

FÍSICA TEÓRICA

TEORÍA  
DE LA  
ELASTICIDAD

LANDAU<sup>y</sup>LIFSHITZ

VOLÚMEN 7



*CURSO DE FÍSICA TEÓRICA*

**Volumen 7**

**TEORÍA DE LA ELASTICIDAD**



† L. D. LANDAU      E. M. LIFSHITZ

Academia de Ciencias, U. R. S. S.

# TEORÍA DE LA ELASTICIDAD

Volumen 7  
del  
CURSO DE FÍSICA TEÓRICA



EDITORIAL REVERTÉ, S. A.  
BARCELONA — BUENOS AIRES — MÉXICO  
MCMLXIX

*Título de la obra original*

**«Теория упругости»**

*Editada por*

**MEZHDUNARODNAYA KNIGA, Moscou**

Versión española por el

**DR. JUAN T. D'ALESSIO**

Profesor de Física de la Facultad de Ciencias Exactas de Buenos Aires  
Profesor de Termodinámica y de Fisicoquímica de la Escuela Superior Técnica  
Jefe del Servicio de Producción de la Comisión Nacional de Energía Atómica

---

© EDITORIAL REVERTÉ, S. A.  
1969

---

Depósito Legal: B. 19.854 - 1969

Talleres Gráficos HOSTENCH, S. A.

## **PRÓLOGO A LA «TEORÍA DE LA ELASTICIDAD»**

En esta edición la teoría de la elasticidad se ha separado formando volumen aparte, como se había proyectado en el plan primitivo (el hecho de reunirla en un sólo libro con la hidrodinámica se debió a causas puramente accidentales).

Junto con pequeñas correcciones e insertos, se ha completado la obra con un nuevo capítulo acerca de la teoría macroscópica de las dislocaciones. Este capítulo se ha escrito en colaboración con A. M. Kosevich. Quisiera expresarle aquí mi sincera gratitud por la ayuda que así prestó.

Doy las gracias también a G. I. Barenblatt, V. L. Ginzburg, M. A. Isakovich, I. M. Lifshitz y a I. M. Shmushkevich por sus útiles observaciones.

Al estudiar el libro dentro del «mínimo teórico» para físicos teóricos, cabe recomendar que se prescinda de los §§ 8, 9, 11-21, 25-31.

Diciembre de 1964

E. M. LIFSHITZ

## **DEL PRÓLOGO A LA MECÁNICA DE LOS MEDIOS CONTINUOS**

... En el libro, escrito por físicos y en primer lugar destinado a físicos, nos han interesado, naturalmente, cuestiones que de ordinario no se exponen en los cursos de teoría de la elasticidad; tales como, por ejemplo, ciertas cuestiones relativas a la conductibilidad térmica y a la viscosidad de los sólidos, o toda una serie de problemas de teoría de las vibraciones elásticas y de las ondas. A la vez, tan sólo de manera muy sucinta hemos tocado un cierto número de problemas especiales (por ejemplo, complicados métodos matemáticos de teoría de la elasticidad; teoría de las cáscaras, etc.), en los que, además, en modo alguno los autores pueden ser considerados como especialistas.

1953

L. LANDAU, E. LIFSHITZ

## ALGUNOS SÍMBOLOS UTILIZADOS

Densidad de materia  $\rho$

Vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$

Tensor de deformación  $u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$

Tensor de tensiones  $\sigma_{ik}$

Módulo de compresión hidrostática  $K$

Módulo de extensión (módulo de Young)  $E$

Coeficiente de Poisson  $\sigma$

Velocidades longitudinal y transversal del sonido  $c_l$  y  $c_t$  (para sus expresiones en función de  $K, \mu, E, \sigma$ , v. pág. 142).

Las cantidades  $K, \mu$  y  $E, \sigma$  están ligadas por las fórmulas:

$$E = \frac{9K\mu}{3K+\mu}, \quad \sigma = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)},$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}.$$

## ÍNDICE DE MATERIAS

CAPÍTULO I. ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD .....	1
1 El tensor de deformación .....	1
2 El tensor de tensiones .....	5
3 Termodinámica de las deformaciones .....	10
4 Ley de Hooke .....	13
5 Deformaciones homogéneas .....	18
6 Deformaciones con variación de temperatura .....	21
7 Ecuaciones de equilibrio para cuerpos isótropos .....	24
8 Equilibrio de un medio elástico limitado por un plano .....	35
9 Cuerpos sólidos en contacto .....	42
10 Propiedades elásticas de los cristales .....	50
CAPÍTULO II. EQUILIBRIO DE BARRAS Y PLACAS .....	59
11 La energía de una placa curvada .....	59
12 Ecuación de equilibrio para una placa .....	62
13 Deformaciones longitudinales de placas .....	71
14 Placas fuertemente combadas .....	78
15 Deformaciones de cáscaras .....	84
16 Torsión de barras .....	93
17 Flexión de barras .....	101
18 La energía de una barra deformada .....	107
19 Las ecuaciones de equilibrio de las barras .....	112
20 Flexión pequeña de barras .....	122
21 Estabilidad de los sistemas elásticos .....	135
CAPÍTULO III. ONDAS ELÁSTICAS .....	141
22 Ondas elásticas en un medio isótropo .....	141
23 Ondas elásticas en cristales .....	149
24 Ondas de superficie .....	152
25 Vibraciones de varillas y placas .....	158
26 Vibraciones anarmónicas .....	167
CAPÍTULO IV. DISLOCACIONES .....	173
27 Deformaciones elásticas y dislocaciones .....	173
28 Acción de un campo de tensiones sobre una dislocación .....	184
29 Distribución continua de dislocaciones .....	188
30 Distribución de dislocaciones en interacción .....	194
31 Equilibrio de una grieta en un medio elástico .....	200

CAPÍTULO V. CONDUCCIÓN TÉRMICA Y VISCOSIDAD EN SÓLIDOS .....	207
32 Ecuación de la conducción térmica en sólidos .....	207
33 Conducción térmica en cristales .....	209
34 Viscosidad de sólidos .....	211
35 Absorción del sonido en sólidos .....	214
36 Fluidos altamente viscosos .....	222
ÍNDICE ALFABÉTICO .....	225

## CAPÍTULO I

### ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD

#### § 1. El tensor de deformación

La teoría de la elasticidad estudia la mecánica de los cuerpos sólidos, considerados como medios continuos (\*).

Bajo la acción de fuerzas aplicadas, los sólidos se deforman, o sea, cambian de forma y volumen, en mayor o menor grado. La deformación de un cuerpo se describe analíticamente de la siguiente manera. La posición de cualquier punto del cuerpo queda definida mediante su radio vector  $\mathbf{r}$  (con componentes  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ) en cierto sistema de coordenadas. En general, cuando el sólido se deforma, cada punto se desplaza. Consideremos un punto particular; sea  $\mathbf{r}$  su radio vector antes de la deformación,  $\mathbf{r}'$  (con componentes  $x'_i$ ) después de la misma. El desplazamiento de este punto debido a la deformación está determinado por el vector  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ , que llamaremos  $\mathbf{u}$ :

$$u_i = x'_i - x_i. \quad (1.1)$$

Al vector  $\mathbf{u}$  se le denomina *vector de desplazamiento*. Las coordenadas  $x'_i$  del punto desplazado son, claro está, funciones de las coordenadas  $x_i$  del mismo punto antes de desplazarse. En consecuencia, el vector  $u_i$  es también función de las coordenadas  $x_i$ . Si se da  $\mathbf{u}$  como función de las coordenadas  $x_i$ , la deformación del cuerpo queda totalmente determinada.

Cuando un cuerpo se deforma, varían las distancias entre sus puntos. Consideremos dos puntos muy próximos entre sí. Si el radio vector que los une antes de la deformación es  $dx_i$ , el radio vector que une los mismos puntos en el cuerpo deformado será  $dx'_i = dx_i + du_i$ . La distancia entre los puntos es:

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$$

---

(\*) Las ecuaciones fundamentales de la teoría de la elasticidad fueron establecidas por Cauchy y Poisson en la década de 1820.

y después de la deformación resulta:

$$dl' = \sqrt{dx'_1{}^2 + dx'_2{}^2 + dx'_3{}^2}.$$

Utilizando la regla general de las sumatorias (\*) podemos escribir:

$$dl^2 = dx_i^2, \quad dl'^2 = dx'_i{}^2 = (dx_i + du_i)^2.$$

Substituyendo  $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$ , expresemos  $dl'^2$  en la forma:

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l.$$

Como la sumatoria en el segundo término de la derecha se extiende sobre los subíndices  $i$  y  $k$ , podemos escribir:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i dx_k.$$

En el tercer término intercambiamos los subíndices  $i$  y  $l$ . Así,  $dl'^2$  toma finalmente la forma

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik} dx_i dx_k, \quad (1.2)$$

donde el tensor  $u_{ik}$  se define como

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (1.3)$$

Estas expresiones dan la variación de una longitud infinitesimal cuando el sólido se deforma.

El tensor  $u_{ik}$  recibe el nombre de *tensor de deformación*. Vemos por su definición que se trata de un tensor simétrico, o sea:

$$u_{ik} = u_{ki}. \quad (1.4)$$

---

(\*) De acuerdo con la regla general, omitiremos en todas partes los signos de suma sobre índices vectoriales y tensoriales; por todo par de índices repetidos (en una expresión dada) entenderemos, en todas partes, suma sobre los valores 1, 2, 3.

Este resultado se ha obtenido escribiendo en  $dl'^2$  el término  $2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k$  en la forma evidentemente simétrica

$$\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k.$$

Como se trata de un tensor simétrico,  $u_{ik}$  puede ser diagonalizado en cualquier punto. Esto significa que, en cualquier punto del sólido, puede elegirse un sistema de ejes coordenados — los ejes principales del tensor — de tal manera que solamente las componentes diagonales  $u_{11}$ ,  $u_{22}$  y  $u_{33}$  del tensor sean diferentes de cero. Estas componentes — llamadas valores principales del tensor de deformación — se representarán en lo que sigue por  $u^{(1)}$ ,  $u^{(2)}$  y  $u^{(3)}$ . Debe recordarse, sin embargo, que si el tensor está diagonalizado en un punto del cuerpo, en general no estará diagonalizado en otros puntos del mismo.

Si el tensor de deformación está diagonalizado en un punto, en sus proximidades el elemento de longitud (1.2) será:

$$\begin{aligned} dl'^2 &= (\delta_{ik} + 2u_{ik}) dx_i dx_k \\ &= (1 + 2u^{(1)}) dx_1^2 + (1 + 2u^{(2)}) dx_2^2 + (1 + 2u^{(3)}) dx_3^2. \end{aligned}$$

Vemos que esta expresión es la suma de tres términos independientes. En consecuencia, la deformación de un elemento de volumen puede considerarse compuesta por deformaciones a lo largo de tres ejes mutuamente perpendiculares, los ejes principales del tensor  $u_{ik}$ . Cada una de estas deformaciones es una dilatación (o contracción) simple en la dirección correspondiente: la longitud  $dx_1$ , medida a lo largo del primer eje principal, se convierte en  $dx'_1 = \sqrt{1+2u^{(1)}} dx_1$ ; lo mismo ocurre en los otros dos ejes. Por consiguiente,  $\sqrt{1+2u^{(i)}} - 1$  es el alargamiento relativo  $\left( \frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} \right)$  a lo largo del  $i$ -ésimo eje principal.

Casi siempre, en la práctica, las deformaciones son pequeñas. Esto significa que la variación de una longitud, comparada con la longitud misma, es pequeña. En otras palabras, los alargamientos relativos son pequeños comparados con la unidad. En todo lo que sigue, consideraremos que las deformaciones son de este tipo.

Si un cuerpo está sujeto a pequeñas deformaciones, todas las componentes del tensor de deformación son pequeñas, porque sus elementos dan, como ya hemos señalado, las variaciones relativas de longitud en el cuerpo. Sin embargo, a veces el vector de desplazamiento  $u_i$  puede ser grande, aún para pequeñas deformaciones. Consideremos, por ejemplo, el caso de una varilla larga y delgada. Aun en el caso

de una gran flexión, en la cual el extremo libre de la varilla se desplaza una distancia considerable, las tracciones y compresiones dentro de la varilla misma son pequeñas.

Excepto en tales casos particulares (\*), el vector de desplazamiento de una pequeña deformación también es pequeño. En efecto, ningún cuerpo « tridimensional » (esto es, un sólido en el cual ninguna de las tres dimensiones es pequeña) puede deformarse de tal manera que algunas partes de él se muevan considerablemente sin que ocurran extensiones o compresiones importantes dentro del cuerpo.

En el capítulo 2 se discutirá en detalle el caso de las barras delgadas. En todos los demás casos, por consiguiente,  $u_i$  es pequeño para pequeñas deformaciones y podremos despreciar el último término en la expresión general (1.3) por ser de segundo orden de pequeñez. El tensor de deformación resulta, pues, para pequeñas deformaciones:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (1.5)$$

Las dilataciones relativas de los elementos de longitud a lo largo de los ejes principales del tensor (en un punto dado) resultan ser, salvo términos de orden superior:

$$\sqrt{1+2u^{(i)}} - 1 \approx u^{(i)}$$

es decir, son directamente los valores principales del tensor  $u_{ik}$ .

Consideremos un elementos de volumen infinitesimal  $dV$  y calculemos el volumen  $dV'$  después de la deformación. Para hacerlo, hagamos coincidir los ejes coordenados con los ejes principales del tensor en el punto considerado. Los elementos de longitud  $dx_1, dx_2, dx_3$  a lo largo de estos ejes se convertirán, después de la deformación, en  $dx'_1 = (1+u^{(1)}) dx_1$ , etc. El volumen  $dV$  es el producto  $dx_1 dx_2 dx_3$ , mientras que  $dV'$  será  $dx'_1 dx'_2 dx'_3$ , o sea, será

$$dV' = dV(1+u^{(1)})(1+u^{(2)})(1+u^{(3)}).$$

Despreciando términos de orden superior, obtenemos:

$$dV' = dV(1+u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}).$$

La suma  $u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}$  de los valores principales de un tensor es, como es sabido,

(\*) Entre los que figura, además de las deformaciones de las varillas delgadas, el de la flexión que transforma una placa delgada en una superficie cilíndrica.

su invariante, igual a la suma de los elementos diagonales  $u_{ii} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$  en cualquier sistema de coordenadas. Resulta pues:

$$dV' = dV(1 + u_{ii}). \quad (1.6)$$

Observemos que la suma de los elementos diagonales del tensor de deformación es igual al cambio relativo de volumen

$$\frac{dV' - dV}{dV}.$$

A menudo es conveniente expresar las componentes del tensor de deformaciones en coordenadas esféricas o cilíndricas. Daremos aquí las fórmulas que expresan las componentes en términos de las derivadas del vector de desplazamiento en tales coordenadas. En coordenadas esféricas  $r, \theta, \varphi$  tenemos:

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_r}{r}, \\ 2u_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}, \quad 2u_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \\ 2u_{\varphi r} &= \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

En coordenadas cilíndricas  $r, \varphi, z$ :

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ 2u_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2u_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ 2u_{rz} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{u_z}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

## § 2. El tensor de tensiones

En un cuerpo que no se halla deformado, la distribución de las moléculas corresponde a su estado de equilibrio térmico. Todas las partes del cuerpo se hallan en equilibrio mecánico. Esto significa que si consideramos una porción del sólido, la resultante de las fuerzas que sobre ella actúan debidas a todas las demás es cero.

Cuando ocurre una deformación, cambia la distribución de las moléculas y el cuerpo deja de encontrarse en su estado de equilibrio original. Aparecen entonces fuerzas que tienden a llevarlo nuevamente al equilibrio. Estas fuerzas internas que aparecen cuando el cuerpo se deforma se llaman *tensiones internas*. Si no hay deformación, no existen tensiones internas.

Las tensiones internas se deben a las fuerzas moleculares, o sea, a las fuerzas de interacción entre las moléculas. Un hecho muy importante para la teoría de la elasticidad es que estas fuerzas tienen un «radio de acción» muy corto. Su efecto se extiende solamente a la vecindad de la molécula que la ejerce, hasta una distancia del mismo orden que la distancia entre moléculas, mientras que la teoría de la elasticidad, por ser una teoría macroscópica, sólo considera distancias grandes comparadas con las distancias intermoleculares. El «radio de acción» de las fuerzas moleculares deberá tomarse, pues, como igual a cero en la teoría de la elasticidad. Podemos decir, entonces, que las fuerzas que producen las tensiones internas son fuerzas «de corto alcance». Por consiguiente, las que ejercen sobre cualquier parte del sólido las partes vecinas, sólo se ejercen sobre la superficie de dicha parte.

Debe hacerse aquí la siguiente salvedad: la afirmación que precede no es válida en el caso de materiales en los que una deformación produce campos eléctricos macroscópicos (materiales piroeléctricos y piezoelectricos). Sin embargo, no discutiremos el comportamiento de estas substancias en el presente volumen.

Consideremos la fuerza total que se ejerce sobre un volumen del cuerpo. Ante todo, esta fuerza total es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre cada uno de los elementos de volumen de la parte considerada, o sea, puede escribirse como la integral de volumen  $\int F \, dV$  donde  $F$  es la fuerza por unidad de volumen y  $F \, dV$  la fuerza que se ejerce sobre el elemento de volumen  $dV$ . Por otra parte, las fuerzas que los distintos elementos de la porción considerada ejercen unos sobre otros, se anulan mutuamente en virtud de la igualdad de la acción y la reacción. La fuerza total requerida puede entonces considerarse como la suma de las fuerzas que ejercen sobre el volumen en cuestión las porciones de sólido que lo rodean. Pero, por lo dicho anteriormente, estas fuerzas actúan sobre la superficie de la región considerada, de modo que la fuerza resultante puede representarse como la suma de las fuerzas que se ejercen sobre todos los elementos de superficie, o sea, mediante una integral de superficie.

Entonces, para cualquier porción del sólido, cada una de las tres componentes  $\int F_i \, dV$  de la resultante de todas las tensiones internas puede ser transformada en una integral de superficie. Por el análisis vectorial sabemos que la integral de un escalar en un volumen arbitrario puede transformarse en una integral sobre la superficie si el escalar es la divergencia de algún vector. En nuestro caso, como tenemos la integral de volumen de un vector, y no de un escalar, este vector debe ser la divergencia de un tensor de segundo rango, o sea,  $F_i$  tiene la forma:

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (2.1)$$

Así, la fuerza ejercida sobre cualquier volumen puede expresarse como una integral sobre la superficie cerrada que limita dicho volumen (\*):

$$\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint \sigma_{ik} df_k, \quad (2.2)$$

donde  $df_i$  son las componentes del vector elemento de superficie  $df$ , dirigido, como siempre, según la normal exterior de la superficie (\*\*).

El tensor  $\sigma_{ik}$  recibe el nombre de *tensor de tensiones*. Como vimos en (2.2),  $\sigma_{ik} df_k$  es la  $i$ -ésima componente de la fuerza que actúa sobre el elemento de superficie  $df$ . Tomando elementos de superficie en los planos  $xy$ ,  $yz$ ,  $zx$ , encontramos que la componente  $\sigma_{ik}$  del tensor de tensiones es la  $i$ -ésima componente de la fuerza que actúa sobre la unidad de área perpendicular al eje  $x_k$ . Por ejemplo, la fuerza sobre la unidad de área perpendicular al eje  $x$  normal a dicha área (o sea, a lo largo del eje  $x$ ) es  $\sigma_{xx}$ , y las fuerzas tangenciales (paralelas a los ejes  $y$  y  $z$ ) son  $\sigma_{yx}$  y  $\sigma_{zx}$ .

Es necesario hacer aquí la siguiente observación respecto del signo de la fuerza  $\sigma_{ik} df_k$ . La integral de superficie que aparece en (2.2) es la fuerza que actúa sobre el volumen encerrado por esa superficie, ejercida por las partes del cuerpo que lo rodean. Recíprocamente, la fuerza que el volumen considerado ejerce sobre dicha superficie es igual y de signo contrario. Así, por ejemplo, la fuerza ejercida por las tensiones internas sobre toda la superficie del cuerpo es

$$-\oint \sigma_{ik} df_k,$$

donde la integral se toma sobre toda la superficie del cuerpo y  $df$  tiene la dirección de la normal exterior al mismo.

Determinemos el momento de las fuerzas que actúan sobre una porción del cuerpo. El momento de la fuerza  $F$  puede escribirse como un tensor antisimétrico de segundo rango, cuyas componentes son  $F_i x_k - F_k x_i$ , donde  $x_i$  son las coordenadas del punto donde se aplica la fuerza (†). Por consiguiente, el momento de las fuerzas

(\*) Por el teorema de Green la integral sobre una superficie se transforma en una integral en el volumen encerrado por ella reemplazando el elemento de superficie  $df_i$  por el operador  $dV(\partial/\partial x_i)$ .

(\*\*) En realidad, para determinar la fuerza total que se ejerce sobre una porción deformada del cuerpo deberíamos integrar, no sobre las viejas coordenadas  $x_i$  sino sobre las coordenadas  $x'_i$  de los puntos del cuerpo deformado. En correspondencia con esto también las derivadas en (2.1) deberían tomarse respecto de  $x'_i$ . Sin embargo, considerando que la deformación es pequeña, las derivadas respecto de  $x_i$  y  $x'_i$  difieren en cantidades de orden superior, de manera que las derivadas pueden tomarse respecto de las coordenadas  $x_i$ .

(†) El momento de la fuerza  $F$  se define como el producto vectorial  $F \times r$ ; sabemos por análisis vectorial que las componentes de un producto vectorial forman un tensor antisimétrico de rango dos, como está escrito en el texto.

que actúan sobre el elemento de volumen  $dV$  es  $(F_i x_k - F_k x_i) dV$ , y el momento que actúa sobre todo el volumen es

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV.$$

Al igual que la fuerza total ejercida sobre un volumen cualquiera, este momento puede expresarse como una integral sobre la superficie que rodea el volumen. Usando la expresión (2.1) para  $F_i$  obtenemos:

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \int \left( \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i \right) dV \\ &= \int \frac{\partial(\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_l} dV - \int \left( \sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \right) dV. \end{aligned}$$

En el segundo término observamos que la derivada de una coordenada respecto de sí misma vale uno y respecto de las otras vale cero (debido a que son variables independientes). Resulta entonces  $\frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}$ , donde  $\delta_{kl}$  es el tensor unidad; la multiplicación por  $\sigma_{ik}$  da  $\delta_{kl}\sigma_{il} = \sigma_{ik}$ ,  $\delta_{il}\sigma_{kl} = \sigma_{ki}$ . En el primer término, el integrando es la divergencia de un tensor; por el teorema de Green, la integral de volumen puede transformarse en una de superficie. El resultado es:

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) df_l + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik}) dV.$$

Para que  $M_{ik}$  sea expresable como una integral sólo sobre la superficie, el segundo término debe ser idénticamente nulo, o sea, debe cumplirse que  $\sigma_{ik} - \sigma_{ki} = 0$ , es decir,

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}. \quad (2.3)$$

Llegamos así a un resultado importante: el tensor de tensiones es simétrico. El momento de las fuerzas que actúan sobre una porción del cuerpo es simplemente:

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) df_l. \quad (2.4)$$

Es fácil hallar el tensor de tensiones para un cuerpo que sufre una compresión uniforme en todas direcciones (*compresión hidrostática*). En este caso, sobre cada elemento unitario de superficie actúa una presión de igual magnitud y con la dirección de la normal interior al cuerpo. Si denotamos con  $p$  esta presión, sobre el elemento  $df_i$  actúa una fuerza  $-p df_i$ . Esta fuerza, en términos del tensor de tensiones, debe ser igual a  $\sigma_{ik} df_k$ . Escribiendo  $-p df_i = -p \delta_{ik} df_k$ , vemos que el tensor de tensiones para la compresión hidrostática es

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik}. \quad (2.5)$$

Sus componentes no nulas son simplemente iguales a la presión.

En el caso general de una deformación arbitraria, las componentes no diagonales del tensor de tensiones tendrán un valor distinto de cero. Esto significa que sobre cada elemento de superficie no sólo actuará una fuerza normal a la misma, sino que también aparecerán tensiones tangenciales «de corte». Estas tensiones tienden a desplazar a los elementos de superficie paralelos, unos respecto de otros.

En el equilibrio, la resultante de las tensiones internas en cada elemento de volumen debe anularse, o sea, debemos tener  $F_i = 0$ . Las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo deformado serán entonces:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad (2.6)$$

Si el cuerpo se halla en el campo gravitatorio, la suma  $F + \varrho g$  de las tensiones internas y de la fuerza de gravedad ( $\varrho g$  por unidad de volumen) debe anularse;  $\varrho$  es la densidad (\*) y  $g$  el vector de aceleración de la gravedad, dirigido verticalmente hacia abajo; en este caso la ecuación de equilibrio es:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \varrho g_i = 0. \quad (2.7)$$

Las fuerzas externas aplicadas sobre la superficie de un cuerpo (que habitualmente son la causa de las deformaciones) aparecen en las condiciones de contorno de las ecuaciones de equilibrio. Sea  $P$  la fuerza externa por unidad de superficie del cuerpo; una fuerza  $P df$  actuará sobre el elemento  $df$ . En el equilibrio deberá ser anulada por la fuerza  $-\sigma_{ik} df_k$  producida por las tensiones internas que actúan sobre ese elemento de superficie. Por consiguiente, debe ser

$$P_i df - \sigma_{ik} df_k = 0.$$

(\*) En sentido estricto, la densidad de un cuerpo cambia al deformarse. Sin embargo, para pequeñas deformaciones este efecto no tiene importancia, pues el cambio de densidad involucra cantidades pequeñas de orden superior.

