Appunti completi del corso di ANALISI 2 Equazioni Differenziali

Ultima modifica: 28 febbraio 2026

Indice

Equazioni Differenziali

1.1 Introduzione alle Equazioni Differenziali

Quando si definisce un'equazione differenziale, l'incognita è $y = y(x)$ che dipende dalla variabile $x \in I : [a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione 1.1.1 (Equazione Differenziale)**.** *Un'equazione la cui incognita è una funzione del tipo $y = y(x)$ e in cui sono presenti una o più derivate della stessa funzione incognita.*

Le equazioni differenziali si dividono in due categorie:

- **EDO**[1] (ordinarie), un'equazione differenziale su una funzione di una sola variabile indipendente;
- **EDP** (parziali), un'equazione differenziale su una funzione di più variabile indipendenti.

Nota. L'ordine di una EDO è l'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione differenziale.

Definizione 1.1.2 (EDO di ordine n)**.** *Un'equazione differenziale ordinaria di ordine n si può scrivere in due forme:*

- *Implicita*
$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^n(x)) = 0$$
  - *$y(x) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione reale di variabile reale derivabile n volte in un intervallo I;*
  - *F è una funzione tale che $F : U \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, con U aperto, che prende in input $n+2$ numeri reali $(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^n(x))$ e produce in output un singolo numero reale.*
- *Esplicita o Forma normale:*
$$y^n(x) = F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{n-1}(x))$$
  dove $y(x) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e y^n è la derivata di ordine più alto.

Definizione 1.1.3 (Soluzione di una EDO)**.** *Sia $F(x, y(x), y'(x), y''(x), .., y^n(x)) = 0$ con $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ una EDO di ordine n su I.*
La sua soluzione è una funzione $\phi = \phi(x)$ definita su (almeno) $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e $\phi \in C^n(I)$ per cui vale
$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), ..., \phi^n(x)) = 0$$

Definizione 1.1.4 (Soluzione generale e integrale generale di una EDO)**.** *La soluzione generale di una EDO è una famiglia di funzioni che soddisfano l'equazione e che dipendono da una o più costanti arbitrarie (dette costanti di integrazione). Ogni scelta particolare delle costanti determina una soluzione particolare.*

[1] Il corso approfondisce solo le EDO.

L'integrale generale di una EDO su un intervallo I è l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione definite su I.

Quando risolvo una EDO cerco tutte le possibili funzioni $y(x)$ che soddisfano l'uguaglianza tra la funzione incognita e le sue derivate.
Per formulare in modo più rigoroso il concetto, possiamo ricollegarci alla definizione di primitiva studiata in Analisi 1.
Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata. Si dice che una funzione $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ è una *primitiva* di f in (a,b) se:

$$y'(x) = f(x), \qquad \forall x \in (a,b)$$

L'uguaglianza $y'(x) = f(x)$ può essere interpretata come una EDO del primo ordine. In questa prospettiva, una primitiva di f non è altro che una soluzione della EDO

$$y' = f(x)$$

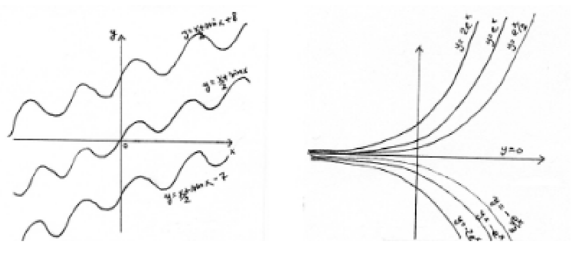
Possiamo quindi reinterpretare la definizione:

1. Si parte da una funzione assegnata $f(x)$;
2. Si cerca una funzione incognita $y(x)$;
3. Si verifica la condizione $y'(x) = f(x)$.

Se la derivata della funzione incognita candidata coincide identicamente con $f(x)$ su tutto l'intervallo, allora $y(x)$ è una soluzione dell'EDO, ossia una primitiva di f.
Dal punto di vista strutturale, l'insieme di tutte le primitive di f è descritto dall'integrale generale:

$$y(x,c) = \int f(x)\,dx + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Questa espressione rappresenta una famiglia di funzioni dipendente da una costante arbitraria reale c. Abbiamo scritto che ogni valore della costante c individua una specifica soluzione della EDO.
Dal punto di vista geometrico, l'integrale generale rappresenta una famiglia di curve (integrali) nel piano (x,y) tali che, in ogni punto x, la loro pendenza è data dal valore $f(x)$.



Alcune soluzioni delle EDO del primo ordine $y'(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$ e $y'(x) = y$

In conclusione, l'integrale generale di una EDO è l'insieme di tutte le sue soluzioni, espresso in forma parametrica come $y(x,c)$, dove la variabile indipendente è x e il parametro reale c distingue le diverse soluzioni appartenenti alla stessa famiglia.

1.2 EDO lineare

Una EDO è <u>non</u> lineare se

- $y(x)$ e le sue derivate compaiono dentro funzioni "complesse", per esempio potenze y^2, seno $\sin(y)$, coseno $\cos(y)$, . . . ;
- $y(x)$ e le sue derivate sono moltiplicate tra loro, per esempio $y'(x) \cdot y(x) = 0$;
- i coefficenti a dipendono dalla funzione $y(x)$, per esempio $y'(x)y(x) + y(x) = 0$.

Nota. Per parlare di linearità di una EDO bisogna interpretarla come un'operazione che agisce fra funzioni.

Definizione 1.2.1 (Linearità di una EDO)**.** *Dato $I \subseteq \mathbb{R}$ e consideriamo lo spazio $C^n(I)$ delle funzioni n-volte derivabili su I.*
Un operatore differenziale lineare di ordine n è un'applicazione lineare $L : C^n(I) \to C^0(I)$.
Una EDO in forma normale $y^n = F(x, y, y', y'', ..., y^{n-1})$ è definita lineare perché può essere scritta nella forma

$$L(\phi(x)) := a_n\phi^n(x) + a_{n-1}\phi^{n-1}(x) + ... + a_1\phi'(x) + a_0\phi(x)$$

dove L associa ad ogni funzione $\phi \in C^n(I)$ la funzione $L(\phi) \in C^0(I)$, con $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ funzioni continue su I.

L'applicazione lineare L è lineare perché soddisfa due proprietà fondamentali:

- L'additività
$$L(\phi_1 + \phi_2) = L\phi_1 + L\phi_2, \qquad \forall \phi_1, \phi_2 \in C^n(I)$$
- L'omogeneità
$$L(\alpha\phi) = \alpha L\phi, \qquad \forall \phi \in C^n(I), \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Insieme si riasusmono in una sola proprietà di linearità:

$$L(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = \alpha L(\phi_1) + \beta L(\phi_2), \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \phi_1, \phi_2 \in C^n(I)$$

In parole povere, la linearità significa che

- <u>non</u> si creano relazioni strane tra le funzioni e non compaiono prodotti come $y(x) \cdot y'(x)$ o come potenze y^2 o funzioni non lineari come $\sin(y)$, $\cos(y)$, . . . ;
- ogni termine dipende da y o dalle sue derivate in modo separato;
- l'operatore L le elabora separatemente e ne somma i risultati.

Le funzioni sono trattate in modo indipendente e proporzionale (per esempio, se raddoppi la funzione in ingresso, la funzione in uscita raddoppia ugualmente).
Questa proprietà è fondamentale perché implica il principio di sovrapposizione per le equazioni lineari omogenee, ogni combinazione lineare di soluzioni è ancora una soluzione.

