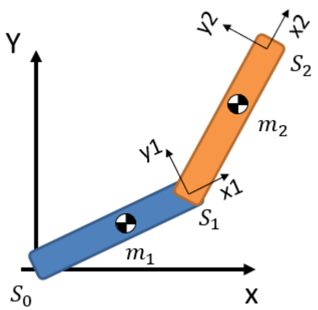
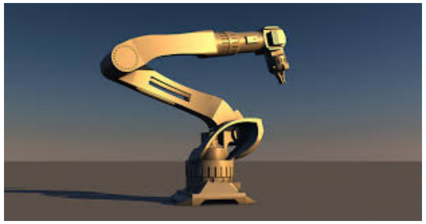
ROBOTICA INDUSTRIAL

TEMA 3

MODELADO DINÁMICO





UNIVERSIDAD DE BURGOS

INTRODUCCIÓN

- **Dinámica**: Estudia la relación entre las fuerzas que se aplican a un cuerpo y el movimiento que estas fuerzas originan
- **Modelo dinámico del robot**: Estudia la relación entre el movimiento del robot y las fuerzas implicadas en el movimiento
- **Modelo dinámico directo**: Expresa la evolución temporal de las coordenadas articulares en función de las fuerzas y pares que intervienen
- **Modelo dinámico inverso**: Expresa las fuerzas y pares que intervienen en función de las coordenadas articulares y sus derivadas
- **Parámetros**: longitudes, masas e inercias
- Para robots de uno o dos grados de libertad puede hacerse bien de forma analítica para más grados de libertad suele ser necesario el empleo de métodos computacionales para resolverlo.

Modelo dinámico directo e inverso

Fuerzas
$F_1, F_2, F_3, \ldots$
$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$

