$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_j \times s_j}.$$

Álgebra Linear II

XLIX Escola de Verão en Matemática da UnB

Aulas do professor Alex Carrazedo Dantas*

Última modificação: 19 de Janeiro de 2021 às $11:50:54$**.**

https://carlosal1015.github.io/Algebra-linear-II/main.pdf

*alex@mat.unb.br

Sumário

Introdução ao curso (04/01/2021)

O professor Alex Carrazedo Dantas é especialista no *Teoria dos grupos*. Em um curso presencial você pode discutir mais, enquanto em um curso remoto, cada aula tem um pdf Moodle MAT e uma gravação da sessão. Se você tiver dúvidas sobre o moodle, peça ajuda a Carol Lafetá[1].

Ementa

1. **Sistemas lineares e matrizes.**
2. **Espaços vetoriais e transformações lineares.**
3. **Polinômios e determinantes**
4. **Decomposicões primárias e formas racionais e de Jordan.**
5. **Produto interno e teorema espectral.**
6. **Formas multilineares.**

Critério de avaliação

Menção em disciplina	**Equivalência numérica**
Superior (SS)	$9-10$
Média Superior (MS)	$7-8.9$
Média (MM)	$5-6.9$

Serão aplicadas 2 provas, de acordo com o cronograma abaixo, as quais serão atribuídas as notas x e y.

$$\text{MF} = \frac{x+3y}{4}.$$

O aluno deverá obter média final igual ou superior a 5 pontos e 75% de frequência para ser aprovado.

Tutores

- Sara Raissa Silva Rodrigues.
- Geraldo Herbert Beltrão de Souza.
- Mattheus Pereira da Silva Aguiar.

[1] lafeta.carol@gmail.com

Referências bibliográficas

[1] Flávio Ulhoa Coelho e Mary Lilian Lourenço. *Curso de Álgebra Linear, Um - Edusp*. EDUSP, 2005. URL: https://www.edusp.com.br/livros/curso-de-algebra-linear.

[2] P. R. Halmos. *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1958. ISBN: 978-0-387-90093-3. DOI: 10.1007/978-1-4612-6387-6. URL: https://www.springer.com/gp/book/9780387900933.

[3] Kenneth Hoffman e Ray Kunze. *Linear algebra*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc.

[4] Serge Lang. *Linear Algebra*. 3ª ed. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1987. ISBN: 978-0-387-96412-6. DOI: 10.1007/978-1-4757-1949-9. URL: https://www.springer.com/gp/book/9780387964126.

[5] Ph D. Seymour Lipschutz e Ph D. Marc Lars Lipson. *Schaum's Outline of Linear Algebra, Sixth Edition*. McGraw-Hill Education, 2018. ISBN: 978-1-260-01144-9. URL: https://www.accessengineeringlibrary.com/content/book/9781260011449.

Parte I.

Teoria

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_j \times s_j}.$$

1. Corpos e Sistemas Lineares (06/01/2021)

Definição 1.1 (Corpo)**.** Um *corpo* é um conjunto não vazio $\mathbb{F}$ munido de duas operações: adição mais e multiplicação.

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (x,y) &\longmapsto x+y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (x,y) &\longmapsto x\cdot y \end{aligned}$$

e tais que en $(\mathbb{F},+)$

(A1) (Asociatividade na adição) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{F}$;

(A2) (Existênza de neutro aditivo) $\exists 0\in\mathbb{F}$ tal que $x+0=0+x=x$, $\forall x\in\mathbb{F}$;

(A3) (Existênza de elemento oposto o inverso aditivo) Dado $x\in\mathbb{F}$, existe $-x\in\mathbb{F}$ tal que $x+(-x)=(-x)+x=0$;

(A4) (Conmutatividade na adição) $x+y=y+x$, $\forall x,y\in\mathbb{F}$;

e $(\mathbb{F}\setminus\{0\},\cdot)$

(M1) (Associatividade na multiplicação) $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{F}$;

(M2) (Existênza do elemento neutro na multiplicação) $\exists 1\in\mathbb{F}$ tal que $x\cdot 1 = 1\cdot x = x$, $\forall x\in\mathbb{F}$;

(M3) (Existênza inverso multiplicativo) Dado $x\in\mathbb{F}\setminus\{0\}$, existe $x^{-1}\in\mathbb{F}$ tal que $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x = 1$;

(M4) (Conmutatividade na multiplicação) $x\cdot y = y\cdot x$, $\forall x,y\in\mathbb{F}$;

(D) (Distributiva) $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$, $\forall x,y,z\in\mathbb{F}$.

