

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_j \times s_j}.$$

## Álgebra Linear II

**XLIX Escola de Verão em Matemática da UnB**

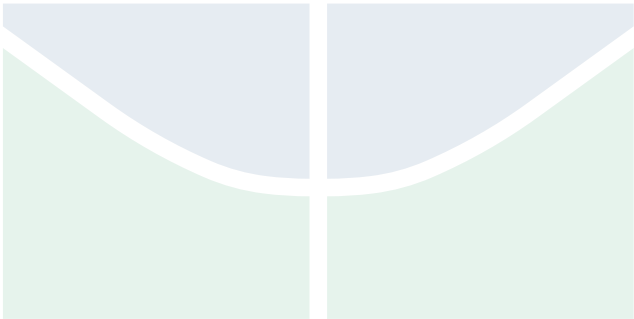
**Aulas do professor Alex Carrazedo Dantas\***

Última modificação: 18 de Janeiro de 2021 às 14 : 39 : 56.

<https://carlosal1015.github.io/Algebra-linear-II/main.pdf>

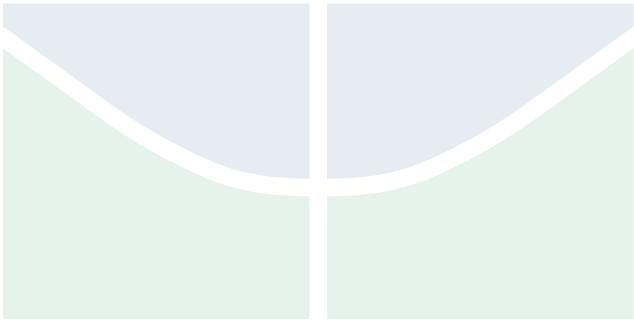
# Sumário

Referências bibliográficas	5
I. Teoria	6
1. Corpos e Sistemas Lineares (06/01/2021)	7
2. Sistemas lineares (07/01/2021)	11
3. Matrizes (08/01/2021)	13
4. Matrizes e sistemas lineares (09/01/2021)	16
5. Espaços vetoriais (12/01/2021)	18
6. Transformações lineares (14/01/2021)	19
7. Espaço vetorial $L(V, W)$ (15/01/2021)	20
8. Matriz de uma transformação linear (16/01/2021)	21
9. Funcionais lineares (18/01/2021)	22
II. Prática	23
10. Exercícios de Fixação (08/01/2021)	24
11. Exercícios de Fixação (15/01/2021)	28
III. Tutorial	34
A. Overview about Julia	35



UnB

<b>B. LinearAlgebra</b> from Julia	<b>36</b>
B.1. Matrix calculus	36
<b>Índice</b>	<b>37</b>



UnB

# Introdução ao curso (04/01/2021)

O professor [Alex Carrazedo Dantas](#) é especialista no *Teoria dos grupos*. Em um curso presencial você pode discutir mais, enquanto em um curso remoto, cada aula tem um pdf [Moodle MAT](#) e uma gravação da sessão. Se você tiver dúvidas sobre o moodle, peça ajuda a [Carol Lafetá](#)<sup>1</sup>.

## Ementa

1. Sistemas lineares e matrizes.
2. Espaços vetoriais e transformações lineares.
3. Polinômios e determinantes
4. Decomposições primárias e formas racionais e de Jordan.
5. Produto interno e teorema espectral.
6. Formas multilineares.

## Critério de avaliação

Menção em disciplina	Equivalência numérica
Superior (SS)	9 – 10
Média Superior (MS)	7 – 8.9
Média (MM)	5 – 6.9

Serão aplicadas 2 provas, de acordo com o cronograma abaixo, as quais serão atribuídas as notas  $x$  e  $y$ .

$$MF = \frac{x + 3y}{4}.$$

O aluno deverá obter média final igual ou superior a 5 pontos e 75% de frequência para ser aprovado.

## Tutores

- [Sara Raissa Silva Rodrigues](#).
- [Geraldo Herbert Beltrão de Souza](#).
- [Mattheus Pereira da Silva Aguiar](#).

---

<sup>1</sup>[lafeta.carol@gmail.com](mailto:lafeta.carol@gmail.com)

## Referências bibliográficas

- [1] Flávio Ulhoa Coelho e Mary Lilian Lourenço. *Curso de Álgebra Linear, Um - Edusp*. EDUSP, 2005. URL: <https://www.edusp.com.br/livros/curso-de-algebra-linear>.
- [2] P. R. Halmos. *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1958. ISBN: 978-0-387-90093-3. DOI: [10.1007/978-1-4612-6387-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6387-6). URL: <https://www.springer.com/gp/book/9780387900933>.
- [3] Kenneth Hoffman e Ray Kunze. *Linear algebra*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc.
- [4] Serge Lang. *Linear Algebra*. 3ª ed. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1987. ISBN: 978-0-387-96412-6. DOI: [10.1007/978-1-4757-1949-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1949-9). URL: <https://www.springer.com/gp/book/9780387964126>.
- [5] Ph D. Seymour Lipschutz e Ph D. Marc Lars Lipson. *Schaum's Outline of Linear Algebra, Sixth Edition*. McGraw-Hill Education, 2018. ISBN: 978-1-260-01144-9. URL: <https://www.accessengineeringlibrary.com/content/book/9781260011449>.

