

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_j \times s_j}.$$

## Álgebra Linear II

**XLIX Escola de Verão em Matemática da UnB**

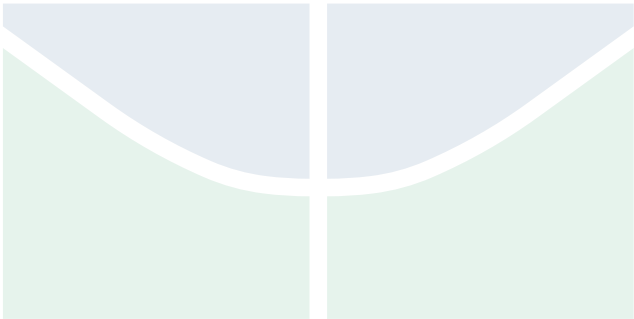
**Aulas do professor Alex Carrazedo Dantas\***

Última modificação: 15 de Janeiro de 2021 às 17 : 55 : 42.

<https://carlosal1015.github.io/Algebra-linear-II/main.pdf>

# Sumário

Referências bibliográficas	4
I. Teoria	5
1. Corpos e Sistemas Lineares (06/01/2021)	6
2. Sistemas lineares (07/01/2021)	9
3. Matrizes (08/01/2021)	11
4. Aula de reposição (09/01/2021)	14
5. Espaços vetoriais (12/01/2021)	15
6. Transformações lineares (14/01/2021)	16
7. Espaço vetorial $L(V, W)$ (15/01/2021)	17
II. Prática	18
8. Exercícios de Fixação (08/01/2021)	19
III. Tutorial	23
A. Overview about Julia	24
B. LinearAlgebra from Julia	25
B.1. Matrix calculus	25
Índice	26



UnB

# Introdução ao curso (04/01/2021)

O professor **Alex Carrazedo Dantas** é especialista no *Teoria dos grupos*. Em um curso presencial você pode discutir mais, enquanto em um curso remoto, cada aula tem um pdf **Moodle MAT** e uma gravação da sessão. Se você tiver dúvidas sobre o moodle, peça ajuda a **Carol Lafetá**<sup>1</sup>.

## Ementa

1. Sistemas lineares e matrizes.
2. Espaços vetoriais e transformações lineares.
3. Polinômios e determinantes
4. Decomposições primárias e formas racionais e de Jordan.
5. Produto interno e teorema espectral.
6. Formas multilineares.

## Critério de avaliação

Menção em disciplina	Equivalência numérica
Superior (SS)	9 – 10
Média Superior (MS)	7 – 8.9
Média (MM)	5 – 6.9

Serão aplicadas 2 provas, de acordo com o cronograma abaixo, as quais serão atribuídas as notas  $x$  e  $y$ .

$$MF = \frac{x + 3y}{4}.$$

O aluno deverá obter média final igual ou superior a 5 pontos e 75% de frequência para ser aprovado.

## Tutores

- Sara Raissa Silva Rodrigues.
- Geraldo Herbert Beltrão de Souza.
- Mattheus Pereira da Silva Aguiar.

---

<sup>1</sup>lafeta.carol@gmail.com

## Referências bibliográficas

- [1] Flávio Ulhoa Coelho e Mary Lilian Lourenço. *Curso de Álgebra Linear, Um - Edusp*. EDUSP, 2005. URL: <https://www.edusp.com.br/livros/curso-de-algebra-linear>.
- [2] P. R. Halmos. *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1958. ISBN: 978-0-387-90093-3. DOI: [10.1007/978-1-4612-6387-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6387-6). URL: <https://www.springer.com/gp/book/9780387900933>.
- [3] Kenneth Hoffman e Ray Kunze. *Linear algebra*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc.
- [4] Serge Lang. *Linear Algebra*. 3ª ed. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1987. ISBN: 978-0-387-96412-6. DOI: [10.1007/978-1-4757-1949-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1949-9). URL: <https://www.springer.com/gp/book/9780387964126>.
- [5] Ph D. Seymour Lipschutz e Ph D. Marc Lars Lipson. *Schaum's Outline of Linear Algebra, Sixth Edition*. McGraw-Hill Education, 2018. ISBN: 978-1-260-01144-9. URL: <https://www.accessengineeringlibrary.com/content/book/9781260011449>.

