

Problema di Keplero

Carlo Lodin, Giacomo Fundarò

26 Febbraio 2025

Contents

1	Introduzione	1
2	Descrizione del sistema	2
2.1	Definizione delle variabili	2
2.2	Equazioni del moto	2
3	Metodi di integrazione numerica	2
3.1	Integrazione esatta del problema di Keplero	2
3.2	Integrazione numerica mediante Velocity Verlet	3
4	Determinazione della traiettoria orbitale e fitting conico	3
5	Verifica della qualità dell'integrazione e validità della seconda legge di Keplero	4
6	Caso studio: Orbita terrestre	4
6.1	Conservazione delle quantità fisiche	4
6.2	Verifica della prima legge di Keplero	5
6.3	Verifica della seconda legge di Keplero	5
7	Conclusione	5

1 Introduzione

Il problema di Keplero rappresenta un caso particolare del problema dei due corpi in cui un corpo di massa m orbita attorno a un corpo massiccio di massa M (con $M \gg m$) sotto l'influenza della gravità. Esso costituisce il fondamento per lo studio delle orbite planetarie e della meccanica celeste.

In questo studio presenteremo una descrizione matematica e fisica del problema. Procederemo, in seguito, a discuterne la soluzione esatta e quella mediante l'implementazione di una simulazione numerica. Ci concentreremo, poi, sull'attendibilità della simulazione, analizzando le grandezze fisiche e calcolando la curva conica che meglio approssima la traiettoria. Infine, analizzeremo nel dettaglio il caso studio tipico dell'orbita terrestre.

L'obiettivo ultimo è quello di mostrare che in condizioni di attendibilità della simulazione valgono le leggi di Keplero.

2 Descrizione del sistema

2.1 Definizione delle variabili

Consideriamo un corpo di massa m in orbita attorno a un corpo massiccio di massa M . La posizione del corpo in orbita è descritta dal vettore $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ e la sua velocità da $\dot{\mathbf{q}}$. L'energia totale del sistema è espressa da

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2\mu} - \frac{G(M+m)\mu}{\|\mathbf{q}\|},$$

dove $\mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{q}}$ e μ è la massa ridotta $\mu = \frac{mM}{m+M}$

2.2 Equazioni del moto

Applicando le equazioni di Hamilton, il sistema si riduce a:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{\mu}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{GMm}{\|\mathbf{q}\|^3} \mathbf{q}$$

3 Metodi di integrazione numerica

3.1 Integrazione esatta del problema di Keplero¹

Nel problema di Keplero è possibile ottenere una soluzione esatta, poiché le orbite risultano essere sezioni coniche (ellissi, parabole o iperboli) come previsto dalle leggi di Keplero. Introducendo le coordinate polari

$$q_1 = r \cos \varphi, \quad q_2 = r \sin \varphi,$$

l'energia per unità di massa si scrive:

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{r} = H_0,$$

accompagnata dalla conservazione del momento angolare

$$r^2\dot{\varphi} = L_0.$$

Considerando il raggio come funzione dell'angolo e procedendo con la sostituzione $u = \frac{1}{r}$ e eliminando la variabile tempo, si ottiene l'equazione differenziale

$$u'' + u = \frac{1}{d}, \quad \text{con } d = L_0^2.$$

La soluzione generale è data da

$$u(\varphi) = \frac{1}{d} + c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi,$$

che, definendo l'eccentricità e e un angolo di fase φ^* , si riscrive come

$$u(\varphi) = \frac{1}{d} \left(1 + e \cos(\varphi - \varphi^*) \right),$$

da cui segue la forma orbitale esatta:

$$r(\varphi) = \frac{d}{1 + e \cos(\varphi - \varphi^*)}.$$

L'integrazione della relazione $r^2\dot{\varphi} = L_0$ permette di ricostruire la dipendenza temporale, ottenendo una soluzione completa in accordo con le leggi di Keplero.

