Estruturas de Dados e Algoritmos
Frequência II

Carlos Menezes

9 de maio de 2021

Conteúdo

Análise de Algoritmos

Definição 0.1 (Algoritmo) *Sequência finita de ações executáveis que visam obter uma solução para um determinado tipo de problema.*

Observação 1 *Dois algoritmos que resolvem o mesmo problema podem ter eficiências diferentes. Um algoritmo rápido permite resolver um problema numa máquina lenta.*

Existem formas de avaliar as exigências de um algoritmo:

- Empiricamente: observando a execução do programa;
- Experimentalmente: modelo simplificado do problema, estimando o comportamento futuro;
- Analiticamente: demonstrando a existência de uma função matemática que calcule as exigências do programa em relação aos parâmetros do problema.

Exemplos

```
int soma = 0;
for ( int i = 1 ; i <= n ; i++ )
    soma = soma + i ;
```

Algoritmo 1: Algoritmo I

```
int soma = 0;
for ( int i = 1 ; i <= n ; i++ )
    for (int j = 1 ; j <= i ; j++ )
        soma = soma + 1;
```

Algoritmo 2: Algoritmo II

```
int soma = n * ( n + 1 ) / 2;
```

Algoritmo 3: Algoritmo III

	Algoritmo I	Algoritmo II	Algoritmo III
Atribuições	n+2	$3 + n\frac{n}{2}$	1
Adições	2n	$n(\frac{2n}{2})$	1
Multiplicações			1
Divisões			1
Operações	3n+2	$\frac{3n^2}{2} + 3$	4

Crescimento

Observação 2 *O tempo de execução geralmente dependente de um único parâmetro N: medida abstrata do tamanho do problema a considerar, usualmente relacionada com a quantidade de dados a processar.*

Notação Assimptótica

Observação 3 *A análise do tempo de execução de um algoritmo só é útil para valores de N elevados. É utilizado o* ***pior-case*** *como valor para complexidade, pois:*

- representa um limite superior no tempo de execução;
- o valor médio é muitas vezes próximo do pior-caso.

Definição 0.2 (Notação Assimptótica) *A notação assimptótica permite estabelecer taxas de crescimento dos tempos de execução dos algoritmos em função dos tamanhos das entradas. A complexidade assimptótica é expressa através da ordem de magnitude usando a notação* big O*,* $\mathbf{O}$.

Definição 0.3 (Ordem de Magnitude) *A ordem de magnitude de uma função é igual à ordem do seu termo que cresce mais rapidamente.*

Exemplo

$$f(n) = n + n^2 + 1$$

A ordem de magnitude de $f(n)$ é $\mathbf{O(n^2)}$.

Observação 4 (Classes de complexidade comuns)

- Constante, $\mathbf{O(1)}$
  - o número de instruções de um programa for executado um número limitado/-constante de vezes
- Logarítmica, $\mathbf{O}(\log(\mathbf{n}))$
  - um problema é resolvido através da resolução de um conjunto de subproblemas
- Polinomial, $\mathbf{O(n^p)}, \mathbf{p \geq 1}$
  - Linear, $\mathbf{O(n)}$
    - quando existe algum processamento para cada elemento de entrada
  - Pseudo-linear, $\mathbf{O(n \log(n))}$
    - Quando um problema é resolvido através da resolução de um conjunto de subproblemas, e combinando posteriormente as suas soluções
  - Quadrática, $\mathbf{O(n^2)}$
    - quando a dimensão da entrada duplica, o tempo aumenta 4x
  - Cúbica, $\mathbf{O(n^3)}$
    - quando a dimensão de entrada duplica o tempo aumenta 8x
- Exponencial, $\mathbf{O(p^n)}, n \geq 1$
  - quando a dimensão de entrada duplica o tempo aumenta para o quadrado
- Factorial, $\mathbf{O(n!)}$

Observação 5 (Garantias, previsões e limitações) *O tempo de execução dos algoritmos depende criticamente dos dados. O objeto da análise de complexidade é inferir o máximo de informação assumindo o mínimo possível.*

Observação 6 (Estudo do pior caso)

O estudo do pior caso permite obter garantias máximas.

