Aula de Álgebra Linear II - 07/01/2021

Sistemas Lineares

Definição 1. Seja F um corpo. Um sistema linear com m equações e n incógnitas sobre F é da forma

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

onde $a_{ij}, y_k \in F$, com $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq m$. Chamaremos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de incógnitas, a_{ij} de coeficientes e $y_1, \ldots, y_m$ de coeficientes independentes. Se $y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$, então $(*)$ é chamado de sistema homogêneo.

- Uma solução de $(*)$ é uma n-upla $(x_1, \ldots, x_n) \in F^n = \underbrace{F \times \cdots \times F}_{n}$ que resolve todas as equações de $(*)$.

O conjunto solução de $(*)$ é o subconjunto de F^n de todas as soluções de $(*)$.

Dizemos que uma equação linear é uma combinação linear das equações de $(*)$ se essa equação é da forma

$$c_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + c_m(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) = c_1y_1 + \cdots + c_my_m$$

onde $c_1, \ldots, c_m \in F$, não todos nulos:

$$(c_1a_{11} + \cdots + c_ma_{m1})x_1 + \cdots + (c_1a_{1n} + \cdots + c_ma_{mn})x_n = c_1y_1 + \cdots + c_my_m$$

Dois sistemas lineares S_1 e S_2 são ditos equivalentes se cada equação de S_i é uma combinação linear das equações de S_j, com $1 \leq i \neq j \leq 2$.

Proposição 2. Se S_1 e S_2 são sistemas lineares equivalentes, então S_1 e S_2 possuem o mesmo conjunto solução em $\mathcal{F}^n$.

Exemplo 3. Considere o sistema linear sobre $\mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + w = 5, \\ x - y + 2z - 2w = 1, \\ 2x + y + z + w = 3. \end{cases}$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 2x + 3y - z + w = 5 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$L_2 \to L_2 + (-2)L_1$

$L_3 \to L_3 + (-2)L_1$

$L_2 \to L_2 + 2.L_1$

$L_3 \to L_3 + 2.L_1$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 5y - 5z + 5w = 3 \\ 3y - 3z + 5w = 1 \end{cases}$$

$L_2 \to \frac{1}{5} L_2$, $L_3 \to \frac{1}{3} L_3$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ y - z + w = 3/5 \\ y - z + 5/3\, w = 1/3 \end{cases}$$

$L_1 \to L_1 + L_2 \quad , \quad L_3 \to L_3 + (-1)L_2$

$$\begin{cases} x + z - w = 8/5 \\ y - z + w = 3/5 \\ 2/3\, w = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} = \frac{5-9}{15} = -\frac{4}{15} \end{cases}$$

$$w = -\frac{12}{30} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$$

$$x + z - w = 8/5 \Rightarrow x = -z + \frac{8}{5} - \frac{2}{5} =$$
$$= -z + \frac{6}{5}$$

$$y - z + w = 3/5 \Rightarrow y = z + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} =$$
$$= z + 1$$

CONJUNTO SOLUÇÃO DO SISTEMA

$$\left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{Q}^4 \mid x = -z + \frac{6}{5},\ y = z + 1,\ z \in \mathbb{Q},\ w = -\frac{2}{5}\right\} =$$
$$= \left\{\left(-z + \frac{6}{5},\ z+1,\ z,\ -\frac{2}{5}\right) \mid z \in \mathbb{Q}\right\}.$$

DEFINIÇÃO 4. (OPERAÇÕES ELEMENTARES) DIZEMOS QUE UMA OPERAÇÃO SOBRE UM SISTEMA LINEAR É ELEMENTAR SE POSSUI UMA DAS FORMAS:

i) MULTIPLICAR UMA EQUAÇÃO POR UM ESCALAR NÃO NULO DE F; (E_1)

ii) SOMAR DUAS EQUAÇÕES; (E_2)

iii) TROCAR DUAS EQUAÇÕES DE POSIÇÕES. (E_3)

PROPOSIÇÃO 5. DOIS SISTEMAS LINEARES SÃO EQUIVALENTES SE, E SOMENTE SE, UM PODE SER OBTIDO DO OUTRO POR MEIO DE UMA SEQUÊNCIA FINITA DE APLICAÇÕES DE OPERAÇÕES ELEMENTARES $(E_1, E_2$ OU $E_3)$.

$(1,1)$ $\qquad\qquad$ $(1,2)$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$a(x+y) + b(x-y) = x + 2y$$

$$a \cdot 2 + b \cdot 0 = 5$$

$$2a = 5$$

$$a = \frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{2}(x+y) + b(x-y) = x + 2y$$

$$\left(b + \frac{5}{2}\right)x + \left(-b + \frac{5}{2}\right)y = x + 2y$$

$$b + \frac{5}{2} = 1 \qquad -b + \frac{5}{2} = 2$$

$$b = -\frac{3}{2} \qquad b = \frac{1}{2}$$

DEFINIÇÃO 6. UMA MATRIZ COM ENTRADAS EM UM CORPO $\mathbb{F}$ DE ORDEM $m \times n$, COM m, n INTEIROS POSITIVOS, É UMA FUNÇÃO DA FORMA

$$f : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{F}$$
$$(i, j) \longmapsto f(i,j) = a_{ij}.$$

NA FORMA DE TABELA:

$$\begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,2) & \dots & f(1,n) \\ f(2,1) & f(2,2) & \dots & f(2,n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f(m,1) & f(m,2) & \dots & f(m,n) \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$