Mecânica e Ondas

Sebenta de Apoio ao Estudo

Carlos Menezes

4 de maio de 2021

Conteúdo

Parte I
Cinemática e Dinâmica

1 Forças

1.1 Conteúdo Importante

1.1.1 Primeira Lei de Newton

Com as Leis de Newton, começamos o estudo de como o movimento ocorre no mundo real. O estudo das causas do movimento é chamado de dinâmica ou mecânica. A relação entre força e a aceleração foi dada por Isaac Newton em suas três leis do movimento, que formam o base da física elementar. Embora a formulação da física de Newton tivesse que ser substituída mais tarde, para lidar com o movimento em velocidades comparáveis à velocidade da luz e para o movimento no escala de átomos, é aplicável a situações cotidianas e ainda é a melhor introdução para as leis fundamentais da natureza. O estudo das leis de Newton e suas implicações é muitas vezes chamada de mecânica newtoniana ou clássica.

As partículas aceleram porque sofrem ação de forças. Na ausência de forças, uma partícula não acelera, movendo-se com uma velocidade constante.

Definição 1.1 (Primeira Lei de Newton.) *Considerando um corpo no qual não hã ação de forças. Então, se esse mesmo corpo estiver em repouso, permanecerá em repouso, e se estiver se movendo com velocidade constante, continua a mover-se nessa velocidade.*

1.1.2 Segunda Lei de Newton

Experiencias demonstram que os objetos têm uma propriedade chamada **massa** que mede como o seu movimento é influenciado por forças. A Segunda Lei de Newton é uma relação entre a **força resultante** (F) agindo sobre uma massa m e sua aceleração a.

Definição 1.2 (Segunda Lei de Newton) $\sum F = ma$

A relação acima é uma relação *vetorial*, pelo que em duas dimensões, esta equação implica:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \tag{1}$$

A unidade de força no SI é $kg\ ms^{-2}$, abreviada em newton (N). Deste modo,

$$1\ newton = 1N = 1\ kg\ ms^{-2}$$

1.1.3 Exemplos de Forças

A Terra exerce uma força gravitacional com sentido para baixo em todas as massas perto da sua superfície. Esta força é conhecida como o **peso**, F_g, e a sua magnitude é dada por

$$F_g = mg \tag{2}$$

Uma corda sob tensão exerce uma força nos objetos que estão apensos em cada uma das pontas. As forças estão direcionadas para dentro ao longo do comprimento da corda. A tensão é simbolizada pela letra T.

Uma superfície sólida exerce uma força em qualquer massa com a qual esteja em contacto. De modo geral, a força da superfície terá uma componente perpendicular/normal, denominada **força normal** da superfície. A superfície pode também exercer uma força paralela: a força de fricção.

1.1.4 Terceira Lei de Newton

Esta lei é popularmente enunciada como ”lei da ação-reação”, mas na verdade lida com as forças entre dois objetos.

Definição 1.3 (Terceira Lei de Newton.) *Considerando dois objetos A e B. A força que o objeto A exerce no objeto B é igual e oposta à força que o objeto B exerce no objeto A:* $F_{AB} = -F_{BA}$

1.1.5 Aplicação das Lei de Newton

Uma dica útil apra problemas que envolvem mais do que uma força é desenhar um diagrama que evidencia as massas individuais no problema, juntamento com os vetores que mostram as direções e magnitudes das forças individuais. A estes diagramas é dado o nome de **diagramas de corpo-livre**.

1.1.6 Atrito

Forças que são conhecidas coletivamente como “forças de atrito” estão ao nosso redor na vida diária. Na física elementar, discutimos a força de atrito conforme ela ocorre entre dois objetos cujas superfícies estão em contato e deslizam uma contra a outra. Se, em tal situação, um corpo não se mover enquanto uma força F age sobre ele, então as forças de **atrito estático** opõem-se à força F, pelo que a força resultante será zero. Empiricamente, descobre-se que esta força pode ter um valor máximo dado por:

$$f_s^{max} = \mu_s N$$

onde μ_s é o **coeficiente de atrito estático** para as duas superfícies e N é a força normal entre as duas. Se um objeto está em movimento em relação a outro, então existe uma força de **atrito cinético** entre os dois objetos. A direção desta força é tal que se opõe ao movimento e a sua magnitude é dada por

$$f_k = \mu_k N$$

onde N é a força normal entre os objetos e μ_k o **coeficiente de atrito cinético** para as duas superfícies.

