

# Formule voor de directe formule van een differentievergelijking van de tweede orde

Carlo Jacobs

September 29, 2018

## 1 Het berekenen van de groefactoren

Gegeven een differentievergelijking van de tweede orde en de bijbehorende  $U_0$  en  $U_1$

$$U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2}$$

kunnen we speculeren dat de direct formule is van de vorm

$$U_n = Ag_1^n + Bg_2^n \tag{1}$$

Stel  $U_n = g^n$

$$g^n = ag^{n-1} + bg^{n-2}$$

Delen door  $g^{n-2}$  resulteert in een kwadratische vergelijking waarvan we de waardes van  $g_1$  en  $g_2$  kunnen herleiden door middel van kwadraat afsplitsen.

$$\frac{g^n}{g^{n-2}} = a\frac{g^{n-1}}{g^{n-2}} + b$$

$$g^2 - ag - b = 0$$

$$\left(g - \frac{1}{2}a\right)^2 = b + \frac{1}{4}a^2$$

$$g_{1,2} = \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} + \frac{1}{2}a$$

Laten we voor het gemak iets substitueren.

$$z = \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$$

$$g_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm z \quad (2)$$

## 2 Het berekenen van de coëfficiënten

Uit vergelijkingen (1) en (2) volgt dat

$$U_n = A \left( \frac{1}{2}a + z \right)^n + B \left( \frac{1}{2}a - z \right)^n \quad (3)$$

Hiermee kunnen we coëfficiënten  $A$  en  $B$  berekenen door het volgende stelsel van vergelijkingen op te lossen.

$$\begin{cases} A + B = U_0 \\ Ag_1 + Bg_2 = U_1 \end{cases}$$

Dit lossen we op op de volgende manier.

$$B = U_0 - A \quad (4)$$

$$\begin{aligned} Ag_1 + (U_0 - A) g_2 &= U_1 \\ Ag_1 + U_0 g_2 - Ag_2 &= U_1 \\ Ag_1 - Ag_2 &= U_1 - U_0 g_2 \\ A(g_1 - g_2) &= U_1 - U_0 g_2 \\ A = \frac{U_1 - U_0 g_2}{g_1 - g_2} &= \frac{U_1 - U_0 g_2}{2z} \end{aligned} \quad (5)$$

Uit (4) en (5) volgt

$$B = U_0 - A = U_0 - \frac{U_1 - U_0 g_2}{2z} \quad (6)$$

### 3 De formule

Uit de vergelijkingen (1), (2), (5) en (6) volgt dat:

$$U_n = \frac{U_1 - U_0 g_2}{2z} g_1^n + \left( U_0 - \frac{U_1 - U_0 g_2}{2z} \right) g_2^n$$
$$U_n = \frac{U_1 - U_0 \left( \frac{1}{2}a - z \right)}{2z} \left( \frac{1}{2}a + z \right)^n + \left( U_0 - \frac{U_1 - U_0 \left( \frac{1}{2}a - z \right)}{2z} \right) \left( \frac{1}{2}a - z \right)^n$$

$$U_n = \frac{U_1 - U_0 \left( \frac{1}{2}a - \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} \right)}{\sqrt{4b + a^2}} \left( \frac{1}{2}a + \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} \right)^n$$
$$+ \left( U_0 - \frac{U_1 - U_0 \left( \frac{1}{2}a - \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} \right)}{\sqrt{4b + a^2}} \right) \left( \frac{1}{2}a - \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} \right)^n$$