Reemplazando  $df_k$  por  $n_k df$ , donde  $n_k$  es un vector unitario en la dirección de la normal externa a la superficie, obtenemos:

$$\sigma_{ik} n_k = P_i. \quad (2.8)$$

Ésta es la condición que debe satisfacerse en cada punto de la superficie de un cuerpo en equilibrio.

Obtendremos ahora una fórmula para el valor medio del tensor de tensiones de un cuerpo deformado. Para hacerlo, multiplicamos la ecuación (2.6) por  $x_k$  e integramos en todo el volumen del cuerpo:

$$\int \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k dV = \int \frac{\partial (\sigma_{il} x_k)}{\partial x_l} dV - \int \sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} dV = 0.$$

La primera integral de la derecha se transforma en una integral de superficie; en la segunda integral ponemos  $\frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}$ . Resulta entonces:

$$\oint \sigma_{il} x_k df - \int \sigma_{ik} dV = 0.$$

Substituyendo (2.8) en la primera integral resulta

$$\oint P_i x_k df = \int \sigma_{ik} dV = V \bar{\sigma}_{ik},$$

donde  $V$  es el volumen del cuerpo, y  $\bar{\sigma}_{ik}$ , el valor promedio del tensor de tensiones en todo el volumen. Como  $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ , esta fórmula se puede escribir en la forma simétrica

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2V} \oint (P_i x_k + P_k x_i) df. \quad (2.9)$$

Resulta, pues, que el valor medio del tensor de tensiones puede hallarse inmediatamente a partir de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo sin necesidad de resolver las ecuaciones de equilibrio.

### § 3. Termodinámica de las deformaciones

Consideremos un cuerpo deformado y supongamos que se varía un poco la

deformación, de manera tal que el vector de desplazamiento  $u_i$  cambia en una pequeña cantidad  $\delta u_i$ ; determinemos ahora el trabajo realizado por las tensiones internas en este cambio. Multiplicando la fuerza  $F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$  por el desplazamiento  $\delta u_i$  e integrando en todo el volumen resulta:

$$\int \delta R \, dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i \, dV,$$

donde  $\delta R$  es el trabajo realizado por las tensiones internas, por unidad de volumen. Integrando por partes, obtenemos:

$$\int \delta R \, dV = \oint \sigma_{ik} \delta u_i \, df_k - \int \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} \, dV.$$

Considerando un medio ilimitado no deformado en el infinito, podemos hacer tender a infinito la superficie de integración en la primera integral; entonces sobre ella  $\sigma_{ik} = 0$  y la integral se anula. La segunda integral, en virtud de la simetría del tensor  $\sigma_{ik}$ , puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \int \delta R \, dV &= -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) \, dV \\ &= -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \delta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \, dV \\ &= - \int \sigma_{ik} \delta u_{ik} \, dV. \end{aligned}$$

De este modo, hallamos:

$$\delta R = -\sigma_{ik} \delta u_{ik}. \quad (3.1)$$

Esta fórmula nos da el trabajo realizado al variar el tensor de deformación.

Si la deformación de un cuerpo es suficientemente pequeña, éste retorna a su estado inicial cuando dejan de actuar las fuerzas externas que originaron la deformación. A este tipo de deformaciones se las llama *elásticas*. Cuando las deformaciones son grandes, al suprimir las fuerzas externas la deformación no desaparece totalmente; queda una deformación residual y el estado final del cuerpo no coincide con el estado en el cual se hallaba antes que se aplicasen las fuerzas. Estas defor-

maciones se conocen con el nombre de *plásticas*. A continuación, sólo estudiaremos las deformaciones elásticas.

Supondremos, además, que el proceso de deformación ocurre tan lentamente que el cuerpo está en equilibrio termodinámico con el medio exterior en todo instante. (Esta hipótesis casi siempre está justificada en la práctica.) El proceso será entonces termodinámicamente reversible.

A continuación referiremos las magnitudes termodinámicas como la entropía  $S$ , la energía interna  $\mathcal{E}$  etc., a la unidad de volumen (\*) (y no a la unidad de masa como en la mecánica de los fluidos) y las representaremos por letras mayúsculas.

Un cambio infinitesimal  $d\mathcal{E}$  en la energía interna es igual a la diferencia entre el calor adquirido por el volumen unitario considerado y el trabajo  $dR$  realizado por las tensiones internas. Para un proceso reversible, la cantidad de calor es  $TdS$ , donde  $T$  es la temperatura. Así, pues,  $d\mathcal{E} = TdS - dR$ ; si utilizamos para  $dR$  la expresión dada por (3.1), obtenemos:

$$d\mathcal{E} = TdS + \sigma_{ik} du_{ik}. \quad (3.2)$$

Esta es la relación termodinámica fundamental para cuerpos deformados.

En la compresión hidrostática, el tensor de tensiones es  $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$  (2.5). En este caso:

$$\sigma_{ik} du_{ik} = -p\delta_{ik} du_{ik} = -p du_{ii}.$$

Hemos visto, sin embargo (v. 1.6), que la suma  $u_{ii}$  es el cambio relativo de volumen debido a la deformación. Si consideramos un volumen unitario,  $u_{ii}$  es simplemente la variación de ese volumen y  $du_{ii}$  es el elemento  $dV$  de esta variación. La relación termodinámica toma entonces su forma habitual:

$$d\mathcal{E} = TdS - pdV.$$

Introduciendo la energía libre del cuerpo  $F = \mathcal{E} - TS$ , escribimos la relación (3.2) en la forma:

$$dF = -SdT + \sigma_{ik} du_{ik} \quad (3.3)$$

(\*) Debe señalarse lo siguiente: En general el volumen unitario, antes y después de la deformación contiene diferente cantidad de materia. Nosotros referiremos siempre las magnitudes termodinámicas al volumen unitario del cuerpo no deformado; o sea, a la cantidad de materia contenida en su interior, que, a su vez, puede ocupar un volumen diferente luego de la deformación. De acuerdo con esto, por ejemplo, la energía total del cuerpo se obtiene siempre integrando  $\mathcal{E}$  en el volumen del cuerpo no deformado

Finalmente, el potencial termodinámico  $\Phi$  se define por

$$\Phi = \mathcal{E} - TS - \sigma_{ik} u_{ik} = F - \sigma_{ik} u_{ik}. \quad (3.4)$$

Ésta es una generalización de la expresión usual  $\Phi = \mathcal{E} - TS + pV$  (\*). Substituyendo (3.4) en (3.3) obtenemos:

$$d\Phi = -SdT - u_{ik} d\sigma_{ik}. \quad (3.5)$$

Las variables independientes en (3.2) y (3.3) son  $S$ ,  $u_{ik}$  y  $T$ ,  $u_{ik}$ , respectivamente. Las componentes del tensor de tensiones pueden obtenerse derivando  $\mathcal{E}$  o  $F$  respecto de las componentes del tensor de deformaciones, a entropía constante o a temperatura constante, respectivamente:

$$\sigma_{ik} = \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_{ik}} \right)_S = \left( \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right)_T. \quad (3.6)$$

Análogamente, derivando  $\Phi$  respecto de las componentes  $\sigma_{ik}$ , obtenemos las componentes  $u_{ik}$ :

$$u_{ik} = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ik}} \right)_T. \quad (3.7)$$

#### § 4. Ley de Hooke

A fin de poder aplicar las fórmulas generales de la termodinámica a cualquier caso particular de deformación, debemos conocer la energía libre  $F$  del cuerpo como función del tensor de deformaciones. Esta expresión se obtiene fácilmente teniendo en cuenta que las deformaciones son pequeñas y, de acuerdo con esto, desarrollando la energía libre en serie de potencias de  $u_{ik}$ . Por ahora, consideraremos solamente el caso de cuerpos isótropos. Los resultados correspondientes a cristales se obtendrán más adelante, en el § 10.

Al considerar un cuerpo deformado que se encuentra a cierta temperatura (la misma para todo el cuerpo), tomaremos como estado no deformado el del cuerpo en ausencia de fuerzas externas y a la misma temperatura; esta condición es necesaria teniendo en cuenta la existencia de la dilatación térmica (§ 6). Entonces, para

---

(\*) Para la compresión hidrostática, la expresión (3.4) se convierte en  $\Phi = F + pu_{tt} = F + p(V - V_0)$ , donde  $V - V_0$  es el cambio de volumen que resulta de la deformación. Vemos, pues, que la definición de  $\Phi$  dada aquí difiere de la definición usual  $\Phi = F + pV$  en la cantidad  $-pV_0$ .

$u_{ik} = 0$  las tensiones internas también son cero, o sea  $\sigma_{ik} = 0$ . Como  $\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}}$ , vemos que en el desarrollo en serie de  $F$  en potencias de  $u_{ik}$  no podrán aparecer términos lineales.

Además, como la energía libre es un escalar, cada término del desarrollo de  $F$  debe ser también un escalar. Con las componentes del tensor simétrico  $u_{ik}$  se pueden formar dos escalares independientes de segundo grado: éstos pueden ser, por ejemplo, el cuadrado  $u_{ii}^2$  de la suma de los elementos diagonales y la suma  $u_{ik}^2$  de los cuadrados de todas las componentes del tensor  $u_{ik}$ . Por consiguiente, desarrollando  $F$  en potencias de  $u_{ik}$ , tenemos, hasta el segundo orden, una expresión de la forma:

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2. \quad (4.1)$$

Ésta es la expresión general para la energía libre de un cuerpo isótropo deformado. Las cantidades  $\lambda$  y  $\mu$  se llaman *coeficientes de Lamé*.

Hemos visto en § 1 que el cambio de volumen está dado por la suma  $u_{ii}$ . Si esta suma es cero, entonces no cambia el volumen durante la deformación y sólo se produce un cambio de forma. Tales deformaciones en las que no varía el volumen, se llaman *deformaciones de corte*.

El caso opuesto es aquél en que la deformación produce un cambio de volumen, pero sin cambiar la forma del cuerpo. Cada elemento de volumen en tal deformación retiene su forma. Veremos luego que el tensor para esta deformación es  $u_{ik} = \text{constante} \times \delta_{ik}$ . Esta deformación se llama *compresión hidrostática*.

Cualquier deformación puede representarse como la suma de un corte o deslizamiento y una compresión hidrostática. Para hacerlo basta utilizar la identidad:

$$u_{ik} = (u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ii}) + \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ii}. \quad (4.2)$$

El primer término de la derecha es evidentemente un *corte puro*, porque la suma de sus términos diagonales es cero (recordemos que  $\delta_{ii} = 3$ ). El segundo término es una compresión hidrostática.

Como expresión general de la energía libre de un cuerpo isótropo deformado, es conveniente reemplazar (4.1) por otra fórmula, utilizando esta descomposición de una deformación arbitraria en un corte puro y una compresión hidrostática. Tomemos como escalares independientes de segundo grado las sumas de los cuadrados

de las componentes de los términos primero y segundo de (4.2).  $F$  será entonces (\*):

$$F = \mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right)^2 + \frac{K}{2} u_{ll}^2. \quad (4.3)$$

Los coeficientes  $K$  y  $\mu$  se llaman *módulo de compresión hidrostática* y *módulo de rigidez*, respectivamente.  $K$  está relacionado con los coeficientes de Lamé por la expresión:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (4.4)$$

Como es sabido, en el estado de equilibrio termodinámico, la energía libre es mínima. Si no actúan fuerzas externas sobre el cuerpo,  $F$  como función de  $u_{ik}$ , debe tener un mínimo para  $u_{ik} = 0$ . Esto significa que la forma cuadrática (4.3) debe ser positiva. Si el tensor  $u_{ik}$  es tal que  $u_{ll} = 0$ , sólo queda en (4.3) el primer término; si, por otra parte el tensor es de la forma  $u_{ik} = \text{constante} \times \delta_{ik}$ , sólo queda el segundo término. Vemos en consecuencia que una condición necesaria (y, evidentemente, suficiente), para que la expresión (4.3) sea positiva, es que ambos coeficientes,  $K$  y  $\mu$ , lo sean. Resulta, pues, que los módulos de compresión y rigidez son ambos positivos.

$$K > 0, \mu > 0. \quad (4.5)$$

Ahora, utilizaremos la ecuación termodinámica (3.6) para determinar el tensor de tensiones. Para calcular las derivadas  $\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}$  escribiremos la diferencial total  $dF$  (a temperatura constante). Tenemos:

$$dF = Ku_{ll} du_{ll} + 2\mu(u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}) d(u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}).$$

En el segundo término, el producto del primer paréntesis por  $\delta_{ik}$  es cero, con lo que resulta:

$$dF = Ku_{ll} du_{ll} + 2\mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik} \right) du_{ik}$$

o, reemplazando  $du_{ll}$  por  $\delta_{ik} du_{ik}$ ,

---

(\*) El término constante  $F_0$  es la energía libre del cuerpo no deformado y no presenta particular interés. Por simplicidad, lo omitiremos y tomaremos para  $F$  la energía libre de la deformación o, como suele llamarla, la energía libre elástica.

$$dF = [Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik})] du_{ik}.$$

El tensor de tensiones resulta ser:

$$\sigma_{ik} = Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}). \quad (4.6)$$

Esta expresión determina el tensor de tensiones en términos del tensor de deformación para un cuerpo isotrópico. De ella se sigue, en particular, que si la deformación es puramente de corte o una compresión hidrostática pura, la relación entre  $\sigma_{ik}$  y  $u_{ik}$  está determinada por el módulo de rigidez o el de compresión hidrostática, respectivamente.

No es difícil obtener las fórmulas inversas que expresan  $u_{ik}$  como función de  $\sigma_{ik}$ . Para hacerlo, buscaremos la suma  $\sigma_{ii}$  de los términos diagonales. Como esta suma es cero para el segundo término de (4.6), tenemos que  $\sigma_{ii} = 3Ku_{ii}$ , o sea:

$$u_{ii} = \frac{1}{3K} \sigma_{ii}. \quad (4.7)$$

Substituyendo esta expresión en (4.6) y determinando así  $u_{ik}$ , obtenemos:

$$u_{ik} = \frac{1}{9K} \delta_{ik}\sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik}\sigma_{ll} \right), \quad (4.8)$$

que nos da el tensor de deformaciones en términos del tensor de tensiones.

La ecuación (4.7) prueba que el cambio relativo de volumen  $u_{ii}$  en cualquier deformación de un cuerpo isotrópico depende solamente de la suma  $\sigma_{ii}$  de los elementos diagonales del tensor de tensiones y que la relación entre  $u_{ii}$  y  $\sigma_{ii}$  está determinada únicamente por el módulo de compresión hidrostática. En la compresión hidrostática de un cuerpo, el tensor de tensiones es  $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$ . O sea, en este caso, de (4.7) obtenemos:

$$u_{ii} = -\frac{p}{K}. \quad (4.9)$$

Como la deformación es pequeña,  $u_{ii}$  y  $p$  son cantidades pequeñas y podremos escribir el cociente  $\frac{u_{ii}}{p}$ , entre el cambio relativo de volumen y la presión, en la forma diferencial  $\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$ . Entonces:

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T.$$

La cantidad  $1/K$  se llama *coeficiente de compresión hidrostática* (o simplemente *coeficiente de compresión*).

De la expresión (4.8) resulta que el tensor de deformaciones  $u_{ik}$  es una función lineal del tensor de tensiones  $\sigma_{ik}$ , o sea, la deformación es proporcional a las fuerzas aplicadas al cuerpo. Esta ley, válida para pequeñas deformaciones, se conoce como *ley de Hooke* (\*).

Daremos ahora otra forma útil de la expresión de la energía libre de un cuerpo deformado, basándonos en el hecho que  $F$  es una función cuadrática del tensor de deformación. De acuerdo con el teorema de Euler tenemos:

$$u_{ik} \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = 2F,$$

de donde, como  $\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = \sigma_{ik}$ ,

$$F = \frac{\sigma_{ik} u_{ik}}{2}. \quad (4.10)$$

Si substituimos  $u_{ik}$  por una combinación lineal de las componentes de  $\sigma_{ik}$ , la energía elástica quedará representada por una función cuadrática de las  $\sigma_{ik}$ . Aplicando nuevamente el teorema de Euler obtenemos:

$$\sigma_{ik} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} = 2F,$$

y, comparando con (4.10), vemos que:

$$u_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} \quad (4.11)$$

Sin embargo, debe señalarse que mientras la fórmula  $\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}}$  es una relación termodinámica general, la fórmula inversa (4.11) es aplicable solamente si vale la ley de Hooke.

(\*) De hecho, la ley de Hooke es aplicable a prácticamente todas las deformaciones elásticas. La razón es que, habitualmente, las deformaciones dejan de ser elásticas cuando son aún tan pequeñas que la ley de Hooke es una buena aproximación (sustancias como el caucho son una excepción).

### § 5. Deformaciones homogéneas

Consideremos algunos casos simples de *deformaciones homogéneas*, o sea aquellas en que el tensor de deformaciones es constante en todo el cuerpo. Por ejemplo, la compresión hidrostática ya estudiada, es una deformación homogénea.

Estudiemos primeramente la *extensión simple* (o compresión) de una varilla. Consideremos un varilla ubicada según el eje  $z$  y supongamos que se aplican fuerzas en los extremos de la misma que la distienden en sentidos opuestos. Estas fuerzas actúan uniformemente en toda la superficie de los extremos; sea  $p$  esta fuerza por unidad de área.

Como la deformación es homogénea, o sea, como el tensor  $u_{ik}$  tiene el mismo valor en todo punto del cuerpo, el tensor de tensiones  $\sigma_{ik}$  es también constante y puede determinarse directamente a partir de las condiciones de contorno (2.8). No hay fuerzas aplicadas en la superficie lateral de la varilla; por consiguiente  $\sigma_{ik}n_k = 0$ . Como el vector unitario  $n$  sobre la superficie lateral es perpendicular al eje  $z$ , ( $n_z = 0$ ), se ve que todas las componentes de  $\sigma_{ik}$ , excepto  $\sigma_{zz}$ , son nulas. En los extremos tenemos que  $\sigma_{zi}n_i = p$ , o sea:

$$\sigma_{zz} = p.$$

En la expresión general (4.8) que relaciona las componentes de los tensores de tensiones y de deformación, se ve que todas las componentes de  $u_{ik}$ , con  $i \neq k$ , son cero. Para las restantes componentes encontramos:

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K}\right)p, \quad u_{zz} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu}\right)p. \quad (5.1)$$

La componente  $u_{zz}$  da el cambio relativo de longitud de la varilla. El coeficiente de  $p$  es el *coeficiente de extensión* y su recíproco es el *módulo de extensión* (o *módulo de Young*)  $E$ :

$$u_{zz} = \frac{p}{E}, \quad (5.2)$$

donde:

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu} \quad (5.3)$$

Las componentes  $u_{xx}$  y  $u_{yy}$  dan la contracción relativa de la varilla en la dirección transversal. El cociente entre la contracción transversal y la extensión longitudinal es el *coeficiente de Poisson*,  $\sigma$  (\*):

$$u_{xx} = -\sigma u_{zz}, \quad (5.4)$$

donde:

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu} \quad (5.5)$$

Como  $K$  y  $\mu$  son siempre positivos, el coeficiente de Poisson puede variar en distintos materiales entre  $-1$  (para  $K = 0$ ) y  $1/2$  (para  $\mu = 0$ ). Entonces (\*\*)

$$-1 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}. \quad (5.6)$$

Finalmente, el aumento relativo de volumen de la varilla es:

$$u_{ii} = p \frac{1}{3K}. \quad (5.7)$$

La energía libre de la varilla estirada puede obtenerse inmediatamente de la fórmula (4.10). Como solamente la componente  $\sigma_{zz}$  es distinta de cero, obtenemos que  $F = 1/2 \sigma_{zz} u_{zz}$ ; en consecuencia:

$$F = \frac{p^2}{2E}. \quad (5.8)$$

A continuación, como es costumbre, utilizaremos  $E$  y  $\sigma$  en lugar de los módulos  $K$  y  $\mu$ . Invirtiendo las fórmulas (5.3) (5.5) obtenemos (†):

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}. \quad (5.9)$$

(\*) El designar al coeficiente de Poisson mediante  $\sigma$ , y las componentes del tensor de tensiones por medio de  $\sigma_{ik}$  no puede llevar a confusión, porque el último, a diferencia del primero, siempre lleva índices.

(\*\*) En la práctica, el coeficiente de Poisson varía sólo entre 0 y  $1/2$ . No se conocen substancias para las cuales  $\sigma < 0$ , o sea substancias que se dilatan transversalmente cuando se las estira longitudinalmente. Debe señalarse que la desigualdad  $\sigma > 0$  corresponde a  $\lambda > 0$ , donde  $\lambda$  es el coeficiente de Lamé que aparece en (4.1); en otras palabras, ambos términos tanto en (4.1) como en (4.3) son en la práctica siempre positivos, aunque esto no es termodinámicamente necesario. Valores de  $\sigma$  cercanos a  $1/2$  (por ejemplo, el caucho) corresponden a un módulo de rigidez pequeño en comparación con el módulo de compresión.

(†) El segundo coeficiente de Lamé es  $\lambda = \frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}$

Escribiremos ahora las fórmulas del párrafo 4 con los coeficientes expresados en términos de  $E$  y  $\sigma$ . La energía libre es:

$$F = \frac{E}{2(1+\sigma)} \left( u_{ik}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll}^2 \right). \quad (5.10)$$

El tensor de tensiones, resulta ser, expresado en términos del tensor de deformaciones:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma} \left( u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll} \delta_{ik} \right). \quad (5.11)$$

Recíprocamente:

$$u_{ik} = \frac{1}{E} [(1+\sigma) \sigma_{ik} - \sigma \sigma_{ll} \delta_{ik}]. \quad (5.12)$$

Como las fórmulas (5.11) y (5.12) son de uso frecuente, las escribiremos explícitamente en componentes:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma)u_{xx} + \sigma(u_{yy} + u_{zz})], \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma)u_{yy} + \sigma(u_{xx} + u_{zz})], \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma)u_{zz} + \sigma(u_{xx} + u_{yy})], \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{xy}, \quad \sigma_{xz} = \frac{E}{1+\sigma} u_{xz}, \quad \sigma_{yz} = \frac{E}{1+\sigma} u_{yz}, \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

e, inversamente:

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \sigma(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \\ u_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})], \\ u_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \\ u_{xy} &= \frac{1+\sigma}{E} \sigma_{xy}, \quad u_{xz} = \frac{1+\sigma}{E} \sigma_{xz}, \quad u_{yz} = \frac{1+\sigma}{E} \sigma_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Consideremos ahora la compresión de una varilla, cuyas caras laterales están fijadas de tal modo, que sus dimensiones transversales no pueden variar. Las fuerzas externas que provocan la compresión están aplicadas en los extremos y actúan en la dirección de eje de la varilla (que consideraremos como eje  $z$ ). Tal deformación es la llamada *compresión unilateral*. Como la varilla sólo se deforma en la dirección  $z$ , de todas las componentes de  $u_{ik}$ , únicamente  $u_{zz}$  es distinta de cero. De (5.13) obtenemos:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} u_{zz}, \quad \sigma_{zz} = \frac{E(1 - \sigma)}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} u_{zz}.$$

Designando de nuevo por  $p$  la fuerza compresora ( $\sigma_{zz} = p$ ;  $p$  es negativo en la compresión), tenemos:

$$u_{zz} = \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{E(1 - \sigma)} p. \quad (5.15)$$

El coeficiente que multiplica a  $p$  se llama coeficiente de compresión unilateral. Para las tensiones transversales tenemos:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = p \frac{\sigma}{1 - \sigma}. \quad (5.16)$$

Finalmente, la energía libre de la varilla es:

$$F = p^2 \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{2E(1 - \sigma)}. \quad (5.17)$$

## § 6. Deformaciones con variación de temperatura

Consideremos ahora las deformaciones que van acompañadas de una variación de temperatura; esta variación puede ocurrir ya sea como resultado del mismo proceso de deformación o por causas externas.

Tomaremos como estado no deformado de un cuerpo, aquel en que no existen fuerzas exteriores, a una cierta temperatura  $T_0$ . Si el cuerpo se halla a una temperatura  $T$  distinta de  $T_0$ , entonces, aún en ausencia de fuerzas externas, en general estará deformado debido a la dilatación térmica. En consecuencia, el desarrollo en serie de la energía libre  $F(T)$  en función del tensor de deformación contendrá no sólo términos cuadráticos, sino también lineales. Con las componentes del tensor de segundo rango  $u_{ik}$  podemos formar solamente un escalar: la suma  $u_{ii}$  de los

elementos diagonales. Supondremos, además, que la variación de temperatura  $T - T_0$  que acompaña a la deformación, es pequeña. Podemos admitir entonces que el coeficiente de  $u_{ii}$  en el desarrollo de  $F$  (que debe anularse para  $T = T_0$ ) es simplemente proporcional a la diferencia  $T - T_0$ . En lugar de (4.3) obtenemos así la siguiente expresión para la energía libre:

$$F(T) = F_0(T) - K\alpha(T - T_0)u_{ll} + \mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik}u_{ll} \right)^2 + \frac{K}{2} u_{ll}^2, \quad (6.1)$$

donde se ha puesto  $-K\alpha$  como coeficiente de  $T - T_0$ . Los coeficientes  $\mu$ ,  $K$  y  $\alpha$  pueden suponerse constantes; tener en cuenta su dependencia de la temperatura, daría origen a términos pequeños de orden superior.

