

SIMULAZIONE NUMERICA DEL PENDOLO DI NEWTON

Candidato: Carlo Bosio

Tutore: Prof. Marco Beghini
Co-tutore: Dr. Michele Abruzzo

Introduzione

Il problema considerato è quello dell'analisi dinamica del noto Pendolo di Newton (Newton's Cradle). Il sistema (Fig.1) è costituito da una serie di sfere di acciaio identiche, ciascuna tenuta sospesa da una coppia di fili inestensibili. Le sferette sono collocate lungo una fila orizzontale e si toccano appena. Quando una sferetta di estremità è spostata lateralmente e lasciata oscillare come un pendolo semplice colpisce quella consecutiva e innesca una serie di urti che si conclude con l'allontanamento della sferetta all'estremità opposta. Questa compie un'oscillazione e torna ad urtare le altre sferette, avviando nuovamente la sequenza di urti e il successivo allontanamento della prima sferetta.

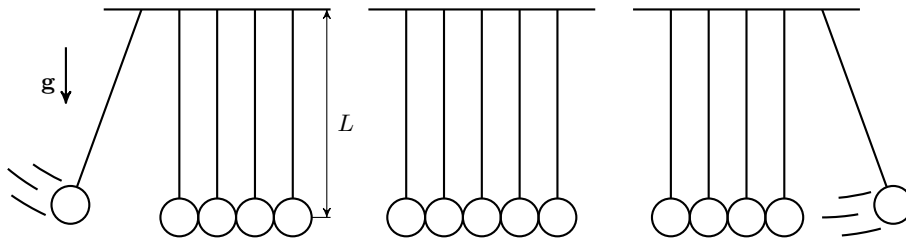


Figura 1: Schema del Pendolo di Newton

Il comportamento del sistema non è intuitivo come potrebbe sembrare. L'obiettivo di questo lavoro di Prova Finale è quello di descrivere il moto delle singole sferette e di sviluppare un modello numerico che, tramite codice MATLAB, simuli il comportamento del sistema.

Caratterizzazione dell'urto tra sfera e piano rigido

Il caso più elementare a cui si può ricondurre il singolo urto fra corpi elastici è quello tra sfera elastica e piano rigido (descritto in dettaglio in [1]). La sfera si avvicina al piano, interferisce con esso e dopo un certo tempo di contatto torna indietro con velocità (quasi) opposta a quella iniziale. Assumendo che le deformazioni siano completamente localizzate in vicinanza della zona di contatto e che il resto della sfera si comporti in maniera infinitamente rigida, per descrivere l'interazione fra i due corpi è lecito applicare la teoria del contatto di Hertz (1881). Risulta possibile quindi elaborare un modello a parametri concentrati in cui la porzione compressa della sfera corrisponde a una molla (priva di massa) e la massa è concentrata nella porzione "indeformata".

Facendo riferimento alla Fig.2 e ponendo $\Delta = \frac{1-\nu^2}{E}$, $R^* = R$, $k = \frac{4\sqrt{R^*}}{3\Delta}$:

$$F = k \delta^{3/2} \quad (\delta > 0) \quad (1)$$

In cui δ è lo spostamento (con segno) del centro di massa della sfera. In questo modello il contatto è pertanto mediato da una molla non lineare e attiva solo quando le due parti sono in contatto. Queste considerazioni sono facilmente estendibili all'urto fra due sfere grazie alla teoria di Hertz.

Per una modellazione più realistica del comportamento del sistema è necessario aggiungere anche la dissipazione. Non è difficile intuire infatti che il Pendolo di Newton non oscilla all'infinito ma il moto è smorzato e gradualmente il sistema si arresta. Si hanno due componenti principali di smorzamento:

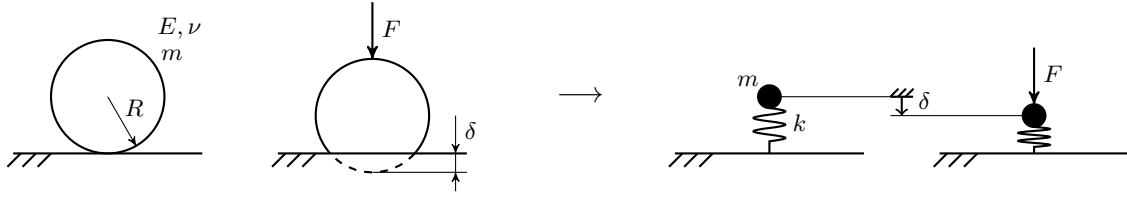


Figura 2: Modellazione a parametri concentrati del contatto elastico

quelle associate alle azioni interne (per un materiale assunto perfettamente elastico dovute a oscillazioni al livello del reticolo cristallino causate dalla propagazione delle onde elastiche) e quelle dovute ad azioni esterne (resistenza dell'aria, attrito alle estremità dei fili...). Le prime sono responsabili dello smorzamento del moto relativo al centro di massa e portano ad una oscillazione d'insieme delle sferette che conserva la quantità di moto totale iniziale del sistema, le seconde sono responsabili dell'effettivo arresto del moto del centro di massa del sistema. Nel presente lavoro sono state considerate solo le componenti interne, perché ritenute di maggiore interesse.

