Caso de Estudio 6

Leonardo Nieto, Daniel Ramírez y Carlos Sáenz

1. El departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica en Uniandes ha instalado una antena en el techo del edificio ML para detectar vida extraterrestre. El sistema tiene una interferencia tal que, durante el día la señal recibida está distribuida con $N(5,3)$, y durante toda la noche la señal recibida está distribuida con $N(0,2)$. Asuma que usted está a cargo de revisar unas lecturas que fueron tomadas con igual probabilidad durante el día y durante la noche (es decir, $P(noche) = P(dia) = 0{,}5$).

   a. Sea Y una variable aleatoria que representa la lectura de la señal. Calcule y grafique la función de distribución de probabilidad de Y. Evalúe $P(Y > 1)$.

   Para este caso se tienen dos eventos, los cuales son día y noche, además la densidad de probabilidad para cada uno de los eventos.

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{(y-5)^2}{6}}, & para\ y_{señal\ dia} \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}}, & para\ y_{señal\ noche} \end{cases}$$

   De acuerdo a lo anterior se puede expresar la PDF de Y como una combinación lineal teniendo en cuenta el teorema de probabilidad total.

$$f_Y(y) = P(dia) * f_{Y|dia}(y) + P(noche) * f_{Y|noche}(y)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{(y-5)^2}{6}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}}\right)$$

$$F_Y(y \leq 1) = \int_1^{\infty} f_Y(y)\, dy$$

$$F_Y(y \leq 1) = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{(y-5)^2}{6}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}}\right) dy$$

$$F_Y(y \leq 1) = 0.6146$$

$$P(Y > 1) = 1 - P(Y \leq 1) = 0{,}3854$$

derivando la CDF tenemos que la PDF da

$$f_Y(y) = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{-x^2/4}}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\; e^{-1/6\,(x-5)^2}\right)$$

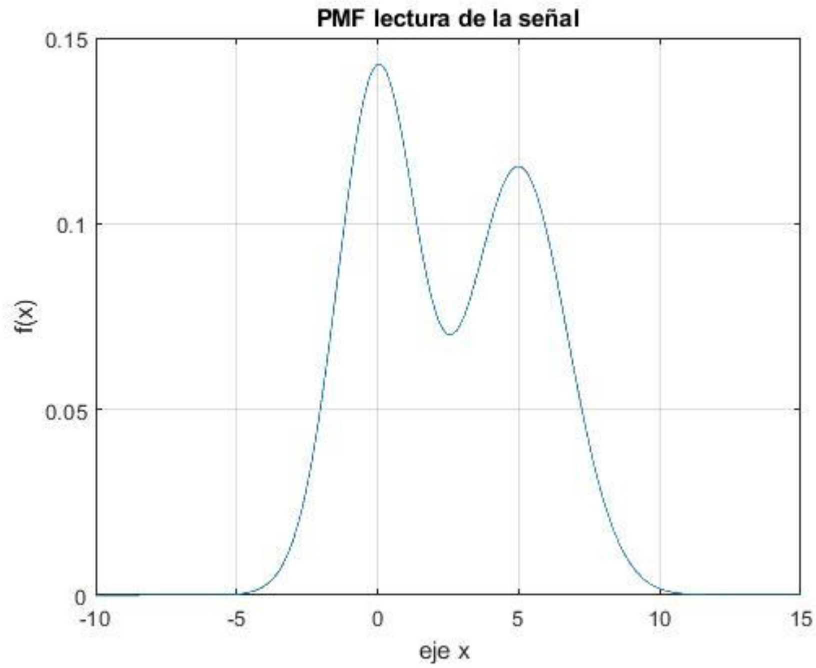


Figura de la PDF asociada a la variable aleatoria de la lectura de la señal

Para comprobar que esta PDF satisface los requerimientos se integra desde menos infinito a infinito lo cual da 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\; \exp\left(-\frac{1}{6}\,(x-5)^2\right)\right) dx = 1$$

b. Encuentre la probabilidad de que era de noche cuando una lectura de $Y = 3$ fue tomada, es decir, calcule $P(noche\ |Y = 3)$.

Aplicando el teorema de Bayes se tiene que:

$$P(noche|Y = 3) = \frac{P(noche) f_{Y|noche}(y)}{P(noche) f_{Y|noche}(y) + P(dia) f_{Y|dia}(y)}$$

$$P(noche|Y = 3) = \frac{(0,5)\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{3^2}{4}}\right)}{(0,5)\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{3^2}{4}}\right) + (0,5)\left(\frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{(3-5)^2}{6}}\right)}$$

$$P(noche|Y = 3) = 0,2009$$

2.

