



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**“Evolución de una función de Wigner de un
amplificador paramétrico”**

TESIS

Para obtener el título de
Licenciado en Física y Matemáticas

PRESENTA

Carlos Eduardo González Anguiano

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Arturo Zúñiga Segundo

México, Ciudad de México, marzo de 2024



A G R A D E C I M I E N T O S

Quiero agradecer primeramente al Instituto Politécnico Nacional, a sus profesores y administrativos, quienes durante mi estancia como estudiante de licenciatura contribuyeron a mi educación y formación profesional.

Me gustaría agradecer al Dr. Arturo Zúñiga Segundo por su compromiso y amabilidad, que en calidad de profesor, asesor y persona me apoyó a lo largo de este escrito. Igualmente quiero agradecer al MA. Jorge Andrés Anaya Contreras por compartir su conocimiento y guiarme a lo largo de toda esta experiencia.

Finalmente, quiero agradecer a mi familia y amigos, por su apoyo incondicional durante mi periodo como estudiante de la Licenciatura en Física y Matemáticas en la ESFM.

Índice general

1. Introducción	4
1.1. Brevísimas introducción a la Mecánica Cuántica	4
1.1.1. Oscilador armónico cuántico	7
1.2. Óptica cuántica	12
2. Cuantización del campo electromagnético	14
2.1. Ecuaciones de Maxwell	14
2.2. Cuantización del campo electromagnético	19
3. Estados coherentes de la luz. Operadores de compresión y desplazamiento	21
3.1. Estados número	21
3.2. Estados coherentes	22
3.3. Grupos y Álgebras de Lie, Grupo de Heisenberg-Weyl	26
3.4. Operador desplazamiento	31
3.4.1. Propiedades del operador desplazamiento	34
3.5. Operador compresión	45
4. Función de Wigner	52
5. Evolución temporal de un amplificador paramétrico	55
5.1. Óptica no lineal	55
5.2. Parametric Down Conversion	55
5.3. Diagonalización de un amplificador paramétrico	56
5.3.1. Evolución del estado inicial	60
5.3.2. Función de Wigner del campo	62
Bibliografía	67

1

Introducción

1.1. Brevísima introducción a la Mecánica Cuántica

La mecánica cuántica (MC) es un modelo físico que describe el comportamiento de las formas más pequeñas de la materia a través de la cuantización de la energía. La razón de su existencia se da a partir de fenómenos físicos que la mecánica clásica falla en predecir. Algunos de estos fenómenos son la radiación de cuerpo negro, el efecto fotoeléctrico y que los electrones no colapsen en sus “órbitas” atómicas. Esta descripción requiere que la energía esté cuantizada, es decir, que existe una unidad mínima de energía la cual no se puede dividir más.

Los fenómenos cuánticos están regidos por la ecuación de Schrödinger, que es una ecuación lineal cuyas soluciones son funciones de onda, elementos de un espacio complejo de Hilbert de dimensión infinita donde se engloban los posibles estados del sistema. Representa a los sistemas de base continua. Por otro lado, la mecánica matricial de Heisenberg, desarrollada en simultáneo con la mecánica ondulatoria de Schrödinger, es una representación que permite describir sistemas de base discreta.

Un experimento que ilustra la necesidad de considerar un espacio vectorial complejo para modelar fenómenos físicos es el de Stern-Gerlach (SG). El experimento consiste en átomos de plata (Ag) disparados a lo largo de dos piezas polares, teniendo una de estas un borde afilado. De los 47 electrones del átomo de plata, aquel en el nivel 5s no tiene una contraparte simétrica, y genera un momento angular intrínseco [1]. El momento magnético es proporcional al espín, y estos átomos al pasar a lo largo del espacio entre las dos piezas polares experimentarán una fuerza dependiendo de la dirección de su componente z . Estos colisionan en una pantalla, donde clásicamente se esperaría una distribución Gaussiana de puntos de choque de los átomos a lo largo de la pantalla. Sin embargo en realidad se observan dos manchas bien distinguidas entre sí. Del experimento se concluye que son solo dos los posibles valores del espín del electrón, sucediendo con

la misma probabilidad.

Considere ahora un segundo experimento de manera secuencial, pero ahora de forma que el campo magnético tenga dirección en x y bloqueando con una pantalla el haz de átomos con electrones con S_z^- . De esta forma asumiríamos que la mitad de los átomos pasando el segundo experimento tendrían una configuración S_z^+ , S_x^- y la otra mitad S_z^+ , S_x^+ , bloqueando todos los átomos S_z^- . Para verificar esta hipótesis, se puede realizar un tercer experimento de SG en secuencia, de nueva cuenta generando un campo magnético no homogéneo a lo largo del eje z . Si todos los átomos tienen una configuración con S_z^+ , se esperaría que todos los átomos se vean reflejados en la pantalla superior, sin embargo, este no es el caso. La “selección” de átomos en el segundo experimento de SG destruye cualquier información del primer experimento de SG en la componente z . En notación de Dirac, estas posibles combinaciones se pueden escribir como kets de la forma

$$|S_x; \pm\rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; -\rangle . \quad (1.1)$$

donde la primera etiqueta indica la componente del espín, y la segunda indica la dirección. Esto se puede representar en un espacio vectorial bidimensional complejo. Esta necesidad surge de utilizar la misma base $|S_z; \pm\rangle$ para representar los estados de espín en y . El espacio se describe por combinaciones lineales de los vectores base y coeficientes complejos

$$|S_y; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; +\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}} |S_z; -\rangle . \quad (1.2)$$

El espacio vectorial complejo utilizado tiene una dimensionalidad que depende el sistema físico estudiado. En el caso del experimento de SG previamente considerado, la dimensión es dos. En casos donde las variables son continuas, como es el caso del momento y la posición, la dimensión es infinita y los elementos $|\psi\rangle$ se denominan estados, y a las variables se les representa por observables \hat{A} . Los estados se pueden representar por distintas bases, por ejemplo la de momento o posición, cuyos respectivos observables son \hat{p} y \hat{x} . De la naturaleza de un espacio vectorial, se obtiene el principio de superposición, dados dos estados $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$, cualquier combinación lineal $c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle$ con $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ es también un estado puro del sistema. El principio de superposición explica la interferencia y, de acuerdo a la interpretación probabilista de Max Born, los módulos cuadrados de los coeficientes denotan las probabilidades de que el sistema se encuentre en dicho estado al momento de realizar una medición.

Dos operadores se dicen compatibles si son tales que su conmutación es cero, es decir $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$, es decir, que el orden de aplicación de los operadores afecta de igual manera a un estado $\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle = \hat{B}\hat{A}|\psi\rangle$. Por otro lado, si la diferencia es distinta de cero, se dice que son no compatibles. Este último es el caso de los operadores \hat{x} y

momento \hat{p} , cuya relación de conmutación, llamada relación de conmutación canónica, es

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \hat{I}. \quad (1.3)$$

Dado un observable \hat{A} , se puede definir un operador $\Delta A \equiv \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$. El cuadrado del valor esperado de este operador se conoce como la dispersión $\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2$. La dispersión se anula cuando el estado tratado es un eigenestado del observable \hat{A} . A partir de estas definiciones, para dos observables \hat{A} y \hat{B} y cualquier estado se debe satisfacer la relación de incertidumbre generalizada

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|^2. \quad (1.4)$$

Dados dos observables incompatibles \hat{A} y \hat{B} con bases dados por sus eigenestados $\{|a\rangle\}$ y $\{|b\rangle\}$ respectivamente, se puede realizar un cambio de representación o base para estudiar cómo están relacionadas estas dos descripciones del espacio de kets. Este cambio de base está dado por una transformación de similitud $\hat{B} = \hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U}$, con \hat{U} un operador unitario llamado matriz de transformación dado por $\hat{U} = \sum_k |b_k\rangle \langle a_k|$, con $|a_k\rangle$ y $|b_k\rangle$ las bases de los eigenestados de los operadores \hat{A} y \hat{B} respectivamente. La traza de un operador \hat{A} está definida como la suma de los elementos diagonales de la matriz asociada A y es independiente a la representación

$$\text{Tr}(A) = \sum_a \langle a|A|a\rangle. \quad (1.5)$$

El encontrar la matriz unitaria que diagonaliza B es equivalente a encontrar los eigenvalores y eigenestados del operador B cuyos elementos matriciales en la base $\{|a\rangle\}$ previa a la transformación son conocidos. Conocida la matriz de transformación U , se puede construir la transformación unitaria de A UAU^{-1} y se dicen observables unitariamente equivalentes. El conjunto $\{|b\rangle\}$ son eigenestados de UAU^{-1} con los mismos eigenvalores que los eigenvalores de A , haciendo su espectro idéntico.

Los estados cuánticos que describe un ket $|\psi\rangle$ y su respectiva función de onda ψ pueden representar un sistema físico solo si este no está compuesto por más subensembles independientes entre sí. A dichos estados se les denomina puros. Si, por el contrario, el sistema físico no puede ser descrito por un estado puro, se utiliza una distribución estadística de estados puros a la que se le denomina estado mixto. Ambos tipos de sistemas se pueden describir usando la matriz de densidad $\hat{\rho}$, que es la forma más general para describir sistemas en la mecánica cuántica [2]. Sea \hat{A} un operador cualquiera, el valor esperado de este operador se calcula como $\hat{A} = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{A} \}$. En el caso de un ensemble con varios subensembles descritos por un estado $|i\rangle$, cada uno contribuyendo al sistema

con un peso ω_i , el operador de densidad está dado por $\hat{\rho} = \sum_i \omega_i |i\rangle \langle i|$, lo que en un estado puro $|\psi\rangle$ se reduce a $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$ que recupera la definición de valor esperado de un operador \hat{A} en estados puros dada por $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$

Todos los sistemas cuánticos reales están sujetos a una evolución temporal. La ecuación de Schrödinger completa justamente describe la evolución temporal de una función de onda ψ bajo la acción de un potencial V

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi. \quad (1.6)$$

Se pueden expresar las soluciones en términos de funciones propias que corresponden al problema estacionario siempre y cuando el potencial V sea independiente del tiempo. Se expresa entonces la función de onda como una superposición de las ondas monocromáticas que resultan de la solución espacial de la ecuación de onda del problema estacionario $\varphi_n(\mathbf{r})$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(\mathbf{r}). \quad (1.7)$$

En la notación de Dirac, considere un estado que depende del tiempo cuyo valor $|\psi(t)\rangle$ que se encuentra en el estado $|\psi\rangle(t_0)$ en un tiempo fijo t_0 . Se relaciona al estado fijo con el dependiente del tiempo a través del operador de evolución temporal como $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$, que considerando $t_0 = 0$ se puede simplificar a $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(t_0)\rangle$. La expresión explícita del operador se obtiene por construcción a partir de las propiedades que debe cumplir. El operador debe ser unitario $U^\dagger(t)\hat{U}(t) = 1$, que aplicaciones sucesivas de tiempos t_1 y t_2 sean equivalentes a la evolución en un tiempo $t_1 + t_2$, y que el operador infinitesimal se reduzca a la identidad cuando dt vaya a cero. Resulta de las anteriores consideraciones que el operador es de la forma $\hat{U}(t) = 1 - \frac{i\hat{H}dt}{\hbar}$, y su ecuación diferencial fundamental es la ecuación de Schrödinger para el operador de evolución temporal.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t) = \hat{H} \hat{U}(t). \quad (1.8)$$

Cuando el Hamiltoniano es independiente del tiempo, la solución a esta ecuación está dada por

$$\hat{U}(t) = \exp \left\{ \left[\frac{-i\hat{H}t}{\hbar} \right] \right\}. \quad (1.9)$$

1.1.1. Oscilador armónico cuántico

El oscilador armónico cuántico (OAC) es uno de los pocos modelos que tiene soluciones analíticas en la mecánica cuántica. La cinemática de varios sistemas periódicos y de

tipo ondulatorio se puede describir utilizando el modelo del OAC. Varios potenciales independientes del tiempo $V(x)$ se pueden describir alrededor de un mínimo con una expansión en serie de Taylor

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^{(n)}(x)|_{x_0}}{n!} (x - x_0)^n \quad (1.10)$$

$$= V(x_0) + \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots, \quad (1.11)$$

el segundo término se anula por definición de mínimo local. Por formalismo, se puede recorrer el potencial $x = x' + x_0$ para que el potencial en x_0 sea $V(x_0) = 0$, eliminando el primer término. Finalmente, el término dominante en la expansión es la segunda derivada

$$V(x) = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x_0} x^2, \quad (1.12)$$

lo anterior se puede aplicar para un potencial que depende de más dimensiones $V(\mathbf{x})$. Asumiendo que todos los potenciales se han recorrido de manera análoga $x_i \rightarrow x_i + x_{0i}$

$$V(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right|_0 x_i x_j, \quad (1.13)$$

para hamiltonianos con potenciales cuadráticos, es siempre posible hacer un cambio de coordenadas de la forma

$$(x_1, \dots, x_N) \rightarrow (u_1, \dots, u_N), \quad (1.14)$$

donde el potencial se desacopla, *i.e.* sin derivadas cruzadas, y se puede describir por n osciladores armónicos individuales

$$V(u_1, \dots, u_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial^2 V}{\partial u_i^2} \right|_0 u_i^2. \quad (1.15)$$

Considerando un ejemplo básico de un oscilador armónico clásico, se tienen las ecuaciones clásicas de movimiento

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad (1.16)$$

$$p = m \frac{dx}{dt}, \quad (1.17)$$

con k la constante del resorte, m la masa de la partícula, x el desplazamiento de la posición de equilibrio y p el momento lineal, esto se sustituye en la ecuación estacionaria de Schrödinger, que se debe resolver es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi(x) = E \psi(x). \quad (1.18)$$

Una partícula en un sistema tiene una energía cinética que corresponde a

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \quad (1.19)$$

y el hamiltoniano correspondiente está dado por

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{q}^2, \quad (1.20)$$

donde ω es la frecuencia angular del oscilador clásico. El problema del oscilador armónico puede ser resuelto de forma analítica encontrando los eigenvalores y eigenfunciones de la ecuación de Schrödinger, o de forma algebraica, que involucra la introducción de dos operadores \hat{a}^\dagger y \hat{a} , los operadores escalera de creación y aniquilación, respectivamente. Procediendo por el método algebraico, los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger en términos de \hat{q} y \hat{p} se escriben como

$$\hat{a}^\dagger = (2m\hbar\omega)^{-1/2} (m\omega\hat{q} - i\hat{p}), \quad (1.21)$$

$$\hat{a} = (2m\hbar\omega)^{-1/2} (m\omega\hat{q} + i\hat{p}), \quad (1.22)$$

el conmutador de estos operadores resulta

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{1}, \quad (1.23)$$

los operadores no son hermitianos, y como tal no representan una propiedad observable del oscilador.

Los productos entre estos dos operadores son

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger \hat{a} &= \frac{1}{2m\hbar\omega} (\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{q}^2 + im\omega\hat{q}\hat{p} - im\omega\hat{p}\hat{q}) \\ &= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{q}^2 + \frac{i\omega}{2} [\hat{q}, \hat{p}] \right) \\ &= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{H} + \frac{i\omega}{2} (i\hbar) \right) \\ &= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{H} - \frac{1}{2} \hbar\omega \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

A partir del anticonmutador de los operadores (1.20) y (1.21), se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} &= \frac{1}{2}\hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a} \\
 &= \frac{1}{2}\hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a} \\
 &= \frac{1}{2}[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + \hat{a}^\dagger\hat{a} \\
 &= \frac{1}{2} + \hat{a}^\dagger\hat{a}, \tag{1.25}
 \end{aligned}$$

por lo que el de las ecuaciones (1.24) y (1.25) el hamiltoniano (1.20) se puede reescribir como

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}\hbar\omega (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}). \tag{1.26}$$

Se introduce también el operador número, definido como

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}, \tag{1.27}$$

y el hamiltoniano (1.26) se puede escribir también como

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right), \tag{1.28}$$

cuya ecuación de eigenvalores de la energía es

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle, \tag{1.29}$$

donde $|n\rangle$ es un eigenestado del OAC con eigenvalor E_n . A partir de ciertas operaciones algebraicas, se puede encontrar otra ecuación de eigenvalores a partir de la anterior multiplicando \hat{a} por la izquierda, y resulta de la forma

$$\begin{aligned}
 \hat{H}\hat{a} |n\rangle &= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right) \hat{a} |n\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2} \right) \hat{a} |n\rangle \\
 &= \hbar\omega \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + \frac{1}{2} \right) \hat{a} |n\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1 + \frac{1}{2} \right) \hat{a} |n\rangle \\
 &= \hbar\omega \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a} \right) |n\rangle = \hat{a}\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} - 1 \right) |n\rangle \\
 &= \hat{a} \left(\hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) - \hbar\omega \right) |n\rangle = \hat{a} (\hat{H} - \hbar\omega) |n\rangle = (E_n - \hbar\omega) \hat{a} |n\rangle, \tag{1.30}
 \end{aligned}$$

donde $\hat{a}|n\rangle$ es también un eigenestado del sistema, pero ahora con un valor propio de energía $E_n - \hbar\omega$, los cuales se denotarán como $|n-1\rangle$ y E_{n-1} respectivamente. Así, la nueva ecuación de eigenvalores es

$$\hat{H} \hat{a} |n\rangle = E_{n-1} \hat{a} |n\rangle , \quad (1.31)$$

de manera similar, pero ahora aplicando el operador \hat{a}^\dagger por la izquierda, se llega a la ecuación

$$\hat{H} \hat{a}^\dagger |n\rangle = E_{n+1} \hat{a}^\dagger |n\rangle . \quad (1.32)$$

Los operadores escalera nos permiten conocer el resto de los valores de la energía del oscilador armónico una vez conocido E_n , estos valores varían en incrementos de $\hbar\omega$. Debido a que no puede haber un estado con energía negativa, se propone un estado $|0\rangle$, llamado estado base, al que corresponda una energía mínima E_0 , y con la propiedad:

$$\hat{a} |0\rangle = 0 . \quad (1.33)$$

A partir de esta propiedad se determina que $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ y en general

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad n \in \mathbf{N} . \quad (1.34)$$

Los estados número son eigenestados simultáneos del operador hamiltoniano (1.28) y del operador número (1.27), por lo que tienen una base de eigenvectores en común, donde

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle . \quad (1.35)$$

Los estados se pueden normalizar utilizando las condiciones

$$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m} \quad (1.36)$$

y los coeficientes de normalización para la aplicación de los operadores escalón resultan

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle , \quad (1.37)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle . \quad (1.38)$$

Es conveniente definir, a partir de la definición de operadores posición \hat{q} y momento \hat{p} generalizado en su forma adimensional utilizados en la expresión del Hamiltoniano del oscilador armónico, los operadores de cuadratura [3]

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{q} = \frac{1}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) , \quad (1.39)$$

$$\hat{Y} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p} = \frac{i}{2} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) , \quad (1.40)$$

los operadores escalera en términos de los de cuadratura son

$$\hat{a} = \hat{X} + i\hat{Y} , \quad (1.41)$$

$$\hat{a}^\dagger = \hat{X} - i\hat{Y} , \quad (1.42)$$

la relación de conmutación entre estos operadores es

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = \frac{i}{2} \quad (1.43)$$

y su relación de incertidumbre es:

$$\langle (\Delta X)^2 \rangle \langle (\Delta Y)^2 \rangle \geq \frac{1}{16} , \quad (1.44)$$

con estos también se puede expresar el Hamiltoniano del oscilador armónico simple

$$\hat{H} = \hbar\omega (\hat{X}^2 + \hat{Y}^2) . \quad (1.45)$$

1.2. Óptica cuántica

Existen tres métodos generales para estudiar la teoría de la luz. La óptica clásica los átomos se tratan como un filamento de corriente corto e infinitesimalmente delgado con una corriente uniforme que radia un campo electromagnético y la luz descrita por ondas electromagnéticas. La teoría semiclásica cuantiza la energía de los átomos, manteniendo el comportamiento de onda de la luz. Estos modelos son suficientes para describir la mayoría de los fenómenos ópticos. Son relativamente pocas las situaciones físicas en las que una descripción cuántica, donde además de la cuantización atómica, la luz se describe por fotones.

