

# Studio del Problema degli $n$ -corpi gravitazionali in 3D e confronto tra metodi numerici

Carlo Lodin, Giacomo Fundarò

07/04/2025

## 1 Introduzione

Il problema degli  $n$ -corpi consiste nello studio del moto di  $n$  masse puntiformi che interagiscono tra loro per mezzo della forza gravitazionale. Si tratta di un problema classico della meccanica celeste, non risolvibile in forma chiusa per  $n > 2$ , il che rende necessaria un'approssimazione numerica per l'analisi del sistema. In questo lavoro si simula il sistema in 3D e si confrontano quattro metodi numerici: Eulero esplicito, Eulero симплетico, Verlet e Runge-Kutta del quarto ordine.

## 2 Studio lagrangiano del sistema

Consideriamo un sistema di  $n$  corpi puntiformi con masse  $m_1, \dots, m_n$ , soggetti all'interazione gravitazionale newtoniana. La posizione del corpo  $i$ -esimo è descritta da  $\mathbf{r}_i(t) \in \mathbb{R}^3$ , e la sua velocità da  $\dot{\mathbf{r}}_i(t)$ .

### 2.1 Lagrangiana del sistema

La lagrangiana  $\mathcal{L}$  è definita come differenza tra energia cinetica totale e energia potenziale gravitazionale:

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i\|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{G m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}$$

dove  $G$  è la costante gravitazionale.

### 2.2 Equazioni di Eulero-Lagrange

Le equazioni del moto si ottengono applicando le equazioni di Eulero-Lagrange a ciascun corpo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_i} = \mathbf{0}$$

**Primo termine: derivata rispetto alla velocità**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k \|\dot{\mathbf{r}}_k\|^2 \right) = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

quindi:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

**Secondo termine: derivata rispetto alla posizione** Solo il termine potenziale dipende dalle posizioni  $\mathbf{r}_i$ . La derivata parziale è:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \left( \sum_{1 \leq k < l \leq n} \frac{G m_k m_l}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l\|} \right)$$

Il termine che contiene  $\mathbf{r}_i$  è quello in cui  $i = k$  o  $i = l$ . Per ciascuna coppia  $(i, j)$ , otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \left( \frac{1}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|} \right) = \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3}$$

quindi:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_i} = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_i m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3}$$

**Equazioni del moto** Sostituendo nella legge di Eulero-Lagrange:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_i} = G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_i m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3}$$

Dividendo per  $m_i$ , si ottiene la forma finale:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3}$$

che rappresenta l'accelerazione del corpo  $i$  per effetto dell'interazione gravitazionale con tutti gli altri corpi del sistema.

### 3 Studio hamiltoniano del sistema

Il formalismo hamiltoniano introduce le coordinate generalizzate  $\mathbf{r}_i$  e i momenti coniugati  $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ . L'hamiltoniana è data dall'energia totale del sistema:

$$\mathcal{H} = T + V = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} - \sum_{i < j} \frac{G m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|} \quad (1)$$

Le equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}_i} = \frac{\mathbf{p}_i}{m_i} \\ \dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}_i} = -Gm_i \sum_{j \neq i} m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3} \end{cases} \quad (2)$$

Da cui si giunge alle stesse equazioni ottenute nella sezione 2. Pertanto, le stesse formule possono essere utilizzate con integratori symplettici.

## 4 Implementazione numerica

Il sistema è stato simulato in MATLAB.

I corpi vengono inizializzati con una distribuzione tridimensionale, con un corpo centrale e gli altri disposti attorno ad esso con velocità iniziali tangenziali. Sono stati implementati i seguenti metodi numerici:

### Eulero esplicito

Aggiorna prima la posizione, poi la velocità:

$$\mathbf{r}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{r}_i^t + \Delta t \mathbf{v}_i^t \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{v}_i^t + \Delta t \mathbf{a}_i^t \quad (4)$$

Metodo semplice ma instabile per passi temporali piccoli.

### Eulero symplettico

Aggiorna prima la velocità, poi la posizione:

$$\mathbf{v}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{v}_i^t + \Delta t \mathbf{a}_i^t \quad (5)$$

$$\mathbf{r}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{r}_i^t + \Delta t \mathbf{v}_i^{t+\Delta t} \quad (6)$$

Conserva meglio l'energia rispetto a Eulero esplicito.

