UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
PRIMER CLAUSTRO UNIVERSITARIO DE COLOMBIA
SECCIONAL TUNJA

VIGILADA MINEDUCACIÓN - SNIES 1732

TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

Teoría de la probabilidad

Incertidumbre: concepto clave dentro del contexto de reconocimiento de patrones y aprendizaje automático. Se ocasiona porque los datos son finitos y porque existe ruido en las mediciones.

La Teoría de la Probabilidad y la Teoría de la Decisión proporcionan herramientas conceptuales para el manejo de la incertidumbre y . permiten obtener predicciones óptimas a partir de un conjunto de datos, incluso si este está incompleto o ambiguo.

Teoría de la probabilidad

Ejemplo 1:

Se elige al azar primero una caja y luego, de la caja seleccionada se escoge al azar una fruta. Se observa y se retorna a su caja de origen.

Teoría de la probabilidad

Ejemplo 1:

La caja representa una variable aleatoria, que se puede denotar con C. Esta variable ¿cuáles posibles valores puede tomar?

1 o 2

El tipo de fruta también será una variable, que llamaremos F. ¿Qué valores puede tomar esta variable?

Manzana o naranja.

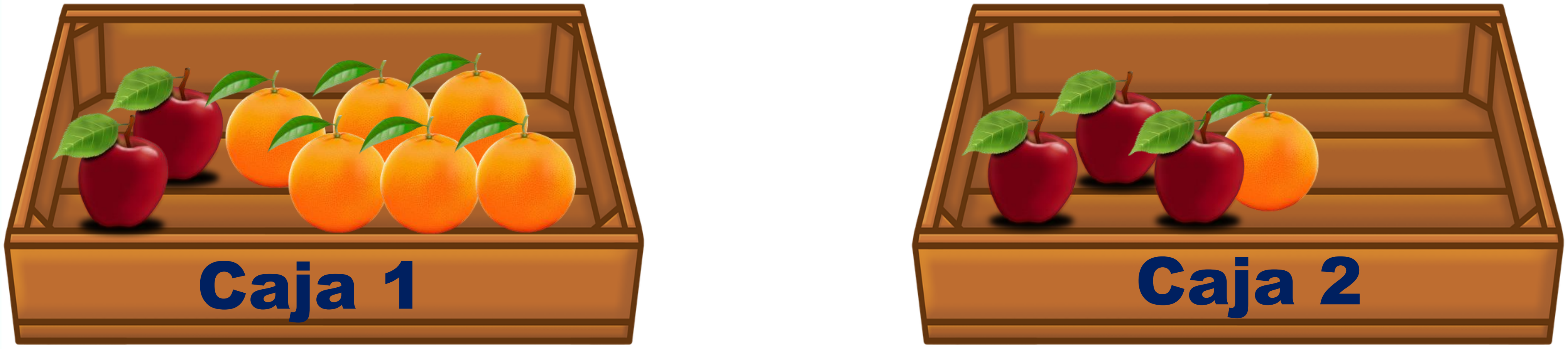
Teoría de la probabilidad

¿Qué es probabilidad?

Se puede definir como una fracción de veces que ocurre un evento del total de ensayos que se realicen, cuando el límite de ensayos tiende a infinito.

Teoría de la probabilidad

Ejemplo 1:



¿Cuál es la probabilidad de escoger la caja 1?

$P(C=1) = \frac{1}{2}$

Nota: las probabilidades siempre están en el intervalo [0,1]

Además, si se incluyen todos los eventos, la suma de probabilidades debe ser 1.

Teoría de la probabilidad

Ejemplo 1:

Complete la tabla con las probabilidades respectivas:

Caja	Manzana	Naranja
1		
2		

Teoría de la probabilidad

Ejemplo 1:

Complete la tabla con las probabilidades respectivas p(F/C):

Caja	Manzana	Naranja
1	2/8 = 1/4	6/8 = 3/4
2	3/4	1/4

Teoría de la probabilidad

Ejemplo 1:

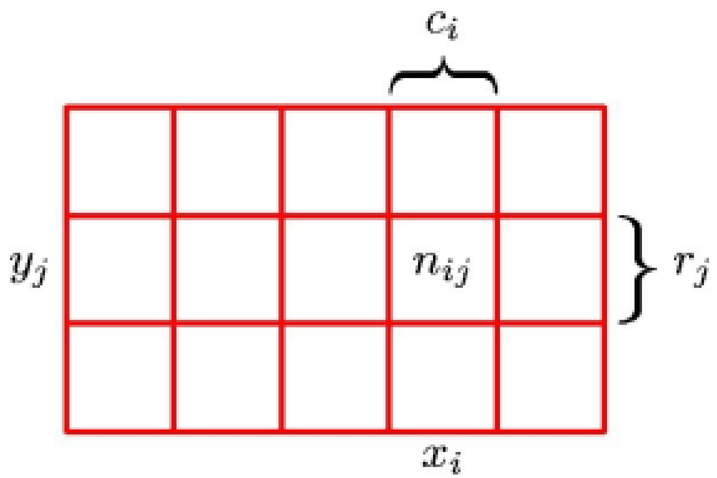
En el análisis de probabilidad pueden surgir varias preguntas, tales como:

- ¿Cuál es la probabilidad de escoger una naranja? **Probabilidad Marginal**: P(F=naranja)
- ¿Cuál es la probabilidad de que esa naranja sea de la caja 1? **Probabilidad condicional**: P(C=1|F=naranja)
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener una naranja y la caja 1? **Probabilidad conjunta:** P(C=1,F=naranja)

¡Siempre hacia lo alto!

Teoría de la probabilidad: regla de la suma

Ejemplo 1:



Considere 2 variables aleatorias:

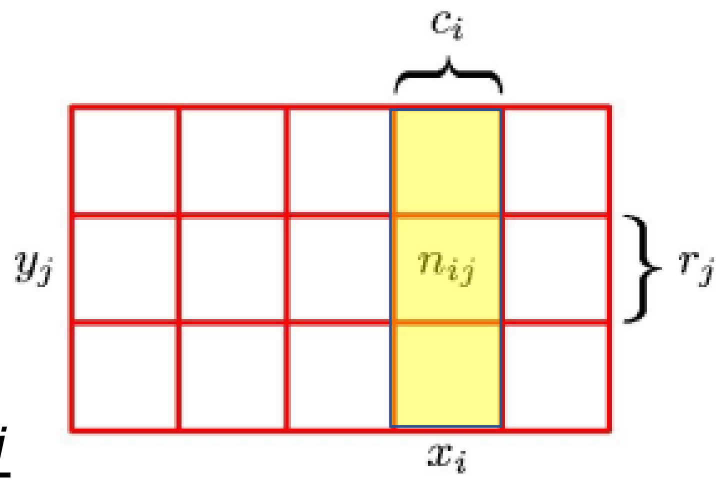
- X puede tomar los valores de: x_i, i=1,…, M
- Y puede tomar los valores de: y_j, j=1,…, L
- N ensayos que muestrean tanto a X como a Y
- Número de ensayos con X= x_i y Y=y_j es n_{ij}

$$Probabilidad\ conjunta\ \ p(X = x_i, Y = y_j) = \frac{n_{ij}}{N}$$

$$Probabilidad\ marginal\ \ p(X = x_i) = \frac{c_i}{N}$$

Teoría de la probabilidad: regla de la suma

Ejemplo 1:



$$Probabilidad\ marginal\ \ p(X = x_i) = \frac{c_i}{N}$$

$$Probabilidad\ conjunta\ \ p(X = x_i, Y = y_j) = \frac{n_{ij}}{N}$$

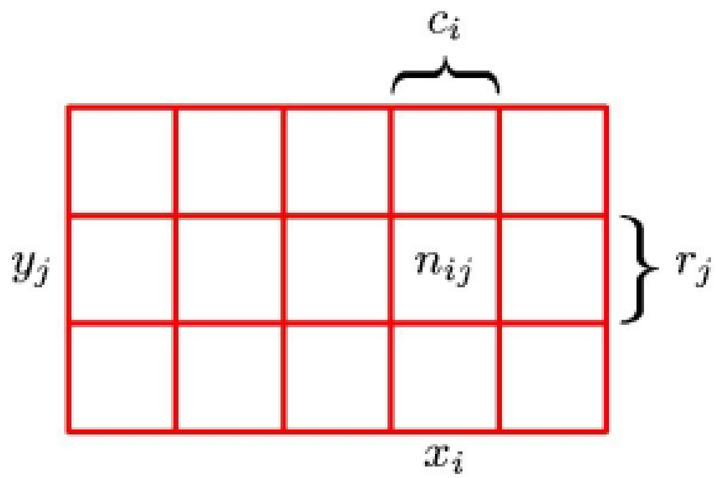
$$Dado\ que\ c_i = \sum_j n_{ij},$$

$$p(X = x_i) = \sum_{j=1}^{L} p(X = x_i, Y = y_j)$$

Probabilidad Marginal

Teoría de la probabilidad: regla del producto

Ejemplo 1:



- Considera solo las instancias donde $X=x_i$
- La fracción de las instancias donde $Y=y_j$ se puede escribir como $P(Y=y_j \mid X=x_i)$, la cual se denomina probabilidad condicional.
- La relación entre la probabilidad condicional y conjunta es:

$$p(Y=y_j, X=x_i)=\frac{n_{ij}}{c_i}$$

$$p(X=x_i, Y=y_j)=\frac{n_{ij}}{N}=\frac{n_{ij}}{c_i}\cdot\frac{c_i}{N}=p(Y=y_j, X=x_i)\,p(X=x_i)$$

Teoría de la probabilidad

Es importante distinguir entre la variable aleatoria y los valores que puede tomar esa variable.

$p(C = 1)$

Mejor notación y más simple:

$p(C)$ Denota la distribución de la variable C.

p(1) Denota la distribución evaluada en un valor particular 1.

Reglas de probabilidad

Regla de la suma:

$$p(X) = \sum_Y p(X,Y)$$

Regla del producto:

$$p(X,Y) = p(Y|X)p(X)$$

Teorema de Bayes

A partir de la regla del producto, y teniendo en cuenta la propiedad de simetría $p(X,Y) = p(Y,X)$, podemos inferir la siguiente relación:

$$p(Y|X) = \frac{p(X|Y)p(Y)}{p(X)}$$

Teorema de Bayes

Usando la regla de la suma, el denominador se puede expresar como:

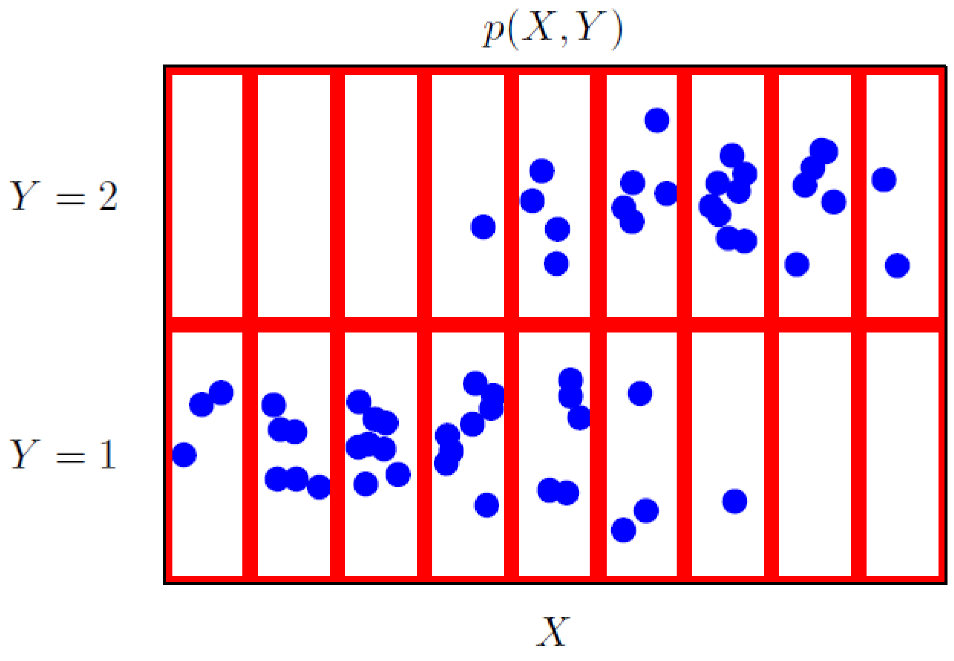
$$p(X) = \sum_{Y} p(X|Y)p(Y)$$

Constante de normalización que asegura que la suma del condicional de probabilidad sobre el término de la izquierda sea 1

Teoría de la probabilidad

Ejemplo 2:

Se tiene una muestra de 60 datos (N)

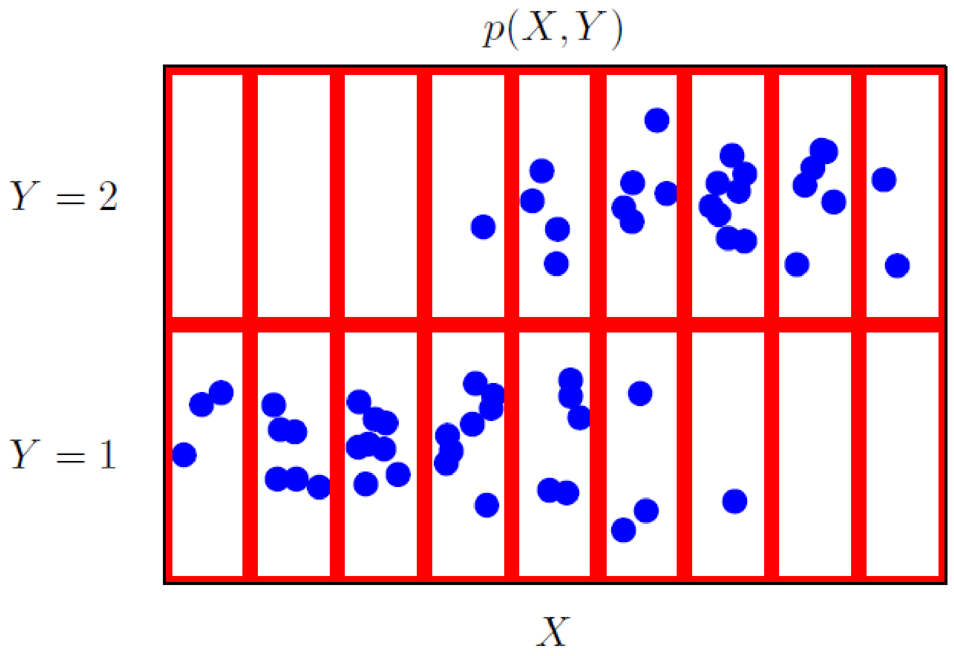


- ¿Cuántos valores posibles tiene X? ¿Cuántos Y?

