

# Appunti completi del corso di **ANALISI 2**

## Cenni sugli spazi vettoriali

Ultima modifica: 28 febbraio 2026

# Indice

<b>1 Cenni sugli spazi vettoriali</b>	<b>3</b>
1.1 Il prodotto scalare e la norma . . . . .	3
1.1.1 Disuguaglianze fondamentali indotte da una norma . . . . .	4
1.2 Elementi di topologia indotti da una norma per uno spazio metrico . . . . .	6
1.2.1 Successione nello spazio metrico . . . . .	8
1.2.2 Intorno sferico . . . . .	9
1.3 Classificazione topologica degli insiemi . . . . .	10
1.3.1 I punti e gli insiemi . . . . .	10

# Cenni sugli spazi vettoriali

## 1.1 Il prodotto scalare e la norma

**Definizione 1.1.1** (Prodotto Scalare). *E' una funzione definita come*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

*Normalmente, è definito*

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}, \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

Le sue proprietà sono:

- **Bilinearità**

$$\langle \alpha \underline{x}_1 + \beta \underline{x}_2, \underline{y} \rangle = \alpha \langle \underline{x}_1, \underline{y} \rangle + \beta \langle \underline{x}_2, \underline{y} \rangle, \quad \forall \underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \text{ e } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Vale lo stesso per  $\langle \alpha \underline{y}_1 + \beta \underline{y}_2, \underline{x} \rangle$

- **Simmetria**

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle, \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

- **Positività**

$$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle > 0 \text{ oppure } \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = 0, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

**Definizione 1.1.2** (La lunghezza del vettore: Norma). *Sia  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  un vettore, la sua lunghezza o norma è definita come la radice quadrata del prodotto scalare del vettore con se stesso:*

$$\|\underline{x}\| := \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$$

Essendo in  $\mathbb{R}^n$  la norma soddisfa la proprietà di positività del prodotto scalare, quindi  $\|\underline{x}\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ .

La radice quadrata risulta importante nella rappresentazione della norma perché siamo in  $\mathbb{R}^n$ , di conseguenza, il prodotto scalare di un vettore per se stesso è la somma dei quadrati delle componenti del vettore:

$$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

Il teorema di Pitagora ci fornisce la seguente uguaglianza  $a^2 + b^2 = c^2$ : bisogna estrarre la radice per trovare la lunghezza effettiva ( $c$ ) rispettando la proprietà di omogeneità e mantenendo la coerenza con la nostra idea di "scala".

- **Positività**

$$\|\underline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = 0, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

- **Omogeneità**

$$\|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\|, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- **Disuguaglianza triangolare**

$$\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|, \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

**DIMOSTRAZIONE**

Sviluppo del quadrato della norma

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle$$

Proprietà di bilinearità e simmetria

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Posso riscrivermelo secondo la seguente disuguaglianza:

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

Riconoscimento del quadrato di binomio

$$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

Estrazione della radice quadrata (essendo termini non negativi)

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

□

### 1.1.1 Disuguaglianze fondamentali indotte da una norma

**Definizione 1.1.3** (Formula di Carnot). *Per ogni  $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ , vale:*

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 + 2\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$$

La formula di Carnot generalizza il teorema di Pitagora agli spazi vettoriali dotati di prodotto scalare. Essa ci dice come calcolare il quadrato della norma della somma di due vettori in termini delle norme dei singoli vettori e del loro prodotto scalare.

Geometricamente, se pensiamo a  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$  come ai lati di un parallelogramma,  $\underline{x} + \underline{y}$  rappresenta la diagonale.

**DIMOSTRAZIONE**

Partiamo dalla definizione di norma indotta dal prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \|\underline{x} + \underline{y}\|^2 &= \langle \underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y} \rangle \\ &= \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle + \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle + \langle \underline{y}, \underline{y} \rangle \end{aligned}$$

Per la simmetria del prodotto scalare,  $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$ , quindi:

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 + 2\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$$

**Caso particolare**

Quando i vettori  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$  sono ortogonali, cioè  $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = 0$ , la formula di Carnot si riduce al teorema di Pitagora:

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2$$

Questa equivalenza è fondamentale:

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow \|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2$$

□

**Teorema 1.1.1** (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). *Per ogni  $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ , vale:*

$$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se i vettori sono linearmente dipendenti, ossia:

$$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \Leftrightarrow \underline{x} \text{ e } \underline{y} \text{ sono linearmente dipendenti}$$

Equivalentemente:  $\underline{x} = \underline{0}$  oppure  $\underline{y} = \underline{0}$  oppure  $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tale che  $\underline{x} = \lambda \underline{y}$ .

