**Universidade de Brasília, Departamento de Matemática**
**Álgebra Linear II - Curso de Verão**
**Professor Alex Carrazedo Dantas**
**07 de janeiro de 2021**

**Questão 1.** Seja $F$ um corpo. Dizemos que um subconjunto $K$ de $F$ é um subcorpo de $F$ se $K$ munido das operações de adição e multiplicação de $F$ é um corpo. Mostre que os seguintes subconjuntos são subcorpos de $\mathbb{C}$.

a) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;
b) $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\}$;
c) $\mathbb{Q}(i\sqrt{2}) = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\}$.

**Questão 2.** Mostre que:

a) Todo subcorpo de $\mathbb{C}$ tem $\mathbb{Q}$ como subcorpo;
b) Todo corpo de caracterśtica 0 tem uma cópia de $\mathbb{Q}$;
c) Se $K$ contém propriamente $\mathbb{R}$ e é um subcorpo de $\mathbb{C}$, então $K = \mathbb{C}$.

**Questão 3.** Considere o corpo finito com 5 elementos $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$.

a) Mostre que
$$F = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \text{ e } i^2 = \bar{3}\}$$
munido das operações
$$\bar{+} : (a + bi)\bar{+}(c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$\bar{\cdot} : (a + bi)\bar{\cdot}(c + di) = (ac + \bar{3}bd) + (ad + bc)i$$
é um corpo com 25 elementos;
b) Mostre que $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ é um subcorpo de $F$. Qual é a característica de $F$?

**Questão 4.** Determine o conjunto solução de cada sistema linear dado.

a) $\begin{cases} x - 2y + z + w = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ 2x + y - 5z + w = 4 \end{cases}$ em $\mathbb{R}$,
b) $\begin{cases} x - \sqrt{3}y + z + w = 1 + \sqrt{3} \\ (2 + \sqrt{3})x + y - z = 3 \\ 2x + y - (1 - \sqrt{3})z + w = 4 \end{cases}$ em $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$,

c) $\begin{cases} x - 2iy + 2z - w = 0 \\ (2 + i)x + z + w = 0 \\ 2ix + y - 5z + (1 + i)w = 0 \end{cases}$ em $\mathbb{C}$,
d) $\begin{cases} x - \bar{2}y + \bar{2}z - w = \bar{0} \\ \bar{2}x + z + w = \bar{0} \\ \bar{2}x + y - \bar{3}z + w = \bar{0} \end{cases}$ em $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$,

e) $\begin{cases} x - \bar{2}iy + \bar{2}z - w = \bar{0} \\ (\bar{2} + i)x + z + w = \bar{0} \\ \bar{2}ix + y - \bar{3}z + (\bar{1} + i)w = \bar{0} \end{cases}$ em $F$ de (a) da Questão 3.

**Questão 5.** Mostre que se dois sistemas lineares homogêneos $2 \times 2$ possuem o mesmo conjunto solução, então eles são equivalentes. Determine, se existir, dois sistemas lineares homogêneos $2 \times 3$ com mesmo conjunto solução mas não equivalentes.

**Questão 6.** Considere o sistema linear sobre $\mathbb{Q}$
$$\begin{cases} x - 2y + z + 2w = 1 \\ x + y - z + w = 2 \\ x + 7y - 5z - w = 3. \end{cases}$$
Mostre que esse sistema não tem solução.

**Questão 7.** Determine todos $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}$ tais que o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

tem solução.

**Questão 8.** Encontre duas matrizes $A$ e $B$ de ordens iguais a $3 \times 3$ tais que $AB$ é uma matriz nula mas $BA$ não é.

**Questão 9.** Mostre que toda matriz elementar é inversível e calcule a inversa de cada tipo.

**Questão 10.** Determine a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Questão 11.** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \end{bmatrix}$$

com entradas no corpo com cinco elementos $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Calcule sua inversa.

**Questão 12.** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre uma matriz na forma escada reduzida e equivalente por linhas $R$ a matriz $A$. Determine uma matriz invertível $P$ tal que $R = PA$.