Imágenes tomadas de: Bishop, C. (2006). Pattern recognition and Machine Learning

Teoría de la probabilidad

Ejemplo 2:
Se tiene una muestra de 60 datos (N)



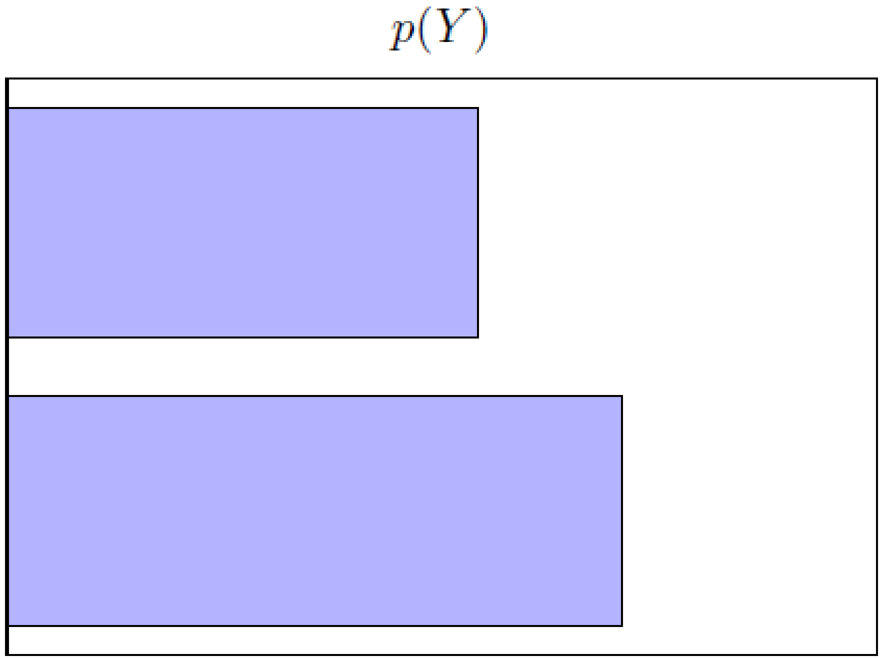
- ¿Cuántos valores hay en Y=1?, ¿Cuántos en Y=2?
- ¿Cuántos valores hay en X=1, .. X=9?

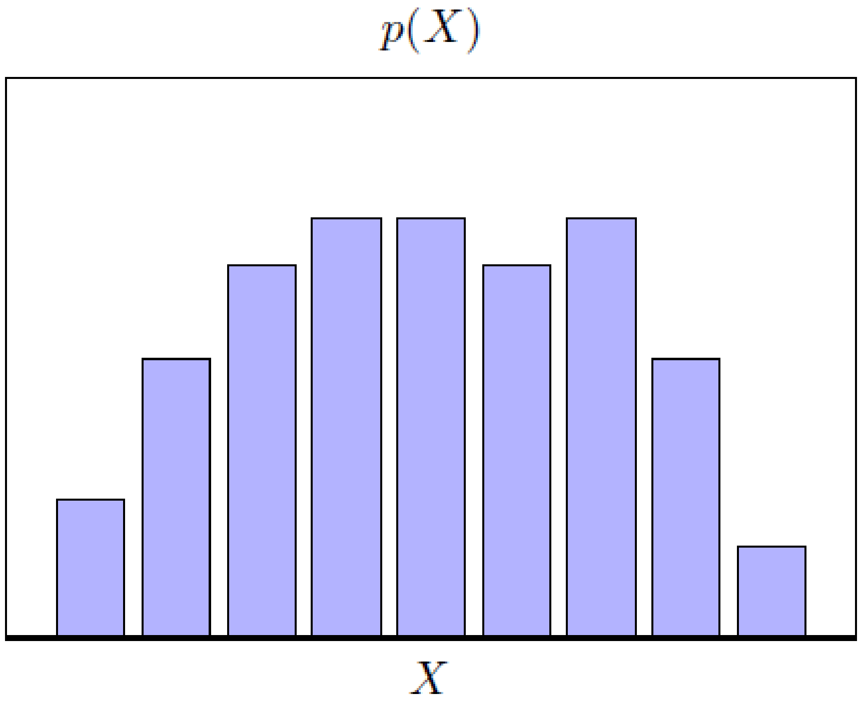
Imágenes tomadas de: Bishop, C. (2006). Pattern recognition and Machine Learning

Teoría de la probabilidad

Ejemplo 2:

Se tiene una muestra de 60 datos (N)