1.1.7 Revisitando o Movimento Circular Uniforme

Como visto em capítulos anteriores, quand oum objeto está em movimento circular uniforme, movendo-se em forma de círculo de raio r com velocidade v, a aceleração (centrípeta) é dirigida para o centro do círculo e tem magnitude

$$a_c = \frac{v^2}{r} \tag{3}$$

Desta maneira, da Segunda Lei de Newton, a força resultante que atua neste objeto tem também de ser direcionada para o centro da trajetória e ter magnitude

$$F_c = \frac{mv^2}{r} \tag{4}$$

Tal força é chamada **força centrípeta**.

1.1.8 Lei da Gravitação Universal

A força gravítica é uma das forças fundamentais da natureza. Todas as massas exercem uma força gravitacional atrativa umas sobre as outras, mas para a maioria dos objetos a força é tão pequena que podemos ignorá-la.

A Lei da Gravitação Universal diz que para duas massas m_1 e m_2, separadas por uma distância r, a magnitude da força gravitacional é

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad onde \qquad G = 6.67 \times 10^{-11}\frac{N \cdot m^2}{kg^2} \tag{5}$$

2 Trabalho, Energia Cinética e Energia Potencial

2.1 Conteúdo Importante

2.1.1 Energia Cinética

Para um objeto com massa m e velocidade v, a energia cinética está definida como

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{6}$$

A energia cinética é um escalar (tem magnitude mas não direção); é sempre um número positivo; e tem unidades do SI de $kg \cdot m^2 s^{-2}$. Esta combinação é também conhecida como **joule**:

$$1\ joule = 1J = 1\ kg \cdot m^2 s^{-2} \tag{7}$$

2.1.2 Trabalho

Quando um objeto se move enquanto um força é exercida sobre ele, então há **trabalho** a ser feito no objeto pela força. Se um objeto efetuar um deslocamento d enquanto uma *força constante* **F** atua nele, a força faz uma quantidade de trabalho igual a

$$W = F \cdot d = Fdcos\phi$$

onde ϕ é o ângulo entre **d** e **F**. O trabalho é também uma grandeza escalar cujas unidades são $N \cdot m$.

O trabalho pode ser negativo; isto acontece quando o ângulo entre a força e o deslocamento é maior que 90°. Também pode ser *zero*; isto acontece se $\phi = 90°$. Para que exista trabalho, a força tem de ter uma componente ao longo (ou oposta) à direção do deslocamento. Se várias forças (constantes) atuarem na massa enquanto se move ao longo de um deslocamento **d**, podemos falar do **trabalho resultante** feito pelas forças,

$$\begin{aligned} W_R &= F_1 \cdot d + F_2 \cdot d + F_3 \cdot d ... + F_n \cdot d \\ &= (\sum F) \cdot d \\ &= F_R \cdot d \end{aligned}$$

Se a força que atua sobre o objeto não é constante enquanto o objeto se move, então devemos calcular um integral para encontrar o trabalho realizado. Supondo que o objeto se mova ao longo de uma linha reta (digamos, ao longo do eixo x, de x_i a x_f) enquanto uma força cujo componente x é $F_x(x)$ atua sobre ele. (Ou seja, conhecemos a força F_x como uma função de x.) Então, o trabalho realizado é

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)dx \tag{8}$$

Finalmente, podemos dar a expressão general para o trabalho feito por uma força. Se um objeto se move de $r_i = x_i i + y_i j + z_i k$ a $r_f = x_f i + y_f j + z_f k$ enquanto a força $F(r)$ atua sobre ele, o trabalho feito é:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(r)dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y(r)dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z(r)dz \tag{9}$$

onde os integrais são calculados ao longo do caminho traçado pelo objeto. Esta expressão pode ser abreviada por

$$W = \int_{r_i}^{r_f} F \cdot dr \tag{10}$$

A gravidade funciona em objetos que se movem verticalmente. Pode-se mostrar que se a altura de um objeto mudou numa quantidade Δy, então a gravidade fez uma quantidade de trabalho igual a

$$W_g = -mg\Delta y \tag{11}$$

sem qualquer influência do deslocamento horizontal. Observe-se o sinal de menos aqui; se o objeto aumenta em altura, moveu-se de forma oposta à força da gravidade.