Modelo directo

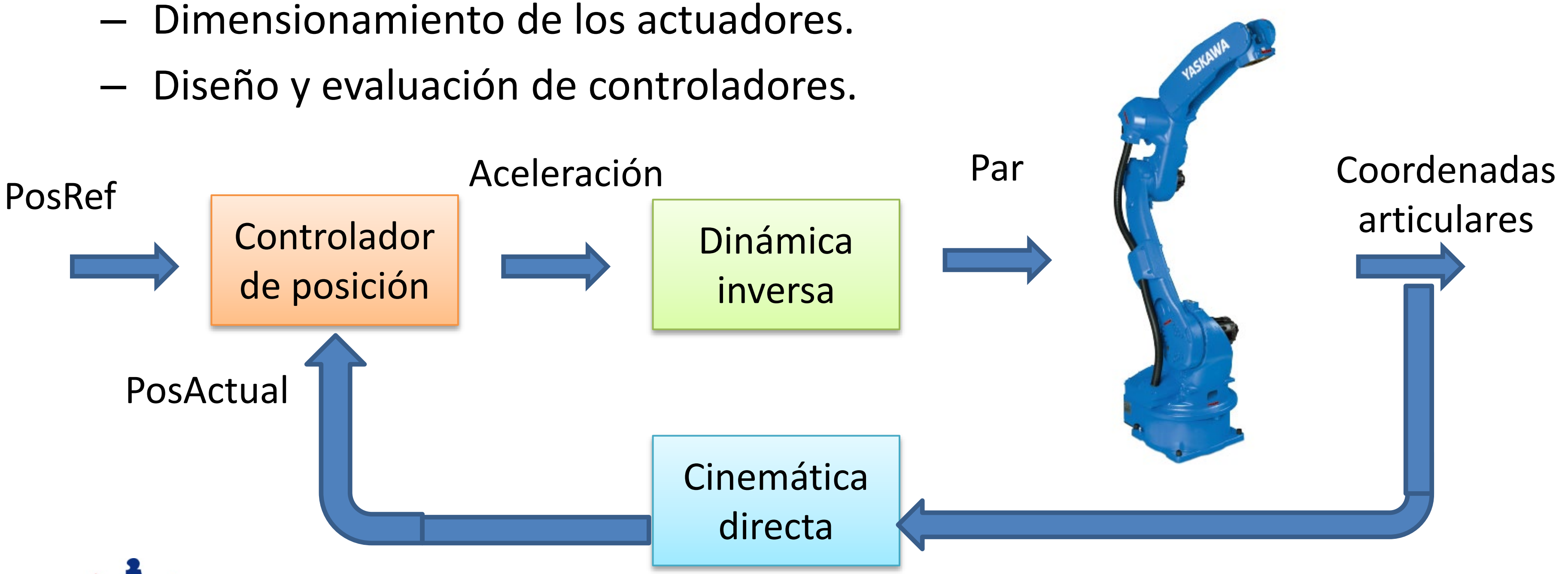
Modelo inverso

Coordenadas articulares
$q_1, q_2, q_3, \ldots$
$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \ldots$