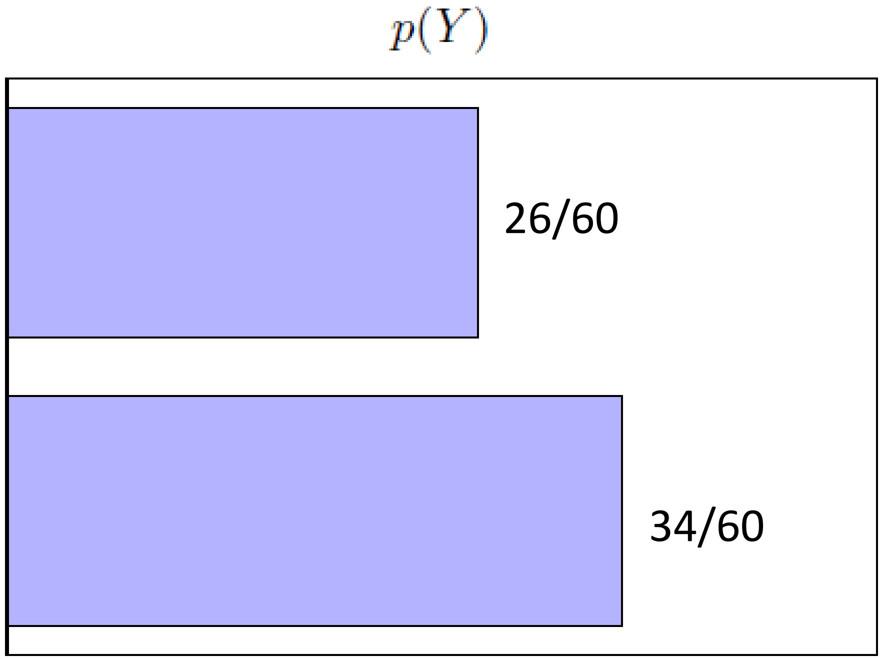


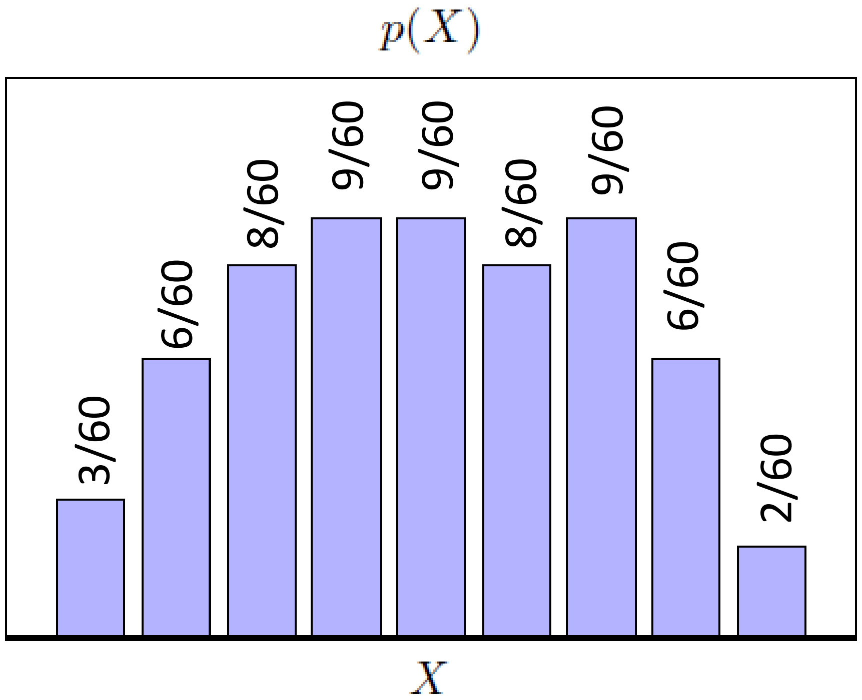
Imágenes tomadas de: Bishop, C. (2006). Pattern recognition and Machine Learning

¡Siempre hacia lo alto!

Teoría de la probabilidad

Ejemplo 2:
Se tiene una muestra de 60 datos (N)



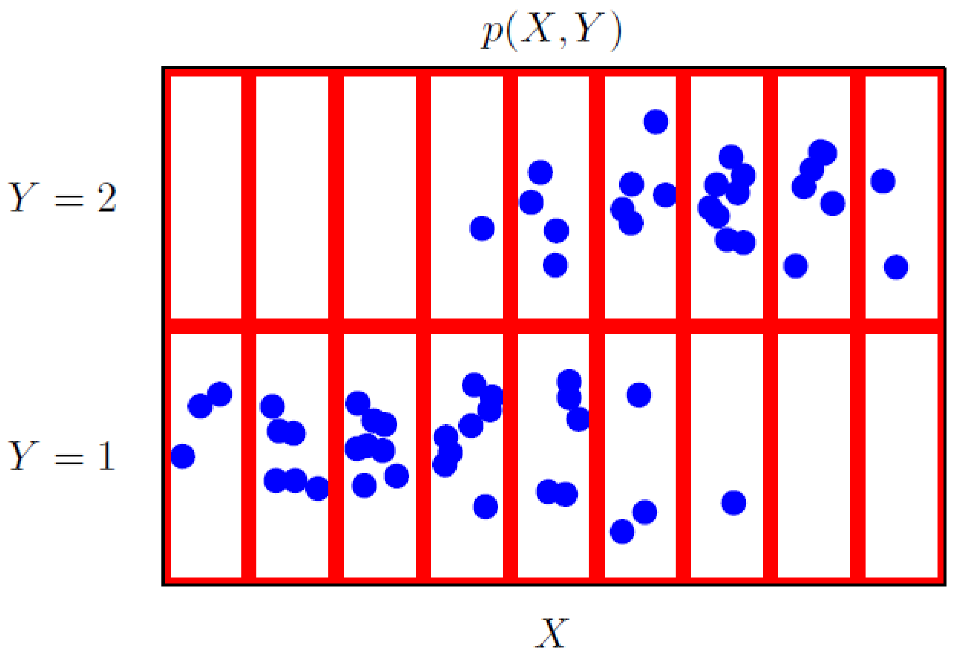


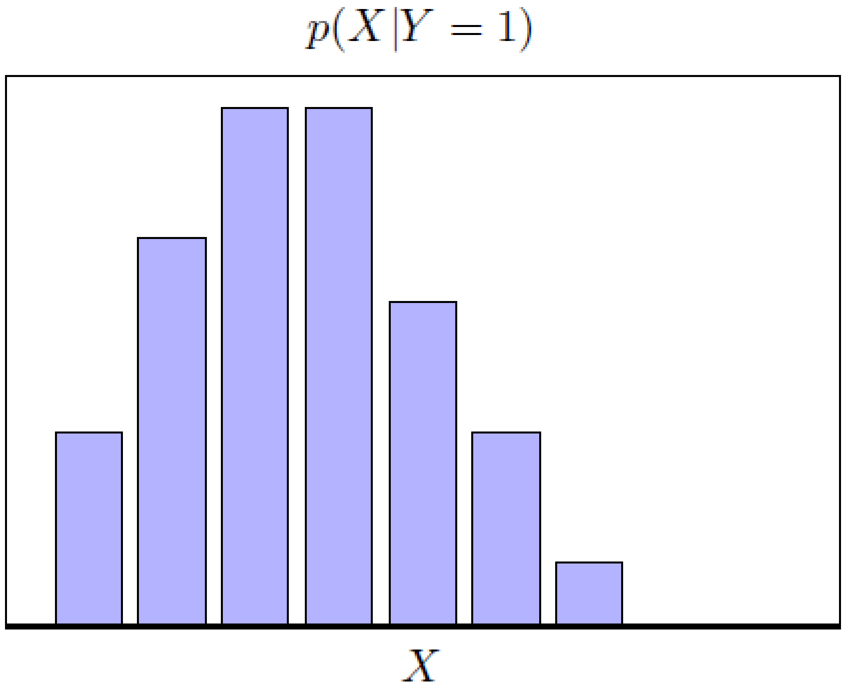
Imágenes tomadas de: Bishop, C. (2006). Pattern recognition and Machine Learning

Teoría de la probabilidad

Ejemplo 2:

Se tiene una muestra de 60 datos (N)





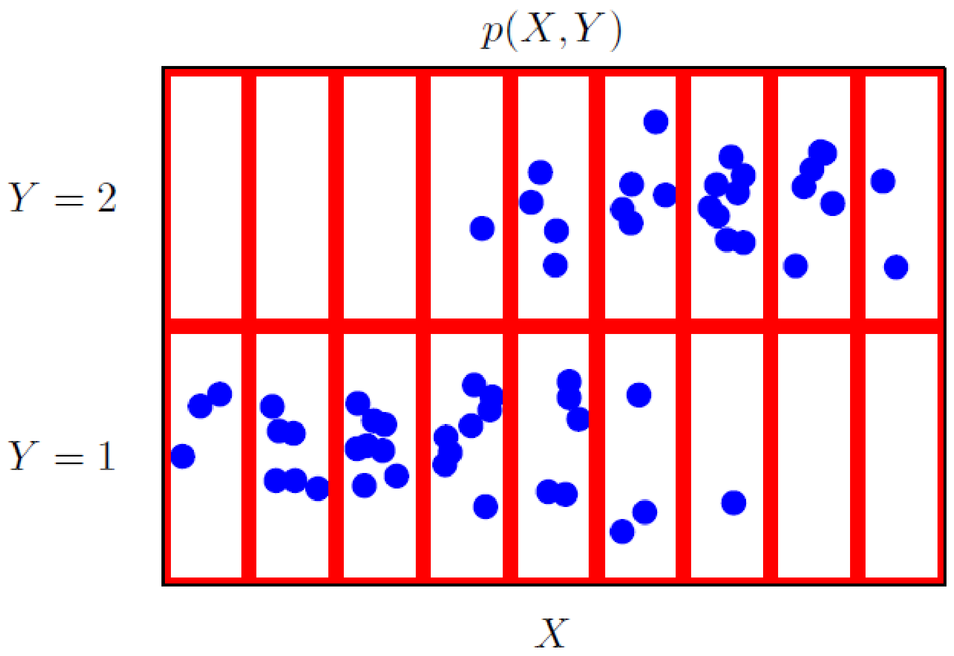
Imágenes tomadas de: Bishop, C. (2006). Pattern recognition and Machine Learning

