Lógica Computacional

Sebenta de Apoio ao Estudo

Carlos Menezes

27 de agosto 2021

Conteúdo

1 Lógica Proposicional

Definição 1.1 *Um argumento é uma estrutura da forma:*

$$\frac{\phi_1, \ldots, \phi_n}{\psi}$$

*onde $n \geq 1$ e $\phi_1, \ldots, \phi_n$ (**premissas**) e ψ (**conclusão do argumento**) são proposições. Um argumento da forma acima diz-se **válido** se e só se a conclusão ψ for verdadeira sempre que as premissas $\phi_1, \ldots, \phi_n$ forem simultaneamente verdadeiras; diz-se um argumento **inválido** se e só se as premissas forem simultaneamente verdadeiras e a conclusão falsa.*

1.1 As Linguagens do Cálculo Proposicional

O **alfabeto** da maior parte das linguagens proposicionais que serão consideradas é constituído por:

- pelos símbolos (e).
- por um conjunto numerável de *símbolos proposicionais* denotado por $\{p_1, p_2, \ldots\}$.
- pelo conetivo de negação $\neg$ (leia-se: 'não').
- por um conjunto finito e não vazio de *conetivos binários*: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

As fórmulas de uma linguagem proposicional L são as expressões formadas usando os símbolos do alfabeto de L de acordo com as seguintes regras:

(i) um símbolo proposicional é uma fórmula atómica.

(ii) se ϕ é uma fórmula, então $(\neg\phi)$ também o é.

(iii) se ϕ e ψ são fórmulas e $\circ$ é um dos símbolos de conetivos binários do alfabeto de L, então $(\phi \circ \psi)$ é uma fórmula.

Exemplo 1.1 *Seja $L_{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow}$. Então:*

Exemplo de fórmulas de *L*: p, $(\neg r)$, $(\neg(\neg(\neg q)))$, $(p \wedge q)$

Exemplos de expressões que <u>não</u> são fórmulas de *L*: $p\neg$, $p \wedge q$, $\rightarrow (r \vee q)$

Definição 1.2 *Alguns parêntesis serão omitidos com base na convenção das seguinte precedências entre os operadores conetivos:*

1. $\neg$
2. $\wedge$

3. $\vee$

4. $\leftrightarrow, \rightarrow$

Desta maneira, apresentam-se algumas abreviações:

Nota 1.1

- $p \wedge q$ é uma abreviação de $(p \wedge q)$
- $p \rightarrow \neg q$ é uma abreviação de $(p \rightarrow (\neg q))$
- $p \rightarrow \neg q \vee r$ é uma abreviação de $(p \rightarrow ((\neg q) \wedge r))$

1. **Literal**: fórmula que consiste apenas de um símbolos proposicional. **e.g.** $p_2, \neg p_2$.
2. $Form(L)$ representa todas as fórmulas de L, mas por abuso de notação usa-se L com o mesmo significado de $Form(L)$.
3. Os símbolos que fazem parte do alfabeto de uma linguagem L são **símbolos primitivos** da linguagem. A linguagem pode ser estendida com símbolos **não primitivos**.

1.2 Uma aplicação do princípio de indução estrutural na lógica proposicional

Seja $L_{\neg,\circ_1,\ldots,\circ_n}$ uma linguagem proposicional com n conetivos binários $(\circ_1, \ldots, \circ_n)$. Para provar que toda a fórmula de L satisfaz uma propriedade Q (i.e. $\forall \psi \in L : Q(\psi)$), basta provar:

- **Base:**

  Toda a fórmula satisfaz Q, i.e. $Q(\psi_i)$

- **Passo de indução:**

  (i) **Seja ψ arbitrário.** Se se verifica $Q(\psi)$, também se verifica $Q(\neg\psi)$.

  (ii) **Seja $\circ_1$ um conetivo binário arbitrário ($i \in \{1, \ldots, n\}$).** Se se verifica $Q(\psi_1)$ e $Q(\psi_2)$, então verifica-se $Q(\psi_1 \circ_i \psi_2)$.

1.3 Semântica do Cálculo Proposicional

Se uma proposição é verdadeira, diz-se que tem o valor lógico 1 (ou V ou T); caso contrário, se é falsa, diz-se que tem o valor lógico 0 (ou F).

