$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_j \times s_j}.$$

Álgebra Linear II

XLIX Escola de Verão en Matemática da UnB

Aulas do professor Alex Carrazedo Dantas*

Última modificação: 9 de Janeiro de 2021 às 12 : 40 : 25.

https://carlosal1015.github.io/Algebra-linear-II/main.pdf

*alex@mat.unb.br

Sumário

Introdução ao curso (04/01/2021)

O professor Alex Carrazedo Dantas é especialista no *Teoria dos grupos*. Em um curso presencial você pode discutir mais, enquanto em um curso remoto, cada aula tem um pdf Moodle MAT e uma gravação da sessão. Se você tiver dúvidas sobre o moodle, peça ajuda a Carol Lafetá[1].

Ementa

1. **Sistemas lineares e matrizes.**
2. **Espaços vetoriais e transformações lineares.**
3. **Polinômios e determinantes**
4. **Decomposicões primárias e formas racionais e de Jordan.**
5. **Produto interno e teorema espectral.**
6. **Formas multilineares.**

Critério de avaliação

Menção em disciplina	**Equivalência numérica**
Superior (SS)	$9 - 10$
Média Superior (MS)	$7 - 8.9$
Média (MM)	$5 - 6.9$

Serão aplicadas 2 provas, de acordo com o cronograma abaixo, as quais serão atribuídas as notas x e y.

$$\mathrm{MF} = \frac{x + 3y}{4}.$$

O aluno deverá obter média final igual ou superior a 5 pontos e 75% de frequência para ser aprovado.

Tutores

- Sara Raissa Silva Rodrigues.
- Geraldo Herbert Beltrão de Souza.
- Mattheus Pereira da Silva Aguiar.

[1] lafeta.carol@gmail.com

Referências bibliográficas

[1] Flávio Ulhoa Coelho e Mary Lilian Lourenço. *Curso de Álgebra Linear, Um - Edusp*. EDUSP, 2005. URL: https://www.edusp.com.br/livros/curso-de-algebra-linear.

[2] P. R. Halmos. *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1958. ISBN: 978-0-387-90093-3. DOI: 10.1007/978-1-4612-6387-6. URL: https://www.springer.com/gp/book/9780387900933.

[3] Kenneth Hoffman e Ray Kunze. *Linear algebra*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc.

[4] Serge Lang. *Linear Algebra*. 3ª ed. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1987. ISBN: 978-0-387-96412-6. DOI: 10.1007/978-1-4757-1949-9. URL: https://www.springer.com/gp/book/9780387964126.

[5] Ph D. Seymour Lipschutz e Ph D. Marc Lars Lipson. *Schaum's Outline of Linear Algebra, Sixth Edition*. McGraw-Hill Education, 2018. ISBN: 978-1-260-01144-9. URL: https://www.accessengineeringlibrary.com/content/book/9781260011449.

Parte I.

Teoria

1. Corpos e Sistemas Lineares (06/01/2021)

Definição 1.1 (Corpo)**.** Um *corpo* é um conjunto não vazio $\mathbb{F}$ munido de duas operações: adição mais e multiplicação.

$$
\begin{aligned}
+\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \qquad & \cdot\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F}\\
(x,y) &\longmapsto x+y & (x,y) &\longmapsto x\cdot y
\end{aligned}
$$

e tais que en $(\mathbb{F},+)$

A1. (Asociatividade na adição) $(x+y)+z = x+(y+z), \forall x,y,z \in \mathbb{F}$;

A2. (Existênza de neutro aditivo) $\exists 0 \in \mathbb{F}$ tal que $x+0 = 0+x = x, \forall x \in \mathbb{F}$;

A3. (Existênza de elemento oposto o inverso aditivo) Dado $x \in \mathbb{F}$, existe $-x \in \mathbb{F}$ tal que $x+(-x) = (-x)+x = 0$.

A4. (Conmutatividade na adição) $x+y = y+x, \forall x,y \in \mathbb{F}$;

A5. (Associatividade na multiplicação) $(x\cdot y)\,z = x\cdot(y\cdot z), \forall x,y,z \in \mathbb{F}$;

e $(\mathbb{F}\setminus\{0\},\cdot)$

M1. (Existênza do elemento neutro na multiplicação) $\exists 1 \in \mathbb{F}$ tal que $x\cdot 1 = 1\cdot x = x, \forall x \in \mathbb{F}$;

M2. (Existênza inverso multiplicativo) Dado $x \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$, existe $x^{-1} \in \mathbb{F}$ tal que $x\cdot x^{-1} = x^{-1}\cdot x = 1$;

M3. (Conmutatividade na multiplicação) $x\cdot y = y\cdot x, \forall x,y \in \mathbb{F}$.