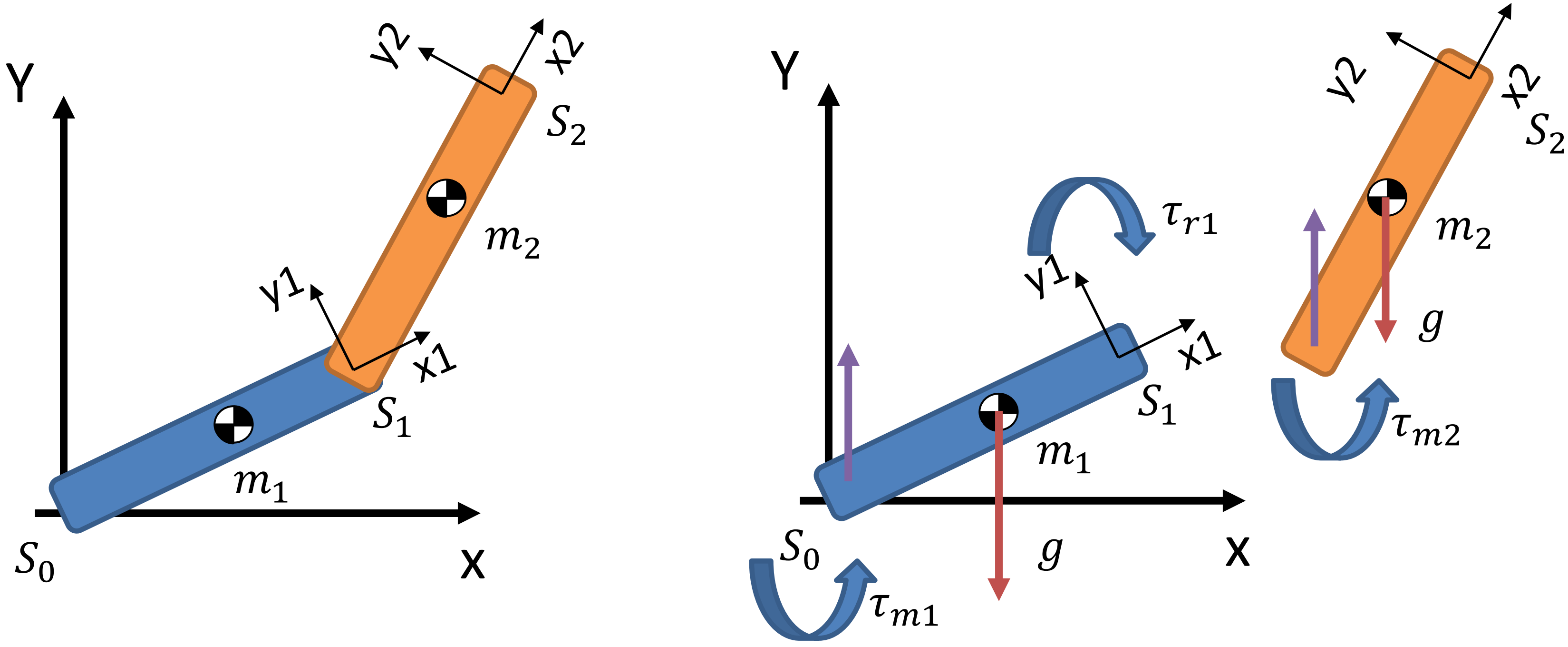
Modelo dinámico

Utilidad

- Simulación del movimiento del robot.
- Evaluación del diseño y la estructura del robot.
- Dimensionamiento de los actuadores.
- Diseño y evaluación de controladores.

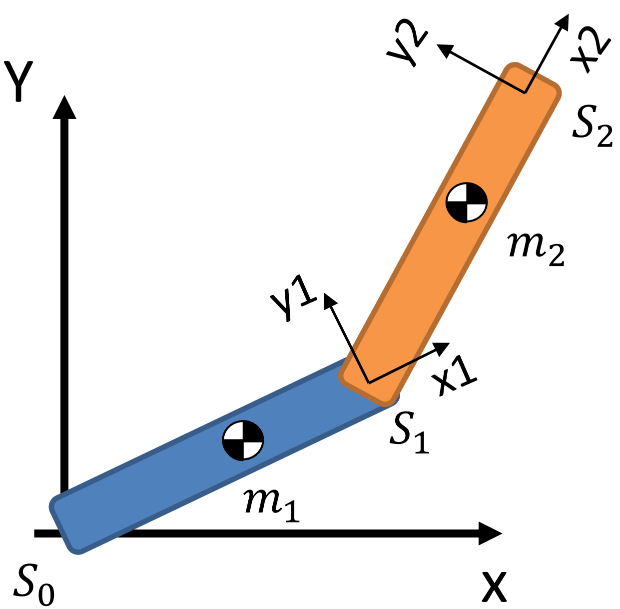


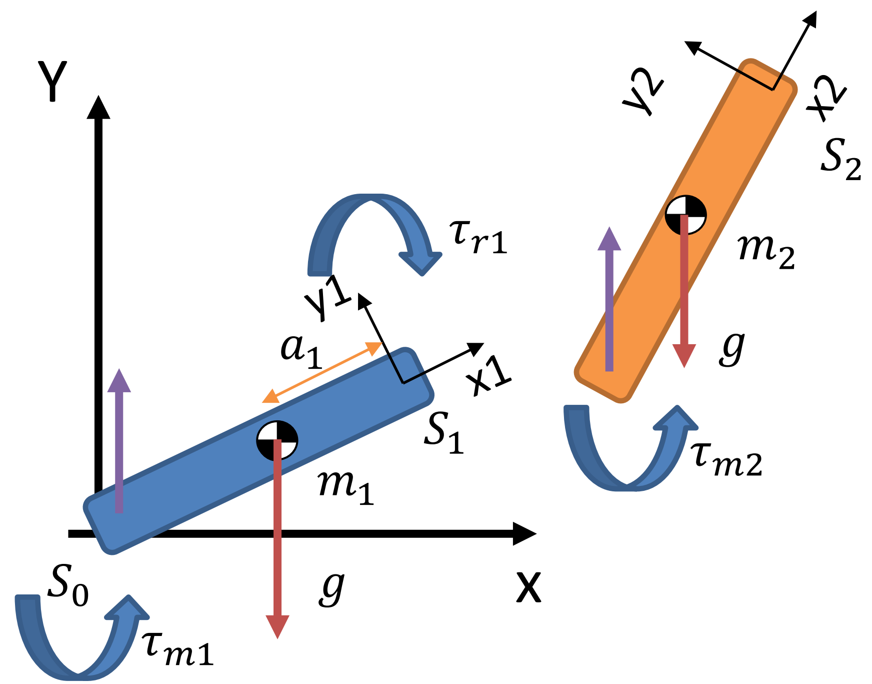
Fuerzas que actúan en el robot



- Todas estas fuerzas y momentos dependen de:
  - Coordenadas, velocidades y aceleraciones articulares
  - Gravedad
  - Masas y dimensiones de articulaciones

