Mecânica e Ondas

Sebenta de Apoio ao Estudo

Carlos Menezes

4 de maio de 2021

Conteúdo

Parte I

Cinemática e Dinâmica

1 Movimento em Uma Dimensão

1.1 Conteúdo Importante

1.1.1 Posição, Tempo e Deslocamento

Começamos o estudo do movimento considerando objetos que são muito pequenos em comparação com o tamanho de seu movimento no espaço. Quando podemos lidar com um objeto desta forma, referimo-nos a ele como uma **partícula**. Neste capítulo, lidamos com o caso em que uma partícula se move ao longo de uma linha reta.

A localização de uma partícula é especificada pela sua coordenadas, denotada por x ou y. À medida que a partícula se move, a sua coordenada muda com o tempo, t. A mudança de posição da partícula de x_1 para x_2 é o deslocamento Δx, com $\Delta x = x_2 - x_1$.

1.1.2 Velocidade Média e Celeridade Média

Quando uma partícula sofre um deslocamento Δx num intervalo de tempo Δt, a sua **velocidade média** para esse intervalo de tempo é

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \tag{1}$$

A **celeridade média** de uma partícula é o valor absoluto da velocidade média e é dado por

$$\bar{c} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\Delta t} \tag{2}$$

1.1.3 Velocidade Instantânea e Celeridade Instantânea

Podemos responder à pergunta *"o quão rápido se move a partícula no instante t?"* descobrindo a sua velocidade instantânea. Este é o caso em que o tempo considerado na velocidade média, Δt, converge para *zero*:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{3}$$

A **celeridade instantânea** é o valor absolute (magnitude) da velocidade instantânea.

Num gráfico posição-tempo (x *vs.* t) para uma partícula que se move, a velocidade instantânea é o declive da tangente à curva em qualquer ponto.

1.1.4 Aceleração

Quando a velocidade de uma partícula se altera, diz-se que a partícula sofre aceleração.

Se a velocidade de uma partícula se altera de v_1 para v_2 durante o intervalo de tempo t_1 a t_2, a **aceleração média** é definida como

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \tag{4}$$

Tal como a velocidade, é importante racicionar sobre a **aceleração instantânea**, dada por

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \tag{5}$$

Se a aceleração a for positiva, a velocidade instantânea v está a aumentar; se a for negativo, então v está a diminiur.

1.1.5 Aceleração Constante

Um caso útil *especial* do movimento acelerado é aquele em que a aceleração a é constante. Para este caso, é possível mostrar que as seguintes equações são verdadeiras:

$$v = v_0 + at \tag{6}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{7}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{8}$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t \tag{9}$$

Nas equações acimas, a partícula tem posição x_0 e velocidade v_0 no tempo $t = 0$; tem posição x e velocidade v no tempo t. Atente-se que as equações acima apenas são válidas para cases em que a aceleração é constante!

1.1.6 Queda Livre

Um objeto lançado para cima ou para baixo perto da superfície terrestre tem aceleração constante, direcionada para baixo, de magnitude 9.8 ms^{-2}. Este número é denotado por g. É preciso ter um cuidado redobrado com o sinal; se no sistema de coordenadas adotado o eixo y aponta para cima, a aceleração de um objeto em queda livre é

$$a_y = -9.80\ ms^{-2} = -g \tag{10}$$

Aqui, assume-se que o ar não tem efeito no movimento do objeto em queda livre. É importante saber que a aceleração do objeto é **sempre** 9.80 ms^{-2}, esteja ele a subir, descer ou na altura máxima... sempre!

2 Movimento em Duas e Três Dimensões

2.1 Conteúdo Importante

2.1.1 Posição

Em três dimensões, a posição de uma partícula é especificada pelo seu **vetor posição**, **r**:

$$r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{11}$$

Se, durante o intervalo Δt o vetor posição da partícula muda de r_1 para r_2, o deslocamento Δr para esse intervalo de tempo é

$$\Delta r = r_1 - r_2 \tag{12}$$

$$= (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k \tag{13}$$

2.1.2 Velocidade

Se uma partícula se move ao longo de um deslocamento Δr num intervalo de tempo Δt, então a sua velocidade média para esse intervalo é

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}i + \frac{\Delta y}{\Delta t}j + \frac{\Delta z}{\Delta t}k \tag{14}$$

Uma quantidade mais interessante é a velocidade *instantânea* **v**, que é o limite da velocidade média quando se diminiu o intervalo de tempo Δt para *zero*. É, portanto, a derivada do vetor posição r em ordem ao tempo:

$$v = \frac{dr}{dt} \tag{15}$$

$$= \frac{d}{dt}(xi + yj + zk) \tag{16}$$

$$= \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k \tag{17}$$

A velocidade instantânea v de uma partícula é sempre tangente à trajetória da partícula.

2.1.3 Aceleração

Se a velocidade de uma partícula muda por Δv num periodo de tempo Δt, a aceleração média $\bar{a}$ para esse período é

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} i + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} j + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} k \tag{18}$$

Uma quantidade mais interessante é a aceleração *instantânea* **a**, que é o limite da aceleração média quando se diminiu o intervalo de tempo Δt para *zero*. É, portanto, a derivada do vetor velocidade v em ordem ao tempo:

$$v = \frac{dv}{dt} \tag{19}$$

$$= \frac{d}{dt}(v_x i + v_y j + v_z k) \tag{20}$$

$$= \frac{dv_x}{dt} i + \frac{dv_y}{dt} j + \frac{dv_z}{dt} k \tag{21}$$

2.1.4 Aceleração Constante em Duas Dimensões

Quando a aceleração a (para um movimento em duas dimensões) é constante, existem duas equações para descrever as coordenadas x e y, semelhantes a equações vistas no capítulo anterior. Nas equações seguintes, o movimento da partícula começa em $t = 0$; a posição inicial da partícula é dada por

$$r_0 = x_0 i + y_0 j$$

e a sua velocidade inicial é dada por

$$v_0 = v_{0x} i + v_{0y} j$$

e o vetor $a = a_x i + a_y j$ é *constante.*

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad v_y = v_{0y} + a_y t \tag{22}$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \tag{23}$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \qquad v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) \tag{24}$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t \qquad y = y_0 + \frac{1}{2}(v_{0y} + v_y)t \tag{25}$$

2.1.5 Movimento do Projétil

Quando uma partícula se move num plano vertical durante uma queda livre, a sua aceleração é constante; tem magnitude 9.8 ms^{-2} e está direcionada para baixo. Se as suas coordenadas são dadas por um eixo horizontal x e um eixo vertical y direcionado para cima, então a aceleração do **projétil** é

$$a_x = 0 \qquad a_y = -9.8\ ms^{-2} = -g \tag{26}$$

Para um projetil, a aceleração horizontal é zero!

O movimento do projétil é um caso especial de aceleração constante, pelo que se usam as equações vistas no capítulo anterior.

2.1.6 Movimento Circular Uniforme

Quando uma partícula se move ao longo de uma trajetória circular a uma *velocidade constante*, diemos que a partícula tem um **movimento circular uniforme**. Apesar de velocidade não mudar, *a partícula está a acelerar* porque a sua velocidade **v** está a mudar de *direção*.

A aceleração da partícula está direcionada para o centro do círculo e tem magnitude

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{27}$$

onde r é o raio da trajetória circular e v é a velocidade (constante) da partícula. Dizemos que a partícula em movimento circular uniforme tem **aceleração centrípeta** por causa da direção da aceleração (para o centro da trajetória). Se a partícula fizer, repetidamente, uma trajetória circular completa, então é útil falar no tempo T que ela leva a completar uma volta. A isto chama-se o **período** do movimento. O período é dado por:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \tag{28}$$

2.1.7 Movimento Relativo

A velocidade de uma partícula depende de quem está a fazer essa medida; como veremos mais tarde, é perfeitamente válido considerar observadores "móveis"que carregam seus próprios relógios e coordenam sistemas com eles, ou seja, eles fazem medições de acordo com seu próprio **referencial**; isto é, um conjunto de coordenadas cartesianas que podem estar em movimento em relação a outro conjunto de coordenadas. Aqui, vamos supor que os eixos nos diferentes sistemas permanecem paralelos um ao outro; ou seja, um sistema pode se mover (transladar), mas não girar em relação a outro.

Supondo que os observadores nos *frames* A e B medem a posição de um ponto P. Então, se tivermos as definições

$$\begin{aligned} r_{PA} &= \text{posição de P medida por A} \\ r_{PB} &= \text{posição de P medida por B} \\ r_{BA} &= \text{posição da origem de B medida por A} \end{aligned}$$

temos as relações:

$$r_{PA} = r_{PB} + r_{BA} \tag{29}$$

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} \tag{30}$$

As Leis de Newton (próximo capítulo) aplicam-se a tais **referências de inércia**. Observadores em cada um desses *frames* concordam no valor da aceleração da partícula.

