$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_j \times s_j}.$$

Álgebra Linear II

XLIX Escola de Verão en Matemática da UnB

Aulas do professor Alex Carrazedo Dantas*

Última modificação: 29 de Janeiro de 2021 às $21:29:21$.

https://carlosal1015.github.io/Algebra-linear-II/pdf/main.pdf

*alex@mat.unb.br

Sumário

Introdução ao curso (04/01/2021)

O professor Alex Carrazedo Dantas é especialista no *Teoria dos grupos*. Em um curso presencial você pode discutir mais, enquanto em um curso remoto, cada aula tem um pdf Moodle MAT e uma gravação da sessão. Se você tiver dúvidas sobre o moodle, peça ajuda a Carol Lafetá[1].

Ementa

1. **Sistemas lineares e matrizes.**
2. **Espaços vetoriais e transformações lineares.**
3. **Polinômios e determinantes**
4. **Decomposicões primárias e formas racionais e de Jordan.**
5. **Produto interno e teorema espectral.**
6. **Formas multilineares.**

Critério de avaliação

Menção em disciplina	**Equivalência numérica**
Superior (SS)	$9-10$
Média Superior (MS)	$7-8.9$
Média (MM)	$5-6.9$

Serão aplicadas 2 provas, de acordo com o cronograma abaixo, as quais serão atribuídas as notas x e y.

$$\text{MF} = \frac{x+3y}{4}.$$

O aluno deverá obter média final igual ou superior a 5 pontos e 75% de frequência para ser aprovado.

Tutores

- Sara Raissa Silva Rodrigues.
- Geraldo Herbert Beltrão de Souza.
- Mattheus Pereira da Silva Aguiar.

[1] lafeta.carol@gmail.com

Referências bibliográficas

[1] Flávio Ulhoa Coelho e Mary Lilian Lourenço. *Curso de Álgebra Linear, Um - Edusp*. EDUSP, 2005. URL: https://www.edusp.com.br/livros/curso-de-algebra-linear.

[2] P. R. Halmos. *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1958. ISBN: 978-0-387-90093-3. DOI: 10.1007/978-1-4612-6387-6. URL: https://www.springer.com/gp/book/9780387900933.

[3] Kenneth Hoffman e Ray Kunze. *Linear algebra*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc.

[4] Serge Lang. *Linear Algebra*. 3ª ed. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1987. ISBN: 978-0-387-96412-6. DOI: 10.1007/978-1-4757-1949-9. URL: https://www.springer.com/gp/book/9780387964126.

[5] Ph D. Seymour Lipschutz e Ph D. Marc Lars Lipson. *Schaum's Outline of Linear Algebra, Sixth Edition*. McGraw-Hill Education, 2018. ISBN: 978-1-260-01144-9. URL: https://www.accessengineeringlibrary.com/content/book/9781260011449.

Parte I.

Teoria

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_j \times s_j}.$$

1. Corpos e Sistemas Lineares (06/01/2021)

Definição 1.1 (Corpo)**.** Um *corpo* é um conjunto não vazio $\mathbb{F}$ munido de duas operações: adição mais e multiplicação.

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (x,y) &\longmapsto x+y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (x,y) &\longmapsto x\cdot y \end{aligned}$$

e tais que en $(\mathbb{F},+)$

(A1) (Asociatividade na adição) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall x,y,z \in \mathbb{F}$;

(A2) (Existênza de neutro aditivo) $\exists 0 \in \mathbb{F}$ tal que $x+0 = 0+x = x$, $\forall x \in \mathbb{F}$;

(A3) (Existênza de elemento oposto o inverso aditivo) Dado $x \in \mathbb{F}$, existe $-x \in \mathbb{F}$ tal que $x+(-x) = (-x)+x = 0$;

(A4) (Conmutatividade na adição) $x+y = y+x$, $\forall x,y \in \mathbb{F}$;

e $(\mathbb{F}\setminus\{0\},\cdot)$

(M1) (Associatividade na multiplicação) $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$, $\forall x,y,z \in \mathbb{F}$;

(M2) (Existênza do elemento neutro na multiplicação) $\exists 1 \in \mathbb{F}$ tal que $x\cdot 1 = 1\cdot x = x$, $\forall x \in \mathbb{F}$;

(M3) (Existênza inverso multiplicativo) Dado $x \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$, existe $x^{-1} \in \mathbb{F}$ tal que $x\cdot x^{-1} = x^{-1}\cdot x = 1$;

(M4) (Conmutatividade na multiplicação) $x\cdot y = y\cdot x$, $\forall x,y \in \mathbb{F}$;

(D) (Distributiva) $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$, $\forall x,y,z \in \mathbb{F}$.

Proposição 1.2. $x\cdot 0 = 0$, $\forall x \in \mathbb{F}$.

Demonstração. $x\cdot 0 \overset{A2}{=} x\cdot(0+0) \overset{D}{=} x\cdot 0 + x\cdot 0$. Assim

$$\begin{aligned} x\cdot 0 + \underbrace{x\cdot 0 + (-x\cdot 0)}_{=0} &= \underbrace{x\cdot 0 + (-x\cdot 0)}_{=0} \\ x\cdot 0 + 0 &\overset{A3}{=} 0 \\ x\cdot 0 &\overset{A2}{=} 0. \end{aligned}$$

∎

Exemplo 1.3.

a) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ não é um corpo. De fato não existe o inverso multiplicativo de 2 em $\mathbb{Z}$, ou seja, a equação $2\cdot x = 1$ não se resolue em $\mathbb{Z}$;

b) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ é um corpo, onde $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\right\}$ e $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ e $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

c) $(\mathbb{R},+,\cdot)$ é um corpo (conjunto dos números reais);

d) $(\mathbb{C},+,\cdot)$ é um corpo, onde $\mathbb{C} = \left\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R},\ \text{e } i^2 = 1\right\}$,

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ((a+bi),(c+di)) &\longmapsto (a+c)+(b+d)i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ((a+bi),(c+di)) &\longmapsto (ac-bd)+(ad+bc)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+bi)(c+di) &= ac+adi+bci+bdi^2 = \\ &= ac+(-1)bd+(ad+bc)i = \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i. \end{aligned}$$

$\mathbb{C}$ é chamado del conjunto nos números complexos. Tome $a+bi\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $(0 = 0+0i)$.
Assim

$$\begin{aligned} (a+bi)(a-bi) &= a^2+b^2+(ab-ba)i = \\ &= a^2+b^2\neq 0 \end{aligned}$$

$$(a+bi)\underbrace{(a-bi)\left(a^2+b^2\right)^{-1}} = 1.$$

Logo $(a+bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$.

e) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\cdot)$ é um corpo, onde p é primo e $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\overline{a}\mid a\in\mathbb{Z}\}, \overline{a} = \{a+pn\mid n\in\mathbb{Z}\}$ e $0\leq a\leq p-1$.