Definição 1.3 *Uma valoração é uma aplicação*

$$v : \{p_1, p_2, \ldots\} \rightarrow \{0, 1\}$$

que indica o valor de verdade que um dado símbolo proposicional assume para a proposição que ele denota.

A cada conetivo '$\circ$' do alfabeto de L, é associada uma função de verdade $FV_\circ : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$, onde $n \geq 1$ denota a aridade do conetivo $\circ$.

As funções de verdade associadas aos conetivos $\neg$ e $\wedge$ definem-se como se segue:

- $FV_\neg$ é a aplicação $FV_\neg : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ definida por $FV_\neg(0) = 1$ e $FV_\neg(1) = 0$ ou simplesmente pela função $FV_\neg(x) = 1 - x$.

- $FV_\wedge$ é a aplicação $FV_\wedge : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ definida por

$$\begin{cases} FV_\wedge(0,0) = 0 \\ FV_\wedge(0,1) = 0 \\ FV_\wedge(1,0) = 0 \\ FV_\wedge(1,1) = 1 \end{cases}$$

  ou simplesmente pela função $FV_\wedge(x,y) = x \times y$.

Exercícios 1.1 *Apresente a definição de cada uma das funções de verdade $FV_\vee$, $FV_\rightarrow$ e $FV_\leftrightarrow$ associadas aos conetivos $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, respetivamente.*

- *$FV_\vee$ é a aplicação $FV_\vee : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ definida por*

$$\begin{cases} FV_\wedge(0,0) = 0 \\ FV_\wedge(0,1) = 1 \\ FV_\wedge(1,0) = 1 \\ FV_\wedge(1,1) = 1 \end{cases}$$

  ou simplesmente pela função $FV_\vee(x,y) = max(x,y)$.

- *$FV_\rightarrow$ é a aplicação $FV_\rightarrow : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ definida por*

$$\begin{cases} FV_\wedge(0,0) = 1 \\ FV_\wedge(0,1) = 1 \\ FV_\wedge(1,0) = 0 \\ FV_\wedge(1,1) = 1 \end{cases}$$

  .

- *$FV_\leftrightarrow$ é a aplicação $FV_\leftrightarrow : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ definida por*

$$\begin{cases} FV_\wedge(0,0) = 1 \\ FV_\wedge(0,1) = 0 \\ FV_\wedge(1,0) = 0 \\ FV_\wedge(1,1) = 1 \end{cases}$$

  .

Seja v uma valoração dos símbolos proposicionais e $FV_\circ$ as funções e verdade para cada conetivo $\circ$ do alfabeto de L. O valor de verdade das fórmulas não atómicas (de L) define-se recursivamente como se segue:

(i) $v(\neg\psi) = FV_\neg(v(\psi))$;

(ii) Se $\circ$ é um conetivo binário da linguagem L, $v(\psi_1 \circ \psi_2) = FV_\circ(v(\psi_1), v(\psi_2))$.

Considerando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ $v(p_2) = 0$, o valor lógico da fórmula $p_1 \wedge p_2 \rightarrow_1$ pode ser calculado recorrendo às funções de verdade referidas acima:

$$\begin{aligned}
v(p_1 \wedge p_2 \rightarrow_1) &= FV_\rightarrow(v(p_1 \wedge p_2), v(\neg p_1)) \\
&= FV_\rightarrow(FV_\wedge(v(p_1), v(p_2)), FV_\neg(v(p_1))) \\
&= FV_\rightarrow(FV_\wedge(1,0), FV_\neg(1)) \\
&= FV_\rightarrow(0,0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Definição 1.4 *Noções semânticas relevantes:*

(a) Uma valoração v satisfaz ψ se $v(\psi) = 1$ (representado por $v \models \psi$).

(b) ψ é possível/satisfazível se existe alguma valoração que satisfaz ψ.

(c) ψ é uma tautologia se toda a valorização satisfaz ψ (representado por $\models \psi$).

(d) ψ é uma contradição se nenhuma valorização a satisfaz (i.e. $v(\psi) = 0$)).

1. $v \not\models \psi$ significa que se tem $v(\psi) = 0$.

2. $\not\models \psi$ significa que não se tem $\models \psi$. $\not\models \psi$ não implica que ψ seja uma contradição.

3. $\top$ representa uma tautologia e $\bot$ uma contradição.