- se o resultado no pior caso é aceitável, então a situação é favorável;
- se o resultado no pior caso for mau, pode ser problemático;

Observação 7 (Estudo do melhor caso)

Por vezes é relevante obter também limites inferiores. Esta análise pode dar indicações preciosas sobre como e onde melhorar o desempenho de um algoritmo. Se os limites inferiores e superiores forem próximos, é conveniente tentar otimizar a implementação.

- se o resultado no pior caso é aceitável, então a situação é favorável;
- se o resultado no pior caso for mau, pode ser problemático;

Algoritmos de Ordenação

Insertion Sort

Observação 8 (Caraterísticas)

Este algoritmo começa tratando a primeiro entrada `A[0]` como um array já ordenado e, em seguida, verifica a segunda entrada `A[1]` e compara-a com a primeiro. Se eles estiverem na ordem errada, é efetuada a troca. Com isto, temos `A[0]` e `A[1]` ordenados. Em seguida, repete o processo para terceira entrada, posicionando-a no lugar certo, deixando `A[0]`, `A[1]` e `A[2]` ordenados. De forma mais geral, no início do i-ésimo ciclo, o insertion sort tem o entradas `A[0],...,A[i-1]` ordenadas e inserte `A[i]`, ordenando as entradas `A[0], ..., A[i]`.

- simples implementação;
- requer uma quantidade constante de memória adicional;
- útil para pequenas entradas;
- muitas trocas e menos comparações.
- **Best Case**: $O(n)$
- **Average Case**: $O()\frac{n^2}{4})$
- **Worst Case**: $O(n^2)$

```
for ( i = 1 ; i < n ; i++ ) {
    for( j = i ; j > 0 ; j-- )
        if ( a[j] < a[j-1] )
            swap a[j] and a[j-1]
        else break
}
```

Algoritmo 4: Algoritmo Insertion Sort

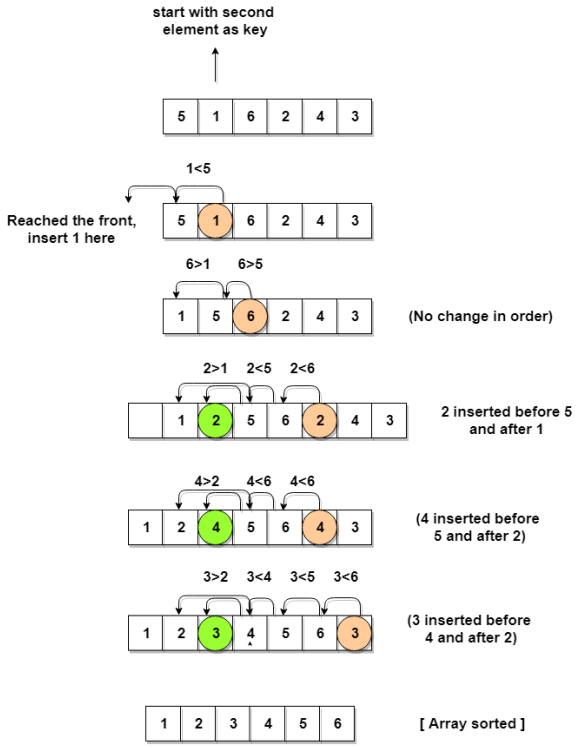


Figura 1: Visualização do algoritmo Insertion Sort.

Selection Sort

Observação 9 (Caraterísticas) *Este algoritmo encontra o menor item o coloca-o em* `A[0]`*, trocando-o por qualquer item que já esteja nessa posição. De seguida, encontra o segundo menor item e troca-o pelo item em* `A[1]`*. Este processo é repetido até que todo o array esteja ordenado. De modo mais geral, no i-ésimo ciclo, o Selection Sort encontra o i-ésimo item menor e troca-o com o item em* $A[i-1]$.