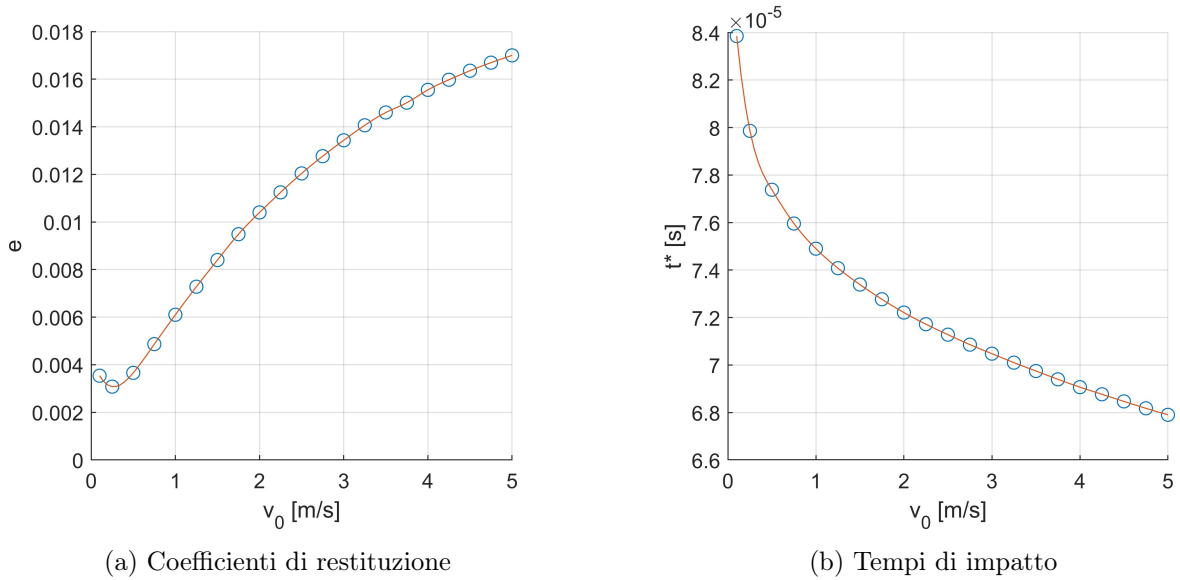


Figura 3: Dati ricavati dal modello FEM

Per quantificare la perdita di energia dovuta alla dissipazione interna nel materiale sono stati utilizzati dei dati ricavati da un modello agli elementi finiti dell'urto fra una sfera di acciaio di raggio $R = 20$ mm e un piano rigido. Facendo riferimento alla Fig.3, con v_0 (in ascisse) si indica la velocità iniziale con cui la sfera impatta contro il piano. In Fig.3a è rappresentato il coefficiente di restituzione $e = 1 - \frac{v_f}{v_0}$, in cui v_f è la velocità con cui la sfera si allontana dal piano dopo l'urto. In Fig.3b è rappresentata la durata dei vari urti in funzione di v_0 (i valori sono coerenti con quelli calcolati tramite la teoria di Hertz).

Tramite il parametro e è possibile quantificare l'energia dissipata nell'urto. Ipotizzando un'andamento della velocità del centro di massa della sfera nel tempo d'urto ad arco di coseno e adottando un modello di smorzamento lineare è possibile ricavare dei coefficienti di smorzamento "equivalenti" (Fig.4).

