Brayan Castañeda – 20162020110

Esthefanía Rivera Jimenez- 20172020040

Carlos Andrés López – 20172020136

Grupo 1

Ejercicios de aplicación – Método de la gran M

Ejercicio 1:

Una persona dispone de 10000000 de unidades monetarias y sabe de la existencia de tres acciones para invertir: la primera le dará una utilidad de un 4% sobre lo invertido, la segunda un 5% y la tercera un 5,5%; sin embargo, en ninguna puede invertir más de un 40% del capital total y al menos 2500000 unidades monetarias en la segunda. Además de que no puede invertir todo el dinero que posee. ¿Cómo invertir esa cantidad inicial para **maximizar** la ganancia sobre la inversión?

Planteándolo como un problema de programación lineal tenemos:

Variables reales:

X_1	Cantidad de unidades monetarias invertidas en la primera acción
X_2	Cantidad de unidades monetarias invertidas en la segunda acción
X_3	Cantidad de unidades monetarias invertidas en la tercera acción
Z	Función de utilidad

Pasando los datos a la forma estándar, nos queda:

Modelo (Primal):

$$\text{MAX Z} = 0.04X_1 + 0.05X_2 + 0.055X_3$$

$$Sujeto\ a:$$

$$\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3 \leq 10000000$$

$$\mathrm{X}_1 \leq 0.4(10000000)$$

$$X_2 \leq 2500000$$

$$X_2 \leq 0.4(10000000)$$

$$X_3 \leq 0.4(10000000)$$

$$X_1, X_2, X_3 > 0$$

Simplificando las restricciones:

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 10000000$$

$$X_1 \leq 4000000$$

$$X_2 \geq 2500000$$

$$X_2 \leq 4000000$$

$$X_3 \leq 4000000$$

$$X_1, X_2, X_3 > 0$$

Convertimos las desigualdades en ecuaciones agregándolas variables de holgura y artificiales y agregando la penalización. Luego pasamos el problema a la forma estándar del método de la gran M, quedando de la siguiente manera:

$$MAX\ Z = 0.04X_1 + 0.05X_2 + 0.055X_3 + 0H_1 + 0H_2 - 0H_3 - MA_1 + 0H_4 + 0H_5$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + H_1 = 10000000$$

$$X_1 + H_2 = 4000000$$

$$X_2 - H_3 + A_1 = 2500000$$

$$X_2 + H_4 = 4000000$$

$$X_3 + H_5 = 4000000$$

$$x_1, x_2, x_3, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, A_1 \geq 0$$

Como el problema es de maximización se restan las variables artificiales en la función objetivo, luego se despeja A_1 y se reemplaza en la función objetivo:

<u>De la restricción 3 tenemos:</u>

$$A_1 = -X_2 + H_3 + 2500000$$

Reemplazando en Z tenemos

$$Z = 0.04X_1 + 0.05X_2 + 0.055X_3 - M(-X_2 + H_3 + 250000) + 0H_3$$

Operando:

$$Z = 0.04X_1 + 0.05X_2 + 0.055X_3 + MX_2 - MH_3 - M2500000 + 0H_3$$

Factorizando:

$$Z = 0.04X_1 + (0.05 + M)X_2 + 0.055X_3 - MH_3 - M2500000 + 0H_3$$

Despejando Z:

$$Z - 0.04X_1 - (0.05 + M)X_2 - 0.055X_3 + MH_3 = -M2500000$$

Ya teniendo despejado Z estos datos coincidirán con la fila Z del primer tablero.

Luego se resuelve el problema por simplex simple

Primer tablero:

	Z	X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	A_1	RH
Z	1	-0.04	-(0.05+M)	-0.055	0	0	M	0	0	0	-M250000000
H_1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	10000000
H_2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	4000000
A_1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	1	2500000
H_4	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	4000000
H_5	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4000000

Escogemos el valor más negativo puesto que el problema nos exige maximizar por lo que la columna a pivotar será la correspondiente a x_2, además la variable a salir es A_1 y la variable a entrar a las básicas es X_2, quedando de la siguiente manera:

Segundo tablero:

Como la variable que salió fue A_1 esta se hace cero, por eso se elimina esta columna para simplificar el problema.

