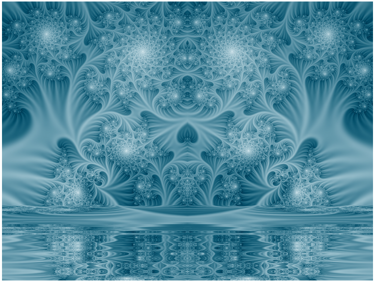


I Frattali

Carlo Buccisano

Liceo Scientifico F. Lussana

Tesina Esame di Stato 2015-2016

Piano della presentazione

Premessa

Perché ho scelto questa tesina?

- passione per la matematica e l'informatica
- i frattali sono un campo della matematica recente e interessante
- i frattali possono dare un'immagine diversa della matematica, spesso vista erroneamente come ostica e astratta

Cos'è un frattale

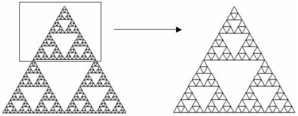
Un frattale è una particolare figura geometrica caratterizzata da:

- autosimilarità
- perimetro infinito o nullo
- area finita (o nulla)
- irregolarità
- dimensione non intera

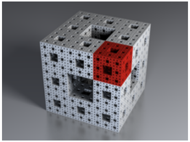
Cos'è un frattale

Autosimilarità

In geometria due poligoni sono detti simili se e solo se hanno angoli uguali e lati in proporzione. Per i frattali l'autosimilarità consiste nel fatto che una loro parte è simile al frattale di partenza.



Autosimilarità nel triangolo di Sierpinski



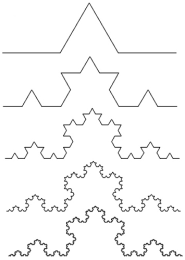
Autosimilarità nella spugna di Menger

Cos'è un frattale

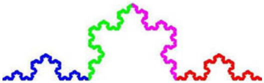
Perimetro infinito o nullo

Spesso i frattali hanno perimetro infinito o nullo. Ad esempio la curva di Koch ha perimetro infinito: a ogni iterazione il perimetro diviene i 4/3 del precedente quindi

$$p = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{3} \right)^n \cdot p_0 = +\infty$$



Curva di Koch

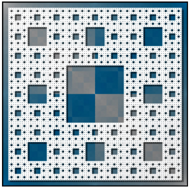


Autosimilarità nella curva di Koch

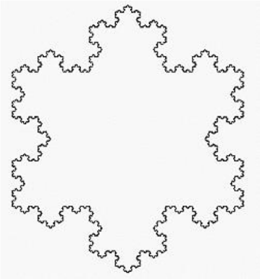
Cos'è un frattale

Area finita o nulla

Nonostante i frattali possano avere perimetro infinito, la loro area sarà sempre finita o nulla. Ad esempio l'area del tappeto di Sierpinski è nulla mentre l'area del fiocco di Koch è finita e vale $\left(\frac{8}{5}\right) \cdot A_0$, dove A_0 è l'area del triangolo iniziale.



Tappeto di Sierpinski



Fiocco di Koch

Cos'è un frattale

Irregolarità

Un frattale non può essere definito come luogo di punti che soddisfino certe condizioni geometriche o analitiche, perché per descriverlo si utilizzano definizioni ricorsive.

```
def sierpinski(points,degree,myTurtle):
    colormap = ['blue','red','green','white','yellow',
                'violet','orange']
    drawTriangle(points,colormap[degree],myTurtle)

    if degree > 0:
        sierpinski([points[0],
                        getMid(points[0], points[1]),
                        getMid(points[0], points[2])],
                   degree-1, myTurtle)
        sierpinski([points[1],
                        getMid(points[0], points[1]),
                        getMid(points[1], points[2])],
                   degree-1, myTurtle)
        sierpinski([points[2],
                        getMid(points[2], points[1]),
                        getMid(points[0], points[2])],
                   degree-1, myTurtle)
```

Snippet Python per generare il triangolo di Sierpinski

Cos'è un frattale

Dimensione non intera

La dimensione frattale è stata introdotta da Hausdorff ed è definita come:

$$D_f = \frac{\log N}{\log(1/K)}$$

dove N è il numero di parti simili in cui il frattale può essere diviso e K è il rapporto di omotetia.

