Stima del valore di una costante in presenza di rumore esponenzialmente correlato

Carlo Fisicaro

OBIETTIVO

Stimare il valore della costante β adimensionale per mezzo di misurazioni soggette a rumore stocastico

Studieremo in particolare il caso di rumore *esponenzialmente correlato*

RUMORE ESPONENZIALMENTE CORRELATO

Ubbidisce ad un'equazione differenziale stocastica del prim’ordine del tipo:

$$\dot{u}(t) = -\frac{u(t)}{\theta} + w(t)$$

θ: tempo di correlazione

$w(t)$: rumore bianco gaussiano a media nulla e varianza σ_w^2

Per poter generare un processo esponenzialmente correlato è necessario discretizzare la derivata temporale all’interno dell’equazione, ottenendo

$$\frac{u(i+1) - u(i)}{\Delta t} = -\frac{u(i)}{\theta} + w(i)$$

Dalla quale si ottiene la routine

$$\boxed{u(i) = u(i-1)\left(1 - \frac{\Delta t}{\theta}\right) + w(i)\,\Delta t}$$

processo AR(1) con

$$\rho = 1 - \frac{\Delta t}{\theta}$$

$$\omega(i) = w(i)\,\Delta t$$

NOTA:

I processi autoregressivi del prim'ordine o AR(1), sono processi stocastici in cui l'output dipende linearmente dall'input e sono della forma

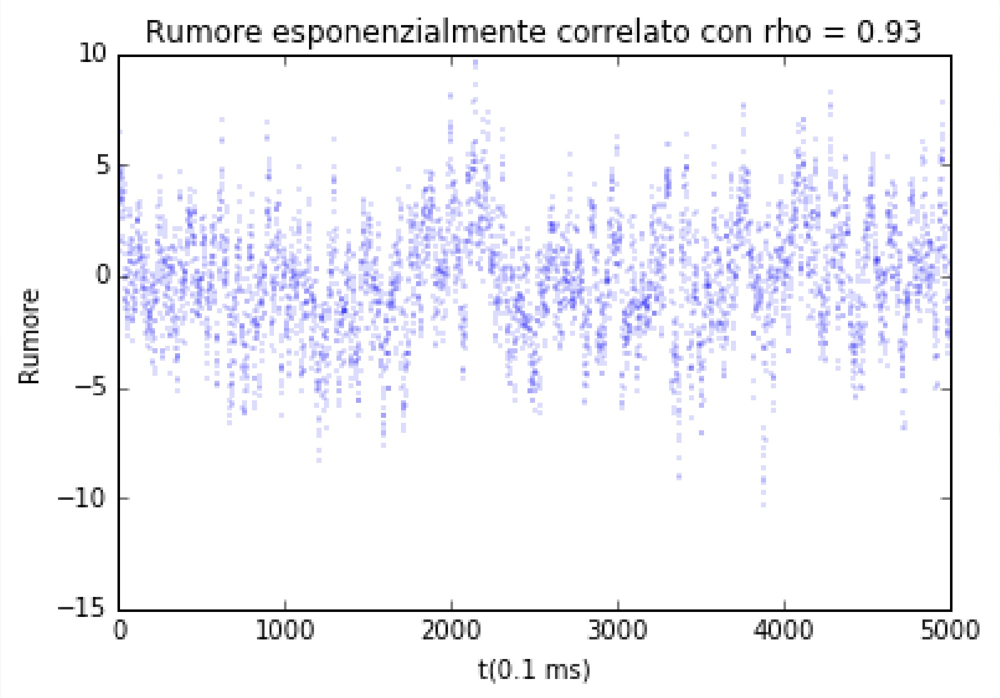
$$u(i) = \rho\, u(i-1) + \omega(i)$$

- ρ: parametro di autocorrelazione
- $\omega(i)$: rumore bianco gaussiano a media nulla e varianza $\sigma_w^2\,\Delta t^2$

SIMULAZIONE PROCESSO AR(1)

Sfruttando la routine ricavata prima, simuliamo un processo AR(1) con $\Delta t = 10^{-4} s$. Variando θ otteniamo tre diversi valori di ρ e quindi tre diversi tipi di rumore.