UnB



**Parte I.**

**Teoria**

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_j \times s_j}.$$

# 1. Corpos e Sistemas Lineares (06/01/2021)

**Definição 1.1** (Corpo). Um *corpo* é um conjunto não vazio  $\mathbb{F}$  munido de duas operações: adição mais e multiplicação.

$$\begin{aligned} +: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} & \cdot: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (x, y) &\longmapsto x + y & (x, y) &\longmapsto x \cdot y \end{aligned}$$

e tais que em  $(\mathbb{F}, +)$

(A1) (Associatividade na adição)  $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{F};$

(A2) (Existência de neutro aditivo)  $\exists 0 \in \mathbb{F}$  tal que  $x + 0 = 0 + x = x, \forall x \in \mathbb{F};$

(A3) (Existência de elemento oposto o inverso aditivo) Dado  $x \in \mathbb{F}$ , existe  $-x \in \mathbb{F}$  tal que  $x + (-x) = (-x) + x = 0;$

(A4) (Comutatividade na adição)  $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{F};$

e  $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$

(M1) (Associatividade na multiplicação)  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x, y, z \in \mathbb{F};$

(M2) (Existência do elemento neutro na multiplicação)  $\exists 1 \in \mathbb{F}$  tal que  $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{F};$

(M3) (Existência inverso multiplicativo) Dado  $x \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ , existe  $x^{-1} \in \mathbb{F}$  tal que  $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1;$

(M4) (Comutatividade na multiplicação)  $x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in \mathbb{F};$

(D) (Distributiva)  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall x, y, z \in \mathbb{F}.$

**Proposição 1.2.**  $x \cdot 0 = 0, \forall x \in \mathbb{F}.$

*Demonstração.*  $x \cdot 0 \stackrel{A2}{=} x \cdot (0 + 0) \stackrel{D}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0.$  Assim

$$\begin{aligned} x \cdot 0 + \underbrace{x \cdot 0 + (-x \cdot 0)}_{=0} &= \underbrace{x \cdot 0 + (-x \cdot 0)}_{=0} \\ x \cdot 0 + 0 &\stackrel{A3}{=} 0 \\ x \cdot 0 &\stackrel{A2}{=} 0. \end{aligned}$$

### Exemplo 1.3.

- a)  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  não é um corpo. De fato não existe o inverso multiplicativo de 2 em  $\mathbb{Z}$ , ou seja, a equação  $2 \cdot x = 1$  não se resolve em  $\mathbb{Z}$ ;
- b)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  é um corpo, onde  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$  e  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$  e  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ .
- c)  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  é um corpo (conjunto dos números reais);
- d)  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  é um corpo, onde  $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, \text{ e } i^2 = -1\}$ ,

$$\begin{aligned} +: \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} & \cdot: \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ((a + bi), (c + di)) &\longmapsto (a + c) + (b + d)i & ((a + bi), (c + di)) &\longmapsto (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 = \\ &= ac + (-1)bd + (ad + bc)i = \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

$\mathbb{C}$  é chamado de conjunto dos números complexos. Tome  $a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ( $0 = 0 + 0i$ ).

Assim

$$\begin{aligned} (a + bi)(a - bi) &= a^2 + b^2 + (ab - ba)i = \\ &= a^2 + b^2 \neq 0 \\ (a + bi) \underbrace{(a - bi)(a^2 + b^2)^{-1}} &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{Logo } (a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

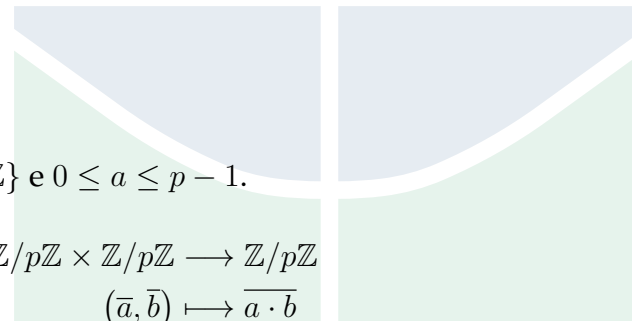
- e)  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$  é um corpo, onde  $p$  é primo e  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\bar{a} = \{a + pn \mid n \in \mathbb{Z}\}$  e  $0 \leq a \leq p - 1$ .

$$\begin{aligned} +: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \cdot: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\longmapsto \overline{a + b} & (\bar{a}, \bar{b}) &\longmapsto \overline{a \cdot b} \end{aligned}$$

Tome  $p = 3$ . Assim  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ .

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$



UnB

$$\overline{2} + \overline{2} = \overline{2+2} = \overline{4} = \overline{3 \cdot 1 + 1} = \overline{1}.$$

Note que a equação  $x^2 + \overline{1} = \overline{0}$  não tem solução em  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ .

Defina:  $F = \{\overline{a} + \overline{b}i \mid \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \text{ e } i^2 = \overline{2}\}$ .

$$\begin{aligned} +: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} & \cdot: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (\overline{a} + \overline{b}i, \overline{c} + \overline{d}i) &\longmapsto (\overline{a} + \overline{c}) + (\overline{b} + \overline{d})i & (\overline{a} + \overline{b}i, \overline{c} + \overline{d}i) &\longmapsto (\overline{a} \cdot \overline{c} + 2\overline{b} \cdot \overline{d}) + (\overline{a} \cdot \overline{d} + \overline{b} \cdot \overline{c})i \end{aligned}$$

Mostre que  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  é um corpo com 9 elementos.

**Definição 1.4.** A característica de um corpo  $\mathbb{F}$  é o menor inteiro positivo  $n$  (se existir) tal que  $\underbrace{1 + \cdots + 1}_n = 0$ .

Se tal  $n$  não existe, diremos que  $F$  tem característica 0.

**Proposição 1.5.** Seja  $\mathbb{F}$  um corpo. Sea característica de  $F$  é um inteiro positivo  $n$ , então  $n$  é primo.

*Demonstração.* Exercício.

**Exemplo 1.6.**

a) Resolva em  $\mathbb{Q}$  o sistema  $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$   $\times (-2)$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 4y = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -2x - 8y = -4 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -5y = -3 \end{cases} \implies y = \frac{3}{5}$$

$$2x + 3 \cdot \frac{3}{5} = 1$$

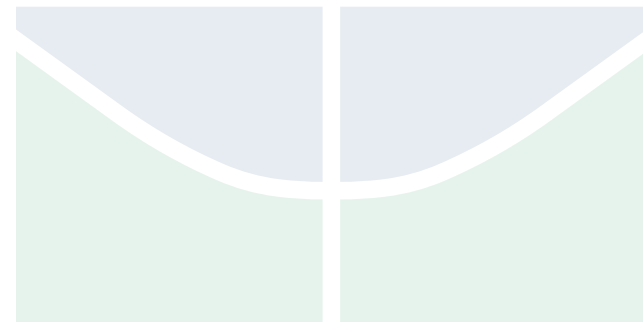
$$2x + \frac{9}{5} = 1 \implies 2x = -\frac{4}{5} \implies x = -\frac{2}{5}.$$

Daí  $(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$  é solução para o sistema.

b) Resolva em  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  o sistema  $\begin{cases} \overline{2}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ \overline{2}x + y = \overline{0} \end{cases}$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overline{2}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ y = \overline{1} \end{cases} &\implies \overline{2}x + \overline{2} \cdot \overline{1} = \overline{1} \implies \overline{2}x = \overline{1} - \overline{2} \\ &\overline{2}x = -\overline{1} \\ &\overline{2}x = \overline{2} \\ &x = \overline{1}. \end{aligned}$$

Daí  $(\overline{1}, \overline{1})$  é solução do sistema.



UnB



## 2. Sistemas lineares (07/01/2021)

**Definição 2.1** (Sistema linear). Um corpo é.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ddots & a_n \end{pmatrix}$$

$$c_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + c_m(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) = c_1y_1 + \cdots + c_my_m$$

$$(c_1a_{11} + \cdots + c_ma_{m1})x_1 + \cdots + (c_1a_{1n} + \cdots + c_ma_{mn})x_n = c_1y_1 + \cdots + c_my_m$$