Esempi

La spugna di Menger ha dimensione $\frac{\log 20}{\log 3} \approx 2.7268$

Il triangolo di Sierpinski ha dimensione $\frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585$

Tipi di frattali

Si distinguono:

- frattali deterministici
- frattali aleatori

A seconda di come vengono generati al calcolatore poi vi sono:

- frattali IFS
- frattali LS

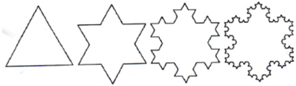
Tipi di frattali
Frattali IFS

I frattali IFS (*Iterated Function System*) vengono generati a partire da un insieme di punti nel piano a cui vengono applicate trasformazioni geometriche in sequenza. Quando le successive immagini convergono si parla di frattale IFS.
Un frattale IFS, generato tramite affinità, è la curva di Koch.

$$T_1: \begin{cases} X = \frac{1}{3}x \\ Y = \frac{1}{3}y \end{cases}; \quad T_2: \begin{cases} X = \frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{3} \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y \end{cases}; \quad T_3: \begin{cases} X = -\frac{1}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{2}{3} \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y \end{cases}; \quad T_4: \begin{cases} X = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ Y = \frac{1}{3}y \end{cases}.$$

Tipi di frattali
Frattali LS

Un frattale LS (*Lindenmayer System*) non è propriamente autosimile, in quanto non è possibile suddividere la figura in un certo numero di parti simili ad essa. È però possibile suddividere il frattale in un numero *finito* di frattali IFS. Un esempio è il fiocco di Koch, non autosimile, ma divisibile in un numero finito di frattali IFS (curve di Koch).



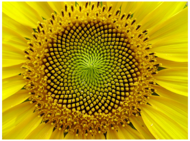
Assioma: **F- -F- -F** (un triangolo equilatero)
Angolo: 60 gradi
Fattore omotetia: 3

Legge: **F** $\rightarrow$ **F+F- -F+F**

Frattali in natura

In natura si trovano moltissimi esempi di oggetti il cui schema sembra essere molto più aderente alla geometria frattale rispetto a quella euclidea, i cosiddetti *frattali biomorfi*.



Applicazioni dei frattali

I frattali trovano numerose applicazioni, ad esempio:

- moto di fluidi turbolenti o fenomeni di combustione
- compressione di video e immagini
- studio della natura: dalle linee di costa, ai corsi dei fiumi e alle catene montuose
- percolazione, cioé lento movimento di un fluido su un materiale poroso

Insieme di Cantor

L'insieme di Cantor è un sottoinsieme dell'intervallo $[0, 1]$ dei numeri reali. L'algoritmo che lo genera è il seguente:

1. si divide l'intervallo in tre parti congruenti
2. si rimuove il segmento centrale aperto (dunque i due estremi non vengono rimossi), ottenendo così due intervalli (chiusi) più piccoli
3. si riapplica il punto 1. ai due intervalli ottenuti

Insieme di Cantor

Perimetro e dimensione

Ad ogni passo viene rimosso un terzo del numero di punti (ogni intervallo diventa i 2/3 del precedente) dunque il perimetro finale del frattale è:

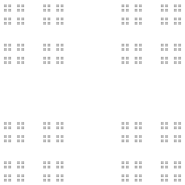
$$p = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n \cdot 1 = 0$$

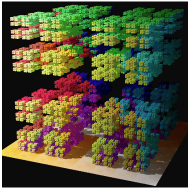
Ad ogni iterazione, ogni intervallo viene diviso in due parti simili al frattale stesso, con fattore di omotetia $K = 1/3$ dunque la sua dimensione di Hausdorff è:

$$D_f = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.6309$$

Insieme di Cantor
Cardinalità

La cardinalità dell'insieme di Cantor è la stessa dell'intervallo $[0, 1]$ e, quindi, dei reali.
Infatti all'n-esima iterazione vengono rimossi tutti i numeri che, nella loro scrittura decimale in base 3, hanno la cifra 1 nell'n-esima posizione. In generale solo i punti scrivibili con le cifre 0 e 2, in base 3, appartengono all'insieme.
Trasformando i 2 in 1 e leggendo i numeri in binario si ottiene di nuovo tutto l'intervallo $[0, 1]$, da cui deriva la stessa cardinalità.





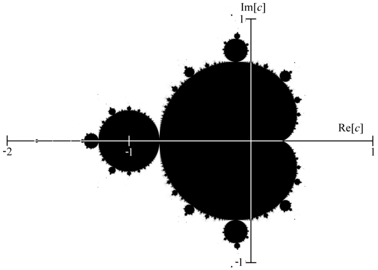
Insieme di Mandelbrot

Definizione

L'insieme di Mandelbrot è costituito da tutti i numeri complessi c tali che che la successione

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_n = z_{n-1}^2 + c \end{cases}$$

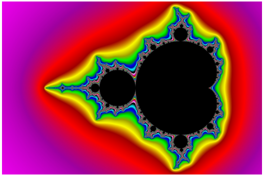
è limitata superiormente.

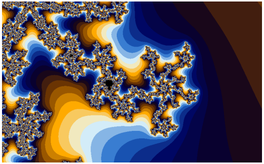


Insieme di Mandelbrot

Escape Time Algorithm

Per ogni pixel (x, y), che rappresenta il numero complesso $c = x + iy$, viene calcolato se e quanto velocemente diverge z_n e, in base al risultato ottenuto, viene assegnato un colore al pixel. Chiaramente, per evitare loop infiniti, viene fissata una soglia oltre la quale si ferma il calcolo di z_n e si ipotizza che la successione non diverge.