2.1.3 Força da Mola

O exemplo mais famoso de uma força cujo valor depende da posição é a força da mola, que descreve a força exercida sobre um objeto até o final de uma **mola ideal**. Um mola ideal irá puxar o objeto preso à sua extremidade com uma força proporcional à quantidade pela qual é esticada; irá empurrar para fora o objeto anexado a ela com um força proporcional à quantidade de compressão. Se descrevermos o movimento no final da mola com a coordenada x e colocar-mos a origem do eixo dos x no sítio onde a mola não exerce qualquer força (a dita posição de equilíbrio), então a força da mola é dada por

$$F_x = -kx \tag{12}$$

Aqui, k é um número que é diferente para cada mola ideal e é uma medida que se relaciona com a sua "rigidez"(capacidade de compressão/expansão). A sua unidade é $Nm^{-1} = kgs^{-2}$. Esta equação é conhecida como a **Lei de Hooke**. Esta lei dá uma descrição decente do comportamento de molas reais, desde que elas possam oscilar sobre suas posições de equilíbrio e não são esticadas demasiado.

O trabalho feito por uma força num objeto anexo ao seu, que se move de x_i até x_f, pode ser calculado por

$$W_{mola} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \tag{13}$$

2.1.4 O Teorema do Trabalho-Energia Cinética

Pode-se mostrar que conforme uma partícula se move do ponto r_i para r_f, a mudança na energia cinética do objeto é igual ao trabalho resultante feito nele:

$$\Delta K = K_f - K_i = W_R \tag{14}$$

2.1.5 Potência

Em certas aplicações, estamos interessados na taxa à qual trabalho é realizado por uma força. Se um quantidade de trabalho W é feito num tempo Δt, então dizemos que a **potência média** $\bar{P}$ devido à força é

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t} \tag{15}$$

No limite em que W e Δt são muito pequenos, temos a **potência instantânea** P:

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{16}$$

A unidade do SI de potência é o **watt**, definido por:

$$1\ watt = 1\ W = 1\ jS^{-1} = 1\ ks \cdot m^2 \cdot s^{-3} \tag{17}$$

Pode-se mostrar que se uma força F atua sobre uma partícula que se move com velocidade v, então a taxa instantânea na qual o trabalho é feito na partícula é

$$P = F \cdot v = Fv\cos(\phi) \tag{18}$$

onde ϕ é o angulo entre as direções de F e v.

2.1.6 Forças Conservativas

O trabalho feito num objeto pela força da gravidade não depende do caminho percorrido para ir de uma posição a outra. O mesmo é verdade para a força de uma mola. Em ambos os casos, precisamos de saber as coordenadas inicias e finais para computer W, o trabalho feito por essa força. Esta situação também ocorre com a lei geral para a força da gravidade (ver Eq. 5). Esta situação não se verifica nas forças de atrito vistas anteriormente. As forças de atrito realizam trabalho sobre massas que se movem, mas para calcular o trabalho feito por essas forças, precisamos de saber o *como* as massas foram de um ponto a outro. Se o trabalho resultante feito por uma força não depender do caminho percorrido entre dois pontos, dizemos que a força é uma **força conservativa**. Para estas forças, também se verifica que o trabalho resultante feito numa partícula que se move em torno de um caminho fechado é *zero*.

2.1.7 Energia Potencial

Para uma força conservativa, é possível encontrar uma função de posição chamada de potencial energia, escrita $U(r)$, da qual podemos encontrar o trabalho realizado pela força. Supondo que uma partícula se move de r_i a r_f. Então, o trabalho feito na partícula por uma força conservativa está relacionado com a correspondente função de energia potencial dada por:

$$W_{r_i \to r_f} = -\Delta U = U(r_i) - U(r_f) \tag{19}$$

A unidade do SI de U é o joules.

Foram encontradas duas forças conservativas até agora. A mais simples é a força da gravidade perto da superfície terrestre, nomeadamente $-mg\Delta y$ para uma massa m, onde o eixo y aponta para cima. Para esta força, pode-se mostrar que a energia potencial é

$$U_g = mgy \tag{20}$$

Nesta equação, é *arbitrário* onde colocamos a origem do eixo y, mas uma vez feita essa escolha, terá de ser mantida. A outra força conservativa estudada é a força da mola. Uma mola com constante k que é estendida desde a sua posição de equilíbrio por uma quantidade x tem energia potencial dada por

$$U_{mola} = \frac{1}{2}kx^2 \tag{21}$$

2.1.8 Conservação da Energia Mecânica

Se separarmos as forças do mundo em forças conservativas e não conservativas, então o Teorema do Trabalho-Energia Cinética diz que