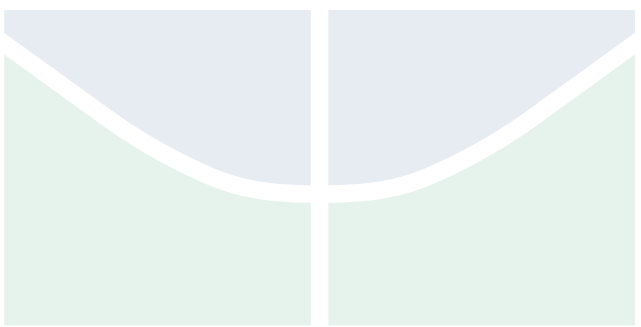
$$\begin{cases} 2x + 3y - z + w = 5 \\ x - y + 2z - 2w = 1 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 2x + 3y - z + w = 5 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 5y - 5z + 5w = 3 \\ 3y - 3z + 5w = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ y - z + w = 3/5 \\ y - z + 5/3w = 1/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z - w = 8/5 \\ y - z + w = 3/5 \\ 2/3w = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} = \frac{5-9}{15} = -\frac{4}{15} \\ w = -\frac{12}{30} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5} \end{cases}$$



UnB

$$\begin{aligned} &\{(x,y,z,\omega)\in\mathbb{Q}^4\mid x=-z+\tfrac{6}{5},y=z+1,z\in\mathbb{Q},\omega=-\tfrac{2}{5}\}=\\ &=\left\{\left(-z+\tfrac{6}{5},z+1,z,-\tfrac{2}{5}\right)\mid z\in\mathbb{Q}\right\} \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{l}x+y=2\\x-y=0\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l}x+2y=5\\x-y=-1\end{array}\right.$$

$$f\colon \{1,\ldots,m\}\times \{1,\ldots,n\}\rightarrow F=f\left(i,j\right)=a_{ij}.$$

$$\begin{pmatrix} f\left(1,1\right) & f\left(1,2\right) & \cdots & f\left(1,n\right) \\ f\left(2,1\right) & f\left(2,2\right) & \cdots & f\left(2,n\right) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f\left(x,1\right) & f\left(w,2\right) & \cdots & f\left(w,n\right) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{wn} \end{pmatrix}$$

### 3. Matrizes (08/01/2021)

Podemos denotar uma matriz  $A$  sobre um corpo  $\mathbb{F}$  de ordem  $m \times n$  por  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ .

Sejam  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{jl})_{n \times p}$  duas matrizes sobre um corpo  $\mathbb{F}$ . Definimos o produto de  $A$  por  $B$  como a matriz  $C = (c_{il})_{m \times p}$  dada por

$$c_{il} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jl} = a_{i1}b_{1l} + \cdots + a_{in}b_{nl}$$