UnB



**Parte I.**

**Teoria**

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_j \times s_j}.$$

# 1. Corpos e Sistemas Lineares (06/01/2021)

**Definição 1.1** (Corpo). Um *corpo* é um conjunto não vazio  $\mathbb{F}$  munido de duas operações: adição mais e multiplicação.

$$\begin{aligned} +: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} & \cdot: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (x, y) &\longmapsto x + y & (x, y) &\longmapsto x \cdot y \end{aligned}$$

e tais que em  $(\mathbb{F}, +)$

(A1) (Associatividade na adição)  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{F}$ ;

(A2) (Existência de neutro aditivo)  $\exists 0 \in \mathbb{F}$  tal que  $x + 0 = 0 + x = x$ ,  $\forall x \in \mathbb{F}$ ;

(A3) (Existência de elemento oposto o inverso aditivo) Dado  $x \in \mathbb{F}$ , existe  $-x \in \mathbb{F}$  tal que  $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ;

(A4) (Comutatividade na adição)  $x + y = y + x$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{F}$ ;

e  $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$

(M1) (Associatividade na multiplicação)  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{F}$ ;

(M2) (Existência do elemento neutro na multiplicação)  $\exists 1 \in \mathbb{F}$  tal que  $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ ,  $\forall x \in \mathbb{F}$ ;

(M3) (Existência inverso multiplicativo) Dado  $x \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ , existe  $x^{-1} \in \mathbb{F}$  tal que  $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ ;

(M4) (Comutatividade na multiplicação)  $x \cdot y = y \cdot x$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{F}$ ;

(D) (Distributiva)  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{F}$ .

**Proposição 1.2.**  $x \cdot 0 = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{F}$ .

*Demonstração.*  $x \cdot 0 \stackrel{A2}{=} x \cdot (0 + 0) \stackrel{D}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0$ . Assim

$$\begin{aligned} x \cdot 0 + \underbrace{x \cdot 0 + (-x \cdot 0)}_{=0} &= \underbrace{x \cdot 0 + (-x \cdot 0)}_{=0} \\ x \cdot 0 + 0 &\stackrel{A3}{=} 0 \\ x \cdot 0 &\stackrel{A2}{=} 0. \end{aligned}$$



### Exemplo 1.3.

- a)  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  não é um corpo. De fato não existe o inverso multiplicativo de 2 em  $\mathbb{Z}$ , ou seja, a equação  $2 \cdot x = 1$  não se resolve em  $\mathbb{Z}$ ;
- b)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  é um corpo, onde  $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$  e  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$  e  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ .
- c)  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  é um corpo (conjunto dos números reais);
- d)  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  é um corpo, onde  $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, \text{ e } i^2 = -1\}$ ,

$$\begin{aligned} +: \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} & \cdot: \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ((a + bi), (c + di)) &\longmapsto (a + c) + (b + d)i & ((a + bi), (c + di)) &\longmapsto (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 = \\ &= ac + (-1)bd + (ad + bc)i = \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

$\mathbb{C}$  é chamado del conjunto dos números complexos. Tome  $a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ( $0 = 0 + 0i$ ).

Assim

$$\begin{aligned} (a + bi)(a - bi) &= a^2 + b^2 + (ab - ba)i = \\ &= a^2 + b^2 \neq 0 \\ (a + bi) \underbrace{(a - bi)(a^2 + b^2)^{-1}} &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{Logo } (a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

- e)  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$  é um corpo, onde  $p$  é primo e  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\bar{a} = \{a + pn \mid n \in \mathbb{Z}\}$  e  $0 \leq a \leq p - 1$ .

$$\begin{aligned} +: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \cdot: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\longmapsto \overline{a + b} & (\bar{a}, \bar{b}) &\longmapsto \overline{a \cdot b} \end{aligned}$$

Tome  $p = 3$ . Assim  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ .



+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$$\bar{2} + \bar{2} = \overline{2+2} = \bar{4} = \overline{3 \cdot 1 + 1} = \bar{1}.$$

Note que a equação  $x^2 + \bar{1} = \bar{0}$  não tem solução em  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ .

Defina:  $F = \{\bar{a} + \bar{b}i \mid \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \text{ e } i^2 = \bar{2}\}$ .

$$+: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$$

$$(\bar{a} + \bar{b}i, \bar{c} + \bar{d}i) \mapsto (\bar{a} + \bar{c}) + (\bar{b} + \bar{d})i$$

$$\cdot: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$$

$$(\bar{a} + \bar{b}i, \bar{c} + \bar{d}i) \mapsto (\bar{a} \cdot \bar{c} + 2\bar{b} \cdot \bar{d}) + (\bar{a} \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot \bar{c})i$$

Mostre que  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  é um corpo com 9 elementos.

**Definição 1.4.** A característica de um corpo  $\mathbb{F}$  é o menor inteiro positivo  $n$  (se existir) tal que  $\underbrace{1 + \dots + 1}_n = 0$ .

Se tal  $n$  não existe, diremos que  $F$  tem característica 0.

**Proposição 1.5.** Seja  $\mathbb{F}$  um corpo. Sea característica de  $F$  é um inteiro positivo  $n$ , então  $n$  é primo.

*Demonstração.* Exercício.

**Exemplo 1.6.**

a) Resolva em  $\mathbb{Q}$  o sistema  $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 4y = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -2x - 8y = -4 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -5y = -3 \end{cases} \implies y = \frac{3}{5}$$

$$2x + 3 \cdot \frac{3}{5} = 1$$

$$2x + \frac{9}{5} = 1 \implies 2x = -\frac{4}{5} \implies x = -\frac{2}{5}.$$

Daí  $(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$  é solução para o sistema.

b) Resolva em  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  o sistema  $\begin{cases} \bar{2}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + y = \bar{0} \end{cases}$ .

$$\begin{cases} \bar{2}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ y = \bar{1} \end{cases} \implies \bar{2}x + \bar{2} \cdot \bar{1} = \bar{1} \implies \begin{aligned} \bar{2}x &= \bar{1} - \bar{2} \\ \bar{2}x &= -\bar{1} \\ \bar{2}x &= \bar{2} \\ x &= \bar{1}. \end{aligned}$$

Daí  $(\bar{1}, \bar{1})$  é solução do sistema.



