

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_j \times s_j}.$$

Álgebra Linear II

XLIX Escola de Verão em Matemática da UnB

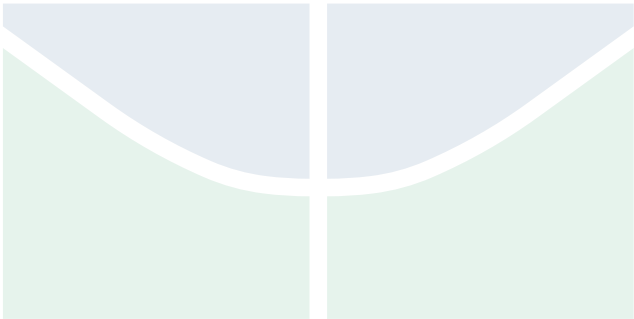
Aulas do professor Alex Carrazedo Dantas*

Última modificação: 9 de Janeiro de 2021 às 22 : 24 : 18.

<https://carlosal1015.github.io/Algebra-linear-II/main.pdf>

Sumário

Referências bibliográficas	4
I. Teoria	5
1. Corpos e Sistemas Lineares (06/01/2021)	6
2. Sistemas lineares (07/01/2021)	9
3. Matrizes (08/01/2021)	11
4. Aula de reposição (09/01/2021)	14
II. Prática	16
5. Exercícios de Fixação (08/01/2021)	17
III. Tutorial	21
6. LinearAlgebra from Julia	22
Índice	23



UnB

Introdução ao curso (04/01/2021)

O professor **Alex Carrazedo Dantas** é especialista no *Teoria dos grupos*. Em um curso presencial você pode discutir mais, enquanto em um curso remoto, cada aula tem um pdf **Moodle MAT** e uma gravação da sessão. Se você tiver dúvidas sobre o moodle, peça ajuda a **Carol Lafetá**¹.

Ementa

1. Sistemas lineares e matrizes.
2. Espaços vetoriais e transformações lineares.
3. Polinômios e determinantes
4. Decomposições primárias e formas racionais e de Jordan.
5. Produto interno e teorema espectral.
6. Formas multilineares.

Critério de avaliação

Menção em disciplina	Equivalência numérica
Superior (SS)	9 – 10
Média Superior (MS)	7 – 8.9
Média (MM)	5 – 6.9

Serão aplicadas 2 provas, de acordo com o cronograma abaixo, as quais serão atribuídas as notas x e y .

$$MF = \frac{x + 3y}{4}.$$

O aluno deverá obter média final igual ou superior a 5 pontos e 75% de frequência para ser aprovado.

Tutores

- **Sara Raissa Silva Rodrigues.**
- **Geraldo Herbert Beltrão de Souza.**
- **Mattheus Pereira da Silva Aguiar.**

¹lafeta.carol@gmail.com

Referências bibliográficas

- [1] Flávio Ulhoa Coelho e Mary Lilian Lourenço. *Curso de Álgebra Linear, Um - Edusp*. EDUSP, 2005. URL: <https://www.edusp.com.br/livros/curso-de-algebra-linear>.
- [2] P. R. Halmos. *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1958. ISBN: 978-0-387-90093-3. DOI: [10.1007/978-1-4612-6387-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6387-6). URL: <https://www.springer.com/gp/book/9780387900933>.
- [3] Kenneth Hoffman e Ray Kunze. *Linear algebra*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc.
- [4] Serge Lang. *Linear Algebra*. 3ª ed. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1987. ISBN: 978-0-387-96412-6. DOI: [10.1007/978-1-4757-1949-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1949-9). URL: <https://www.springer.com/gp/book/9780387964126>.
- [5] Ph D. Seymour Lipschutz e Ph D. Marc Lars Lipson. *Schaum's Outline of Linear Algebra, Sixth Edition*. McGraw-Hill Education, 2018. ISBN: 978-1-260-01144-9. URL: <https://www.accessengineeringlibrary.com/content/book/9781260011449>.

