SUMAS Y PRODUCTOS REITERADOS

ALGEBRA I, DOBLE GRADO EN INFORMÁTICA-MATEMÁTICAS.

En lo que sigue A denotará un anillo conmutativo arbitrario.

1. Sumas y productos reiterados

Si $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ es una lista de n elementos del anillo, definimos su "*suma*" y su "*producto*"

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n, \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdots a_n$$

por inducción en n: Para $n = 1$, definimos $\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$, $\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1$ y, para $n > 1$, recursívamente

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (\sum_{i=1}^{n-1} a_i) + a_n, \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = \Big(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\Big) a_n.$$

Así, $\sum_{i=1}^{2} a_i = a_1 + a_2$, $\sum_{i=1}^{3} a_i = (a_1 + a_2) + a_3$, $\sum_{i=1}^{4} a_i = ((a_1 + a_2) + a_3) + a_4$, etc.

La propiedad *asociativa generalizada* siguiente, nos garantiza que, a efectos de cálculo, la ubicación de los paréntesis para realizar una tal suma o producto es irrelevante.

Proposición 1.1. *Sean naturales $m, n \geq 1$, y $(a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+n})$ una lista de $m + n$ elementos del anillo. Entonces,*

$$\sum_{i=1}^{m+n} a_i = \Big(\sum_{i=1}^{m} a_i\Big) + \Big(\sum_{i=m+1}^{m+n} a_i\Big),$$

$$\prod_{i=1}^{m+n} a_i = \Big(\prod_{i=1}^{m} a_i\Big)\Big(\prod_{i=m+1}^{m+n} a_i\Big).$$

Notemos que, por ejemplo, si $m = 2$ y $n = 2$, la igualdad propuesta nos dice que

$$((a_1 + a_2) + a_3) + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4),$$

y si $m = 1$, $n = 3$, que $((a_1 + a_2) + a_3) + a_4 = a_1 + ((a_2 + a_3) + a_4)$.

Demostración. Procedemos por inducción en n. Para $n = 1$, es la definición:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{m+1} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + a_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} a_i.$$

Supuesto cierto para un n,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{m+n+1} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \Big(\sum_{i=1}^{m+n} a_i + a_{m+n+1}\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} a_i\Big) + a_{m+n+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{m+n} a_i + a_{m+n+1} = \sum_{i=1}^{m+n+1} a_i.$$

$\square$

La siguiente igualdad también es importante

Proposición 1.2 (*Distributividad generalizada*). $\left(\sum_{i=1}^m a_i\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j$.

DEMOSTRACIÓN. Inducción en m. Si $m = 1$, hacemos inducción en n. Si $n = 1$ es obvio: $a_1 b_1 = a_1 b_1$. Si $n > 1$:

$$a_1 \sum_{j=1}^{n} b_j = a_1\Big(\sum_{j=1}^{n-1} b_j + b_n\Big) = \Big(a_1 \sum_{j=1}^{n-1} b_j\Big) + a_1 b_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_1 b_j + a_1 b_n = \sum_{j=1}^{n} a_1 b_j.$$

Supuesto ahora $m > 1$, y haciendo hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j\Big) &= \Big(\sum_{i=1}^{m-1} a_i + a_m\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{m-1} a_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j\Big) + a_m\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j\Big)\\ &= \Big(\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j\Big) + \sum_{j=1}^{n} a_m b_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j. \quad \square\end{aligned}$$

2. Productos por enteros y potencias

Si tenemos una lista de elementos $(a_1, \ldots, a_n)$ en la que todos los elementos son iguales, digamos $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$, entonces el elemento suma de todos ellos $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a$ es precisamente la suma reiterada de ese elemento a consigo mismo n veces. Se representa por na, esto es,

$$na = \sum_{i=1}^{n} a = a + \overset{n\, veces}{\cdots} + a$$

y nos referimos a este elemento como **producto del número entero $n \geq 1$ por a**. Convenimos también en poner $0a = 0$, de manera tenemos definido el producto de cualquier número natural por cualquier elemento del anillo.

Similármente, el elemento producto de todos ellos $\prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n a$ es el producto reiterado de ese elemento a consigo mismo n veces. Se representa por a^n, esto es,

$$a^n = \prod_{i=1}^{n} a = a \overset{n\, veces}{\cdots} a.$$

Convenimos en poner $a^0 = 1$.