Insieme di Mandelbrot

Continuous Smooth Coloring

L'algoritmo, per ogni numero complesso c per cui z_n diverge, calcola il primo indice N per cui $|z_N| > 2$ e ritorna un numero reale v, in base a cui è deciso il colore del pixel, calcolato come:

$$v = N - \log_2(\log_2 |z_N|)$$

```cpp
// Smooth color:
inline ld IterateSmooth(ld& cRe, ld& cIm) {
    ld zRe=0, zIm=0, appo=0;
    for(int i=0;i<MaxIt;i++) {
        if(zRe * zRe + zIm * zIm > 4.0)
            return i+1 - log2(log2( sqrt(zRe * zRe + zIm * zIm) ));

        appo=zRe;
        zRe = zRe*zRe - zIm*zIm + cRe;
        zIm = 2*appo*zIm + cIm;
    }
    return MaxIt;
}
```

Snippet C++

Insieme di Mandelbrot

Supersampling

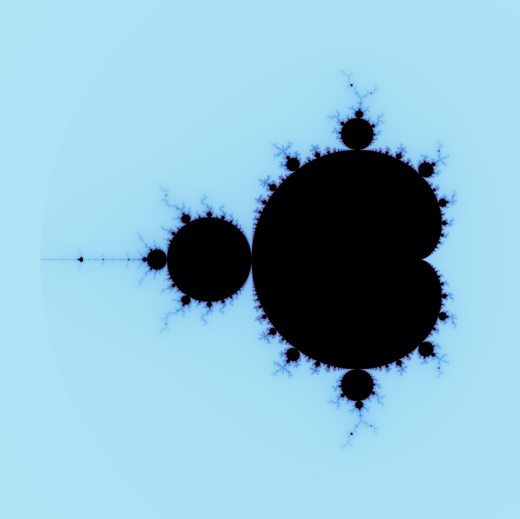
L'algoritmo consiste nella costruzione di una nuova immagine, a dimensioni ridotte, dove ogni pixel ha colore pari alla media dei colori di un quadrato $N \times N$ di punti dell'immagine originale. In questo modo gli *outliers* vengono praticamente eliminati.

```
for(int i=0, i2=0;i<R/4;i++, i2+=4) {
    for(int j=0, j2=0;j<C/4;j++, j2+=4) {
        colore = triple(0, 0, 0);
        ct = 0;
        for(int k=0;k<4;k++) {
            for(int h = 0;h<4;h++) {
                if(k+i2 < R && h+j2 < C) {
                    colore.R += mat[k+i2][h+j2].R;
                    colore.G += mat[k+i2][h+j2].G;
                    colore.B += mat[k+i2][h+j2].B;
                    ++ct;
                }
            }
        }
        colore.R /= ct;
        colore.G /= ct;
        colore.B /= ct;
        out << colore.R << " " << colore.G << " "<<colore.B << "  ";
    }
    out << endl;
}
```