UnB

## 2. Sistemas lineares (07/01/2021)

**Definição 2.1** (Sistema linear). Um corpo é.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ & a_2 & \cdots & a_2 \\ & & \ddots & \\ a_1 & a_2 & & a_n \end{pmatrix}$$

$$c_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + c_m(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) = c_1y_1 + \cdots + c_my_m$$

$$(c_1a_{11} + \cdots + c_ma_{m1})x_1 + \cdots + (c_1a_{1n} + \cdots + c_ma_{mn})x_n = c_1y_1 + \cdots + c_my_m$$

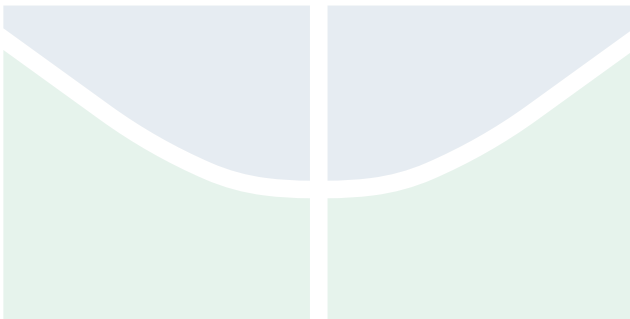
$$\begin{cases} 2x + 3y - z + w = 5 \\ x - y + 2z - 2w = 1 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 2x + 3y - z + w = 5 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 5y - 5z + 5w = 3 \\ 3y - 3z + 5w = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ y - z + w = 3/5 \\ y - z + 5/3w = 1/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z - w = 8/5 \\ y - z + w = 3/5 \\ 2/3w = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} = \frac{5-9}{15} = -\frac{4}{15} \\ w = -\frac{12}{30} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5} \end{cases}$$



UnB

$$\begin{aligned} &\{(x,y,z,\omega)\in\mathbb{Q}^4\mid x=-z+\tfrac{6}{5},y=z+1,z\in\mathbb{Q},\omega=-\tfrac{2}{5}\}=\\ &=\{(-z+\tfrac{6}{5},z+1,z,-\tfrac{2}{5})\mid z\in\mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{l}x+y=2\\x-y=0\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l}x+2y=5\\x-y=-1\end{array}\right.$$

$$f\colon\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}\rightarrow F=f\left(i,j\right)=a_{ij}.$$

$$\begin{pmatrix} f\left(1,1\right) & f\left(1,2\right) & \cdots & f\left(1,n\right) \\ f\left(2,1\right) & f\left(2,2\right) & \cdots & f\left(2,n\right) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f\left(x,1\right) & f\left(w,2\right) & \cdots & f\left(w,n\right) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{wn} \end{pmatrix}$$

### 3. Matrizes (08/01/2021)

Podemos denotar uma matriz  $A$  sobre um corpo  $\mathbb{F}$  de ordem  $m \times n$  por  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ .

Sejam  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{jl})_{n \times p}$  duas matrizes sobre um corpo  $\mathbb{F}$ . Definimos o produto de  $A$  por  $B$  como a matriz  $C = (c_{il})_{m \times p}$  dada por

$$c_{il} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jl} = a_{i1}b_{1l} + \cdots + a_{in}b_{nl}$$

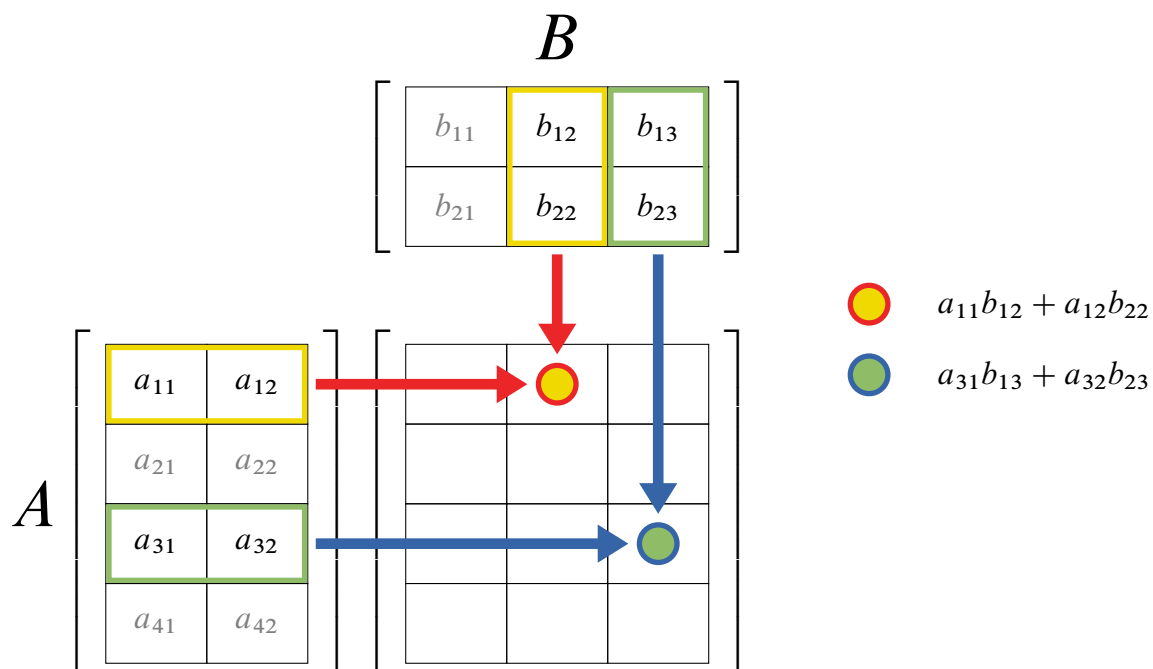


Figura 3.1.: Ilustração.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 3.1.** Temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 14 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}.$$

**Proposição 3.2.** Sejam matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{jl})_{n \times p}$  e  $C = (c_{lk})_{p \times q}$  matrizes sobre um corpo  $\mathbb{F}$ . Então  $(AB)C = A(BC)$ .