	Z	X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	RH
Z	1	-0.04	0	-0.055	0	0	-0.05	0	0	125000
H_1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	7500000
H_2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	4000000
x_2	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	2500000
H_4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1500000
H_5	0	0	0	1	0	0	0	0	1	4000000

Puesto que en la función objetivo nos encontramos números negativos y el objetivo de la función es maximizar, entonces procedemos a continuar con el método simplex como en el paso anterior eligiendo el número más negativo de la fila Z y el resultado nos arrojara:

Tercer tablero:

	Z	X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	RH
Z	1	-0.04	0	0	0	0	-0.05	0	0	345000
H_1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	2500000
H_2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	4000000
x_2	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	2500000
X_3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1500000
H_5	0	0	0	1	0	0	0	0	1	4000000

Nuevamente ya que en la función objetivo nos encontramos números negativos y el objetivo de la función es maximizar, entonces procedemos a continuar con el método simplex como en el paso anterior.

Cuarto tablero:

	Z	X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	RH
Z	1	0.01	0	0	0.05	0	0	0	0	520000
H_3	0	1	0	0	1	0	1	0	0	2500000
H_2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	4000000
x_2	0	1	0	0	0	1	0	1	0	4000000
X_3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1500000
H_5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4000000

Como se puede observar la función objetivo o fila Z quedo plenamente en términos positivos por lo que el desarrollo del problema ha terminado y podemos dar solución al problema de aplicación:

Tenemos entonces los siguientes valores de solución:

$$x_1 = 0\ ;\ x_2 = 4000000\ ;\ x_3 = 1500000;$$

$$Z = 520000$$

Dando la solución puntual al problema:

La máxima ganancia será de **520000** invirtiendo **4000000** en la que ofrece 5% de ganancias y otros **1500000** en la que ofrece 5.5% de ganancias.

Ejercicio 2:

La compañía <u>*El Cóndor*</u> opera un avión que transporta tanto a pasajeros como carga entre los aeropuertos de <u>Bogotá</u>, <u>Medellín</u> y <u>Cali</u>. Debido a los elevados costos de operación, el avión no sale hasta que todas sus bodegas hayan sido cargadas.

El avión tiene tres bodegas: <u>inferior</u>, <u>media</u> y <u>superior</u>. Debido a las limitaciones de espacio que hay, el avión no puede llevar más de <u>100 toneladas</u> de carga en cada viaje: la bodega inferior debe llevar máximo <u>40 toneladas</u> de carga, la bodega intermedia debe transportar un tercio de la carga de la bodega inferior y la bodega superior debe llevar 2/5 partes de la carga de la bodega inferior. Sin embargo, no se deben llevar más de 60 toneladas de carga entre las bodegas media y superior.

Las utilidades por el transporte son de 8000 $u.m.$ por tonelada de carga en la bodega inferior, 10000 $u.m.$ por tonelada en la intermedia y 12000 $u.m.$ en la superior, después de deducir los gastos.

Plantear un modelo de PL y luego resolver que permita determinar la forma de cargar el avión que **maximice** las utilidades.

Análisis e información

Al realizar un análisis detallado del problema podemos determinar las siguientes tablas con la información que nos da el problema:

BODEGAS	LIMITE (toneladas)	UTILIDADES/TONELADA
Superior	2/5 de bodega inferior	12.000
Intermedia	1/3 de bodega inferior	10.000
Inferior	40	8000
Total de toneladas: debe ser menos o igual 100 toneladas		

Luego de tener la información detallada en una tabla de datos, asignamos las variables que tendrá nuestro problema de PL.