Proposição 1.2. $x\cdot 0 = 0$, $\forall x\in\mathbb{F}$.

Demonstração. $x\cdot 0 = \overset{A2}{=} x\cdot(0+0) \overset{D}{=} x\cdot 0 + x\cdot 0$. Assim

$$\begin{aligned} x\cdot 0 + \underbrace{x\cdot 0 + (-x\cdot 0)}_{=0} &= \underbrace{x\cdot 0 + (-x\cdot 0)}_{=0} \\ x\cdot 0 + 0 &\overset{A3}{=} 0 \\ x\cdot 0 &\overset{A2}{=} 0. \end{aligned}$$

∎

Exemplo 1.3.

a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ não é um corpo. De fato não existe o inverso multiplicativo de 2 em $\mathbb{Z}$, ou seja, a equação $2 \cdot x = 1$ não se resolue em $\mathbb{Z}$;

b) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é um corpo, onde $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$ e $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ e $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um corpo (conjunto dos números reais);

d) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um corpo, onde $\mathbb{C} = \left\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, \text{ e } i^2 = 1\right\}$,

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ((a+bi), (c+di)) &\longmapsto (a+c) + (b+d)i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ((a+bi), (c+di)) &\longmapsto (ac-bd) + (ad+bc)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+bi)(c+di) &= ac + adi + bci + bdi^2 = \\ &= ac + (-1)bd + (ad+bc)i = \\ &= (ac-bd) + (ad+bc)i. \end{aligned}$$

$\mathbb{C}$ é chamado del conjunto nos números complexos. Tome $a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $(0 = 0 + 0i)$.

Assim

$$\begin{aligned} (a+bi)(a-bi) &= a^2 + b^2 + (ab - ba)i = \\ &= a^2 + b^2 \neq 0 \end{aligned}$$

$$(a+bi)\underbrace{(a-bi)\left(a^2+b^2\right)^{-1}} = 1.$$

Logo $(a+bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$.

e) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é um corpo, onde p é primo e $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\overline{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}, \overline{a} = \{a + pn \mid n \in \mathbb{Z}\}$ e $0 \leq a \leq p - 1$.

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ \left(\overline{a}, \overline{b}\right) &\longmapsto \overline{a+b} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ \left(\overline{a}, \overline{b}\right) &\longmapsto \overline{a \cdot b} \end{aligned}$$

Tome $p = 3$. Assim $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\right\}$.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$$\overline{2}+\overline{2}=\overline{2+2}=\overline{4}=\overline{3\cdot 1+1}=\overline{1}.$$

Note que a equação $x^2+\overline{1}=\overline{0}$ não tem solução em $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\cdot)$.
Defina: $F=\left\{\overline{a}+\overline{b}i \mid \overline{a},\overline{b}\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \text{ e } i^2=\overline{2}\right\}$.

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ \left(\overline{a}+\overline{b}i,\overline{c}+\overline{d}i\right) &\longmapsto (\overline{a}+\overline{c})+\left(\overline{b}+\overline{d}\right)i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ \left(\overline{a}+\overline{b}i,\overline{c}+\overline{d}i\right) &\longmapsto \left(\overline{a}\cdot\overline{c}+2\overline{b}\cdot\overline{d}\right)+\left(\overline{a}\cdot\overline{d}+\overline{b}\cdot\overline{c}\right)i \end{aligned}$$

Mostre que $(\mathbb{F},+,\cdot)$ é um corpo com 9 elementos.

Definição 1.4. A característica de um corpo $\mathbb{F}$ é o menor inteiro positivo n (se existir) tal que $\underbrace{1+\cdots+1}_{n}=0$.

Se tal n não existe, diremos que F tem característica 0.

Proposição 1.5. Seja $\mathbb{F}$ um corpo. Sea característica de F é um inteiro positivo n, então n é primo.

