CIMAT Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

DOS QUE TRES PROPIEDADES DE CUMULANTES

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Especialidad en

Matemáticas Básicas

Presenta:

Jorge Luis Santos Silva

Director de Tesis:

Dr. Carlos Vargas Obieta

Autorización de la versión final

Guanajuato, Gto., 07 de 01 de 2021

La virtud de la constancia vence cualquier obstáculo.

El Negro

Capítulo 1

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por creer en mi, y por su apoyo durante todos estos años. Al CONACYT por la beca que me otorgó para mis estudios de maestría y a mi institución, el CIMAT, por permitirme ser parte de ella como estudiante de posgrado.

Tambien agradezco a la banda de las 7 esferas por tantos buenos y muchas risas (las retas con la melcar, los bailes de la miss, los olores del mafian, las playeras del huevas, los chistes del robo, los bailes del spivak aguilera), hicieron muy amena mi estadía; a el Peyote Asesino por los partidos y campeonatos a su lado; y a mi thug squad quien siempre me ha echado porras.

Me siento muy afortunado de haberme encontrado con mi asesor, el Dr. Carlos Vargas[1], a quien considero mi mero valedor.

En lo académico, Carlos me mostró temas que siquiera el nombre había escuchado, cómo la combinatoria y la probabilidad libre, me enseñó también que matemáticas avanzadas pueden manejarse con conceptos y/o demostraciones elementales (fue cautivador :')).

Además de lo ya mencionado, trabajar con Carlos me ha hecho mucho más consciente de la importancia del trabajo en equipo, de la cooperación en vez de la competencia (sobre todo para proyectos multidisciplinarios).

También agradzco a Charli por el apoyo la Grant Voevodsky.

El trabajo de tesis se basa en un proyecto iniciado por Tulio Gaxiola y Carlos Vargas. Además, obtuvimos una buena parte de nuestra intuición y motivación de la tesis de maestría de Carlos Díaz a.k.a Carlitos.

Finalmente, agradezco a los doctores Octavio Arizmendi, Tulio Gaxiola, Antonio Rieser y Alexey Beshenov, por acceder a revisar mi trabajo y formar el jurado para el examen.

[1] Charli

Índice general

Resumen

Este trabajo de tesis se enmarca dentro de la teoría de probabilidad no-conmutativa (PNC), la cual posee en la actualidad conexiones con múltiples áreas de las matemáticas. Esto permite abordarla desde distintas perspectivas (notablemente, desde álgebras de operadores, probabilidad clásica, matrices aleatorias, combinatoria, teoría de representaciones, teoría espectral de gráficas, teoría de la información cuántica, entre otras).

En nuestro caso, nos aproximaremos a la probabilidad no-conmutativa (así como a sus extensiones $\mathcal{B}$-valuada y c-libre) por la vía de las álgebras de incidencia, misma que se basa en retículos de particiones de conjuntos, que nos permiten definir cumulantes para cada noción de independencia no-conmutativa.

En concreto nuestro trabajo estudia tres propiedades; **P1**, **PB** y **PC**, que se satisfacen en la independencia clásica y libre, pero no se cumplen para la independencia booleana, monótona o anti-monótona.

En el marco de la ley de grandes números, en donde el promedio de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $S_n = \frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ converge cuando $n \to \infty$ a la media común $c = \tau(a_1)$, llamamos **P1** a la propiedad universal de que las fluctuaciones $\sqrt{n}(S_n - c)$ sean asintóticamente Gaussianas (sin la restricción de que la media se anule, como se requiere en ciertas teorías de PNC).

PB es la propiedad de que las constantes observen un buen comportamiento con respecto a la independencia: Si $\mathbb{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una esperanza condicional, entonces $\mathcal{B}$ es independiente de todo $\mathcal{A}$. La propiedad **PC** tiene que ver con que los cumulantes preserven invarianzas cíclicas.

El primer resultado original de esta tesis consiste en mostrar que estas propiedades pueden deducirse verificando otras propiedades **P1**', **PB**' y **PC**', de naturaleza combinatoria, sobre los pesos en las particiones de conjuntos que definen a los cumulantes inherentes a cada independencia.

Se puede plantear, entonces, el problema de estudiar las variaciones (en caso de que estas existan y den lugar a una teoría de probabilidad razonable) de independencias booleana/monótona/antimonótona que cumplan alguna o varias de esas propiedades. Discutir este problema, definir variaciones (algunas de las cuales se vuelven inmediatas desde la caracterización combinatoria) y entender cómo dichas variaciones repercuten en la teoría de probabilidad es la principal directriz de este trabajo de tesis.

Aquí cabe mencionar que las **P1**-variaciones de la independencia booleana

y la monótona (esto es, variaciones de las indeoendencias booleana y monótona cuenten con un TLC no centrado) ya habían sido contempladas, respectivamente por F. Orawecz en [37] y T. Hasebe en [23]. Ambas variaciones se presentan en esos trabajos como casos especiales de la independencia c-libre.

Para nuestra sorpresa, desde la perspectiva de la combinatoria no hay diferencia entre **P1**' y **PB**'. Esto se aprecia en términos de las propiedades originales, pues se puede observar que **P1** es consecuencia de **PB** para el caso $\mathcal{B}$ unital (es decir, cuando $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{B}$).

La solución desde la combinatoria para **P1** resuelve también el problema en el contexto de esperanzas condicionales. La propiedad **PB** es más poderosa por los alcances de su generalidad. Las **PB**-variaciones $\mathcal{B}$-valuadas de la probabilidad booleana y monótona no habían sido exploradas aún.

La simpleza de nuestras caracterizaciones sugiere considerar ciertas variaciones de la independencia booleana, monótona o anti-monótona que satisfagan la propiedad **PB**', **PC**', o ambas a la vez.

La independencia c-libre requiere un álgebra equipada de dos estados (ϕ, ψ) (o bien, de dos esperanzas condicionales $(\mathbb{F}_\phi, \mathbb{F}_\psi)$). De los resultados existentes sobre independencias y convoluciones c-libres se pueden derivar propiedades deseables en las teorías modificadas.

Esta noción general de independencia incluye a la independencia libre y la **PB**-booleana (ambas compatibles con estructuras $\mathcal{B}$-valuadas). Esto nos sugiere revisar con mayor atención instancias elementales de la independencia c-libre $\mathcal{B}$-valuada.

Es conocido que en el caso de independencia c-libre escalar, si se repite el par de funcionales (es decir $\psi = \phi$), la nocion de independencia coincide con la independencia libre usual. Haciendo la misma demostración en el caso $\mathcal{B}$-valuado, se observa que considerar un par de esperanzas condicionales repetidas implica la independencia $\mathcal{B}$-libre.

Observamos que, de hecho, basta con que $(\mathbb{F}_\phi)$ sea compatible con $(\mathbb{F}_\psi)$ (es decir $\mathbb{F}_\phi \circ \mathbb{F}_\psi = \mathbb{F}_\phi$) para producir distribuciones conjuntas interesantes, obteneniendo en particular colecciones (o filtraciones) de distribuciones no-conmutativas.

Esto sugiere una revisión del rol de la combinatoria c-libre para problemas de matrices aleatorias[2] donde se contemplan esperanzas condicionales con ciertas compatibilidades. Sin embargo, las aplicaciones a matrices aleatorias solo nos servirán como motivación y no se exploran en este trabajo.

En lo que respecta a las variaciones de independencia con la propiedad **PC**, conjeturamos que podemos recuperarlas a partir de una variación cíclica de la independencia c-libre: en lugar de calcular ϕ como si fuera la independencia booleana condicionada a ψ, la calculamos como si fuera **PC**-booleana (cíclica) condicionada a ψ.

[2]Una matriz aleatoria es una matriz donde sus entradas no son reales o complejos, sino variables aleatorias reales o complejas con alguna distribución conjunta. Un problema importante en el estudio de estas matrices es el de determinar las distribuciones de sus valores propios (aleatorios). Este a su vez se relaciona con el estudio de las trazas normalizadas esperadas.

Se plantean al final de la tesis algunos problemas concretos en los que nos ocupamos actualmente.

Para evitar algunas complejidades, se analizan principalmente los casos de variaciones a la probabilidad booleana. Se han explorado algunos aspectos de las variaciones al caso monótono, para el que nos limitamos a incluir solo algunas primeras ideas y observaciones, sin entrar en los detalles técnicos.

Se pretende extender este estudio (en colaboraciones con T. Gaxiola, C. Díaz, S. Galindo y C. Vargas) de forma que se exploren aplicaciones a matrices aleatorias y se aclaren las preguntas que se formulan al final del trabajo.

Capítulo 2

Introducción

En este trabajo nos referiremos a la independencia estocástica usual de la teoría (clásica) de probabilidad como $\otimes$-independencia, por dos razones. La primera es porque en el marco algebraico de la probabilidad no-conmutativa, es posible caracterizar la noción de independencia entre variables aleatorias, como una relación algebraica entre operadores, misma que se construye de manera sencilla usando el producto tensorial algebraico.

La segunda razón es por conveniencia notacional; la interpretación algebraica de la independencia en PNC invita a utilizar alguna otra relación algebraica como reemplazo de la $\otimes$-independencia.

Además de las cinco nociones "naturales" de independencia que se consideran típicamente en la literatura, consideraremos tres nuevas variaciones de tres de ellas, por lo que es conveniente usar una notación abreviada.

Para hablar de propiedades que se cumplen para varias nociones de independencia, nos será útil hablar de una independencia genérica $\circledast$, especificando para cuales casos se cumple (por ejemplo, escribiremos "para $\circledast = \otimes$", o "sea $\circledast \in \{\otimes, *\}$ una noción de independencia").

A partir de considerar una relación algebraica alternativa como definición de $\circledast$-independencia, se construye la $\circledast$-teoría de probabilidad esencialmente reemplazando $\otimes$ por $\circledast$ en los enunciados de los teoremas límite fundamentales en probabilidad (como Ley de Grandes Números, Teorema del Límite Central, Ley de eventos raros, etc).

La validez y grado de generalidad de los modelos o $\circledast$-teoremas límite (y por ende la riqueza de la $\circledast$-teoría de probabilidad) dependerá de que la relación algebraica elegida como independencia preserve o emule propiedades del producto tensorial, que correspondan a propiedades algebraicas esenciales o características de la independencia clásica.

Por ejemplo:

1. La relación usual de independencia estocástica es simétrica, puesto que X y Y son variables aleatorias independientes si y sólo si lo son Y y X.

2. La relación de independencia es universal en el sentido de que si X y Y son independientes, entonces también lo son $f(X)$ y $g(Y)$ para cualesquiera funciones medibles f y g.

En la clasificación propuesta por A. Ben-Ghorbal y M. Schürmann en [7] (extendida por N. Muraki en [35]) se reconocen algunas propiedades importantes de la independencia clásica (en particular, aquellas que permiten definir al menos una noción de procesos de Lévy). Estas se traducen a axiomas algebraicos para una buena $\circledast$-independencia.

Utilizando el mismo sistema de axiomas, la clasificación ordena a las nociones $\circledast$-independencia de una manera jerárquica, dependiendo de la generalidad en la categoría de álgebras que se considera.

Incluso en el contexto más general, la clasificación arroja únicamente cinco nociones independencia que cumplen los axiomas.

Además de la independencia clásica o tensorial, se obtienen la independencia libre de Voiculescu ($\circledast := *$), booleana ($\circledast := \star$) introducidas por R. Speicher y R. Woroudi en [45]; monótona ($\circledast := \triangleright$) y antimonótona ($\circledast := \triangleleft$), propuestas por Muraki [34]).

De lo particular a lo general se consideran cuatro niveles jerárquicos en la clasificación:

(1) Categoría de álgebras conmutativas (con unidad). Independencias "conmutativas": $\circledast \in \{\otimes\}$.

(2) Categoría de álgebras no-conmutativas (con unidad). Independencias "unitales": $\circledast \in \{\otimes, *\}$.

(3) Categoría de álgebras no-conmutativas sin unidad. Independencias "universales": $\circledast \in \{\otimes, *, \star\}$.

(4) Categoría de álgebras no-conmutativas sin unidad, ignorando el axioma de simetría. Independencias "naturales": $\circledast \in \{\otimes, *, \star, \triangleright, \triangleleft\}$.

La clasificación de Ben-Ghorbal y Schürmann ha sido bien aceptada y admite varias extensiones interesantes. En particular, la clasificación logra una caracterización de la $\otimes$-independencia en el caso conmutativo, incluye la independencia libre de Voiculescu en el siguiente nivel de generalidad e incluye a la independencia booleana recientemente planteada desde el punto de vista combinatorio en [45].

Además, reemplazando productos libres con identificacion de unidades por productos libres amalgamados en una álgebra $\mathcal{B}$ más general, el estudio contempla las teorias de probabilidad valuadas en operadores (o $\mathcal{B}$-valuadas), que en el caso clásico corresponde a considerar momentos con respecto a esperanzas condicionales.

2.1. Tres propiedades de independencias unitales

En este trabajo, partimos de la observación de que bajar en la jerarquía de la clasificación provoca que ciertas propiedades de la independencia clásica (que se ubica en la cúspide de la clasificación) dejen de cumplirse.

En particular nos interesa estudiar las propiedades **P1**, **PB** y **PC**, enunciadas a continuación, que se satisfacen para $\circledast \in \{\otimes, *\}$, pero no para $\circledast \in \{\star, \triangleright, \triangleleft\}$.

P1 (Fluctuaciones $\circledast$-Gaussianas): En el marco de la $\circledast$-Ley de Grandes Números, para $(a_n)_{n\geq 1}$ variables aleatorias autoadjuntas, $\circledast$-independientes, identicamente distribuídas se tiene que

$$S^{\circledast}(n) := \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \to c = \tau(a_1), \quad n \to \infty.$$

La propiedad P1 requiere que las fluctuaciones $\sqrt{n}(S^{\circledast}(n) - c)$ sean siempre Gaussianas, sin importar el valor de $c \in \mathbb{R}$.

PB (Independencia de variables constantes): Para toda esperanza condicional, $\mathbb{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ los elementos del álgebra $\mathcal{B}$ son $\circledast_{\mathcal{B}}$-independientes de toda el álgebra $\mathcal{A}$.

PC (Propiedad de la invarianza cíclica hereditaria): Si los momentos son invariantes con respecto a permutaciones cíclicas de sus argumentos, también lo serán los cumulantes $(c_n^{\circledast})_{n\geq 1}$.

La ausencia de estas propiedades debilita en cierta forma el alcance de las teorías de probabilidad en las jerarquías inferiores.

Por ejemplo, la ausencia de **P1** hace que la distribución $\circledast$-Gaussiana sea menos universal. La propiedad **PB** se relaciona con la 'propiedad de torre' en probabilidad clásica, mientras que en probabilidad libre permite extender el formalismo de Voiculescu [49] a modelos de matrices aleatorias más realistas.

La propiedad **PC**, además de la herencia de invarianzas cíclicas de momentos a cumulantes, permite definir sin ambigüedad extensiones multiplicativas de familias de funcionales, no solo a conjuntos de particiones, sino también a permutaciones.

Evaluar funcionales en permutaciones permite organizar el cálculo de estados evaluados en productos de matrices determinísticas y matrices aleatorias Gaussianas (o Haar-Unitarias) de una forma ordenada y sucinta.

Proponemos entonces encontrar variaciones mínimas de las independencias $\circledast \in \{\star, \triangleright, \triangleleft\}$ que satisfagan las propiedades **P1**, **PB**, **PC** o varias de ellas.

La independencia monótona cíclica, recientemente observada por Collins, Hasebe y Sakuma en modelos de matrices aleatorias [14] parece estar relacionada con la **PC**-variación de la independencia monótona.

2.2. Cumulantes y combinatoria

Nuestra aproximación al problema será por la vía de la combinatoria, particularmente en términos de álgebras de incidencia, que nos permiten definir cumulantes para cada independencia.

Las herramientas de combinatoria se hicieron relevantes en PNC a partir del trabajo de Roland Speicher [38]. Ahí se muestra que la independencia libre de Voiculescu [47] puede describirse en términos relativamente elementales, a través de cumulantes. Los cumulantes son funciones multiplicativas (con respecto a COPOs de particiones de conjuntos), que se relacionan con los momentos mediante la inversión de Möbius.

En ese entonces, la teoría de probabilidad libre ganaba mayor visibilidad como área emergente de las matemáticas. En parte, esto se debió a la aplicación, establecida por Voiculescu mismo [49], para comprender usando independencia libre las relaciones (asintóticas) entre los modelos pioneros de Wigner [54] y Marcenko-Pastur [30] de matrices aleatorias.

Desde el punto de vista combinatorio, la transición entre las teorías de probabilidad clásica y libre se traduce en reemplazar los COPOs de particiones $(\mathcal{P}(n))_{n\geq 1}$ que definen los cumulantes clásicos, por COPOS de particiones que no se cruzan $(\mathcal{NC}(n))_{n\geq 1}$, que definen los cumulantes libres.

La perspectiva de la combinatoria obliga a considerar otros subconjuntos (o pesos) de particiones con estructuras similares a $(\mathcal{P}(n))_{n\geq 1}$ y a $(\mathcal{NC})_{n\geq 1}$, como las particiones por intervalos $(\mathcal{I}(n))_{n\geq 1}$ dando lugar a nuevas nociones de independencia: booleana ($\circledast := \star$), [45], monótona ($\circledast := \triangleright$) y antimonótona ($\circledast := \triangleleft$) [34]).

Además, la perspectiva combinatoria permitió un primer avance para el problema de clasificar las distintas nociones independencia como lo hizo Speicher en [46]. Como se mencionó, la clasificación propuesta por Ben-Ghorbal-Schürmann-Muraki [7, 35] sólo admite las cinco independencias ya mencionadas, conocidas como "naturales".

En consecuencia, se han desarrollado las cinco direcciones de teorías de probabilidad y se han encontrado relaciones útiles entre ellas. A la par, comenzaron a introducirse múltiples generalizaciones de la PNC. Listamos las principales, incluyendo las referencias a los trabajos pioneros o especialmente relevantes para este trabajo:

- Probabilidad no-conmutativa $\mathcal{B}$-valuada (Voiculescu, Speicher [51, 44]).
- Entropía libre (Voiculescu [50]).
- Probabilidad libre infinitesimal y del tipo B (Biane, Goodman, Nica, Belinschi, Shlyakhtenko [10, 8]).
- Probabilidad libre de segundo orden (Mingo, Speicher, Sniady, Collins [32, 31, 15]).
- Probabilidad c-libre (Bozejko, Speicher, Leinert [9, 12]).
- Probabilidad no-conmutativa en el sentido de tráficos (Male, Cebron, Dahlquist [29, 13]).
- Bi-probabilidad no-conmutativa (Voiculescu, Gu, Skoufranis, Hasebe [52, 20, 21]).

Hoy en día se conocen múltiples relaciones entre las distintas generalizaciones. Para este trabajo de tesis, haremos uso únicamente de la probabilidad $\mathcal{B}$-valuada y la c-libre.

La probabilidad $\mathcal{B}$-valuada inicia en [51], al reemplazar el par $(\mathcal{A}, \tau)$, por una tripleta $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbb{F})$, donde $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ es una subálgebra y $\mathbb{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una esperanza condicional. Esto incrementó notablemente la aplicabilidad de la teoría, en particular, para describir modelos más generales y más realistas en matrices aleatorias.

Por otra parte, la independencia c-libre [9] surge de equipar a las álgebras con dos funcionales (ϕ, ψ) en vez de uno. Una de las propiedades más importantes de la independencia c-libre es que para distintas elecciones especiales del par (ψ, ϕ), esta corresponde la independencia libre, booleana (o monótona).

Ambas extensiones de la probabilidad no conmutativa se pueden abordar desde la perspectiva de cumulantes, como se observó en [44] y en [12], respectivamente.