- simples implementação;
- requer uma quantidade constante de memória adicional;
- útil para pequenas entradas;
- **Best Case**: $O(n^2)$
- **Average Case**: $O(n^2)$

- **Worst Case**: $O(n^2)$

```
for ( i = 0 ; i < n-1 ; i++ ) {
    k = i
    for ( j = i+1 ; j < n ; j++ )
        if ( a[j] < a[k] )
            k = j
    swap a[i] and a[k]
}
```

Algoritmo 5: Algoritmo Selection Sort

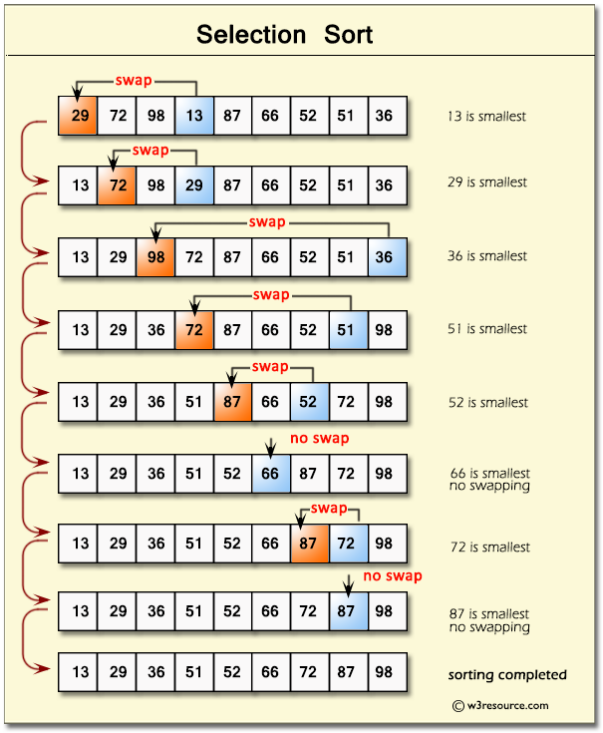


Figura 2: Visualização do algoritmo Selection Sort.

Bubble Sort

Observação 10 (Caraterísticas) *Este algoritmo começa comparando* `A[n-1]` *com* `A[n-2]` *e troca-os se estiverem na ordem errada. Em seguida, compara* `A[n-2]` *e* `A[n-3]` *e troca-os, se necessário, e assim por diante. Quando atinge* `A[0]`*, a menor entrada estará no local correto. Em seguida, começa de trás novamente, comparando pares de "vizinhos"a partir de* `A[1]`*. De modo mais geral, no i-ésimo ciclo, o Bubble Sort compara os vizinhos desde trás, trocandoo-os quando necessário. O item com o índice mais baixo que é comprado com o seu vizinho da direita é* `A[i-1]`*. Após o i-ésimo ciclo, as entradas* `A[0],...,A[i-1]` *estão na sua posição final.*

- simples implementação;
- requer uma quantidade constante de memória adicional;

- **Best Case**: $O(n)$
- **Average Case**: $O(n^2)$
- **Worst Case**: $O(n^2)$

```
for ( i = 1 ; i < n ; i++ )
    for ( j = n-1 ; j >= i ; j-- )
        if ( a[j] < a[j-1] )
            swap a[j] and a[j-1]
```

Algoritmo 6: Algoritmo Bubble Sort

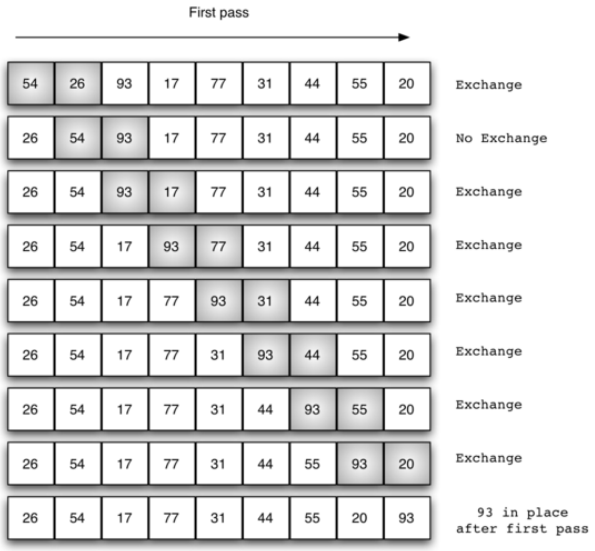


Figura 3: Visualização do algoritmo Bubble Sort.