Entre outros lugares, a Equação 30 é usada em problemas onde um objeto como um avião ou barco tem uma velocidade conhecida no *frame* de (em relação a) um meio como o ar ou a água que por si só se move em relação ao solo estacionário; podemos então encontrar a velocidade do avião ou barco em relação ao solo a partir da soma do vetor na Equação 30.

3 Forças

3.1 Conteúdo Importante

3.1.1 Primeira Lei de Newton

Com as Leis de Newton, começamos o estudo de como o movimento ocorre no mundo real. O estudo das causas do movimento é chamado de dinâmica ou mecânica. A relação entre força e a aceleração foi dada por Isaac Newton em suas três leis do movimento, que formam o base da física elementar. Embora a formulação da física de Newton tivesse que ser substituída mais tarde, para lidar com o movimento em velocidades comparáveis à velocidade da luz e para o movimento no escala de átomos, é aplicável a situações cotidianas e ainda é a melhor introdução para as leis fundamentais da natureza. O estudo das leis de Newton e suas implicações é muitas vezes chamada de mecânica newtoniana ou clássica.

As partículas aceleram porque sofrem ação de forças. Na ausência de forças, uma partícula não acelera, movendo-se com uma velocidade constante.

Definição 3.1 (Primeira Lei de Newton.) *Considerando um corpo no qual não hã ação de forças. Então, se esse mesmo corpo estiver em repouso, permanecerá em repouso, e se estiver se movendo com velocidade constante, continua a mover-se nessa velocidade.*

3.1.2 Segunda Lei de Newton

Experiencias demonstram que os objetos têm uma propriedade chamada **massa** que mede como o seu movimento é influenciado por forças. A Segunda Lei de Newton é uma relação entre a **força resultante** (F) agindo sobre uma massa m e sua aceleração a.

Definição 3.2 (Segunda Lei de Newton) $\sum F = ma$

A relação acima é uma relação *vetorial*, pelo que em duas dimensões, esta equação implica:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \tag{31}$$

A unidade de força no SI é $kg\ ms^{-2}$, abreviada em newton (N). Deste modo,

$$1\ newton = 1N = 1\ kg\ ms^{-2}$$

3.1.3 Exemplos de Forças

A Terra exerce uma força gravitacional com sentido para baixo em todas as massas perto da sua superfície. Esta força é conhecida como o **peso**, F_g, e a sua magnitude é dada por

$$F_g = mg \tag{32}$$

Uma corda sob tensão exerce uma força nos objetos que estão apensos em cada uma das pontas. As forças estão direcionadas para dentro ao longo do comprimento da corda. A tensão é simbolizada pela letra T.

Uma superfície sólida exerce uma força em qualquer massa com a qual esteja em contacto. De modo geral, a força da superfície terá uma componente perpendicular/normal, denominada **força normal** da superfície. A superfície pode também exercer uma força paralela: a força de fricção.

3.1.4 Terceira Lei de Newton

Esta lei é popularmente enunciada como "lei da ação-reação", mas na verdade lida com as forças entre dois objetos.

Definição 3.3 (Terceira Lei de Newton.) *Considerando dois objetos A e B. A força que o objeto A exerce no objeto B é igual e oposta à força que o objeto B exerce no objeto A:* $F_{AB} = -F_{BA}$

3.1.5 Aplicação das Lei de Newton

Uma dica útil apra problemas que envolvem mais do que uma força é desenhar um diagrama que evidencia as massas individuais no problema, juntamento com os vetores que mostram as direções e magnitudes das forças individuais. A estes diagramas é dado o nome de **diagramas de corpo-livre**.

3.1.6 Atrito

Forças que são conhecidas coletivamente como "forças de atrito" estão ao nosso redor na vida diária. Na física elementar, discutimos a força de atrito conforme ela ocorre entre dois objetos cujas superfícies estão em contato e deslizam uma contra a outra. Se, em tal situação, um corpo não se mover enquanto uma força F age sobre ele, então as forças de **atrito estático** opõem-se à força F, pelo que a força resultante será zero. Empiricamente, descobre-se que esta força pode ter um valor máximo dado por:

$$f_s^{max} = \mu_s N$$

onde μ_s é o **coeficiente de atrito estático** para as duas superfícies e N é a força normal entre as duas. Se um objeto está em movimento em relação a outro, então existe uma força de **atrito cinético** entre os dois objetos. A direção desta força é tal que se opõe ao movimento e a sua magnitude é dada por

$$f_k = \mu_k N$$

onde N é a força normal entre os objetos e μ_k o **coeficiente de atrito cinético** para as duas superfícies.

3.1.7 Revisitando o Movimento Circular Uniforme

Como visto em capítulos anteriores, quand oum objeto está em movimento circular uniforme, movendo-se em forma de círculo de raio r com velocidade v, a aceleração (centrípeta) é dirigida para o centro do círculo e tem magnitude

$$a_c = \frac{v^2}{r} \tag{33}$$

Desta maneira, da Segunda Lei de Newton, a força resultante que atua neste objeto tem também de ser direcionada para o centro da trajetória e ter magnitude

$$F_c = \frac{mv^2}{r} \tag{34}$$

Tal força é chamada **força centrípeta**.

3.1.8 Lei da Gravitação Universal

A força gravítica é uma das forças fundamentais da natureza. Todas as massas exercem uma força gravitacional atrativa umas sobre as outras, mas para a maioria dos objetos a força é tão pequena que podemos ignorá-la.

A Lei da Gravitação Universal diz que para duas massas m_1 e m_2, separadas por uma distância r, a magnitude da força gravitacional é

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad onde \qquad G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \tag{35}$$

4 Trabalho, Energia Cinética e Energia Potencial

4.1 Conteúdo Importante

4.1.1 Energia Cinética

Para um objeto com massa m e velocidade v, a energia cinética está definida como

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{36}$$

A energia cinética é um escalar (tem magnitude mas não direção); é sempre um número positivo; e tem unidades do SI de $kg \cdot m^2 s^{-2}$. Esta combinação é também conhecida como **joule**:

$$1\ joule = 1J = 1\ kg \cdot m^2 s^{-2} \tag{37}$$

4.1.2 Trabalho

Quando um objeto se move enquanto um força é exercida sobre ele, então há **trabalho** a ser feito no objeto pela força. Se um objeto efetuar um deslocamento d enquanto uma *força constante* $\mathbf{F}$ atua nele, a força faz uma quantidade de trabalho igual a

$$W = F \cdot d = Fdcos\phi$$

onde ϕ é o ângulo entre $\mathbf{d}$ e $\mathbf{F}$. O trabalho é também uma grandeza escalar cujas unidades são $N \cdot m$.

O trabalho pode ser negativo; isto acontece quando o ângulo entre a força e o deslocamento é maior que 90°. Também pode ser *zero*; isto acontece se $\phi = 90°$. Para que exista trabalho, a força tem de ter uma componente ao longo (ou oposta) à direção do deslocamento. Se várias forças (constantes) atuarem na massa enquanto se move ao longo de um deslocamento $\mathbf{d}$, podemos falar do **trabalho resultante** feito pelas forças,

$$\begin{aligned} W_R &= F_1 \cdot d + F_2 \cdot d + F_3 \cdot d ... + F_n \cdot d \\ &= (\sum F) \cdot d \\ &= F_R \cdot d \end{aligned}$$

Se a força que atua sobre o objeto não é constante enquanto o objeto se move, então devemos calcular um integral para encontrar o trabalho realizado. Supondo que o objeto se mova ao longo de uma linha reta (digamos, ao longo do eixo x, de x_i a x_f) enquanto uma força cujo componente x é $F_x(x)$ atua sobre ele. (Ou seja, conhecemos a força F_x como uma função de x.) Então, o trabalho realizado é

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)dx \tag{38}$$

Finalmente, podemos dar a expressão general para o trabalho feito por uma força. Se um objeto se move de $r_i = x_i i + y_i j + z_i k$ a $r_f = x_f i + y_f j + z_f k$ enquanto a força $F(r)$ atua sobre ele, o trabalho feito é:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(r)dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y(r)dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z(r)dz \tag{39}$$

onde os integrais são calculados ao longo do caminho traçado pelo objeto. Esta expressão pode ser abreviada por

$$W = \int_{r_i}^{r_f} F \cdot dr \tag{40}$$

A gravidade funciona em objetos que se movem verticalmente. Pode-se mostrar que se a altura de um objeto mudou numa quantidade Δy, então a gravidade fez uma quantidade de trabalho igual a

$$W_g = -mg\Delta y \tag{41}$$

sem qualquer influência do deslocamento horizontal. Observe-se o sinal de menos aqui; se o objeto aumenta em altura, moveu-se de forma oposta à força da gravidade.