Demonstração. Exercízio. ∎

Exemplo 1.6.

a) Resolva em $\mathbb{Q}$ o sistema $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x+4y=2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x+4y=2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x+3y=1 \\ -2x-8y=-4 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x+3y=1 \\ -5y=-3 \end{cases} \implies y=\frac{3}{5}$$

$$2x+3\cdot\frac{3}{5}=1$$
$$2x+\frac{9}{5}=1 \implies 2x=-\frac{4}{5} \implies x=-\frac{2}{5}.$$

Daí $\left(-\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$ é solução para o sistema.

b) Resolva em $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ o sistema $\begin{cases} \overline{2}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ \overline{2}x + \quad y = \overline{0} \end{cases}$.

$$\begin{cases} \overline{2}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ \qquad\quad y = \overline{1} \end{cases} \implies \overline{2}x + \overline{2} \cdot \overline{1} = \overline{1} \implies \begin{aligned} \overline{2}x &= \overline{1} - \overline{2} \\ \overline{2}x &= -\overline{1} \\ \overline{2}x &= \overline{2} \\ x &= \overline{1}. \end{aligned}$$

Daí $(\overline{1}, \overline{1})$ é solução do sistema.

2. Sistemas lineares (07/01/2021)

Definição 2.1 (Sistema linear)**.** Um corpo é.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ \vdots & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_1 & a_2 & & a_n \end{pmatrix}$$

$$c_1(a_n x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + c_m(a_m x_2 + \cdots + a_{mn}x_n) = c_1 y_2 + \cdots + c_m y_m$$
$$(c_2 a_{11} + \cdots + c_m a_{m1})\, x_1 + \cdots + (c_1 a_{1n} + \cdots + c_m a_{wn})\, x_n = c_1 y_2 + \cdots + c_m y_m$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + w = 5 \\ x - y + 2z - 2w = 1 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 2x + 3y - z + w = 5 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 5y - 5z + 5w = 3 \\ 3y - 3z + 5w = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ y - z + w = 3/5 \\ y - z + 5/3w = 1/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z - w = 8/5 \\ y - z + \omega = 3/5 \\ 2/3\omega = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{5-9}{15} = -\dfrac{4}{15} \\ \omega = -\dfrac{12}{30} = -\dfrac{4}{10} = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$\left\{(x, y, z, \omega) \in \mathbb{Q}^4 \mid x = -z + \tfrac{6}{5}, y = z + 1, z \in \mathbb{Q}, \omega = -\tfrac{2}{5}\right\} =$$
$$= \left\{\left(-z + \tfrac{6}{5}, z + 1, z, -\tfrac{2}{5}\right) \mid z \in \mathbb{Q}\right\}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$f : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to F = f\,(i, j) = a_{ij}.$$

$$\begin{pmatrix} f\,(1,1) & f\,(1,2) & \cdots & f\,(1,n) \\ f\,(2,1) & f\,(2,2) & \cdots & f\,(2,n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f\,(x,1) & f\,(w,2) & \cdots & f\,(w,n) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{wn} \end{pmatrix}$$

3. Matrizes (08/01/2021)

Podemos denotar uma matriz A sobre um corpo $\mathbb{F}$ de ordem $m \times n$ por $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Sejam $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jl})_{n \times p}$ duas matrizes sobre um corpo $\mathbb{F}$. Definimos o producto de A por B como a matriz $C = (c_{il})_{m \times p}$ dada por

$$c_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} = a_{i1} b_{1l} + \cdots + a_{in} b_{nl}$$