Shell Sort

Observação 11 (Caraterísticas) *Este algoritmo primeiro classifica os elementos distantes uns dos outros e reduz sucessivamente o intervalo entre os elementos a serem classificados. É uma versão generalizada do Insertion Sort. De modo geral, o algoritmo passa várias vezes pela lista dividindo o grupo maior em menores, onde é aplicado o Insertion Sort.*

- **Best Case**: $O(n \log n)$
- **Average Case**: $O(n \log n)$
- **Worst Case**: $O(n^2)$

```
for (int gap = n/2; gap > 0; gap /= 2)
{
    for (int i = gap; i < n; i += 1)
    {
```

```
            int temp = arr[i];
            int j;
            for (j = i; j >= gap && arr[j - gap] > temp; j -= gap)
                arr[j] = arr[j - gap];
            arr[j] = temp;
        }
}
```

Algoritmo 7: Algoritmo Shell Sort

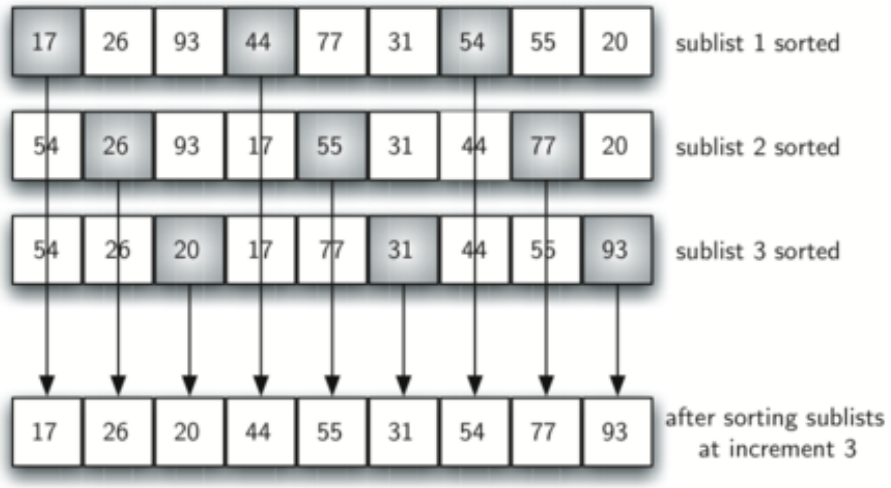


Figura 4: Visualização do algoritmo Shell Sort.

Merge Sort

Observação 12 (Caraterísticas) *Este algoritmo utiliza a técnica divisão e conquista: a solução é encontrada à custa da mesma solução mas com argumentos estruturalmente mais simples.*

> [Funcionamento]se o número de partes é ≤ 1, terminar; dividir o vetor em 2 partes; ordenar recursivamente as duas partes; fundir as metades ordenadas;

- requer a utilização de um vetor adicional;
- **Best Case**: $O(n \log n)$
- **Average Case**: $O(n \log n)$
- **Worst Case**: $O(n \log n)$

