

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_j \times s_j}.$$

Álgebra Linear II

XLIX Escola de Verão em Matemática da UnB

Aulas do professor Alex Carrazedo Dantas*

Última modificação: 8 de Janeiro de 2021 às 19 : 26 : 09.

<https://carlosal1015.github.io/Algebra-linear-II/main.pdf>

Sumário

Referências bibliográficas 

5

I. Teoria

6

1. **Corpos e Sistemas Lineares** (06/01/2021)

7

2. **Sistemas lineares**

10

3. **Matrizes**

12

II. Prática

13

Índice

14



UnB

Introdução ao curso

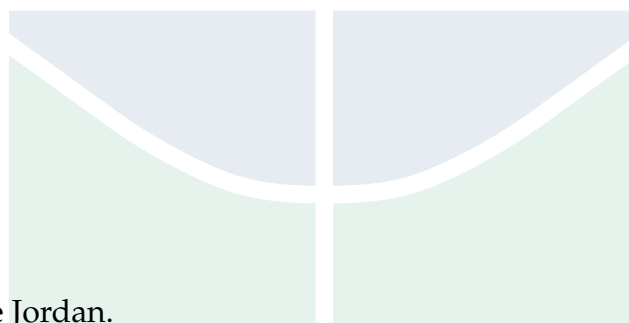
El profesor **Alex Carrazedo Dantas** se especializa en la rama de las matemáticas llamada *Teoria dos grupos*.

En un curso presencial se puede discutir mais, en cambio en un curso remote cada aula un pdf **Moodle MAT** y sesión grabado.

Por dúvidas no moodle, ask to **Carol Lafetá**¹

Ementa

1. Sistemas lineares e matrizes.
2. Espaços vetoriais e transformações lineares.
3. Polinômios e determinantes
4. Decomposições primárias e formas racionais e de Jordan.
5. Produto interno e teorema espectral.
6. Formas multilineares.



UnB

Critério de avaliação

Menção em disciplina

Menção	Equivalência numérica
Superior (SS)	9 – 10
Média Superior (MS)	7 – 8.9
Média (MM)	5 – 6.9
Média Inferior (MI)	3 – 4.9
Inferior (II)	0.1 – 2.9

Serão aplicadas 2 provas, de acordo com o cronograma abaixo, as quais serão atribuídas as notas x e y .

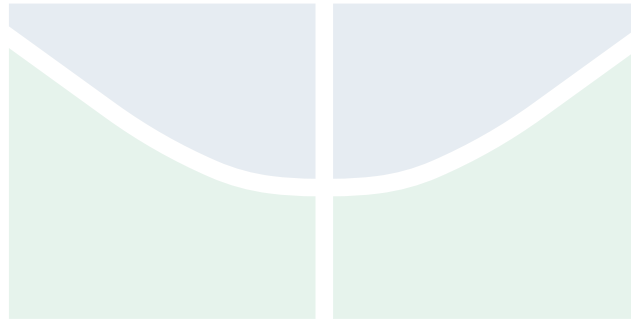
¹lafeta.carol@gmail.com

$$MF = \frac{x + 3y}{4}.$$

O aluno deverá obter média final igual ou superior a 5 pontos e 75% de frequência para ser aprovado.

Tutores

- Sara Raissa Silva Rodrigues.
- Geraldo Herbert Beltrão de Souza.
- Mattheus Pereira da Silva Aguiar.



UnB

Referências bibliográficas

- [1] Flávio Ulhoa Coelho e Mary Lilian Lourenço. *Curso de Álgebra Linear, Um - Edusp*. EDUSP, 2005. URL: <https://www.edusp.com.br/livros/curso-de-algebra-linear>.
- [2] P. R. Halmos. *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1958. ISBN: 978-0-387-90093-3. DOI: [10.1007/978-1-4612-6387-6](https://www.springer.com/gp/book/9780387900933). URL: <https://www.springer.com/gp/book/9780387900933>.
- [3] Kenneth Hoffman e Ray Kunze. *Linear algebra*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc.
- [4] Serge Lang. *Linear Algebra*. 3ª ed. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1987. ISBN: 978-0-387-96412-6. DOI: [10.1007/978-1-4757-1949-9](https://www.springer.com/gp/book/9780387964126). URL: <https://www.springer.com/gp/book/9780387964126>.
- [5] Ph D. Seymour Lipschutz e Ph D. Marc Lars Lipson. *Schaum's Outline of Linear Algebra, Sixth Edition*. McGraw-Hill Education, 2018. ISBN: 978-1-260-01144-9. URL: <https://www.accessengineeringlibrary.com/content/book/9781260011449>.