Fuerzas que actúan en el robot





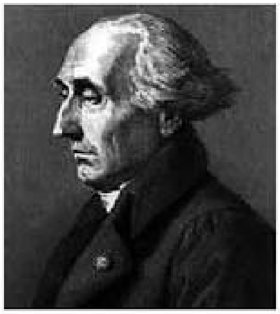
- Cada articulación posee:
  - Masa m_i
  - Centro de masas r_i con respecto a la articulación i
  - Una matriz de inercia I_i. Matriz 3x3 simétrica

- Ejemplo articulación 1:
  - Masa m_1
  - $r_1 = (-a_1, 0{,}0)$
  - $I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Iz1 \end{pmatrix}$

Obtención del modelo dinámico

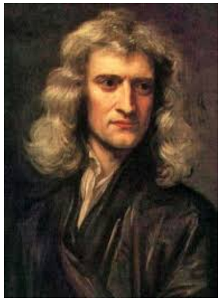
- Formulación del modelo **Lagrange-Euler**:
  - Se basa en el balance de energía a través del lagrangiano

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = K(q,\dot{q}) - U(q)$$



  - Describe la dinámica del robot teniendo en cuenta la energía cinética y potencial almacenada
  - Obtención es simple y sistemática, pero necesita mucho tiempo de cálculo $O(n^4)$→ No se suele emplear en tiempo real

Obtención del modelo dinámico



- Formulación del modelo **Newton-Euler**:
  - Se basa en efectuar un balance de fuerzas y momentos

$$\sum F = ma\,,\ \ \sum \tau = I\dot{w} + w \times (Iw)$$

  - Obtención es más difícil si se hace manualmente
  - Normalmente se obtienen computacionalmente mediante ecuaciones recursivas
  - Menor tiempo de cálculo $O(n)$ → Tiempo real

Método de Lagrange-Euler

- Se basa en el balance de energía a través del lagrangiano

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = K(q,\dot{q}) - U(q)$$

- Y la ecuación del movimiento

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \tau$$

- q coordenadas generalizadas → articulares
- τ vector de fuerzas y pares aplicados

Método de Lagrange-Euler

- Finalmente obtenemos una expresión general similar a:

$$\tau = \underbrace{\boxed{D(q)\ddot{q} + H(q,\dot{q})}}_{K(q,\dot{q})} + \overbrace{\boxed{C(q)}}^{U(q)}$$

Pares y fuerzas externos

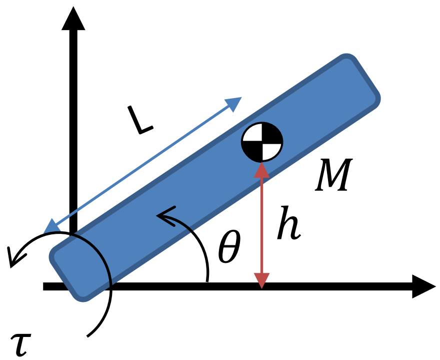
Inercia

Coriolis y f. centrípetas

Gravedad

Método de Lagrange-Euler

EJEMPLO:



- **Energía cinética**

$$K(q,\dot q) = \frac{1}{2} I \dot\theta^2 \qquad I = ML^2$$

- **Energía potencial**

$$U(q) = Mgh = MgL\sin\theta$$

- **Lagrangiano**

$$\mathcal{L}(q,\dot q) = \frac{1}{2} ML^2 \dot\theta^2 - MgL\sin\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -MgL\cos\theta$$

