

Ones electromagnètiques
Universitat de València
Curs 2015-2016

`llacan@alumni.uv.es`

Índex

1	Sistemes guiats amb simetria translacional	1
1.1	Introducció	1
1.2	Ones electromagnètiques	1
1.3	Espectre mode i propietats de tall	4
1.3.1	Modes TEM	4
1.3.2	Modes TE	4
1.3.3	Modes TM	4
1.3.4	Modes híbrids	5
1.3.5	Propietats de tall	5
1.4	Diagrama $\omega - \beta$ i dispersió	5
1.4.1	Velocitat de fase	5
1.4.2	Velocitat de grup	5
1.5	Potència transmesa per mode	6
1.6	Pèrdues d'energia	6
1.6.1	Atenuació per dielèctric	7
1.6.2	Pèrdues en conductors	7
1.7	Decibels	8
2	Linies de transmissió	9
2.1	Teoria de paràmetres distribuïts	9
2.1.1	Capacitat	9
2.1.2	Inductància	10
2.1.3	Conductància	10
2.1.4	Resistència	10
2.2	Ones de tensió i corrent	10
2.3	Relació entre tensió i corrent	11
2.4	Factor de propagació	11
2.4.1	Línia sense pèrdues	11
2.4.2	Línia amb poques pèrdues	11
2.4.3	Corrent continua DC	12
2.5	Comentaris	12
2.5.1	Alternatives per a calcular C, L i G	12
2.5.2	Paràmetres independents	12
2.5.3	Incertesa energia / temps	12
3	Linies de transmissió carregades	13
3.1	Introducció	13
3.2	Coeficient de reflexió en la càrrega	13

3.3	Potència consumida	14
3.4	Ones estacionàries	14
3.5	Impedància d' entrada d' una línia	14
3.6	Generador i línia	16
4	Guies tancades homogènies	17
4.1	Introducció	17
4.2	Guia rectangular	17
4.3	Mode fonamental	19
4.4	Guia circular	19
4.5	Guia coaxial	21
4.5.1	Modes TE	22
5	Guies superficials	23
5.1	Introducció	23
5.2	Làmina dielèctrica sobre plans de terra	23
5.2.1	Modes TM	23
6	Ressonadors electromagnètics	27
6.1	Introducció	27
6.2	Paràmetres d' un resonador	27
6.2.1	Freqüència de ressonància	27
6.2.2	Energia emmagatzemada	28
6.2.3	Càlcul de Q en guies	28
6.3	Cavitats ressonants	29
6.3.1	Cavitat paral·lelepípedica	29
7	Mètodes pertorbatius i modes acoblats	31
7.1	Introducció	31
7.2	Mètodes pertorbatius	31
7.2.1	Pertorbacions materials	31
7.2.2	Pertorbació de forma	33
7.3	Teoria de modes acoblats	33
7.3.1	Acoblament de modes copropagants	33
8	Teoria de circuits d' alta freqüència	35
8.1	Introducció	35
8.2	V i I en una guia d' ona	35
8.3	Matrius d' impedància Z i d' admitància Y	36
8.4	Matriu d' scattering S	36
8.5	Propietats de les matrius	37
8.6	Connexions de xarxes en cascada	38

Capítol 1

Sistemes guiats amb simetria translacional

1.1 Introducció

Una guia d'ona és una estructura que restringeix l'expansió d'una ona a una regió de l'espai, de manera que aquesta es propaga desde la font fins a un lloc desitjat minimitzant la pèrdua d'energia. En general consisteixen en una capa de material conductor que envolta la regió de propagació, com a la figura 1.1.

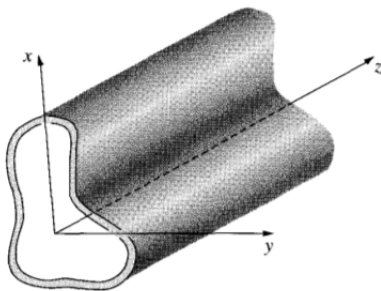


Figura 1.1: Guia d'ona amb simetria translacional

1.2 Ones electromagnètiques

Per a estudiar el comportament del camp electromagnètic en presència de conductors necessitem resoldre les equacions de Maxwell en zones sense càrrega (i.e. $\rho = \vec{J} = 0$) junt a les condicions de contorn imposades pel sistema.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad (1.1a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.1b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.1c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.1d)$$

Açò es simplifica als sistemes amb simetria translacional, en que les propietats dels material són constants al llarg d'una direcció espacial. Com que les propietats dels materials seran constants suposarem també que el perfil temporal del camp, que depèn sobretot de la font, es manté amb el temps, i que aquest perfil és harmònic amb el temps, de manera que podem separar els camps en dos components (en general treballarem amb camps imaginaris, entenent que en realitat el camp és sols la part real):

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = E(\vec{r}) e^{j\omega t} \quad (1.2a)$$

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = H(\vec{r}) e^{j\omega t} \quad (1.2b)$$

Aquesta suposició simplifica enormement les matemàtiques, i en casos en que la font no és harmònica podem utilitzar anàlisi de Fourier i descomposar-la en components que si ho són. La majoria de les fonts, de qualsevol manera, són d'aquest tipus.

Si substituïm (1.2a)-(1.2b) en (1.1a)-(1.1d) obtenim equacions de Helmholtz ¹:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (1.3a)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \quad (1.3b)$$

on $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$. Tenim ara sis equacions per a les components dels camps que podem resoldre per separació de variables. Resoldrem sols el cas E_x , ja que la resta són anàlegs:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \quad (1.4)$$

Suposem $E_x(\vec{r}) = e_1(x)e_2(y)e_3(z)$, i com que z és privilegiada (el material és simètric en aquesta direcció), fem $E_x(\vec{r}) = f_t(x, y)f_z(z)$. Pel procediment habitual convertim (1.4) en dues noves:

$$\frac{1}{f_z} \frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2} = -\beta^2 \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{f_t} \left(\frac{\partial^2 f_t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_t}{\partial y^2} \right) + k^2 = \beta^2 \quad (1.6)$$

On β és un paràmetre independent que desconexim. El signe i el quadrat han sigut introduïts per conveniència.

La solució de la primera és $f_z(z) \propto e^{\pm j\omega t}$. La segona és un altra equació de Helmholtz que deixem sense resoldre:

$$\frac{\partial^2 f_t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_t}{\partial y^2} + (k^2 - \beta^2)f_t = 0 \quad (1.7)$$

Fent el mateix amb les altres 5 equacions obtenim camps harmònics en z amb freqüència espacial β :

¹Sempre i quan el medi siga lineal, isòtop i homogeni, cosa que suposarem durant tot el curs. També donarem per sentat que el medi no és magnètic, pel que $\mu_r \sim 1$.

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = (\vec{e}_t + \vec{e}_z) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (1.8)$$

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = (\vec{h}_t + \vec{h}_z) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (1.9)$$

En principi tenim sis equacions, però podem reduir-les a dues si utilitzem les equacions de Maxwell sobre els camps. Usarem l' operador $\vec{\nabla}$ descompost:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z = \vec{\nabla}_t - j\beta \vec{u}_z \quad (1.10)$$

La component z és queda així perquè anem a aplicar l' operador sobre camps harmònics en z , pel que $\frac{\partial}{\partial z}$ té el mateix efecte que multiplicar per $-j\beta$.

Aplicant la llei de Faraday (1.1b) a aquests camps obtenim

$$(\vec{\nabla}_t - j\beta \hat{u}_z) \times (\vec{e}_t + \vec{e}_z) = -j\omega\mu(\vec{h}_t + \vec{h}_z) \quad (1.11)$$

Separant els resultats en components z i T :

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{e}_t = -j\omega\mu(\vec{h}_z) \quad (1.12)$$

$$-\hat{u}_z \times (\vec{\nabla}_t \vec{e}_z) - j\omega \times \vec{e}_t = -j\omega\mu \vec{h}_t \quad (1.13)$$

Fent el mateix amb la llei d' Ampère (1.1d) s' obté:

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{h}_t = j\omega\epsilon(\vec{e}_z) \quad (1.14)$$

$$-\hat{u}_z \times (\vec{\nabla}_t \vec{h}_z) - j\omega \times \vec{h}_t = -j\omega\epsilon \vec{e}_t \quad (1.15)$$

Si $e_z = h_z = 0$ tenim que $\vec{\nabla}_t \times \vec{e}_t = \vec{\nabla}_t \times \vec{h}_t = 0$ existeixen potencials escalars i vectorials i el problema és reduir a resoldre les equacions de Laplace per a aquests. En cas contrari podem aïllar \vec{h}_t en (1.13) i \vec{e}_t en (1.15) i substituir en (1.12) i (1.14), per obtenir les expressions:

$$\vec{e}_t = \frac{j}{\beta^2 - \omega^2\mu\epsilon} (\beta \vec{\nabla}_t \vec{e}_z + \omega\mu \vec{\nabla}_t \times \vec{h}_z) \quad (1.16)$$

$$\vec{h}_t = \frac{j}{\beta^2 - \omega^2\mu\epsilon} (\beta \vec{\nabla}_t \vec{h}_z - \omega\epsilon \vec{\nabla}_t \times \vec{e}_z) \quad (1.17)$$

Si usem aquestes expressions en (1.12) i (1.14) junt a l' identitat $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$ i (1.1a)-(1.1c) arribem a dues equacions de Helmholtz per als components en z :

$$\vec{\nabla}^2 h_z + (k^2 - \beta^2) h_z = 0 \quad (1.18)$$

$$\vec{\nabla}^2 e_z - (k^2 - \beta^2) e_z = 0 \quad (1.19)$$

Per a calcular $\vec{\mathcal{E}}$ i $\vec{\mathcal{H}}$ en tot l' espai, per tant, hem de resoldre aquestes equacions junt a les condicions de contorn apropiades i obtenir e_z , h_z i β , dels quals podem obtenir \vec{e}_t i \vec{h}_t .

1.3 Espectre mode i propietats de tall

1.3.1 Modes TEM

Si $e_z = h_z = 0$ les solucions per als camps s'anomenen modes TEM (transversal electromagnètic) i són particularment simples. De (1.12)-(1.14) tenim que $\vec{\nabla}_t \times \vec{e}_t = \vec{\nabla}_t \times \vec{h}_t = 0$, i com hem dit abans podem utilitzar mètodes d'electrostàtica per a obtenir els components transversals. De (1.13)-(1.15) tenim que

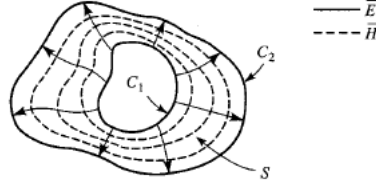


Figura 1.2: Mode TEM en una guia arbitrària

$$-j\beta \hat{u}_z \times \vec{e}_t = -j\omega\mu \vec{h}_t \quad (1.20a)$$

$$-j\beta \hat{u}_z \times \vec{h}_t = j\omega\epsilon \vec{e}_t \quad (1.20b)$$

Aïllant \vec{h}_t en la primera equació i substituint en la segona arribem a $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$. En el mode TEM, per tant, les ones de la guia es comporten com a ones planes, i els camps elèctric i magnètic estan relacionats per

$$\vec{h}_t = \frac{\epsilon}{\mu} \hat{u}_z \times \vec{e}_t = Y_{TEM} \hat{u}_z \times \vec{e}_t \quad (1.21)$$

On Y_{TEM} és l'admitància del mode TEM en la guia.

1.3.2 Modes TE

Quan $e_z = 0$ però $h_z \neq 0$ les solucions s'anomenen modes TE (transversal elèctric). De (1.16)-(1.17) obtenim que

$$\vec{e}_t = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \vec{\nabla}_t \times \vec{h}_z \quad (1.22)$$

$$\vec{h}_t = -\frac{j\beta}{k_c^2} \vec{\nabla}_t \times \vec{h}_z \quad (1.23)$$

On hem definit $k_c^2 = \omega^2\mu\epsilon - \beta^2$. D'ací podem arribar a la relació

$$\vec{e}_t = -Z_{TE} \hat{u}_z \times \vec{h}_z \quad (1.24)$$

On $Z_{TE} = \frac{\omega\mu}{\beta}$ és la impedància de la guia. Per a obtenir els camps, per tant, sols cal calcular h_z i β amb la equació de Helmholtz (1.18) i usar el resultat per a obtenir \vec{h}_t i \vec{e}_t .

