

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_j \times s_j}.$$

Álgebra Linear II

XLIX Escola de Verão em Matemática da UnB

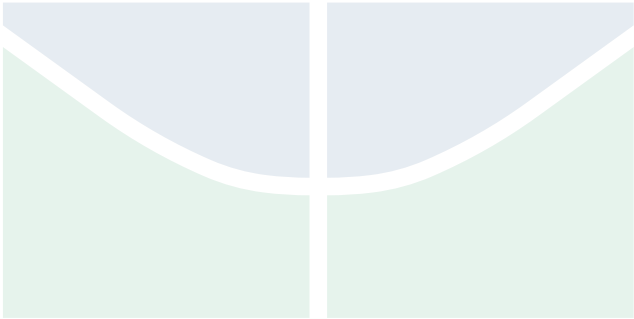
Aulas do professor Alex Carrazedo Dantas*

Última modificação: 18 de Janeiro de 2021 às 22 : 42 : 39.

<https://carlosal1015.github.io/Algebra-linear-II/main.pdf>

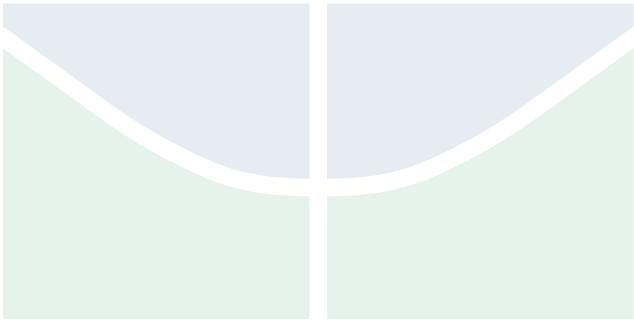
Sumário

Referências bibliográficas	5
I. Teoria	6
1. Corpos e Sistemas Lineares (06/01/2021)	7
2. Sistemas lineares (07/01/2021)	11
3. Matrizes (08/01/2021)	13
4. Matrizes e sistemas lineares (09/01/2021)	16
5. Espaços vetoriais (12/01/2021)	18
6. Transformações lineares (14/01/2021)	19
7. Espaço vetorial $L(V, W)$ (15/01/2021)	20
8. Matriz de uma transformação linear (16/01/2021)	21
9. Funcionais lineares (18/01/2021)	22
II. Prática	23
10.Exercícios de Fixação (08/01/2021)	24
11.Exercícios de Fixação (15/01/2021)	28
III. Tutorial	34
A. Overview about Julia	35



UnB

B. LinearAlgebra from Julia	36
B.1. Matrix calculus	36
Índice	37



UnB

Introdução ao curso (04/01/2021)

O professor [Alex Carrazedo Dantas](#) é especialista no *Teoria dos grupos*. Em um curso presencial você pode discutir mais, enquanto em um curso remoto, cada aula tem um pdf [Moodle MAT](#) e uma gravação da sessão. Se você tiver dúvidas sobre o moodle, peça ajuda a [Carol Lafetá](#)¹.

Ementa

1. Sistemas lineares e matrizes.
2. Espaços vetoriais e transformações lineares.
3. Polinômios e determinantes
4. Decomposições primárias e formas racionais e de Jordan.
5. Produto interno e teorema espectral.
6. Formas multilineares.

Critério de avaliação

Menção em disciplina	Equivalência numérica
Superior (SS)	9 – 10
Média Superior (MS)	7 – 8.9
Média (MM)	5 – 6.9

Serão aplicadas 2 provas, de acordo com o cronograma abaixo, as quais serão atribuídas as notas x e y .

$$MF = \frac{x + 3y}{4}.$$

O aluno deverá obter média final igual ou superior a 5 pontos e 75% de frequência para ser aprovado.

Tutores

- [Sara Raissa Silva Rodrigues.](#)
- [Geraldo Herbert Beltrão de Souza.](#)
- [Mattheus Pereira da Silva Aguiar.](#)

¹lafeta.carol@gmail.com

Referências bibliográficas

- [1] Flávio Ulhoa Coelho e Mary Lilian Lourenço. *Curso de Álgebra Linear, Um - Edusp*. EDUSP, 2005. URL: <https://www.edusp.com.br/livros/curso-de-algebra-linear>.
- [2] P. R. Halmos. *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1958. ISBN: 978-0-387-90093-3. DOI: [10.1007/978-1-4612-6387-6](https://www.springer.com/gp/book/9780387900933). URL: <https://www.springer.com/gp/book/9780387900933>.
- [3] Kenneth Hoffman e Ray Kunze. *Linear algebra*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc.
- [4] Serge Lang. *Linear Algebra*. 3ª ed. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1987. ISBN: 978-0-387-96412-6. DOI: [10.1007/978-1-4757-1949-9](https://www.springer.com/gp/book/9780387964126). URL: <https://www.springer.com/gp/book/9780387964126>.
- [5] Ph D. Seymour Lipschutz e Ph D. Marc Lars Lipson. *Schaum's Outline of Linear Algebra, Sixth Edition*. McGraw-Hill Education, 2018. ISBN: 978-1-260-01144-9. URL: <https://www.accessengineeringlibrary.com/content/book/9781260011449>.

UnB



Parte I.

