$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_j \times s_j}.$$

Álgebra Linear II

XLIX Escola de Verão en Matemática da UnB

Aulas do professor Alex Carrazedo Dantas*

Última modificação: 10 de Janeiro de 2021 às $18:26:54$.

https://carlosal1015.github.io/Algebra-linear-II/main.pdf

*alex@mat.unb.br

Sumário

Introdução ao curso (04/01/2021)

O professor Alex Carrazedo Dantas é especialista no *Teoria dos grupos*. Em um curso presencial você pode discutir mais, enquanto em um curso remoto, cada aula tem um pdf Moodle MAT e uma gravação da sessão. Se você tiver dúvidas sobre o moodle, peça ajuda a Carol Lafetá[1].

Ementa

1. **Sistemas lineares e matrizes.**
2. **Espaços vetoriais e transformações lineares.**
3. **Polinômios e determinantes**
4. **Decomposicões primárias e formas racionais e de Jordan.**
5. **Produto interno e teorema espectral.**
6. **Formas multilineares.**

Critério de avaliação

Menção em disciplina	**Equivalência numérica**
Superior (SS)	$9 - 10$
Média Superior (MS)	$7 - 8.9$
Média (MM)	$5 - 6.9$

Serão aplicadas 2 provas, de acordo com o cronograma abaixo, as quais serão atribuídas as notas x e y.

$$\text{MF} = \frac{x + 3y}{4}.$$

O aluno deverá obter média final igual ou superior a 5 pontos e 75% de frequência para ser aprovado.

Tutores

- Sara Raissa Silva Rodrigues.
- Geraldo Herbert Beltrão de Souza.
- Mattheus Pereira da Silva Aguiar.

[1] lafeta.carol@gmail.com

Parte I

Teoria

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_j \times s_j}.$$

1 Corpos e Sistemas Lineares $(06/01/2021)$

Definição 1.1 (Corpo)**.** Um *corpo* é um conjunto não vazio $\mathbb{F}$ munido de duas operações: adição mais e multiplicação.

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (x,y) &\longmapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (x,y) &\longmapsto x\cdot y \end{aligned}$$

e tais que en $(\mathbb{F},+)$

(A1) (Asociatividade na adição) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{F}$;

(A2) (Existênza de neutro aditivo) $\exists 0\in\mathbb{F}$ tal que $x+0=0+x=x$, $\forall x\in\mathbb{F}$;

(A3) (Existênza de elemento oposto o inverso aditivo) Dado $x\in\mathbb{F}$, existe $-x\in\mathbb{F}$ tal que $x+(-x)=(-x)+x=0$;

(A4) (Conmutatividade na adição) $x+y=y+x$, $\forall x,y\in\mathbb{F}$;

e $(\mathbb{F}\setminus\{0\},\cdot)$

(M1) (Associatividade na multiplicação) $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{F}$;

(M2) (Existênza do elemento neutro na multiplicação) $\exists 1\in\mathbb{F}$ tal que $x\cdot 1 = 1\cdot x = x$, $\forall x\in\mathbb{F}$;

(M3) (Existênza inverso multiplicativo) Dado $x\in\mathbb{F}\setminus\{0\}$, existe $x^{-1}\in\mathbb{F}$ tal que $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=1$;

(M4) (Conmutatividade na multiplicação) $x\cdot y = y\cdot x$, $\forall x,y\in\mathbb{F}$;

(D) (Distributiva) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$, $\forall x,y,z\in\mathbb{F}$.

Proposição 1.1. $x\cdot 0 = 0$, $\forall x\in\mathbb{F}$.