### DIMOSTRAZIONE

**Caso 1:** Se  $\underline{y} = \underline{0}$ , entrambi i membri dell'disuguaglianza sono nulli e la tesi è verificata.

**Caso 2:** Supponiamo  $\underline{y} \neq \underline{0}$ . Consideriamo, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , il vettore:

$$\underline{z}(t) = \underline{x} + t\underline{y}$$

Per la positività della norma,  $\|\underline{z}(t)\|^2 \geq 0$  per ogni  $t$ . Calcoliamo usando la formula di Carnot:

$$\begin{aligned} \|\underline{z}(t)\|^2 &= \|\underline{x} + t\underline{y}\|^2 \\ &= \|\underline{x}\|^2 + 2t\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + t^2\|\underline{y}\|^2 \end{aligned}$$

Questa è una funzione quadratica in  $t$  della forma  $at^2 + bt + c$  con:

- $a = \|\underline{y}\|^2 > 0$  (poiché  $\underline{y} \neq \underline{0}$ )
- $b = 2\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$
- $c = \|\underline{x}\|^2 \geq 0$

Poiché questa parabola è sempre non negativa (con  $a > 0$ ), il discriminante deve soddisfare:

$$\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$$

Sostituendo i valori:

$$\begin{aligned} (2\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle)^2 - 4\|\underline{y}\|^2\|\underline{x}\|^2 &\leq 0 \\ 4\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2 &\leq 4\|\underline{x}\|^2\|\underline{y}\|^2 \\ \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2 &\leq \|\underline{x}\|^2\|\underline{y}\|^2 \end{aligned}$$

Prendendo la radice quadrata di entrambi i membri (entrambi non negativi):

$$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$$

□

**Caso di uguaglianza:** L'uguaglianza  $|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$  vale se e solo se  $\Delta = 0$ . C'è uguaglianza se  $\underline{y} = \underline{0}$ , o se  $\underline{x} = \underline{0}$ , allora entrambi i membri sono zero oppure  $\underline{x} = \lambda \underline{y}$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ :

$$\begin{aligned} |\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| &= |\langle \lambda \underline{y}, \underline{y} \rangle| = |\lambda| \cdot \|\underline{y}\|^2 \\ \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| &= \|\lambda \underline{y}\| \cdot \|\underline{y}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{y}\|^2 \end{aligned}$$

che sono uguali.

□

**Nota.** Geometricamente, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz afferma che il valore del prodotto scalare tra due vettori non può superare il prodotto delle loro norme. In altre parole, il grado di allineamento tra i vettori, misurato dal prodotto scalare, è al massimo pari al prodotto delle loro lunghezze. L'uguaglianza si verifica soltanto quando i due vettori hanno la stessa direzione (parallelî) oppure direzioni opposte (antiparalleli).

Poiché il prodotto scalare può essere scritto come

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \|\underline{x}\| \|\underline{y}\| \cos \theta,$$

dove  $\theta$  è l'angolo compreso tra i due vettori, la diseguaglianza di Cauchy–Schwarz si esprime come

$$\|\underline{x}\| \|\underline{y}\| \cos \theta \leq \|\underline{x}\| \|\underline{y}\|.$$

Dividendo entrambi i membri per  $\|\underline{x}\| \|\underline{y}\|$  (supposte non nulle), si ottiene

$$\cos \theta \leq 1,$$

che è sempre vera per ogni angolo reale  $\theta$ .

L'uguaglianza si verifica quando  $|\cos \theta| = 1$ :

- $\theta = 0$ : vettori paralleli ( $\lambda > 0$ );
- $\theta = \pi$ : vettori antiparalleli ( $\lambda < 0$ ).

