

Corso di Analisi 2

Domande e risposte al

macro-argomento:

TOPOLOGIA SUGLI SPAZI

Ultima modifica: 13 febbraio 2026

Indice

1 Cenni di algebra lineare sugli spazi vettoriali	3
1.1 Il prodotto scalare e la norma	3
1.1.1 Disuguaglianze fondamentali indotte da una norma	4
1.2 Elementi di topologia indotti da una norma per uno spazio metrico	7
1.2.1 Successione nello spazio metrico	8
1.2.2 Intorno sferico	10
1.3 Classificazione topologica degli insiemi	12
1.3.1 I punti e gli insiemi	12
1.3.2 Punti di accumulazione e dominio	12

Cenni di algebra lineare sugli spazi vettoriali

1.1 Il prodotto scalare e la norma

37. Che cos'è il **prodotto scalare** tra due vettori di \mathbb{R}^n e quali sono le sue **proprietà**?

Definizione 1.1.1 (Prodotto Scalare). *E' una funzione definita come*

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Normalmente, è definito

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}, \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

Le sue proprietà sono:

- **Bilinearità**

$$\langle \alpha \underline{x}_1 + \beta \underline{x}_2, \underline{y} \rangle = \alpha \langle \underline{x}_1, \underline{y} \rangle + \beta \langle \underline{x}_2, \underline{y} \rangle, \quad \forall \underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \text{ e } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Vale lo stesso per $\langle \alpha \underline{y}_1 + \beta \underline{y}_2, \underline{x} \rangle$

- **Simmetria**

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle, \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

- **Positività**

$$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle > 0 \text{ oppure } \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = 0, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

38. Come si definisce la lunghezza (o **norma**) di un vettore x ?

Definizione 1.1.2 (La lunghezza del vettore: Norma). *Sia $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ un vettore, la sua lunghezza o norma è definita come la radice quadrata del prodotto scalare del vettore con se stesso:*

$$\|\underline{x}\| := \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$$

Essendo in \mathbb{R}^n la norma soddisfa la proprietà di positività del prodotto scalare, quindi $\|\underline{x}\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

La radice quadrata risulta importante nella rappresentazione della norma perché siamo in \mathbb{R}^n , di conseguenza, il prodotto scalare di un vettore per se stesso è la somma dei quadrati delle componenti del vettore:

$$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

Il teorema di Pitagora ci fornisce la seguente uguaglianza $a^2 + b^2 = c^2$: bisogna estrarre la radice per trovare la lunghezza effettiva (c) rispettando la proprietà di omogeneità e mantenendo la coerenza con la nostra idea di "scala".

39. Quali sono le **proprietà** della norma?

- **Positività**

$$\|\underline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = 0, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

- **Omogeneità**

$$\|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\|, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- **Disuguaglianza triangolare**

$$\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|, \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

DIMOSTRAZIONE

Sviluppo del quadrato della norma

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle$$

Proprietà di bilinearità e simmetria

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Applicazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ($\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$):

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2$$

Riconoscimento del quadrato di binomio

$$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

Estrazione della radice quadrata (essendo termini non negativi)

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

□

1.1.1 Disuguaglianze fondamentali indotte da una norma

40. Enunciare e dimostrare la **formula di Carnot**.

Definizione 1.1.3 (Formula di Carnot). Per ogni $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, vale:

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 + 2\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$$

La formula di Carnot generalizza il teorema di Pitagora agli spazi vettoriali dotati di prodotto scalare. Essa ci dice come calcolare il quadrato della norma della somma di due vettori in termini delle norme dei singoli vettori e del loro prodotto scalare.

Geometricamente, se pensiamo a \underline{x} e \underline{y} come ai lati di un parallelogramma, $\underline{x} + \underline{y}$ rappresenta la diagonale.