Derivando  $F$  respecto de  $u_{ik}$ , obtenemos el tensor de tensiones:

$$\sigma_{ik} = -K\alpha(T - T_0)\delta_{ik} + Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}). \quad (6.2)$$

El primer término nos da las tensiones adicionales provocadas por el cambio de temperatura del cuerpo. En una expansión térmica libre (en ausencia de fuerzas externas) no deben producirse tensiones internas. Igualando  $\sigma_{ik}$  a cero, encontramos que  $u_{ik}$  es de la forma constante  $\times \delta_{ik}$  y

$$u_{ll} = \alpha(T - T_0). \quad (6.3)$$

Como  $u_{ll}$  es el cambio relativo de volumen causado por la deformación, podemos llamar a  $\alpha$  *coeficiente de dilatación térmica* del cuerpo.

Entre los distintos tipos de deformaciones (desde un punto de vista termodinámico), tienen importancia las deformaciones isotérmicas y adiabáticas. En las deformaciones isotérmicas, la temperatura del cuerpo no cambia. Podemos así poner  $T = T_0$  en (6.1) y volvemos a las fórmulas usuales; los coeficientes  $K$  y  $\mu$  pueden llamarse entonces *módulos isotérmicos*.

Una deformación es adiabática si no hay intercambio de calor entre las diferentes partes del cuerpo (por supuesto, tampoco entre el cuerpo y el medio ambiente). La entropía  $S$  permanece constante. Como es sabido, la entropía es igual a la derivada  $-\frac{\partial F}{\partial T}$  de la energía libre respecto de la temperatura. Diferenciando la expresión (6.1), tenemos, reteniendo solamente términos de primer orden en  $u_{ik}$ :

$$S(T) = S_0(T) + K\alpha u_{ll}. \quad (6.4)$$

Igualando  $S$  a una constante, podemos determinar el cambio de temperatura  $T - T_0$  debido a la deformación. Este cambio resulta proporcional a  $u_{ll}$ . Substituyendo en

(6.2) esta expresión para  $T - T_0$ , obtenemos para  $\sigma_{ik}$  una expresión de la forma acostumbrada

$$\sigma_{ik} = K_{ad} u_{ii} \delta_{ik} + 2\mu(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ii}), \quad (6.5)$$

que contiene el mismo módulo de rigidez  $\mu$ , pero un módulo de compresión diferente  $K_{ad}$ . La relación entre el módulo adiabático  $K_{ad}$  y el módulo isotérmico ordinario  $K$  puede obtenerse sin necesidad de efectuar este cálculo, directamente a partir de la fórmula termodinámica:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T + \frac{T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2}{C_p}$$

donde  $C_p$  es la capacidad calorífica por unidad de volumen, a presión constante. Si  $V$  es el volumen de la materia, que ocupaba la unidad de volumen antes de la deformación, las derivadas  $\frac{\partial V}{\partial T}$  y  $\frac{\partial V}{\partial p}$  dan los cambios relativos de volumen al calentar o al comprimir el cuerpo. O sea, debe ser:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \alpha, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = -\frac{1}{K_{ad}}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{K}.$$

Entonces, encontramos la relación entre los módulos isotérmico y adiabático:

$$\frac{1}{K_{ad}} = \frac{1}{K} - \frac{T\alpha^2}{C_p}, \quad \mu_{ad} = \mu. \quad (6.6)$$

Para los módulos *adiabáticos* de Young y Poisson, fácilmente obtenemos:

$$E_{ad} = \frac{E}{1 - E \frac{T\alpha^2}{9C_p}}, \quad \sigma_{ad} = \frac{\sigma + E \frac{T\alpha^2}{9C_p}}{1 - E \frac{T\alpha^2}{9C_p}}. \quad (6.7)$$

En la práctica,  $\frac{ET\alpha^2}{C_p}$  es generalmente pequeño, y basta, como aproximación,

poner:

$$E_{ad} = E + E^2 \frac{T\alpha^2}{9C_p}, \quad \sigma_{ad} = \sigma + (1 + \sigma)E \frac{T\alpha^2}{9C_p}. \quad (6.8)$$

En deformaciones isotérmicas, el tensor de tensiones está dado en términos de las derivadas de la energía libre:

$$\sigma_{ik} = \left( \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right)_T$$

Por otra parte, para entropía constante, obtenemos [véase (3.6)]

$$\sigma_{ik} = \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_{ik}} \right)_S,$$

donde  $\mathcal{E}$  es la energía interna. En correspondencia con esto, una expresión análoga a (4.3) determina, para deformaciones adiabáticas, no la energía libre, sino la energía interna por unidad de volumen:

$$\mathcal{E} = \frac{K_{ad}}{2} u_{ll}^2 + \mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik} \right)^2. \quad (6.9)$$

## § 7. Ecuaciones de equilibrio para cuerpos isótropos

Vamos a obtener ahora las ecuaciones de equilibrio para cuerpos sólidos isótropos. Para hacerlo, substituyamos en la ecuación general (2.7),

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \varrho g_i = 0$$

la expresión (5.11) para el tensor de tensiones. Obtenemos:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} + \frac{E}{1+\sigma} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k}$$

Substituyendo aquí:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right),$$

obtenemos las ecuaciones de equilibrio en la forma

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_l} + \varrho g_i = 0. \quad (7.1)$$

Estas ecuaciones pueden escribirse convenientemente en notación vectorial. Las derivadas  $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}$  son las componentes del vector  $\Delta \mathbf{u}$ ; además,  $\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \equiv \operatorname{div} \mathbf{u}$ . Las ecuaciones de equilibrio serán entonces:

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = -\varrho \mathbf{g} \frac{2(1+\sigma)}{E}. \quad (7.2)$$

A veces es útil transformar esta ecuación utilizando la identidad vectorial

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}.$$

(7.2) será entonces:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = -\varrho \mathbf{g} \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}. \quad (7.3)$$

Hemos escrito las ecuaciones de equilibrio para un campo gravitatorio uniforme, pues éstas son las fuerzas «de volumen» que aparecen habitualmente en la teoría de la elasticidad. Si existen otras fuerzas de volumen, deberá reemplazarse el vector  $\varrho \mathbf{g}$  en el segundo miembro de la ecuación por la correspondiente «densidad» de las fuerzas de volumen.

Un caso muy importante es aquel en que la deformación del cuerpo es causada, no por fuerzas de volumen, sino por fuerzas aplicadas sobre la superficie. La ecuación de equilibrio será entonces:

$$(1-2\sigma) \Delta \mathbf{u} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (7.4)$$

o en otra forma:

$$2(1-\sigma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - (1-2\sigma) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0. \quad (7.5)$$

Las fuerzas externas aparecen en la solución solamente a través de las condiciones de contorno.

Tomando la divergencia de la ecuación (7.4) y usando la identidad  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \equiv \Delta$ , encontramos que:

$$\Delta \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (7.6)$$

o sea,  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  (que determina el cambio de volumen debido a la deformación) es una función armónica. Si tomamos el laplaciano de la ecuación (7.4), obtenemos ahora:

$$\Delta \Delta \mathbf{u} = 0, \quad (7.7)$$

o sea, en el equilibrio, el vector de desplazamiento satisface la *ecuación biarmónica*. Estos resultados son válidos también en un campo gravitatorio uniforme (porque el segundo miembro de la ecuación (7.2) resulta cero al diferenciar), pero no en el caso de fuerzas de volumen externas que varían de punto a punto del cuerpo.

El hecho que el vector de desplazamiento satisfaga la ecuación biarmónica no significa, por supuesto, que la integral general de las ecuaciones de equilibrio (en ausencia de fuerzas de volumen) sea un vector biarmónico arbitrario; debe recordarse que la función  $\mathbf{u}(x, y, z)$  también satisface la ecuación diferencial de orden inferior (7.4). Sin embargo, es posible expresar la integral general de las ecuaciones de equilibrio en términos de las derivadas de un vector biarmónico (problema 10).

Si el cuerpo no está calentado uniformemente, aparece un término adicional en la ecuación de equilibrio. En el tensor de tensiones debe incluirse el término  $-K\alpha(T - T_0)\delta_{ik}$  (6.2), y  $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ , en consecuencia, contiene el término:

$$-K\alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\frac{E\alpha}{3(1-2\sigma)} \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

La ecuación de equilibrio toma entonces la forma:

$$\frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{3(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \alpha \nabla T. \quad (7.8)$$

Consideremos el caso particular de una *deformación plana*, en la cual una componente del vector de desplazamiento ( $u_z$ ) es nula en todo punto del cuerpo, mientras que las componentes  $u_x, u_y$  dependen sólo de  $x$  e  $y$ . Las componentes  $u_{zz}, u_{xz}, u_{yz}$  del tensor de deformación son idénticamente nulas y, en consecuencia, también lo son las componentes  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  del tensor de tensiones (pero no la tensión longitudinal

$\sigma_{zz}$ , cuyo valor, distinto de cero, está asegurado por la hipótesis de que la longitud del cuerpo en la dirección  $z$  es constante) (\*).

Como todas las cantidades son independientes de la coordenada  $z$ , las ecuaciones de equilibrio (en ausencia de fuerzas externas de volumen)  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$  se reducen en este caso a las dos ecuaciones

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (7.9)$$

La forma más general de las funciones  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$ , que satisfacen estas ecuaciones, es:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad (7.10)$$

donde  $\chi$  es una función arbitraria de  $x$  e  $y$ . Es fácil obtener una ecuación que debe quedar satisfecha por esta función. Tal ecuación debe existir porque las tres cantidades  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$  pueden expresarse en términos de las dos cantidades  $u_x$ ,  $u_y$  y, en consecuencia, no son independientes. Utilizando las fórmulas (5.13), encontramos, para una deformación plana:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} (u_{xx} + u_{yy}).$$

Pero

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \Delta \chi, \quad u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \equiv \operatorname{div} \mathbf{u},$$

y, como  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  es una función armónica según (7.6), la función  $\chi$  debe satisfacer la ecuación

$$\Delta \Delta \chi = 0, \quad (7.11)$$

o sea, debe ser, biarmónica. Esta función  $\chi$  es la *función de tensiones*. Cuando ha sido resuelto el problema plano y obtenida la función  $\chi$ , la tensión longitudinal  $\sigma_{zz}$  queda determinada directamente por la fórmula

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} (u_{xx} + u_{yy}) = \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

(\*) Existen métodos muy efectivos para resolver problemas planos de la teoría de la elasticidad relacionados con la aplicación de la teoría de las funciones de variable compleja. Véase N. I. Muskhelishvili, *Nekotorye osnovnye zadachi teorii uprugosti* (*Algunos problemas fundamentales de la teoría de la elasticidad*), Ed. de la Acad. de Ciencias de la URSS, 1954.

$$\sigma_{zz} = \sigma \Delta \chi.$$

### PROBLEMAS

1. Determinar la deformación de una larga varilla (longitud  $l$ ) vertical y en reposo en un campo gravitatorio.

*Solución.* Tomemos el eje  $z$  en la dirección de la varilla, y el plano  $x, y$  coincidente con el plano de su extremo inferior. Las ecuaciones de equilibrio son:  $\frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{yi}}{\partial x_i} = 0$ ,  $\frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial x_i} = \varrho g$ .

Sobre la superficie lateral de la varilla todas las componentes de  $\sigma_{ik}$  deben anularse, excepto  $\sigma_{zz}$ , y en el extremo superior ( $z = l$ ) es  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ . La solución de las ecuaciones de equilibrio que satisface estas condiciones es,  $\sigma_{zz} = -\varrho g(l - z)$ , con todas las otras  $\sigma_{ik}$  idénticamente nulas.

A partir de  $\sigma_{ik}$  hallamos los siguientes valores para  $u_{ik}$ ,  $u_{xx} = u_{yy} = \frac{\sigma}{E} \varrho g(l - z)$ ,  $u_{zz} = -\frac{\varrho g(l - z)}{E}$ ,

$u_{xy} = u_{xz} = u_{yz} = 0$ , e integrando, obtenemos las componentes del vector de desplazamiento:

$$u_x = \frac{\sigma}{E} \varrho g(l - z)x, \quad u_y = \frac{\sigma}{E} \varrho g(l - z)y, \quad u_z = -\frac{\varrho g}{2E} \{l^2 - (l - z)^2 - \sigma(x^2 + y^2)\}.$$

La expresión para  $u_z$  satisface la condición de contorno  $u_z = 0$  sólo en un punto del extremo inferior de la varilla. Por lo tanto, la solución obtenida no es válida en las proximidades del extremo inferior.

2. Hallar la deformación de una esfera hueca (de radios externo e interno  $R_2$  y  $R_1$ , respectivamente), sometida a una presión interna  $p_1$  y a una presión externa  $p_2$ .

*Solución.* Usaremos coordenadas esféricas con origen en el centro de la esfera. El vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$  es siempre radial y función de  $r$  solamente. Por consiguiente es  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ , y la ecuación (7.5) será ahora  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Resulta pues

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} = \text{const} \equiv 3a,$$

o sea  $u = ar + \frac{b}{r^2}$ . Las componentes del tensor de deformación son [véanse fórmulas (1.7)]  $u_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}$ ,  $u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = a + \frac{b}{r^3}$ . La tensión radial resulta:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \{(1-\sigma)u_{rr} + 2\sigma u_{\theta\theta}\} = \frac{E}{1-2\sigma} a - \frac{2E}{1+\sigma} \frac{b}{r^3}.$$

Las constantes  $a$  y  $b$  se determinan mediante las condiciones de contorno:  $\sigma_{rr} = -p_1$  para  $r = R_1$  y  $\sigma_{rr} = -p_2$  para  $r = R_2$ . De aquí se sigue:

$$a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E}, \quad b = \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma}{2E}.$$

Por ejemplo, la distribución de tensiones dentro de una capa esférica sometida a una presión interna  $p = p_1$  y externa  $p_2 = 0$  será:

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(1 - \frac{R_2^3}{r^3}\right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(1 + \frac{R_2^3}{r^3}\right)$$

Para una cáscara esférica delgada, de espesor  $h = R_2 - R_1 \ll R$  obtenemos aproximadamente:

$$u = \frac{pR^2(1-\sigma)}{2Eh}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR}{2h}, \quad \bar{\sigma}_{rr} = \frac{p}{2}$$

donde  $\bar{\sigma}_{rr}$  es el valor medio de la tensión radial promediada en el espesor de la cáscara.

Puede obtenerse la distribución de tensiones en un medio elástico infinito con una cavidad hueca (de radio  $R$ ) sometido a compresión hidrostática, simplemente poniendo en las ecuaciones anteriores  $R_1 = R$ ,  $R_2 = \infty$ ,  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = p$ :

$$\sigma_{rr} = -p \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)$$

En la superficie de la cavidad la tensión tangencial es  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -3p/2$ , o sea, mayor que la presión en el infinito.

3. Determinar la deformación de una esfera maciza (de radio  $R$ ) bajo la acción de su propio campo gravitatorio.

*Solución.* La fuerza gravitatoria que actúa sobre la unidad de masa en un cuerpo esférico es  $-gr/R$ . Substituyendo esta expresión en lugar de  $g$  en la ecuación (7.3), obtenemos la siguiente expresión para el desplazamiento radial:

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} \right) = \rho g \frac{r}{R}.$$

La solución, finita para  $r = 0$  y que satisface la condición  $\sigma_{rr} = 0$  para  $r = R$ , es

$$u = - \frac{\rho g R (1-2\sigma)(1+\sigma)}{10E(1-\sigma)} r \left( \frac{3-\sigma}{1+\sigma} - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Obsérvese que la materia está comprimida ( $u_{rr} < 0$ ) dentro de una esfera de radio  $R \sqrt{\frac{3-\sigma}{3(1+\sigma)}}$  y dilatada fuera de la misma ( $u_{rr} > 0$ ). En el centro de la esfera la presión es igual a  $\frac{3-\sigma}{10(1-\sigma)} \rho g R$ .

4. Hallar la deformación de un tubo cilíndrico de radios externo e interno  $R_2$  y  $R_1$ , respectivamente, sometido únicamente a una presión interna  $p$  (\*).

*Solución.* Utilizaremos ahora coordenadas cilíndricas, con el eje  $z$  según el eje del tubo. Cuando la presión es uniforme a lo largo del tubo, la deformación es un desplazamiento radial puro  $u_r = u(r)$ . Análogamente al problema 2, obtendremos:

(\*) En los problemas 4, 5 y 7 se supone que se mantiene constante la longitud del cilindro, de manera que no hay deformación longitudinal.

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} = \text{const} \equiv 2a.$$

Resulta, por consiguiente  $u = ar + \frac{b}{r}$ . Las componentes no nulas del tensor de deformaciones son [véanse fórmulas (1.8)]  $u_{rr} = \frac{du}{dr} = a - \frac{b}{r^2}$ ,  $u_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = a + \frac{b}{r^2}$ . De las condiciones  $\sigma_{rr}=0$  en  $r=R_2$  y  $\sigma_{rr}=-p$  en  $r=R_1$  se deduce que

$$a = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E}, \quad b = \frac{pR_1^2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1+\sigma}{E}.$$

La distribución de tensiones en el espesor de las paredes del tubo está dada por las fórmulas:

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{zz} = 2\sigma \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

5. Determinar la deformación de un cilindro que gira uniformemente alrededor de su eje.

*Solución.* Reemplazando la fuerza gravitatoria en (7.3) por la fuerza centrífuga  $\varrho\Omega^2r$  (donde  $\Omega$  es la velocidad angular), obtenemos en coordenadas cilíndricas la siguiente ecuación para el desplazamiento  $u_r = u(r)$ :

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} \right) = -\varrho\Omega^2r.$$

La solución finita para  $r=0$  y que satisface la condición  $\sigma_{rr}=0$  en  $r=R$ , es

$$u = \frac{\varrho\Omega^2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)} r [(3-2\sigma)R^2 - r^2].$$

6. Hallar la deformación de una esfera calentada no uniformemente, con una distribución de temperaturas esféricamente simétrica.

*Solución.* En coordenadas esféricas, la ecuación (7.8) para una deformación puramente radial es:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2u)}{dr} \right) = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \frac{dT}{dr}.$$

La solución finita en  $r = 0$  y que satisface la condición  $\sigma_{rr} = 0$  en  $r = R$ , es

$$u = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \left\{ \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r^2 dr + \frac{2(1-2\sigma)}{1+\sigma} \frac{r}{R^3} \int_0^R T(r) r^2 dr \right\}.$$

La temperatura  $T(r)$  se mide a partir de un valor para el cual la esfera, calentada uniformemente, se considera sin deformación. En la fórmula anterior, para esta temperatura se ha elegido la de la superficie exterior de la esfera, de manera que  $T(R) = 0$ .

7. Idem, para un cilindro calentado no uniformemente y con una distribución axialmente simétrica de temperatura.

*Solución.* Análogamente, obtenemos, en coordenadas cilíndricas:

$$u = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r T(r) r dr + (1-2\sigma) \frac{r}{R^2} \int_0^R T(r) r dr \right\}.$$

8. Determinar la deformación de un medio elástico infinito con una distribución dada de temperatura  $T(x, y, z)$ , tal que ésta tiende a un valor constante  $T_0$  en el infinito, no habiendo deformación allí.

*Solución.* La ecuación (7.8) tiene una solución evidente para la cual:

$$\text{rot } \mathbf{u} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} [T(x, y, z) - T_0].$$

El vector  $\mathbf{u}$ , cuya divergencia es una función dada, definida en todo el espacio y que se anula en el infinito, y cuyo rotacional es idénticamente nulo, puede escribirse, como sabemos por análisis vectorial, en la forma:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = - \frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\text{div}' \mathbf{u}(x', y', z')}{r} dV',$$

donde

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Obtenemos pues la solución general del problema en la forma

$$\mathbf{u} = - \frac{\alpha(1+\sigma)}{12\pi(1-\sigma)} \nabla \int \frac{T' - T_0}{r} dV', \quad (1)$$

donde  $T' = T(x', y', z')$ .

Si en un volumen muy pequeño que contiene el origen se desarrolla una cantidad finita de calor  $q$ ,

la distribución de temperatura puede escribirse ( $C$  es la capacidad calorífica del medio)  $T - T_0 = -\frac{q}{C} \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ , donde  $\delta$  representa la función  $\delta$  de Dirac. La integral en (1) es entonces  $\frac{q}{Cr}$ , y la deformación resulta:

$$\mathbf{u} = \frac{\alpha(1+\sigma)q}{12\pi(1-\sigma)C} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

9. Obtener las ecuaciones de equilibrio de un cuerpo isótropo (en ausencia de fuerzas de volumen), en términos de las componentes del tensor de tensiones.

*Solución.* El sistema requerido de ecuaciones contiene las tres ecuaciones:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (1)$$

y también las ecuaciones que resultan del hecho de que las seis componentes diferentes de  $u_{ik}$  no son cantidades independientes. Para obtener estas ecuaciones, primero escribiremos el sistema de relaciones diferenciales satisfechas por las componentes del tensor  $u_{ik}$ . Es fácil ver que las cantidades

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

satisfacen idénticamente las relaciones

$$\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x_l \partial x_m} + \frac{\partial^2 u_{im}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 u_{km}}{\partial x_i \partial x_l}.$$

Aquí hay sólo 6 relaciones esencialmente distintas (las correspondientes a los valores  $i, k, l, m$ : 1122, 1133, 2233, 1123, 2213, 3312); todas ellas se conservan al contraer esta igualdad tensorial respecto a los índices  $l, m$ :

$$\Delta u_{ik} + \frac{\partial^2 u_{ll}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial x_i \partial x_l}. \quad (2)$$

Sustituyendo aquí  $u_{ik}$  en términos de  $\sigma_{ik}$ , de acuerdo con (5.12), y usando (1), obtenemos las ecuaciones buscadas:

$$(1+\sigma)\Delta \sigma_{ik} + \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \quad (3)$$

Estas ecuaciones son válidas en presencia de fuerzas externas constantes en todo el cuerpo.

Contrayendo la ecuación (3) respecto a los índices  $i, k$ , encontramos que  $\Delta\sigma_{ii} = 0$ , o sea,  $\sigma_{ii}$  es una función armónica. Tomando el lapiaciano de la ecuación (3), obtenemos  $\Delta\Delta\sigma_{ik} = 0$ , es decir, las componentes  $\sigma_{ik}$  son funciones biarmónicas. Estos resultados se obtienen también directamente de (7.6) y (7.7) dado que  $\sigma_{ik}$  y  $u_{ik}$  están relacionadas linealmente.

10. Expresar la integral general de las ecuaciones de equilibrio (en ausencia de fuerzas de volumen) en términos de un vector biarmónico arbitrario (B. G. Galérkin, 1930).

*Solución.* Resulta natural probar, como solución de la ecuación (7.4), una función del tipo

$$\mathbf{u} = \Delta\mathbf{f} + A \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{f}.$$

De aquí se sigue  $\operatorname{div} \mathbf{u} = (1+A) \operatorname{div} \Delta\mathbf{f}$ . Substituyendo en (7.4), obtenemos:

$$(1-2\sigma)\Delta\Delta\mathbf{f} + [2(1-\sigma)A+1] \operatorname{grad} \operatorname{div} \Delta\mathbf{f} = 0.$$

Vemos, pues, que si  $\mathbf{f}$  es un vector biarmónico arbitrario, o sea, tal que  $\Delta\Delta\mathbf{f} = 0$ , resulta

$$\mathbf{u} = \Delta\mathbf{f} - \frac{1}{2(1-\sigma)} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{f}.$$

11. Expresar las tensiones  $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{r\varphi}$  en una deformación plana (en coordenadas polares  $r, \varphi$ ) como derivadas de la función de tensiones.

*Solución.* Como las expresiones requeridas no pueden depender del origen que se tome para el ángulo  $\varphi$  éste no aparecerá explícitamente en las mismas. Entonces, podemos proceder de la siguiente manera: transformemos las derivadas cartesianas (7.10) en derivadas respecto de  $r$  y  $\varphi$  y usemos las igualdades  $\sigma_{rr} = (\sigma_{xx})_{\varphi=0}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi} = (\sigma_{yy})_{\varphi=0}$ ,  $\sigma_{r\varphi} = (\sigma_{xy})_{\varphi=0}$  en las que el ángulo  $\varphi$  se ha medido a partir del eje  $x$ . De este modo obtenemos:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial^2 \varphi}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right).$$

12. Determinar la distribución de tensiones en un medio elástico infinito que contiene una cavidad esférica, sujeto a una deformación homogénea (en el infinito).

*Solución.* Una deformación homogénea general puede representarse como superposición de una extensión (o compresión) hidrostática homogénea y una deformación de corte homogénea. La compresión ya se consideró en el problema 2, de manera que trataremos solamente la deformación de corte homogénea.

Sea  $\sigma_{ik}^{(0)}$  el campo de tensiones homogéneo que habría en todo el espacio si no existiese la cavidad; para una deformación de corte pura es  $\sigma_{ii}^{(0)} = 0$ . Llamaremos  $\mathbf{u}^{(0)}$  al vector de desplazamiento correspondiente y buscaremos una solución del tipo  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)}$ , donde la función  $\mathbf{u}^{(1)}$ , determinada por la presencia de la cavidad, se anula en el infinito.