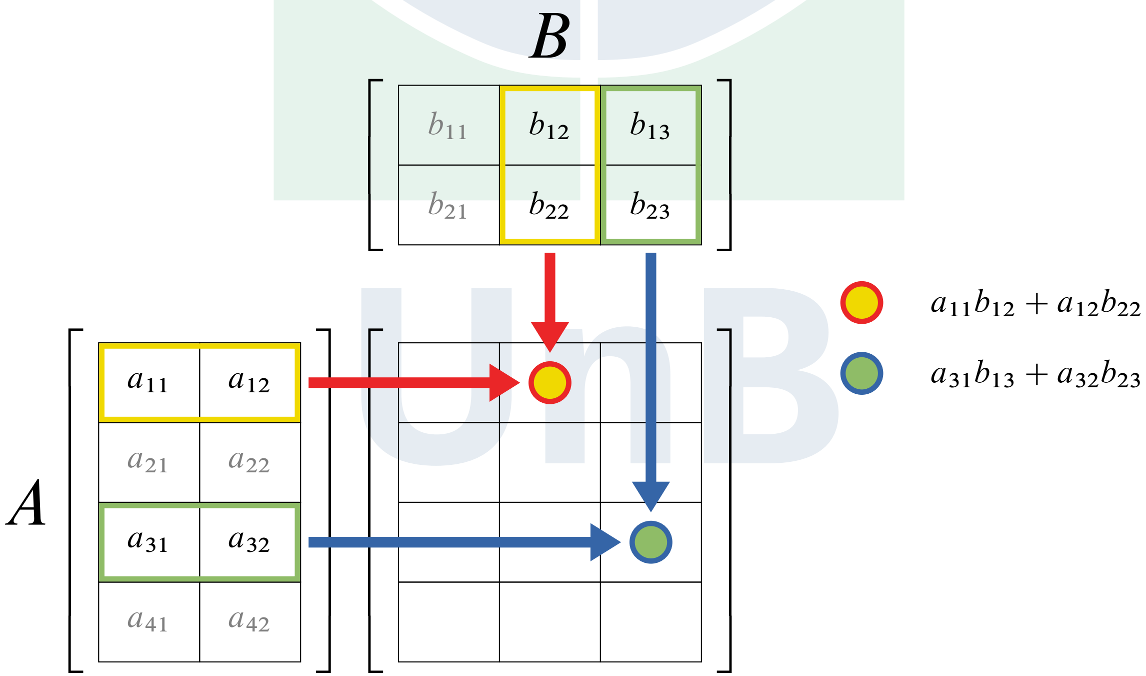


Figura 3.1.: Ilustração.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.1. Temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 14 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3}.$$

Proposição 3.2. Sejam matrices $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B = \left(a_{jl}\right)_{n\times p}$ e $C = \left(a_{lk}\right)_{p\times q}$ matrizes sobre um corpo $\mathbb{F}$. Então $(AB)\,C = A\,(BC)$.

Demonstração. Veja que $(AB)\,C = (\alpha_{ik})_{m\times q}$, $AB = (d_{il})_{m\times p}$ onde

$$d_{il} = \sum_{l=1}^{n} a_{ij} b_{jl}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_{ik} = \sum_{l=1}^{p} d_{il} c_{lk} = \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} \right) c_{lk} = \\ = \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} c_{lk} \right) = \\ = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{l=1}^{p} b_{jl} c_{lk} \right) = \beta_{ik} \end{aligned}$$

com $A\,(BC) = (\beta_{ik})_{m\times q}$. ∎

Chamaremos a matriz quadrada $I_m = \left(\delta_{ij}\right)_{m\times m}$ definida por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, se } i = j, \\ 0 & \text{, se } i \neq j, \end{cases}$$

de matriz identidade de ordem $m \times m$.

Note que se $A = \left(a_{jl}\right)_{m\times n}$, então $I_m A = A$, e se $B = (b_{li})_{n\times m}$, então $B I_m = B$.

$I_m A = (c_{il})_{m\times m}$ é tal que $c_{il} = \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij} a_{jl} = a_{il}$ con $1 \leq i \leq m$, e $I_m A = A$.

Exemplo 3.3. Se $m = 3$, então

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dizemos que uma matriz quadrada $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times m}$ tem inversa se existe uma matriz $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times m}$ tal que $AB = BA = I_m$. Denotaremos a matriz B por A^{-1}.

Definição 3.4. Seja $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Uma matriz quadrada de ordem $m \times m$ E é dita elementar se E é de uma das formas

1. $E_1 = (e_{ij})_{m\times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{se } i \neq k \\ \delta_{ij}, & \text{se } i = k \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 3, k = 2 \\ \\ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

con k um inteiro fixo entre 1 e m;

2. $E_2 = (e_{ij})_{m\times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{se } i \neq l \text{ e } i \neq k \\ \delta_{lj}, & \text{se } i = k \\ \delta_{kj}, & \text{se } i = l \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 3, k = 2, l = 3 \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}}$$

con $k < l$ inteiros fixos entre 1 e m;

3. $E_3 = (e_{ij})_{m\times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq k \\ \delta_{kj} + c \cdot \delta_{lj}, & i = k \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 3, k = 2, l = 3 \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

Exemplo 3.5. Calcule

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -14 & 4 & -1 & 51 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times m}$ o efeito de multiplicar uma matriz elementar E por A pode ser colocado como:

1. $E_1 A$: multiplica uma linha k de A por um escalar c;
2. $E_2 A$: troca duas linhas l e k de posições ($k < l$);
3. $E_3 A$: soma uma linha k com outra linha l multiplicada por um escalar $c \in \mathbb{F}$.