DIMOSTRAZIONE

Partiamo dalla definizione di norma indotta dal prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \|\underline{x} + \underline{y}\|^2 &= \langle \underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y} \rangle \\ &= \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle + \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle + \langle \underline{y}, \underline{y} \rangle \end{aligned}$$

Per la simmetria del prodotto scalare, $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$, quindi:

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 + 2\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$$

Caso particolare

Quando i vettori \underline{x} e \underline{y} sono ortogonali, cioè $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = 0$, la formula di Carnot si riduce al teorema di Pitagora:

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2$$

Questa equivalenza è fondamentale:

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow \|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2$$

□

La formula di Carnot è particolarmente utile nello studio dei limiti di funzioni vettoriali. Quando analizziamo il comportamento di $\|\underline{x} + \underline{y}\|$ in un intorno, possiamo:

- Separare i contributi di $\|\underline{x}\|$ e $\|\underline{y}\|$
- Valutare l'effetto del termine misto $2\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$
- Riconoscere situazioni di ortogonalità dove il calcolo si semplifica

41. Enunciare e dimostrare la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Teorema 1.1.1 (Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz). *Per ogni $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, vale:*

$$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se i vettori sono linearmente dipendenti, ossia:

$$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \Leftrightarrow \underline{x} \text{ e } \underline{y} \text{ sono linearmente dipendenti}$$

Equivalentemente: $\underline{x} = \underline{0}$ oppure $\underline{y} = \underline{0}$ oppure $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $\underline{x} = \lambda \underline{y}$.

DIMOSTRAZIONE

Caso 1: Se $\underline{y} = \underline{0}$, entrambi i membri dell'diseguaglianza sono nulli e la tesi è verificata.

Caso 2: Supponiamo $\underline{y} \neq \underline{0}$. Consideriamo, per ogni $t \in \mathbb{R}$, il vettore:

$$\underline{z}(t) = \underline{x} + t\underline{y}$$

Per la positività della norma, $\|\underline{z}(t)\|^2 \geq 0$ per ogni t . Calcoliamo usando la formula di Carnot:

$$\begin{aligned} \|\underline{z}(t)\|^2 &= \|\underline{x} + t\underline{y}\|^2 \\ &= \|\underline{x}\|^2 + 2t\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + t^2\|\underline{y}\|^2 \end{aligned}$$

Questa è una funzione quadratica in t della forma $at^2 + bt + c$ con:

- $a = \|\underline{y}\|^2 > 0$ (poiché $\underline{y} \neq \underline{0}$)
- $b = 2\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$
- $c = \|\underline{x}\|^2 \geq 0$

Poiché questa parabola è sempre non negativa (con $a > 0$), il discriminante deve soddisfare:

$$\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$$

Sostituendo i valori:

$$\begin{aligned}(2\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle)^2 - 4\|\underline{y}\|^2\|\underline{x}\|^2 &\leq 0 \\ 4\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2 &\leq 4\|\underline{x}\|^2\|\underline{y}\|^2 \\ \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2 &\leq \|\underline{x}\|^2\|\underline{y}\|^2\end{aligned}$$

Prendendo la radice quadrata di entrambi i membri (entrambi non negativi):

$$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$$

□

Caso di uguaglianza: L'uguaglianza $|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$ vale se e solo se $\Delta = 0$. Questo significa che esiste $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\|\underline{x} + t_0 \underline{y}\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x} + t_0 \underline{y} = \underline{0}$$

Da cui:

$$\underline{x} = -t_0 \underline{y}$$

Ponendo $\lambda = -t_0$, otteniamo $\underline{x} = \lambda \underline{y}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Quindi l'uguaglianza vale se e solo se i vettori sono linearmente dipendenti.

C'è uguaglianza se $\underline{y} = \underline{0}$, o se $\underline{x} = \underline{0}$, allora entrambi i membri sono zero oppure $\underline{x} = \lambda \underline{y}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned}|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| &= |\langle \lambda \underline{y}, \underline{y} \rangle| = |\lambda| \cdot \|\underline{y}\|^2 \\ \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| &= \|\lambda \underline{y}\| \cdot \|\underline{y}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{y}\|^2\end{aligned}$$

che sono uguali.

□

Geometricamente, la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz afferma che il valore del prodotto scalare tra due vettori non può superare il prodotto delle loro norme. In altre parole, il grado di allineamento tra i vettori, misurato dal prodotto scalare, è al massimo pari al prodotto delle loro lunghezze. L'uguaglianza si verifica soltanto quando i due vettori hanno la stessa direzione (parallelî) oppure direzioni opposte (antiparalleli).