Definizione 1.2.2 (EDO lineare Completa)**.** *Sia il termine noto $f(x) \neq 0$, una EDO lineare di ordine n può essere scritta in due forme*

- *Implicita:* $a_ny^n(x) + a_{n-1}y^{n-1}(x) + ... + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x)$
- *Esplicita o forma normale:* $y^n(x) + a_{n-1}y^{n-1}(x) + ... + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x)$

Definizione 1.2.3 (EDO lineare Omogenea Associata ad una EDO completa)**.** *Sia il termine noto uguale a zero, si scrive nella forma:*

$$a_ny^n(x) + a_{n-1}y^{n-1}(x) + ... + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0$$

1.3 EDO lineare del primo ordine

Definizione 1.3.1 (EDO lineare del primo ordine)**.** *Sia $x \in [a, b]$ e siano $a(x)$ e $f(x)$ funzioni continue in $[a, b]$, posso definire la EDO lineare del primo ordine in due forme*

- *Forma normale:* $y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$
- *Omogena associata:* $y'(x) + a(x)y(x) = 0$

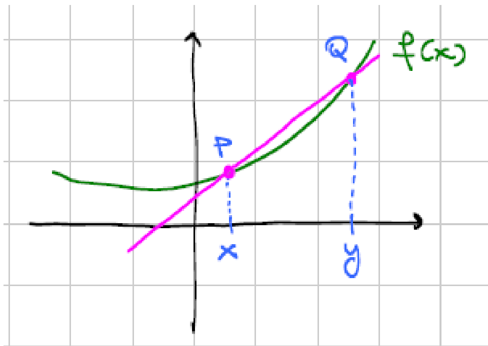
La continuità di $a(x)$ e $f(x)$ è fondamentale poiché garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Cauchy associato.
Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

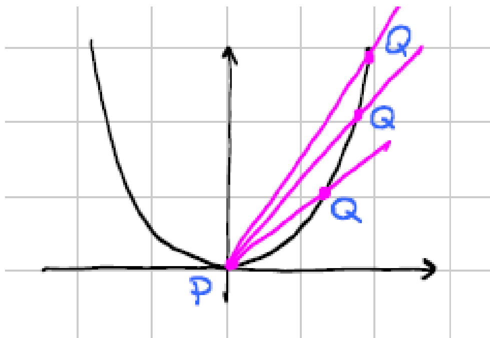
La soluzione esiste ed è unica in un intorno del punto (x_0, y_0) se

- **Esistenza (Continuità)**: la funzione $f(x, y)$ è continua in un intorno del punto (x_0, y_0);
- **Unicità (Condizione di Lipschitz[2])**: la funzione f è lipschitziana rispetto a y se la derivata parziale $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ esiste ed è continua nell'intorno considerato.

  Questa condizione garantisce che le soluzioni del problema di Cauchy partendo da uno stesso punto iniziale non possano separarsi, assicurando l'unicità della soluzione. Senza la condizione di Lipschitz possono esistere più soluzioni distinte con la stessa condizione iniziale;



Funzione Lipschitziana



Funzione non Lipschitziana

Nota. La continuità di $a(x)$ e $f(x)$ assicura inoltre la possibilità di applicare la formula risolutiva che richiede il calcolo di integrali di tali funzioni.

1.3.1 Struttura della soluzione generale di una EDO lineare del primo ordine

Teorema 1.3.1 (Rappresentazione della soluzione generale di una EDO lineare completa)**.** *La soluzione generale di una EDO lineare del primo ordine definita su un intervallo $I = [a, b]$ del tipo $y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$ è dato dalla somma dell'integrale generale dell'omogenea associata ($y'(x) + a(x)y(x) = 0$) ed una curva integrale (una soluzione particolare) della EDO lineare non omogenea in forma normale ($y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$):*

$$y(x) = y_{om}(x) + \bar{y}(x)$$

dove $x \in I$ e $y(x)$ è una soluzione qualsiasi della EDO lineare di ordine n, $y_{om}(x)$ è una soluzione qualsiasi della EDO lineare omogenea associata di ordine n e $\bar{y}(x)$ è una soluzione particolare della EDO lineare di ordine n

[2] La variazione di f rispetto a y è controllata. Geometricamente, il grafico non può avere pendenze infinite né oscillazioni troppo brusche.

DIMOSTRAZIONE per $n = 1$ (è valida anche per n di ordine superiore)
Parte 1 Mostriamo che $y_{\text{om}}(x) = y(x) - \bar{y}(x)$ è soluzione dell'omogenea.

$$\begin{aligned} y'(x) + a(x)y(x) &= f(x) \quad \text{(soluzione qualsiasi della completa)} \\ \bar{y}'(x) + a(x)\bar{y}(x) &= f(x) \quad \text{(soluzione particolare della completa)} \end{aligned}$$

Sottraiamo la seconda equazione dalla prima, membro a membro:

$$\begin{aligned} [y'(x) + a(x)y(x)] - [\bar{y}'(x) + a(x)\bar{y}(x)] &= f(x) - f(x) \\ y'(x) + a(x)y(x) - \bar{y}'(x) - a(x)\bar{y}(x) &= 0 \\ y'(x) - \bar{y}'(x) + a(x)y(x) - a(x)\bar{y}(x) &= 0 \quad \text{(ri-ordino)} \\ [y'(x) - \bar{y}'(x)] + a(x)[y(x) - \bar{y}(x)] &= 0 \quad \text{(raccolgo } a(x)\text{)} \end{aligned}$$

Usando la linearità della derivata: $y' - \bar{y}' = (y - \bar{y})'$, otteniamo:

$$[y(x) - \bar{y}(x)]' + a(x)[y(x) - \bar{y}(x)] = 0$$

Ponendo $y_{\text{om}}(x) = y(x) - \bar{y}(x)$:

$$y'_{\text{om}}(x) + a(x)y_{\text{om}}(x) = 0$$

Quindi $y_{\text{om}}(x)$ è soluzione dell'omogenea perché abbiamo dimostrato che la differenza è soluzione dell'equazione omogenea associata.

Parte 2 Mostriamo che $y(x) = y_{\text{om}}(x) + \bar{y}(x)$ è soluzione della completa.

$$\begin{aligned} y'_{\text{om}}(x) + a(x)y_{\text{om}}(x) &= 0 \quad \text{(soluzione dell'omogenea)} \\ \bar{y}'(x) + a(x)\bar{y}(x) &= f(x) \quad \text{(soluzione particolare della completa)} \end{aligned}$$

Sommiamo le due equazioni membro a membro:

$$\begin{aligned} [y'_{\text{om}}(x) + a(x)y_{\text{om}}(x)] + [\bar{y}'(x) + a(x)\bar{y}(x)] &= 0 + f(x) \\ y'_{\text{om}}(x) + a(x)y_{\text{om}}(x) + \bar{y}'(x) + a(x)\bar{y}(x) &= f(x) \\ y'_{\text{om}}(x) + \bar{y}'(x) + a(x)y_{\text{om}}(x) + a(x)\bar{y}(x) &= f(x) \quad \text{(ri-ordino)} \\ [y'_{\text{om}}(x) + \bar{y}'(x)] + a(x)[y_{\text{om}}(x) + \bar{y}(x)] &= f(x) \quad \text{(raccolgo } a(x)\text{)} \end{aligned}$$

Usando la linearità della derivata $y'_{\text{om}} + \bar{y}' = (y_{\text{om}} + \bar{y})'$, otteniamo:

$$[y_{\text{om}}(x) + \bar{y}(x)]' + a(x)[y_{\text{om}}(x) + \bar{y}(x)] = f(x)$$

Ponendo $y(x) = y_{\text{om}}(x) + \bar{y}(x)$:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

Quindi $y(x) = y_{\text{om}}(x) + \bar{y}(x)$ è soluzione della completa.

□

La rappresentazione alternativa dell'integrale generale $y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$ è

$$\int y(x) = \int y_{\text{om}}(x) + \int \bar{y}(x)$$

Nota. Per trovare tutte le soluzioni della EDO lineare è necessario sommare la soluzione generale dell'omogenea associata e la soluzione nota dell'equazione di partenza.

1.3.2 Struttura dell'integrale generale di una EDO lineare del primo ordine omogenea associata

Teorema 1.3.2 (L'integrale generale della EDO lineare del primo ordine omogenea associata). *Sia $y'(x)+a(x)y(x) = 0$ con $x \in [a,b]$ e $a(x)$ continua in $[a,b]$, l'integrale generale dell'omogenea associata prende la forma*

$$y(x) = y(x,c) = ce^{-A(x)} = ce^{-\int a(x)dx}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

con $A(x) = \int a(x)dx$ primitiva di $a(x)$ fissata una volta per tutte.