Durante el siglo XIX, la luz pasó de ser considerada como formada por partículas a ondas debido a experimentos que el modelo corpuscular de la luz no podía explicar como la difracción, refracción o birrefringencia, dando inicio al desarrollo de la óptica clásica. El concepto de fotón fue retomado luego por Einstein (y acuñado tiempo después como “fotón” por Gilbert Lewis en 1926 [4]) para explicar la independencia de la energía cinética de los electrones liberados de la intensidad de la luz y la existencia de una frecuencia mínima para poder producir electrones en el efecto fotoeléctrico, proceso en el que los electrones en el material son liberados al absorber energía que reciben en forma

de luz. A cada fotón se le asigna un *quantum* de energía $E = h\nu$ y este fotón cede toda su energía para liberar al electrón del material.

Sin embargo, aunque el efecto fotoeléctrico y otros experimentos sustentan la existencia de fotones, la cuantización de la materia también puede explicar este fenómeno sin la necesidad de fotones. En este marco, los electrones de los átomos se describen mediante funciones de onda que están cuantificadas, teniendo niveles de energía discretos. Cuando un fotón con suficiente energía interactúa con un electrón, puede excitarlo a un nivel de energía más alto o permitirle escapar del material por completo si la energía del fotón es mayor a la función de trabajo del material. Esta explicación no depende explícitamente de la existencia de fotones, y es por lo tanto una teoría semiclásica.

Fueron experimentos como el diseñado por Hanbury Brown y Twiss (HBT) en 1956, el descubrimiento del láser en 1960 y la propuesta de estados cuasi-clásicos por Glauber en 1963 que impulsaron una nueva ola de investigación sobre la teoría fotónica y propuestas para demostrar su existencia. La prueba experimental de estas propiedades, que la teoría clásica no podía explicar, fueron obtenidas por Kimble, Dagenais y Mandel en 1977 cuando observaron *photon antibunching* en experimentos de fluorescencia con átomos de sodio excitados por un haz láser de colorante [5].

2

Cuantización del campo electromagnético

2.1. Ecuaciones de Maxwell

Las variables de campo eléctrico \mathbf{E} , y magnético \mathbf{H} , así como el de desplazamiento \mathbf{D} el de inducción magnética \mathbf{B} se pueden tratar como observables, cuyos valores esperados son el promedio de un ensemble cuántico de campos, es decir, se pueden representar por operadores Hermitianos $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{H}}$, $\hat{\mathbf{D}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ respectivamente. La linealidad de las ecuaciones de Maxwell permiten que obedezcan la interpretación estadística de Max Born, viendo que el promedio de cada una de las leyes se reduce a las leyes de Maxwell aplicadas a los promedios. Por el mismo argumento de linealidad, las ecuaciones constitutivas son válidas para estos mismos operadores, y se tiene (en SI) $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$ con $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$. Las ecuaciones de Maxwell rigen el comportamiento de los campos electromagnéticos clásicos y cuánticos.

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{D}} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

donde todos los campos son dependientes de la posición \mathbf{r} y del tiempo t ¹

¹Se utilizan unidades de CGS a lo largo de este desarrollo.

Se define el operador de campo vectorial $\hat{\mathbf{A}}$ de manera que cumpla

$$\hat{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial t}, \quad (2.5)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \nabla \times \hat{\mathbf{A}}. \quad (2.6)$$

Se elige entonces el gauge de Coulomb, haciendo el potencial escalar cero y el potencial vectorial $\hat{\mathbf{A}}$ tal que satisfaga la condición de transversalidad $\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}} = 0$ ², haciendo que la primera ecuación de Maxwell (2.4) se cumpla de manera directa. Sustituyendo las ecuaciones (2.5) y (2.6) en la ecuación de Ampere-Maxwell (2.4)

$$\nabla \times \hat{\mathbf{B}} = \nabla \times (\nabla \times \hat{\mathbf{A}}) = \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{A}}}{\partial t^2}, \quad (2.7)$$

obteniendo la ecuación de onda electromagnética

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{A}}}{\partial t^2}, \quad (2.8)$$

la conocida solución particular de la onda plana se puede obtener por el método de separación de variables y se reduce al resultado de la onda plana

$$\hat{\mathbf{A}}_k = \hat{c}_k \mathbf{e}^{(\lambda)} \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\} \exp\{-i\omega_k t\} = \hat{c}_k \mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) \exp\{-i\omega_k t\}, \quad (2.9)$$

con $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ el vector de número de onda, cuya magnitud está dada por $k = 2\pi/\lambda$ [7], y $\hat{\mathbf{u}}_{k\lambda}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{e}}^{(\lambda)} \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\}$ con $\hat{\mathbf{e}}^{(\lambda)}$ el vector de polarización, donde $\lambda = 1, 2$ es el índice de polarización [8].

De la teoría de Sturm-Liouville, al definir condiciones de frontera para nuestras coordenadas espaciales, se define un espacio de Hilbert cuyos elementos $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ son funciones diferenciables y que satisfacen anularse en las fronteras dadas. La ecuación de eigenvalores se escribe como [9]:

$$\mathcal{L} \hat{\mathbf{A}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \hat{\mathbf{A}} = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \hat{\mathbf{A}}, \quad (2.10)$$

con

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.11)$$

²El presente desarrollo se realiza en el dominio no relativista [6].

La solución general se puede obtener a partir de una superposición de las k -ésimas soluciones particulares. A su vez, esta superposición de soluciones se puede separar en dos sumandos de acuerdo a la magnitud de las frecuencias angulares [7]. El campo electromagnético se describe entonces restringido a un volumen cúbico en el espacio y el potencial vectorial se expande en términos del conjunto discreto las funciones de modo ortogonales del espacio de Hilbert definido por el *ansatz* (2.9). Separando los términos en las amplitudes incidentes (amplitudes que varían de acuerdo a $e^{-i\omega_k t}$ con $\omega > 0$) y reflejadas (amplitudes que varían como $e^{i\omega_k t}$ y $\mathbf{A}^{(-)} = (\mathbf{A}^{(+)})^*$)

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(+)} + \mathbf{A}^{(-)} = \sum_{k,\lambda} (\hat{c}_k \mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + \hat{c}_k^* \mathbf{u}_{k\lambda}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}) , \quad (2.12)$$

nos enfocaremos solo en los términos de amplitudes incidentes, las cuales deben de cumplir, además de ser solución a la ecuación de onda, con la condición de transversalidad

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 , \quad (2.13)$$

lo cual se cumple al momento de asignarle un vector de polarización $\hat{\mathbf{e}}^{(\lambda)}$ perpendicular a \mathbf{k} . A su vez las funciones forman un conjunto ortogonal bajo el producto interno del espacio de Hilbert. Se establecen condiciones de frontera periódicas que corresponden a modos de vibración que llevan a ondas estacionarias en un volumen cúbico de paredes reflejantes de lados de longitud L . De esta condición de ortogonalidad

$$\int_V \exp\{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\} \exp\{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\} d\mathbf{r} = \int_V d\mathbf{r} = L^3 = V , \quad (2.14)$$

$$\int_V \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) \mathbf{u}_{k'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = L^3 \delta_{kk'} . \quad (2.15)$$

Así, las funciones de onda se escriben como

$$\mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{e}}_{k\lambda} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) . \quad (2.16)$$

El vector de propagación \mathbf{k} en coordenadas cartesianas toma los valores por entrada

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L}, \quad \text{con } i = x, y, z, \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.17)$$

La densidad de energía del campo electromagnético está dada por $u = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}$ en SI. Considerando el vacío como medio y ninguna fuente, se puede reescribir como

$u = \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2$ (SI). Transformando a unidades CGS, se tiene $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$ y $\mathbf{B} \rightarrow \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}\mathbf{B}$, y como $\mu_0 = 1$ y $\epsilon_0 = 1$ en CGS, la energía electromagnética dentro de un volumen es

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V [\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)] d\mathbf{r}. \quad (2.18)$$

y en forma de operador se expresa con el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{1}{8\pi} \int_V [\hat{\mathbf{E}}^2(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{B}}^2(\mathbf{r}, t)] d\mathbf{r}. \quad (2.19)$$

El campo magnético y la inducción magnética se calculan en términos del conjunto de funciones ortonormales $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$ a partir del campo vectorial $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{c} \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}^{(+)}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}^{(-)}}{\partial t} \right] \\ &= -\frac{1}{c} \sum_{k,\lambda} [-i\omega_k \hat{c}_k \mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + i\omega_k \hat{c}_k^* \mathbf{u}_{k\lambda}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}] , \\ c^2 |\mathbf{E}|^2 &= c^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \\ &= \sum_{k,\lambda} \sum_{k',\lambda'} (-i\omega_k \hat{c}_k \mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + i\omega_k \hat{c}_k^* \mathbf{u}_{k\lambda}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}) \cdot \\ &\quad \cdot (-i\omega_{k'} \hat{c}_{k'} \mathbf{u}_{k'\lambda'}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{k'} t} + i\omega_{k'} \hat{c}_{k'}^* \mathbf{u}_{k'\lambda'}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_{k'} t}) \\ &= \sum_{k,\lambda} \left[(-i\omega_k \hat{c}_k \mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t}) \cdot (i\omega_k \hat{c}_k^* \mathbf{u}_{k\lambda}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}) \right. \\ &\quad \left. + (i\omega_k \hat{c}_k^* \mathbf{u}_{k\lambda}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}) \cdot (-i\omega_k \hat{c}_k \mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t}) \right], \end{aligned} \quad (2.20)$$

entonces

$$\hat{\mathbf{E}}^2 = \frac{2}{c^2} \sum_{k,\lambda} \omega_k^2 |\mathbf{u}_k(\mathbf{r})|^2 (\hat{c}_k \hat{c}_k^* + \hat{c}_k^* \hat{c}_k). \quad (2.21)$$

Para el campo magnético, se selecciona la dirección de polarización del campo eléctrico, analizando solamente su carácter vectorial $\mathbf{e}^\lambda = \hat{\mathbf{i}}$, entonces

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{j}} \left(\frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z \right) \quad (2.22)$$

pero como la dirección de polarización es en $\hat{\mathbf{i}}$, solo la componente de A_x es distinta de cero y

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial z} A_x \quad (2.23)$$

como

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r})}{\partial z} = ik_z \mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) \quad (2.24)$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{k\lambda}^*(\mathbf{r})}{\partial z} = -ik_z \mathbf{u}_{k\lambda}^*(\mathbf{r}). \quad (2.25)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{j}} \sum_{k,\lambda} (ik_z \hat{c}_k \mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} - ik_z \hat{c}_k^* \mathbf{u}_{k\lambda}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}) \quad (2.26)$$

Calculando su norma al cuadrado usando el producto punto para complejos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}^2 &= \sum_{k,\lambda} \left[(ik_z \hat{c}_k \mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t}) (-ik_z \hat{c}_k^* \mathbf{u}_{k\lambda}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}) \right. \\ &\quad \left. + (-ik_z \hat{c}_k^* \mathbf{u}_{k\lambda}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}) (ik_z \hat{c}_k \mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t}) \right] \\ &= 2 \sum_{k,\lambda} k_z^2 |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 (\hat{c}_k \hat{c}_k^* + \hat{c}_k^* \hat{c}_k). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Utilizando los operadores de cuadratura \hat{X} y \hat{Y} previamente definidos, se puede reescribir el campo eléctrico. Usando $\mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} = \mathbf{e}_{k\lambda} e^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega_k t}$ se obtiene

$$\mathbf{E} = i \sum_{k,\lambda} \left(\frac{8\hbar\pi\omega_k}{V} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{k\lambda} [\hat{X} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + \hat{Y} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (2.28)$$

Las variables canónicas \hat{X} y \hat{Y} se pueden interpretar como amplitudes de las cuadraturas en las que se descompone el campo eléctrico. [10] En nuestro eje coordenado, la propagación de la onda electromagnética se da en la dirección $\hat{\mathbf{k}}$, por lo que $|\mathbf{k}| = k = k_z$. Además $\omega_k = kc$ y se obtiene

$$\hat{\mathbf{B}}^2 = 2 \sum_{k,\lambda} \frac{\omega_k^2}{c^2} |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 (\hat{c}_k \hat{c}_k^* + \hat{c}_k^* \hat{c}_k), \quad (2.29)$$

sustituyendo en la expresión del Hamiltoniano (2.19)

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{8\pi} \left[\int_V \left(2 \sum_{k,\lambda} \frac{\omega_{k\lambda}^2}{c^2} |\mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r})|^2 (\hat{c}_k \hat{c}_k^* + \hat{c}_k^* \hat{c}_k) \right) d\mathbf{r} \right. \\ &\quad \left. + \int_V \left(2 \sum_{k,\lambda} \frac{\omega_{k\lambda}^2}{c^2} |\mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r})|^2 (\hat{c}_k \hat{c}_k^* + \hat{c}_k^* \hat{c}_k) \right) d\mathbf{r} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi c^2} \sum_{k,\lambda} \omega_{k\lambda}^2 (\hat{c}_k \hat{c}_k^* + \hat{c}_k^* \hat{c}_k) \int_V |\mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r},\end{aligned}\quad (2.30)$$

donde por la condición de ortogonalidad

$$\hat{H} = \frac{V}{2\pi c^2} \sum_{k,\lambda} \omega_{k\lambda}^2 (\hat{c}_k \hat{c}_k^* + \hat{c}_k^* \hat{c}_k), \quad (2.31)$$

ahora si consideramos

$$\hat{c}_k = \sqrt{\frac{\pi c^2 \hbar}{\omega_k V}} \hat{a}_k, \quad (2.32)$$

la ecuación (2.31) se convierte en:

$$\hat{H} = \frac{V}{2\pi c^2} \sum_k \omega_k^2 \frac{\pi c^2 \hbar}{\omega_k V} (\hat{a}_k \hat{a}_k^* + \hat{a}_k^* \hat{a}_k) = \frac{V}{2\pi c^2} \sum_k \omega_k^2 \frac{\pi c^2 \hbar}{\omega_k V} (\hat{a}_k \hat{a}_k^* + \hat{a}_k^* \hat{a}_k) \quad (2.33)$$

$$(2.34)$$

$$\hat{H} = \sum_k \frac{\hbar \omega_k}{2} (\hat{a}_k \hat{a}_k^* + \hat{a}_k^* \hat{a}_k) \quad (2.35)$$

En orden de cuantizar el campo electromagnético, se escogen \hat{a}_k y \hat{a}_k^* como los operadores de aniquilación \hat{a}_k y creación \hat{a}_k^\dagger para cada modo del campo k . Como el objeto de estudio son fotones, el conmutador de bosones es el que se debe seguir

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}] = 0, \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}. \quad (2.36)$$

2.2. Cuantización del campo electromagnético

La cuantización del campo electromagnético se da cuando se asocia a cada modo de luz \mathbf{k}, λ de la construcción realizada en la sección 2 a un oscilador armónico. Los modos de luz siguen las mismas relaciones de los operadores de creación \hat{a}^\dagger y destrucción \hat{a} , que

ahora corresponden a la creación o aniquilación de un fotón de energía $\hbar\omega$ en el modo $\mathbf{k}\lambda$. (Loudon, alterar un poco, está muy textual). Bajo este contexto, a los estado $|\hat{n}_{\mathbf{k}\lambda}\rangle$ se les denomina estados número del fotón o estados Fock del campo electromagnético.

Comparando las expresiones de energía del campo electromagnético y del Hamiltoniano del oscilador armónico, se obtiene la siguiente correspondencia entre los operadores de creación y aniquilación y los coeficientes complejos de la base ortogonal $\mathbf{u}_{k,\lambda}(\mathbf{r})$ [3]

$$\left(\frac{2\hbar\pi c^2}{V\omega_k}\right)^{1/2} \hat{a}_{k\lambda} \leftrightarrow \hat{c}_k; \quad \left(\frac{2\hbar\pi c^2}{V\omega_k}\right)^{1/2} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \leftrightarrow \hat{c}_k^*. \quad (2.37)$$

La luz es un objeto cuántico con estado $|\Psi\rangle$. Usando la imagen de Heisenberg, donde los operadores evolucionan en el tiempo y el estado es estacionario, se considera a los campos clásicos como los valores esperados de los observables \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} y \mathbf{H} que actúan sobre los estados de la luz. la linealidad de las ecuaciones de Maxwell permite que estas sean válidas para estos operadores. [11] De esta forma, se cuantiza la energía del campo electromagnético, remplazando U por el operador Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{V}{2\pi c^2} \sum_{k,\lambda} \left(\frac{2\hbar\pi c^2}{V\omega_k}\right) \omega_{k\lambda}^2 (\hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda}) = \sum_{k,\lambda} \hbar\omega_{k\lambda} (\hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda}). \quad (2.38)$$

De igual forma, los campos se cuantizan obteniendo [6]

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{k,\lambda} \left(\frac{2\hbar\pi c^2}{V\omega_k}\right)^{1/2} [\hat{a}_{k\lambda} \mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \mathbf{u}_{k\lambda}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}], \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}} &= \sum_{k,\lambda} \left(\frac{2\hbar\pi c^2}{V\omega_k}\right)^{1/2} \frac{i\omega_k}{c} [\hat{a}_{k\lambda} \mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \mathbf{u}_{k\lambda}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}] \\ &= i \sum_{k,\lambda} \left(\frac{2\hbar\pi\omega_k}{V}\right)^{1/2} [\hat{a}_{k\lambda} \mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} - \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \mathbf{u}_{k\lambda}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}], \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = i \sum_{k,\lambda} \left(\frac{2\hbar\pi\omega_k}{V}\right)^{1/2} [\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u}_{k\lambda}(\mathbf{r}) \hat{a}_{k\lambda} e^{-i\omega_k t} - \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u}_{k\lambda}^*(\mathbf{r}) \hat{a}_{k\lambda}^\dagger e^{i\omega_k t}]. \quad (2.41)$$

3

Estados coherentes de la luz. Operadores de compresión y desplazamiento

3.1. Estados número

Los valores esperados de los observables, que son representados por operadores Hermitianos en MC, representan las cantidades medibles de un sistema. El campo electromagnético puede ser representado por un espacio de estados, cuantizando un sistema de bosones de masa finita, llamada espacio de Fock. Los estados Fock o número $|n\rangle$ tienen una cantidad definida de número de fotones. El observable que opera sobre los estados Fock es el operador número \hat{n}_k , el cual se conforma de los operadores de un solo modo \hat{a}_k y \hat{a}_k^\dagger . De este punto en adelante, se tratarán a estos operadores para un solo modo, por lo que el subíndice de polarización y modo se omiten y \hat{n} , \hat{a} y \hat{a}^\dagger corresponderán al operador número, aniquilación y creación de un solo modo de luz.