*Demonstração.* Veja que  $(AB)C = (\alpha_{ik})_{m \times q}$ ,  $AB = (d_{il})_{m \times p}$  onde

$$d_{il} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_{ik} &= \sum_{l=1}^p d_{il} c_{lk} = \sum_{l=1}^p \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl} \right) c_{lk} = \\ &= \sum_{l=1}^p \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl} c_{lk} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \left( \sum_{l=1}^p b_{jl} c_{lk} \right) = \beta_{ik} \end{aligned}$$

com  $A(BC) = (\beta_{ik})_{m \times q}$ .

Chamaremos a matriz quadrada  $I_m = (\delta_{ij})_{m \times m}$  definida por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i = j, \\ 0 & , \text{ se } i \neq j, \end{cases}$$

de matriz identidade de ordem  $m \times m$ .

Note que se  $A = (a_{jl})_{m \times n}$ , então  $I_m A = A$ , e se  $B = (b_{li})_{n \times m}$ , então  $B I_m = B$ .

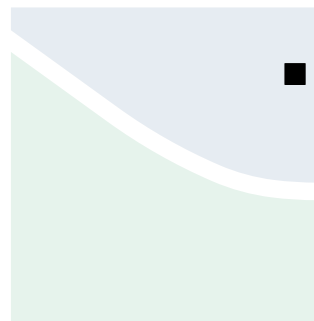
$I_m A = (c_{il})_{m \times m}$  é tal que  $c_{il} = \sum_{j=1}^m \delta_{ij} a_{jl} = a_{il}$  com  $1 \leq i \leq m$ , e  $I_m A = A$ .

**Exemplo 3.3.** Se  $m = 3$ , então

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dizemos que uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})_{m \times m}$  tem inversa se existe uma matriz  $B = (b_{ij})_{m \times m}$  tal que  $AB = BA = I_m$ . Denotaremos a matriz  $B$  por  $A^{-1}$ .

**Definição 3.4.** Seja  $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ . Uma matriz quadrada de ordem  $m \times m$   $E$  é dita elementar se  $E$  é de uma das formas



Un

1.  $E_1 = (e_{ij})_{m \times m}$ , onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{se } i \neq k \\ \delta_{ij}, & \text{se } i = k \end{cases}$$

$$m = 3, k = 2$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com  $k$  um inteiro fixo entre 1 e  $m$ ;

2.  $E_2 = (e_{ij})_{m \times m}$ , onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{se } i \neq l \text{ e } i \neq k \\ \delta_{lj}, & \text{se } i = k \\ \delta_{kj}, & \text{se } i = l \end{cases}$$

$$m = 3, k = 2, l = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

com  $k < l$  inteiros fixos entre 1 e  $m$ ;

3.  $E_3 = (e_{ij})_{m \times m}$ , onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq k \\ \delta_{kj} + c \cdot \delta_{lj}, & i = k \end{cases}$$

$$m = 3, k = 2, l = 3$$

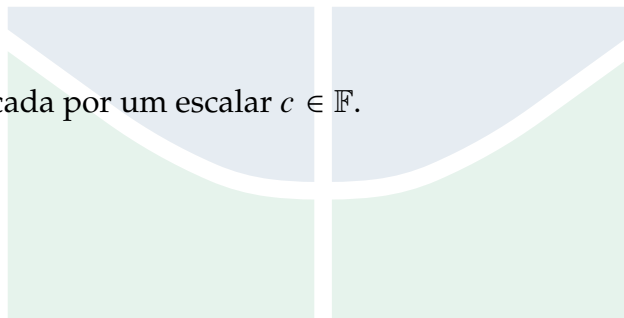
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exemplo 3.5.** Calcule

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad -14 \quad 4 \quad -1 \quad 51 \quad 1 \quad -1 \quad 2)$$

Dada uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times m}$  o efeito de multiplicar uma matriz elementar  $E$  por  $A$  pode ser colocado como:

1.  $E_1 A$ : multiplica uma linha  $k$  de  $A$  por um escalar  $c$ ;
2.  $E_2 A$ : troca duas linhas  $l$  e  $k$  de posições ( $k < l$ );
3.  $E_3 A$ : soma uma linha  $k$  com outra linha  $l$  multiplicada por um escalar  $c \in \mathbb{F}$ .



## 4. Matrizes e sistemas lineares (09/01/2021)

1

**Definição 4.1** (Matriz reduzida por linhas). Uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  sobre  $\mathbb{F}$  é dita reduzida por linhas se

1. O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é igual 1;
2. cada coluna que possui o primeiro elemento não nulo de uma linha não possui todos os outros elementos iguais a 0;

Se além disso, essa matriz  $A$  satisfaz

3. todas linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não nulas;
4. Se  $1, \dots, r$  ( $r \leq m$ ) são as linhas não nulas de  $A$  com os primeiros elementos não nulos ocorrendo nas colunas  $k_1, k_2, k_r$ , respectivamente, então  $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ , dizemos que  $A$  está na forma escada reduzida.

Dizemos que  $A$  está na forma escada reduzida.