4.1.3 Força da Mola

O exemplo mais famoso de uma força cujo valor depende da posição é a força da mola, que descreve a força exercida sobre um objeto até o final de uma **mola ideal**. Um mola ideal irá puxar o objeto preso à sua extremidade com uma força proporcional à quantidade pela qual é esticada; irá empurrar para fora o objeto anexado a ela com um força proporcional à quantidade de compressão. Se descrevermos o movimento no final da mola com a coordenada x e colocar-mos a origem do eixo dos x no sítio onde a mola não exerce qualquer força (a dita posição de equilíbrio), então a força da mola é dada por

$$F_x = -kx \tag{42}$$

Aqui, k é um número que é diferente para cada mola ideal e é uma medida que se relaciona com a sua "rigidez"(capacidade de compressão/expansão). A sua unidade é $Nm^{-1} = kgs^{-2}$. Esta equação é conhecida como a **Lei de Hooke**. Esta lei dá uma descrição decente do comportamento de molas reais, desde que elas possam oscilar sobre suas posições de equilíbrio e não são esticadas demasiado.

O trabalho feito por uma força num objeto anexo ao seu, que se move de x_i até x_f, pode ser calculado por

$$W_{mola} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \tag{43}$$

4.1.4 O Teorema do Trabalho-Energia Cinética

Pode-se mostrar que conforme uma partícula se move do ponto r_i para r_f, a mudança na energia cinética do objeto é igual ao trabalho resultante feito nele:

$$\Delta K = K_f - K_i = W_R \tag{44}$$

4.1.5 Potência

Em certas aplicações, estamos interessados na taxa à qual trabalho é realizado por uma força. Se um quantidade de trabalho W é feito num tempo Δt, então dizemos que a **potência média** $\bar{P}$ devido à força é

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t} \tag{45}$$

No limite em que W e Δt são muito pequenos, temos a **potência instantânea** P:

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{46}$$

A unidade do SI de potência é o **watt**, definido por:

$$1\ watt = 1\ W = 1\ jS^{-1} = 1\ ks \cdot m^2 \cdot s^{-3} \tag{47}$$

Pode-se mostrar que se uma força F atua sobre uma partícula que se move com velocidade v, então a taxa instantânea na qual o trabalho é feito na partícula é

$$P = F \cdot v = Fv\cos(\phi) \tag{48}$$

onde ϕ é o angulo entre as direções de F e v.

4.1.6 Forças Conservativas

O trabalho feito num objeto pela força da gravidade não depende do caminho percorrido para ir de uma posição a outra. O mesmo é verdade para a força de uma mola. Em ambos os casos, precisamos de saber as coordenadas inicias e finais para computar W, o trabalho feito por essa força. Esta situação também ocorre com a lei geral para a força da gravidade (ver Eq. 35). Esta situação não se verifica nas forças de atrito vistas anteriormente. As forças de atrito realizam trabalho sobre massas que se movem, mas para calcular o trabalho feito por essas forças, precisamos de saber o *como* as massas foram de um ponto a outro. Se o trabalho resultante feito por uma força não depender do caminho percorrido entre dois pontos, dizemos que a força é uma **força conservativa**. Para estas forças, também se verifica que o trabalho resultante feito numa partícula que se move em torno de um caminho fechado é *zero*.

4.1.7 Energia Potencial

Para uma força conservativa, é possível encontrar uma função de posição chamada de potencial energia, escrita $U(r)$, da qual podemos encontrar o trabalho realizado pela força. Supondo que uma partícula se move de r_i a r_f. Então, o trabalho feito na partícula por uma força conservativa está relacionado com a correspondente função de energia potencial dada por:

$$W_{r_i \to r_f} = -\Delta U = U(r_i) - U(r_f) \tag{49}$$

A unidade do SI de U é o joules.

Foram encontradas duas forças conservativas até agora. A mais simples é a força da gravidade perto da superfície terrestre, nomeadamente $-mg\Delta y$ para uma massa m, onde o eixo y aponta para cima. Para esta força, pode-se mostrar que a energia potencial é

$$U_g = mgy \tag{50}$$

Nesta equação, é *arbitrário* onde colocamos a origem do eixo y, mas uma vez feita essa escolha, terá de ser mantida. A outra força conservativa estudada é a força da mola. Uma mola com constante k que é estendida desde a sua posição de equilíbrio por uma quantidade x tem energia potencial dada por

$$U_{mola} = \frac{1}{2}kx^2 \tag{51}$$

4.1.8 Conservação da Energia Mecânica

Se separarmos as forças do mundo em forças conservativas e não conservativas, então o Teorema do Trabalho-Energia Cinética diz que

$$W = W_{conservativa} + W_{nao\ conservativa} = \Delta K \tag{52}$$

Da Equação 49, o trabalho feito por forças *conservativas* pode ser escrito como

$$W_{conservativas} = -\Delta U$$

onde U é a soma de *todos* os tipos de energia potencial. Substituindo o resultado acima na Equação 49, temos

$$-\Delta U + W_{não\ conservativas} = \Delta K$$

Reorganizando a equação acima, obtemos o **teorema geral da Conservação de Energia Mecânica**:

$$\Delta K + \Delta U = W_{não\ conservativas} \tag{53}$$

Define-se a **energia total do sistema** E como a suma da energia cinética e potencial de todos os seus objetos constituintes:

$$E = K + U \tag{54}$$

Então, a Equação 53 pode ser escrita

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = W_{não\ conservativas} \tag{55}$$

Por palavras, esta equação diz que a energia mecânica total muda com a quantidade de trabalho feito pelas forças não conservativas.

A maioria dos problemas apresentados são situações onde as forças que atuam nos objetos que se movem são apenas forças conservativas; vagamente falando, isto quer dizer que não há atrito ou que o atrito é negligível. Se o caso acima de verificar, a Equação 55 pode ser escrita numa forma mais simples:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0 \tag{56}$$

Esta equação pode ser escrita:

$$K_i + U_i = K_f + U_f \qquad ou \qquad E_i = E_f$$

Noutras palavras, para aqueles casos em que podemos ignorar as forças de atrito, se somarmos todos os tipos de energia para a posição inicial da partícula, é igual à soma de todos os tipos de energia para a posição final da partícula. Nesse caso, a quantidade de energia mecânica continua o mesmo... é conservada.

A conservação de energia é útil em problemas onde só precisamos de saber as posições ou velocidades, mas não o *tempo* do movimento.

4.1.9 Trabalho de Forças Não-Conservativas

Quando, no sistema, atuam forças de atrito, temos de voltar à Equação 55. A mudança na energia mecânica total é igual ao trabalho feit opelas forças não conservativas:

$$\Delta E = E_f - E_i = W_{não\ conservativas} \tag{57}$$

5 Momento Linear e Colisões

5.1 Conteúdo Importante

5.1.1 Momento Linear

O **momento linear** de uma partícula com massa m que se move com uma velocidade v é definido por

$$p = mv \tag{58}$$

O momento linear é um vetor. As unidades do SI para p são $kg \cdot m \cdot s^{-1}$. O momento de uma partícula está relacionado com a força resultante nessa partícula de uma maneira simples; tendo em conta que a massa de uma partícula permanece constante, se derivar-mos em ordem ao tempo, descobrimos que

$$\frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma = F_R$$

pelo que

$$F_R = \frac{dp}{dt} \tag{59}$$

5.1.2 Impulso, Força Média

Quando uma partícula se move livremente, interage com outro sistema por um (breve) período e, depois, move-se livremente novamente, tem uma mudança definida no momento; definimos esta mudança como o impulso I das forças de interação:

$$I = p_f - p_i = \Delta p \tag{60}$$

O impulso é um vetor e tem as mesmas unidades que o momento linear, $kg \cdot m \cdot s^{-1}$.

Integrando a Equação 59, podemos mostrar que:

$$I = \int_{t_i}^{t_f} F dt = \Delta p$$

Podemos definir a **força média** que age sob uma partícula durante um intervalo de tempo Δt. Esta é:

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{I}{\Delta t}$$

5.1.3 Conservação do Momento Linear

O momento linear é uma quantidade útil para os casos em que temos algumas partículas (objetos) que interagem entre si, mas não com o resto do mundo. Um sistema desse tipo é chamado um **sistema isolado**.

Muitas vezes temos motivos para estudar sistemas onde algumas partículas interagem umas com as outras muito rapidamente, com forças que são fortes em comparação com as outras forças do mundo que podem experiênciar. Nessas situações, e por esse breve período de tempo, podemos tratar as partículas como se estivessem isoladas.

Podemos mostrar que quando duas partículas interagem *apenas* consigo mesmas (i.e. estão isoladas) então o seu momento total mantém-se constante:

$$p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f} \tag{61}$$

ou, em termos das suas massas e velocidades,

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{62}$$

ou, abreviando, $p_1 + p_2 = P$ (momento total), isto é: $P_i = P_f$. É importante perceber que a Equação 61 é uma equação *vetorial*; diz-nos que o momento total da componente x é conservada e que o total da componente y é, igualmente, conservada.