4. Matrizes e sistemas lineares (09/01/2021)

[1]

Definição 4.1 (Matriz reducida por linhas)**.** Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ sobre $\mathbb{F}$ é deja reduzida por linhas se

1. O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é igual 1;
2. cada columna que possui o primeiro elemento não nulo de uma linha não possui todos os outros elementos iguais a 0;

Sea além disso, esa matriz A satisfaz

3. todas linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não nulas;
4. Se $1, \dots, r$ $(r \le m)$ são as linhas não nulas de A com os primeiros elementos não nunos ocurrendo nas colunas k_1, k_2, k_r, respectivamente, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$, dizemos que A está na forma escada reduzida.

Dizemos que A está na forma escada reduzida.

Exemplo 4.2.

1. As seguintes matrizes estão na forma reduzida:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. As seguientes matrizes estão na forma escada reducida

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

[1] Aula de reposição.

Observação 4.3.

1. Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ está na forma escada reduzida e tem a última linha não nula, então $A = I_m$;
2. Se $AX = 0$ e

Definição 4.4. .

5. Espaços vetoriais (12/01/2021)

Definição 5.1. Um conjunto não vazio V é chamado de espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$ se em V estão definidas duas operações

$$\begin{aligned} +\colon V \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longmapsto u + v \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{F} \times V &\longrightarrow V \\ (c, v) &\longmapsto c \cdot v \end{aligned}$$

6. Transformações lineares (14/01/2021)

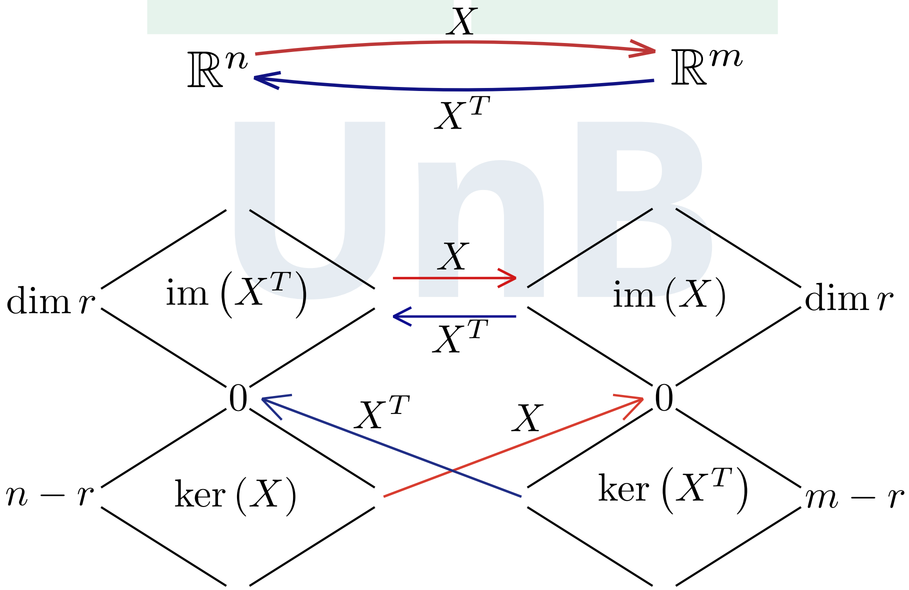
7. Espaço vetorial $L(V,W)$ (15/01/2021)

8. Matriz de uma transformação linear (16/01/2021)

9. Funcionais lineares (18/01/2021)

Parte II.

Prática



10. Exercícios de Fixação (08/01/2021)

1. Seja $\mathbb{F}$ um corpo. Dizemos que um subconjunto $\mathbb{K}$ de $\mathbb{F}$ é um subcorpo de $\mathbb{F}$ se $\mathbb{K}$ munido das operações de adição e multiplicação de $\mathbb{F}$ é um corpo. Mostre que os seguintes subconjuntos são subcorpos de $\mathbb{C}$.