Si $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbb{F})$ es un espacio de probabilidad no conmutativo $\mathcal{B}$-valuado, denotamos a los cumulantes con respecto a una $\circledast_{\mathcal{B}}$-independencia como $(c_n^{\circledast_{\mathcal{B}}})_n \geq 1$ (o bien $(c_n^{\circledast})_n \geq 1$ cuando el contexto es claro, ver Cap. ? para definiciones de cumulantes).

Empleando la notación de cumulantes las propiedades **PB** y **PC** se formulan de la siguiente manera:

Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbb{F})$ un EPNC con cumulantes $(c_n^{\circledast_{\mathcal{B}}})_n \geq 1$.

- **PB**: Para todo $n \geq 2$ y $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}^n$, tal que algún $a_i = b \in \mathcal{B}$, se tiene que $c_n^{\circledast_{\mathcal{B}}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$.

- **PC**: Si para todo $n \geq 1$, se tiene que $\mathbb{F}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathbb{F}(a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1)$, entonces también se tiene para todo $n \geq 1$ que $c_n^{\circledast_{\mathcal{B}}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = c_n^{\circledast_{\mathcal{B}}}(a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1)$.

Para el caso $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{B}$, se tiene que **PB** implica la propiedad **P1**, pues el problema de que $\sqrt{n}(S_n - c)$ no sea Gaussiana recae específicamente en que la constante c sea o no $\circledast$-independiente de S_n.

Se han encontrado realizaciones recientes, como matrices aleatorias, de la independencia monótona cíclica [14], variación de la independencia monótona que admite realizaciones en espacios de probabilidad traciales. Conjeturamos una relación estrecha entre esta y las variaciones propuestas en este trabajo.

La directriz principal de la tesis consiste en presentar reformulaciones **PB**' y **PC**', en términos de condiciones elementales sobre los soportes (o los pesos) en las particiones de conjuntos que definen los cumulantes.

Las caracterizaciones combinatorias nos permiten proponer variaciones a la independencia booleana o monotona que satisfagan **PB**', **PC**', o bien **PB**' y **PC**' de manera simultánea.

La simpleza de dichas variaciones desde la perspectiva la combinatoria permite derivar sin dificultad algunas propiedades básicas que suelen preguntarse al proponer una noción de independencia no-conmutativa (distribuciones límite, realizaciones básicas en términos de gráficas).

En particular recuperamos las descripciones combinatorias de las convoluciones **P1**-booleana [37] (conocida como independencia/convolución "Fermi-booleana") y **P1**-monótona [23] que se habían descrito con mayor énfasis en las transformadas y los aspectos analíticos.

Para las variaciones del caso booleano, se calculan además descripciones de las variaciones correspondientes a los retículos de particiones por intervalos, y sus respectivas funciones de Möbius.

2.3. Conexión con Independencia c-libre

Las **P1**-variaciones a las independencias booleana y monótona han sido presentadas como casos especiales de la independencia c-libre [12, 9], en la que se consideran dos funcionales y la independencia se calcula con respecto a ambos. En particular, cuando se repite el funcional, se obtiene la independencia libre usual.

La independencia c-libre incluye como casos particulares, además, a las independencias booleana y monótona usuales, las independencias multiplicativas booleanas y monótonas, las cuales fueron observadas por U. Franz en [17] y [18] así como la llamada independencia ortogonal descrita por Lenczewski [28].

La caracterización en términos de independencia c-libre, y la de ésta en términos de cumulantes, resulta muy útil para mostrar algunas propiedades adicionales deseables en las variaciones propuestas (como positividad, leyes de eventos raros, convoluciones multiplicativas, entre otras).

El hecho de que **P1** es solo el caso $\mathcal{B}$-unital de **PB**, nos permite observar a la independencia **PB**-booleana y **PB**-monótona dentro de la independencia c-libre $\mathcal{B}$-valuada, la cual ha sido investigada en varios trabajos por Popa-Mlotkowski-Ionescu-Vinnkov-J.C.Wang en los artìculos [43, 33, 26, 40].

Nuestras observaciones evidencían una mayor compatibilidad entre las extensiones $\mathcal{B}$-valuada y c-libre de la teoría de probabilidad no-conmutativa lo cual resulta alentador en cuanto a potenciales aplicaciones.

Salvo por aspectos relativamente sencillos, que se comentan a lo largo del texto, se posterga el estudio de detalles más específicos sobre las variaciones en las independencias monótonas para trabajo a futuro.

Algo que cabe resaltar a partir de este trabajo es la posibilidad de desarrollar una independencia (**PB**+**PC**)-monótona, que pudiera ser relevante para extensiones de aplicaciones de la independencia monótona cíclica observada en los modelos recientes de matrices aleatorias observada por Collins, Hasebe y Sakuma en [14].

2.4. Organización del Trabajo

Además de esta introducción, la tesis cuenta con otros 6 capítulos.

En el capítulo 2 se presentan definiciones básicas de retículos, sus álgebras de incidencia y funciones de Möbius. En particular estudiamos la estructura y funciones de Möbius para algunas retículas de particiones de conjuntos.

En el capítulo 3 se presentan los conceptos fundamentales de probabilidad no-conmutativa, así como nociones básicas de independencia.

En el capítulo 4 definiremos lo que es una extensión multiplicativa de una familia de funciones $\mathcal{B}$-multilineales. Esto permite definir cumulantes a partir de los momentos, donde los distintos retículos nos llevarán a distintas nociones de independencia. Tambien veremos el Teorema del Límite Central (centrado y no centrado) para distintas nociones de independencia.

En el capítulo 5 se presentan las propiedades **PB**'/**PC**' y se muestra que estas implican **PB/PC**. Se estudian variaciones a pesos en particiones (ya mencionadas en el capítulo dos) y algunas de sus repercusiones elementales en las teorías de probabilidad que de ellas se derivan. Finalmente se explora la perspectiva de la independencia c-libre. Desde ahí respondemos a varias cuestiones sobre las nuevas nociones de independencia, como positividad, relaciones con otras independencias, convoluciones multiplicativas, compatibilidad (en el contexto de esperanzas condicionales). Se presenta además una versión cíclica de la independencia c-libre junto con algunas conjeturas.

Capítulo 3

Retículos, Álgebras de Incidencia y Funciones de Möbius

Como nuestra aproximación a la probabilidad no-conmutativa se hace desde la perspectiva combinatoria, comenzaremos con algunos elementos básicos, como conjuntos parcialmente ordenados y sus álgebras de incidencia.

Se incluyen algunos resultados que serán útiles para derivar las funciones de Möbius en los nuevos retículos de particiones por intervalos.

3.1. COPOS y Retículos

Definición 3.1.1. Decimos que un conjunto P es un **conjunto parcialmente ordenado** o **COPO** es un conjunto dotado de una relación binaria denotada por $\leq$ (o bien por $\leq_P$ para evitar confusiones en caso de ser necesario) tal que satisface las siguientes tres propiedades:

i) Para todo $p \in P$, $p \leq p$ (**reflexividad**).

ii) Si $p, q \in P$ son tales que $p \leq q$ y $q \leq p$, entonces $p = q$ (**antisimetría**).

iii) Si $p, q, r \in P$ son tales que $p \leq q$ y $q \leq r$, entonces $p \leq r$ (**transitividad**).

Usaremos la notación $p \geq q$ para decir que $q \leq p$; $p < q$ dice que $p \leq q$ y $p \neq q$, y $q > p$ denota $p < q$.

Definición 3.1.2. Dados un COPO P y dos elementos $p, q \in P$, decimos que:

i) p y q son **comparables** si $p \leq q$ o bien $p \geq q$.

ii) p y q son **incomparables** si no son comparables, en cuyo caso se denotará por $p \parallel q$.

Ejemplos 3.1.3. Como ejemplos sencillos de COPOs tenemos los siguientes:

i) Los números reales con su orden usual.

ii) Dado un conjunto cualquiera P, podemos definir la relación en su potencia $\wp(P)$ como: $A \leq B$ si y sólo si $A \subseteq B$.

iii) En el conjunto $\mathbb{N}$ podemos definir la relación $a \leq b$ si a divide a b.

Es fácil ver que las relaciones del ejemplo pasado cumplen con ser reflexivas, antisimétricas y transitivas.

Podemos notar que dado un COPO P y $A \subseteq P$, se le puede dar a A una relación para hacerlo un conjunto parcialmente ordenado, simplemente restringiendo la relación binaria de P a A. A dicha restricción se le llamará **orden inducido por** P.

Una clase especial de COPOs que se obtienen a través de un orden parcial P son los **intervalos**. Un intervalo cerrado (abierto) es un conjunto de la forma $\{p \in P \mid a \leq p \leq b\}$ o $\{p \in P \mid a < p < b\}$, donde $a, b \in P$; dichos intervalos serán denotados por $[a, b]$ y (a, b) respectivamente.

Definición 3.1.4. Dados P y Q conjuntos parcialmente ordenados definimos su **producto cartesiano** como el conjunto $P \times Q$ dotado con el orden $\leq_{P\times Q}$ definido como: $(p, q) \leq_{P\times Q} (p', q')$ si y sólo si $p \leq_P p'$ y $q \leq_Q q'$, donde $\leq_P$ y $\leq_Q$ denotan los órdenes de P y Q respectivamente.

Definición 3.1.5. Dados un conjunto parcialmente ordenado P y $Q \subseteq P$, decimos que:

i) P es **localmente finito** si cada uno de sus intervalos es finito.

ii) Q es **convexo** si para todos $s, t \in Q$ y $x \in (s, t) \subseteq P$, entonces $x \in Q$.

Definición 3.1.6. Si $s, t \in P$, entonces decimos que t **cubre** a s o que s está **cubierto** por t, denotado por $s \lessdot t$ o $t \gtrdot s$, si $s < t$ y para todo $x \in P$ no se cumple que $s < x < t$.

Se sigue de la definición que s está cubierto por t si y solamente si $s < t$ y $[s, t] = \{s, t\}$; de manera equivalente tenemos que s está cubierto por t si y sólo si $s < t$ y $(s, t) = \emptyset$.

Definición 3.1.7. Sean P un COPO y $C \subseteq P$. Entonces decimos que:

i) P tiene un $\widetilde{1}$ (resp. $\widehat{0}$) si existe $\widehat{1} \in P$ (resp. $\widehat{0} \in P$) tal que para todo $p \in P$, $x \leq \widehat{1}$ (resp. $\widehat{0} \leq x$).

ii) P es una **cadena** si cualquiera dos elementos son comparables.

iii) C es una **cadena de** P si C es una cadena cuando se le restringe el orden de P.

iv) C es una cadena **saturada** o **no refinable** si C es cadena de P y no existe $p \in P \setminus C$ tal que $s < p < t$ para alguna $s, t \in C$ y que $C \cup \{p\}$ sea una cadena .

v) la **longitud** $l(C)$ de una cadena finita está definida por $l(C) = |C| - 1$.

vi) el **rango** de P es

$$l(P) = \text{máx}\{l(C) \mid C \text{ es una cadena en } P\}.$$

Observación 3.1.8. Notamos que si C es una cadena maximal en P, entonces para todo $p \in P \setminus C$, $C \cup \{p\}$ no es un cadena, por lo que C resulta ser saturada.

En cambio, si C fuera saturada, no es necesariamente maximal. Por ejemplo: $P = \{1, 2, 3, 4, 5, \}$ y $C = \{1, 2, 3, 4\}$ con el orden usual que heredan de $\mathbb{N}$, entonces C es saturada pues $P \setminus C = \{5\}$ y para todos $c \in C$, $c < 5$.

Definición 3.1.9. Dado P un COPO, decimos que:

i) $C \subseteq P$ es una **anticadena** si ninguno de sus elementos es comparable.

ii) un subconjunto $I \subseteq P$ es un **ideal de orden** (o simplemente **ideal**) de P si para cualquier $i \in I$ y $p \in P$ tal que $p \leq i$, se tiene que $p \in I$.

iii) un subconjunto $G \subseteq P$ es un **filtro** de P si para cualquier $g \in G$ y $p \in P$ tal que $g \leq p$, se tiene que $p \in G$.

Proposición 3.1.10. *Sea P un COPO finito. Entonces hay una relación biunívoca entre el conjunto de ideales y el de anticadenas de P.*

Demostración. Denotemos por $A(P)$ conjunto de anticadenas y $J(P)$ al conjunto de ideales de P, para ver que $J(P)$ es isormorfo a $A(P)$ consideramos la función $F\colon J(P) \to A(P)$ definida como

$$F(G) = \{g \in G \mid g \text{ es maximal en } G\}.$$

Se sigue de la definición de F que es función, veamos ahora que es inyectiva. Sean $G, H \in J(P)$ tales que $F(H) = F(G)$. Entonces

$$\{h \in H \mid h \text{ es maximal en } H\} = \{g \in G \mid g \text{ es maximal en } G\}.$$

Tomemos $x \in H$. Dado que H es finito se sigue que existe $h \in H$ maximal tal que $x \leq h$. Como $F(H) = F(G)$ tenemos que $h \in F(G) \subseteq G$, y así, al G ser ideal tenemos que $x \in G$, por lo que

$$H \subseteq G.$$

De manera análoga tenemos que $G \subseteq H$, por lo que $H = G$, de donde se sigue que f es inyectiva.

Para ver que f es suprayectiva consideremos $B \in A(P)$ y $G = \{p \in P \mid p \leq b \text{ para algun } b \in B\}$. Se sigue de la definición de F que G es un ideal tal que

$$\{g \in G \mid g \text{ es maximal en } G\} = B.$$

De esto último concluimos que f es suprayectiva.

□

Nota 3.1.11. Como en la demostración pasada, denotaremos por $J(P)$ el COPO de ideales de un orden parcial P dotado de la relación: $A \leq B$ si y sólo si $A \subseteq B$.

Definición 3.1.12. i) Decimos que A **genera** al ideal G o que G es **generado** por A, si y sólo si están relacionados por la función de la Proposición 3.1.10. El ideal generado por A será denotado por $\langle A \rangle$.

ii) Decimos que un ideal G es **principal** si el conjunto que lo genera consta de sólo de un elemento.

Definición 3.1.13. Sean P un COPO y $s, t \in P$. Decimos que:

i) $p \in P$ es **cota superior** (resp. **cota inferior**) de s y t si , $s, t \leq p$ (resp. $s, t \geq p$).

ii) $p \in P$ es la **mínima cota superior** o **supremo** (resp. **máxima cota inferior** o **ínfimo**) de s y t, denotado por $s \vee t$ ($s \wedge t$), si es cota superior (resp. inferior) y además para todo $q \in P$ tal que $s, t \leq q$ (resp. $q \leq s, t$), $p \leq q$ (resp. $q \leq p$).

iii) P es un **retículo** si cualquier par de puntos x y y tienen supremo e ínfimo.

A cada retículo finito P se le puede asociar su **diagrama de Hasse**, el cual es una gráfica cuyos vértices son los elementos de P, cuyas aristas están dadas por la relación de cubrir (los vértices x y y tienen una arista en común si y sólo si $x \lessdot y$), y si $s < t$, entonces t se dibuja arriba de s.

Observación 3.1.14. Notamos que si L es un retículo finito, entonces L tiene supremo e ínfimo, los cuales denotaremos por $\widehat{0}$ y $\widehat{1}$.

Definición 3.1.15. Dado una retículo L, decimos que es **distributiva** si cumple las **leyes de distribución**, es decir, para $s, t, v \in L$, se tiene:

$$\begin{aligned} s \vee (t \wedge v) &= (s \vee t) \wedge (s \vee v) \\ s \wedge (t \vee v) &= (s \wedge t) \vee (s \wedge v). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Al siguiente teorema se le conoce como el Teorema Fundamental para Retículos Finitos Distributivos (Fundamental Theorem for Finite Distributive Lattices).

Teorema 3.1.16. (FTFDL) *Sea L un retículo distributivo. Entonces existe un único COPO P tal que $J(P)$ es isomorfo*[1] *a L.*

Álgebras de Incidencia

Definición 3.1.17. Sean P un COPO localmente fínito y K un campo. Denotemos por $Int(P)$ al conjunto de intervalos cerrados no vacíos de P y si $f\colon Int(P) \to K$ escribiremos $f(a, b)$, para $f([a, b])$.

i) Definimos el **álgebra de incidencia** de P sobre K, denotado por $I(P, K)$, como la K-álgebra de todas las funciones $f\colon Int(P) \to K$, dotado de la estructura de espacio vectorial que adopta de K.

[1] Dos ordenes parciales P y Q son isomorfos si existe $f\colon P \to Q$ biyectiva tal que preserva el orden, *i.e.*, $p_1 \leq p_2$ si y sólo si $f(p_1) \leq f(p_2)$. En este caso f es llamado isomorfismo

ii) Definimos la **convolución** (o **multiplicación**) como :

$$fg(s,u) = \sum_{s\leq t\leq u} f(s,t)g(t,u).$$

La convolución estará bien definida en las álgebras de incidencia, pues al ser P localmente finito se tiene que las sumas son finitas.

Observación 3.1.18. Consideremos

$$\delta(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = t \\ 0 & \text{si } a \neq t. \end{cases}$$

Si $f \in I(P,K)$, entonces

$$\begin{aligned} f\delta(s,u) &= \sum_{s\leq t\leq u} f(s,t)\delta(t,u) \\ &= f(s,u)\delta(u,u) \\ &= f(s,u) \\ &= \delta(s,s)f(s,u) \\ &= \sum_{s\leq t\leq u} \delta(s,t)f(t,u) \\ &= \delta f(s,u). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Así, δ cumple con ser la identidad por la izquierda y por la derecha.

La identidad en la álgebra de incidencia $I(P,K)$ se denotará con δ como en la observación pasada.

Nota 3.1.19. Cuando digamos que un elemento de $I(P,K)$ tiene inversa será con respecto a la convolución (multiplicación) recién definida.

Proposición 3.1.20. *Sea $f \in I(P;K)$. Entonces las siguientes son equivalentes:*

i) f tiene inversa derecha.

ii) f tiene inversa izquierda.

iii) f tiene inversa de ambos lados.

iv) para toda $t \in P$, $f(t,t) \neq 0$.

Se puede verificar que si $f \in I(P,K)$ es invertible, entonces su inversa esta dada por

$$f^{-1}(s,u) = \begin{cases} f(s,s) & \text{si } s = u \\ -f(u,u)^{-1}\sum_{s\leq t<u} f^{-1}(s,t)f(t,u) & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Definición 3.1.21. Dado P un COPO y K un campo. Definimos:

i) la **función zeta** como

$$\zeta(t,u) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq u \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

ii) la **función eta** como

$$\eta(t,u) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < u \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Estas funciones recién definidas que pertenecen a $I(P,K)$ son de especial interés ya que sus potencias en la convolución cuentan cadenas y multicadenas[2].

Observación 3.1.22. La función zeta cumple con:

$$\zeta\zeta(s,u) = \zeta^2(s,u) = \sum_{s \leq t \leq u} \zeta(s,t)\zeta(s,u) = \sum_{s \leq t \leq u} 1 = |[s,u]|.$$

que es la cantidad de cadenas de longitud uno. También,

$$\zeta\zeta\zeta(s,u) = \zeta^3(s,u) = \sum_{s \leq x \leq y \leq u} \zeta(s,x)\zeta(x,y)\zeta(y,u),$$

esto último es igual a $|\{x, y \in [s,u] \mid x \leq y\}|$ que es el número de multicadenas de longitud dos. Continuando de manera inductiva concluimos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\zeta^n(s,u) = \sum_{x \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq u} 1 = |\{\{t_i\}_{i=1}^n \subseteq [s,u] \mid x \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq u\}|,$$

que esto cuenta las multicadenas de longitud n. Como es de esperarse, la n-ésima potencia en la convolución de la función eta cuenta las cadenas de longitud n. Además, se tiene también las siguiente relación entre ζ, η y δ:

$$\zeta - \delta = \eta.$$

Notación 3.1.23. Denotaremos al conjunto $\{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}$ mediante $\overline{n}$.