Un modo se refiere a un eigenvector de una ecuación de eigenvalores dada. En este caso, si un estado $|\psi\rangle$ es un observable y bajo cierto operador \mathbf{A} genera el mismo estado multiplicado por un eigenvalor α , es decir $\mathbf{A}|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle$ decimos que $|\psi\rangle$ es un modo normal (o estado estacionario) del sistema. Se define al operador número n a partir de los operadores escalera $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ y es un operador Hermitiano. Cumple con la ecuación de eigenvalores

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (3.1)$$

Un modo es una onda plana con una polarización dada [6]. Es un grado de libertad del campo electromagnético donde n es en este caso particular, el número de fotones [11]. Los operadores de aniquilación y creación siguen la relación de conmutación bosónica

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (3.2)$$

y al igual que en el caso del oscilador armónico, se tiene un nivel mínimo de energía, en este caso corresponde al estado vacío $|0\rangle$, es decir, sin *quantum* en el campo de radiación.

La definición de los operadores escalera difiere de aquella dada en el oscilador armónico simple, puesto que ahora no se está tratando con partículas con masa. En términos de los operadores posición \hat{q} y momento \hat{p} se definen los operadores de aniquilación y creación como

$$\hat{a} = (2\hbar)^{-1/2}(\hat{q} + i\hat{p}) \quad \hat{a}^\dagger = (2\hbar)^{-1/2}(\hat{q} - i\hat{p}). \quad (3.3)$$

Cumple con la propiedad $\hat{a}|0\rangle = 0$. La energía en este caso difiere del resultado clásico, ya que $\langle 0|\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega/2$ con ω la frecuencia angular correspondiente a ese modo, y esto corresponde a la energía del vacío o energía de punto cero [8]. El estado de un fotón se obtiene a partir de este y resulta ser $|1\rangle = \hat{a}^\dagger|0\rangle$, y siguiendo este proceso de forma iterativa n veces se obtiene el estado $|n\rangle$ que resulta ser

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (3.4)$$

Los estados número son ortogonales y completos

$$\langle n_k|m_k\rangle = \delta_{mn} \sum_{n_k=0}^{\infty} |n_k\rangle \langle n_k| = 1. \quad (3.5)$$

La mayoría de los campos ópticos son una superposición de estados número (ensemble puro) o una mezcla de ellos (estado mixto).

3.2. Estados coherentes

El valor esperado de el operador de aniquilación \hat{a} y los de cuadratura \hat{X} y \hat{Y} son cero en la base de estados número, estos estados carecen entonces de amplitudes bien definidas y fase. Una base más apropiada para campos ópticos son los estados coherentes, los cuales son contruidos a partir de una superposición de una cantidad indefinida de fotones de forma que tengan una fase y amplitud bien definida. Es precisamente estas dos propiedades por lo que se le considera el análogo más próximo a una onda electromagnética clásica. Estos estados cuánticos representan luz ideal de un láser.

Los estados coherentes son el equivalente a un haz monocromático de luz en la mecánica cuántica en el sentido de que son estados de mínima incertidumbre. Paquetes de onda coherentes derivados del OAC fueron estudiados primeramente por Shcrödinger en 1926, y estos inspiraron el trabajo de Roy J. Glauber [12] que introdujo los estados coherentes (también llamados de Glauber) publicado en 1963 y por el cuál ganó el premio Nobel en 2005. La luz de un láser tiene una amplitud definida, y los estados coherentes α se definen como eigenestados del operador amplitud o aniquilación \hat{a}

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (3.6)$$

donde α es en general un número complejo adimensional

El significado físico de α se da considerando un modo polarizado de frecuencia angular ω dentro de una cavidad de volumen V . Se puede definir a α en términos de los valores esperados adimensionales de los operadores de cuadratura

$$\alpha = X^2 + iY^2. \quad (3.7)$$

Se puede separar α en su amplitud $|\alpha| = \sqrt{X^2 + Y^2}$ y fase ϕ considerando $X = |\alpha| \cos \phi$ y $Y = |\alpha| \sin \phi$ como

$$\alpha = |\alpha|e^{i\phi}, \quad (3.8)$$

y el estado coherente entonces se puede representar de forma fasorial con longitud $|\alpha|$ y en un ángulo ϕ .

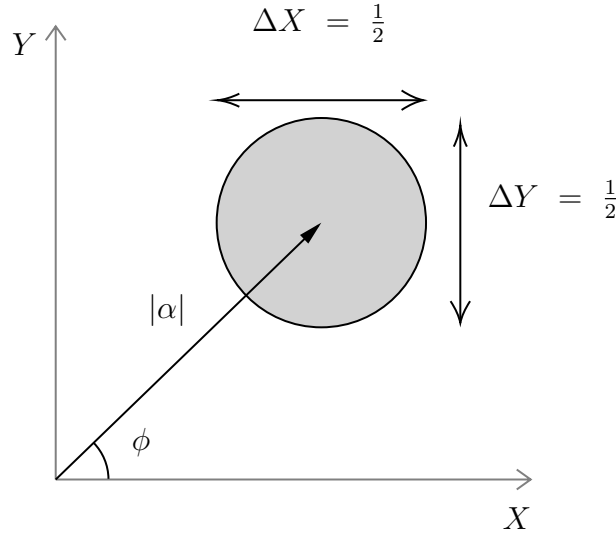


Figura 3.1: Estado coherente $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle$ con ϕ el argumento del parámetro de compresión

Las cuadraturas están sujetas a la misma incertidumbre que la posición y el momento generalizado del oscilador armónico simple

$$\Delta X \Delta Y \geq \frac{1}{4}, \quad (3.9)$$

dado que no hay preferencia entre las dos cuadraturas, se concluye que sus incertidumbres son iguales

$$\Delta X = \Delta Y = \frac{1}{2}. \quad (3.10)$$

Por ser \hat{a} no Hermitiano, los eigenvalores de los estados coherentes son complejos, y estos corresponden físicamente a las amplitudes de onda complejas en óptica clásica, con magnitud $|\alpha|$ y fase $\arg \alpha$. El estado cuántico de un haz láser continuo es un ensemble de estados coherentes con fase aleatoria.

El estado vacío es un estado coherente, ya que satisface la ecuación $\hat{a} |0\rangle = 0 |0\rangle = 0$, y corresponde a un estado de amplitud cero. La energía promedio de un estado coherente corresponde a

$$\langle \alpha | \hat{H} | \alpha \rangle = \hbar \omega \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} | \alpha \rangle = \hbar \omega \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right). \quad (3.11)$$

El valor esperado del operador de aniquilación (o también llamado amplitud) \hat{a} , y las cuadraturas, bajo los estados coherentes ahora tienen un amplitud definida.

$$\langle \alpha | \hat{a} | \alpha \rangle = \alpha \quad \langle \alpha | \hat{X} | \alpha \rangle = \frac{\text{Re}(\alpha)}{\sqrt{2}} \quad \langle \alpha | \hat{Y} | \alpha \rangle = \frac{\text{Im}(\alpha)}{\sqrt{2}}. \quad (3.12)$$

Los estados coherentes se pueden descomponer en una suma de estados número

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \quad (3.13)$$

Los coeficientes se calculan a partir de la relación de recursión

$$c_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} c_n, \quad (3.14)$$

y resultan

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0. \quad (3.15)$$

El valor de c_0 se puede encontrar a partir de la condición de normalización, como los estados número son ortonormales, se obtiene

$$1 = \langle \alpha | \alpha \rangle = c_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^n)^2}{(\sqrt{n!})^2} \langle n | n \rangle \quad (3.16)$$

$$= c_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} \langle n | n \rangle \quad (3.17)$$

$$= c_0^2 e^{|\alpha|^2} \quad (3.18)$$

$$c_0 = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}, \quad (3.19)$$

y la superposición de estados número resulta de manera explícita

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.20)$$

La probabilidad de encontrar n fotones en estado coherente se da por una distribución de Poisson con media $|\alpha|^2$, y esta es a su vez igual a la varianza $\langle n \rangle = |\alpha|^2 = \langle n^2 \rangle = \langle n \rangle^2$. Los estados coherentes forman una base sobrecompleta, es decir, los estados forman una base pero no son ortonormales entre sí. La condición de completez es

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = 1, \quad (3.21)$$

donde α es un número complejo y la integral se realiza sobre el plano complejo, siendo $d^2\alpha = dx dy$, con $x = \text{Re}(\alpha)$ y $y = \text{Im}(\alpha)$. La demostración se da sustituyendo la definición de $|\alpha\rangle$ en la condición de completez y verificando que $\sum_n |\alpha\rangle \langle \alpha| = 1$. sustituyendo en el lado izquierdo

$$\sum_{n,m} \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \int d^2\alpha (\alpha)^n \alpha^{*m} |n\rangle \langle m| e^{-|\alpha|^2}, \quad (3.22)$$

que cambiando a coordenadas polares

$$1 = \sum_{n,m} \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta (r)^{n+m} e^{i\theta(n-m)} |n\rangle \langle m| e^{-r^2} \quad (3.23)$$

$$= \sum_{n,m} \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \int_0^\infty r dr (r)^{n+m} \delta_{nm} |n\rangle \langle m| e^{-r^2} \quad (3.24)$$

$$= \sum_n \frac{1}{n!} \int_0^\infty dr r^{2n+1} |n\rangle \langle n| e^{-r^2} \quad (3.25)$$

$$= \sum_n |n\rangle \langle n| \frac{1}{n!} \int_0^\infty dr r^{2(n+1)-1} e^{-r^2} \quad (3.26)$$

$$= \sum_n |n\rangle \langle n| \frac{1}{n!} \Gamma(n+1) \quad (3.27)$$

$$1 = \sum_n |n\rangle \langle n|. \quad (3.28)$$

La sobrecompletitud hace que los estados sean no ortogonales entre si. El producto interno entre dos elementos del espacio de estados coherentes es distinto de cero, y es en

particular se puede calcular de la expresión de estado coherente

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} \frac{\beta^m}{\sqrt{m!}} \langle n | m \rangle \quad (3.29)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^* \beta)^n}{n!} \langle n | n \rangle \quad (3.30)$$

$$= \exp \left\{ \left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^* \beta \right) \right\}. \quad (3.31)$$

De lo anterior, un estado coherente se puede escribir en términos de otros estados coherentes. Considerando el braket de un par de estados coherentes $|\alpha\rangle$ y $|\gamma\rangle$, y utilizando la condición de completez

$$\langle \alpha | \gamma \rangle = \langle \alpha | \left(\frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha |\beta\rangle \langle \beta| \right) | \gamma \rangle \quad (3.32)$$

$$= \left(\frac{1}{\pi} \int d^2 \beta \langle \alpha | \beta \rangle \langle \beta | \gamma \rangle \right) \quad (3.33)$$

$$\frac{\langle \alpha | \gamma \rangle}{\pi} = \left(\int d^2 \beta \frac{\langle \alpha | \beta \rangle}{\pi} \frac{\langle \beta | \gamma \rangle}{\pi} \right). \quad (3.34)$$

Escrito de esta forma, podemos ver que $\frac{\langle \alpha | \beta \rangle}{\pi}$ es un núcleo reproductor denotado por $K(\alpha, \beta)$, que proviene de la no-ortogonalidad de los estados coherentes. Se puede entonces reescribir lo anterior como

$$K(\alpha, \gamma) = \int d^2 \beta K(\alpha, \beta) K(\beta, \gamma). \quad (3.35)$$

Así, de nuevo por la condición de completez, podemos escribir cualquier estado coherente $|\alpha\rangle$ en términos de otro $|\beta\rangle$

$$|\alpha\rangle = \int K(\alpha, \beta) |\beta\rangle d^2 \beta \quad (3.36)$$

3.3. Grupos y Álgebras de Lie, Grupo de Heisenberg-Weyl

El teorema de Noether estipula que, correspondiente a cada ley de conservación, existe una simetría diferenciable. En particular establece una conexión entre el generador de una transformación de simetría con una cantidad conservada. El estudio de estas

cantidades conservadas es la base de la física, pues describen a los sistemas en sí. En la mecánica cuántica se puede ver como generador de traslaciones en el espacio $-i\delta_i$ al momento \hat{p}_i , mientras que la energía \hat{E} como cantidad conservada proviene de la invarianza bajo la acción del generador de traslaciones temporales $i\delta_0$. La posición no tiene relacionada una simetría o ley de conservación, por lo que simplemente se utiliza el operador de posición \hat{x}_i . [13] Las cantidades físicas de la teoría son representadas por operadores diferenciales. Para entender a detalle cómo funcionan los operadores, sobre qué actúan y cómo se relacionan a cantidades físicas medibles primero se tiene que estudiar las simetrías, que son la invarianza bajo alguna transformación y que es el objeto de estudio de la teoría de grupos. El grupo de Poincaré es el conjunto de todas las transformaciones permitidas por estas restricciones, donde el objeto invariante es la métrica de Minkowski en el espacio-tiempo.

Un grupo se puede considerar como una colección de transformaciones. Formalmente es un conjunto G con una operación binaria o definida en G que satisface cuatro condiciones

1. Sean $g_1, g_2 \in G$ dos elementos del grupo, entonces el producto de g_1 y g_2 bajo \circ pertenece también al grupo, es decir $g_1 \circ g_2 \in G$.
2. Existe un elemento $e \in G$ tal que para toda $g \in G$, $g \circ e = e \circ g = g$. A este elemento se le llama identidad.
3. Para cada $g \in G$ existe un elemento g^{-1} llamado inverso que cumple $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$
4. Asociatividad. Para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$, $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$

Las transformaciones bajo las cuales se conserva una simetría pueden ser continuas o discretas. Considere el caso de una rotación de un cuadrado centrado en $x, y = 0$ en el plano cartesiano. Matemáticamente un cuadrado es un conjunto de puntos, y su simetría es una transformación que al rotar por una cantidad menor de $\pi/2$ radianes en dirección contrarreloj respecto al origen sobre el plano xy , las nuevas posiciones de los vértices no coinciden con las posiciones de estos previo a la rotación. Sin embargo, cuando se hace una rotación de $n\pi/2$ radianes con $n \in \mathbb{Z}$, los vértices se alinearán con las posiciones iniciales, y bajo esta transformación es virtualmente imposible diferenciar entre el cuadrado inicial y el rotado. Se dice entonces que el sistema es simétrico ante rotaciones discretas de $n\pi/2$ radianes.

Por otro lado, considere ahora una circunferencia de cierto radio fijo centrada en $x, y = 0$. Rotando sobre el plano xy respecto al origen cualquier cantidad de ϕ radianes

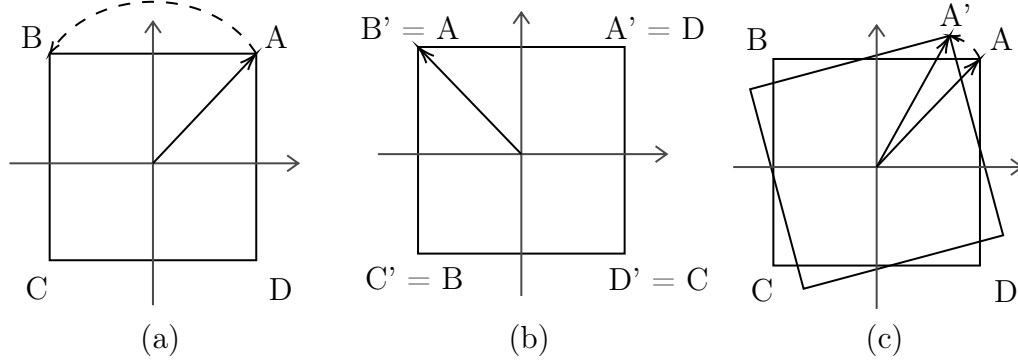


Figura 3.2: Rotación de un cuadrado (a) Posición inicial de los vértices (b) Posición final de los vértices tras una rotación de $\frac{\pi}{2}$ rad. (c) Rotación por 15° donde los vértices de la posición inicial no coinciden con los de la posición final

será imposible distinguir entre la circunferencia rotada y la no transformada. El anterior es un ejemplo de una simetría continua, que es el objeto de estudio del álgebra de Lie.

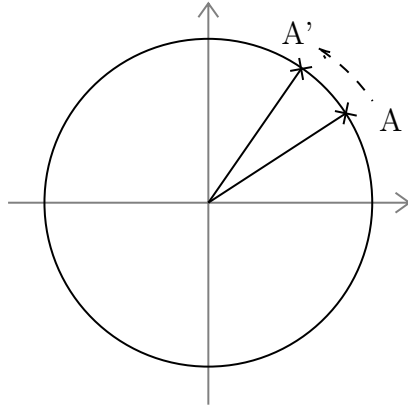


Figura 3.3: Rotación de un círculo, la simetría es continua y los puntos inicial y transformado son indistinguibles entre si

De manera más formal, sea \mathbf{a} un vector y O una transformación, que mantenga la norma de este, es decir que $|\mathbf{a}| = |O\mathbf{a}|$. La transformación tiene que ser ortogonal, es decir $O^T O = I$. Las transformaciones ortogonales en dos dimensiones se denotan por $O(2)$. Estas transformaciones también cumplen $\det(O) = \pm 1$, esta característica les da el nombre de grupo especial ortogonal, y se denota por $SO(2)$. Una matriz de rotación en

dos dimensiones por un ángulo θ se representa matricialmente como

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Por otro lado, los números complejos junto a su operación de multiplicación forman un grupo unitario llamado $U(1)$, el cuál se caracteriza por la condición $U^\dagger U = 1$. La transformación se escribe usando el parámetro θ como

$$R_\theta = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (3.38)$$

que cumple la característica de ser unitaria.