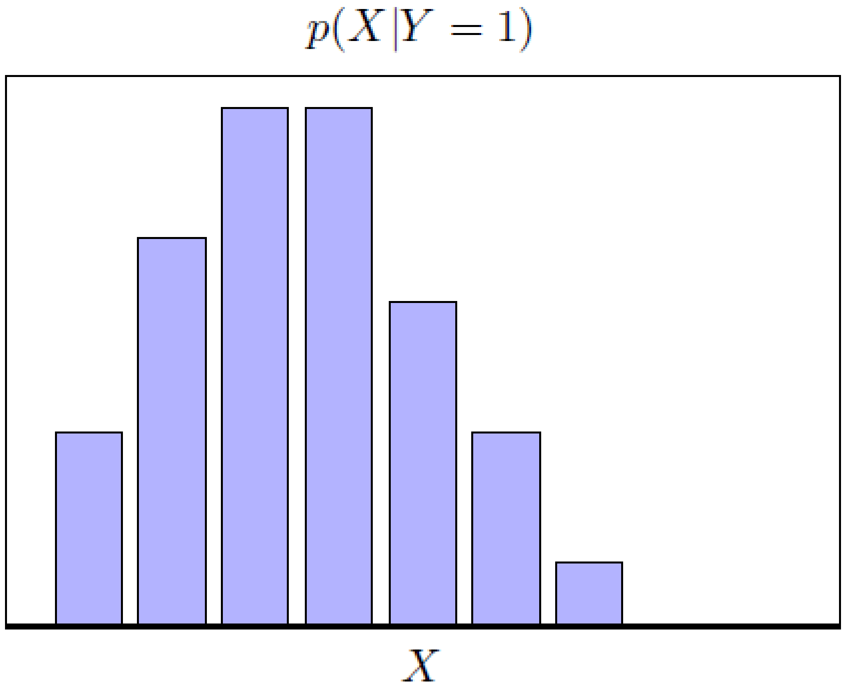
Teoría de la probabilidad

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejemplo 2:

Se tiene una muestra de 60 datos (N)





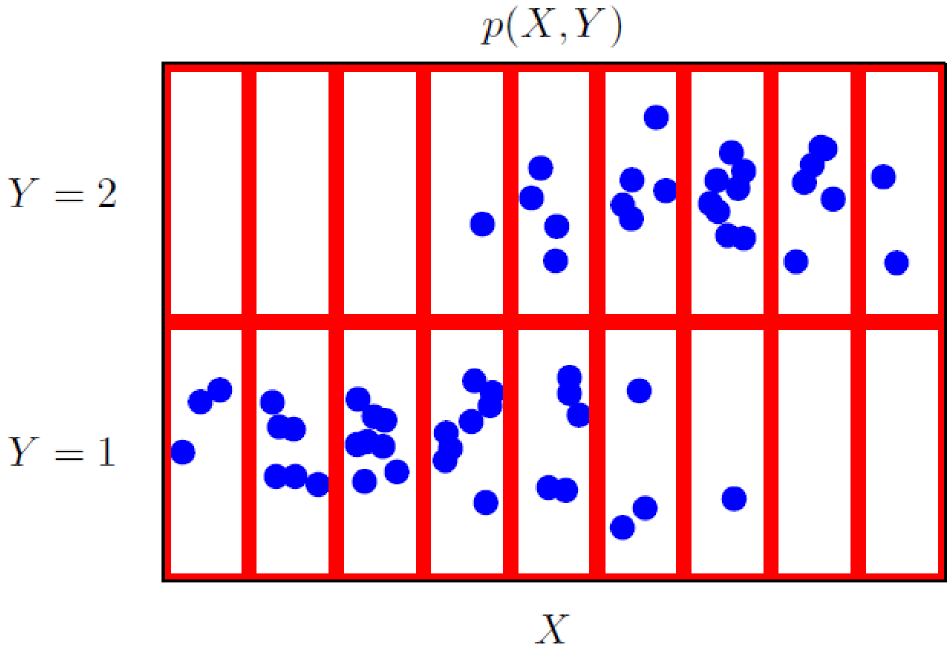
Imágenes tomadas de: Bishop, C. (2006). Pattern recognition and Machine Learning

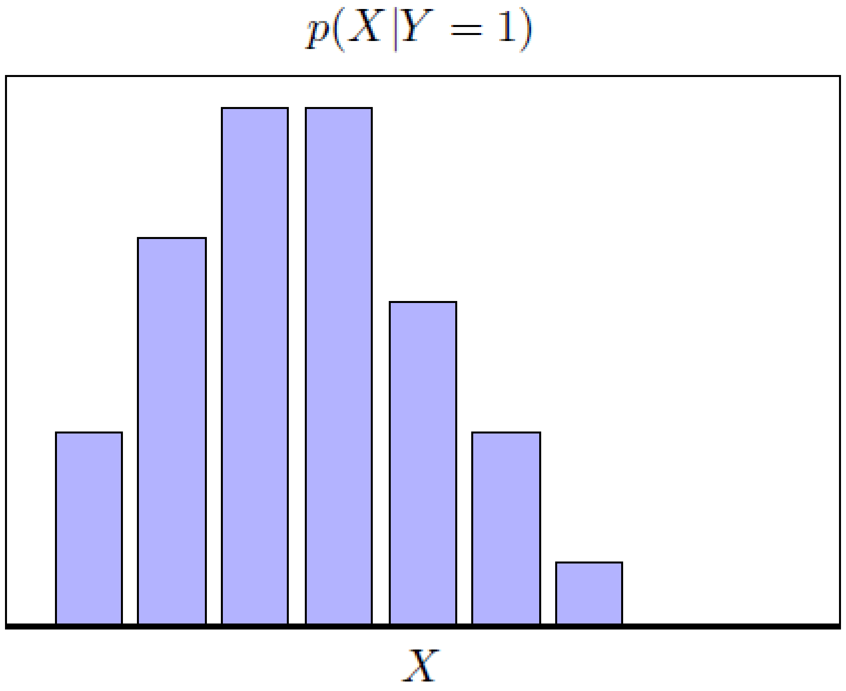
Teoría de la probabilidad

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejemplo 2:

Se tiene una muestra de 60 datos (N)