Poiché il prodotto scalare può essere scritto come

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \|\underline{x}\| \|\underline{y}\| \cos \theta,$$

dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori, la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz si esprime come

$$\|\underline{x}\| \|\underline{y}\| \cos \theta \leq \|\underline{x}\| \|\underline{y}\|.$$

Dividendo entrambi i membri per $\|\underline{x}\| \|\underline{y}\|$ (supposte non nulle), si ottiene

$$\cos \theta \leq 1,$$

che è sempre vera per ogni angolo reale θ .

L'uguaglianza si verifica quando $|\cos \theta| = 1$:

- $\theta = 0$: vettori paralleli ($\lambda > 0$);
- $\theta = \pi$: vettori antiparalleli ($\lambda < 0$).

1.2 Elementi di topologia indotti da una norma per uno spazio metrico

42. Cosa si intende per lo spazio \mathbb{R}^n ?

Dal punto di vista algebrico, \mathbb{R}^n è l'insieme di tutte le ennuple ordinate di numeri reali, ossia un grande contenitore di numeri. Quindi, \mathbb{R}^n è lo spazio dove "vivono" i punti fatti da n coordinate.

43. Come si definisce uno spazio metrico?

Definizione 1.2.1 (Spazio metrico). Una coppia (X, d) è un insieme X a cui si associa una distanza (o metrica) d come $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, ossia ad ogni $(x, y) \in X$ si associa un numero reale non negativo $d(x, y)$

X prenderà la forma di \mathbb{R}^n se si tratta di uno spazio metrico dotato della distanza euclidea.

44. Quali sono le operazioni fondamentali che posso definire in uno spazio metrico \mathbb{R}^n ?

In uno spazio \mathbb{R}^n sono considerati $\underline{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ vettori, con le seguenti proprietà:

- Moltiplicazione per uno scalare

$$c\underline{x} = \{cx_1, cx_2, \dots, cx_n\} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ e } \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

- Somma vettoriale

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

45. Cos'è la distanza e come si mette in relazione con la norma (euclidea)?

Definizione 1.2.2 (Norma euclidea). Per ogni $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\underline{x}\|_2 := \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad x_i \in \mathbb{R}_0^+$$

In uno spazio metrico, la distanza e la norma sono due concetti fondamentali che ci permettono di misurare rispettivamente la lunghezza dei vettori e la distanza tra i punti.

- La **Norma** $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ è una funzione che assegna a ogni vettore un numero reale non negativo e rappresenta la sua lunghezza;
- La **Distanza** (o metrica) $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ è una funzione che misura quanto sono lontani due punti nello spazio.

Definizione 1.2.3 (Distanza indotta dalla Norma). Sia $\|\cdot\|$ una norma su \mathbb{R}^n . La distanza indotta dalla norma è:

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad \text{tale che} \quad d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

Essa eredita le proprietà della norma: positività, simmetria e disugualanza triangolare. Quando consideriamo la norma euclidea $\|\cdot\|_2$, la distanza euclidea diventa:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

DIMOSTRAZIONE

Verifichiamo come le proprietà della distanza derivano dalla norma euclidea:

1. **Positività (1)** Essendo $\|\underline{x} - \underline{y}\|_2$ una norma, per definizione è sempre non negativa:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|_2 > 0$$

2. **Positività (2)** La norma è zero se e solo se il vettore è nullo:

$$\begin{aligned} d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 &\Leftrightarrow \|\underline{x} - \underline{y}\|_2 = \underline{0} \\ &\Leftrightarrow \underline{x} - \underline{y} = \underline{0} \\ &\Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y} \end{aligned}$$

3. **Simmetria** Dalla proprietà di omogeneità della norma $\|\lambda \underline{v}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{v}\|$:

$$\begin{aligned} d(\underline{x}, \underline{y}) &= \|\underline{x} - \underline{y}\|_2 \\ &= \|(-1)(\underline{y} - \underline{x})\|_2 \\ &= |-1| \cdot \|\underline{y} - \underline{x}\|_2 \\ &= \|\underline{y} - \underline{x}\|_2 \\ &= d(\underline{y}, \underline{x}) \end{aligned}$$