Si ha, con riferimento alla Fig.4:

$$F = k \delta^{3/2} + c \dot{\delta} \quad (\delta > 0) \quad (2)$$

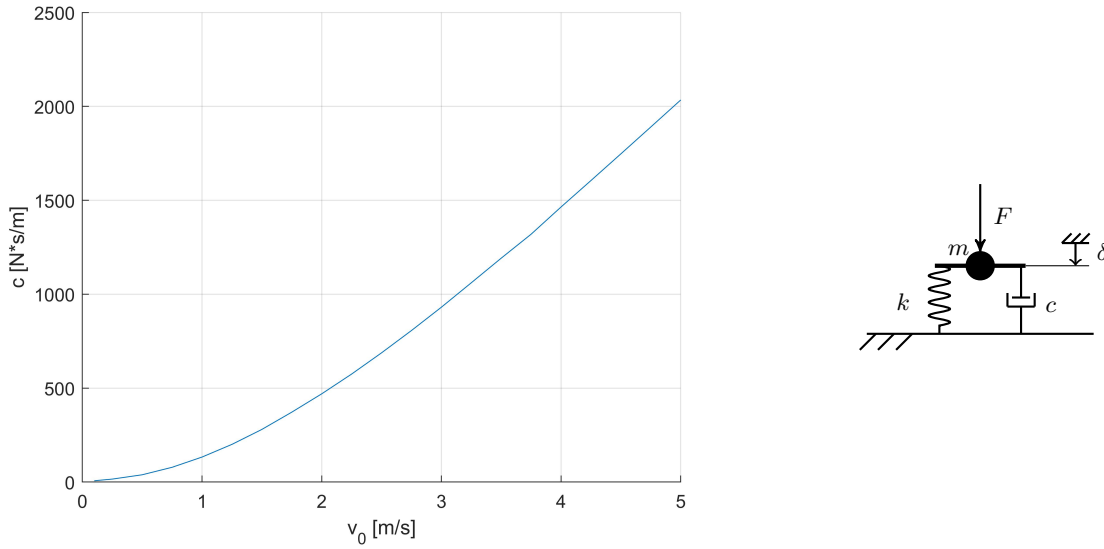


Figura 4: Coefficienti di smorzamento "equivalenti" per l'urto

Implementazione del modello in MATLAB

Per la simulazione del comportamento del Pendolo di Newton in MATLAB è necessario inserire l'effetto della gravità. Ogni pallina è stata schematizzata come un pendolo semplice linearizzato intorno all'origine ed è quindi stata inserita per ogni elemento del modello una molla lineare di costante elastica $k_g = \frac{mg}{L}$. Si ha a che fare quindi con un sistema dinamico non lineare con tanti DOF quante sono le palline (Fig.5). Infatti è possibile trascurare la deformabilità interna delle sfere (non ovvio per quelle centrali), in quanto il tempo di propagazione delle onde elastiche nel corpo è dell'ordine di 10^{-6} s mentre la durata degli urti dell'ordine di 10^{-4} s.

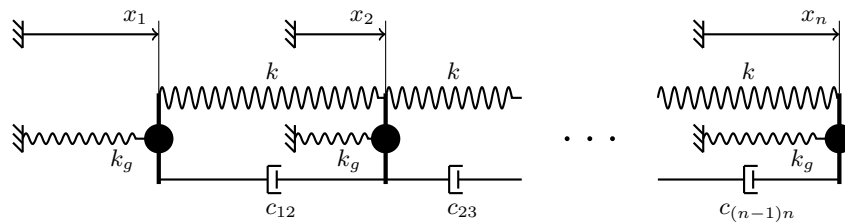


Figura 5: Schema dinamico del Pendolo di Newton

Si ha quindi, per la pallina i -esima:

$$m\ddot{x}_i + k(x_i - x_{i-1})^{3/2} + k(x_i - x_{i+1})^{3/2} + c_{(i-1)i}(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + c_{i(i+1)}(\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}) + \frac{mg}{L}x_i = 0 \quad (3)$$

Ovviamente sia la molla hertziana sia lo smorzatore fra la pallina i e la pallina $(i+1)$ sono attivi solo quando si ha contatto, ovvero $x_i - x_{i+1} > 0$, condizione che, per l'implementazione in MATLAB, viene verificata tramite un'istruzione `if`. Per quanto riguarda il calcolo del coefficiente di smorzamento nell'urto fra due palline (che dipende dalla velocità di inizio impatto) è stata scritta una funzione che usa delle variabili statiche (definite con la parola chiave `persistent`) a cui viene assegnato il valore corretto appena inizia il contatto.