¹Per questo paragrafo abbiamo seguito il libro Geometric Numerical Integration di E.Hairer, C.Lubich e G.Wanner

3.2 Integrazione numerica mediante Velocity Verlet

Per la simulazione numerica del problema è preferibile utilizzare integratori simplettici che preservino le proprietà geometriche del sistema. Nel nostro caso, abbiamo scelto di utilizzare il metodo Velocity Verlet, definito da:

$$q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + \frac{h^2}{2\mu}F_n,$$
$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \frac{h}{2\mu}(F_n + F_{n+1}),$$

con $F_n = -\frac{GMm}{\|q_n\|^3}q_n$ e dove h è l'intervallo temporale tra iterazioni della simulazione. Grazie alla sua capacità di preservare l'energia e il momento angolare nel tempo, questo metodo risulta ideale per simulazioni astronomiche di lunga durata.

4 Determinazione della traiettoria orbitale e fitting conico

Dopo aver simulato il moto del corpo, la traiettoria viene ottenuta come una serie di punti $\{(x_i, y_i, z_i)\}$. Per verificare che la traiettoria segua una sezione conica, si procede come segue:

1. **Riduzione tramite PCA:** i dati tridimensionali vengono centrati e studiati tramite analisi delle componenti principali (PCA), ottenendo una base ortonormale in cui i primi due vettori definiscono il piano di migliore approssimazione.
Di seguito, i punti ottenuti dalla simulazione vengono proiettati su questo piano.

2. **Fitting conico:** in coordinate proiettate (x', y') si assume l'equazione generale della conica

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0.$$

Il vettore dei coefficienti $\mathbf{v} = (A, B, C, D, E, F)^T$ viene determinato tramite decomposizione SVD trovando la soluzione ottima del sistema lineare

$$\mathbf{M}\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Dove \mathbf{M} è una matrice che ha come colonne i termini quadratici e lineari calcolati a partire dai punti della traiettoria simulata. Ad esempio, per una simulazione con N iterazioni, si avrà:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x_1'^2 & x_1'y_1' & y_1'^2 & x_1' & y_1' & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N'^2 & x_N'y_N' & y_N'^2 & x_N' & y_N' & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Classificazione:** calcolando il discriminante $\Delta = B^2 - 4AC$, si stabilisce se la conica è un'ellisse ($\Delta < 0$), una parabola ($\Delta = 0$) o un'iperbole ($\Delta > 0$).
Se l'orbita ha forma ellittica, se ne calcola l'eccentricità.
4. **Cambio di sistema di riferimento e plot:** Vengono generati dei punti appartenenti alla conica nel sistema di riferimento del piano. Questi punti vengono poi trasformati nel sistema di riferimento originale usando la base trovata al punto 1.

Questo procedimento permette di confrontare graficamente la traiettoria simulata con la forma teorica attesa, e consente di trovare un'equazione in forma esplicita della traiettoria simulata (funzione attualmente non implementata).

5 Verifica della qualità dell'integrazione e validità della seconda legge di Keplero

Affrontiamo ora il problema della verifica della qualità dell'approssimazione numerica. I parametri utilizzati per valutare la stabilità e l'accuratezza della simulazione sono:

1. **Conservazione dell'energia:** si controlla che l'energia totale del sistema,

$$E(t) = \frac{1}{2}\mu\|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2 - \frac{G(M+m)\mu}{\|\mathbf{q}(t)\|},$$

rimanga costante nel tempo (entro una piccola tolleranza numerica).

Per monitorare l'errore relativo, il sistema genera un avviso se questo supera il 2%.

2. **Conservazione del momento angolare:** si verifica che il momento angolare,

$$\mathbf{L}(t) = m\mathbf{q}(t) \times \dot{\mathbf{q}}(t),$$

rimanga invariato nel tempo.

In tutti i casi studio analizzati, l'errore relativo rimane almeno un ordine di grandezza più piccolo rispetto a quello dell'energia (in percentuale), rendendo il primo parametro più indicativo di una corretta simulazione.

Una volta accertata la stabilità della simulazione tramite i due parametri sopra indicati, si procede a dimostrare la validità della seconda legge di Keplero. Questa legge afferma che il raggio vettore percorre aree uguali in intervalli di tempo uguali. Per verificarla, si calcola l'area spazzata dal corpo di massa minore in ogni intervallo di tempo Δt approssimandola all'area di un triangolo formato da due vettori posizione consecutivi \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_{i+1} :

$$\text{Area}_i = \frac{1}{2}\|\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_{i+1}\|.$$

Si confrontano quindi le aree calcolate per ogni step, analizzando l'errore relativo:

$$\varepsilon_{\text{area}} = 100\% \cdot \frac{\max(\text{Area}_i) - \min(\text{Area}_i)}{\text{Area}_{\text{media}}}.$$

Un valore basso di $\varepsilon_{\text{area}}$ indica che, nonostante le piccole oscillazioni dovute a errori numerici, la legge delle aree (seconda legge di Keplero) risulta validata.