4. **Disuguaglianza triangolare** Dalla disuguaglianza triangolare della norma $\|\underline{u} + \underline{v}\| \leq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$:

$$\begin{aligned} d(\underline{x}, \underline{z}) &= \|\underline{x} - \underline{z}\|_2 \\ &= \|(\underline{x} - \underline{y}) + (\underline{y} - \underline{z})\|_2 \\ &\leq \|\underline{x} - \underline{y}\|_2 + \|\underline{y} - \underline{z}\|_2 \\ &= d(\underline{x}, \underline{y}) + d(\underline{y}, \underline{z}) \end{aligned}$$

□

46. Cosa si intende per **distanza euclidea** e per **distanza del tassista**?

Definizione 1.2.4 (Distanza Euclidea). *E' una distanza fra due punti che prende la forma*

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = \sqrt{\langle \underline{x} - \underline{y}, \underline{y} - \underline{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}, \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

Se $n = 1$, si parla di **distanza del tassista** (o distanza d_1), che assume la forma

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

dove $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2$.

1.2.1 Successione nello spazio metrico

47. Cosa si intende per **successione** in \mathbb{R}^n ?

In Analisi 1, una successione in \mathbb{R} è stata definita come una coppia composta da un sottoinsieme di \mathbb{R} e un'applicazione di $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definizione 1.2.5 (Successione in \mathbb{R}^n). *Una successione $\{x_n\}$ in \mathbb{R}^n è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n del tipo $\underline{x}_n = (\underline{x}_n^1, \dots, \underline{x}_n^n)$, composto da n vettori di n elementi:*

$$\underline{x}_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{tale che} \quad n \mapsto \underline{x}_n$$

Quindi, una successione in \mathbb{R}^n è una funzione che associa ad ogni numero naturale n un vettore \underline{x}_n in \mathbb{R}^n . Ogni vettore \underline{x}_n è composto da n componenti, che sono a loro volta numeri reali. In questo modo, possiamo pensare a una successione in \mathbb{R}^n come a una "collezione ordinata" di vettori che evolve al variare di n .

48. Cosa si intende per **convergenza** attraverso la distanza euclidea?

Una successione $\{\underline{x}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ con $\underline{x}_n = (\underline{x}_n^1, \dots, \underline{x}_n^n)$ converge ad un vettore $\underline{x} = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ se la distanza $d(\underline{x}_n, \underline{x}) = \|\underline{x}_n - \underline{x}\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Definizione 1.2.6 (Convergenza). Per quanto sia piccola una distanza ϵ , da un certo punto in poi tutti i termini della successione distano da \underline{x} meno di ϵ .

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } d(\underline{x}_n, \underline{x}) = \|\underline{x}_n - \underline{x}\| < \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon$$

49. Cosa significa che una successione ha **limite convergente**?

Parlando di convergenza, si può parlare anche di limite convergente: se una successione in \mathbb{R}^n ha un limite che converge \underline{x} , allora le coordinate (o gli elementi) della successione convergono agli elementi di \underline{x} , ossia $\{\underline{x}_n^i\}$ converge a \underline{x}^i . Un limite convergente di una successione in \mathbb{R}^n prende la forma di

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\underline{x}_n, \underline{x}) = 0$$

$$\text{con } d(\underline{x}_n, \underline{x}) = \|\underline{x}_n - \underline{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\underline{x}_n^i - \underline{x}^i)^2} = \sqrt{(\underline{x}_n^1 - \underline{x}^1)^2 + \dots + (\underline{x}_n^n - \underline{x}^n)^2}$$

Quando diciamo che il limite tende a zero quando $n \rightarrow +\infty$ intendiamo formalmente che

$$\forall i = 1..n \quad \underline{x}_n^i \rightarrow \underline{x}^i$$

Tutto ciò significa che $d(\underline{x}_k, \underline{x}) \rightarrow 0$ dove $\underline{x}_k \subset \mathbb{R}^n$ e $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

Quindi, possiamo affermare che $\{\underline{x}_k\}$ converge ad \underline{x} se e solo se ogni componente della successione converge alla corrispondente componente del limite, ossia:

$$\{\underline{x}_k\} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \underline{x} \in \mathbb{R}^n \iff \{\underline{x}_k^i\} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \underline{x}^i, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

50. Quali proprietà ha una **successione convergente**?

Definiamo le proprietà:

- **Unicità**

La successione $\{\underline{x}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ ha al più un limite, ossia, se esiste, il limite è unico;

- **Limitatezza**

Se la successione $\{\underline{x}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ converge, allora è limitata.