Demonstração. $x\cdot 0 =\stackrel{A2}{=} x\cdot(0+0) \stackrel{D}{=} x\cdot 0 + x\cdot 0$. Assim

$$\begin{aligned} x\cdot 0+\underbrace{x\cdot 0+(-x\cdot 0)}_{=0} &= \underbrace{x\cdot 0+(-x\cdot 0)}_{=0} \\ x\cdot 0+0 &\stackrel{A3}{=} 0 \\ x\cdot 0 &\stackrel{A2}{=} 0. \end{aligned}$$

∎

Exemplo 1.1.

a) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ não é um corpo. De fato não existe o inverso multiplicativo de 2 em $\mathbb{Z}$, ou seja, a equação $2\cdot x=1$ não se resolue em $\mathbb{Z}$;

b) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ é um corpo, onde $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0\right\}$ e $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ e $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

c) $(\mathbb{R},+,\cdot)$ é um corpo (conjunto dos números reais);

d) $(\mathbb{C},+,\cdot)$ é um corpo, onde $\mathbb{C}=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{R},\ \text{e}\ i^2=1\}$,

$$\begin{aligned}+\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}&\longrightarrow\mathbb{C}\\ ((a+bi),(c+di))&\longmapsto(a+c)+(b+d)\,i\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\cdot\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}&\longrightarrow\mathbb{C}\\ ((a+bi),(c+di))&\longmapsto(ac-bd)+(ad+bc)\,i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di)&=ac+adi+bci+bdi^2=\\&=ac+(-1)\,bd+(ad+bc)\,i=\\&=(ac-bd)+(ad+bc)\,i.\end{aligned}$$

$\mathbb{C}$ é chamado del conjunto nos números complexos. Tome $a+bi\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $(0=0+0i)$.
Assim

$$\begin{aligned}(a+bi)(a-bi)&=a^2+b^2+(ab-ba)\,i=\\&=a^2+b^2\neq 0\\(a+bi)\underbrace{(a-bi)\left(a^2+b^2\right)^{-1}}&=1.\end{aligned}$$

Logo

$$(a+bi)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i.$$

e) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\cdot)$ é um corpo, onde p é primo e $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}=\{\overline{a}\mid a\in\mathbb{Z}\},\overline{a}=\{a+pn\mid n\in\mathbb{Z}\}$ e $0\leq a\leq p-1$.

$$\begin{aligned}+\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}&\longrightarrow\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\\(\overline{a},\overline{b})&\longmapsto\overline{a+b}\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\cdot\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}&\longrightarrow\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\\(\overline{a},\overline{b})&\longmapsto\overline{a\cdot b}\end{aligned}$$

Tome $p=3$. Assim $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}=\left\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\right\}$.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$\overline{2}+\overline{2}=\overline{2+2}=\overline{4}=\overline{3\cdot 1+1}=\overline{1}$.

Note que a equação $x^2+\overline{1}=\overline{0}$ não tem solução em $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\cdot)$.
Defina: $F=\left\{\overline{a}+\overline{b}i \mid \overline{a},\overline{b}\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \text{ e } i^2=\overline{2}\right\}$.

$$
\begin{aligned}
+\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\
\left(\overline{a}+\overline{b}i,\overline{c}+\overline{d}i\right) &\longmapsto \left(\overline{a}+\overline{c}\right)+\left(\overline{b}+\overline{d}\right)i
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\cdot\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\
\left(\overline{a}+\overline{b}i,\overline{c}+\overline{d}i\right) &\longmapsto \left(\overline{a}\cdot\overline{c}+2\overline{b}\cdot\overline{d}\right)+\left(\overline{a}\cdot\overline{d}+\overline{b}\cdot\overline{c}\right)i
\end{aligned}
$$

Mostre que $(\mathbb{F},+,\cdot)$ é um corpo com 9 elementos.

Definição 1.2. A característica de um corpo $\mathbb{F}$ é o menor inteiro positivo n (se existir) tal que $\underbrace{1+\cdots+1}_{n}=0$.

Se tal n não existe, diremos que F tem característica 0.

Proposição 1.2. Seja $\mathbb{F}$ um corpo. Sea característica de F é um inteiro positivo n, então n é primo.

Demonstração. Exercízio. ∎

Exemplo 1.2.

a) Resolva em $\mathbb{Q}$ o sistema

$$
\begin{cases}
2x+3y &= 1,\\
x+4y &= 2.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\overline{2}x+\overline{2}y= & \overline{1}\\
\overline{2}x+y= & \overline{0}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\overline{2}x+\overline{2}y &= \overline{1}\\
r_y &= \overline{I}
\end{cases}
$$

b) Resolva em $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ o sistema

$$\begin{aligned}
\overline{2}x + \overline{2} \cdot I = 1 \Rightarrow 2x &= \overline{1} - \overline{2} \\
\overline{2}x &= -\overline{1} \\
\overline{2}x &= \overline{2} \\
x &= \overline{1}
\end{aligned}$$

Daí $\left(\overline{1}, \overline{1}\right)$ é solução do sistema.