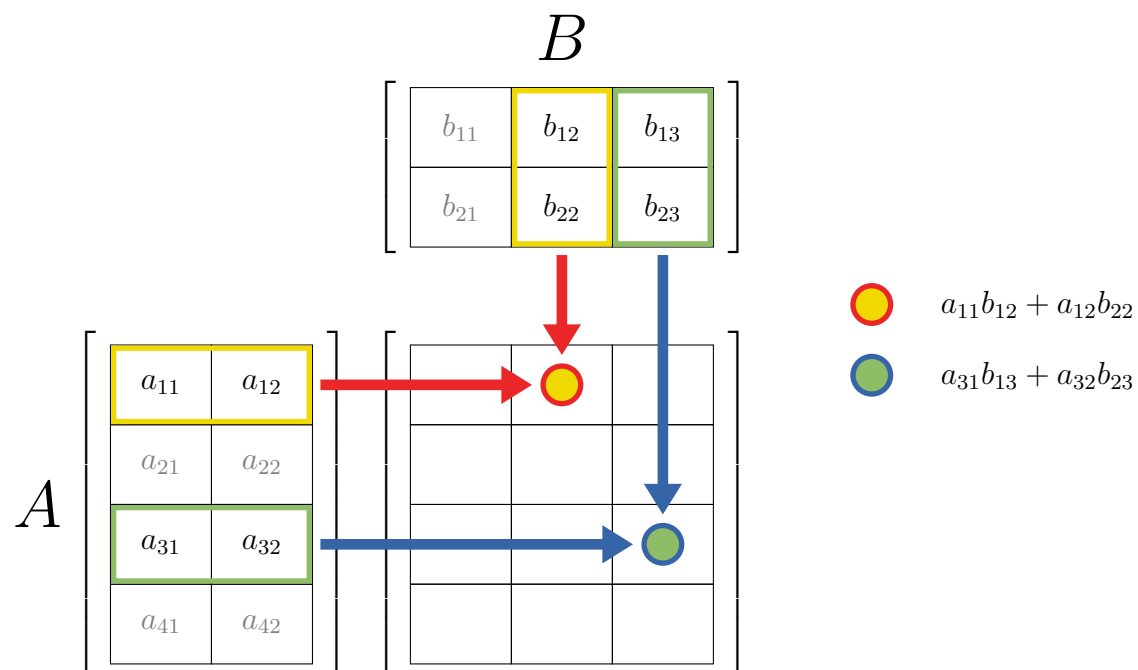


Figura 3.1.: Ilustração.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 3.1.** Temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 14 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}.$$

**Proposição 3.2.** Sejam matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{jl})_{n \times p}$  e  $C = (c_{lk})_{p \times q}$  matrizes sobre um corpo  $\mathbb{F}$ . Então  $(AB)C = A(BC)$ .

*Demonstração.* Veja que  $(AB)C = (\alpha_{ik})_{m \times q}$ ,  $AB = (d_{il})_{m \times p}$  onde

$$d_{il} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_{ik} &= \sum_{l=1}^p d_{il} c_{lk} = \sum_{l=1}^p \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl} \right) c_{lk} = \\ &= \sum_{l=1}^p \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl} c_{lk} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \left( \sum_{l=1}^p b_{jl} c_{lk} \right) = \beta_{ik} \end{aligned}$$

com  $A(BC) = (\beta_{ik})_{m \times q}$ .

Chamaremos a matriz quadrada  $I_m = (\delta_{ij})_{m \times m}$  definida por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i = j, \\ 0 & , \text{ se } i \neq j, \end{cases}$$

de matriz identidade de ordem  $m \times m$ .

Note que se  $A = (a_{jl})_{m \times n}$ , então  $I_m A = A$ , e se  $B = (b_{li})_{n \times m}$ , então  $B I_m = B$ .

$I_m A = (c_{il})_{m \times m}$  é tal que  $c_{il} = \sum_{j=1}^m \delta_{ij} a_{jl} = a_{il}$  com  $1 \leq i \leq m$ , e  $I_m A = A$ .

**Exemplo 3.3.** Se  $m = 3$ , então

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dizemos que uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})_{m \times m}$  tem inversa se existe uma matriz  $B = (b_{ij})_{m \times m}$  tal que  $AB = BA = I_m$ .

Denotaremos a matriz  $B$  por  $A^{-1}$ .

**Definição 3.4.** Seja  $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ . Uma matriz quadrada de ordem  $m \times m$   $E$  é dita elementar se  $E$  é de uma das formas

1.  $E_1 = (e_{ij})_{m \times m}$ , onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{se } i \neq k \\ \delta_{ij}, & \text{se } i = k \end{cases}$$

$$m = 3, k = 2$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com  $k$  um inteiro fixo entre 1 e  $m$ ;

2.  $E_2 = (e_{ij})_{m \times m}$ , onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{se } i \neq l \text{ e } i \neq k \\ \delta_{lj}, & \text{se } i = k \\ \delta_{kj}, & \text{se } i = l \end{cases}$$

$$m = 3, k = 2, l = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

com  $k < l$  inteiros fixos entre 1 e  $m$ ;

3.  $E_3 = (e_{ij})_{m \times m}$ , onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq k \\ \delta_{kj} + c \cdot \delta_{lj}, & i = k \end{cases}$$

$$m = 3, k = 2, l = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exemplo 3.5.** Calcule

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3 \ -14 \ 4 \ -1 \ 51 \ 1 \ -1 \ 2)$$

Dada uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times m}$  o efeito de multiplicar uma matriz elementar  $E$  por  $A$  pode ser colocado como:

1.  $E_1A$ : multiplica uma linha  $k$  de  $A$  por um escalar  $c$ ;
2.  $E_2A$ : troca duas linhas  $l$  e  $k$  de posições ( $k < l$ );
3.  $E_3A$ : soma uma linha  $k$  com outra linha  $l$  multiplicada por um escalar  $c \in \mathbb{F}$ .