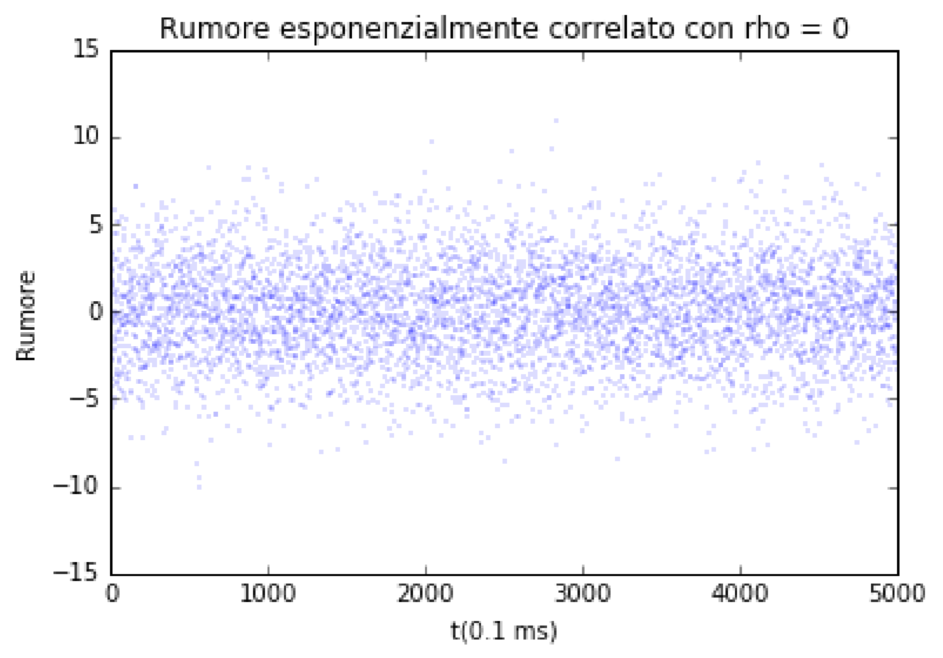
NOTA: al fine di poter confrontare casi con correlazioni diverse, per ogni tipologia di rumore varierò σ_w in modo che $Var[u] = \gamma = cost$.



$\theta = 0.0015$ s

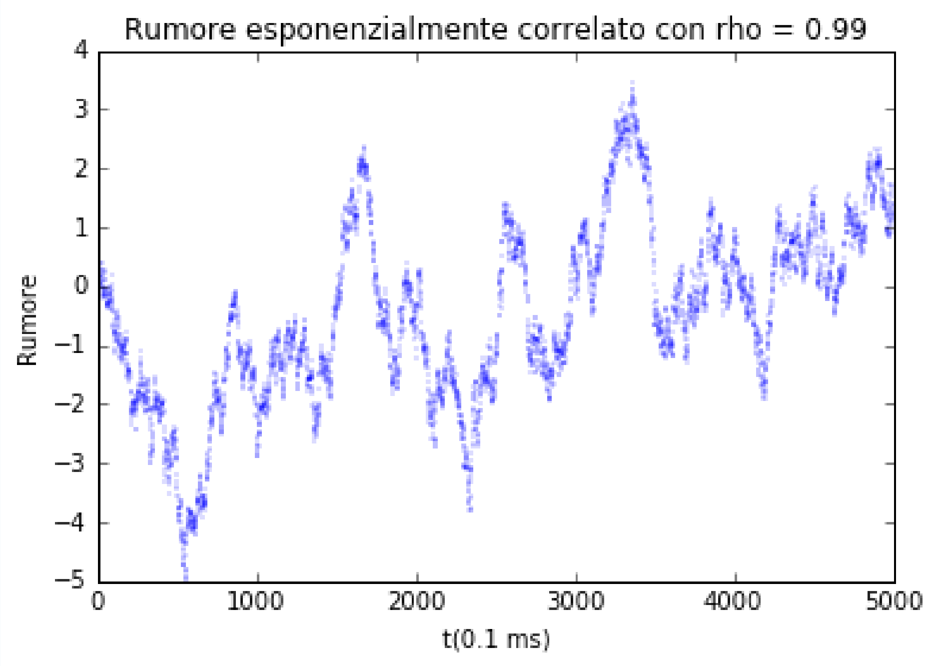
$\sigma_\omega = 1$ quindi

$\sigma_u = 2.7$



$\theta = \Delta t$
$\sigma_\omega = 2.72$ quindi
$\sigma_u = 2.7$

Poichè $\rho = 0$ si tratta di un rumore bianco



$\theta = 0.1\ s$
$\sigma_\omega = 0.38$ quindi
$\sigma_u = 2.7$

MATRICE DI COVARIANZA PER UN PROCESSO AR(1)