## 1.2 Elementi di topologia indotti da una norma per uno spazio metrico

Dal punto di vista algebrico,  $\mathbb{R}^n$  è l'insieme di tutte le ennuple ordinate di numeri reali, ossia un grande contentitore di numeri. Quindi,  $\mathbb{R}^n$  è lo spazio dove "vivono" i punti fatti da n coordinate.

**Definizione 1.2.1 (Spazio metrico).** Una coppia  $(X, d)$  è un insieme  $X$  a cui si associa una distanza (o metrica)  $d$  come  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , ossia ad ogni  $(x, y) \in X$  si associa un numero reale non negativo  $d(x, y)$

$X$  prenderà la forma di  $\mathbb{R}^n$  se si tratta di uno spazio metrico dotato della distanza euclidea. In uno spazio  $\mathbb{R}^n$  sono considerati  $\underline{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$  vettori, con le seguenti proprietà:

- Moltiplicazione per uno scalare

$$c\underline{x} = \{cx_1, cx_2, \dots, cx_n\} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ e } \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

- Somma vettoriale

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

### Norma e Distanza indotta dalla Norma

**Definizione 1.2.2 (Norma euclidea).** Per ogni  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|\underline{x}\|_2 := \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad x_i \in \mathbb{R}_0^+$$

In uno spazio metrico, la distanza e la norma sono due concetti fondamentali che ci permettono di misurare rispettivamente la lunghezza dei vettori e la distanza tra i punti.

- La **Norma**  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  è una funzione che assegna a ogni vettore un numero reale non negativo e rappresenta la sua lunghezza;
- La **Distanza** (o metrica)  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  è una funzione che misura quanto sono lontani due punti nello spazio.

**Definizione 1.2.3** (Distanza indotta dalla Norma). *Sia  $\|\cdot\|$  una norma su  $\mathbb{R}^n$ . La distanza indotta dalla norma è:*

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad \text{tale che} \quad d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

Essa eredita le proprietà della norma: positività, simmetria e disugualanza triangolare. Quando consideriamo la norma euclidea  $\|\cdot\|_2$ , la distanza euclidea diventa:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

### DIMOSTRAZIONE

Verifichiamo come le proprietà della distanza derivano dalla norma euclidea:

1. **Positività (1)**: essendo  $\|\underline{x} - \underline{y}\|_2$  una norma, per definizione è sempre non negativa:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|_2 > 0$$

2. **Positività (2)**: la norma è zero se e solo se il vettore è nullo:

$$\begin{aligned} d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 &\Leftrightarrow \|\underline{x} - \underline{y}\|_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \underline{x} - \underline{y} = \underline{0} \\ &\Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y} \end{aligned}$$

3. **Simmetria**: dalla proprietà di omogeneità della norma  $\|\lambda \underline{v}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{v}\|$ :

$$\begin{aligned} d(\underline{x}, \underline{y}) &= \|\underline{x} - \underline{y}\|_2 \\ &= \|(-1)(\underline{y} - \underline{x})\|_2 \\ &= |-1| \cdot \|\underline{y} - \underline{x}\|_2 \\ &= \|\underline{y} - \underline{x}\|_2 \\ &= d(\underline{y}, \underline{x}) \end{aligned}$$

4. **Disuguaglianza triangolare**: dalla disuguaglianza triangolare della norma  $\|\underline{u} + \underline{v}\| \leq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$ :

$$\begin{aligned} d(\underline{x}, \underline{z}) &= \|\underline{x} - \underline{z}\|_2 \\ &= \|(\underline{x} - \underline{y}) + (\underline{y} - \underline{z})\|_2 \\ &\leq \|\underline{x} - \underline{y}\|_2 + \|\underline{y} - \underline{z}\|_2 \\ &= d(\underline{x}, \underline{y}) + d(\underline{y}, \underline{z}) \end{aligned}$$

□

**Definizione 1.2.4** (Distanza Euclidea). *E' una distanza fra due punti che prende la forma*

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = \sqrt{\langle \underline{x} - \underline{y}, \underline{y} - \underline{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

$\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

Se  $n = 1$ , si parla di distanza del tassista (o distanza  $d_1$ ), che assume la forma

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

dove  $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2$ .