El lema siguiente nos permite extender el producto a enteros arbitrarios y definir potencias negativas de unidades del anillo.

Lema 2.1. *Sean $a_1, \ldots, a_n \in A$.*

(1) $-\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n (-a_i)$.
(2) *Si $a_1, \ldots, a_n \in U(A)$, entonces $\prod_{i=1}^n a_i \in U(A)$, y su inverso es $(\prod_{i=1}^n a_i)^{-1} = \prod_{i=1}^n a_i^{-1}$.*

Demostración. Inducción en $n \geq 1$. El caso $n = 1$ es una evidencia. Supuesto $n > 1$, y haciendo hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} -a_i &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n + \sum_{i=1}^{n-1} -a_i - a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n - a_n + \sum_{i=1}^{n-1} -a_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \sum_{i=1}^{n-1} -a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big(\prod_{i=1}^{n} u_i\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n} u_i^{-1}\Big) &= \Big(\prod_{i=1}^{n-1} u_i\Big)u_n\Big(\prod_{i=1}^{n-1} u_i^{-1}\Big)u_n^{-1} = \Big(\prod_{i=1}^{n-1} u_i\Big)u_n u_n^{-1}\Big(\prod_{i=1}^{n-1} u_i^{-1}\Big) \\ &= \Big(\prod_{i=1}^{n-1} u_i\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n-1} u_i^{-1}\Big) = 1.\end{aligned}$$

□

El lema anterior nos asegura que, para cualquier entero $n \geq 1$, $-(na) = n(-a)$. Convenimos en definir este elemento como **el producto del entero negativo $-n$ por el elemento a**:

$$(-n)a := -(na) = n(-a)$$

y representarlo simplemente como $-na$ (sin posible confusión por ubicación de paréntesis). De forma similar, para todo $u \in U(A)$ y todo $n \geq 1$, tenemos que $u^n \in U(A)$, y se verifica que $(u^n)^{-1} = (u^{-1})^n$. Convenimos en definir este elemento como **la potencia de exponente el entero negativo $-n$ del elemento u**, y representarlo por

$$u^{-n} := (u^n)^{-1} = (u^{-1})^n,$$

sin tampoco posible confusión por ubicación de paréntesis.

Proposición 2.2. *Para cualesquiera $a, b \in A$, $u, v \in U(A)$, se verifican las igualdades*

(1) $(m + n)a = ma + na$, *para cualesquiera* $m, n \in \mathbb{Z}$.
(2) $n(a + b) = na + nb$, *para cualesquiera* $m, n \in \mathbb{Z}$.
(3) $m(na) = (mn)a$, *para cualesquiera* $m, n \in \mathbb{Z}$.
(4) $(ma)(nb) = (mn)(ab)$, *para cualesquiera* $m, n \in \mathbb{Z}$.
(5) $a^n a^m = a^{n+m}$, *para cualesquiera* $n, m \geq 0$.
(5') $u^m u^n = u^{m+n}$, *para cualesquiera* $m, n \in \mathbb{Z}$.
(6) $(ab)^n = a^n b^n$, *para todo* $n \geq 0$.
(6') $(uv)^n = u^n v^n$, *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.
(7) $(a^m)^n = a^{mn}$, *para cualesquiera* $m, n \geq 0$.
(7') $(u^m)^n = u^{mn}$, *para cualesquier* $m, n \in \mathbb{Z}$.
(8) $(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.

Demostración.

(1), (5) y (5'): Para $m, n \geq 1$, son directa consecuencia de la asociatividades generalizadas de la suma y el producto. Que son ciertas también si $m = 0$ o $n = 0$ es inmediato desde que $0a = 0$ y $a^0 = 1$.

Nos queda ver el caso en que intervienen enteros negativos. Sean $m, n > 0$.