Cualquier solución de la ecuación biarmónica puede escribirse como combinación lineal de soluciones con simetría radial y de sus derivadas de distintos órdenes respecto de las coordenadas.

Las funciones  $r^2$ ,  $r$ ,  $1$ ,  $1/r$  son soluciones independientes con simetría radial. Resulta entonces que la forma más general de un vector biarmónico  $u^{(1)}$ , que contiene como parámetros sólo las componentes del tensor constante  $\sigma_{ik}^{(0)}$  y se anula en el infinito, es:

$$u_i^{(1)} = A\sigma_{ik}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{r} \right) + B\sigma_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \left( \frac{1}{r} \right) + C\sigma_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} r. \quad (1)$$

Substituyendo esta expresión en la ecuación (7.4) obtenemos:

$$(1 - 2\sigma) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = [2(1 - 2\sigma)C + (A + 2C)]\sigma_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \frac{1}{r} = 0,$$

de donde  $A = -4C(1 - \sigma)$ . Otras dos relaciones entre las constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , se obtienen a partir de la condición que debe cumplirse en la superficie de la cavidad:  $(\sigma_{ik}^{(0)} + \sigma_{ik}^{(1)}) n_k = 0$  para  $r = R$  ( $R$  es el radio de la cavidad, el origen de coordenadas se toma en su centro y  $n$  es el vector unitario correspondiente a  $r$ ). Después de algunos cálculos se obtienen, utilizando la expresión (1), los siguientes valores:

$$B = \frac{CR^2}{5}, \quad C = \frac{5R^3(1 + \sigma)}{2E(7 - 5\sigma)}.$$

La expresión final para la distribución de tensiones es:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = & \sigma_{ik}^{(0)} \left\{ 1 + \frac{5(1 - 2\sigma)}{7 - 5\sigma} \left( \frac{R}{r} \right)^3 + \frac{3}{7 - 5\sigma} \left( \frac{R}{r} \right)^5 \right\} + \\ & + \frac{15}{7 - 5\sigma} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \left\{ \sigma - \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right\} (\sigma_{il}^{(0)} n_k n_l + \sigma_{kl}^{(0)} n_l n_i) + \\ & + \frac{15}{2(7 - 5\sigma)} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \left\{ -5 + 7 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right\} \sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m n_i n_k + \\ & + \frac{15}{2(7 - 5\sigma)} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \left\{ 1 - 2\sigma - \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right\} \delta_{ik} \sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m. \end{aligned}$$

A fin de obtener la distribución de tensiones para un  $\sigma_{ik}^{(0)}$  arbitrario (no puramente de corte), deberá reemplazarse en la expresión precedente  $\sigma_{ik}^{(0)}$  por  $\sigma_{ik}^{(0)} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{ll}^{(0)}$  y agregar a ella el tér-

mino:

$$\frac{1}{3}\sigma_{ll}^{(0)} \left[ \delta_{ik} + \frac{R^3}{2r^3} (\delta_{ik} - 3n_i n_k) \right]$$

correspondiente a una extensión homogénea en el infinito (véase problema 2). Daremos aquí la fórmula general para la tensión en la superficie de la cavidad:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = \frac{15}{7 - 5\sigma} & \left\{ (1 - \sigma) (\sigma_{ik}^{(0)} - \sigma_{il}^{(0)} n_l n_k - \sigma_{kl}^{(0)} n_l n_i) + \sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m n_i n_k - \right. \\ & \left. - \sigma \sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m \delta_{ik} + \frac{5\sigma - 1}{10} \sigma_{ll}^{(0)} (\delta_{ik} - n_i n_k) \right\} \end{aligned}$$

Cerca de la cavidad, las tensiones son mucho mayores que en el infinito, pero este aumento tiene un carácter fuertemente local y disminuye rápidamente al crecer la distancia a la superficie de aquélla (concentración de las tensiones cerca de la cavidad). Por ejemplo, si el medio está sujeto a una extensión homogénea (sólo  $\sigma_{zz}^{(0)}$  distinto de cero), la máxima tensión ocurre sobre el ecuador de la cavidad, donde

$$\sigma_{zz} = \frac{27 - 15\sigma}{2(7 - 5\sigma)} \sigma_{zz}^{(0)}.$$

### § 8. Equilibrio de un medio elástico limitado por un plano

Consideremos un medio elástico que ocupa un semi-espacio, es decir, un medio limitado únicamente por un plano infinito, y determinemos la deformación del medio causada por fuerzas aplicadas sobre la superficie libre (\*). La distribución de estas fuerzas debe satisfacer una sola condición: deben anularse en el infinito de manera tal que allí no haya deformación. En este caso las ecuaciones de equilibrio pueden integrarse en forma general.

La ecuación de equilibrio (7.4) en todo el espacio ocupado por el medio es:

$$\text{grad div } \mathbf{u} + (1 - 2\sigma) \Delta \mathbf{u} = 0. \quad (8.1)$$

Probaremos una solución de la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} + \nabla \varphi, \quad (8.2)$$

---

(\*) El método más directo y clásico de resolución del problema propuesto, consiste en aplicar a la ecuación (8.1) el método de Fourier. Sin embargo, se llega entonces al cálculo de integrales bastante complicadas. El método expuesto más abajo, basado en una serie de artificios, lleva a cálculos más simples.

donde  $\varphi$  es un escalar y  $\mathbf{f}$  satisface la ecuación de Laplace:

$$\Delta \mathbf{f} = 0. \quad (8.3)$$

Substituyendo (8.2) en (8.1), obtenemos para la siguiente ecuación:

$$2(1 - \sigma)\Delta\varphi = -\operatorname{div}\mathbf{f}. \quad (8.4)$$

Elijamos como plano  $x, y$  la superficie libre del medio elástico; el dominio que éste ocupa es el semiespacio  $z > 0$ . Escribamos las funciones  $f_x$  y  $f_y$  como derivadas respecto de  $z$  de ciertas funciones  $g_x$  y  $g_y$ :

$$f_x = \frac{\partial g_x}{\partial z}, \quad f_y = \frac{\partial g_y}{\partial z}. \quad (8.5)$$

Como  $f_x$  y  $f_y$  son funciones armónicas, podemos elegir siempre las funciones  $g_x$  y  $g_y$  de manera que satisfagan la ecuación de Laplace

$$\Delta g_x = 0, \quad \Delta g_y = 0. \quad (8.6)$$

La ecuación (8.4) toma entonces la forma

$$2(1 - \sigma)\Delta\varphi = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + f_z \right)$$

Como  $g_x$ ,  $g_y$  y  $f_z$  son funciones armónicas, vemos fácilmente que la función  $\varphi$  que satisface esta ecuación puede escribirse

$$\varphi = -\frac{z}{4(1 - \sigma)} \left( f_z + \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + \psi, \quad (8.7)$$

donde  $\psi$  es nuevamente una función armónica

$$\Delta\psi = 0. \quad (8.8)$$

Así, pues, el problema de determinar el desplazamiento  $\mathbf{u}$  se reduce a encontrar las funciones  $g_x$ ,  $g_y$ ,  $f_z$ ,  $\psi$  todas las cuales satisfacen la ecuación de Laplace.

Escribamos ahora las condiciones de contorno que deben satisfacerse en la superficie libre del medio (en el plano  $z = 0$ ). Como el vector unitario normal  $\mathbf{n}$  apunta

hacia valores de  $z$  negativos, por la fórmula general (2,8) vemos que  $\sigma_{iz} = -P_i$ . Usando para  $\sigma_{ik}$  la expresión (5.11) y expresando las componentes del vector  $\mathbf{u}$  en términos de las cantidades auxiliares  $g_x, g_y, f_z$  y  $\psi$ , obtenemos, luego de un simple cálculo, las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)} \left( \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \Big|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E} P_x,$$

$$\frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)} \left( \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \Big|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E} P_y,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ f_z - \left( \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \Big|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E} P_z. \quad (8.10)$$

Las componentes  $P_x, P_y, P_z$  de las fuerzas externas aplicadas sobre la superficie, son funciones dadas de las coordenadas  $x$  e  $y$  que se anulan en el infinito.

Con las fórmulas (8.5) a (8.8) las funciones  $g_x, g_y, f_z$  y  $\psi$  no quedan determinadas únicamente; subsiste en su elección una cierta arbitrariedad. Podemos imponerles, por lo tanto, una condición arbitraria suplementaria; por ejemplo, la de que se anule la expresión entre corchetes en (8.9) (\*):

$$(1-2\sigma)f_z - \left( \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 4(1-\sigma)\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \quad (8.11)$$

Las condiciones (8.9) serán ahora, simplemente:

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E} P_x, \quad \frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E} P_y. \quad (8.12)$$

Las ecuaciones (8.10)-(8.12) bastan para determinar completamente las funciones armónicas  $g_x, g_y, f_z$  y  $\psi$ .

Para simplificar la escritura de las fórmulas que siguen consideraremos solamente el caso en que la superficie libre del semiespacio elástico está sometida a una fuerza **concentrada**  $\mathbf{F}$ , o sea, una fuerza aplicada sobre un área tan pequeña que puede

(\*) No demostraremos aquí que esa condición puede imponerse; que así es, será consecuencia de que ello no conduce a resultados contradictorios.

considerarse puntual. El efecto de esta fuerza es el mismo que el de una fuerza de superficie dada por

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\delta(x)\delta(y),$$

donde se ha elegido como origen de coordenadas el punto de aplicación. Si se conoce la solución para una fuerza concentrada, podremos hallarla inmediatamente para cualquier distribución de fuerzas  $\mathbf{P}(x, y)$ , porque si

$$u_i = G_{ik}(x, y, z)F_k \quad (8.13)$$

es el desplazamiento debido a la acción de una fuerza concentrada  $\mathbf{F}$  aplicada en el origen, el desplazamiento provocado por fuerzas  $\mathbf{P}(x, y)$  será la integral (\*).

$$u_i = \iint G_{ik}(x-x', y-y', z)P_k(x', y') dx' dy'. \quad (8.14)$$

Sabemos por la teoría del potencial que una función armónica  $f$ , que es nula en el infinito y que tiene una derivada normal  $\frac{\partial f}{\partial z}$  dada en el plano  $z=0$ , es la definida por la fórmula:

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint \frac{\partial f(x', y', z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \frac{dx' dy'}{r},$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}.$$

Como las derivadas  $\frac{\partial g_x}{\partial z}$  y  $\frac{\partial g_y}{\partial z}$  y la expresión entre corchetes en (8.10) satisfacen la ecuación de Laplace, mientras que las ecuaciones (8.10) y (8.12) determinan

---

(\*) Según la terminología matemática,  $G_{ik}$  es el tensor de Green de las ecuaciones de equilibrio de un medio semiinfinito.

justamente los valores de sus derivadas normales en el plazo  $z = 0$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} f_z - \left( \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{1+\sigma}{\pi E} \int \int \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' \\ &= \frac{1+\sigma}{\pi E} \cdot \frac{F_z}{r}, \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E} \cdot \frac{F_x}{r}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E} \cdot \frac{F_y}{r}, \quad (8.16)$$

donde ahora  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Las expresiones para las componentes del vector  $\mathbf{u}$  involucran las derivadas de  $g_x, g_y$  con respecto a  $x, y, z$ , pero no a  $g_x, g_y$  directamente. Para calcular  $\frac{\partial g_x}{\partial x}$  y  $\frac{\partial g_y}{\partial y}$  derivemos las ecuaciones (8.16) con respecto a  $x$  e  $y$  respectivamente:

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial x \partial z} = - \frac{1+\sigma}{\pi E} \cdot \frac{F_{xx}}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 g_y}{\partial y \partial z} = - \frac{1+\sigma}{\pi E} \cdot \frac{F_{yy}}{r^3}.$$

Ahora, integrando respecto de la variable  $z$ , de  $\infty$  a  $z$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_x}{\partial x} &= \frac{1+\sigma}{\pi E} \cdot \frac{F_{xx}}{r(r+z)}, \\ \frac{\partial g_y}{\partial y} &= \frac{1+\sigma}{\pi E} \cdot \frac{F_{yy}}{r(r+z)}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

No nos detendremos en los cálculos que faltan, que son elementales pero laboriosos: Determinamos  $f_z$  y  $\frac{\partial \psi}{\partial z}$  a partir de las ecuaciones (8.11), (8.15) y (8.17). Conociendo  $\frac{\partial \psi}{\partial z}$  es fácil calcular  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$  integrando primero respecto de  $z$  y

derivando luego respecto de  $x$  e  $y$ . Obtenemos así todas las cantidades que necesitamos para calcular  $\mathbf{u}$  utilizando (8.2), (8.5) y (8.7). El resultado final es:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{1+\sigma}{2\pi E} \left\{ \left[ \frac{xz}{r^3} - \frac{(1-2\sigma)x}{r(r+z)} \right] F_z + \frac{2(1-\sigma)r+z}{r(r+z)} F_x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[2r(\sigma r+z)+z^2]x}{r^3(r+z)^2} (xF_x+yF_y) \right\}, \\ u_y &= \frac{1+\sigma}{2\pi E} \left\{ \left[ \frac{yz}{r^3} - \frac{(1-2\sigma)y}{r(r+z)} \right] F_z + \frac{2(1-\sigma)r+z}{r(r+z)} F_y + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[2r(\sigma r+z)+z^2]y}{r^3(r+z)^2} (xF_x+yF_y) \right\}, \\ u_z &= \frac{1+\sigma}{2\pi E} \left\{ \left[ \frac{2(1-\sigma)}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right] F_z + \left[ \frac{1-2\sigma}{r(r+z)} + \frac{z}{r^3} \right] (xF_x+yF_y) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

En particular, el desplazamiento de los puntos de la propia superficie libre del medio viene dado por las fórmulas que se obtienen de aquí cuando se hace  $z = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{1+\sigma}{2\pi E} \cdot \frac{1}{r} \left\{ -\frac{(1-2\sigma)x}{r} F_z + 2(1-\sigma)F_x + \frac{2\sigma x}{r^2} (xF_x+yF_y) \right\}, \\ u_y &= \frac{1+\sigma}{2\pi E} \cdot \frac{1}{r} \left\{ -\frac{(1-2\sigma)y}{r} F_z + 2(1-\sigma)F_y + \frac{2\sigma y}{r^2} (xF_x+yF_y) \right\}, \\ u_z &= \frac{1+\sigma}{2\pi E} \cdot \frac{1}{r} \left\{ 2(1-\sigma)F_z + (1-2\sigma) \frac{1}{r} (xF_x+yF_y) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

#### PROBLEMA

Determinar la deformación de un medio elástico infinito cuando se aplica una fuerza  $\mathbf{F}$  sobre una pequeña región del mismo (\*).

*Solución.* Si consideramos la deformación a distancias  $r$  que son grandes en comparación con las dimensiones de la región en que se aplica la fuerza, podemos suponer que la fuerza está aplicada en un punto. La ecuación de equilibrio es (7.2):

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = - \frac{2(1+\sigma)}{E} \mathbf{F} \delta(\mathbf{r}), \quad (1)$$

\*) El problema análogo para un medio anisótropo ilimitado arbitrario fue resuelto por I. M. LIFSHITZ y L. N. ROZENTSVEIG (Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki 17, 783, 1947).

[donde  $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ , coincidiendo el origen de coordenadas con el punto de aplicación de la fuerza]. Buscaremos soluciones de la forma  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$  donde  $\mathbf{u}_0$  satisface la ecuación de Poisson:

$$\Delta \mathbf{u}_0 = -\frac{2(1+\sigma)}{E} \mathbf{F} \delta(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Tenemos entonces para  $\mathbf{u}_1$  la ecuación:

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_1 + (1-2\sigma) \Delta \mathbf{u}_1 = -\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_0 \quad (3)$$

La solución de (2) que se anula en el infinito es  $\mathbf{u}_0 = \frac{1+\sigma}{2\pi E} \frac{\mathbf{F}}{r}$ . Tomando el rotacional de la ecuación (3) obtenemos  $\Delta \operatorname{rot} \mathbf{u}_1 = 0$ . En el infinito debemos tener  $\operatorname{rot} \mathbf{u}_1 = 0$ . Pero una función armónica en todo el espacio y nula en el infinito es igual a cero idénticamente. De este modo,  $\operatorname{rot} \mathbf{u}_1 = 0$  y, en correspondencia con ello, podemos escribir  $\mathbf{u}_1 = \operatorname{grad} \varphi$ . De (3) obtenemos  $\nabla \{2(1-\sigma) \Delta \varphi + \operatorname{div} \mathbf{u}_0\} = 0$ . Evidentemente la expresión entre corchetes es una constante, y como debe anularse en el infinito, entonces en todo el espacio

$$\Delta \varphi = -\frac{\operatorname{div} \mathbf{u}_0}{2(1-\sigma)} = -\frac{1+\sigma}{4\pi E(1-\sigma)} \mathbf{F} \nabla \frac{1}{r}.$$

Si  $\psi$  es una solución de la ecuación  $\Delta \psi = 1/r$ , entonces:

$$\varphi = -\frac{1+\sigma}{4\pi E(1-\sigma)} \mathbf{F} \nabla \psi.$$

Tomando la solución  $\psi = 1/r$ , que no posee singularidades, obtenemos:

$$\mathbf{u}_1 = \nabla \varphi = \frac{1+\sigma}{8\pi E(1-\sigma)} \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{F}}{r}$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario correspondiente al radio-vector  $\mathbf{r}$ ; el resultado final es:

$$\mathbf{u} = \frac{1+\sigma}{8\pi E(1-\sigma)} \cdot \frac{(3-4\sigma)\mathbf{F} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{F})}{r}.$$

Escribiendo esta fórmula en la forma (8.13), obtenemos el tensor de Green de las ecuaciones de equilibrio de un medio isótropo ilimitado: (\*)

$$G_{ik} = \frac{1+\sigma}{8\pi E(1-\sigma)} [(3-4\sigma)\delta_{ik} + n_i n_k] \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\mu} \left[ \frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{1}{4(1-\sigma)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} r \right].$$

### § 9. Cuerpos sólidos en contacto

Consideremos dos cuerpos sólidos, en contacto en un punto que no es un punto singular de sus superficies (la Fig. 1, a muestra un corte de ambas superficies, cerca del punto de contacto). Las dos superficies tienen en este punto un plano tangente común, que elegiremos como plano  $xy$ . En cambio, convendremos en considerar como sentido positivo del eje  $z$  el que apunta hacia el interior de cada cuerpo, es decir, tendremos dos semiejes positivos,  $z$  y  $z'$ , orientados en sentidos opuestos.

Como es sabido, cerca de un punto de contacto ordinario con el plano  $xy$ , la ecuación de la superficie puede escribirse en la forma

$$z = \kappa_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \quad (9.1)$$

donde se sobreentiende la suma, extendida a los valores 1, 2, respecto de los índices repetidos  $\alpha, \beta$  ( $x_1 = x, x_2 = y$ ), y  $\kappa_{\alpha\beta}$  es un tensor simétrico bidimensional que caracteriza la curvatura de la superficie (los valores principales del tensor  $\kappa_{\alpha\beta}$  son  $1/2R_1$  y  $1/2R_2$  donde  $R_1$  y  $R_2$  son los radios principales de curvatura en el punto de contacto). Puede escribirse una ecuación similar para la superficie del segundo cuerpo cerca del punto de contacto

$$z' = \kappa'_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta. \quad (9.2)$$

Supongamos que los dos cuerpos son comprimidos, uno contra el otro, mediante fuerzas aplicadas, como resultado de lo cual ambos se acercan una pequeña distancia  $h$ (\*\*). Se produce entonces una deformación cerca del punto de contacto original y los dos cuerpos estarán ahora en contacto en una superficie pequeña, pero finita. Sean  $u_z, u'_z$  las componentes (a lo largo de los ejes  $z$  y  $z'$ , respectivamente) de los vectores de desplazamiento para puntos en las superficies de ambos cuerpos. Las líneas punteadas en la Fig. 1, b muestran como estarían las superficies en ausencia

(\*) El hecho de que las componentes del tensor  $G_{ik}$  sean funciones homogéneas de primer grado de las coordenadas  $x, y, z$ , resulta evidente, de antemano, por consideraciones de homogeneidad relacionadas con la forma de la ecuación (1), en cuyo primer miembro figura una combinación lineal de derivadas segundas de las componentes del vector  $\mathbf{u}$ , y en el segundo, una función homogénea de tercer grado ( $\delta(\mathbf{ar}) = a^{-3}\delta(\mathbf{r})$ ). Esta propiedad también es válida en el caso general de un medio anisótropo arbitrario.

(\*\*) Este es el llamado *problema de contacto* de la teoría de la elasticidad, resuelto por primera vez por H. HERTZ.

de deformación, mientras que las líneas sólidas representan las superficies deformadas;

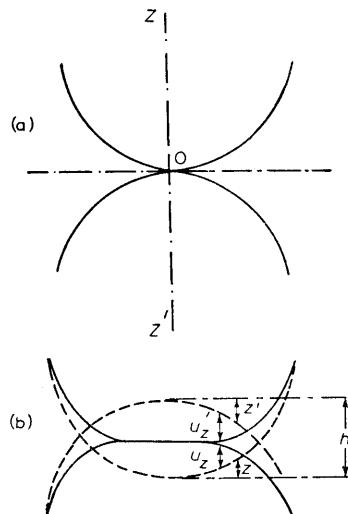


FIG. 1

las letras  $z$  y  $z'$  indican las longitudes dadas por las ecuaciones (9.1) y (9.2). Como se ve directamente en la figura, en todos los puntos de la región de contacto vale la igualdad.

$$(z + u_z) + (z' + u'_z) = h,$$

ó

$$(\kappa_{\alpha\beta} + \kappa'_{\alpha\beta})x_\alpha x_\beta + u_z + u'_z = h. \quad (9.3)$$

En puntos fuera de esta región, donde ambas superficies no están en contacto, se cumple la desigualdad  $z + z' + u_z + u'_z > h$ .

Elijamos como ejes  $x$  e  $y$  los ejes principales del tensor  $\varkappa_{\alpha\beta} + \varkappa'_{\alpha\beta}$ . Designando con  $A$  y  $B$  (\*) los valores principales del tensor, podemos reescribir la ecuación (9.3) como

$$Ax^2 + By^2 + u_z + u'_z = h. \quad (9.4)$$

Designemos por  $P_z(x, y)$  la presión entre los dos cuerpos deformados en la región de contacto; fuera de esta región será, por supuesto,  $P_z = 0$ . Para determinar la relación entre  $P_z$  y los desplazamientos  $u_z, u'_z$  podemos, con suficiente aproximación, considerar las superficies como planas y usar las fórmulas obtenidas en el párrafo anterior. De acuerdo con la tercera fórmula de (8.19) y teniendo en cuenta también (8.14), el desplazamiento  $u_z$  debido a la acción de las fuerzas normales  $P_z(x, y)$ , se determina por las expresiones

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1 - \sigma^2}{\pi E} \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy', \\ u'_z &= \frac{1 - \sigma'^2}{\pi E'} \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy', \end{aligned} \quad (9.5)$$

( $\sigma, \sigma', E, E'$  son los coeficientes de Poisson y los módulos de Young de ambos cuerpos); como  $P_z = 0$  fuera de la región de contacto, la integración se extiende sola-

(\*) Los valores de  $A$  y  $B$  están relacionados con los radios de curvatura  $R_1, R_2, R'_1$  y  $R'_2$  de ambas superficies por las expresiones:

$$\begin{aligned} 2(A+B) &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2}, \\ 4(A-B)^2 &= \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 + \left( \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2} \right)^2 + \\ &\quad + 2 \cos 2\varphi \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left( \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2} \right), \end{aligned}$$

donde  $\varphi$  es el ángulo entre aquellas secciones normales de las superficies para las cuales los radios de curvatura son  $R_1$  y  $R'_1$ . Los radios de curvatura se consideran positivos si el centro de curvatura se encuentra dentro del cuerpo en cuestión y negativos en caso contrario.

mente a esta zona. Obsérvese que de estas fórmulas se sigue que el cociente  $\frac{u_z}{u'_z}$  es constante e igual a

$$\frac{u_z}{u'_z} = \frac{(1 - \sigma^2)E'}{(1 - \sigma'^2)E}. \quad (9.6)$$

Las fórmulas (9.4) y (9.6) juntas dan directamente los desplazamientos  $u_z, u'_z$  en cada punto de la región de contacto (las fórmulas (9.5) y (9.6), en cambio, se aplican también, desde luego, a puntos fuera de esta región).

Substituyendo las expresiones (9.5) en (9.4), obtenemos:

$$\frac{1}{\pi} \left( \frac{1 - \sigma^2}{E} + \frac{1 - \sigma'^2}{E'} \right) \int \int \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' = h - Ax^2 - By^2. \quad (9.7)$$

Esta ecuación integral determina la distribución de presión  $P_z$  sobre la región de contacto. Puede encontrarse su solución mediante una analogía con la teoría del potencial. La idea de usar la analogía proviene de que, ante todo, la integral del primer miembro de (9.7) es del tipo que se encuentra habitualmente en la teoría del potencial, donde tales integrales dan el potencial creado por una distribución de cargas; y de que, además, el potencial dentro de un elipsoide uniformemente cargado es una función cuadrática de las coordenadas.