   (a) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right) = \left\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$; (b) $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\}$; (c) $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{2}\right) = \left\{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\right\}$.

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

2. Mostre que:

   (a) Todo subcorpo de $\mathbb{C}$ tem $\mathbb{Q}$ como subcorpo;

   (b) Todo corpo de característica 0 tem uma cópia de $\mathbb{Q}$;

   (c) Se $\mathbb{K}$ contém propriamente $\mathbb{R}$ e é um subcorpo de $\mathbb{C}$, então $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

3. Considere o corpo finito com 5 elementos $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$.

   (a) Mostre que

$$\mathbb{F} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \text{ e } i^2 = \overline{3}\}$$

munido das operações

$$\begin{aligned}\overline{+}\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F}\\ ((a+bi),(c+di)) &\longmapsto (a+c)+(b+d)i\end{aligned}\qquad \begin{aligned}\overline{\cdot}\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F}\\ ((a+bi),(c+di)) &\longmapsto \left(ac+\overline{3}bd\right)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

é um corpo com 25 elementos;

(b) Mostre que $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ é um subcorpo de $\mathbb{F}$. Qual é a característica de F?

Solução

(a) .

(b) .

4. Determine o conjunto solução de cada sistema linear dado.

(a) $\begin{cases} x-2y+z+w=1\\ 2x+y-z=3\\ 2x+y-5z+w=4\end{cases}$ em $\mathbb{R}$,

(b) $\begin{cases} x-\sqrt{3}y+z+w=1+\sqrt{3}\\ \left(2+\sqrt{3}\right)x+y-z=3\\ 2x+y-\left(1-\sqrt{3}\right)z+w=4\end{cases}$ em $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$,

(c) $\begin{cases} x-2iy+2z-w=0\\ (2+i)x+z+w=0\\ 2ix+y-5z+(1+i)w=0\end{cases}$ em $\mathbb{C}$,

(d) $\begin{cases} x-\overline{2}y+\overline{2}z-w=\overline{0}\\ \overline{2}x+z+w=\overline{0}\\ \overline{2}x+y-\overline{3}z+w=\overline{0}\end{cases}$ em $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$,

(e) $\begin{cases} x-\overline{2}iy+\overline{2}z-w=\overline{0}\\ \left(\overline{2}+i\right)x+z+w=\overline{0}\\ \overline{2}ix+y-\overline{3}z+\left(\overline{1}+i\right)w=\overline{0}\end{cases}$ em $\mathbb{F}$ de (a) da questão 3.

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

(d) .

(e) .

5. Mostre que se dois sistemas lineares 2×2 possuem o mesmo conjunto solução, então eles são equivalentes. Determine, se existir, dois sistemas lineares 2×3 com mesmo conjunto solução mas não equivalentes.

Solução

6. Considere o sistema linear sobre $\mathbb{Q}$

$$\begin{cases} x - 2y + z + 2w = 1 \\ x + y - z + w = 2 \\ x + 7y - 5z - w = 3 \end{cases}$$

Mostre que esse sistema não tem solução.

Solução

7. Determine todos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

tem solução.

Solução

8. Encontre duas matrizes A e B de ordens iguais a 3×3 tais que AB é uma matriz nula mas BA não é.

Solução

9. Mostre que toda matriz elementar é inversível e calcule a inversa de cada tipo.

Solução

10. Determine a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solução

11. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{4} \end{bmatrix}$$

com entradas no corpo com cinco elementos $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$. Calcule sua inversa.

Solução

12. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontre uma matriz na forma e uma matriz invertível P tal que $R = PA$.

Solução

11. Exercícios de Fixação (15/01/2021)

1. Defina sobre $\mathbb{R}^2$ as seguintes operações:

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x,y),(a,b)) &\longmapsto (x+a,0) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (c,(x,y)) &\longmapsto (cx,0) \end{aligned}$$

   O conjunto $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial com essas operações?

   Solução

2. Defina sobre $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ as seguintes operações:

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x,y),(a,b)) &\longmapsto (xa,yb) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (c,(x,y)) &\longmapsto (x^c,y^c) \end{aligned}$$

   Mostre que V é um espaço vetorial com essas operações.