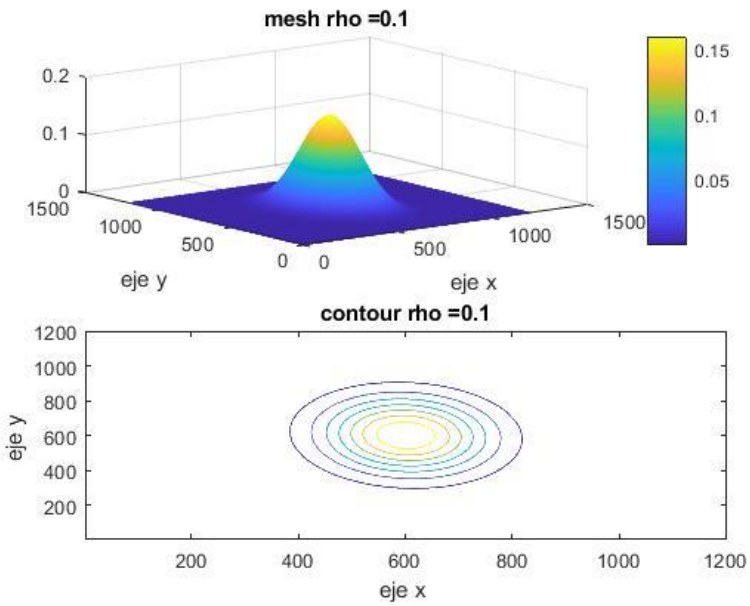
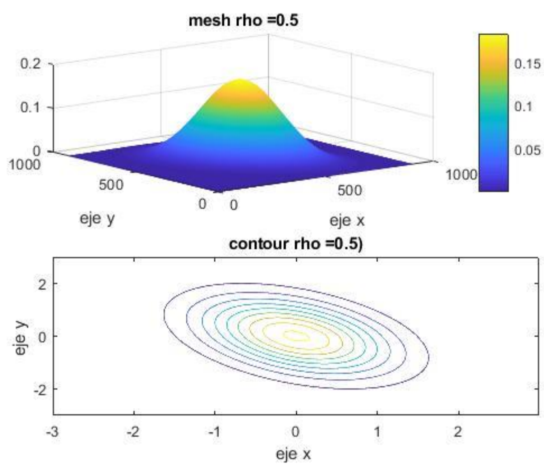


Figura rho =0.1



Rho =0.5

b) en esta grafica se traslapa el contorno de la función de densidad de probabilidad con parámetro rho igual a 0.4 con las graficas de las variables aleatorias que se distribuyen de con fxy(x,y)