### Velocity Verlet

Metodo symplettico con ottime proprietà di stabilità e precisione:

$$\mathbf{r}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{r}_i^t + \mathbf{v}_i^t \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{a}_i^t \Delta t^2 \quad (7)$$

$$\mathbf{a}_i^{t+\Delta t} = f(\mathbf{r}^{t+\Delta t}) \quad (8)$$

$$\mathbf{v}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{v}_i^t + \frac{\mathbf{a}_i^t + \mathbf{a}_i^{t+\Delta t}}{2} \Delta t \quad (9)$$

### Runge-Kutta 4

Metodo ad alta precisione, non symplettico:

$$\mathbf{y}_{t+\Delta t} = \mathbf{y}_t + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (10)$$

con  $k_i$  che stimano la pendenza alle diverse frazioni del passo.

## 5 Comparazione dei metodi

Sono stati eseguiti esperimenti con i quattro metodi a parità di condizioni iniziali con  $dt=0.01$ . Sono stati monitorati: l'energia totale e le traiettorie dei corpi.

Riportiamo di seguito un esempio di simulazione mettendo a confronto i quattro metodi.

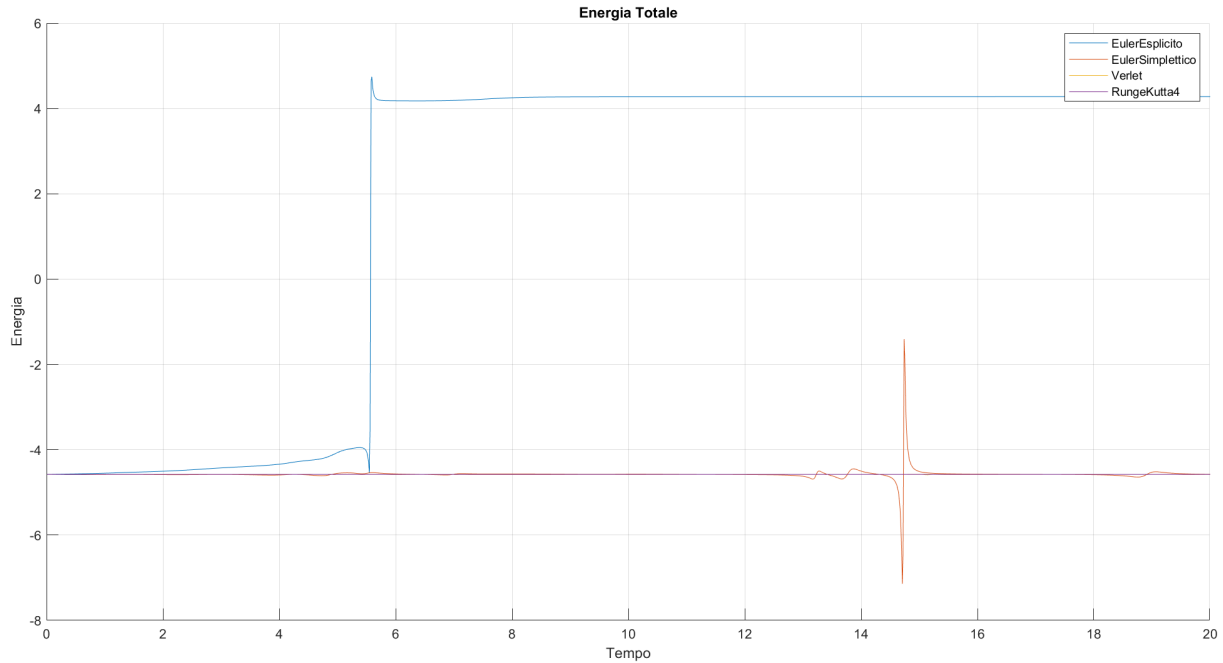


Figure 1: Energia totale del sistema per ogni metodo.