Inversión de Möbius

De la definición de la función zeta y de la Proposición 3.1.20 observamos que ζ es invertible cuando esta se define en un COPO localmente finito.

[2]Una multicadena en P es una cadena con elementos repetidos, esto es, un subconjunto de P con multiplicidad que su conjunto respectivo es una cadena.

Definición 3.1.24. Sea P un COPO localmente finito. Definimos la **función de Möbius** de P, denotada por μ_P como la inversa de la función zeta (con respecto a la convolución).

Por la Ecuación (3.3) tenemos que la función μ_P está dada por

$$\mu_P(s,u) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = u \\ -\sum_{s \le t < u} \mu_P(s,t) & \text{si } s < u. \end{cases}$$

Veamos un ejemplo de cálculo de la función de Möbius sobre un COPO de cuatro elementos.

Ejemplo 3.1.25. Consideremos el conjunto $\wp(\overline{2})$ ordenados con la contención ($\mathcal{A} \le \mathcal{B}$ si y sólo si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$).

Por definición, $\mu_{\overline{2}}(\emptyset,\emptyset) = 1$. Luego,

$$\mu_{\overline{2}}(\emptyset,\{0\}) = -\sum_{\emptyset \le A < \{0\}} \mu_{\overline{2}}(\emptyset, A) = -\mu_{\overline{2}}(\emptyset,\emptyset) = -1.$$

De manera análoga se tiene que $\mu_{\overline{2}}(\emptyset,\{1\}) = -1$, finalmente

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{2}}(\emptyset,\{0,1\}) &= -\sum_{\emptyset \le A < \{0,1\}} \mu_{\overline{2}}(\emptyset, A) \\ &= -(\mu_{\overline{2}}(\emptyset,\emptyset) + \mu_{\overline{2}}(\emptyset,\{0\}) + \mu_{\overline{2}}(\emptyset,\{1\})) \\ &= -(1-1-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Proposición 3.1.26. *La función de Möbius de un COPO P puede calcularse por medio de la fórmula*

$$\mu_P(s,u) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-c_i)^{i+2},$$

donde c_i es el número de cadenas de longitud i que van de s a u.

Proposición 3.1.27 (Fórmula de Inversión de Möbius)**.** *Sea P un COPO tal que cualquier ideal principal es finito. Sean $f, g\colon P \to K$, donde K es un campo. Entonces*

$$g(t) = \sum_{s \le t} f(s), \quad \textit{para todo } t \in P$$

si y sólo si

$$f(t) = \sum_{s \le t} g(s)\mu(s,t), \text{ para toda } t \in P.$$

Proposición 3.1.28 (Fórmula de Inversión de Möbius, Forma Dual)**.** *Sea P un COPO tal que cualquier filtro principal es finito. Sean $f, g\colon P \to K$, donde K es un campo. Entonces*

$$g(t) = \sum_{s \ge t} f(s), \text{ para todo } t \in P$$

si y sólo si

$$f(t) = \sum_{s \geq t} \mu(s,t)g(t), \text{ para toda } t \in P.$$

Proposición 3.1.29. *Sean P y Q COPOs localmente finitos. Si $(s,t) \leq (s',t')$ en $P \times Q$, entonces*

$$\mu_{P\times Q}((s,t),(s',t')) = \mu_P(s,s')\mu_Q(t,t').$$

3.2. Retículos de Particiones de Conjuntos

Definición 3.2.1. Una **partición** de un conjunto S es un conjunto π de subconjuntos de S tal que:

i) $\bigcup_{V_i \in \pi} V_i = S$,

ii) si $U, V \in \pi$ y $U \neq V$, entonces $U \cap V = \emptyset$ y

iii) para todo $A \in \pi$, $A \neq \emptyset$.

A los elementos de π les llamaremos **bloques**. Denotaremos por $\mathcal{P}(S)$ el conjunto de todas las particiones de S, y en el caso que $S = [n]$ simplemente será $\mathcal{P}(n)$, donde $[n] = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Definición 3.2.2. Dado $n \geq 1$ y $\pi \in \mathcal{P}(n)$ decimos que π es una partición:

1. que tiene **cruces**, si existen dos distintos bloques $V_1, V_2 \in \pi$, tales que
$$a < b < c < d, \text{ con } a, c \in V_1,\ b, d \in V_2.$$
2. que **no se cruza**, si no tiene cruces, y al conjunto de todas las particiones que no se cruzan lo denotamos por $\mathcal{NC}(n)$.
3. por **intervalos** si y sólo si sus bloques contienen únicamente elementos consecutivos. Al subconjunto de las particiones por intervalos lo denotaremos por $\mathcal{I}(n)$.

Observación 3.2.3.

1. Para toda $n > 0$ se sigue que
$$\mathcal{I}(n) \subseteq \mathcal{NC}(n) \subseteq \mathcal{P}(n).$$
2. Al conjunto $\mathcal{P}(n)$ lo podemos dotar de una estructura de COPO de la siguiente manera: Dados $\sigma, \pi \in \mathcal{P}(n)$ diremos que $\sigma \leq \pi$ si para todo $V \in \sigma$ existe $W \in \pi$ tal que $V \subseteq W$. Más aún, con esta relación de orden podemos notar que $\mathcal{P}(n)$ es un retículo donde el $\widehat{1}$ y $\widehat{0}$ son $[n]$ y $\{\{i\} |\ i \in [n]\}$ respectivamente, y las operaciones $\pi_1 \wedge \pi_2$ y $\pi_1 \vee \pi_2$ están dadas por
$$\pi_1 \wedge \pi_2 = \{X_i |\ X_i = V \cup W, \text{ donde } i \in (V \cap W) \cap [n],\ V \in \pi_1,\ W \in \pi_2\}$$
y
$$\pi_1 \vee \pi_2 = \{X_i |\ X_i = V \cap W, \text{ donde } i \in (V \cap W) \cap [n],\ V \in \pi_1,\ W \in \pi_2\}.$$

3. Al tener $\mathcal{I}(n) \subseteq \mathcal{NC}(n) \subseteq \mathcal{P}(n)$ se puede heredar a los conjuntos $\mathcal{I}(n)$ y $\mathcal{NC}(n)$ la estructura de COPO anteriormente definida.

A cada partición $\pi \in \mathcal{P}$ se le puede asociar su **diagrama de partición**, el cual se puede dibujar en un segmento de línea, o bien, en un diagrama circular.

De hecho, la condición de ser una partición que no se cruza es equivalente a que en cualquiera de los dos diagramas se puedan dibujar todos los bloques sin que haya intersección de líneas.

Definición 3.2.4. Dado $\pi \in \mathcal{NC}(n)$, decimos que un bloque $V \in \pi$ es:

1. **interior**, si existe un bloque $V' \in \pi$ y $j, k \in V'$, tal que para cualquier $i \in V$,
$$j < i < k.$$
2. **exterior**, si no es interior.

Definición 3.2.5. Dado $n > 0$ y $\pi \in \mathcal{P}(n)$ decimos que:

1. $\overline{\pi}$ es la **cerradura sin cruces** de π, si $\overline{\pi}$ es la partición más pequeña de $\mathcal{NC}(n)$ que domina a π.
2. $\widehat{\pi}$ es la **cerradura por intervalos** de π si $\widehat{\pi}$ es la partición más pequeña de $\mathcal{I}(n)$ que domina a π.
3. π es **irreducible** si su cerradura por intervalos es $1_n \in \mathcal{I}(n)$. Denotaremos mediante $\mathcal{P}(n)_{irr}$ y $\mathcal{NC}(n)_{irr}$ a los conjuntos de elementos irreducibles de $\mathcal{P}(n)$ y $\mathcal{NC}(n)$ respectivamente.

Observamos que una partición π es irreducible si y sólo si existe un bloque $V \in \pi$ tal que $1, n \in V$.

Observación 3.2.6. Si π es una partición que no cruza, entonces los bloques exteriores tienen estructura de partición por intervalos.

Si π es una partición que no cruza, entonces existe al menos un bloque V de π que es un intervalo, este se puede encontrar buscando en los bloques interiores.

Al removerse tal bloque la partición debe seguir siendo una partición que no se cruza. Esta caracterización es importante para demostraciones inductivas.

Definición 3.2.7. Sea $\gamma = (1, 2, \ldots, n)$ la permutación del ciclo largo. Definiremos los conjuntos $\mathcal{I}^o(n)$, $\widetilde{\mathcal{I}}(n)$ y $\widetilde{\mathcal{I}}^o(n)$ como

$$\mathcal{I}^o(n) := \{\pi \in \mathcal{P}(n) |\ \text{para alguna } k \leq n, \gamma^k \pi \in \mathcal{I}(n)\},$$

$$\widetilde{\mathcal{I}}(n) := \{\pi \in \mathcal{P}(n) |\ \text{todo bloque interno de } \pi \text{ es un singulete}\},$$

y

$$\widetilde{\mathcal{I}}^o(n) := \{\pi \in \mathcal{P}(n) |\ \text{para alguna } k \leq n, \gamma^k \pi \in \widetilde{\mathcal{I}}(n)\}.$$

Si consideramos que 1 y n son consecutivos (es decir, pensamos a las particiones en su representación cíclica), entonces las particiones de $\mathcal{I}^o(n)$ son por intervalos.

Estructura de $\mathcal{I}^o(n)$, $\widetilde{\mathcal{I}}(n)$ e $\widetilde{\mathcal{I}}^o(n)$

Estudiemos un poco los conjuntos $\widetilde{\mathcal{I}}(n)$, $\mathcal{I}^o(n)$ y $\widetilde{\mathcal{I}}^o(n)$definidos en 3.2.7 dotados de la estructura de retículo que se les dota en la Observación 3.2.3, al verse como sub-COPOS de $\mathcal{P}(n)$.

Las siguientes propiedades de $\mathcal{NC}(n)$ se pueden encontrar en el libro de Nica y Speicher [36]. Algunas de ellas datan del artículo pionero de Kreweras sobre la combinatoria de particiones que no se cruzan [27].

Definición 3.2.8. *Definimos el n-ésimo número de Catalán como*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}.$$

Proposición 3.2.9. *El número de elementos de $\mathcal{NC}(n)$ es el n-ésimo número de Catalán C_n. Este coincide además con el número de particiones por pares (o emparejamientos) que no se cruzan en $\mathcal{NC}(2n)$.*

Definición 3.2.10. Dado $n > 0$ tal que definimos el orden parcial $\leq_n$ en $\{0,1\}^n$ como: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq_n (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ si y sólo si para toda $i \leq n$, $a_i \leq b_i$.

Lo anterior no es más que el producto cartesiano de la Definición 3.1.4 del conjunto $\{0,1\}$ con el orden usual que hereda de $\mathbb{N}$.

Por la Proposición 3.1.29 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.2.11. $\mu_{\{0,1\}^n}((0,0,\ldots,0),(1,1,\ldots,1)) = (-1)^n$.

Demostración. Se sigue de la Proposición 3.1.29, pues

$$\mu_{\{0,1\}^n}((0,0,\ldots,0),(1,1,\ldots,1)) = \mu_{\{0,1\}}((0,1))^n = (-1)^n.$$

□

Proposición 3.2.12. *El orden parcial antes descrito en $\{0,1\}^n$ es isomorfo al de las particiones por intervalos $\mathcal{I}(n+1)$*

Demostración. Pensemos primero en la n-tupla de puros 0's, al que le asociaremos la partición 0_{n+1}. Será útil pensar que los n ceros de la tupla son "botones" acomodados justo entre los singuletes consecutivos de 0_{n+1}.

Posteriormente, para cada botón cero situado entre un par de números consecutivos $(r, r+1)$, de tal forma que no se encuentren en el mismo bloque intervalo, podemos cambiar la partición uniendo los bloques consecutivos (formando así un bloque por intervalo mas grande) y se cambia el botón 0 que se presionó por un 1.

Es fácil convencerse de que, de esta manera, cada configuración de n 0's y 1's corresponde de manera biyectiva a una partición por intervalos de $\mathcal{I}(n+1)$. Para obtener ésta, basta observar que tener un 1 a continuación significa que el bloque en la partición por intervalos continúa, mientras que un cero quiere decir que el bloque termina en ese elemento y comienza un nuevo bloque intervalo). □

Definición 3.2.13. Definimos el penúltimo piso de $\mathcal{I}(n)$ como el conjunto $I_{n-1}(n) = \{\pi \in \mathcal{I}(n) | \; |\pi| = 2\}$, es decir, $I_{n-1}(n)$ consiste de las particiones por intervalos que tienen únicamente dos bloques. Estas se encuentran en el diagrama de Hasse exactamente debajo de la partición máxima 1_n.

El conjunto $\mathcal{I}(n) \setminus I_{n-1}(n)$ puede dotarse de la restrición del orden usual en $\mathcal{I}(n)$

Teorema 3.2.14. *Dado $n > 0$, $\widetilde{\mathcal{I}}(n)$ es isomorfo al COPO $\mathcal{I}(n+1)$ sin el penúltimo piso.*

Demostración. La idea es hacer nuevamente la correspondencia entre cadenas de ceros y unos con particiones por intervalos.

En esta ocasión, debemos pensar a los números del 1 al $n+1$ acomodados a lo largo de una circunferencia, indexando $n+1$ puntos (usualmente dibujados equidistantes en el círculo).

Entonces, la única diferencia con el caso anterior es que se dispone de un botón cero (o uno, si este se presiona) adicional, a la derecha del $n+1$ y a la izquierda del 1. Al presionarse (es decir cambiar ese cero por 1), unirá a los bloques que contengan al 1 y a $n+1$.

Esta correspondencia se separa en 3 casos:

Primero, si se cambian $0 \leq k \leq n-1$ ceros por unos, entonces cada configuración corresponderá a una única partición por intervalos cíclicos.

En el caso en que se cambian exactamente $k = n$ ceros por 1's (es decir se deja un único cero en la configuración), se obtiene la misma partición (la de un solo bloque, 1_{n+1}),

Por último, presionar los $n+1$ botones no genera una nueva partición, pues ya se tenía de antemano la partición más grande.

Por tanto, el conjunto de particiones por intervalos cíclicos $\mathcal{I}^o(n)$ pueden pensarse como un COPO isomorfo a $\mathcal{I}(n+1)$ sin el penúltimo piso.

Alternativamente, podemos describir explícitamente el isomorfismo de COPOs. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ y que $1 \in V_k$ definimos la relación $P \colon \mathcal{I}^o(n) \to \mathcal{I}(n+1)$ como

$$P(\pi) = \begin{cases} \pi \cup \{\{n+1\}\} & \text{si } \pi \in \mathcal{I}(n) \setminus \{[n]\} \\ [n+1] & \text{si } \pi = [n] \\ \{V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}\} \cup \{A_1, A_2\} & \text{si } \pi \in \mathcal{I}^o(n) \setminus \mathcal{I}(n) \end{cases},$$

donde A_1 y A_2 son la partición del bloque V_k en sus dos sub-bloques intervalos inicial y final.

Se sigue que P es una función, falta ver que P es un morfismo de orden inyectivo tal no toca el penúltimo piso.

Consideremos $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{I}^o(n)$ tales que $\pi_1 = \{V_1, , V_2, \ldots, V_k\}$, $\pi_2 = \{V_1', V_2', \ldots, V_r'\}$ y $\pi_1 \leq \pi_2$ y probemos que $P(\pi_1) \leq P(\pi_2)$. Se tienen siguientes cuatro casos:

1. Si $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{I}(n)$, entonces $P(\pi_1) = \pi_1 \leq \pi_2 = P(\pi_2)$.

2. Si $\pi_1 \in \mathcal{I}(n)$ y $\pi_2 \in \mathcal{I}^o(n) \setminus \mathcal{I}(n)$, entonces para toda $i \leq k$ existe $j \leq r$ tal que $V_i \subseteq V'_j$. Supongamos que $n \in V_1$ y $1 \in V_k \cap V'_r$, y debido a que $\pi_2 \in \mathcal{I}^o(n) \setminus \mathcal{I}(n)$ se tiene que $n \in V'_r$, de esto se sigue que $V_1, V_k \subseteq V'_r$. Debido a que V_1 y V_k son intervalos en $[n]$ tenemos que $V_2 \subseteq \{i \in V'_r \cup \{n+1\} | \ i \leq n+1\} = A'_1$ y $V_k \subseteq \{i \in V'_r \cup \{n+1\} | \ i \geq n+1\} = A'_2$. Por lo que
$$P(\pi_1) = \pi_1 \leq \{V'_1, V'_2, \dots, V'_{r-1}, A_1, A_2\} = P(\pi_2) \in I(n+1).$$
3. El caso $\pi_1 \in \mathcal{I}^o(n) \setminus \mathcal{I}(n), \pi_2 \in \mathcal{I}(n)$ se sigue del inciso anterior.
4. Si $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{I}^o(n) \setminus \mathcal{I}(n)$, entonces para toda $i \leq k$ existe $j \leq r$ tal que $V_i \subseteq V'_j$, en particular $V_k \subseteq V'_r$. Por lo que $A_1 \subseteq A'_1$ y $A_2 \subseteq A'_2$, y así
$$P(\pi_1) \leq P(\pi_2).$$

Concluimos que P es un morfismo de orden, veamos ahora que P es inyectiva.

Tomemos pues $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{I}^o(n)$ tales que $\pi_1 = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$, $\pi_2 = \{V'_1, V'_2, \dots, V'_r\}$ y $P(\pi_1) = P(\pi_2)$. Debido a que
$$P(\pi_1) = \begin{cases} \pi_1 \cup \{\{n+1\}\} & \text{si } \pi_1 \in \mathcal{I}(n) \\ [n+1] & \text{si } \pi_1 = [n] \\ \{V_1, V_2, \dots, V_{k-1}\} \cup \{A_1, A_2\} & \text{si } \pi_1 \in \mathcal{I}^o(n) \setminus \mathcal{I}(n) \end{cases}$$
y que
$$P(\pi_2) = \begin{cases} \pi_2 \cup \{\{n+1\}\} & \text{si } \pi_2 \in \mathcal{I}(n) \\ [n+1] & \text{si } \pi_2 = [n] \\ \{V'_1, V'_2, \dots, V'_{k-1}\} \cup \{A'_1, A'_2\} & \text{si } \pi_2 \in \mathcal{I}^o(n) \setminus \mathcal{I}(n) \end{cases}$$
se sigue que $k = r$, y así $\pi_1 \in \mathcal{I}(n)$ si y sólo si $\pi_2 \in \mathcal{I}(n)$. Luego, $\{V_1, V_2, \dots, V_k\} = \{V'_1, V'_2, \dots, V'_k\}$ si $\pi_1 \in \mathcal{I}(n)$; o bien $\{V_1, V_2, \dots, V_{k-1}\} = \{V'_1, V'_2, \dots, V'_{k-1}\}$, $A_1 = A'_1$, A_2, A'_2. Deducimos que $\pi_1 = \pi_2$ pues $A_1 \cup A_2 = V_k = V'_r = A'_1 \cup A'_2$, por lo que P es un morfismo inyectivo.