Teoria

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_j \times s_j}.$$

1. Corpos e Sistemas Lineares (06/01/2021)

Definição 1.1 (Corpo). Um *corpo* é um conjunto não vazio \mathbb{F} munido de duas operações: adição mais e multiplicação.

$$\begin{aligned} +: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} & \cdot: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (x, y) &\longmapsto x + y & (x, y) &\longmapsto x \cdot y \end{aligned}$$

e tais que em $(\mathbb{F}, +)$

(A1) (Associatividade na adição) $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{F};$

(A2) (Existência de neutro aditivo) $\exists 0 \in \mathbb{F}$ tal que $x + 0 = 0 + x = x, \forall x \in \mathbb{F};$

(A3) (Existência de elemento oposto o inverso aditivo) Dado $x \in \mathbb{F}$, existe $-x \in \mathbb{F}$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0;$

(A4) (Comutatividade na adição) $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{F};$

e $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$

(M1) (Associatividade na multiplicação) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x, y, z \in \mathbb{F};$

(M2) (Existência do elemento neutro na multiplicação) $\exists 1 \in \mathbb{F}$ tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{F};$

(M3) (Existência inverso multiplicativo) Dado $x \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, existe $x^{-1} \in \mathbb{F}$ tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1;$

(M4) (Comutatividade na multiplicação) $x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in \mathbb{F};$

(D) (Distributiva) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall x, y, z \in \mathbb{F}.$

Proposição 1.2. $x \cdot 0 = 0, \forall x \in \mathbb{F}.$

Demonstração. $x \cdot 0 \stackrel{A2}{=} x \cdot (0 + 0) \stackrel{D}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0.$ Assim

$$\begin{aligned} x \cdot 0 + \underbrace{x \cdot 0 + (-x \cdot 0)}_{=0} &= \underbrace{x \cdot 0 + (-x \cdot 0)}_{=0} \\ x \cdot 0 + 0 &\stackrel{A3}{=} 0 \\ x \cdot 0 &\stackrel{A2}{=} 0. \end{aligned}$$

Exemplo 1.3.

- a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ não é um corpo. De fato não existe o inverso multiplicativo de 2 em \mathbb{Z} , ou seja, a equação $2 \cdot x = 1$ não se resolve em \mathbb{Z} ;
- b) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é um corpo, onde $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ e $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ e $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
- c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um corpo (conjunto dos números reais);
- d) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um corpo, onde $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, e i^2 = -1\}$,

$$\begin{aligned} +: \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} & \cdot: \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ((a + bi), (c + di)) &\longmapsto (a + c) + (b + d)i & ((a + bi), (c + di)) &\longmapsto (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 = \\ &= ac + (-1)bd + (ad + bc)i = \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

\mathbb{C} é chamado del conjunto nos números complexos. Tome $a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($0 = 0 + 0i$).

Assim

$$\begin{aligned} (a + bi)(a - bi) &= a^2 + b^2 + (ab - ba)i = \\ &= a^2 + b^2 \neq 0 \\ (a + bi) \underbrace{(a - bi)(a^2 + b^2)^{-1}} &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{Logo } (a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

- e) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é um corpo, onde p é primo e $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$, $\bar{a} = \{a + pn \mid n \in \mathbb{Z}\}$ e $0 \leq a \leq p - 1$.

$$\begin{aligned} +: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \cdot: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\longmapsto \overline{a + b} & (\bar{a}, \bar{b}) &\longmapsto \overline{a \cdot b} \end{aligned}$$

Tome $p = 3$. Assim $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$.

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

\cdot	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$$\bar{2} + \bar{2} = \overline{2+2} = \bar{4} = \overline{3 \cdot 1 + 1} = \bar{1}.$$

Note que a equação $x^2 + \bar{1} = \bar{0}$ não tem solução em $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Defina: $F = \{\bar{a} + \bar{b}i \mid \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \text{ e } i^2 = \bar{2}\}$.

$$+: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$$

$$(\bar{a} + \bar{b}i, \bar{c} + \bar{d}i) \mapsto (\bar{a} + \bar{c}) + (\bar{b} + \bar{d})i$$

$$\cdot: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$$

$$(\bar{a} + \bar{b}i, \bar{c} + \bar{d}i) \mapsto (\bar{a} \cdot \bar{c} + 2\bar{b} \cdot \bar{d}) + (\bar{a} \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot \bar{c})i$$

Mostre que $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ é um corpo com 9 elementos.

Definição 1.4. A característica de um corpo \mathbb{F} é o menor inteiro positivo n (se existir) tal que $\underbrace{1 + \cdots + 1}_n = 0$.

Se tal n não existe, diremos que F tem característica 0.

Proposição 1.5. Seja \mathbb{F} um corpo. Sea característica de F é um inteiro positivo n , então n é primo.

Demonstração. Exercício. ■

Exemplo 1.6.

a) Resolva em \mathbb{Q} o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 4y = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -2x - 8y = -4 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -5y = -3 \end{cases} \implies y = \frac{3}{5}$$

$$2x + 3 \cdot \frac{3}{5} = 1$$

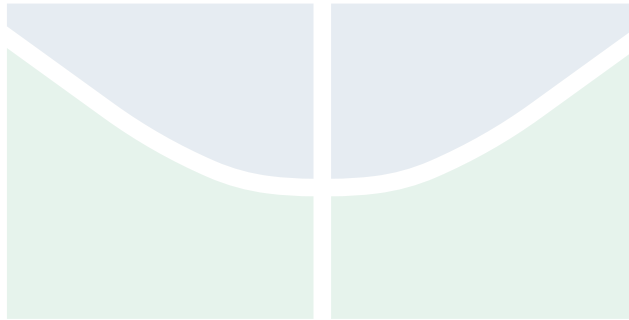
$$2x + \frac{9}{5} = 1 \implies 2x = -\frac{4}{5} \implies x = -\frac{2}{5}.$$