M4. (Distributiva) $x\cdot(y+z) = xy+xz, \forall x,y,z \in \mathbb{F}$.

Proposição 1.1. $x\cdot 0 = 0, \forall x \in \mathbb{F}$.

Demonstração. $x\cdot 0 =\overset{A2}{=} x\cdot(0+0) \overset{D}{=} x\cdot 0 + x\cdot 0$. Assim

$$
\begin{aligned}
x\cdot 0 + \underbrace{x\cdot 0 + (-x\cdot 0)}_{=0} &= \underbrace{x\cdot 0 + (-x\cdot 0)}_{=0}\\
x\cdot 0 + 0 &\overset{A3}{=} 0\\
x\cdot 0 &\overset{A2}{=} 0.
\end{aligned}
$$

∎

Exemplo 1.1.

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ não é um corpo. De fato não existe o inverso multiplicativo de 2 em $\mathbb{Z}$, ou seja, a equação $2 \cdot x = 1$ não se resolue em $\mathbb{Z}$.

2. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é um corpo, onde $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ e $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ e $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

3. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um corpo (conjunto dos números reais);

4. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um corpo, onde $\mathbb{C} = \left\{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, \text{ e } i^2 = 1 \right\}$,
   $+ :\ (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i.$
   $\cdot :\ (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\, i.$

$$\begin{aligned} (a + bi)\,(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 = \\ &= ac + (-1)\, bd + (ad + bc)\, i = \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\, i \end{aligned}$$

   $\mathbb{C}$ é chamado del conjunto nos números complexos. Tome $a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $(0 = 0 + 0i)$. Assim

$$\begin{aligned} (a + bi)\,(a - bi) &= a^2 + b^2 + (ab - ba)\, i = \\ &= a^2 + b^2 \neq 0 \end{aligned}$$

$$(a + bi)\,(a - bi)\left(a^2 + b^2\right)^{-1} = 1$$

   Logo

$$(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

5. $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é um corpo, onde $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\overline{a} \mid \overline{a} \in \mathbb{Z}\}$.

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\overline{a}/a \in \mathbb{Z}\}\, \overline{a} = \{a + pu/u \in \mathbb{Z}\} \neq 0 \leq a \leq p - 1$$

Defina:

$$F = \left\{ \overline{a} + \overline{b}\imath \mid \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \text{ e } \imath^2 = \overline{2} \right\} . + :\ \left(\overline{a} + \overline{b}\imath\right) + \left(\overline{c} + \overline{d}\imath\right) = (\overline{a} + \overline{c}) + \left(\overline{b} + \overline{d}\right) i . \cdot :\ \left(\overline{a} + \overline{b}i\right)\left(\overline{c} + \overline{d}i\right) = \left(\overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{2}\overline{b}d\right) + \left(\overline{a}\overline{d} + \overline{b}\overline{c}\right) i$$

$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} = 0$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 4y = 2. \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -2x - 8y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -5y = -3 \Rightarrow y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$2x + 3 \cdot \tfrac{3}{5} = 1$$

$$2x + \tfrac{9}{5} = 1 \Rightarrow 2x = -\tfrac{4}{5} \Rightarrow x = -\tfrac{2}{5}$$

$$\begin{cases} \overline{2}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ \overline{2}x + y = \overline{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{2}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ \qquad r_y = \bar{I} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overline{2}x + \overline{2} \cdot I = 1 \Rightarrow & \overline{2}x = \overline{1} - \overline{2} \\ & \overline{2}x = -\overline{1} \\ & \overline{2}x = \overline{2} \\ & x = \overline{1} \end{aligned}$$

2. Sistemas lineares $(07/01/2021)$

Definição 2.1 (Sistema linear)**.** Um corpo é.