1.3.3 Modes TM

Per un procediment anàleg podem obtenir els camps en el cas TM (transversal magnètic), en que $h_z = 0$ però $e_z \neq 0$.

1.3.4 Modes híbrids

Als modes híbrids, en que $e_z \neq 0$ i $h_z \neq 0$ cal resoldre les equacions de Helmholtz (1.18)-(1.19) i usar (1.16)-(1.17) per a obtindre tots els camps.

1.3.5 Propietats de tall

Fins ara hem assumit que β és real, però també pot ser imaginari, depenent de la freqüència de la ona i de k_c , ja que $\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - k_c^2}$. Si $\omega^2 \mu \epsilon > k_c^2$ tindrem β , i el factor $e^{j(\omega t - \beta z)}$ és harmònic, però si $\omega^2 \mu \epsilon < k_c^2$ tindrem β imaginari, i $e^{j(\omega t - \beta z)} = e^{-|\beta|z} e^{j\omega t}$, pel que la ona s'atenuarà sense propagar-se, i diem que el mode està tallat (encara que no significa que no siga útil). La freqüència de tall (la mínima que ha de tindre una ona per a propagar-se) és, per tant, $\omega_c = k_c \sqrt{\mu \epsilon}$. Per als modes TEM, en que $k_c = 0$, $\omega_c = 0$, i els modes sempre es propaguen.

1.4 Diagrama $\omega - \beta$ i dispersió

La relació entre β i ω ens dona la capacitat de propagació de la guia per a la ona. En un mode TEM seran proporcionals; en qualsevol altre mode la relació serà un poc més complicada. A més de determinar si la ona és propaga o no, també ens determina a quina velocitat ho fa: anomenem velocitat de fase a la quantitat $v_f = \frac{\omega}{\beta}$, i velocitat de grup a $v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$. En el mode TEM són 0 i c , respectivament, i a la resta de casos dependran de $\beta(\omega)$.

1.4.1 Velocitat de fase

La fase de tots els components de $\vec{\mathcal{E}}$ i $\vec{\mathcal{H}}$ és $e^{j(\omega t - \beta z)}$. Com avancen els punts de la ona que tenen la mateixa fase? Si fem $d(\text{fase}) = 0$ obtenim $\omega dt - \beta dz = 0$, d' on $\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = v_f$.

1.4.2 Velocitat de grup

Suposem que injectem una ona de freqüència pura $\vec{E}_{in}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{j\omega_0 t}$ en una guia, i obtenim a l'altre extrem $\vec{E}_{out}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega_0 t - \beta|_{\omega_0} z)}$. L'anàlisi freüencial ens dona el mateix resultat: la transformada de Fourier de \vec{E}_{in} és

$$\hat{E}_{in}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int E_0 e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = E_0 \delta(\omega - \omega_0) \quad (1.25)$$

ja que és una freqüència pura, i per tant la ona resultant és

$$\vec{E}_{out}(\vec{r}, t) = \int \hat{E}_{in}(\omega) e^{j(\omega t - \beta|_{\omega} z)} dz = \int \hat{E}_o \delta(\omega - \omega_0) e^{j(\omega t - \beta|_{\omega} z)} dz = E_0 e^{j(\omega_0 t - \beta|_{\omega_0} z)} \quad (1.26)$$

Si en canvi transmetim un conjunt de freqüències simultàniament, per exemple per a transmetre una portadora modulada amb una senyal $I(t)$, bé amb modulació per fase, freqüència o amplitud, la ona entrant és $E(z=0) = I(t) e^{j\omega_0 t}$, i veguem que ara $\vec{E}_{out} \neq I(t) e^{j(\omega_0 t - \beta|_{\omega_0} z)}$, perquè cada component ω es comportarà d'una manera

diferent, com anem a veure. Si la TdF de $I(t)$ és $\hat{I}(\omega)$ la de $I(t)e^{j\omega_0 t}$ és $\hat{I}(\omega - \omega_0)$, i per tant

$$\hat{E}(z=0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int I(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \hat{I}(\omega - \omega_0) \quad (1.27)$$

i la ona propagada resultant serà una deformació de la ona inicial:

$$E(z, t) = \int \hat{E}(z=0, \omega) e^{j(\omega t - \beta z)} d\omega = \int \hat{I}(\omega - \omega_0) e^{j(\omega t - \beta z)} d\omega \quad (1.28)$$

En el cas en que l' ample de banda $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ és xicotet podem expandir $\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)$ i la integral té solució analítica:

$$E(z, t) = \int \hat{I}(\omega - \omega_0) \exp j \left(\omega t + \left[\beta(\omega_0) + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) \right] z \right) d\omega \quad (1.29)$$

Fent un canvi de variable $\omega \rightarrow \omega' = \omega - \omega_0$ arribem a

$$E(z, t) = I \left(t - \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} z \right) e^{j(\omega_0 t - \beta(\omega_0) z)} \quad (1.30)$$

On s' aprecia que la ona entrant s' ha propagat amb un retràs $\tau = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} z$, i podem definir la velocitat de grup $v_g = \frac{z}{\tau} = \frac{1}{\left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0}}$

1.5 Potència transmesa per mode

Una vegada hem calculat els camps corresponents a un mode, podem clacular la potència que transmet aquest per la guia usant el teorema de Poynting.

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \int \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \int \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} \cdot (dS \hat{u}_z) = \frac{1}{2} \int \vec{e}_t \times \vec{h}_t \cdot (dS \hat{u}_z) \quad (1.31)$$

1.6 Pèrdues d' energia

Assumirem que la potència perduda per unitat de longitud és proporcional a la potència que flueix pel sistema, ja que el nombre de fonons en el material serà proporcional al nombre de fotons transmesos.

$$\frac{dP}{dz} = -\alpha P \rightarrow P = P_0 e^{-\alpha z} \quad (1.32)$$

A la constant de proporcionalitat α l' anomenem factor d' atenuació.

1.6.1 Atenuació per dielèctric

Si el medi interior de la guia té un dielèctric l'ona perdrà amplitud al viatjar per ella. Les caracteritzarem amb una permeabilitat elèctrica complexa $\hat{\epsilon} = \epsilon' - j\epsilon''$, que en la llei d' Ampère dona lloc a una corrent de pèrdues:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{H}} = j\omega\hat{\epsilon}\vec{\mathcal{E}} = j\omega\epsilon'\vec{\mathcal{E}} + \omega\epsilon''\vec{\mathcal{E}} = j\omega\epsilon'\vec{\mathcal{E}} + \sigma_c\vec{\mathcal{E}} = j\omega\epsilon' + \vec{\mathcal{J}}_p \quad (1.33)$$

L velocitat de propagació també és vorà afectada:

$$\hat{\beta} = \sqrt{\omega^2\mu\hat{\epsilon}} = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon' - \omega^2\mu\epsilon''j - k_c^2} \quad (1.34)$$

Si les pèrdues són poques $\epsilon'' \ll \epsilon'$, i podrem aproximar

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &\simeq \sqrt{\omega^2\mu\epsilon' - k_c^2} - j\frac{1}{2}\frac{\omega^2\mu\epsilon''}{\sqrt{\omega^2\mu\epsilon' - k_c^2}}\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \\ &= \beta - j\frac{1}{2}\frac{\omega^2\mu\epsilon''}{\beta}\frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \beta - j\frac{1}{2}\frac{k^2}{\beta}\tan\delta \end{aligned} \quad (1.35)$$

El factor $\tan\delta$ s'anomena tangent de pèrdues, i depèn solament del material.

1.6.2 Pèrdues en conductors

Als conductors sempre hi apareixerà una corrent de pèrdues associada al camp elèctric de la ona, que degut a la alta conductivitat σ_c dominarà la llei d' Ampère:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{H}} &= j\omega\epsilon\vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{J}} = j\omega\epsilon\vec{\mathcal{E}} + \sigma_c\vec{\mathcal{E}} \\ &\simeq \sigma_c\vec{\mathcal{E}} = j\omega\frac{\sigma_c}{j\omega}\vec{\mathcal{E}} = j\omega\hat{\epsilon}\vec{\mathcal{E}} \quad \text{amb} \quad \hat{\epsilon} = -j\frac{\sigma_c}{\omega} \end{aligned} \quad (1.36)$$

La velocitat de propagació, com abans, serà afectada:

$$\hat{\beta} = \sqrt{-j\omega\mu\sigma_c - k_c^2} \simeq \frac{1-j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma_c} \quad (1.37)$$

El factor $e^{j\omega t} e^{-j\beta z}$ es convertirà en una atenuació:

$$e^{j\omega t} e^{-\sqrt{\frac{\omega\sigma_c\mu}{2}}z} e^{-j\sqrt{\frac{\omega\sigma_c\mu}{2}}z} = e^{j\omega t} e^{-\frac{z}{\Delta}} e^{-j\frac{z}{\Delta}} \quad (1.38)$$

on $\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma_c\mu}}$ és la profunditat de penetració. En materials molt conductius, com els metalls, aquesta distància serà molt curta, normalment una micra o dos, en la qual la potència dissipada per els camps al conductor serà

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_l &= \frac{1}{2} \int \vec{\mathcal{E}} \vec{\mathcal{J}}^* dV = \frac{1}{2} \int \vec{\mathcal{J}} \sigma_c \vec{\mathcal{J}}^* dV = \frac{\sigma_c}{2} \int |\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{H}}|^2 dV \\ &= \frac{\sigma_c}{2} \left| \frac{1+j}{\Delta} \right|^2 \int |\vec{\mathcal{H}}_{sup}|^2 |e^{-\frac{z}{\Delta}} e^{-j\frac{z}{\Delta}}|^2 dV = \frac{\sigma_c}{2} \int_{z=0}^{z=\infty} |H_{sup}|^2 e^{-\frac{2z}{\Delta}} dS dz \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma_c}} \int_{superfície} |H_{sup}|^2 dS = \frac{\mathcal{R}_f}{2} \int_{superfície} |H_{sup}|^2 dS \end{aligned} \quad (1.39)$$

El terme \mathcal{R}_s s'anomena resistència superficial del metall, i és interessant observar que la forma final de \mathcal{P} recorda a la dels circuits $P = RI^2$.

1.7 Decibels

De vegades usarem decibels per a expressar atenuacions (o guanys) de potència. Si la potència d'entrada P_0 s'ha atenuat (o amplificat) fins a P el factor α en decibels és

$$\alpha_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P}{P_0} \quad (1.40)$$

(si $P < P_0$ el resultat serà negatiu, i viceversa). La utilitat d'aquesta definició és que per a obtenir l'atenuació (o guany) total produïda per factors multiplicatius (per exemple en una sèrie de components) podem simplement sumar els decibels de cada factor.

Quan la quantitat d'interès és proporcional a P^2 , com $|E_0|$ o V , l'exponent ix fora i queda

$$\alpha_{dB} = 20 \log_{10} \frac{E}{E_0} \quad (1.41)$$

Capítol 2

Linies de transmissió

2.1 Teoria de paràmetres distribuïts

Les línies de transmissió són un tipus de guia d'ones que transporta quasi exclusivament el mode TEM. Aquest mode necessita dos conductors diferentment carregats per a propagar-se: en cas contrari el potencial és nul en l'interior i \vec{E} és constant; com que a les parets $\vec{E} = 0$ el camp seria nul en tota la guia. Les LT estaran sempre formades per dos conductors. Un bon exemple és la línia coaxial, que són dos conductors de secció circular concèntrics i separats per un dielèctric.

Com que $\vec{\nabla}_t \vec{e}_t = \vec{\nabla}_t \vec{h}_t = 0$, podem utilitzar mètodes d'estàtica (mètode de les imatges, teorema d'Ampère...). Per a utilitzar teoria del potencial cal que definim dos punts, un amb Q^+ i un amb Q^- , que seran els dos conductors. Recordem que al TEM tenim una freqüència espacial proporcional a la freqüència $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$, el que significa que no hi ha freqüència de tall i que $v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\omega\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\omega_r}}$, $v_g = v_f$ (si $\epsilon \neq f(\omega)$) i que $\vec{e}_\sigma = -Z_{\text{TEM}}\hat{u}_z \times \vec{h}_\sigma$.