UnB



UnB

1. Corpos e Sistemas Lineares (06/01/2021)

Definição 1.1 (Corpo). Um *corpo* é um conjunto não vazio \mathbb{F} munido de duas operações: adição mais e multiplicação.

$$\begin{aligned} +: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} & \cdot: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (x, y) &\longmapsto x + y & (x, y) &\longmapsto x \cdot y \end{aligned}$$

e tais que em $(\mathbb{F}, +)$

- A1. (Associatividade na adição) $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{F};$
- A2. (Existência de neutro aditivo) $\exists 0 \in \mathbb{F}$ tal que $x + 0 = 0 + x = x, \forall x \in \mathbb{F};$
- A3. (Existência de elemento oposto o inverso aditivo) Dado $x \in \mathbb{F}$, existe $-x \in \mathbb{F}$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0.$
- A4. (Comutatividade na adição) $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{F};$
- A5. (Associatividade na multiplicação) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x, y, z \in \mathbb{F};$

e $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$

- M1. (Existência do elemento neutro na multiplicação) $\exists 1 \in \mathbb{F}$ tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{F};$
- M2. (Existência inverso multiplicativo) Dado $x \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, existe $x^{-1} \in \mathbb{F}$ tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1;$
- M3. (Comutatividade na multiplicação) $x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in \mathbb{F}.$
- M4. (Distributiva) $x \cdot (y + z) = xy + xz, \forall x, y, z \in \mathbb{F}.$

Proposição 1.1. $x \cdot 0 = 0, \forall x \in \mathbb{F}.$

Demonstração. $x = 0$

Exemplo 1.1.

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ não é um corpo.

O seja el conjunto.

2. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é um corpo, onde $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}.$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$

3. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um corpo, onde $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, \text{ e } i^2 = -1\}$, $+$: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ \cdot : $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 = \\ &= ac + (-1)bd + (ad + bc)i = \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

\mathbb{C} é chamado de conjunto dos números complexos. Tome $a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($0 = 0 + 0i$). Assim

$$\begin{aligned}(a + bi)(a - bi) &= a^2 + b^2 + (ab - ba)i = \\ &= a^2 + b^2 \neq 0\end{aligned}$$

$$(a + bi)(a - bi)(a^2 + b^2)^{-1} = 1$$

Logo

$$(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

4. $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é um corpo, onde $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\} \quad \bar{a} = \{a + pu \mid u \in \mathbb{Z}\} \neq 0 \leq a \leq p - 1$$

Defina:

$$F = \{\bar{a} + \bar{b}i \mid \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \text{ e } i^2 = -1\} \quad +: (\bar{a} + \bar{b}i) + (\bar{c} + \bar{d}i) = (\bar{a} + \bar{c}) + (\bar{b} + \bar{d})i \quad \cdot: (\bar{a} + \bar{b}i)(\bar{c} + \bar{d}i) = (\bar{a} \cdot \bar{c} - \bar{b} \cdot \bar{d}) + (\bar{a} \bar{d} + \bar{b} \bar{c})i$$

$$\underbrace{1 + \dots + 1}_n = 0$$

$$\begin{aligned}&\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 4y = 2 \end{cases} \\ &+ \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -2x - 8y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -5y = -3 \Rightarrow y = \frac{3}{5} \end{cases} \\ &2x + 3 \cdot \frac{3}{5} = 1 \\ &2x + \frac{9}{5} = 1 \Rightarrow 2x = -\frac{4}{5} \Rightarrow x = -\frac{2}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \bar{2}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + y = \bar{0} \end{cases}$$