UnB



UnB

1. Corpos e Sistemas Lineares (06/01/2021)

Definição 1.1 (Corpo). Um *corpo* é um conjunto não vazio \mathbb{F} munido de duas operações: adição mais e multiplicação.

$$\begin{aligned} +: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} & \cdot: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (x, y) &\longmapsto x + y & (x, y) &\longmapsto x \cdot y \end{aligned}$$

e tais que em $(\mathbb{F}, +)$

- A1. (Associatividade na adição) $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{F};$
- A2. (Existência de neutro aditivo) $\exists 0 \in \mathbb{F}$ tal que $x + 0 = 0 + x = x, \forall x \in \mathbb{F};$
- A3. (Existência de elemento oposto o inverso aditivo) Dado $x \in \mathbb{F}$, existe $-x \in \mathbb{F}$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0.$
- A4. (Conmutatividade na adição) $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{F};$
- A5. (Associatividade na multiplicação) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x, y, z \in \mathbb{F};$

e $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$

- M1. (Existência do elemento neutro na multiplicação) $\exists 1 \in \mathbb{F}$ tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{F};$
- M2. (Existência inverso multiplicativo) Dado $x \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, existe $x^{-1} \in \mathbb{F}$ tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1;$
- M3. (Conmutatividade na multiplicação) $x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in \mathbb{F}.$
- M4. (Distributiva) $x \cdot (y + z) = xy + xz, \forall x, y, z \in \mathbb{F}.$

Proposição 1.1. $x \cdot 0 = 0, \forall x \in \mathbb{F}.$

Demonstração. $x \cdot 0 \stackrel{A2}{=} x \cdot (0 + 0) \stackrel{D}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0.$ Assim

$$\begin{aligned} x \cdot 0 + \underbrace{x \cdot 0 + (-x \cdot 0)}_{=0} &= \underbrace{x \cdot 0 + (-x \cdot 0)}_{=0} \\ x \cdot 0 + 0 &\stackrel{A3}{=} 0 \\ x \cdot 0 &\stackrel{A2}{=} 0. \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ não é um corpo. De fato não existe o inverso multiplicativo de 2 em \mathbb{Z} , ou seja, a equação $2 \cdot x = 1$ não se resolve em \mathbb{Z} .
2. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é um corpo, onde $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ e $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ e $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
3. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um corpo (conjunto dos números reais);
4. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um corpo, onde $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, \text{ e } i^2 = -1\}$,
 $+: (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
 $\cdot: (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 = \\ &= ac + (-1)bd + (ad + bc)i = \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

\mathbb{C} é chamado del conjunto nos números complexos. Tome $a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($0 = 0 + 0i$). Assim

$$\begin{aligned} (a + bi)(a - bi) &= a^2 + b^2 + (ab - ba)i = \\ &= a^2 + b^2 \neq 0 \end{aligned}$$

$$(a + bi)(a - bi)(a^2 + b^2)^{-1} = 1$$

Logo

$$(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

5. $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é um corpo, onde $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\bar{a}/a \in \mathbb{Z}\} \quad \bar{a} = \{a + pu/u \in \mathbb{Z}\} \neq 0 \leq a \leq p - 1$$

Defina:

$$F = \{\bar{a} + \bar{b}i \mid \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \text{ e } i^2 = -2\} \quad .+: (\bar{a} + \bar{b}i) + (\bar{c} + \bar{d}i) = (\bar{a} + \bar{c}) + (\bar{b} + \bar{d})i \quad .\cdot: (\bar{a} + \bar{b}i)(\bar{c} + \bar{d}i) = (\bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{2}\bar{b}\bar{d}) + (\bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{c})i$$

$$\underbrace{1 + \dots + 1}_n = 0$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 4y = 2. \end{cases} \\ &+ \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -2x - 8y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -5y = -3 \Rightarrow y = \frac{3}{5} \end{cases} \\ &2x + 3 \cdot \frac{3}{5} = 1 \\ &2x + \frac{9}{5} = 1 \Rightarrow 2x = -\frac{4}{5} \Rightarrow x = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \bar{2}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + y = \bar{0} \end{cases}$$

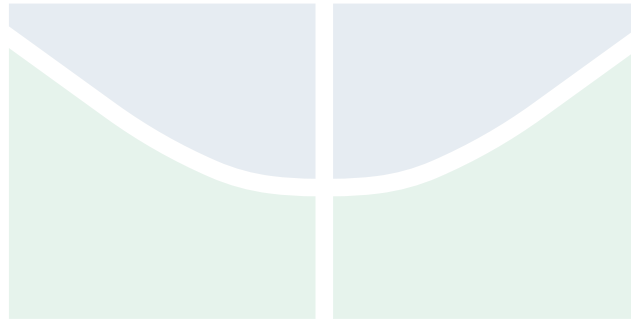
$$\begin{cases} \bar{2}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ r_y = \bar{I} \end{cases}$$