Dato un processo AR(1) standard $u(i) = \rho\, u(i-1) + \omega(i)$ con $E[u] = 0$, cioè t.c $E[\omega] = 0$ (come nei casi esaminati):

$$Var[u(i)] = Var[\rho\, u(i-1) + \omega(i)] = Var[\rho\, u(i-1)] + 2 \underbrace{E[\rho\, u(i-1)\, \omega(i)]}_{E[\rho^i u(0) + \sum_{j=0}^{i-1} \rho^j \omega(i-j)]} + Var[\omega(i)]$$

$$= Var[\rho\, u(i-1)] + 2\rho^i \underbrace{E[u(0)]}_{=0} + 2\sum_{j=0}^{i-1} \rho^j \underbrace{E[\omega(i-j)]}_{=0} + Var[\omega(i)]$$

$$= Var[\rho\, u(i-1)] + Var[\omega(i)]$$

Poi notando che

$$Var[u(i)] - \rho^2 Var[u(i-1)] = Var[\omega(i)] = \sigma_\omega^2$$

$\Downarrow$ Applicando l'ipotesi di stazionarietà

$$Var[u] - \rho^2 Var[u] = \sigma_\omega^2 \longrightarrow \boxed{Var[u] = \frac{\sigma_\omega^2}{1-\rho^2}}$$

Dopodichè:

$$Cov[u(i),u(i-1)] = E[u(i)\,u(i-1)] = E\big[\big(\rho\,u(i-1)+\omega(i)\big)\cdot u(i-1)\big]$$

$$= \rho\,Var[u(i-1)] + \underbrace{E[u(i-1)\omega(i)]}_{=0} = \rho\,Var[u] = \rho\,\frac{\sigma_\omega^2}{1-\rho^2}$$

Iterando il procedimento:

$$Cov[u(i),u(j)] = C_{uu}(i,j) = \rho^{|i-j|}\,\frac{\sigma_\omega^2}{1-\rho^2} = \rho^{|i-j|}\gamma$$

con $\gamma = \frac{\sigma_\omega^2}{1-\rho^2}$

$$C_{uu} = \begin{pmatrix} \gamma & \rho\gamma & \cdots & \rho^{n-1}\gamma \\ \rho\gamma & \gamma & \cdots & \rho^{n-2}\gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1}\gamma & \rho^{n-2}\gamma & \cdots & \gamma \end{pmatrix}$$

MODELLO ESPERIMENTO

Valori veri + Rumore

= Valori misurati

Stima parametri modello

ESEMPIO

Modello esperimento: $\vec{y} = \vec{w}\beta + \vec{\epsilon}$

$\vec{y}$: valori misurati

$\vec{w}\beta$: valori veri

$\vec{\epsilon}$: rumore

β: parametro modello

SIMULAZIONE ESPERIMENTO

MISURAZIONI EQUIDISTRIBUITE LUNGO IL RANGE MISURABILE

- Generiamo i valori veri tramite la legge

$$y(t) = \beta$$

con: $\beta_{vero} = 10$

$\Delta t = 10^{-4} s$ intervallo di campionamento

- Sommiamo ai valori veri il rumore esponenzialmente correlato ottenendo

$$y(t) = y = 1 \cdot \beta + u$$

- Simuliamo $n = 5000$ volte l'esperimento, ottenendo

$$\vec{y} = \vec{w}\beta + \vec{u}$$

con $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

NOTA:

Al fine di valutare l’efficienza del modello, variando ρ, generiamo tre diverse tipologie di rumore stocastico.

Formalmente quindi simuliamo *tre diversi esperimenti*

Valori di ρ	Tipologia di rumore
0.93	correlato
0.00	bianco
0.99	perfettamente correlato

STIMA DEL VALORE DI β CON MISURAZIONI SOGGETTE A DIVERSE TIPOLOGIE DI RUMORE

Stima mediante Gauss-Markov

Il teorema di Gauss-Markov ci dice che in caso di trasformazione lineare, come ad esempio $\vec{y} = \vec{w}\beta + \vec{u}$

