Aula de Álgebra Linear II - 06/01/2021

$\boxed{\text{Corpos e Sistemas Lineares}}$

Definição 1. (Corpo) Um corpo é um conjunto não vazio F munido de duas operações: adição $+$ e multiplicação $\cdot$.

$$+ : F \times F \longrightarrow F \qquad\qquad \cdot : F \times F \longrightarrow F$$
$$(x,y) \longmapsto x+y \qquad\qquad (x,y) \longmapsto x \cdot y$$

e tais que

$(F,+)$

(A1) (Associatividade na adição) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall x,y,z \in F$;

(A2) (Existência de neutro aditivo) $\exists\, 0 \in F$ tal que $x+0 = 0+x = x$, $\forall x \in F$;

elemento oposto

(A3) (Existência de inverso aditivo) Dado $x \in F$, existe $-x \in F$ tal que $x+(-x) = (-x)+x = 0$;

(A4) (Comutatividade na adição) $x+y = y+x$, $\forall x,y \in F$;

$(F \setminus \{0\}, \cdot)$

(M1) (Associatividade na multiplicação) $(x \cdot y)\cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $\forall x,y,z \in F$;

(M2) (Existência do elemento neutro na multiplicação) $\exists\, 1 \in F$ tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, $\forall x \in F$;

(M3) (EXISTÊNCIA DO INVERSO MULTIPLICATIVO) DADO $x \in F \setminus \{0\}$, EXISTE $x^{-1} \in F$ TAL QUE $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$;

(M4) (COMUTATIVIDADE NA MULTIPLICAÇÃO) $x \cdot y = y \cdot x$, $\forall x, y \in F$;

(D) (DISTRIBUTIVA) $x \cdot (y + z) = xy + xz$, $\forall x,y,z \in F$.

PROPOSIÇÃO 2. $x \cdot 0 = 0$, $\forall x \in F$.

DEM. $x \cdot 0 \overset{A2}{=} x \cdot (0+0) \overset{D}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0$

ASSIM

$$x \cdot 0 + \underbrace{x \cdot 0 + (-x \cdot 0)}_{=0} = \underbrace{x \cdot 0 + (-x \cdot 0)}_{=0}$$

$$x \cdot 0 + 0 \overset{A3}{=} 0$$

$$x \cdot 0 \overset{A2}{=} 0$$

■

EXEMPLO 3. a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ NÃO É UM CORPO. DE FATO, NÃO EXISTE O INVERSO MULTIPLICATIVO DE 2 EM $\mathbb{Z}$, OU SEJA, A EQUAÇÃO $2 \cdot x = 1$ NÃO SE RESOLVE EM $\mathbb{Z}$;

b) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ É UM CORPO, ONDE

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

E

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{E} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ É UM CORPO (CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS);

$\cdot\ x^2 + 1 = 0$

d) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ É UM CORPO, ONDE

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\},$$

$$+ : (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$\cdot : (a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 =$$
$$= ac + (-1)bd + (ad+bc)i =$$
$$= (ac-bd) + (ad+bc)i$$

$\mathbb{C}$ É CHAMADO DE CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS.

TOME $a+bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $(0 = 0 + 0i)$. ASSIM

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 + (ab - ba)i =$$
$$= a^2 + b^2 \neq 0$$

$$(a+bi)\underbrace{(a-bi)(a^2+b^2)^{-1}} = 1$$

LOGO

$$(a+bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\, i.$$

c) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ É UM CORPO, ONDE p É PRIMO E

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\},$$

$$\bar{a} = \{a + pn \mid n \in \mathbb{Z}\} \text{ E } 0 \leq a \leq p-1,$$

$$+ : \bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \quad \text{E} \quad \cdot : \bar{a}\cdot\bar{b} = \overline{a \cdot b}.$$

TOME $p=3$. ASSIM $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\hookrightarrow \bar{2} + \bar{2} = \overline{2+2} = \bar{4} = \overline{3.1+1} = \bar{1}$

. NOTE QUE A EQUAÇÃO $x^2 + \bar{1} = \bar{0}$ NÃO TEM SOLUÇÃO EM $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

DEFINA

$$F = \{\bar{a} + \bar{b}i \mid \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \text{ E } i^2 = \bar{2}\},$$

$$+ : (\bar{a} + \bar{b}i) + (\bar{c} + \bar{d}i) = (\bar{a} + \bar{c}) + (\bar{b} + \bar{d})i$$

$$\cdot : (\bar{a} + \bar{b}i)(\bar{c} + \bar{d}i) = (\bar{a}\cdot\bar{c} + \bar{2}\,\bar{b}\bar{d}) + (\bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{c})i.$$

MOSTRE QUE $(F, +, \cdot)$ É UM CORPO COM 9 ELEMENTOS.

Definição 4. A característica de um corpo F é o menor inteiro positivo n (se existir) tal que

$$\underbrace{1+1+\dots+1}_{n} = 0.$$

Se tal n não existe, diremos que F tem característica 0.

Proposição 5. Seja F um corpo. Se a característica de F é um inteiro positivo n, então n é primo.

Dem. Exercício. ■

Exemplo 6. a) Resolva em $\mathbb{Q}$ o sistema

$$\begin{cases} 2x+3y = 1, \\ x+4y = 2. \quad \cdot(-2) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$+\begin{cases} 2x+3y = 1 \\ -2x-8y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y = 1 \\ \quad -5y = -3 \Rightarrow y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$2x + 3\cdot\frac{3}{5} = 1$$

$$2x + \frac{9}{5} = 1 \Rightarrow 2x = -\frac{4}{5} \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$$

Daí $\left(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$ é solução para o sistema.

b) Resolva em $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ o sistema

$$-\begin{cases} \bar{2}x + \bar{2}y = \bar{1}, \\ \bar{2}x + y = \bar{0}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{2}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ y = \bar{1} \end{cases} \Rightarrow \bar{2}x + \bar{2}.\bar{1} = \bar{1} \Rightarrow \bar{2}x = \overbrace{\bar{1} - \bar{2}}^{\bar{1} + \overbrace{(-\bar{2})}^{\bar{1}}}$$

$$\bar{2}x = -\bar{1}$$

$$\bar{2}x = \bar{2}$$

$$x = \bar{1}$$

Daí $(\bar{1}, \bar{1})$ é solução do sistema.