Las anteriores dos transformaciones describen rotaciones, y son un ejemplo de dos representaciones que actúan de la misma manera, formando un isomorfismo entre $SO(2)$ y $U(1)$. La representación matricial de los números complejos es entonces

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Para el caso de la circunferencia, se puede realizar una rotación con un argumento tan pequeño como se guste, una rotación arbitrariamente cercana a la identidad, a diferencia de los grupos discretos donde el parámetro de transformación no es continuo y por tanto no hay elementos arbitrariamente cercanos a la identidad. Esta transformación infinitesimal se define como

$$g(\epsilon) = I + gX, \quad (3.40)$$

donde $\epsilon > 0$ es un número pequeño y X es un objeto llamado generador. Una transformación infinitesimal aplicada de manera sucesiva genera una transformación finita $h(\theta) = \prod_k (I + \epsilon X)$, con θ un parámetro de transformación finita. Se puede reescribir ϵ en términos del parámetro de transformación finita θ dividiendo este último entre un número entero arbitrariamente grande N . El generador es entonces

$$g(\theta) = I = \frac{\theta}{N} X. \quad (3.41)$$

Aplicando esta transformación N veces, y aplicando el límite $N \rightarrow \infty$ se genera una transformación finita

$$h(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(I + \frac{\theta}{N} X \right)^N = e^{\theta X}, \quad (3.42)$$

y observamos entonces que la transformación de argumento finito θ es generada por X . Para calcular el generador se obtiene la derivada de la transformación finita respecto al

argumento y se evalúa en $\theta = 0$

$$X = \left. \frac{dh(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0}, \quad (3.43)$$

los generadores brindan información importante sobre los grupos que se estudian. En el caso particular de un grupo de transformaciones dado por matrices, se puede calcular la expansión en series de Taylor de un elemento del grupo cercano a la identidad, denotando $h = h(\theta)$

$$h(\theta) = I + \left. \frac{dh}{d\theta} \right|_{\theta=0} \theta + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 h}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} \theta^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n h}{d\theta^n} \right|_{\theta=0} \theta^n. \quad (3.44)$$

Para grupos de matrices de Lie se define un correspondiente álgebra de Lie como una colección de objetos que generan un elemento del grupo cuando se calculan sus exponenciales. Para un grupo de Lie G dado por matrices de dimensión $n \times n$, el álgebra \mathfrak{g} de G está dada por aquellas matrices $n \times n$ X tales que $e^{tX} \in G$ para $t \in \mathbb{R}$, junto a una operación llamada corchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ que define cómo se combinan estas matrices. La multiplicación de dos elementos del álgebra de Lie no necesariamente es un elemento de este mismo, es decir, no es cerrada bajo la multiplicación del grupo, pero si lo es bajo el corchete de Lie. La relación entre el álgebra de Lie y el grupo de Lie está dada por la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH)

$$e^X \circ e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[X,[X,Y]]-\frac{1}{12}[Y,[X,Y]]+\dots}, \quad (3.45)$$

del lado izquierdo, hay dos elementos del grupo escritos en término de los generadores $X, Y \in \mathfrak{g}$, mientras que del lado derecho se tiene un solo elemento del grupo y la multiplicación de elementos del grupo se ha transformado en una suma de elementos del álgebra de Lie. En el caso particular de matrices, el corchete de Lie es el conmutador $[X, Y] = XY - YX$. De manera formal, un álgebra de Lie es un espacio vectorial \mathfrak{g} junto a una operación binaria $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. La operación binaria satisface los siguientes axiomas:

1. Bilinearidad: $[aX + bY, Z] = a[X, Y] + b[Y, Z]$ y $[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$ para $a, b \in \mathbb{F}$ con \mathbb{F} un cuerpo, y se cumple para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.
2. Anti-conmutatividad: $[X, Y] = -[Y, X]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$.
3. Identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Diferentes grupos pueden tener el mismo álgebra de Lie, la diferencia entre ellos es cómo los generadores de estos grupos se comportan bajo el álgebra de Lie. Considerando el

ejemplo particular de las matrices de rotación $SO(3)$, recordando que estas están dadas por

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad R_y = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Las condiciones de estas transformaciones son las mismas que las rotaciones en dos dimensiones, es decir, son ortogonales $O^T O = I$ y su determinante es la unidad $\det(O) = 1$. Un elemento cualesquiera del grupo en términos de un generador J está dado por $O = e^{\theta J}$. Sustituyendo esto en las condiciones de las transformaciones se obtiene que $J^T + J = 0$ y $\text{Tr}(J) = 0$. A partir de estas condiciones se pueden escribir tres elementos linealmente independientes que formen una base para $SO(3)$, considere

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Así, cualquier generador se puede escribir de la forma $J = aJ_1 + bJ_2 + cJ_3$. Las entradas de las bases se pueden representar por

$$(J_i)_{jk} = -\epsilon_{ijk}. \quad (3.49)$$

Como en este caso se conocen de antemano las matrices de rotación, se puede ocupar la fórmula (3.43) para deducir J_i de cada matriz de rotación R_i , para J_1 por ejemplo

$$J_1 = \left. \frac{dR_1}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix} \bigg|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

3.4. Operador desplazamiento

Los operadores que se utilizan con frecuencia para describir sistemas cuánticos con un grado de libertad son la posición \hat{q} y momento \hat{p} y tienen las relaciones de conmutación de Heisenberg $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \hat{I}$, $[\hat{q}, \hat{I}] = [\hat{p}, \hat{I}] = 0$ con \hat{I} el operador identidad. Estos operadores actúan sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} . A partir de estos operadores se definieron los

operadores escalera \hat{a} y \hat{a}^\dagger , que siguen las relaciones de conmutación $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I}$, $[\hat{a}, \hat{I}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{I}] = 0$. Estas relaciones de conmutación entre los operadores \hat{q} , \hat{p} y la identidad \hat{I} (y respectivamente \hat{a} , \hat{a}^\dagger y \hat{I}) indica que estos son generadores de un álgebra de Lie \mathcal{W}_1 , a la que se le llama álgebra de Heisenberg-Weyl [14]. Este álgebra tridimensional se define usando las siguientes cantidades

$$e_1 = i \frac{\hat{p}}{\sqrt{\hbar}}, \quad e_2 = i \frac{\hat{q}}{\sqrt{\hbar}}, \quad e_3 = i \hat{I}, \quad (3.51)$$

que, además de ser elementos abstractos del álgebra de Lie, son a su vez operadores en un espacio de Hilbert. Las relaciones de conmutación de este álgebra son

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0. \quad (3.52)$$

Un elemento x del álgebra de Lie se representa por una combinación lineal $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + s e_3$ o una 3-tupla de números reales $(s; x_1, x_2)$. Se eligen $x_1 = -Q/\sqrt{\hbar}$ y $x_2 = P/\sqrt{\hbar}$, y en términos de los generadores del álgebra de Lie se escribe al elemento x como

$$x = \frac{i}{\hbar} (P \hat{q} - Q \hat{p}) + i s \hat{I}, \quad (3.53)$$

que, usando las expresiones de posición de momento en términos de los operadores escalera

$$\hat{q} = \sqrt{\hbar/2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (3.54)$$

$$\hat{p} = -i \sqrt{\hbar/2} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \quad (3.55)$$

se puede escribir también en términos de los operadores escalera

$$x = \left(\frac{Q + iP}{\sqrt{2\hbar}} \right) \hat{a}^\dagger - \left(\frac{Q - iP}{\sqrt{2\hbar}} \right) \hat{a} + i s \hat{I}, \quad (3.56)$$

definiendo $\alpha = \frac{Q + iP}{\sqrt{2\hbar}}$ la expresión se reduce a

$$x = \alpha \hat{a} - \alpha^* \hat{a}^\dagger + i s \hat{I}. \quad (3.57)$$

El conmutador de dos elementos $x = (s_x; x_1, x_2)$ y $y = (s_y, y_1, y_2)$ del álgebra está dado por $[x, y] = (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3$. Finalmente, se puede construir el grupo de Lie a partir del álgebra por exponenciación

$$e^x = e^{i s \hat{I}} D(\alpha), \quad D(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}, \quad (3.58)$$

donde $D(\alpha)$ se define como el operador desplazamiento. Para encontrar la ley de multiplicación para estos operadores, se considera que la relación de conmutación de los operadores bosónicos del operador escalón $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Dado que la conmutación es constante, la conmutación de \hat{a} o \hat{a}^\dagger con este es cero, es decir $[\hat{a}, [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]] = 0$ y $[\hat{a}^\dagger, [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]] = 0$. De forma más general, usando la relación BCH, se puede demostrar que dados dos operadores \hat{A} y \hat{B} que satisfacen $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]]$ se cumple entonces

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}e^{\hat{A}+\hat{B}}, \quad (3.59)$$

sustituyendo $\hat{A} = \alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}$ y $\hat{B} = \beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}$ se obtiene la ley de multiplicación de los elementos del grupo

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) = e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)}\hat{D}(\alpha + \beta), \quad (3.60)$$

una consecuencia de esta relación es que los operadores $e^{it}\hat{D}(\alpha)$ forman una representación del grupo con elementos dados por un número real t y otro número complejo α , $g = (t, \alpha)$, que a su vez se puede representar por tres números reales, t y $\text{Re}(\alpha)$ y $\text{Im}(\alpha)$. A este grupo se le denomina de Heisenberg-Weyl y se denota por W_1 .

Otra forma de escribir el operador desplazamiento es en términos de los operadores de posición \hat{q} y momento \hat{p} , utilizando la definición del parámetro complejo α , y los parámetros escalera en términos de los operadores de posición y momento, que despejando de (3.54) y (3.55) son, en términos de Glauber (1963)

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{q} + i\hat{p}), \quad (3.61)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{q} - i\hat{p}), \quad (3.62)$$

$$(3.63)$$

se puede obtener la expresión para el operador desplazamiento simplemente sustituyendo

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-i(Q\hat{p} - P\hat{q})/\hbar}, \quad (3.64)$$

la cual resulta útil para hacer cálculos en la base de estados de posición.

3.4.1. Propiedades del operador desplazamiento

A continuación se enlistan las propiedades del operador desplazamiento dadas por Agarwal [6] y se demuestra cada una de estas.

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} = e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha^* \hat{a}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger}. \quad (3.65)$$

$$\hat{D}^{-1}(\alpha) = \hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}(-\alpha). \quad (3.66)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) G(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \hat{D}(\alpha) = \hat{G}(\hat{a} + \alpha, \hat{a}^\dagger + \alpha^*), \quad \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha. \quad (3.67)$$

$$\hat{D}(\alpha) \hat{D}(\beta) = \hat{D}(\alpha + \beta) \exp \left\{ \left[\frac{1}{2} (\alpha \beta^* - \alpha^* \beta) \right] \right\}, \quad [\hat{D}(\alpha), \hat{D}(\beta)] \neq 0. \quad (3.68)$$

$$\text{Tr} \hat{D}(\alpha) = \pi \delta^{(2)}(\alpha) = \pi \delta(\text{Re}\{\alpha\}) \delta(\text{Im}\{\alpha\}). \quad (3.69)$$

$$\text{Tr}[\hat{D}(\alpha) \hat{D}^\dagger(\beta)] = \pi \delta^{(2)}(\alpha - \beta). \quad (3.70)$$

$$\hat{D}(\alpha) |\beta\rangle = |\alpha + \beta\rangle \exp \left\{ \left[\frac{1}{2} (\alpha \beta^* - \alpha^* \beta) \right] \right\}. \quad (3.71)$$

$$\langle \alpha | \hat{D}(\gamma) | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle \exp \left\{ (\gamma \alpha^* - \gamma^* \beta - \frac{1}{2} |\gamma|^2) \right\}. \quad (3.72)$$

$$\langle n | \hat{D}(\gamma) | m \rangle = \sqrt{\frac{m!}{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} (\alpha)^{n-m} L_m^{(n-m)}(|\alpha|^2), \quad n \geq m. \quad (3.73)$$

$$= \sqrt{\frac{m!}{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} (\alpha^*)^{m-n} L_m^{(m-n)}(|\alpha|^2), \quad n \leq m. \quad (3.74)$$

Donde $L_n^{(k)}(x)$ son los polinomios asociados de Laguerre

$$L_n^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+k}{m+k} \frac{x^m}{m!}. \quad (3.75)$$

1. Expresamos a los operadores de creación \hat{a}^\dagger y aniquilación \hat{a} en función de los operadores de posición y momento

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right); \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right), \quad (3.1)$$

el conmutador es entonces

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \frac{m\omega}{2\hbar} \left[\left(\hat{x}^2 + \frac{1}{m^2\omega^2} \hat{p}^2 - \frac{i}{m\omega} \hat{x}\hat{p} + \frac{i}{m\omega} \hat{p}\hat{x} \right) - \left(\hat{x}^2 + \frac{1}{m^2\omega^2} \hat{p}^2 + \frac{i}{m\omega} \hat{x}\hat{p} - \frac{i}{m\omega} \hat{p}\hat{x} \right) \right] \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{\hbar} (-\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) \\ &= -\frac{i}{\hbar} [\hat{x}, \hat{p}] \\ &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{x}, \hat{p}] \\ &= \frac{[\hat{x}, \hat{p}]}{[\hat{x}, \hat{p}]}, \end{aligned}$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (3.3)$$

El conmutador es constante, se tiene entonces

$$[\hat{A}, [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]] = 0. \quad (3.4)$$

Aplicando la identidad de BCH sobre el operador desplazamiento

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha) &= \exp\{(\alpha\hat{a}^\dagger)\} \exp\{(-\alpha^*\hat{a})\} \\ &= \exp \left\{ \alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a} + \frac{1}{2}[\alpha\hat{a}^\dagger, -\alpha^*\hat{a}] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12}[\alpha\hat{a}^\dagger, [\alpha\hat{a}^\dagger, -\alpha^*\hat{a}]] + \frac{1}{12}[\alpha^*\hat{a}, [\alpha\hat{a}^\dagger, -\alpha^*\hat{a}]] + 0 + \dots \right\} \\ &= \exp \left\{ \alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a} - \frac{1}{2}|\alpha|^2[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12}\alpha|\alpha|^2[\hat{a}^\dagger, [\hat{a}^\dagger, -\hat{a}]] + \frac{1}{12}\alpha^*|\alpha|^2[\hat{a}[\hat{a}^\dagger, -\hat{a}]] + 0 + \dots \right\} \\ &= \exp \left\{ \alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a} - \frac{1}{2}|\alpha|^2[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \right\} \\ &= \exp(\alpha\hat{a}^\dagger) \exp(-\alpha^*\hat{a}) \exp(-|\alpha|^2/2) \\ \alpha &= \exp(-|\alpha|^2/2) \exp(\alpha\hat{a}^\dagger) \exp(-\alpha^*\hat{a}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

El álgebra de Lie es un espacio vectorial equipada con la operación del corchete de Lie. Por la conmutatividad del espacio vectorial se tiene:

$$\begin{aligned}\hat{D}(\alpha) &= \exp \left\{ \alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a} - \frac{1}{2} |\alpha|^2 [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\alpha^* \hat{a} + \alpha \hat{a}^\dagger + \frac{1}{2} |\alpha|^2 [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \right\} \\ &= \exp(|\alpha|^2/2) \exp(-\alpha^* \hat{a}) \exp(\alpha \hat{a}^\dagger).\end{aligned}\quad (3.6)$$

Se tiene entonces

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} = e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha^* \hat{a}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger}. \quad (3.7)$$

2. El operador inverso de $\hat{D}(\alpha)$ es el desplazamiento del vacío al estado $|\alpha\rangle$. El inverso debe satisfacer la condición

$$\hat{D}(\alpha) \hat{D}^{-1}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} \hat{D}^{-1}(\alpha) = 1. \quad (3.8)$$

El operador $\hat{D}(-\alpha)$ cumple esta característica

$$\begin{aligned}\hat{D}(\alpha) \hat{D}(-\alpha) &= e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} e^{-\alpha \hat{a}^\dagger + \alpha^* \hat{a}} \\ &= \exp \left\{ \left\{ \alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a} - \alpha \hat{a}^\dagger + \alpha^* \hat{a} + \frac{1}{2} [\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, -\alpha \hat{a}^\dagger + \alpha^* \hat{a}] \right\} \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \left([-\alpha \hat{a}^\dagger, \alpha \hat{a}^\dagger] + [-\alpha \hat{a}^\dagger, -\alpha^* \hat{a}] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [\alpha^* \hat{a}, \alpha \hat{a}^\dagger] + [-\alpha^* \hat{a}, -\alpha^* \hat{a}] \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \left(\frac{1}{2} - |\alpha|^2 + |\alpha|^2 \right) \right\} \\ &= e^0 \\ \hat{D}(\alpha) \hat{D}(-\alpha) &= I,\end{aligned}\quad (3.9)$$

y se cumple de manera análoga para $\hat{D}(-\alpha) \hat{D}(\alpha)$. Por otro lado, para el adjunto tenemos que el adjunto de un operador exponencial cumple $(e^{\hat{A}})^\dagger = e^{-\hat{A}}$. Así

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})} = e^{(-\alpha) \hat{a}^\dagger - (-\alpha)^* \hat{a}} = \hat{D}(-\alpha). \quad (3.10)$$

Por lo tanto se demuestra que

$$\hat{D}^{-1}(\alpha) = \hat{D}(\alpha) = \hat{D}(-\alpha). \quad (3.11)$$

3. Por demostrar primero que $\hat{D}(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha$. Del lema de BCH [1]

$$e^{i\hat{G}\lambda}\hat{A}e^{-i\hat{G}\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i^n \lambda^n}{n!} \right) [\hat{G}, [\dots, [\hat{G}, [\hat{G}, \hat{A}]] \dots]], \quad (3.12)$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) &= \exp\{\{\alpha^*\hat{a} - \alpha\hat{a}^\dagger\}\}\hat{a}\exp\{\{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\}\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\alpha^*\hat{a} - \alpha\hat{a}^\dagger, [\dots, [\alpha^*\hat{a} - \alpha\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \dots]]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Recordando que los conmutadores $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ y $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = -1$ son escalares por la bilinearidad del álgebra de Lie

$$[\alpha^*\hat{a} - \alpha\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = \alpha^*[\hat{a}, \hat{a}] - \alpha[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = \alpha, \quad (3.14)$$

y conmutaciones posteriores de este escalar son cero, así para $n \geq 2$ los términos de la suma se anulan y

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \frac{1}{1!}[\alpha^*\hat{a} - \alpha\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = \hat{a} + \alpha. \quad (3.15)$$

Ahora, por demostrar que $\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)\hat{D}(\alpha) = \hat{G}(\hat{a} + \alpha, \hat{a}^\dagger + \alpha^*)$. Se asume que nuestro operador \hat{G} es de la forma

$$\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\hat{a})^n + \sum_{m=0}^{\infty} d_m (\hat{a}^\dagger)^m, \quad (3.16)$$

aplicando la transformación bajo operadores deplazamiento,

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)\hat{D}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \hat{D}^\dagger(\alpha)(\hat{a})^n \hat{D}(\alpha) + \sum_{m=0}^{\infty} d_m \hat{D}^\dagger(\alpha)(\hat{a}^\dagger)^m \hat{D}(\alpha). \quad (3.17)$$

Del primer sumando, usando el operador identidad y aplicando entre cada factor \hat{a}

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \hat{D}^\dagger(\alpha)(\hat{a})^n \hat{D}(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} (\hat{a}^\dagger(\alpha) \hat{D}(\alpha)) \hat{a} \dots (\hat{D}(\alpha) \hat{D}^\dagger(\alpha)) \hat{a} \hat{D}(\alpha) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\hat{a} + \alpha)^n \end{aligned} \quad (3.18)$$

y del segundo sumando, obtenemos el adjunto de $\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha)$

$$\left\{\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha)\right\}^\dagger = \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha), \quad (3.19)$$

y conjugando (3.18)

$$\left\{\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha)\right\}^\dagger = [\hat{a} + \alpha]^\dagger = \hat{a}^\dagger + \alpha^*, \quad (3.20)$$

se obtiene entonces

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*, \quad (3.21)$$

usando el anterior resultado en la segunda suma de (3.17), y procediendo de manera análoga al primer sumando

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_m \hat{D}(\alpha)(\hat{a}^\dagger)^m \hat{D}(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m (\hat{a}^\dagger + \alpha^*)^m. \quad (3.22)$$