Daí $(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ é solução para o sistema.

b) Resolva em $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ o sistema $\begin{cases} \bar{2}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + y = \bar{0} \end{cases}$.

$$\begin{cases} \bar{2}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ y = \bar{1} \end{cases} \implies \bar{2}x + \bar{2} \cdot \bar{1} = \bar{1} \implies \begin{aligned} \bar{2}x &= \bar{1} - \bar{2} \\ \bar{2}x &= -\bar{1} \\ \bar{2}x &= \bar{2} \\ x &= \bar{1}. \end{aligned}$$

Daí $(\bar{1}, \bar{1})$ é solução do sistema.



UnB

2. Sistemas lineares (07/01/2021)

Definição 2.1 (Sistema linear). Um corpo é.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ & a_2 & \cdots & a_2 \\ & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & & a_n \end{pmatrix}$$

$$c_1 (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + c_m (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) = c_1 y_1 + \cdots + c_m y_m$$

$$(c_1 a_{11} + \cdots + c_m a_{m1}) x_1 + \cdots + (c_1 a_{1n} + \cdots + c_m a_{mn}) x_n = c_1 y_1 + \cdots + c_m y_m$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + w = 5 \\ x - y + 2z - 2w = 1 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 2x + 3y - z + w = 5 \\ 2x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ 5y - 5z + 5w = 3 \\ 3y - 3z + 5w = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2w = 1 \\ y - z + w = 3/5 \\ y - z + 5/3w = 1/3 \end{cases}$$

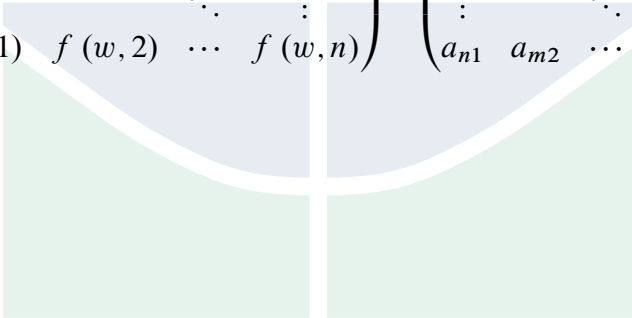
$$\begin{cases} x + z - w = 8/5 \\ y - z + w = 3/5 \\ 2/3w = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} = \frac{5-9}{15} = -\frac{4}{15} \\ w = -\frac{12}{30} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\{(x,y,z,\omega)\in\mathbb{Q}^4\mid x=-z+\tfrac{6}{5},y=z+1,z\in\mathbb{Q},\omega=-\tfrac{2}{5}\}=\\ &=\{(-z+\tfrac{6}{5},z+1,z,-\tfrac{2}{5})\mid z\in\mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{l}x+y=2\\x-y=0\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}x+2y=5\\x-y=-1\end{array}\right.$$

$$f\colon\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}\rightarrow F=f\left(i,j\right)=a_{ij}.$$

$$\begin{pmatrix} f\left(1,1\right) & f\left(1,2\right) & \cdots & f\left(1,n\right) \\ f\left(2,1\right) & f\left(2,2\right) & \cdots & f\left(2,n\right) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f\left(x,1\right) & f\left(w,2\right) & \cdots & f\left(w,n\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{wn} \end{pmatrix}$$



UnB

3. Matrizes (08/01/2021)

Podemos denotar uma matriz A sobre um corpo \mathbb{F} de ordem $m \times n$ por $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Sejam $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jl})_{n \times p}$ duas matrizes sobre um corpo \mathbb{F} . Definimos o produto de A por B como a matriz $C = (c_{il})_{m \times p}$ dada por

$$c_{il} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jl} = a_{i1}b_{1l} + \cdots + a_{in}b_{nl}$$