### 1.2.1 Successione nello spazio metrico

In Analisi 1, una successione in  $\mathbb{R}$  è stata definita come una coppia composta da un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  e un'applicazione di  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definizione 1.2.5 (Successione in  $\mathbb{R}^n$ ).** Una successione  $\{\underline{x}_n\}$  in  $\mathbb{R}^n$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  del tipo  $\underline{x}_n = (\underline{x}_n^1, \dots, \underline{x}_n^n)$ , composto da  $n$  vettori di  $n$  elementi:

$$\underline{x}_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{tale che} \quad n \mapsto \underline{x}_n$$

Quindi, una successione in  $\mathbb{R}^n$  è una funzione che associa ad ogni numero naturale  $n$  un vettore  $\underline{x}_n$  in  $\mathbb{R}^n$ . Ogni vettore  $\underline{x}_n$  è composto da  $n$  componenti, che sono a loro volta numeri reali. In questo modo, possiamo pensare a una successione in  $\mathbb{R}^n$  come a una "collezione ordinata" di vettori che evolve al variare di  $n$ .

#### Convergenza attraverso la distanza euclidea

Una successione  $\{\underline{x}_n\} \subset \mathbb{R}^n$  con  $\underline{x}_n = (\underline{x}_n^1, \dots, \underline{x}_n^n)$  converge ad un vettore  $\underline{x} = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$  se la distanza  $d(\underline{x}_n, \underline{x}) = \|\underline{x}_n - \underline{x}\| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

**Definizione 1.2.6 (Convergenza).** Per quanto sia piccola una distanza  $\epsilon$ , da un certo punto in poi tutti i termini della successione distano da  $\underline{x}$  meno di  $\epsilon$ .

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } d(\underline{x}_n, \underline{x}) = \|\underline{x}_n - \underline{x}\| < \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon$$

Parlando sempre di convergenza, si può parlare anche di limite convergente:

**Definizione 1.2.7 (Limite convergente).** Se una successione in  $\mathbb{R}^n$  ha un limite che converge  $\underline{x}$ , allora le coordinate (o gli elementi) della successione convergono agli elementi di  $\underline{x}$ , ossia  $\{\underline{x}_n^i\}$  converge a  $x^i$ . Un limite convergente di una successione in  $\mathbb{R}^n$  prende la forma di

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\underline{x}_n, \underline{x}) = 0$$

$$\text{con } d(\underline{x}_n, \underline{x}) = \|\underline{x}_n - \underline{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\underline{x}_n^i - x^i)^2} = \sqrt{(\underline{x}_n^1 - x^1)^2 + \dots + (\underline{x}_n^n - x^n)^2}$$

Quando diciamo che il limite tende a zero quando  $n \rightarrow +\infty$  intendiamo formalmente che

$$\forall i = 1..n \quad \underline{x}_n^i \rightarrow x^i$$

Tutto ciò significa che  $d(\underline{x}_k, \underline{x}) \rightarrow 0$  dove  $\underline{x}_k \subset \mathbb{R}^n$  e  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Quindi, possiamo affermare che  $\{x_k\}$  converge ad  $x$  se e solo se ogni componente della successione converge alla corrispondente componente del limite, ossia:

$$\{x_k\} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x \in \mathbb{R}^n \iff \{x_k^i\} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x^i, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

La convergenza possiede delle proprietà fondamentali:

- **Unicità**

La successione  $\{\underline{x}_n\} \subset \mathbb{R}^n$  ha al più un limite, ossia, se esiste, il limite è unico;

- **Limitatezza**

Se la successione  $\{\underline{x}_n\} \subset \mathbb{R}^n$  converge, allora è limitata.

Se i punti si avvicinano sempre più a un limite convergente non possono "scappare all'infinito" ma saranno confinati tutti in una regione limitata dello spazio. Più formalmente:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\underline{x}_n, \underline{x}) = 0 \implies \exists \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } d(\underline{x}_n, \underline{x}_0) < M \text{ con } M \in \mathbb{R}$$

- **Sottosuccessione**

Una sottosuccessione  $\{\underline{x}\}_{nk} \in \{\underline{x}\}_n$  con  $k \in \mathbb{R}$  è convergente a  $\underline{x}$  se solo se  $\{\underline{x}\}_n$  converge a  $\underline{x}$ .