$$W = W_{conservativa} + W_{nao\ conservativa} = \Delta K \tag{22}$$

Da Equação 19, o trabalho feito por forças *conservativas* pode ser escrito como

$$W_{conservativas} = -\Delta U$$

onde U é a soma de *todos* os tipos de energia potencial. Substituindo o resultado acima na Equação 19, temos

$$-\Delta U + W_{não\ conservativas} = \Delta K$$

Reorganizando a equação acima, obtemos o **teorema geral da Conservação de Energia Mecânica**:

$$\Delta K + \Delta U = W_{não\ conservativas} \tag{23}$$

Define-se a **energia total do sistema** E como a suma da energia cinética e potencial de todos os seus objetos constituintes:

$$E = K + U \tag{24}$$

Então, a Equação 23 pode ser escrita

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = W_{não\ conservativas} \tag{25}$$

Por palavras, esta equação diz que a energia mecânica total muda com a quantidade de trabalho feito pelas forças não conservativas.

A maioria dos problemas apresentados são situações onde as forças que atuam nos objetos que se movem são apenas forças conservativas; vagamente falando, isto quer dizer que não há atrito ou que o atrito é negligível. Se o caso acima de verificar, a Equação 25 pode ser escrita numa forma mais simples:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0 \tag{26}$$

Esta equação pode ser escrita:

$$K_i + U_i = K_f + U_f \qquad ou \qquad E_i = E_f$$

Noutras palavras, para aqueles casos em que podemos ignorar as forças de atrito, se somarmos todos os tipos de energia para a posição inicial da partícula, é igual à soma de todos os tipos de energia para a posição final da partícula. Nesse caso, a quantidade de energia mecânica continua o mesmo... é conservada.

A conservação de energia é útil em problemas onde só precisamos de saber as posições ou velocidades, mas não o *tempo* do movimento.

2.1.9 Trabalho de Forças Não-Conservativas

Quando, no sistema, atuam forças de atrito, temos de voltar à Equação 25. A mudança na energia mecânica total é igual ao trabalho feit opelas forças não conservativas:

$$\Delta E = E_f - E_i = W_{não\ conservativas} \tag{27}$$

3 Momento Linear e Colisões

3.1 Conteúdo Importante

3.1.1 Momento Linear

O **momento linear** de uma partícula com massa m que se move com uma velocidade v é definido por

$$p = mv \tag{28}$$

O momento linear é um vetor. As unidades do SI para p são $kg \cdot m \cdot s^{-1}$. O momento de uma partícula está relacionado com a força resultante nessa partícula de uma maneira simples; tendo em conta que a massa de uma partícula permanece constante, se derivar-mos em ordem ao tempo, descobrimos que

$$\frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma = F_R$$

pelo que

$$F_R = \frac{dp}{dt} \tag{29}$$

3.1.2 Impulso, Força Média

Quando uma partícula se move livremente, interage com outro sistema por um (breve) período e, depois, move-se livremente novamente, tem uma mudança definida no momento; definimos esta mudança como o impulso I das forças de interação:

$$I = p_f - p_i = \Delta p \tag{30}$$

O impulso é um vetor e tem as mesmas unidades que o momento linear, $kg \cdot m \cdot s^{-1}$.

Integrando a Equação 29, podemos mostrar que:

$$I = \int_{t_i}^{t_f} F dt = \Delta p$$

Podemos definir a **força média** que age sob uma partícula durante um intervalo de tempo Δt. Esta é:

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{I}{\Delta t}$$

3.1.3 Conservação do Momento Linear

O momento linear é uma quantidade útil para os casos em que temos algumas partículas (objetos) que interagem entre si, mas não com o resto do mundo. Um sistema desse tipo é chamado um **sistema isolado**.

Muitas vezes temos motivos para estudar sistemas onde algumas partículas interagem umas com as outras muito rapidamente, com forças que são fortes em comparação com as outras forças do mundo que podem experiênciar. Nessas situações, e por esse breve período de tempo, podemos tratar as partículas como se estivessem isoladas.

Podemos mostrar que quando duas partículas interagem *apenas* consigo mesmas (i.e. estão isoladas) então o seu momento total mantém-se constante:

$$p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f} \tag{31}$$

ou, em termos das suas massas e velocidades,

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{32}$$

ou, abreviando, $p_1 + p_2 = P$ (momento total), isto é: $P_i = P_f$. É importante perceber que a Equação 31 é uma equação *vetorial*; diz-nos que o momento total da componente x é conservada e que o total da componente y é, igualmente, conservada.