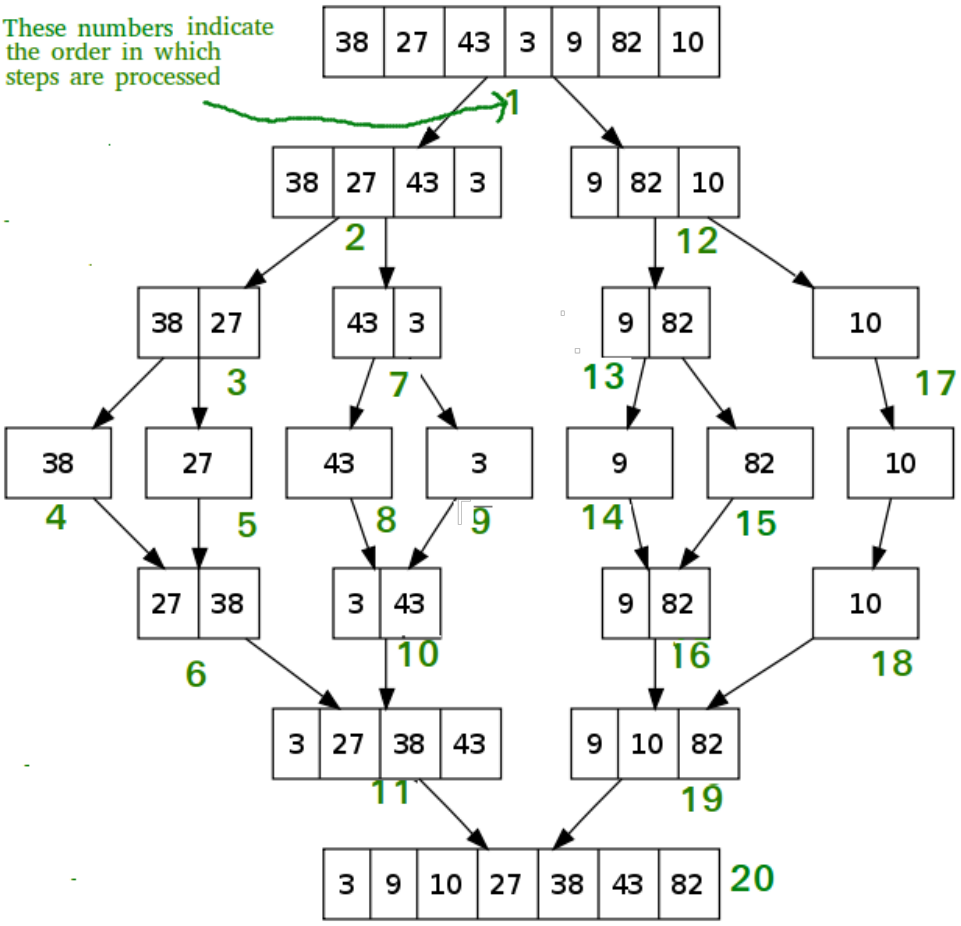


Figura 5: Visualização do algoritmo Merge Sort.

Quick Sort

Observação 13 (Caraterísticas) *Este algoritmo utiliza a técnica divisão e conquista: a solução é encontrada à custa da mesma solução mas com argumentos estruturalmente mais simples.*

[Funcionamento]se o número de partes é ≤ 1, terminar; escolher um item arbitrário — **pivot** (e.g. o último ou o 1^{o}); rearranjar os restantes elementos em dois grupos:

- elementos com menor valor do que o pivot à esquerda do pivot;
- elementos com maior valor do que o pivot à direita do pivot;

- repetir processo anterior às listas esquerda e direita até chegar a listas com, no máximo, 1 elemento.
- requer a utilização de um vetor adicional;
- **Best Case**: $O(n \log n)$
- **Average Case**: $O(n \log n)$
- **Worst Case**: $O(n^2)$