Per a facilitar l'estudi de les LT anem a passar de 4 quantitats (els quatre camps restants) a dos: $V(z)$ i $I(z)$. Si \vec{h} i \vec{e} són $\sim e^{j\omega t}$ aleshores I i V també ho seran, i les quantitats a l'eixida seran una modificació de les de l'entrada. Com que els elements dels circuits elèctrics (condensadors, bobines, resistències i conductàncies) tenen aquest mateix efecte tractarem cada secció Δz de la guia com un circuit (2.1).

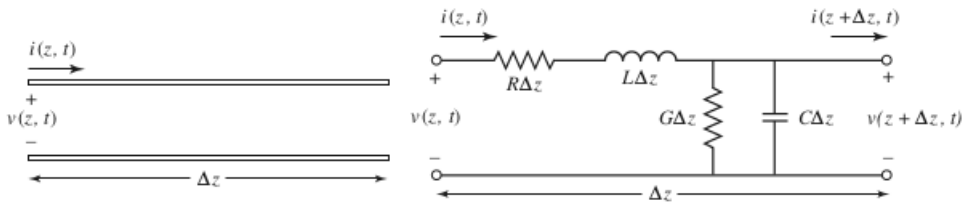


Figura 2.1: Circuit equivalent d'una línia de transmissió

2.1.1 Capacitat

Els dos conductors de la línia formen un condensador amb càrrega Q i tensió V , amb capacitància total $C = \frac{Q}{V}$. Com que la càrrega és proporcional a la longitud de la guia l podem definir la capacitat per unitat de longitud $C' = \frac{C}{l} = \frac{Q}{lV}$.

2.1.2 Inductància

Considerem el circuit rectangular format per dos línies al llarg dels conductors i dos línies entre els conductors a l'entrada i a l'eixida (vore figura). El flux a través d'aquesta secció del camp magnètic creat pels corrents als conductors forma una autoinductància $\mathcal{L} = \frac{\phi}{I}$, que al igual que la capacitància és proporcional a la longitud de la línia i dona lloc a una autoinductància distribuïda $L = \frac{\mathcal{L}}{l} = \frac{\phi}{lI}$

2.1.3 Conductància

Si el dielèctric té pèrdues, caracteritzades per ϵ_r , $\sigma_D \neq \infty$, existirà una corrent de pèrdues en la direcció radial $\vec{J} = \sigma_D \vec{E}$. La conductància d'aquesta corrent és $\mathcal{G} = \frac{1}{R} = \frac{I_{\text{pèrdues}}}{V} = \frac{\int \vec{J}_{\text{pèrdues}} d\vec{S}}{V} = \frac{\int \sigma_D \vec{E} d\vec{S}}{V} = \frac{\sigma_D}{V} \int \vec{E} d\vec{S}$. Com que la integral és calcula sobre un cilindre concèntric als conductors tindrem $\mathcal{G} \propto l$, i definim $G = \frac{\mathcal{G}}{l}$

2.1.4 Resistència

Com que la conductància dels conductors és alta però no infinita tindrem pèrdues en aquests, determinades per la seua resistència superficial R_s . Sabem del tema anterior que les pèrdues han de ser $P_p = \frac{1}{2} R_s \int |\vec{H}_{\text{sup}}| dS$. Com que en teoria de circuits la potència dissipada per una resistència és $\frac{1}{2} |I|^2 \mathcal{R}$, la resistència equivalent de la línia és $\mathcal{R} = \frac{R_s}{|I|^2} \int_{\text{cond}} |\vec{H}| dS$, i al ser la integral sobre els conductors proporcional a l definim $R = \frac{\mathcal{R}}{l}$.

2.2 Ones de tensió i corrent

Cada element Δz de la línia, per tant, pot ser tractat com un circuit amb dos fils (un per cada conductor) i els elements circuitals apropiats, com es mostra a la figura. L'ordre dels elements és irrellevant.

Ara podem utilitzar teoria de circuits per a estudiar el comportament de la diferència de potencial entre els dos conductors/fils $V(z, t)$ i la corrent que circula per aquests $I(z, t)$. Al llarg de Δz els elements del circuit modificaran aquestes quantitats:

$$V(z) - V(z + \Delta z) = I(z)(j\omega L \Delta z + R \Delta z) \quad (2.1a)$$

$$I(z) - I(z + \Delta z) = V(z + \Delta z)(j\omega C \Delta z + G \Delta z) \quad (2.1b)$$

Si dividim entre Δz i fem el limit $\Delta z \rightarrow 0$ obtenim dues equacions diferencials acoblades, anomenades equacions del telègraf:

$$-\frac{dV}{dz} = I(z)(j\omega L + R) \quad (2.2a)$$

$$-\frac{dI}{dz} = V(z)(j\omega C + G) \quad (2.2b)$$

Definint $Z = R + j\omega L$ i $Y = G + j\omega C$ i derivant ambdues entre z les desacoblarem i obtenim les solucions, que resulten ser dues ones.

$$V = V_0 e^{j\omega t} e^{\pm \sqrt{ZY} z} \quad (2.3a)$$

$$I = I_0 e^{j\omega t} e^{\pm \sqrt{ZY} z} \quad (2.3b)$$

2.3 Relació entre tensió i corrent

Si V està relacionada amb H , I està relacionada amb \vec{E} , i \vec{E} amb \vec{H} , ha d'existir una relació entre V i I . Substituint (2.3a)-(2.3b) en (2.2a) obtenim

$$\frac{V}{I} = \pm \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \pm \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \pm Z_c \quad (2.4)$$

On Z_c és una quantitat complexa amb dimensions de resistència, que s'anomena impedància característica de la línia, ja que sols depèn de les propietats físiques d'aquesta. El signe positiu correspon a la Z_c que afecta a la ona que viatja en el sentit $+z$, i el negatiu a la que va cap a $-z$. Si connectem dues línies la diferència entre les Z_c pot provocar reflexions no desitjades, pel que totes les línies de transmissió operen a 50 Ω .

2.4 Factor de propagació

El factor de propagació de les ones de tensió i corrent, $\gamma = \sqrt{ZY}$, és un número complex, les parts real i imaginària del qual estan relacionades amb l'atenuació exponencial i la ondulació, respectivament.

$$\sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \frac{\alpha}{2} + j\beta \quad (2.5)$$

Estudiem aquests dos termes en casos importants.

2.4.1 Línia sense pèrdues

En una línia sense pèrdues $R = G = 0$, pel que $\gamma = \sqrt{j\omega L j\omega C} = j\omega\sqrt{LC}$, i les ones tindran freqüència $\beta = \omega\sqrt{LC}$, i $v_f = v_g = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Aquestes línies tenen $Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

2.4.2 Línia amb poques pèrdues

Si $R \ll \omega L$ i $G \ll \omega C$ podem obtenir una expressió aproximada per a les parts reals i imaginària de γ expandint fins a segon ordre (si sols utilitzem primer ordre els resultats són els mateixos que en el cas anterior):

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} \sqrt{\left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right) \left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)} \\ &\approx \frac{\sqrt{LC}}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right) \left[1 - \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)^2\right] + j\omega\sqrt{LC} \left[1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (2.6a)$$

Com que la freqüència de la ona ω apareix als dos termes cada component freqüencial de la ona tindrà una atenuació i una velocitat de propagació, pel que existirà dispersió. La impedància serà:

$$Z_c = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \left[1 - \frac{j}{2\omega} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)\right] \quad (2.7)$$

2.4.3 Corrent continua DC

En corrent continua ($\omega = 0$), pel que $\gamma = \sqrt{RG}$ i $Z_c = \sqrt{\frac{R}{G}}$. Quan treballem amb DC no solem percebre efectes ondulatoris perquè G és prou xicoteta, per exemple al llarg dels cable del multímetre: com que els cables són curts apenes observem la caiguda de V , però si tinguèrem cables de 120 metres observariem ondulacions en les mesures.

2.5 Comentaris

2.5.1 Alternatives per a calcular C , L i G

Existeix un altra manera de clacular els paràmetres distribuïts C , L i G . A partir de les expressions per a la energia acumulada a un condensador i a una inductància en funció dels camps i de les expression en funció de C i L :

$$\epsilon_c = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \int \vec{E}\vec{D}dV \rightarrow C = \frac{1}{V^2} \int \vec{E}\vec{D}dV \quad (2.8a)$$

$$\epsilon_L = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \int \vec{B}\vec{H}dV \rightarrow L = \frac{1}{I^2} \int \vec{H}\vec{B}dV \quad (2.8b)$$

Per a G podem utilitzar la relació coneguda per a qualsevol condensador:

$$\frac{C}{G} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\sigma_D} \quad (2.9)$$

2.5.2 Paràmetres independents

Per a una línia tenim quatre paràmetres distribuïts, però són tots independents? Sabem que $v_g = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ i que en TEM $v_g = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$, pel que L i C estan relacionats per $\sqrt{LC} = \sqrt{\mu\epsilon}$. També sabem que C i G están relacionats per (2.9). Per tant sols són independents R i un altre paràmetre.

2.5.3 Incertessa energia / temps

Imaginem una ona sinusoidal a freqüència ω_0 que viatja ca a $+z$. La TdF ens dona el seu espectre en freqüències, que és una delta en ω_0 . Sabem que arriba a algun lloc, però no quan arriba, ja que desde $t = -\infty$ fins a $t = \infty$ la ona existeix en tot l' espai. Per a poder parlar de quan comença o acaba hem de "marcar-la", i que dure de $t = a$ fins a $t = b$. Ara, però la TdF ja no és una delta, sino una campana de Gauss al voltant de ω_0 amb amplitud inversament proporcional a $b - a$. Quan més localitzada està una ona menys s' aproxima a una freqüència pura.

En les ones tenim dues incertesses com aquesta: freqüència-temps (o energia-temps) i nombre d' ones - posició (o moment - posició).

Capítol 3

Linies de transmissió carregades

3.1 Introducció

Fins ara les línies eren infinites, però necessàriament ha d'haver un generador al principi i un dispositiu al final que reba les ones: equips de mesura, antenes, filtres, forns de microones... Aquestes discontinuïtats, anomenades càrregues, no donen problemes a freqüències baixes, però a altes poden provocar reflexions, pel que tindrem dues ones en la guia. En el circuit les representarem com a impedàncies (figura 3.1) En aquesta secció anomenarem $z = 0$ al punt on la guia es connecta a la càrrega.

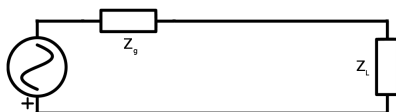


Figura 3.1: Circuit equivalent a una guia carregada i amb generador

3.2 Coeficient de reflexió en la càrrega

La impedància de la càrrega (vore figura 3.2)

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L} = \frac{V_0^+ + V_0^-}{I_0^+ + I_0^-} \quad (3.1)$$

està relacionada amb la de la ona

$$Z_C = \frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-} \quad (3.2)$$

per el coeficient de reflexió $\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+}$ seguint la relació $\Gamma = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$, pel que la fracció d'energia reflectida dependrà de la diferència entre Z_L i Z_C . Com que mesurar impedàncies és complicat és preferible usar el Γ per a estudiar els efectes de les càrregues.

Observem que en un circuit obert, en que $Z_L = \infty$, tota l'ona és reflectida ($\Gamma = 1$) i en un curtcircuit, on $Z_L = 0$, la ona es reflexa canviada de fase ($\Gamma = -1$). En el cas en que la càrrega està adaptada a la guia $Z_L = Z_C$ tenim que $\Gamma = 0$, i és el cas òptim en que no existeixen reflexions. És per això que quasi totes les guies i dispositius tenen una impedància de 50Ω .

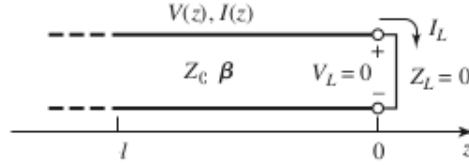


Figura 3.2: Intensitat i voltatge en la càrrega

3.3 Potència consumida

De la expressió per a la potència consumida per una resistència podem obtenir la potència consumida per la càrrega:

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_L \cdot I_L^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[(V_0^+ + V_0^-)(I_0^+ + I_0^-)] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[V_0^+ (1 + \Gamma_L) \left(\frac{V_0^+}{Z_L} \right)^* (1 - \Gamma_L) \right] \\ &= \frac{1}{2} |V_0^+|^2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{Z_C^*} (1 - |\Gamma_L|^2 + 2) |\Gamma_L|^2 \sin \theta \right] \end{aligned}$$

Si $Z_C \in \operatorname{Re}$, com és el cas quan la guia té poques pèrdues, la podem deixar

$$P = \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_C} (1 - |\Gamma_L|^2) \quad (3.3)$$

En aquesta expressió el primer terme és la potència que l'ona incident du cap endavant, mentre que el segon ens diu quin percentatge d'aquesta no és consumit per la càrrega.