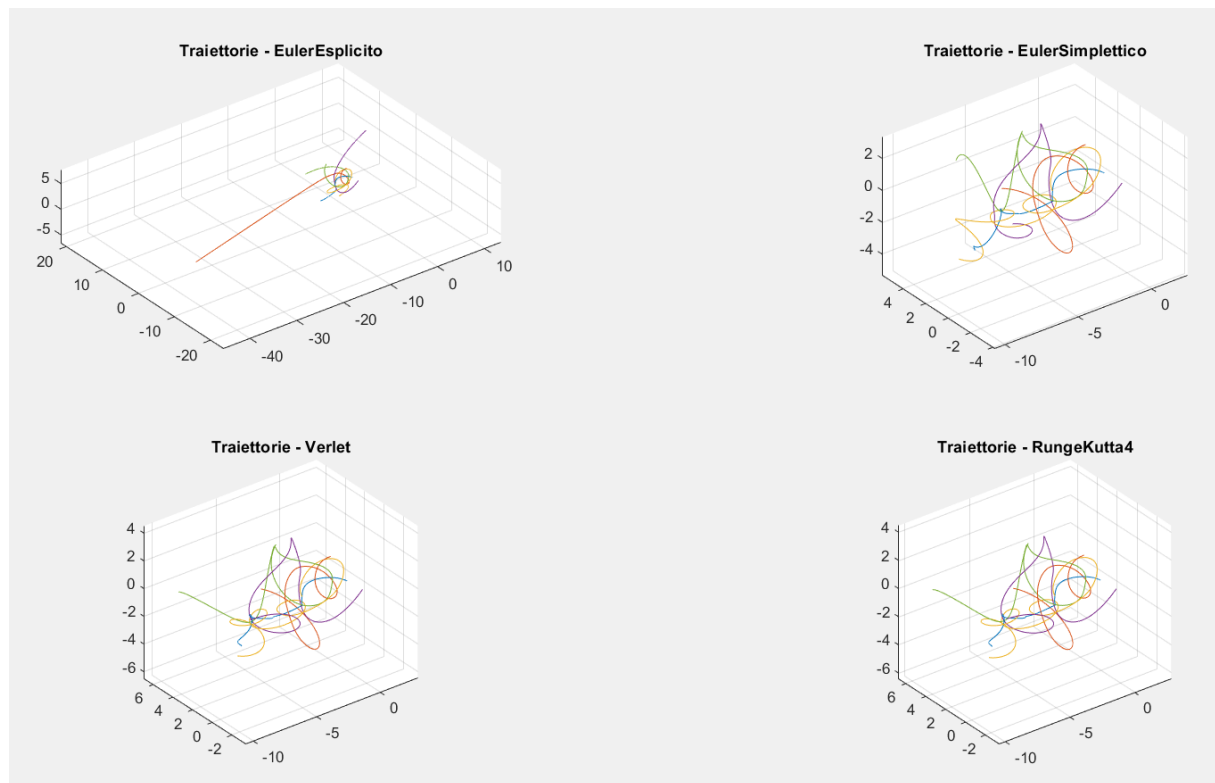


Figure 2: Confronto delle traiettorie dei corpi tra i vari metodi.

I metodi symplettici (Eulero symplettico e Verlet) mostrano una buona conservazione dell'energia nel lungo periodo, con il secondo sempre più preciso del primo. Nonostante RK4 abbia un'alta precisione locale, esso può introdurre deriva energetica. (Fig. 3) Infine, il metodo di Eulero esplicito risulta spesso instabile con errori crescenti nel tempo.