Así, sustituyendo (3.18) y (3.22) en (3.17)

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha)\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)\hat{D}(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\hat{a} + \alpha)^n + \sum_{m=0}^{\infty} d_m (\hat{a}^\dagger + \alpha^*)^m \\ &= \hat{G}(\hat{a} + \alpha, \hat{a}^\dagger + \alpha^*). \end{aligned} \quad (3.23)$$

4. Dado que el conmutador no es cero, se hace uso del lema de BCH

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) &= e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} e^{\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}} \\ &= \exp\left\{\left\{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a} + \beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a} + \frac{1}{2}[\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}, \beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}] + \dots\right\}\right\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Así

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) = \exp\left\{\left\{(\alpha + \beta)\hat{a}^\dagger - (\alpha + \beta)^*\hat{a}\right\}\right\} \exp\left\{\left\{\frac{1}{2}[\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}, \beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}]\right\}\right\} \quad (3.25)$$

$$= \hat{D}(\alpha + \beta) \exp\left\{\left\{\frac{1}{2}[\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}, \beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}]\right\}\right\}, \quad (3.26)$$

simplificando el conmutador del segundo factor, usando las propiedades de bilinearidad

$$[\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, \beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a}] = \beta^* \alpha [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] - \beta^* \alpha^* [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] - \beta \alpha [\hat{a}^\dagger, \hat{a}], \beta \alpha^* [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \quad (3.27)$$

$$= \beta^* \alpha - \beta \alpha^*, \quad (3.28)$$

entonces

$$\hat{D}(\alpha) \hat{D}(\beta) = \hat{D}(\alpha + \beta) \exp \left\{ \left[\frac{1}{2} (\alpha \beta^* - \alpha^* \beta) \right] \right\}, \quad [\hat{D}(\alpha), \hat{D}(\beta)] \neq 0, \quad (3.29)$$

La traza en la representación de estados coherentes es

$$\text{Tr} \{ \hat{D}(\alpha) \} = \int \frac{d^2 \beta}{\pi} \langle \beta | \hat{D}(\alpha) | \beta \rangle, \quad (3.30)$$

usando la propiedad (3.72)

$$\text{Tr} \{ \hat{D}(\alpha) \} = \frac{1}{\pi} \int d^2 \beta \langle \beta | \beta \rangle \exp \left\{ \left(\alpha \beta^* - \alpha^* \beta - \frac{1}{2} |\alpha|^2 \right) \right\} \quad (3.31)$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2} |\alpha|^2} \int d^2 \beta \exp(\alpha \beta^* - \alpha^* \beta), \quad (3.32)$$

escribimos a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ como

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2; \quad \beta = \beta_1 + i\beta_2, \quad (3.33)$$

y el diferencial de β se escribe como $d^2 \beta = d\beta_1 d\beta_2$ con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. Simplificando el integrando

$$\begin{aligned} \exp(\alpha \beta^* - \alpha^* \beta) &= \exp \{ (\alpha_1 + i\alpha_2)(\beta_1 - i\beta_2) - (\alpha_1 - i\alpha_2)(\beta_1 + i\beta_2) \} \\ &= \exp \{ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) \\ &\quad - \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2 - i(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} &= \exp \{ 2i(\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) \} \\ &= \exp \{ -2i(\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) \} \\ &= \exp \{ [-2i\alpha_2 \beta_1] \} \exp \{ [i2\alpha_1 \beta_2] \} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Usando la definición de la delta de Dirac en términos de la transformada de Fourier

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x-a)} dp, \quad (3.36)$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\{\hat{D}(\alpha)\} &= \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha|^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_2 \exp\{-i2\alpha_1\beta_2\} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_1 \exp\{i2\alpha_2\beta_1\} \\
&= \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha|^2/2} (2\pi)\delta(2\alpha_2)(2\pi)\delta(-2\alpha_1) \\
&= 4\pi e^{-|\alpha|^2/2} \delta(-2\alpha_1)\delta(2\alpha_2),
\end{aligned} \tag{3.37}$$

notemos que por propiedad de la delta

$$\delta(bt) = \frac{1}{|b|} \delta(t), \tag{3.38}$$

se puede reescribir como

$$\text{Tr}\hat{D}(\alpha) = 4\pi e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\delta(\alpha_1)}{|-2|} \frac{\delta(\alpha_2)}{|2|} = \pi e^{-|\alpha|^2/2} \delta(\text{Re}\{\alpha\})\delta(\text{Im}\{\alpha\}), \tag{3.39}$$

por las deltas de Dirac, la traza solo tomará valor cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ y el factor exponencial sería en este caso

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(0^2 + 0^2)\right\} = e^0 = 1. \tag{3.40}$$

Se reduce entonces a lo que se buscaba demostrar

$$\text{Tr}\{\hat{D}(\alpha)\} = \pi \delta^{(2)}(\alpha) = \pi \delta(\text{Re}\{\alpha\})\delta(\text{Im}\{\alpha\}). \tag{3.41}$$

5. De la definición de traza

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\{\hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\beta)\} &= \frac{1}{\pi} \int d^2\gamma \langle \gamma | \hat{D}(\alpha) \hat{D}^\dagger(\beta) | \gamma \rangle \\
&= \frac{1}{\pi} \int d^2\gamma \langle \gamma | \hat{D}(\alpha) \hat{D}(-\beta) | \gamma \rangle \quad (\text{de 3.66}) \\
&= \frac{1}{\pi} \int d^2\gamma \langle \gamma | \hat{D}(\alpha + (-\beta)) e^{\frac{1}{2}(-\alpha\beta^* + \alpha^*\beta)} | \gamma \rangle \quad (\text{de 3.68}) \\
&= \frac{1}{\pi} \int d^2\gamma e^{-\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)} \langle \gamma | \hat{D}(\alpha - \beta) | \gamma \rangle \\
&= \frac{1}{\pi} \int d^2\gamma e^{-\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)} \langle \gamma | \gamma \rangle e^{(\alpha-\beta)\gamma^* - (\alpha-\beta)^*\gamma - \frac{1}{2}|\alpha-\beta|^2} \quad (\text{de 3.72}) \\
&= \frac{1}{\pi} \int d^2\gamma e^{-\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) + (\alpha-\beta)\gamma^* - (\alpha-\beta)^*\gamma - \frac{1}{2}|\alpha-\beta|^2} \\
&= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta + |\alpha-\beta|^2)} \int d^2\gamma e^{(\alpha-\beta)\gamma^* - (\alpha-\beta)^*\gamma}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Expresando $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, el exponente del integrando en (3.42) es entonces

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)(\gamma_1 - i\gamma_2) - (\alpha - \beta)^*(\gamma_1 - i\gamma_2) = & (\alpha_1 - \beta_1 + i(\alpha_2 + \beta_2))(\gamma_1 - i\gamma_2) \\ & - (\alpha_1 - \beta_1 - i(\alpha_2 - \beta_2))(\gamma_1 + i\gamma_2). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Sea $\xi_1 = \alpha_1 - \beta_1, \xi_2 = \alpha_2 - \beta_2$, simplificando

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)(\gamma_1 - i\gamma_2) - (\alpha - \beta)^*(\gamma_1 - i\gamma_2) = & (\xi_1 - \xi_2)(\gamma_1 - i\gamma_2) - (\xi_1 - i\xi_2)(\gamma_1 + i\gamma_2) \\ = & (\xi_1\gamma_1 + \xi_2\gamma_2 + i(\gamma_1\xi_2 - \gamma_2\xi_1)) \\ & - (\xi_1\gamma_1 + \xi_2\gamma_2 + i(\gamma_2\xi_1 - \gamma_1\xi_2)) \\ = & 2i(\gamma_1\xi_2 - \gamma_2\xi_1) \\ = & 2i(\gamma_1(\alpha_2 - \beta_2) - \gamma_2(\alpha_1 - \beta_1)), \end{aligned} \quad (3.44)$$

sustituyendo lo anterior en (3.42)

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\beta)\} &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta - |\alpha - \beta|^2)} \int d\gamma_1 d\gamma_2 e^{2i(\gamma_1(\alpha_2 - \beta_2) - \gamma_2(\alpha_1 - \beta_1))} \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta - |\alpha - \beta|^2)} \int d\gamma_1 e^{2i\gamma_1(\alpha_2 - \beta_2)} \int d\gamma_2 e^{-2i\gamma_2(\alpha_1 - \beta_1)} \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta - |\alpha - \beta|^2)} [2\pi\delta(2(\alpha_2 - \beta_2))] [2\pi\delta(2(\alpha_1 - \beta_1))] \\ &= 4\pi e^{-\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta - |\alpha - \beta|^2)} \frac{\delta(\alpha_2 - \beta_2)}{|2|} \frac{\delta(\alpha_1 - \beta_1)}{|-2|} \\ &= \pi e^{-\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta - |\alpha - \beta|^2)} \delta(\alpha_2 - \beta_2) \delta(\alpha_1 - \beta_1) \\ &= \pi e^{-\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta - |\alpha - \beta|^2)} \delta^{(2)}(\alpha - \beta), \end{aligned} \quad (3.45)$$

usando el mismo argumento que en la propiedad (3.69), la traza solo toma valor cuando $\alpha = \beta$ y la potencia de la exponencial se reduce a

$$-\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta - |\alpha - \beta|^2) = -\frac{1}{2}(\alpha\alpha^* - \alpha^*\alpha - |\alpha - \alpha|^2) = 0, \quad (3.46)$$

por lo tanto

$$\text{Tr}[\hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\beta)] = \pi\delta^{(2)}(\alpha - \beta). \quad (3.47)$$

6. Usando la propiedad (3.68)

$$\hat{D}(\alpha) |\beta\rangle = |\alpha + \beta\rangle e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)} |0\rangle \quad (3.48)$$

$$= |\alpha + \beta\rangle e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)}. \quad (3.49)$$

7. Usamos la propiedad (3.71)

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\hat{D}(\gamma)|\beta\rangle &= \langle\alpha|\gamma + \beta\rangle e^{\frac{1}{2}(\gamma\beta^* - \gamma^*\beta)} \\ &= e^{\alpha^*(\gamma + \beta) - \frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\gamma + \beta|^2} e^{\frac{1}{2}(\gamma\beta^* - \gamma^*\beta)} \\ &= \exp\left\{\left\{\alpha^*(\gamma + \beta) - \frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\gamma + \beta|^2\right\}\right\} \times \\ &\quad \times \exp\left\{\left\{\frac{1}{2}(\gamma\beta^* - \gamma^*\beta)\right\}\right\} \\ &= \exp\left\{\left\{\alpha^*\gamma + \alpha^*\beta - \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2) - \gamma^*\beta\right\}\right\} \\ &= \exp\left\{\left\{\alpha^*\beta - \frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2\right\}\right\} \exp\left\{\left\{\alpha^*\gamma - \gamma^*\beta - \frac{1}{2}|\gamma|^2\right\}\right\} \\ &= \langle\alpha|\beta\rangle \exp\left(\alpha^*\gamma - \gamma^*\beta - \frac{1}{2}|\gamma|^2\right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

8. Primero demostraremos el siguiente resultado auxiliar. Notemos que la acción del operador \hat{a}^\dagger sobre un estado número es:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (3.51)$$

$$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \hat{a}^\dagger |n\rangle. \quad (3.52)$$

Aplicando esta definición de manera recursiva

$$\begin{aligned} |n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{a}^\dagger |n-1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \hat{a}^\dagger \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} \hat{a}^\dagger |n-2\rangle\right) \\ &= \frac{(\hat{a}^\dagger)^2}{\sqrt{n(n-1)}} |n-2\rangle \\ &\vdots \\ |n\rangle &= \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \end{aligned} \quad (3.53)$$

El adjunto de (3.53) es

$$(|n\rangle)^\dagger = \langle n| = \left(\frac{(\hat{a})^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle \right)^\dagger = \langle 0| \frac{\hat{a}^n}{\sqrt{n!}}. \quad (3.54)$$

Expresamos de esta forma

$$\langle n|\hat{D}(\gamma)|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \langle 0|\hat{a}^n \hat{D}(\alpha) \hat{a}^{\dagger m}|0\rangle. \quad (3.55)$$

Usamos la notación $\langle 0|\hat{A}|0\rangle = \langle \hat{A} \rangle$ para el valor esperado en el vacío

$$\langle 0|\hat{a}^n \hat{D}(\alpha) \hat{a}^{\dagger m}|0\rangle := \langle \hat{a}^n \hat{D}(\alpha) \hat{a}^{\dagger m} \rangle, \quad (3.56)$$

y calculamos

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^n \hat{D}(\alpha) \hat{a}^{\dagger m} \rangle &= \langle \hat{a}^n e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} \hat{a}^{\dagger m} \rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{i=0}^m \frac{(-\alpha^*)^i}{i!} \langle \hat{a}^n e^{\alpha \hat{a}^\dagger} \hat{a}^i \hat{a}^{\dagger m} \rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^*)^i \alpha^j}{i! j!} \langle \hat{a}^n \hat{a}^{\dagger j} \hat{a}^i \hat{a}^{\dagger m} \rangle. \end{aligned} \quad (3.57)$$

El valor esperado se anula cuando $n + i \neq j + m$. Los términos distintos de cero cumplen $n + i = j + m$. La restricción en j es $j = n + i - m \geq 0$, lo que a su vez implica $i \geq m - n$, donde i cumple necesariamente $i \geq 0$. Los posibles valores de i son

$$\max(0, m - n) \leq i \leq m, \quad (3.58)$$

lo que implica

$$\langle \hat{a}^n e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha \hat{a}} \hat{a}^{\dagger m} \rangle = \sum_{i=\max(0, m-n)}^m \frac{(-\alpha^*)^i \alpha^{n+i-m}}{i!(n+i-m)!} \langle \hat{a}^n \hat{a}^{\dagger(n+i-m)} \hat{a}^i \hat{a}^{\dagger m} \rangle. \quad (3.59)$$

Usando las identidades

$$\hat{a}^{\dagger j} |l\rangle = \sqrt{\frac{(l+j)!}{l!}} |l+j\rangle, \quad \hat{a}^j |l\rangle = \sqrt{\frac{l!}{(l-j)!}} |l-j\rangle, \quad (3.60)$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{a}^n \hat{a}^{\dagger(n+i-m)} \hat{a}^i \hat{a}^{\dagger m} \rangle &= \langle 0 | \hat{a}^n \hat{a}^{\dagger(n+i-m)} \hat{a}^i \sqrt{m} m | 0 \rangle \\
 &= \sqrt{m}! \langle 0 | \hat{a}^n \hat{a}^{\dagger(n+i-m)} \sqrt{\frac{m!}{(m-i)!}} | m-i \rangle \\
 &= \sqrt{m! \frac{m!}{(m-i)!}} \langle 0 | \hat{a}^n \times \tag{3.61}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\times \sqrt{\frac{((n+i-m) + (m-i))!}{(m-i)!}} | (m-i) + (n+i-m) \rangle \\
 &= \sqrt{m! \frac{m!}{(m-i)!} \frac{n!}{(m-i)!}} \langle 0 | \hat{a}^n | n \rangle \\
 &= \sqrt{m! \frac{m!}{(m-i)!} \frac{n!}{(m-i)!}} n! \langle 0 | 0 \rangle \\
 &= \sqrt{\frac{(m!)^2 (n!)^2}{((m-i)!)^2}} \\
 &= \frac{m! n!}{(m-i)!}. \tag{3.62}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en (3.60)

$$\langle \hat{a}^n e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha \hat{a}} \hat{a}^{\dagger m} \rangle = \sum_{i=\max(0, m-n)}^m \frac{(-\alpha^*)^i \alpha^{n-i+m} m! n!}{i! (n+i-m)! (m-i)!} \tag{3.63}$$

$$= \sum_{i=\max(0, m-n)}^m (-1)^i \frac{(\alpha^* \alpha)^i \alpha^{n-m} m! n!}{i! (n+i-m)! (m-i)!} \tag{3.64}$$

$$= \sum_{i=\max(0, m-n)}^m (-1)^i \frac{(|\alpha|^2)^i \alpha^{n-m} m! n!}{i! (n+i-m)! (m-i)!}, \tag{3.65}$$

y luego, usando

$$\frac{n!}{(m-i)! (n-(m-i))!} = \binom{n}{m-i}, \tag{3.66}$$

se tiene

$$\langle \hat{a}^n e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha \hat{a}} \hat{a}^{\dagger m} \rangle = \sum_{i=\max(0, m-n)}^m (-1)^i \frac{(|\alpha|^2)^i \alpha^{n-m} m!}{i!} \binom{n}{m-i}. \tag{3.67}$$

Sustituyendo en (3.55)

$$\langle n | \hat{D}(\alpha) | m \rangle = \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{n!m!}} \sum_{i=\max(0, m-n)}^m (-1)^i (|\alpha|^2)^i \alpha^{n-m} \binom{n}{m-i} \frac{m!}{i!} \quad (3.68)$$

$$= \sqrt{\frac{m!}{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^{n-m} \sum_{i=0}^m (-1)^i \frac{|\alpha|^2}{m!} \binom{n}{m-i}; \quad (n \geq m) \quad (3.69)$$

Donde

$$L_m^{(n-m)}(|\alpha|^2) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \frac{|\alpha|^2}{m!} \binom{n}{m-i} \quad (3.70)$$

finalmente, se obtiene el caso para $(n \geq m)$

$$\langle n | \hat{D}(\gamma) | m \rangle = \sqrt{\frac{m!}{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} (\alpha)^{n-m} L_m^{(n-m)}(|\alpha|^2), \quad n \geq m. \quad (3.71)$$

9. Finalmente, ocupando la identidad $\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}(-\alpha)$, cuando $n < m$ podemos considerar del anterior resultado

$$\langle n | \hat{D}(\alpha) | m \rangle = \left(\langle m | \hat{D}^\dagger(\alpha) | n \rangle \right)^* \quad (3.72)$$

$$= \left(\langle m | \hat{D}(-\alpha) | n \rangle \right)^* \quad (3.73)$$

$$= \sqrt{\frac{n!}{m!}} (-\alpha^*)^{m-n} e^{-|\alpha|^2/2} L_n^{m-n}(|-\alpha|^2) \quad (3.74)$$

$$= \sqrt{\frac{n!}{m!}} (-\alpha^*)^{m-n} e^{-|\alpha|^2/2} L_n^{m-n}(|\alpha|^2) \quad (3.75)$$

3.5. Operador compresión

La amplitud compleja del campo electromagnético está bien definida para cualquier estado coherente, sin embargo las partes real e imaginaria del campo oscilan teniendo dispersiones iguales. Un estado comprimido se distingue de los estados coherentes en que la distribución de las variables canónicas sobre el espacio fase se transforma tal que la dispersión de una de las variables se hace menor a la mínima incertidumbre, mientras que la incertidumbre correspondiente a la otra cuadratura conjugada aumenta, manteniendo la relación de incertidumbre.