Veamos que P no toca el penúltimo piso de $\mathcal{I}(n+1)$, esto es, el conjunto, para esto supongamos que existe $\pi \in \widetilde{\mathcal{I}}(n)$ tal que $P(\pi) \in I_n(n+1)$. Notamos que
$$\pi \neq [n],$$
pues $P(\pi) = [n+1]$. Si $\pi \in \mathcal{I}(n) \setminus \{[n]\}$, entonces $P(\pi) = \pi \cup \{n+1\}$, por lo que $|P(\pi)| \geq 3$ y así
$$P(\mathcal{I}(n) \setminus \{[n]\}) \cap I_n(n+1) = \emptyset.$$
Ahora si $\pi \in \mathcal{I}(n) \setminus \mathcal{I}(n)$, entonces $|\pi| \geq 2$, por lo que $|P(\pi)| \geq 3$ pues existe $V \in \pi$ tal que $\{1, n\} \subseteq V$. Luego
$$P(\mathcal{I}^o(n) \setminus \mathcal{I}(n)) \cap I_n(n+1) = \emptyset.$$

Concluimos que $P(\mathcal{I}^o(n)) \cap I_n(n+1) = \emptyset$.

Por último veamos que $\mathcal{I}(n+1) \setminus I_n(n+1) \subseteq P(\mathcal{I}^o(n))$. Para esto tomemos $\pi \in \mathcal{I}(n+1) \setminus (I_n(n+1) \cup \{[n+1]\})$, $\pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$.

$$P^{-1}(\pi) = \begin{cases} \{V_1, V_2 \ldots, V_k\} \setminus \{V_i\} & \text{si } \{n+1\} = V_i \\ \pi' & \text{en otro caso} \end{cases},$$

Donde $\pi' = (\{V_1, V_2 \ldots, V_k\} \setminus \{V_i \setminus \{n+1\}, V_j\}) \cup \{V_i' \cup V_j\}$ con $n+1 \in V_i$, $1 \in V_j$ y $V_i' = V_i \setminus \{n+1\}$. Así,

$$\text{Si } \pi \in \mathcal{I}(n+1) \setminus I_n(n+1),\ P^{-1}(\pi) \in \mathcal{I}^o.$$

Por tanto, concluimos que $\mathcal{I}^o(n)$ es isomorfo a $\mathcal{I}(n+1)$ sin el penúltimo piso. $\square$

Corolario 3.2.15. *Para toda $n > 0$, $|\mathcal{I}^o(n)| = |\mathcal{I}(n+1) \setminus I_n(n+1)| = 2^n - n$*

Funciones de Möbius

Calculemos ahora las funciones de Möbius para los retículos $\widetilde{\mathcal{I}}(n)$, $\mathcal{I}^o(n)$ y $\widetilde{\mathcal{I}}^o(n)$.

Observación 3.2.16. *Para $n \leq 3$ se tiene que*

$$\begin{aligned} \mu(\widetilde{\mathcal{I}}(1)) &= \mu(\mathcal{I}^o(1)) = \mu(\widetilde{\mathcal{I}}^o(1)) = 1 \\ \mu(\widetilde{\mathcal{I}}(2)) &= \mu(\mathcal{I}^o(2)) = \mu(\widetilde{\mathcal{I}}^o(2)) = -1 \\ \mu(\widetilde{\mathcal{I}}(3)) &= \mu(\mathcal{I}^o(3)) = \mu(\widetilde{\mathcal{I}}^o(3)) = 2, \end{aligned}$$

pues $\widetilde{\mathcal{I}}(n) = \mathcal{I}^o(n) = \widetilde{\mathcal{I}}^o(n) = \mathcal{NC}(n)$, para $n \in \{1, 2, 3\}$.

Proposición 3.2.17. *El retículo $\widetilde{\mathcal{I}}(n)$ cumple la propiedad* **PB'**.

Demostración. Para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ definamos $\pi_i = \{\{i\}, [n] \setminus \{i\}\}$. Probemos que para cualquier $i \leq n$, $\widetilde{\mathcal{I}}(n-1) = [0_n, \pi_i]$, para esto veamos que si $j \leq n$, entonces $[0_n, A_j]$ es isomorfo a $[0_n, A_1]$. Consideremos $\rho_i \in S_n$ tal que

$$\rho_i(j) = \begin{cases} j-1 & \text{si } j < i, \\ 1 & \text{si } j = i, \\ j & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Tomemos $\phi_i : [0_n, \pi_i] \to [0_n, \pi_1]$ definida como $\phi(\pi) = \pi'$, donde $\rho_i(j)$ y $\rho_i(j+1)$ están en el mismo bloque de π' si i e $i+1$ están en un mismo bloque de π. Se sigue de la definición de ϕ_i que es una función biyectiva, y además, preserva el orden, por lo que $[0_n, A_j]$ es isomorfo a $[0_n, A_1]$. Como

$$[0_n, \{\{1\}, \{2, 3, \ldots, n\}\}] \simeq \widetilde{\mathcal{I}}(n),$$

concluimos que el retículo $\widetilde{\mathcal{I}}(n)$ cumple la propiedad **PB'**. $\square$

Proposición 3.2.18. *Para cualquier retículo finito $\mathcal{R}$ tenemos que si $\omega \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, entonces*

$$\sum_{\pi \in \mathcal{R}_\omega} \mu(0, \pi) = 0,$$

donde $\mathcal{R}_\omega = \{\pi \in \mathcal{R} |\ \pi \vee \omega = 1\}$.

La prueba de la proposición se puede cosultar en el libro de Stanley [39] o en [36].

Usaremos la propiedad **PB'** y la proposición anterior para ver cual es la función de Möbius de $\widetilde{\mathcal{I}}(n)$.

Proposición 3.2.19. *La fórmula de Möbius para $\widetilde{\mathcal{I}}(n)$ cumple la siguiente fórmula recursiva:*

$$\mu(\widetilde{\mathcal{I}}(n)) = -2\mu(\widetilde{\mathcal{I}}(n-1)),$$

para $n \geq 4$.

Demostración. Sean $n \geq 4$ y $\omega = \{\{1,2\},\{3\},\{4\},\dots,\{n\}\} \in \widetilde{\mathcal{I}}(n)$. Entonces $\pi \in \widetilde{\mathcal{I}}(n)$ cumple $\pi \vee \omega = 1$ si y sólo si

$$\pi = 1_n,\ \pi = \{\{1\},\{2,3,\dots,n\}\} \text{ o bien } \pi = \{\{2\},\{1,3,\dots,n\}\}.$$

Así,

$$\mu(0_n, 1_n) + \mu(0_n, \{\{1\},\{2,3,\dots,n\}\}) + \mu(0_n, \{\{2\},\{1,3,\dots,n\}\}) = 0,$$

o de manera equivalente,

$$\mu(0_n, 1_n) = -\mu(0_n, \{\{1\},\{2,3,\dots,n\}\}) - \mu(0_n, \{\{2\},\{1,3,\dots,n\}\}).$$

Como $\widetilde{\mathcal{I}}(n)$ cumple **PB'** obtenemos la siguiente fórmula:

$$\mu(\widetilde{\mathcal{I}}(n)) = \mu(0_n, 1_n)) = -2\mu(\widetilde{\mathcal{I}}(n-1)).$$

□

Calculemos ahora la función de Möbius para $\mathcal{I}^o(n)$.

Proposición 3.2.20. *Para toda $n \geq 3$ tenemos que*

$$\mu(\mathcal{I}^o(n)) = (-1)^{n+2} + n(-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}(n-1).$$

Demostración. Para esta demostración usaremos la notación $[\sigma,\pi]_{\mathcal{I}^o(n)}$ para indicar que es un intervalo de $\mathcal{I}^o(n)$, de la misma manera usaremos $[\sigma,\pi]_{\mathcal{I}(n)}$ para los intervalos de $\mathcal{I}(n)$. Por el Teorema 3.2.14 tenemos que para toda $n \geq 2$, $\mathcal{I}^o(n)$ es isomorfo (en sentido de orden) a $\mathcal{I}(n+1)$ sin en penúltimo piso, esta propiedad la usaremos para calcular la función de Möbius. Definamos $\mathcal{I}(n+1)_{n+1} = \{\pi \in \mathcal{I}(n+1) |\ |\pi| = 2\}$ Por lo anterior tenemos

$$\begin{aligned}
\mu(\mathcal{I}^o(n)) &= \mu([0_n, 1_n]_{\mathcal{I}^o(n)}) \\
&= - \sum_{\pi \in [0_n, 1_n)_{\mathcal{I}^o(n)}} \mu([0, \pi]_{\mathcal{I}^o(n)}) \\
&= - \sum_{\pi \in \mathcal{I}(n+1) \setminus \mathcal{I}(n+1)_{n+1}} \mu([0_{n+1}, \pi]_{\mathcal{I}(n+1)}) \\
&= \mu(\mathcal{I}(n+1)) + \sum_{\pi \in \mathcal{I}(n+1)_{n+1}} ([0_{n+1}, \pi]_{\mathcal{I}(n+1)}) \\
&= (-1)^{n+2} + n(-1)^{n+1},
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. □

No pudimos encontrar una forma sencilla para $\widetilde{\mathcal{I}}^o(n)$, por lo cual la omitimos de este trabajo.

Capítulo 4

Probabilidad e Indepedendencia no-Conmutativa

4.1. Espacios de Probabilidad no-Conmutativa

Definición 4.1.1. Un **espacio de probabilidad no-conmutativa** (**EPNC**) es un par ordenado $(\mathcal{A}, \tau)$ tal que $\mathcal{A}$ es una $*$-álgebra[1] sobre $\mathbb{C}$ con unidad, y $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ un funcional lineal positivo[2] tal que $\tau(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathbb{C}}$. Los elementos de $\mathcal{A}$ serán llamadas **variables aleatorias no-conmutativas** (o simplemente **variables aleatorias**).

Asumiremos que el funcional τ cumple el papel de esperanza en probabilidad clásica, esto motiva a la siguiente definición.

Definición 4.1.2. Dados $(\mathcal{A}, \tau)$ un EPNC y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ variables aleatorias, llamamos **momento mixto** de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a cualquier expresión de la forma $\tau(a_{i(1)}, a_{i(2)}, \ldots, a_{i(k)})$ con $1 \leq i(1), i(2), \ldots, i(k) \leq n$. Y definimos la **distribución algebraica** de la tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ como la colección ordenada de todos sus momentos mixtos.

A las variables aleatorias que cumplen $a = a^*$ se les llama **autoadjuntas**. Si a es de la forma bb^* para alguna otra $b \in \mathcal{A}$ decimos que a es **positiva**.

En este trabajo nos interesan principalmente las distribuciones algebraicas. Sin embargo, cuando se trate de una sola variable $a \in \mathcal{A}$ autoadjunta, la distribución algebraica $(\tau(a^n))_{n\in\mathbb{N}}$ se puede codificar, algunas veces, en una medida de probabilidad μ_a en los reales, que tenga esos momentos (en el sentido usual de probabilidad clásica).

Es decir, que se satisfaga

$$\tau(a^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n \mathrm{d}\mu(x)$$

para todo $n \geq 1$.

Como ejemplos de EPNC's tenemos los siguientes:

[1]es decir, existe una involución antilineal $a \mapsto a^*$

[2]τ es positivo si $\tau(aa^*) \geq 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$

Ejemplos 4.1.3. *1.* a) *Consideremos $\mathcal{A} := M_n(\mathbb{C})$ como la $*$-álgebra de matrices de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$, con involución dada por la transpuesta conjugada.*

Sea $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ el funcional definido como:

$$\tau(A) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr(A)},$$

donde $\mathrm{Tr}(A)$ es la traza de la matriz A. Luego, τ es un funcional positivo tal que $\tau(Id_n) = 1$.

b) *En la misma álgebra, considerando el producto interno sesquilineal usual en $\mathbb{C}^n$, podemos considerar para cualquier vector $v \in \mathbb{C}^n$ de norma 1, el "estado vector"*

$$\tau_v(A) = \langle Av, v\rangle.$$

En particular para cualquier elemento e_i de la base ortonormal canónica $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ se tiene que

$$\tau_{e_i}(A) = \langle Ae_i, e_i\rangle = A_{ii},$$

es simplemente el funcional que extrae el i-ésimo elemento de la diagonal de A.

Cualquier combinación convexa de funcionales lineales positivos que preserven a la unidad vuelve a ser un funcional del mismo tipo. La traza normalizada del ejemplo a) es el promedio $\frac{1}{n}\sum_{i\leq n}\tau_{v_i}$ para cualquier base ortonormal $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{C}^n$.

Otros vectores generan funcionales aparentemente muy distintos. Por ejemplo, para el vector unitario $\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \ldots, 1)$, se tiene que

$$\tau_{\xi_0}(A) = \frac{1}{n}\sum_{i,j} A_{ij}.$$

Si ponemos $\xi_k = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \omega^k, \omega^{2k}, \ldots, \omega^{(n-1)k})$, con ω una raíz k-ésima primitiva de la unidad, entonces $\{\xi_k\}_{0\leq k\leq n-1}$ es una base ortonormal.

Observemos que

$$\tau_{\xi_k}(A) = \frac{1}{n}\sum_{i,j}\omega^{k(j-i)}A_{ij},$$

por lo que nuevamente el promedio $\tau = \frac{1}{n}\sum \tau_{ij} = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}$

2. Consideremos un espacio de probabilidad clásica $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, donde Ω es un conjunto no-vacío, $\mathfrak{F} \subseteq \Omega$ una sigma-álgebra de Ω y $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad en $\mathfrak{F}$.

Tomamos $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}$ como el conjunto de variables aleatorias con valores complejos, $\mathcal{F}$-medibles, con soporte acotado. Así, como el producto y suma de *funciones medibles acotadas también es una función medible y acotada, $\mathcal{A}$ es un álgebra.*

Considerando a $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ como la esperanza usual de la variable aleatoria

$$\tau : X \mapsto \mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{C}} X(\omega) \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega),$$

tenemos que $(\mathcal{A}, \tau)$ es un EPNC.

4.2. $\mathcal{B}$-Espacios de Probabilidad y $\circledast_{\mathcal{B}}$-independencia

Definición 4.2.1. 1. Un **espacio de probabilidad valuado en operadores (o bien, $\mathcal{B}$-espacio de probabilidad, o EPVO)** es una tripleta $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbb{F})$ tal que $\mathcal{A}$ es una $*$-álgebra, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ es una subálgebra y $\mathbb{F}$ es una **esperanza condicional**, es decir, $\mathbb{F} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una transformación lineal tal que para $a \in \mathcal{A}$ y $b, b' \in \mathcal{B}$,

$$\mathbb{F}(bab') = b\mathbb{F}(a)b' \ y \ \mathbb{F}(b) = b.$$

2. Dos estructuras valuadas en operadores $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_1, \mathbb{F}_1)$ y $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_2, \mathbb{F}_2)$ son **compatibles**, si $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ y $\mathbb{F}_1 \circ \mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_1$

3. Definimos la **distribución algebraica $\mathcal{B}$-valuada** de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ como la colección ordenada de evaluaciones de $\mathbb{F}$,

$$\mathbb{F}(a_{i_1} b_1 a_{i_2} b_2 \ldots b_{k-1} a_{i_k})$$

para todo $k \geq 1$, $b_1, b_2 \ldots, b_{k-1} \in \mathcal{B}$ y $i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n$.

En un álgebra no conmutativa usualmente se tiene que el conmutador $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \neq \{0\}$, lo cual motiva a considerar los momentos mixtos $\mathcal{B}$-valuados

$$\mathbb{F}(a_{i(1)} b_1 a_{i(2)} b_2 \ldots b_{k-1} a_{i(k)}).$$

Si ocurriera que $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \{0\}$ (como en el caso clásico) es redundante considerar estos nuevos momentos $\mathcal{B}$-valuados ya que

$$\mathbb{F}(a_{i_1} b_1 a_{i_2} b_2 \ldots b_n a_{i_{n+1}}) = b_1 b_2 \cdots b_{n-1} \mathbb{F}(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_{n+1}}).$$

Observación 4.2.2. Observamos que todo EPNC es también un EPVO, esto sucede tomando $\mathcal{B} = \mathbb{C}\langle 1_{\mathcal{A}} \rangle$ y $\mathbb{F} = \tau$. Cabe mencionar que para un EPVO en general no se requiere necesariamente que $\mathcal{B}$ contenga a la unidad multiplicativa de $\mathcal{A}$.

Ejemplo 4.2.3. *Dado un espacio de probabilidad clásico $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ y una subsigma-álgebra $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, tenemos que $\mathfrak{H}$ induce una única esperanza condicional $\mathbb{E}_{\mathfrak{H}} \colon \mathcal{A}_{\mathfrak{H}} \to \mathcal{A}_{\mathfrak{F}}$. Esta se determina por la propiedad de que para cualquier variable aleatoria $X \in \mathcal{A}_{\mathfrak{F}}$ existe una única $\mathbb{E}_{\mathfrak{H}}(X) \in \mathcal{A}_{\mathfrak{H}}$ tal que para todo $B \in \mathfrak{H}$,*

$$\int_B X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_B \mathbb{E}_{\mathfrak{H}}(X)(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Si se tiene una cadena de subsigma algebras $\mathfrak{H}_k \subseteq \mathfrak{H}_{k-1} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{H}_0 := \mathfrak{F}$*, entonces las esperanzas condicionales* $(\mathbb{E}_k, \mathbb{E}_{k-1}, \ldots, \mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0 = id_{\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}})$*, donde* $\mathbb{E}_i : \mathcal{A}_{\mathfrak{F}} \to \mathcal{A}_{\mathfrak{H}_i}$ *son compatibles (esto es, para* $0 \leq j \leq i \leq k$*,* $\mathbb{E}_i \circ \mathbb{E}_j = \mathbb{E}_i$*)*

Las nociones de independencia nos indican como factorizar los momentos mixtos de productos de variables provenientes de álgebras independientes $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$ en términos de los momentos restringidos a cada subálgebra, como ocurre en la probabilidad clásica.

Definición 4.2.4. Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbb{F})$ un espacio de probabilidad $\mathcal{B}$-valudado y $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$ sub-álgebras conteniendo a $\mathcal{B}$ (no necesariamente con unidad).

1. Las álgebras $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ son $\mathcal{B}$**-independientes en el sentido clásico o tensorial** si las álgebras conmutan entre sí (es decir, $[\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j] = 0$ para $i \neq j$), y para toda n-tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$,

$$\mathbb{F}(a_1 a_2 \ldots a_n) = \mathbb{F}(a_1)\mathbb{F}(a_2) \ldots \mathbb{F}(a_n).$$

2. Hagamos $\dot{a} = a - \mathbb{F}(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Decimos que las álgebras $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ son $\mathcal{B}$**-libres** si y sólo si

$$\mathbb{F}(\dot{a}_1 \dot{a}_2 \ldots \dot{a}_m) = 0,$$

para cualquier $m \geq 1$, $a_i \in A_{j(i)}$, $0 \leq j(1), j(2), \ldots, j(m) \leq n$ y $j(1) \neq j(2) \neq \ldots \neq j(m)$.

3. Decimos que las álgebras $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ son $\mathcal{B}$**-independientes booleanas** si y sólo si

$$\mathbb{F}(a_1 a_2 \ldots a_m) = \mathbb{F}(a_1)\mathbb{F}(a_2) \ldots \mathbb{F}(a_m),$$

para cualquier $m \geq 1$, $a_i \in A_{j(i)}$, $0 \leq j(1), j(2), \ldots, j(m) \leq n$ y $j(1) \neq j(2) \neq \ldots \neq j(m)$.

4. Decimos que las álgebras $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son $\mathcal{B}$**-independientes monótonas** (en ese orden) si y sólo si

$$\mathbb{F}(a_0 a_1 a_2 \ldots a_{2m}) = \mathbb{F}(a_0 \mathbb{F}(a_1) a_2 \mathbb{F}(a_3) a_4 \cdots a_{2m-2} \mathbb{F}(a_{2m-1}) a_{2m}),$$

para cualquier $m \geq 1$, $a_1, a_3, \ldots, a_{2n-1} \in \mathcal{A}_1$, $a_2, a_4, \cdots a_{2n-2} \in \mathcal{A}_1$ y $a_0, a_{2m} \in \mathcal{A} \cup \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle$.