Per il presente lavoro è stato preso in considerazione un Pendolo di Newton composto da $n = 5$ palline di acciaio ($\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $E = 206 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $c = 500 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) di raggio $R = 20 \text{ mm}$, tenute sospese da fili inestensibili di lunghezza $L = 400 \text{ mm}$. In Fig.6 sono riportati gli andamenti delle velocità dei centri delle palline durante il primo urto dell'evoluzione del sistema. In questo caso il contributo dello smorzamento si attiva solo nei singoli urti fra le sfere 1 e 2 (Fig.6a) o 2 e 3 (Fig.6b), perché sono gli unici in cui la velocità di inizio impatto è non nulla. Questo è sicuramente un limite del modello utilizzato per riprodurre la dissipazione energetica, in quanto una compressione impulsiva di due sfere già in contatto non risulta comportare alcuna perdita di energia. Senza contare il fatto che, secondo questo modello di smorzamento, il massimo della forza viscosa si ha nell'istante in cui i corpi che urtano entrano in contatto (massima velocità relativa). Questo, oltre ad essere poco plausibile perché la porzione di materiale effettivamente coinvolta nello schiacciamento a inizio contatto è nulla, comporta una discontinuità negli andamenti delle accelerazioni delle sfere e quindi un punto angoloso negli andamenti delle velocità. Per il raggiungimento degli obiettivi di questo lavoro è stato tuttavia ritenuto sufficientemente accurato che la forza viscosa producesse la corretta dissipazione energetica complessiva in ogni impatto, quindi a favore della semplicità è stato adottato il modello descritto, accettandone i limiti.

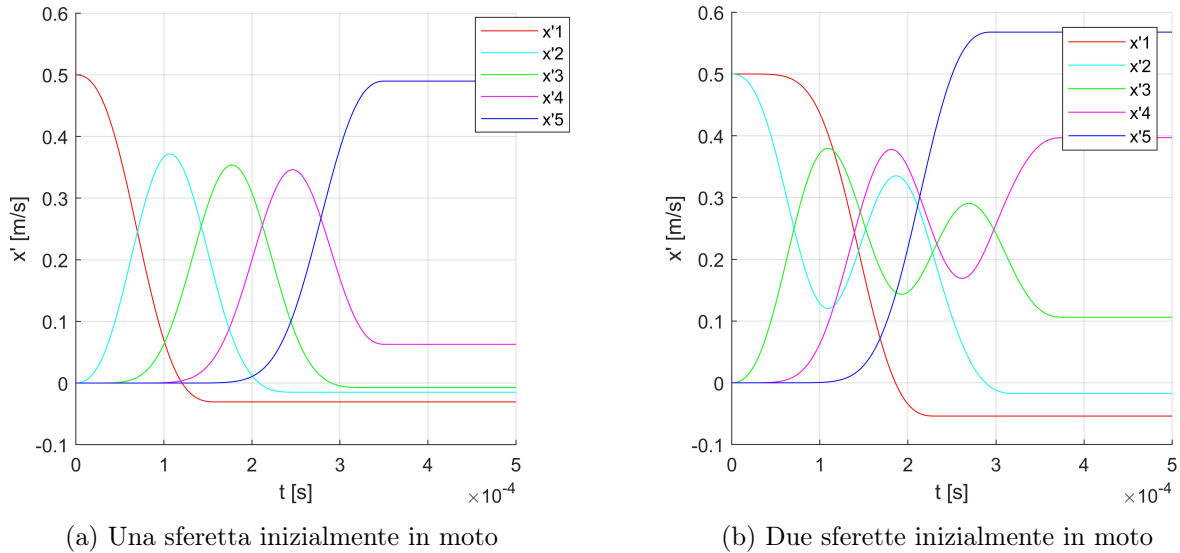


Figura 6: Andamento delle velocità durante il primo urto

Per quanto riguarda la simulazione completa del sistema (Fig.7), si nota che il tempo di assestamento (dopo il quale le palline oscillano sincrono) è dell'ordine dei minuti. Non essendo stati inseriti nel modello effetti dissipativi dovuti a forze esterne al sistema, il risultato della simulazione corrisponde alla soluzione del comportamento del Pendolo di Newton all'interno di una campana a vuoto (senza considerare altri effetti come per esempio la non idealità dei fili). In queste circostanze non si ha un arresto vero e proprio, infatti il centro di massa dell'apparato continua ad oscillare indefinitamente. Si consideri un Pendolo di Newton di n palline. Come evidenziato in [2], è possibile scomporre l'energia cinetica totale iniziale T_0 in energia cinetica dovuta al moto del centro di massa T_G e energia cinetica del moto relativo dei punti rispetto ad esso T_R . Dato che le forze esterne energeticamente attive sono conservative la T_G si conserva, mentre il moto relativo delle sfere viene smorzato e la T_R si trasforma in energia termica. Nel caso in questione si ha $T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ e $T_G = \frac{1}{2n}mv_0^2$. L'energia dissipata è quindi:

$$\Delta E = T_R = \frac{1}{2}mv_0^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (4)$$

Da notare che questa quantità non dipende dai parametri di smorzamento, che determinano solo il tempo di raggiungimento della condizione di regime. Nel caso in questione ($T_0 = 32.6 \text{ mJ}$) l'energia dissipata in energia termica dal sistema è di 26.1 mJ e corrisponde, supponendo che le palline siano isolate termicamente e si riscaldino equamente e in modo omogeneo a un aumento di temperatura di $4 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}$.