3.4 Ones estacionàries

Quan dos ones viatjant en direccions oposades es superposen obtenim una ona estacionària:

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z} \quad (3.4a)$$

$$I(z) = I_0^+ e^{-j\beta z} + I_0^- e^{j\beta z} \quad (3.4b)$$

Per conveniència i conveni definim $\ell = -z$, i reescrivim aquestes expressions com

$$\begin{aligned} V(\ell) &= V_0^+ e^{-j\beta z} (1 + \Gamma_L e^{-j2\beta z}) \\ &= V_0^+ e^{j\beta \ell} (1 + |\Gamma_L| e^{j(2\beta \ell + \theta)}) \end{aligned} \quad (3.5a)$$

$$\begin{aligned} I(\ell) &= \frac{V_0^+}{Z_L} e^{-j\beta z} (1 - \Gamma_L e^{-j2\beta z}) \\ &= \frac{V_0^+}{Z_L} e^{j\beta \ell} (1 - |\Gamma_L| e^{j(2\beta \ell + \theta)}) \end{aligned} \quad (3.5b)$$

3.5 Impedància d'entrada d'una línia

Així com en el punt $z = 0$ (el punt de la càrrega) hem definit Z_L i Γ_L a partir de V_0^+ , V_0^- , ... podem fer el mateix en qualsevol punt de la línia, i definir del quocient

de reflexió d' entrada entre les dues ones:

$$\Gamma_{in} = \frac{V_z^-}{V_z^+} = \frac{V_0^- e^{j\beta z}}{V_0^+ e^{-j\beta z}} = \Gamma_L e^{j2\beta z} = |\Gamma_L| e^{-j(\theta-2\beta\ell)} \quad (3.6)$$

Continuant l' analogia podem definir la impedància d' entrada de la línia com el quocient

$$Z_L = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V^+(z) + V^-(z)}{I^+(z) + I^-(z)} = Z_C \frac{V^+(z) + V^-(z)}{V^+(z) - V^-(z)} = Z_C \frac{1 + \Gamma_{in}}{1 - \Gamma_{in}} \quad (3.7)$$

La impedància d' entrada de la línia pot ser reescrita usant solament les propietats de la línia:

$$Z_{in} = Z_C \frac{Z_L + Z_C j \tan(\beta\ell)}{Z_C + Z_L j \tan(\beta\ell)} \quad (3.8)$$

La impedància puntual és per tant periòdica en $\frac{\lambda}{2}$, i quan $\beta\ell = n\frac{\lambda}{2}$ és com si no hi haguera línia entre el punt z i la càrrega $Z_{in} = Z_L$, com en la figura 3.3.

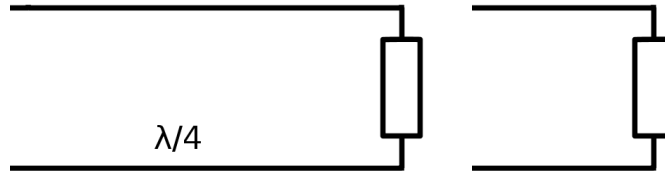


Figura 3.3: Impedàncies equivalents

Quan la línia és d' un quart d' ona, o $\ell = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}$, el terme $\tan(\beta\ell)$ es dispara a ∞ , i la impedància és

$$Z_{in} = \frac{Z_C^2}{Z_L} \quad (3.9)$$

Una línia així s' anomena transformador de quart d' ona, perquè pot transformar la càrrega de diverses maneres. Si la càrrega és una inductància de valor L , la impedància en el punt ℓ serà igual a la d' un condensador (vore figura 3.4).

$$Z_{in} = \frac{Z_C^2}{jL\omega} = Z_{condensador} \quad (3.10)$$

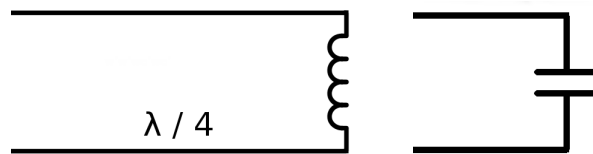


Figura 3.4: L' inductància i el transformador donen lloc a un condensador

I si la càrrega és un condensador, la impedància serà la d' una inductància (figura 3.5) tindrem

$$Z_{in} = jC\omega Z_C^2 = Z_{inductor} \quad (3.11)$$

Com els inductors "de llibre" són difícils de construir podem utilitzar aquest resultat per a construir-los usant un condensador amb una guia de quart d' ona.

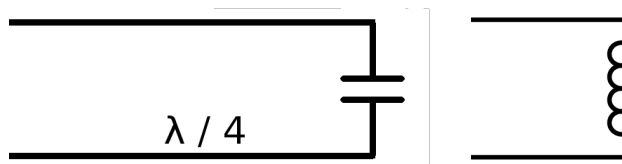


Figura 3.5: El condensador i el transformador donen lloc a un inductor

3.6 Generador i línia

Tots els anàlisis fets fins ara estan en funció de V_0^+ , que depèn del generador que alimenta la línia. Aquest està caracteritzat per tres variables: V_g , ω i Z_g . Relacionar V_g i V_0 , però, és complicat.

La càrrega i el segment de línia entre el generador i aquesta poden ser estudiats com una sola impedància (vore figura 3.1) per la que passa una corrent

$$I_L = \frac{V_g}{Z_g + Z_{in}} \quad (3.12)$$

Aquesta corrent ha de ser igual a la que corre per la guia (3.5b), i igualant-les obtenim la relació entre els voltatges:

$$I_L = I(l) \rightarrow \frac{V_g}{Z_g + Z_{in}} = \frac{V_0^+}{Z_C} e^{j\beta\ell} (1 - \Gamma_{in}) \quad (3.13)$$

I per tant

$$V_0^+ = V_g e^{-j\beta\ell} \frac{Z_C}{Z_g + Z_C + \Gamma_{in}(Z_C - Z_g)} \quad (3.14)$$

pel que $|V_0^+| = f(V_g, \ell)$ i tenim el problema de que la potència consumida dependrà de la distància (a través de Γ_{in}), el que seria inconvenient perquè ens obligaria a usar guies que foren múltiples d'una certa distància o perdre energia. El significat físic d'açò és que la ona torna a reflectir-se en el generador, i perdem energia.

Aquest problema ve de la presència de Γ_{in} en l'expressió que relaciona V_0^+ i V_g . Una solució simple és assegurar-se de que $Z_C = Z_g$, i així

$$|V_0^+| = Z_C \frac{V_g e^{-j\beta\ell}}{Z_g + Z_C} \quad (3.15)$$

Per conveni els generadors es fabriquen quasi sempre de manera que la Z_g siga de 50Ω , igual que les guies. El desavantatge és que la impedància interior del generador consumirà energia, però és preferible.

Capítol 4

Guies tancades homogènies

4.1 Introducció

A diferència de les línies de transmissió, que tenien dos conductors, les línies de transmissió estan formades per un sol conductor, el que impedeix que propaguen el mode *TEM* però facilita la transmissió de *TE* i *TM* (i de modes híbrids, que no vorem). Com que l'únic mode que no té freqüència de tall és el *TEM* no podrem utilitzar-les per a conduir DC, però poden transportar més potència per unitat d'àrea seccional. Com que no propaguen *TEM*, tindrem sempre components axials, i com que la velocitat de propagació $\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - k_c^2}$ no és lineal seran inherentment dispersives.

4.2 Guia rectangular

La guia rectangular (figura 4.1) és un disseny senzill d'estudiar i que té amples aplicacions. Suporta *TE* i *TM*. Per a obtindre els camps en aquesta guia, per exemple en el mode *TM*, hem de resoldre la equació de Helmholtz

$$\vec{\nabla}_t \vec{e}_z + (k^2 - \beta^2) \vec{e}_z = 0 \quad (4.1)$$

per a obtindre \vec{e}_z i β , i a partir d'aquests podem obtenir els altres camps usant

$$\vec{e}_t = \frac{-j\beta}{k^2 - \beta^2} \vec{\nabla}_t e_z \quad i \quad \vec{h}_t = Y_{TM} \hat{u}_z \times \vec{e}_t \quad (4.2)$$

Resolent (4.1) per separació de les variables x i y obtenim

$$e_z = [A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x)] [C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y)] \quad (4.3)$$

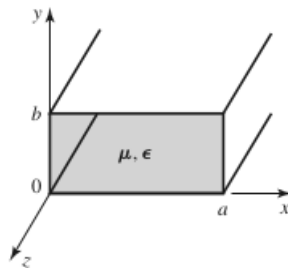


Figura 4.1: Guia d'ona rectangular

On $k_x^2 + k_y^2 = k^2 - \beta^2$. Per a calcular β usar les condicions de contorn, que són

$$e_z(x=a) = e_z(x=0) = e_z(y=b) = e_z(y=0) = 0 \quad (4.4)$$

De les dos primeres obtenim que $A = 0$ i $k_X = \frac{n\pi}{a}$, i de les dos segones $C = 0$ i $k_y = \frac{m\pi}{b}$, el que ens deixa

$$e_z(x, y) = BD \sin \frac{n\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{b} = E_0 \sin \frac{n\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{b} \quad (4.5)$$

on hem reanomenat el coeficient BD com a E_0 , i

$$\beta_{nm} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - k_x^2 - k_y^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \quad (4.6)$$

Per a cada parella (n, m) existeix una solució, o el que és el mateix, un mode TM_{nm} , (excepte per al cas $n = m = 0$, ja que seria la solució trivial en que no hi ha camps). Per a que aquests modes es propaguen β haurà de ser real, el que implica

$$\omega^2 \mu \epsilon > \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad (4.7)$$

Definim per tant la freqüència de tall del mode TM_{nm} com

$$\omega_{c_{nm}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \quad (4.8)$$

on s'observa que a freqüències més altes més modes seran propagables. La resta de camps poden obtindre's usant (4.2):

$$\begin{aligned} \vec{e}_t = \frac{-j\beta}{k^2 - \beta^2} E_0 \left[+ \left(\frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}\right) \hat{u}_x \right. \\ \left. + \left(\frac{m\pi}{b} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}\right) \hat{u}_y \right] \end{aligned} \quad (4.9a)$$

$$\begin{aligned} \vec{h}_t = \frac{-j\omega\epsilon}{k^2 - \beta^2} E_0 \left[- \left(\frac{m\pi}{b} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}\right) \hat{u}_x \right. \\ \left. + \left(\frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}\right) \hat{u}_y \right] \end{aligned} \quad (4.9b)$$

El procediment amd els modes TE és anàleg, usant les condicions de contorn

$$\vec{h}_t = 0 \rightarrow \vec{\nabla} h_z \Big|_{\text{parets}} = 0 \rightarrow \frac{\partial h_z}{\partial x} \Big|_{\text{par}} = \frac{\partial h_z}{\partial y} \Big|_{\text{par}} = 0 \quad (4.10)$$

obtenim

$$h_z = H_0 \cos \left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos \left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \vec{h}_t = \frac{j\beta}{k^2 - \beta^2} H_0 \left[+ \left(\frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}\right) \hat{u}_x + \right. \\ \left. + \left(\frac{m\pi}{b} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}\right) \hat{u}_y \right] \end{aligned} \quad (4.12a)$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_t = \frac{j\omega\mu}{k^2 - \beta^2} H_0 \left[+ \left(\frac{m\pi}{b} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}\right) \hat{u}_x \right. \\ \left. - \left(\frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}\right) \hat{u}_y \right] \end{aligned} \quad (4.12b)$$

amb

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - k_x^2 - k_y^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \quad (4.13)$$

$$\omega_{cnm} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \quad (4.14)$$

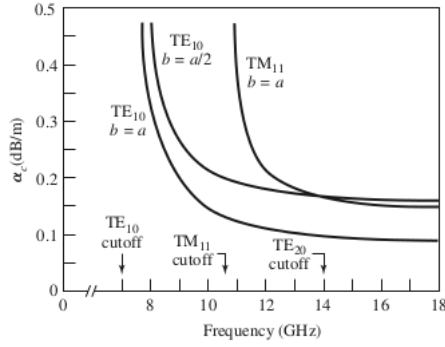


Figura 4.2: Atenuació de modes en una guia rectangular

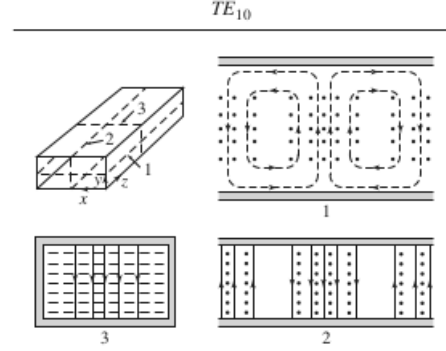


Figura 4.3: Mode fonamental d' una ona rectangular

4.3 Mode fonamental

El mode fonamental és aquell que es propaga amb la menor freqüència de tall. En el cas de la guia rectangular és el TE_{10} , graficat en la figura 4.3

$$\vec{E} = -H_0 \frac{j\omega\mu a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{u}_y \quad (4.15)$$

$$\vec{H} = H_0 \left[\frac{j\beta a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{u}_x + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{u}_z \right] \quad (4.16)$$

4.4 Guia circular

Usarem la guia circular (figura 4.4) per a il·lustrar el cas en que la simetria fa preferible utilitzar coordenades no cartesianes, en aquest cas les cilíndriques (s, φ, z).