Snippet C++

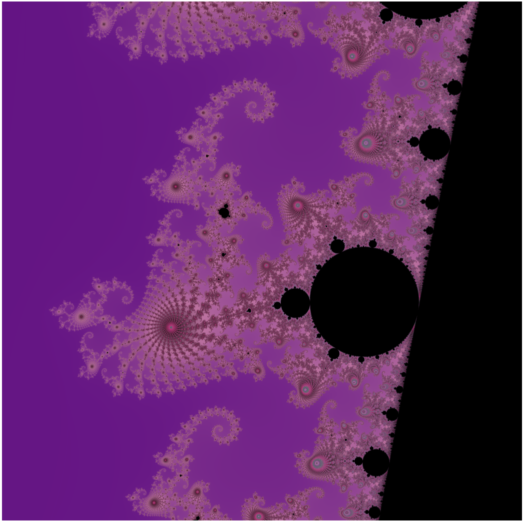
Insieme di Mandelbrot

Alcune immagini



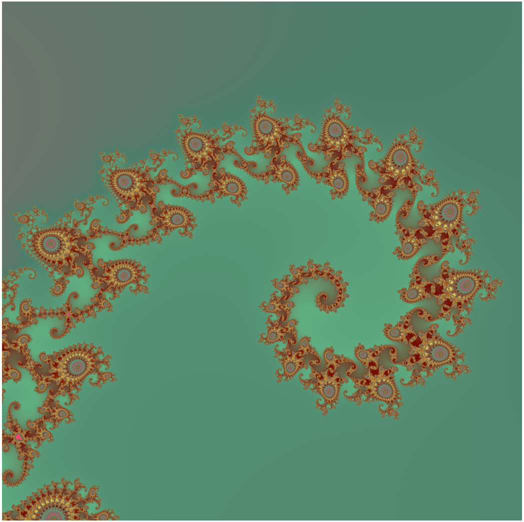
Insieme di Mandelbrot

Alcune immagini



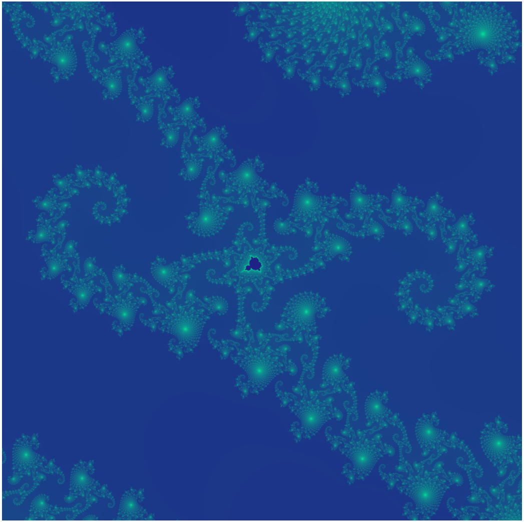
Insieme di Mandelbrot

Alcune immagini



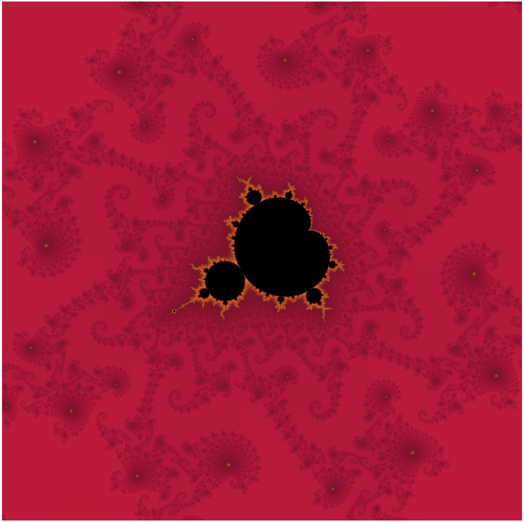
Insieme di Mandelbrot

Alcune immagini



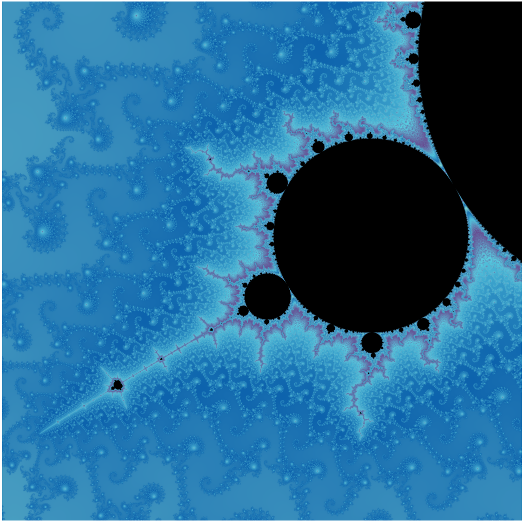
Insieme di Mandelbrot

Alcune immagini



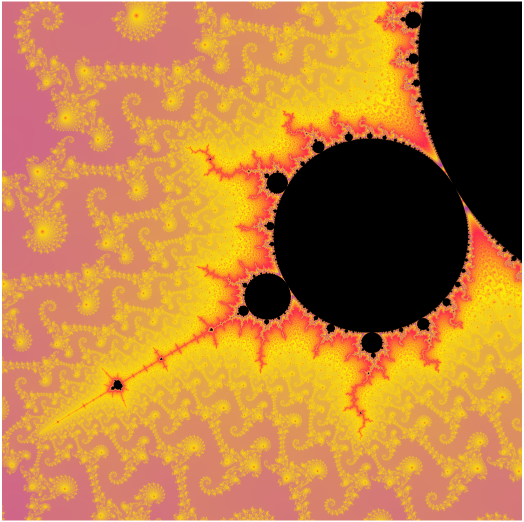
Insieme di Mandelbrot

Alcune immagini



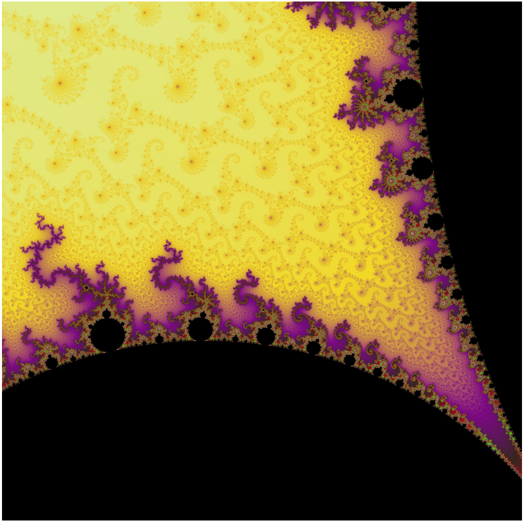
Insieme di Mandelbrot

Alcune immagini



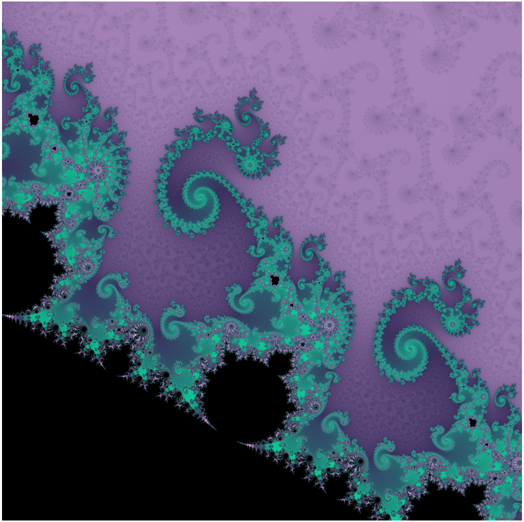
Insieme di Mandelbrot

Alcune immagini



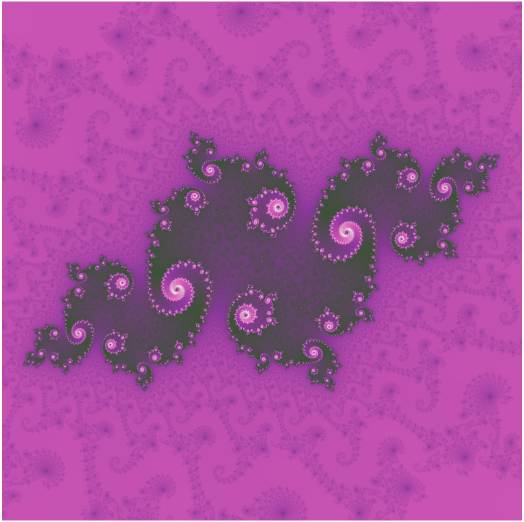