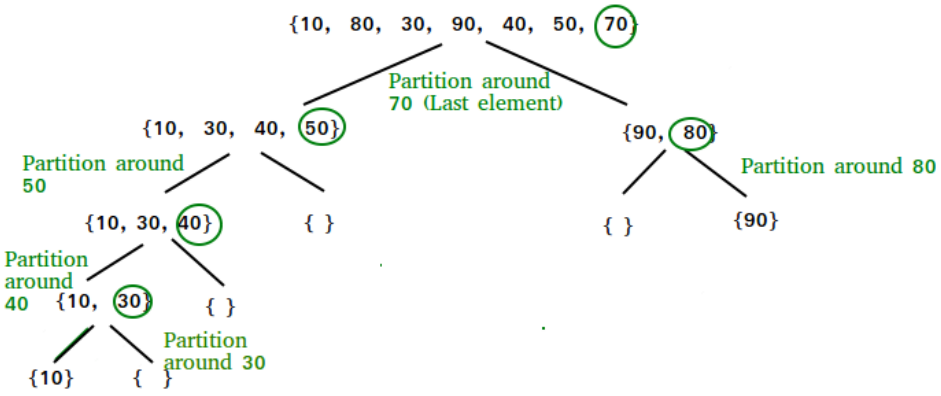


Figura 6: Visualização do algoritmo Quick Sort.

Sumário

Array Sorting Algorithms

Algorithm	Time Complexity			Space Complexity
	Best	Average	Worst	Worst
Quicksort	Ω(n log(n))	θ(n log(n))	O(n^2)	O(log(n))
Mergesort	Ω(n log(n))	θ(n log(n))	O(n log(n))	O(n)
Timsort	Ω(n)	θ(n log(n))	O(n log(n))	O(n)
Heapsort	Ω(n log(n))	θ(n log(n))	O(n log(n))	O(1)
Bubble Sort	Ω(n)	θ(n^2)	O(n^2)	O(1)
Insertion Sort	Ω(n)	θ(n^2)	O(n^2)	O(1)
Selection Sort	Ω(n^2)	θ(n^2)	O(n^2)	O(1)
Tree Sort	Ω(n log(n))	θ(n log(n))	O(n^2)	O(n)
Shell Sort	Ω(n log(n))	θ(n(log(n))^2)	O(n(log(n))^2)	O(1)
Bucket Sort	Ω(n+k)	θ(n+k)	O(n^2)	O(n)
Radix Sort	Ω(nk)	θ(nk)	O(nk)	O(n+k)
Counting Sort	Ω(n+k)	θ(n+k)	O(n+k)	O(k)
Cubesort	Ω(n)	θ(n log(n))	O(n log(n))	O(n)

Figura 7: Sumário de algoritmos de ordenação.

Recursividade

Definição 0.4 (Recursividade.) *A recursão é um método de resolver um problema em que a solução depende de soluções para instâncias menores do mesmo problema.*

Observação 14 *Um programa recursivo não se pode chamar a si próprio infinitas vezes, caso contrário nunca pararia. Deste modo, é essencial existir uma* ***condição de***

paragem.

- apesar das vantagens das implementações recursivas, é relativamente fácil escrever funções recursivas que são extremamente ineficientes.
- características básicas de um qualquer programa recursivo:
  - chama-se a si próprio para valores menores do seu argumento;
  - possui uma condição de paragem em que calcula o resultado diretamente.

Observação 15 (Divisão e Conquista.)

Este problemas consistem em:

- divisão em partes de tamanhos variáveis;
- divisão em mais que duas partes;
- divisão em partes que se sobrepõem;
- realizar diversas quantidades de cálculos na componente não recursiva do algoritmo.

Geralmente, estes algoritmos realizam cálculos para:

- dividir a entrada em partes;
- combinar os resultados obtidos em cada parte;
- facilitar os cálculos entre as duas chamadas.

Observação 16 (Estratégias.)

- divisão e conquista:
  - problema é partido em sub-problemas que se resolvem separadamente;
  - solução obtida por combinações das soluções;
- Programação dinâmica:
  - resolvem-se os problemas de pequena dimensão e guardam-se as soluções;
  - solução de um problema é obtida combinando as de problemas de menor dimensão.