## 4. Aula de reposição (09/01/2021)

**Definição 4.1** (Matriz reduzida por linhas). Uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  sobre  $\mathbb{F}$  é dita reduzida por linhas se

1. O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é igual 1;
2. cada coluna que possui o primeiro elemento não nulo de
3. uma linha não possui todos os outros elementos iguais a 0;

Seja além disso, esta matriz  $A$  satisfaz

1. Todas linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não nulas;
2. Se  $1, \dots, r$  ( $r \leq m$ ) são as linhas não nulas de  $A$  com os primeiros elementos não nulos ocorrendo nas colunas  $k_1, k_2, k_r$ , respectivamente, então  $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ , dizemos que  $A$  está na forma escada reduzida.

**Exemplo 4.2.** 1. As seguintes matrizes estão na forma reduzida:

a)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

b)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

c)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

d)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

2. As seguintes matrizes estão na forma escada reduzida

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

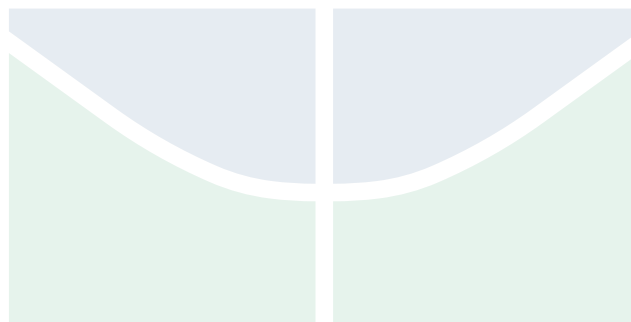
**Observação 4.3.** .

**Definição 4.4.** .

## 5. Espaços vetoriais (12/01/2021)

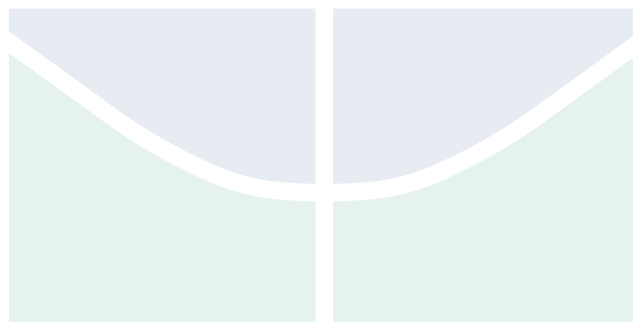
**Definição 5.1.** Um conjunto não vazio  $V$  é chamado de espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{F}$  se em  $V$  estão definidas duas operações

$$\begin{aligned} +: V \times V &\longrightarrow V & \cdot: \mathbb{F} \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longmapsto u + v & (c, v) &\longmapsto c \cdot v \end{aligned}$$



UnB

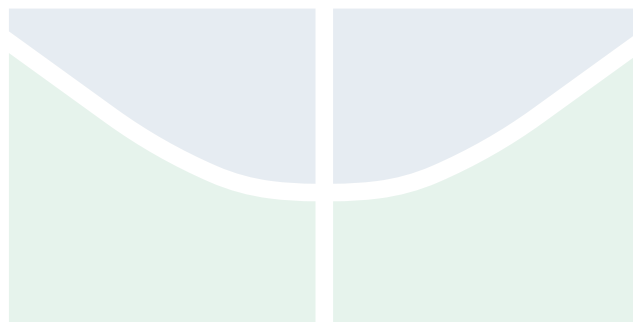
## 6. Transformações lineares (14/01/2021)