   Solução

3. Resolva:

   (a) O vetor $(3,-1,0,-1)$ pertence ao subespaço $W = \langle (2,-1,3,2),(-1,1,1,3),(1,1,9,-5)\rangle$ de $\mathbb{R}^4$?

   (b) Determine uma base para o subespaço vertorial de $\mathbb{R}^5$ das soluções do sistema linear homogêneo $\begin{cases} x - 2y + z + w + t = 0 \\ 3x + y - z - 4t = 0 \\ 2x + y - 3z + w = 0 \end{cases}$;

   (c) Determine uma base para o subespaço vertorial de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^5$ das soluções do sistema linear homogêneo $\begin{cases} x - \overline{2}y + z + w + t = \overline{0} \\ \overline{2}x + y - z + t = \overline{0} \\ \overline{3}x + y + \overline{3}z + w = \overline{0} \end{cases}$,

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

4. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo F e U e W subespaços de V tais que $U + W = V$ e $U \cap W = \{0\}$. Mostre que cada vetor $v \in V$ é escrito de maneira única como $v = u + w$, onde $u \in U$ e $w \in W$.

Solução

5. Mostre que o conjunto dos polinômios sobre uma variável com coeficientes em $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ munido das operações usuais de soma e multiplicação por escalar. Determine uma base para esse espaço vetorial.

Solução

6. Seja S um subconjunto de um espaço vetorial V. Mostre que S é LD se, e somente se, existir um vetor $v \in S$ que pode ser escrito como combinação linear dos elementos de $S \setminus \{v\}$.

Solução

7. Considere o seguinte espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = \left\{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}.$$

(a) Mostre que $\alpha = \left\{1, 2 + x, 3x - x^2, x - x^3\right\}$ é uma base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$;

(b) Escreva as coordenadas de $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ com relação a base α;

(c) Determine as matrizes mudança de base $[I]^e_\alpha$ e $[I]^\alpha_e$, onde $e = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$.

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

8. Faça o que se pede:

 (a) Considere a função $T\colon \mathbb{C} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$T(x+yi) = \begin{bmatrix} x+7y & 5y \\ -10y & x-7y \end{bmatrix}.$$

 Moste que T é uma transformação linear. Prove que $T(z_1 z_2) = T(z_1)\,T(z_2)\,, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

 (b) Mostre que a composta de transformações lineares é uma transformação linear;

 (c) Mostre que uma função $T\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ é uma transformação linear se, e somente se, existem escalares $c_1, \ldots, c_n$ no corpo $\mathbb{F}$ tais que

$$T(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n.$$

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

9. Faça o que se pede:

 (a) Considere $\mathbb{R}^4$ e seus subespaços $W = \langle (1,0,1,1)\,, (0,-1,-1,-1) \rangle$ e $U = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0, z+t=0 \right\}$. Determine uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Nuc}(T) = U$ e $\operatorname{Im}(T) = W$;

 (b) Considere $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$ e seus subespaços $W = \left\langle \left(\overline{1}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{1}\right), \left(\overline{0}, \overline{4}, \overline{4}, \overline{4}\right) \right\rangle$ e $U = \left\{ (x,y,z,w) \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4 \mid x+y=\overline{0}, z+t=\overline{0} \right\}$. Determine uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Nuc}(T) = V$ e $\operatorname{Im}(T) = W$;

 (c) Determine uma base para o núcleo e uma base para a imagem da transformação linear $T\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x+yi, a+bi) = (x+2a, -x+2b)$.

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

10. Sejam V e W espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{F}$ e $T\colon V \to W$. Mostre que T é injetora se, e somente se, T leva subconjunto LI em subconjunto LI.

Solução

11. Seja $T\colon \mathbb{C}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ a transformação linear definida por $T(1,0,0) = 1 + ix^2$, $T(0,1,0) = x + x^2$ e $T(0,0,1) = i + x$. Exiba uma fórmula para T e decida se T é um isomorfismo.

Solução

12. Seja F um corpo e $T\colon \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ dada por $T(x,y) = (x+y, x)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{F}^2$. Mostre que T é um isomorfismo e exiba uma fómula para T^{-1}.

Solução

13. Considere as bases $\alpha = \{1, 1+x, 1+x^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\beta = \{(1,0), (i,0), (1,1), (1,i)\}$ de $\mathbb{C}^2$ como espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Determine as coordenadas da transformação linear $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^2$ dada por $T\left(a + bx + cx^2\right) = (a + bi, b + ci)$ com relação à base de $L\left(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \mathbb{C}^2\right)$ construída no Teorema 2-(ii) da Aula 9.