$$\left(\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{array}\right)$$

$$c_1\left(a_n x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\right) + \cdots + c_m\left(a_m x_2 + \cdots + a_{mn}x_n\right) = c_1 y_2 + \cdots + c_m y_m$$
$$\left(c_2 a_{11} + \cdots + c_m a_{m1}\right)x_1 + \cdots + \left(c_1 a_{1n} + \cdots + c_m a_{wn}\right)x_n = c_1 y_2 + \cdots + c_m y_m$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + w = 5 \\ x - y + 2z - 2w = 1 \\ \quad 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 2x + 3y - z + w = 5 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 5y - 5z + 5w = 3 \\ 3y - 3z + 5w = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ \qquad y - z + w = 3/5 \\ \quad y - z + 5/3w = 1/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z - w = 8/5 \\ y - z + \omega = 3/5 \\ \qquad 2/3\omega = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{5-9}{15} = -\dfrac{4}{15} \\ \qquad \omega = -\dfrac{12}{30} = -\dfrac{4}{10} = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$\left\{(x,y,z,\omega) \in \mathbb{Q}^4 \mid x = -z + \tfrac{6}{5}, y = z + 1, z \in \mathbb{Q}, \omega = -\tfrac{2}{5}\right\} =$$
$$= \left\{\left(-z + \tfrac{6}{5}, z + 1, z, -\tfrac{2}{5}\right) \mid z \in \mathbb{Q}\right\}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$f\colon\ \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to F = f(i, j) = a_{ij}.$$

$$\begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,2) & \cdots & f(1,n) \\ f(2,1) & f(2,2) & \cdots & f(2,n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f(x,1) & f(w,2) & \cdots & f(w,n) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{wn} \end{pmatrix}$$

3. Matrizes (08/01/2021)

Podemos denotar uma matriz A sobre um corpo $\mathbb{F}$ de ordem $m \times n$ por $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Sejam $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jl})_{n \times p}$ duas matrizes sobre um corpo $\mathbb{F}$. Definimos o producto de A por B como a matriz $C = (c_{il})_{m \times p}$ dada por

$$c_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} = a_{i1} b_{il} + \cdots + a_{in} b_{nl}$$

Ilustração

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.1. Temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 14 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}.$$

Proposição 3.1. Sejam matrices $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (a_{jl})_{n \times p}$ e $C = (a_{lk})_{p \times q}$ matrizes sobre um corpo $\mathbb{F}$. Então $(AB)\,C = A\,(BC)$.

Demonstração. Veja que $(AB)\,C = (\alpha_{ik})_{m \times q}$, $AB = (d_{il})_{m \times p}$ onde

$$d_{il} = \sum_{l=1}^{n} a_{ij} b_{jl}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_{ik} = \sum_{l=1}^{p} d_{il} c_{lk} &= \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} \right) c_{lk} = \\ &= \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} c_{lk} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{l=1}^{p} b_{jl} c_{lk} \right) = \beta_{ik} \end{aligned}$$

com $A\,(BC) = (\beta_{ik})_{m \times q}$. ∎

Chamaremos a matriz quadrada $I_m = \left(\delta_{ij}\right)_{m\times m}$ definida por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, se } i = j, \\ 0 & \text{, se } i \neq j, \end{cases}$$

de matriz identidade de ordem $m \times m$.

Note que se $A = \left(a_{jl}\right)_{m\times n}$, então $I_m A = A$, e se $B = \left(b_{li}\right)_{n\times m}$, então $BI_m = B$.

$I_m A = \left(c_{il}\right)_{m\times m}$ é tal que $c_{il} = \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij} a_{jl} = a_{il}$ con $1 \leq i \leq m$, e $I_m A = A$.

Exemplo 3.2. Se $m = 3$, então

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dizemos que uma matriz quadrada $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times m}$ tem inversa se existe uma matriz $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times m}$ tal que $AB = BA = I_m$. Denotaremos a matriz B por A^{-1}.

Definição 3.1. Seja $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Uma matriz quadrada de ordem $m \times m$ E é dita elementar se E é de uma das formas

1. $E_1 = \left(e_{ij}\right)_{m\times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{se } i \neq k \\ \delta_{ij}, & \text{se } i = k \end{cases} \qquad \boxed{m = 3, k = 2 E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

   con k um inteiro fixo entre 1 e m;

2. $E_2 = \left(e_{ij}\right)_{m\times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, \text{se } i \neq l \text{ e } i \neq k \\ \delta_{lj}, \text{se } i = k \\ \delta_{kj}, \text{se } i = l \end{cases} \qquad \boxed{m = 3, k = 2, l = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

   con $k < l$ inteiros fixos entre 1 e m;

3. $E_3 = \left(e_{ij}\right)_{m\times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq k \\ \delta_{kj} + c \cdot \delta_{lj}, & i = k \end{cases} \boxed{m = 3, k = 2, l = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Exemplo 3.3. Calcule

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -14 & 4 & -1 & 51 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dada uma matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times m}$ o efeito de multiplicar uma matriz elementar E por A pode ser colocado como:

1. $E_1 A$: multiplica uma linha k de A por um escalar c;
2. $E_2 A$: troca duas linhas l e k de posições $(k < l)$;
3. $E_3 A$: soma uma linha k com outra linha l multiplicada por um escalar $c \in \mathbb{F}$.

$$E_1 = \left(e_{ij}\right)_{m\times m} \equiv A = \left(a_{j\ell}\right)_{m\times n}$$
$$E_1 A = (c_{i\ell})_{m\times n} \text{ com}$$

Parte II.