**Exemplo 4.2.** 1. As seguintes matrizes estão na forma reduzida:

a)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

b)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

c)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

d)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

2. As seguintes matrizes estão na forma escada reduzida

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

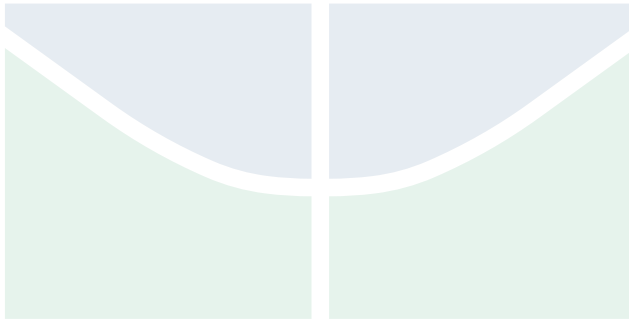
b)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$



- Observação 4.3.**
1. Se  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  está na forma escada reduzida e tem a última linha não nula, então  $A = I_m$ ;
  2. Se  $AX = 0$  e

**Definição 4.4.** .

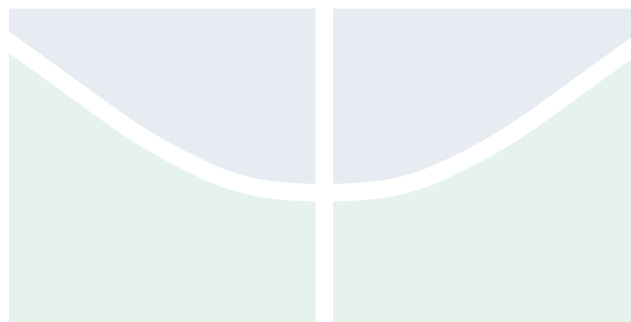


UnB

## 5. Espaços vetoriais (12/01/2021)

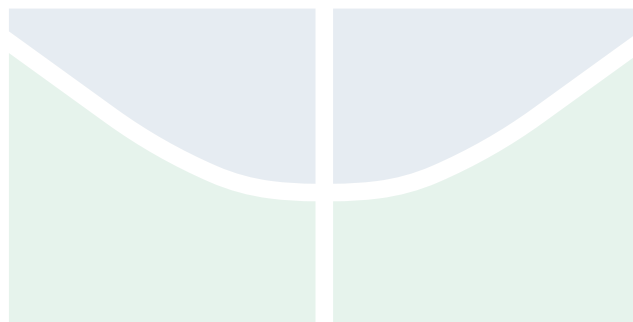
**Definição 5.1.** Um conjunto não vazio  $V$  é chamado de espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{F}$  se em  $V$  estão definidas duas operações

$$\begin{aligned} +: V \times V &\longrightarrow V & \cdot: \mathbb{F} \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longmapsto u + v & (c, v) &\longmapsto c \cdot v \end{aligned}$$



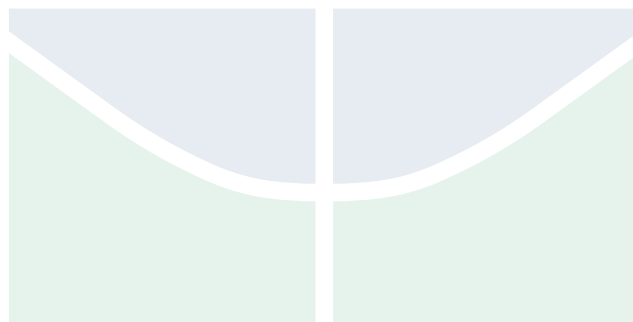
UnB

## 6. Transformações lineares (14/01/2021)



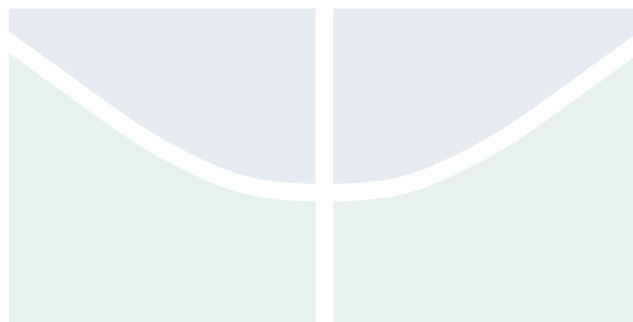
UnB

## 7. Espaço vetorial $L(V, W)$ (15/01/2021)



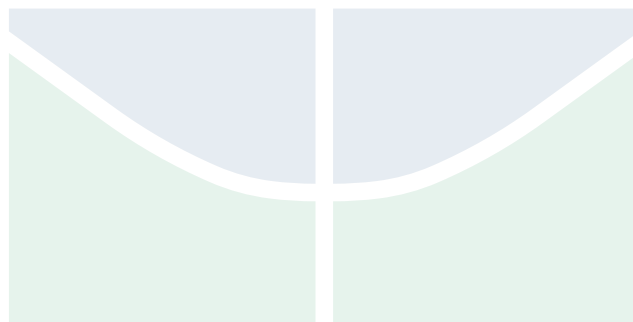
UnB

## 8. Matriz de uma transformação linear (16/01/2021)



UnB

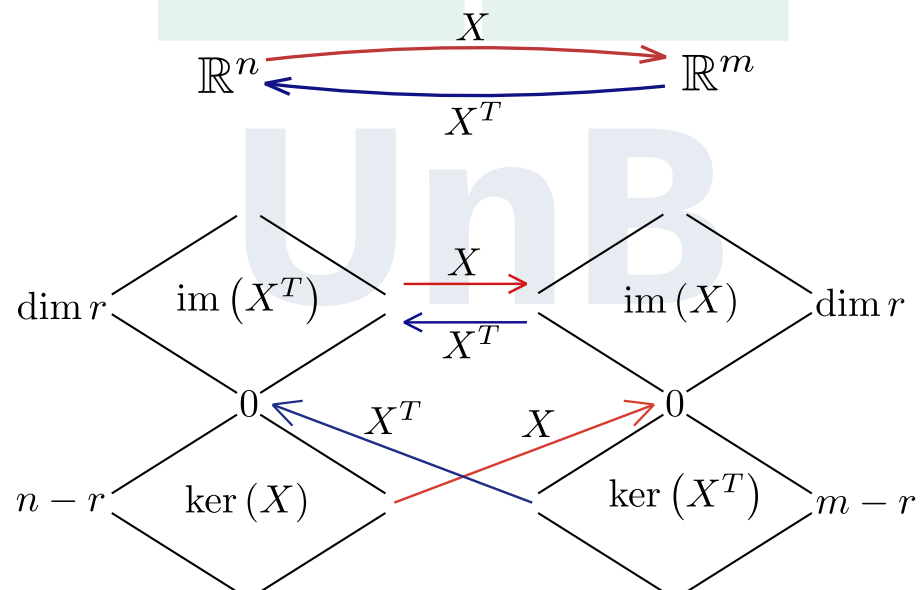
## 9. Funcionais lineares (18/01/2021)