Considere primero las amplitudes complejas adimensionales \hat{X} y \hat{Y} , las cuales se comportan como conjugadas canónicas, obedeciendo la relación de incertidumbre

$$\langle(\Delta X)^2\rangle^{1/2}\langle(\Delta Y)^2\rangle^{1/2} \geq \frac{1}{4}. \quad (3.76)$$

Para el caso de los estados coherentes, incluido el estado vacío, las dispersiones de las cuadraturas son iguales $\Delta\hat{X} = \Delta\hat{Y} = \frac{1}{2}$. Previamente estos operadores se interpretaron en el alcance del campo eléctrico como las amplitudes de las cuadraturas en las que se puede descomponer el campo eléctrico oscilante. Si bien, se puede comprimir en las variables \hat{X} y \hat{Y} definidas, los semiejes mayor y menor de la elipse representada en el espacio fase no necesitan ser paralelos a los ejes de este. El semieje mayor puede apuntar hacia otra parte, rotando un ángulo β respecto a la cuadratura \hat{Y} . Las relaciones de cuadratura son entonces

$$\hat{Q} = \hat{a}^\dagger e^{i\beta} + \hat{a} e^{-i\beta}; \quad \hat{P} = \hat{a}^\dagger e^{i(\beta+\pi/2)} + \hat{a} e^{-i(\beta+\pi/2)}, \quad (3.77)$$

cuya relación de conmutación es $[\hat{Q}, \hat{P}] = 2i$.

En términos de estas amplitudes, el campo eléctrico se puede reescribir como

$$\mathbf{E} = i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{2\hbar\pi\omega_{\mathbf{k}}}{V} \right)^{1/2} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} \left[\hat{Q} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \beta) + \hat{P} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \beta) \right]. \quad (3.78)$$

De manera más general, un estado comprimido se define por la condición de que existe un ángulo β para el cual la dispersión $\langle(\Delta Q)^2\rangle$ es más pequeño que en el estado vacío, es decir $\langle(\Delta Q)^2\rangle < 1$. De la relación de incertidumbre se sigue que, necesariamente, $\langle(\Delta P)^2\rangle > 1$.

En el artículo *Handbuch der Physik* (Pauli, 1933), Wolfgang Pauli desarrolla un método para encontrar los estados de mínima incertidumbre. Esto lo realizó realizando la proposición de que para la función de onda de posición $\varphi(q)$ del estado $|\varphi\rangle$ la cantidad

$$\delta = \left| \frac{q}{2\Delta^2} \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right|^2, \quad (3.79)$$

debe ser necesariamente mayor o igual a cero. Desarrollando el binomio e integrando, y usando la definición del operador momento se obtiene

$$\int \delta dq = -\frac{1}{4\Delta^2} + \Delta^2 p \geq 0, \quad (3.80)$$

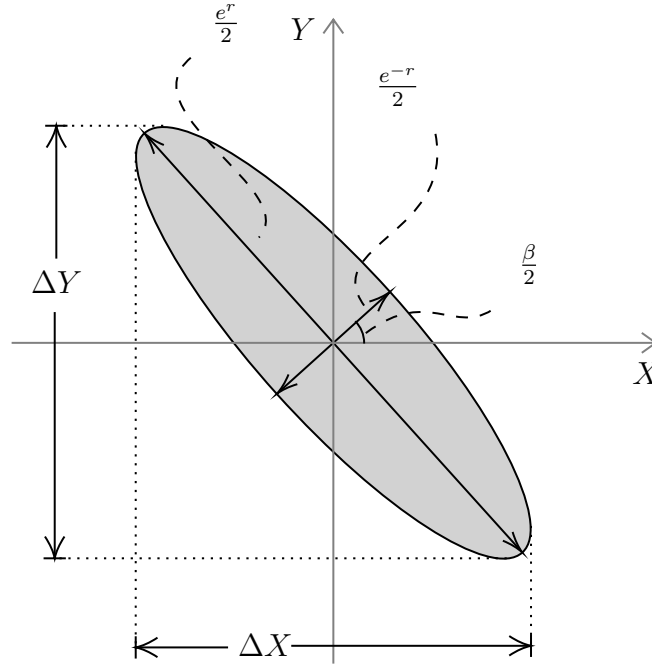


Figura 3.4: Vacío comprimido $|z\rangle = \hat{S}(z)|0\rangle$, con β el argumento y r el módulo del parámetro de compresión z .

que lleva a la relación de incertidumbre de Heisenberg $\Delta q \Delta p \geq \frac{1}{2}$ con \hbar escalada a la unidad. La igualdad se mantiene solo si se satisface

$$\frac{1}{2} \frac{q}{\Delta^2 q} \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0, \quad (3.81)$$

la solución normalizada a esta ecuación diferencial es una función de onda Gaussiana, tal como la de un estado coherente

$$\varphi(q) = (2\pi\Delta^2 q)^{-1/4} \exp\left\{\left(-\frac{q^2}{4\Delta^2 q}\right)\right\}. \quad (3.82)$$

La varianza $\Delta^2 q$ no debe ser necesariamente igual a $1/2$ para mantener la mínima incertidumbre y $\Delta^2 q$ y $\Delta^2 p$ no necesitan ser iguales. $\Delta^2 q$ puede ser menor a $1/2$ dado un $\Delta^2 p$ que mantenga el producto de las incertidumbres fijo en el mínimo. Se parametriza la desviación de las varianzas de los valores del vacío por un número z llamado parámetro de compresión, definiendo

$$\Delta^2 q = \frac{1}{2} e^{-2z}, \quad \Delta^2 p = \frac{1}{2} e^{2z}. \quad (3.83)$$

Para comprimir el vacío, se puede escalar la función de onda ψ_0

$$\varphi(q) = e^{z/2} \psi_0(e^{-z} p) \quad (3.84)$$

donde la función ya está normalizada. La función de onda del momento $\tilde{\varphi}(p)$ es la transformada de Fourier de la función de onda de la posición

$$\tilde{\varphi}(p) = e^{-z/2} \tilde{\psi}_0(e^{-z} p). \quad (3.85)$$

De las anteriores dos ecuaciones se puede observar que, cuando la función de onda de la posición se ve comprimida, la de momento se estira y viceversa. Diferenciando la función de onda de posición respecto al parámetro de compresión se obtiene [11]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{2} (i\hat{q}\hat{p} + i\hat{p}\hat{q}) \varphi = \frac{1}{2} (\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}) \varphi. \quad (3.86)$$

La solución entonces se puede expresar en términos del operador de compresión, definido como

$$\hat{S}(z) = \exp \left\{ \left(\frac{z}{2} (\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}) \right) \right\}, \quad (3.87)$$

del estado vacío se obtiene entonces

$$|\varphi\rangle = \hat{S}(z) |0\rangle. \quad (3.88)$$

Esta definición del operador compresión permite comprimir al estado vacío solo a lo largo y ancho de los ejes del espacio fase, sin embargo, como se discutió al inicio del capítulo, un estado comprimido puede rotar un ángulo β en el espacio fase, y la elipse que representa al estados no necesariamente tiene su semieje mayor o menor en paralelo con los ejes del espacio fase. La forma más general del operador de compresión como operador unitario considera al argumento del parámetro de compresión z como complejo, lo que permite que la compresión se de respecto a otro eje no necesariamente paralelo al de la cuadratura de momento o posición [3]

$$\hat{S}(z) = \exp \left\{ \left(\frac{1}{2} (z \hat{a}^{\dagger 2} - z^* \hat{a}^2) \right) \right\}, \quad z = r e^{i\beta}. \quad (3.89)$$

El operador unitario se puede escribir como

$$\hat{S}(z) = \exp(rh), \quad h = \frac{1}{2} (e^{i\beta} \hat{a}^{\dagger 2} - e^{-i\beta} \hat{a}^2). \quad (3.90)$$

Del teorema de expansión de operadores, se puede encontrar la transformación unitaria del operador aniquilación \hat{a} por el de compresión $\hat{S}(z)$,

$$\begin{aligned}\hat{a}(z) &= \hat{S}(z)\hat{a}\hat{S}(z) \\ &= \hat{a} + z\hat{a}^\dagger + \frac{|z|^2\hat{a}}{2!} + \frac{z|z|^2\hat{a}^\dagger}{3!} + \dots \\ &= \hat{a} \cosh r + \hat{a}^\dagger e^{i\beta} \sinh r \\ &= \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger\end{aligned}\tag{3.91}$$

donde se ha definido $\mu = \cosh r$ y $\nu = e^{i\beta} \sinh r$. De manera análoga se obtiene la transformación unitaria del operador creación

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger(z) &= \hat{S}(z)\hat{a}^\dagger\hat{S}(z) \\ &= \mu\hat{a} + \nu^*\hat{a}^\dagger.\end{aligned}\tag{3.92}$$

Los operadores $\hat{a}(z)$ y $\hat{a}^\dagger(z)$ siguen la misma relación de conmutación que los operadores escalera

$$[\hat{a}(z), \hat{a}^\dagger(z)] = 1,\tag{3.93}$$

donde se deja implícita la dependencia de estos operadores en el parámetro de compresión z . Calculando las derivadas respecto a r

$$\frac{d\hat{a}}{dr} = \exp(i\beta)\hat{a}^\dagger,\tag{3.94}$$

$$\frac{d\hat{a}^\dagger}{dr} = \exp(-i\beta)\hat{a},\tag{3.95}$$

es fácil encontrar la solución para (3.91) y (3.92)

$$\hat{a}(z) = \hat{a} \cosh(r) + \hat{a}^\dagger e^{i\beta} \sinh(r).\tag{3.96}$$

A la transformación (3.96) se le llama de Bogoliubov. La relación entre estos operadores y los de escalera está dada por

$$\hat{a} = \mu\hat{a}(z) - \nu\hat{a}^\dagger(z),\tag{3.97}$$

$$\hat{a}^\dagger = \mu\hat{a}^\dagger(z) - \nu^*\hat{a}(z).\tag{3.98}$$

El estado que se obtiene al aplicar el operador de compresión en un estado coherente $|\alpha\rangle$ se denomina estado coherente de dos fotones [10], denotado por

$$|[z, \alpha]\rangle = \hat{S}(z)|\alpha\rangle = \hat{S}(z)\hat{D}(\alpha)|0\rangle.\tag{3.99}$$

Dado que los operadores compresión y desplazamiento no conmutan, se puede definir también el estado compresión ideal, invirtiendo el orden de los operadores sobre el estado vacío [3]

$$|\alpha, z\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(z)|0\rangle. \quad (3.100)$$

Los valores esperados de para los estados coherentes comprimidos están dados por

$$\hat{S}^\dagger(z)\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{S}(z)\hat{D}(\alpha) = \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger e^{i\beta} \sinh r + \alpha, \quad (3.101)$$

$$\hat{S}^\dagger(z)\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{S}(z)\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} e^{-i\beta} \sinh r + \alpha^*. \quad (3.102)$$

De estas transformaciones, se puede obtener una relación de eigenvalores para los estados coherentes comprimidos

$$(\hat{a} \cosh r + \hat{a}^\dagger e^{i\beta} \sinh r) |\alpha, z\rangle = (\alpha \cosh r + \alpha^* e^{i\beta} \sinh r) |\alpha, z\rangle. \quad (3.103)$$

El principal interés del estudio de los estados coherentes comprimidos radica en las propiedades de los operadores cuadraturas relacionados a estos, se tiene que

$$\langle \alpha, z | \hat{X} | \alpha, z \rangle = \text{Re } \alpha = |\alpha| \cos \phi \quad (3.104)$$

$$\langle \alpha, z | \hat{Y} | \alpha, z \rangle = \text{Im } \alpha = |\alpha| \sin \phi \quad (3.105)$$

donde $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$. Las varianzas en las cuadraturas son

$$(\Delta X)^2 = \frac{1}{4} \left(e^{2r} \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) + e^{-2r} \cos^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) \right), \quad (3.106)$$

$$(\Delta Y)^2 = \frac{1}{4} \left(e^{2r} \cos^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) + e^{-2r} \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) \right), \quad (3.107)$$

El operador de tiene la siguiente propiedad

$$\hat{S}^\dagger(z) = \hat{S}^{-1}(z) = \hat{S}(-z). \quad (3.108)$$

Escribiendo el operador de aniquilación como la combinación de dos operadores hermitianos \hat{X} y \hat{Y} como se realizó en la sección del oscilador armónico, se encontró que su relación de incertidumbre es $\Delta X \Delta Y \leq 1/4$ y los estados coherentes tienen la particularidad de tener los estados de menor incertidumbre, es decir, cumplen el caso de la igualdad y $\Delta X = \Delta Y = \frac{1}{2}$. Dependiendo de cómo se definan estos operadores Hermitianos en los que se descomponen los operadores de aniquilación y creación, se escalan estos en el espacio de fasores.

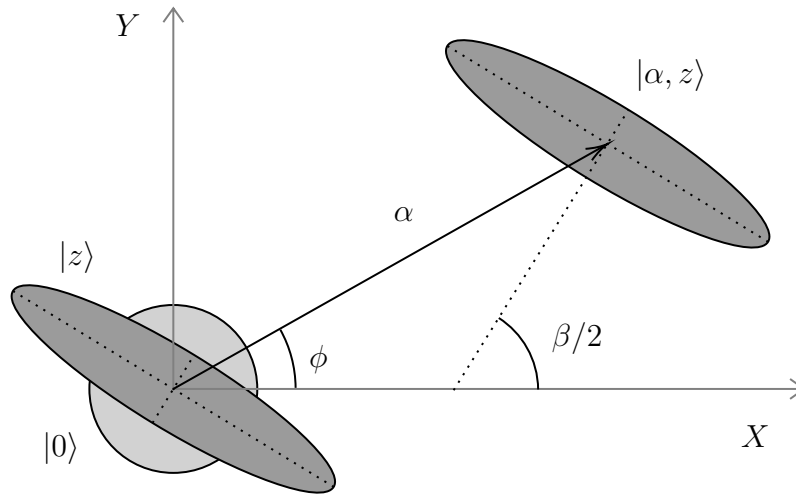


Figura 3.5: Estado comprimido ideal, donde se aplica primero la compresión y después el desplazamiento sobre el estado vacío $|\alpha, z\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(z)|0\rangle$, con β la fase del parámetro de compresión z , α el parámetro de desplazamiento y ϕ el argumento de desplazamiento

4

Función de Wigner

Es conocido que para sistemas microscópicos, la mecánica cuántica puede describirlos a través de un vector de estado $|\psi\rangle$ para estados puros o el operador de densidad $\hat{\rho}$ tanto para estados puros como mixtos. Existe otra representación que ayuda a exponer las propiedades del estado cuántico usando el espacio fase a través de la función de Wigner (1932)

La mecánica estadística nos permite comparar las similitudes y diferencias entre el sistema de una sola partícula en mecánica cuántica y un ensemble de partículas en mecánica clásica. Esto fue propuesto por Max Born en su conferencia Nobel (1954) usando como ejemplo el sistema cuántico de una partícula confinada a una caja.

De manera clásica, una distribución de probabilidad del espacio fase puede describir el estado de un sistema clásico, como en el caso de las partes real e imaginaria de la amplitud α del oscilador electromagnético. Una distribución $W(q, p)$ cuantifica la probabilidad de encontrar una partícula en la configuración q, p en una medición simultánea. Conociendo esta distribución de probabilidad del espacio fase, todas las cantidades se pueden predecir por cálculo directo [11].

Dado que \hat{q} y \hat{p} no son observables compatibles, el principio de incertidumbre no permite la medición simultánea y precisa de ambas cantidades, por lo que un espacio fase en el sentido clásico no se puede definir directamente como una distribución de probabilidad. Sin embargo, se puede definir un objeto que dependa de los eigenvalores de \hat{x} y \hat{p} . Esta definición se realiza sacrificando que la función sea no negativa en todo punto. Se le denomina entonces una función de cuasi-probabilidad, y no corresponde a ninguna cantidad medible directamente. Estas funciones son útiles para reconstruir un estado cuántico de un sistema dado, y también pueden dar información sobre la fase del oscilador armónico a falta de un operador que pueda medir esta propiedad [15].

La clasificación del ordenamiento de estos operadores permite realizar cálculos más inmediatos a través del uso de propiedades que resultan de tal orden. Una función si-

métricamente ordenada o Weyl-ordenada se tiene cuando hay simetría respecto al ordenamiento de los operadores, por ejemplo $\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}\hat{a}^{\dagger 2}$ [10]. Una función de los operadores \hat{a} y \hat{a}^{\dagger} se dice normalmente ordenada cuando en cada producto los operadores de creación \hat{a}^{\dagger} se multiplican por la derecha a los de aniquilación \hat{a} . Cuando se reescribe una función de estos operadores a través del uso de las relaciones de conmutación para seguir esta estructura se le llama ordenamiento. Por ejemplo la segunda potencia del operador número $\hat{N} = \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$. El anti-ordenamiento es el proceso contrario, de escribir las funciones de los operadores escalera de forma que el de aniquilación \hat{a} preceda en cada término como factor al de creación \hat{a}^{\dagger} .

La función de Wigner, de manera análoga a las funciones de densidad de probabilidad clásicas, se define como la transformada de Fourier de una función característica $\chi(\beta)$

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int \exp\{[\beta^* \alpha - \beta \alpha^*]\} \chi(\beta) d^2 \beta. \quad (4.1)$$

La función característica debe ser simétricamente ordenada. En este caso, el operador de densidad brinda la descripción completa del sistema, y está determinado por su función característica

$$\chi(\alpha) = \text{Tr} \{ \rho \hat{D}(\alpha) \}. \quad (4.2)$$

A parte de la función de Wigner, existen otras funciones de distribución cuasi-probabilísticas como lo son la función Q de Husimi o la función P de Glauber-Sudarshan. La diferencia entre ellas radica en el orden de los factores de aniquilación y creación, usando una función característica ad hoc a su ordenamiento. La función P es conveniente para evaluar funciones normalmente ordenadas, mientras que la función Q lo es para evaluar funciones anti-normalmente ordenadas.