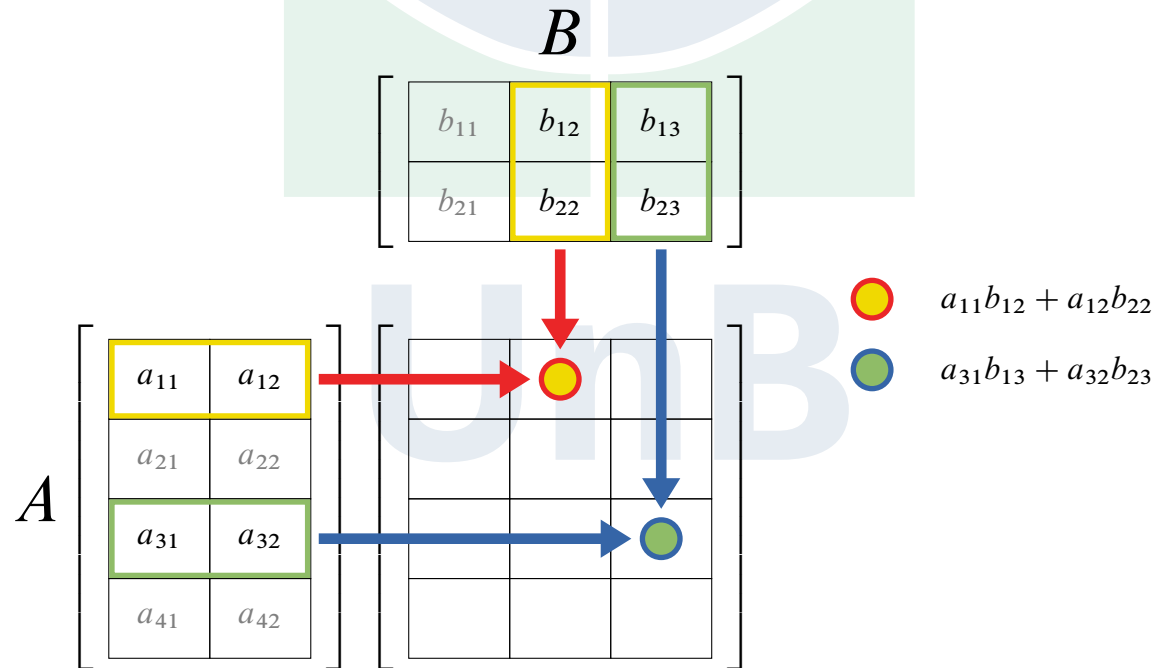


Figura 3.1.: Ilustração.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.1. Temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 14 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}.$$

Proposição 3.2. Sejam matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{jl})_{n \times p}$ e $C = (c_{lk})_{p \times q}$ matrizes sobre um corpo \mathbb{F} . Então $(AB)C = A(BC)$.

Demonstração. Veja que $(AB)C = (\alpha_{ik})_{m \times q}$, $AB = (d_{il})_{m \times p}$ onde

$$d_{il} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_{ik} &= \sum_{l=1}^p d_{il} c_{lk} = \sum_{l=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl} \right) c_{lk} = \\ &= \sum_{l=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl} c_{lk} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{l=1}^p b_{jl} c_{lk} \right) = \beta_{ik} \end{aligned}$$

com $A(BC) = (\beta_{ik})_{m \times q}$.

Chamaremos a matriz quadrada $I_m = (\delta_{ij})_{m \times m}$ definida por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i = j, \\ 0 & , \text{ se } i \neq j, \end{cases}$$

de matriz identidade de ordem $m \times m$.

Note que se $A = (a_{jl})_{m \times n}$, então $I_m A = A$, e se $B = (b_{li})_{n \times m}$, então $B I_m = B$.

$I_m A = (c_{il})_{m \times m}$ é tal que $c_{il} = \sum_{j=1}^m \delta_{ij} a_{jl} = a_{il}$ com $1 \leq i \leq m$, e $I_m A = A$.

Exemplo 3.3. Se $m = 3$, então

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dizemos que uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{m \times m}$ tem inversa se existe uma matriz $B = (b_{ij})_{m \times m}$ tal que $AB = BA = I_m$. Denotaremos a matriz B por A^{-1} .

Definição 3.4. Seja $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Uma matriz quadrada de ordem $m \times m$ E é dita elementar se E é de uma das formas

1. $E_1 = (e_{ij})_{m \times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{se } i \neq k \\ \delta_{ij}, & \text{se } i = k \end{cases}$$

$$m = 3, k = 2$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com k um inteiro fixo entre 1 e m ;

2. $E_2 = (e_{ij})_{m \times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{se } i \neq l \text{ e } i \neq k \\ \delta_{lj}, & \text{se } i = k \\ \delta_{kj}, & \text{se } i = l \end{cases}$$

$$m = 3, k = 2, l = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

com $k < l$ inteiros fixos entre 1 e m ;

3. $E_3 = (e_{ij})_{m \times m}$, onde

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq k \\ \delta_{kj} + c \cdot \delta_{lj}, & i = k \end{cases}$$

$$m = 3, k = 2, l = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.5. Calcule

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3 \ -14 \ 4 \ -1 \ 51 \ 1 \ -1 \ 2)$$

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times m}$ o efeito de multiplicar uma matriz elementar E por A pode ser colocado como:

1. $E_1 A$: multiplica uma linha k de A por um escalar c ;
2. $E_2 A$: troca duas linhas l e k de posições ($k < l$);
3. $E_3 A$: soma uma linha k com outra linha l multiplicada por um escalar $c \in \mathbb{F}$.

4. Matrizes e sistemas lineares (09/01/2021)

1

Definição 4.1 (Matriz reduzida por linhas). Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ sobre \mathbb{F} é dita reduzida por linhas se

1. O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é igual 1;
2. cada coluna que possui o primeiro elemento não nulo de uma linha não possui todos os outros elementos iguais a 0;

Seja além disso, esta matriz A satisfaz

3. todas linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não nulas;
4. Se $1, \dots, r$ ($r \leq m$) são as linhas não nulas de A com os primeiros elementos não nulos ocorrendo nas colunas k_1, k_2, k_r , respectivamente, então $k_1 < k_2 < \dots < k_r$, dizemos que A está na forma escada reduzida.

Dizemos que A está na forma escada reduzida.