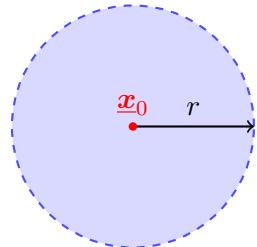
### 1.2.2 Intorno sferico

**Definizione 1.2.8 (Ball/Palla/Disco/Intorno sferico).** Sia  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  fissato e  $r > 0$  un numero reale positivo, si dice intorno sferico di centro  $\underline{x}_0$  con raggio  $r$  l'insieme

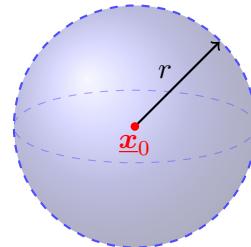
$$B(\underline{x}_0, r) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{x}_0, \underline{x}) = \|\underline{x}_0 - \underline{x}\| < r\}$$

Informalmente, un intorno sferico (o "palla") è l'insieme di tutti i punti che stanno dentro una sfera. Immagina di prendere un punto  $\underline{x}_0$  nello spazio, questo è il centro. Poi prendi un numero  $r$ , questo è il raggio. La "palla"  $B(\underline{x}_0, r)$  contiene tutti i punti che distano meno di  $r$  dal centro.

Caso 2D (Cerchio)



Caso 3D (Sfera)



Rappresentazione di un intorno sferico in  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$

Sia uno spazio metrico  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  e siano  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}$  e  $r > 0$  e  $\forall n = 1$

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \{x \in \mathbb{R} : d(x_0, x) < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\} \\ &= (x_0 - r, x_0 + r) \end{aligned}$$

Sia uno spazio metrico  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  e sia  $\underline{x} = (x_1, x_2)$ , siano  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  e  $r > 0$

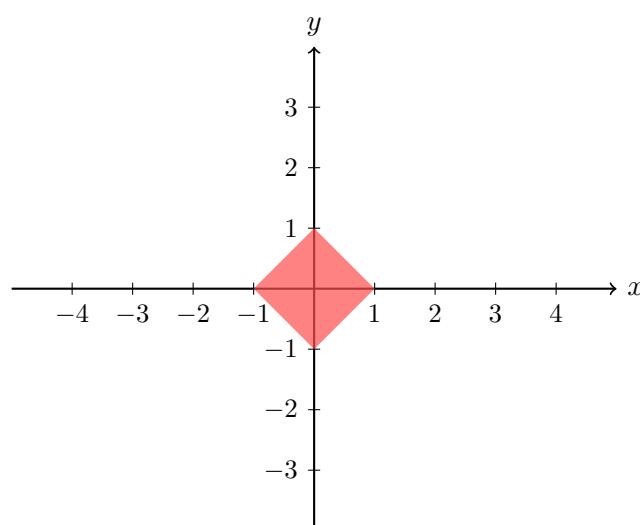
$$\begin{aligned} B(\underline{x}_0, r) &= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\underline{x}_0, \underline{x}) < r\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - x_0^1)^2 + (x_2 - x_0^2)^2} < r \right\} \end{aligned}$$

#### Casi di intorno sferico con centro 0 e raggio 1

- Caso della distanza del tassista

Sia uno spazio metrico  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  e siano  $\underline{x}_0 = \underline{0}$  e  $r = 1$

$$B(\underline{0}, 1) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\underline{0}, \underline{x}) < 1\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 1\}$$