2 Sistemas lineares (07/01/2021)

Definição 2.1 (Sistema linear)**.** Um corpo é.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{pmatrix}$$

$$c_1\left(a_n x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\right) + \cdots + c_m\left(a_m x_2 + \cdots + a_{mn}x_n\right) = c_1 y_2 + \cdots + c_m y_m$$
$$\left(c_2 a_{11} + \cdots + c_m a_{m1}\right) x_1 + \cdots + \left(c_1 a_{1n} + \cdots + c_m a_{wn}\right) x_n = c_1 y_2 + \cdots + c_m y_m$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + w = 5 \\ x - y + 2z - 2w = 1 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 2x + 3y - z + w = 5 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 5y - 5z + 5w = 3 \\ 3y - 3z + 5w = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ y - z + w = 3/5 \\ y - z + 5/3w = 1/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z - w = 8/5 \\ y - z + \omega = 3/5 \\ 2/3\omega = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{5-9}{15} = -\dfrac{4}{15} \\ \omega = -\dfrac{12}{30} = -\dfrac{4}{10} = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$\left\{(x, y, z, \omega) \in \mathbb{Q}^4 \mid x = -z + \tfrac{6}{5}, y = z + 1, z \in \mathbb{Q}, \omega = -\tfrac{2}{5}\right\} =$$
$$= \left\{\left(-z + \tfrac{6}{5}, z + 1, z, -\tfrac{2}{5}\right) \mid z \in \mathbb{Q}\right\}$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

$$f\colon\ \{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}\to F = f\left(i,j\right)=a_{ij}.$$

$$\begin{pmatrix} f\left(1,1\right) & f\left(1,2\right) & \cdots & f\left(1,n\right) \\ f\left(2,1\right) & f\left(2,2\right) & \cdots & f\left(2,n\right) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f\left(x,1\right) & f\left(w,2\right) & \cdots & f\left(w,n\right) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{n} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{wn} \end{pmatrix}$$

3 Matrizes (08/01/2021)

Podemos denotar uma matriz A sobre um corpo $\mathbb{F}$ de ordem $m \times n$ por $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jl})_{n\times p}$ duas matrizes sobre um corpo $\mathbb{F}$. Definimos o producto de A por B como a matriz $C = (c_{il})_{m\times p}$ dada por

$$c_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jl} = a_{i1}b_{il} + \cdots + a_{in}b_{nl}$$

Ilustração

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.1. Temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 14 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3}.$$

Proposição 3.1. Sejam matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (a_{jl})_{n\times p}$ e $C = (a_{lk})_{p\times q}$ matrizes sobre um corpo $\mathbb{F}$. Então $(AB)\,C = A\,(BC)$.

Demonstração. Veja que $(AB)\,C = (\alpha_{ik})_{m\times q}$, $AB = (d_{il})_{m\times p}$ onde

$$d_{il} = \sum_{l=1}^{n} a_{ij}b_{jl}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_{ik} &= \sum_{l=1}^{p} d_{il}c_{lk} = \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jl} \right) c_{lk} = \\ &= \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jl}c_{lk} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{l=1}^{p} b_{jl}c_{lk} \right) = \beta_{ik} \end{aligned}$$

com $A\,(BC) = (\beta_{ik})_{m\times q}$. ■

Chamaremos a matriz quadrada $I_m = (\delta_{ij})_{m\times m}$ definida por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, se } i = j, \\ 0 & \text{, se } i \neq j, \end{cases}$$

de matriz identidade de ordem $m \times m$.

Note que se $A = (a_{jl})_{m\times n}$, então $I_m A = A$, e se $B = (b_{li})_{n\times m}$, então $BI_m = B$.

$I_m A = (c_{il})_{m\times m}$ é tal que $c_{il} = \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij} a_{jl} = a_{il}$ con $1 \leq i \leq m$, e $I_m A = A$.