Exemplo 4.2. 1. As seguintes matrizes estão na forma reduzida:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

2. As seguintes matrizes estão na forma escada reduzida

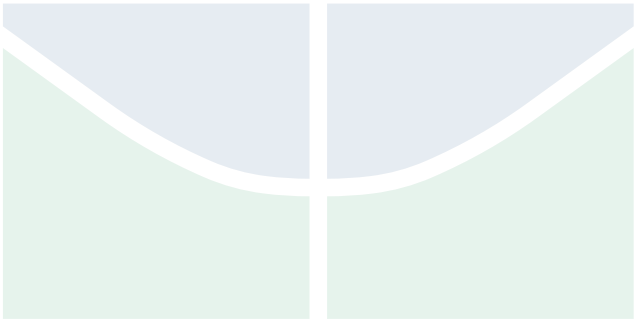
a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

- Observação 4.3.**
- 1. Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ está na forma escada reduzida e tem a última linha não nula, então $A = I_m$;
 - 2. Se $AX = 0$ e

Definição 4.4. .

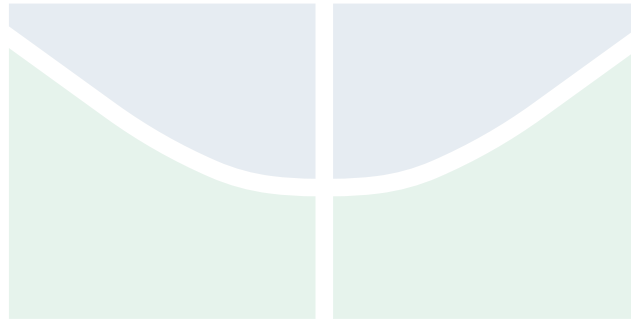


UnB

5. Espaços vetoriais (12/01/2021)

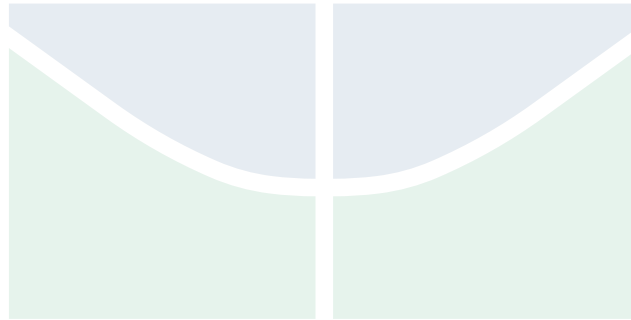
Definição 5.1. Um conjunto não vazio V é chamado de espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{F} se em V estão definidas duas operações

$$\begin{aligned} +: V \times V &\longrightarrow V & \cdot: \mathbb{F} \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longmapsto u + v & (c, v) &\longmapsto c \cdot v \end{aligned}$$