5. Decimos que las álgebras $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son $\mathcal{B}$**-independientes anti-monótonas** (en ese orden) si y sólo si

$$\mathbb{F}(a_0 a_1 a_2 \ldots a_{2m}) = \mathbb{F}(a_0 \mathbb{F}(a_1) a_2 \mathbb{F}(a_3) a_4 \cdots a_{2m-2} \mathbb{F}(a_{2m-1}) a_{2m}),$$

para cualquier $m \geq 1$, $a_1, a_3, \ldots, a_{2n-1} \in \mathcal{A}_2$, $a_2, a_4, \cdots a_{2n-2} \in \mathcal{A}_1$ y $a_0, a_{2m} \in \mathcal{A} \cup \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle$.

Existe una clasificación axiomática de las nociones de independencia no-conmutativa dada por Ben-Ghorbal y Schürmann en [7]. En su trabajo, se discuten las propiedades universales que debería de cumplir una noción de independencia.

Sean $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ álgebras tales que $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ son subálgebras de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A} = \langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \rangle$. Consideremos también $\tau \colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ un funcional lineal positivo tal que $\tau(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathbb{C}}$, y $\tau_1 = \tau_{|\mathcal{A}_1}$ y $\tau_2 = \tau_{|\mathcal{A}_2}$. Una noción de independencia es una "receta universal"para calcular τ en términos de τ_1 y τ_2.

De acuerdo a lo que ocurre con la independencia clásica, las nociones de independencia no deberían de depender del orden de las álgebras, esto es, $\mathcal{A}_1$ es independiente a $\mathcal{A}_2$ si y sólo si $\mathcal{A}_2$ es independiente a $\mathcal{A}_1$.

Además, en principio, vamos a querer definir independencia para más de dos álgebras. Entonces se pide un axioma de asociatividad para poder extender las ultimas dos definiciones binarias de arriba a mas álgebras.

Se busca también que la independencia sea una propiedad de las álgebras generadas por variables aleatorias, y no una propiedad de las variables directamente. Para formular este axioma se emplean las propiedades universales del producto de álgebras (libre o tensorial, con o sin amalgamamiento en el álgebra generada por la unidad multiplicativa, según la categoría de álgebras en la que se esté trabajando)

Se puede extender este estudio al caso $\mathcal{B}$-valuado, tomando en cuenta los correspondientes productos amalgamados de álgebras.

Estos axiomas nos llevan, en el caso escalar, a tres nociones universales de independencia, acomodadas jerárquicamente en una pirámide, donde hasta arriba (en la categoría de álgebras conmutativas con unidad) tenemos la independencia clásica (tensorial), en el segundo nivel (álgebras no conmutativas con unidad) encontramos la clásica junto con la libre. Finalmente en el tercer nivel se encuentran las del piso anterior junto con la booleana, en la categoría de álgebras no conmutativas sin unidad.

Los axiomas propuestos en [7] están motivados por procesos de Lévy. Poco después de la clasificación de Ben-Ghorbal y Schürmann, Muraki introdujo procesos de Lévy para su independencia monótona (y su reflejada, la independencia anti-monótona), al notar que estos pueden definirse para nociones de independencia que no cumplen con el axioma de simetría (una de las cuatro propiedades propuestas por BGS).

Así, se añade un cuarto nivel a la clasificación, que incluye a las nuevas independencias monótona y antimonótona y a las tres consideradas anteriormente.

Notación 4.2.5. Para cada una de las nociones de independencia usaremos los siguientes símbolos: clásica $\otimes$, libre $*$, booleana $\star$, monótona $\rhd$ y antimonótona $\lhd$.

También, cuando estemos hablando de esperanza $\mathcal{B}$-condicional y queramos enfatizarlo escribiremos $\circledast_{\mathcal{B}}$-independencia, $\circledast \in \{\otimes, *, \star, \rhd, \lhd\}$.

Como se mencionó, las relaciones de independencia monótona (y anti-monótona) no son simétricas, pues el orden de la independencia tiene que ser especificado, es decir $\mathcal{A}_1$ $\triangleright$-independiente de $\mathcal{A}_2$ no equivale a que $\mathcal{A}_2$ sea $\triangleright$-independiente de $\mathcal{A}_1$.

Propiedades de Independecia.

Ahora definimos de manera precisa las propiedades de independencia mencionadas en la introducción.

Recordemos la Ley de Grandes Números (LGN) y el Teorema del Límite Central (TLC). Los enunciados de los teoremas clásicos corresponden al caso $\circledast = \otimes$.

Teorema 4.2.6 (LGN)**.** *Sean $\{a_i\}_{i\geq 1}$ variables aleatorias autoadjuntas $\otimes$-independientes idénticamente distribuidas*[3] *($\otimes$-i.i.d.) con media $\tau(a_1) = c$ y todos los momentos. Hagamos $S_n = n^{-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$, entonces*

$$S_n \to c.$$

Teorema 4.2.7 (TLC)**.** Sean $\{a_i\}_{i\geq 1}$ variables aleatorias autoadjuntas, $\otimes$-i.i.d. con media $\tau(a_1) = c$, varianza $\sigma^2 = \tau(a_1^2) - \tau(a_1)^2$ y todos los momentos. Para $S_n = n^{-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ definida como en la Ley de los Grandes Números (LGN), las fluctuaciones en torno a la media $\sqrt{n}(S_n - c)$ convergen a la distribución $\otimes$-Gaussiana con media 0 y varianza σ^2.

Para las demás independencias se cumple un TLC. Para el caso Booleano, monótono y anti-monótono se requiere que $c = 0$.

Las distribuciones límite son, respectivamente, la Normal ($\circledast = \otimes$), la distribución del semicírculo (o de Wigner, $\circledast = *$), la distribución Bernoulli simétrica ($\circledast = \star$), y la distribución arcoseno ($\circledast \in \{\triangleright, \triangleleft\}$).

Por esta razón se les conoce a cada una de estas distribuciones como la $\circledast$-Gaussiana.

Más adelante, cuando dispongamos de cumulantes, daremos caracterizaciones de las distribuciones Gaussianas y constantes, así como la demostración estándar de la LGN y el TLC para $\circledast \in \{\otimes, *\}$. El TLC centrado (c=0) se cumple que para todo $\circledast \in \{\otimes, *, \star, \triangleright, \triangleleft\}$.

Definición 4.2.8 (**P1**)**.** Una noción de independencia cumple la propiedad **P1** si para cualquier $c = \tau(a_1)$ las fluctuaciones en torno a la media $\sqrt{n}(S_n - c)$ convergen a la distribución $\circledast$-Gaussiana con media 0 y varianza σ^2.

Definición 4.2.9 (**PB**: Independencia $\mathcal{B}$-amigable)**.** Diremos que una noción de $\circledast$-independencia satisface la propiedad **PB** si para cualquier esperanza condicional $\mathbb{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, las álgebras $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ son $\circledast$-independientes.

Finalmente la tercer propiedad es:

[3] Decimos que un conjunto de variables aleatorias $\{a_i\}_{i\geq 1}$ son $\otimes$-independiente idénticamente distribuidas si a_i es $\otimes$-independiente de a_{i+1} y tienen la misma distribución.

Definición 4.2.10 (**PC**: Invarianza Cíclica y Compatibilidad con Permutaciones)**.** Una noción de $\circledast$-independencia se dice que satisface **PC**, si la invarianza cíclica en los momentos mixtos se transfiere a los $\circledast-$cumulantes $c^{\circledast}$, esto es, si

$$\mathbb{F}(a_1 a_2 \ldots a_n) = \mathbb{F}(a_2 a_3 \ldots a_n a_1),$$

para todo $n \geq 1$ y para todo $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ entonces

$$c_n^{\circledast}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = c_n^{\circledast}(a_2, a_3, \ldots a_n, a_1),$$

donde $c_n^{\circledast}$ es el respectivo cumulante.

Las independencias booleana y monótona no cumplen la propiedad **PB** ni la **PC**.

El interés por la probabilidad libre creció en las últimas décadas, sobre todo a partir de que Voiculescu mostró que su noción de independencia libre explica la distribución de los valores propios de ciertos modelos emblemáticos de matrices aleatorias.

En el caso de la probabilidad libre, la extensión a EPVOs comienza con Voicolescu en su artículo [51]. Para aplicaciones prácticas, esta extensión permite utilizar probabilidad libre, no sólo para entender los modelos pioneros en matrices aleatorias, sino también para explicar modelos más generales, utilizados en aplicaciones prácticas.

A diferencia de los casos clásico y libre, los conceptos de independencia booleana y monotóna cuenta con modelos más abstractos en términos de gráficas, operadores en espacios de Fock, entre otros.

Sin embargo, el desarrollo de las teorías de probabilidad monótona y booleana han servido para una comprensión más profunda de la probabilidad no conmutativa, en particular de la probabilidad libre.

Como las propiedades **PB** y **PC** son importantes para la aplicación de la probabilidad libre, buscamos nuevos cumulantes booleanos y monótonos que puedan cumplir con estas propiedades, y así poder encontrar aplicaciones mas directas y relevantes.

De hecho, la recientemente definida independencia monótona cíclica (directamente relacionada con nuestra propiedad **PC**), describe convergencias de pesos en eigenvalores para ciertos modelos de matrices aleatorias.

Otro uso de la propiedad **PC** (enfocándonos en el caso $\mathcal{B} = \mathbb{C}_{1_{\mathcal{A}}}$, o bien, cuando $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = 0$), es la posibilidad de considerar extensiones multiplicativas de familias de funcionales multilineales $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : \mathcal{A}^n \to \mathcal{B}$, sin ambigüedad, a permutaciones $(f_\alpha)_{n\geq 1, \alpha \in S(n)}$ (ver siguiente capítulo).

En matrices aleatorias, se emplean dichas extensiones multiplicativas para expresar de manera sucinta los momentos mixtos (no asintóticos) de matrices determinísticas y matrices aleatorias Gaussianas (no normalizadas):

$$\mathrm{Tr} \otimes \mathbb{E}(XD_1XD_2 \cdots XD_{2k-1}XD_{2k}) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(2n)} \mathrm{Tr}_{\pi\gamma}(D_1, D_2, \ldots, D_{2k}),$$

donde $\mathcal{P}_2(2n) \subset S_{2n}$ es el subconjunto de permutaciones que consisten únicamente de ciclos de tamaño 2 y $\gamma = (1, 2, \ldots, 2n)$ es la permutación larga de un solo ciclo.

De manera similar, se pueden describir las trazas esperadas de productos de matrices determinísticas y matrices unitarias aleatorias con la distribución de Haar (ver capítulos 22 y 23 del libro de Nica y Speicher [36]).

Observación 4.2.11. Las independencias clásicas y libres son unitarias en el sentido de que la independencia de cualquier par de álgebras

$$(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2), (\langle \mathcal{A}_1, 1_{\mathcal{A}} \rangle, \mathcal{A}_2), (\mathcal{A}_1, \langle \mathcal{A}_2, 1_{\mathcal{A}} \rangle), (\langle \mathcal{A}_1, 1_{\mathcal{A}} \rangle, \langle \mathcal{A}_2, 1_{\mathcal{A}} \rangle),$$

implica la independencia de los otros tres.

También el álgebra de constantes $\langle 1_{\mathcal{A}} \rangle$ (o $\mathcal{B}$ en el caso de $\mathcal{B}$-valuación) es independiente de toda el álgebra $\mathcal{A}$.

Por esto es común asumir en los casos libres y clásicos que todas las subálgebras a considerar contienen la unidad.

Este no es el caso de la independencia booleana ni monótona (ver capítulo siguiente).

Capítulo 5

Cumulantes

5.1. Extensiones Mutiplicativas de $\mathcal{B}$-mapeos.

Pensemos primero en el caso conmutativo, esto es, $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = 0$.

Definición 5.1.1. Dada una sucesión $\{\alpha_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$, definimos una familia de funciones $f_n \colon \mathcal{P}(n) \to \mathcal{B}$, $n \geq 1$, con la siguiente fórmula: si $\pi = \{V_1, V_2, \dots V_k\}$, entonces

$$f_n(\pi) := \alpha_{|V_1|}\alpha_{|V_2|} \dots \alpha_{|V_k|}.$$

Así, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es llamada **familia multiplicativa de una familia de funciones en** $\mathcal{P}(n)$ $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ determinada por la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$.

Una familia de funciones $\{f_n\}_{n\geq 1}$ se dice que es **multiplicativa** si existe una sucesión $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ tal que cumple lo anterior.

A continuación observaremos que los momentos permiten definir familias multiplicativas. Sus inversiones de Möbius dan lugar a los cumulantes, que caracterizan las nociones de independencia.

Definición 5.1.2. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con unidad y $\mathcal{B}$ subálgebra de $\mathcal{A}$. Dada una sucesión de funcionales $\mathcal{B}$-multilineales $\rho_n \colon \mathcal{A}^n \to \mathcal{B}$, podemos extender esto a una familia de funcionales $\rho_\pi \colon \mathcal{A}^n \to \mathcal{B}$, $n \geq 1$ y $\pi = \{V_1, V_2, \dots V_k\} \in \mathcal{P}(n)$ como:

$$\rho_\pi[a_1, a_1, \dots, a_n] := \prod_{1\leq i\leq k} \rho(V_i)[a_1, a_2, \dots, a_n],$$

donde

$$\rho(V)[a_1, a_2, \dots, a_n] := \rho_s(a_{i(1)}, a_{i(1)}, \dots, a_{i(s)})$$

con $V = \{i(1), i(2), \dots, i(s)\}$ y $\{i(1) < i(2) < \dots < i(s)\}$.

A la familia $\{\rho_\pi\}_{n\geq 1,\ \pi\in\mathcal{P}(n)}$ es llamada **extensión multiplicativa de funcionales en** $\mathcal{P}(n)$ determinada por $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$.

Definiremos las extensiones multiplicativas de funciones $\mathcal{B}$-multilineales $\{f_n\}_{n\geq 1}$, $f_n \colon \mathcal{A}^n \to \mathcal{B}$. Esto se hará para dos casos:

Caso 1. **(Todas las particiones,** $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = 0$**)**. Sea $\pi \in \mathcal{P}(n)$. Definimos la extensión multiplicativa a una partición $\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ de una familia de funciones $\mathcal{B}$-multilineal $\{f_n\}_{n\geq 1}$ como

$$f_\pi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{j\leq k} f_{V_j}(a_1, a_2, \ldots, a_k),$$

con

$$f_{V_j}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = f_{k(j)}(a_{v_1}, a_{v_2}, \ldots, a_{v_{k(j)}}),$$

donde $V_j = \{v_1, v_2, \ldots, v_{k(j)}\}$.

Por ejemplo, para la partición $\pi = \{\{1,2,5,9\},\{3\},\{4\},\{6,8\},\{7\}\}$, se tiene

$$f_\pi(a_1, a_2, \ldots, a_8, a_9) = f_4(a_1, a_2, a_5, a_9)f_1(a_3)f_1(a_4)f_2(a_6, a_8)f_1(a_7)$$

Caso 2. (Particiones que no se cruzan, caso no conmutativo). En el caso general $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \neq 0$, en el que las álgebras no conmutan, podemos definir la extensión multiplicativa de una familia de funciones, para una partición $\pi \in \mathcal{NC}(n)$. Para esto podemos usar la propiedad de las particiones que no se cruzan (de tener siempre al menos un bloque intervalo). Así definimos la extensión para $\mathcal{B}$-multilineales $\{f_n\}_{n\geq 1}$ de la siguiente manera:

Dado $\pi \in \mathcal{NC}(n)$ con un bloque $V = \{r+1, r+2, \ldots, s\} \in \pi$ que es intervalo, definimos

$$f_\pi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f_{\pi\setminus V}(a_1, a_2, \ldots, a_r b, a_{s+1}, \ldots, a_n),$$

donde $b = f_V(a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_s)$ y $\pi \setminus V$ es visto como una partición en $\mathcal{P}([n] \setminus [r+1, s])$. Esto lo hacemos recursivamente para cada intervalo que tengamos (el cual siempre hay por el anidamiento de las particiones que no se cruzan).

Por ejemplo, para la partición $\pi = \{\{1,2,5,9\},\{3\},\{4\},\{6,8\},\{7\}\}$, se tiene

$$f_\pi(a_1, a_2, \ldots, a_8, a_9) = f_4(a_1, a_2f_1(a_3)f_1(a_4), a_5f_2(a_6f_1(a_7), a_8), a_9)$$

Hay problemas cuando tratamos de definir f_π en el caso de cualquier partición, la definición se vuelve ambigua al intentar definir la extensión con la presencia de cruces en π.

Para que, en el caso de particiones que no se cruzan, no influya en la definición la elección de colocar el b a la derecha de a_r o a la izquierda de a_{s+1}, se le pide a la familia de funciones $\mathcal{B}$-multilineales $\{f_n\}_{n\geq 1}$ que sea $\mathcal{B}$**-balanceada**, esto es:

$$f_n(a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}b, a_r, \ldots, a_n) = f_n(a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, ba_r, \ldots, a_n)$$

y

$$f_n(ba_1, \ldots, a_n) = bf_n(a_1, \ldots, a_n), \quad f_n(a_1, \ldots, a_nb) = f_n(a_1, \ldots, a_n)b.$$

Las propiedades de una esperanza condicional $\mathbb{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, garantizan que la familia de funciones $\mathcal{B}$-multilineales $(\mathbb{F}_n)_{n \geq 1}$, definidos por

$$\mathbb{F}_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \mathbb{F}(a_1 a_2 \cdots a_n),$$

sea $\mathcal{B}$-balanceada.

5.2. **Cumulantes.**

Definición 5.2.1. Decimos que una familia $\omega = \{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un **peso** en $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{P}(n)$, cuando $\omega_n \colon \mathcal{P}(n) \to \mathbb{C}$ es una función. A las funciones ω_n les diremos peso en $\mathcal{P}(n)$. El **soporte** de ω es el subconjunto de $\mathcal{P}(n)$ donde ω no es cero. En este trabajo nos concentramos principalmente en pesos soportados en subconjuntos de $\mathcal{NC}$.

Un peso ω_n en $\mathcal{P}(n)$ es **multiplicativo** si se factoriza de acuerdo a los bloques indicados por las cerraduras por intervalos de las particiones, es decir, si $\pi \in \mathcal{P}(n)$ no es irreducible, entonces

$$\omega_n(\widehat{\pi}) = \prod_{i\leq k} \omega_{|V_i|}(V_i),$$

donde $\widehat{\pi} = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ y $V_i = 1_{|V_i|} \in \mathcal{I}(|V_1|)$.

Ejemplos 5.2.2. Los pesos para cumulantes clásicos $\omega^{\otimes}$, libres ω^{*} y booleanos $\omega^{\star}$ son, respectivamente, las funciones indicadoras (i.e. los pesos son todos igual a 1 en el soporte) de los conjuntos $\mathcal{P}, \mathcal{NC}$ y $\mathcal{I}$.

Nota 5.2.3. Los pesos para los cumulantes monótonos están soportados en las particiones que no se cruzan $\mathcal{NC}$.

Los pesos monótonos son números racionales entre cero y uno. En general se definen para una partición que no se cruza como el bosque factorial

$$\omega^{\triangleright}(\pi) = \mathfrak{F}(\pi)!,$$

que depende únicamente del bosque de anidamientos de la partición (ver definiciones de estos conceptos en [3] por Arizmendi, Hasebe, Lenher y Vargas). En particular, el peso monótono de una partición es 1 si y sólo si se trata de una partición por intervalos.

Definición 5.2.4. Sea $\circledast \in \{\otimes, *, \star, \triangleright\}$ alguna de las nociones de independencia con sus pesos $\omega : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$. $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbb{F})$, un EPNC $\mathcal{B}$-valuado (con $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = 0$, en caso de que $\circledast = \otimes$).