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ \left(\overline{a},\overline{b}\right) &\longmapsto \overline{a+b} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ \left(\overline{a},\overline{b}\right) &\longmapsto \overline{a\cdot b} \end{aligned}$$

Tome $p = 3$. Assim $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \left\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\right\}$.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$$\overline{2}+\overline{2}=\overline{2+2}=\overline{4}=\overline{3\cdot 1+1}=\overline{1}.$$

Note que a equação $x^2+\overline{1}=\overline{0}$ não tem solução em $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\cdot)$.
Defina: $F=\left\{\overline{a}+\overline{b}i \mid \overline{a},\overline{b}\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \text{ e } i^2=\overline{2}\right\}$.

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ \left(\overline{a}+\overline{b}i,\overline{c}+\overline{d}i\right) &\longmapsto (\overline{a}+\overline{c})+\left(\overline{b}+\overline{d}\right)i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ \left(\overline{a}+\overline{b}i,\overline{c}+\overline{d}i\right) &\longmapsto \left(\overline{a}\cdot\overline{c}+2\overline{b}\cdot\overline{d}\right)+\left(\overline{a}\cdot\overline{d}+\overline{b}\cdot\overline{c}\right)i \end{aligned}$$

Mostre que $(\mathbb{F},+,\cdot)$ é um corpo com 9 elementos.

Definição 1.4. A característica de um corpo $\mathbb{F}$ é o menor inteiro positivo n (se existir) tal que $\underbrace{1+\cdots+1}_{n}=0$.

Se tal n não existe, diremos que F tem característica 0.

Proposição 1.5. Seja $\mathbb{F}$ um corpo. Sea característica de F é um inteiro positivo n, então n é primo.

Demonstração. Exercízio. ∎

Exemplo 1.6.

a) Resolva em $\mathbb{Q}$ o sistema $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x+4y=2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x+4y=2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x+3y=1 \\ -2x-8y=-4 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x+3y=1 \\ \quad -5y=-3 \end{cases} \implies y=\frac{3}{5}.$$

$$\begin{aligned} &2x+3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)=1 \\ &\quad 2x+\frac{9}{5}=1 \implies 2x=-\frac{4}{5} \implies x=-\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Daí $\left(-\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$ é solução para o sistema.

b) Resolva em $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ o sistema $\begin{cases} \overline{2}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ \overline{2}x + \quad y = \overline{0} \end{cases}$.

$$\begin{cases} \overline{2}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ \qquad\quad y = \overline{1} \end{cases} \implies \overline{2}x + \overline{2} \cdot \overline{1} = \overline{1} \implies \begin{aligned} \overline{2}x &= \overline{1} - \overline{2} \\ \overline{2}x &= -\overline{1} \\ \overline{2}x &= \overline{2} \\ x &= \overline{1}. \end{aligned}$$

Daí $\left(\overline{1}, \overline{1}\right)$ é solução do sistema.

2. Sistemas lineares (07/01/2021)

Definição 2.1 (Sistema linear)**.** Um corpo é.

$$\left(\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{array}\right)\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ \vdots & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_1 & a_2 & & a_n \end{pmatrix}$$

$$c_1\left(a_n x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\right) + \cdots + c_m\left(a_m x_2 + \cdots + a_{mn}x_n\right) = c_1 y_2 + \cdots + c_m y_m$$
$$\left(c_2 a_{11} + \cdots + c_m a_{m1}\right)x_1 + \cdots + \left(c_1 a_{1n} + \cdots + c_m a_{wn}\right)x_n = c_1 y_2 + \cdots + c_m y_m$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + w = 5 \\ x - y + 2z - 2w = 1 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 2x + 3y - z + w = 5 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 5y - 5z + 5w = 3 \\ 3y - 3z + 5w = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ y - z + w = 3/5 \\ y - z + 5/3w = 1/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z - w = 8/5 \\ y - z + \omega = 3/5 \\ 2/3\omega = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{5-9}{15} = -\dfrac{4}{15} \\ \omega = -\dfrac{12}{30} = -\dfrac{4}{10} = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$\left\{(x, y, z, \omega) \in \mathbb{Q}^4 \mid x = -z + \tfrac{6}{5}, y = z + 1, z \in \mathbb{Q}, \omega = -\tfrac{2}{5}\right\} =$$
$$= \left\{\left(-z + \tfrac{6}{5}, z + 1, z, -\tfrac{2}{5}\right) \mid z \in \mathbb{Q}\right\}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$f : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to F = f\,(i, j) = a_{ij}.$$

$$\begin{pmatrix} f\,(1,1) & f\,(1,2) & \cdots & f\,(1,n) \\ f\,(2,1) & f\,(2,2) & \cdots & f\,(2,n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f\,(x,1) & f\,(w,2) & \cdots & f\,(w,n) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{wn} \end{pmatrix}$$

3. Matrizes (08/01/2021)

Podemos denotar uma matriz A sobre um corpo $\mathbb{F}$ de ordem $m \times n$ por $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jl})_{n\times p}$ duas matrizes sobre um corpo $\mathbb{F}$. Definimos o producto de A por B como a matriz $C = (c_{il})_{m\times p}$ dada por

$$c_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} = a_{i1}b_{il} + \cdots + a_{in}b_{nl}$$