Se i punti si avvicinano sempre più a un limite non possono "scappare all'infinito" ma saranno confinati tutti in una regione limitata dello spazio. Più formalmente:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\underline{x}_n, \underline{x}) = 0 \implies \exists \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } d(\underline{x}_n, \underline{x}_0) < M \text{ con } M \in \mathbb{R}$$

- **Sottosuccessione**

Una sottosuccessione $\{\underline{x}\}_{nk} \in \{\underline{x}\}_n$ con $k \in \mathbb{R}$ è convergente a \underline{x} se solo se $\{\underline{x}\}_n$ converge a \underline{x} .

1.2.2 Intorno sferico

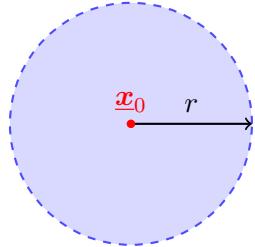
51. Cos'è un intorno sferico?

Definizione 1.2.7 (Ball/Palla/Disco/Intorno sferico). Sia $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ fissato e $r > 0$ un numero reale positivo, si dice intorno sferico di centro \underline{x}_0 con raggio r l'insieme

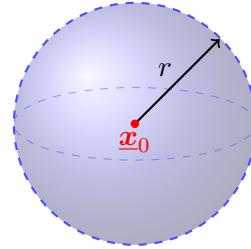
$$B(\underline{x}_0, r) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{x}_0, \underline{x}) = \|\underline{x}_0 - \underline{x}\| < r\}$$

Informalmente, un intorno sferico (o "palla") è l'insieme di tutti i punti che stanno dentro una sfera. Immagina di prendere un punto \underline{x}_0 nello spazio, questo è il centro. Poi prendi un numero r , questo è il raggio. La "palla" $B(\underline{x}_0, r)$ contiene tutti i punti che distano meno di r dal centro.

Caso 2D (Cerchio)



Caso 3D (Sfera)



Rappresentazione di un intorno sferico in \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3

52. Come si definisce caso unidimensionale in cui avendo \mathbb{R} la palla aperta di centro x_0 e raggio $r > 0$ è l'intervallo aperto $(x_0 - r, x_0 + r)$?

Sia uno spazio metrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ e siano $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$ e $\forall n = 1$

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \{x \in \mathbb{R} : d(x_0, x) < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\} \\ &= (x_0 - r, x_0 + r) \end{aligned}$$

53. In \mathbb{R}^2 con la distanza euclidea che forma hanno le ball aperte?

Sia uno spazio metrico (\mathbb{R}^2, d_2) e sia $\underline{x} = (x_1, x_2)$, siano $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$

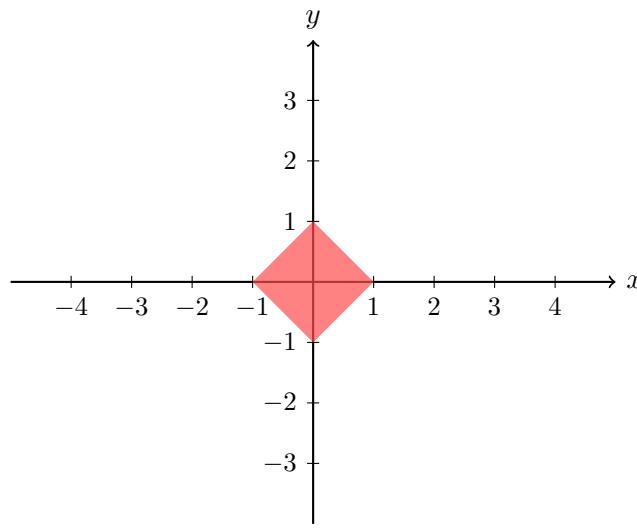
$$\begin{aligned} B(\underline{x}_0, r) &= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\underline{x}_0, \underline{x}) < r\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - x_0^1)^2 + (x_2 - x_0^2)^2} < r \right\} \end{aligned}$$

54. Come si definisce un disco aperto di centro l'origine e raggio 1 in \mathbb{R}^2 se si considerano la distanza euclidea e la distanza del tassista?

