PROGRAMMA DI ANALISI 2

Le definizioni e i teoremi di cui chiede la dimostrazione sono segnate in **rosso**.

- Breve introduzione al corso e applicazioni del calcolo differenziale.
- Equazioni differenziali.
- Equazioni differenziali ordinarie (EDO).
- EDO di ordine n.
- Soluzione (curva integrale) per una EDO di ordine n su un intervallo.
- Integrale generale di una EDO di ordine n su un intervallo.
- EDO di ordine n in forma normale.
- Alcuni esempi.
- EDO lineari di ordine n.
- EDO lineari del I ordine (1) $y'(x) +a(x) y(x)= f(x)$, $x\in [a, b]$ e $a(x)$, $f(x)$ continue in $[a, b]$.
- Equazione omogenea associata (2) $y'(x)= a(x) y(x)$, $x\in [a, b]$.
- Problema di Cauchy per una EDO del I ordine.
- Prime osservazioni sull'esistenza e unicità della soluzione di un Problema di Cauchy del I ordine.
- **Teorema: l'integrale generale di una EDO lineare del I ordine (su un intervallo)**: $y'(x) +a(x) y(x)= f(x)$ è dato dall'integrale generale della omogenea associata $y'(x) +a(x) y(x)=0$ più un integrale particolare della EDO non omogenea.
- **Determinazione dell'integrale generale dell'EDO omogenea associata**.
- Determinazione di un integrale particolare della EDO : **metodo di variazione della costante**.
- Forma esplicita della soluzione e osservazioni.
- Esempi.
- **Problema di Cauchy per una EDO del I ordine**.
- Osservazioni sull'esistenza e unicità della soluzione di un Problema di Cauchy del I ordine.
- Soluzioni "in grande" e soluzioni "in piccolo".
- Intervallo massimale (contente il punto inziale) di esistenza della soluzione.
- Problema di Cauchy per una EDO lineare del I ordine $y'(x)+a(x) y(x)=f(x)$ con condizione iniziale $y(x_0)=y_0$ formula esplicita della soluzione.
- La soluzione è definita su tutto l'intervallo I su cui le funzioni $a(x)$ e $f(x)$ sono continue.
- Esempi ed esercizi.
- **Equazioni a variabili separabili**.
- Osservazione: una EDO lineare del I ordine omogenea è una equazione a variabili separabili.
- Soluzioni singolari e determinazione dell'integrale generale mediante separazione delle variabili. Problemi di Cauchy per EDO a variabili separabili.
- Intervallo massimale (contente il punto inziale) di esistenza della soluzione.
- Perché la soluzione di un problema di Cauchy è su un intervallo? Significato fisico del problema e significato matematico-unicità della soluzione.
- Esempi ed esercizi
- EDO lineari del II ordine.
- Determinazione dell'integrale generale per una EDO lineare del II ordine omogenea.
- Soluzioni linearmente indipendenti su un intervallo.

