Aula de Álgebra Linear II - 21/01/2021

1 Determinantes

Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$ $(n > 1)$ uma matriz quadrada de ordem $n \times n$ com entradas sobre um corpo $\mathbb{F}$. Para cada par (i,j), $1 \leq i,j \leq n$, defina a matriz A_{ij} como a matriz de ordem $(n-1)\times(n-1)$ obtida ao retirar a linha i e a coluna j de A.

Exemplo 1. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, então

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definição 2. Definimos o determinante de uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ sobre um corpo $\mathbb{F}$, com $n \geq 1$, de maneira indutiva:

i) Se $n = 1$, então $A = (a_{11})$ e $\det(A) = a_{11}$;

ii) Se $n > 1$, então

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) =$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(A_{1n}).$$

EXEMPLO 3. a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, ENTÃO

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) =$$

$$= (-1)^2 a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^3 a_{12} \det(A_{12}) =$$

$$= 2.4 - 3.(-1) = 8 + 3 = 11;$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, ENTÃO

$$\det(B) = (-1)^{1+1}.1.\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}.2.\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3}.1.\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+4}.(-1)\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \ldots$$

PROPOSIÇÃO 4. i) SE $A = (a_{ij})_{n \times n}$, COM $n > 1$, ENTÃO

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} . \det(A_{i_0 j}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{i j_0} . \det(A_{i j_0}),$$

ONDE i_0 E j_0 SÃO INTEIROS ENTRE 1 E n.

ii) Se $A = (a_{ij})_{n \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times n}$, então

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B).$$

Notação: $\det(A) = |A|$,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

• Se A é uma matriz triangular superior (inferior), então o determinante de A é o produto dos elementos da diagonal principal.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) = \cdots =$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. //$$

• Se $B = (b_{ij})_{n \times n}$ é uma matriz obtida de $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ao multiplicar uma linha de A por um escalar $c \in F$, então

$$\det(B) = c . \det(A).$$

NOTE QUE $B = E.A$, ONDE E É OBTIDA DE I_n AO MULTIPLICAR A LINHA RESPECTIVA DE I_n POR c.

$$\det(B) = \det(E.A) = \det(E).\det(A) =$$
$$= c.\det(A);$$

$\Rightarrow$ QUE SE UMA MATRIZ A TEM UMA LINHA NULA, ENTÃO $\det(A) = 0$. (COLUNA)

$$\Rightarrow \det(A) = \det(A^t)$$

- SE $B = (b_{ij})_{n\times n}$ É OBTIDA DE $A = (a_{ij})_{n\times n}$ AO SOMAR A LINHA i COM A LINHA k MULTIPLICADA POR UM ESCALAR c, ENTÃO $(i \neq k)$

$$\det(B) = \det(A).$$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, ENTÃO

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que $B = EA$, onde E é obtida de I_n ao somar a linha i com a linha k multiplicada por um escalar $c \in F$, assim

$$\det(B) = \det(E).\det(A) =$$
$$= 1.\det(A) = \det(A).$$

Ex: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, então

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -3 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}.1.\det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -9 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \ldots$$

- Se $B = (b_{ij})_{n\times n}$ é obtida de $A = (a_{ij})_{n\times n}$ a trocar a linha i com a linha k, $(i \neq k)$ então

$$\det(B) = -1.\det(A).$$

Definição 5. (Adjunta) Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ sobre um corpo F, defina a matriz $\text{adj}(A)$ pela transposta da matriz $C = (c_{ij})_{n\times n}$, onde

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij}),$$

OU SEJA,

$$\operatorname{adj}(A) = C^t.$$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, ENTÃO

$$C = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

LOGO

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

E

$$A \cdot \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $\det(A) = 3$, segue que

$$A \cdot \operatorname{adj}(A) = [\det(A)]\, I_n$$

Proposição 6. Se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ sobre um corpo F, então

$$\boxed{A \cdot \operatorname{adj}(A) = [\det(A)] \cdot I_n.}$$

Proposição 7. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz quadrada de ordem $n \times n$ sobre um corpo F. Então A tem inversa se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Dem. ($\Rightarrow$) Se A tem inversa, então

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

e

$$\det(A) \neq 0. \quad \left(\det(A) = 1/\det(A^{-1})\right)$$

($\Leftarrow$) Se $\det(A) \neq 0$, então

$$A \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)\right)}_{A^{-1}} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A \cdot \operatorname{adj}(A) \overset{P.6}{=}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\det(A)}} \cdot \cancel{\det(A)} \cdot I_n =$$

$$= I_n \qquad \blacksquare$$