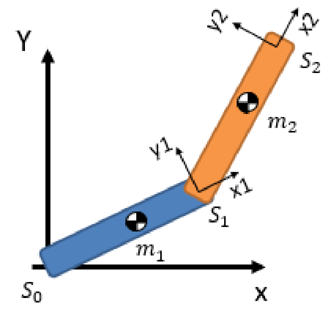
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = ML^2\dot\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = ML^2\ddot\theta$$

$$\boxed{ML^2\ddot\theta + MgL\cos\theta = \tau}$$

$$D(q) = ML^2 \qquad C(q) = MgL\cos\theta$$

Método de Newton-Euler
Algoritmo



Para cada eslabón i: $1 \ldots . n$

1. Calcula la velocidad angular $\boldsymbol{{}^{i}w_{i} = f({}^{i-1}w_{i-1}, \dot{q}_{i})}$
2. Calcula la aceleración angular $\boldsymbol{{}^{i}\dot{w}_{i} = f({}^{i-1}\dot{w}_{i-1}, \dot{q}_{i}, \ddot{q}_{i})}$
3. Calcular la aceleración lineal $\boldsymbol{{}^{i}\dot{v}_{i} = f\left({}^{i-1}\dot{v}_{i-1},\ {}^{i}w_{i},\ {}^{i}\dot{w}_{i}, \dot{q}_{i}, \ddot{q}_{i}\right)}$
4. Calcular la aceleración lineal del centro de masas $\boldsymbol{{}^{i}a_{cm_i} = f(\ {}^{i}w_{i},\ {}^{i}\dot{w}_{i},\ {}^{i}\dot{v}_{i})}$

Para cada eslabón i: $n \ldots .1$

1. Calcular la fuerza ejercida sobre el eslabón $\boldsymbol{{}^{i}f_{i} = f\left({}^{i+1}f_{i+1},\ {}^{i}a_{cm_i}\right)}$
2. Calcular el par ejercido sobre el eslabón $\boldsymbol{{}^{i}n_{i} = f\left({}^{i+1}n_{i+1}, {}^{i+1}f_{i+1},\ {}^{i}a_{cm_i},\ {}^{i}w_{i},\ {}^{i}\dot{w}_{i}\right)}$
3. Obtener fuerza o par aplicado a la articulación $\boldsymbol{{}^{i}\tau_{i} = f\left(\ {}^{i}n_{i},\ {}^{i}f_{i}\right)}$

Finalmente en $\boldsymbol{{}^{i}\tau_{i}}$ tendremos el **modelo dinámico inverso del robot**

Modelo dinámico directo

Fuerzas
$F_1, F_2, F_3, \ldots$
$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$

Modelo directo

Coordenadas articulares
$q_1, q_2, q_3, \ldots$
$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \ldots$

Modelo inverso

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})$$

Modelo dinámico directo

- Para obtenerlo partimos de la ecuación del modelo inverso

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})$$

- Donde $\boldsymbol{\tau}$ es el vector de pares y fuerzas efectivo

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{motor} - \boldsymbol{\tau}_{pert} - \boldsymbol{\tau}_{rozVisc} - \boldsymbol{\tau}_{rozSeco}$$

- El vector de estado será $\begin{bmatrix} \boldsymbol{q} \\ \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix}$ y la entrada $\boldsymbol{\tau}$

Modelo dinámico directo

- Agrupamos H y C en el término N

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{N}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$$

- Despejamos $\ddot{\boldsymbol{q}}$

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})^{-1} \left(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{N}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\right)$$

- Teniendo en cuenta el vector de estado $\begin{bmatrix} \boldsymbol{q} \\ \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix}$ y reordenando:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{q} \\ \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \\ -\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})^{-1}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})^{-1} \end{bmatrix}\boldsymbol{\tau}$$

Modelo dinámico directo

- Declaramos una señal auxiliar u y llevamos toda la parte no lineal

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})^{-1}\left(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{N}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\right)$$