UnB



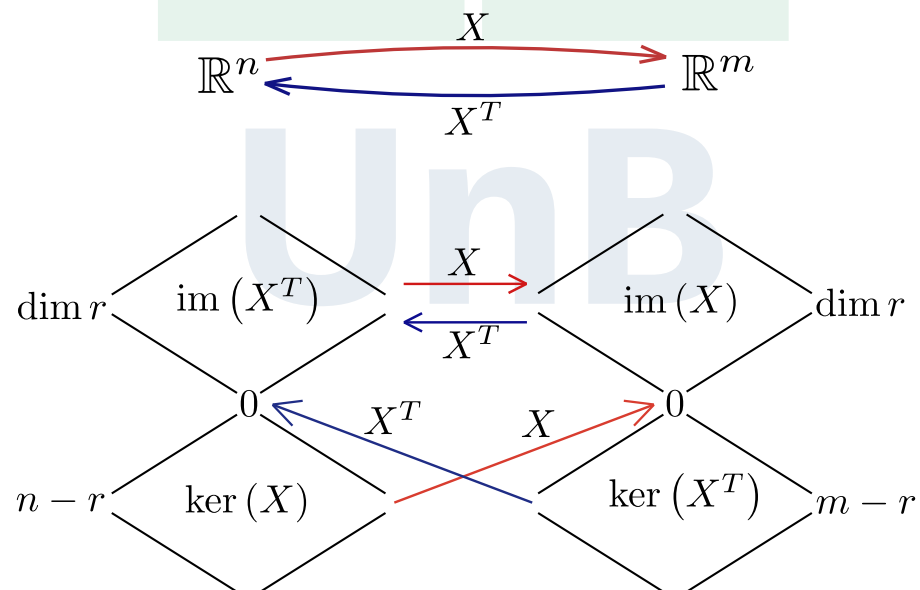
## 7. Espaço vetorial $L(V, W)$ (15/01/2021)



UnB

## Parte II.

## Prática



## 8. Exercícios de Fixação (08/01/2021)

1. Seja  $\mathbb{F}$  um corpo. Dizemos que um subconjunto  $\mathbb{K}$  de  $\mathbb{F}$  é um subcorpo de  $\mathbb{F}$  se  $\mathbb{K}$  munido das operações de adição e multiplicação de  $\mathbb{F}$  é um corpo. Mostre que os seguintes subconjuntos são subcorpos de  $\mathbb{C}$ .

(a)  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\};$

(b)  $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\};$

(c)  $\mathbb{Q}(i\sqrt{2}) = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\}.$

### Solução

- (a) .  
(b) .  
(c) .

2. Mostre que:

- (a) Todo subcorpo de  $\mathbb{C}$  tem  $\mathbb{Q}$  como subcorpo;  
(b) Todo corpo de característica 0 tem uma cópia de  $\mathbb{Q}$ ;  
(c) Se  $\mathbb{K}$  contém propriamente  $\mathbb{R}$  e é um subcorpo de  $\mathbb{C}$ , então  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

### Solução

- (a) .  
(b) .  
(c) .

3. Considere o corpo finito com 5 elementos  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}.$

- (a) Mostre que

$$\mathbb{F} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \text{ e } i^2 = \bar{3}\}$$

munido das operações

$$\begin{aligned} \overline{+}: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} & \overline{\cdot}: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ ((a+bi), (c+di)) &\longmapsto (a+c) + (b+d)i & ((a+bi), (c+di)) &\longmapsto (ac + \overline{3}bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

é um corpo com 25 elementos;

(b) Mostre que  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  é um subcorpo de  $\mathbb{F}$ . Qual é a característica de  $F$ ?

### Solução

(a) .

(b) .

4. Determine o conjunto solução de cada sistema linear dado.

$$(a) \begin{cases} x - 2y + z + w = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ 2x + y - 5z + w = 4 \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{R},$$

$$(b) \begin{cases} x - \sqrt{3}y + z + w = 1 + \sqrt{3} \\ (2 + \sqrt{3})x + y - z = 3 \\ 2x + y - (1 - \sqrt{3})z + w = 4 \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$

$$(c) \begin{cases} x - 2iy + 2z - w = 0 \\ (2 + i)x + z + w = 0 \\ 2ix + y - 5z + (1 + i)w = 0 \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{C},$$

$$(d) \begin{cases} x - \overline{2}y + \overline{2}z - w = \overline{0} \\ \overline{2}x + z + w = \overline{0} \\ \overline{2}x + y - \overline{3}z + w = \overline{0} \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{Z}/5\mathbb{Z},$$

$$(e) \begin{cases} x - \overline{2}iy + \overline{2}z - w = \overline{0} \\ (\overline{2} + i)x + z + w = \overline{0} \\ \overline{2}ix + y - \overline{3}z + (\overline{1} + i)w = \overline{0} \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{F} \text{ de (a) da Questão 3.}$$

### Solução

(a) .

(b) .

(c) .

(d) .

(e) .

5. Mostre que se dois sistemas lineares  $2 \times 2$  possuem o mesmo conjunto solução, então eles são equivalentes. Determine, se existir, dois sistemas lineares  $2 \times 3$  com mesmo conjunto solução mas não equivalentes.