DIMOSTRAZIONE
Si moltiplica ambo i membri di $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ per $e^{A(x)} = e^{\int a(x)\,dx}$ perché l'esponenziale ha la derivata proporzionale a se stesso e permette di trasformare l'omogenea associata in una derivata del prodotto, e quindi si ottiene

$$\underbrace{e^{A(x)}y'(x) + e^{A(x)}a(x)y(x)}_{[e^{A(x)}y(x)]'} = 0,$$

essendo la derivata di una costante uguale 0 ci dice che

$$e^{A(x)}y(x) = c$$

$$\frac{\cancel{e^{A(x)}}y(x)}{\cancel{e^{A(x)}}} = \frac{c}{e^{A(x)}}$$

$$y(x) = \frac{c}{e^{A(x)}}$$

$$y(x) = ce^{-A(x)}$$

allora (è ottenuto l'integrale generale dell'omogenea associata)

$$y(x) = ce^{-A(x)} = ce^{-\int a(x)\,dx}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Infatti

$$\left(e^{-A(x)}\right)' = e^{-A(x)}[-a(x)],$$

dunque

$$\left(e^{-A(x)}\right)' + e^{-A(x)}a(x) = 0.$$

□

Nota. L'insieme delle soluzioni della EDO lineare del primo ordine dell'omogenea associata costituisce uno spazio vettoriale[3] di dimensione 1 e per trovare gli elementi di tale spazio:

- Basta trovare una soluzione particolare non nulla $y_{om}(x) = e^{-A(x)}$;
- Questa $y_{om}(x)$ funge da base dello spazio;
- Ogni altra soluzione è uno suo multiplo e si può scrivere come $y(x) = ce^{-A(x)}$

[3] Questo perché soddisfa le proprietà fondamentali della linearità: la somma di due soluzioni è ancora una soluzione e il prodotto di una soluzione per una costante è una soluzione

1.3.3 Struttura di una curva integrale di una EDO lineare del primo ordine completa

Dopo aver strutturato la soluzione generale della EDO lineare del primo ordine omogenea associata, il passo successivo è quello di trovare una curva integrale[4] $\bar{y}(x)$ della stessa EDO lineare completa.
Essa può essere strutturata "ad occhio",analizzando il termine noto, o con il metodo di variazione di una costante.

Teorema 1.3.3 (Una curva integrale della EDO lineare del primo ordine completa). *Sia $y'(x)+a(x)y(x) = f(x)$ la struttura di una soluzione particolare della EDO lineare completa è definita dal metodo di variazione di una costante nella forma*

$$\bar{y}(x) = e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)}dx$$

DIMOSTRAZIONE
Consideriamo la soluzione nella forma:

$$\bar{y}(x) = c(x)e^{-A(x)}$$

dove $e^{-A(x)}$ è la soluzione dell'omogenea associata e $c(x) \in C^1(I)$ ed è una funzione perché non mi basta più una costante c fissa per strutturare la soluzione particolare.
Essendo $\bar{y}(x)$ una soluzione particolare della EDO completa del primo ordine, è possibile trasformare la

$$\bar{y}'(x) + a(x)\bar{y}(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Sostituendo al suo interno $\bar{y}(x) = c(x)e^{-A(x)}$, ottengo la EDO nella forma

$$(c(x)e^{-A(x)})' + a(x)c(x)e^{-A(x)}$$

Quindi, si deriva $(c(x)e^{-A(x)})'$ e la forma completa diventa

$$c'(x)e^{-A(x)} - c(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)c(x)e^{-A(x)} = f(x),$$

Con un passaggio algebrico si trasforma

$$c'(x)e^{-A(x)} - \cancel{c(x)a(x)e^{-A(x)}} + \cancel{a(x)c(x)e^{-A(x)}} = f(x),$$

ovvero

$$c'(x)e^{-A(x)} = f(x),$$

Dividendo tutto per $e^{-A(x)}$ e poi spostando $e^{-A(x)}$ al numeratore, ottengo la forma definitiva

$$c'(x) = e^{A(x)}f(x).$$

Integrando $c'(x)$, infine, si ottiene:

$$c(x) = \int e^{A(x)}f(x)\,dx.$$

Pertanto, sostituendo in $\bar{y}(x) = c(x)e^{-A(x)}$, si ottiene la definizione dell'integrale generale particolare $\bar{y}(x)$ della EDO completa non omogenea nella forma

$$\bar{y}(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)}f(x)\,dx.$$

□

Per concludere, per calcolare l'integrale generale della EDO non omogenea lineare si usa

$$y(x) = ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)}dx$$

Nota. $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ che viene scelta <u>una e una sola volta</u> e non occorre aggiungere una costante arbitraria in quanto, nella formula finale, è già inclusa la costante c; non occorre aggiugere nemmeno una costante additiva nel calcolo dell'integrale particolare. Tutto ciò è dimostrabile ripetendo le dimostrazione con l'aggiunta di un k.

[4]Per curva particolare si intende una soluzione particolare che soddisfa la EDO completa.

1.3.4 Problema di Cauchy per una EDO lineare del primo ordine

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = & f(x) \\ y(x_0) = & y_0 \end{cases}$$

Teorema 1.3.4 (Il problema di Cauchy per EDO lineari del primo ordine)**.** *Sia $y'(x)+a(x)y(x) = f(x)$ con $x \in [a,b]$ e $a(x), f(x)$ continue in $[a,b]$, allora il problema di Cauchy associato ammette una soluzione unica definita su tutto l'intervallo $[a,b]$ ed è data da*

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} + e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,ds} f(s)ds$$

DIMOSTRAZIONE

Premettiamo che il problema di Cauchy per EDO lineari ci permette di determinare la costante c che compare nell'integrale generale dell'omogenea associata, imponendo una condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ con $x_0 \in [a,b]$.
Definiamo la primitiva $A(x)$ attraverso l'integrale definito con estremo inferiore x_0:

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, questa scelta implica che:

$$A(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} a(t)\,dt = 0$$

Sostituendo tale primitiva nella soluzione generale $y(x) = ce^{-A(x)}$, otteniamo per $x = x_0$:

$$y(x_0) = ce^{-A(x_0)} = ce^0 = c$$

Quindi, moltiplichiamo ambedue i membri della EDO per il fattore integrante $e^{A(x)}$:

$$e^{A(x)}y'(x) + a(x)e^{A(x)}y(x) = e^{A(x)}f(x)$$

Osserviamo che il membro di sinistra è lo sviluppo della derivata del prodotto tra la funzione incognita e il fattore integrante:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{A(x)}y(x)\right] = e^{A(x)}f(x)$$

Integrando entrambi i membri rispetto alla variabile di integrazione s nell'intervallo $[x_0, x]$ otteniamo:

$$\int_{x_0}^{x} e^{A(s)}y(s)ds = \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}f(s)\,ds$$

Applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale al membro di sinistra:

$$\left[e^{A(s)}y(s)\right]_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}f(s)\,ds$$

$$e^{A(x)}y(x) - e^{A(x_0)}y(x_0) = \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}f(s)\,ds$$

Poiché abbiamo definito $A(x_0) = 0$, ne consegue che $e^{A(x_0)} = e^0 = 1$. Sostituendo la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$:

$$e^{A(x)}y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(s)e^{A(s)}\,ds$$

Isolando $y(x)$ e moltiplicando tutto per $e^{-A(x)}$, si ottiene la formula risolutiva esplicita:

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} + e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)ds} f(s)ds = e^{-A(x)}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s)e^{A(s)}\,ds\right]$$

$\square$

1.3.5 Intervallo massimale

- **Soluzione in piccolo (locale):** La soluzione esiste ed è definita solo in un intorno del punto iniziale $x_0 \in I$, ovvero l'intervallo in cui è definita l'EDO;
- **Soluzione in grande (globale):** La soluzione esiste ed è definita su tutto l'intervallo di definizione delle funzioni coefficienti, che può essere tutto $\mathbb{R}$ o un intervallo più ampio.