Insieme di Mandelbrot

Alcune immagini



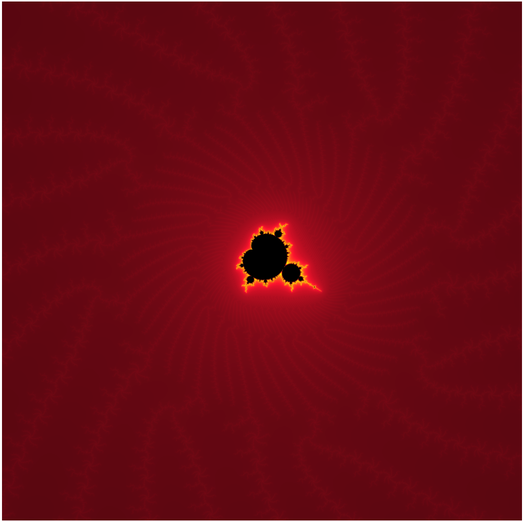
Insieme di Mandelbrot

Alcune immagini



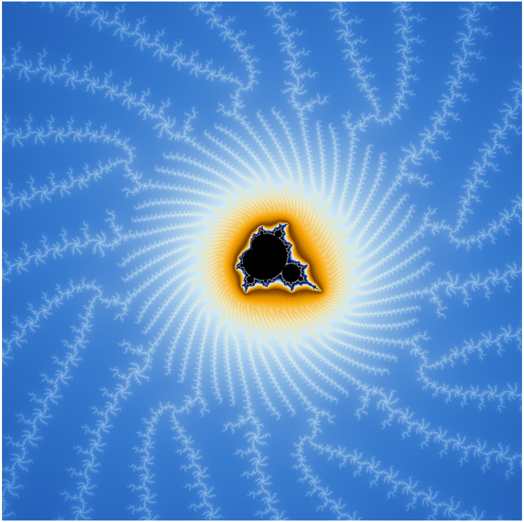
Insieme di Mandelbrot

Alcune immagini



Insieme di Mandelbrot

Alcune immagini



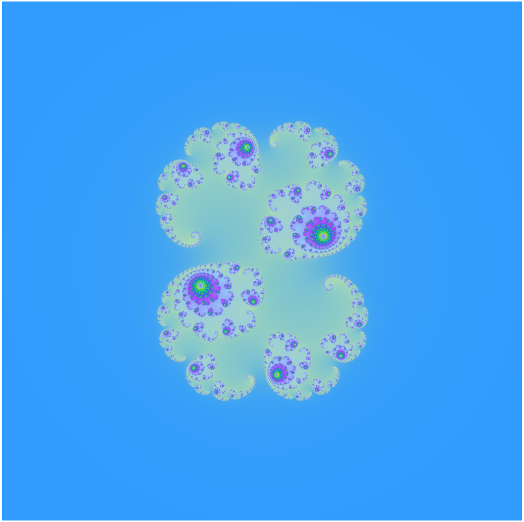
Insieme di Julia

Definizione

L'insieme di Julia di una funzione complessa f, indicato come $J(f)$, è definito come l'insieme di tutti i numeri complessi tali che il comportamento della funzione in seguito a ripetute iterazioni è caotico, ovvero in seguito ad una piccola perturbazione varia drasticamente. Un interessante insieme di Julia è quello relativo alla funzione complessa $f_c(z) = z^2 + c$ dove z è un numero complesso e c una costante.