Árvores

Definição 0.5 (Árvore.) *Uma árvore é um tipo de dados abstrato amplamente usado que simula uma estrutura de árvore hierárquica, com um valor raiz e subárvores de filhos com um nó pai, representados como um conjunto de nós vinculados.*

Observação 17 (*Nodes*)

- cada *node* pode possuir um número variável de nós descendentes diretos;

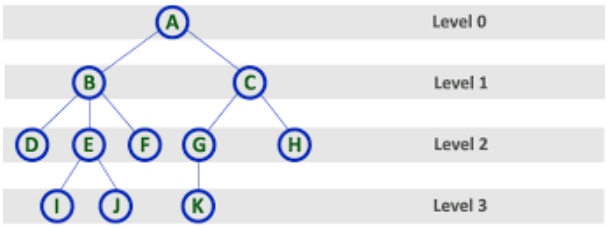


Figura 8: Níveis de uma árvore.

- *nodes* com o mesmo ascendente direto designam-se por *siblings*;
- um *node* sem ascendente designa-se por *root* (é único numa árvore).

Observação 18 (Terminologia)

- **caminho**: sequência de *nodes* desde a *root* até a uma *leaf*;
  - a **dimensão** de um caminho corresponde ao seu número de nós.
- a **altura**/**profundidade** de uma árvore é a maior dimensão do maior caminho (número de níveis).
- **Grau** ou **aridade** de:
  - um *node*: número de *children nodes*;
  - uma árvore: maior grau dos seus *nodes*.
- **subárvore** de um *node* é a árvore com *root* nesse *node*;
- **árvores degeneradas** são árvores de grau 1 (e.g. listas).

Árvores Binárias

- árvores de grau 2;
  - cada *node* pode ter até dois descendentes;
  - contêm duas subárvores (que podem ser vazias);

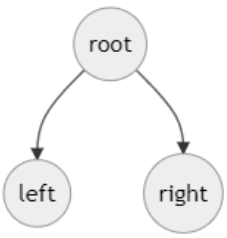
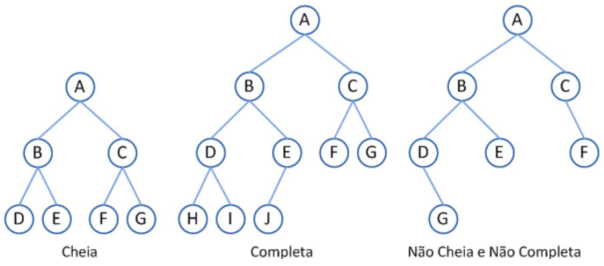


Figura 9: Árvore binária.

- é usual considerar a notação infixa: $A_1; x; A_2$ (esquerda; *node*; direita);
- **árvore estritamente binária**: todos os nós têm grau 0 ou 2;
- **árvore binária equilibrada**: a diferença entre as alturas das subárvores não é superior a 1 e todas as subárvores são equilibradas;
- uma árvore binária está **cheia** se:
  - for vazia, ou;
  - as subárvores tiverem a mesma altura e estiverem cheias (se d é a altura da árvore, então esta é formada por $2^d - 1$ *nodes*);
- uma árvore binária de altura h está completa se estiver cheia até ao nível $h-1$ e todos os nós do último nível estão o mais à esquerda possível.



Observação 19 (Pesquisa de um elemento)

- realização de travessias em profundidade:
  - prefixa;
  - infixa;
  - sufixa;
- realização de travessias em largura.

Travessia Prefixa, RLR

1. visitar o *root node*;
2. travessia prefixa da subárvore esquerda;
3. travessia prefixa da subárvore direita;

Travessia Infixa, LRR

1. travessia infixa da subárvore esquerda;
2. visitar o *root node*;
3. travessia infixa da subárvore direita;

Travessia Sufixa, LRR

1. travessia sufixa da subárvore esquerda;
2. travessia sufixa da subárvore direita;
3. visitar o *root node*;

Travessia em Largura

1. visitar o *root node*;
2. visitar os *nodes* de cada nível, da esquerda para a direita;

Árvores de Pesquisa Binária

Numa árvore de pesquisa binária, os valores são inseridos após serem comparados com o valor raiz:

- valores maiores à direita;
- valores menores à esquerda;
- utiliza-se a recursão para inserir novos valores;
- a inserção é feita nos *leaf nodes*.