L'intervallo massimale di esistenza di una soluzione è il più grande intervallo contenente il punto iniziale x_0 nel quale la soluzione è definita e soddisfa la EDO.
Può essere limitato o illimitato:

- **Può essere tutto** $\mathbb{R}$ se le funzioni coefficienti $a(x)$ e $f(x)$ sono definite e continue su tutto $\mathbb{R}$ e la soluzione non presenta singolarità.
- **Può essere limitato** se:
  - Le funzioni coefficienti non sono definite su tutto $\mathbb{R}$ (ad esempio: se $a(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, allora $I = (0, +\infty)$)
  - La soluzione presenta singolarità o comportamenti asintotici che impediscono il prolungamento

Da cosa dipende:

1. Dall'**intervallo di definizione** delle funzioni $a(x)$ e $f(x)$
2. Dal **comportamento della soluzione** stessa (presenza di singolarità, esplosioni in tempo finito)
3. Dalle **condizioni iniziali** (x_0, y_0) che possono influenzare quando e dove la soluzione cessa di esistere

L'intervallo massimale è determinato dalla forma delle funzioni coinvolte nell'EDO e dal punto iniziale scelto. Non è detto che le soluzioni espresse dall'integrale generale dell'equazione siano tutte definite sullo stesso insieme al variare dei parametri o delle condizioni iniziali.

- **Fisico:** Il problema di Cauchy rappresenta un'evoluzione rispetto al tempo (o rispetto alla variabile indipendente x), che è una variabile continua. Quindi se è trovato un tempo in cui il sistema perde significato non ha senso considerare il prima o il dopo. Allora viene considerato l'intervallo massimale contenente l'istante iniziale in cui il sistema ha significato.
- **Matematico:** Non è possibile considerare una soluzione $y(x)$ al PdC su intervalli disgiunti. Per questo, la condizione iniziale determina l'esistenza della soluzione e l'unicità di essa nell'insieme che la contiene.

1.4 EDO a variabili separabili

Definizione 1.4.1 (EDO a variabili separabili del primo ordine)**.** *Una EDO a variabili separabili in forma normale si scrive nella forma*

$$y'(x) = f(x)g(y(x))$$

dove $f : I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : J \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono continue nei loro domini.

Nota (Una EDO lineare omogenea del primo ordine è sempre EDO a variabili separabili)**.** Una EDO lineare omogenea associata del primo ordine ha la forma:

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

Riscriviamola esplicitamente come:

$$\frac{dy}{dx} = -a(x)y(x)$$

Questa può essere separata dividendo per y (assumendo $y \neq 0$) e moltiplicando per dx:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)\,dx$$

Ora le variabili sono separate: a sinistra compare solo y, a destra solo x. Integrando entrambi i membri:

$$\int \frac{dy}{y} = \int -a(x)\,dx \Rightarrow \ln|y| = -A(x) + c$$

dove $A(x) = \int a(x)\,dx$. Esponenziando:

$$y(x) = ce^{-A(x)}$$

Quindi, una EDO lineare omogenea del primo ordine è sempre riconducibile alla forma separabile.

Teorema 1.4.1 (Algoritmo per la separazione delle variabili)**.** *Partendo da* $y'(x) = f(x)g(y(x))$

1. Determina eventuali $\bar{y} \in \mathbb{R}$ per cui $g(\bar{y}) = 0$ dove $y(x) = \bar{y}$ è la soluzione del PdC. Queste sono le soluzioni singolari della EDO;

2. Si considera $y \neq \bar{y}$ si divide tutto per $g(y(x))$ seperando, quindi, la EDO (dove $g(y(x)) \neq 0$ dato che $y \neq \bar{y}$)

$$\frac{y'(x)}{g(y(x)} = \frac{f(x)\cancel{g(y(x)}}{\cancel{g(y(x)}}$$

3. Si integra ambo ai lati per x per ottenere le soluzioni

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,\mathrm{d}x \;=\; \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

4. Si usa la regola della sostituzione ponendo $y = y(x)$ e $\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y \;=\; \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

5. Sia $G(x)$ la primitiva di $\frac{1}{g(y)}$ e sia $F(x)$ di $f(x)$

$$G(x) = F(x) + c$$

6. Per concludere, si esplicita $y(x)$ è la soluzione del PdC, con G invertibile si ha

$$y(x) = G^{-1}(x)[F(x) + c]$$

□

1.4.1 Le soluzioni singolari

Le soluzioni singolari sono soluzioni della EDO che non sono ottenibili dall'integrale generale per nessun valore della costante arbitraria c.
Si individuano attraverso le equazioni a variabili separabili della forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y(x))$$

Le soluzioni singolari si ottengono dagli zeri della funzione $g(y(x))$. Se $g(y_0) = 0$, allora $y(x) = y_0$ (funzione costante) è una soluzione dell'equazione.
Durante la separazione delle variabili, quando scriviamo:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

dividiamo per $g(y)$, e questa operazione è valida solo se $g(y) \neq 0$. Pertanto, le soluzioni corrispondenti a $g(y) = 0$ vengono perse nel processo di separazione e devono essere verificate separatamente.
Le soluzioni singolari sono importanti perché la loro presenza può influenzare l'unicità delle soluzioni di problemi di Cauchy, infatti rappresentano soluzioni effettive dell'EDO.

1.5 EDO del secondo ordine

Definizione 1.5.1 (EDO lineare completa del secondo ordine)**.** *Una EDO lineare del secondo ordine viene rappresentata nella forma*

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

dove a_i (con $i = 0, 1, 2$)e $f(x)$ sono costanti (ovvero appartengono a $C^0(I)$)

Definizione 1.5.2. *Basandoci sulla forma della EDO lineare del secondo ordine, ponendo $a_2(x) = 1$, possiamo scrivere l'EDO in forma nomale e la sua omogenea associata*

1. $$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

2. $$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

Per calcolare una EDO lineare del II ordine, come per una EDO del primo ordine, bisogna trovare l'integrale generale dell'omogenea associata e sommarlo all'integrale particolare della non omogenea, ottenendo l'integrale della completa:

$$\int generale \ = \int omogenea + \int particolare$$

Nota. Lo spazio delle soluzioni di una EDO di ordine n = 2 è uno spazio vettoriale di dimensione n = 2 per trovare una soluzione qualsiasi dell'omogenea servono n = 2 soluzioni linearmente indipendenti.

1.5.1 La struttura dello spazio delle soluzioni della EDO lineare di secondo ordine omogenea associata

Spazio delle soluzioni

Se otteniamo come soluzioni su $I = [a, b]$ della omogenea associata $y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x) = 0$ le funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ possiamo dire che entrambe sono linearmente indipendenti e che ogni altra soluzione è una combinazione lineare delle due "funzioni-soluzioni".

Il motivo è la proprietà della linearità della EDO: dato un operatore $L : C^n(I) \to C^0(I)$ che associa ad ogni funzione $\phi \in C^n(I)$ una funzione continua $L(\phi(x)) := a_n\phi^n(x) + a_{n-1}\phi^{n-1}(x) + ... + a_1\phi'(x) + a_0\phi(x)$. Segue che se ϕ_1 e ϕ_2 sono soluzioni, anche la loro combinazione lineare è soluzione, allora l'integrale generale della omogenea associata è rappresantabile come

$$y_{\text{om}}(x, c_1, c_2) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

La EDO lineare omogenea del secondo ordine può essere scritta in forma compatta tramite l'operatore

$$L(\phi(x)) := a\phi''(x) + b\phi'(x) + c\phi(x), \qquad \phi \in C^2(I)$$

Tutto ciò significa che risolvere $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ significa trovare la y tale $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = L(y(x)) = 0$.

Wroskiano: indipendenza lineare

Definizione 1.5.3 (Matrice Wroskiana). *Date due funzioni differenziabili $y_1(x)$ e $y_2(x)$, la matrice Wroskiana è*

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Nota. Il determinante della matrice Wronskiana è uno "strumento" che permette di verificare se due funzioni sono linearmente indipendenti su un intervallo.