Planteamiento:

x_1	Toneladas de carga a transportar en la bodega inferior
x_2	Toneladas de carga a transportar en la bodega intermedia
x_3	Toneladas de carga a transportar en la bodega superior

Se plantea el problema en forma estándar ajustándonos a las restricciones que se nos dan.

Modelo (primal):

$$Max\ Z = 8000x_1 + 10000x_2 + 12000x_3$$
$$Sujeto\ a:$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 100$$
$$x_1 \leq 40$$
$$x_2 = \frac{1}{3}x_1$$
$$x_3 = \frac{2}{5}x_1$$
$$x_2 + x_3 \leq 60$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Resumiendo

$$Max\ Z = 8000x_1 + 10000x_2 + 12000x_3$$
$$Sujeto\ a:$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 100$$
$$x_1 \leq 40$$
$$x_1 - 3x_2 = 0$$
$$x_1 - \frac{5}{2}x_3 = 0$$
$$x_2 + x_3 \leq 60$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Luego pasamos el problema a la forma estándar del método de la gran M, quedando de la siguiente manera, al tener dos igualdades solo se agregan dos variables artificiales y las debidas holguras a las otras restricciones:

$$Max\ Z = 8000x_1 + 10000x_2 + 12000x_3 + 0H_1 + 0H_2 - MA_1 - MA_2 + 0H_3$$

$$Sujeto\ a:$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + H_1 = 100$$
$$x_1 + H_2 = 40$$
$$x_1 - 3x_2 + A_1 = 0$$
$$x_1 - \frac{5}{2}x_3 + A_2 = 0$$
$$x_2 + x_3 + H_3 = 60$$

$$x_1, x_2, x_3, H_1, H_2, H_3, A_1 A_2 \geq 0$$

Para este problema al ser de maximización, las variables artificiales se restan en la función objetivo. Luego de tener el problema en forma estándar, se construye el primer tablero a partir del despeje de las variables artificiales y su remplazo en la función objetivo, luego se resuelve el problema por Simplex simple.

<u>De la restricción **3 y 4**:</u>

$$A_1 = -x_1 + 3x_2$$

$$A_2 = -x_1 + \frac{5}{2}x_3$$

Reemplazando A_1 y A_2 en la función objetivo:

$$Z = 8000x_1 + 10000x_2 + 12000x_3 + 0H_1 + 0H_2 - M(-x_1 + 3x_2) - M(-x_1 + \frac{5}{2}x_3) + 0H_3$$

Operando términos:

$$Z = 8000x_1 + 10000x_2 + 12000x_3 + 0H_1 + 0H_2 + Mx_1 - 3Mx_2 + Mx_1 - \frac{5}{2}Mx_3 + 0H_3$$

Simplificando términos comunes:

$$Z = 8000x_1 + 10000x_2 + 12000x_3 + 0H_1 + 0H_2 + 2Mx_1 - 3Mx_2 - \frac{5}{2}Mx_3 + 0H_3$$

Factorizando:

$$Z = (8000 + 2M)x_1 + (10000 - 3M)x_2 + \left(12000 - \frac{5}{2}M\right)x_3 + 0H_1 + 0H_2 + 0H_3$$

Por lo tanto, nos queda el correspondiente coeficiente para cada variable de problema, estos coeficientes coincidirán con la última fila del primer tablero.

Primer tablero:

C_j		8000	10000	12000	0	0	$-M$	$-M$	0	
VB		x_1	x_2	x_3	H_1	H_2	A_1	A_2	H_3	b_j
H_1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	100
H_2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	40
A_1	$-M$	1	-3	0	0	0	1	0	0	0
A_2	$-M$	1	0	$-\frac{5}{2}$	0	0	0	1	0	0
H_3	0	0	1	1	0	0	0	0	1	60
Z		$-2M$	$3M$	$\frac{5}{2}M$	0	0	$-M$	$-M$	0	0
$C_j - Z_j$		$8000 + 2M$	$10000 - 3M$	$12000 - \frac{5}{2}M$	0	0	0	0	0	

Luego se resuelve por simplex simple, donde al ser un problema de maximización se toma el valor más positivo de la fila $C_j - Z_j$ este será columna pivote, después el elemento pivote sería el 1 correspondiente a la fila pivote A_1, después de hacer las operaciones nos queda el siguiente tablero.