$$\bar{2}x + \bar{2} \cdot I = 1 \Rightarrow 2x = \bar{1} - \bar{2}$$

$$\bar{2}x = -\bar{1}$$

$$\bar{2}x = \bar{2}$$

$$x = \bar{1}$$



UnB

2. Sistemas lineares (07/01/2021)

Definição 2.1 (Sistema linear). Um corpo é.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + c_m(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) &= c_1y_1 + \cdots + c_my_m \\ (c_1a_{11} + \cdots + c_ma_{m1})x_1 + \cdots + (c_1a_{1n} + \cdots + c_ma_{mn})x_n &= c_1y_1 + \cdots + c_my_m \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + w = 5 \\ x - y + 2z - 2w = 1 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 2x + 3y - z + w = 5 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 5y - 5z + 5w = 3 \\ 3y - 3z + 5w = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ y - z + w = 3/5 \\ y - z + 5/3w = 1/3 \end{cases}$$

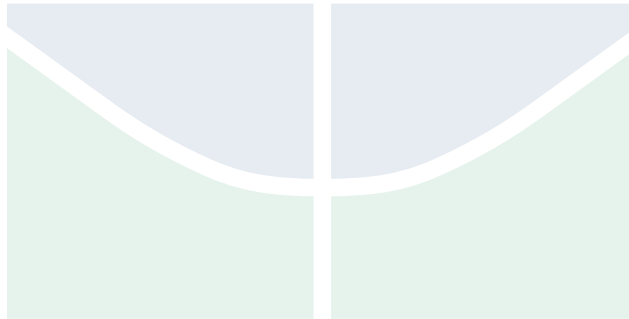
$$\begin{cases} x + z - w = 8/5 \\ y - z + w = 3/5 \\ 2/3w = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} = \frac{5-9}{15} = -\frac{4}{15} \\ w = -\frac{12}{30} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\{(x, y, z, w) \in \mathbb{Q}^4 \mid x = -z + \frac{6}{5}, y = z + 1, z \in \mathbb{Q}, w = -\frac{2}{5}\} = \\ &= \{(-z + \frac{6}{5}, z + 1, z, -\frac{2}{5}) \mid z \in \mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

$$f\colon \{1,\ldots,m\}\times \{1,\ldots,n\}\rightarrow F=f\left(i,j\right)=a_{ij}.$$

$$\begin{pmatrix} f\left(1,1\right) & f\left(1,2\right) & \cdots & f\left(1,n\right) \\ f\left(2,1\right) & f\left(2,2\right) & \cdots & f\left(2,n\right) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f\left(x,1\right) & f\left(w,2\right) & \cdots & f\left(w,n\right) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{wn} \end{pmatrix}$$



UnB

3. Matrizes (08/01/2021)

Podemos denotar uma matriz A sobre um corpo \mathbb{F} de ordem $m \times n$ por $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Sejam $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jl})_{n \times p}$ duas matrizes sobre um corpo \mathbb{F} . Definimos o produto de A por B como a matriz $C = (c_{il})_{m \times p}$ dada por

$$c_{il} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl} = a_{i1} b_{1l} + \cdots + a_{in} b_{nl}$$

Ilustração

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.1. Temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 14 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}.$$

Proposição 3.1. Sejam matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{jl})_{n \times p}$ e $C = (c_{lk})_{p \times q}$ matrizes sobre um corpo \mathbb{F} . Então $(AB)C = A(BC)$.

Demonstração. Veja que $(AB)C = (\alpha_{ik})_{m \times q}$, $AB = (d_{il})_{m \times p}$ onde

$$d_{il} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_{ik} &= \sum_{l=1}^p d_{il} c_{lk} = \sum_{l=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl} \right) c_{lk} = \\ &= \sum_{l=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl} c_{lk} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{l=1}^p b_{jl} c_{lk} \right) = \beta_{ik} \end{aligned}$$

com $A(BC) = (\beta_{ik})_{m \times q}$.

Chamaremos a matriz quadrada $I_m = (\delta_{ij})_{m \times m}$ definida por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{se } i = j, \\ 0 & , \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

de matriz identidade de ordem $m \times m$.

Note que se $A = (a_{jl})_{m \times n}$, então $I_m A = A$, e se $B = (b_{li})_{n \times m}$, então $B I_m = B$.

$I_m A = (c_{il})_{m \times m}$ é tal que $c_{il} = \sum_{j=1}^m \delta_{ij} a_{jl} = a_{il}$ com $1 \leq i \leq m$, e $I_m A = A$.