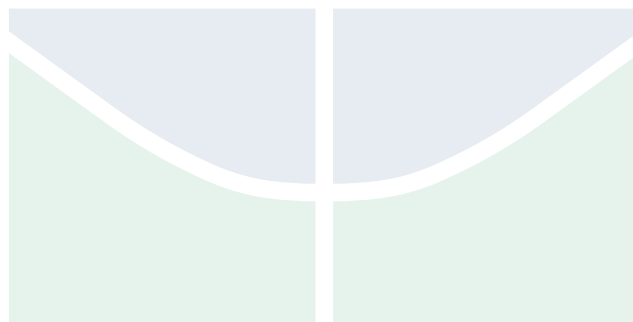
UnB

6. Transformações lineares (14/01/2021)



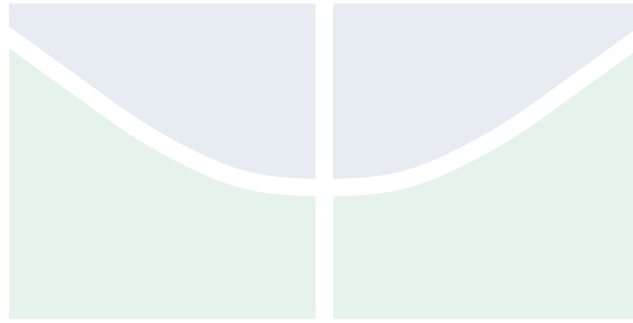
UnB

7. Espaço vetorial $L(V, W)$ (15/01/2021)



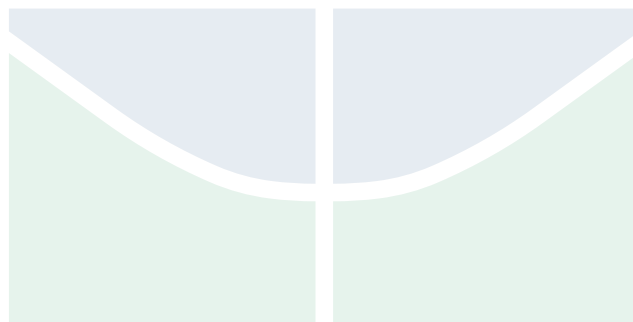
UnB

8. Matriz de uma transformação linear (16/01/2021)



UnB

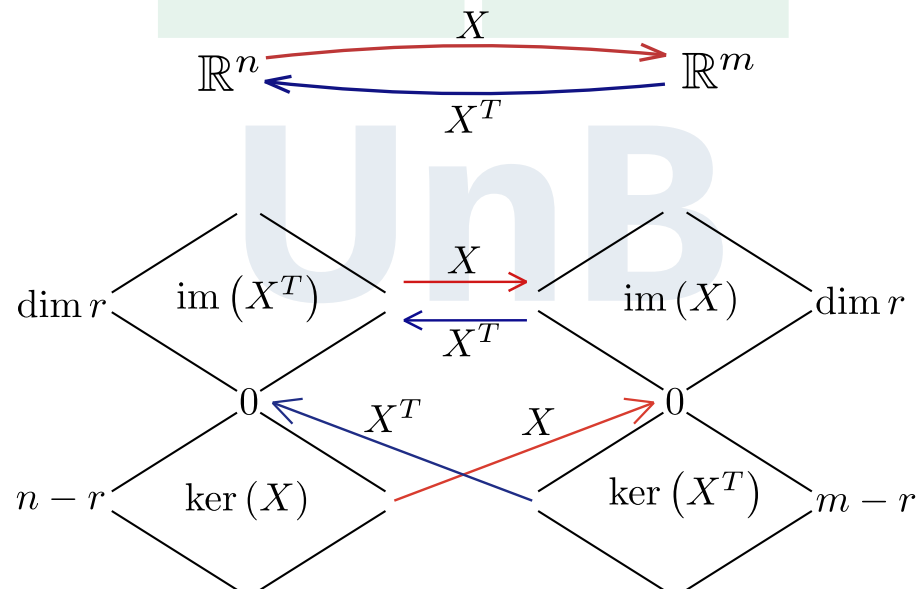
9. Funcionais lineares (18/01/2021)



UnB

Parte II.

Prática



10. Exercícios de Fixação (08/01/2021)

1. Seja \mathbb{F} um corpo. Dizemos que um subconjunto \mathbb{K} de \mathbb{F} é um subcorpo de \mathbb{F} se \mathbb{K} munido das operações de adição e multiplicação de \mathbb{F} é um corpo. Mostre que os seguintes subconjuntos são subcorpos de \mathbb{C} .

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\};$

(b) $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\};$

(c) $\mathbb{Q}(i\sqrt{2}) = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\}.$

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

2. Mostre que:

(a) Todo subcorpo de \mathbb{C} tem \mathbb{Q} como subcorpo;

(b) Todo corpo de característica 0 tem uma cópia de \mathbb{Q} ;

(c) Se \mathbb{K} contém propriamente \mathbb{R} e é um subcorpo de \mathbb{C} , então $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

3. Considere o corpo finito com 5 elementos $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}.$

(a) Mostre que

$$\mathbb{F} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \text{ e } i^2 = \bar{3}\}$$

munido das operações

$$\begin{aligned} \overline{\cdot}: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} & \cdot: \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ ((a + bi), (c + di)) &\longmapsto (a + c) + (b + d)i & ((a + bi), (c + di)) &\longmapsto (ac + \overline{3}bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

é um corpo com 25 elementos;

(b) Mostre que $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ é um subcorpo de \mathbb{F} . Qual é a característica de F ?

Solução

(a) .

(b) .

4. Determine o conjunto solução de cada sistema linear dado.

$$(a) \begin{cases} x - 2y + z + w = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ 2x + y - 5z + w = 4 \end{cases} \text{ em } \mathbb{R},$$

$$(c) \begin{cases} x - 2iy + 2z - w = 0 \\ (2 + i)x + z + w = 0 \\ 2ix + y - 5z + (1 + i)w = 0 \end{cases} \text{ em } \mathbb{C},$$

$$(d) \begin{cases} x - \overline{2}y + \overline{2}z - w = \overline{0} \\ \overline{2}x + z + w = \overline{0} \\ \overline{2}x + y - \overline{3}z + w = \overline{0} \end{cases} \text{ em } \mathbb{Z}/5\mathbb{Z},$$

$$(b) \begin{cases} x - \sqrt{3}y + z + w = 1 + \sqrt{3} \\ (2 + \sqrt{3})x + y - z = 3 \\ 2x + y - (1 - \sqrt{3})z + w = 4 \end{cases} \text{ em } \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$

$$(e) \begin{cases} x - \overline{2}iy + \overline{2}z - w = \overline{0} \\ (\overline{2} + i)x + z + w = \overline{0} \\ \overline{2}ix + y - \overline{3}z + (\overline{1} + i)w = \overline{0} \end{cases} \text{ em } \mathbb{F} \text{ de (a) da questão 3.}$$

Solução

(a) .

(b) .

(c) .

(d) .

(e) .

5. Mostre que se dois sistemas lineares 2×2 possuem o mesmo conjunto solução, então eles são equivalentes. Determine, se existir, dois sistemas lineares 2×3 com mesmo conjunto solução mas não equivalentes.

Solução

6. Considere o sistema linear sobre \mathbb{Q}

$$\begin{cases} x - 2y + z + 2w = 1 \\ x + y - z + w = 2 \\ x + 7y - 5z - w = 3 \end{cases}$$

Mostre que esse sistema não tem solução.

Solução

7. Determine todos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

tem solução.

Solução

8. Encontre duas matrizes A e B de ordens iguais a 3×3 tais que AB é uma matriz nula mas BA não é.

Solução

9. Mostre que toda matriz elementar é inversível e calcule a inversa de cada tipo.

Solução

10. Determine a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solução

11. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \end{bmatrix}$$

com entradas no corpo com cinco elementos $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Calcule sua inversa.

Solução

12. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontre uma matriz na forma e uma matriz invertível P tal que $R = PA$.

Solução

11. Exercícios de Fixação (15/01/2021)

1. Defina sobre \mathbb{R}^2 as seguintes operações:

$$\begin{aligned} +: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x, y), (a, b)) &\longmapsto (x + a, 0) & (c, (x, y)) &\longmapsto (cx, 0) \end{aligned}$$

O conjunto \mathbb{R}^2 é um espaço vetorial com essas operações?