5.1.4 Colisões

Quando falamos sobre uma colisão na física (entre duas partículas, digamos), queremos dizer que duas partículas movem-se livremente pelo espaço até se aproximarem uma da outra; então, por um curto período de tempo, elas exercem fortes forças uma sobre a outra até que se separem e movam-se, novamente, livremente.

Para tal evento, as duas partículas têm momentos bem definidos p_{1i} e p_{2i} antes do evento de colisão e p_{1f} e p_{2f} posteriormente. Mas a soma dos momentos antes e depois da colisão é conservada, conforme escrito na Equação 61.

Apesar do momento total ser conservado para um sistema isolado de partículas que colidem, a energia mecânica pode ou não ser conservada. Se a energia mecânica for a mesma antes e depois da colisão, dizemos que a colisão é **elástica**. Caso contrário, diz-se que a colisão é **inelástica**.

Se dois objetos colidirem, ficarem juntos e moverem-se como uma massa combinada, diz-se que aconteceu uma **colisão perfeitamente inelástica**. Pode-se mostrar que em tal colisão mais energia cinética é perdida do que se os objetos ressaltassem um no outro e se afastassem separadamente.

Quando duas partículas sofrem uma colisão *elástica*, sabemos que

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2$$

No caso especial de uma colisão elástica unidimensional entre as massas m_1 e m_2, podemos relacionar as velocidades finais às velocidades iniciais. O resultado é

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2i} \tag{63}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{2i} \tag{64}$$

Este resultado pode ser útil na resolução de um problema onde ocorre tal colisão, mas não é um equação fundamental. Portanto, não é de útil memorização.

5.1.5 Centro de Massa

Para um sistema de partículas, há um ponto especial no espaço conhecido como o **centro de massa** que tem uma enorme importância na descrição do movimento do sistema. Este ponto é uma média ponderada das posições de todos os pontos de massa.

Se as particulas de um sistema têm massas m_1, m_2, ..., m_N, com massa total

$$\sum_i^N = m_1 + m_2 + ... + m_N \equiv M$$

e respetivas posições r_1, r_2, ..., r_N, então o centro de massa r_{CM} é

$$r_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i^N m_i r_i \tag{65}$$

o que quer dizer que as coordenadas x, y e z do centro de massa são

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i^N m_i x_i \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i^N m_i y_i \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i^N m_i z_i \tag{66}$$

Para uma distribuição contínua de massa, a definição de r_{CM} é dado pelo integral sobre os elementos de massa do objeto:

$$r_{CM} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}dm \tag{67}$$

pelo que as coordenadas x, y e z do centro de massa são

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int xdm \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\int ydm \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\int zdm \tag{68}$$

Quando as partículas de um sistema estão em movimento, então, em geral, o seu centro de massa está também em movimento. A velocidade do centro de massa é uma semelhante média ponderada das velocidades individuais:

$$v_{CM} = \frac{dr_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i}^{N} m_i v_i \tag{69}$$

Em geral, o centro de massa vai acelerar; a sua aceleração é dada por

$$a_{CM} = \frac{dv_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i}^{N} m_i a_i \tag{70}$$

Se **P** é o momento total do sistema e M é a massa total do sistema, então o movimento do centro de massa está relacionado com **P** por:

$$v_{CM} = \frac{P}{M} \qquad e \qquad a_{CM} = \frac{1}{M}\frac{dP}{dt}$$

5.1.6 Movimento de um Sistema de Partículas

Um sistema de muitas partículas (ou um objeto estendido) em geral tem um movimento para o qual o descrição é muito complicada, mas é possível fazer uma declaração simples sobre o movimento de seu centro de massa. Cada uma das partículas do sistema pode sentir forças de outras partículas do sistema, mas também pode sentir uma força resultante do ambiente (externo); vamos denotar essa força por F_{ext}. Descobrimos que quando somamos todas as forças externos agindo sobre todas as partículas de um sistema, dá a aceleração do *centro de massa* de acordo com:

$$\sum_{i}^{N} F_{ext,i} = Ma_{CM} = \frac{dP}{dt} \tag{71}$$

Aqui, M é a massa total do sistema; $F_{ext,i}$ é a força externa que atua na partícula i. Em palavras, podemos expressar o resultado acima da seguinte forma: *para um sistema de partículas, o centro de massa move-se como se fosse uma única partícula de massa* M *movendo-se sob a influência da soma das forças externas.*

Parte II
Rotações, Vibrações e Ondas

6 Rotação de um Objeto Sobre um Eixo Fixo

6.1 Conteúdo Importante

6.1.1 Corpos Rígidos; Rotação

Até agora, apenas lidamos com *partículas*, objetos cujas dimensões espaciais foram pouco importantes para as questões feitas. Agora, lidamos com os aspetos elementares do movimento de objetos *extendidos*, objetos cujas dimensões são importantes.

Os objetos com os quais lidamos são aqueles que mantêm uma forma rígida mas que podem mudar a sua orientação no espaço: podem ter **movimento translacional**, no qual os seus centros de massa se movem mas também **movimento rotacional**, no qual podemos observar as mudanças na direção num conjunto de eixos que estão "colados"ao objeto. Tal objeto é conhecido como um **corpo rígido**.

Visto que este se trata de um assunto complicado, especializamos o caso em que uma *linha de pontos do objeto está fixa* e o objeto roda sobre um **eixo de rotação** fixo no espaço. Quando isto acontece, cada ponto individual do objeto terá percorrerá um caminho circular cujo raio dependerá do ponto observado. A orientação do objeto é especificada por uma variável, o ângulo θ que podemos considerar ser o ângulo entre uma linha de referência "pintada"no objeto e o eixo x (medido no sentido anti-horário).

Devido às propriedades matemáticas de expressar uma medida de um ângulo em *radianos*, normalmente expressamos todos os ângulos em radianos durante o estudo das rotações; ocasionalmente, pode falar-se em *revoluções.* Revoluções, graus e radianos estão relacionados:

$$1 \text{ revolução} = 360° = \pi \ radianos$$

6.1.2 Deslocamento Angular

Conforme um objeto que roda se move através de um ângulo θ a partir da posição inicial, um ponto de massa no objeto no raio r mover-se-á a distância s; s é o comprimento do arco de um raio r subtendido pelo ângulo θ.

Quando θ está em radianos, as medidas acimas relacionam-se por

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \theta \text{ em radianos} \tag{72}$$

Se pensarmos na consistência das unidades na equação acima, verifica-se que dado que s e r ambos têm unidades de comprimento, θ não tem dimensão;

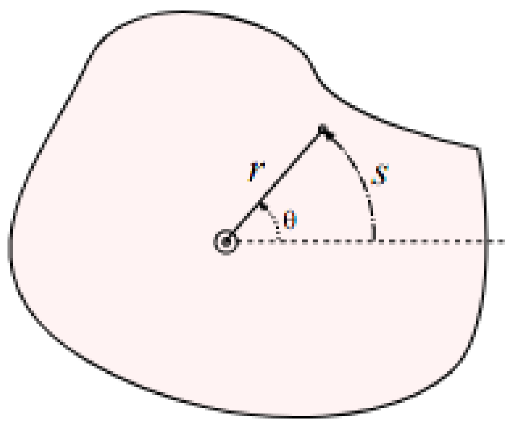

Figura 1: Um ponto no objeto que sofre rotação está localizado a uma distância r do eixo; enquanto o objeto roda num ângulo θ, o ponto move-se a distância s.

but visto que estamos a assumir uma medida em radianos, normalmente escreve-se *"rad"* depois do ângulo.

6.1.3 Velocidade Angular

A posição angular de um objeto muda com o tempo; tal como no movimento retilíneo, estudamos a variação de θ no tempo t. Se num período de tempo Δt o objeto teve um deslocamento angular de $\Delta\theta$, então define-se a **velocidade angular média** para esse período como

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{73}$$

Uma quantidade mais interessante é encontrada quando se torna o período de tempo Δt infinitesímal. Isto dá-nos a **velocidade angular instantânea**, ω:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{74}$$

A velocidade angular tem unidades $rad\ s^{-1}$ ou s^{-1}.

6.1.4 Aceleração Angular; Aceleração Angular Constante

A taxa à qual a velocidade angular muda é a aceleração angular do objeto. Se a velocidade angular instantânea de um objeto muda por $\Delta\omega$ durante um período de tempo Δt, então a **aceleração angular média** para este período é

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{75}$$

A **aceleração angular instantânea** está definida como

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \tag{76}$$

Podemos demonstrar equações simples para o movimento rotacional se soubermos que a α é constante. Então, se θ_0 for o deslocamento angular inicial; ω_0 for a velocidade angular inicial e α a aceleração angular constante, temos:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \tag{77}$$

$$\theta = \theta_0 + w_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{78}$$

$$\omega^2 = w_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \tag{79}$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}(w_0 + w)t \tag{80}$$

onde θ e ω são o deslocamento angular e a velocidade no instante t. θ_0 e ω_0 são os valores do ângulo e da velocidade angular em $t = 0$.

