) $\sum \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$
e) $\sum \frac{n^2}{4^{(n-1)}}$

Ejercicio 14.7. Estudiar la convergencia de las series

a) $\sum \frac{n^3}{e^n}$
b) $\sum \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$
c) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
d) $\sum \frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$
e) $\sum \left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n$
f) $\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}$
g) $\sum \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)}$

Ejercicio 14.8. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum (-1)^n \frac{20^n}{n+1}$
b) $\sum \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^2$
c) $\sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$
d) $\sum \log\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)$
e) $\sum \frac{\sqrt[3]{n}\log(n)}{n^2+1}$
f) $\sum (-1)^n e^{-n}$

E **Ejercicio 14.9.** Estudia el carácter de las siguientes series:

a) $\sum \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$.

b) $\sum \frac{1+\log(n)}{n^n}$.

E **Ejercicio 14.10.** Estudiar, según los valores de $a > 0$ la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{a^n}{n^a}$

b) $\sum a^n n^a$

14.6.2 Suma de series

Ejercicio 14.11. Suma, si es posible, las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{10^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$

Ejercicio 14.12. Suma, si es posible, las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$

Ejercicio 14.13. Suma la serie de números reales $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n!}$