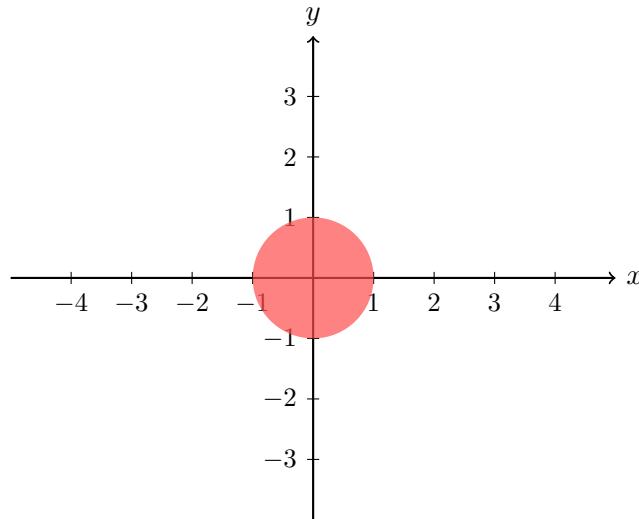


Viene detta distanza del tassista (o distanza di Manhattan), ovvero con  $\|\underline{x}\|_1 = 1$ , in cui si sommano i valori assoluti di tutte coordinate.

- **Caso della distanza euclidea**

Sia uno spazio metrico  $(\mathbb{R}^2, d)$  e siano  $\underline{x}_0 = \underline{0}$  e  $r = 1$

$$B(\underline{0}, 1) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\underline{0}, \underline{x}) < 1\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2} < 1\}$$



La forma dell'intorno sferico dipende dalla metrica utilizzata. Con la distanza del tassista, l'intorno sferico è un rombo, mentre con la distanza euclidea è un cerchio.

**Nota.** Grazie al concetto di intorno sferico si definisce meglio la proprietà della limitatezza. Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  e sia lo spazio metrico  $(\mathbb{R}^n, d)$ , A si dice limitato se esiste un intorno sferico aperto in cui A è contenuto:

$$\exists r > 0 \text{ e } \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } A \subset B(\underline{x}_0, r)$$

### Definizione alternativa di successione convergente con intorno sferico

**Definizione 1.2.9 (Successione convergente con intorno sferico).** Sia una successione  $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$  con  $\underline{x}_n = (\underline{x}_n^1, \dots, \underline{x}_n^n)$  che converge ad un vettore  $\underline{x} = (\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \underline{x}_n \in B(\underline{x}, \epsilon), \ \forall n \geq n_\epsilon.$$

## 1.3 Classificazione topologica degli insiemi

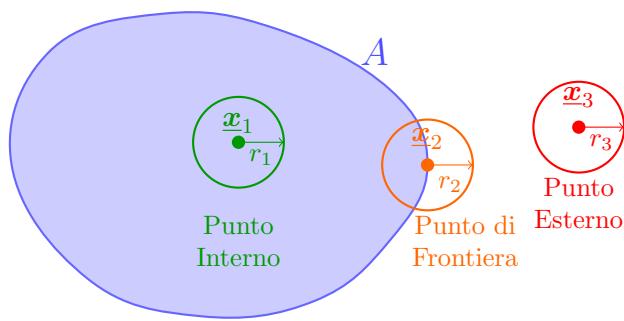
### 1.3.1 I punti e gli insiemi

**Definizione 1.3.1 (Punto Interno).** Sia  $\underline{x}_0 \in X$  interno ad  $A \subset X$  se  $\underline{x}_0 \in A$  e esiste almeno un intorno sferico di  $\underline{x}_0$  contenuto in A, ovvero  $\exists r > 0$  tale che  $B(\underline{x}_0, r) \subset A$ .

L'insieme di punti interni di A si scrive  $\overset{\circ}{A}$ .

**Definizione 1.3.2 (Punto Esterno).** Sia  $\underline{x}_0 \notin X$  esterno ad  $A \subset X$  se esiste almeno un intorno sferico disgiunto da A, ovvero  $\exists r > 0$  tale che  $B(\underline{x}_0, r) \cap A = \emptyset$ .

**Definizione 1.3.3 (Punto di Frontiera).**  $\underline{x}_0$  è un punto di frontiera di A ( $\underline{x}_0 \in \delta A$ ) se ogni intorno di  $\underline{x}_0$  contiene sia punti interni sia punti esterni di A, ossia  $\underline{x}_0 \in A$  se  $\exists r > 0 : B(\underline{x}_0, r) \cap A \cap A^c \neq \emptyset$  con  $A^c$  l'insieme complementare di A tale che  $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} \notin A\}$ .