- Sistema fondamentale di soluzioni (su in intervallo) di una EDO lineare omogenea del II ordine.
- EDO lineari del II ordine a coefficienti costanti
- ay''(x) + b y'(x)+ cy (x) = f(x) con a, b, c reali e a diverso da 0 e f continua su un intervallo. I= [a, b]. Equazione caratteristica (p(lambda) =0) associata ad una EDO lineare omogenea del II ordine a coefficienti costanti ay''(x) + b y'(x)+ cy (x) =0 dove p(\lambda) := a\lambda^2 + b\lambda + c.
- **Proposizione: y(x) = e^{\lambda x} è soluzione di (2) su I se e solo se \lambda è radice (zero) dell'equazione caratteristica, ovvero p(\lambda)=0**.
- Studio dell'equazione p(\lambda)=0 in campo complesso.
- Teorema fondamentale dell'algebra.
- Coppie di soluzioni della eq. omogenea in corrispondenza a 1) due soluzioni reali distinte di p(\lambda)=0 2) due soluzioni reali coincidenti 3) due soluzioni complesse coniugate.
- **Teorema: L'integrale generale di della eq. omogenea è dato dalla combinazione lineare, al variare dei coefficienti in R, delle coppie di soluzioni definite sopra**.
- Determinazione di una soluzione particolare per l'equazione completa ay''(x) + b y'(x)+ cy (x) =f(x) : metodo di somiglianza e **metodo di variazione delle costanti**.
- Problema di Cauchy per EDO lineari del II ordine a coefficienti costanti.
- Esempi ed applicazioni.
- Richiami di calcolo vettoriale. R^n come spazio metrico.
- Moltiplicazione per uno scalare e somma in R^n. Prodotto scalare<,> tra due vettori di R^n.
- Proprietà dell'applicazione prodotto scalare <,> : R^n x R^n ---> R : i) bilinearità, ii) simmetria, iii) positività.
- Lunghezza di un vettore x (indicata con ||x||) definita attraverso il prodotto scalare: ||x|| = \sqrt (<x,x>) con x in R^n. \sqrt indica la radice quadrata.
- **Formula di Carnot**.
- **Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**.
- La funzione lunghezza di un vettore è una norma.
- Proprietà della norma: positività, omogeneità e **disuguaglianza triangolare**.
- **Definizione di distanza (euclidea) tra due vettori di R^n: dati x e y in R^n, si definisce d(x, y): = || x-y|| dove ||x-y|| indica la lunghezza del vettore x-y**.
- Definizione di spazio metrico: (X, d) dove X è un insieme dotato di una funzione d: X x X --> R che verifica le proprietà di una distanza.
- Distanza euclidea in R^2 e distanza d_1 detta del "tassista".
- (R^n, d) dove d è la distanza euclidea è uno spazio metrico.
- Successioni in R^n, successioni convergenti in R^n.
- Definizione attraverso la distanza euclidea.
- La successione {x_k} di R^n dove x_k= (x_k^1, ..., x_k^n) converge a x=(x^1,...x^n) in R^n se e solo se le successioni (in R) delle coordinate {x_k^i} convergono a x^i in R per ogni i=1, ..., n. Distanza d_1 in R^n: dati x e y in R^n con x=(x_1, ..., x_n) e y=(y_1, ..., y_n) si definisce d_1(x, y)= |x_1- y_1)+...+|x_n- y_n|. La nozione di limite per syccessioni negli spazi metrici ha le proprietà già viste per le successioni in R.
- Proposizione (vale in ogni spazio metrico (X, d))
- Sia {x_n} una successione nello spazio metrico (R^n, d). Si ha
- [unicità] {x_n} ha al più un unico limite (se {x_n} ammette limite, questo è unico).
- [limitatezza] Ogni successione convergente è limitata.
- [sottosucessioni] Se x_n ---> x in R^n (o in X, spazio metrico qualsiasi), allora ogni sottosuccessione {x_n_k} estratta da {x_n} converge allo stesso limite.