Segundo tablero:

La variable que sale de las variables básicas es A_1 y la que entra es x_1, al salir una variable artificial esta se hace 0 y se elimina su columna del simplex para simplificar el procedimiento.

Quedando el siguiente tablero:

C_j	8000	10000	12000	0	0	$-M$	0	
VB	x_1	x_2	x_3	H_1	H_2	A_2	H_3	b_j

H_1	0	0	4	1	1	0	0	0	100
H_2	0	0	3	0	0	1	0	0	40
x_1	8000	1	-3	0	0	0	0	0	0
A_2	$-M$	0	3	$-\frac{5}{2}$	0	0	1	0	0
H_3	0	0	1	1	0	0	0	1	60
Z		8000	$-24000 - 3M$	$\frac{5}{2}M$	0	0	$-M$	0	0
$C_j - Z_j$		0	$34000 + 3M$	$12000 - \frac{5}{2}M$	0	0	0	0	

Luego la variable a salir es A_2 y la variable a entrar es x_2, quedando el siguiente tercer tablero:

Tercer tablero:

Como la variable que salió fue A_2 y esta es una variable artificial a salir se hace 0 y por eso se elimina la columna de A_2, para simplificar el desarrollo.

C_j		8000	10000	12000	0	0	0	
VB		x_1	x_2	x_3	H_1	H_2	H_3	b_j
H_1	0	0	0	$\frac{13}{3}$	1	0	0	100
H_2	0	0	0	$\frac{5}{2}$	0	1	0	40
x_1	8000	1	0	$-\frac{5}{2}$	0	0	0	0
x_2	10000	0	1	$-\frac{5}{6}$	0	0	0	0

H_3	0	0	0	$\frac{11}{6}$	0	0	1	60
Z		8000	10000	$\frac{-85000}{3}$	0	0	0	0
$C_j - Z_j$		0	0	$\frac{121000}{3}$	0	0	0	

Aun el problema no termina porque sigue habiendo elementos positivos en la ultima fila $C_j - Z_j$, así que se procede con una cuarta iteración donde la variable que sale es H_2 y la variable que entra es x_3, quedando el siguiente cuarto tablero:

Cuarto tablero:

C_j		8000	10000	12000	0	0	0	
VB		x_1	x_2	x_3	H_1	H_2	H_3	b_j
H_1	0	0	0	1	1	$-\frac{26}{15}$	0	$\frac{92}{3}$
x_3	12000	0	0	1	0	$\frac{2}{5}$	0	16
x_1	8000	1	0	0	0	1	0	40
x_2	10000	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{40}{3}$
H_3	0	0	0	0	0	$-\frac{11}{15}$	1	$\frac{92}{3}$
Z		8000	10000	12000	0	$\frac{48400}{3}$	0	$\frac{1936000}{3}$
$C_j - Z_j$		0	0	0	0	$-\frac{48400}{3}$	0	

El problema termina acá en esta última iteración pues $\forall C_j - Z_j\ es \leq 0$, luego se procede a la interpretación de los resultados, cabe aclarar que para este problema se manejo los datos en fracciones por lo tanto los resultados son expresados en fracciones. La solución óptima para el problema es:

$$x_1 = 40\ ;\ x_2 = \frac{40}{3};\ x_3 = 16;\ H_1 = \frac{92}{3};\ H_2\ = 0\ ; H_3\ = \frac{92}{3}$$

$$Z = \frac{1936000}{3}$$

Por lo tanto, la solución más óptima para el problema de minimización es cuando toma los anteriores valores. Además, como la variable artificial A_1 y A_2 salen de la solución básica (es decir, se hace igual a cero) en la primera y segunda iteración, se tiene un resultado que es consistente con el concepto de penalizarlas en la función objetivo. Luego se hace la interpretación respecto a lo que nos pedía el problema aplicado, por lo tanto:

La forma de cargar el avión que maximiza las utilidades y beneficios es con $\boldsymbol{\frac{1936000}{3}}$ $\boldsymbol{u.m}$ por tonelada de carga en el avión, donde se debe cargar la bodega inferior con **40** toneladas, la bodega intermedia con $\boldsymbol{\frac{40}{3}}$ toneladas y la bodega superior con **16** toneladas.

Problema tomado del libro de '*Cien problemas de PL'*, Universidad Nacional de Colombia, Guillermo Jiménez Lozano & Víctor Manuel Quesada Ibarguen, pág. 36, 2006.

Ejercicio 3:

Una persona dispone de 10000000 de unidades monetarias y sabe de la existencia de tres acciones para invertir: la primera le dará una utilidad de un 20% sobre lo invertido, la segunda una perdida de 40% y la tercera un 30% de ganancia; la condición del resultado obtenido debe darse según las siguientes restricciones definidas para las agrupaciones criticas consideradas.

Resolver el siguiente problema de minimización en forma estándar por el método de la gran M.

$$Min\ Z = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3$$

$$\begin{aligned} &Sujeto\ a: \\ &5x_1 - 6x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ &-x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 8 \\ &2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \leq 4 \\ \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Pasando el problema a forma estándar, tenemos:

$$Min\ Z = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 0H_1 + MA_1 - 0H_2 + MA_2 + 0H_3$$

$$Sujeto\ a:$$

$$\begin{aligned} 5x_1 - 6x_2 + 2x_3 - H_1 + A_1 &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - H_2 + A_2 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + H_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, H_1, H_2, H_3, A_1 A_2 \geq 0$$

Además, para este problema al ser de minimización, las variables artificiales se suman en la función objetivo, se hacen las operaciones para construir el primer tablero.

<u>De la restricción **1 y 2**:</u>

$$A_1 = -5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + H_1 + 5$$

$$A_2 = x_1 - 3x_2 - 5x_3 + H_2 + 8$$

Reemplazando A_1 y A_2 en la función objetivo:

$$Z = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 0H_1 + M(-5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + H_1 + 5) - 0H_2 + M(x_1 - 3x_2 - 5x_3 + H_2 + 8) + 0H_3$$

Operando términos:

$$Z = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 0H_1 - 5Mx_1 + 6Mx_2 - 2Mx_3 + MH_1 + 5M - 0H_2$$
$$+ Mx_1 - 3Mx_2 - 5Mx_3 + MH_2 + 8M + 0H_3$$

Simplificando términos comunes:

$$Z = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 0H_1 - 4Mx_1 + 3Mx_2 - 7Mx_3 + MH_1 + 13M - 0H_2$$
$$+ MH_2 + 0H_3$$

Factorizando:

$$Z = (2 - 4M)x_1 + (-4 + 3M)x_2 + (3 - 7M)x_3 + MH_1 + MH_2 + 0H_3$$
$$+ 13M$$

Por lo tanto, nos queda el correspondiente coeficiente para cada variable de problema, estos coeficientes coincidirán con la última fila del primer tablero.

Luego de tener el problema en forma estándar y con los respectivos coeficientes para cada variable, se construye el primer tablero y se resuelve el problema por Simplex simple.

Primer tablero:

Se acomodan las variables de la fila V_B de forma que quede una matriz de identidad y de manera que las variables artificiales A_i entren a las variables básicas.