Solução

14. Considere a base $\alpha = \{(1,0,-1), (1,1,1), (2,2,0)\}$ de $\mathbb{C}^3$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Determine a base dual α^* de $\left(\mathbb{C}^3\right)^*$.

Solução

15. Considere $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (2x + 3y, y - x, 3x)$ e as bases $\alpha = \{(1, 2), (2, -1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Calcule $[T]^{\alpha}_{\beta}$, $[T]^{e_1}_{\beta}$ e $[T]^{\alpha}_{e_2}$ onde e_1 é a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e e_2 é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Solução

16. Sejam $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $G\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [G]^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ e $\beta = \{1, 1 + x, 1 + x^2\}$ é base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Determine bases para $\operatorname{Nuc}(T), \operatorname{Im}(T), \operatorname{Nuc}(G \circ T)$ e $\operatorname{Im}(G \circ T)$.

Solução

17. Seja $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ a transformação linear definida por

$$T\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ z - w & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine a matriz $[T]$ de T com relação à base canônica e;

(b) Determine a matriz de T com relação à base

$$\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\};$$

(c) Exiba a matriz M tal que $[T]_{\beta} = M^{-1}[T]M$.

Solução

(a)

(b)

(c)

18. Seja $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ a transformação linear definida por

$$T\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{0} & x \\ z + \overline{6}w & \overline{0} \end{bmatrix}.$$

(a) Determine a matriz $[T]$ de T com relação à base canônica e;

(b) Determine a matriz de T com relação à base

$$\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{bmatrix}. \right\}$$

(c) Exiba a matriz M tal que $[T]_\beta = M^{-1}[T]M$.

19. Seja $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ a transformação linear definida por

$$Txyzw = \overline{0}xz + \overline{6}w\overline{0}$$

(a) Determine a matriz $[T]$ de T com relação à base canônica e;

(b) Determine a matriz de T com relação à base

$$\alpha = \left\{\overline{1001}, \overline{0110}, \overline{10110101}\right\}$$

(c) Exiba a matriz M tal que $[T]_\beta = M^{-1}[T]M$.

Solução

(a)

(b)

(c)

20. Seja $T\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ uma transformação linear cuja matriz com relação à base canônica seja

$$110 - 1010 - 1 - 1$$

(a) Determine $T(x, y, z)$;

(b) Qual é a matriz do operador linear T com relação à base $\alpha = \{(-1, 1, 0), (1, -1, 1), (0, 1, -1)\}$?

(c) O operador T é invertível? Justifique!

Solução

(a)

(b)

(c)

Parte III.

Tutorial

A. Overview about Julia

En agosto del 2018 se lanzó la versión definitiva LTS y actualmente estamos en la versión 1.5.6.

Para ser eficiente, el desarrollo del lenguaje se planteó como objetivos

No interpretable, sino compilable, uso de LLVM como compilador JIT (Just in time)

Tipado de variables recomendado, pero no obligatorio. Aversión a las variables globales. Paralización Cualquier bucle será tan rápido como una operación vectorial. Desde un principio

C,C++, Java y Fortran

Modular

Políglota

la primera ejecución va lenta porque compila y ejecuta, la segunda va mucho más rápido.

Julia is a modern, expressive, high-performance programming language designed for scientific computation and data manipulation. Originally developed by a group of computer scientists and mathematicians at MIT led by Alan Edelman, Julia combines three key features for highly intensive computing tasks as perhaps no other contemporary programming language does: it is fast, easy to learn and use, and open source.

Algorithms for Optimization

B. `LinearAlgebra` from Julia

Não há necessidade de instalar nenhum programa, você só precisa de uma conta do Google e seguir as instruções do repositório[1].

```julia
f(x) = x.^2 + π
const ⊗ = kron
const Σ = sum # Although `sum` may be just as good in the code.
# Calculate Σ_{j=1}^5 j^2
Σ([j^2 for j ∈ 1:5])
```

Listing B.1: Programa `main.jl`.

.

B.1. Matrix calculus

For a comprensihve tutorial about Julia look

[1] `julia_on_collab.ipynb`

Índice