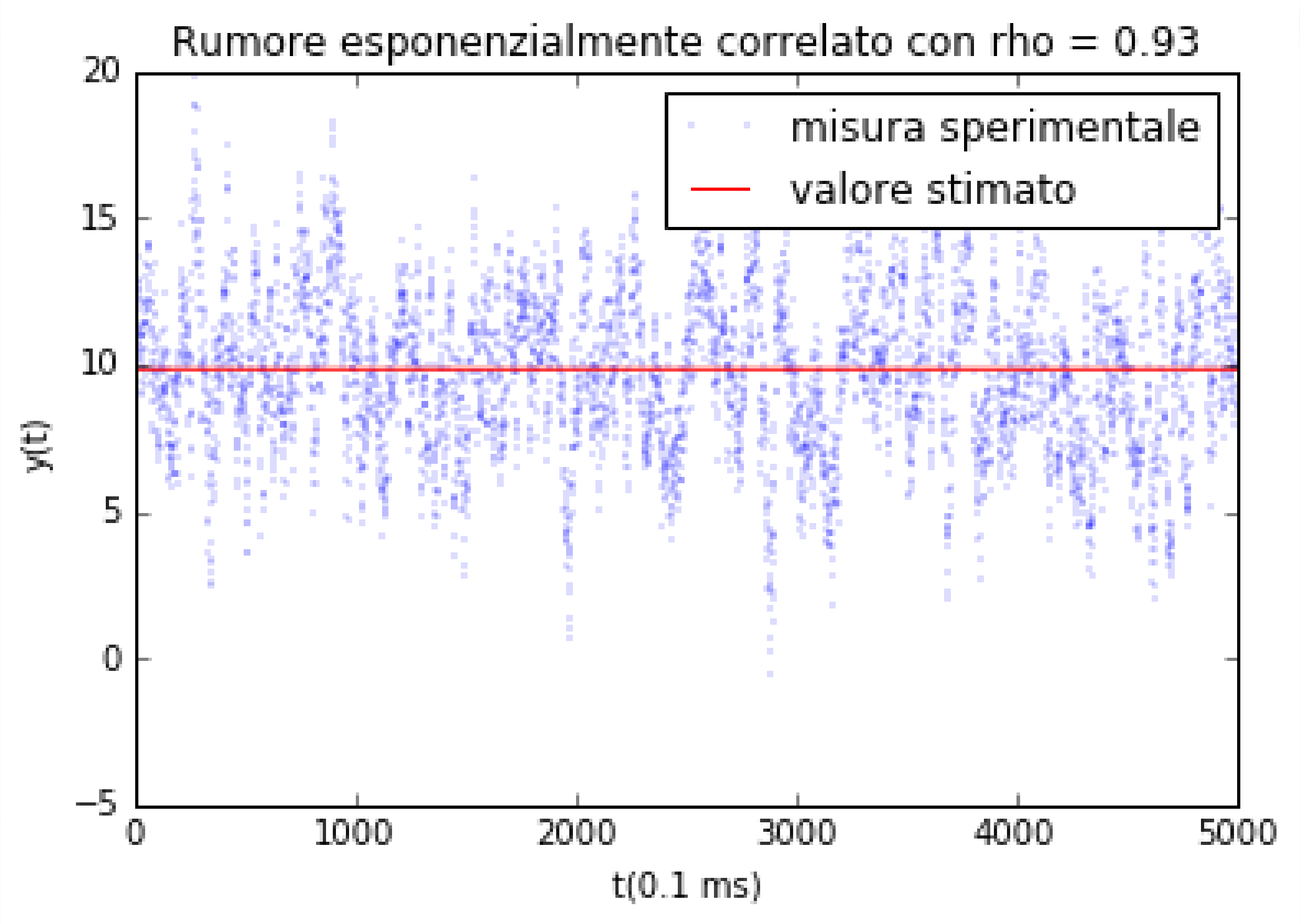
$$\beta_{stimato} = \tilde{\beta} = \beta_{GM} = \left(\vec{w}^T C_{yy} \vec{w}\right)^{-1} \vec{w}^T C_{yy} \vec{y}$$