Si se carga uniformemente el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(con una densidad volumétrica de carga  $\varrho$  constante), el potencial dentro del elipsoide es

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \\ &= \pi \varrho abc \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} - \frac{z^2}{c^2 + \xi} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{\{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)\}}}. \end{aligned}$$

En el caso límite de un elipsoide aplanado en la dirección  $z$  ( $c \rightarrow 0$ ), obtenemos:

$$\varphi(x, y) = \pi \varrho abc \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}$$

(al pasar al límite  $c \rightarrow 0$  debemos, por supuesto, poner  $z = 0$  para puntos dentro del elipsoide). Por otra parte, el potencial  $\varphi(x, y, z)$  puede escribirse también como integral

$$\varphi(x, y, z) = \iiint \frac{\rho \, dx' \, dy' \, dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}},$$

en la que la integración se extiende a todo el volumen del elipsoide. Al pasar al límite  $c \rightarrow 0$  debemos hacer  $z = z' = 0$  en el radicando; integrando la variable  $z'$  entre los límites  $\pm c \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= 2\rho c \iint \frac{dx' \, dy'}{r} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} \\ r &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}, \end{aligned}$$

donde la integración se extiende a la superficie interior de la elipse  $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ .

Igualando ambas expresiones para  $\varphi(x, y)$ , obtenemos la identidad

$$\begin{aligned} &\iint \frac{dx' \, dy'}{r} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} = \\ &= \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}} \quad (9.8) \end{aligned}$$

Comparando las expresiones (9.7) y (9.8) vemos que los segundos miembros son funciones cuadráticas en  $x$  e  $y$ , de forma idéntica, y los primeros miembros son integrales del mismo tipo. Podemos deducir inmediatamente, por lo tanto, que la región de contacto de los dos cuerpos [o sea, la región de integración en (9.7)] está limitada por una elipse de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9.9)$$

y que la función  $P_z(x, y)$  debe ser de ser de la forma

$$P_z(x, y) = \text{const} \times \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}.$$

Eligiendo la constante de tal manera que la integral  $\int \int P_z \, dx \, dy$  sobre la superficie de contacto sea igual a la fuerza total dada  $F$ , que mantiene apretados a ambos cuerpos, obtendremos:

$$P_z(x, y) = \frac{3F}{2\pi ab} \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}. \quad (9.10)$$

Esta fórmula nos da la distribución de presión sobre el área de la región de contacto. Obsérvese que la presión en el centro de esta región es  $3/2$  veces la presión media  $F/\pi ab$ . Substituyendo (9.10) en la ecuación (9.7) y reemplazando la integral resultante por su expresión (9.8), obtenemos:

$$\frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi}}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}} \, d\xi = h - Ax^2 - By^2,$$

donde

$$D = \frac{3}{4} \left( \frac{1 - \sigma^2}{E} + \frac{1 - \sigma'^2}{E'} \right).$$

Esta igualdad debe valer idénticamente para todos los valores de  $x$  e  $y$  dentro de la elipse (9.9); por consiguiente, los coeficientes de  $x$  e  $y$  y los términos independientes deberán ser iguales, respectivamente, en ambos miembros. Encontramos entonces las relaciones:

$$h = \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}, \quad (9.11)$$

$$A = \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}, \quad (9.12)$$

$$B = \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(b^2 + \xi)\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}.$$

Las ecuaciones (9.12) determinan los semiejes  $a$  y  $b$  de la región de contacto para una fuerza dada  $F$  (conocidos  $A$  y  $B$  para los cuerpos dados). La expresión (9.11) determina entonces la aproximación  $h$  de ambos cuerpos en función de la fuerza  $F$ . En los segundos miembros de estas ecuaciones aparecen integrales elípticas.

El problema de cuerpos en contacto puede considerarse, pues, completamente resuelto. La forma de la superficie de los cuerpos (o sea, los desplazamientos  $u_z$ ,  $u'_z$ ) fuera de la región de contacto, se determina por las mismas fórmulas (9.5) y (9.10); los valores de las integrales pueden encontrarse inmediatamente partiendo de la analogía con el potencial del campo en el exterior de un elipsoide cargado. Finalmente, mediante las fórmulas del § 8 se podría determinar también la distribución de las deformaciones en el interior de los cuerpos (pero, claro está, solamente a distancias pequeñas en comparación con las dimensiones de los mismos).

Aplicaremos ahora estas fórmulas al caso de dos esferas en contacto de radios  $R$  y  $R'$  con lo que  $A = B = (1/2R) + (1/2R')$ . Resulta claro por razones de simetría que  $a = b$ ; o sea, que la región de contacto es un círculo. Aplicando (9.12) encontramos que el radio  $a$  de este círculo es:

$$a = F^{1/3} \left( D \frac{RR'}{R + R'} \right)^{1/3}. \quad (9.13)$$

$h$  será en este caso la diferencia entre la suma  $R + R'$  y la distancia entre los centros de las esferas. De (9.10) resulta la siguiente relación entre  $F$  y  $h$ :

$$h = F^{\frac{1}{3}} \left[ D^2 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \right]^{1/3}. \quad (9.14)$$

Nótese que  $h$  es proporcional a  $F^{2/3}$ ; recíprocamente, la fuerza  $F$  varía como  $h^{3/2}$ . Podemos escribir también la energía potencial  $U$  de las esferas en contacto. Como  $-F = -\frac{\partial U}{\partial h}$ , tenemos que:

$$U = h^{5/2} \frac{2}{5D} \sqrt{\frac{RR'}{R + R'}}. \quad (9.15)$$

Indicaremos, finalmente, que las relaciones

$$h = \text{const} \cdot F^{2/3} \quad ; \quad F = \text{const} \cdot h^{3/2}$$

valen no solamente para esferas, sino para otros cuerpos finitos en contacto. Esto puede verse fácilmente por consideraciones de semejanza. Si hacemos la substitución

$$a^2 \rightarrow \alpha a^2, \quad b^2 \rightarrow \alpha b^2, \quad F \rightarrow \alpha^{3/2} F,$$

donde  $\alpha$  es una constante arbitraria, las ecuaciones (9.12) no varían. En la ecuación (9.11), el segundo miembro resulta multiplicado por  $\alpha$ , y  $h$  deberá substituirse por  $\alpha h$  si esta ecuación debe mantenerse invariante. En consecuencia,  $F$  deberá ser proporcional a  $h^{3/2}$ .

### PROBLEMAS

- Determinar el intervalo durante el cual permanecen en contacto dos esferas elásticas que chocan.

*Solución.* En un sistema de coordenadas en el cual el centro de masas de las dos esferas está en reposo, la energía de las esferas antes de la colisión es igual a la energía cinética del movimiento relativo  $\frac{1}{2}\mu v^2$ , donde  $v$  es la velocidad relativa de las esferas que chocan y  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  su masa reducida. Durante la colisión, la energía total es la suma de la energía cinética, que puede escribirse en la forma  $\frac{1}{2}uh^2$ , y la energía potencial (9.15). Por la ley de conservación de la energía, tenemos:

$$\mu \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 + kh^{5/2} = \mu v^2, \quad k = \frac{4}{5D} \sqrt{\frac{RR'}{R+R'}}.$$

El acercamiento máximo  $h_0$  de las esferas corresponde al instante en que la velocidad relativa  $\dot{h} = 0$  y vale  $h_0 = \left( \frac{\mu}{k} \right)^{2/5} v^{4/5}$ .

El intervalo  $\tau$  durante el cual ocurre la colisión (es decir,  $h$  varía de 0 a  $h_0$  para volver a cero), es

$$\tau = 2 \int_0^{h_0} \frac{dh}{\sqrt{(v^2 - kh^{5/2}/\mu)}} = 2 \left( \frac{\mu^2}{k^2 v} \right)^{1/5} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{2/5})}},$$

ó

$$\tau = \frac{4\sqrt{\pi\Gamma(2/5)}}{5\Gamma(9/10)} \left( \frac{\mu^2}{k^2 v} \right)^{1/5} = 2,94 \left( \frac{\mu^2}{k^2 v} \right)^{1/5}.$$

Al usar las fórmulas estáticas obtenidas en el texto para resolver este problema, hemos despreciado las oscilaciones elásticas de las esferas resultantes de la colisión. Para que esto sea posible, la velocidad  $v$  debe ser suficientemente pequeña en comparación con la velocidad del sonido. En la práctica, sin embargo, la validez de la teoría queda limitada por el requerimiento, aún más fuerte, de que las deformaciones no superen el límite elástico de las sustancias.

- Determinar las dimensiones de la región de contacto y la distribución de presiones cuando se comprimen dos cilindros a lo largo de una generatriz.

*Solución.* En este caso la región de contacto es una estrecha banda a lo largo de los cilindros. Su ancho  $2a$  y la distribución de presiones pueden encontrarse con las fórmulas del texto, haciendo tender a infinito el cociente  $b/a$ . La distribución de presión será de la forma

$$P_z(x) = \text{const.} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

( $x$  es la coordenada transversal a la banda de contacto); normalizando la presión de modo que la fuerza que aprieta los cuerpos sea  $F$  por unidad de longitud, obtenemos:

$$P_z(x) = \frac{2F}{\pi a} \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}.$$

Substituyendo esta expresión en (9.7) y efectuando la integración por medio de (9.8), resultará:

$$A = \frac{4DF}{3\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)^{3/2}\xi} = \frac{8DF}{3\pi a^2}.$$

Uno de los radios de curvatura de una superficie cilíndrica es infinito y el otro es el radio del cilindro; en este caso, por lo tanto,  $A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$ ,  $B = 0$ . Obtenemos finalmente para el ancho de la región de contacto:

$$a = \sqrt{\left( \frac{16DF}{3\pi} \cdot \frac{RR'}{R+R'} \right)}.$$

## § 10. Propiedades elásticas de los cristales

La variación de la energía libre en una compresión isotérmica de un cristal es, como en los medios isótropos, una función cuadrática del tensor de deformación. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en los cuerpos isótropos, esta función no contiene solamente dos coeficientes independientes, sino un número mayor. La forma general de la energía libre de un cristal deformado es:

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm}, \quad (10.1)$$

donde  $\lambda_{iklm}$  es un tensor de cuarto rango, llamado *tensor de los módulos de elasticidad*. Como el tensor de deformación es simétrico, el producto  $u_{ik} u_{lm}$  no varía cuando se intercambian los índices  $i$  con  $k$ ,  $l$  con  $m$ , o el par  $i, k$  con el par  $l, m$ . Vemos entonces que el tensor  $\lambda_{iklm}$  puede definirse de manera tal que tenga estas mismas propiedades de simetría respecto al intercambio de índices:

$$\lambda_{iklm} = \lambda_{kilm} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}. \quad (10.2)$$

Un simple cálculo nos muestra que el número de componentes diferentes de un tensor de cuarto rango, que tiene estas propiedades de simetría, es en general 21.

De acuerdo con la expresión (10.1) para la energía libre, el tensor de tensiones para un cristal será, en términos del tensor de deformación (véase también la nota en la página 57)

$$\sigma_{ik} = \partial F / \partial u_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm}; \quad (10.3)$$

Si el cristal posee alguna simetría, existen relaciones entre las componentes del tensor  $\lambda_{iklm}$ , de tal forma que el número total de componentes independientes es menor que 21.

Consideremos estas relaciones para todos los tipos posibles de simetría macroscópica de los cristales, o sea, para todas las clases cristalinas, distribuyéndolas según los correspondientes sistemas cristalinos.

1. *Sistema triclinico.* El sistema triclinico (clases  $C_1$  y  $C_i$ ) no impone ninguna limitación a las componentes del tensor  $\lambda_{iklm}$  y la elección del sistema de coordenadas, desde el punto de vista de la simetría, es completamente arbitraria. Entonces los 21 módulos de elasticidad son distintos de cero e independientes. La arbitrariedad en la elección del sistema de coordenadas permite, sin embargo, imponer condiciones adicionales a las componentes del tensor  $\lambda_{iklm}$ . Como la orientación del sistema de coordenadas respecto del cuerpo se determina por tres cantidades (los ángulos de rotación), tales condiciones pueden ser tres; se pueden considerar, por ejemplo, tres de las componentes iguales a cero. Entonces las cantidades independientes, que caracterizan las propiedades elásticas del cristal, serán 18 módulos distintos de cero y 3 ángulos, que definen la orientación de los ejes en el cristal.

2. *Sistema monoclínico.* Consideremos la clase  $C_s$ . Tomemos un sistema de coordenadas en que el plano  $xy$  coincide con el plano de simetría. En una reflexión respecto de este plano, las coordenadas sufren una transformación  $x \rightarrow x$ ,  $y \rightarrow y$ ,  $z \rightarrow -z$ . Las componentes de un tensor se transforman como el producto de las coordenadas correspondientes. Resulta claro entonces que, en la transformación señalada, todas las componentes  $\lambda_{iklm}$  que contengan un número impar de veces el índice  $z$  (1 ó 3) cambiarán de signo, mientras que las restantes componentes no variarán. Por otra parte, en virtud de la simetría del cristal, todas las cantidades que caracterizan sus propiedades (incluyendo todas las componentes  $\lambda_{iklm}$ ) deben ser invariantes frente a una reflexión en el plano de simetría. Es evidente entonces que serán iguales a cero todas las componentes con un número impar de índices  $z$ . De acuerdo con esto, la expresión general para la energía libre elástica de un cristal que pertenece al sistema monoclínico es

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{2} \lambda_{xxxx} u_{xx}^2 + \frac{1}{2} \lambda_{yyyy} u_{yy}^2 + \frac{1}{2} \lambda_{zzzz} u_{zz}^2 + \lambda_{xxyy} u_{xx} u_{yy} + \lambda_{xxxz} u_{xx} u_{zz} + \\ & + \lambda_{yyzz} u_{yy} u_{zz} + 2\lambda_{xyxy} u_{xy}^2 + 2\lambda_{xzxz} u_{xz}^2 + 2\lambda_{yzyz} u_{yz}^2 + 2\lambda_{xxyy} u_{xx} u_{xy} + \\ & + 2\lambda_{yyxx} u_{yy} u_{yx} + 2\lambda_{xyzz} u_{xy} u_{zz} + 4\lambda_{xzyz} u_{xz} u_{yz}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Hay aquí 13 coeficientes independientes. La misma expresión se obtiene para la clase  $C_2$ , y también para la clase  $C_{2h}$ , que contiene a la vez ambos elementos de simetría ( $C_2$  y  $\sigma_h$ ). En los razonamientos expuestos, sin embargo, las consideraciones de simetría fijan la dirección de sólo uno de los ejes de coordenadas ( $z$ ), mientras que las direcciones de los ejes  $x$ ,  $y$  en el plano perpendicular son arbitrarias. Esta arbitrariedad se puede aprovechar para que mediante una elección adecuada de los ejes se anule una de las componentes, digamos la  $\lambda_{xyzz}$ . Entonces las 13 cantidades que caracterizan las propiedades elásticas del cristal, serán 12 módulos distintos de cero y un ángulo, que determina la orientación de los ejes en el plano  $x$ ,  $y$ .

3. *Sistema rómbico.* En todas las clases de este sistema ( $C_{2v}$ ,  $D_2$ ,  $D_{2h}$ ) la elección de los ejes de coordenadas viene fijada únicamente por la simetría, y para la energía libre se obtiene una expresión de igual forma. Consideremos, por ejemplo, la clase  $D_{2h}$ . Tomemos los tres planos de simetría como planos coordinados. Las reflexiones en cada uno de estos planos cambian el signo de una de las tres coordenadas conservando los de las otras dos. Es evidente, por lo tanto, que serán distintas de cero sólo aquellas componentes de  $\lambda_{iklm}$  que contengan los índices  $x$ ,  $y$  y  $z$  un número par de veces; las otras componentes deberían cambiar de signo en una reflexión en uno cualquiera de los planos de simetría. De esta manera la expresión general para la energía libre en el sistema rómbico es:

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{2}\lambda_{xxxx}u_{xx}^2 + \frac{1}{2}\lambda_{yyyy}u_{yy}^2 + \frac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + \lambda_{xxyy}u_{xx}u_{yy} + \lambda_{xxxx}u_{xx}u_{zz} + \\ & + \lambda_{yyzz}u_{yy}u_{zz} + 2\lambda_{xyxy}u_{xy}^2 + 2\lambda_{xxxx}u_{xz}^2 + 2\lambda_{yzyz}u_{yz}^2. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Contiene sólo nueve módulos de elasticidad.

4. *Sistema tetragonal.* Consideremos la clase  $C_{4v}$ ; tomemos el eje  $C_4$  como eje  $z$ , y los ejes  $x$ ,  $y$  perpendiculares a dos de los planos de simetría verticales. Las reflexiones en estos dos planos implican, respectivamente, las transformaciones  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow y$ ,  $z \rightarrow z$  y  $x \rightarrow x$ ,  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow z$ ; debido a esto, todas las componentes  $\lambda_{iklm}$  con un número impar de índices iguales, se anulan. Por otra parte, una rotación de  $\pi/2$  alrededor del eje  $C_4$  se representa por la transformación  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow -x$ ,  $z \rightarrow z$ . De aquí se siguen las relaciones:

$$\lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy}, \quad \lambda_{xxxx} = \lambda_{yyzz}, \quad \lambda_{xxxx} = \lambda_{yzyz}.$$

Las transformaciones restantes de la clase  $C_{4v}$  nada añaden a estas condiciones. De este modo, la energía libre de los cristales del sistema tetragonal es

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{2}\lambda_{xxxx}(u_{xx}^2 + u_{yy}^2) + \frac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + \lambda_{xxxx}(u_{xx}u_{zz} + u_{yy}u_{zz}) + \\ & + \lambda_{xxyy}u_{xx}u_{yy} + 2\lambda_{xyxy}u_{xy}^2 + 2\lambda_{xxxx}(u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Contiene seis módulos de elasticidad.

El mismo resultado se obtiene también para las otras clases del sistema tetragonal ( $D_{2h}$ ,  $D_4$ ,  $D_{4h}$ ) en las cuales la simetría impone una elección natural de los ejes de coordenadas. En las clases  $C_4$ ,  $S_4$ ,  $C_{4h}$ , en cambio, sólo es unívoca la elección de un eje ( $z$ ), a lo largo de los ejes  $C_4$  o  $S_4$ . En ellas, las condiciones de simetría permiten también la existencia [además de las que figuran en (10.6)] de las componentes

$$\lambda_{xxxy} = -\lambda_{yyyx}.$$

Eligiendo convenientemente las direcciones de los ejes  $x$ ,  $y$ , estas componentes pueden ser anuladas, y entonces  $F$  se reduce de nuevo a la misma forma (10.6).

5. *Sistema romboédrico.* Consideremos la clase  $C_{3v}$ ; tomaremos al eje ternario como eje  $z$  y la perpendicular a uno de los planos de simetría verticales como eje  $y$ . Para encontrar las restricciones impuestas a las componentes del tensor  $\lambda_{iklm}$  por la existencia del eje  $C_3$ , es conveniente aplicar una transformación formal introduciendo las «coordenadas» complejas  $\xi$ ,  $\eta$  de acuerdo con

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy,$$

dejando invariante la coordenada  $z$ . Transformemos también a las nuevas «coordenadas» el tensor  $\lambda_{iklm}$ ; los índices de sus componentes toman ahora los valores  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $z$ . Es fácil ver que en una rotación de  $120^\circ$  alrededor del eje  $C_3$ , las nuevas «coordenadas» se transforman así:

$$\xi \rightarrow \xi e^{2\pi i/3}, \eta \rightarrow \eta e^{-2\pi i/3}, z \rightarrow z.$$

Por la simetría del cristal, sólo aquellas componentes de  $\lambda_{iklm}$  que son invariantes en esta transformación pueden ser distintas de cero. Estas componentes son aquellas cuyos índices contienen a  $\xi$  o  $\eta$  tres veces [porque  $(e^{2\pi i/3})^3 = e^{2\pi i} = 1$ ] o  $\xi$  y  $\eta$  el mismo número de veces (porque  $e^{2\pi i/3} e^{-2\pi i/3} = 1$ ), o sea:

$$\lambda_{zzzz}, \lambda_{\xi\eta\xi\eta}, \lambda_{\xi\xi\eta\eta}, \lambda_{\xi\etazz}, \lambda_{\xi\zeta\eta\zeta}, \lambda_{\xi\xi\xi z}, \lambda_{\eta\eta\eta z}.$$

Además, una reflexión en el plano de simetría perpendicular al eje  $y$ , da la transformación  $x \rightarrow x$ ,  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow z$ , o sea  $\xi \rightarrow \eta$ ,  $\eta \rightarrow \xi$ . Como mediante esta transformación  $\lambda_{\xi\xi\xi z}$  se convierte en  $\lambda_{\eta\eta\eta z}$ , estas dos componentes deben ser iguales. De este modo los cristales del sistema romboédrico tienen solamente seis módulos de elasticidad. A fin de obtener una expresión para la energía libre, hay que formar la suma  $\frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm}$  en la cual los índices toman los valores  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $z$ ; como  $F$  debe

expresarse mediante las componentes del tensor de deformación en las coordenadas  $x, y, z$ , habrá que expresar por medio de ellas las componentes en las «coordenadas»  $\xi, \eta, z$ . Es fácil hacerlo apoyándose en el hecho de que las componentes del tensor  $u_{ik}$  se transforman como el producto de las dos coordenadas correspondientes. Así, por ejemplo, de

$$\xi \xi = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

se deduce que

$$u_{\xi\xi} = u_{xx} - u_{yy} + 2iu_{xy}.$$

En consecuencia, encontramos la siguiente expresión para  $F$ :

$$\begin{aligned} F = & \tfrac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + 2\lambda_{\xi\eta\xi\eta}(u_{xx} + u_{yy})^2 + \lambda_{\xi\xi\eta\eta}\{(u_{xx} - u_{yy})^2 + 4u_{xy}^2\} + \\ & + 2\lambda_{\xi\etazz}(u_{xx} + u_{yy})u_{zz} + 4\lambda_{\xi z\eta z}(u_{xz}^2 + u_{yz}^2) + 4\lambda_{\xi\xi\xi z}\{(u_{xx} - u_{yy})u_{xz} - 2u_{xy}u_{yz}\}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Contiene 6 coeficientes independientes. El mismo resultado se obtiene para las clases  $D_3$  y  $D_{3d}$ . En las clases  $C_3$  y  $S_6$ , para las cuales la elección de los ejes  $x, y$  es arbitraria, las condiciones de simetría permiten también que sea distinta de cero la diferencia

$$\lambda_{\xi\xi\xi z} - \lambda_{\eta\eta\eta z}.$$

Sin embargo, esta diferencia puede reducirse a cero por medio de una elección adecuada de los ejes  $x, y$ .

6. *Sistema hexagonal.* Consideremos la clase  $C_6$ ; tomaremos al eje  $z$  coincidente con el eje senario y usaremos nuevamente las «coordenadas»  $\xi = x + iy$ ,  $\eta = x - iy$ . En una rotación de  $\pi/3$  alrededor del eje  $z$ , las «coordenadas»  $\xi, \eta$  se transforman de acuerdo con

$$\xi \rightarrow \xi e^{-\frac{2\pi i}{6}}, \quad \eta \rightarrow \eta e^{-\frac{2\pi i}{6}}.$$

Vemos así que solamente serán distintas de cero aquellas componentes de  $\lambda_{iklm}$  que tienen el mismo número de veces los índices  $\xi$  y  $\eta$ . Éstas son

$$\lambda_{zzzz}, \lambda_{\xi\eta\xi\eta}, \lambda_{\xi\xi\eta\eta}, \lambda_{\xi\etazz}, \lambda_{\xi z\eta z}.$$

Los otros posibles elementos de simetría del sistema hexagonal nada añaden a estas restricciones. Hay, pues, solamente cinco módulos de elasticidad. La energía libre tiene la forma

$$\begin{aligned} F = & \tfrac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + 2\lambda_{\xi\eta\xi\eta}(u_{xx} + u_{yy})^2 + \lambda_{\xi\xi\eta\eta}\{(u_{xx} - u_{yy})^2 + 4u_{xy}^2\} + \\ & + 2\lambda_{\xi\etazz}u_{zz}(u_{xx} + u_{yy}) + 4\lambda_{\xi z\eta z}(u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \end{aligned} \quad (10.8)$$

Hay que señalar que una deformación en el plano  $xy$  (una deformación en la cual  $u_{xx}$ ,  $u_{yy}$ ,  $u_{xy}$  son distintas de cero) queda determinada por dos módulos de elasticidad solamente, como en el caso de cuerpos isótropos; es decir, las propiedades elásticas de un cristal hexagonal son isótropas en el plano perpendicular al eje senario.

Por este motivo, la elección de las direcciones de los ejes en este plano carece en absoluto de importancia y no influye en la forma de  $F$ . La expresión (10.8) concierne, por lo tanto, a todas las clases del sistema hexagonal.