Exemplo 3.2. Se $m = 3$, então

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dizemos que uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{m\times m}$ tem inversa se existe uma matriz $B = (b_{ij})_{m\times m}$ tal que $AB = BA = I_m$. Denotaremos a matriz B por A^{-1}.

Definição 3.1. Seja $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Uma matriz quadrada de ordem $m \times m$ E é dita elementar se E é de uma das formas

1. $E_1 = (e_{ij})_{m\times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{se } i \neq k \\ \delta_{ij}, & \text{se } i = k \end{cases}$$

$$\boxed{m = 3,\, k = 2 \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

   con k um inteiro fixo entre 1 e m;

2. $E_2 = (e_{ij})_{m\times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{se } i \neq l \text{ e } i \neq k \\ \delta_{lj}, & \text{se } i = k \\ \delta_{kj}, & \text{se } i = l \end{cases}$$

$$\boxed{m = 3,\, k = 2,\, l = 3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

   con $k < l$ inteiros fixos entre 1 e m;

3. $E_3 = (e_{ij})_{m\times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq k \\ \delta_{kj} + c \cdot \delta_{lj}, & i = k \end{cases}$$

$$\boxed{m = 3,\, k = 2,\, l = 3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Exemplo 3.3. Calcule

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -14 & 4 & -1 & 51 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times m}$ o efeito de multiplicar uma matriz elementar E por A pode ser colocado como:

1. E_1A: multiplica uma linha k de A por um escalar c;
2. E_2A: troca duas linhas l e k de posições $(k < l)$;
3. E_3A: soma uma linha k com outra linha l multiplicada por um escalar $c \in \mathbb{F}$.

4 Aula de reposição (09/01/2021)

Definição 4.1 (Matriz reducida por linhas)**.** Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ sobre $\mathbb{F}$ é deja reduzida por linhas se

1. O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é igual 1;
2. cada columna que possui o primeiro elemento não nulo de
3. uma linha não possui todos os outros elementos iguais a 0;

Sea além disso, esa matriz A satisfaz

1. Todas linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não nulas;
2. Se $1,\dots,r$ $(r \le m)$ são as linhas não nulas de A com os primeiros elementos não nunos ocurrendo nas colunas k_1, k_2, k_r, respectivamente, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$, dizemos que A está na forma escada reduzida.

Exemplo 4.1.

1. As seguintes matrizes estão na forma reduzida:

   a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},.$

   b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},.$

   c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},.$

   d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},.$

2. As seguientes matrizes estão na forma escada reducida

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Observação 4.1. .

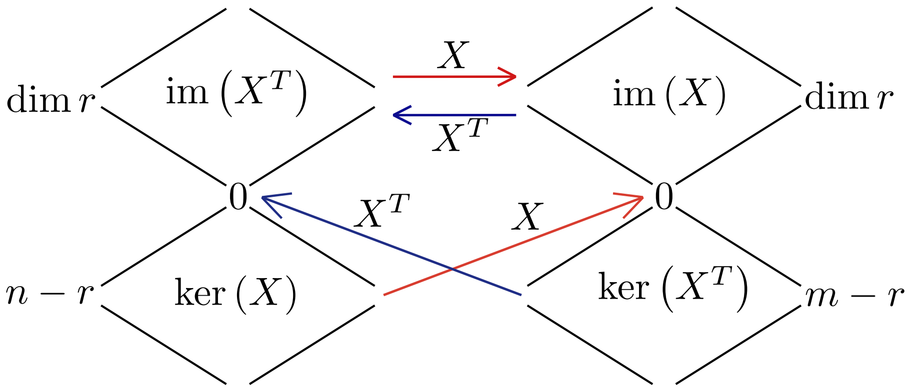
Definição 4.2. .

5 Espaços vetoriais (09/01/2021)

Parte II

Prática

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, bend left, "X"] & \mathbb{R}^m \arrow[l, bend left, "X^T"] \end{tikzcd}$$



6 Exercícios de Fixação (08/01/2021)

1. Seja $\mathbb{F}$ um corpo. Dizemos que um subconjunto $\mathbb{K}$ de $\mathbb{F}$ é um subcorpo de $\mathbb{F}$ se $\mathbb{K}$ munido das operações de adição e multiplicação de $\mathbb{F}$ é um corpo. Mostre que os seguintes subconjuntos são subcorpos de $\mathbb{C}$.