UnB

## Parte II.

## Prática



## 10. Exercícios de Fixação (08/01/2021)

1. Seja  $\mathbb{F}$  um corpo. Dizemos que um subconjunto  $\mathbb{K}$  de  $\mathbb{F}$  é um subcorpo de  $\mathbb{F}$  se  $\mathbb{K}$  munido das operações de adição e multiplicação de  $\mathbb{F}$  é um corpo. Mostre que os seguintes subconjuntos são subcorpos de  $\mathbb{C}$ .

(a)  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\};$

(b)  $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\};$

(c)  $\mathbb{Q}(i\sqrt{2}) = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\}.$

### Solução

(a) .

(b) .

(c) .

2. Mostre que:

(a) Todo subcorpo de  $\mathbb{C}$  tem  $\mathbb{Q}$  como subcorpo;

(b) Todo corpo de característica 0 tem uma cópia de  $\mathbb{Q}$ ;

(c) Se  $\mathbb{K}$  contém propriamente  $\mathbb{R}$  e é um subcorpo de  $\mathbb{C}$ , então  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

### Solução

(a) .

(b) .

(c) .

3. Considere o corpo finito com 5 elementos  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}.$

(a) Mostre que

$$\mathbb{F} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \text{ e } i^2 = \bar{3}\}$$

munido das operações



$$\begin{aligned} \overline{\cdot}: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} & \cdot: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ ((a + bi), (c + di)) &\longmapsto (a + c) + (b + d)i & ((a + bi), (c + di)) &\longmapsto (ac + \overline{3}bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

é um corpo com 25 elementos;

(b) Mostre que  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  é um subcorpo de  $\mathbb{F}$ . Qual é a característica de  $F$ ?

### Solução

(a) .

(b) .

4. Determine o conjunto solução de cada sistema linear dado.

$$(a) \begin{cases} x - 2y + z + w = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ 2x + y - 5z + w = 4 \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{R},$$

$$(c) \begin{cases} x - 2iy + 2z - w = 0 \\ (2 + i)x + z + w = 0 \\ 2ix + y - 5z + (1 + i)w = 0 \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{C},$$

$$(b) \begin{cases} x - \sqrt{3}y + z + w = 1 + \sqrt{3} \\ (2 + \sqrt{3})x + y - z = 3 \\ 2x + y - (1 - \sqrt{3})z + w = 4 \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$

$$(d) \begin{cases} x - \overline{2}y + \overline{2}z - w = \overline{0} \\ \overline{2}x + z + w = \overline{0} \\ \overline{2}x + y - \overline{3}z + w = \overline{0} \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{Z}/5\mathbb{Z},$$

$$(e) \begin{cases} x - \overline{2}iy + \overline{2}z - w = \overline{0} \\ (\overline{2} + i)x + z + w = \overline{0} \\ \overline{2}ix + y - \overline{3}z + (\overline{1} + i)w = \overline{0} \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{F} \text{ de (a) da Questão 3.}$$

### Solução

(a) .

(b) .

(c) .

(d) .

(e) .

5. Mostre que se dois sistemas lineares  $2 \times 2$  possuem o mesmo conjunto solução, então eles são equivalentes. Determine, se existir, dois sistemas lineares  $2 \times 3$  com mesmo conjunto solução mas não equivalentes.

**Solução**

6. Considere o sistema linear sobre  $\mathbb{Q}$
- $$\begin{cases} x - 2y + z + 2w = 1 \\ x + y - z + w = 2 \\ x + 7y - 5z - w = 3 \end{cases}$$

Mostre que esse sistema não tem solução.

**Solução**

7. Determine todos  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tais que o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

tem solução.

**Solução**

8. Encontre duas matrizes  $A$  e  $B$  de ordens iguais a  $3 \times 3$  tais que  $AB$  é uma matriz nula mas  $BA$  não é.

**Solução**

9. Mostre que toda matriz elementar é inversível e calcule a inversa de cada tipo.

### Solução

10. Determine a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

### Solução

11. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \end{bmatrix}$$

com entradas no corpo com cinco elementos  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ .

Calcule sua inversa.

### Solução

12. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre uma matriz na forma e uma matriz invertível  $P$  tal que  $R = PA$ .

### Solução

## 11. Exercícios de Fixação (15/01/2021)

1. Defina sobre  $\mathbb{R}^2$  as seguintes operações:

$$+ : (x, y) + (a, b) = (x + a, 0) \quad \cdot : c(x, y) = (cx, 0), \forall c \in \mathbb{R}.$$

O conjunto  $\mathbb{R}^2$  é um espaço vetorial com essas operações?

**Solução**

2. Defina sobre  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$  as seguintes operações:

$$+ : (x, y) + (a, b) = (xa, yb) \quad \cdot : c(x, y) = (x^c, y^c), \forall c \in \mathbb{R}.$$

Mostre que  $V$  é um espaço vetorial com essas operações.