Definizione 1.5.4 (Wroskiano). *Il determinante Wroskiano o Wronskiano è il determinante di una matrice formata da due funzioni e dalle loro derivate prime: $W[\ y_1, y_2]\ = det(W(x)) =$*

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

$= y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$

Se il Wronskiano è diverso da zero in almeno un punto dell'intervallo, allora le funzioni sono linearmente indipendenti su quell'intervallo. In altre parole:

$$W[y_1, y_2](x) \neq 0 \text{ per qualche } x \in I \quad \Longleftrightarrow \quad y_1, y_2 \text{ sono linearmente indipendenti su } I$$

Sistema fondamentale di soluzioni

Definizione 1.5.5 (Sistema fondamentale di soluzioni). *Un insieme $\{y_1(x), y_2(x)\}$ di soluzioni di una EDO lineare omogenea del secondo ordine si dice sistema fondamentale di soluzioni su un intervallo I se:*

1. *y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti su I;*
2. *ogni soluzione dell'equazione omogenea può essere espressa come combinazione lineare di y_1 e y_2.*

Il sistema fondamentale di soluzioni è importante perché fornisce una base completa per lo spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea. In particolare:

- **Analogia con l'algebra lineare**: Così come ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ può essere rappresentato come combinazione lineare di una base (ad esempio, $(1, 2) = 1\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$ in $\mathbb{R}^2$), ogni soluzione di un'EDO lineare omogenea di ordine n può essere espressa come combinazione lineare di n soluzioni linearmente indipendenti;
- **Struttura di spazio vettoriale**: Lo spazio delle soluzioni di un'EDO lineare omogenea del secondo ordine ha dimensione 2. Pertanto, due soluzioni linearmente indipendenti formano una base di questo spazio;
- **Semplicità**: Per caratterizzare completamente lo spazio delle soluzioni, è sufficiente trovare sole due soluzioni linearmente indipendenti, anziché tutte le infinite soluzioni.

1.5.2 Struttura dell'integrale generale della EDO lineare del secondo ordine omogenea associata

La forma della omogenea associata è $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$

1. Se $b = c = 0$ (identicamente nulle) l'equazione diventa $ay'' = 0$, quindi $y'(x) = c_1$ integrando si ottiene $y_{om}(x) = z(x, c_1, c_2) = c_1 + c_2$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
2. Se b e c non sono contemporaneamente nulle, per trovare l'integrale generale della omogenea viene associata alla EDO un'equazione algebrica $p(\lambda)$ del secondo ordine in $\mathbb{C}$ della forma

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Formalmente le soluzioni di $p(\lambda)$ sono date dalla formula risolutiva $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ che ci permettono di definire tre disinti casi:

1. **Caso** $\Delta > 0$
   Soluzioni reali distinte: $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$
   $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$
   L'integrale generale dell'omogenea:

$$y_{om}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. **Caso** $\Delta = 0$
   Soluzioni reali coincidenti: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{-b}{2a} \in \mathbb{R}$
   L'integrale generale dell'omogenea:

$$y_{om}(x) = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x)$$

3. **Caso** $\Delta < 0$
   Soluzioni complesse coniugate: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ con $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = -\frac{b}{2a}$ e $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$
   L'integrale generale dell'omogenea:

$$y_{om}(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

Teorema 1.5.1 (λ è radice del polinomio caratteristico se e solo se $e^{\lambda x}$ è soluzione dell'omogenea associata)**.** *Sia $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ il polinomio caratteristico associato alla EDO lineare omogenea del secondo ordine a coefficenti costanti $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$.*
Allora, $\lambda \in \mathbb{C}$ è radice di $p(\lambda)$ se e solo se la funzione $y(x) = e^{\lambda x}$ è soluzione dell'equazione omogenea.

DIMOSTRAZIONE
Si consideri l'operatore differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$L(y) = ay'' + by' + cy$$

Vogliamo dimostrare che una funzione esponenziale del tipo $y(x) = e^{\lambda x}$ è soluzione dell'equazione omogenea $L(y) = 0$ se e solo se λ è radice del polinomio caratteristico $p(\lambda)$.
Sostituiamo la funzione $y(x) = e^{\lambda x}$ nell'operatore L. Calcoliamo innanzitutto le derivate della funzione:

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Sostituendo nell'espressione dell'operatore $L(e^{\lambda x})$ otteniamo:

$$L(e^{\lambda x}) = a(\lambda^2 e^{\lambda x}) + b(\lambda e^{\lambda x}) + c(e^{\lambda x})$$

Possiamo ora raccogliere il termine comune $e^{\lambda x}$:

$$L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c)$$

Definiamo il polinomio caratteristico come $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$. L'espressione diventa:

$$L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} \cdot p(\lambda)$$

Poiché la funzione esponenziale $e^{\lambda x}$ non è mai nulla per alcun valore reale di x, l'uguaglianza $L(e^{\lambda x}) = 0$ è soddisfatta se e solo se il polinomio è nullo:

$$L(e^{\lambda x}) = 0 \iff p(\lambda) = 0$$

□

E' necessario studiare l'equazione caratteristica anche in campo complesso per i seguenti motivi:

1. **Esistenza delle soluzioni**: il teorema fondamentale dell'algebra garantisce che ogni equazione polinomiale ha sempre soluzioni nel campo complesso $\mathbb{C}$, mentre nel campo reale $\mathbb{R}$ alcune equazioni potrebbero non avere soluzioni;

2. **Completezza della soluzione**: per costruire la soluzione generale completa dell'EDO, abbiamo bisogno di tutte le radici dell'equazione caratteristica, incluse quelle complesse.

Considerando l'equazione caratteristica quadratica:

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Possiamo dire che per il teorema fondamentale dell'algebra ci viene garantito che esistono sempre esattamente 2 radici in $\mathbb{C}$ (contate con molteplicità). Più semplicemente, il teorema garantisce che non possiamo mai avere assenza di soluzioni: l'equazione caratteristica ha sempre radici, anche se potrebbero essere complesse.

Teorema 1.5.2 (Integrale generale della EDO lineare del secondo ordine omogenea associata a coefficenti costanti)**.** *L'integrale generale della EDO lineare del secondo ordine omogenea associata a coefficenti costanti $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$ è data da*

$$y_{om}(x, c_1, c_2) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$y_1(x), y_2(x)$ sono determinate dai tre casi distinti.

DIMOSTRAZIONE
Caso 1 $\Delta > 0$ (Due radici reali distinte)
In questo caso il discriminante è positivo:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0,$$

quindi le radici dell'equazione caratteristica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ sono due valori reali distinti: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dove $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Le soluzioni della EDO lineare omogenea di secondo grado a coefficienti costanti

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

sono

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}.$$

Passo 1: Verifica dell'indipendenza lineare tramite Wronskiana.
Per dimostrare che $y_1(x)$ e $y_2(x)$ formano un sistema fondamentale di soluzioni, dobbiamo verificare che siano linearmente indipendenti. Questo si fa calcolando il determinante della matrice Wronskiana:

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Calcoliamo le derivate:

$$y_1'(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x}, \quad y_2'(x) = \lambda_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Sostituiamo nella Wronskiana:

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}.$$

Calcoliamo il determinante usando la regola $\det = ad - bc$:

$$\begin{aligned} W(y_1(x), y_2(x)) &= e^{\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_2 x} \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \\ &= \lambda_2 e^{\lambda_1 x + \lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x + \lambda_2 x} \\ &= \lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} - \lambda_1 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}. \end{aligned}$$