Modelo no lineal

- Entonces obtenemos la expresión de un modelo lineal:

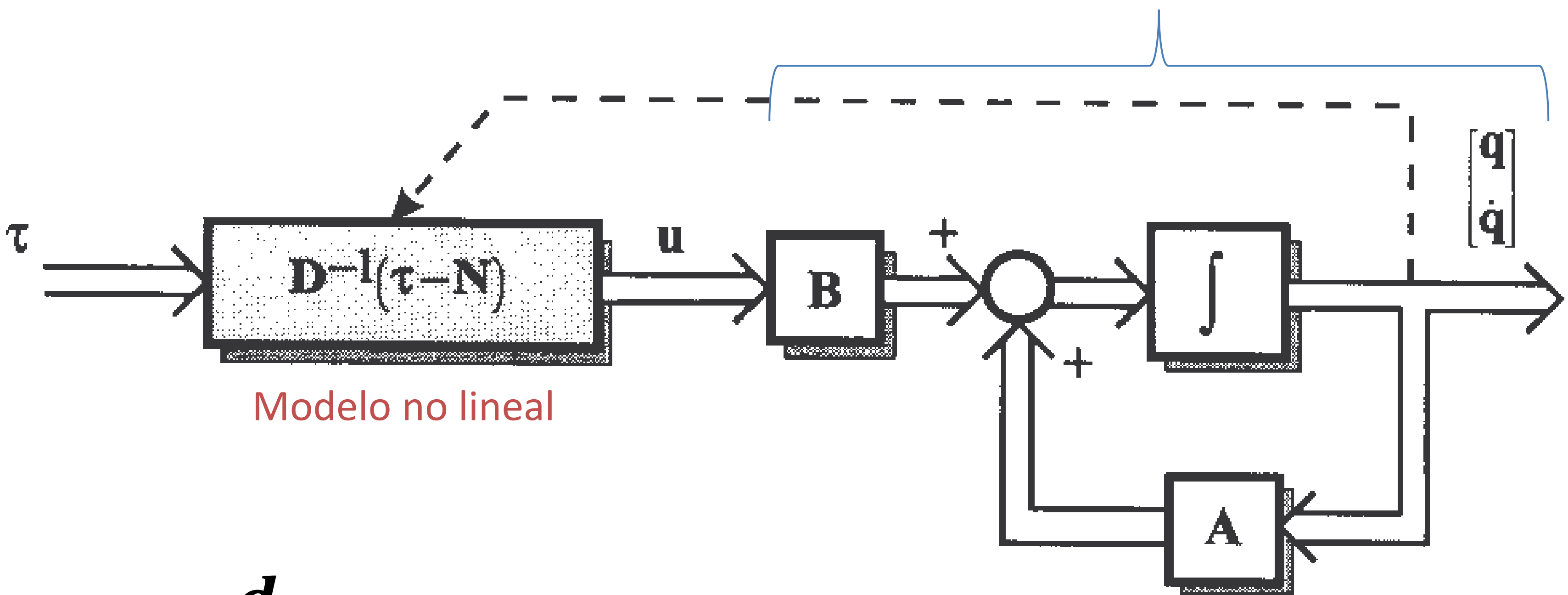
$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}\\ \dot{\boldsymbol{q}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}\\ \dot{\boldsymbol{q}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

Modelo lineal

- Obtenemos dos modelos en cascada uno no lineal y otro lineal

Modelo dinámico directo

Modelo lineal



Modelo no lineal

$$\frac{d}{dt}X = AX + Bu$$
$$Y = CX + Du$$

Bibliografía

- Antonio Barrientos, (2007) Fundamentos de Robótica, 2ª, Mc Graw Hill,
- Anibal Ollero Baturone, (2001) ROBOTICA Manipuladores y Robots Móviles,Marcombo, 84-267-1313-0,
- https://robotacademy.net.au/