Per a trobar els modes TM_{nm} resollem, com abans, l'equació de Helmholtz, però aquesta vegada usant el Laplacà en coordenades cilíndriques:

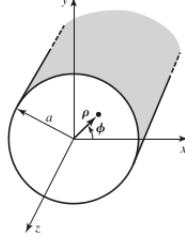
$$\vec{\nabla}_t^2 e_z + (k^2 - \beta^2) e_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) e_z + k_c^2 e_z \quad (4.17)$$

Separant e_z en $R(s)\Phi(\varphi)$ arribem a dues equacions:

$$\frac{s^2}{R(s)} \frac{\partial^2 R}{\partial s^2} + \frac{s}{R(s)} \frac{\partial R}{\partial s} + (k^2 - \beta^2) s^2 = \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = k_\varphi^2 \quad (4.18)$$

Les solucions de la part angular són simples:

$$\Phi(\varphi) = A \cos(k_\varphi \varphi) + B \sin(k_\varphi \varphi) \quad (4.19)$$

**Figura 4.4:** Guia d'ona circular

però les de la part radial són més complicades; són funcions de Bessel primer i segon espècie:

$$\begin{aligned} R(s) &= \mathcal{J}_{k_\varphi}(s\sqrt{k^2 - \beta^2}) = \mathcal{J}_{k_\varphi}(sk_c) \\ R(s) &= \mathcal{N}_{k_\varphi}(s\sqrt{k^2 - \beta^2}) = \mathcal{N}_{k_\varphi}(sk_c) \end{aligned}$$

Com que el camp ha de ser continuu en la coordenada angular tenim la condició de contorn

$$e_z(\varphi = \alpha) = e_z(\varphi = \alpha + 2\pi l) \quad \forall \alpha \quad \forall l \in \mathbb{N} \quad (4.21)$$

que, introduïda en (4.19) ens diu que $k_\varphi \in \mathbb{Z}$:

$$\Phi(\varphi) = A \cos(n\varphi) + B \sin(n\varphi) \quad (4.22)$$

En quant a la part radial, en $s = 0$ les funcions de Bessel de segon espècie \mathcal{N} divergeixen, pel que $D = 0$, i la condició de contorn de les parets $e_z(s = 0) = a$, que ha de complir-se $\forall \varphi$ ens dona el valor de k_c per al mode n : és la solució de

$$\mathcal{J}_n(k_c a) = 0 \quad (4.23)$$

Com que les funcions \mathcal{J} no tenen arrels analítiques haurem d'utilitzar taules o procediments numèrics per trobar-les. Denotarem la m -èsima arrel de \mathcal{J} com a P_{nm} , i per tant $k_c = \frac{P_{nm}}{a}$. La solució final, doncs, és (anomenem $AC = E$ i $BC = F$):

$$e_z = E \cos(n\varphi) \mathcal{J}_n\left(\frac{P_{nm}}{a}s\right) + F \sin(n\varphi) \mathcal{J}_n\left(\frac{P_{nm}}{a}s\right) \quad (4.24)$$

amb $\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{P_{nm}}{a}\right)^2}$.

Tenim dos coeficients independents perquè hi ha dos graus de llibertat al sistema: la energia de la ona i la polarització d'aquesta. Rotant el sistema de coordenades podem fer zero una o l'altra. Obtindre la resta dels camps, com abans, és un procediment mecànic:

$$\begin{aligned} \vec{e}_t &= -\frac{j\beta}{k^2 - \beta^2} \vec{\nabla}_t e_z = \vec{e}_t = \frac{-j\beta}{k^2 - \beta^2} \left(\frac{\partial e_z}{\partial s} \hat{u}_s + \frac{1}{s} \frac{\partial e_z}{\partial \varphi} \hat{u}_\varphi \right) \\ &= \left(-\frac{j\beta}{k_c} [E \cos(n\varphi) + F \sin(n\varphi)] \mathcal{J}'_n\left(\frac{P_{nm}}{a}s\right) \right) \hat{u}_s \\ &\quad \left(-\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{n}{s} [E \sin(n\varphi) - F \cos(n\varphi)] \mathcal{J}_n\left(\frac{P_{nm}}{a}s\right) \right) \hat{u}_\varphi \end{aligned} \quad (4.25a)$$

$$\begin{aligned} \vec{h}_t &= Y_{TM} \hat{u}_z \times \vec{e}_t \\ &= \left(-\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{n}{s} [E \sin(n\varphi) - F \cos(n\varphi)] \mathcal{J}_n\left(\frac{P_{nm}}{a}s\right) \right) \hat{u}_s \\ &\quad \left(-\frac{j\omega\epsilon}{k_c} [E \cos(n\varphi) + F \sin(n\varphi)] \mathcal{J}'_n\left(\frac{P_{nm}}{a}s\right) \right) \hat{u}_\varphi \end{aligned} \quad (4.25b)$$

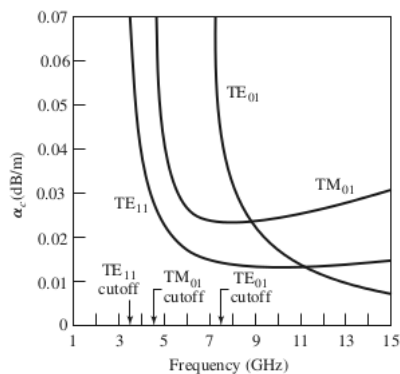


Figura 4.5: Modes en una guia coaxial

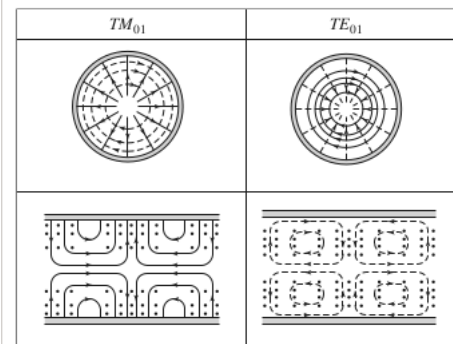


Figura 4.6: Modes en una guia coaxial

4.5 Guia coaxial

La guia coaxial és una línia de transmissió que té moltes aplicacions gràcies al seu gran ample de banda, la seua baixa atenuació, i la capacitat de protegir les senyals propagades d'interferències exterior. En principi està dissenyada per a transmetre modes TEM , i podem utilitzar l'anàlisi del capítol 2, però és interessant estudiar el comportament dels camps d'aquesta quan transporta modes TE o TM , ja que de vegades és inevitable que aquests modes apareguen junt al TEM quan treballem amb freqüències altes (superiors a la del mode fonamental) o quan hi ha discontinuïtats, i és necessari saber com evitar interferències.

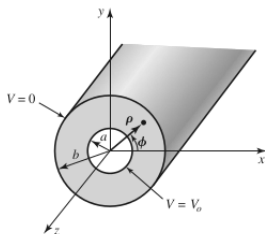


Figura 4.7: Guia d'ona coaxial

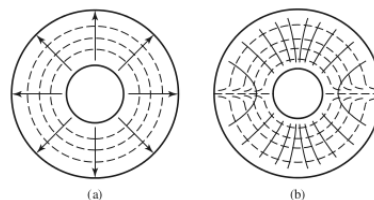


Figura 4.8: Modes en una ona coaxial

Quan apareixen aquestes discontinuïtats? Quan una guia s'estreta pot donar-se el cas que el mode fonamental es talli més enllà d'aquest punt, i la energia de la ona es reflectisca. Si després d'una distància curta la guia es torna a eixamplar és possible que el mode fonamental original torne a propagar-se. Que estiga tallat vol dir que s'atenua exponencialment, així que si no hi ha suficient distància per a que s'extingisca completament existirà un camp harmònic al final de la discontinuïtat, com si hi haguera un generador¹. Aquest fenomen pot ser usat per a excitar cavitats: necessitem fer entrar una ona en una regió tancada, però si fem un forat massa gran la cavitat tindrà massa pèrdues.

¹En termes de fotons aquestes dos situacions són equivalents a un fotó rebotant contra una paret potencial infinita i fent efecte tunel, respectivament.

4.5.1 Modes TE

Com en el cas anterior comencem resolent l'equació de Helmholtz per a h_z en coordenades cilíndriques, i després obtenim \vec{h}_t , \vec{e}_t i β . Les solucions per a h_z són, com abans,

$$\Phi = A \cos(n\varphi) + B \sin(n\varphi) \quad (4.26)$$

$$R = C \mathcal{J}_n(k_c s) + D \mathcal{N}_n(k_c s) \quad (4.27)$$

On ja hem aplicat la continuïtat de la coordenada angular $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi l)$. Ara, però, no podem utilitzar la condició de contorn en $s = 0$ que hem utilitzat amb la guia circular, ja que ara el punt $s = 0$ no és part del problema, i \mathcal{N} no divergeix. Per a traure els coeficients usarem les condicions de continuïtat de h_t a les parets: la component radial ha d'anul·lar-se a les parets. Com que $h_t \propto \vec{\nabla} h_z$ podem dir que

$$\left. \frac{\partial h_z}{\partial s} \right|_{\text{parets}} = 0 \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial R}{\partial s} \right|_{s=a} = \left. \frac{\partial R}{\partial s} \right|_{s=b} = 0 \quad (4.28)$$

Amb el que arribem a un sistema d'equacions en les incògnites C i D

$$C \mathcal{J}'_n(k_c a) + D \mathcal{N}'_n(k_c a) = 0 \quad (4.29)$$

$$C \mathcal{J}'_n(k_c b) + D \mathcal{N}'_n(k_c b) = 0 \quad (4.30)$$

Per a que existisca una solució el determinant de la matriu de coeficients ha de ser zero, i per tant hem de tindre

$$\mathcal{J}'_n(k_c a) \mathcal{N}'_n(k_c b) - \mathcal{J}'_n(k_c b) \mathcal{N}'_n(k_c a) = 0 \quad (4.31)$$

Cada solució numèrica m d'aquesta equació transcendental proporciona, per al mode n , una k_{cnm} . Els coeficients C i D no són independents; estan lligats per

$$\frac{C}{D} = -\frac{\mathcal{J}'_n(k_c b)}{\mathcal{N}'_n(k_c b)} = -\frac{\mathcal{J}'_n(k_c a)}{\mathcal{N}'_n(k_c a)} \quad (4.32)$$

La solució per al camp axial queda

$$h_z = [A \cos(n\varphi) + B \sin(n\varphi)][C \mathcal{J}'_n(k_c \varphi) + D \mathcal{N}'_n(k_c \varphi)] \quad (4.33)$$

i els camps transversals es poden obtenir pel mètode habitual.

Nota

Pareix que sempre que utilitzem coordenades cilíndriques pugam utilitzar la condició de continuïtat de φ , però en realitat no és qüestió del sistema de coordenades utilitzat, sino de la guia, que té simetria angular. Hi ha casos en que no hi ha aquesta simetria, per exemple en una guia amb secció en forma de "formatget". En aquest cas, però, tindriem CC en $\varphi = 0$ i $\varphi = \alpha$.