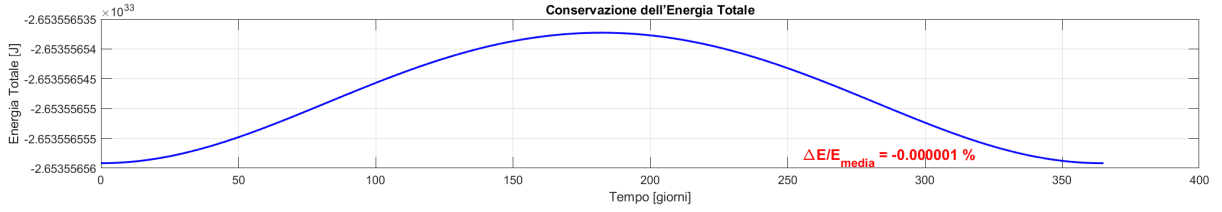
In tutte le simulazioni con un'adeguata conservazione dell'energia, la seconda legge di Keplero si è dimostrata valida, con un errore relativo nell'ordine del $10^{-10}\%$.

6 Caso studio: Orbita terrestre

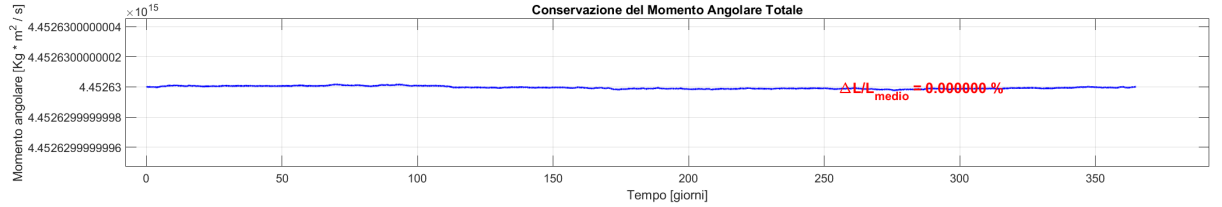
Un caso studio pratico è il problema in cui si prendono come corpi il Sole e la Terra. Abbiamo imposto come condizioni iniziali la distanza e la velocità della terra al perielio, facendo in modo che entrambi i vettori giacessero nel piano $z = 0$ nel sistema di riferimento della simulazione. Inoltre, abbiamo scelto di eseguire la simulazione con uno step temporale pari a 3600 secondi analizzando l'arco temporale di un anno.

6.1 Conservazione delle quantità fisiche

Lo step temporale scelto ha permesso un'ottima conservazione delle quantità fisiche. In particolare, l'errore rispetto all'energia media è dello 0,000001 % e l'errore rispetto al momento angolare medio è di ordine ancora inferiore.



(a) Conservazione dell'energia totale del sistema.



(b) Conservazione del momento angolare totale del sistema.

Figure 1: Analisi della conservazione delle quantità fisiche nel sistema: valori dell'energia totale e del momento angolare totale durante la simulazione.