C_j		2	-4	3	0	0	M	M	0	
VB		x_1	x_2	x_3	H_1	H_2	A_1	A_2	H_3	b_j
A_1	M	5	-6	2	-1	0	1	0	0	5
A_2	M	-1	3	5	0	-1	0	1	0	8
H_3	0	2	5	-4	0	0	0	0	1	4
Z		$4M$	$-3M$	$7M$	$-M$	$-M$	M	M	0	$13M$

$C_j - Z_j$	$2 - 4M$	$-4 + 3M$	$3 - 7M$	M	M	0	0	0	

Luego al ser un problema clásico de minimización se escoge el elemento más negativo de la fila $C_j - Z_j$ esta será nuestra columna pivote, marcada con una flecha azul.

Luego sale de las variables básicas A_2 y entra x_3, seguido se hacen las operaciones del simplex.

Segundo tablero:

Como se mencionó entra a las variables básicas x_3 y al salir A_2 que es una variable artificial, se elimina esta columna para simplificar la solución del problema.

C_j		2	-4	3	0	0	M	0	
VB		x_1	x_2	x_3	H_1	H_2	A_1	H_3	b_j
A_1	M	5.4	-7.2	0	-1	0.4	1	0	1.8
x_3	3	-0.2	0.6	1	0	-0.2	0	0	1.6
H_3	0	1.2	7.4	0	0	-0.8	0	1	10.4
Z		$5.4M - 0.6$	$-7.2M + 1.8$	3	$-M$	$0.4M - 0.6$	M	0	$1.8M + 4.8$
$C_j - Z_j$		$-5.4M + 2.6$	$7.2M - 5.8$	0	M	$0.4M + 0.6$	0	0	

Como se puede ver para la iteración aún hay elementos negativos en la fila $C_j - Z_j$, el problema termina cuando $\forall C_j - Z_j\ sea \geq 0$.

Luego para la siguiente iteración sale de las variables básicas A_1 y entra x_1.

Tercer tablero:

Como se mencionó entra a las variables básicas x_1 y al salir A_1 que es una variable artificial, se elimina esta columna para simplificar la solución del problema.

C_j	2	-4	3	0	0	0	

VB		x_1	x_2	x_3	H_1	H_2	H_3	b_j
x_1	2	1	-1.3	0	-0.18	0.07	0	0.33
x_3	3	0	0.3	1	-0.03	-0.18	0	1.66
H_3	0	0	9	0	0.22	-0.88	1	10
Z		2	-1.7	3	-0.45	-0.4	0	5.64
$C_j - Z_j$		0	-2.3	0	0.45	0.4	0	

Como aún permanece un elemento negativo en la última fila se procede a una cuarta iteración donde sale H_3 y entra x_2 .

Cuarto tablero:

C_j		2	-4	3	0	0	0	
VB		x_1	x_2	x_3	H_1	H_2	H_3	b_j
x_1	2	1	0	0	-0.15	-0.04	0.14	1.77
x_3	3	0	0	1	-0.03	-0.15	-0.03	1.32
x_2	-4	0	1	0	0.02	-0.09	0.11	1.11
Z		2	-4	3	-0.47	-0.17	-0.25	3.06
$C_j - Z_j$		0	0	0	0.47	0.17	0.25	

Luego el problema termino pues $\forall C_j - Z_j\ es \geq 0$ y se procede a interpretar y dar la solución al problema.

Cabe aclarar que como se manejan decimales hay un cierto margen de error según el número de cifras significativas que se tomen, es por esto que las soluciones quedan aproximadas. Luego:

La solución óptima para el problema es:

$$x_1 \cong 1.77\ ;\ x_2 \cong 1.11\ ;\ x_3 \cong 1.32;\ H_1 = 0;\ H_2\ = 0\ ; H_3\ = 0$$

$$Z = 3.06$$

Por lo tanto, la solución más óptima para el problema de minimización es cuando toma los anteriores valores. Además, como la variable artificial A_1 y A_2 salen de la solución básica (es decir, se hace igual a cero) en la primera y segunda iteración, se tiene un resultado que es consistente con el concepto de penalizarlas en la función objetivo.