   (a) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right) = \left\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$;
   (b) $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\}$;
   (c) $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{2}\right) = \left\{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\right\}$.

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

2. Mostre que:

   (a) Todo subcorpo de $\mathbb{C}$ tem $\mathbb{Q}$ como subcorpo;
   (b) Todo corpo de característica 0 tem uma cópia de $\mathbb{Q}$;
   (c) Se $\mathbb{K}$ contém propriamente $\mathbb{R}$ e é um subcorpo de $\mathbb{C}$, então $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

3. Considere o corpo finito com 5 elementos $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\right\}$.

   (a) Mostre que

$$\mathbb{F} = \left\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \text{ e } i^2 = \overline{3}\right\}$$

   munido das operações

$$\begin{aligned} \overline{+}\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ ((a+bi),(c+di)) &\longmapsto (a+c)+(b+d)i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \overline{\cdot}\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ ((a+bi),(c+di)) &\longmapsto \left(ac+\overline{3}bd\right)+(ad+bc)i \end{aligned}$$

é um corpo com 25 elementos;

(b) Mostre que $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ é um subcorpo de $\mathbb{F}$. Qual é a característica de F?

Solução

(a) .

(b) .

4. Determine o conjunto solução de cada sistema linear dado.

(a) $\begin{cases} x-2y+z+w=1 \\ 2x+y-z=3 \\ 2x+y-5z+w=4 \end{cases}$ em $\mathbb{R}$,

(b) $\begin{cases} x-\sqrt{3}y+z+w=1+\sqrt{3} \\ \left(2+\sqrt{3}\right)x+y-z=3 \\ 2x+y-\left(1-\sqrt{3}\right)z+w=4 \end{cases}$ em $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$,

(c) $\begin{cases} x-2iy+2z-w=0 \\ (2+i)x+z+w=0 \\ 2ix+y-5z+(1+i)w=0 \end{cases}$ em $\mathbb{C}$,

(d) $\begin{cases} x-\overline{2}y+\overline{2}z-w=\overline{0} \\ \overline{2}x+z+w=\overline{0} \\ \overline{2}x+y-\overline{3}z+w=\overline{0} \end{cases}$ em $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$,

(e) $\begin{cases} x-\overline{2}iy+\overline{2}z-w=\overline{0} \\ \left(\overline{2}+i\right)x+z+w=\overline{0} \\ \overline{2}ix+y-\overline{3}z+\left(\overline{1}+i\right)w=\overline{0} \end{cases}$ em $\mathbb{F}$ de (a) da Questão 3.

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

(d) .

(e) .

5. Mostre que se dois sistemas lineares 2×2 possuem o mesmo conjunto solução, então eles são equivalentes. Determine, se existir, dois sistemas lineares 2×3 com mesmo conjunto solução mas não equivalentes.

Solução

6. Considere o sistema linear sobre $\mathbb{Q}$ $\begin{cases} x - 2y + z + 2w = 1 \\ x + y - z + w = 2 \\ x + 7y - 5z - w = 3 \end{cases}$

   Mostre que esse sistema não tem solução.

Solução

7. Determine todos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

   tem solução.

Solução

8. Encontre duas matrizes A e B de ordens iguais a 3×3 tais que AB é uma matriz nula mas BA não é.

Solução

9. Mostre que toda matriz elementar é inversível e calcule a inversa de cada tipo.

Solução

10. Determine a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Solução

11. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{4} \end{bmatrix}$$

com entradas no corpo com cinco elementos $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$.

Calcule sua inversa.

Solução

12. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre uma matriz na forma e uma matriz invertível P tal que $R = PA$.

Solução

Parte III

Tutorial

A LinearAlgebra from Julia

Não há necessidade de instalar nenhum programa, você só precisa de uma conta do Google e seguir as instruções do repositório[1].

```
f(x) = x.^2 + π
const ⊗ = kron
const Σ = sum # Although `sum` may be just as good in the code.
# Calculate Σ_{j=1}^5 j^2
Σ([j^2 for j ∈ 1:5])
```

Listing A.1: Programa `main.jl`.

.

[1] julia_on_collab.ipynb

Índice