- Elementi di topologia in R^n.
- Definizione di palla aperta, disco aperto, intorno sferico (in R^n) di centro x_0 \in R^n di raggio r>0. In R la palla aperta di centro x_0 e raggio r>0 è l' intervallo aperto (x_0-r, x_0 +r).
- In R^2, munito della distanza euclidea le palle aperte sono effettivamente dischi aperti e in R^3 sono palle piene.
- Disco aperto di centro l' origine e raggio 1 in R^2 considerando la distanza euclidea e la distanza d_1, detta del tassista.
- Nozione di convergenza di una successione in R^n nel linguaggio degli intorni sferici.
- Elementi di topologia in R^n, dove si intende come metrica quella euclidea.Topologia in uno spazio metrico qualsiasi (X, d).
- Sia A sottoinsieme di X (es X= R^n) definizione di insieme limitato, definizione di punto interno ad A, di punto esterno ad A e punto di frontiera. Definizione di insieme aperto e di insieme chiuso.
- Punto di accumulazione per un insieme A sottoinsieme di R^n (o di X).
- I punti interni di A sono punti di accumulazione per A.
- I punti di frontiera di A (non sono nè interni nè estermi ad A) possono essere di accumulazione per A. Se un punto di frontiera di A non è di accumulazione di dice punto isolato.
- x_0 è punto di accumulazione per A se e solo se è il limite di una successione di elementi di A tutti diversi da x_0.
- Domini di R^n come chiusure di aperti.
- Dunque, un dominio in R^n è un insieme chiuso dato dall'unione di un insieme aperto e della sua frontiera.
- In R^n una sfera chiusa è un dominio, una sfera chiusa e un punto isolato esterno alla sfera non formano un dominio di R^n. Limiti e continuità.
- Definizione di limite per funzioni reali di piu' variabili.
- Definizione di limite per una funzione attraverso gli intorni.
- L'operazione di limite è in R esteso [(-\infty , +\infty)] Proprietò del limite per funzioni in più variabili: il limite quando esiste è unico; i limiti di somme e prodotti di funzioni sono dati dalla domma e dal prodotto dei limiti (qualora esistano); il limite di un quoziente è il quoziente dei limiti (se è ben definito).
- Proposizione: Se f(x, y) ---> l per (x, y)---> (x_0, y_0) dove (x_0, y_0) è punto di accumulazione del dominio A di f, allora per ogni sottoinsieme C del dominio A di f (si sottintende che (x_0, y_0) sia punto di accumulazione anche per C) si deve avere che f(x, y) --> l per (x, y)--> (x_0, y_0) e (x, y) sta in C. Applicazione della proposizione (per mostrare la non esistenza del limite).
- Definizione di continuità in un punto (e su un dominio)per una funzione di due o piu' variabili.
- Esempi di funzioni continue.
- Estensione dei teoremi che riguardano la contiuità delle funzioni reali di una variabile al caso delle funzioni in più variabili.
- Teorema: Siano f e g funzioni continue (sugli opportuni domini e a valori reali), allora
- I)f+g, f-g, f . g sono continue
- ii) se g diverso 0 allora f/g è continua
- iii) se f>0 allora f^{g} è continua
- iv) la funzione composta g o f è continua ove le operazioni sono ben definite.

- E dunque i polinomi in due o piu' variabili sono continui, le funzioni razionali (come quozienti di polinomi) dove il denominatore è diverso da zero sono funzioni continue e sono funzioni continue tutte le funzioni elementari.
- Esempi e applicazioni.
- Limiti per funzioni di due variabili in coordinate polari (\rho, \theta).
- Che cosa significa che il limite è uniforme rispetto a \theta?
- Condizione necessaria per l'esistenza di un limite finito (esistenza di una funzione maggiorante non negativa che dipende solo da \rho e che va a zero per \rho che tende a zero): applicazione del criterio del confronto.
- Esempi di applicazione, studio dell'esistenza del limite e suo (eventuale) calcolo.
- Studio della continuità di una funzione in due variabili.
- Funzioni di due variabili reali.
- Dominio o campo di esistenza o insieme di definizione di una funzione reale di due variabili reali.
- Immagine della funzione.
- Insiemi del piano definiti da equazioni o disequazioni in due variabili.
- Esempi: determinazione dell'insieme di definizione di funzioni reali in due variabili.
- Grafico di una funzione di due variabile (graf (f) sottoinsieme di R^3).
- Sezioni di un grafico con piani.
- Sezioni trasversali, ovvero intersezione del graf(f) con piani paralleli ai piani coordinati: tracce della funzione.
- Esempi.
- Insiemi (curve) di livello di una funzione come opportuni sottoinsiemi del dominio.
- Insiemi (curve) di livello di una funzione di due variabili come opportuni sottoinsiemi del dominio. Esempi.
- Esempi di calcolo di limiti per funzioni di due variabili.
- Utilizzo del teorema del confronto e maggiorazione del valore assoluto della funzione con funzione radiale non negativa infinitesima.
- Esempi ed esercizi di calcolo di limiti.
- Calcolo differenziale per funzioni di più variabili.
- Derivate parziali.
- Derivate parziali in un punto per una funzione reale definita su un aperto di R^2.
- Le derivate parziali in un punto sono le derivate rispetto alle variabili x e y delle tracce corrispondenti della funzione.
- Definizione generale per funzioni su un aperto di R^n.
- Esempi di calcolo di derivate parziali in un punto per funzioni di due variabili.
- Derivabilità di una funzione in un punto e su un aperto di R^n.
- Esistenza del vettore gradiente.
- Significato geometrico delle derivate parziali per una funzione in due variabili in un punto.
- Differenza tra derivabilità e differenziabilità.
- Per le funzioni in più variabili la derivata parziale non è la naturale estensione della nozione di derivabilità in una variabile al caso di più variabili.
- Curve in R^n.
- Immagine o sostegno di una curva.
- Curve regolari.
- Esempi.
- Curve cartesiane.
- Esempi di curve piane.
- Curve chiuse.