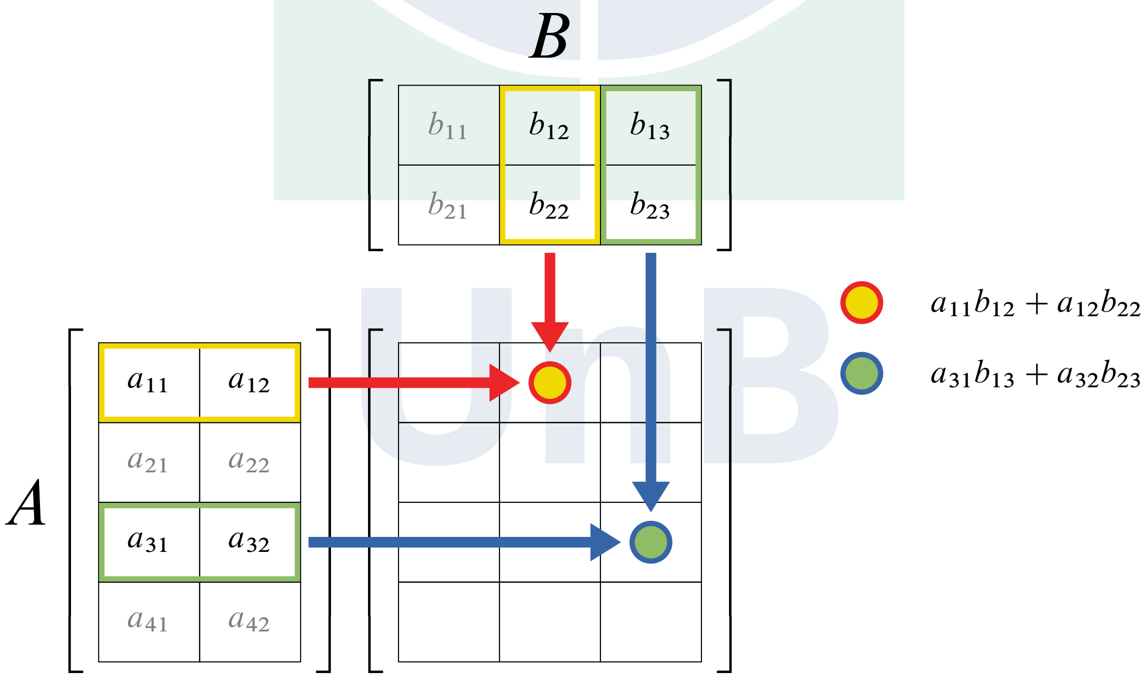


Figura 3.1.: Ilustração.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.1. Temos que

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix}7 & 4 & 14\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}_{2\times 3}.$$

Proposição 3.2. Sejam matrices $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B = \left(a_{jl}\right)_{n\times p}$ e $C = \left(a_{lk}\right)_{p\times q}$ matrizes sobre um corpo $\mathbb{F}$. Então $(AB)\,C = A\,(BC)$.

Demonstração. Veja que $(AB)\,C = (\alpha_{ik})_{m\times q}$, $AB = (d_{il})_{m\times p}$ onde

$$d_{il} = \sum_{l=1}^{n} a_{ij} b_{jl}$$

e

$$\begin{aligned}\alpha_{ik} = \sum_{l=1}^{p} d_{il} c_{lk} = \sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl}\right) c_{lk} =\\ = \sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} c_{lk}\right) =\\ = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{l=1}^{p} b_{jl} c_{lk}\right) = \beta_{ik}\end{aligned}$$

com $A\,(BC) = (\beta_{ik})_{m\times q}$. ■

Chamaremos a matriz quadrada $I_m = \left(\delta_{ij}\right)_{m\times m}$ definida por

$$\delta_{ij} = \begin{cases}1 & \text{, se } i = j,\\ 0 & \text{, se } i \neq j,\end{cases}$$

de matriz identidade de ordem $m \times m$.

Note que se $A = \left(a_{jl}\right)_{m\times n}$, então $I_m A = A$, e se $B = (b_{li})_{n\times m}$, então $BI_m = B$.

$I_m A = (c_{il})_{m\times m}$ é tal que $c_{il} = \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij} a_{jl} = a_{il}$ con $1 \leq i \leq m$, e $I_m A = A$.

Exemplo 3.3. Se $m = 3$, então

$$I_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Dizemos que uma matriz quadrada $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times m}$ tem inversa se existe uma matriz $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times m}$ tal que $AB = BA = I_m$. Denotaremos a matriz B por A^{-1}.

Definição 3.4. Seja $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Uma matriz quadrada de ordem $m \times m$ E é dita elementar se E é de uma das formas

1. $E_1 = (e_{ij})_{m\times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{se } i \neq k \\ \delta_{ij}, & \text{se } i = k \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 3, k = 2 \\ \\ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

con k um inteiro fixo entre 1 e m;

2. $E_2 = (e_{ij})_{m\times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{se } i \neq l \text{ e } i \neq k \\ \delta_{lj}, & \text{se } i = k \\ \delta_{kj}, & \text{se } i = l \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 3, k = 2, l = 3 \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}}$$

con $k < l$ inteiros fixos entre 1 e m;

3. $E_3 = (e_{ij})_{m\times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq k \\ \delta_{kj} + c \cdot \delta_{lj}, & i = k \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 3, k = 2, l = 3 \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

Exemplo 3.5. Calcule

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -14 & 4 & -1 & 51 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times m}$ o efeito de multiplicar uma matriz elementar E por A pode ser colocado como:

1. $E_1 A$: multiplica uma linha k de A por um escalar c;

2. $E_2 A$: troca duas linhas l e k de posições ($k < l$);

3. $E_3 A$: soma uma linha k com outra linha l multiplicada por um escalar $c \in \mathbb{F}$.

4. Matrizes e sistemas lineares (09/01/2021)

[1]

Definição 4.1 (Matriz reducida por linhas)**.** Uma matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ sobre $\mathbb{F}$ é deja reduzida por linhas se

1. O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é igual 1;
2. cada columna que possui o primeiro elemento não nulo de uma linha não possui todos os outros elementos iguais a 0;

Sea além disso, esa matriz A satisfaz

3. todas linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não nulas;
4. Se $1, \ldots, r$ $(r \leq m)$ são as linhas não nulas de A com os primeiros elementos não nunos ocurrendo nas colunas k_1, k_2, k_r, respectivamente, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$, dizemos que A está na forma escada reduzida.

Dizemos que A está na forma escada reduzida.

Exemplo 4.2.

1. As seguintes matrizes estão na forma reduzida:

   a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

   b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

   c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

   d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. As seguientes matrizes estão na forma escada reducida

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

   c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

[1] Aula de reposição.

Observação 4.3. 1. Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ está na forma escada reduzida e tem a última linha não nula, então $A = I_m$;

2. Se $AX = 0$ e

Definição 4.4. .