**Solução**

6. Considere o sistema linear sobre  $\mathbb{Q}$  
$$\begin{cases} x - 2y + z + 2w = 1 \\ x + y - z + w = 2 \\ x + 7y - 5z - w = 3 \end{cases}$$

Mostre que esse sistema não tem solução.

**Solução**

7. Determine todos  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tais que o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

tem solução.

**Solução**

8. Encontre duas matrizes  $A$  e  $B$  de ordens iguais a  $3 \times 3$  tais que  $AB$  é uma matriz nula mas  $BA$  não é.

**Solução**

9. Mostre que toda matriz elementar é inversível e calcule a inversa de cada tipo.

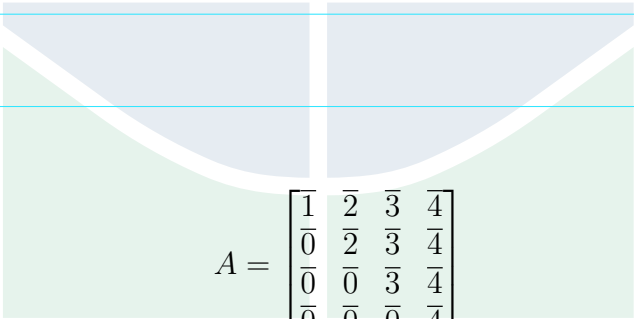
### Solução

10. Determine a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

### Solução

11. Considere a matriz


$$A = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{4} \end{bmatrix}$$

com entradas no corpo com cinco elementos  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ .

Calcule sua inversa.

### Solução

12. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre uma matriz na forma e uma matriz invertível  $P$  tal que  $R = PA$ .

### Solução

Parte III.

Tutorial



julia

The Julia logo consists of four colored circles (blue, red, green, and purple) arranged in a diamond shape above the word "julia" in a bold, black, sans-serif font. A faint, light blue "Julia" watermark is visible in the background.

## A. Overview about Julia

En agosto del 2018 se lanzó la versión definitiva LTS y actualmente estamos en la versión 1.5.6.

- Para ser eficiente, el desarrollo del lenguaje se planteó como objetivos

- No interpretable, sino compilable, uso de LLVM como compilador JIT (Just in time)

- Tipado de variables recomendado, pero no obligatorio. Aversión a las variables globales. Paralización Cualquier bucle será tan rápido como una operación vectorial. Desde un principio

- C,C++, Java y Fortran

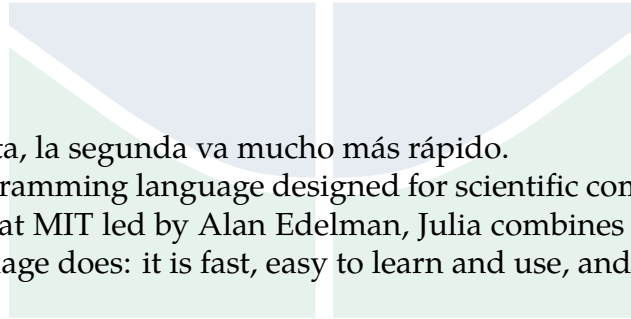
- Modular

- Políglota

- la primera ejecución va lenta porque compila y ejecuta, la segunda va mucho más rápido.

Julia is a modern, expressive, high-performance programming language designed for scientific computation and data manipulation. Originally developed by a group of computer scientists and mathematicians at MIT led by Alan Edelman, Julia combines three key features for highly intensive computing tasks as perhaps no other contemporary programming language does: it is fast, easy to learn and use, and open source.

- Algorithms for Optimization



UnB



## B. LinearAlgebra from Julia

Não há necessidade de instalar nenhum programa, você só precisa de uma conta do Google e seguir as instruções do [repositório](#)<sup>1</sup>.

```
f(x) = x.^2 + π  
const ⊗ = kron  
const Σ = sum # Although `sum` may be just as good in the code.  
# Calculate  $\sum_{j=1}^5 j^2$   
Σ([j^2 for j ∈ 1:5])
```



Listing B.1: Programa main.jl.

### B.1. Matrix calculus

For a comprehensive tutorial about Julia look

UnB

---

<sup>1</sup>[julia\\_on\\_collab.ipynb](#)

# Índice

corpo, 6