- Derivate parziali (per una funzione di n variabili con $n>= 2$)in un punto usando la notazione vettoriale.
- Esempio di derivata direzionale secondo una assegnata direzione nello spazio in un punto di R^3.
- Differenziabilità in un punto (di A) per funzioni di n variabili definite su un aperto A di R^n.
- Differenziale della funzione in un punto come opportuno funzionale lineare.
- Geometricamente la differenziabilità in un punto è legata all'esistenza del piano tangente al graf(f) nel punto.
- Equazione del piano tangente al grafico di una funzione di due variabili in un punto.
- Significato geometrico del differenziale.
- Approssimazione lineare della funzione in un punto.
- Esempi ed esercizi sulla derivabilità e la differenziabilità di funzioni.
- **Proposizione: Se f : A---> R è differenziabile in un punto dell'aperto A, allora è continua in tale punto**.
- **Teorema del differenziale (nel caso di due variabili)**.
- Funzioni di classe c^1 su A. f è di classe C^1 su A ---> f differenziabile in A ---> f di classe C^0 su A.
- Proposizione Sia f: A---> R con A aperto di R^n e x_0 in A.
- **Se f è differenziabile in x_0 con differenziale L allora i) f è continua in x_0; ii) f ha tutte le derivate direzionali in x-0 e $D_v f(x_0)= L (v)$, per ogni direzione v di R^n**.
- Il vettore gradiente di una funzione differenziabile in un punto indica la direzione ed i verso di massima pendenza del grafico della funzione nel punto.
- Esempio: determinazione della direzione di massima crescita di una funzione (di due variabili) in un punto.
- Funzioni composte.
- **Teorema di derivazione delle funzioni composte (regola della catena)**.
- Esempio.
- Derivate successive.
- Derivate seconde.
- Matrice hessiana per una funzione di n variabili.
- Caso $n=2$.
- **Teorema di Schwarz (per funzioni di due variabili)**.
- Osservazione: la sola esistenza (e non la continuità) delle derivate seconde miste in un punto non assicura la possibilità di poter invertire l'ordine di derivazione.
- Se f è C^2 su A aperto allora la matrice hessiana è simmetrica.
- Formula di Taylor e differenziale secondo.
- Segmento in R^n di estremi due punti (vettori) di R^n. Sia f: A--> R con A aperto di R^n di classe C^ con k naturale.
- **Considerati x e x +h in R^n con h diverso da 0 (vettore nullo) e il segmento [x, x+h] in R^n contenuto in A consideriamo la funzione composta $F(t)= f(x(t)) = f(x+ t h)$ per t nell'intervallo [0, 1]**.
- Se f è C^1 su A, F è derivabile in [0, 1] e $F' (t) = < \nabla f(x+th, h>$ dove <, > indica il prodotto scalare in R^n.
- Se f è C^2 su A, allora $F'(t)$ è ulteriormente derivabile e $F''(t)$ è un polinomio omogeneo di grado 2 nelle componenti $h_1, ...h_n$ i cui coefficienti sono le derivate seconde della f.
- **Utilizzo della Formula di Taylor con resto secondo Lagrange per la F** (definita a partire dalla f con f di classe C^k) per determinare
  se k=1 Teorema di Lagrange per funzioni di n variabili di classe C^1

se K=2 Formula di Taylor al second'ordine con resto secondo Lagrange.
Se K=2 Formula di Taylor al second'ordine con resto secondo Peano (come o-piccolo).

