Aula de Álgebra Linear II - 08/01/2021

$\boxed{\text{Matrizes}}$

Podemos denotar uma matriz A sobre um corpo F de ordem $m \times n$ por

$$A = (a_{ij})_{m \times n}.$$

. Sejam $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jl})_{n \times p}$ duas matrizes sobre um corpo F. Definimos o produto de A por B como a matriz $C = (c_{il})_{m \times p}$ dada por

$$c_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} = a_{i1} b_{1l} + a_{i2} b_{2l} + \dots + a_{in} b_{nl}.$$

Ilustração:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} =$$

c_{11} $\dots$ c_{1p} c_{m1} $\dots$ c_{mp}

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ & \vdots & \\ c_{m1} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}.$$

∎

Exemplo 1. Temos que

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 7 & 4 & 14 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}.$$

Proposição 2. Sejam $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{j\ell})_{n\times p}$ e $C=(c_{\ell k})_{p\times q}$ matrizes sobre um corpo $\mathbb{F}$. Então $(AB)C = A(BC)$.

Dem. Veja que $(AB)C = (\alpha_{ik})_{m\times q}$, $AB = (d_{i\ell})_{m\times p}$

onde

$$d_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{j\ell}$$

e

$$\alpha_{ik} = \sum_{\ell=1}^{p} d_{i\ell} c_{\ell k} = \sum_{\ell=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{j\ell}\right) c_{\ell k} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{j\ell} c_{\ell k}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{\ell=1}^{p} a_{ij} b_{j\ell} c_{\ell k}\right) = \qquad BC = (f_{jk})_{n\times q}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{\ell=1}^{p} b_{j\ell} c_{\ell k}\right) = \beta_{ik}$$

com $A(BC) = (\beta_{ik})_{m\times q}$. ∎

CHAMAREMOS A MATRIZ $I_m = (\delta_{ij})_{m \times m}$ DEFINIDA POR

MATRIZ QUADRADA

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

DE MATRIZ IDENTIDADE DE ORDEM $m \times m$.

NOTE QUE SE $A = (a_{jl})_{m \times n}$, ENTÃO $I_m A = A$, E SE $B = (b_{li})_{n \times m}$, ENTÃO $B I_m = B$.

ANÁLOGO!

$I_m A = (c_{il})_{m \times n}$ É TAL QUE

$$c_{il} = \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij} a_{jl} \overset{(1 \leq i \leq m)}{=} a_{il}$$

E $I_m A = A$.

$\blacksquare$

EXEMPLO 3. SE $m = 3$, ENTÃO

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

DIZEMOS QUE UMA MATRIZ QUADRADA $A = (a_{ij})_{m \times m}$ TEM INVERSA SE EXISTE UMA MATRIZ $B = (b_{ij})_{m \times m}$ TAL QUE

$$AB = BA = I_m.$$

DENOTAREMOS A MATRIZ B POR A^{-1}.

Definição 4. Seja $c \in F\setminus\{0\}$. Uma matriz quadrada de ordem $m \times m$ E é dita elementar se E é de uma das formas

1) $E_1 = (e_{ij})_{m\times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{se } i \neq k \\ c.\delta_{kj}, & \text{se } \underline{i = k} \end{cases}$$

$$m = 3, \quad k = 2$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com k um inteiro fixo entre 1 e m;

2) $E_2 = (e_{ij})_{m\times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{se } i \neq \ell \text{ e } i \neq k \\ \delta_{\ell j}, & \text{se } i = k \\ \delta_{kj}, & \text{se } i = \ell \end{cases}$$

$$m = 3, \quad k = 2, \quad \ell = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

com $k < \ell$ inteiros fixos entre 1 e m;

3) $E_3 = (e_{ij})_{m\times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq k \\ \delta_{kj} + c.\delta_{\ell j}, & i = k \end{cases}$$

$$m = 3, \quad \underline{k = 2}, \quad \ell = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com $k \neq \ell$ inteiros fixos entre 1 e m.

Exemplo 5. Calcule

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ \boxed{4 \quad 4 \quad -1 \quad 5} \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

① Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ o efeito de multiplicar uma matriz elementar E por A pode ser colocado como:

1) $E_1 A$: multiplica uma linha k de A por um escalar c;

$(k<l)$

2) $E_2 A$: troca duas linhas l e k de posições;

3) $E_3 A$: soma uma linha k com outra linha l multiplicada por um escalar $c \in F$.

1) $E_1 = (e_{ij})_{m \times m}$ e $A = (a_{jl})_{m \times n}$, então

$E_1 A = (c_{il})_{m \times n}$ com

$$c_{il} = \sum_{j=1}^{m} e_{ij} a_{jl} = \begin{cases} a_{il}, & \text{se } i \neq k, \\ c.a_{il}, & \text{se } i = k. \end{cases}$$

Logo $E_1 A$ apenas multiplica a linha k de A por c.

DADO UM SISTEMA LINEAR

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = y_m \end{cases}$$

PODEMOS ESCREVER EM UMA FORMA MATRICIAL

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}}_{Y}$$

$$A . X = Y$$