**Solução**

3. Resolva:

(a) O vetor  $(3, -1, 0, -1)$  pertence ao subespaço de  $\mathbb{R}^5$  das soluções do sistema linear homogêneo de  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^5$  das soluções do sistema linear homogêneo  $W = \langle (2, -1, 3, 2), (-1, 1, 1, 3), (1, 1, 9, -5) \rangle$  de  $\mathbb{R}^4$ ?  $x - 2y + z + w + t = 0$   $3x + y - z - 4t = 0$   $2x + y - 3z + w = 0$

(b) Determine uma base para o subespaço vetorial (a) Determine uma base para o subespaço vetorial  $x - \bar{2}y + z + w + t = 0$   $\bar{2}x + y - z + t = 0$   $\bar{3}x + y + \bar{3}z + w = 0$

**Solução**

- (a)
- (b)
- (c)

4. Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $F$  e  $U$  e  $W$  subespaços de  $V$  tais que  $U + W = V$  e  $U \cap W = \{0\}$ . Mostre que cada vetor  $v \in V$  é escrito de maneira única como  $v = u + w$ , onde  $u \in U$  e  $w \in W$ .

**Solução**

5. Mostre que o conjunto dos polinômios sobre uma variável com coeficientes em  $\mathbb{R}$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  munido das operações usuais de soma e multiplicação por escalar. Determine uma base para esse espaço vetorial.

**Solução**

6. Seja  $S$  um subconjunto de um espaço vetorial  $V$ . Mostre que  $S$  é LD se, e somente se, existir um vetor  $v \in S$  que pode ser escrito como combinação linear dos elementos de  $S \setminus \{v\}$ .

**Solução**

7. Considere o seguinte espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ :

$$\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

- (a) Mostre que  $\alpha = \{1, 2 + x, 3x - x^2, x - x^3\}$  é uma base de  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ ; (b) Escreva as coordenadas de  $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$  com relação a base  $\alpha$ ; (c) Determine as matrizes mudança de base  $[I]_{\alpha}^e$  e  $[I]_e^{\alpha}$ , onde  $e = \{1, x, x^2, x^3\}$ .

3

**Solução**

- (a)  
(b)  
(c)

8. Faça o que se pede:

- (a) Considere a função  $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dada por  $T(z_1 z_2) = T(z_1) T(z_2), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ; formação linear se, e somente se, existem escalares  $c_1, \dots, c_n$  no corpo  $\mathbb{F}$  tais que
- $$T(x + yi) = \begin{pmatrix} x & 7y \\ 5y & -10x - 7y \end{pmatrix}$$
- (b) Mostre que a composta de transformações lineares é uma transformação linear;
- (c) Mostre que uma função  $T: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$  é uma transformação linear se, e somente se, existem escalares  $c_1, \dots, c_n$  no corpo  $\mathbb{F}$  tais que
- $$T(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$
- Moste que  $T$  é uma transformação linear. Prove

### Solução

- (a)  
(b)  
(c)

9. Faça o que se pede:

- (a) Considere  $\mathbb{R}^4$  e seus subespaços  $W = \langle (1, 0, 1, 1), (0, -1, -1, -1) \rangle$  e  $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0, z + t = 0\}$ . Determine uma transformação linear  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $\text{Nuc}(T) = V$  e  $\text{Im}(T) = W$ ;
- (b) Considere  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$  e seus subespaços  $W = \langle (\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{4}, \bar{4}, \bar{4}) \rangle$  e  $U = \{(x, y, z, w) \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4 \mid x + y = \bar{0}, z + t = \bar{0}\}$ . Determine uma transformação linear  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $\text{Nuc}(T) = V$  e  $\text{Im}(T) = W$ ;
- (c) Determine uma base para o núcleo e uma base para a imagem da transformação linear  $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $T(x + yi, a + bi) = (x + 2a, -x + 2b)$ .

### Solução

- (a)  
(b)  
(c)

10. Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais sobre um mesmo corpo  $F$  e  $T: V \rightarrow W$ . Mostre que  $T$  é injetora se, e somente se,  $T$  leva subconjunto LI em subconjunto LI.

### Solução

11. Seja  $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$  a transformação linear definida por  $T(1, 0, 0) = 1 + ix^2$ ,  $T(0, 1, 0) = x + x^2$  e  $T(0, 0, 1) = i + x$ . Exiba uma fórmula para  $T$  e decida se  $T$  é um isomorfismo.

### Solução

12. Seja  $F$  um corpo e  $T: \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}^2$  dada por  $T(x, y) = (x + y, x), \forall (x, y) \in \mathbb{F}^2$ .

Mostre que  $T$  é um isomorfismo e exiba uma fórmula para  $T^{-1}$ .

### Solução

13. Considere as bases  $\alpha = \{1, 1 + x, 1 + x^2\}$  de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  e  $\beta = \{(1, 0), (i, 0), (1, 1), (1, i)\}$  de  $\mathbb{C}^2$  como espaços vetoriais sobre  $\mathbb{R}$ .

Determine as coordenadas da transformação linear  $T: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}^2$  dada por  $T(a + bx + cx^2) = (a + bi, b + ci)$  com relação à base de  $L(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{C}^2)$  construída no Teorema 2-(ii) da Aula 9.

### Solução

14. Considere a base  $\alpha = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (2, 2, 0)\}$  de  $\mathbb{C}^3$  como espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ . Determine a base dual  $\alpha^*$  de  $(\mathbb{C}^3)^*$ .

### Solução

15. Considere  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $T(x, y) = (2x + 3, y - x, 3x)$  e as bases  $\alpha = \{(1, 2), (2, -1)\}$  de  $\mathbb{R}^2$  e  $\beta = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Calcule  $[T]_{\beta}^{\alpha}$ ,  $[T]_{\beta}^{e_1}$  e  $[T]_{e_2}^{\alpha}$  onde  $e_1$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^2$  e  $e_2$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ .

### Solução

16. Sejam  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  e  $G: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  transformações lineares tais que

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = 12 - 110 - 10 - 10 \quad \text{e} \quad [G]_{\alpha}^{\beta} = 1121 - 10 - 112$$

onde  $\alpha = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  é base de  $\mathbb{R}^3$  e  $\beta = \{1, 1 + x, 1 + x^2\}$  é base de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ . Determine bases para  $\text{Nuc}(T)$ ,  $\text{Im}(T)$ ,  $\text{Nuc}(G \circ T)$  e  $\text{Im}(G \circ T)$ .

### Solução

17. Seja  $T: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$  a transformação linear definida por

$$Txyzw = 0xz - w0$$

- (a) Determine a matriz  $[T]$  de  $T$  com relação à base canônica  $e$ ;  
(b) Determine a matriz de  $T$  com relação à base  $\alpha = \{1001, 0110, 10110101\}$ ;  
(c) Exiba a matriz  $M$  tal que  $[T]_{\beta} = M^{-1} [T] M$ .

### Solução

- (a)  
(b)  
(c)

18. Seja  $T: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  a transformação linear definida por

$$Txyzw = \bar{0}xz + \bar{6}w\bar{0}$$

- (a) Determine a matriz  $[T]$  de  $T$  com relação à base canônica  $e$ ;  
(b) Determine a matriz de  $T$  com relação à base  $\alpha = \{1001, 0110, 10110101\}$ ;  
(c) Exiba a matriz  $M$  tal que  $[T]_{\beta} = M^{-1} [T] M$ .

19. Seja  $T: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  a transformação linear definida por

$$Txyzw = \bar{0}xz + \bar{6}w\bar{0}$$

- (a) Determine a matriz  $[T]$  de  $T$  com relação à base canônica  $e$ ;  
(b) Determine a matriz de  $T$  com relação à base  $\alpha = \{\overline{1001}, \overline{0110}, \overline{10110101}\}$ ;  
(c) Exiba a matriz  $M$  tal que  $[T]_{\beta} = M^{-1} [T] M$ .

### Solução

- (a)  
(b)  
(c)



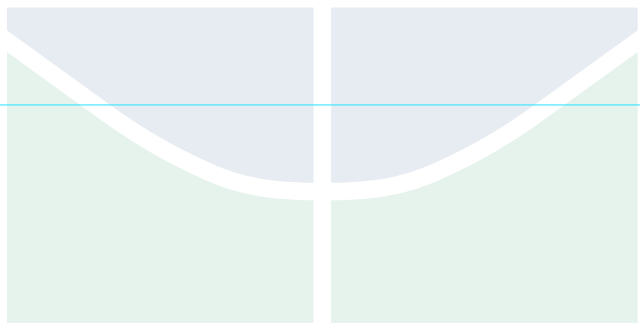
20. Seja  $T: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$  uma transformação linear cuja matriz com relação à base canônica seja

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determine  $T(x, y, z)$ ;
- (b) Qual é a matriz do operador linear  $T$  com relação à base  $\alpha = \{(-1, 1, 0), (1, -1, 1), (0, 1, -1)\}$ ?
- (c) O operador  $T$  é invertível? Justifique!

**Solução**

- (a)
- (b)
- (c)



UnB

Parte III.

Tutorial



julia

The Julia logo consists of four colored circles (blue, red, green, and purple) arranged in a square pattern above the word "julia" in a bold, black, sans-serif font. The word "julia" is written in a lowercase, bold, black, sans-serif font.

## A. Overview about Julia

En agosto del 2018 se lanzó la versión definitiva LTS y actualmente estamos en la versión 1.5.6.

- Para ser eficiente, el desarrollo del lenguaje se planteó como objetivos

- No interpretable, sino compilable, uso de LLVM como compilador JIT (Just in time)

- Tipado de variables recomendado, pero no obligatorio. Aversión a las variables globales. Paralización Cualquier bucle será tan rápido como una operación vectorial. Desde un principio

- C, C++, Java y Fortran

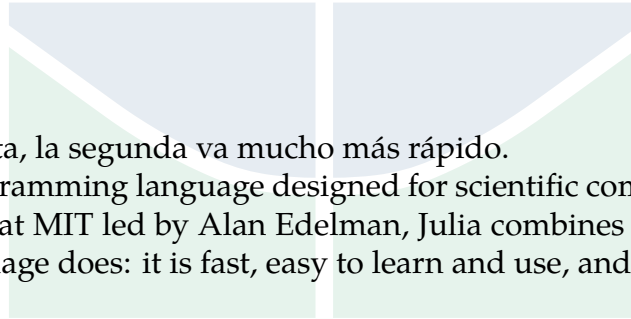
- Modular

- Políglota

- la primera ejecución va lenta porque compila y ejecuta, la segunda va mucho más rápido.

Julia is a modern, expressive, high-performance programming language designed for scientific computation and data manipulation. Originally developed by a group of computer scientists and mathematicians at MIT led by Alan Edelman, Julia combines three key features for highly intensive computing tasks as perhaps no other contemporary programming language does: it is fast, easy to learn and use, and open source.

- Algorithms for Optimization



UnB

## B. LinearAlgebra from Julia

Não há necessidade de instalar nenhum programa, você só precisa de uma conta do Google e seguir as instruções do [repositório](#)<sup>1</sup>.

```
f(x) = x.^2 + π
const ⊗ = kron
const Σ = sum # Although `sum` may be just as good in the code.
# Calculate  $\sum_{j=1}^5 j^2$ 
Σ([j^2 for j ∈ 1:5])
```

Listing B.1: Programa main.jl.

.

### B.1. Matrix calculus

For a comprehensive tutorial about Julia look

---

<sup>1</sup>[julia\\_on\\_collab.ipynb](#)

# Índice

corpo, 7