- Caso della distanza del tassista

Sia uno spazio metrico (\mathbb{R}^2, d_1) e siano $\underline{x}_0 = \underline{0}$ e $r = 1$

$$B(\underline{0}, 1) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\underline{0}, \underline{x}) < 1\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 1\}$$



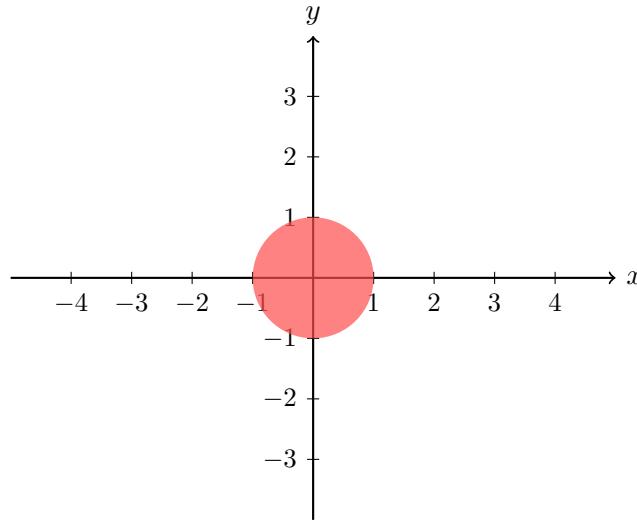
Viene detta distanza del tassista (o distanza di Manhattan), ovvero con $\|\underline{x}\|_1 = 1$, in cui si sommano i valori assoluti di tutte coordinate.

- **Caso della distanza euclidea**

Sia uno spazio metrico (\mathbb{R}^2, d) e siano $\underline{x}_0 = \underline{0}$ e $r = 1$

$$B(\underline{0}, 1) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\underline{0}, \underline{x}) < 1\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2} < 1\}$$

La distanza euclidea permette di definire una "linea retta" tra due punti, applicando il teorema di pitagora.



55. Quando diciamo che un insieme è limitato?

Grazie al concetto di intorno sferico si definisce meglio la proprietà della limitatezza.

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia lo spazio metrico (\mathbb{R}^n, d) , A si dice limitato se esiste un intorno sferico aperto in cui A è contenuto nell'intorno sferico:

$$\exists r > 0 \text{ e } \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } A \subset B(\underline{x}_0, r)$$

56. Posso fornire una definizione alternativa di successione convergente?

Definizione 1.2.8 (Successione convergente con intorno sferico). *Sia una successione $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ con $\underline{x}_n = (\underline{x}_n^1, \dots, \underline{x}_n^n)$ che converge ad un vettore $\underline{x} = (\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \underline{x}_n \in B(\underline{x}_0, \epsilon), \ \forall n \geq n_\epsilon.$$

1.3 Classificazione topologica degli insiemi

1.3.1 I punti e gli insiemi

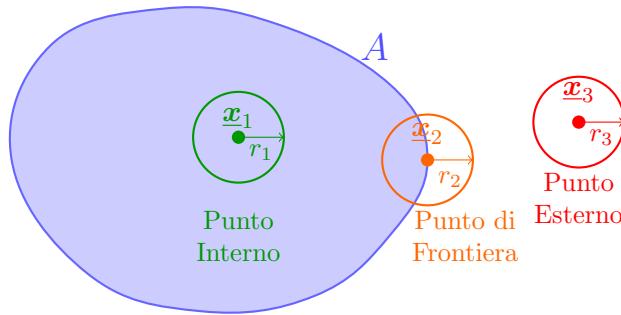
57. Qual è la definizione di **punto interno, esterno, di frontiera?**

Definizione 1.3.1 (Punto Interno). Sia $\underline{x}_0 \in X$ interno ad $A \subset X$ se $\underline{x}_0 \in A$ e esiste almeno un intorno sferico di \underline{x}_0 contenuto in A , ovvero $\exists r > 0$ tale che $B(\underline{x}_0, r) \subset A$.

L'insieme di punti interni di A si scrive \mathring{A} .

Definizione 1.3.2 (Punto Esterno). Sia $\underline{x}_0 \notin X$ esterno ad $A \subset X$ se esiste almeno un intorno sferico disgiunto da A , ovvero $\exists r > 0$ tale che $B(\underline{x}_0, r) \cap A = \emptyset$.