5. Espaços vetoriais $(12/01/2021)$

Definição 5.1. Um conjunto não vazio V é chamado de espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$ se em V estão definidas duas operações

$$\begin{aligned} +\colon V \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longmapsto u + v \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{F} \times V &\longrightarrow V \\ (c, v) &\longmapsto c \cdot v \end{aligned}$$

(A1) $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, \omega \in V.$

(A2) Existe um único vetor nulo $O \in V$ tal que
$v + 0 = 0 + v = v, \forall v \in V.$

(A3) Dado $v \in V$, existe um único vetor $-v \in V$ tal que $v + (-v) = (-v) + v = 0;$

(A4) $u + v = v + u, \forall u, v \in V.$

(E1) $1 \cdot v = v, \forall v \in V$, onde $1 \in \mathbb{F}.$

(E2) $(ck)\, v = c\, (kv)\,, \forall v \in V, E$ e $\forall c, k \in \mathbb{F}.$

(E3) $c\,(u + v) = cu + cv, \forall u, v \in V, \forall c \in \mathbb{F}$

(E4) $(c + k)\, v = cv + kv, \forall v \in V$ e $c, k \in \mathbb{F}.$

Exemplo 5.2.

1. Se $\mathbb{F}$ é um corpo, então
$$\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{F}, i = 1, \ldots, n\},$$
com n um enteiro positivo, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, onde as operações são dada por
$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n &\longrightarrow \mathbb{F}^n \\ ((x_1, \ldots, x_n)\,, (y_1, \ldots, y_n)) &\longmapsto (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{F} \times \mathbb{F}^n &\longrightarrow \mathbb{F}^n \\ (c, (x_1, \ldots, x_n)) &\longmapsto (cx_1, \ldots, cx_n)\,. \end{aligned}$$

2. Se $\mathbb{K}$ é um subcorpo de $\mathbb{F}$, então $\mathbb{F}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

3. O conjunto
$$\mathbb{F}^{m\times n} = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F}) = \left\{A = \left(a_{ij}\right)_{w+1} \mid a_{ij} \in \mathbb{F}\right\},$$
onde $\mathbb{F}$ é um corpo, munido das operações
$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{F}^{m\times n} \times \mathbb{F}^{m\times n} &\longrightarrow \mathbb{F}^{m\times n} \\ (A, B) &\longmapsto \left(a_{ij}\right)_{m\times n} + \left(b_{ij}\right)_{m\times n} = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m\times n} \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{F} \times \mathbb{F}^{m\times n} &\longrightarrow \mathbb{F}^{n} \\ (c, A) &\longmapsto c\cdot\left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \left(c\cdot a_{ij}\right)_{m\times n}. \end{aligned}$$
é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$.

Proposição 5.3. Em um espaço vetorial valem

1. $0 \cdot v = 0$;
2. $c \cdot 0 = 0$;
3. $-v = (-1)\, v$, para todo vetor v.

Definição 5.4 (Subespaço vetorial)**.** Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Um subconjunto não vazio W de V é chamado de subespaço vetorial de V se W munido das operações de V é um espaço vetorial.

- Em outras palavras, W é um subespaço vetorial de V se
  1. $0 \in W$;
  2. $w_1 + w_2 \in W$, $\forall w_1, w_2 \in W$;
  3. $c \cdot w \in W$, $\forall c \in \mathbb{F}$ e $w \in W$.

  Mais ainda, W é um subespaço vetorial de V se
- 1. W é vazio;
  2. $w_1 + c w_2 \in W$, $\forall c \in \mathbb{F}$ e $\forall w_1, w_2 \in W$.

Exemplo 5.5.

1. $\{0\}$, V são subespaços vetoriais de V;
2. Seja $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ uma matriz sobre um corpo $\mathbb{F}$. Então o conjunto solução do sistema homogêneo
$$AX_{n\times 1} = 0_{m\times 1}$$
é um subespaço vetorial de $\mathbb{F}^n$.

Demonstração. Seja W o conjunto solução de $AX = 0$. Note que W é não vazio, pois $(0, \ldots, 0) \in W$. Sejam X_0, X_1 duas soluções de $AX = 0$. Assim

$$\begin{aligned} A(X_0 + cX_1) &= AX_0 + cAX_1 \\ &= 0 + c \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

para todo $c \in \mathbb{F}$. Daí $X_0 + cX_1 \in W$ e o resultado segue. ■

3. $W = \left\{A = \left(a_{ij}\right)_{3\times 2} \mid a_{11} = 0\right\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{F}^{3\times 2} = \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{F})$;
4. $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$ é um subespaço vetorial $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ é função.$\}$.

$\boxed{+ : (f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \cdot : (cf)(x) = cf(x).}$

Proposição 5.6. Sejam V um espaço vetorial e $\{W_i\}_{i\in I}$ uma família de subespaços vetorialis de V, onde I é um conjunto de índices. Então são subespaços de V:

1. $\cap_{i\in I} W_i$;
2. $\sum_{i\in I} W_i = \left\{w_{i_1} + w_{i_2} + \cdots + w_{i_n} \mid w_{i_j} \in W_{i_j} \text{ e } n \in \mathbb{Z}_{>1}\right\}$.

Demonstração.
Note que $\cap_{i\in I} W_i$ é não vazia, pois $0 \in W_i, \forall i \in I$. Se $u, v \in \cap_{i\in I} W_i$ e $c \in \mathbb{F}$, então

$$u + cv \in W_i \text{ para todo } i \in I$$

pois W_i é subespaço, daí $u + cv \in \cap_{i\in I} W_i$ e o resultado segue.

2. Note que $\sum_{i\in I} W_i$ é não vazia pois $0 \in \sum_{i\in I} W_i$. Tome $u, v \in \sum_{i\in I} W_i$ e $c \in \mathbb{F}$. Assim

$$\begin{aligned} u + cv &= \left(u_{i_1} + \cdots + u_{i_\ell}\right) + c\left(v_{j_1} + \cdots + v_{j_k}\right) = \\ &= u_{i_1} + \cdots + u_{i_\ell} + cv_{j_1} + \cdots + c_{v_k} \in \sum_{i\in I} W_i. \end{aligned}$$

■

Observação 5.7. Nem sempre a união de subespaços é um subespaço, mas $\bigcap_{i\in I} W_i \subseteq \cup_{i\in I} W_i \subseteq \sum_{i\in I} W_i$.

Definição 5.8. Sejam V um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_n$ vetores de V. Dizemos que um vetor $v \in V$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_n$ se existem escalares $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ tais que

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n.$$

Exemplo 5.9.