Poiché $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (per $\Delta > 0$), abbiamo $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, e poiché $e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} > 0$ per ogni x, concludiamo che

$$W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0.$$

Quindi $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono linearmente indipendenti.
Passo 2: Dimostrazione che ogni soluzione è combinazione lineare di $y_1(x)$ e $y_2(x)$.
Sia $y_{\text{om}}(x)$ una soluzione qualsiasi dell'equazione omogenea. Scriviamo $y_{\text{om}}(x)$ nella forma

$$y_{\text{om}}(x) = e^{\lambda_1 x} u(x),$$

dove $u(x)$ è una funzione da determinare.
Poiché $y_{\text{om}}(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale, deve soddisfare:

$$a(e^{\lambda_1 x} u(x))'' + b(e^{\lambda_1 x} u(x))' + c(e^{\lambda_1 x} u(x)) = 0.$$

Calcoliamo la prima derivata usando la regola del prodotto:

$$(e^{\lambda_1 x} u(x))' = (e^{\lambda_1 x})' u(x) + e^{\lambda_1 x} u'(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} u(x) + e^{\lambda_1 x} u'(x).$$

Calcoliamo la seconda derivata, applicando nuovamente la regola del prodotto:

$$\begin{aligned} (e^{\lambda_1 x} u(x))'' &= (\lambda_1 e^{\lambda_1 x} u(x) + e^{\lambda_1 x} u'(x))' \\ &= (\lambda_1 e^{\lambda_1 x} u(x))' + (e^{\lambda_1 x} u'(x))' \\ &= \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} u(x) + \lambda_1 e^{\lambda_1 x} u'(x) + \lambda_1 e^{\lambda_1 x} u'(x) + e^{\lambda_1 x} u''(x) \\ &= \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} u(x) + 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} u'(x) + e^{\lambda_1 x} u''(x). \end{aligned}$$

Sostituiamo nell'equazione differenziale:

$$a[\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} u(x) + 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} u'(x) + e^{\lambda_1 x} u''(x)] + b[\lambda_1 e^{\lambda_1 x} u(x) + e^{\lambda_1 x} u'(x)] + c[e^{\lambda_1 x} u(x)] = 0.$$

Distribuiamo i coefficienti:

$$a\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} u(x) + 2a\lambda_1 e^{\lambda_1 x} u'(x) + a e^{\lambda_1 x} u''(x) + b\lambda_1 e^{\lambda_1 x} u(x) + b e^{\lambda_1 x} u'(x) + c e^{\lambda_1 x} u(x) = 0.$$

Mettiamo in evidenza $e^{\lambda_1 x}$ (che è sempre > 0):

$$e^{\lambda_1 x}[(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)u(x) + au''(x) + (2a\lambda_1 + b)u'(x)] = 0.$$

Dividendo per $e^{\lambda_1 x}$:

$$(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)u(x) + au''(x) + (2a\lambda_1 + b)u'(x) = 0.$$

Ora, λ_1 è soluzione dell'equazione caratteristica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, quindi

$$a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c = 0.$$

Pertanto l'equazione si riduce a:

$$au''(x) + (2a\lambda_1 + b)u'(x) = 0.$$

Dividiamo per a (con $a \neq 0$):

$$u''(x) + \left(2\lambda_1 + \frac{b}{a}\right) u'(x) = 0.$$

Dall'equazione caratteristica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, dividendo per a:

$$\lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} = 0.$$

Per le formule di Viète (o fattorizzando), sappiamo che se λ_1 e λ_2 sono le due radici:

$$\lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Espandendo il prodotto a destra:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \lambda_2\lambda - \lambda_1\lambda + \lambda_1\lambda_2 = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2.$$

Uguagliando i coefficienti:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}.$$

Quindi:

$$2\lambda_1 + \frac{b}{a} = 2\lambda_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) = 2\lambda_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_1 - \lambda_2.$$

L'equazione diventa:

$$u''(x) + (\lambda_1 - \lambda_2)u'(x) = 0.$$

Riscriviamo come:

$$u''(x) - (\lambda_2 - \lambda_1)u'(x) = 0.$$

Poniamo $v(x) = u'(x)$. Allora $v'(x) = u''(x)$, e l'equazione diventa:

$$v'(x) - (\lambda_2 - \lambda_1)v(x) = 0.$$

Questa è una EDO del primo ordine a variabili separabili. Poniamo $k = \lambda_2 - \lambda_1$:

$$v'(x) - kv(x) = 0.$$

Riscriviamo:

$$v'(x) = kv(x).$$

Separando le variabili (per $v(x) \neq 0$):

$$\frac{dv}{v} = k\,dx.$$

Integriamo entrambi i membri:

$$\int \frac{dv}{v} = \int k\,dx \implies \ln|v| = kx + C_0$$

$$|v| = e^{kx+C_0} = e^{C_0} \cdot e^{kx}.$$

Ponendo $c = \pm e^{C_0}$:

$$v(x) = c \cdot e^{kx} = c \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}.$$

Ricordando che $v(x) = u'(x)$:

$$u'(x) = c \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}.$$

Integriamo per trovare $u(x)$:

$$u(x) = \int c \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}\, dx.$$

Calcoliamo l'integrale (ricordando che $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$):

$$u(x) = c \cdot \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + c_2.$$

Poniamo $c_1 = \frac{c}{\lambda_2 - \lambda_1}$:

$$u(x) = c_1 \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sostituiamo in $y_{\text{om}}(x) = e^{\lambda_1 x} u(x)$:

$$\begin{aligned} y_{\text{om}}(x) &= e^{\lambda_1 x}[c_1 \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + c_2] \\ &= c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + c_2 \cdot e^{\lambda_1 x} \\ &= c_1 \cdot e^{\lambda_1 x + \lambda_2 x - \lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_1 x} \\ &= c_1 \cdot e^{\lambda_2 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_1 x}. \end{aligned}$$

Quindi ogni soluzione $y_{\text{om}}(x)$ è una combinazione lineare di $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$.

Caso 2: $\Delta = 0$ (Radice reale doppia)
In questo caso il discriminante è nullo:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0,$$

quindi l'equazione caratteristica ha una radice doppia:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{b}{2a}.$$

Le soluzioni sono

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = x e^{\lambda x}.$$

Passo 1: Verifica dell'indipendenza lineare tramite Wronskiana.
Calcoliamo le derivate:

$$y_1'(x) = \lambda e^{\lambda x},$$
$$y_2'(x) = (x e^{\lambda x})' = (x)' e^{\lambda x} + x(e^{\lambda x})' = e^{\lambda x} + x\lambda e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(1 + \lambda x).$$

Calcoliamo la Wronskiana:

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x}(1 + \lambda x) \end{vmatrix}.$$

Calcoliamo il determinante:

$$\begin{aligned} W(y_1(x), y_2(x)) &= e^{\lambda x} \cdot e^{\lambda x}(1 + \lambda x) - x e^{\lambda x} \cdot \lambda e^{\lambda x} \\ &= e^{2\lambda x}(1 + \lambda x) - \lambda x e^{2\lambda x} \\ &= e^{2\lambda x} + \lambda x e^{2\lambda x} - \lambda x e^{2\lambda x} \\ &= e^{2\lambda x}. \end{aligned}$$

Poiché $e^{2\lambda x} > 0$ per ogni x, concludiamo che

$$W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0.$$

Quindi $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono linearmente indipendenti.
Passo 2: Dimostrazione che ogni soluzione è combinazione lineare di y_1 e y_2.