**Definizione 1.3.4 (Insieme Aperto).** Sia  $A \subset X$  se  $A = \emptyset$  o se ogni suo punto è interno ad  $A$ , ossia  $A = \overset{\circ}{A}$ .

Formalmente, sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia un sottoinsieme  $A \subset X$  si dice aperto se per ogni  $\underline{x} \in A$  esiste un raggio  $r > 0$  tale che

$$B(\underline{x}, r) \subseteq A.$$

**Definizione 1.3.5 (Insieme Chiuso).** Un insieme si dice chiuso se contiene tutti i suoi punti di frontiera, ovvero  $\delta C \subset C$ .

Formalmente, sia  $(X, d)$  uno spazio metrico sia un sottoinsieme  $C \subseteq X$  si dice chiuso se il suo complementare  $X \setminus C$  è un insieme aperto, cioè se per ogni  $\underline{x} \in X \setminus C$  esiste un raggio  $r > 0$  tale che

$$B(\underline{x}, r) \subseteq X \setminus C.$$

$\emptyset$  e  $\mathbb{R}^n$  sono gli unici insiemi aperti e chiusi.

### Punto di accumulazione

**Definizione 1.3.6 (Punto di accumulazione).** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e sia  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  punto di accumulazione per  $A$  se  $\forall r > 0$  abbiamo  $B(\underline{x}_0, r) \cap (A - \{\underline{x}_0\}) \neq \emptyset$ .

Preso un intorno sferico, anche piccolissimo, contiene almeno un punto  $\underline{x}$  di  $A$  diverso dal punto di accumulazione  $\underline{x}_0$

- Sia  $A$  aperto, tutti i punti in  $\overset{\circ}{A}$  sono punti di accumulazione per  $A$
- Punti di frontiera  $\delta A$  possono essere punti di accumulazione per  $A$

Ogni punto di frontiera che non è punto di accumulazione viene detto punto isolato.

**Definizione 1.3.7 (Caratterizzazione sequenziale dei punti di accumulazione).** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $A \subseteq X$ . Un punto  $\underline{x}_0 \in X$  è punto di accumulazione per  $A$  se e solo se esiste una successione  $\underline{x}_n \subseteq A \setminus \{\underline{x}_0\}$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n = \underline{x}_0 \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

Un punto è di accumulazione per un insieme se e solo se l'insieme contiene una successione di punti distinti che si avvicinano indefinitamente a esso.

### Chiusura di un insieme e dominio

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . La chiusura di  $A$  è indicata  $\overline{A}$  ed è data da:

$$\overline{A} = A \cup A'$$

dove  $A'$  è l'insieme dei punti di accumulazione di  $A$ .

Quindi, possiamo dire che:

- $\bar{A}$  è chiuso, perché contiene tutti i suoi punti di frontiera;
- È il più piccolo insieme di chiuso di  $A$ ;
- Vale sempre  $A \subseteq \bar{A}$  e se  $A = \bar{A}$  allora  $A$  è chiuso.

**Definizione 1.3.8 (Dominio in  $\mathbb{R}^n$ ).** Un dominio in  $\mathbb{R}^n$  è un insieme che coincide con la chiusura di un insieme aperto  $A$ , ossia  $A = \bar{A}$ .

In questo caso il dominio è un insieme chiuso a cui si aggiunge la frontiera:

$$D = \bar{A} = A \cup \delta A$$

**Nota.** Un esempio di dominio è una sfera chiusa in  $\mathbb{R}^n$ .

Infatti presa un intorno sferico  $B(\underline{x}_0, r) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \leq r\}$  abbiamo che l'insieme di punti interni  $\mathring{A} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < r\}$  è aperto e la frontiera  $\delta A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| = r\}$  è la sfera, di conseguenza la sfera è l'unione di  $A$  con la sua frontiera ( $\bar{B} = \mathring{A} \cup \delta A$ ).

Una sfera e un punto isolato non formano un dominio perché si contraddice la definizione di dominio che richiede che l'insieme  $A$  aperto sia anche connesso, ,in parole povere, non si può dividere  $A$  in due insiemi disgiunti.