As equações acima têm *exatamente a mesma forma* que as equações para o movimento retilíneo em uma dimensão. As correspondências são:

$$x \leftrightarrow \theta \qquad v \leftrightarrow \omega \qquad a \leftrightarrow \alpha$$

6.1.5 Relação Entre Qutnaidades Angulares e Lineares

Quando um objeto que roda tem deslocamento angular $\Delta\theta$, então um ponto no objeto a um raio r percorre uma distância $s = r\theta$. Isto é uma relação entre o movimento angular do ponto e o movimento "linear" do ponto. A distância do ponto desde o eixo não muda, por isso derivando esta relação em ordem ao tempo dá a velocidade instantânea da partícula:

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \tag{81}$$

que se chama a **velocidade tangencial/velocidade linear** v_T do ponto para a distinguir da *velocidade angular*. Note-se que todos os pontos do objeto que roda têm a mesma *velocidade angular* mas as suas velocidades linear dependem da distância ao eixo de rotação.

Similarmente, a derivada em relação ao tempo da equação acima dá-nos a acelearção linear do ponto:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \tag{82}$$

Aqui, é essencial distinguir a aceleração *tangencial* da aceleração *centrípeta*. À semelhança do movimento circular uniforme, é verdade que um ponto a um raio r terá a sua aceleração centrípeta dada por:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2 \tag{83}$$

Estas duas componentes especificam o vetor aceleração de um ponto num objeto que sofre rotação.

6.1.6 Energia Cinética de Rotação

Porque a constituição de um objeto em rotação é feita de vários pontos de massa em movimento, este tem energia cinética; mas dado que cada ponto de massa tem uma velocidade v diferente, a fórmula tradicional da energia cinética não se aplica. Se cada ponto de massa do objeto em rotação for denotado por m_i, cada um tendo velocidades lineares (diferentes!) v_i, então a energia cinética total do objeto em rotação é

$$K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 \tag{84}$$

Se r_i for a distância do i-ésimo ponto de massa ao eixo, então $v_i = r_i\omega$ e temos:

$$K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2}m_i(r_i\omega)^2 = \frac{1}{2}()\sum_i m_i)\omega^2 \tag{85}$$

O somatório $\sum_i m_i r_i^2$ é chamada o **momento de inércia** para o objeto de rotação, e é usualmente denotado por I. Tem unidades do SI de $kg \cdot m^2$. Com esta simplificação, a equação anterior torna-se

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{86}$$

6.1.7 Momento de Inércia; Teorema do Eixo Paralelo

Para um objeto em rotação composto por vários pontos de massa, o **momento de inércia** I é dado por

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{87}$$

Tem unidades do SI de $kg \cdot m^2$ e é um escalar (i.e. um único número que é sempre positivo). Mais frequentemente, lidamos com um objeto que é uma distribuição contínua de massa, e para este caso temos a expressão mais geral

$$I = \int r^2 dm \tag{88}$$

Aqui, o integral é feito sob o volume do objeto e em cada ponto é computado r^2, onde r é a distância medida perpendicularmente desde o eixo de rotação.

Supondo que o momento de inércia para um objeto de massa M com o eixo de rotação a passar pelo centro de massa é I_{CM}. Agora, suponha-se que deslocamento o eixo paralelo a si próprio por uma distância D. O momento de inércia para o objeto sob o novo eixo de rotação terá um novo valor I, dado por

$$I = I_{CM} + MD^2 \tag{89}$$

A equação acima é conhecida como o **Teorema dos Eixos Paralelos** e é, por vezes, útil para computar momentos de inércia se já tivermos um valor para o momento de inércia que passa pelo centro de massa do objeto.

6.1.8 Torque

É possível impactar a aceleração de um objeto em rotação exercendo uma força num ponto em particular.

Supondo que a força **F** (cuja direção está no plano de rotação) é aplicada num ponto r (relativo ao eixo de rotação que está na origem O). Supondo que o ângulo mais pequeno entre **r** e **F** é ϕ. Então, a magnitude da **torque** exercida no objeto por esta força é

$$|\tau| = rF \sin\phi \tag{90}$$

Reagrupando alguns temos, a equação pode ser escrita

$$\tau = r(F \sin\phi) = rF_t$$

onde $F_t = F \sin\phi$ é a componente da força perpendicular a r, ou

$$\tau = (r\sin\phi)F = r_\perp F$$

onde $r_\perp = r\sin\theta$ é a distância entre o eixo e a linha que obtemos "extendendo" o vetor força numa linha denominada **linha de ação**. A distância $r_\perp$ é chamada o **braço de momento** da força **F**.

6.1.9 Torque e Aceleração Angular (Segunda Lei de Newton para Rotações)

A aceleração angular de um objeto em rotação é proporcional à torque resultante no objeto; estão relacionadas por:

$$T_R = I\alpha \tag{91}$$

onde I é o momento de inércia do objeto. Esta equação é parecida à Segunda Lei de Newton para movimentos em uma dimensão, $F_x = ma_x$.

Quantidade Linear	Quantidade Angular
x	θ
v	ω
a	α
m	I
F	τ
p	L

6.1.10 Trabalho, Energia e Potência em Movimento Rotacional

Tal como a fórmula (abreviada) para o trabalho feito por uma força para um deslocamento pequeno, $W = F_x dx$, existe uma fórmula para o trabalho efetuado pela *torque* para um pequeno deslocamento angular $d\theta$:

$$W = \tau d\theta$$

Para um deslocamento angular finito de θ_i a θ_f, o trabalho feito é

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta \tag{92}$$

6.1.11 Equações do Movimento Angular

Relação Linear	Relação Angular
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
$F = ma$	$\tau = I\alpha$
$p = mv$	$L = I\omega$

7 Rolamento; Momento Angular

7.1 Conteúdo Importante

7.1.1 Rolamento sem Escorregamento

Quando um corpo rígido simétrico redondo (e.g. uma esfera ou um cilíndro uniforme) de raio R rola sem escorregar sob uma superfície horizontal, a distância percorrida pelo seu centro (quando as suas rodas rodam por um ângulo θ) é igual ao comprimento do arco pelo qual um ponto na extremidade se move:

$$\Delta x_{CM} = s = R\theta \tag{93}$$

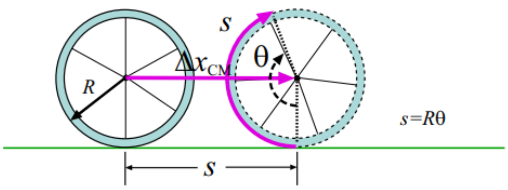

Figura 2: Ilustração da relação entre Δx, s, R e θ para um objeto em rolamento.

A velocidade do centro de massa para o objeto em rolamento, $v_{CM} = \frac{dx_{CM}}{dt}$ e a sua velocidade angular estão relacionados por

$$v_{CM} = R\omega \tag{94}$$

e a magnitude da aceleração do centro de massa está relacionado com a aceleração angular por:

$$a_{CM} = R\alpha \tag{95}$$

A energia cinética do objeto é:

$$K_{rolamento} = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \quad (96)$$

O primeiro termo à direita representa a energia cinética rotacional do objeto sob o seu eixo de simetria; o second termo representa a energia cinética que o objeto teria se se movesse com velocidade v_{CM} sem rolar. No fundo, $K_{rol} = K_{rot} + K_{trans}$.

Quando uma roda rola sem escorregar, *pode* haver força de atrito a agir na superfície da mesma. Neste caso, é uma força de atrito *estático* e dependendo da situação, poderá ter a mesma direção ou oposta ao movimento do centro de massa.

7.1.2 Torque como Vetor

No último capítulo, foi dada uma definição para a torque τ que atua num corpo rígido em rotação sobre um eixo fixo. Agora, é dada uma definição mais geral para "torque"; a "torque"é definida atuando numa única partícula quando uma força atua sobre a mesma.

Supondo que o vetor posição (relativo à origem O) de uma partícula é r e uma única força F atua sobre ela. Então, a torque τ atuando na partícula é

$$\tau = r \times F \quad (97)$$

Se ϕ for o ângulo entre o vetor posição r e a força F, então a torque τ tem magnitude

$$\tau = rF \sin\phi$$

7.1.3 Momento Angular de Uma Partícula e de Sistema de Partículas

Se uma partícula tem um vetor posição r e momento linear p, ambos relativos a uma origem O, então o **momento angular** dessa partícula (relativo à origem) é definido por:

$$L = r \times p = m(r \times v) \quad (98)$$

O momento angular tem unidades $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$. É possível mostrar que a torque resultante numa partícula é igual à derivada em ordem ao tempo do momento angular:

$$\sum \tau = \frac{dL}{dt} \quad (99)$$

Para um conjunto de pontos de massa em movimento, o momento angular total é definido como a soma vetorial dos momentos angulares individuais:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + ...$$

A taxa à qual o momento angular total muda está relacionado com as torques que surgem de forças excercidas fora do sistema.

$$\sum \tau_{ext} = \frac{dL}{dt} \tag{100}$$

Isto diz-nos que quandoi a soma das torques externas é zero, então **L** é constante (conservado).