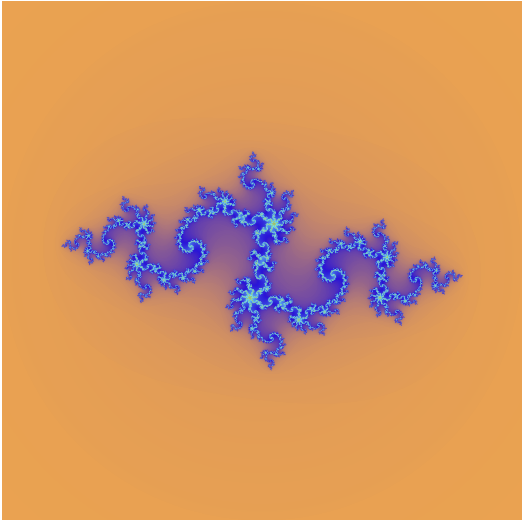
Insieme di Julia

Alcune immagini



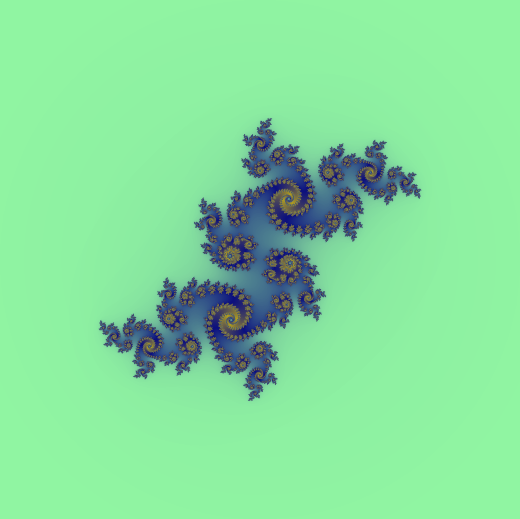
Insieme di Julia

Alcune immagini



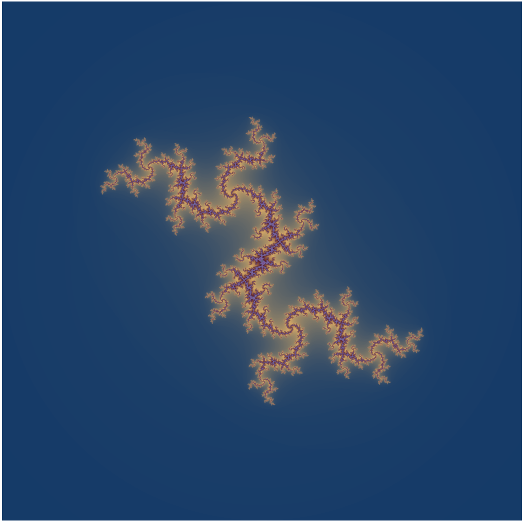
Insieme di Julia

Alcune immagini



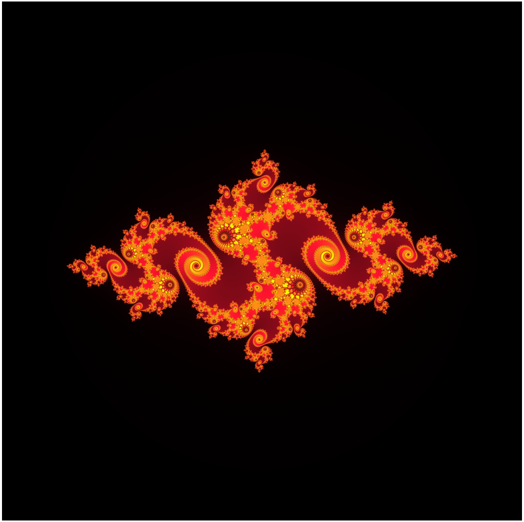
Insieme di Julia

Alcune immagini



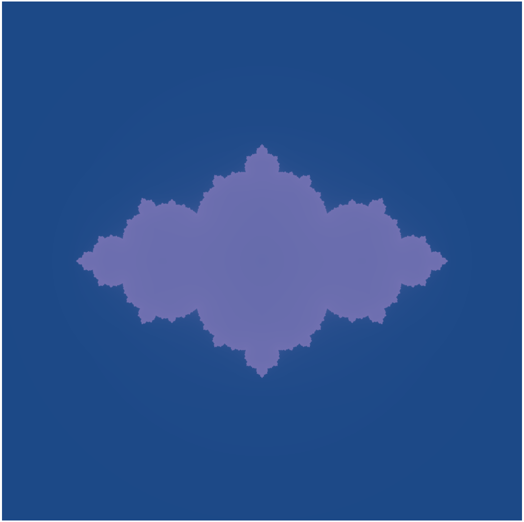
Insieme di Julia

Alcune immagini



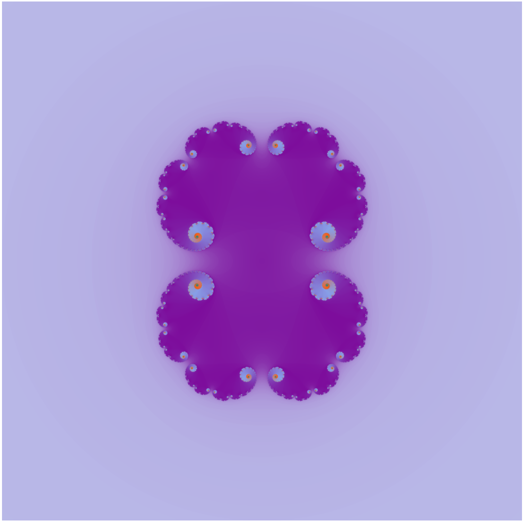
Insieme di Julia

Alcune immagini



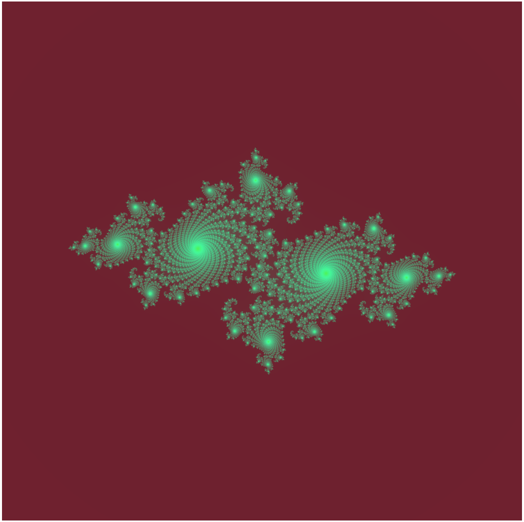
Insieme di Julia

Alcune immagini



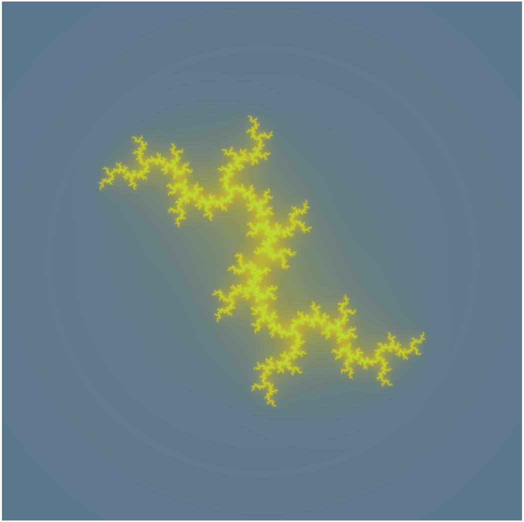
Insieme di Julia

Alcune immagini

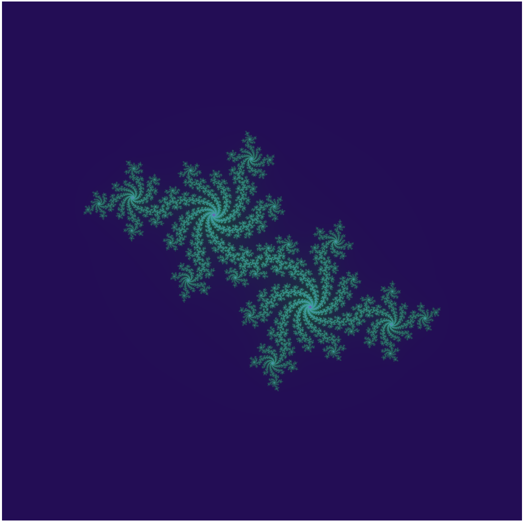


Insieme di Julia

Alcune immagini

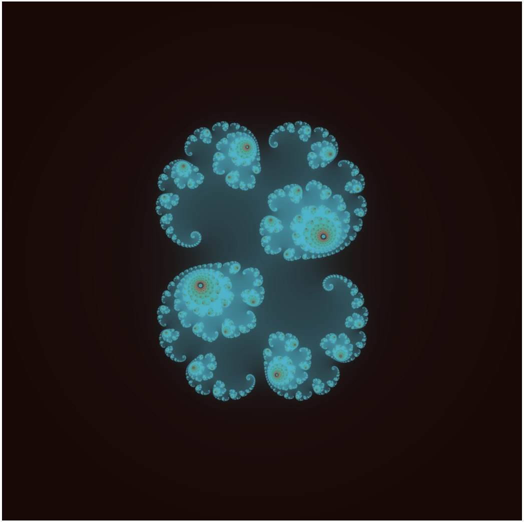


Insieme di Julia
Alcune immagini

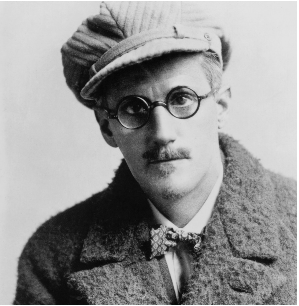


Insieme di Julia

Alcune immagini



James Joyce
Life and Works

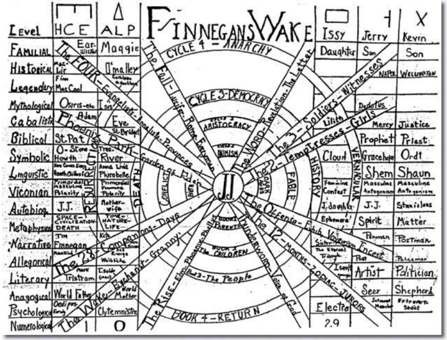


James Joyce (1882 - 1941) was an Irish novelist and poet. He is considered one of the most influential authors of the twentieth century.