$$C_{\beta\beta} = \sigma_\beta^2 = \left(\vec{w}^T C_{yy} \vec{w}\right)^{-1}$$

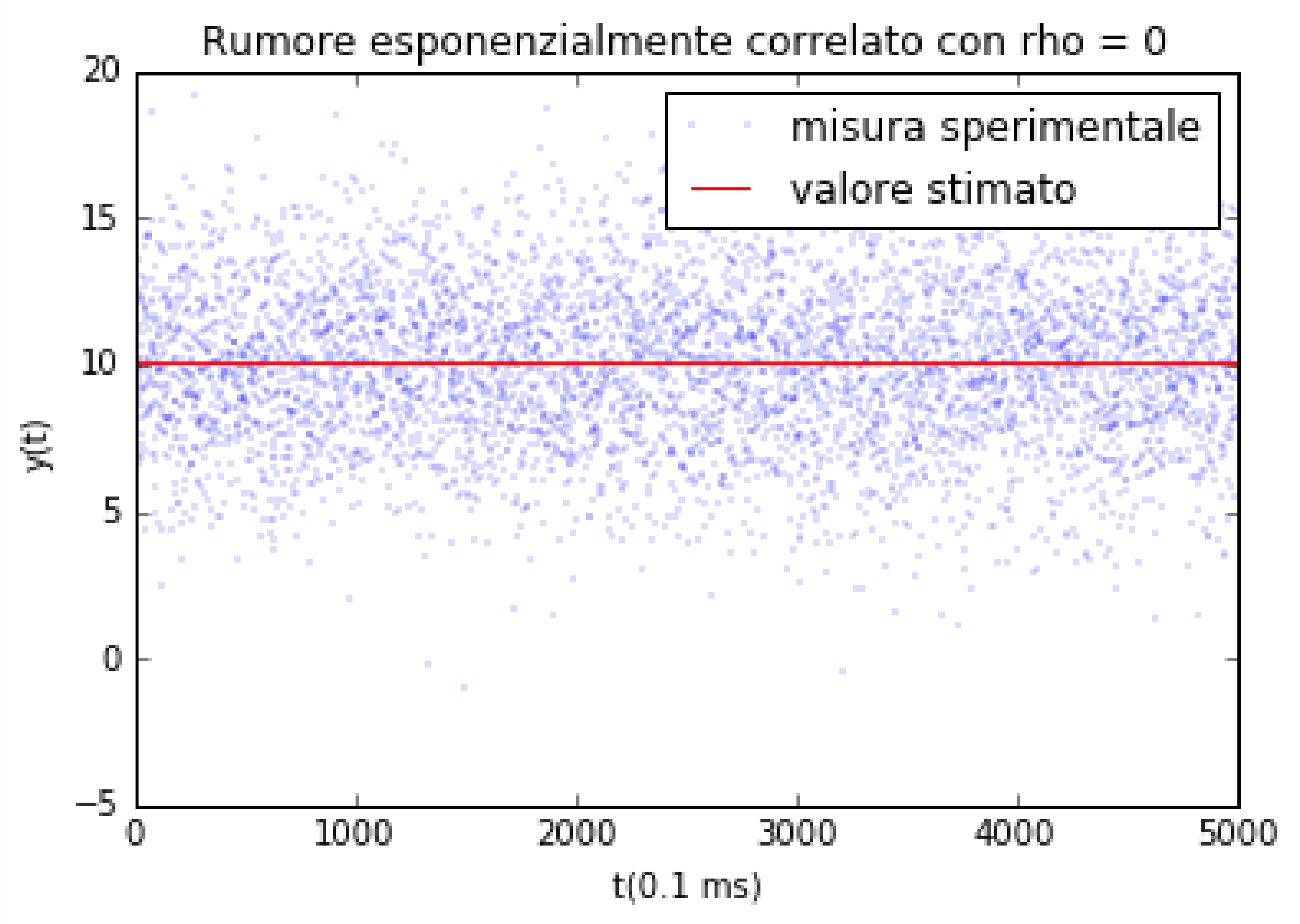
con $C_{yy} = C_{uu}$

Applicandolo otteniamo:

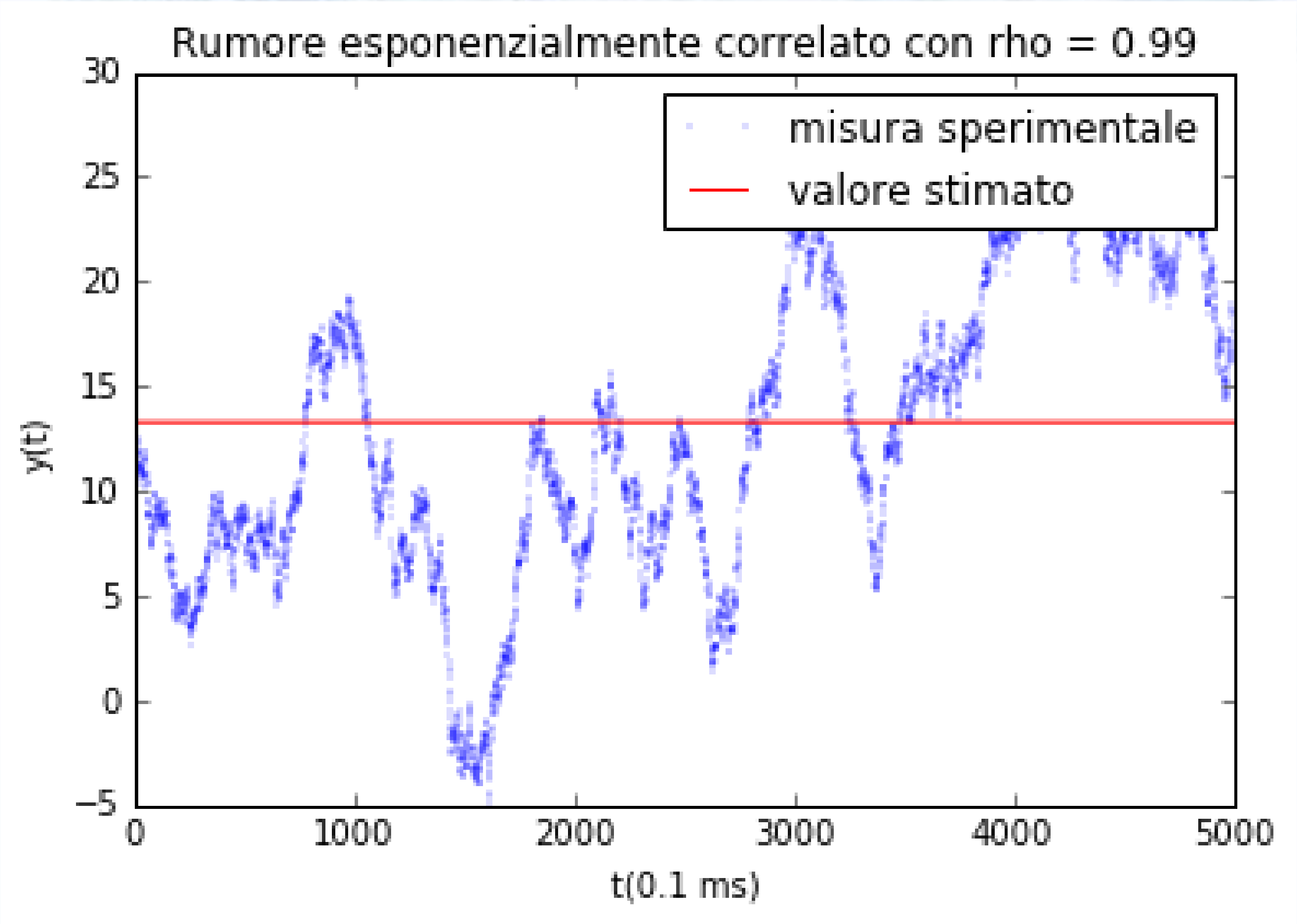
- Caso 1 : $\rho = 0.93$, $\mathrm{n} = 5000$, $\sigma_\omega = 1$, $\sigma_u = 2.7$



- Caso 2: $\rho = 0, \ \mathrm{n} = 5000, \ \ \sigma_\omega = 2.72, \ \sigma_u = 2.7$



- Caso 3: $\rho = 0.99, \quad \mathrm{n} = 5000, \quad \sigma_\omega = 0.38, \; \sigma_u = 2.7$



Ottenendo i seguenti valori

ρ	β_{GM}	σ_β
0.93	9.85	0.21
0.00	10.03	0.04
0.99	13.29	4.59

Come ci si poteva aspettare, il miglior risultato si ottiene con $\rho = 0$ mentre il peggiore con $\rho = 0.99$

Infatti in caso di correlazione perfetta, fittare con un polinomio di grado nullo implica un errore modesto all'interno del campione ma ha il vantaggio di generalizzare sufficientemente bene al di fuori di esso.
Viceversa si và in contro al problema dell'overfitting tendando di fittare con un polinomio di grado arbitrariamente grande ciò che, solo all'apparenza, sembra una curva estremamente complicata.

SIMULAZIONE ESPERIMENTO

MISURAZIONI EQUIDISTRIBUITE AGLI ESTREMI DEL RANGE MISURABILE

- Utilizziamo ancora lo stimatore di Gauss-Markov
- Simuliamo ancora, fissando $\rho = 0.93$, un esperimento
- Il campionamento avviene prendendo lo stesso numero n di dati, metà da 0 a $\frac{T}{10}$ mentre l'altra metà da $\frac{9}{10}T$ a T

con $T = tempo\ di\ campionamento$

In questo caso la matrice di covarianza non restarà identica a prima, infatti il coefficiente di correlazione tra il termine di rumore a $\frac{T}{10}$ e quello a $\frac{9}{10}T$, sarà diverso.