$P(y=1) =$

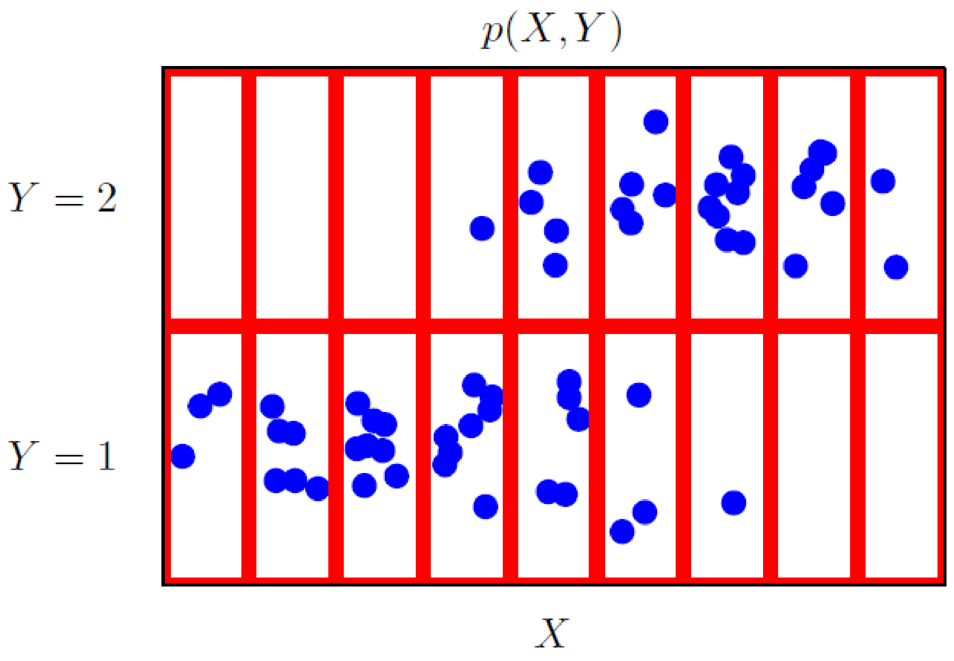
Imágenes tomadas de: Bishop, C. (2006). Pattern recognition and Machine Learning

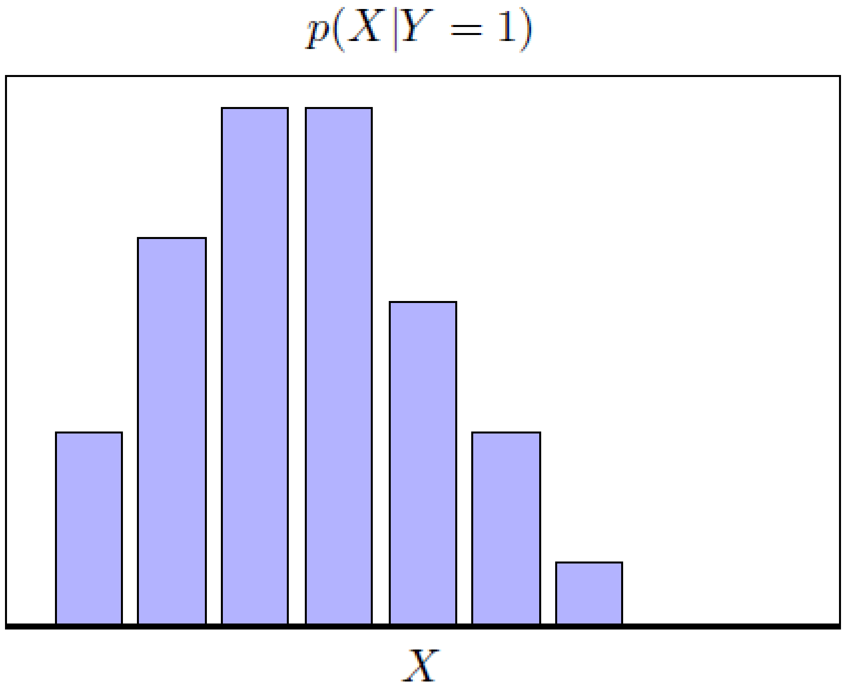
¡Siempre hacia lo alto!

Teoría de la probabilidad

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejemplo 2:
Se tiene una muestra de 60 datos (N)





$P(y=1) = 34/60$

$P(x=1 \cap y=1) =$

Imágenes tomadas de: Bishop, C. (2006). Pattern recognition and Machine Learning

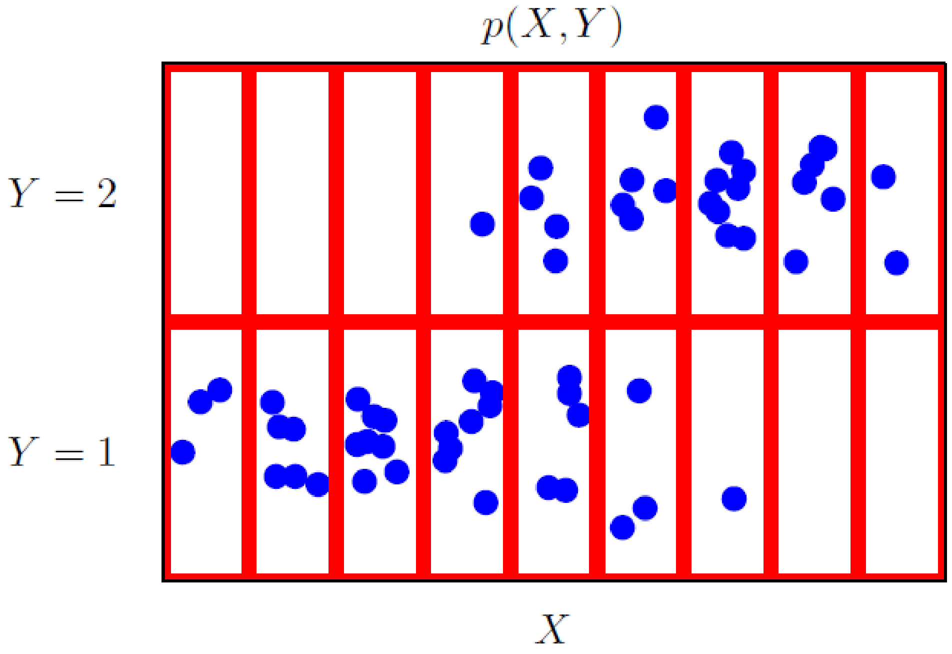
¡Siempre hacia lo alto!