7. *Sistema cúbico.* Haremos coincidir los ejes coordenados con los tres ejes cuaternarios del sistema cúbico. Como existe simetría tetragonal (con el eje cuaternario en la dirección  $z$ ), el número de componentes diferentes del tensor  $\lambda_{iklm}$  es como máximo seis:

$$\lambda_{xxxx}, \lambda_{zzzz}, \lambda_{xxzz}, \lambda_{xxyy}, \lambda_{xyxy}.$$

Las rotaciones de  $90^\circ$  alrededor de los ejes  $x$  e  $y$  dan, respectivamente, las transformaciones  $x \rightarrow x$ ,  $y \rightarrow -z$ ,  $z \rightarrow y$  y  $x \rightarrow z$ ,  $y \rightarrow y$ ,  $z \rightarrow -x$ . Debido a esto, de las componentes señaladas anteriormente resultan iguales la primera con la segunda, la tercera con la cuarta y la quinta con la sexta. Quedan, pues, solamente tres módulos de elasticidad distintos. La energía libre para cristales del sistema cúbico es:

$$F = \frac{1}{2}\lambda_{xxxx}(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2) + \lambda_{xxyy}(u_{xx}u_{yy} + u_{xx}u_{zz} + u_{yy}u_{zz}) + \\ + 2\lambda_{xyxy}(u_{xy}^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \quad (10.9)$$

Escribiremos nuevamente el número de parámetros independientes (módulos de elasticidad o ángulos que determinan la orientación de los ejes en el cristal) para las clases de los diferentes sistemas:

triclinico .....	21
monoclínico .....	13
rómico .....	9
tetragonal ( $C_4$ , $S_4$ , $D_{4h}$ ) .....	7
tetragonal ( $C_{4v}$ , $D_{2d}$ , $D_4$ , $D_{4h}$ ) .....	6
romboédrico ( $C_3$ , $S_6$ ) .....	7
romboédrico ( $C_{3v}$ , $D_3$ , $D_{3d}$ ) .....	6
hexagonal .....	5
cúbico .....	3

El número mínimo de módulos distintos de cero, que puede obtenerse eligiendo convenientemente los ejes de coordenadas, es igual para todas las clases en cada sistema:

triclínico . . . . .	18
monoclínico . . . . .	12
rómbico . . . . .	9
tetragonal . . . . .	6
romboédrico . . . . .	6
hexagonal . . . . .	5
cúbico . . . . .	3

Toda la discusión anterior se refiere, por supuesto, a monocrstales. Los cuerpos policristalinos, cuyos componentes cristalinos son suficientemente pequeños, pueden considerarse como cuerpos isótropos (porque nos interesan las deformaciones en regiones grandes, comparadas con las dimensiones de los microcristales). Como todo cuerpo isótropo, los policristales se caracterizan por dos módulos de elasticidad solamente. A primera vista cabría pensar que estos módulos se pueden obtener a partir de los módulos de elasticidad de los microcristales aislados, mediante un simple promedio. En realidad, sin embargo, esto no es posible. Si se considera la deformación del policristal como el resultado de la deformación de sus microcristales componentes, en principio habría que resolver las ecuaciones de equilibrio para todos estos cristalitos, teniendo en cuenta las condiciones de contorno adecuadas en sus superficies de separación. Se ve así que la relación entre las propiedades elásticas de un cristal, considerado en conjunto, y las propiedades de sus microcristales componentes, depende de la forma concreta de los cristalitos y de las correlaciones entre sus orientaciones mutuas. Por ello, no existe una dependencia general entre los módulos de elasticidad de los policristales y de los monocrstales (de la misma sustancia).

Los módulos de un policristal isótropo pueden calcularse con buena precisión a partir de los valores para un monocrstal, sólo cuando éste es poco anisótropo desde el punto de vista elástico (\*). En primera aproximación, los módulos de elasticidad del policristal pueden tomarse iguales a la « parte isótropa » de los módulos del monocrstal. En la aproximación siguiente deberán aparecer términos cuadráticos respecto de la pequeña « parte anisótropa » de estos módulos. Se encuentra que estos términos de corrección son independientes de la forma de los microcristales y de las correlaciones entre sus orientaciones y pueden calcularse en forma general (\*\*).

Finalmente, consideremos la dilatación térmica de los cristales. En cuerpos isótropos, la dilatación térmica es la misma en todas direcciones, de manera que el tensor de deformaciones resulta, en la dilatación térmica libre (§ 6)

$$u_{ik} = \frac{1}{3} \alpha(T - T_0) \delta_{ik},$$

(\*) Para un cristal cúbico « débilmente anisótropo », debe cumplirse que  $\lambda_{xx,xx} - \lambda_{xx,yy} - 2\lambda_{xy,xy}$  sea pequeño.

(\*\*) Ver I. M. LIFSHITZ, L. N. ROZENTSVEIG, Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki 16, 967 (1946).

donde  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmica. En cristales, sin embargo, debemos poner:

$$u_{ik} = \frac{\alpha_{ik}}{3} (T - T_0), \quad (10.10)$$

donde  $\alpha_{ik}$  es un tensor de segundo rango, simétrico en  $i, k$ . Calculemos ahora el número de componentes independientes que tiene este tensor para los diferentes sistemas cristalinos. La forma más sencilla de hacerlo se basa en un resultado conocido del álgebra tensorial: a cada tensor simétrico de segundo rango le corresponde cierto elipsoide tensorial (\*). Se ve, por consideraciones de simetría, que para los sistemas triclinico, monoclínico y rómbico el elipsoide posee tres ejes de, en general, diferente longitud. Para los sistemas tetragonal, romboédrico y hexagonal, el elipsoide es un elipsoide de revolución (con el eje de simetría coincidente con los ejes  $C_4$ ,  $C_3$  y  $C_6$ , respectivamente). Finalmente, para el sistema cúbico, el elipsoide degenera en una esfera. Pero un elipsoide de tres ejes se determina mediante tres cantidades (las longitudes de los ejes), uno de revolución por dos, y una esfera, mediante un solo parámetro (el radio). De este modo, el número de componentes independientes del tensor  $\alpha_{ik}$  en los distintos sistemas cristalinos es:

triclinico, monoclinico y rómbico .....	3
tetragonal, romboédrico y hexagonal .....	2
cúbico .....	1

Los tres primeros sistemas cristalinos son biáxicos, y los tres segundos uniáxicos. La dilatación térmica de los cristales cúbicos queda fijada por un solo parámetro, de manera análoga a los cuerpos isótropos.

### PROBLEMA

Determinar el módulo de Young para un cristal cúbico como función de la dirección.

*Solución.* Tomemos como ejes de coordenadas los tres ejes cuaternarios del cristal cúbico. Cortemos el monocrystal cúbico en forma de varilla. Sea  $\mathbf{n}$  un vector unitario en la dirección del eje de la misma. El tensor de tensiones  $\sigma_{ik}$  para la varilla en tensión debe satisfacer las siguientes condiciones: cuando se multiplica  $\sigma_{ik}$  por  $n_i$  la fuerza de extensión resultante debe ser paralela a  $\mathbf{n}$  (condición en los extremos de la varilla); cuando se multiplica  $\sigma_{ik}$  por un vector perpendicular a  $\mathbf{n}$ , el resultado debe ser igual a cero (condición en la superficie lateral de la varilla). Tal tensor debe ser de la forma  $\sigma_{ik} = pn_i n_k$ , donde  $p$  es la fuerza tensora por unidad de área en los extremos de la varilla. Calculando las componentes  $\sigma_{ik}$  mediante la expresión (10.9) para la energía libre (\*\*)

(\*) Determinado por la ecuación  $\alpha_{ik}x_i x_k = 1$ .

(\*\*) Al calcular  $\sigma_{ik}$  debe tenerse en cuenta lo siguiente. Si el cálculo no se efectúa directamente a partir de la fórmula  $\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{im}$ , sino derivando la expresión de la energía libre con respecto a las componentes del tensor  $u_{ik}$ , las derivadas respecto de las componentes de  $u_{ik}$  con  $i \neq k$  dan un valor doble de las correspondientes componentes  $\sigma_{ik}$ . Esto se debe a que las expresiones  $\sigma_{ik} = \partial F / \partial u_{ik}$  tienen significado sólo si se indica que  $dF = \sigma_{ik} du_{ik}$ ; en la suma  $\sigma_{ik} du_{ik}$ , sin embargo, el término en la diferencial  $du_{ik}$  de cada componente con  $i \neq k$  del tensor simétrico  $u_{ik}$ , aparece dos veces.

y comparando estos valores con las fórmulas  $\sigma_{ik} = pn_i n_k$ , encontramos que las componentes del tensor de deformaciones son

$$u_{xx} = p \frac{(c_1 + 2c_2)n_x^2 - c_2}{(c_1 - c_2)(c_1 + 2c_2)}, \quad u_{xy} = p \frac{n_x n_y}{2c_3}$$

con fórmulas análogas para las restantes componentes. Aquí hemos puesto  $\lambda_{xxxx} = c_1$ ,  $\lambda_{xxyy} = c_2$ ,  $\lambda_{xyxy} = c_3$ .

El alargamiento longitudinal relativo de la varilla es  $u = (dl' - dl)/dl$  donde  $dl'$  está dada por la fórmula (1.2) y  $dx_i/dl = n_i$ . Para pequeñas deformaciones esto nos da  $u = u_{ik}n_i n_k$ . El módulo de Young se determina como coeficiente de proporcionalidad entre  $p$  y  $u$ ,  $p = Eu$ ,

$$\frac{1}{E} = \frac{c_1 + c_2}{(c_1 + 2c_2)(c_1 - c_2)} + \left( \frac{1}{c_3} - \frac{2}{c_1 - c_2} \right) (n_x^2 n_y^2 + n_x^2 n_z^2 + n_y^2 n_z^2).$$

$E$  tiene sus valores extremos en las direcciones de las aristas (de los ejes coordenados) y en las de las diagonales espaciales del cubo.

## CAPÍTULO II

## EQUILIBRIO DE BARRAS Y PLACAS

## § 11. La energía de una placa curvada

En este capítulo nos dedicaremos al estudio de algunos casos particulares de equilibrio de cuerpos deformados y comenzaremos analizando las deformaciones de placas delgadas. Cuando decimos que una placa es delgada se entiende que su espesor es mucho menor que sus dimensiones en las otras dos direcciones. Como antes, las deformaciones se consideran pequeñas. En este caso, el criterio de pequeñez de las deformaciones es que los desplazamientos de los puntos de la placa sean pequeños comparados con el espesor de la misma.

Las ecuaciones generales de equilibrio, aplicadas a placas delgadas, se simplifican considerablemente. Es más cómodo, sin embargo, obtener estas ecuaciones simplificadas, no directamente de las generales, sino calculando de nuevo la energía libre de una placa curvada y variando luego esta energía.

Cuando una placa se comba, en algunos lugares, en su interior, surgen dilataciones, y en otros, compresiones. Así, es evidente que en la cara convexa de la placa ocurre una dilatación; a medida que se profundiza en el espesor de la placa, esta dilatación disminuye en forma paulatina, anulándose finalmente, tras de lo cual, en los estratos siguientes, aparece gradualmente una compresión que va en aumento. De esta manera, dentro de la placa se tiene una *superficie neutra*, sobre la cual no existe dilatación alguna y a cuyos lados la deformación tiene signo opuesto. Evidentemente, esta superficie está situada a mitad del espesor de la placa.

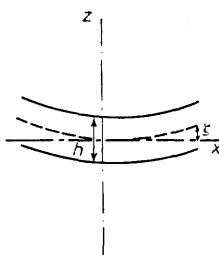


FIG. 2

Elijamos un sistema de coordenadas con origen en algún punto de la superficie neutra y el eje  $z$  dirigido según la normal a ella. El plano  $xy$  coincide con el plano de la placa sin deformar. Designemos mediante  $\zeta$  (Fig. 2) el desplazamiento vertical de los puntos de la superficie neutra. Las componentes de los desplazamientos de estos puntos en el plano  $x, y$  son, evidentemente, cantidades de segundo orden comparadas con  $\zeta$  y, por lo tanto, pueden tomarse iguales a cero. De este modo, el vector de desplazamiento de los puntos de la superficie neutra es:

$$u_x^{(0)} = u_y^{(0)} = 0, \quad u_z^{(0)} = \zeta(x, y). \quad (11.1)$$

Para futuros cálculos, es necesario hacer la siguiente observación relativa a las tensiones que actúan en la placa deformada. Como la placa es delgada, para combarla hay que aplicar sobre su superficie fuerzas relativamente pequeñas. Estas fuerzas, en cada caso, serán considerablemente menores que las tensiones internas que aparecen dentro de la placa deformada debido a las dilataciones y compresiones que en ella tienen lugar. Por lo tanto, en las condiciones de contorno (2.8) se pueden despreciar las fuerzas  $P_i$ , quedando  $\sigma_{ik}n_k = 0$ . Como la placa está ligeramente combada, se puede considerar que el vector normal  $\mathbf{n}$  está dirigido según el eje  $z$ . Así, sobre ambas caras de la placa debe ser

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0.$$

Pero, debido a que el espesor es pequeño, de la anulación de estas cantidades sobre ambas caras de la placa se sigue que son pequeñas en su interior. De esta manera, llegamos al resultado de que, en toda la placa, las componentes  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$  son pequeñas respecto de las restantes componentes del tensor de tensiones. Sobre esta base, podemos suponerlas iguales a cero y determinar las componentes del tensor de deformaciones a partir de esta condición.

Según las fórmulas generales (5.13) tenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{zx}, & \sigma_{zy} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{zy}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \{(1-\sigma)u_{zz} + \sigma(u_{xx} + u_{yy})\}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Igualando estas expresiones a cero hallamos:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad u_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma} (u_{xx} + u_{yy}).$$

En las dos primeras ecuaciones se puede poner en lugar de  $u_z$ , con suficiente precisión,  $\zeta(x, y)$ :

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

de donde

$$u_x = -z \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad u_y = -z \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (11.3)$$

Las constantes de integración se tomaron iguales a cero, de modo que, para  $z = 0$ , fuesen  $u_x = u_y = 0$ . Conociendo  $u_x$  y  $u_y$ , podemos determinar todas las componentes del tensor de deformaciones:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -z \partial^2 \zeta / \partial x^2, & u_{yy} &= -z \partial^2 \zeta / \partial y^2, & u_{xy} &= -z \partial^2 \zeta / \partial x \partial y, \\ u_{xz} &= u_{yz} = 0, & u_{zz} &= z \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (11.4)$$

Ahora ya se pueden calcular, usando la fórmula general (5.10), la energía libre  $F$  por unidad de volumen de la placa. Un cálculo sencillo lleva a la expresión

$$F = z^2 \frac{E}{1+\sigma} \left\{ \frac{1}{2(1-\sigma)} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \left[ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] \right\}. \quad (11.5)$$

La energía libre total de la placa se obtiene de aquí integrando en todo su volumen. La integración respecto de  $z$  se efectúa desde  $-h/2$  hasta  $+h/2$ , donde  $h$  es el espesor de la placa; y según  $x, y$  — sobre toda la superficie de la placa. Como resultado, hallamos la energía libre total  $F_{pl} = \int F dV$  de la placa deformada:

$$\begin{aligned} F_{pl} &= \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)} \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\sigma) \left( \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \right] dx dy; \end{aligned} \quad (11.6)$$

(en virtud de la pequeñez de la deformación, para el elemento de superficie se puede escribir, con suficiente exactitud, simplemente  $dx dy$ ).

Encontrada la expresión para la energía libre, se puede considerar a la placa como carente de espesor, es decir, como una superficie geométrica, porque sólo interesa la forma que toma bajo la acción de las fuerzas aplicadas, y no la distribución de las deformaciones dentro de la placa misma. La cantidad  $\zeta$  es, entonces, el desplazamiento de los puntos de la placa, considerada como superficie, al encorvarse.

### § 12. Ecuación de equilibrio para una placa

La ecuación de equilibrio de una placa la deduciremos de la condición de mínimo de su energía libre. Para ello es necesario calcular la variación de la expresión (11.6).

Dividamos la integral de (11.6) en una suma de dos integrales y variemos cada una de ellas separadamente. La primera integral se puede escribir en la forma

$$\int (\Delta \zeta)^2 df,$$

donde  $df = dx dy$  es el elemento de superficie, y  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  representa aquí (y en todas partes en los §§ 12-14) al operador de Laplace bidimensional. Variando esta integral tenemos:

$$\begin{aligned} \delta \frac{1}{2} \int (\Delta \zeta)^2 df &= \int \Delta \zeta \Delta \delta \zeta df = \int \Delta \zeta \operatorname{div} \operatorname{grad} \delta \zeta df = \\ &= \int \operatorname{div} (\Delta \zeta \Delta \delta \zeta) df - \int \nabla \delta \zeta \cdot \nabla \Delta \zeta df. \end{aligned}$$

Todas las operaciones vectoriales se realizan aquí, desde luego, en el sistema de coordenadas bidimensional  $x, y$ . Transformemos la primera integral del último miembro en una integral a lo largo del contorno cerrado que limita a la placa (\*):

$$\int \operatorname{div} (\Delta \zeta \nabla \delta \zeta) df = \oint \Delta \zeta (\mathbf{n} \operatorname{grad} \delta \zeta) dl = \oint \Delta \zeta \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} dl,$$

---

(\*) La fórmula de transformación para integrales bidimensionales es del todo análoga a la fórmula para tres dimensiones. El elemento de superficie  $df$  (considerado como un escalar) desempeña ahora el papel del elemento de volumen  $dV$ , y en lugar del elemento de superficie  $df$  se coloca el elemento de longitud del contorno,  $dl$ , multiplicado por el vector  $n$  de la normal exterior al mismo. La transformación de la integral según  $df$  en integral según  $dl$  se realiza cambiando el operador  $df \frac{\partial}{\partial x_i}$  por la cantidad  $n_i dl$ . Así, si  $\varphi$  es un escalar, se tiene

$$\int \nabla \varphi df = \oint \varphi n dl.$$

donde  $\frac{\partial}{\partial n}$  significa derivación a lo largo de la normal exterior al contorno.

En la segunda integral aplicamos la misma transformación y obtenemos

$$\begin{aligned}\int \nabla \delta \zeta \cdot \nabla \Delta \zeta \, df &= \int \nabla (\delta \zeta \nabla \Delta \zeta) \, df - \int \delta \zeta \Delta^2 \zeta \, df = \\ &= \oint \delta \zeta (\mathbf{n} \cdot \nabla) \Delta \zeta \, dl - \int \delta \zeta \Delta^2 \zeta \, df = \oint \delta \zeta \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} \, dl - \int \delta \zeta \Delta^2 \zeta \, df.\end{aligned}$$

Sustituyendo los resultados obtenidos, hallamos que

$$\delta \frac{1}{2} \int (\Delta \zeta)^2 \, df = \int \delta \zeta \Delta^2 \zeta \, df - \oint \delta \zeta \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} \, dl + \oint \Delta \zeta \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} \, dl. \quad (12.1)$$

La transformación de la variación de la segunda integral en (11.6) es algo más extensa. Es más cómodo efectuar esta transformación usando componentes que en

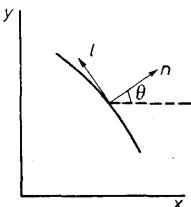


FIG. 3

forma vectorial. Tenemos:

$$\begin{aligned}&\delta \int \left\{ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} df \\ &= \int \left\{ 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \delta \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} df.\end{aligned}$$

El integrando se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right),$$

esto es, como la divergencia bidimensional de un cierto vector. Por lo tanto, se puede reescribir la variación como una integral a lo largo del contorno

$$\begin{aligned} \delta \int \left\{ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} df = & \oint dl \sin \theta \left\{ \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right\} + \\ & + \oint dl \cos \theta \left\{ \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\}, \end{aligned} \quad (12.2)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre el eje  $x$  y la normal al contorno  $\mathbf{n}$  (fig. 3).

Las derivadas de  $\delta \zeta$  según  $x$  e  $y$  se expresan mediante las derivadas en la dirección de la normal al contorno,  $\mathbf{n}$ , y en la dirección de la tangente al mismo,  $\mathbf{l}$ , de acuerdo con las fórmulas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial n} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial l}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial n} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial l}. \end{aligned}$$

Entonces, las integrales en la fórmula (12.2) toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \delta \int \left\{ \dots \right\} df = & \oint dl \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} \left\{ 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} + \\ & + \oint dl \frac{\partial \delta \zeta}{\partial l} \left\{ \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\}. \end{aligned}$$

La segunda integral se puede calcular por partes. Como se integra a lo largo de un contorno cerrado, los límites coinciden en un punto y, por eso, resulta simplemente

$$-\oint dl \delta \zeta \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\}.$$

Reuniendo todas las expresiones obtenidas y multiplicándolas por los coeficientes, de acuerdo con la fórmula (11.6), hallamos finalmente la siguiente expresión para la variación de la energía libre:

$$\begin{aligned} \delta F_{pl} = & \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \left( \int \Delta^2 \zeta \delta \zeta \, df - \right. \\ & - \oint \delta \zeta \, dl \left[ \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} + (1-\sigma) \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\} \right] + \\ & + \oint \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} \, dl \left\{ \Delta \zeta + (1-\sigma) \left( 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Para obtener a partir de aquí la ecuación de equilibrio de la placa es necesario igualar a cero la suma de la variación  $\delta F$  y la variación  $\delta U$  de la energía potencial debida a las fuerzas externas que actúan sobre la placa. Esta última variación es igual al trabajo, con signo cambiado, que realizan las fuerzas externas, al desplazarse la placa. Sea  $P$  la fuerza externa que actúa sobre la placa, por unidad de área (\*), en la dirección normal a la superficie. Luego, el trabajo realizado por las fuerzas en un desplazamiento  $d\zeta$  de los puntos de la placa es igual a

$$\int P \delta \zeta \, df.$$

Así, pues, tenemos como condición de mínimo de la energía libre total de la placa la ecuación

$$\delta F_{pl} - \int P \delta \zeta \, df = 0. \quad (12.4)$$

En el primer miembro de esta igualdad hay tanto integrales de superficie como de contorno. La integral de superficie es

$$\int \left\{ \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - P \right\} \delta \zeta \, df.$$

(\*) La fuerza  $P$  puede ser el resultado de la acción de fuerzas de volumen (por ejemplo, la fuerza de gravedad) y es igual, entonces, a la integral de las últimas extendida al espesor de la placa.

La variación  $\delta\zeta$  en esta integral es arbitraria. Por lo tanto, la integral se anula sólo si el coeficiente de  $\delta\zeta$  es cero, es decir, si

$$\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - P = 0. \quad (12.5)$$

Ésta es la ecuación de equilibrio de una placa combada por la acción de fuerzas externas (\*).

Las condiciones de contorno de esta ecuación se obtienen igualando a cero las integrales de contorno de (12.3). Para esto conviene considerar distintos casos particulares. Supongamos que parte del borde de la placa está libre, es decir, sobre ella no actúan fuerzas externas. Entonces las variaciones  $\delta\zeta$  y  $\delta \frac{\partial\zeta}{\partial n}$  en esta parte del borde son arbitrarias y deben ser nulos los coeficientes de estas variaciones en las integrales de contorno. Esto lleva a las ecuaciones:

$$-\frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} + (1-\sigma) \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \cos \theta \sin \theta \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\} = 0, \quad (12.6)$$

$$\Delta \zeta + (1-\sigma) \left\{ 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} = 0, \quad (12.7)$$

que deben cumplirse en todo el límite libre de la placa.

Las condiciones de contorno (12.6)-(12.7) son muy complejas. Los casos en que el borde de la placa está *empotrado* o *apoyado* son considerablemente más sencillos. Si está empotrado (fig. 4, a), no puede desplazarse verticalmente, y además no puede variar su dirección. El ángulo que gira, desde su posición inicial, una parte dada del borde es igual (para pequeños desplazamientos  $\zeta$ ) a la derivada  $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$ . De este modo, cuando los bordes están empotrados, las variaciones  $\delta\zeta$  y  $\delta \frac{\partial\zeta}{\partial n}$  son nulas, y las

---

(\*) El coeficiente

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$$

en esta ecuación, se llama *rigidez a la flexión*, o rigidez cilíndrica de la placa.

integrales de contorno en (12.3) se anulan idénticamente. Las condiciones de contorno son simplemente en este caso:

$$\zeta = 0, \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0. \quad (12.8)$$

La primera expresa que, al deformarse la placa, el borde no sufre un desplazamiento vertical, y la segunda, que la dirección del borde se mantiene horizontal.



FIG. 4

Es fácil determinar las fuerzas de reacción que el soporte ejerce sobre la placa en los puntos de fijación. Estas fuerzas son iguales y de sentido contrario a las que la placa ejerce sobre el soporte. Como se sabe por mecánica, la fuerza que actúa en cierta dirección es igual a la derivada de la energía respecto a la coordenada en esa dirección. En particular, la fuerza que ejerce la placa sobre el soporte viene determinada por la derivada de la energía respecto del desplazamiento  $\zeta$  del borde de la placa, tomada con signo contrario, y la fuerza opuesta de reacción, por la misma derivada con signo positivo. Pero esta derivada no es sino el coeficiente de  $\delta\zeta$  en la segunda integral en (12.3). Así, pues, la fuerza de reacción por unidad de longitud del contorno es igual al primer miembro de la ecuación (12.6) (ahora no nulo, por supuesto), multiplicado por  $\frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)}$ . Análogamente, el momento de la fuerza

de reacción está definido por el primer miembro de la ecuación (12.7), multiplicado por el mismo factor. Esto se sigue directamente del resultado, conocido por mecánica, según el cual el momento de la fuerza es igual a la derivada de la energía respecto al ángulo de rotación del cuerpo. Pero el ángulo de rotación del borde de la placa es igual a la derivada  $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$ , de modo que el momento correspondiente es el coe-

ficiente de  $\delta \frac{\partial \zeta}{\partial n}$  en la tercera integral de (12.3). Gracias a las condiciones (12.8) ambas expresiones (para la fuerza y el momento) se simplifican considerablemente.