Definizione 1.3.3 (Punto di Frontiera). \underline{x}_0 è un punto di frontiera di A ($\underline{x}_0 \in \delta A$) se ogni intorno di \underline{x}_0 contiene sia punti interni sia punti esterni di A , ossia $\underline{x}_0 \in A$ se $\exists r > 0 : B(\underline{x}_0, r) \cap A \cap A^c \neq \emptyset$ con A^c l'insieme complementare di A tale che $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} \notin A\}$.



58. Cosa si intende per **insieme aperto e chiuso?**

Definizione 1.3.4 (Insieme Aperto). Sia $A \subset X$ se $A = \emptyset$ o se ogni suo punto è interno ad A , ossia $A = \mathring{A}$.

Formalmente, sia (X, d) uno spazio metrico e sia un sottoinsieme $A \subset X$ si dice aperto se per ogni $\underline{x} \in A$ esiste un raggio $r > 0$ tale che

$$B(\underline{x}, r) \subseteq A.$$

Definizione 1.3.5 (Insieme Chiuso). Un insieme si dice chiuso se contiene tutti i suoi punti di frontiera, ovvero $\delta A \subset A$.

Formalmente, sia (X, d) uno spazio metrico sia un sottoinsieme $C \subseteq X$ si dice chiuso se il suo complementare $X \setminus C$ è un insieme aperto, cioè se per ogni $\underline{x} \in X \setminus C$ esiste un raggio $r > 0$ tale che

$$B(\underline{x}, r) \subseteq X \setminus C.$$

\emptyset e \mathbb{R}^n sono gli unici insiemi aperti e chiusi.

1.3.2 Punti di accumulazione e dominio

59. Come si definisce **un punto di accumulazione?**

Definizione 1.3.6 (Punto di accumulazione). Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione per A se $\forall r > 0$ abbiamo $B(\underline{x}_0, r) \cap (A - \{\underline{x}_0\}) \neq \emptyset$.

Preso un intorno sferico, anche piccolissimo, contiene almeno un punto \underline{x} di A diverso dal punto di accumulazione \underline{x}_0

- Sia A aperto, tutti i punti in \mathring{A} sono punti di accumulazione per A

- Punti di frontiera δA possono essere punti di accumulazione per A

Ogni punto di frontiera che non è punto di accumulazione viene detto punto isolato.

60. Perché x_0 è punto di accumulazione per A se e solo se è il limite di una successione di elementi di A tutti diversi da x_0 ?

Definizione 1.3.7 (Caratterizzazione sequenziale dei punti di accumulazione). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subseteq X$. Un punto $\underline{x}_0 \in X$ è punto di accumulazione per A se e solo se esiste una successione $\underline{x}_n \subseteq A \setminus \{x_0\}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n = \underline{x}_0 \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

Un punto è di accumulazione per un insieme se e solo se l'insieme contiene una successione di punti distinti che si avvicinano indefinitamente a esso.

61. Cosa si intende per dominio come chiusura di un aperto?

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ la chiusura di A è \overline{A} ed è data dall'unione di A e tutti i suoi punti di accumulazione:

- \overline{A} è chiuso, perché è l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi di A ;
- E' il più piccolo insieme chiuso di A , ovvero $\overline{A} \subseteq A$ e se $A = \overline{A}$ allora A è chiuso.

Definizione 1.3.8 (Dominio in \mathbb{R}^n). Sia A un insieme aperto (e连通的), il dominio D è la chiusura di A , ovvero $D = \overline{A} = A \cup \delta A$.

Una sfera chiusa in \mathbb{R}^n è un dominio perché è proprio la chiusura di un aperto.

Infatti preso un intorno sferico $B(\underline{x}_0, r) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \leq r\}$ abbiamo che l'insieme di punti interni $\mathring{A} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < r\}$ è aperto e la frontiera $\delta A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| = r\}$ è la sfera, di conseguenza la sfera è l'unione di A con la sua frontiera ($\overline{B} = \mathring{A} \cup \delta A$).

Una sfera e un punto isolato non formano un dominio perché si contraddice la definizione di dominio che richiede che l'insieme A aperto sia anche connesso, in parole povere, non si può dividere A in due insiemi disgiunti.