Los correspondientes $\circledast$**-cumulantes** $\{c_\pi^{\circledast}\}_{\pi\in\mathcal{P}_{\circledast}(n)}$ son funcionales $\mathcal{B}$-multilineales tales que $c_\pi^{\circledast} \colon \mathcal{A}^n \to \mathcal{B}$ y están definidos (de manera recursiva) por:

$$\mathbb{F}(a_1 a_2 \ldots a_n) = \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(n)} \omega_n^{\circledast}(\pi) c_\pi^{\circledast}[a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Aquí se toma la definición de extensión multiplicativa $c_\pi^{\circledast}$ de acuerdo al caso (1) cuando se trabaje con independencia clásica. El resto de las situaciones revisadas en este trabajo son subconjuntos de particiones que no se cruzan, por lo que se debe tener principalmente el caso (2).

Los cumulantes caracterizan la independencia.

Definición 5.2.5. Sean $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ álgebras y $\circledast$ una noción de independencia. Decimos que $c_k^{\circledast}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ es un cumulante mixto, si $a_i \in \mathcal{A}_{j(i)}$ y existen $r, r' \leq k$ tal que $j(r) \neq j(r')$.

Teorema 5.2.6 ([38], [45], [44] (Speicher-Woroudi))**.** *Sea $\circledast \in \{\otimes, *, \star\}$. Las álgebras $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ son $\circledast_{\mathcal{B}}$-independientes si y sólo si todos los cumulantes mixtos se anulan.*

Para el caso booleano, se puede observar, por ejemplo, que si u_2 es la variable aleatoria con distribución Bernoulli simétrica en ± 1, entonces $c_3^{\star}(u_2, 1_{\mathcal{A}}, u_2) = 1 \neq 0$. Por lo tanto, las constantes no son independientes del resto de las variables aleatorias.

Algunos aspectos de las independencias universales se complican un poco al pasar a la independencia monótona. Por ejemplo, la caracterización de independencia del teorema anterior no se cumple en la misma generalidad.

Teorema 5.2.7 ([22] (Hasebe-Saigo))**.** *Los cumulantes monótonos mixtos se anulan al evaluarse en variables aleatorias $\triangleright$-independientes, siempre que estas tengan la misma distribución.*

En este trabajo se contemplan variaciones a las independencias booleana y monótona. El caso booleano arroja por sí solo suficientes discusiones. Por esta razón nos concentramos en éste principalmente y abordamos por el momento el caso monótono de manera forma muy superficial.

Observación 5.2.8. El anulamiento de cumulantes mixtos en combinación con su propiedad de multilinealidad implica aditividad en los cumulantes de sumas de variables aleatorias independientes. Por ejemplo, si a_1 y a_2 son $\circledast$-independientes con $\circledast \in \{\otimes, *, \star\}$, entonces para todo $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} c_n^{\circledast}(a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2) &= \sum_{i:[n] \to \{1,2\}} c_n^{\circledast}(a_{i(1)}, \ldots, a_{i(n)}) \\ &= c_n^{\circledast}(a_1, \ldots, a_1) + c_n^{\circledast}(a_2, \ldots, a_2), \end{aligned} \tag{5.1}$$

pues los términos que mezclan a_1's y a_2's se anulan.

La propiedad anterior es sumamente útil para dar una demostración directa de la LGN y el TLC (centrado y no centrado).

Notemos que en los contextos de la LGN y el TLC (centrado), la identidad aditiva de los cumulantes se vale también en el caso monótono, pues en dichas situaciones se consideran variables aleatorias $\triangleright$-i.i.d.

Así veremos la relación entre **PB** y **P1**.

Observación 5.2.9. Dados $(\mathcal{A}, \tau)$ un EPNC, $a \in \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle$ y $\circledast \in \{\otimes, *, \star, \triangleright, \triangleleft\}$ se sigue que $c_n^{\circledast}[a, a, \ldots, a] = 0$, cuando $n \geq 2$.

Esto se sigue por inducción, notamos que $c_1^{\circledast}[a] = \tau(a)$ y $c_2^{\circledast}[a, a] = \tau(aa) - \tau(a)\tau(a) = 0$. Supongamos que para toda $k < n$, $c_k^{\circledast}[a, a, \ldots, a] = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(a^n) - \sum_{\pi \in \mathcal{P}^{\circledast}(n)} c_\pi^{\circledast}(a, a, \ldots a) \\ &= \tau(a^n) - \tau(a)^n - \sum_{\pi \in \mathcal{P}^{\circledast}(n) \setminus \{0_n\}} c_\pi^{\circledast}(a, a, \ldots, a) \\ &= - \sum_{\pi \in \mathcal{P}^{\circledast}(n) \setminus \{0_n\}} c_\pi^{\circledast}(a, a, \ldots, a) \\ &= -c_n(a, a, \ldots, a), \end{aligned}$$

pues si $\pi \in \mathcal{P}^{\circledast}(a)$ y $|\pi| \geq 2$, entonces $c_\pi[a, a, \ldots, a] = 0$ por la hipótesis de inducción.

Definición 5.2.10. Definimos la variable aleatoria $\circledast$-Gaussiana como la variable autoadjunta cuyo primer cumulante es c, el segundo es σ^2 y los cumulantes de grado mayor o igual que tres se anulan, es decir,

$$\begin{aligned} c_1(a) &= c \\ c_2(a, a) &= \sigma^2 \\ c_3(a, a, a) &= 0 \\ &\vdots \\ c_n(a, a, \ldots, a) &= 0. \\ &\vdots \end{aligned}$$

De esta forma se puede pensar que las variables aleatorias constantes son las que tienen los cumulantes más simples, seguidas de las Gaussianas.

Teorema 5.2.11 (Ley de los Grandes Números)**.** *Sean $\{a_i\}_{i \geq 1}$ variables aleatorias $\circledast$-independientes idénticamente distribuidas ($\circledast$-i.i.d.) con media $\tau(a_1) = c$ y todos los momentos. Hagamos $S_n = n^{-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$. Entonces*

$$S_n \to c.$$

Demostración. Mostraremos que los cumulantes de S_n convergen a los cumulantes de una variable aleatoria constante.

Por la Observación 5.2.9 nos basta con probar que si $n \geq 2$, entonces $c_n^{\circledast}(S_k, S_k, \ldots, S_k) \to 0$, y $c_1^{\circledast}(S_k) \to c$, cuando $k \to \infty$. Tenemos que

$$\begin{aligned} c_1^{\circledast}(S_k) &= \tau(S_k) \\ &= \tau(k^{-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)) \\ &= k^{-1}(\tau(a_1) + \tau(a_2) + \cdots + \tau(a_k)) \\ &= k^{-1}(kc) \\ &= c, \end{aligned}$$

así $c_1^{\circledast}(S_k) = c \to c$. Si $n \geq 2$, entonces

$$\begin{aligned} c_n^{\circledast}(S_k, S_k, \dots, S_k) &= k^{-n} \sum_{i \leq k} c_n^{\circledast}(a_i, a_i, \dots, a_i) \\ &= k^{-n} k c_n^{\circledast}(a_1, a_1, \dots a_1), \end{aligned}$$

pues $\{a_i\}_{i \geq 1}$ es una familia $\circledast$-*i.i.d.*. Luego, si $k \to \infty$,

$$\frac{c_n[a_1, a_1, \dots, a_1]}{k^{n-1}} \to 0$$

Concluimos que $c_n^{\circledast}(S_k, S_k, \dots, S_k) \to 0$ para toda $n \geq 2$ y así $S_k \to c$. □

Teorema 5.2.12 (Teorema del Límite Central, caso centrado)**.** Sea $\{a_i\}_{i \geq 1}$ variables aleatorias $\circledast$-i.i.d. con media $\tau(a_1) = 0$, varianza $\sigma^2 = \tau(a_1^2)$ y todos los momentos. Para $S_n = n^{-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ definida como en la LGN, las fluctuaciones en torno a la media $\sqrt{n}(S_n)$ convergen a la distribución $\circledast$-Gaussiana con media 0 y varianza σ^2.

Demostración. Se procede de la misma forma que en la demostración anterior.

Por la caracterización de las distribuciones Gaussianas en términos de cumulantes, basta probar que para $n \geq 3$, se tiene que

$$c_n^{\circledast}(\sqrt{k}S_k, \sqrt{k}S_k, \dots, \sqrt{k}S_k) \to 0,$$

y que $c_1^{\circledast}(\sqrt{k}S_k) \to 0$, mientras que $c_2^{\circledast}(\sqrt{k}S_k, \sqrt{k}S_k) \to \sigma^2$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} c_1^{\circledast}(\sqrt{k}S_k) &= \tau(\sqrt{k}S_k) \\ &= (\sqrt{k})^{-1}(\tau(a_1) + \tau(a_2) + \dots + \tau(a_k)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así $c_1^{\circledast}(\sqrt{k}(S_k)) \to 0$.

Ahora, como $\{a_i\}_{i \geq 1}$ son $\circledast$-independientes identicamente distribuidas tenemos que

$$\begin{aligned} c_2^{\circledast}(\sqrt{k}S_k, \sqrt{k}S_k) &= k^{-1} \sum_{i \leq k} c_2^{\circledast}(a_i, a_i) \\ &= k^{-1} k c_2^{\circledast}(a_1, a_1) \\ &= \tau(a_1^2) \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Finalmente, si $n > 2$, entonces

$$\begin{aligned} c_n^{\circledast}(\sqrt{k}S_k, \sqrt{k}S_k, \dots, \sqrt{k}S_k) &= (\sqrt{k})^{-n} \sum_{i \leq k} c_n^{\circledast}(a_i, a_i, \dots, a_i) \\ &= k(\sqrt{k})^{-n} c_n^{\circledast}(a_1, a_1, \dots a_1), \end{aligned}$$

pues $\{a_i\}_{i\geq 1}$ es una familia $\circledast$-*i.i.d.*. Luego, si $k \to \infty$,

$$\frac{c_n(a_1, a_1, \ldots, a_1)}{(\sqrt{k})^{n-2}} \to 0$$

para toda $n \geq 3$. Por lo tanto, las fluctuaciones en torno a $\sqrt{n}(S_n)$ convergen a la distribución $\circledast$-Gaussiana con media 0 y varianza σ^2. $\square$

Teorema 5.2.13 (Teorema del Límite Central, caso general)**.** Sean $\circledast$ una noción de independencia que cumple **PB** y $\{a_i\}_{i\geq 1}$ variables aleatorias $\circledast$-independientes idénticamente distribuidas ($\circledast$-i.i.d.) con media $\tau(a_1) = c$, varianza $\sigma^2 = \tau(a_1^2) - c^2$ y todos los momentos. Para $S_n = n^{-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ definida como en la LGN, las fluctuaciones en torno a la media $\sqrt{n}(S_n - c)$ convergen a la distribución $\circledast$-Gaussiana con media 0 y varianza σ^2.

Demostración. Nuevamente, nos basta con probar que

$$c_1^{\circledast}(\sqrt{k}(S_k - c)) \to 0, \quad c_2^{\circledast}(\sqrt{k}(S_k - c), \sqrt{k}(S_k - c)) \to \sigma^2,$$

y que

$$c_n^{\circledast}(\sqrt{k}(S_k - c), \ldots, \sqrt{k}(S_k - c)) \to 0, \quad n \geq 3.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
c_1^{\circledast}\sqrt{k}(S_k - c)) &= \tau(\sqrt{k}(S_k - c)) \\
&= \tau(\sqrt{k}((k)^{-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) - c)) \\
&= \sqrt{k}(k^{-1})(\tau(a_1) + \tau(a_2) + \cdots + \tau(a_k)) - \sqrt{k}c \\
&= \sqrt{k}(k^{-1})(k)\tau(a_1) - \sqrt{k}c \\
&= \sqrt{k}c - \sqrt{k}c \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así $c_1^{\circledast}(\sqrt{k}(S_k - c)) = 0 \to 0$.

Ahora, como $\{a_i\}_{i\geq 1}$ son $\circledast$-i.i.d. y los cumulantes mixtos donde aparece una constante se anulan (por la hipótesis de que $\circledast$ cumple **PB**), tenemos que

$$\begin{aligned}
c_2^{\circledast}(\sqrt{k}(S_k - c), \sqrt{k}(S_k - c)) &= kc_2^{\circledast}(S_k - c, S_k - c) \\
&= k(\sum_{i\leq k}(k^{-2})c_2^{\circledast}(a_i, a_i) \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}$$

Y para $n > 2$ se hace la misma argumentación:

$$\begin{aligned}
c_n^{\circledast}(\sqrt{k}(S_k - c), \ldots, \sqrt{k}(S_k - c)) &= c_n^{\circledast}(\sqrt{k}(S_k), \ldots, \sqrt{k}(S_k)) \\
&= (\sqrt{k})^{-n}\sum_{i\leq k} c_n^{\circledast}(a_i, a_i, \ldots, a_i) \\
&= (\sqrt{k})^{-n+2}c_n^{\circledast}(a_1, a_1, \ldots, a_1),
\end{aligned}$$

pues $\{a_i\}_{i\geq 1}$ es una familia $\circledast$-*i.i.d.* y $\circledast$ cumple **PB**. Luego, si $k \to \infty$,

$$(\sqrt{k})^{-n+2} c_n^{\circledast}(a_1, a_1, \ldots, a_1) = \frac{c_n(a_1, a_1, \ldots, a_1)}{(\sqrt{k})^{n-2}} \to 0.$$

Por lo tanto, las fluctuaciones en torno a la media $\sqrt{n}(S_n - c)$ convergen a la distribución $\circledast$-Gaussiana con media 0 y varianza σ^2. $\square$

Capítulo 6

Realizaciones de variables aleatorias independientes.

Se pueden construir ejemplos de variables aleatorias independientes en el sentido clasico, booleano y monótono de una manera muy sencilla, utilizando construcciones con matrices determinísticas (en el marco del ejemplo 3.1.3).

6.1. Independencia tensorial

Si partimos de dos espacios de probabilidad matriciales, $(M_n(\mathbb{C}), \tau_1)$, $(M_m(\mathbb{C}), \tau_2)$, se puede considerar el espacio de probabilidad que consiste del algebra $M_n(\mathbb{C}) \otimes M_m(\mathbb{C})$, mismo que puede identificarse con el algebra de matrices $M_{nm}(\mathbb{C})$, dotada con el funcional $\tau := \tau_1 \otimes \tau_2$.

En el caso en que $\tau_1 := \tau_v$ y $\tau_2 := \tau_w$, para dos vectores unitarios, obtenemos que $\tau = \tau_v \otimes \tau_w$ corresponde al funcional $\tau_{v\otimes w}$. En particular, aplicado a los vectores de las bases canónicas, se tiene que el producto tensorial de funcionales que extraen un elemento de la diagonal permanece de esa forma, (en concreto, $\tau_i \otimes \tau_j = \tau_{i\otimes j}$).

Promediando sobre todos los $i \leq n, j \leq m$ obtenemos que $\frac{1}{n}\mathrm{Tr} \otimes \frac{1}{m}\mathrm{Tr}$ corresponde a $\frac{1}{nm}\mathrm{Tr}$. El producto tensorial de los funcionales τ_{ξ_0} y $\tau_{\xi'_0}$, que suman todas las entradas en cada factor, es nuevamente del mismo tipo.

Las $*$-algebras $\mathcal{A}_1 = M_n(\mathbb{C}) \otimes I_m$,$\mathcal{A}_2 = I_n \otimes M_m(\mathbb{C})$ se comportan con respecto al funcional $\tau = \tau_1 \otimes \tau_2$, como copias de los espacios de probabilidad $(M_n(\mathbb{C}), \tau_1)$ y $(M_m(\mathbb{C}), \tau_2)$ dentro de $\mathcal{A} := (M_n(\mathbb{C}) \otimes M_m(\mathbb{C}), \tau)$. Las relaciones para calcular momentos mixtos de las dos algebras son exactamente las de independencia tensorial.

Como ejemplo concreto, consideremos las matrices $\tilde{A} = (A \otimes I_m)$ y $\tilde{B} = (I_n \otimes B)$. Estas conmutan entre sí a consecuencia de la identidad multiplicativa del producto tensorial $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd$. Además se tiene que

$$\frac{1}{nm}\mathrm{Tr}((\tilde{A})^p(\tilde{B})^q) = \frac{1}{nm}\mathrm{Tr}((\tilde{A})^p)\frac{1}{nm}\mathrm{Tr}((\tilde{B})^q),$$

o bien, usando otros funcionales

$$\tau_{v\otimes w}((\tilde{A})^p(\tilde{B})^q) = \tau_{v\otimes w}((\tilde{A})^p)\tau_{v\otimes w}((\tilde{B})^q).$$

6.2. Caso Booleano y monótono

Construcciones similares con productos tensoriales nos permiten producir variables aleatorias independientes en los sentidos Booleano y monótono.

Consideremos nuevamente los espacios de matrices $(M_n(\mathbb{C}), \tau_v)$, $(M_m(\mathbb{C}), \tau_w)$, y su producto tensorial $M_n(\mathbb{C}) \otimes M_m(\mathbb{C})$ con el funcional $\tau_v \otimes \tau_w = \tau_{v\otimes w}$. Sean P y P' las proyecciones de rango uno en cada espacio $P = vv^* \in M_n(\mathbb{C})$ y $P' = ww^* \in M_m(\mathbb{C})$. Observemos que con esta notación el estado vector se escribe $\tau_v(A) = \langle Av, v\rangle = v^*Av$.

Para lograr variables aleatorias independienes en el caso Booleano, se consideran como variables aleatorias a las matrices $\tilde{A} = A \otimes P'$ y $\tilde{B} = P \otimes B$, en lugar de $(A \otimes I_m)$ y $(I_n \otimes B)$.

Es decir, se verifican, por ejemplo, las factorizaciones del tipo:

$$\tau_{v\otimes w}(\tilde{A}^{p_1}\tilde{B}^{q_1}\tilde{A}^{p_2}\cdots\tilde{B}^{q_{k-1}}\tilde{A}^{p_k}) = \tau_{v\otimes w}(\tilde{A}^{p_1})\cdots\tau_{v\otimes w}(\tilde{B}^{q_{k-1}})\tau_{v\otimes w}(\tilde{A}^{p_k}).$$

Para verificar lo anterior notemos primero que

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^{p_1}\tilde{B}^{q_1}\cdots\tilde{A}^{p_k} &= (A^{p_1}\otimes P')(P\otimes B^{q_1})(A^{p_2}\otimes P')\cdots(A^{p_k}\otimes P') \\
&= (A^{p_1}PA^{p_2}P\cdots A^{p_k})\otimes(P'B^{q_1}P'B^{q_2}P'\cdots B^{q_{k-1}}P') \\
&= (A^{p_1}vv^*A^{p_2}vv^*\cdots)\otimes(ww^*B^{q_1}ww^*B^{q_2}ww^*\cdots) \\
&= (A^{p_1}v(v^*A^{p_2}v)v^*\cdots)\otimes(w(w^*B^{q_1}w)(w^*B^{q_2}w)w^*\cdots) \\
&= (A^{p_1}v\tau_v(A^{p_2})\cdots\tau_v(A^{p_{k-1}})v^*A^{p_k})\otimes(w\tau_w(B^{q_1})\cdots\tau_w(B^{q_{k-1}})w^*) \\
&= (A^{p_1}v\tau_v(A^{p_2})\cdots\tau_v(A^{p_{k-1}})v^*A^{p_k})\otimes(w\tau_w(B^{q_1})\cdots\tau_w(B^{q_{k-1}})w^*)
\end{aligned}$$

Sacando los escalares y usando que $\tau_w(ww^*) = \langle ww^*w, w\rangle = \langle w, w\rangle = 1$, y que

$$\tau_v(A^{p_1}vv^*A^{p_k}) = \langle A^{p_1}vv^*A^{p_k}v, v\rangle = \langle A^{p_1}v\tau_v(A^{p_k}), v\rangle = \tau_v(A^{p_1})\tau_v(A^{p_k}),$$

se sigue la factorización.