Sia $y_{\text{om}}(x)$ una soluzione qualsiasi della forma

$$y_{\text{om}}(x) = e^{\lambda x}u(x).$$

Sostituiamo nell'equazione differenziale:

$$a(e^{\lambda x}u(x))'' + b(e^{\lambda x}u(x))' + ce^{\lambda x}u(x) = 0.$$

Calcoliamo la prima derivata:

$$(e^{\lambda x}u(x))' = \lambda e^{\lambda x}u(x) + e^{\lambda x}u'(x).$$

Calcoliamo la seconda derivata:

$$\begin{aligned}(e^{\lambda x}u(x))'' &= (\lambda e^{\lambda x}u(x) + e^{\lambda x}u'(x))' \\ &= \lambda^2 e^{\lambda x}u(x) + \lambda e^{\lambda x}u'(x) + \lambda e^{\lambda x}u'(x) + e^{\lambda x}u''(x) \\ &= \lambda^2 e^{\lambda x}u(x) + 2\lambda e^{\lambda x}u'(x) + e^{\lambda x}u''(x).\end{aligned}$$

Sostituiamo nell'equazione:

$$a[\lambda^2 e^{\lambda x}u(x) + 2\lambda e^{\lambda x}u'(x) + e^{\lambda x}u''(x)] + b[\lambda e^{\lambda x}u(x) + e^{\lambda x}u'(x)] + ce^{\lambda x}u(x) = 0.$$

Mettiamo in evidenza $e^{\lambda x}$:

$$e^{\lambda x}[(a\lambda^2 + b\lambda + c)u(x) + au''(x) + (2a\lambda + b)u'(x)] = 0.$$

Poiché λ è soluzione dell'equazione caratteristica, $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, quindi:

$$au''(x) + (2a\lambda + b)u'(x) = 0.$$

Dividiamo per a:

$$u''(x) + \left(2\lambda + \frac{b}{a}\right)u'(x) = 0.$$

Poiché $\lambda = -\frac{b}{2a}$:

$$2\lambda = 2 \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a}.$$

Quindi:

$$2\lambda + \frac{b}{a} = -\frac{b}{a} + \frac{b}{a} = 0.$$

L'equazione diventa:

$$u''(x) = 0.$$

Poniamo $v(x) = u'(x)$. Allora:

$$v'(x) = 0.$$

Integrando:

$$v(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi $u'(x) = c$. Integriamo nuovamente:

$$u(x) = \int c\,dx = cx + c_2 = c_2 + c_1 x,$$

dove abbiamo rinominato $c = c_1$ e la costante di integrazione è c_2.
Quindi:

$$u(x) = c_1 + c_2 x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sostituiamo in $y_{\mathrm{om}}(x) = e^{\lambda x} u(x)$:

$$y_{\mathrm{om}}(x) = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}.$$

Quindi ogni soluzione $y_{\mathrm{om}}(x)$ è una combinazione lineare di $y_1(x) = e^{\lambda x}$ e $y_2(x) = xe^{\lambda x}$.

Caso 3: $\Delta < 0$ (Due radici complesse coniugate)
In questo caso il discriminante è negativo:

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0,$$

quindi l'equazione caratteristica ha due radici complesse coniugate:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,$$

dove

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \in \mathbb{R}.$$

Le soluzioni complesse sono

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

Passo 1: Verifica dell'indipendenza lineare tramite Wronskiana.
Calcoliamo le derivate:

$$y_1'(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x}, \quad y_2'(x) = \lambda_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Calcoliamo la Wronskiana:

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}.$$

Calcoliamo il determinante:

$$\begin{aligned} W(y_1(x), y_2(x)) &= e^{\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_2 x} \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \\ &= \lambda_2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} - \lambda_1 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}. \end{aligned}$$

Calcoliamo $\lambda_1 + \lambda_2$ e $\lambda_2 - \lambda_1$:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (\alpha + i\beta) + (\alpha - i\beta) = 2\alpha,$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = (\alpha - i\beta) - (\alpha + i\beta) = -2i\beta.$$

Quindi:

$$W(y_1(x), y_2(x)) = -2i\beta \cdot e^{2\alpha x} \neq 0,$$

poiché $\beta \neq 0$ (essendo $\Delta < 0$).
Quindi $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono linearmente indipendenti.
Passo 2: Dimostrazione che ogni soluzione è combinazione lineare di y_1 e y_2.
Sia $y_{om}(x)$ una soluzione qualsiasi della forma

$$y_{om}(x) = e^{\alpha x} u(x).$$

Sostituiamo nell'equazione differenziale:

$$a[e^{\alpha x} u(x)]'' + b[e^{\alpha x} u(x)]' + c e^{\alpha x} u(x) = 0.$$

Calcoliamo la prima derivata:

$$[e^{\alpha x} u(x)]' = \alpha e^{\alpha x} u(x) + e^{\alpha x} u'(x).$$

Calcoliamo la seconda derivata:

$$\begin{aligned}[e^{\alpha x}u(x)]'' &= [\alpha e^{\alpha x}u(x) + e^{\alpha x}u'(x)]' \\ &= \alpha^2 e^{\alpha x}u(x) + \alpha e^{\alpha x}u'(x) + \alpha e^{\alpha x}u'(x) + e^{\alpha x}u''(x) \\ &= \alpha^2 e^{\alpha x}u(x) + 2\alpha e^{\alpha x}u'(x) + e^{\alpha x}u''(x).\end{aligned}$$

Sostituiamo nell'equazione:

$$a[\alpha^2 e^{\alpha x}u(x) + 2\alpha e^{\alpha x}u'(x) + e^{\alpha x}u''(x)] + b[\alpha e^{\alpha x}u(x) + e^{\alpha x}u'(x)] + ce^{\alpha x}u(x) = 0.$$

Mettiamo in evidenza $e^{\alpha x}$:

$$e^{\alpha x}[au''(x) + (2a\alpha + b)u'(x) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)u(x)] = 0.$$

Dividiamo per $e^{\alpha x}$ e per a:

$$u''(x) + \left(2\alpha + \frac{b}{a}\right)u'(x) + \left(\alpha^2 + \frac{b\alpha}{a} + \frac{c}{a}\right)u(x) = 0.$$

Sostituiamo $\alpha = -\frac{b}{2a}$:

$$2\alpha + \frac{b}{a} = 2\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right) + \frac{b}{a} = -\frac{b}{a} + \frac{b}{a} = 0.$$

Calcoliamo il coefficiente di $u(x)$:

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \frac{b\alpha}{a} + \frac{c}{a} &= \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right) + \frac{c}{a} \\ &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{c}{a} \\ &= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}.\end{aligned}$$

Poiché $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$-b^2 + 4ac = -\Delta.$$

Quindi:

$$\alpha^2 + \frac{b\alpha}{a} + \frac{c}{a} = \frac{-\Delta}{4a^2}.$$

Ricordando che $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$, abbiamo:

$$\beta^2 = \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = \frac{-\Delta}{4a^2}.$$

L'equazione diventa:

$$u''(x) + \beta^2 u(x) = 0.$$

Questa è l'equazione dell'oscillatore armonico, la cui soluzione generale è:

$$u(x) = c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sostituiamo in $y_{\text{om}}(x) = e^{\alpha x}u(x)$:

$$y_{\text{om}}(x) = e^{\alpha x}[c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)].$$

Quindi l'integrale generale in forma reale è:

$$y_{\text{om}}(x) = e^{\alpha x}[c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)].$$

Questo può essere scritto come combinazione lineare di:

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

□

1.5.3 Struttura di una curva integrale di una EDO lineare del secondo ordine completa a coefficenti costanti

Ci sono tre metodi per la ricerca di una curva integrale di una EDO lineare del secondo ordine completa a coefficenti costanti di partenza in modo da verificare completamente le condizioni iniziali: ad occhio, con il metodo di variazione delle costanti e con il metodo di somiglianza.

Metodo di somiglianza

Si analizza le fattezze del termine noto per intuire le soluzioni particolari tramite una tabella in cui è presente un riepilogo di tutti i casi dove si trova la soluzione per similitudine.
Data una EDO lineare del secondo ordine a coefficenti costanti $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$ è necessario distinguere i seguenti casi

Termine noto $f(x)$	Soluzione $y_p(x)$	Modifiche necessarie
$e^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}$	• Moltiplicare per x se α è radice semplice, moltiplicare per x^2 se α è radice doppia
$\cos(\beta x)$ o $\sin(\beta x)$	$A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$	• Moltiplicare per x se $i\beta$ è radice
$P_n(x)$ (polinomio grado n)	$Q_n(x)$ (polinomio grado n)	• Moltiplicare per x se 0 è radice semplice, moltiplicare per x^2 se 0 è radice doppia
$e^{\alpha x}P_n(x)$	$e^{\alpha x}Q_n(x)$	• Applicare le regole come sopra per α
$e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ o $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$e^{\alpha x}[A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)]$	• Moltiplicare per x se $\alpha \pm i\beta$ è radice

Metodo di variazione delle costanti

Il metodo delle variazioni delle costanti ha la soluzione particolare della EDO lineare del secondo ordine a coefficenti costanti della forma $\bar{y}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ dove $x \in I = [a, b]$ e $c_{1,2} \in C^2(I)$ sono da determinare.
La formula che si applica per la soluzione particolare della EDO del primo ordine si estende di una dimensione per l'aggiunta $c_2(x)y_2(x)$.
Inoltre, imponendo che la funzione della forma $\bar{y}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ sia soluzione particolare, sarà ottenuto un sistema nelle ipotesi c_1' e c_2' che sarà risolto tramite la regola di Cramer (teoria dei sistemi lineari).