Si $m \geq n$, pongamos $m = n + k$, con $k = m - n \geq 0$. Entonces,

$$ma - na = (n + k)a - na = na + ka - na = na - na + ka = 0 + ka = ka = (m - n)a.$$

Y para u una unidad de A

$$u^m u^{-n} = u^{n+k} u^{-n} = u^k u^n u^{-n} = u^k 1 = ka = u^{m-n}.$$

Análogamente, si $m \leq n$, pongamos $n = m + k$, con $k = n - m \geq 0$. Entonces,

$$ma - na = ma - (m+k)a = ma - (ma + ka) = ma - ma - ka = -ka = (m-n)a.$$

Y para u una unidad de A

$$u^m u^{-n} = u^m u^{-(m+k)} = u^m (u^{m+k})^{-1} = u^m (u^m u^k)^{-1} = u^m (u^m)^{-1} (u^k)^{-1} = u^{-k} = u^{m-n}.$$

Finalmente,

$$(-m-n)a = (-(m+n))a = -((m+n)a) = -(ma + na) = -ma - na.$$

Y para u una unidad de A

$$u^{-m-n} = (u^{m+n})^{-1} = (u^m u^n)^{-1} = (u^m)^{-1} (u^n)^{-1} = u^{-m} u^{-n}.$$

(2), (6) y (6′): Para $n = 0, 1$ son inmediatas. Para $n \geq 1$ procedemos inductívamente:

$$\begin{aligned}(n+1)(a+b) &= n(a+b) + a + b = na + nb + a + b = na + a + nb + b \\ &= (n+1)a + (n+1)b,\end{aligned}$$

$$(ab)^{n+1} = (ab)^n ab = a^n a b^n b = a^{n+1} b^{n+1}.$$

Entoces para enteros negativos

$$(-n)(a+b) = -n(a+b) = -(na + nb) = -na - nb.$$

Y para u, v unidades del anillo

$$(uv)^{-n} = ((uv)^n)^{-1} = (u^n)^{-1} (v^n)^{-1} = u^{-n} v^{-n}.$$

(3), (7) y (7′): Para $m = 0$ son claras. Para $m \geq 1$ ($n \geq 0$), hacemos inducción en m:

$$(m+1)(na) = m(na) + na = (mn)a + na = (mn+n)a = ((m+1)n)a,$$

$$(a^m)^{n+1} = (a^m)^n a^m = a^{mn} a^m = a^{mn+m} = a^{m(n+1)}.$$

Entonces, para enteros negativos tenemos

$$(-n)(ma) = -(n(ma)) = -((nm)a) = (-nm)a.$$

$$(u^m)^{-n} = ((u^m)^n)^{-1} = (u^{mn})^{-1} = u^{-mn}.$$

La igualdades $n(-ma) = (-nm)a$ y $(u^{-m})^n = u^{-mn}$ se ven similármente, y, finalmente,

$$(-n)((-m)a) = -(n(-(ma)) = (nm)a = ((-n)(-m)a),$$

$$(u^{-m})^{-n} = (((u^m)^{-1})^{-1})^m = (u^m)^n = u^{mn} = u^{(-m)(-n)}.$$

(4) : Para $m, n \geq 1$, la igualdad se sigue de la distributividad generalizada, y resulta evidente si $m = 0$ o $n = 0$. Entonces para los negativos

$$(-ma)(nb) = -((ma)(nb)) = -((mn)(ab)) = -(mn)(ab) = ((-m)n)(ab),$$

$$(-ma)(-nb) = (ma)(nb) = (mn)(ab) = ((-m)(-n))(ab).$$

(8) Recordemos el significado de los términos binomiales

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i(i-1)\cdots 2\cdot 1}.$$

Y tengamos en cuenta la fórmula

$$\begin{aligned}\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} &= \frac{n!}{j!(n-j)!} + \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} = \frac{n!(n-j)!(j-1)!(n-j+1+j)}{j!(n-j)!(j-1)!(n-j+1)!}\\ &= \frac{n!(n+1)}{j!(n-j+1)!} = \binom{n+1}{j}.\end{aligned}$$

Procedemos entonces inductívamente en $n \geq 1$. Para $n = 1$ es fácil

$$\binom{1}{0}a^0b^1 + \binom{1}{1}a^1b^0 = b + a = a + b = (a+b)^1.$$

Supuesta la validez para un n, entonces

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{i+1}b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n+1-i}\\ &= \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}a^ib^{n+1-i} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n+1-i}\\ &= \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i}a^ib^{n+1-i} + b^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a^ib^{n+1-i}.\end{aligned}$$

$\square$