Solução

2. Defina sobre $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ as seguintes operações:

$$\begin{aligned} +: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x, y), (a, b)) &\longmapsto (xa, yb) & (c, (x, y)) &\longmapsto (x^c, y^c) \end{aligned}$$

Mostre que V é um espaço vetorial com essas operações.

Solução

3. Resolva:

(a) O vetor $(3, -1, 0, -1)$ pertence ao subespaço $W = \langle (2, -1, 3, 2), (-1, 1, 1, 3), (1, 1, 9, -5) \rangle$ de \mathbb{R}^4 ?

(b) Determine uma base para o subespaço vetorial de \mathbb{R}^5 das soluções do sistema linear homogêneo
$$\begin{cases} x - 2y + z + w + t = 0 \\ 3x + y - z - 4t = 0 \\ 2x + y - 3z + w = 0 \end{cases}$$

(c) Determine uma base para o subespaço vetorial de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^5$ das soluções do sistema linear homogêneo
$$\begin{cases} x - \bar{2}y + z + w + t = \bar{0} \\ \bar{2}x + y - z + t = \bar{0} \\ \bar{3}x + y + \bar{3}z + w = \bar{0} \end{cases}$$

Solução

- (a) .
- (b) .
- (c) .

4. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo F e U e W subespaços de V tais que $U + W = V$ e $U \cap W = \{0\}$. Mostre que cada vetor $v \in V$ é escrito de maneira única como $v = u + w$, onde $u \in U$ e $w \in W$.

Solução

5. Mostre que o conjunto dos polinômios sobre uma variável com coeficientes em \mathbb{R} é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} munido das operações usuais de soma e multiplicação por escalar. Determine uma base para esse espaço vetorial.

Solução

6. Seja S um subconjunto de um espaço vetorial V . Mostre que S é LD se, e somente se, existir um vetor $v \in S$ que pode ser escrito como combinação linear dos elementos de $S \setminus \{v\}$.

Solução

7. Considere o seguinte espaço vetorial sobre \mathbb{R} :

$$\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

- (a) Mostre que $\alpha = \{1, 2 + x, 3x - x^2, x - x^3\}$ é uma base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$;
- (b) Escreva as coordenadas de $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ com relação a base α ;
- (c) Determine as matrizes mudança de base $[I]_{\alpha}^e$ e $[I]_e^{\alpha}$, onde $e = \{1, x, x^2, x^3\}$.

Solução

- (a) .
- (b) .
- (c) .

8. Faça o que se pede:

(a) Considere a função $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$T(x + yi) = \begin{bmatrix} x + 7y & 5y \\ -10y & x - 7y \end{bmatrix}.$$

Mostre que T é uma transformação linear. Prove que $T(z_1 z_2) = T(z_1) T(z_2)$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

(b) Mostre que a composta de transformações lineares é uma transformação linear;

(c) Mostre que uma função $T: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$ é uma transformação linear se, e somente se, existem escalares c_1, \dots, c_n no corpo \mathbb{F} tais que

$$T(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n.$$

Solução

- (a) .
- (b) .
- (c) .

9. Faça o que se pede:

(a) Considere \mathbb{R}^4 e seus subespaços $W = \langle (1, 0, 1, 1), (0, -1, -1, -1) \rangle$ e $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0, z + t = 0\}$. Determine uma transformação linear $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\text{Nuc}(T) = U$ e $\text{Im}(T) = W$;

(b) Considere $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$ e seus subespaços $W = \langle (\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{4}, \bar{4}, \bar{4}) \rangle$ e $U = \{(x, y, z, w) \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4 \mid x + y = \bar{0}, z + t = \bar{0}\}$. Determine uma transformação linear $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\text{Nuc}(T) = V$ e $\text{Im}(T) = W$;

(c) Determine uma base para o núcleo e uma base para a imagem da transformação linear $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x + yi, a + bi) = (x + 2a, -x + 2b)$.

Solução

- (a) .
- (b) .
- (c) .

10. Sejam V e W espaços vetoriais sobre um mesmo corpo \mathbb{F} e $T: V \rightarrow W$. Mostre que T é injetora se, e somente se, T leva subconjunto LI em subconjunto LI.

Solução

11. Seja $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ a transformação linear definida por $T(1, 0, 0) = 1 + ix^2$, $T(0, 1, 0) = x + x^2$ e $T(0, 0, 1) = i + x$. Exiba uma fórmula para T e decida se T é um isomorfismo.

Solução

12. Seja F um corpo e $T: \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}^2$ dada por $T(x, y) = (x + y, x)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{F}^2$. Mostre que T é um isomorfismo e exiba uma fórmula para T^{-1} .

Solução

13. Considere as bases $\alpha = \{1, 1 + x, 1 + x^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\beta = \{(1, 0), (i, 0), (1, 1), (1, i)\}$ de \mathbb{C}^2 como espaços vetoriais sobre \mathbb{R} . Determine as coordenadas da transformação linear $T: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}^2$ dada por $T(a + bx + cx^2) = (a + bi, b + ci)$ com relação à base de $L(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \mathbb{C}^2)$ construída no Teorema 2-(ii) da Aula 9.

Solução

14. Considere a base $\alpha = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ de \mathbb{C}^3 como espaço vetorial sobre \mathbb{C} . Determine a base dual α^* de $(\mathbb{C}^3)^*$.