En efecto, como  $\zeta$  y  $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$  son nulas en todo el contorno de la placa, también son idénticamente nulas las derivadas de todos los órdenes en la dirección de la tangente I. Teniendo en cuenta esta circunstancia y reemplazando en (12.6) y (12.7) las deri-

vadas según  $x$  e  $y$  por las derivadas en las direcciones  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{l}$ , obtenemos las siguientes expresiones sencillas para la fuerza  $F$  y el momento  $M$  de reacción del soporte:

$$F = - \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \left[ \frac{\partial^3 \zeta}{\partial n^3} + \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} \right], \quad (12.9)$$

$$M = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2}, \quad (12.10)$$

Otro caso importante es el de la placa apoyada (fig. 4, b), en el cual el borde sólo descansa sobre un soporte fijo, pero no está empotrado en él. En tal caso, a lo largo del contorno de la placa (es decir, a lo largo de la línea sobre la cual la placa se apoya en el soporte) el desplazamiento vertical, al igual que antes, se anula, pero la dirección de ningún modo permanece fija. En la integral de contorno en (12.3) corresponde a este caso

$$\delta \zeta = 0,$$

pero

$$\frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} \neq 0.$$

Por lo tanto, de las dos condiciones (12.6), (12.7), queda sólo la segunda. La expresión en el primer miembro de la (12.6) determina, como anteriormente, la fuerza de reacción que actúa en los puntos de apoyo de la placa (en equilibrio, el momento de estas fuerzas es igual a cero). La condición de contorno (12.7) se simplifica si se utilizan las derivadas en las direcciones de  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{l}$ , teniendo en cuenta, al mismo tiempo, que debido a la igualdad  $\zeta = 0$  sobre todo el contorno, también se anulan las derivadas  $\frac{\partial \zeta}{\partial l}$  y  $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial l^2}$ . Como resultado, obtenemos las condiciones de contorno en la forma

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} + \sigma \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0, \quad (12.11)$$

#### PROBLEMAS

- Hallar la deformación de una placa circular (de radio  $R$ ), cuyos bordes están empotrados, colocada horizontalmente en un campo gravitatorio.

*Solución.* Tomemos coordenadas polares con origen en el centro de la placa. La fuerza que

actúa por unidad de área de la superficie de la placa es igual a  $P = \rho gh$ . La ecuación (12.5) toma la forma  $\Delta^2\zeta = 64\beta$ ,  $\beta = \frac{3\rho g(1-\sigma^2)}{16h^2E}$  ( $\zeta$  positivo corresponde a un desplazamiento en el sentido de la fuerza de gravedad). Como  $\zeta$  es función sólo de  $r$ , para  $\Delta$  en coordenadas polares hay que escribir  $\Delta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\zeta}{dr} \right)$ . La integral general de esta ecuación es:

$$\zeta = \beta r^4 + ar^2 + b + cr^2 \ln \frac{r}{R} + d \ln \frac{r}{R}.$$

En este caso es necesario hacer  $d = 0$ , pues  $\ln \left( \frac{r}{R} \right)$  se hace infinito para  $r = 0$ , y también  $c = 0$ , pues este término introduce una singularidad de  $\Delta\zeta$  en  $r = 0$  (que correspondería a una fuerza aplicada en el centro de la placa, ver problema 3). Las constantes  $a$  y  $b$  se determinan a partir de las condiciones de contorno  $\zeta = 0$ ,  $d\zeta/dr = 0$  para  $r = R$ . El resultado es

$$\zeta = \beta(R^2 - r^2)^2.$$

2. Lo mismo para una placa de bordes apoyados.

*Solución.* Las condiciones de contorno (12.11) en el caso de una placa circular tienen la forma

$$\zeta = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{d\zeta}{dr} = 0.$$

La solución es análoga a la del problema 1 y lleva al resultado

$$\zeta = \beta(R^2 - r^2) \left( \frac{5 + \sigma}{1 + \sigma} R^2 - r^2 \right).$$

3. Determinar la deformación de una placa circular, de bordes empotados, en cuyo centro está aplicada una fuerza  $f$ .

*Solución.* En todas partes, excepto el origen de coordenadas, vale la ecuación  $\Delta^2\zeta = 0$ . Integrando, obtenemos:

$$\zeta = ar^2 + b + cr^2 \ln(r/R),$$

(prescindimos nuevamente del término con  $\ln r$ ). La fuerza total que actúa sobre la placa es igual a la fuerza  $f$  aplicada en su centro; por consiguiente, la integral de  $\Delta^2\zeta$  sobre la superficie de la placa debe ser igual a

$$2\pi \int_0^R r \Delta^2\zeta dr = \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3} f.$$

De aquí se obtiene  $c = \frac{3(1-\sigma^2)f}{2\pi h^3 E}$ . Las constantes  $a$  y  $b$  se determinan a partir de las condiciones de contorno. El resultado es:

$$\zeta = \frac{3f(1-\sigma^2)}{2h^3\pi E} [\frac{1}{2}(R^2 - r^2) - r^2 \ln(R/r)].$$

4. Lo mismo para una placa de bordes apoyados.

*Solución.*

$$\zeta = \frac{3f(1-\sigma^2)}{4h^3\pi E} \left[ \frac{3+\sigma}{1+\sigma} (R^2 - r^2) - 2r^2 \ln \frac{R}{r} \right].$$

5. Hallar la deformación de una placa circular, suspendida por su centro en un campo gravitatorio.

*Solución.* La ecuación para  $\zeta$  y su solución general son las mismas del problema 1. Como en el centro el desplazamiento  $\zeta$  es igual a 0, entonces  $b = 0$ . Las constantes  $a$  y  $c$  se determinan mediante las condiciones de contorno (12.6) y (12.7) que, para simetría circular, tienen la forma:

$$\frac{d\Delta\zeta}{dr} = \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} \right) = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{d\zeta}{dr} = 0.$$

El resultado es:

$$\zeta = \beta r^2 \left[ r^2 + 8R^2 \ln \frac{R}{r} + 2R^2 \frac{3+\sigma}{1+\sigma} \right].$$

6. Una capa delgada (de espesor  $h$ ) se desprende de un cuerpo mediante fuerzas externas que actúan contra las fuerzas de tensión superficial en la superficie de separación. Fijadas las fuerzas externas, el equilibrio se alcanza para un determinado valor del coeficiente de tensión superficial y una forma determinada de la capa (fig. 5). Hallar una fórmula que relacione la tensión superficial con la forma de dicha capa (\*).

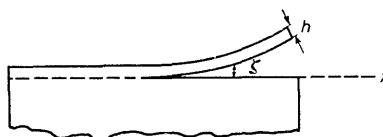


FIG. 5

(\*) Este problema fue estudiado por I. V. OBREIMOV (1930) en relación con un método desarrollado por él para la medición del coeficiente de tensión superficial de la mica; valiéndose de este método, fue el primero en realizar mediciones directas de la tensión superficial de sólidos.

*Solución.* Consideremos la capa desprendida como una placa con uno de sus bordes (la línea de separación) empotrado. El momento flexor que actúa en este borde, se determina mediante la fórmula (12.10); el trabajo realizado por este momento al incrementar la longitud de la capa separada en  $\delta x$ , es igual a

$$M \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} = M \delta x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

(el trabajo de la fuerza flexora es una cantidad pequeña de segundo orden). La condición de equilibrio consiste en la igualdad de este trabajo con la variación de la energía de superficie, esto es  $2\alpha \delta x$ , donde  $\alpha$  es el coeficiente de tensión superficial y el factor 2 proviene de la creación de dos superficies libres en el desprendimiento. De este modo, obtenemos:

$$\alpha = \frac{Eh^3}{24(1 - \sigma^2)} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2.$$

### § 13. Deformaciones longitudinales de placas

Un caso especial de las deformaciones de placas delgadas son las deformaciones longitudinales, que tienen lugar en el mismo plano de la placa y no acompañadas de una flexión. Hallemos las ecuaciones de equilibrio que describen tales deformaciones.

Si la placa es suficientemente delgada, la deformación puede considerarse uniforme en todo el espesor. El tensor de deformaciones es en este caso función sólo de  $x$  e  $y$  (elegido el plano de la placa como plano  $x, y$ ) y no depende de  $z$ . Las deformaciones longitudinales de una placa son provocadas, generalmente, por fuerzas aplicadas en sus bordes o bien por fuerzas de volumen que actúan en el plano de la placa. Las condiciones de contorno en ambas caras de ésta son, en consecuencia,  $\sigma_{ik}n_k = 0$ , o, como el vector normal está dirigido según el eje  $z$ :  $\sigma_{iz} = 0$ , es decir:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0.$$

Conviene destacar, sin embargo, que en la teoría aproximada expuesta más abajo estas condiciones conservan su validez aún cuando las fuerzas externas de extensión estén aplicadas directamente en las caras de la placa, pues estas fuerzas, de todos modos, serán pequeñas comparadas con las tensiones internas longitudinales que se generan en ella ( $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ ). Siendo iguales a cero sobre las caras, las cantidades  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$  serán pequeñas también en toda la extensión del pequeño espesor de la placa, debido a lo cual podemos aproximadamente considerarlas nulas en todo el volumen de la misma.

Igualando a cero las expresiones (11.2), obtendremos las siguientes relaciones:

$$u_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma} (u_{xx} + u_{yy}), \quad u_{xz} = u_{yz} = 0. \quad (13.1)$$

Introduciéndolas en las fórmulas generales (5.13) se obtienen las componentes no nulas del tensor de tensiones en la forma:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\sigma^2} (u_{xx} + \sigma u_{yy}), \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\sigma^2} (u_{yy} + \sigma u_{xx}), \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

Conviene observar que, efectuando formalmente la sustitución

$$E \rightarrow \frac{E}{1-\sigma^2}, \quad \sigma \rightarrow \frac{\sigma}{1-\sigma}, \quad (13.3)$$

estas expresiones se transforman en las fórmulas que determinan la relación entre las tensiones  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$  y las deformaciones  $u_{xx}$ ,  $u_{yy}$ ,  $u_{zz}$  en una deformación plana [fórmulas (5.13) con  $u_{zz} = 0$ ].

Después de haber eliminado de este modo el desplazamiento  $u_z$  por completo, podemos considerar la placa simplemente como un medio bidimensional («plano elástico»), sin espesor, y hablar del vector deformación  $\mathbf{u}$  como de un vector bidimensional con dos componentes  $u_x$  y  $u_y$ . Si  $P_x$ ,  $P_y$  son las componentes de la fuerza externa de volumen por unidad de superficie de la placa, las ecuaciones generales de equilibrio son:

$$\begin{aligned} h \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) + P_x &= 0, \\ h \left( \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) + P_y &= 0. \end{aligned}$$

Substituyendo aquí las expresiones (13.2), obtenemos las ecuaciones de equilibrio en la forma

$$\begin{aligned} Eh \left\{ \frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right\} + P_x &= 0, \\ Eh \left\{ \frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right\} + P_y &= 0. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Estas ecuaciones pueden escribirse en forma vectorial bidimensional:

$$\text{grad div } \mathbf{u} - \frac{1-\sigma}{2} \text{ rot rot } \mathbf{u} = -\mathbf{P} \frac{1-\sigma^2}{Eh}, \quad (13.5)$$

donde todas las operaciones vectoriales se realizan en dos dimensiones.

En particular, en ausencia de fuerza de volumen la ecuación de equilibrio es

$$\text{grad div } \mathbf{u} - \frac{1-\sigma}{2} \text{ rot rot } \mathbf{u} = 0. \quad (13.6)$$

Esta ecuación difiere tan sólo en el valor del coeficiente [en correspondencia con (13.3)] de la ecuación de equilibrio para la deformación plana de un cuerpo ilimitado en la dirección del eje  $z$  (§ 7) (\*). Lo mismo que para una deformación plana, se puede introducir aquí una «función de tensiones», definida por las relaciones:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad (13.7)$$

que automáticamente satisfacen las ecuaciones de equilibrio, escritas en la forma

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0.$$

(\*) A veces se llama *estado de tensiones planas* a una deformación uniforme a lo largo del eje  $z$ , para la cual en todo el cuerpo es  $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$ , a diferencia de las deformaciones planas, para las cuales en todo el cuerpo se tiene  $u_{zx} = u_{zy} = u_{zz} = 0$ .

Como antes, la función de tensiones satisface la ecuación biarmónica, puesto que para  $\Delta\chi$  tenemos la relación:

$$\Delta\chi = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\sigma} (u_{xx} + u_{yy}) = \frac{E}{1-\sigma} \operatorname{div} \mathbf{u},$$

que se distingue sólo por el factor de la que teníamos para una deformación plana.

Señalemos aquí la siguiente propiedad: la distribución de tensiones en una placa deformada por fuerzas dadas aplicadas a sus bordes, no depende de las constantes elásticas del material que la forma. Efectivamente, estas constantes no aparecen ni en la ecuación biarmónica a que satisface la función de tensiones, ni en las fórmulas (13.7), que determinan las componentes de  $\sigma_{ik}$  a partir de esta función (y, por esto, tampoco en las condiciones de contorno en los bordes de la placa).

#### PROBLEMAS

1. Hallar la deformación de un disco plano que gira uniformemente alrededor de un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su plano.

*Solución.* La solución requerida sólo difiere de la solución obtenida en el problema 5 § 7 para la deformación plana de un cilindro en rotación en los valores de los coeficientes constantes. El desplazamiento radial  $u_r = u(r)$  está dado por la fórmula:

$$u = \frac{\rho \Omega^2 (1 - \sigma^2)}{8E} r \left( \frac{3 + \sigma}{1 + \sigma} R^2 - r^2 \right).$$

Esta expresión se transforma mediante la sustitución (13.3) en la fórmula obtenida en el problema 5 § 7.

2. Determinar la deformación de una placa semi-infinita (de borde recto) bajo la acción de una fuerza concentrada situada en su plano y aplicada en un punto del borde.

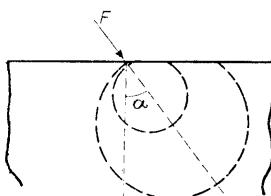


FIG. 6

*Solución.* Introduzcamos coordenadas polares con el ángulo contado a partir de la dirección de la fuerza aplicada;  $\varphi$  toma los valores comprendidos entre  $-\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$  y  $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ , donde  $x$  es el ángulo entre la dirección de la fuerza y la normal al borde de la placa (fig. 6). En todos los puntos del borde, excluyendo el punto de aplicación de la fuerza externa (origen de coordenadas), deben

satisfacerse las condiciones  $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{r\varphi} = 0$ . Utilizando las expresiones para  $\sigma_{\varphi\varphi}$  y  $\sigma_{r\varphi}$  obtenidas en el problema 11 § 7, hallamos que para ello la función de tensión debe cumplir las condiciones:

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = \text{const}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \text{const} \quad \text{para } \varphi = \mp \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Ambas condiciones se cumplen si  $\chi = rf(\varphi)$ . Con tal sustitución la ecuación biarmónica

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]^2 \chi = 0$$

da para  $f(\varphi)$  soluciones de la forma  $\sin \varphi, \cos \varphi, \varphi \sin \varphi, \varphi \cos \varphi$ . De ellas, las dos primeras son ficticias, pues llevan a una tensión idénticamente nula. La solución que da el valor correcto de la fuerza aplicada en el origen de coordenadas es

$$\begin{aligned} \chi &= -\frac{F}{\pi} r \varphi \sin \varphi, \\ \sigma_{rr} &= -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos \varphi}{r}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

( $F$  es el valor de la fuerza por unidad de espesor de la placa). En efecto, proyectando las tensiones internas sobre las direcciones paralela y perpendicular a la fuerza  $F$ , e integrando sobre un pequeño semicírculo con centro en el origen (cuyo radio tiende luego a cero), obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \sigma_{rr} \cos \varphi r d\varphi &= -F, \\ \int \sigma_{rr} \sin \varphi r d\varphi &= 0, \end{aligned}$$

es decir, justamente los valores que compensan la fuerza aplicada en el origen.

Las fórmulas (1) determinan la distribución de tensiones buscada. Ésta resulta puramente radial: sobre cada superficie, perpendicular al radio, actúa sólo una fuerza radial de compresión. Las líneas de igual tensión son las circunferencias  $r = d \cos \varphi$ , que pasan por el origen de coordenadas y tienen su centro sobre la recta de acción de la fuerza  $F$  (fig. 6).

Las componentes del tensor de deformaciones son  $u_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E}$ ,  $u_{\varphi\varphi} = -\frac{\sigma}{E} \sigma_{rr}$ ,  $u_{r\varphi} = 0$ . Por integración (con ayuda de las expresiones (1.8) para las componentes de  $u_{ik}$  en coordenadas polares) se puede hallar a partir de ellas el vector desplazamiento:

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{2F}{\pi E} \cos \varphi \ln \frac{r}{a} - \frac{(1-\sigma) F}{\pi E} \varphi \sin \varphi, \\ u_\varphi &= \frac{2\sigma F}{\pi E} \sin \varphi + \frac{2F}{\pi E} \ln \frac{r}{a} \sin \varphi + \frac{(1-\sigma) F}{\pi E} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi). \end{aligned}$$

Las constantes de integración han sido elegidas aquí de modo que quede excluido todo desplazamiento (traslación o rotación) de la placa en conjunto; se supone, en efecto, que cierto punto situado sobre la recta de acción de la fuerza, a una distancia arbitraria  $a$  del origen, permanece fijo.

La solución obtenida es inaplicable, claro está, en la inmediata vecindad del origen de coordenadas. Sin embargo, mediante ella se puede construir la solución para una distribución arbitraria de fuerzas que actúan sobre el borde de la placa (§ 8).

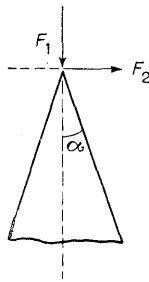


FIG. 7

3. Hallar la deformación de una placa cuneiforme infinita (de abertura  $2\alpha$ ) bajo la acción de una fuerza aplicada en su vértice.

*Solución.* La distribución de tensiones se determina mediante fórmulas que difieren de las tenidas en el problema anterior sólo por su normalización. Si la fuerza actúa en la dirección de la línea media de la cuña (fuerza  $F_1$  en la fig. 7), tenemos:  $\sigma_{rr} = -\frac{F_1 \cos \varphi}{r(\alpha + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha)}$ ,  $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0$ . Si la fuerza actúa en la dirección perpendicular ( $F_2$  en la fig. 7), entonces:

$$\sigma_{rr} = -\frac{F_2 \cos \varphi}{r(\alpha - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha)}$$

En cada caso, el ángulo  $\varphi$  se mide a partir de la recta de acción de la fuerza.

4. Determinar la deformación de un disco circular (de radio  $R$ ), comprimido por dos fuerzas iguales y opuestas  $F$ , aplicadas en los extremos de un diámetro (fig. 8).

*Solución.* La solución del problema se obtiene superponiendo tres distribuciones de tensiones internas. Dos de éstas son:

$$\sigma_{r_1 r_1}^{(1)} = -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos \varphi_1}{r_1}, \quad \sigma_{r_1 \varphi_1}^{(1)} = \sigma_{\varphi_1 \varphi_1}^{(1)} = 0,$$

$$\sigma_{r_2 r_2}^{(2)} = -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos \varphi_2}{r_2}, \quad \sigma_{r_2 \varphi_2}^{(2)} = \sigma_{\varphi_2 \varphi_2}^{(2)} = 0,$$

donde  $r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2$  son las coordenadas polares de un punto arbitrario  $P$ , con orígenes en los puntos  $A$  y  $B$ , respectivamente (éstas son las tensiones que originaría una fuerza normal  $F$  aplicada

en un punto del borde de un semiplano, ver problema 2). La tercera distribución  $\sigma_{ik}^{(3)} = \frac{F}{\pi R} \delta_{ik}$  representa una dilatación uniforme de determinada intensidad. En efecto, si el punto  $P$  pertenece al borde del disco, entonces para él es  $r_1 = 2R \cos \varphi_1$ ,  $r_2 = 2R \cos \varphi_2$ , de modo que  $\sigma_{r_1 r_1}^{(1)} = \sigma_{r_2 r_2}^{(2)} = -\frac{F}{\pi R}$ . Como las direcciones de  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  en este punto son perpendiculares, vemos que los dos primeros sistemas de tensiones llevan a una compresión uniforme sobre el borde del disco; estas fuerzas se compensan precisamente con la dilatación uniforme del tercer sistema, de modo que el borde del disco resulta, como corresponde, libre de tensiones.

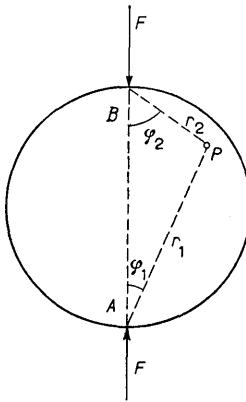


FIG. 8

5. Hallar la distribución de tensiones en una placa ilimitada con un agujero circular (de radio  $R$ ), sometida a una tensión uniforme.

*Solución.* A una tensión uniforme de una placa continua corresponden las tensiones  $\sigma_{xx}^{(0)} = T$ ,  $\sigma_{yy}^{(0)} = \sigma_{xy}^{(0)} = 0$ , donde  $T$  es la fuerza tensora. A ellas corresponde la función de tensiones  $\chi^{(0)} = \frac{T}{2} y^2 = \frac{T}{2} r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{1}{4} Tr^2(1 - \cos 2\varphi)$ . Dado que existe un agujero circular (con centro en el origen de las coordenadas polares  $r, \varphi$ ), buscaremos para la función de tensiones una expresión de la forma  $\chi = \chi^{(0)} + \chi^{(1)}$ ,  $\chi^{(1)} = f(r) + F(r) \cos 2\varphi$ . La integral de la ecuación biarmónica independiente de  $\varphi$  se escribe  $f(r) = ar^2 \ln r + br^2 + c \ln r$ , y para la integral proporcional a  $\cos 2\varphi$  se tiene  $F(r) = dr^2 + er^4 + \frac{g}{r^2}$ . Las constantes que aquí aparecen se determinan por las condiciones  $\sigma_{ik}^{(1)} = 0$  para  $r = \infty$  y  $\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0$  para  $r = R$ . Como resultado obtenemos:

$$\chi^{(1)} = \frac{1}{2} TR^2 \left\{ -\ln r + \left( 1 - \frac{R^2}{2r^2} \right) \cos 2\varphi \right\},$$

y la distribución de tensiones es:

$$\sigma_{rr} = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left[1 + \left(1 - \frac{3R^2}{r^2}\right) \cos 2\varphi\right],$$

$$\sigma_{qq} = \frac{T}{2} \left[1 + \frac{R^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3R^4}{r^4}\right) \cos 2\varphi\right], \quad \sigma_{rq} = -\frac{T}{2} \left[1 + \frac{2R^2}{r^2} - \frac{3R^4}{r^4}\right] \sin 2\varphi.$$

En particular, en el borde del agujero  $\sigma_{qq} = T(1 - 2 \cos 2\varphi)$ , y para  $\varphi = \pm \pi/2$  resulta  $\sigma_{qq} = 3T$ , es decir, un valor tres veces el de la tensión en el infinito (véase problema 12 § 7).

#### § 14. Placas fuertemente combadas

La teoría de la flexión de placas delgadas, expuestas en los párrafos 11-13, es aplicable sólo cuando las deformaciones son suficientemente pequeñas. Anticipándonos, señalemos aquí que la condición de aplicabilidad de esta teoría es que la flexión  $\zeta$  sea pequeña comparada con el espesor  $h$  de la placa. Pasemos ahora a la deducción de las ecuaciones de equilibrio de una placa fuertemente combada. La flexión  $\zeta$  no se supone ahora pequeña comparada con  $h$ . Hay que subrayar, sin embargo, que, como antes, la deformación misma sí debe ser pequeña, en el sentido de que el tensor de deformaciones debe ser pequeño. En la práctica, esto implica de ordinario la condición  $\zeta \ll l$ , es decir, que la flexión debe ser pequeña comparada con la dimensión  $l$  de la placa.

La flexión de una placa va acompañada, en general, de una dilatación global (\*). Si la flexión es pequeña, esta dilatación se puede despreciar; en caso contrario, ello es por completo imposible. En una placa fuertemente combada no existe, por lo tanto, ninguna «superficie neutra». La existencia de una dilatación que acompaña a la flexión, es una peculiaridad de las placas que las distingue de las barras delgadas, las cuales pueden ser sometidas a fuertes flexiones sin que se produzca un alargamiento general. Esta propiedad de las placas es puramente geométrica. Consideremos, por ejemplo, una placa plana circular que, al flexionarla, se transforma en un segmento de superficie esférica. Si se efectúa la deformación de modo que la longitud de la circunferencia no varíe, entonces debe alargarse su diámetro. Pero si éste no aumenta de longitud, debe disminuir la longitud de la circunferencia.

La energía (11.6), que calculamos en el § 11 y que puede llamarse energía de flexión pura, representa aquella parte de la energía total determinada por la no-uniformidad de la tensión y la compresión en el espesor de la placa cuando no existe una dilatación general. Junto con esta energía, la energía total incluye una parte más, originada esta vez por la existencia de esa dilatación general; esta componente puede llamarse energía de dilatación.