1. Todo vetor de $\mathbb{R}^3$ é uma combinação linear dos vetores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. De fato,

$$(x,y,z) = x\,(1,0,0) + y\,(0,1,0) + z\,(0,0,1)\,;$$

2. Todo vetor de $\mathbb{C}^3$ é uma combinação linear dos vetores $(i,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,i,i)$. De fato,

$$(x,y,z) = -xi\,(i,1,0) + (y + xi - z)\,(0,1,0) - zi\,(0,i,i)\,.$$

Proposição 5.10. Se S é um subconjunto não vazio de um espaço vetorial V, então o conjunto

$$W = \{c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \mid v_i \in S \text{ e } c_i \in \mathbb{F}\}$$

é um subespaço vetorial de V.

Demonstração. Note que W é não vazio, pois $S \subseteq W$. Sejam $u, v \in W$ e $c \in \mathbb{F}$. Então

$$\begin{aligned} u + cv &= (c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n) + c\,(k_1 v_1 + \cdots + k_m v_m) = \\ &= c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n + (ck_1)\,v_1 + \cdots + (ck_m)\,v_m \in W. \end{aligned}$$

■

Definição 5.11. Dado S um subconjunto de um espaço vetorial V, chamaremos ao subespaço

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subseteq W} W, \quad \boxed{\text{onde } W \text{ é subespaço de } V}$$

de subespaço de V gerado por S. (Assum $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.)

Proposição 5.12. Se S é um subconjunto não vazio de V, então

$$\langle S \rangle = \{c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \mid v_i \in S \text{ e } c_i \in \mathbb{F}\} = W$$

Demonstração. Pela proposição 9, W é um subespaço de V que contém S, logo $\langle S \rangle \subseteq W$ por definição. Tome $w \in W$. Então existem vetores $v_1, \ldots, v_n$ em S e escalares $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ tais que

$$W = \underbrace{c_1 v_1}_{\in \cap_{S \subseteq U} U} + \cdots + \underbrace{c_n v_n}_{\in \cap_{S \subseteq U} U} \in \cap_{S \subseteq U} U,$$

onde a interseção é tomada em todos os subespaços U de V que contém S. Daí $W \subseteq \langle S \rangle$. ■

Exemplo 5.13.

1. Pelo exemplo 8-b, temos que

$$\mathbb{C}^3 = \langle (i,1,0)\,,(0,1,0)\,,(0,i,i) \rangle\,;$$

2. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x+y+\ \ z=0 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases} \begin{cases} x+y+z=0 \\ \quad -y \qquad =0 \end{cases}$$

Daí $W=\{z\,(-1,0,1)\mid z\in\mathbb{R}\}$ é solução do sistema dado. Note que

$$W=\{z\,(-1,0,1)\mid z\in\mathbb{R}\} \qquad =\langle(-1,0,1)\rangle\,.$$

$$\begin{aligned} W &= \{(z+y,y,z)\mid z,y\in\mathbb{R}\} \\ &= \{y\,(1,1,0)+z\,(1,0,1)\mid y,z\in\mathbb{R}\} \\ &= \langle(1,1,0)\,,(1,0,1)\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+y+\ \ z=1 \\ 2x+y+2z=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ \quad -y \qquad =0 \end{cases}$$

$S=\{(1-z,0,z)\mid z\in\mathbb{R}\}=\{(1,0,0)+z\,(-1,0,1)\mid z\in\mathbb{R}\}$

6. Espaços vetoriais de dimensão finita $(13/01/2021)$

Definição 6.1. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Um subconjunto S de V é chamado linearmente dependente (LD) se existem n vetores distintos $v_1, \ldots, v_n \in S$ e escalares $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$, não todos nulos ($(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{F}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$), tais que

$$c_1 1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0.$$

Caso contrário, S é chamado de linearmente independiente (LI), ou seja, se $v_1, \ldots, v_n \in S$ são vetores distintos de S tais que

$$c_1 1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0,$$

então $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

Definição 6.2. Dado um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{F}$, dizemos que um subconjunto S é uma base de V se

1. $\langle S \rangle = V$;
2. S é LI.

Exemplo 6.3.

1. Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}^3$ sobre $\mathcal{C}$. Note que o conjunto

$$\{(i, 1, 0), (0, 1, 0), (0, i, i), (0, 3, 2)\}$$

é LD, pois

$$(0, 0, 0) = 0 \cdot (i, 1, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + (-2i) \cdot (0, i, i) + (-1) \cdot (0, 3, 2)$$

mas

$$\langle (i, 1, 0), (0, 1, 0), (0, i, i), (0, 3, 2) \rangle = \mathbb{C}^3;$$

2. Já $\{(i, 1, 0), (0, 1, 0), (0, i, i)\}$ é uma base de $\mathbb{C}^3$, pois

$$x(i, 1, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, i, i) = (0, 0, 0) \implies \begin{cases} ix & = 0 \\ x + y + iz & = 0 \\ iz & = 0 \end{cases} \implies x = y = z = 0.$$

logo é LI e gera $\mathbb{C}^3$

3. $e = \left\{ \underbrace{(1,0,\ldots,0)}_{n}, \underbrace{(0,1,\ldots,0)}_{n}, \underbrace{(0,0,\ldots,1)}_{n} \right\}$ é uma base para $\mathbb{F}^n$, chamada canônica.

Teorema 6.4. Seja V um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_m$ vetores de V com mais do que m elementos é LD.

Demonstração. Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$ com $n > m$. Escreva

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}v_1 + \cdots + a_{m1}v_m \\ u_2 &= a_{12}v_2 + \cdots + a_{m2}v_m \\ &= \vdots \\ u_n &= a_{1n}v_1 + \cdots + a_{mn}v_m \end{aligned}$$

Afirmação: existem escalares $x_1 \ldots, x_n \in \mathbb{F}$, não todos nulos, tais que

$$x_1u_1 + \cdots + x_nu_n = 0.$$

De fato,

(6.1) $$firstequation$$

(6.2) $$secondequation \\ ontwolines$$

(6.3) $$thirdequation$$

Para que $x_1u_1 + \cdots + x_nu_n = 0$ basta que o sistema linear homogêneo ∎

7. Transformações lineares (14/01/2021)

8. Espaço vetorial $L(V, W)$ (15/01/2021)

9. Matriz de uma transformação linear (16/01/2021)

10. Funcionais lineares (18/01/2021)

11. Polinômios (19/01/2021)

12. Fatoração única (20/01/2021)

13. Determinantes (21/01/2021)

14. Formas canônicas: operadores diagonalizáveis (25/01/2021)

.