6.2 Verifica della prima legge di Keplero

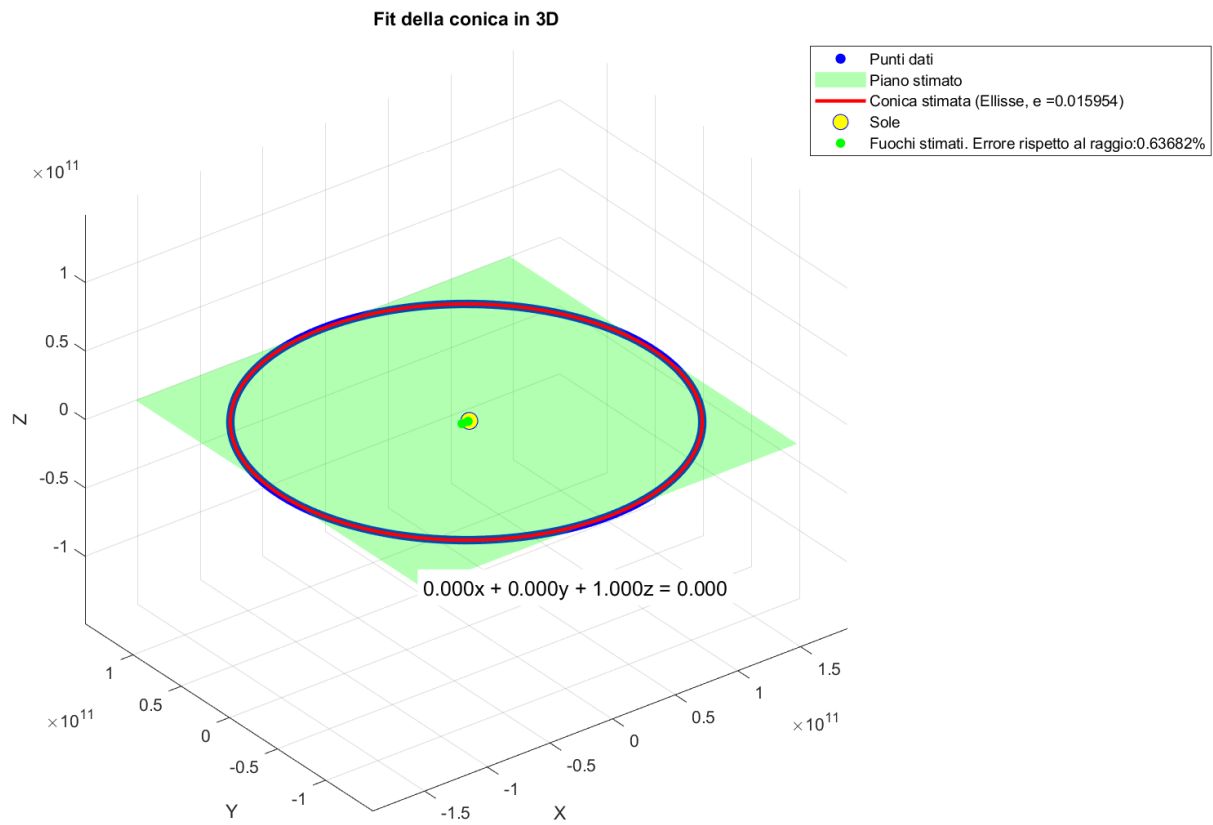
Tramite le tecniche di fitting discusse in precedenza, si verifica facilmente che la traiettoria simulata coincide con quella di un'ellisse con il Sole in uno dei due fuochi. In particolare, la curva individuata dall'algoritmo di fit ha uno dei due fuochi in una posizione che si discosta dall'origine di una quantità tre ordini di grandezza più piccola rispetto al raggio medio dell'orbita. (Fig. 2) Inoltre, l'eccentricità dell'orbita individuata è 0.0160, molto simile al valore reale, pari a 0,0167. Si noti, infine, che il piano su cui giace la traiettoria passa correttamente per il punto iniziale ed è generato dai vettori posizione e velocità iniziali.

