Formule voor de directe formule van een differentievergelijking van de tweede orde

Carlo Jacobs

September 29, 2018

1 Het berekenen van de groeifactoren

Gegeven een differentievergelijking van de tweede orde en de bijbehorende U_0 en U_1

$$U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2}$$

kunnen we speculeren dat de direct formule is van de vorm

$$U_n = Ag_1^n + Bg_2^n \tag{1}$$

Stel $U_n = g^n$

$$g^n = ag^{n-1} + bg^{n-2}$$

Delen door g^{n-2} resulteert in een kwadratische vergelijking waarvan we de waardes van g_1 en g_2 kunnen herleiden door middel van kwadraat afsplitsen.

$$\frac{g^n}{g^{n-2}} = a\frac{g^{n-1}}{g^{n-2}} + b$$

$$g^2 - ag - b = 0$$

$$\left(g - \frac{1}{2}a\right)^2 = b + \frac{1}{4}a^2$$

$$g_{1,2} = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} + \frac{1}{2}a$$

Laten we voor het gemak iets substitueren.

$$z = \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$$

$$g_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm z \tag{2}$$

2 Het berekenen van de coëfficiënten

Uit vergelijkingen (1) en (2) volgt dat

$$U_n = A\left(\frac{1}{2}a + z\right)^n + B\left(\frac{1}{2}a - z\right)^n \tag{3}$$

Hiermee kunnen we coëfficiënten A en B berekenen door het volgende stelsel van vergelijkingen op te lossen.

$$\begin{cases} A + B = U_0 \\ Ag_1 + Bg_2 = U_1 \end{cases}$$

Dit lossen we op op de volgende manier.

$$B = U_0 - A \tag{4}$$

$$Ag_1 + (U_0 - A)\,g_2 = U_1$$

$$Ag_1 + U_0g_2 - Ag_2 = U_1$$

$$Ag_1 - Ag_2 = U_1 - U_0g_2$$

$$A\,(g_1 - g_2) = U_1 - U_0g_2$$

$$A = \frac{U_1 - U_0g_2}{g_1 - g_2} = \frac{U_1 - U_0g_2}{2z} \tag{5}$$

Uit (4) en (5) volgt

$$B = U_0 - A = U_0 - \frac{U_1 - U_0g_2}{2z} \tag{6}$$

3 De formule

Uit de vergelijkingen (1), (2), (5) en (6) volgt dat:

$$U_n = \frac{U_1 - U_0 g_2}{2z} g_1^n + \left(U_0 - \frac{U_1 - U_0 g_2}{2z} \right) g_2^n$$

$$U_n = \frac{U_1 - U_0 \left(\frac{1}{2}a - z\right)}{2z} \left(\frac{1}{2}a + z \right)^n + \left(U_0 - \frac{U_1 - U_0 \left(\frac{1}{2}a - z\right)}{2z} \right) \left(\frac{1}{2}a - z \right)^n$$

$$\boxed{\begin{aligned} U_n = {} & \frac{U_1 - U_0 \left(\frac{1}{2}a - \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}\right)}{2\sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}} \left(\frac{1}{2}a + \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} \right)^n \\ & + \left(U_0 - \frac{U_1 - U_0 \left(\frac{1}{2}a - \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}\right)}{2\sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}} \right) \left(\frac{1}{2}a - \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} \right)^n \end{aligned}}$$