Exemplo 3.2. Se $m = 3$, então

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dizemos que uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{m \times m}$ tem inversa se existe uma matriz $B = (b_{ij})_{m \times m}$ tal que $AB = BA = I_m$.

Denotaremos a matriz B por A^{-1} .

Definição 3.1. Seja $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Uma matriz quadrada de ordem $m \times m$ E é dita elementar se E é de uma das formas

1. $E_1 = (e_{ij})_{m \times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{se } i \neq k \\ \delta_{ij}, & \text{se } i = k \end{cases}$$

$$m = 3, k = 2$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com k um inteiro fixo entre 1 e m ;

2. $E_2 = (e_{ij})_{m \times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{se } i \neq l \text{ e } i \neq k \\ \delta_{lj}, & \text{se } i = k \\ \delta_{kj}, & \text{se } i = l \end{cases}$$

$$m = 3, k = 2, l = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

com $k < l$ inteiros fixos entre 1 e m ;

3. $E_3 = (e_{ij})_{m \times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq k \\ \delta_{kj} + c \cdot \delta_{lj}, & i = k \end{cases}$$

$$m = 3, k = 2, l = 3$$

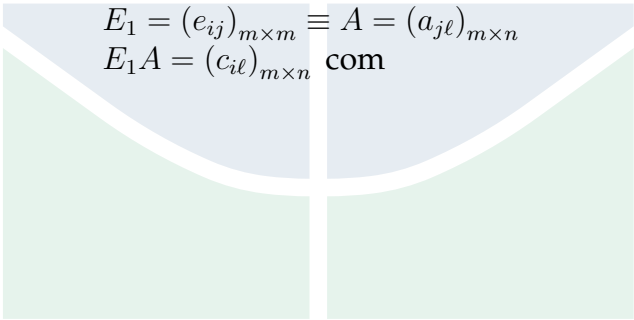
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.3. Calcule

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -14 & 4 & -1 & 51 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ o efeito de multiplicar uma matriz elementar E por A pode ser colocado como:

- 1. E_1A : multiplica uma linha k de A por um escalar c ;
- 2. E_2A : troca duas linhas l e k de posições ($k < l$);
- 3. E_3A : soma uma linha k com outra linha l multiplicada por um escalar $c \in \mathbb{F}$.


$$\begin{matrix} E_1 = (e_{ij})_{m \times m} \equiv A = (a_{j\ell})_{m \times n} \\ E_1A = (c_{i\ell})_{m \times n} \end{matrix} \text{ com}$$

UnB

4. Aula de reposição (09/01/2021)

Definição 4.1 (Matriz reduzida por linhas). Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ sobre \mathbb{F} é dita reduzida por linhas se

1. O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é igual 1;
2. cada coluna que possui o primeiro elemento não nulo de
3. uma linha não possui todos os outros elementos iguais a 0;

Se além disso, a matriz A satisfaz

1. Todas linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não nulas;
2. Se $1, \dots, r$ ($r \leq m$) são as linhas não nulas de A com os primeiros elementos não nulos ocorrendo nas colunas k_1, k_2, k_r , respectivamente, então $k_1 < k_2 < \dots < k_r$, dizemos que A está na forma escada reduzida.

Exemplo 4.1. 1. As seguintes matrizes estão na forma reduzida:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

2. As seguintes matrizes estão na forma escada reduzida

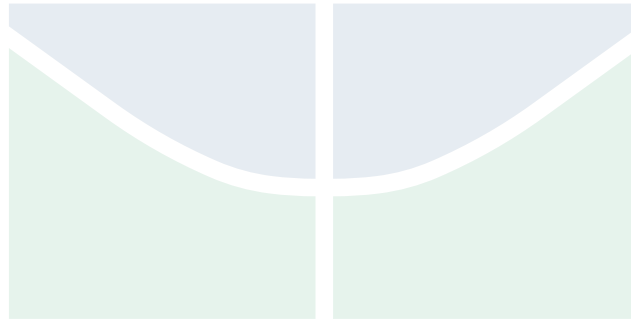
a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$$\text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observação 4.1. .

Definição 4.2. .



UnB



Parte II.

Prática

UnB

5. Exercícios de Fixação (08/01/2021)

1. Seja \mathbb{F} um corpo. Dizemos que um subconjunto \mathbb{K} de \mathbb{F} é um subcorpo de \mathbb{F} se \mathbb{K} munido das operações de adição e multiplicação de \mathbb{F} é um corpo. Mostre que os seguintes subconjuntos são subcorpos de \mathbb{C} .