6.3 Verifica della seconda legge di Keplero

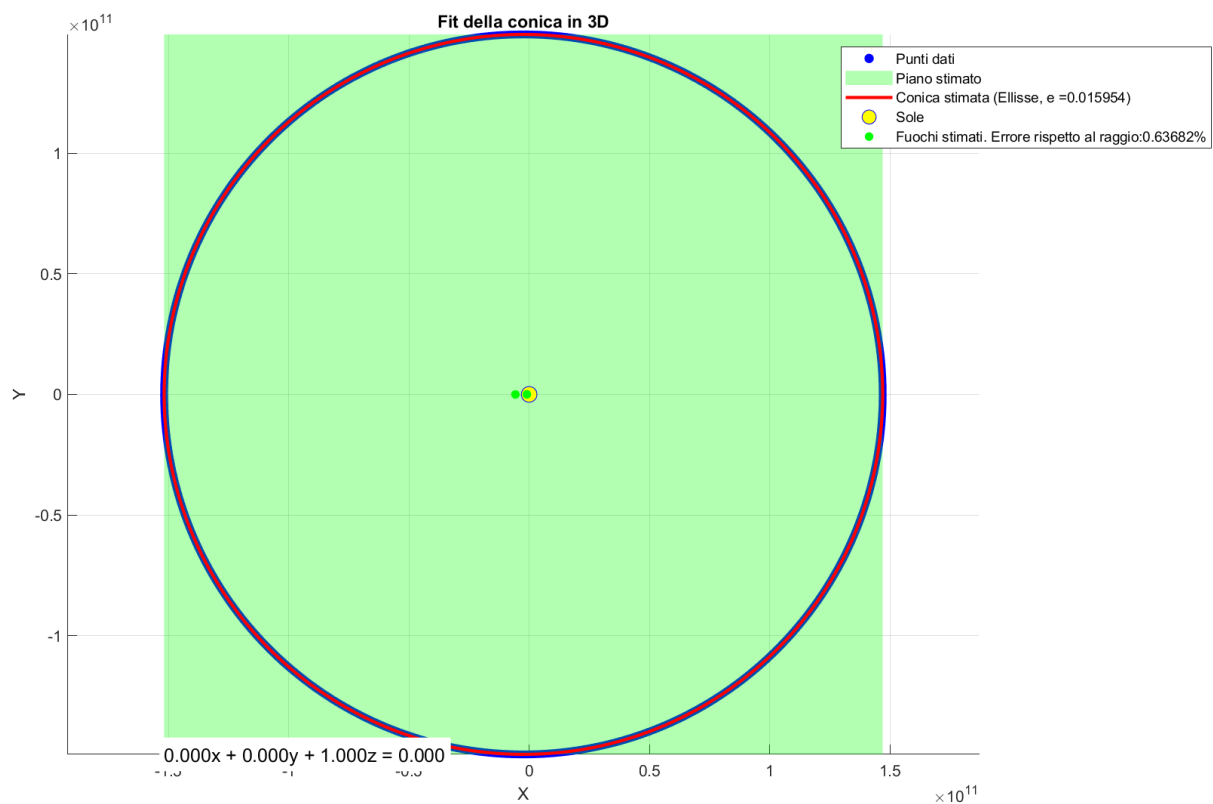
Anche la seconda legge di Keplero si è dimostrata valida nel caso studio. In particolare, mediante le tecniche discusse in precedenza, si è evidenziato un errore relativo rispetto alla media nell'ordine del $10^{-11} \%$ (Fig. 3)

7 Conclusione

L'approccio integrato presentato in questo documento, che combina la soluzione analitica del problema di Keplero con integratori simplettici e una dettagliata analisi del fitting conico, consente di ottenere simulazioni numeriche stabili e affidabili. Questo studio conferma che l'utilizzo di metodi simplettici consente la conservazione dell'energia e del momento angolare, assicurando un'alta qualità dell'integrazione.



(a) Vista isometrica



(b) Vista dall'alto

Figure 2: Fit della traiettoria della Terra in 3D. Il grafico mostra l'ellisse stimata (in rosso) con eccentricità $e = 0.015954$, il Sole (cerchio giallo) e i fuochi stimati (punti verdi).

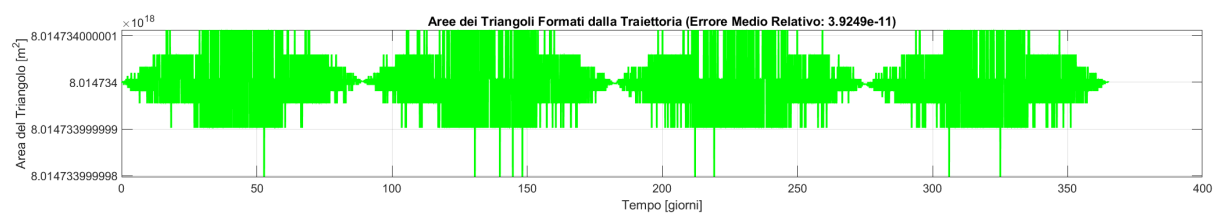


Figure 3: Plot dell'area spazzata a ogni iterazione. L'errore medio relativo è $3.9249\text{e-}11$