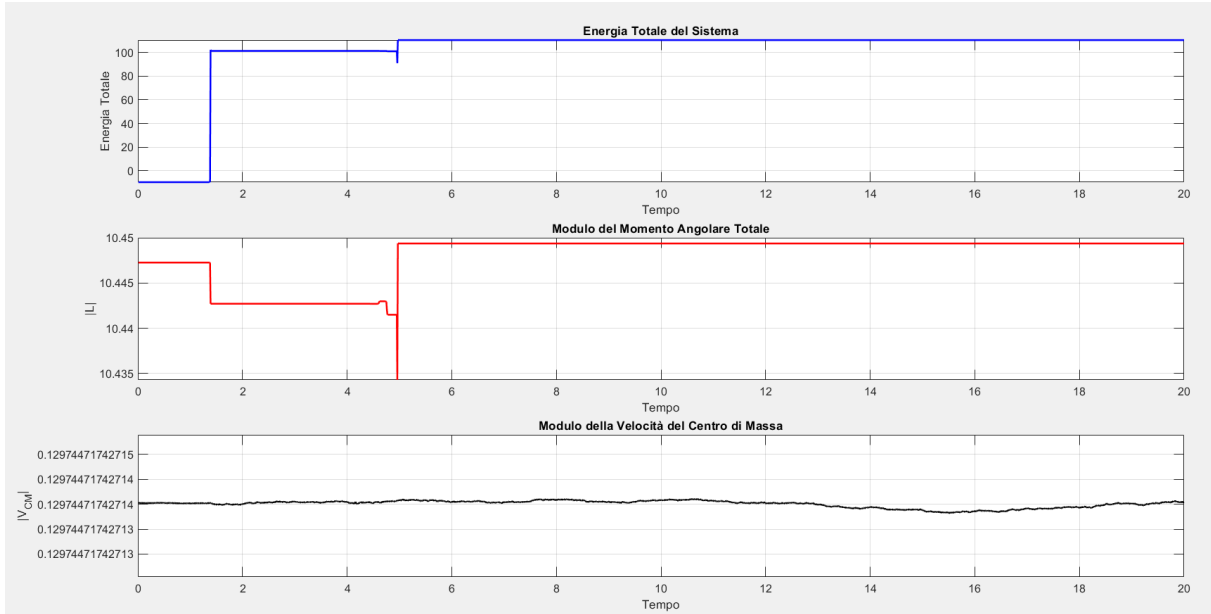


Figure 3: Grafico delle conservazioni con RK4 con  $n=10$  e  $dt=0.01$

## 6 Comportamento caotico e sensibilità alle condizioni iniziali

Il problema degli  $n$ -corpi newtoniano è noto per il suo comportamento caotico, specialmente in assenza di una massa dominante e quando tutte le masse sono comparabili. In questa sezione analizziamo la sensibilità del sistema alle condizioni iniziali, utilizzando una configurazione in cui tutte le masse sono unitarie e si distribuiscono inizialmente attorno a un centro comune.

Per mettere in evidenza il carattere caotico del sistema, abbiamo eseguito due simulazioni parallele: la prima con le condizioni iniziali standard, la seconda con una lieve perturbazione sulla posizione di un singolo corpo. In particolare, al vettore posizione del secondo corpo è stato sommato un piccolo vettore casuale  $\varepsilon \mathbf{u}$ , dove  $\varepsilon = 10^{-4}$  e  $\mathbf{u}$  è un vettore unitario casuale.

Le due simulazioni sono state integrate usando lo stesso metodo numerico (in questo caso, il metodo di Verlet), e ad ogni passo temporale abbiamo misurato la **divergenza** tra le due evoluzioni come la somma delle distanze euclidee tra le posizioni corrispondenti dei corpi:

$$\Delta(t) = \sum_{i=1}^n \|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}'_i(t)\|,$$

dove  $\mathbf{r}_i(t)$  è la posizione del corpo  $i$  nella simulazione originale e  $\mathbf{r}'_i(t)$  quella nella simulazione perturbata. L'andamento temporale di  $\Delta(t)$  è riportato nel grafico seguente,

e mostra un comportamento tipicamente esponenziale, segno della forte dipendenza del sistema dalle condizioni iniziali.