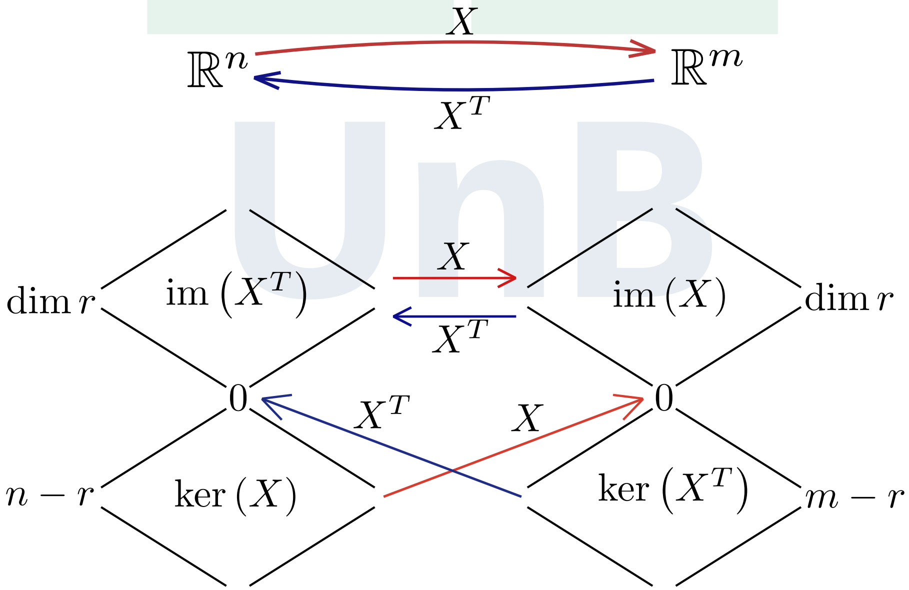
15. Operadores diagonalizáveis (26/01/2021)

16. Polinômio minimal (27/01/2021)

17. Formas de Jordan (28/01/2021)

Parte II.

Prática



18. Exercícios de Fixação (08/01/2021)

1. Seja $\mathbb{F}$ um corpo. Dizemos que um subconjunto $\mathbb{K}$ de $\mathbb{F}$ é um subcorpo de $\mathbb{F}$ se $\mathbb{K}$ munido das operações de adição e multiplicação de $\mathbb{F}$ é um corpo. Mostre que os seguintes subconjuntos são subcorpos de $\mathbb{C}$.

   (a) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right) = \left\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$; (b) $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\}$; (c) $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{2}\right) = \left\{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\right\}$.

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

2. Mostre que:

   (a) Todo subcorpo de $\mathbb{C}$ tem $\mathbb{Q}$ como subcorpo;

   (b) Todo corpo de característica 0 tem uma cópia de $\mathbb{Q}$;

   (c) Se $\mathbb{K}$ contém propriamente $\mathbb{R}$ e é um subcorpo de $\mathbb{C}$, então $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

3. Considere o corpo finito com 5 elementos $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\right\}$.

   (a) Mostre que

$$\mathbb{F} = \left\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \text{ e } i^2 = \overline{3}\right\}$$

   munido das operações

$$\begin{aligned} \overline{+}\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ \left(\left(a+bi\right),\left(c+di\right)\right) &\longmapsto \left(a+c\right)+\left(b+d\right)i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \bar{\cdot}\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ \left(\left(a+bi\right),\left(c+di\right)\right) &\longmapsto \left(ac+\bar{3}bd\right)+\left(ad+bc\right)i \end{aligned}$$

é um corpo com 25 elementos;

(b) Mostre que $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ é um subcorpo de $\mathbb{F}$. Qual é a característica de F?

Solução

(a) .

(b) .

4. Determine o conjunto solução de cada sistema linear dado.

(a) $\begin{cases} x-2y+z+w=1 \\ 2x+y-z=3 \\ 2x+y-5z+w=4 \end{cases}$ em $\mathbb{R}$,

(b) $\begin{cases} x-\sqrt{3}y+z+w=1+\sqrt{3} \\ \left(2+\sqrt{3}\right)x+y-z=3 \\ 2x+y-\left(1-\sqrt{3}\right)z+w=4 \end{cases}$ em $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$,

(c) $\begin{cases} x-2iy+2z-w=0 \\ \left(2+i\right)x+z+w=0 \\ 2ix+y-5z+\left(1+i\right)w=0 \end{cases}$ em $\mathbb{C}$,

(d) $\begin{cases} x-\bar{2}y+\bar{2}z-w=\bar{0} \\ \bar{2}x+z+w=\bar{0} \\ \bar{2}x+y-\bar{3}z+w=\bar{0} \end{cases}$ em $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$,

(e) $\begin{cases} x-\bar{2}iy+\bar{2}z-w=\bar{0} \\ \left(\bar{2}+i\right)x+z+w=\bar{0} \\ \bar{2}ix+y-\bar{3}z+\left(\bar{1}+i\right)w=\bar{0} \end{cases}$ em $\mathbb{F}$ de (a) da questão 3.

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

(d) .

(e) .

5. Mostre que se dois sistemas lineares 2×2 possuem o mesmo conjunto solução, então eles são equivalentes. Determine, se existir, dois sistemas lineares 2×3 com mesmo conjunto solução mas não equivalentes.

Solução

6. Considere o sistema linear sobre $\mathbb{Q}$

$$\begin{cases} x - 2y + z + 2w = 1 \\ x + y - z + w = 2 \\ x + 7y - 5z - w = 3 \end{cases}$$

Mostre que esse sistema não tem solução.

Solução

7. Determine todos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

tem solução.

Solução

8. Encontre duas matrizes A e B de ordens iguais a 3×3 tais que AB é uma matriz nula mas BA não é.

Solução

9. Mostre que toda matriz elementar é inversível e calcule a inversa de cada tipo.

Solução

10. Determine a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solução

11. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{4} \end{bmatrix}$$

com entradas no corpo com cinco elementos $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$. Calcule sua inversa.

Solução

12. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontre uma matriz na forma e uma matriz invertível P tal que $R = PA$.

Solução

19. Exercícios de Fixação (15/01/2021)

1. Defina sobre $\mathbb{R}^2$ as seguintes operações:

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x,y),(a,b)) &\longmapsto (x+a,0) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (c,(x,y)) &\longmapsto (cx,0) \end{aligned}$$

   O conjunto $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial com essas operações?