De manera análoga se deduce que los momentos del tipo $(\tilde{A}^{p_1}\tilde{B}^{q_1}\cdots\tilde{A}^{p_k}\tilde{B}^{q_k})$, $(\tilde{B}^{q_1}\tilde{A}^{p_1}\cdots\tilde{A}^{p_k})$ y $(\tilde{B}^{q_1}\tilde{A}^{p_1}\cdots\tilde{A}^{p_{k-1}}\tilde{B}^{q_k})$, tambien satisfacen la factorización Booleana.

El caso monótono se resuelve de la misma manera, considerando las matrices $\tilde{A} = (A \otimes I_m)$ y $\tilde{B} = P \otimes B$ en el espacio $M_n(\mathbb{C}) \otimes M_m(\mathbb{C})$ con el funcional $\tau_v \otimes \tau_w = \tau_{v\otimes w}$.

Capítulo 7

Caracterización Combinatoria de Propiedades de Cumulantes.

7.1. Las Propiedades PB' y PC'

Las propiedades **P1**, **PB** y **PC** son características que pueden o no cumplirse para una noción de independencia.

En esta sección proponemos dos propiedades combinatorias de cumulantes **PB**' y **PC'**, las cuales hacen que la independencia correspondiente cumpla las propiedades **PB** y **PC** respectivamente.

Notación 7.1.1. Denotamos con $S(n)$ al conjunto de todas las permutaciones de n elementos, y como $\{\gamma_n\}$ al ciclo largo $\gamma_n = (1, 2, 3, \ldots n)$.

Definición 7.1.2. Decimos que un peso $\omega = \{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(n)$ cumple la propiedad:

1. **PB'** (**propiedad inductiva del singulete**) si el intervalo

$$[0_{n+1}, \{1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n+1\}, \{r\}]$$

   con peso ω_{n+1} es isomorfo[1] al intervalo $[0_n, 1_n]$ con peso ω_n.

2. **PC'** (**propiedad de la invarianza cíclica**) si para todos $n \in \mathbb{N}$, $\pi \in \mathcal{P}(n)$, se tiene que

$$\omega_n(\gamma_n \pi_n) = \omega_n(\pi_n).$$

A continuación demostraremos los principales resultados de esta tesis.

7.2. PB'/PC' Implican PB/PC

Teorema 7.2.1. *Sean $\mathbb{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una esperanza condicional y ω un peso en $\mathcal{P}$ que satisface la propiedad* **PB'**. *Entonces se cumple* **PB**.

[1]Un intervalo $[a_n, b_n] \subseteq \mathcal{P}(n)$con peso ω_n es isomorfo $[a_m, b_m] \subseteq \mathcal{P}(m)$ con peso ω'_m si existe $H\colon [a_n, b_n] \to [a_m, b_m]$ isomorfismo de ordenes tal que

$$H \circ (\omega_n)_{|[a_n,b_n]} = (\omega'_m)_{|[a_m,b_m]}.$$

Demostración. Probaremos por inducción que los cumulantes $c_n^{\circledast}$ se anulan si alguno de los argumentos pertence a $\mathcal{B}$. Para $n = 2$ tenemos de la fórmula cumulante momento que si $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{B}$, entonces

$$c_2^{\circledast}(a, b) = \mathbb{F}(ab) - \mathbb{F}(a)\mathbb{F}(b) = \mathbb{F}(a)b - \mathbb{F}(a)b = 0 = c_2^{\circledast}(b, a).$$

Supongamos ahora que para toda $k \leq n$, si para algún $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, hay un $a_i \in \mathcal{B}$, entonces se tiene que $c_k^{\circledast}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0$.

Probemos que para $n+1$ se cumple **PB**. Para esto tomemos $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in \mathcal{A}^{n+1}$, con $a_r \in \mathcal{B}$. Por la fórmula cumulante-momento se sigue que

$$\mathbb{F}_{n+1}(a_1, \ldots, a_{r-1}, b, a_{r+1}, \ldots a_{n+1}) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n+1)} c_\pi^{\circledast}(a_1, \ldots, a_{r-1}, b, \ldots a_{n+1}),$$

y también

$$\mathbb{F}_n(a_1, \ldots, a_{r-1}b, a_{r+1}, \ldots a_{n+1}) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} c_\pi^{\circledast}(a_1, \ldots, a_{r-1}b, a_{r+1}, \ldots a_{n+1}).$$

Como

$$0 = \mathbb{F}_n(a_1, \ldots, a_{r-1}b, a_{r+1}, \ldots a_{n+1}) - \mathbb{F}_{n+1}(a_1, \ldots, a_{r-1}, b, a_{r+1}, \ldots a_{n+1})$$

se sigue que

$$0 = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n+1)} c_\pi^{\circledast}(a_1, \ldots, a_{r-1}, b, \ldots a_{n+1}) - \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} c_\pi^{\circledast}(a_1, \ldots, a_{r-1}b, \ldots a_{n+1}).$$

Por hipótesis de inducción tenemos que para toda $\pi \in \mathcal{P}(n+1) \setminus 1_{n+1}$ con $b \in V_k \in \pi$ y $2 \leq |V_k|$, entonces

$$c_\pi^{\circledast}[a_1, \ldots, a_{r-1}, b, a_{r+1}, \ldots a_n] = 0.$$

Así, sólo los cumulantes indexados por la partición 1_{n+1} y particiones en $\{\pi \in \mathcal{P}(n+1) | \ \{b\} \in \pi\} = \mathcal{P}'(n+1) \subseteq \mathcal{NC}(n)$ podrían no anularse.

Notando que

$$\mathcal{P}'(n+1) = [0_{n+1}, \{\{1, 2, \ldots, a_{r-1}, a_{r+1}, \ldots, a_{n+1}\}, \{b\}],$$

junto a la propiedad **PB'** tenemos que $\mathcal{P}'(n+1)$ es isomorfo (con respecto a la restricción del peso $\omega_{n+1}^{\circledast}$) a $\mathcal{P}(n)$.

Luego, cancelando por pares términos asociados a las particiones dadas por el isomorfismo, se tiene que el cumulante $c_{1_{n+1}}^{\circledast}(a_1, \ldots, a_{n+1})$ es simplemente la diferencia

$$\begin{aligned} &\sum_{\pi \in \mathcal{P}'(n+1)} c_\pi^{\circledast}(a_1, \ldots, a_{r-1}, b, a_{r+1}, \ldots a_{n+1}) \\ &- \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} c_\pi^{\circledast}(a_1, \ldots, a_{r-1}b, a_{r+1}, \ldots a_{n+1}) \quad = \quad 0, \end{aligned}$$

Concluimos que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n^{\circledast}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

siempre que exista $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ tal que $a_i \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, tenemos que cumulantes con **PB**' derivan en independencias que cumplen **PB**. $\square$

Ahora probaremos que **PC'** implica **PC**.

Teorema 7.2.2. *Sea $(\mathcal{A}, \tau)$ un EPNC on y $\omega = (\omega_n)_{n \geq 1}$ un peso que cumple* **PC'**. *Si los momentos son cíclicamente invariantes*[2]*, entonces lo son los cumulantes.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\pi \in \mathcal{P}(n)$ y $\gamma = (1, 2 \ldots, n)$. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$, entonces $\tau(a_1 a_2 \ldots a_n) = \tau(a_{\gamma(1)} a_{\gamma(2)} \ldots a_{\gamma(n)})$. Así, por la fórmula cumulante-momento tenemos que,

$$\begin{aligned}
\sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} \omega_n(\pi) c_\pi^{\circledast}(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= \tau(a_1 a_2 \ldots a_n) \\
&= \tau(a_{\gamma(1)} a_{\gamma(2)} \ldots a_{\gamma(n)}) \\
&= \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} \omega_n(\pi) c_\pi^{\circledast}[a_{\gamma(1)}, a_{\gamma(2)}, \ldots, a_{\gamma(n)}] \\
&= \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} \omega_n(\gamma\pi) c_{\gamma\pi}^{\circledast}(a_1, a_2, \ldots a_n) \\
&= \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} \omega_n(\pi) c_{\gamma\pi}^{\circledast}(a_2, a_3, \ldots a_n).
\end{aligned}$$

Como la función $\pi \mapsto \gamma\pi \colon \mathcal{P}(n) \to \mathcal{P}(n)$ que permuta las relaciones de π, es un isomorfismo de orden se sigue que

$$c_{1_n}^{\circledast}[a_1, a_2 \ldots, a_n] = c_{\gamma 1_n}^{\circledast}[a_1, a_2, \ldots, a_n] = c_{1_n}^{\circledast}[a_{\gamma(1)}, a_{\gamma(2)}, \ldots, a_{\gamma(n)}].$$

Por lo tanto, si los momentos son cíclicamente invariantes, entonces los cumulantes también lo son. $\square$

Observación 7.2.3. En el caso conmutativo $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = 0$, la invarianza cíclica permite extender funciones multiplicativas a permutaciones.

En esta situación se le puede dar la vuelta a la ambigüedad que ocurre al escribir permutaciones en términos de ciclos disjuntos (en la que cada ciclo de tamaño k puede escribirse comenzando con cualquiera de sus k elementos).

Por ejemplo, para $\alpha = (1, 2, 5)(3, 4)$ y $\beta = (2, 5, 1)(4, 3)$, que representan la misma permutación, sería deseable que $f_\alpha(a_1, \ldots, a_5) = f_\beta(a_1, \ldots, a_5)$

Esto se cumple para muchos momentos (por ejemplo, si τ es tracial). Por lo visto en el teorema anterior, también para los cumulantes (pesos con **PC'**) obtenidos de tales momentos.

[2]Decimos que los momentos son cíclicamente invariantes si para cualquier $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in \mathcal{A}^n$, $\tau(a_1 a_2 \ldots a_n) = \tau(a_2 a_3 \ldots a_n a_1)$.

7.3. Variaciones de Cumulantes e Independencia

A continuación definiremos variaciones de los cumulantes booleanos de tal manera que cumplan nuestras propiedades **PB** y **PC** propuestas anteriormente.

Consideremos las particiones de la Def. 3.2.7:

$$\mathcal{I}^o(n) := \{\pi \in \mathcal{P}(n)| \text{ para alguna } k \leq n, \gamma^k \pi \in \mathcal{I}(n)\},$$

$$\widetilde{\mathcal{I}}(n) := \{\pi \in \mathcal{P}(n)| \text{ todo bloque interno de } \pi \text{ es un singulete}\},$$

y

$$\widetilde{\mathcal{I}}^o(n) := \{\pi \in \mathcal{P}(n)| \text{ para alguna } k \leq n, \gamma^k \pi \in \widetilde{\mathcal{I}}(n)\}.$$

Consideraremos las respectivas funciones de peso dadas por las indicadoras sobre los respectivos soportes.

Definición 7.3.1. *Con estos pesos podemos definir los respectivos cumulantes booleanos (y considerar la noción de independencia $\circledast$ a la que caracterizan). Así $\circledast = \widetilde{\star}$ satisface* **PB'** *(ver Prop. 3.2.17), $\circledast = \star^o$ satisface* **PC'** *(trivial) y $\circledast = \widetilde{\star}^o$ satisface* **PB'** *y* **PC'**.

De la definición de los conjuntos anteriores tenemos que

$$\mathcal{I}(n) \subseteq \widetilde{\mathcal{I}}(n) \cap \mathcal{I}^o(n) \cap \widetilde{\mathcal{I}}^o(n)$$

y además,

$$\widetilde{\mathcal{I}}(n) \cup \mathcal{I}^o(n) \subseteq \widetilde{\mathcal{I}}^o(n).$$

De forma similar pueden definirse variaciones de cumulantes monótonos $\widetilde{\triangleright}, \triangleright^o$, y $\widetilde{\triangleright}^o$ que satisfacen las propiedades. Similar al caso booleano, los nuevos pesos con **PB** se obtienen de ignorar singuletes en el árbol de anidamientos.

Nos concentramos principalmente en las variaciones a la independencia booleana, por razones de extensión y para evitar discusiones más complicadas.

En particular, para las variaciones cíclicas, se deben reemplazar los conceptos de bloque exterior/interior de una forma razonable. Como estos conceptos son centrales en la independencia monótona y la c-libre, se requiere una discusión más profunda de estas variaciones. Una posibilidad que se propone aquí pero no se explorará es la de considerar que un bloque es exterior si este puede ser observado desde el centro del disco en la representación cíclica de una partición que no se cruza.

7.4. Algunas Propiedades Inmediatas

La diferencia entre los nuevos retículos es muy sutil (en especial, las diferencias entre $\star$ y $\widetilde{\star}$, y aquellas entre $\triangleright$ y $\widetilde{\triangleright}$).

Esto deja invariantes varios resultados en algunas situaciones especiales.

Proposición 7.4.1 ([37] (Oravecz))**.** La distribución $\widetilde{\star}$-Gaussiana centrada $(0, \sigma^2)$ coincide con la distribución $\star$-Gaussiana (es decir, la Bernoulli simétrica $\delta_{-\sigma} + \delta_\sigma$).

Demostración. Consideremos la suma $S_n^{\widetilde{\star}} = n^{-1/2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ de variables aleatorias centradas $\circledast$-independientes, con $\circledast \in \{\star, \widetilde{\star}\}$.

Por la fórmula momento-cumulante, los momentos de la distribución límite coinciden, pues las contribuciones de los cumulantes adicionales a considerar (para el caso $\widetilde{\star}$) son nulas, ya que al tener al menos un singulete interior, el cumulante se anula.

Se sigue que los momentos se calculan igual en ambos casos. $\square$

1. De la misma forma, la distribución $\widetilde{\triangleright}$-Gaussiana $(0, \sigma^2)$ coincide con la distribución arcoseno $(0, \sigma^2)$, es decir, la Gaussiana monótona usual.

2. La realización de la convolución booleana como el producto estrella de gráficas sigue funcionando si se considera la independencia **PB**-booleana. Esto se sigue de que los cumulantes **PB**-booleanos en $(M_n(\mathbb{C}), \tau^{e_1})$ siguen contando los mismos objetos (caminos irreducibles en la raíz). Es más, esto también se cumple para la independencia libre, como veremos a continuación.

Para la siguiente proposición consideraremos las unidades matriciales, es decir, para $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $E_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$ como

$$(E_{ij})_{rt} = \begin{cases} 1 & \text{si } r = i, \ j = t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Proposición 7.4.2. Justo como los cumulantes booleanos en $(M_n(\mathbb{C}), \tau^{e_1})$ con $\tau^{e_1}(A_G) = (E_{11}A_G E_{11})_{11}$, los cumulantes **PB**-booleanos cuentan caminos irreducibles en la raíz, más aún, si el retículo con pesos asociado a la independencia $\circledast$ contiene como subretículo (con los mismos pesos) al de la independencia booleana, entonces los $\circledast$-cumulantes cuentan caminos irreducibles en la raíz.

Demostración. Por la multilinealidad de los cumulantes, nos basta con probar que los cumulantes

$$c_n^{\widetilde{\star}}(E_{i(1)j(1)}, E_{i(2)j(2)}, \ldots, E_{i(n)j(n)}) = c_n^{\star}(E_{i(1)j(1)}, E_{i(2)j(2)}, \ldots, E_{i(n)j(n)})$$

coinciden para productos de matrices elementales.

En esencia, primero se hace la demostración usual del caso booleano y posteriormente se muestra que las particiones con anidamientos no interfieren nunca en los cálculos.

La demostración del caso booleano es simple pero un poco larga.

Primero se muestra que si los E_{ij}'s no forman un camino válido (es decir, o bien hay un $j(r) \neq i(r+1)$, o $i(1) \neq 1$ o $j(n) \neq 1$), entonces el momento es cero. De ahí puede deducirse por inducción, despejando la fórmula cumulante-momento (o usando inversion de Moebius), que también el cumulante se anula.

Después, una vez restringidos a caminos válidos (ciclos en la raíz), se hace inducción en el número de veces que el ciclo visita la raíz.

Si no hay visitas intermedias (es decir, el ciclo es irreducible en la raíz), el cumulante coincide con el momento. Nuevamente esto se demuestra por inducción en el tamaño del ciclo.

Posteriormente, se procede a mostrar que si se visita la raíz dos veces el cumulante se anula (aunque el momento no se anula). Nuevamente se procede por inducción en el tamaño del ciclo.

Se sigue la inducción en el número de veces que se visita la raíz, dando el cumulante cero en cada caso no irreducible.

Finalmente, se observa que en todo el proceso descrito anteriormente, no influyen las particiones que no se cruzan que tengan anidamientos, en particular, cuando estos son singuletes.

Las particiones con anidamientos de hecho aparecen hasta el caso en el que se visita la raíz en tres ocasiones.

El cumulante del bloque que excluye al bloque interior se anula por inducción y se procede de la misma forma que en el caso Booleano usual. □

Corolario 7.4.3. *El producto estrella de gráficas ofrece una realización de la convolución* **PB***-booleana.*

Cabe observar que hay una diferencia importante entre los EPNC's $M_n(\mathbb{C})$ con $\tau : A \mapsto A_{11}I_n$ y $\tau' : A \mapsto E_{11}A_{11}E_{11}$.

Estos coinciden para el caso Booleano usual, pero difieren en general. Como se vio antes, $\tau' : A \mapsto E_{11}A_{11}E_{11}$ hace coincidir a todos los cumulantes con pesos que interpolen entre los libres y los booleanos.

7.5. Conexiones con Teoría de Probabilidad c-libre

Independencia c-libre

La independencia c-libre fue propuesta en el àrticulo [9] de Bozekjo y Speicher y su descripción combinatoria fue desarrollada en [12]. Se define de la siguiente manera:

Definición 7.5.1. Dados $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra con unidad, $\phi, \psi \colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ estados.[3] Decimos que las álgebras $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}, \ldots, \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$, son (ϕ, ψ)-libres (o c-libres), si para todo $k \geq 1$, se tiene que

$$\phi(a_1 a_2 \ldots a_k) = \phi(a_1)\phi(a_2) \ldots \phi(a_k), \tag{7.1}$$

siempre que $a_i \in \mathcal{A}_{j(i)}$, $j(1) \neq j(2) \neq \ldots \neq j(k)$, $j(i) \leq n$ y $\psi(a_1) = \psi(a_2) = \cdots = \psi(a_k) = 0$.

Una propiedad importante de la independencia c-libre es que generaliza a las independencias libre y boolena.

Proposición 7.5.2. *Sean $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra con unidad, $\phi, \psi \colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ estados y $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$ subálgebras de $\mathcal{A}$ tales que son (ϕ, ψ)-libres.*

1. *Si $\phi = \psi$, entonces $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n$ son libres con respecto de ϕ.*

[3]Decimos que un funcional lineal en un álgebra C^*, $\phi \colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ es un estado si ϕ es normalizada y positiva, es decir, si $\phi(1) = 1$, y $\phi(aa^*) \geq 0$ para toda $a \in \mathcal{A}$.

2. *Si para toda $i \leq n$, la distribución de $a \in \mathcal{A}_i$ con ψ es δ_0, entonces $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n$ son independientes en el sentido booleano.*

Demostración. 1. Ambos resultados son inmediatos. Para el primero, al reemplazar ϕ en lugar de ψ en la definición de (ϕ, ψ)-independencia, se obtiene la definición de independencia libre (obsérvese que, en efecto, el lado derecho de (7.1) se anula.

2. Tomemos $a_i \in \mathcal{A}_{j(i)}$, $i \leq k \in \mathbb{N}$ de tal manera que $j(1) \neq j(2) \neq \ldots \neq j(k)$. Entonces $\psi(a_1) = \psi(a_2) = \cdots = \psi(a_k) = 0$. Así,

$$\phi(a_1 a_2 \ldots a_k) = \phi(a_1)\phi(a_2)\ldots\phi(a_k).$$

Por lo tanto, tenemos que $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n$ son independientes en el sentido booleano con respecto a ϕ.