- Definizione di punto di min/max relativo o locale per funzioni reali su domini D (su aperti) di R^n.
- Punti di min/max stretto e punti di min /max assoluti o globali.
- Problemi di ottimizzazione.
- **Teorema di Fermat per funzioni di n variabili**.
  Punti critici o stazionari per funzioni differenziabili.
  L'essere punto critico(stazionario) è C.N. per essere punto di estremo (min /max) relativo per la funzione.
  Non tutti i punti critici sono punti di minimo o massimo.
  Definizione di punto di sella o di colle.
- Classificazione dei punti critici: il test dell'hessiana.
- Test dell'hessiana per funzioni di due variabili reali definite su aperti del piano.
- Forme quadratiche in R^n. Forme quadratiche e matrici simmetriche associate.
- Segno di una forma quadratica.
- Forma quadratica definita positiva, negativa e indefinita.
- Forma quadratica associata alla matrice hessiana.
- Studio segno forma quadratica mediante lo studio del segno degli autovalori della matrice associata.
- Ancora sulle forme quadratiche e matrici simmetriche associate.
- Segno di una forma quadratica.
- Forma quadratica definita positiva, negativa e indefinita.
- Studio segno forma quadratica mediante lo studio del segno degli autovalori della matrice associata. Esempi ed esercizi: classificazione dei punti critici di funzioni i due variabili.
- Massimi e minimi su domini chiusi e limitati (compatti) del piano.
- Teorema di Weierstrass.
- Esempi ed esercizi.
- Massimi e minimi vincolati.
- Teorema dei moltiplicatori di Lagrange.
- Funzione Lagrangiana.
- Esempi ed esercizi.
- Integrazione multipla per funzioni in piu' variabili.
- Integrali doppi su rettangoli del piano.
- Definizione di integrabilità secondo Riemann per una funzione limitata su un rettangolo R del piano con R=[a,b]x[c,d].
- Somme inferiori e somme superiori di tale f su suddivisioni del rettangolo.
- Ogni funzione continua su R è ivi integrabile.
- Formule di riduzione per funzioni continue su rettangoli.
- Integrazione su regioni più generali.
- Definizione di integrale doppio di una funzione limitata su un dominio limitato del piano.
- Sottoinsiemi limitati del piano misurabili secondo Peano Jordan. Misura (area) di un insieme misurabile secondo P-J.
- Esempio di insieme del piano non misurabile secondo P-J: Quadrato con entrambe le coordinate razionali.
- Proprietà dell'integrale doppio: linearità, monotonia, integrazione della funzione valore assoluto di f se è integrabile.
- Integrazione su regioni semplici del piano.

- Regioni y e x-semplici.
- Area o misura di regioni semplici.
- Formule di riduzione per integrazione di funzioni continue su insiemi semplici.
- Esempi ed esercizi.
- Calcolo di integrali doppi mediante la formula di riduzione.
- Proprietà di additività per gli integrali rispetto al dominio di integrazione.
- Domini semplicemente decomponibili.
- Cambiamento di variabile negli integrali doppi.
- Trasformazioni di coordinate nel piano.
- Coordinate polari.
- Trasformazioni regolari.
- **Matrice jacobiana associata alla trasformazione**.
- Teorema di cambiamento variabili (mediante coordinate polari) integrali doppi.
- Dischi, corone e settori nel piano corrispondono a rettangoli polari nel piano polare.
- Esempi ed esercizi.