AULA DE ÁLGEBRA LINEAR II - 09/01/2020
REPOSIÇÃO

MATRIZES E SISTEMAS LINEARES

DEFINIÇÃO 1. (MATRIZ REDUZIDA POR LINHAS) UMA MATRIZ $A=(a_{ij})_{\underline{m}\times n}$ SOBRE $\mathcal{F}$ É DITA REDUZIDA POR LINHAS SE

i) O PRIMEIRO ELEMENTO NÃO NULO DE CADA LINHA NÃO NULA É IGUAL 1;

ii) CADA COLUNA QUE POSSUI O PRIMEIRO ELEMENTO NÃO NULO DE UMA LINHA NÃO NULA POSSUI TODOS OS OUTROS ELEMENTOS IGUAIS A 0.

SE ALÉM DISSO, ESSA MATRIZ A SATISFAZ

iii) TODAS LINHAS NULAS OCORREM ABAIXO DAS DAS LINHAS NÃO NULAS;

iv) SE $1,\ldots,r$ $(r\leq m)$ SÃO AS LINHAS NÃO NULAS DE A COM OS PRIMEIROS ELEMENTOS NÃO NULOS OCORRENDO NAS COLUNAS $k_1, k_2, \ldots, k_r$, RESPECTIVAMENTE, ENTÃO $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$,

DIZEMOS QUE A ESTÁ NA FORMA ESCADA REDUZIDA.

Exemplo 2. a) As seguintes matrizes estão na forma reduzida:

i) $\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$; ii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) As seguintes matrizes estão na forma escada reduzida:

i) $\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$; ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Obs. 1) Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ está na forma escada reduzida e tem a última linha não nula, então

$$A = I_m;$$

2) Se $AX = 0$ e A está na forma reduzida, então não é difícil determinar o

conjunto solução desse sistema.

Definição 3. Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ sobre um corpo F são ditas equivalentes se existem matrizes elementares $E_1, \dots, E_k$ tais que

linha-equivalente

$$B = E_k \dots E_1 A$$

$$\left(A = E_1^{-1} \dots E_k^{-1} B\right).$$

Obs. 1) Se $AX = 0$ e $BX = 0$ são sistemas lineares equivalentes, então A e B são matrizes equivalentes e vale a volta.

Proposição 4. Toda matriz sobre um corpo F é linha-equivalente a uma matriz escada reduzida.

Dem. Seja $A = (a_{ij})_{m\times n}$ uma matriz sobre o corpo F. Se A é uma matriz nula, então nada precisa ser feito. Suponha A não nula. Seja i_1 a primeira linha não nula de A. Aplique uma matriz elementar em A para obter o primeiro elemento não nulo de i_1 igual a 1. Assim é possível, aplicando matrizes elementares, obter uma matriz A_1 linha-equivalente a A com primeira linha sendo i_1 e seu primeiro elemento 1 ocorrendo em uma coluna

ONDE SOMENTE ELE É NÃO NULO. ESSE PROCEDIMENTO PODE SER REPETIDO ATÉ ACABAR A QUANTIDADE DE LINHAS NÃO NULAS DE A. NO FINAL DO PROCESSO, É OBTIDO UMA MATRIZ LINHA-EQUIVALENTE A A E REDUZIDA. APLICANDO TROCAS DE LINHAS, OBTEMOS UMA MATRIZ LINHA-EQUIVALENTE A A NA FORMA ESCADA REDUZIDA.

$\boxtimes$

PROPOSIÇÃO 5. SEJA $A = (a_{ij})_{m \times n}$ SOBRE F COM $m < n$. ENTÃO O SISTEMA LINEAR HOMOGÊNEO $AX = 0$ POSSUI SOLUÇÃO NÃO NULA.

Obs. SEJAM X_1 E X_2 SOLUÇÕES DE $AX = 0$ E $c \in F \setminus \{0\}$, ENTÃO

$$A(X_1 + cX_2) = AX_1 + cAX_2 =$$

$$= 0 + c0 = 0$$

DAÍ $X_1 + cX_2$ TAMBÉM É SOLUÇÃO DO SISTEMA $AX = 0$.

PROPOSIÇÃO 6. SEJA $A = (a_{ij})_{m \times m}$ UMA MATRIZ QUADRADA SOBRE UM CORPO F. ENTÃO SÃO EQUIVALENTES:

i) A É INVERTÍVEL;

ii) A É LINHA-EQUIVALENTE A I_m;

iii) O SISTEMA $AX = 0$ TEM SOMENTE A SOLUÇÃO NULA.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + w = 5, \\ x - y + 2z - 2w = 1, \\ 2x + y + z + w = 3. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{(E_k \cdots E_1)}_{A^{-1}} A = I_m$$

$$E_k \cdots E_1 \cdot \left(\begin{array}{c|c} A & I_m \end{array}\right)$$

$$A^{-1}$$