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\};$

(b) $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\};$

(c) $\mathbb{Q}(i\sqrt{2}) = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\}.$

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

2. Mostre que:

(a) Todo subcorpo de \mathbb{C} tem \mathbb{Q} como subcorpo;

(b) Todo corpo de característica 0 tem uma cópia de \mathbb{Q} ;

(c) Se \mathbb{K} contém propriamente \mathbb{R} e é um subcorpo de \mathbb{C} , então $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

3. Considere o corpo finito com 5 elementos $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}.$

(a) Mostre que

$$\mathbb{F} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \text{ e } i^2 = \bar{3}\}$$

munido das operações

$$\begin{aligned} \overline{+}: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} & \overline{\cdot}: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ ((a+bi), (c+di)) &\longmapsto (a+c) + (b+d)i & ((a+bi), (c+di)) &\longmapsto (ac + \overline{3}bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

é um corpo com 25 elementos;

(b) Mostre que $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ é um subcorpo de \mathbb{F} . Qual é a característica de F ?

Solução

(a) .

(b) .

4. Determine o conjunto solução de cada sistema linear dado.

$$(a) \begin{cases} x - 2y + z + w = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ 2x + y - 5z + w = 4 \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{R},$$

$$(b) \begin{cases} x - \sqrt{3}y + z + w = 1 + \sqrt{3} \\ (2 + \sqrt{3})x + y - z = 3 \\ 2x + y - (1 - \sqrt{3})z + w = 4 \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$

$$(c) \begin{cases} x - 2iy + 2z - w = 0 \\ (2 + i)x + z + w = 0 \\ 2ix + y - 5z + (1 + i)w = 0 \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{C},$$

$$(d) \begin{cases} x - \overline{2}y + \overline{2}z - w = \overline{0} \\ \overline{2}x + z + w = \overline{0} \\ \overline{2}x + y - \overline{3}z + w = \overline{0} \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{Z}/5\mathbb{Z},$$

$$(e) \begin{cases} x - \overline{2}iy + \overline{2}z - w = \overline{0} \\ (\overline{2} + i)x + z + w = \overline{0} \\ \overline{2}ix + y - \overline{3}z + (\overline{1} + i)w = \overline{0} \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{F} \text{ de (a) da Questão 3.}$$

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

(d) .

(e) .

5. Mostre que se dois sistemas lineares 2×2 possuem o mesmo conjunto solução, então eles são equivalentes. Determine, se existir, dois sistemas lineares 2×3 com mesmo conjunto solução mas não equivalentes.

Solução

6. Considere o sistema linear sobre \mathbb{Q}
$$\begin{cases} x - 2y + z + 2w = 1 \\ x + y - z + w = 2 \\ x + 7y - 5z - w = 3 \end{cases}$$

Mostre que esse sistema não tem solução.

Solução

7. Determine todos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

tem solução.

Solução

8. Encontre duas matrizes A e B de ordens iguais a 3×3 tais que AB é uma matriz nula mas BA não é.

Solução

9. Mostre que toda matriz elementar é inversível e calcule a inversa de cada tipo.

Solução

10. Determine a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Solução

11. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{4} \end{bmatrix}$$

com entradas no corpo com cinco elementos $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$.

Calcule sua inversa.

Solução

12. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre uma matriz na forma e uma matriz invertível P tal que $R = PA$.

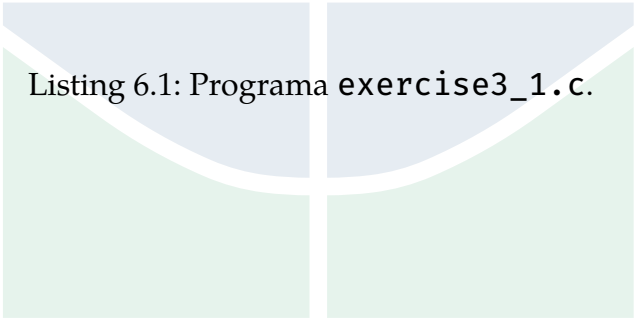
Solução



UnB

6. LinearAlgebra from Julia

```
f(x) = x.^2 + π  
const ⊗ = kron  
const Σ = sum # Although `sum` may be just as good in the code.  
# Calculate  $\sum_{j=1}^5 j^2$   
Σ([j^2 for j ∈ 1:5])
```



Listing 6.1: Programa exercise3_1.c.

UnB

Índice

corpo, 6