DIMOSTRAZIONE
Consideriamo la EDO lineare del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti:

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x), \quad a \neq 0$$

Vogliamo trovare una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ di questa equazione. Quindi, supponiamo di conoscere due soluzioni linearmente indipendenti $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dell'equazione omogenea associata e cerchiamo una soluzione particolare della forma:

$$\bar{y}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

dove $c_1(x)$ e $c_2(x)$ sono funzioni incognite da determinare (non più costanti come nell'omogenea).
Passo 1: Deriviamo $\bar{y}(x)$ rispetto a x applicando la regola del prodotto.

$$\bar{y}'(x) = \frac{d}{dx}[c_1(x)y_1(x)] + \frac{d}{dx}[c_2(x)y_2(x)]$$

$$\bar{y}'(x) = c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

Passo 2: Prima condizione (trucco di Lagrange).

Per semplificare i calcoli successivi, imponiamo la condizione:

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$$

Questa è una scelta arbitraria che ci permette di eliminare alcuni termini. La derivata prima diventa:

$$\bar{y}'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

Passo 3: Calcolo della derivata seconda. Deriviamo nuovamente $\bar{y}'(x)$ applicando la regola del prodotto:

$$\bar{y}''(x) = \frac{d}{dx}\left[c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)\right]$$

$$\bar{y}''(x) = \frac{d}{dx}[c_1(x)y_1'(x)] + \frac{d}{dx}[c_2(x)y_2'(x)]$$

$$\bar{y}''(x) = c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x)$$

Passo 4: Sostituzione nell'EDO.
Sostituiamo $\bar{y}(x)$, $\bar{y}'(x)$ e $\bar{y}''(x)$ nell'equazione differenziale originale:

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

Sostituiamo:

$$\begin{gathered} a\left[c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x)\right] \\ +b\left[c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)\right] \\ +c\left[c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)\right] = f(x) \end{gathered}$$

Passo 5: Riordino dei termini.
Distribuiamo i coefficienti a, b e c:

$$\begin{gathered} ac_1'(x)y_1'(x) + ac_1(x)y_1''(x) + ac_2'(x)y_2'(x) + ac_2(x)y_2''(x) \\ +bc_1(x)y_1'(x) + bc_2(x)y_2'(x) \\ +cc_1(x)y_1(x) + cc_2(x)y_2(x) = f(x) \end{gathered}$$

Raccogliamo i termini con $c_1(x)$ e con $c_2(x)$:

$$\begin{gathered} c_1(x)\left[ay_1''(x) + by_1'(x) + cy_1(x)\right] \\ +c_2(x)\left[ay_2''(x) + by_2'(x) + cy_2(x)\right] \\ +a\left[c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)\right] = f(x) \end{gathered}$$

Passo 6: Semplificazione.
Poiché $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, abbiamo:

$$ay_1''(x) + by_1'(x) + cy_1(x) = 0$$

$$ay_2''(x) + by_2'(x) + cy_2(x) = 0$$

Quindi i primi due termini si annullano:

$$c_1(x)\cdot 0 + c_2(x)\cdot 0 + a\left[c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)\right] = f(x)$$

L'equazione si riduce a:

$$a\left[c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)\right] = f(x)$$

Dividendo entrambi i membri per $a \neq 0$:

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{a}$$

Passo 7: Sistema di equazioni.
Otteniamo il sistema lineare 2×2 nelle incognite $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = \dfrac{f(x)}{a} \end{cases}$$

Passo 8: Verifica dell'esistenza e unicità della soluzione.
La matrice dei coefficienti del sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

Il determinante di questa matrice è:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = W(x) \neq 0$$

Poiché $W(x) \neq 0$ (le soluzioni y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti), il sistema ammette un'unica soluzione per le incognite $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$.
Passo 9: Risoluzione del sistema con la regola di Cramer.
Applichiamo la regola di Cramer per trovare $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$.
Per $c_1'(x)$:
Secondo la regola di Cramer, $c_1'(x)$ si ottiene sostituendo la prima colonna della matrice dei coefficienti con il vettore dei termini noti e dividendo per il determinante $W(x)$:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \dfrac{f(x)}{a} & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)}$$

Calcoliamo il determinante al numeratore:

$$\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \dfrac{f(x)}{a} & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0 \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot \frac{f(x)}{a} = -\frac{y_2(x)f(x)}{a}$$

Quindi:

$$c_1'(x) = \frac{-\dfrac{y_2(x)f(x)}{a}}{W(x)} = -\frac{y_2(x)f(x)}{a \cdot W(x)}$$

Per $c_2'(x)$:
Secondo la regola di Cramer, $c_2'(x)$ si ottiene sostituendo la seconda colonna della matrice dei coefficienti con il vettore dei termini noti e dividendo per il determinante $W(x)$:

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \dfrac{f(x)}{a} \end{vmatrix}}{W(x)}$$

Calcoliamo il determinante al numeratore:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \dfrac{f(x)}{a} \end{vmatrix} = y_1(x) \cdot \frac{f(x)}{a} - 0 \cdot y_1'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{a}$$

Quindi:

$$c_2'(x) = \frac{\dfrac{y_1(x)f(x)}{a}}{W(x)} = \frac{y_1(x)f(x)}{a \cdot W(x)}$$

Passo 10: Integrazione.
Per trovare $c_1(x)$ e $c_2(x)$, integriamo $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$ rispetto a x:

$$c_1(x) = \int c_1'(x)\,dx = \int \left(-\frac{y_2(x)f(x)}{a \cdot W(x)}\right) dx = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{a \cdot W(x)}\,dx$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x)\,dx = \int \frac{y_1(x)f(x)}{a \cdot W(x)}\,dx$$

Non aggiungiamo costanti di integrazione perché stiamo cercando una soluzione particolare della EDO non omogenea, non la soluzione generale. Le costanti arbitrarie saranno presenti nella soluzione dell'omogenea.
Passo 11: Soluzione particolare.
La soluzione particolare dell'EDO non omogenea è:

$$\bar{y}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

Esplicitamente:

$$\bar{y}(x) = \left[-\int \frac{y_2(x)f(x)}{a \cdot W(x)}\,dx\right] y_1(x) + \left[\int \frac{y_1(x)f(x)}{a \cdot W(x)}\,dx\right] y_2(x)$$

□

1.5.4 Problema di Cauchy per EDO lineare del secondo ordine a coefficenti costanti

Per una EDO lineare del II ordine della forma $ay''(x)+by'(x)+cy(x) = f(x)$ con a, b, c costanti, $a \neq 0$ e $f(x)$ è continua su un intervallo I dove è presente x_0

$$\begin{cases} ay''(x) + by'(x) + cy(x) & = f(x) \\ y(x_0) & = y_0 \\ y'(x_0) & = y_1 \end{cases}$$

Come si risolve?

1. Trova l'integrale generale dell'equazione omogenea $y_{om}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$
2. Trova una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ usando uno dei metodi descritti
3. Unendo tutto si ottiene $y(x) = y_{om}(x) + \bar{y}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \bar{y}(x)$
4. Bisogna trovare le condizioni iniziali per determinare c_1 e c_2:
   $y(x_0) = c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) + \bar{y}(x_0) = y_0$
   $y'(x_0) = c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) + \bar{y}'(x_0) = y_1$
5. Si risolve il sistema 2x2 con le incognite c_1 e c_2