(a) Diz-se que ψ **implica logicamente** ϕ se $\models \psi \rightarrow \phi$ (i.e. se $\psi \rightarrow \phi$ é uma tautologia).

(b) Diz-se que ψ **é logicamente equivalente** a ϕ ($\psi \equiv \phi$) se $\models \psi \leftrightarrow \phi$ (i.e. se $\psi \leftrightarrow \phi$ é uma tautologia).

Abaixo é apresentada uma lista de equivalências lógicas notáveis. Para quaisquer fórmulas ψ, ϕ e δ, tem-se:

$\psi \wedge \psi \equiv \psi$	$\psi \vee \psi \equiv \psi$	idempotencia
$\psi \wedge \phi \equiv \phi \wedge \psi$	$\psi \vee \phi \equiv \phi \vee \psi$	comutatividade
$(\phi \wedge \psi) \wedge \delta \equiv \phi \wedge (\psi \wedge \delta)$		associatividade de $\wedge$
$(\phi \vee \psi) \vee \delta \equiv \phi \vee (\psi \vee \delta)$		associatividade de $\vee$
$\psi \vee (\phi \wedge \delta) \equiv (\psi \vee \phi) \wedge (\psi \vee \delta)$		distributividade de $\vee$ sobre $\wedge$
$\psi \wedge (\phi \vee \delta) \equiv (\psi \wedge \phi) \vee (\psi \wedge \delta)$		distributividade de $\wedge$ sobre $\vee$
$\neg(\psi \wedge \phi) \equiv \neg\psi \vee \neg\phi$	$\neg(\psi \vee \phi) \equiv \neg\psi \wedge \neg\phi$	Leis de De Morgan
$\top \wedge \psi \equiv \psi$	$\bot \vee \psi \equiv \psi$	Elemento neutro
$\top \vee \psi \equiv \top$	$\bot \wedge \psi \equiv \bot$	Elemento absorvente
$\neg\neg\psi \equiv \psi$		Dupla negação
$\psi \leftrightarrow \phi \equiv (\psi \to \phi) \wedge (\phi \to \psi)$		Definição de $\leftrightarrow$ em termos de $\to$ e $\wedge$

Exercícios 1.2 *Mostre que se verificam de facto todas as equivalências lógicas apresentadas acima.*

ψ	$\psi \wedge \psi$
0	0
1	1

ψ	$\psi \vee \psi$
0	0
1	1

ψ	$\psi \wedge \psi$
0	0
1	1

ϕ	ψ	$\psi \wedge \phi$	$\phi \wedge \psi$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

ϕ	ψ	$\psi \vee \phi$	$\phi \vee \psi$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

ϕ	ψ	δ	$\phi \wedge \delta$	$\psi \vee (\phi \wedge \delta)$	$(\psi \vee \phi)$	$(\psi \vee \delta)$	$(\psi \vee \phi) \wedge (\psi \vee \delta)$
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	0	**0**	0	1	**0**
0	1	0	0	**0**	1	0	**0**
0	1	1	0	**1**	1	1	**1**
1	0	0	0	**1**	1	1	**1**
1	0	1	1	**1**	1	1	**1**
1	1	0	0	**1**	1	1	**1**
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**

ψ	ϕ	$\psi \vee \phi$	$\neg(\psi \vee \phi)$	$\neg\psi$	$\neg\phi$	$\neg\psi \wedge \neg\phi$
0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	1	**0**	1	0	**0**
1	0	1	**0**	0	1	**0**
1	1	1	**0**	0	0	**0**

ψ	$\top$	$\top \wedge \psi$
0	1	**0**
1	1	**1**

ψ	$\bot$	$\bot \vee \psi$
0	0	**0**
1	0	**1**

ψ	$\top$	$\top \vee \psi$
0	**1**	**1**
1	**1**	**1**

ψ	$\bot$	$\bot \wedge \psi$
0	**0**	**0**
1	**0**	**0**

ψ	$\neg\psi$	$\neg\neg\psi$
0	1	**0**
1	0	**1**

ψ	ϕ	$\psi \leftrightarrow \phi$	$\psi \rightarrow \phi$	$\phi \rightarrow \psi$	$(\psi \rightarrow \phi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$
0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	**0**	1	0	**0**
1	0	**0**	0	1	**0**
1	1	**1**	1	1	**1**