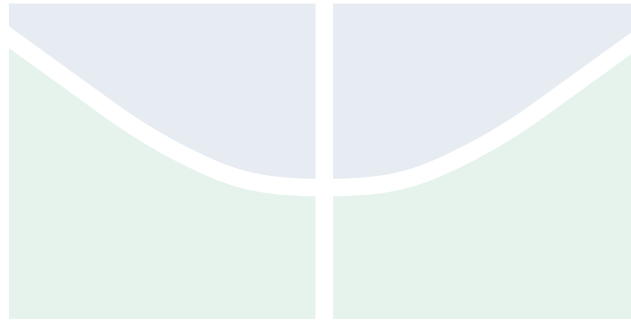
$$\begin{cases} \bar{2}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ r_y = \bar{I} \end{cases}$$

$$\bar{2}x + \bar{2} \cdot I = 1 \Rightarrow 2x = \bar{1} - \bar{2}$$

$$\bar{2}x = -\bar{1}$$

$$\bar{2}x = \bar{2}$$

$$x = \bar{1}$$



UnB

2. Sistemas lineares

Definição 2.1 (Sistema linear). Um corpo é.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + c_m(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) &= c_1y_1 + \cdots + c_my_m \\ (c_1a_{11} + \cdots + c_ma_{m1})x_1 + \cdots + (c_1a_{1n} + \cdots + c_ma_{mn})x_n &= c_1y_1 + \cdots + c_my_m \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + w = 5 \\ x - y + 2z - 2w = 1 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 2x + 3y - z + w = 5 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 5y - 5z + 5w = 3 \\ 3y - 3z + 5w = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ y - z + w = 3/5 \\ y - z + 5/3w = 1/3 \end{cases}$$

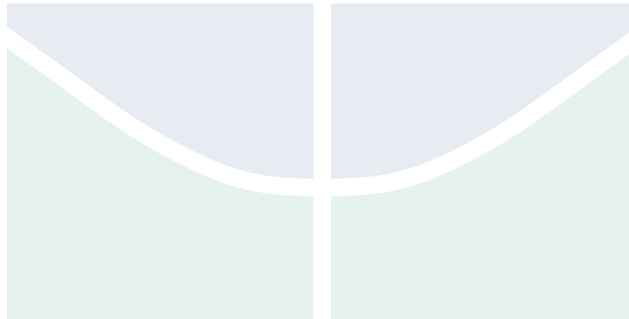
$$\begin{cases} x + z - w = 8/5 \\ y - z + w = 3/5 \\ 2/3w = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} = \frac{5-9}{15} = -\frac{4}{15} \\ w = -\frac{12}{30} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \{(x, y, z, w) \in \mathbb{Q}^4 \mid x = -z + \frac{6}{5}, y = z + 1, z \in \mathbb{Q}, w = -\frac{2}{5}\} &= \\ = \{(-z + \frac{6}{5}, z + 1, z, -\frac{2}{5}) \mid z \in \mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

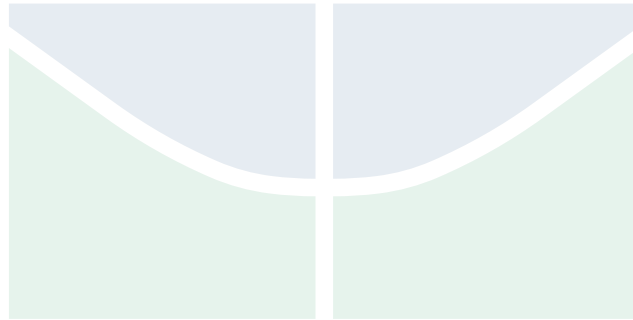
$$f\colon \{1,\ldots,m\}\times \{1,\ldots,n\}\rightarrow F=f\left(i,j\right)=a_{ij}.$$

$$\begin{pmatrix} f\left(1,1\right) & f\left(1,2\right) & \cdots & f\left(1,n\right) \\ f\left(2,1\right) & f\left(2,2\right) & \cdots & f\left(2,n\right) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f\left(x,1\right) & f\left(w,2\right) & \cdots & f\left(w,n\right) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{wn} \end{pmatrix}$$



UnB

3. Matrices



UnB



Parte II.

Prática

UnB

Índice

corpo, 7