7.1.4 Momento Angular para Rotação sobre Eixo Fixo

Para uma rotação sobre um eixo fixo, o "momento angular"do objeto rígido é um número, L. Além disso, é possível mostrar que se a avelocidade angular do objeto for ω e o seu momento de inércia sobre o eixo dado é I, então o seu momento angular sobre o eixo é

$$L = I\omega \tag{101}$$

7.1.5 Conservação do Momento Angular

Para um sistema no qual não há torque externa resultante, o momento angular total mantém-se constante: $L_i = L_f$. Este princípio é conhecido como a **Conservação do Momento Angular**.

8 Equilíbrio Estático

8.1 Conteúdo Importante

Neste capítulo, estudamos um caso especial da dinâmica de objetos rígidos abrangidos nos últimos dois capítulos. É o caso especial (muito importante!) pnde o centro de massa do objeto não tem movimento e o objeto não está em rotação.

8.1.1 Condições para Equilíbrio de um Corpo Rígido

Para um objeto rígido que não se move, temos as seguintes condições:

- a soma (vetorial) das forças externas no corpo rígido deve ser zero:

$$\sum F = 0 \tag{102}$$

  Quando esta condição é satisfeita, diz-se que o objeto está em **equilíbrio translacional**.

- a soma das torques externas no corpo rígido deve ser zero:

$$\sum \tau = 0 \tag{103}$$

  Quando esta condição é satisfeita, dizemos que o objeto está em **equilíbrio rotacional**.

Quando ambas as condições acimas são satisfeitas, diz-se que o corpo está em **equilíbrio estático**.

8.1.2 Exemplos de Corpos Rígidos em Equilíbrio Estático

Estratégia para resolver problemas em equilíbrio estático:

1. determinar todas as forças que atuam no corpo rígido. Essas forças virão de outros objetos com o qual o corpo está em contacto (suportes, paredes, chão, massas em repouso sob ele) bem como a gravidade;

2. desenhar um diagrama e colocar toda a informação existente sobre essas forças: os pontos do corpo no qual elas agem, as magnitudes, as direções;

3. escrever as equações para o equilíbrio estático. Para a equação da torque, vhá opção de escolha de onde colocar o eixo; ao fazer essa escolha, há que pensar em qual ponto tornaria as equações resultantes mais simples;

4. resolver as equações.

9 Movimento Oscilatório

9.1 Conteúdo Importante

9.1.1 Movimento Harmónico Simples

Neste capítulo, consideramos sistemas que têm um movimento que se repete ao longo do tempo, isto é, é um movimento **periódico**. Em particular, consideramos sistemas que têm uma coordenada (e.g. x) que tem uma dependência sinusoidal com o tempo.

Um gráfico de x $vs.$ t para este tipo de movimento é mostrado na figura abaixo. Supondo que a partícula tem uma movimento sinusoidal periódico no eixo dos x, e o seu movimento oscila entre $x = +A$ e $x = -A$. Então, a expressão geral de $x(t)$ é dada por

$$x(t) = Acos(\omega t + \phi) \tag{104}$$

A é a **amplitude** do movimento. ω é a **frequência angular**.

Da Equação 104, infere-se que quando o tempo t aumenta em $\frac{2\pi}{\omega}$, o argumento do cos aumenta em 2π e o valor para x vai ser o mesmo. Portanto, o movimento repete-se após um intervalo de tempo $\frac{2\pi}{\omega}$, denotado por T, como o período do movimento.

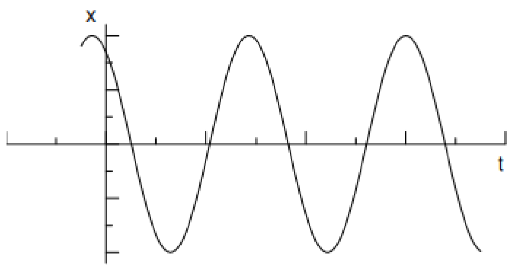

Figura 3: Gráfico posição-tempo para movimento harmónico simples.

O número de oscilações por tempo é dado por $f = \frac{1}{T}$, chamada a **frequência** do movimento:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{105}$$

Reagrupando os termos, temos uma fórmula para ω em termos de f ou T:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{106}$$

De $x(t)$, podemos obter a velocidade e a aceleração da partícula:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \tag{107}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \tag{108}$$

Note-se que os valores máximos de v e a são:

$$v_{max} = \omega A \qquad a_{max} = \omega^2 A \tag{109}$$

A partícula atinge v_{max} no *meio* da oscilação (quando $x = 0$). A magnitude da aceleração é maior nos extremos da oscilação (quando $x = \pm A$).

Comparando a Equação 104 e a Equação 108, temos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{110}$$

que é igual a $a(t) = -\omega^2 x(t)$. É possível mostrar que a seguinte relação entre a velocidade $|v(t)|$ e a coordenada $x(t)$:

$$|v(t)| = \omega A |\sin(\omega t + \phi)| = \omega A \sqrt{1 - (\cos(\omega t + \phi)^2)} = \omega A \sqrt{1 - (\frac{x(t)}{A})^2}. \tag{111}$$

9.1.2 Massa Ligada a uma Mola

Supondo que uma massa m está ligada à extremidade de uma mola com constante de força k e desliza sobre uma superfície sem atrito.

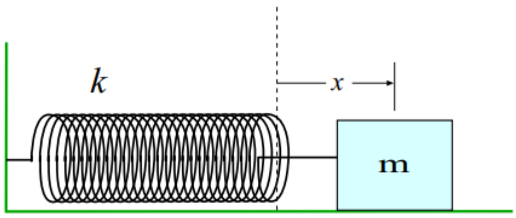

Figura 4: Massa m ligada a uma mola horizontal com constande de força k; m desliza sobre uma superfície sem atrito.

Então, se medirmos a coordenada x da massa desde o ponto onde essa mesma massa estaria se a mola estivesse em equilíbrio, a Segunda Lei de Newton diz que:

$$F_x = -kx = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

tendo então

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \tag{112}$$

Comparando a Equação 9.1.2 e **??**, podemos identificar ω^2 como $\frac{k}{m}$ para que se tenha

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{113}$$

Da frequência angular ω podemos descobrir o tempo T e a frequência f do movimento:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{114}$$

Atente-se que ω (e, por consequência, T e f) não dependem da amplitude A do movimento da massa. Na realidade, se o movimento da massa for muito grande, então a mola não obedecerá a Lei de Hooke, mas desde que as oscilações sejam "pequenas", o periodo é o mesmo para todas as amplitudes.

9.1.3 Energia e Oscilador Harmónico Simples

Para o sistema massa-mola, a energia cinética é dada por

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2(\sin(\omega t + \phi)^2) \tag{115}$$

e a energia potencial é

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2(\cos(\omega t + \phi)^2) \tag{116}$$

Usando $\omega^2 = \frac{k}{m}$ na Equação 115, temos que a energia total do sistema é:

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2[(\sin(\omega t + \phi))^2 + (\cos(\omega t + \phi)^2)] \tag{117}$$

Da entidade trigonométrica $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, temos

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \tag{118}$$

mostrando que a energia de um oscilador harmónico simples (como exemplificado pelo sistema massa-mola) é constante e igual à energia potencial da mola quando está estendida ao máximo (no instante de tempo em que a massa não tem movimento).

Da Equação 115, temos a energia cinética em função do tempo:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

O valor máximo da energia cinética é $\frac{1}{2}m\omega^2 A^2$, que ocorre quando $x = 0$. Visto que podemos decidir o "ponto zero"da energia potencial, temos que $U(x) = 0$ em $x = 0$. Então, a energia total do sistema é igual ao valor máximo da energia cinética:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

Usando as expressões acima, temos a energia potencial do sistema:

$$\begin{aligned}
U &= E - K \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (1 - \sin^2(\omega t + \phi)) \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2 x^2
\end{aligned}$$

Para o sistema massa-mola, U é dada por $\frac{1}{2}kx^2$, que nos dá a relação $m\omega^2 = k$ ou $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, encontrada anteriormente. Usando a relação $v_{max} = \omega A$, a energia potencial pode ser escrita como

$$U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}\frac{mv_{max}^2}{A^2}x^2 \tag{119}$$

9.1.4 Relação com o Movimento Circular Uniforme

Existe uma correspondência entre o movimento harmónico simples e o movimento circular uniforme, ilustrado na figura abaixo.