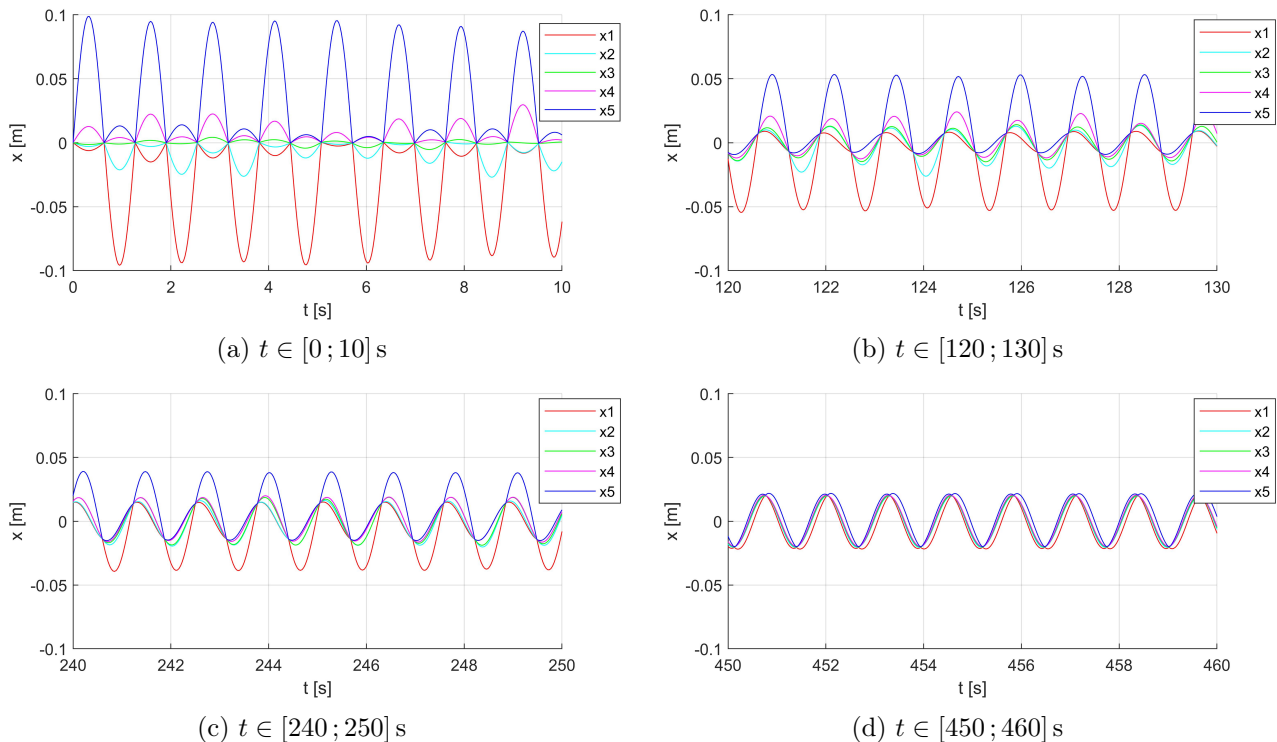


Figura 7: Simulazione completa del Pendolo di Newton con una sferetta inizialmente in moto

Conclusioni

Dalle analisi condotte è possibile notare come una descrizione del Pendolo di Newton richieda modelli più complessi rispetto a quelli di base per l'urto elastico e la conservazione dell'energia. La soluzione ottenuta consente di quantificare il contributo della dissipazione interna al materiale che si produce anche nell'ipotesi che sia perfettamente elastico e, quindi, di avere una stima dei tempi di assestamento del sistema, anche al variare del numero di palline e delle condizioni iniziali. Sarebbe possibile approfondire lo studio del problema affinando il modello di smorzamento e inserendo il contributo dell'attrito aerodinamico, facendo riferimento a un apparato con sferette non identiche o fili non tutti della stessa lunghezza.

Riferimenti Bibliografici

- [1] Villaggio P., "The Rebound of an Elastic Sphere Against a Rigid Wall", *Journal of Applied Mechanics* (1996), Vol. 63, pp. 259-263
- [2] Hutzler S., Delaney G., Weaire D., MacLeod F., "Rocking Newton's Cradle", *American Journal of Physics* (2004), Vol. 72, pp.1508-1516