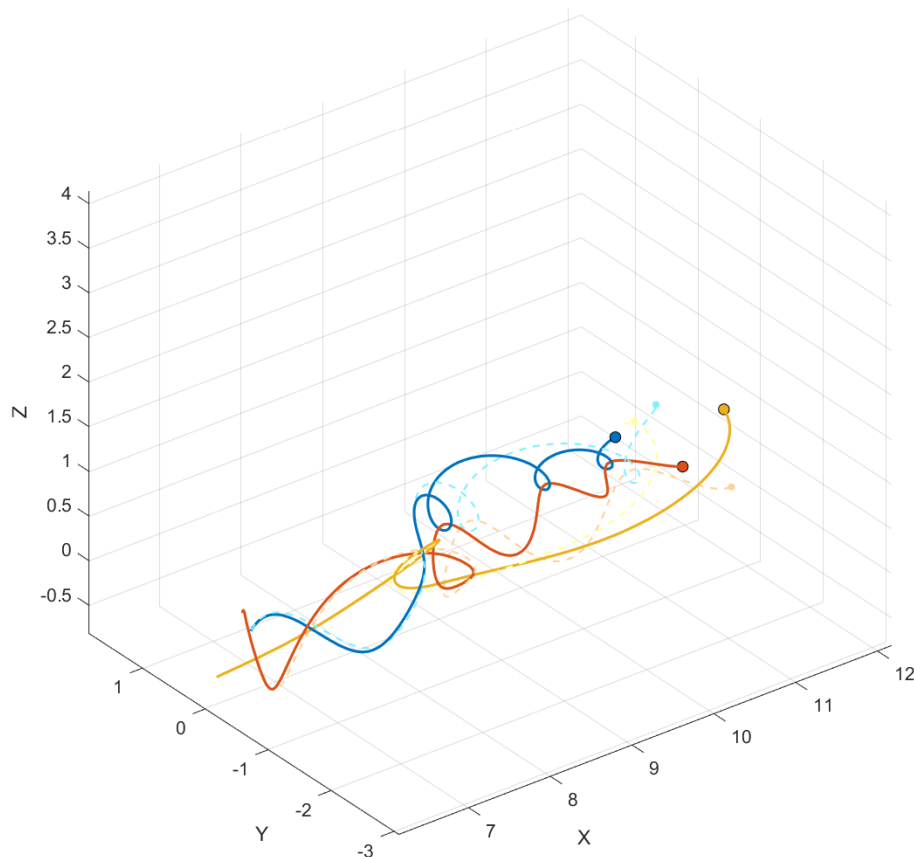


Figure 4: Tracciamento delle traiettorie dei corpi per due simulazioni: una con condizioni iniziali originali e una leggermente perturbata. Le traiettorie della simulazione perturbata sono desaturate.

Questi risultati confermano che, nonostante il sistema sia completamente deterministico, piccole incertezze nelle condizioni iniziali rendono impraticabile una previsione accurata a lungo termine. Questo comportamento è una manifestazione del caos deterministico tipico dei sistemi non lineari con più di due corpi in interazione gravitazionale.

## 7 Conclusioni

Il confronto ha evidenziato come i metodi symplettici siano particolarmente adatti per sistemi hamiltoniani a lungo termine. Verlet, in particolare, combina buona stabilità numerica e conservazione dell'energia. RK4 resta utile per accuratezza immediata ma va usato con cautela. L'analisi lagrangiana e hamiltoniana fornisce il quadro teorico per interpretare i comportamenti osservati nei metodi numerici.

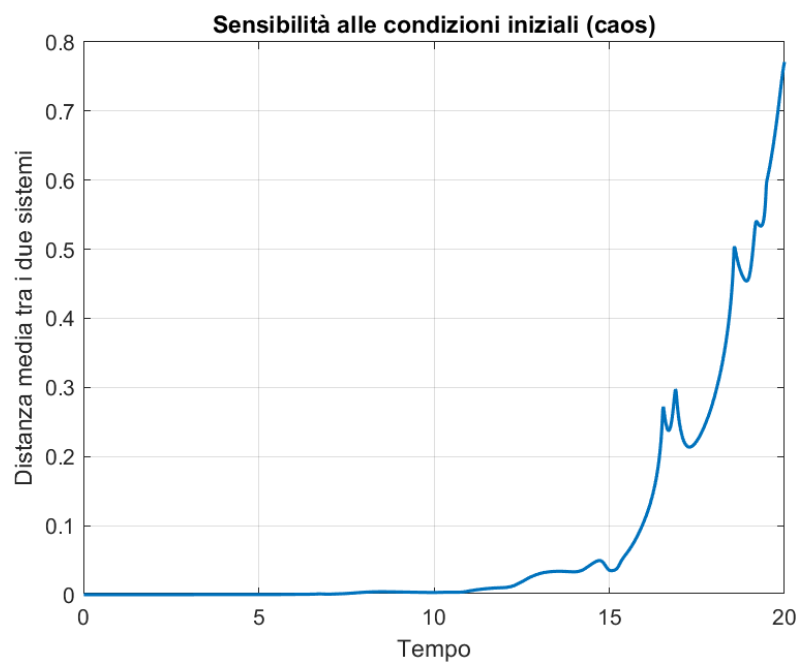


Figure 5: Andamento della divergenza  $\Delta(t)$  tra le due simulazioni nel tempo. Il comportamento caotico si manifesta nella crescita esponenziale della distanza tra le due evoluzioni.