Na figura (a), uma massa move-se num caminho circular horizontal com movimento circular uniforme de raio R. A sua velocidade angular é ω, logo a sua localização é dada por

$$\theta(t) = \omega t + \phi$$

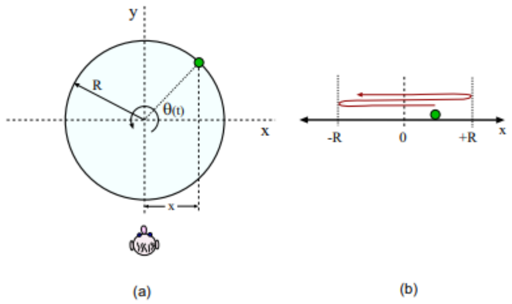

Figura 5: Massa m ligada a uma mola horizontal com constande de força k; m desliza sobre uma superfície sem atrito.

Na figura (b) está representado o movimento da massa como se fosse vista por alguém que estivesse na direção $+y$ ao nível do disco onde a massa roda. Tal observador apenas vê mudança na coordenada x. Visto que $x = Rcos\theta$, a coordenada observada é

$$x(t) = Rcos(\theta(t)) = Rcos(\omega t + \phi)$$

9.1.5 Pêndulo

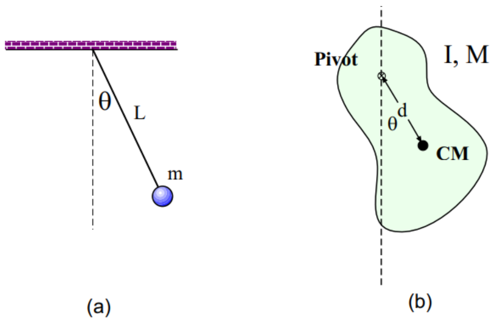

Figura 6: (a) Pêndulo simples. (b) Pêndulo físico.

Abordamos, primeiro, o **pêndulo simples**, que tem uma massa m suspensa por uma corda de comprimento L cuja massa pode ser ignorada. A massa é colocada em movimento num plano vertical. É possível mostrar que se θ é o ângulo que a corda faz com a vertical, obedece à seguinte equação:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta \tag{120}$$

Quando se restringe θ a valores "pequenos", podemos usar a aproximação $\sin\theta \approx \theta$, que é verdade se θ for medido em radianos. Nesse caso, a equação acima é reescrita como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \tag{121}$$

Comparando a equação acima com a Equação 110, podemos identificar a frequência angular do movimento:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{122}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \tag{123}$$

Das equações acima, infere-se que não têm qualquer dependência com a massa suspensa na corda ou com a amplitude do balanço, desde que o ângulo θ seja pequeno.

$$\theta(t) = \theta_{max}\cos(\omega t + \phi) \tag{124}$$

Uma generalização do pêndulo simples é a de um corpo rígido que está livre para girar num plano em torno de um eixo sem atrito. Tal sistema é conhecido como um **pêndulo físico**.

Supondo que olhamos em direção a linha uma que une o eixo ao centro de massa do objeto. Se θ for o ângulo que esta linha faz com a vertical, e se de novo for usada a aproximação $\sin\theta \approx \theta$, é possível mostrar que obedece à seguinte equação

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgd}{I}\theta \tag{125}$$

onde d é a distância entre o eixo e oc entro de massa, M é a massa do objeto e I é o momento de inércia do objeto sobre o eixo dado.

O período T é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} \tag{126}$$

10 Ondas I: Generalizações, Sobreposição e Ondas Estacionárias

10.1 Conteúdo Importante

10.1.1 Movimento Ondulatório

O **movimento ondulatório** ocorre quando os elementos de massa deu um meio, tal como uma corda esticada ou a superfície de um líquido, faz movimentos oscilatórios relativamente pequenos, mas que, coletivamente, fornecem um padrão que viaja por longas distâncias. Este tipo de movimento também inclui o fenómeno do *som*, onde as moléculas do ar à nossa volta fazem pequenas oscilações mas, coletivamente, causam uma perturbação que pode viajar uma longa distância.

10.1.2 Tipos de Ondas

Em alguns tipos de movimento ondulatório, o movimento dos elementos do meio é (para a maior parte) perpendicular ao movimento da perturbação. Isto é verdade para ondas numa corda, por exemplo. Este tipo de onda é chamada **onda transversal** e é o tipo mais fácil de visualizar.

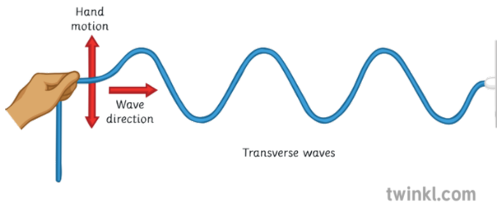

Figura 7: Onda transversal.

Para outras ondas, o movimento dos elementos do meio é paralelo ao movimento da perturbação. Este tipo de onda pode ser vista quando alongamos uma mola e abanamos a sua extremidade paralelamente ao seu comprimento. Observar-se, posteriormente, regiões onde a mola está mais comprimida e esticada. Uma onda sonora viaja da mesma maneira; neste caso, as moléculas de ar têm um pequeno movimento em forma de *"vai-e-volta"* que egra regiões onde o ar tem maior e menor compressão.

Uma onda viaja ao longo da direção de propagação é uma **onda longitudinal**.

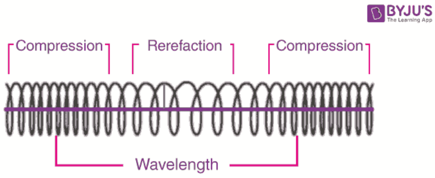

Figura 8: Onda longitudinal.

10.1.3 Descrição Matemática de uma Onda; Comprimento de Onda, Frequência e Velocidade da Onda

No tratamento matemático dos fenómenos ondulatórios, lidaremos maioritariamente com ondas que viajam em uma dimensão. A coordenada ao longo da qual a perturbação viaja será x; em cada valor de x, o meio irá se "deslocar"de alguma maneira, e esse deslocamento será descrito pela variável y. Então, y dependerá de x e do tempo t no qual se vê o deslocamento. Em geral, $y = f(x,t)$.

Se nos especializarmos no caso em que a forma da onda não muda com o tempo, mas em vez disso viaja ao longo do eixo $+x$ com uma velocidade v, então a onda será apenas uma função da combinação $x - vt$:

$$y = f(x - vt) \qquad \text{(Velocidade v na direção +x).}$$

A partir da expressão acima, segue-se que uma onda viajando na outra direção é:

$$y = f(x + vt) \qquad \text{(Velocidade v na direção -x).}$$

Por razões que são basicamente matemáticas, é importante estudar uma onda particular que tenha uma forma sinoidal em função de x. Essa onda é dada por

$$y(x,t) = y_m \sin(kx \mp \omega t) \tag{127}$$

Nesta equação, o sinal $-$ é utilizado para uma onda que viaje na direção $+x$; $+$ é escolhido para uma onda que viaja na direção $-x$.

Esta forma de onda representa um *comboio de ondas* (infinito) em vez de um pulso. Na Equação 127, k é o **número de onda angular**, cuja unidade é m^{-1}. ω é a **frequência angular** e tem unidades s^-1.

A onda harmónica na Equação 127 é periódica no espaço e no tempo. O **comprimento de onda** λ da onda é a distância entre repetições da forma sinusoidal da onda quando "congelamos"a onda no tempo. É possível mostrar que esse comprimento está relacionado com k por:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{128}$$

O **período** T da onda é o tempo entre repetições do movimento de qualquer elemento do meio. É possível mostrar que está relacionado com a frequência angular por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{129}$$

Tal como no estudo das oscilações, a **frequência** da onda tem a mesma relação com ω e T:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

É possível mostrar que a velocidade de tal onda (i.e. a taxa a qye a sya crusta viaja ao longo do eixo x) é:

$$v = \frac{\omega}{k} = \lambda f \tag{130}$$

Cada ponto de massa do meio move-se como uma oscilador harmónico cuja amplitude e frequência são iguais às da onda; a velocidade máxima de cada elemento é $v_{max} = y_m\omega$ e aceleração máxima de cada elemento é $y_m\omega^2$.

10.1.4 Ondas numa Corda Esticada

Um dos exemplos mais simples de uma onda transversal é o de ondas que viajam muma corda esticada. Pode-se mostrar que para uma corda sob uma tensão τ, cuja massa por unidade de comprimento é dada por μ, a velocidade das ondas é

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \tag{131}$$

Uma caraterística importante das ondas é que *transmitem energia.* A **potência média** é a taxa À qual energia mecânica passa qualquer ponto do eixo x. É possível mostrar que para ondas harmónicas numa corda, esta quantidade é dada por

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2 \tag{132}$$

onde μ é densidade linear da corda, v é a velocidade da onda e ω é a frequência angular da onda harmónica.