□

En el artículo [12] tenemos tenemos la siguiente fórmula cumulante-momento con respecto a (ϕ, ψ):

$$\phi(a_1 a_2 \cdots a_n) = \sum_{\pi \in \mathcal{NC}(n)} \Big(\prod_{V \in \pi^{inner}} c^*_V[a_1, \ldots, a_n] \Big) \Big(\prod_{V' \in \pi^{outer}} C_{V'}[a_1, \ldots, a_n] \Big).$$

Donde $\pi^{inner} = \{V_i \in \pi |\ V_i \text{ es interior}\}$, $\pi^{outer} = \{V_j \in \pi |\ V_j \text{ es exterior}\}$.

Los cumulantes interiores c_V son simplemente los cumulantes libres usuales con respecto a ψ. Los cumulantes exteriores C_V, con respecto al par (ϕ, ψ), se definen inductivamente con la fórmula anterior.

En [12] se demuestra que la independencia c-libre se caracteriza por el aniquilamiento de todos los cumulantes mixtos (exteriores e interiores). Esto se hace mostrando que los momentos calculados con la formula anterior coinciden con los de la Definición 7.5.1.

Observemos que por definición los bloques exteriores tienen estructura de intervalos (si se remueven los bloques interiores, la partición resultante es por intervalos).

Esto hace que definición de independencia c-libre en términos de funcionales sea una combinación de la regla booleana y la libre.

Proposición 7.5.3. *Los cumulantes obtenidos por la fórmula cumulante momento con respecto a (ϕ, ψ) son los obtenidos por $\underset{\sim}{\mathcal{I}}(n)$ si ψ nos da la distribución $\delta_{\psi(.)}$, es decir, $\psi(a_i^n) = (\psi(a_i))^n$.*

Lo anterior fue observado por Oravecz en [37]. Para esa elección particular de ψ, solo se admitirán bloques interiores que sean singuletes.

Por tanto, es como si simplemente se considerara la independencia con respecto a los cumulantes definidos con respecto a un solo funcional ϕ, con los pesos **PB**-booleanos.

Nuevas observaciones

Definición 7.5.4. Dados $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra con unidad, $\mathbb{F}_\phi, \mathbb{F}_\psi$ esperanzas condicionales a $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$. Decimos que las álgebras $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}, \ldots, \mathcal{A}_k \subseteq \mathcal{A}$, son $(\mathbb{F}_\phi, \mathbb{F}_\psi)$-libres si

$$\mathbb{F}_\phi(a_1 a_2 \ldots a_n) = \mathbb{F}_\phi(a_1)\mathbb{F}_\phi(a_2)\ldots\mathbb{F}_\phi(a_k),$$

siempre que $a_i \in \mathcal{A}_{j(i)}$, $j(1) \neq j(2) \neq \ldots \neq j(k)$ y $\mathbb{F}_\psi(a_1) = \mathbb{F}_\psi(a_2) = \cdots = \mathbb{F}_\psi(a_k) = 0$.

Haciendo la misma demostración con la que se prueba que $(\phi, \phi)-$independencia libre equivale a la independencia libre usual, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 7.5.5. *Sean* $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_\phi, \mathbb{F}_\phi)$ *y* $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_\psi, \mathbb{F}_\psi)$ *tales que* $\mathcal{B}_\phi \subseteq \mathcal{B}_\psi$ *y* $\mathbb{F}_\phi \circ \mathbb{F}_\psi = \mathbb{F}_\phi$. *Entonces la independencia* $(\mathbb{F}_\phi, \mathbb{F}_\psi)$*-libre es equivalente a la independencia libre usual con respecto a* $\mathbb{F}_\phi$.

Demostración. De nueva cuenta, $\mathbb{F}_\psi(a_1) = \mathbb{F}_\psi(a_2) = \cdots = \mathbb{F}_\psi(a_k) = 0$ implica que $\mathbb{F}_\phi(a_i) = \mathbb{F}_\phi(\mathbb{F}_\psi(a_i)) = \mathbb{F}_\phi(0) = 0$. Por lo que la definicion de independencia $(\mathbb{F}_\phi, \mathbb{F}_\psi)$-libre se convierte en la independencia $\mathbb{F}_\phi$-libre. □

Observación 7.5.6. Al considerar $\{\mathcal{A}_i\}_{i \leq n}$ álgebras $\star^o$-independientes y $\pi \in I^o(n)$ tal que

$$\pi \notin \{0_n, \{\{1, n\}, \{2\}, \{3\}, \ldots, \{n-1\}\}\},$$

se sigue que $c_\pi^{\star^o}[a_1, a_2, \ldots, a_n] = 0$, cuando $a_1 \in \mathcal{A}_{j(1)}, a_2 \in \mathcal{A}_{j(2)}, \ldots, a_n \in \mathcal{A}_{j(n)}$, con $j(1) \neq j(2) \neq \ldots \neq j(n)$. Esto sucede pues si $\pi \neq 0_n$ y $\pi \neq \{\{1, n\}, \{2\}, \{3\}, \ldots, \{n-1\}\}$, entonces existen $k \leq n-1$ y $V \in \pi$ tal que $k, k+1 \in V$. Como $\{\mathcal{A}_i\}_{i \leq n}$ son álgebras $\star^o$-independientes, entonces

$$\begin{aligned} c_\pi^{\star^o}[a_1, a_1, \ldots, a_n] &= \prod_{U \in \pi} c_U^{\star^o}[a_1, a_2, \ldots, a_n] \\ &= (\prod_{U \in \pi \setminus \{V\}} c_U^{\star^o}[a_1, a_2, \ldots, a_n]) c_V^{\star^o}[a_1, a_2, \ldots, a_n] \\ &= 0. \end{aligned}$$

De esto podemos observar que

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(a_1 a_2 \cdots a_n) &= \sum_{\pi \in I^o(n)} c_\pi^{\star^o}[a_1, a_2, \ldots, a_n] \\ &= \prod_{i \leq n} \mathbb{F}(a_i) + c_2^{\star^o}[a_1, a_n](\prod_{2 \leq i \leq n} \mathbb{F}(a_i)). \end{aligned}$$

O bien, de manera equivalente

$$\mathbb{F}(a_1 a_2 \cdots a_n) = \begin{cases} \mathbb{F}(a_1)\mathbb{F}(a_2)\cdots\mathbb{F}(a_n) & \text{si } j(1) \neq j(n) \\ \mathbb{F}(a_1\mathbb{F}(a_2)\mathbb{F}(a_3)\cdots\mathbb{F}(a_{n-1})a_n) & \text{si } j(1) = j(n). \end{cases} \tag{7.2}$$

Y con lo anterior tenemos que

Proposición 7.5.7. *Sean* $\{\mathcal{A}_i\}_{i\leq n}$ *álgebras* $\star^o$*-independientes y* $a_k \in \mathcal{A}_{i(k)}$ *para* $k \leq n$. *Si* $j(1) \neq j(2) \neq \cdots \neq j(n)$, *entonces*

$$\mathbb{F}(a_1a_2\cdots a_n) = \begin{cases} \mathbb{F}(a_1)\mathbb{F}(a_2)\cdots\mathbb{F}(a_n) & \text{si } j(1)\neq j(n) \\ \mathbb{F}(a_1\mathbb{F}(a_2)\mathbb{F}(a_3)\cdots\mathbb{F}(a_{n-1})a_n) & \text{si } j(1)=j(n). \end{cases} \tag{7.3}$$

De la proposición anterior es natural considerar la siguiente variación cíclica de la independencia c-libre.

Definición 7.5.8. Dados $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra con unidad, $\phi,\psi\colon \mathcal{A}\to\mathbb{C}$ estados. Decimos que las álgebras $\mathcal{A}_1,\mathcal{A},\ldots,\mathcal{A}_n\subseteq\mathcal{A}$, son $(\phi,\psi)-$libres cíclicos si, siempre que se cumpla $\psi(a_1)=\psi(a_2)=\cdots=\psi(a_k)=0$, se tiene que

$$\phi(a_1a_2\ldots a_n)=\phi(a_1)\phi(a_2)\ldots\phi(a_k),$$

si $a_i\in\mathcal{A}_{j(i)}$, $j(1)\neq j(2)\neq\ldots\neq j(k)\neq j(1)$ o bien

$$\phi(a_1a_2\ldots a_n)=\phi(a_1\phi(a_2)\ldots\phi(a_{k-1})a_k),$$

en caso de que $a_i\in\mathcal{A}_{j(i)}$, $j(1)\neq j(2)\neq\ldots\neq j(k)=j(1)$.

Nuevamente, por la Proposición 7.5.7 obtenemos la **PC**-variacion de la independencia booleana tomando el caso especial $\psi=\delta_0$; el caso $\psi=\phi$ corresponde a la independencia libre.

Uno conjeturaría que los **PB+PC** cumulantes booleanos se obtendrían de la definición anterior considerando $\psi=\delta_{\phi(*)}$.

Sin embargo, nuestra demostración anterior de la correspondencia de la independencia c-libre con el caso **PB**-Booleano descansa en la caracterización de la independencia c-libre en términos de cumulantes.

Para la definición de cumulantes en el caso c-libre cíclico debería especificarse o redefinirse la noción de bloques exteriores e interiores para particiones que no se cruzan en el círculo.

Algunas consecuencias

De reconocer nuestras nuevas independencias como casos de la independencia c-libre, se obtienen los siguientes resultados.

1. La positividad de independencia **PB**-booleana se sigue como caso particular de la positividad de la independencia c-libre [9]. Una demostración más directa se obtiene en [12] (Teorema 2.2).

   La observación de que la independencia **PB**-booleana es un caso especial de la c-libre se obtiene en [37], en donde se le llama convolución Fermi Booleana.

2. De manera análoga, la positividad de la independencia **PB**-monótona se obtiene de entenderla como una convolución c-libre, como lo observa Hasebe en [23] (ver ejemplo 11.6 y tomar la convolución $\triangleright_{F_u}$ con $u=1$),

3. En [12] (Teorema 4.4), se obtienen las distribuciones límite para ley de eventos raros, por lo que se puede deducir la distribución $\widetilde{\star}$-Poisson. Lo mismo se hace con la Poisson monótona en el Teorema 5.1 de [23] por Hasebe.

4. Los momentos mixtos de nuevas independencias pueden expresarse en términos de momentos individuales. Esto es de suma importancia si se pretende entender independencia monótona en general (pues la caracterización en términos de cumulantes que se anulan solo es válida en el caso i.i.d.).

5. Las convoluciones multiplicativas de variables unitarias independientes en el sentido booleano se obtiene al considerar el caso c-libre con $\psi = \delta_1$. Sería interesante entender la conexión con la convolución multiplicativa **PB**-Booleana.

Consideramos que el formalismo de la independencia c-libre, podría ser útil para explicar más modelos de matrices aleatorias.

Esto se trabaja actualmente en una colaboración con T. Gaxiola y C. Vargas, que incluirá además varios de los resultados aquí presentados. Ahí también se pretende mostrar la positividad de las convoluciones cíclicas.

Bibliografía

[1] O. Arizmendi. Convergence of the fourth moment and infinite divisibility *Probab. Math. Statist.* **33** (2013), no. 2, 201–212.

[2] O. Arizmendi. k-divisible random variables and *Adv. App. Math.* **93** (2018), 1–68.

[3] O. Arizmendi, T. Hasebe, F. Lehner, C. Vargas. Relations between cumulants in non-commutative probability *Adv. Math.* **282** (2015), 10, 56–92.

[4] O. Arizmendi, C. Vargas. Products of free random variables and k-divisible partitions *Electron. Commun. Probab.* **17** (2012), 11, 13 pp.

[5] S. Belinschi and A. Nica. On a remarkable semigroup of homomorphisms with respect to free multiplicative convolution, *Indiana Univ. Math. J.* **57**, No. 4 (2008), 1679–1713.

[6] S.T. Belinschi, A. Nica, η-series and a Boolean Bercovici–Pata bijection for bounded k-tuples, *Adv. Math.* 2217(1) (2008) 1–41.

[7] A. Ben-Ghorbal and M. Schuermann. Non-commutative notions of stochastic independence, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **133**, 531–561, (2002).

[8] S. T. Belinschi, D. Shlyakhtenko, Free Probability of type B: Analytic interpretation and applications, *American Journal of Mathematics* Vol. **134**, No. 1, pp. 193–234, 2012.

[9] M. Bozejko, R. Speicher, ψ-simmetrized and independent white noises, *Quantum probability and related topics (L. Accardi Ed.)* vol **VI**, World Scientific, Singapore, 219–236, 1991.

[10] P. Biane, F. Goodman, A. Nica. Non-crossing cumulants of type B, *Transactions of the American Mathematical Society* **355** (2003), 2263–2303.

[11] H. Bercovici, and V. Pata, with appendix by P. Biane, Stable laws and domains of attraction in free probability theory. *Ann. of Math.* **149**, 1023–1060, (1999).

[12] M. Bozejko, M. Leinert and R. Speicher. Convolution and limit theorems for conditionally free random variables. *Pac. J. Math.* **175**, 357–388, (1996).

[13] G. Cebron, A. Dahlqvist and C. Male. Universal constructions for spaces of traffics, (2016)

[14] B. Collins, T. Hasebe, N. Sakuma. Free probability for purely discrete eigenvalues of random matrices, *J. of the Math. Soc. Japan* **70** 3, 1111–1150 (2018).

[15] B. Collins, J. Mingo, P. Sniady, R. Speicher, Second order freeness and fluctuations of random matrices: III Higher order freeness and free cumulants. *Documenta Math.* **12** (2007), 1–70.

[16] C. D. Cushen and R. L. Hudson. A quantum central limit theorem. *J. Appl. Prob.* **8**, 454–469, (1971).

[17] U. Franz. Multiplicative monotone convolutions *Quantum Probability, M. Bozejko, W. Mlotkowski and J. Wysoczanski (eds.), Banach Center Publications* **73**, 153–166, (2006).

[18] U. Franz. Boolean convolution of probability measures on the unit circle. *Analyse et probabilites, P. Biane, J. Faraut, and H. Ouerdiane (eds.), Séminaires et Congrès* **16**, 83–93, (2009).

[19] N. Giri and W. von Waldenfels. An algebraic version of the central limit theorem. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete.* **42**, 129–134, (1978).

[20] Y. Gu, P. Skoufranis, Conditionally bi-free independence for pairs of faces. *J. Funct. Anal.* **273** (5), 1663–1733 (2017)

[21] Y. Gu, T. Hasebe, P. Skoufranis, Bi-monotonic independence for pairs of algebras, *J. Theoret. Probab.* to appear (2018).

[22] T. Hasebe, H.Saigo. The monotone cumulants. *Ann. Inst. H. Poincaré Prob. Statist.* Vol **47**, No 4 (2011), 1160–1170.

[23] T. Hasebe. Conditionally monotone independence I: Independence, additive convolutions and related convolutions. *Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probab. Relat. Top.* **14**, no. 3, 465–516, (2011).

[24] T. Hasebe. Conditionally monotone independence II: Multiplicative convolutions and infinite divisibility. *Complex Anal. Op. Th.* **7**, no. 1, 115–134, (2013).

[25] R. L. Hudson. A quantum mechanical central limit theorem for anticommuting observables. *J. Appl. Prob.* **10**, 502–509, (1973).

[26] V. Ionescu. A Note on Amalgamated boolean, orthogonal and conditionally monotone or antimonotone products of operator-valued C* algebraic-probability spaces. *REV. ROUMAINE MATH. PURES APPL.*, **57** (2012), 4, 341–37.

[27] G. Kreweras, Sur les partitions non-croisées d'un cycle, *Discrete Mathematics* **1** (1972), 333–350.

[28] R. Lenczewski, Decompositions of the additive free convolution, *J. Funct. Anal.* **246** (2007), 330–365.

[29] C. Male. Traffic distributions and independence: permutation invariant random matrices and the three notions of independence. Preprint, (2011).

[30] V. Marčenko and L. Pastur. Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices, *Math. USSR-Sbornik* **1**, 457–483, (1967).

[31] J. Mingo, P. Sniady, and R. Speicher, Second order freeness and fluctuations of random matrices: II. Unitary random matrices. *Adv. in Math.* **209** (2007), 212–240.

[32] J. Mingo and R. Speicher, Second Order Freeness and Fluctuations of Random Matrices: I. Gaussian and Wishart matrices and Cyclic Fock spaces. *J. Funct. Anal.*, **235**, 2006, 2, 6–270.

[33] W. Mlotkowski, Operator-valued version of conditionally free product, *Studia Mathematica* **153** no.1, 2012.

[34] N. Muraki. Monotonic independence, monotonic central limit theorem and monotonic law of small numbers, *Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probab. Relat. Top.* **4**, no.**1**, 39–58, (2001).

[35] N. Muraki. The five independence as natural products, *Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probab. Relat. Top.* **06**, 337, (2003).

[36] A. Nica, R. Speicher, *Lectures on the combinatorics of free probability*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. **335**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[37] F. Oravecz. Fermi convolution. *Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probab. Relat. Top.* **5**, no. 2, 235–242, (2002).

[38] R. Speicher. Multiplicative functions on the lattice of noncrossing partitions and free convolution, *Math. Ann.* **298**, no. 4, 611–628, (1994).

[39] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*. Volume 1, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. **49**, Cambridge University Press, Cambridge, (2012).

[40] M. Popa, V. Vinnikov, J.-C. Wang, On the multiplication of operator-valued C-free random variables, *Colloquium Mathematicum* **153**(2), 2015.

[41] M. Popa, J.-C. Wang, On multiplicative conditionally free convolution, *Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011)* **363** no. 12, 6309–6335 2011.

[42] M. Popa. A Fock space model for addition and multiplication of c-free random variables *Proc. Amer. Math. Soc.* **142** (2014).

[43] M. Popa, Multilinear function series in conditionally free probability with amalgamation, *Communications on Stochastic Analysis* Vol. **2**, No. 2 (2008) 307–322.

[44] R. Speicher. *Combinatorial theory of the free product with amalgamation and operator-valued free probability theory.* Memoirs of the American Math. Society, vol. **132**, (1998).

[45] R. Speicher and R. Woroudi. Boolean convolution. *Fields Inst. Commun.* vol. **12**, 1997, 267–279, (1997).

[46] R. Speicher. On universal products *Fields Inst. Commun.* vol. **12**, 257–266, (1997).

[47] D. Voiculescu. Symmetries of some reduced free product C^*-algebras,*Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory (Busteni, 1983), Lecture Notes in Math.*, vol. **1132**, Springer, Berlin, 556–588, (1985).

[48] D. Voiculescu, K. Dykema and A. Nica. *Free Random Variables*, CRM Monograph Series, Vol. **1**, AMS, (1992).

[49] D. Voiculescu. Limit laws for random matrices and free products, *Invent. Math.* **104**, 201–220, (1991).

[50] D. Voiculescu, The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory I. *Comm. Math. Phys.*, Volume **155**, Number 1 (1993), 71–92.

[51] D. Voiculescu. Operations on certain non-commutative operator-valued random variables. *Recent advances in operator algebras (orleans, 1992). Asterisque* **232**, (1995).

[52] D. Voiculescu: Free probability for pairs of faces I. *Commun. Math. Phys.* **332** (3), 955–980 (2014).

[53] W. von Waldenfels. An algebraic central limit theorem in the anti-commuting case. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **42**, 135–140, (1978).

[54] E. Wigner. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices, *Ann. of Math.* **67**, 325–327, (1958).

[55] W. Wöss. Nearest neighbour random walks on free products of discrete groups *Boll. Unione Mat. Ital. B (6)*, **5** (3), 961–982, (1986).