Solução

15. Considere $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (2x + 3y, y - x, 3x)$ e as bases $\alpha = \{(1, 2), (2, -1)\}$ de \mathbb{R}^2 e $\beta = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 . Calcule $[T]_{\beta}^{\alpha}$, $[T]_{\beta}^{e_1}$ e $[T]_{e_2}^{\alpha}$ onde e_1 é a base canônica de \mathbb{R}^2 e e_2 é a base canônica de \mathbb{R}^3 .

Solução

16. Sejam $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $G: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [G]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é base de \mathbb{R}^3 e $\beta = \{1, 1 + x, 1 + x^2\}$ é base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Determine bases para $\text{Nuc}(T)$, $\text{Im}(T)$, $\text{Nuc}(G \circ T)$ e $\text{Im}(G \circ T)$.

Solução

17. Seja $T: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ a transformação linear definida por

$$T \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ z - w & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine a matriz $[T]$ de T com relação à base canônica e ;
(b) Determine a matriz de T com relação à base

$$\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\};$$

- (c) Exiba a matriz M tal que $[T]_{\beta} = M^{-1} [T] M$.

Solução

- (a)
(b)
(c)

18. Seja $T: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ a transformação linear definida por

$$T \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & x \\ z + \bar{6}w & \bar{0} \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine a matriz $[T]$ de T com relação à base canônica e ;
 (b) Determine a matriz de T com relação à base

$$\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} \right\}$$

- (c) Exiba a matriz M tal que $[T]_{\beta} = M^{-1} [T] M$.

19. Seja $T: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ a transformação linear definida por

$$Txyzw = \bar{0}xz + \bar{6}w\bar{0}$$

- (a) Determine a matriz $[T]$ de T com relação à base canônica e ;
 (b) Determine a matriz de T com relação à base $\alpha = \{\overline{1001}, \overline{0110}, \overline{10110101}\}$
 (c) Exiba a matriz M tal que $[T]_{\beta} = M^{-1} [T] M$.

Solução

- (a)
 (b)
 (c)

20. Seja $T: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ uma transformação linear cuja matriz com relação à base canônica seja

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determine $T(x, y, z)$;
 (b) Qual é a matriz do operador linear T com relação à base $\alpha = \{(-1, 1, 0), (1, -1, 1), (0, 1, -1)\}$?
 (c) O operador T é invertível? Justifique!

Solução

- (a)
 (b)
 (c)

Parte III.

Tutorial



A. Overview about Julia

En agosto del 2018 se lanzó la versión definitiva LTS y actualmente estamos en la versión 1.5.6.

- Para ser eficiente, el desarrollo del lenguaje se planteó como objetivos

- No interpretable, sino compilable, uso de LLVM como compilador JIT (Just in time)

- Tipado de variables recomendado, pero no obligatorio. Aversión a las variables globales. Paralización Cualquier bucle será tan rápido como una operación vectorial. Desde un principio

- C, C++, Java y Fortran

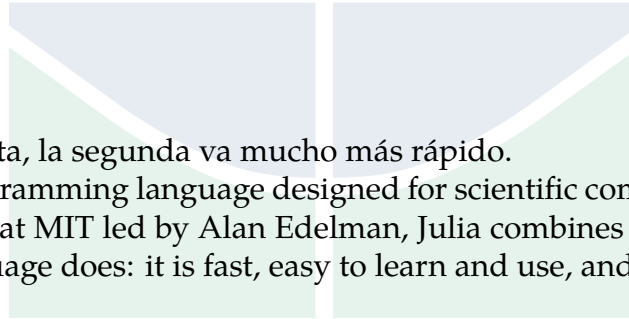
- Modular

- Políglota

- la primera ejecución va lenta porque compila y ejecuta, la segunda va mucho más rápido.

Julia is a modern, expressive, high-performance programming language designed for scientific computation and data manipulation. Originally developed by a group of computer scientists and mathematicians at MIT led by Alan Edelman, Julia combines three key features for highly intensive computing tasks as perhaps no other contemporary programming language does: it is fast, easy to learn and use, and open source.

- Algorithms for Optimization



UnB

B. LinearAlgebra from Julia

Não há necessidade de instalar nenhum programa, você só precisa de uma conta do Google e seguir as instruções do [repositório](#)¹.

```
f(x) = x.^2 + π
const ⊗ = kron
const Σ = sum # Although `sum` may be just as good in the code.
# Calculate  $\sum_{j=1}^5 j^2$ 
Σ([j^2 for j ∈ 1:5])
```

Listing B.1: Programa main.jl.

B.1. Matrix calculus

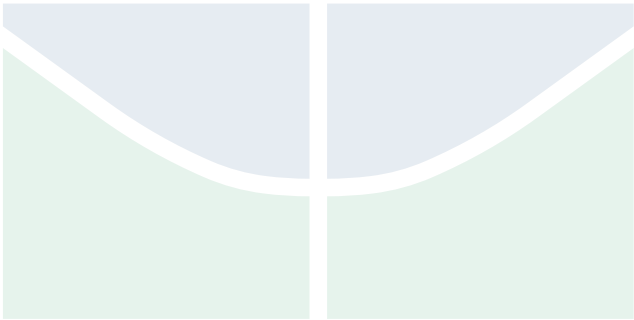
For a comprehensive tutorial about Julia look

UnB

¹[julia_on_collab.ipynb](#)

Índice

corpo, 7



UnB