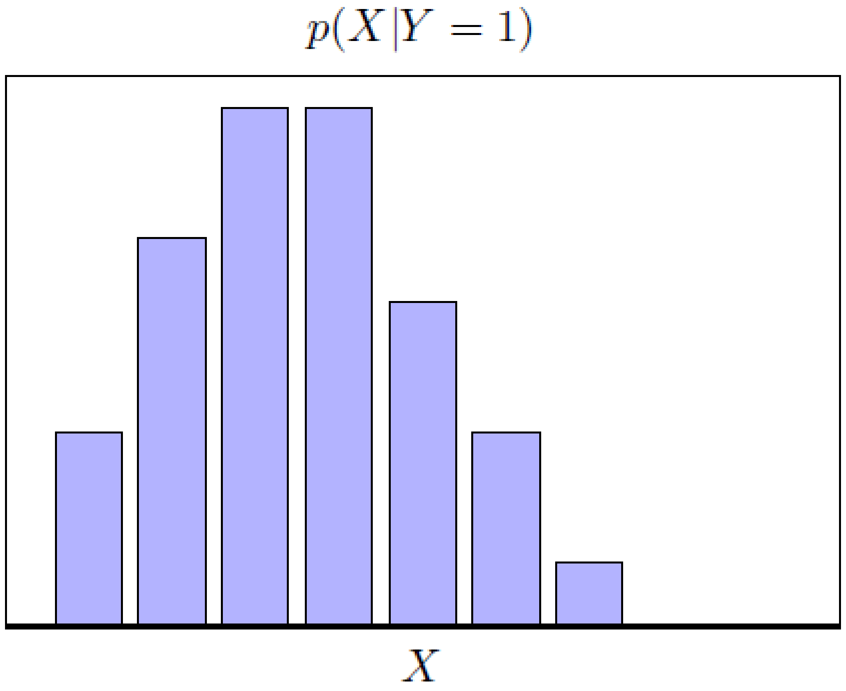
Teoría de la probabilidad

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{\cancel{60}}}{\frac{34}{\cancel{60}}}$$

Ejemplo 2:

Se tiene una muestra de 60 datos (N)





$P(y=1) = 34/60$

$P(X=1 \cap y=1) = 3/60$

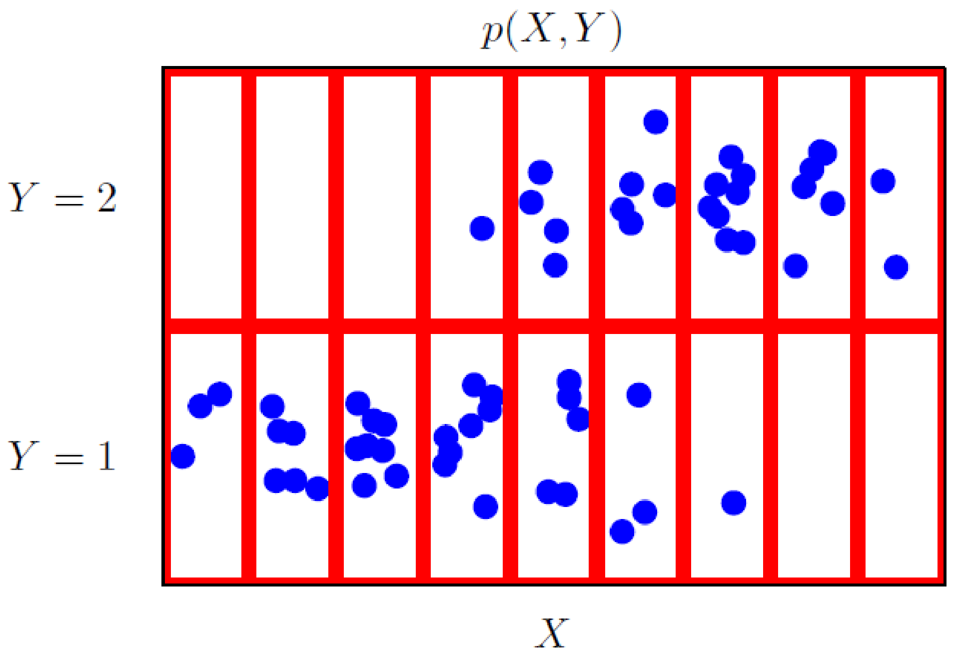
Imágenes tomadas de: Bishop, C. (2006). Pattern recognition and Machine Learning

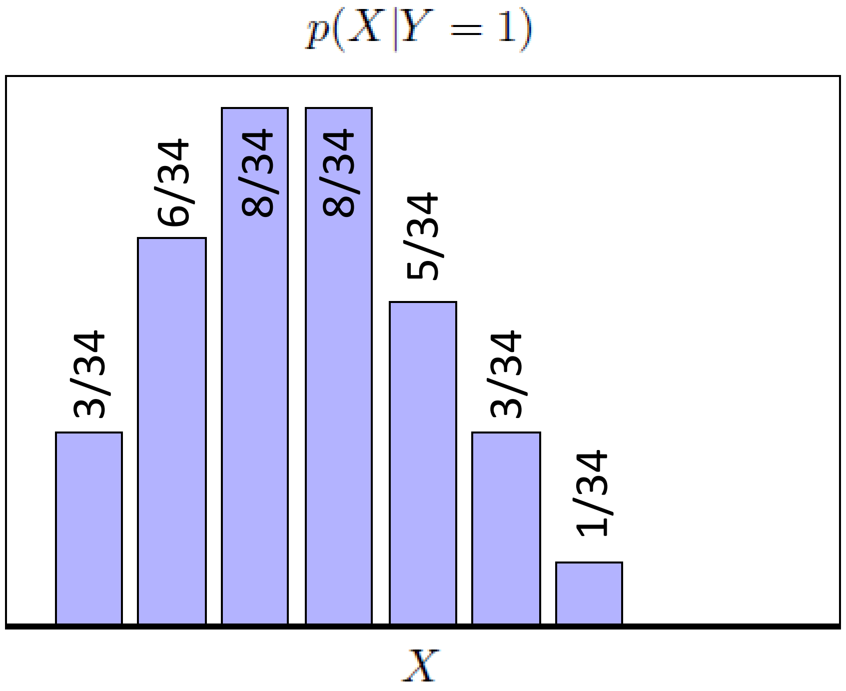
¡Siempre hacia lo alto!

Teoría de la probabilidad

Ejemplo 2:

Se tiene una muestra de 60 datos (N)





Imágenes tomadas de: Bishop, C. (2006). Pattern recognition and Machine Learning

Teoría de la probabilidad

Ejemplo 2:

Importante tener en cuenta que:

$$p(A|B) \neq p(B|A)$$

Teoría de la probabilidad

Volviendo al ejemplo 1 de las manzanas y naranjas, se debe cumplir que:

$$p(F = manzana|C = 1) + p(F = naranja|C = 1) = 1$$

y además,

$$p(F = manzana|C = 2) + p(F = naranja|C = 2) = 1.$$

¡Siempre hacia lo alto!

Teoría de la probabilidad: Ejercicios

1. En una asamblea de propietarios de un conjunto residencial se llevó a cabo una votación para aprobar o desaprobar el presupuesto para la reforma de la fachada de la entrada principal. Se obtuvieron los siguientes datos:

Votos a favor	Votos en contra	Votos nulos	Votos blanco
40%	25%	15%	

Si se escoge un voto al azar, cuál es la probabilidad que sea en blanco?

Teoría de la probabilidad: Ejercicios

1. En una asamblea de propietarios de un conjunto residencial se llevó a cabo una votación para aprobar o desaprobar el presupuesto para la reforma de la fachada de la entrada principal. Se obtuvieron los siguientes datos:

Votos a favor	Votos en contra	Votos nulos	Votos blanco
40%	25%	15%	20%

Si se escoge un voto al azar, cuál es la probabilidad que sea en blanco? $P(v=\text{blanco}) = 0{,}2$

¡Siempre hacia lo alto!

Teoría de la probabilidad: Ejercicios

2. En una sala de atención a urgencias médicas se observa que el 30% de los pacientes son menores de edad y de estos, 80% son hombres. Dentro de los que son mayores de edad, el 70% son mujeres. Si se elige un paciente al azar, ¿cuál es la probabilidad que sea hombre y que no sea menor de edad?

