

Lógica Computacional

Sebenta de Apoio ao Estudo

Carlos Menezes

27 de agosto 2021

Conteúdo

1	Lógica Proposicional	3
1.1	As Linguagens do Cálculo Proposicional	3
1.2	Uma aplicação do princípio de indução estrutural na lógica proposicional . .	4
1.3	Semântica do Cálculo Proposicional	4

1 Lógica Proposicional

Definição 1.1 Um argumento é uma estrutura da forma:

$$\frac{\phi_1, \dots, \phi_n}{\psi}$$

onde $n \geq 1$ e ϕ_1, \dots, ϕ_n (**premissas**) e ψ (**conclusão do argumento**) são proposições. Um argumento da forma acima diz-se **válido** se e só se a conclusão ψ for verdadeira sempre que as premissas ϕ_1, \dots, ϕ_n forem simultaneamente verdadeiras; diz-se um argumento **inválido** se e só se as premissas forem simultaneamente verdadeiras e a conclusão falsa.

1.1 As Linguagens do Cálculo Proposicional

O **alfabeto** da maior parte das linguagens proposicionais que serão consideradas é constituído por:

- pelos símbolos (e).
- por um conjunto numerável de *símbolos proposicionais* denotado por $\{p_1, p_2, \dots\}$.
- pelo conetivo de negação \neg (leia-se: ‘não’).
- por um conjunto finito e não vazio de *conetivos binários*: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

As fórmulas de uma linguagem proposicional L são as expressões formadas usando os símbolos do alfabeto de L de acordo com as seguintes regras:

- um símbolo proposicional é uma fórmula atômica.
- se ϕ é uma fórmula, então $(\neg\phi)$ também o é.
- se ϕ e ψ são fórmulas e \circ é um dos símbolos de conetivos binários do alfabeto de L , então $(\phi \circ \psi)$ é uma fórmula.

Exemplo 1.1 Seja $L_{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow}$. Então:

Exemplo de fórmulas de L : $p, (\neg r), (\neg(\neg(\neg q))), (p \wedge q)$

Exemplos de expressões que não são fórmulas de L : $p\neg, p \wedge q, \rightarrow (r \vee q)$

Definição 1.2 Alguns parêntesis serão omitidos com base na convenção das seguinte precedências entre os operadores conetivos:

1. \neg
2. \wedge

3. \vee

4. $\leftrightarrow, \rightarrow$

Desta maneira, apresentam-se algumas abreviações:

Nota 1.1

- $p \wedge q$ é uma abreviação de $(p \wedge q)$
- $p \rightarrow \neg q$ é uma abreviação de $(p \rightarrow (\neg q))$
- $p \rightarrow \neg q \vee r$ é uma abreviação de $(p \rightarrow ((\neg q) \vee r))$

1. **Literal:** fórmula que consiste apenas de um símbolos proposicional. **e.g.** $p_2, \neg p_2$.
2. $Form(L)$ representa todas as fórmulas de L , mas por abuso de notação usa-se L com o mesmo significado de $Form(L)$.
3. Os símbolos que fazem parte do alfabeto de uma linguagem L são **símbolos primitivos** da linguagem. A linguagem pode ser estendida com símbolos **não primitivos**.

1.2 Uma aplicação do princípio de indução estrutural na lógica proposicional

Seja $L_{\neg, \circ_1, \dots, \circ_n}$ uma linguagem proposicional com n conetivos binários $(\circ_1, \dots, \circ_n)$. Para provar que toda a fórmula de L satisfaz uma propriedade Q (i.e. $\forall \psi \in L : Q(\psi)$), basta provar:

- **Base:**

Toda a fórmula satisfaz Q , i.e. $Q(\psi_i)$

- **Passo de indução:**

- (i) **Seja ψ arbitrário.** Se se verifica $Q(\psi)$, também se verifica $Q(\neg\psi)$.
- (ii) **Seja \circ_1 um conetivo binário arbitrário** ($i \in \{1, \dots, n\}$). Se se verifica $Q(\psi_1)$ e $Q(\psi_2)$, então verifica-se $Q(\psi_1 \circ_i \psi_2)$.

1.3 Semântica do Cálculo Proposicional

Se uma proposição é verdadeira, diz-se que tem o valor lógico 1 (ou V ou T); caso contrário, se é falsa, diz-se que tem o valor lógico 0 (ou F).

Definição 1.3 *Uma valoração é uma aplicação*

$$v : \{p_1, p_2, \dots\} \rightarrow \{0, 1\}$$

que indica o valor de verdade que um dado símbolo proposicional assume para a proposição que ele denota.