Perciò ponendo:

- $\Delta t' = \dfrac{\frac{1}{10}\Delta t}{\frac{n}{2}} = k\,\Delta t$ con $k = \dfrac{1}{5\,n}$
- $\Delta t'' = \dfrac{9}{10}T - \dfrac{1}{10}T = \dfrac{8}{10}T = \dfrac{8}{10}n\,\Delta t = h\,\Delta t$ con $h = \dfrac{8}{10}n$

La matrice di covarianza quindi sarà formata da quattro blocchi:

$$C_{uu} = \begin{pmatrix}
\gamma & \rho^{k}\gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-1)k}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-1}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-1+1}\gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-1+(\frac{n}{2}-1)}\gamma \\
\rho^{k}\gamma & \gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-2)k}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-2}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-2+1}\gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-2+(\frac{n}{2}-1)}\gamma \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\rho^{(\frac{n}{2}-1)k}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-2)k}\gamma & \cdots & \gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-\frac{n}{2}}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-\frac{n}{2}+1}\gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-\frac{n}{2}+(\frac{n}{2}-1)}\gamma \\
\rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-1}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-2}\gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-\frac{n}{2}}\gamma & \gamma & \rho^{k}\gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-1)k}\gamma \\
\rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-1+1}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-2+1}\gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-\frac{n}{2}+1}\gamma & \rho^{k}\gamma & \gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-2)k}\gamma \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-1+(\frac{n}{2}-1)}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-2+(\frac{n}{2}-1)}\gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-\frac{n}{2}+(\frac{n}{2}-1)}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)k}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-2)k}\gamma & \cdots & \gamma
\end{pmatrix}$$

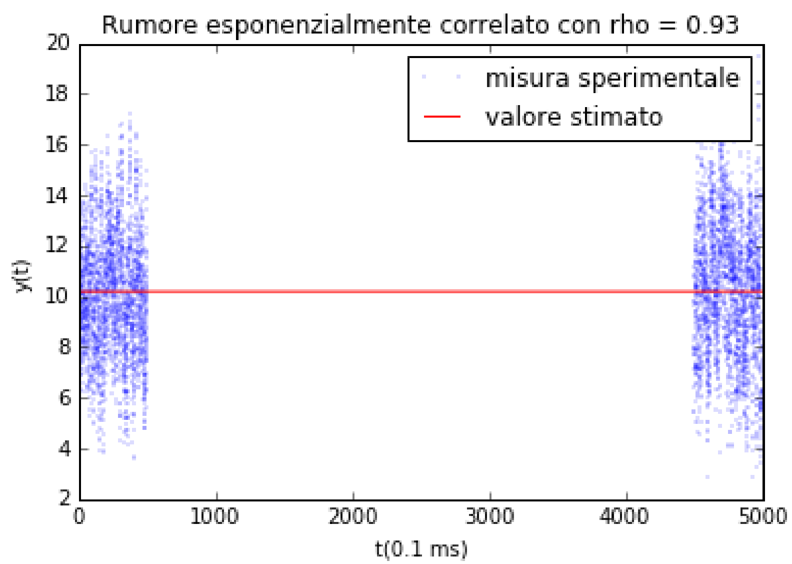
Dove:

- Nel primo e quarto blocco si tiene conto del fatto che, da 0 a $\dfrac{T}{10}$ e da $\dfrac{9}{10}T$ a T, l'intervallo di campionamento è $\Delta t'$
- Nel secondo e terzo blocco si tiene invece conto del fatto che l'intervallo di campionamento tra $\dfrac{T}{10}$ e $\dfrac{9}{10}T$ è $\Delta t''$

Semplificando si ottiene la matrice simmetrica :

$$C_{uu} = \begin{pmatrix} \gamma & \rho^k\gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-1)k}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-1}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk}\gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk+(\frac{n}{2}-2)}\gamma \\ \rho^k\gamma & \gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-2)k}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-2}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-1}\gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk+(\frac{n}{2}-3)}\gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{(\frac{n}{2}-1)k}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-2)k}\gamma & \cdots & \gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-\frac{n}{2}}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-(\frac{n}{2}-1)}\gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-1}\gamma \\ \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-1}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-2}\gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-\frac{n}{2}}\gamma & \gamma & \rho^k\gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-1)k}\gamma \\ \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-1}\gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-(\frac{n}{2}-1)}\gamma & \rho^k\gamma & \gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-2)k}\gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk+(\frac{n}{2}-2)}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk+(\frac{n}{2}-3)}\gamma & \cdots & \rho^{(\frac{n}{2}-1)hk-1}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-1)k}\gamma & \rho^{(\frac{n}{2}-2)k}\gamma & \cdots & \gamma \end{pmatrix}$$

E graficando:



Ottenendo i seguenti valori:

ρ	β_{GM}	σ_β
0.93	10.23	0.20

Al fine di ottenere risultati più solidi e che generalizzino meglio all’esterno del campione, è necessario eseguire una simulazione MonteCarlo dell’esperimento.