   Solução

2. Defina sobre $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ as seguintes operações:

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x,y),(a,b)) &\longmapsto (xa,yb) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (c,(x,y)) &\longmapsto (x^c,y^c) \end{aligned}$$

   Mostre que V é um espaço vetorial com essas operações.

   Solução

3. Resolva:
   (a) O vetor $(3,-1,0,-1)$ pertence ao subespaço $W = \langle (2,-1,3,2),(-1,1,1,3),(1,1,9,-5)\rangle$ de $\mathbb{R}^4$?

   (b) Determine uma base para o subespaço vertorial de $\mathbb{R}^5$ das soluções do sistema linear homogêneo $\begin{cases} x - 2y + z + w + t = 0 \\ 3x + y - z - 4t = 0 \\ 2x + y - 3z + w = 0 \end{cases}$;

   (c) Determine uma base para o subespaço vertorial de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^5$ das soluções do sistema linear homogêneo $\begin{cases} x - \overline{2}y + z + w + t = \overline{0} \\ \overline{2}x + y - z + t = \overline{0} \\ \overline{3}x + y + \overline{3}z + w = \overline{0} \end{cases}$,

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

4. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo F e U e W subespaços de V tais que $U + W = V$ e $U \cap W = \{0\}$. Mostre que cada vetor $v \in V$ é escrito de maneira única como $v = u + w$, onde $u \in U$ e $w \in W$.

Solução

5. Mostre que o conjunto dos polinômios sobre uma variável com coeficientes em $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ munido das operações usuais de soma e multiplicação por escalar. Determine uma base para esse espaço vetorial.

Solução

6. Seja S um subconjunto de um espaço vetorial V. Mostre que S é LD se, e somente se, existir um vetor $v \in S$ que pode ser escrito como combinação linear dos elementos de $S \setminus \{v\}$.

Solução

7. Considere o seguinte espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = \left\{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}.$$

(a) Mostre que $\alpha = \left\{1, 2 + x, 3x - x^2, x - x^3\right\}$ é uma base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$;

(b) Escreva as coordenadas de $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ com relação a base α;

(c) Determine as matrizes mudança de base $[I]_\alpha^e$ e $[I]_e^\alpha$, onde $e = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$.

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

8. Faça o que se pede:

(a) Considere a função $T\colon \mathbb{C} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$T(x+yi) = \begin{bmatrix} x+7y & 5y \\ -10y & x-7y \end{bmatrix}.$$

Moste que T é uma transformação linear. Prove que $T(z_1 z_2) = T(z_1)\, T(z_2),\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

(b) Mostre que a composta de transformações lineares é uma transformação linear;

(c) Mostre que uma função $T\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ é uma transformação linear se, e somente se, existem escalares $c_1, \ldots, c_n$ no corpo $\mathbb{F}$ tais que

$$T(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n.$$

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

9. Faça o que se pede:

(a) Considere $\mathbb{R}^4$ e seus subespaços $W = \langle (1,0,1,1), (0,-1,-1,-1) \rangle$ e $U = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0, z+t=0 \right\}$. Determine uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Nuc}(T) = U$ e $\operatorname{Im}(T) = W$;

(b) Considere $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$ e seus subespaços $W = \left\langle \left(\overline{1}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{1}\right), \left(\overline{0}, \overline{4}, \overline{4}, \overline{4}\right) \right\rangle$ e $U = \left\{ (x,y,z,w) \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4 \mid x+y=\overline{0}, z+t=\overline{0} \right\}$. Determine uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Nuc}(T) = V$ e $\operatorname{Im}(T) = W$;

(c) Determine uma base para o núcleo e uma base para a imagem da transformação linear $T\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x+yi, a+bi) = (x+2a, -x+2b)$.

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

10. Sejam V e W espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{F}$ e $T\colon V \to W$. Mostre que T é injetora se, e somente se, T leva subconjunto LI em subconjunto LI.

Solução

11. Seja $T\colon \mathbb{C}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ a transformação linear definida por $T(1,0,0) = 1 + ix^2$, $T(0,1,0) = x + x^2$ e $T(0,0,1) = i + x$. Exiba uma fórmula para T e decida se T é um isomorfismo.

Solução

12. Seja F um corpo e $T\colon \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ dada por $T(x,y) = (x+y, x)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{F}^2$. Mostre que T é um isomorfismo e exiba uma fómula para T^{-1}.

Solução

13. Considere as bases $\alpha = \{1, 1+x, 1+x^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\beta = \{(1,0), (i,0), (1,1), (1,i)\}$ de $\mathbb{C}^2$ como espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Determine as coordenadas da transformação linear $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^2$ dada por $T\left(a + bx + cx^2\right) = (a + bi, b + ci)$ com relação à base de $L\left(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \mathbb{C}^2\right)$ construída no Teorema 2-(ii) da Aula 9.

Solução

14. Considere a base $\alpha = \{(1,0,-1), (1,1,1), (2,2,0)\}$ de $\mathbb{C}^3$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Determine a base dual α^* de $\left(\mathbb{C}^3\right)^*$.

Solução

15. Considere $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y) = (2x+3y, y-x, 3x)$ e as bases $\alpha = \{(1,2),(2,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Calcule $[T]^{\alpha}_{\beta}$, $[T]^{e_1}_{\beta}$ e $[T]^{\alpha}_{e_2}$ onde e_1 é a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e e_2 é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Solução

16. Sejam $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $G\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [G]^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ e $\beta = \{1, 1+x, 1+x^2\}$ é base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Determine bases para $\operatorname{Nuc}(T), \operatorname{Im}(T), \operatorname{Nuc}(G\circ T)$ e $\operatorname{Im}(G\circ T)$.

Solução

17. Seja $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ a transformação linear definida por

$$T\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ z-w & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine a matriz $[T]$ de T com relação à base canônica e;

(b) Determine a matriz de T com relação à base

$$\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\};$$

(c) Exiba a matriz M tal que $[T]_{\beta} = M^{-1}[T]M$.

Solução

(a)

(b)

(c)

18. Seja $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ a transformação linear definida por

$$T\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{0} & x \\ z+\overline{6}w & \overline{0} \end{bmatrix}.$$

(a) Determine a matriz $[T]$ de T com relação à base canônica e;

(b) Determine a matriz de T com relação à base

$$\alpha = \left\{\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{bmatrix}.\right\}$$

(c) Exiba a matriz M tal que $[T]_\beta = M^{-1}[T]M$.