A cada conetivo ‘ \circ ’ do alfabeto de L , é associada uma função de verdade $FV_{\circ} : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, onde $n \in \mathbb{N}$ denota a aridade do conetivo \circ .

As funções de verdade associadas aos conetivos \neg e \wedge definem-se como se segue:

- FV_{\neg} é a aplicação $FV_{\neg} : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ definida por $FV_{\neg}(0) = 1$ e $FV_{\neg}(1) = 0$ ou simplesmente pela função $FV_{\neg}(x) = 1 - x$.
- FV_{\wedge} é a aplicação $FV_{\wedge} : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ definida por

$$\begin{cases} FV_{\wedge}(0, 0) = 0 \\ FV_{\wedge}(0, 1) = 0 \\ FV_{\wedge}(1, 0) = 0 \\ FV_{\wedge}(1, 1) = 1 \end{cases}$$

ou simplesmente pela função $FV_{\wedge}(x, y) = x \times y$.

Exercícios 1.1 Apresente a definição de cada uma das funções de verdade FV_{\vee} , FV_{\rightarrow} e FV_{\leftrightarrow} associadas aos conetivos \vee , \rightarrow e \leftrightarrow , respetivamente.

- FV_{\vee} é a aplicação $FV_{\vee} : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ definida por

$$\begin{cases} FV_{\vee}(0, 0) = 0 \\ FV_{\vee}(0, 1) = 1 \\ FV_{\vee}(1, 0) = 1 \\ FV_{\vee}(1, 1) = 1 \end{cases}$$

ou simplesmente pela função $FV_{\vee}(x, y) = \max(x, y)$.

- FV_{\rightarrow} é a aplicação $FV_{\rightarrow} : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ definida por

$$\begin{cases} FV_{\rightarrow}(0, 0) = 1 \\ FV_{\rightarrow}(0, 1) = 1 \\ FV_{\rightarrow}(1, 0) = 0 \\ FV_{\rightarrow}(1, 1) = 1 \end{cases}$$

- FV_{\leftrightarrow} é a aplicação $FV_{\leftrightarrow} : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ definida por

$$\begin{cases} FV_{\leftrightarrow}(0, 0) = 1 \\ FV_{\leftrightarrow}(0, 1) = 0 \\ FV_{\leftrightarrow}(1, 0) = 0 \\ FV_{\leftrightarrow}(1, 1) = 1 \end{cases}$$

Seja v uma valoração dos símbolos proposicionais e FV_{\circ} as funções de verdade para cada conetivo \circ do alfabeto de L . O valor de verdade das fórmulas não atômicas (de L) define-se recursivamente como se segue:

- (i) $v(\neg\psi) = FV_{\neg}(v(\psi))$;
- (ii) Se \circ é um conetivo binário da linguagem L , $v(\psi_1 \circ \psi_2) = FV_{\circ}(v(\psi_1), v(\psi_2))$.

Considerando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ $v(p_2) = 0$, o valor lógico da fórmula $p_1 \wedge p_2 \rightarrow_1$ pode ser calculado recorrendo às funções de verdade referidas acima:

$$\begin{aligned}
 v(p_1 \wedge p_2 \rightarrow_1) &= FV_{\rightarrow}(v(p_1 \wedge p_2), v(\neg p_1)) \\
 &= FV_{\rightarrow}(FV_{\wedge}(v(p_1), v(p_2)), FV_{\neg}(v(p_1))) \\
 &= FV_{\rightarrow}(FV_{\wedge}(1, 0), FV_{\neg}(1)) \\
 &= FV_{\rightarrow}(0, 0) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Definição 1.4 *Noções semânticas relevantes:*

- (a) Uma valoração v satisfaz ψ se $v(\psi) = 1$ (representado por $v \models \psi$).
- (b) ψ é possível/satisfazível se existe alguma valoração que satisfaz ψ .
- (c) ψ é uma tautologia se toda a valorização satisfaz ψ (representado por $\models \psi$).
- (d) ψ é uma contradição se nenhuma valorização a satisfaz (i.e. $v(\psi) = 0$).

1. $v \not\models \psi$ significa que se tem $v(\psi) = 0$.
2. $\not\models \psi$ significa que não se tem $\models \psi$. $\not\models \psi$ não implica que ψ seja uma contradição.
3. \top representa uma tautologia e \perp uma contradição.

Definição 1.5 (label=())

Diz-se que ψ **implica logicamente** ϕ se $\models \psi \rightarrow \phi$ (i.e. se $\psi \rightarrow \phi$ é uma tautologia).

Diz-se que ψ **é logicamente equivalente** a ϕ ($\psi \equiv \phi$) se $\models \psi \leftrightarrow \phi$ (i.e. se $\psi \leftrightarrow \phi$ é uma tautologia).