Capítol 5

Guies superficials

5.1 Introducció

En algunes situacions els camps electromagnètics estan confinats a una superfície; poden propagar-se en el pla d'aquesta, però s'atenueixen exponencialment en la direcció ortogonal. Aquesta superfície sol ser la interfase entre dos dielèctrics, com en les guies integrades o les fibres òptiques.

5.2 Làmina dielèctrica sobre plans de terra

A la imatge 5.1 es mostra la geometria d'una làmina dielèctrica sobre un pla de terra (*grounded slab*) i el sistema de coordenades utilitzat. Suposem que el dielèctric s'estén en $-\infty < x < \infty$ i en $0 < z < \infty$, el que implica que els camps no tindran variació en la direcció x .

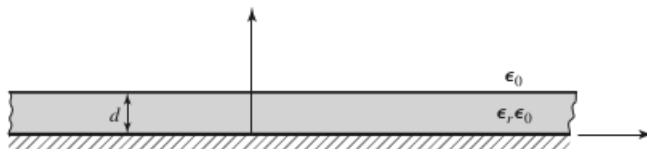


Figura 5.1: Làmina dielèctrica sobre terra

5.2.1 Modes TM

Comencem, com sempre, per resoldre la equació de Helmholtz per a e_z :

$$\vec{\nabla}_t \vec{e}_z + (k^2 - \beta^2) \vec{e}_z = 0 \quad (5.1)$$

amb la particularitat de que $k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ en aire i $k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r$ en el substrat, pel que tindrem dues regions separades, amb solucions diferents. Anomenant $k_c^2 = k_0^2 \epsilon_r - \beta^2$ i $-h^2 = k_0^2 - \beta^2$ tenim dues equacions diferencials

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} + k_c^2 e_z = 0 \quad (5.2a)$$

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} - h^2 e_z = 0 \quad (5.2b)$$

Amb solucions

$$e_z = A \cos(k_c y) + B \sin(k_c y) \quad \text{per a } y < d \quad (5.3a)$$

$$e_z = C e^{-hy} + D e^{hy} \quad \text{per a } y > d \quad (5.3b)$$

Per a que les condicions de contorn en la interfície aire - guia es satisfacin cal que les velocitats de fase siguin iguals, pel que la β serà igual a les dues regions, i de $\beta^2 = k_0^2 \epsilon_r - k_c^2 = k_o^2 - h^2$ obtenim

$$k_c^2 + h^2 = k_0^2(\epsilon_r - 1) \quad (5.4)$$

Usem les condicions de contorn

1. $e_z < \infty$ quan $y \rightarrow \infty$, pel que D ha de ser 0 en (5.3b)
2. $e_z = 0$ quan $y = 0$, d' on traguem $A = 0$ en (5.3a).
3. e_z ha de ser continuu en $y = d$, donant lloc a la lligadura entre C i B

$$C e^{-hd} = B \sin(k_c d) \quad (5.5)$$

4. \vec{h}_x ha de ser continuu en $y = d$. Com que $h_x = \frac{1}{\beta^2 - k^2} \frac{\partial e_z}{\partial y}$ tenim que

$$\left. \frac{-1}{h^2} \frac{\partial e_x}{\partial y} \right|_{y=d^+} = \left. \frac{\epsilon_r}{k_c^2} \frac{\partial e_x}{\partial y} \right|_{y=d^-} \quad (5.6)$$

i, per tant,

$$\frac{1}{h} C e^{-hd} = \frac{\epsilon_r}{k_c^2} B k_c \cos(k_c y) \quad (5.7)$$

Les equacions (5.5)-(5.7) formen un sistema d' equacions per a B i D. Per a que existisquen solucions el determinant ha d' anular-se:

$$k_c \tan(k_c d) = h \epsilon_r \quad (5.8)$$

Ara podem obtindre solucions per a k_c i h a partir de solucions numèriques per a les equacions (5.4)-(5.8). Si multipliquem ambdues per d obtenim dues equacions

$$(k_c d) \tan(k_c d) = (hd) \epsilon_r \quad (5.9a)$$

$$(hd)^2 + (k_c d)^2 = (k_c d)^2 (\epsilon_r - 1) \quad (5.9b)$$

que podem representar en el pla hd, k_c (figura 5.2). Notem que la segona de les equacions és un cercle de radi $k_0 d \sqrt{\epsilon - 1} = \omega d \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\epsilon - 1}$, i a major freqüència més interseccions tindrà amb les branques de la primera equació, el que significa que existiran més modes a la làmina.

Notem que el mode TM_0 no té freqüència de tall: és propaga desde $\omega = 0$ fins a $\omega = \infty$, encara que en $\omega = 0$ els camps desapareixen, el que resol la paradoxa que tindriem si tinguérem DC ($\omega = 0$) propagant-se amb un sol conductor.

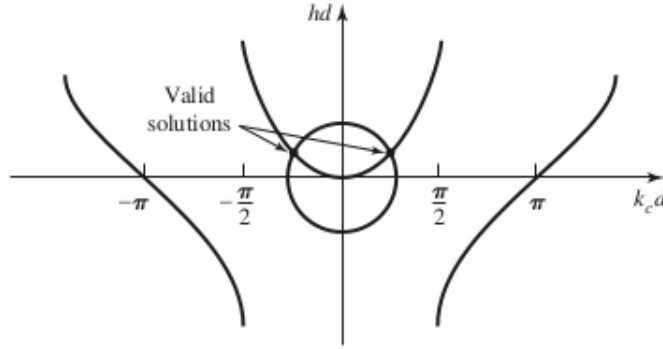


Figura 5.2: Sol·lucions gràfiques per a k_c i h

Si la freqüència és molt gran les h també ho seran, i el camp en z s'atenuarà en una longitud $\sim \lambda$, pel que el camp estarà contingut al dielèctric ¹.

Els components restants es calculen mecànicament una vegada coneixem el valor de h i k_c :

$$e_z = \begin{cases} B \sin(k_c y) & \text{quan } y < d \\ B \sin(k_c d) e^{-h(y-d)} & \text{quan } y > d \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\vec{e}_t = \begin{cases} \frac{j\beta}{k_c} B \cos(k_c d) \hat{u}_y & \text{quan } y < d \\ \frac{j\beta}{h} B \sin(k_c d) e^{-h(y-d)} \hat{u}_y & \text{quan } y > d \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\vec{h}_t = \begin{cases} \frac{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}{k_c} B \cos(k_c y) \hat{u}_y & \text{quan } y < d \\ \frac{j\omega\epsilon_0}{h} B \sin(k_c d) e^{-h(y-d)} \hat{u}_x & \text{quan } y > d \end{cases} \quad (5.12)$$

¹En una làmina amb més dielèctrics el camp es quedaria contingut al de major ϵ_r

Capítol 6

Ressonadors electromagnètics

6.1 Introducció

Un ressonador és bàsicament una caixa de la que les ones no poden eixir, acumulant-se l'energia. Les ones interferiran amb les seues reflexions a les parets, pel que certes freqüències tenen ressonància. Aquest fenomen té moltes aplicacions: filtres freqüencials, emmagatzematge d'energia, forns de microones, acceleradors de partícules...

6.2 Paràmetres d' un ressonador

Un ressonador pot modelar-se com un circuit RCL (figura 6.1), i està caracteritzat per els paràmetres d'aquest: la resistència, la inducció, la capacitat i el voltatge d'entrada.

La corrent d'aquest circuit és

$$I_g = \frac{V_g}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \quad (6.1)$$

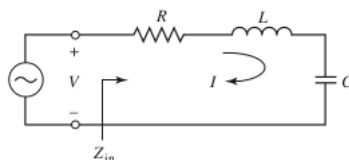


Figura 6.1: Circuit RCL equivalent

Coneixent aquests paràmetres podem obtenir la potència generada (que és la mateixa dissipada per la resistència):

$$P_g = P_R = \frac{1}{2}R|I|^2 = \frac{\frac{1}{2}R|V_g|^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad (6.2)$$

6.2.1 Freqüència de ressonància

La corba de (6.2) és alta per a freqüències al voltant d'un valor ω_0 que fa que el denominador siga mínim:

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6.3)$$

i baixa per a freqüències allunyades d'aquest valor, com es mostra a la figura 6.2.

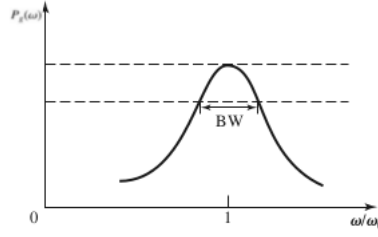


Figura 6.2: Potència d'eixida d'un generador

L'amplada d'aquesta corba està caracteritzada pel factor de qualitat Q , definit com a

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \quad (6.4)$$

per a $\omega_2 > \omega_1$ tal que

$$P_g(\omega_2) = P_g(\omega_1) = \frac{1}{2} P_{max} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{|V_g|^2}{R} \right) \quad (6.5)$$

Quan més alt és Q més selectiu és el filtre (menor ample de banda BW). Si resollem

$$P_g(\omega) = \frac{1}{2} P_{max} \rightarrow \frac{1}{4} \frac{|V_g|^2}{R} = \frac{\frac{1}{2} R |V_g|^2}{R^2 + (L\omega - \frac{1}{c\omega})^2} \quad (6.6)$$

arribem al valor aproximat

$$(\omega - \omega_0) \sim \pm \frac{1}{2} \frac{R}{L} \rightarrow \begin{cases} \omega_2 = \omega_0 + \frac{1}{2} \frac{R}{L} \\ \omega_1 = \omega_0 - \frac{1}{2} \frac{R}{L} \end{cases} \quad (6.7)$$

$$\text{Pel que } \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \text{ i } Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \omega_0 \frac{L}{R} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{R}$$

6.2.2 Energia emmagatzemada

La inductància i el condensador del circuit emmagatzemen energia, mentre que la resistència en perd. El quocient entre la energia emmagatzemada i la perduda és

$$\frac{E_{emm}}{E_{per}} = \frac{\langle \frac{1}{2} L |I|^2 \rangle + \langle \frac{1}{2} C |V|^2 \rangle}{\frac{1}{2} R |I|^2} = \frac{\frac{1}{2} L |I|^2 + \frac{1}{2} C |V|^2}{\frac{1}{2} R |I|^2} = \frac{L |I|^2 + C \frac{|I|^2}{C^2 \omega^2}}{2R |I|^2} \quad (6.8)$$

On $\langle \cdot \rangle$ indica mitjana temporal. En el cas $\omega = \omega_0$ aquest coeficient és $\frac{L}{R}$, i vegem, i comparant-lo amb el factor de qualitat $Q = \omega_0 \frac{L}{R}$ descobrim que aquest també ens informa de la qualitat del ressonador com a emmagatzemador d'energia.

6.2.3 Càlcul de Q en guies

Per a calcular el factor Q d'una guia d'ones usant $Q = \omega_0 \frac{\epsilon(\omega_0)}{P_l(\omega_0)}$ si coneixem la seua freqüència de ressonància ω_0 , la energia emmagatzemada $E_{stored}(\omega_0)$ i la potència perduda $P_{lost}(\omega_0)$. Aquesta última pot separar-se en dos contribucions: les pèrdues del conductor $P_{l,cond}$ i les del dielètric $P_{l,diel}$, i fer:

$$Q = \omega_0 \frac{E_s}{P_{l,c} + P_{l,d}} = \left[\frac{P_{l,c}}{\omega_0 E_s} + \frac{P_{l,d}}{\omega_0 E_s} \right]^{-1} = \left[\frac{1}{Q_D} + \frac{1}{Q_C} \right]^{-1} \quad (6.9)$$

Q d' un dielèctric

La energia emmagatzemada en un dielèctric, en funció dels camps magnètics al seu interior, és

$$E_s = E_s(\vec{E}) + E_s(\vec{H}) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D}^* dV + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B}^* dV = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D}^* dV = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B}^* dV \quad (6.10)$$

On hem utilitzat que en camps no atenuats la energia emmagatzemada pels camps elèctrics i magnètics és la mateixa. La potència perduda és

$$P_{l,d} = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{J}^* dV = \frac{\sigma_D}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV \quad (6.11)$$

I per tant el factor Q és

$$Q_D = \omega_0 \frac{E_S}{P_l} = \frac{\frac{1}{2} \sigma_D \int |\vec{E}|^2 dV}{\frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \int |\vec{E}|^2 dV} = \omega_0 \frac{\sigma_D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{1}{tg \delta} \quad (6.12)$$

Q d' un conductor

La Q d' un conductor not pot calcular-se en general, ja que la potència perduda és

$$P_l = \frac{1}{2} R_S \int_{parets} |\vec{H}|^2 d\vec{S} \quad (6.13)$$

i no podem trobar-la si desconexim les parets.