10.1.5 Princípio da Sobreposição

Uma propriedade simples de todas as ondas da natureza que estudamos é que elas se somam. Mais precisamente, se uma perturbação física de um meio gerar a onda $y_1(x,t)$ e outra perturbação gera a onda $y_2(x,t)$ então se ambos os efeitos agirem ao mesmo tempo, a onda resultante será

$$y_{Tot}(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \tag{133}$$

10.1.6 Interferência de Ondas

Nesta e na próxima secção, são dados resultados para a sobreposição de duas ondas harmónicas que apenas diferem num aspeto.

Primeiro, consideramos duas ondas com a mesma velocidade, frequência, amplitude e direção de movimento mas que diferem por uma constante de fase. Combinaremos as duas ondas

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t) \qquad y_2 = y_m \sin(kx - \omega t + \phi) \tag{134}$$

Para chegar a uma forma útil para a soma dessas duas ondas, pode-se usar a identidade trigonométrica

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Com isto, podemos mostrar que a onda resultante $y'(x,t)$ é:

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = [2y_m\cos(\frac{1}{2}\phi)]\sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi) \tag{135}$$

A onda resultante tem uma nova fase, mais importante, tem uma nova amplitude que depende de y_m e ϕ:

$$y'_m = 2y_m\cos\frac{1}{2}\phi \tag{136}$$

Quando $\phi = 0$, a nova amplitude é $2y_m$; as ondas dizem-se estar **completamente em fase** e que a adição é **completamente construtiva**. Um máximo da onda y_1 coincide com um máximo da onda y_2 e uma onda "maior"é o resultado. Quando $\phi = \pi$, a nova amplitude é *zero* e as ondas dizem-se estar **completamente fora de fase** e que a adição é **completamente destrutiva**. Neste caso, um máximo da onda y_1 coincide com um mínimo da onda y_2 e o resultado é o cancelamento completo.

10.1.7 Ondas Estacionárias

Estando reunidas certas condições, as ondas podem colidir numa região particular, efetivamente tornando-se **estacionárias**.

Neste capítulo, é considerado o resultado da adição de duas ondas harmónicas que têm a mesma velocidade, frequência e amplitude mas para quais as direções de propagação ($+x$ ou $-x$ são diferentes). Neste caso, as constantes de fase para cada onda são irrelevantes. Serão adicionadas as ondas:

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t) \qquad y_2 = y_m \sin(kx + \omega t) \tag{137}$$

Novamente, podemos usar a identidade trigonométrica para a adição de dois sin e mostrar que a soma $y'_m(x,t)$ é:

$$y'_(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = [2y_m \cos(\omega t)] \sin(kx) \tag{138}$$

A onda resultante da Equação 138 é uma função interessante de x e t; no entnato não é uma onda que se propaga por não ser da forma $f(kx \mp \omega t)$. É uma função sinusoidal da coordenada x, multiplicada por um factor modulador $\cos(\omega t)$. Uma onda na forma da Equação 138 é uma **onda estacionária**.

Para a onda na Equação 138, existem pontos onde não há deslocamento, i.e. aqueles onde $\sin(kx) = 0$ (em que $x = \frac{n\pi}{k}$, n natural). Estes pontos são os **nós** do padrão da onda estacionária.

Existem pontos para o qual o deslocamento é o máximo, nomeadamente aqueles para o qual $\sin(kx) = \pm 1$ (onde $x = \frac{(2n+1)\pi}{2k}$, n natural). Estes pontos são chamados os **antinós** do padrão da onda estacionária. Nós e antinós consecutivos estão separados por $\frac{\lambda}{2}$, onde λ é o comprimento de onda das ondas originais que formaram a onda estacionária. Um nó e o antinó mais próximo estão separados por $\frac{\lambda}{4}$.

10.1.8 Ondas Estacionárias em Cordas Sob Tensão

Os modos de oscilação da corda são aqueles em que a corda oscila com nós em uma das extremidades e um padrão especial de nós e antinós entre eles. Esse padrão apenas existe quando a corda vibra com certas **frequências resonantes**. Para esses nós, o comprimento da corda L é um múltiplo de $\frac{\lambda}{2}$:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 1, 2, 3...$$

que leva à fórmula das frequências resonantes:

$$f_n = n\frac{v}{2L} \qquad n = 1, 2, 3... \tag{139}$$

onde v é a velocidade das ondas na corda e f_n é a frequência resonante do n-ésimo nó.

11 Ondas II: Ondas Sonoras

11.1 Conteúdo Importante

11.1.1 Ondas Sonoras

Uma onda sonora é uma onda longitudinal num meio elástico (e.g. gas, líquido ou sólido). Neste tipo de ondas, as partículas do meio oscilam para a frente e para trás ao longo da direção na qual a onda viaja, de onde resulta a criação de regiões de densidade alta e baixa. São estas regiões de compressão e rarefação que constituem as ondas que viajam pelo espaço e transportam energia.

11.1.2 Velocidade do Som

A velocidade do som varia com a propriedade elástica (que armazena energia potencial) e com a propriedade inercial (que armazena energia cinética) do meio onde se propaga. Uma expressão da forma geral para o som depende destes dois factores:

$$v = \sqrt{\frac{\text{properidade elástica}}{propriedadeinercial}} \tag{140}$$

Tomando como exemplo a Equação 131, tem-se que a tensão τ na corda é a propriedade elástica da corda, enquanto que a densidade linear, μ, é a propriedade inercial.

No caso de uma onda sonora que se propaga pelo ar, a propriedade elástica e propriedade inercial são a massa volúmica ρ e o *módulo de elasticidade volumétrico* B, respetivamente, onde B é dado por:

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} \tag{141}$$

onde $\Delta V/V$ é a variação relativa de volume provocada pela variação Δp de pressão. B é sempre positivo tem unidades SI $Pa = 1\ N\ m^{-2}$.

Por fim, a partir da Equação 140, temos a velocidade de propagação de uma onda sonora num meio com módulo de elasticidade B e massa volúmica ρ:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{142}$$

11.1.3 Intensidade; Decibel

A intensidade de uma onda, ou a potência por unidade de área, é a taxa à qual a energia que é transportada pela onda flui por unidade de área A perpendicular à direção de propagação da onda. O ouvido humano pode detetar um intervalo grande de intensidades. Por esta razão, é conveniente usar uma escala logarítmica, onde o nível de som β é definido pela equação

$$\beta(dB) = 10 \log \frac{I}{I_0} \tag{143}$$

onde I_0 é a intensidade de um nível de referência arbitrário considerado o "limear de audição"que é $I_0 = 1.0 \cdot 10^{-12} W m^{-2}$. A nível de exemplo, o nível de som de uma intensidade $I = 1.0 \cdot 10^{-5} W m^{-2}$ será

$$\beta = 10 \log \frac{1.0 \cdot 10^{-5} W m^{-2}}{1.0 \cdot 10^{-12} W m^{-2}} = 10 \log 10^7 = 70 \ dB \tag{144}$$

11.1.4 Batimentos

Um fenómeno interessante que ocorre devido à interferência construtiva e destrutiva de duas ou mais frequências de som é o fenómeno dos **batimentos**. Se duas ondas diferirem em frequência, as ondas sonoras podem ser modeladas como

$$y_1 = A \cos(k_1 x - 2\pi f_1 t) \qquad y_2 = A \cos(k_2 x - 2\pi f_2 t) \tag{145}$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$\cos u + \cos v = 2 \cos(\frac{u+v}{2}) \cos(\frac{u-v}{2}) \tag{146}$$

e considerando $x = 0.0m$, encontramos o som resultante num ponto do espaço, dado pela equação

$$y(t; x = 0 \ m) = 2A \cos(2\pi f_{media} t) \cos[2\pi(\frac{|f_2 - f_1|}{2})t] \tag{147}$$

onde a **frequência do batimento** é

$$f_{batimento} = |f_2 - f_1| \tag{148}$$

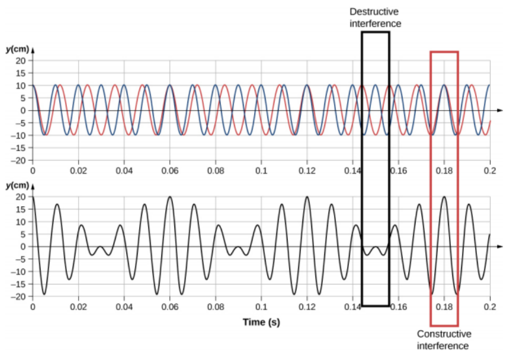

Figura 9: Batimento produzido pela interferência construtiva e destrutiva de duas ondas sonoras que diferem em frequência.