3.1.4 Colisões

Quando falamos sobre uma colisão na física (entre duas partículas, digamos), queremos dizer que duas partículas movem-se livremente pelo espaço até se aproximarem uma da outra; então, por um curto período de tempo, elas exercem fortes forças uma sobre a outra até que se separem e movam-se, novamente, livremente.

Para tal evento, as duas partículas têm momentos bem definidos p_{1i} e p_{2i} antes do evento de colisão e p_{1f} e p_{2f} posteriormente. Mas a soma dos momentos antes e depois da colisão é conservada, conforme escrito na Equação 31.

Apesar do momento total ser conservado para um sistema isolado de partículas que colidem, a energia mecânica pode ou não ser conservada. Se a energia mecânica for a mesma antes e depois da colisão, dizemos que a colisão é **elástica**. Caso contrário, diz-se que a colisão é **inelástica**.

Se dois objetos colidirem, ficarem juntos e moverem-se como uma massa combinada, diz-se que aconteceu uma **colisão perfeitamente inelástica**. Pode-se mostrar que em tal colisão mais energia cinética é perdida do que se os objetos ressaltassem um no outro e se afastassem separadamente.

Quando duas partículas sofrem uma colisão *elástica*, sabemos que

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2$$

No caso especial de uma colisão elástica unidimensional entre as massas m_1 e m_2, podemos relacionar as velocidades finais às velocidades iniciais. O resultado é

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2i} \tag{33}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{2i} \tag{34}$$

Este resultado pode ser útil na resolução de um problema onde ocorre tal colisão, mas não é um equação fundamental. Portanto, não é de útil memorização.

3.1.5 Centro de Massa

Para um sistema de partículas, há um ponto especial no espaço conhecido como o **centro de massa** que tem uma enorme importância na descrição do movimento do sistema. Este ponto é uma média ponderada das posições de todos os pontos de massa.

Se as particulas de um sistema têm massas m_1, m_2, ..., m_N, com massa total

$$\sum_i^N = m_1 + m_2 + ... + m_N \equiv M$$

e respetivas posições r_1, r_2, ..., r_N, então o centro de massa r_{CM} é

$$r_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i^N m_i r_i \tag{35}$$

o que quer dizer que as coordenadas x, y e z do centro de massa são

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i^N m_i x_i \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i^N m_i y_i \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i^N m_i z_i \tag{36}$$

Para uma distribuição contínua de massa, a definição de r_{CM} é dado pelo integral sobre os elementos de massa do objeto:

$$r_{CM} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm \tag{37}$$

pelo que as coordenadas x, y e z do centro de massa são

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int x dm \qquad y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm \qquad z_{CM} = \frac{1}{M} \int z dm \tag{38}$$

Quando as partículas de um sistema estão em movimento, então, em geral, o seu centro de massa está também em movimento. A velocidade do centro de massa é uma semelhante média ponderada das velocidades individuais:

$$v_{CM} = \frac{dr_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i}^{N} m_i v_i \tag{39}$$

Em geral, o centro de massa vai acelerar; a sua aceleração é dada por

$$a_{CM} = \frac{dv_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i}^{N} m_i a_i \tag{40}$$

Se $\mathbf{P}$ é o momento total do sistema e M é a massa total do sistema, então o movimento do centro de massa está relacionado com $\mathbf{P}$ por:

$$v_{CM} = \frac{P}{M} \qquad e \qquad a_{CM} = \frac{1}{M} \frac{dP}{dt}$$

3.1.6 Movimento de um Sistema de Partículas

Um sistema de muitas partículas (ou um objeto estendido) em geral tem um movimento para o qual o descrição é muito complicada, mas é possível fazer uma declaração simples sobre o movimento de seu centro de massa. Cada uma das partículas do sistema pode sentir forças de outras partículas do sistema, mas também pode sentir uma força resultante do ambiente (externo); vamos denotar essa força por F_{ext}. Descobrimos que quando somamos todas as forças externos agindo sobre todas as partículas de um sistema, dá a aceleração do *centro de massa* de acordo com:

$$\sum_{i}^{N} F_{ext,i} = M a_{CM} = \frac{dP}{dt} \tag{41}$$

Aqui, M é a massa total do sistema; $F_{ext,i}$ é a força externa que atua na partícula i. Em palavras, podemos expressar o resultado acima da seguinte forma: *para um sistema de partículas, o centro de massa move-se como se fosse uma única partícula de massa M movendo-se sob a influência da soma das forças externas.*