6.3 Cavitats ressonants**6.3.1 Cavitat paral·lelepípedica**

Considerem una paral·lelepípede de material conductor en el que existeix el mode TM_{mn} (figura 6.3). Els curtcircuits (si el considerem com una guia rectangular curtcircuitada) provoquen reflexions que donen a una ona + cap a $+x$ i una ona - cap a $-x$. Els camps d' aquests modes ja els hem obtés en (4.9). Per comoditat els reescrivim agrupant factors en els coeficients e_i^+ :

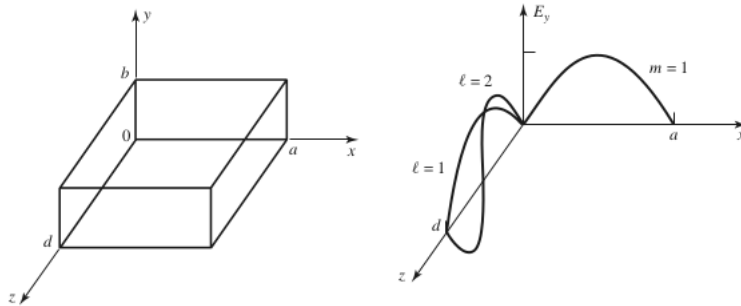


Figura 6.3: Ressonador paral·lelepípedic i els seus camps ressonants

$$\begin{aligned} e_z^+ &= E_0^+ e_z^- & e_x^+ &= E_0^+ e_x^- & e_y^+ &= E_0^+ e_y^- \\ h_z^+ &= 0 & h_x^+ &= E_0^+ h_x^- & h_y^+ &= E_0^+ h_y^- \end{aligned}$$

Els camps de la ona – són iguals però canviant $\beta \rightarrow -\beta$ i $H_0^+ \rightarrow H_0^-$. En termes dels coeficients e_i^\pm queden:

$$\begin{aligned} e_z^- &= E_0^- e_z^+ & e_x^- &= -E_0^- e_x^+ & e_y^- &= -E_0^- e_y^+ \\ h_z^- &= 0 & h_x^- &= E_0^- h_x^+ & h_y^- &= E_0^- h_y^+ \end{aligned}$$

per a la –. Sumant aquestes expressions obtenim les interferències:

$$E_z = E_0^+ e_z^+ e^{-j\beta z} + E_0^- e_z^+ e^{j\beta z} \quad (6.14a)$$

$$E_x = E_0^+ e_x^+ e^{-j\beta z} - E_0^- e_x^+ e^{j\beta z} \quad (6.14b)$$

$$E_y = E_0^+ e_y^+ e^{-j\beta z} - E_0^- e_y^+ e^{j\beta z} \quad (6.14c)$$

$$H_z = 0 \quad (6.14d)$$

$$H_x = E_0^+ h_x^+ e^{-j\beta z} + E_0^- h_x^+ e^{j\beta z} \quad (6.14e)$$

$$H_y = E_0^+ h_y^+ e^{-j\beta z} + E_0^- h_y^+ e^{j\beta z} \quad (6.14f)$$

Apliquem les condicions de contorn:

1. $E_x(z=0) = 0 \rightarrow e_x^+(E_0^+ e^{-0} - E_0^- e^0) = 0 \rightarrow E_0^+ = E_0^-$
2. $E_x(z=c) = 0 \rightarrow e_x^+ E_0^+ (e^{-j\beta c} - e^{j\beta c}) = 0 \rightarrow \sin \beta c = 0 \rightarrow \beta c = l\pi$ amb $l \in \mathbb{Z}$

Les freqüències d'aquestes ones són les de ressonància:

$$\beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 = \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2 \rightarrow \omega_{mnl} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2} \quad (6.15)$$

Cavitat circular

Per a trobar les freqüències de ressonància d'una guia circular curtcircuitada (figura 6.4) procedim com abans: escrivim els camps dels modes TE_{mn} en direcció $+z$ i $-z$, els sumem i apliquem les condicions de contorn $E_\varphi(z=0) = E_s(z=0) = 0$ i $E_\varphi(z=c) = E_s(z=c) = 0$, i obtenim la restricció per a β , que és la mateixa d'abans: $\beta c = l\pi$ amb $l \in \mathbb{Z}$.

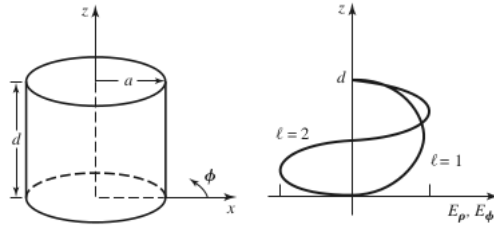


Figura 6.4: Ressonador paral·lelepèdic i els seus camps ressonants

Les freqüències de ressonància són per tant

$$\beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{P_{mn}}{a}\right)^2 = \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2 \rightarrow \omega_{mnl} = \sqrt{\left(\frac{P_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{c}\right)^2} \quad (6.16)$$

Capítol 7

Mètodes pertorbatius i modes acoblats

7.1 Introducció

Encara que podem resoldre problemes molt complexos mitjançant càlcul numèric, ens interessa obtenir solucions analítiques, encara que siguin aproximades, per a alguns casos. Als ressonadors, per exemple, podem calcular les freqüències de ressonància, però si fem un forat per introduir els camps canviem les condicions de contorn i, molt probablement, deixem de tindre solució analítica. Igualment, quan dues línies dielèctriques s'apropen massa els modes s'acoblen i deixem de tindre solucions. Aquests són dos exemples de situacions que, com vorem, podem resoldre usant mètodes pertorbatius i teoria de modes acoblats, respectivament.

7.2 Mètodes pertorbatius

Els mètodes pertorbatius ens permeten calcular, a partir dels camps electromagnètics d'un sistema, els camps d'un sistema idèntic al primer excepte per xicotetes diferències anomenades pertorbacions. Hi ha dos tipus principals de pertorbacions: pertorbacions de forma i pertorbacions del material.

7.2.1 Pertorbacions materials

Tenim un sistema ressonant del que coneixem les ω_0 , i volem trobar les noves ω_0 en cas de que fem un xicotet canvi $\epsilon \rightarrow \epsilon + \Delta\epsilon$ i $\mu \rightarrow \mu + \Delta\mu$ a les propietats del material (figura 7.1). Els camps originals satisfan:

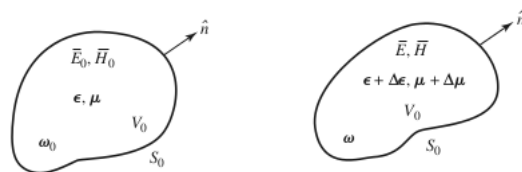


Figura 7.1: Sistema original i sistema amb propietats pertorbades

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = -j\omega_0\mu\vec{H}_0 \quad (7.1a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_0 = j\omega_0\epsilon\vec{E}_0 \quad (7.1b)$$

I els del sistema pertorbat satisfan

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega(\mu + \Delta\mu)\vec{H} \quad (7.2a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = j\omega(\epsilon + \Delta\epsilon)\vec{H} \quad (7.2b)$$

Multipliquem (7.1a)* per \vec{H} i restem \vec{E}^* . (7.2b)

$$\vec{\nabla}(\vec{E}_0^* \times \vec{H}_0) = j\omega_0\mu\vec{H}_0^* \cdot \vec{H} - j\omega(\epsilon + \Delta\epsilon)\vec{E}_0^* \cdot \vec{E} \quad (7.3)$$

I fent \vec{E}^* (7.1b)* - \vec{H}_0^* (7.2a)

$$\vec{\nabla}(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*) = j\omega\epsilon\vec{E}_0 \cdot \vec{E} - j\omega(\mu + \Delta\mu)\vec{H}_0^* \cdot \vec{H} \quad (7.4)$$

Integrem la suma de (7.3)-(7.4):

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \vec{\nabla}(\vec{E}_0^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_0^*) dV = \int \left[j(\omega_0 - \omega)\epsilon\vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + j(\omega_0 - \omega)\mu\vec{H}_0^* \cdot \vec{H} \right. \\ \left. - j\omega\Delta\epsilon\vec{E}_0^* \cdot \vec{E} - j\omega\Delta\mu\vec{H}_0^* \cdot \vec{H} \right] dV \end{aligned} \quad (7.5)$$

Usem el teorema de la divergència en la primera integral

$$\begin{aligned} \int_{S_0} (\vec{E}_0^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_0^*) \cdot d\vec{S} = \int \left[j(\omega_0 - \omega)\epsilon\vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + j(\omega_0 - \omega)\mu\vec{H}_0^* \cdot \vec{H} \right. \\ \left. - j\omega\Delta\epsilon\vec{E}_0^* \cdot \vec{E} - j\omega\Delta\mu\vec{H}_0^* \cdot \vec{H} \right] dV \end{aligned} \quad (7.6)$$

Com que els camps elèctrics són perpendiculars a la superfície la integral sobre S és zero, i manipulant els termes de la integral sobre V obtenim

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = \frac{\int_{V_0} [\Delta\epsilon\vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + \Delta\mu\vec{H}_0^* \cdot \vec{H}] dV}{\int_{V_0} [\epsilon\vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + \mu\vec{H}_0^* \cdot \vec{H}] dV} \quad (7.7)$$

Si coneguérem \vec{E}_0 , \vec{H}_0 , \vec{E} i \vec{H} podríem calcular ω exactament. Com que no els coneguem assumirem que $\vec{E} \simeq \vec{E}_0$ i $\vec{H} \simeq \vec{H}_0$, ja que $\Delta\epsilon$ i $\Delta\mu$ són molt xicotets.

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = \frac{\int_{V_0} [\Delta\epsilon\vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 + \Delta\mu\vec{H}_0^* \cdot \vec{H}_0] dV}{\int_{V_0} [\epsilon\vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 + \mu\vec{H}_0^* \cdot \vec{H}_0] dV} = \frac{\Delta W}{W} \quad (7.8)$$

La última igualtat, on W és la energia emmagatzemada als camps, es deu a que les integrals són les del teorema de Poynting. Noteu que cal integrar el denominador sobre tot el volum V_0 , però el numerador pot acotar-se a la zona pertorbada.

7.2.2 Pertorbació de forma

Si la pertorbació consisteix en un canvi en la forma, i no en els materials (figura 7.2), repetim el procés anterior fins a arribar a (7.6), amb la diferència de que ara $\Delta\epsilon = \Delta\mu = 0$:

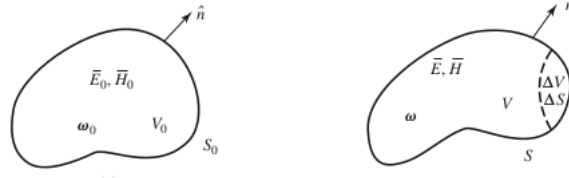


Figura 7.2: Sistema original i sistema amb forma pertorbada

$$\int_{S_0} (\vec{E}_0^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_0^*) \cdot d\vec{S} = j(\omega_0 - \omega) \int \left[\epsilon \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + \mu \vec{H}_0^* \cdot \vec{H} \right] dV \quad (7.9)$$

i podem arribar a l'expressió exacta

$$\omega - \omega_0 = \frac{-j \oint_{\Delta S} \vec{E}_0^* \times \vec{H}_0 d\vec{S}}{\int_V (\epsilon \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 + \mu \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}_0) dV} \quad (7.10)$$

On hem suposat, com abans, que $\vec{E} \simeq \vec{E}_0$ i $\vec{H} \simeq \vec{H}_0$, ja que $\Delta S \simeq 0$. També com abans podem integrar el numerador solament en la zona pertorbada.

7.3 Teoria de modes acoblats

De vegades passa que dos modes interaccionen entre ells de manera que hi ha un transvasament d'energia d'un a l'altre, com en els acobladors de senyal, en estructures periòdiques en moduladors acusto-òptics, en amplificadors... La teoria de modes acoblats ens permet obtenir el resultat d'acoblements com aquests, i és més general: pot ser aplicada a modes no electromagnètics, o a aacoblements entre modes EM i no EM (com acústics, o ones d'electrons).