SIMULAZIONE MONTECARLO

Eseguiamo ora una simulazione MonteCarlo dell'esperimento con $\rho = 0.93$ e $N = 100$ prove, con:

1. $\boxed{\text{misure equidistribuite lungo tutto il range misurabile}}$
2. $\boxed{\text{misure equidistribuite agli estremi del range misurabile}}$

- Il parametro β all'interno di ogni prova è stato stimato sempre con Gauss-Markov.
- Poichè le N prove sono indipendenti il parametro β risultante è stato stimato con la media aritmetica, quindi

$$\tilde{\beta} = \bar{\beta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \beta_{GM_i} \qquad \text{mentre} \qquad \sigma_{\bar{\beta}}^2 = \frac{\sigma_{\beta}^2}{N}$$

Ottenendo i seguenti valori

Caso	$\overline{\beta}$	$\sigma_{\overline{\beta}}$	Intervallo di confidenza (significatività del 5%)
1	10.01	0.02	(9.97, 10.05)
2	10.03	0.02	(9.99, 10.07)

Perciò concludiamo che la stima di una costante, in presenza di misure soggette a rumore esponenzialmente correlato, che si ottiene equidistribuendo il campionamento lungo l'intero range misurabile, è molto simile a quella che si ottiene ridistribuendo le misure agli estremi di tale range.

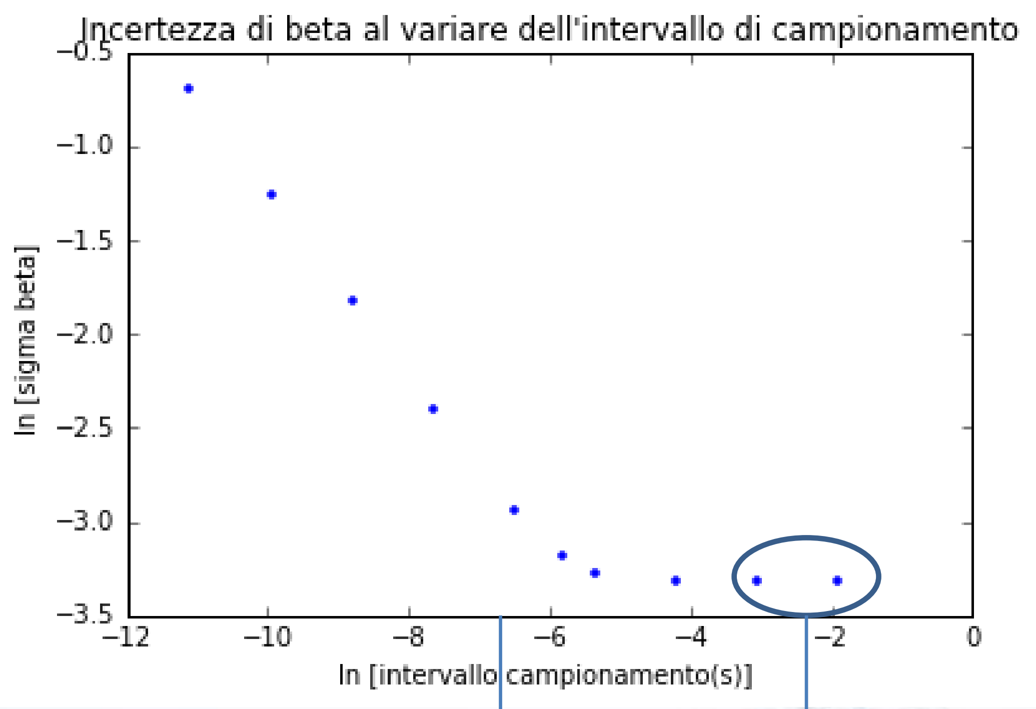
STUDIO DI σ_β AL VARIARE DEL TEMPO DI CAMPIONAMENTO

È interessante ora esaminare l'andamento di σ_β al variare del tempo di campionamento con ρ e θ fissati. Esaminiamo il caso in cui:

- le misure sono equidistribuite lungo l'intero range di campionamento
- $\rho = 0.93$
- $\theta = 0.0015\ s$
- $\sigma_\omega = 1$
- $n = 5000$
- $\beta_{stimato} = \tilde{\beta} = \beta_{GM}$

variare il tempo di campionamento equivale a variare l'intervallo di campionamento

Graficando σ_β in funzione dell'intervallo di campionamento ΔT (misurato in secondi) otteniamo, applicando la scala logaritmica su entrambi gli assi:



Si nota chiaramente che l'incertezza di β_{GM} è minima per $\Delta T \gg \theta$

$\ln(\theta) = -6.5$

$\Delta T \gg \theta$