La función de Wigner también se puede construir usando la perspectiva de funciones de onda como Wigner (1932) la describió originalmente a partir de la descripción de un salto de una partícula de una posición q' a otra q'' . Sea $\xi = q'' - q'$ la distancia de esta transición. En el caso de una dimensión describimos el estado de la partícula con el operador de densidad $\hat{\rho}$ y el elemento de matriz $\langle q'' | \hat{\rho} | q' \rangle$ describe el salto del eigenestado de posición $|q'\rangle$ al eigenestado de posición $|q''\rangle$. Sea $q = (q' + q'')/2$ el punto medio entre la posición inicial y final de la transición y expresamos q' y q'' en términos de la distancia de transición y el punto medio

$$q' = q - \frac{1}{2}\xi; \quad q'' = q + \frac{1}{2}\xi, \quad (4.3)$$

y el elemento de matriz que describe la transición es $\langle q + \frac{1}{2}\xi | \hat{\rho} | q - \frac{1}{2}\xi \rangle$. Dado que el momento es el generador de traslaciones, se asocia el momento p de la partícula con el

salto ξ de la partícula. La transformada de Fourier del salto brinda la distribución del momento y define a la función de Wigner

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \left\{ \left(-\frac{i}{\hbar} \xi p \right) \right\} \left\langle q + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{\rho} \right| q - \frac{1}{2}\xi \right\rangle \quad (4.4)$$

donde $1/(2\pi\hbar)$ es el factor de normalización. haciendo el cambio de variable $y = \xi/2$

$$\begin{aligned} W(q, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left\{ \left(-2\frac{i}{\hbar} yp \right) \right\} \left\langle q + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{\rho} \right| q - \frac{1}{2}\xi \right\rangle \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left\{ \left(-2\frac{i}{\hbar} yp \right) \right\} \langle -y | e^{-iq\hat{p}/\hbar} \hat{\rho} e^{iq\hat{p}/\hbar} | y \rangle \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy \langle -y | e^{ip\hat{q}/\hbar} e^{-iq\hat{p}/\hbar} \hat{\rho} e^{iq\hat{p}/\hbar} e^{-ip\hat{q}/\hbar} | y \rangle \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy \langle y | (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} e^{ip\hat{q}/\hbar} e^{-iq\hat{p}/\hbar} \hat{\rho} e^{iq\hat{p}/\hbar} e^{-ip\hat{q}/\hbar} | y \rangle \end{aligned} \quad (4.5)$$

se expresa entonces la función de Wigner en términos de la traza del operador [15]

$$(-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{\rho} \hat{D}(\alpha), \quad (4.6)$$

como

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi} \text{Tr} \left\{ (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{\rho} \hat{D}(\alpha) \right\}, \quad (4.7)$$

donde por convención se toma \hbar como la unidad. Para calcular la función de Wigner en términos de estados coherentes puros, se utiliza $\hat{\rho} = |\beta\rangle\langle\beta|$ y se puede demostrar que [16]

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi} e^{-2|\beta-\alpha|^2}.$$

5

Evolución temporal de un amplificador paramétrico

Objetivos de este capítulo

5.1. Óptica no lineal

5.2. Parametric Down Conversion

El operador de compresión (3.89) de un solo modo puede reescribirse en una forma análoga al operador de evolución temporal, definiendo el Hamiltoniano de una compresión

$$\hat{S}(z) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right), \quad (5.1)$$

donde

$$\hat{H} = i\hbar g(e^{i\beta}\hat{a}^{\dagger 2} - e^{i\beta}\hat{a}^2), \quad (5.2)$$

con $g = r/t$ [6]. Este hamiltoniano se puede relacionar con el fenómeno físico de conversión paramétrica en descenso (PDC, por sus siglas en inglés), el cual describe la separación de un fotón de frecuencia de bombeo $\omega_p = 2\omega$ en dos fotones iguales de frecuencia ω y ocurre en medios con una susceptibilidad óptica de segundo orden no lineal $\chi^{(2)}$, tal como cristales de borato de β -bario o titanilfosfato de potasio [11]. A este caso se le denomina caso degenerado de PDC, y está descrito por

$$\hat{H} = \hbar(G\hat{c}\hat{a}^{\dagger 2} + G^*\hat{c}^{\dagger}\hat{a}^2), \quad (5.3)$$

donde el operador en el modo de la frecuencia de bombeo está dado por \hat{c} y G es una constante compleja que está relacionada con la susceptibilidad no lineal del cristal. El proceso también puede separar el fotón incidente en dos fotones de distintas frecuencias ω_a y ω_b . Por convención a estas frecuencias se les denomina *idle* y *signal*, de acuerdo

a la frecuencia de menor y mayor magnitud, respectivamente [3]. Para este caso se tiene tres operadores de distintos modos (el de bombeo, idler y signal) y se describe por

$$\hat{H} = \hbar(G\hat{c}\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger + G^*\hat{c}^\dagger\hat{a}\hat{b}), \quad (5.4)$$

y se relacionaría de manera análoga al operador de compresión de dos modos. Este último es el caso más general o no degenerado del PDC. El proceso es de utilidad para generar estados vacíos comprimidos de uno y dos modos de manera experimental [8].

Para un amplificador paramétrico, el Hamiltoniano H_{PA} está dado de la forma

$$H_{\text{PA}} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} - i\hbar\frac{\chi}{2}(\hat{a}^2\exp(2i\omega t) - \hat{a}^{\dagger 2}\exp(-2i\omega t)) \quad (5.5)$$

Las ecuaciones de movimiento de Heisenberg son

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}, H_{\text{PA}}] = \chi\hat{a}^\dagger \quad (5.6)$$

$$\frac{d\hat{a}^\dagger}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}^\dagger, H_{\text{PA}}] = \chi\hat{a} \quad (5.7)$$

y la solución de estas ecuaciones es

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)\cosh(\chi t) + \hat{a}^\dagger(0)\sinh(\chi t) \quad (5.8)$$

Se espera entonces que la luz generada por amplificación paramétrica esté comprimida, ya que los operadores de modo son de la forma del generador de la transformación de compresión.

5.3. Diagonalización de un amplificador paramétrico

Consideremos el hamiltoniano que describe el proceso de parametric down conversion

$$\hat{H} = \omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + g\hat{a}^2 + g^*\hat{a}^{\dagger 2}$$

usando $\hat{a} = \hat{b}\cosh r + \hat{b}^\dagger e^{i\theta}\sinh r$ para que $\hat{H} = \Omega\hat{b}^\dagger\hat{b} + \eta$ y donde se toma $\hbar = 1$. Se muestra que Ω, r, θ, η están dados por

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 - 4|g|^2}, \quad r = \frac{1}{4} \ln \frac{\omega - 2\sqrt{|g|^2}}{\omega + 2\sqrt{|g|^2}}, \quad \theta = i \ln \sqrt{\frac{g}{g^*}}, \quad \eta = \frac{\Omega - \omega}{2}$$

Notando que \hat{a} y \hat{b} son operadores de bosones.

Procedemos observando que hacer el cambio de operador $\hat{a} = \hat{b} \cosh r + \hat{b}^\dagger e^{i\theta} \sinh r$ es equivalente a hacer la diagonalización del Hamiltoniano con el uso del operador unitario de compresión $\hat{S}(\xi)$, con $\xi = r e^{i\theta}$. De la transformación de Bogoliubov

$$\begin{aligned}
\hat{S}^\dagger(\xi) \hat{H} \hat{S}(\xi) &= \hat{S}^\dagger(\xi) (\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + g \hat{a}^2 + g^* \hat{a}^{\dagger 2}) \hat{S}(\xi) \\
&= \omega \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{S}(\xi) + g \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^2 \hat{S}(\xi) + g^* \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^{\dagger 2} \hat{S}(\xi) \\
&= \omega \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) + g \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) + g^* \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) \\
&= \omega \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) + g \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) + g^* \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) \\
&= \omega (\hat{a}^\dagger \cosh r + \hat{a} e^{-i\theta} \sinh r) (\hat{a} \cosh r + \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh r) \\
&\quad + g (\hat{a} \cosh r + \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh r)^2 + g^* (\hat{a}^\dagger \cosh r + \hat{a} e^{-i\theta} \sinh r)^2
\end{aligned}$$

Una vez hecha la transformación del operador bosónico, se reagrupan los términos de operador común

$$\begin{aligned}
\hat{S}^\dagger(\xi) \hat{H} \hat{S}(\xi) &= \hat{a}^\dagger \hat{a} (\omega \cosh^2 r + g e^{i\theta} \cosh r \sinh r + g^* e^{-i\theta} \cosh r \sinh r) \\
&\quad + \hat{a} \hat{a}^\dagger (\omega \sinh^2 r + g e^{i\theta} \cosh r \sinh r + g^* e^{-i\theta} \cosh r \sinh r) \\
&\quad + \hat{a}^{\dagger 2} (\omega e^{i\theta} \cosh r \sinh r + g e^{2i\theta} \sinh^2 r + g^* \cosh^2 r) \\
&\quad + \hat{a}^2 (\omega e^{-i\theta} \cosh r \sinh r + g \cosh^2 r + g^* e^{-2i\theta} \sinh^2 r)
\end{aligned}$$

Ocupando la relación de conmutación de los operadores bosónicos $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, se obtiene que $\hat{a} \hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{a} + 1$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\hat{S}^\dagger(\xi) \hat{H} \hat{S}(\xi) &= \hat{a}^\dagger \hat{a} (\omega (\cosh^2 r + \sinh^2 r) + 2g e^{i\theta} \cosh r \sinh r + 2g^* e^{-i\theta} \cosh r \sinh r) \\
&\quad + (\omega \sinh^2 r + g e^{i\theta} \cosh r \sinh r + g^* e^{-i\theta} \cosh r \sinh r) \\
&\quad + \hat{a}^{\dagger 2} (\omega e^{i\theta} \cosh r \sinh r + g e^{2i\theta} \sinh^2 r + g^* \cosh^2 r) \\
&\quad + \hat{a}^2 (\omega e^{-i\theta} \cosh r \sinh r + g^* e^{-2i\theta} \sinh^2 r + g \cosh^2 r)
\end{aligned}$$

para llegar a la forma del Hamiltoniano del oscilador armónico $\hat{H} = \Omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \eta$ se ha de cumplir que

$$\begin{aligned}
\omega e^{i\theta} \cosh r \sinh r + g e^{2i\theta} \sinh^2 r + g^* \cosh^2 r &= 0 \\
\omega e^{-i\theta} \cosh r \sinh r + g^* e^{-2i\theta} \sinh^2 r + g \cosh^2 r &= 0
\end{aligned}$$

dividiendo entre $\cosh^2 r$ ambas ecuaciones, obtenemos un par de ecuaciones cuadráticas para $\tanh r$

$$\begin{aligned}
\omega e^{i\theta} \tanh r + g e^{2i\theta} \tanh^2 r + g^* &= 0 \\
\omega e^{-i\theta} \tanh r + g^* e^{-2i\theta} \tanh^2 r + g &= 0
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática para la tangente hiperbólica

$$\tanh r = \frac{-\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4|g|^2}}{2ge^{i\theta}}$$

$$\tanh r = \frac{-\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4|g|^2}}{2g^*e^{-i\theta}}$$

Que la igualdad entre valores de $\tanh r$, se debe cumplir que el denominador sea el mismo en ambos casos

$$2ge^{i\theta} = 2g^*e^{-i\theta}$$

de donde se deduce el valor de theta

$$e^{-2i\theta} = \frac{g}{g^*}$$

$$e^{-i\theta} = \sqrt{\frac{g}{g^*}}$$

$$-i\theta = \ln\left(\sqrt{\frac{g}{g^*}}\right)$$

y finalmente

$$\theta = i \ln\left(\sqrt{\frac{g}{g^*}}\right)$$

Por calcular r , se tiene, usando $e^{i\theta} = \sqrt{\frac{g^*}{g}}$,

$$\tanh r = \frac{-\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4|g|^2}}{2g\left(\sqrt{\frac{g^*}{g}}\right)} = \frac{-\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4|g|^2}}{2|g|}$$

como $r \geq 0$ tenemos que $\tanh r \geq 0$ luego

$$\tanh r = \frac{-\omega + \sqrt{\omega^2 - 4|g|^2}}{2|g|}$$

Obteniendo \tanh^{-1} usando

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

despejamos r

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{1 - \frac{\omega}{2|g|} + \frac{\sqrt{\omega^2 - 4|g|^2}}{2|g|}}{1 + \frac{\omega}{2|g|} - \frac{\sqrt{\omega^2 - 4|g|^2}}{2|g|}} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{2|g| - \omega + \sqrt{\omega^2 - 4|g|^2}}{2|g| + \omega - \sqrt{\omega^2 - 4|g|^2}} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{-\sqrt{\omega - 2|g|}\sqrt{\omega - 2|g|} + \sqrt{\omega - 2|g|}\sqrt{\omega + 2|g|}}{\sqrt{\omega + 2|g|}\sqrt{\omega + 2|g|} - \sqrt{\omega - 2|g|}\sqrt{\omega + 2|g|}} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{\sqrt{\omega - 2|g|}(\sqrt{\omega + 2|g|} - \sqrt{\omega - 2|g|})}{\sqrt{\omega + 2|g|}(\sqrt{\omega + 2|g|} - \sqrt{\omega - 2|g|})} \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \ln \left\{ \frac{\omega - 2|g|}{\omega + 2|g|} \right\}
 \end{aligned}$$

Con esta condición, se obtiene el Hamiltoniano en forma de oscilador armónico

$$\begin{aligned}
 \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{H} \hat{S}(\xi) &= \hat{a}^\dagger \hat{a} (\omega (\cosh^2 r + \sinh^2 r) + 2 \cosh r \sinh r [ge^{i\theta} + g^* e^{-i\theta}]) \\
 &\quad + (\omega \sinh^2 r + ge^{i\theta} \cosh r \sinh r + g^* e^{-i\theta} \cosh r \sinh r) \\
 &= \hat{a}^\dagger \hat{a} (\omega \cosh 2r + \sinh 2r [ge^{i\theta} + g^* e^{-i\theta}]) \\
 &\quad + (\omega \sinh^2 r + ge^{i\theta} \cosh r \sinh r + g^* e^{-i\theta} \cosh r \sinh r)
 \end{aligned}$$

usando la identidad $\sinh^2 r = (\cosh 2r - 1)/2$ y empleandtenemos que

$$\begin{aligned}
 \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{H} \hat{S}(\xi) &= \hat{a}^\dagger \hat{a} \left(\omega \cosh 2r + \sinh 2r \left[g \sqrt{\frac{g^*}{g}} + g^* \sqrt{\frac{g}{g^*}} \right] \right) \\
 &\quad + \frac{\omega}{2} \cosh 2r + g \sqrt{\frac{g^*}{g}} \cosh r \sinh r + g^* \sqrt{\frac{g}{g^*}} \cosh r \sinh r - \frac{\omega}{2} \\
 &= \hat{a}^\dagger \hat{a} (\omega \cosh 2r + 2|g| \sinh 2r) + \frac{1}{2} (\omega \cosh 2r + 2|g| \sinh 2r) - \frac{\omega}{2}
 \end{aligned}$$

Empleando el hecho de

$$e^{2r} = \sqrt{\frac{\omega - 2|g|}{\omega + 2|g|}}$$

$$\begin{aligned} \cosh 2r &= \frac{e^{2r}}{2} + \frac{e^{-2r}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega - 2|g|}{\omega + 2|g|}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega + 2|g|}{\omega - 2|g|}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega - 2|g| + \omega + 2|g|}{\sqrt{\omega^2 - 4|g|^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - 4|g|^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sinh 2r &= \frac{e^{2r}}{2} - \frac{e^{-2r}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega - 2|g|}{\omega + 2|g|}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega + 2|g|}{\omega - 2|g|}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega - 2|g| - \omega - 2|g|}{\sqrt{\omega^2 - 4|g|^2}} = -\frac{2|g|}{\sqrt{\omega^2 - 4|g|^2}} \end{aligned}$$

entonces

$$\omega \cosh 2r + 2|g| \sinh 2r = \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2 - 4|g|^2}} - \frac{4|g|^2}{\sqrt{\omega^2 - 4|g|^2}} = \sqrt{\omega^2 - 4|g|^2}$$

ahora si definimos

$$\begin{aligned} \Omega &= \sqrt{\omega^2 - 4|g|^2} \\ \eta &= \frac{\Omega - \omega}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, la transformación de similitud se convierte en

$$\hat{S}^\dagger(\xi) \hat{H} \hat{S}(\xi) = \Omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \eta$$

5.3.1. Evolución del estado inicial

Consideremos un estado inicial del campo

$$|\psi(0)\rangle = A(|\alpha\rangle + c|\beta\rangle)$$

con

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + |c|^2 + 2\operatorname{Re}(c\langle\alpha|\beta\rangle)}}$$

entonces

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \hat{S}(\xi)\hat{S}^\dagger(\xi)e^{-it\hat{H}}\hat{S}(\xi)\hat{S}^\dagger(\xi)|\psi(0)\rangle = \hat{S}(\xi)\exp\left(-it\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{H}\hat{S}(\xi)\right)\hat{S}^\dagger(\xi)|\psi(0)\rangle \\
&= \hat{S}(\xi)\exp\left(-it\left(\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \eta\right)\right)\hat{S}^\dagger(\xi)|\psi(0)\rangle = e^{-i\eta t}\hat{S}(\xi)e^{-it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{S}^\dagger(\xi)|\psi(0)\rangle \\
&= e^{-i\eta t}e^{-it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}e^{it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{S}(\xi)e^{-it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{S}^\dagger(\xi)|\psi(0)\rangle \\
&= e^{-i\eta t}e^{-it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}e^{it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\exp\left(\xi\frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2} - \xi^*\frac{\hat{a}^2}{2}\right)e^{-it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{S}^\dagger(\xi)|\psi(0)\rangle \\
&= e^{-i\eta t}e^{-it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\exp\left(\xi e^{it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2}e^{-it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}} - \xi^*e^{it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\frac{\hat{a}^2}{2}e^{-it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\right)\hat{S}^\dagger(\xi)|\psi(0)\rangle \\
&= e^{-i\eta t}e^{-it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\exp\left(\frac{\xi}{2}\left(e^{it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a}^\dagger e^{-it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\right)^2 - \frac{\xi^*}{2}\left(e^{it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a}e^{-it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\right)^2\right)\hat{S}^\dagger(\xi)|\psi(0)\rangle
\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
e^{i\Omega t\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a}e^{-i\Omega t\hat{a}^\dagger\hat{a}} &= \hat{a} + [i\Omega t\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}] + \frac{1}{2!}[i\Omega t\hat{a}^\dagger\hat{a}, [i\Omega t\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}]] + \dots \\
&= \left(1 - i\Omega t + \frac{(-i\Omega t)^2}{2!} + \dots\right)\hat{a} = e^{-i\Omega t}\hat{a}
\end{aligned}$$

y además

$$e^{i\Omega t\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a}^\dagger e^{-i\Omega t\hat{a}^\dagger\hat{a}} = \left(e^{i\Omega t\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a}e^{-i\Omega t\hat{a}^\dagger\hat{a}}\right)^\dagger = \left(e^{-i\Omega t}\hat{a}\right)^\dagger = e^{i\Omega t}\hat{a}^\dagger$$

luego

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= e^{-i\eta t}e^{-it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\exp\left(\frac{\xi}{2}\left(e^{it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a}^\dagger e^{-it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\right)^2 - \frac{\xi^*}{2}\left(e^{it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a}e^{-it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\right)^2\right)\hat{S}^\dagger(\xi)|\psi(0)\rangle \\
&= e^{-i\eta t}e^{-it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\exp\left(\xi e^{i2\Omega t}\frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2} - \xi^*e^{-i2\Omega t}\frac{\hat{a}^2}{2}\right)\hat{S}^\dagger(\xi)|\psi(0)\rangle = e^{-i\eta t}e^{-it\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{S}\left(\xi e^{i2\Omega t}\right)\hat{S}^\dagger(\xi)|\psi(0)\rangle
\end{aligned}$$