7.3.1 Acoblament de modes copropagants

Si en una guia en la que es propaga més d'un mode de manera independent fem una pertorbació podem provocar que els modes deixen de ser independents. Suposem que el mode resultant és una combinació lineal dels modes originals 1 i 2:

$$\vec{E}' = A_1(z) \vec{E}_1 e^{-j\beta_1 z} + A_2(z) \vec{E}_2 e^{-j\beta_2 z} \quad (7.11a)$$

$$\vec{H}' = A_1(z) \vec{H}_1 e^{-j\beta_1 z} + A_2(z) \vec{H}_2 e^{-j\beta_2 z} \quad (7.11b)$$

i intentem trobar $A_1(z)$ i $A_2(z)$. Per un procediment similar al de la secció anterior arribem a la igualtat

$$\vec{\nabla} \left[A_1(z)(\vec{E}_1^* \times \vec{H}_1 + \vec{E}_1 \times \vec{H}_1^*) + A_2(z)(\vec{E}_1^* \times \vec{H}_2 + \vec{E}_2 \times \vec{H}_1^*) \right] = -j\omega\Delta\epsilon\vec{E}_1^* \cdot \vec{E} \quad (7.12)$$

Integrem ambdós costats sobre la secció transversal S_t i apliquem el teorema de la divergència en 2 dimensions. Anomenant \vec{F} a la suma dins del $\vec{\nabla}$ en (7.12) arribem a

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{S_t} \vec{F} \cdot \vec{dS} + \oint_{C(S_t)} \vec{F} \cdot \vec{n} dl = -j\omega\Delta\epsilon \int_{S_t} \vec{E}_1^* \cdot \vec{E} dS \quad (7.13)$$

En cas de que les parets siguin conductores la integral de contorn desapareixerà, ja que $\vec{E} \times \vec{H}$ és tangent a aquestes. Si són dielèctriques el integrant és proporcional a $\frac{1}{r}$, i considerant contorns infinits deduïm que ha d'anul·lar-se igualment.

Si reescrivim \vec{F} explícitament i calculem la derivada sobre la integral arribem a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} &= -j\omega \int \left[\Delta\epsilon \vec{E}_1^* e^{-j\beta_1 z} (A_1 e^{j\beta_1 z} \vec{E}_1 + A_2 e^{j\beta_2 z} \vec{E}_2) \right] dS \\ &= k_{11} A_1(z) + k_{12} A_2(z) e^{j\delta z} \end{aligned} \quad (7.14)$$

On hem definit

$$\begin{aligned} \delta &= \beta_2 - \beta_1 \\ k_{11} &= -j\omega \int \Delta\epsilon \left| \vec{E}_1 \right|^2 dS \\ k_{12} &= -j\omega \int \Delta\epsilon \vec{E}_1^* \cdot \vec{E}_2 dS \end{aligned} \quad (7.15a)$$

I, similarment,

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = k_{22} A_2(z) + k_{21} A_1(z) e^{j\delta z} \quad (7.16)$$

amb

$$\begin{aligned} k_{22} &= -j\omega \int \Delta\epsilon \left| \vec{E}_2 \right|^2 dS \\ k_{12} &= k_{21}^* \end{aligned} \quad (7.17a)$$

D'aquestes dues equacions podem calcular A_1 , i A_2 en funció de δ i ϵ . En general observarem que les seues amplituds $|A_1|^2$ i $|A_2|^2$ estan en contrafase, ja que l'energia que un dels modes perd el guanya l'altre.

Capítol 8

Teoria de circuits d' alta freqüència

8.1 Introducció

Un dispositiu en un circuit d' alta freqüència es representa com una caixa negra amb diversos ports (o canals) d' entrada i eixida. Cada un d' aquests ports és una guia d' ones representada com a dos terminals als que existeix una tensió i una corrent d' entrada i eixida. Ens interessa trobar les funcions de transferència d' aquests dispositius (les relacions entre cada entrada i cada eixida). Aquestes funcions poden calcular-se per dues vies diferents: teoria de circuits (trobat la matriu d' impedàncies o d' admitàncies) o per teoria d' ones (trobat la matriu de dispersió o scattering).

8.2 V i I en una guia d' ona

Intentem obtindre el V i I d' una guia d' ones a partir dels seus camps $\vec{\mathcal{E}}$ i $\vec{\mathcal{H}}$. Denotem els camps d' entrada i eixida amb + i - i definim V_0^+ i I_0^+ :

$$\vec{\mathcal{E}}_t^+ = E_0^+ \vec{e}_t(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)} = \frac{V_0^+}{c_1} \vec{e}_t(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (8.1)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_t^+ = E_0^+ \vec{e}_t(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)} = \frac{I_0^+}{c_2} \vec{h}_t(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (8.2)$$

Ara hem de trobar c_1 i c_2 . Comencem igualant les expressions de la potència de la guia segons la teoria d' ones i segons la teoria de circuits.

$$P_{ones} = \frac{1}{2} \int (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*) \hat{u}_z dS = \frac{1}{2} \frac{V_0^+ I_0^+}{c_1 c_2^*} \int (\vec{e}_t \times \vec{h}_t) \hat{u}_z dS \quad (8.3)$$

$$P_{circuits} = \frac{1}{2} V_0^+ I_0^+ \quad (8.4)$$

Si han de ser iguals ha de complir-se que

$$c_1 c_2^* = \int (\vec{e}_t \times \vec{h}_t) \hat{u}_z dS \quad (8.5)$$

el que ens dona una primera relació entre c_1 i c_2 . La segona relació no sempre existeix. Si el mode és TE, TM o TEM les amplituds dels càlculs estan relacionats

per l'admitància o l'impedància: $E_0^+ = H_0^+ Z$, d'on obtenim

$$\frac{V_0^+}{I_0^+} \frac{c_2}{c_1} = z \quad (8.6)$$

Si el mode és TEM aleshores $\frac{V_0^+}{I_0^+} = z_c$ i $z = z_c \frac{c_2}{c_1}$. El mateix anàlisi pot usar-se per a calcular V_0^- i I_0^- .

8.3 Matriu d'impedància Z i d'admitància Y

Suposem un dispositiu amb n entrades, indexades per j . En la porta j tindrem

$$V_j = V_0^+ + V_0^- \quad (8.7)$$

$$I_j = I_0^+ + I_0^- \quad (8.8)$$

Si posem una corrent en una o varies portes apareixerà una tensió an algunes de les altres. Definim la matriu d'impedància Z_{ij} tal que

$$V_i = \sum_{j=0}^N Z_{ij} V_j \quad (8.9)$$

La matriu d'admitàncies es defineix anàlogament

$$Y_j = \sum_{i=1}^N Y_{ij} Y_i \quad (8.10)$$

Quina informació ens proporcionen els elements d'aquestes matrius? Ens donen la relació entre tensió a la porta i i corrent a la porta j quan totes les altres estan en circuit obert:

$$Z_{ij} = \left. \frac{V_i}{I_j} \right|_{I_k = 0 \text{ per a } k \neq j} \quad (8.11)$$

o entre corrent a la porta i i tensió a la porta j quan totes les altres estan curtcircuitades:

$$Y_{ij} = \left. \frac{I_i}{V_j} \right|_{V_k = 0 \text{ per a } k \neq j} \quad (8.12)$$

8.4 Matriu d'scattering S

Alternativament podem definir els paràmetres de potència incident i reflectida:

$$a_i = \frac{V_0^+}{\sqrt{Z_{Ci}}} \quad b_i = \frac{V_0^-}{\sqrt{Z_{Ci}}} \quad (8.13)$$

anomenats així perquè, a partir de la seua definició, podem arribar a la igualtat

$$P_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [|a_i|^2 - |b_i|^2] \quad (8.14)$$

que podem interpretar com a la potència entrant al port i menys la potència eixint del port i . A partir d'aquests coeficients podem definir els paràmetres S :

$$S_{ij} = \left. \frac{b_i}{a_j} \right|_{a_k = 0 \text{ per a } k \neq j} \quad (8.15)$$

tals que

$$b_i = \sum_j S_{ij} a_j \quad (8.16)$$

La informació continguda en aquest paràmetres és els paràmetres de reflexió (quan $i = j$) i els de transmissió (quan $i \neq j$):

$$S_{ii} = \frac{V_i^-}{V_i^+} \quad (8.17)$$

$$S_{ij} = \sqrt{\frac{Z_{Cj}}{Z_{Ci}}} \frac{V_i^-}{V_j^+} \quad (8.18)$$

Podem mesurar els paràmetres S d'una xarxa amb dues portes usant un analitzador de xarxes vectorial (VNA). Per a dispositius més complexats d' n portes utilitzem el VNA i analitzem les portes per parells. Noteu que, segons la definició, quan mesurem el paràmetre S_{ij} haurem d'assegurar-nos de que totes les portes que no siguin j estiguen adaptades, per a que no hi haja reflexions.

8.5 Propietats de les matrius

En sistemes recíprocs (passius, no aporten energia) Z i Y son simètriques. Si no hi ha pèrdues són, a més, imaginàries pures.

Depenent del problema una matriu serà més ñutil que l'altra, pel que és útil saber obtenir-ne una de l'altra. De la definició dels paràmetres a_i i b_i obtenim

$$a_i + b_i = \frac{V_i^+ + V_i^-}{\sqrt{Z_{Ci}}} = \frac{V_i}{\sqrt{Z_{Ci}}} \quad (8.19)$$

$$a_i - b_i = \frac{V_i^+ - V_i^-}{\sqrt{Z_{Ci}}} = \sqrt{Z_{Ci}} I_i \quad (8.20)$$

Sumant i restant aquestes dos equacions:

$$a_i = \frac{1}{2} \left(\frac{V_i}{\sqrt{Z_{Ci}}} + \sqrt{Z_{Ci}} I_i \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{Z_{Ci}}} \sum_j Z_{ij} I_j + \sqrt{Z_{ii}} I_i \right) \quad (8.21)$$

$$b_i = \frac{1}{2} \left(\frac{V_i}{\sqrt{Z_{Ci}}} - \sqrt{Z_{Ci}} I_i \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{Z_{Ci}}} \sum_j Z_{ij} I_j - \sqrt{Z_{ii}} I_i \right) \quad (8.22)$$

Definint les matrius

$$Z_{ij}^{D+} = \frac{Z_{ij}}{\sqrt{Z_{Ci}}} + \delta_{ij} \sqrt{Z_{Ci}} \quad (8.23)$$

$$Z_{ij}^{D-} = \frac{Z_{ij}}{\sqrt{Z_{Ci}}} - \delta_{ij} \sqrt{Z_{Ci}} \quad (8.24)$$

podem expressar els coeficients com a

$$a_i = \sum_j Z_{ij}^{D+} I_j \quad (8.25)$$

$$b_i = \sum_j Z_{ij}^{D-} I_j \quad (8.26)$$

o, en termes dels vectors que contenen els coeficients i les corrents de cada porta $\vec{a} = Z^{D+} \vec{I}$ i $\vec{b} = Z^{D-} \vec{I}$. Ara podem, de la definició de S

$$\vec{b} = S \vec{a} \quad (8.27)$$

obtindre la relació d' aquesta amb Z :

$$S = Z^{D-} [Z^{D+}]^{-1} \quad (8.28)$$

Les propietats de Z es translladen a S : en sistemes recíprocs S és simètrica, i per tant ens podem estalviar la meitat de les mesures. Noteu que per a un sistema biporta

$$|S_{11}|^2 + |S_{22}|^2 = 1 \quad (8.29)$$

$$|S_{21}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 \quad (8.30)$$

8.6 Conexions de xarxes en cascada

Els elements de les matrius d' scattering i d' impedància tenen significat físic i són per tant directament mesurables, però tenen l' inconvenient de que no són multiplicatives. És a dir, la matriu S d' una xaxa composada per dos xarxes amb matrius S_1 i S_2 no és $S_1 S_2$. És per això que definim la matriu T

$$\begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

que si que satisfà aquesta propietat. Les expressions per a passar de la matriu S a la T i viceversa són

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\det(S)}{S_{12}} & \frac{S_{22}}{S_{12}} \\ -\frac{S_{11}}{S_{12}} & \frac{1}{S_{12}} \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} -\frac{T_{21}}{T_{22}} & \frac{1}{T_{22}} \\ \frac{\det(T)}{T_{22}} & \frac{T_{12}}{T_{22}} \end{bmatrix} \quad (8.32)$$