Prática

4. Exercícios de Fixação (08/01/2021)

1. Seja $\mathbb{F}$ um corpo. Dizemos que um subconjunto $\mathbb{K}$ de $\mathbb{F}$ é um subcorpo de $\mathbb{F}$ se $\mathbb{K}$ munido das operações de adição e multiplicação de $\mathbb{F}$ é um corpo. Mostre que os seguintes subconjuntos são subcorpos de $\mathbb{C}$.

   (a) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right) = \left\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$;

   (b) $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\}$;

   (c) $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{2}\right) = \left\{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\right\}$.

Solution:

(a) .

(b) .

(c) .

2. Mostre que:

   (a) Todo subcorpo de $\mathbb{C}$ tem $\mathbb{Q}$ como subcorpo;

   (b) Todo corpo de característica 0 tem uma cópia de $\mathbb{Q}$;

   (c) Se $\mathbb{K}$ contém propriamente $\mathbb{R}$ e é um subcorpo de $\mathbb{C}$, então $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Solution:

(a) .

(b) .

(c) .

3. Considere o corpo finito com 5 elementos $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$.

   (a) Mostre que

$$\mathbb{F} = \left\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \text{ e } i^2 = \overline{3}\right\}$$

   munido das operações

$$\begin{aligned} \overline{+}\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ \left(\left(a+bi\right),\left(c+di\right)\right) &\longmapsto \left(a+c\right)+\left(b+d\right)i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \bar{\cdot}\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ \left(\left(a+bi\right),\left(c+di\right)\right) &\longmapsto \left(ac+\overline{3}bd\right)+\left(ad+bc\right)i \end{aligned}$$

é um corpo com 25 elementos;

(b) Mostre que $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ é um subcorpo de $\mathbb{F}$. Qual é a característica de F?

Solution:

(a) .

(b) .

4. Determine o conjunto solução de cada sistema linear dado.

(a) $\begin{cases} x-2y+z+w=1 \\ 2x+y-z=3 \\ 2x+y-5z+w=4 \end{cases}$ em $\mathbb{R}$,

(b) $\begin{cases} x-\sqrt{3}y+z+w=1+\sqrt{3} \\ \left(2+\sqrt{3}\right)x+y-z=3 \\ 2x+y-\left(1-\sqrt{3}\right)z+w=4 \end{cases}$ em $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$,

(c) $\begin{cases} x-2iy+2z-w=0 \\ \left(2+i\right)x+z+w=0 \\ 2ix+y-5z+\left(1+i\right)w=0 \end{cases}$ em $\mathbb{C}$,

(d) $\begin{cases} x-\overline{2}y+\overline{2}z-w=\overline{0} \\ \overline{2}x+z+w=\overline{0} \\ \overline{2}x+y-\overline{3}z+w=\overline{0} \end{cases}$ em $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$,

(e) $\begin{cases} x-\overline{2}iy+\overline{2}z-w=\overline{0} \\ \left(\overline{2}+i\right)x+z+w=\overline{0} \\ \overline{2}ix+y-\overline{3}z+\left(\overline{1}+i\right)w=\overline{0} \end{cases}$ em $\mathbb{F}$ de (a) da Questão 3.

Solution:

(a) .

(b) .

(c) .

(d) .

(e) .

5. Mostre que se dois sistemas lineares 2×2 possuem o mesmo conjunto solução, então eles são equivalentes. Determine, se existir, dois sistemas lineares 2×3 com mesmo conjunto solução mas não equivalentes.

Solution:

6. Considere o sistema linear sobre $\mathbb{Q}$ $\begin{cases} x - 2y + z + 2w = 1 \\ x + y - z + w = 2 \\ x + 7y - 5z - w = 3 \end{cases}$

   Mostre que esse sistema não tem solução.

Solution:

7. Determine todos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

   tem solução.

Solution:

8. Encontre duas matrizes A e B de ordens iguais a 3×3 tais que AB é uma matriz nula mas BA não é.

Solution:

9. Mostre que toda matriz elementar é inversível e calcule a inversa de cada tipo.

Solution:

10. Determine a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Solution:

11. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{4} \end{bmatrix}$$

com entradas no corpo com cinco elementos $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$.

Calcule sua inversa.

Solution:

12. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre uma matriz na forma e uma matriz invertível P tal que $R = PA$.

Solution:

Índice