5.3.2. Función de Wigner del campo

De la expresión (4.7) se puede escribir la función de Wigner como

$$\begin{aligned}
W(\gamma, t) &= \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \frac{2}{\pi} \hat{D}(\gamma) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(\gamma) \right\} = \text{Tr} \left\{ |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \frac{2}{\pi} \hat{D}(\gamma) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(\gamma) \right\} \\
&= \frac{2}{\pi} \langle \psi(t) | \hat{D}(\gamma) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(\gamma) | \psi(t) \rangle \\
&= \frac{2}{\pi} \langle \psi(0) | \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi e^{i2\Omega t}) e^{i\Omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}} e^{i\eta t} \hat{D}(\gamma) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(\gamma) e^{-i\eta t} e^{-i\Omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{S}(\xi e^{i2\Omega t}) \hat{S}^\dagger(\xi) | \psi(0) \rangle \\
&= \frac{2}{\pi} \langle \psi(0) | \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi e^{i2\Omega t}) e^{i\Omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}(\gamma) e^{-i\Omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}} (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} e^{i\Omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(\gamma) e^{-i\Omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{S}(\xi e^{i2\Omega t}) \hat{S}^\dagger(\xi) | \psi(0) \rangle \\
&= \frac{2}{\pi} \langle \psi(0) | \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi e^{i2\Omega t}) e^{i\Omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}(\gamma) e^{-i\Omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}} (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \left(e^{i\Omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}(\gamma) e^{-i\Omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}} \right)^\dagger \hat{S}(\xi e^{i2\Omega t}) \hat{S}^\dagger(\xi) | \psi(0) \rangle
\end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
e^{i\Omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}(\gamma) e^{-i\Omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}} &= e^{i\Omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}} \exp(\gamma \hat{a}^\dagger - \gamma^* \hat{a}) e^{-i\Omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}} \\
&= \exp\left(\gamma \left(e^{i\Omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{a} e^{-i\Omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}}\right)^\dagger - \gamma^* e^{i\Omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{a} e^{-i\Omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}}\right) \\
&= \exp\left(\gamma \left(\hat{a} e^{-i\Omega t}\right)^\dagger - \gamma^* \hat{a} e^{-i\Omega t}\right) = \hat{D}(\gamma e^{i\Omega t})
\end{aligned}$$

por lo que la función de Wigner se escribe como

$$\begin{aligned}
W(\gamma, t) &= \frac{2}{\pi} \langle \psi(0) | \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi e^{i2\Omega t}) \hat{D}(\gamma e^{i\Omega t}) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(\gamma e^{i\Omega t}) \hat{S}(\xi e^{i2\Omega t}) \hat{S}^\dagger(\xi) | \psi(0) \rangle \\
&= \frac{2}{\pi} \langle \psi(0) | \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi e^{i2\Omega t}) \hat{D}(\gamma e^{i\Omega t}) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{S}(\xi e^{i2\Omega t}) \hat{S}^\dagger(\xi e^{i2\Omega t}) \hat{D}^\dagger(\gamma e^{i\Omega t}) \hat{S}(\xi e^{i2\Omega t}) \hat{S}^\dagger(\xi) | \psi(0) \rangle
\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
(-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{S}(\xi e^{i2\Omega t}) &= e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{S}(\xi e^{i2\Omega t}) e^{-i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} = e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \exp\left(\xi e^{i2\Omega t} \frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2} - \xi^* e^{-i2\Omega t} \frac{\hat{a}^2}{2}\right) e^{-i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \\
&= \exp\left(\xi e^{i2\Omega t} e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2} e^{-i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} - \xi^* e^{-i2\Omega t} e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \frac{\hat{a}^2}{2} e^{-i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}}\right) e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \\
&= \exp\left(\xi e^{i2\Omega t} e^{i2\pi} \frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2} - \xi^* e^{-i2\Omega t} e^{-i2\pi} \frac{\hat{a}^2}{2}\right) e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \\
&= \hat{S}(\xi e^{i2\Omega t} e^{i2\pi}) e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} = \hat{S}(\xi e^{i2\Omega t}) e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}}
\end{aligned}$$

entonces

$$W(\gamma, t) = \frac{2}{\pi} \langle \psi(0) | \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi e^{i2\Omega t}) \hat{D}(\gamma e^{i\Omega t}) \hat{S}(\xi e^{i2\Omega t}) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \left(\hat{S}^\dagger(\xi e^{i2\Omega t}) \hat{D}(\gamma e^{i\Omega t}) \hat{S}(\xi e^{i2\Omega t}) \right)^\dagger \hat{S}^\dagger(\xi) | \psi(0) \rangle$$

por otra parte

$$\begin{aligned} \hat{S}^\dagger(\xi e^{i2\Omega t}) \hat{D}(\gamma e^{i\Omega t}) \hat{S}(\xi e^{i2\Omega t}) &= \hat{S}^\dagger(\xi') \hat{D}(\gamma') \hat{S}(\xi') = \hat{S}^\dagger(\xi') \exp(\gamma' \hat{a}^\dagger - \gamma'^* \hat{a}) \hat{S}(\xi') \\ &= \exp(\gamma' \hat{S}^\dagger(\xi') \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi') - \gamma'^* \hat{S}^\dagger(\xi') \hat{a} \hat{S}(\xi')) \\ &= \exp(\gamma' (\hat{S}^\dagger(\xi') \hat{a} \hat{S}(\xi'))^\dagger - \gamma'^* \hat{S}^\dagger(\xi') \hat{a} \hat{S}(\xi')) \end{aligned}$$

pero

$$\hat{S}^\dagger(\xi') \hat{a} \hat{S}(\xi') = \mu' \hat{a} + \nu' \hat{a}^\dagger$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{S}^\dagger(\xi e^{i2\Omega t}) \hat{D}(\gamma e^{i\Omega t}) \hat{S}(\xi e^{i2\Omega t}) &= \exp(\gamma' (\mu' \hat{a} + \nu' \hat{a}^\dagger)^\dagger - \gamma'^* (\mu' \hat{a} + \nu' \hat{a}^\dagger)) \\ &= \exp(\gamma' (\mu' \hat{a}^\dagger + \nu'^* \hat{a}) - \gamma'^* (\mu' \hat{a} + \nu' \hat{a}^\dagger)) \\ &= \exp((\mu' \gamma' - \nu' \gamma'^*) \hat{a}^\dagger - (\mu' \gamma' - \nu' \gamma'^*)^* \hat{a}) = \hat{D}(\mu' \gamma' - \nu' \gamma'^*) \end{aligned}$$

por otra parte

$$\mu' = \cosh |\xi'| = \cosh |\xi e^{i2\Omega t}| = \cosh |\xi| = \mu$$

$$\nu' = \frac{\xi'}{|\xi'|} \sinh |\xi'| = \frac{\xi e^{i2\Omega t}}{|\xi e^{i2\Omega t}|} \sinh |\xi e^{i2\Omega t}| = e^{i2\Omega t} \frac{\xi}{|\xi|} \sinh |\xi| = \nu e^{i2\Omega t}$$

luego

$$\hat{S}^\dagger(\xi e^{i2\Omega t}) \hat{D}(\gamma e^{i\Omega t}) \hat{S}(\xi e^{i2\Omega t}) = \hat{D}(\mu \gamma e^{i\Omega t} - \nu e^{i2\Omega t} \gamma^* e^{-i\Omega t}) = \hat{D}((\mu \gamma - \nu \gamma^*) e^{i\Omega t})$$

por lo que la función de Wigner se escribe como

$$\begin{aligned} W(\gamma, t) &= \frac{2}{\pi} \langle \psi(0) | \hat{S}(\xi) \hat{D}((\mu \gamma - \nu \gamma^*) e^{i\Omega t}) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger((\mu \gamma - \nu \gamma^*) e^{i\Omega t}) \hat{S}^\dagger(\xi) | \psi(0) \rangle \\ &= \frac{2}{\pi} \langle \psi(0) | \hat{S}(\xi) \hat{D}((\mu \gamma - \nu \gamma^*) e^{i\Omega t}) \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{S}(\xi) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger((\mu \gamma - \nu \gamma^*) e^{i\Omega t}) \hat{S}^\dagger(\xi) | \psi(0) \rangle \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
\hat{S}(\xi)(-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} &= \hat{S}(\xi)e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} = e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} e^{-i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{S}(\xi)e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} = e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} e^{-i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \exp\left(\frac{\xi}{2}\hat{a}^{\dagger 2} - \frac{\xi^*}{2}\hat{a}^2\right) e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \\
&= e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \exp\left(\frac{\xi}{2}e^{-i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{a}^{\dagger 2} e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} - \frac{\xi^*}{2}e^{-i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{a}^2 e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}}\right) = e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \exp\left(\frac{\xi}{2}\hat{a}^{\dagger 2} e^{-i2\pi} - \frac{\xi^*}{2}\hat{a}^2 e^{i2\pi}\right) \\
&= e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \exp\left(\frac{\xi}{2}\hat{a}^{\dagger 2} - \frac{\xi^*}{2}\hat{a}^2\right) = e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{S}(\xi) = (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{S}(\xi)
\end{aligned}$$

leugo la función de Wigner

$$\begin{aligned}
W(\gamma, t) &= \frac{2}{\pi} \langle \psi(0) | \hat{S}(\xi) \hat{D}((\mu\gamma - \nu\gamma^*)e^{i\Omega t}) \hat{S}^\dagger(\xi)(-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{S}(\xi) \hat{D}^\dagger((\mu\gamma - \nu\gamma^*)e^{i\Omega t}) \hat{S}^\dagger(\xi) | \psi(0) \rangle \\
&= \frac{2}{\pi} \langle \psi(0) | \hat{S}(\xi) \hat{D}((\mu\gamma - \nu\gamma^*)e^{i\Omega t}) \hat{S}^\dagger(\xi)(-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \left(\hat{S}(\xi) \hat{D}((\mu\gamma - \nu\gamma^*)e^{i\Omega t}) \hat{S}^\dagger(\xi) \right)^\dagger | \psi(0) \rangle
\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
\hat{S}(\xi) \hat{D}((\mu\gamma - \nu\gamma^*)e^{i\Omega t}) \hat{S}^\dagger(\xi) &= \hat{S}(\xi) \exp((\mu\gamma - \nu\gamma^*)e^{i\Omega t} \hat{a}^\dagger - (\mu\gamma^* - \nu^*\gamma)e^{-i\Omega t} \hat{a}) \hat{S}^\dagger(\xi) \\
&= \exp\left((\mu\gamma - \nu\gamma^*)e^{i\Omega t} \left(\hat{S}(\xi) \hat{a} \hat{S}^\dagger(\xi)\right)^\dagger - (\mu\gamma^* - \nu^*\gamma)e^{-i\Omega t} \left(\hat{S}(\xi) \hat{a} \hat{S}^\dagger(\xi)\right)\right)
\end{aligned}$$

pero

$$\hat{S}(\xi) \hat{a} \hat{S}^\dagger(\xi) = \mu \hat{a} - \nu \hat{a}^\dagger$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\hat{S}(\xi) \hat{D}((\mu\gamma - \nu\gamma^*)e^{i\Omega t}) \hat{S}^\dagger(\xi) &= \exp\left((\mu\gamma - \nu\gamma^*)e^{i\Omega t} \left(\hat{S}(\xi) \hat{a} \hat{S}^\dagger(\xi)\right)^\dagger - (\mu\gamma^* - \nu^*\gamma)e^{-i\Omega t} \left(\hat{S}(\xi) \hat{a} \hat{S}^\dagger(\xi)\right)\right) \\
&= \exp\left((\mu\gamma - \nu\gamma^*)e^{i\Omega t} (\mu \hat{a} - \nu \hat{a}^\dagger)^\dagger - (\mu\gamma^* - \nu^*\gamma)e^{-i\Omega t} (\mu \hat{a} - \nu \hat{a}^\dagger)\right) \\
&= \exp\left((\mu\gamma - \nu\gamma^*)e^{i\Omega t} (\mu \hat{a}^\dagger - \nu^* \hat{a}) - (\mu\gamma^* - \nu^*\gamma)e^{-i\Omega t} (\mu \hat{a} - \nu \hat{a}^\dagger)\right) \\
&= \exp\left((\mu(\mu\gamma - \nu\gamma^*)e^{i\Omega t} + \nu(\mu\gamma^* - \nu^*\gamma)e^{-i\Omega t}) \hat{a}^\dagger - (\mu(\mu\gamma - \nu\gamma^*)e^{i\Omega t} + \nu(\mu\gamma^* - \nu^*\gamma)e^{-i\Omega t})^* \hat{a}\right) \\
&= \hat{D}(\mu(\mu\gamma - \nu\gamma^*)e^{i\Omega t} + \nu(\mu\gamma^* - \nu^*\gamma)e^{-i\Omega t})
\end{aligned}$$

finalmente

$$\begin{aligned}
W(\gamma, t) &= \frac{2}{\pi} \langle \psi(0) | \hat{D}(\mu(\mu\gamma - \nu\gamma^*)e^{i\Omega t} + \nu(\mu\gamma^* - \nu^*\gamma)e^{-i\Omega t}) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \times \\
&\quad \times \hat{D}^\dagger(\mu(\mu\gamma - \nu\gamma^*)e^{i\Omega t} + \nu(\mu\gamma^* - \nu^*\gamma)e^{-i\Omega t}) | \psi(0) \rangle \\
&= W_0(\mu(\mu\gamma - \nu\gamma^*)e^{i\Omega t} + \nu(\mu\gamma^* - \nu^*\gamma)e^{-i\Omega t})
\end{aligned}$$

con

$$W_0(z) = \frac{2}{\pi} \langle \psi(0) | \hat{D}(z) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(z) | \psi(0) \rangle$$

es decir, se tiene la función de Wigner independiente del tiempo para un estado coherente $|z\rangle$ que evoluciona en el tiempo, lo que nos permite utilizar la teoría de la función de Wigner independiente del tiempo. Por otra parte, del estado inicial se tiene

$$|\psi(0)\rangle = A(|\alpha\rangle + c|\beta\rangle)$$

Sustituyendo el ket en la definición de la matriz de densidad, se obtiene

$$\begin{aligned} W_0(z) &= \frac{2A}{\pi} [\langle \alpha | + c^* \langle \beta |] \hat{D}(z) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(z) [|\alpha\rangle + c|\beta\rangle] \\ &= \frac{2A}{\pi} \left[\langle \alpha | \hat{D}(z) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(z) | \alpha \rangle + c^* \langle \beta | \hat{D}(z) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(z) | \alpha \rangle \right. \\ &\quad \left. + c \langle \alpha | \hat{D}(z) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(z) | \beta \rangle + |c|^2 \langle \beta | \hat{D}(z) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(z) | \beta \rangle \right] \end{aligned}$$

Por verificar que la función de Wigner es real, notemos que

$$\begin{aligned} \left(c \langle \alpha | \hat{D}(z) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(z) | \beta \rangle \right)^* &= c^* \langle \beta | \left(\hat{D}(z) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(z) \right)^* | \alpha \rangle \\ &= c^* \langle \beta | \hat{D}(z) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(z) | \alpha \rangle \end{aligned}$$

La parte imaginaria de estos términos se anula en la suma dado que son complejos conjugados, y la función tiene dominio real. Calculando las funciones de Wigner en

términos de estos estados coherentes

$$\begin{aligned}
W_0(z) &= \frac{2A}{\pi} \left[e^{-2|\alpha-z|^2} + c^* \langle \beta | \hat{D}(z) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(z) | \alpha \rangle \right. \\
&\quad \left. + c \langle \alpha | \hat{D}(z) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{D}^\dagger(z) | \beta \rangle + |c|^2 e^{-2|\beta-z|^2} \right] \\
&= \frac{2A}{\pi} \left[e^{-2|\alpha-z|^2} + c^* \langle 2z - \beta | \alpha \rangle \left[e^{\frac{1}{2}(z^*(z-\beta)-(z-\beta)^*z)} e^{\frac{1}{2}(z^*\alpha-z\alpha^*)} e^{\frac{1}{2}(z^*\beta-z\beta^*)} \right]^* \right. \\
&\quad \left. + c \langle \alpha | 2z - \beta \rangle e^{\frac{1}{2}(z^*(z-\beta)-(z-\beta)^*z)} e^{\frac{1}{2}(z^*\alpha-z\alpha^*)} e^{\frac{1}{2}(z^*\beta-z\beta^*)} + |c|^2 e^{-2|\beta-z|^2} \right] \\
&= \frac{2A}{\pi} \left\{ e^{-2|\alpha-z|^2} + c^* e^{(2z-\beta)^*\alpha - \frac{1}{2}|2z-\beta|^2 - \frac{1}{2}|\alpha|^2} \left[e^{\frac{1}{2}(z^*(z-\beta)-(z-\beta)^*z)} e^{\frac{1}{2}(z^*\alpha-z\alpha^*)} e^{\frac{1}{2}(z^*\beta-z\beta^*)} \right]^* \right. \\
&\quad \left. + c e^{\alpha^*(2z-\beta) - \frac{1}{2}|2z-\beta|^2 - \frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\frac{1}{2}(z^*(z-\beta)-(z-\beta)^*z)} e^{\frac{1}{2}(z^*\alpha-z\alpha^*)} e^{\frac{1}{2}(z^*\beta-z\beta^*)} + |c|^2 e^{-2|\beta-z|^2} \right\} \\
&= \frac{2A}{\pi} \left\{ e^{-2|\alpha-z|^2} + c^* e^{(2z-\beta)^*\alpha - \frac{1}{2}|2z-\beta|^2 - \frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{2}(z^*(z-\beta)-(z-\beta)^*z)} e^{-\frac{1}{2}(z^*\alpha-z\alpha^*)} e^{-\frac{1}{2}(z^*\beta-z\beta^*)} \right. \\
&\quad \left. + c e^{\alpha^*(2z-\beta) - \frac{1}{2}|2z-\beta|^2 - \frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\frac{1}{2}(z^*(z-\beta)-(z-\beta)^*z)} e^{\frac{1}{2}(z^*\alpha-z\alpha^*)} e^{\frac{1}{2}(z^*\beta-z\beta^*)} + |c|^2 e^{-2|\beta-z|^2} \right\}
\end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] J.J. Sakurai and J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2020.
- [2] L. de la Peña. *Introduccion a la Mecanica Cuantica*. Ediciones Científicas Universitarias Series. Fondo de Cultura Economica, 1996.
- [3] R. Loudon. *The Quantum Theory of Light*. Oxford University Press, 2000.
- [4] A.M. Fox. *Quantum Optics: An Introduction*. Oxford Master Series in Physics. OUP Oxford, 2006.
- [5] H. J. Kimble, M. Dagenais, and L. Mandel. Photon antibunching in resonance fluorescence. *Phys. Rev. Lett.*, 39:691–695, Sep 1977.
- [6] Girish S. Agarwal. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2012.
- [7] Hobson H.J Riley K.F and Bence S.J. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. Cambridge University Press Press, 2006.
- [8] Walls D.F and Milburn G.J. *Quantum Optics*. Springer-Verlag, 2008.
- [9] Arfken G.B and Weber H.J. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Academic Press, 2008.
- [10] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. EBL-Schweitzer. Cambridge University Press, 1995.
- [11] U. Leonhardt. *Essential Quantum Optics: From Quantum Measurements to Black Holes*. Cambridge University Press, 2010.
- [12] Roy J. Glauber. Photon correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 10:84–86, Feb 1963.
- [13] J. Schwichtenberg. *Physics from Symmetry*. Undergraduate Lecture Notes in Physics. Springer International Publishing, 2017.

-
- [14] A. Perelomov. *Generalized Coherent States and Their Applications*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Berlin Heidelberg, 1986.
 - [15] Soto-Eguibar F. Moya-Cessa, H.M. *Introduction to Quantum Optics*. Rinton Press, 1999.
 - [16] Rodríguez L. A. Sánchez, J. C. Una forma práctica de calcular la función de wigner. *Memorias de la Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas*, 1(23), 2018.