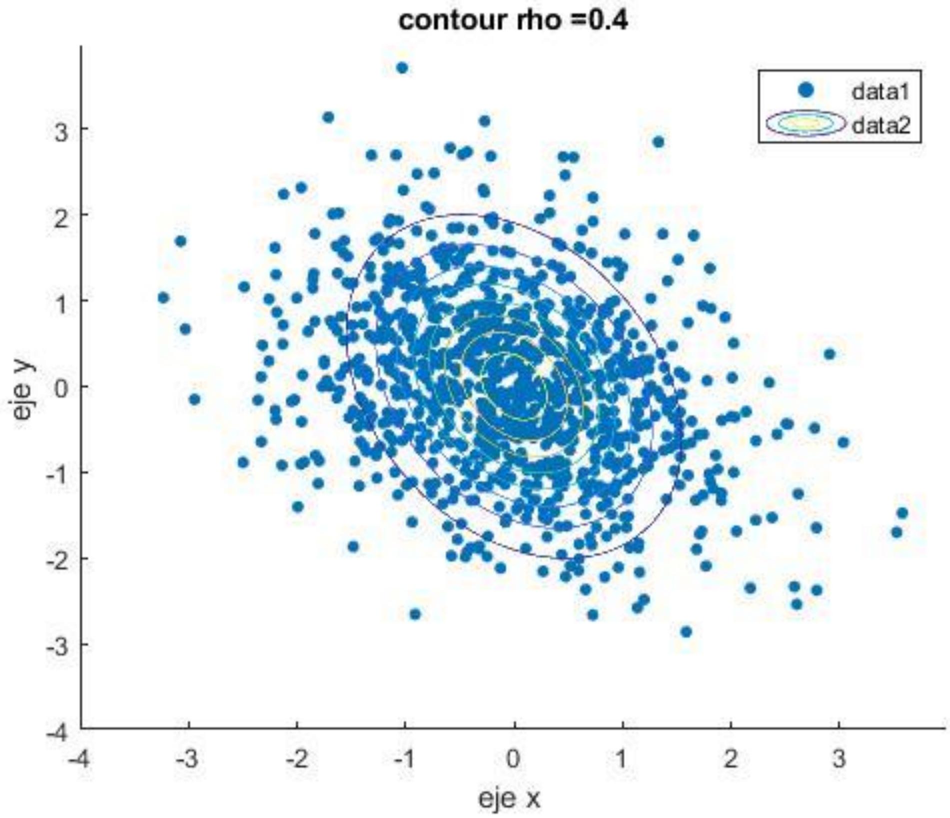


Figura:Contorno de la PDF con parámetro Rho =0.4 traslapado con los datos

3. Sea A un punto en el espacio cartesiano 2-dimensional con coordenada $(X, 1)$, donde $X \sim N(1,1)$. Encuentre la función de distribución acumulada y la función de distribución de probabilidad de la distancia entre el origen y A.

Dado el enunciado la distancia entre el origen y Y tenemos que:

$$1^2 = Y^2 + X^2$$

$$Y^2 = 1^2 - X^2$$

$$Y = \sqrt{1 - X^2}$$

Para este caso X está definido como $X \sim N(1,1)$ una variable normal.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$

$$F_Y(y) = P\left(\sqrt{1 - X^2} \leq y\right)$$

$$F_Y(y) = P\left(|X| \leq \sqrt{Y^2 - 1}\right)$$

$$F_Y(y) = P\left(-\sqrt{Y^2-1} \leq X \leq \sqrt{Y^2-1}\right)$$

$$F_Y(y) = F_X\left(\sqrt{Y^2-1}\right) - F_X\left(-\sqrt{Y^2-1}\right)$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y)$$

$$f_Y(y) = \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} F_X'\left(\sqrt{Y^2-1}\right) + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} F_X'\left(-\sqrt{Y^2-1}\right)$$

Dada la definición de función de variable aleatoria normal X, con media μ y desviación estándar σ se tiene que:

$$f_X(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \qquad -\infty < x > \infty$$

Dado que $f_Y(y) = F_Y'(y)$ se tiene la función de densidad de probabilidad de X de la siguiente manera:

$$F_X'\left(\sqrt{Y^2-1}\right) = f_X\left(\sqrt{Y^2-1}\right)$$

$$F_X'\left(\sqrt{Y^2-1}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{\left(\left(\sqrt{Y^2-1}\right)-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$F_X'\left(-\sqrt{Y^2-1}\right) = f_X\left(-\sqrt{Y^2-1}\right)$$

$$F_X'\left(-\sqrt{Y^2-1}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{\left(\left(-\sqrt{Y^2-1}\right)-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Remplazando lo anterior en $f_Y(y) = \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} F_X'\left(\sqrt{Y^2-1}\right) + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} F_X'\left(-\sqrt{Y^2-1}\right)$ se tiene lo siguiente:

$$f_Y(y) = \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{\left(\left(\sqrt{Y^2-1}\right)-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)} + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{\left(\left(-\sqrt{Y^2-1}\right)-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

4. Un banco tiene dos cajeros. El tiempo de atención del cajero 1 es una variable aleatoria distribuida exponencialmente con parámetro $\lambda 1 = 4$. El tiempo del cajero 2 está distribuido exponencialmente con parámetro $\lambda 2 = 6$. Un cliente elige un cajero aleatoriamente, con probabilidad 1/3 de elegir el cajero 1, y probabilidad 2/3 de elegir el cajero 2. Encuentre la función de densidad de probabilidad y grafíquela.

Utilizando la regla de Bayes:

$$f_X(x) = P(Cajero\ 1) * f_{X|Cajero\ 1}(x) + P(Cajero\ 2) * f_{X|Cajero\ 2}(x)$$

Donde:

$$P(Cajero\ 1) = \frac{1}{3}$$

$$P(Cajero\ 2) = \frac{2}{3}$$

$$f_{X|Cajero\ 1}(x) = 4e^{-4x}$$

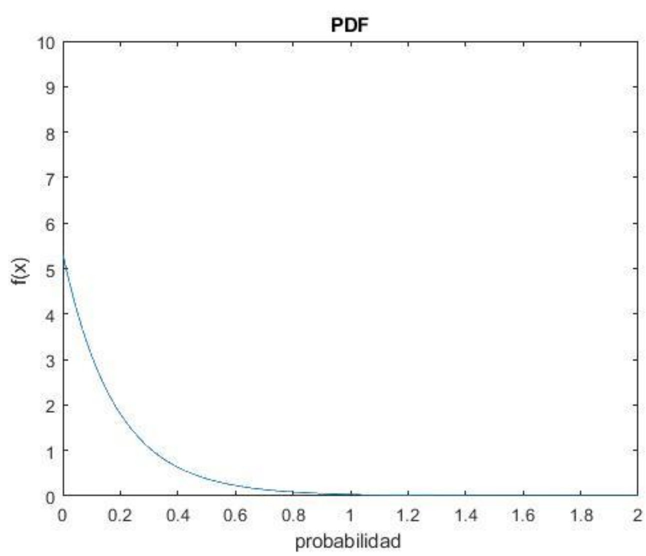
$$f_{X|Cajero\ 2}(x) = 6e^{-6x}$$

De esta forma la función de densidad de probabilidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{3}4e^{-4x} + \frac{2}{3}6e^{-6x}$$

$$f_X(x) = \frac{4}{3}e^{-4x} + 4e^{-6x}$$

El gráfico de la función de densidad de probabilidad es:



Anexo código

```
%%
% Grafica punto 1
clc
clear all
%fun = @(x) 1/2 *((1/sqrt(6*pi)).*exp(-(x-5).^2/6))+((1/sqrt(4*pi)) *exp(-x.^2/4)
);
%q = integral(fun,1,Inf); comprobacion de la integral de la pmf

% fun = @(x)1/4 *(((1/sqrt(pi)).*exp(-(x).^2/4))+(sqrt(2/(3*pi))).*exp(-(1/6)*(x-
5).^2)) ;
%
% q = integral(fun,-inf,Inf);



x=-10:.001:15;
pdf = 1/4 *(((1/sqrt(pi)).*exp(-(x).^2/4))+(sqrt(2/(3*pi))).*exp(-(1/6)*(x-5).^2))
;

plot(x,pdf)
title('PMF lectura de la señal')

xlabel('eje x ')
ylabel('f(x)')
grid on

%%
%grafica 2 a r=-0.5;
clc
clear all
[x,y] = meshgrid(-4:0.00666:4);
r=-0.5;
z= (1./ (2*pi*sqrt( 1-r^2))).*  exp ((-x.^ 2 -(2*r.*x.*y + y.^ 2)/( 2*(1 - r^2))));
figure
subplot(2,1,1);
mesh(z);
colorbar
title('mesh rho =0.1')
xlabel('eje x ')
ylabel('eje y ')
subplot(2,1,2);
contour(z);
title('contour rho =0.1')

xlabel('eje x ')
ylabel('eje y ')
%%
%grafica 2 a r=0.9
clc
clear all
[x,y] = meshgrid(-3:0.00666:3);
```

```
r=0.9;
z=(1./ (2*pi*sqrt( 1-r^2))).*  exp ((-x.^ 2 -(2*r.*x.*y + y.^ 2)/( 2*(1 - r^2))));
figure
subplot(2,1,1);
mesh(z)
colorbar
title('mesh rho =0.9')
xlabel('eje x ')
ylabel('eje y ')
subplot(2,1,2);
contour(z);
title('contour rho =0.9)')
xlabel('eje x ')
ylabel('eje y ')
%%
%grafica 2 a r=0.5
clc
clear all
[x,y] = meshgrid(-3:0.00666:3);
r=0.5;
z=(1./ (2*pi*sqrt( 1-r^2))).*  exp ((-x.^ 2 -(2*r.*x.*y + y.^ 2)/( 2*(1 - r^2))));
subplot(2,1,1);
mesh(z)
colorbar
title('mesh rho =0.5')
xlabel('eje x ')
ylabel('eje y ')
subplot(2,1,2);
contour(x,y,z);
title('contour rho =0.5)')
xlabel('eje x ')
ylabel('eje y ')
%%
% grafica 2b
clc
clear all
data=load('datosCaso6.txt');
r=0.4;
x=data(:,1);
y=data(:,2);
[x1,y1] = meshgrid(-4:0.00666:4);
z= (1./ (2*pi*sqrt( 1-r^2))).*  exp ((-x1.^ 2 -(2*r.*x1.*y1 + y1.^ 2)/( 2*(1 -
r^2))));
figure
scatter(x,y,20,'filled');
hold on
contour(x1,y1,z);
title('contour rho =0.4')
xlabel('eje x ')
ylabel('eje y ')

%%
%grafica punto 4
clc
clear all
x=-10:.001:15;
pdf = 4/3 *exp(-4*(x))+4*exp(-6*(x));
```

```
plot(x,pdf);
xlim([0 2])
ylim([-0 10])
title('PDF')
xlabel('probabilidad ')
ylabel('f(x) ')
```