Teoría de la probabilidad: Ejercicios

2. En una sala de atención a urgencias médicas se observa que el 30% de los pacientes son menores de edad y de estos, 80% son hombres. Dentro de los que son mayores de edad, el 70% son mujeres. Si se elige un paciente al azar, ¿cuál es la probabilidad que sea hombre y que no sea menor de edad?

	Menor de edad	Mayor de edad	Total
Mujer	0,06	0,49	
Hombre	0,24	0,21	
Total	0,3	0,7	

$P(\text{hombre}, \text{mayor edad}) = 0{,}21$ P. conjunta

¡Siempre hacia lo alto!

Teoría de la probabilidad: Ejercicios

3. Cuatro estudiantes del colegio "Nuevo horizonte" participaron en un concurso de oratoria. Sus nombres son Anna, José, Leonardo y Paula. Se sabe que la probabilidad de que gane Anna es el doble de la José, la de José es la mitad de la de Leonardo y la probabilidad de que gane Paula es el triple de la de Anna. ¿Cuál es la probabilidad de que Paula no gane?

Teoría de la probabilidad: Ejercicios

3. Cuatro estudiantes del colegio "Nuevo horizonte" participaron en un concurso de oratoria. Sus nombres son Anna, José, Leonardo y Paula. Se sabe que la probabilidad de que gane Anna es el doble de la José, la de José es la mitad de la de Leonardo y la probabilidad de que gane Paula es el triple de la de Anna. ¿Cuál es la probabilidad de que Paula no gane?

$P(A) = 2P(J)$ $\quad P(J) = \frac{1}{2}P(L)$ $\quad P(P) = 3P(A)$

Asumimos $P(A) = x$

$P(J) = \frac{1}{2}x$

$P(L) = x$

$P(P) = 3x$

$P(A) + P(J) + P(L) + P(P) = 1$

$x + \frac{1}{2}x + x + 3x = 1$

$\frac{11x}{2} = 1 \rightarrow x = 2/11$

Teoría de la probabilidad: Ejercicios

3. Cuatro estudiantes del colegio "Nuevo horizonte" participaron en un concurso de oratoria. Sus nombres son Anna, José, Leonardo y Paula. Se sabe que la probabilidad de que gane Anna es el doble de la José, la de José es la mitad de la de Leonardo y la probabilidad de que gane Paula es el triple de la de Anna. ¿Cuál es la probabilidad de que Paula no gane?

$P(A) = 2P(J)$ $\quad$ $P(J) = \frac{1}{2}P(L)$ $\quad$ $P(P) = 3P(A)$

$x = 2/11$

$P(P) = 6/11$

$P(\text{no gane Paula}) = 1 - \frac{6}{11}$

$= 5/11$

Teoría de la probabilidad: Ejercicios

4. Suponga que tiene tres cajas de colores roja (r), azul (a) y verde (v). La caja roja contiene 3 manzanas, 4 naranjas y 3 limones. La caja azul contiene 1 manzana, 1 naranja y 0 limones. Y la caja verde contiene 3 manzanas, 3 naranjas y 4 limones. Si una caja es escogida aleatoriamente con probabilidades p(r)= 0.2, p(a) = 0.2, p(v) = 0.6, y una fruta es removida de la caja (con igual probabilidad de seleccionar cualquier ítem de la caja), entonces

a) ¿cuál es la probabilidad de seleccionar una manzana?
b) Si se observa que la fruta seleccionada es una naranja, ¿qué probabilidad hay que venga de la caja verde?

Teoría de la probabilidad: Ejercicios

4. Suponga que tiene tres cajas de colores roja (r), azul (a) y verde (v). La caja roja contiene 3 manzanas, 4 naranjas y 3 limones. La caja azul contiene 1 manzana, 1 naranja y 0 limones. Y la caja verde contiene 3 manzanas, 3 naranjas y 4 limones. Si una caja es escogida aleatoriamente con probabilidades p(r)= 0.2, p(a) = 0.2, p(v) = 0.6, y una fruta es removida de la caja (con igual probabilidad de seleccionar cualquier ítem de la caja), entonces

a) ¿cuál es la probabilidad de seleccionar una manzana?

Caja	Manzana	Naranja	Limón	TOTALES
Roja	3	4	3	10
Azul	1	1	0	2
Verde	3	3	4	10
TOTALES	7	8	7	22

$P(\text{Manzana}) = \frac{7}{22}$

¡Siempre hacia lo alto!

Teoría de la probabilidad: Ejercicios

4. Suponga que tiene tres cajas de colores roja (r), azul (a) y verde (v). La caja roja contiene 3 manzanas, 4 naranjas y 3 limones. La caja azul contiene 1 manzana, 1 naranja y 0 limones. Y la caja verde contiene 3 manzanas, 3 naranjas y 4 limones. Si una caja es escogida aleatoriamente con probabilidades p(r)= 0.2, p(a) = 0.2, p(v) = 0.6, y una fruta es removida de la caja (con igual probabilidad de seleccionar cualquier ítem de la caja), entonces

b) Si se observa que la fruta seleccionada es una naranja, ¿qué probabilidad hay que venga de la caja verde?

Caja	Manzana	Naranja	Limón	TOTALES
Roja	3	4	3	10
Azul	1	1	0	2
Verde	3	3	4	10
TOTALES	7	8	7	22

$$P(\text{Verde} \mid \text{Naranja}) = \frac{P(\text{verde} \cap \text{Naranja})}{P(\text{Naranja})} = \frac{\frac{3}{\cancel{22}}}{\frac{8}{\cancel{22}}} = \frac{3}{8}$$

Teoría de la probabilidad: Ejercicios

5. En un jardín se tienen solo 2 especies de flores: rojas y amarillas. El 40 % de las flores del jardín son rosas y el 60% son tulipanes. De las rosas, el 30% son rojas y el resto son amarillas; mientras que, de los tulipanes, el 40% son rojos y el resto amarillos. Si se selecciona una flor al azar,

a) y resulta que es amarilla, ¿cuál es la probabilidad de que sea una rosa?

b) y resulta que es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea una rosa?

a) $7/16$

b) $12/36 = 1/3$

Caja	Rojo	Amarillo	TOTALES
Rosa	12	28	40
Tulipán	24	36	60
TOTALES	36	64	100

¡Siempre hacia lo alto!

Teoría de la probabilidad: Ejercicios

6. En una fábrica, se elaboran 1000 bombillas. A partir de la siguiente tabla, calcular:

	Buen estado	Defectuosas	Total
Luz blanca	508	92	600
Luz amarilla	315	85	400
Total	823	177	1000

a) La probabilidad de que una bombilla seleccionada al azar, esté defectuosa.
b) La probabilidad de que una bombilla seleccionada al azar sea de luz amarilla.
c) Si un cliente compra una bombilla de luz amarilla, ¿cuál es la probabilidad de que esté defectuosa?
d) Si un cliente compra una bombilla de luz blanca, ¿cuál es la probabilidad de que esté defectuosa?
e) Si un cliente compra una bombilla y se da cuenta de que está defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea de luz amarilla?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bishop, C. (2006). Pattern recognition and Machine Learning