Aula de Álgebra Linear II - 25/01/2021

Formas Canônicas: Operadores Diagonalizáveis

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo F de dimensão finita n, $\dim V = n$, e $T: V \to V$ um operador linear.

Definição 1. (Autovalor e autovetor) Um escalar λ em F é chamado de autovalor de T (valor característico de T) se existe um vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$. O vetor não nulo v é chamado de autovetor com relação a λ (vetor característico).

Exemplo 2. Os vetores $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ e $(1,0,1)$ são autovetores de

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x-y+z,\ y-x+z,\ x-y+z)$$

com relação aos autovalores 0, 1 e 2, respectivamente. Pois

$$T(1,1,0) = (0,0,0) = 0.(1,1,0),$$

$$T(1,1,1) = (1,1,1) = 1.(1,1,1),$$

$$T(1,0,1) = (2,0,2) = 2.(1,0,1).$$

Note que $\underbrace{\{(1,1,0),(1,1,1),(1,0,1)\}}_{\alpha}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

$$T(1,1,0) = 0.(1,1,0) + 0.(1,1,1) + 0.(1,0,1)$$

$$T(1,1,1) = 0\,(1,1,0) + 1.(1,1,1) + 0.(1,0,1)$$

$$T(1,0,1) = 0.(1,1,0) + 0\,(1,1,1) + 2.(1,0,1)$$

$$[T]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

DEFINIÇÃO 3. DIZEMOS QUE O OPERADOR $T: V \to V$ É diagonalizável SE EXISTE UMA BASE DE V FORMADA POR AUTOVETORES DE T. CASO EXISTA UMA BASE α ASSIM, TEREMOS $[T]_\alpha$ UMA MATRIZ DIAGONAL, ONDE A DIAGONAL É FORMADA PELOS AUTOVALORES DE T.

$I: V \to V$
$v \mapsto I(v) = v$

PROPOSIÇÃO 4. UM ESCALAR $\lambda \in F$ É AUTOVALOR DO OPERADOR LINEAR $T: V \to V$ SE, E SOMENTE SE, $\det(T - \lambda I) = 0$.

DEM. SE λ É AUTOVALOR DE T, ENTÃO $\exists v \in V \setminus \{0\}$ TAL QUE $T(v) = \lambda v \iff T - \lambda I$ NÃO É INJETOR $\iff$ $T - \lambda I$ NÃO É BIJETOR $\iff \det[T - \lambda I]_\alpha = 0$, PARA QUALQUER BASE α DE V.

■

EXEMPLO 5. SEJA $e = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ A BASE CANÔNICA DE $\mathbb{R}^3$. ASSIM

$$T(1,0,0) = (1,-1,1) = 1\,(1,0,0) + (-1)(0,1,0) + 1.(0,0,1)$$

EXEMPLO 2.

$$T(0,1,0) = (-1,1,-1) = (-1)(1,0,0) + 1.(0,1,0) + (-1)(0,0,1)$$

$$T(0,0,1) = (1,1,1) = 1(1,0,0) + 1.(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T-\lambda I]_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

- $$\det[T-\lambda I]_e = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 \cancel{-1} + \cancel{1} - (1-\lambda) - (1-\lambda) + (1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)^3 - (1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) =$$

$$= \lambda(1-\lambda)(\lambda-2)$$

Daí $\det[T-\lambda I]_e = 0$ se $\lambda = 0$, 1 ou 2, ou seja, 0, 1 e 2 são todos os autovalores de T.

- Se $\lambda = 0$, então

$$[T - 0I]_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z = 0 \\ x = y \end{matrix}$$

$$W_0 = \{(x,x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1,0) \mid x \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \langle (1,1,0) \rangle$$

...

$\boxtimes$

- Se λ é autovalor de T, então $\exists v \in V \setminus \{0\}$ tal que $T(v) = \lambda v$;
- Se λ é autovalor de T, então $\exists v \in V \setminus \{0\}$ tal que $v \in Nuc(T - \lambda I)$;
- Se λ é autovalor de T, então $\det[T - \lambda I]_\alpha = 0$ onde α é uma base de V.

Definição 6. Chamaremos o polinômio de grau n

$$p_T(x) = \det[T - xI]_\alpha$$

de polinômio característico de T, onde α é uma base de V e $n = \dim V$.

• Note que

$$[T - xI]_\beta = \left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1} [T-xI]_\alpha \underbrace{[I]_\beta^\alpha}_{M}$$

e

$$\det [T-xI]_\beta = \cancel{\det M^{-1}} \cdot \det [T-xI]_\alpha \cdot \cancel{\det M} =$$

$$= \det [T-xI]_\alpha .$$

• O conjunto de autovetores associados a um autovalor λ é um subespaço de V: note que esse conjunto é o núcleo do operador $T - \lambda I$. Chamaremos esse conjunto de autoespaço W_λ associado ao autovalor λ, ou seja,

$$W_\lambda = \mathrm{Nuc}(T - \lambda I).$$

Definição 7. Seja λ um autovalor de um operador linear T. Então podemos escrever

$$p_T(x) = (x-\lambda)^m q(x),$$

onde $x - \lambda \nmid q(x)$. Chamaremos m de multiplicidade algébrica $ma(\lambda)$ de λ. Já a dimensão do autoespaço W_λ é chamada de multiplicidade geométrica $mg(\lambda)$, ou seja, $mg(\lambda) = \dim W_\lambda$.

Proposição 8. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ os distintos autovalores de T. Se $v_1 \in W_{\lambda_1}, v_2 \in W_{\lambda_2}, \dots, v_r \in W_{\lambda_r}$ e

$$v_1 + v_2 + \dots + v_r = 0,$$

então $v_1 = v_2 = \dots = v_r = 0$.

Dem. Indução sobre a quantidade de parcelas s:

$$v_1 + \dots + v_s = 0, \quad 1 \leq s \leq r$$

Se $s = 1$, então

$$v_1 = 0$$

e o resultado segue.

Agora suponha que

$$\underbrace{v_1 + \dots + v_s}_{=0} + v_{s+1} = 0, \quad \text{com} \quad 1 < s+1 \leq r. \qquad (**)$$

Aplique T:

$$T(v_1) + \dots + T(v_s) + T(v_{s+1}) = 0$$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s + \lambda_{s+1} v_{s+1} = 0 \qquad (*)$$

Multiplique $(**)$ por λ_{s+1} e subtraia de $(*)$:

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{s+1}) v_1}_{\in W_{\lambda_1}} + \dots + \underbrace{(\lambda_s - \lambda_{s+1}) v_s}_{\in W_{\lambda_s}} = 0.$$

Daí

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{s+1})}_{\neq 0} v_1 = \dots = \underbrace{(\lambda_s - \lambda_{s+1})}_{\neq 0} v_s \overset{HI}{=} 0$$

E $v_j = \ldots = v_s = 0$. LOGO $v_{s+1} = 0$ E O RESULTADO SEGUE.

$\blacksquare$

COROLÁRIO 9. SE β_1 É UMA BASE DE $W_{\lambda_1}, \ldots, \beta_r$ É UMA BASE DE W_{λ_r}, ENTÃO

$$\bigcup_{i=1}^{r} \beta_i$$

É UM SUBCONJUNTO LI DE V. EM PARTICULAR, SE $\left|\bigcup_{i=1}^{r} \beta_i\right| = \dim V = n$, ENTÃO T É DIAGONALIZÁVEL E $\bigcup_{i=1}^{r} \beta_i$ É BASE DE V.