Joyce's charateristic narrative mode is the so called *stream of consciousness*, which attempts to give the written equivalent of the character's thought processes.

James Joyce

Finnegans Wake

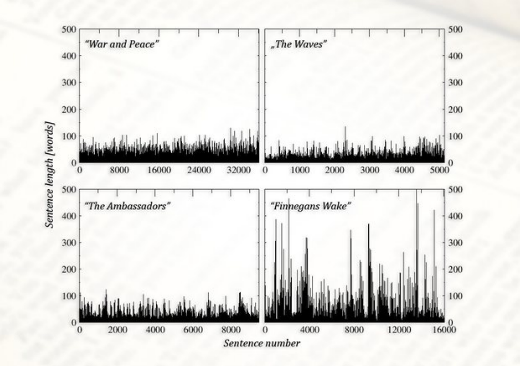
Finnegans Wake is the last book by James Joyce, published in 1939, two years before the author's death. It is certainly the most "difficult" book, among Joyce' ones.



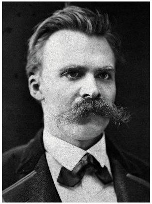
James Joyce

Multifractal Structure of Finnegans Wake

Scientists found that the variations of sentence lengths were governed by a the dynamics of a cascade, meaning their construction is a fractal, characterized by self-similarity. Finnegans Wake, the scientists found, was the most complex of all.



Eterno ritorno dell'uguale

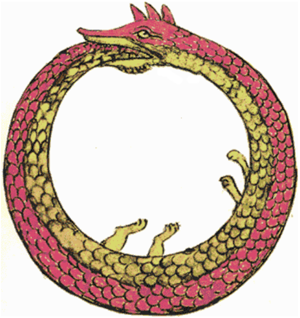


"Tutto va, tutto torna indietro; eternamente ruota la ruota dell'essere. Tutto muove, tutto torna a fiorire, eternamente corre l'anno dell'essere. Tutto crolla, tutto viene di nuovo connesso; eternamente l'essere si costruisce la medesima abitazione. Tutto si diparte, tutto torna a salutarsi; eternamente fedele a se stesso rimane l'anello dell'essere. In ogni attimo comincia l'essere; attorno ad ogni 'qui' ruota la sfera del 'là'. Il centro è dappertutto. Ricurvo è il sentiero dell'eternità."

Eterno ritorno dell'uguale

Concezione ciclica del tempo

Nietzsche, con la teoria dell'eterno ritorno, recupera una concezione precristiana del mondo, presente nella Grecia presocratica e nelle antiche civiltà indiane, in cui vi è una visione ciclica del tempo, opposta a quella rettilinea di tipo cristiano-moderna. Secondo Nietzsche, solo grazie ad una concezione ciclica del tempo, si può giungere ad una vera felicità.



Eterno ritorno dell'uguale

Interpretazioni

- potrebbe trattarsi di una **certezza cosmologica**, come talvolta afferma Nietzsche stesso, dal momento che la quantità di energia nell'universo è finita e il tempo infinito e quindi le manifestazioni e le combinazioni del mondo sono prima o poi destinate a ripetersi
- potrebbe invece essere un'**ipotesi sull'essere** che funge da imperativo categorico, che prescrive di amare la vita e agire come se tutto dovesse ritornare
- oppure potrebbe essere l'**enunciazione metaforica di un modo di essere dell'essere**, che l'uomo può incarnare solo nella misura in cui accetta la vita.