19. Seja $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ a transformação linear definida por

$$Txyzw = \overline{0}xz + \overline{6}w\overline{0}$$

(a) Determine a matriz $[T]$ de T com relação à base canônica e;

(b) Determine a matriz de T com relação à base
$$\alpha = \left\{\overline{1001}, \overline{0110}, \overline{10110101}\right\}$$

(c) Exiba a matriz M tal que $[T]_\beta = M^{-1}[T]M$.

Solução

(a)

(b)

(c)

20. Seja $T\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ uma transformação linear cuja matriz com relação à base canônica seja

$$110-1010-1-1$$

(a) Determine $T(x,y,z)$;

(b) Qual é a matriz do operador linear T com relação à base $\alpha = \{(-1,1,0), (1,-1,1), (0,1,-1)\}$?

(c) O operador T é invertível? Justifique!

Solução

(a)

(b)

(c)

20. Exercícios de Fixação (27/01/2021)

1. Mostre que $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + 2y - z, -2x - 3y + z, 2x + 2y - 2z)$ é diagonalizável.

Solução

.

2. Em cada um dos casos abaixo, decida se o operador linear $T\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ dado por sua matriz $[T]_\beta$ é diagonalizável. Em caso positivo, determine uma base de autovetores e sua forma diagonal.

(a)
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F} = \mathbb{C};$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F} = \mathbb{C};$$

(c)
$$\begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F} = \mathbb{R};$$

(d)
$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F} = \mathbb{C};$$

(e)
$$\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{6} & \overline{3} \\ \overline{10} & \overline{6} & \overline{10} \\ \overline{6} & \overline{12} & \overline{5} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F} = \mathbb{Z}/13\mathbb{Z};$$

(f)
$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -8 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F} = \mathbb{R}.$$

Solução

.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

3. Seja $T\colon V \to V$ um operador linear com V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$. Mostre que:

(a) Se $p_T(x)$ possui todas as raízes com multiplicidade algébrica igual a 1, então T é diagonalizável;

(b) Se $\dim(\operatorname{Im}(T)) = m$, então T tem no máximo $m+1$ autovalores;

(c) Se $\dim(V) = 2$ e $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, então a matriz de T é semelhante a uma das matrizes:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}; \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Solução

.

(a)

(b)

(c)

4.

Mostre que se $B, M \in \mathcal{M}_{m\times m}(F)$, com M invertível, então $\left(M^{-1}BM\right)^n = M^{-1}B^nM$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(b) Calcule A^n, com $n \in \mathbb{N}$, onde

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix};$$

(c) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{C}).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, determine $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ tal que $B^n = A$.

Solução

(a)

(b)

(c)

5. Seja $T\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ um operador linear que tem como autovetores $(3,1)$ e $(-2,1)$ associados aos autovaloes -2 e 3, respectivamente. Calcule $T(x,y)$.

Solução

.

6. Seja $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ um operador linear cuja matriz em relação à base

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é dada por

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz $M \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tal que $M^{-1}[T]_\beta M$ é diagonal.

Solução

.

7. Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial V de todas funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis. Seja W o subespaço de V gerado pelas funções $f_1\colon x \mapsto e^{2x}$, $f_2\colon x \mapsto e^{2x}\operatorname{sen}(x)$, $f_3\colon x \mapsto e^{2x}\cos(x)$. Mostre que W é invariante pelo operador linear $D\colon V \to V$ definido por $D(f) = f'$, para todo $f \in V$. Mostre que $\beta = \{f_1, f_2, f_3\}$ é uma base de W. Determine a matriz de $D|_W$ em relação a base β. Determine os autovaloes e autovetores de D. D é diagonalizável?

Solução

.

8. Seja $T\colon V \to V$ um operador linear, com V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo F. Mostre que:
   (a) Se $p_T(x) = x^n$, mostre que existe $m \geq 1$ tal que $T^m = 0$;
   (b) Se $m_T(x) = (x - \lambda)$, mostre que T é diagonalizável.

Solução

(a)

(b)

9. Encontre todas as possibilidades para o polinômio minimal de um operador linear $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ com polinômio característico:

   (a) $p_T(x) = -(x-3)^3(x-2)^2$;

   (b) $p_T(x) = -(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$;

   (c) $p_T(x) = -(x-1)^m, m \geq 1$.

Solução

(a)

(b)

(c)

Parte III.

Tutorial

A. Overview about Julia

En agosto del 2018 se lanzó la versión definitiva LTS y actualmente estamos en la versión `1.5.6`.

Para ser eficiente, el desarrollo del lenguaje se planteó como objetivos:

- No interpretable, sino compilable, uso de LLVM como compilador JIT (Just in time). La primera ejecución va lenta porque compila y ejecuta, la segunda va mucho más rápido.
- Tipado de variables recomendado, pero no obligatorio.
- Aversión a las variables globales.
- Paralización. Cualquier bucle será tan rápido como una operación vectorial.
- Desde un principio, se concibió para distribuir cálculos entre distintos procesadores.
- Club del petaflop: Julia, C, C++, Java y Fortran.
- Modular, permite desarrollos independientes.
- Políglota. Se puede invocar funciones de C, Fortran, R, Python, etc.

```
julia> 1/0
Inf

julia>   3^2#ans
9

julia>   eps()
2.220446049250313e-16

julia>   typeof(π)
Irrational{:π}

julia>   tan(π/4)
0.9999999999999999
```

```
julia>  √3
1.7320508075688772

julia>  ADD = 0x00AB0
0x00000ab0
```

Julia is a modern, expressive, high-performance programming language designed for scientific computation and data manipulation. Originally developed by a group of computer scientists and mathematicians at MIT led by Alan Edelman, Julia combines three key features for highly intensive computing tasks as perhaps no other contemporary programming language does: it is fast, easy to learn and use, and open source.

Algorithms for Optimization

B. LinearAlgebra from Julia

Não há necessidade de instalar nenhum programa, você só precisa de uma conta do Google e seguir as instruções do repositório[1].

```julia
f(x) = x.^2 + π
const ⊗ = kron
const Σ = sum # Although `sum` may be just as good in the code.
# Calculate Σ_{j=1}^5 j^2
Σ([j^2 for j ∈ 1:5])
```

Listing B.1: Programa `main.jl`.

.

B.1. Matrix calculus

For a comprensihve tutorial about Julia look
OLS regression coefficients=0.711.84

```
julia> using Pkg;Pkg.status()
Status `~/.julia/environments/v1.5/Project.toml`
  [44d3d7a6] Weave v0.10.2
```

[1] julia_on_collab.ipynb

Índice