(\*) Una excepción es, por ejemplo, la flexión que transforma una placa plana en una superficie cilíndrica.

Las deformaciones consistentes en flexión pura y extensión pura se estudiaron en los §§ 11, 12 y 13, respectivamente. Por lo tanto, podemos aprovechar ahora los resultados allí obtenidos. No es necesario analizar la estructura de la placa en espesor y podemos considerarla como una superficie bidimensional carente de él.

Hallemos primero una expresión para el tensor de deformaciones que determina la dilatación de una placa (considerada como superficie), sometida simultáneamente a una flexión y una dilatación en su plano. Sea  $\mathbf{u}$  el vector desplazamiento bidimensional (con componentes  $u_x, u_y$ ) para una dilatación pura;  $\zeta$ , como antes, representa al desplazamiento transversal en una flexión. Entonces, el elemento de longitud  $dl^2 = dx^2 + dy^2$  de la placa sin deformar se transforma después de la deformación en el elemento  $dl'$ , cuyo cuadrado es:

$$dl'^2 = (dx + du_x)^2 + (dy + du_y)^2 + d\zeta^2.$$

Escribiendo aquí  $du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$  y análogamente para  $du_y$  y  $d\zeta$ , obtenemos, despreciando términos de orden superior:

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta,$$

donde el tensor bidimensional de deformaciones se define por

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} \quad (14.1)$$

(En éste y en los párrafos siguientes designaremos mediante letras griegas los índices que toman los valores  $x$  e  $y$ ; como de costumbre, la repetición de índices significa suma.) Se prescinde aquí de los términos cuadráticos en las derivadas de  $u_\alpha$ ; por supuesto, no es posible hacer lo mismo con las derivadas de  $\zeta$ , porque no se tienen términos de primer orden en ellas.

El tensor de tensiones  $\sigma_{\alpha\beta}$  debido a la tensión de la placa, se determina mediante las fórmulas (13.2), en las cuales en lugar de  $u_{\alpha\beta}$  es necesario substituir el tensor de deformaciones completo, definido por las fórmulas (14.1). La fórmula (11.6) expresa la energía de la flexión pura, que escribiremos convencionalmente en la forma:

$$\int \Psi_1(\zeta) dx dy,$$

donde  $\Psi_1(\zeta)$  representa el integrando de la (11.6). La energía de dilatación, por

unidad de volumen de la placa, es, según las fórmulas generales,  $\frac{u_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}}{2}$ . La energía por unidad de área se obtiene de aquí multiplicando por  $h$ , de modo que la energía total de dilatación puede escribirse en la forma:

$$\int \Psi_2(u_{\alpha\beta}) df,$$

donde

$$\Psi_2 = h \frac{u_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}}{2}. \quad (14.2)$$

Así, la energía libre total de una placa fuertemente combada es:

$$F_{pl} = \int \{\Psi_1(\zeta) + \Psi_2(u_{\alpha\beta})\} df. \quad (14.3)$$

Antes de entrar en la deducción de las ecuaciones de equilibrio, estimemos ambas contribuciones a la energía. Las derivadas primeras de  $\zeta$  son del orden de  $\frac{\zeta}{l}$ , donde

$l$  es la dimensión de la placa, y las segundas del orden de  $\frac{\zeta^2}{l^2}$ . Por lo tanto, la (11.6)

prueba que  $\Psi_1 \sim \frac{Eh^3\zeta^2}{l^4}$ . El orden de magnitud del tensor  $u_{\alpha\beta}$  es  $\frac{\zeta^2}{l^2}$ , y, en consecuencia,  $\Psi_2 \sim Eh \frac{\zeta^4}{l^4}$ . La comparación de ambas expresiones indica que es lícito despreciar  $\Psi_2$ , como en la teoría aproximada de la flexión de placas, sólo cuando  $\zeta^2 \ll h^2$ .

La condición de mínimo de la energía se escribe así:  $\delta F + \delta U = 0$ , donde  $U$  es la energía potencial en el campo de las fuerzas externas. Supondremos que se puede prescindir de la acción de las fuerzas de tensión externas, si existen, en comparación con la de las fuerzas flexoras. (Esto siempre es posible, si las fuerzas de tensión no son excesivamente intensas, pues una placa delgada se somete mucho más fácilmente a una flexión que a una tensión.) Entonces, para  $\delta U$  tenemos la misma expresión que en el § 12:

$$\delta U = - \int P \delta \zeta df,$$

donde  $P$  es la fuerza externa por unidad de superficie de la placa. La variación de

la integral  $\int \Psi_1 df$  se calculó ya en el § 12 y es igual a:

$$\delta \int \Psi_1 df = \frac{h^3 E}{12(1 - \sigma^2)} \int \Delta^2 \zeta \delta \zeta df.$$

No escribimos las integrales de contorno de la fórmula (12.3) porque no determinan la ecuación de equilibrio, sino sus condiciones de contorno, que aquí no nos interesan.

Finalmente, calculemos la variación de la integral  $\int \Psi_2 df$ . En ella deben variarse tanto las componentes del vector  $\mathbf{u}$  como  $\zeta$ . Tenemos:

$$\delta \int \Psi_2 df = \int \frac{\partial \Psi_2}{\partial u_{\alpha\beta}} \delta u_{\alpha\beta} df.$$

Las derivadas de la energía libre por unidad de volumen respecto de  $u_{\alpha\beta}$  son iguales a  $\sigma_{\alpha\beta}$ ; en consecuencia  $\frac{\partial \Psi_2}{\partial u_{\alpha\beta}} = h \sigma_{\alpha\beta}$ . Reemplazando también  $u_{\alpha\beta}$  por la expresión (14.1), obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta \int \Psi_2 df &= h \int \sigma_{\alpha\beta} \delta u_{\alpha\beta} df = \frac{h}{2} \int \sigma_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \delta u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x_\beta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} \right\} df, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta la simetría de  $\sigma_{\alpha\beta}$ :

$$\delta \int \Psi_2 df = h \int \sigma_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x_\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right\} df.$$

Integrando ahora por partes, encontramos que:

$$\delta \int \Psi_2 df = -h \int \left\{ \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \delta u_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right) \delta \zeta \right\} df.$$

De nuevo, no escribimos las integrales sobre el contorno que envuelve la superficie de la placa.

Reuniendo los resultados obtenidos, tenemos:

$$\delta F_{pl} + \delta U = \\ = \int \left\{ \left[ \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - h \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right) - P \right] \delta \zeta - h \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \delta u_\alpha \right\} df = 0.$$

Para que esta relación se cumpla idénticamente, deberán ser nulos por separado los coeficientes de  $\delta \zeta$  y de  $\delta u_\alpha$ . De este modo, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - h \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right) = P, \quad (14.4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0. \quad (14.5)$$

En este sistema entran como funciones incógnitas tres cantidades: las dos componentes  $u_x, u_y$  del vector  $\mathbf{u}$  y el desplazamiento transversal  $\zeta$ . Su solución determina simultáneamente la forma de la placa combada [esto es, la función  $\zeta(x, y)$ ] y la dilatación que aparece como resultado de la flexión. Las ecuaciones (14.4) y (14.5) pueden simplificarse un poco mediante la introducción de la función  $\chi$ , ligada con  $\sigma_{\alpha\beta}$  por las relaciones (13.7). Después de substituir (13.7) en la ecuación (14.4), adopta la forma:

$$\frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - h \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) = P. \quad (14.6)$$

En lo concerniente a las ecuaciones (14.5), éstas se satisfacen automáticamente en virtud de las expresiones (13.6). Por ello, es necesario deducir aún otra ecuación, que se puede obtener eliminando  $u_\alpha$  a partir de las relaciones (13.7) y (13.2).

Procederemos de la siguiente manera. Expresemos  $u_{\alpha\beta}$  mediante  $\sigma_{\alpha\beta}$ . De (13.2) obtenemos:

$$u_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \sigma \sigma_{yy}), \quad u_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \sigma \sigma_{xx}), \quad u_{xy} = \frac{1 + \sigma}{E} \sigma_{xy}$$

Substituyendo aquí  $u_{\alpha\beta}$  por la expresión (14.1) y  $\sigma_{\alpha\beta}$  por las expresiones (13.7) se encuentran las igualdades:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 &= \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \sigma \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 &= \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= - \frac{2(1+\sigma)}{E} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

Aplicaremos a la primera el operador  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , a la segunda  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  y a la tercera  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ , hecho lo cual sumemos la primera con la segunda y restemos la tercera. Entonces los términos que contienen  $u_x$  y  $u_y$  se anulan mutuamente y obtenemos la ecuación

$$\Delta^2 \chi + E \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} = 0. \quad (14.7)$$

Las ecuaciones (14.6) y (14.7) constituyen un sistema completo de ecuaciones para las flexiones grandes de placas delgadas (A. Füppl, 1907). Estas ecuaciones son muy complicadas y no pueden ser resueltas exactamente ni aún en los casos más sencillos. Obsérvese que son ecuaciones no-lineales.

Mencionemos brevemente un caso particular de deformaciones de placas delgadas, el de las llamadas *membranas*. Se llama *membrana* una placa delgada sometida a una fuerte tensión por fuerzas externas de tensión aplicadas a sus bordes. En tal caso se pueden despreciar las tensiones longitudinales suplementarias que aparecen al combarse la placa y, de acuerdo con esto, se puede considerar que las componentes del tensor  $\sigma_{\alpha\beta}$  son iguales, simplemente, a las tensiones externas constantes. En la ecuación (14.4) cabe ahora prescindir del primer término en comparación con el segundo y así obtenemos la ecuación de equilibrio:

$$h \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + P = 0, \quad (14.8)$$

con la condición de contorno  $\zeta = 0$  en el borde de la membrana. Esta ecuación es lineal. En el caso particularmente simple de una tensión isótropa, la tensión de la membrana es igual en todas direcciones. Sea  $T$  el valor absoluto de la tensión

por unidad de longitud, aplicada al borde de la membrana. Entonces  $h\sigma_{\alpha\beta} = T\delta_{\alpha\beta}$ , y obtenemos la ecuación de equilibrio en la forma

$$T\Delta\zeta + P = 0. \quad (14.9)$$

#### PROBLEMAS

1. Determinar el valor de la flexión de una placa en función de la fuerza que actúa sobre ella cuando la deformación es tan grande que  $\zeta \gg h$ .

*Solución.* Una estimación de los términos de la ecuación (14.7) indica que  $\chi \sim E\zeta^2$ . Cuando  $\zeta \gg h$  el primer término en (14.6) es pequeño comparado con el segundo, cuyo orden de magnitud es  $\frac{h\zeta\chi}{l^4} \sim \frac{Eh^3}{l^4}$  ( $l$  es la dimensión de la placa). Igualándolo a la fuerza externa, obtenemos:

$$\zeta \sim \left( \frac{l^4 P}{Eh} \right)^{1/3}$$

De aquí se sigue, en particular, que  $\zeta$  es proporcional a la raíz cúbica de la fuerza.

2. Determinar la deformación de una membrana circular (de radio  $R$ ) colocada horizontalmente en un campo gravitatorio.

*Solución.* Tenemos  $P = \varrho gh$ ; en coordenadas polares, (14.9) adopta la forma  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial\zeta}{\partial r} \right) = -\frac{\varrho gh}{T}$ . La solución, finita para  $r = 0$  y que satisface la condición  $\zeta = 0$  para  $r = R$ , es

$$\zeta = \frac{\varrho gh}{4T} (R^2 - r^2).$$

#### § 15. Deformaciones de cáscaras

Hasta aquí, al hablar de las deformaciones de placas delgadas, siempre sobreentendimos que, en el estado no deformado, la placa es plana. Sin embargo, las deformaciones de aquellas placas que, en su estado natural, poseen una forma curva (tales placas se llaman *cáscaras*), presentan particularidades que las distinguen de las deformaciones de las placas planas.

La dilatación que acompaña a la flexión de una placa plana es un efecto de segundo orden comparado con la flexión misma. Esto se manifiesta, por ejemplo, en que el tensor de deformaciones (14.1), que determina tal tensión, es cuadrático en  $\zeta$ . Una situación completamente distinta ocurre en las deformaciones de cáscaras: aquí, la dilatación es un efecto de primer orden y, por lo tanto, tiene un papel preponderante aún para una flexión pequeña. Esta propiedad se ve ya claramente en el ejemplo sencillo de una cáscara esférica uniformemente distendida. Si

todos sus puntos experimentan un desplazamiento radial uniforme  $\zeta$ , el incremento de longitud del ecuador es igual a  $2\pi\zeta$ . La extensión relativa es  $\frac{2\pi\zeta}{2\pi R} = \frac{\zeta}{R}$

y, por consiguiente, también el tensor de deformaciones es proporcional a la primera potencia de  $\zeta$ . Este efecto se anula cuando  $R \rightarrow \infty$ , es decir, cuando la curvatura tiende a cero, siendo, de este modo, una propiedad específica vinculada con la curvatura de la cáscara.

Sea  $R$  el orden de magnitud del radio de curvatura de la cáscara, que coincide, generalmente, con el orden de magnitud de su tamaño. Entonces, el tensor de deformaciones de la dilatación que acompaña a la flexión es del orden de  $\frac{\zeta}{R}$ , correspondiéndole un tensor de tensiones  $\sim \frac{E\zeta}{R}$ , mientras que la energía de la deformación (por unidad de área) es, según (14.2), del orden de  $Eh\left(\frac{\zeta}{R}\right)^2$ . La energía de la flexión pura, como antes, es del orden de  $Eh^3 \frac{\zeta^2}{R^4}$ . Vemos que la relación de la primera a la segunda es del orden de  $\left(\frac{R}{h}\right)^2$ , es decir, muy grande. Subrayemos que esto ocurre independientemente del valor de la razón de la magnitud  $\zeta$  de la flexión al espesor  $h$ , mientras que en la flexión de placas planas la tensión comenzaba a desempeñar un papel sólo cuando  $\zeta \sim h$ .

En algunos casos puede existir un tipo particular de flexión de cáscaras en el que no se produce ninguna dilatación. Así, por ejemplo, una cáscara cilíndrica (con ambos extremos del cilindro abiertos) puede ser deformada sin dilatación si todas las generatrices del cilindro se mantienen paralelas entre sí durante la flexión (esto es, como si la cáscara se comprimiera según una generatriz). Tales deformaciones sin dilatación son posibles geométricamente si la cáscara posee bordes libres (es decir, si no es cerrada) o si la cáscara es cerrada, pero su curvatura tiene distinto signo en puntos diferentes. Por ejemplo, una cáscara esférica cerrada no puede ser combada sin una extensión, pero si en ella se practica un orificio (dejando sus bordes libres), tales deformaciones pasan a ser posibles. Como la energía de una flexión pura es pequeña comparada con la energía de dilatación, claro está que si se puede deformar una determinada cáscara sin dilatación, precisamente tales deformaciones se producirán, en general, bajo la acción de fuerzas externas arbitrarias aplicadas a la misma. El requerimiento de que no exista dilatación durante la flexión, impone considerables limitaciones sobre los posibles desplazamientos  $u_u$ . Estas condiciones son puramente geométricas y pueden expresarse en forma de ecuaciones diferenciales que deberán estar contenidas en el sistema completo de ecuaciones de equilibrio para tales deformaciones. Aquí, no nos detendremos en esta cuestión.

Si la deformación de la cáscara va acompañada de una dilatación, las tensiones

correspondientes son, en general, grandes comparadas con las tensiones de la flexión y se puede prescindir de estas últimas (la teoría de las cáscaras basada en esta aproximación es análoga a la de las membranas).

La energía de dilatación de una cáscara se puede calcular mediante la integral:

$$F_{pi} = \frac{h}{2} \int u_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} \, df, \quad (15.1)$$

extendida a toda su superficie. Aquí,  $u_{\alpha\beta}$  es el tensor bidimensional ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) de deformaciones, en coordenadas curvilíneas adecuadas, y el tensor de tensiones  $\sigma_{\alpha\beta}$  está ligado con  $u_{\alpha\beta}$  por las fórmulas (13.2), que pueden escribirse en notación tensorial bidimensional como:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1 - \sigma^2} [(1 - \sigma)u_{\alpha\beta} + \sigma \delta_{\alpha\beta} u_{\gamma\gamma}]. \quad (15.2)$$

El caso en que la cáscara está sometida a la acción de fuerzas concentradas, dirigidas en sentido normal a su superficie, exige un estudio especial. Tales fuerzas pueden ser, en particular, fuerzas de reacción, ejercidas sobre la cáscara por los soportes en los puntos (o líneas) de fijación. Las fuerzas concentradas producen una flexión de la cáscara en una región pequeña alrededor de sus puntos de aplicación. Sea  $d$  el orden de magnitud de esta región para una fuerza  $f$  aplicada en un punto (de modo que su área es  $\sim d^2$ ). Como la flexión  $\zeta$  varía considerablemente a lo largo de una distancia  $d$ , la energía de flexión (por unidad de área) es del orden de  $Eh^3 \frac{\zeta^2}{d^4}$ , y la energía total de flexión (sobre un área  $\sim d^2$ ), del orden de  $Eh^3 \frac{\zeta^2}{d^2}$ .

El tensor de deformaciones de la dilatación es, como antes,  $\sim \frac{\zeta}{R}$  y la energía total de la dilatación provocada por la fuerza concentrada,  $\sim Eh \frac{\zeta^2}{R^2} d^2$ . Como la energía de flexión crece, y la energía de dilatación decrece, al disminuir  $d$ , está claro que, al determinar la deformación cerca del punto de aplicación de las fuerzas concentradas, deben tenerse en cuenta ambas energías. El orden de magnitud de la región combada,  $d$ , se determina a partir de la condición de mínimo de la suma de estas energías, de donde:

$$d \sim \sqrt{hR}. \quad (15.3)$$

La energía es aquí  $\sim Eh^2 \zeta^2 / R$ . Variándola respecto de  $\zeta$  e igualándola al trabajo de la fuerza  $f$ , hallamos la magnitud de la flexión  $\zeta \sim fR/Eh^2$ .

Sin embargo, si las fuerzas que actúan sobre la cáscara son suficientemente grandes, pueden producirse en ella convexidades o concavidades que varían sustancialmente su forma. La determinación de las deformaciones como función de las cargas aplicadas exige, en este caso singular, un estudio especial (\*).

Consideremos una cáscara convexa (con sus bordes fijados de tal modo que, geométricamente, es inflexible) sometida a la acción de una fuerza concentrada  $f$  dirigida según la normal interior a su superficie. Por simplicidad, supondremos que la cáscara es una porción de esfera de radio  $R$ . La concavidad tendrá la forma de un segmento esférico que casi coincide con la imagen reflejada de su forma inicial (en la fig. 9 se representa un corte meridiano de la cáscara). El problema consiste en determinar las dimensiones de la concavidad en función de la magnitud de la fuerza.

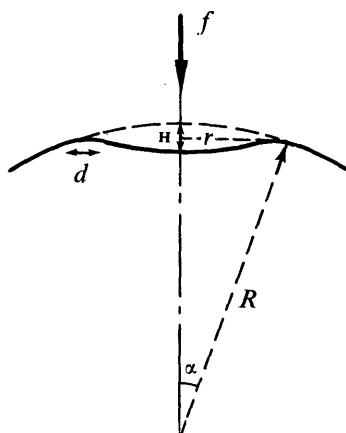


FIG. 9

La mayor parte de la energía elástica está concentrada en una zona estrecha, cerca del borde de la concavidad, donde la flexión de la cáscara es relativamente grande (llamaremos a esta zona *banda de flexión* y designaremos su ancho por  $d$ ). Al estimar esta energía, supondremos que las dimensiones (el radio) de la concavidad  $r \ll R$ ; entonces el ángulo  $\alpha \ll 1$  (fig. 9). Luego  $r = R \operatorname{sen} \alpha \sim R\alpha$ , y la profundidad de la concavidad  $H = 2R(1 - \cos \alpha) \sim R\alpha^2$ . Llaremos  $\zeta$  el desplazamiento de los puntos de la cáscara en la banda de flexión. Exactamente del mismo modo como se procedió más arriba, se encuentra que las energías de la flexión a lo largo

(\*) Los resultados expuestos más abajo pertenecen a A. V. POGORELOV (1960). Un análisis más preciso de las cuestiones presentadas aquí, y también otros problemas análogos, pueden encontrarse en su libro *Teoria obolochek pri zakriticheskij deformatsii*, 1965.

de un meridiano y de la dilatación a lo largo de un paralelo (\*). relativas a 1 cm<sup>2</sup> de superficie, en orden de magnitud son, respectivamente,

$$Eh^3 \frac{\zeta^2}{d^4} \text{ y } Eh \frac{\zeta^2}{R^2}.$$

El orden de magnitud del desplazamiento se determina en este caso geométricamente: la dirección del meridiano varía, sobre el ancho  $d$ , un ángulo  $\sim z$  y, en consecuencia,  $\zeta \sim zd \sim rd/R$ . Multiplicando también por el área de la banda de flexión ( $\sim rd$ ), obtenemos la energía

$$E \frac{h^3 r^3}{R^2 d} \text{ y } E \frac{hd^3 r^3}{R^4}.$$

A partir de la condición de mínimo de su suma, hallamos de nuevo que  $d \sim \sqrt{hR}$  y que la energía elástica total es  $\sim Er^3(h/R)^{5/2}$  o, de otro modo (\*\*):

$$\text{const} \cdot Eh^{5/2} \frac{H^{3/2}}{R}. \quad (15.4)$$

En el razonamiento que precede se ha supuesto que  $d \ll r$ ; por lo tanto, la fórmula (15.4) es válida cuando se cumple la condición (\*\*\*)

$$\frac{Rh}{r^2} \ll 1. \quad (15.5)$$

(\*) La curvatura de la cáscara, en primera aproximación, no influye en la flexión según un meridiano, de modo que, al igual que al combar en forma cilíndrica una placa plana, no existe una dilatación general según el mismo.

(\*\*) Un cálculo más preciso da para el coeficiente constante el valor

$$\text{const} = 1,2 (1 - \sigma^2)^{-3/4}$$

(\*\*\*) Al formarse la concavidad, la cara externa del segmento esférico, que anteriormente era convexa, se hace cóncava y, en consecuencia, se comprime, mientras que la cara interna se hace convexa y se dilata. La dilatación (o compresión) relativa es  $\sim h/R$ , de modo que la energía total vinculada con ella, en la región de la concavidad, vale

$$\sim E \left( \frac{h}{R} \right)^2 hr^2.$$

Si se cumple la condición (15.5), esta energía es efectivamente pequeña comparada con la energía en la banda de flexión, (15.4).

La dependencia buscada entre la profundidad de la concavidad  $H$  y la fuerza aplicada  $f$ , se obtiene igualando  $f$  con la derivada de la energía (15.4) respecto de  $H$ . De este modo, hallamos:

$$H \sim \frac{f^2 R^2}{E^2 h^5}. \quad (15.6)$$

Obsérvese el carácter no-lineal de esta dependencia.

Por último, supongamos que la deformación (concavidad) de la cáscara se produce bajo la acción de una presión externa uniforme  $p$ . En tal caso, el trabajo de las fuerzas externas es igual a  $p\Delta V$ , donde  $\Delta V \sim Hr^2 \sim H^2 R$  es lo que varía el volumen limitado por la cáscara, cuando ésta se hunde. Igualando a cero la derivada respecto de  $H$  de la energía libre total (que es la diferencia entre la energía elástica (15.4) y este trabajo), obtenemos:

$$H \sim \frac{h^5 E^2}{R^4 p^2}. \quad (15.7)$$

El carácter inverso de esta dependencia ( $H$  crece al disminuir  $p$ ) muestra que, en este caso, el estado deformado es inestable. El valor de  $H$ , determinado por la fórmula (15.7), corresponde al equilibrio inestable para una  $p$  dada: las concavidades con un valor mayor de  $H$  aumentan espontáneamente, y las de valor menor disminuyen [es fácil comprobar que (15.7) corresponde a un máximo, y no a un mínimo, de la energía libre total]. Existe un valor crítico de la carga externa  $p = p_{cr}$  por encima del cual crece espontáneamente cualquier pequeña variación de forma de la cáscara. Se puede estimar como aquel valor de  $p$  para el cual la fórmula (15.7) da una  $H \sim h$ :

$$p_{cr} \sim E \frac{h^2}{R^2}. \quad (15.8)$$

Sobre la teoría de cáscaras, nos limitaremos a los breves conocimientos expuestos y a algunos ejemplos sencillos que se presentan en los problemas de este parágrafo.

#### PROBLEMAS

1. Deducir la ecuación de equilibrio para una cáscara esférica (de radio  $R$ ) deformada simétricamente respecto de un eje que pasa por su centro.

*Solución.* Como sistema bidimensional de coordenadas sobre la superficie de la cáscara tomaremos los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$  del sistema de coordenadas esféricas con origen en el centro de la esfera y cuyo eje polar coincide con el eje de simetría de la cáscara deformada.

Sea  $P_r$  la fuerza radial externa por unidad de superficie de la cáscara. Esta fuerza deberá compensarse con la resultante radial de las fuerzas internas de tensión, que actúan sobre un elemento de la cáscara en direcciones tangenciales al mismo. La condición correspondiente es:

$$\frac{h}{R} (\sigma_{qq} + \sigma_{\theta\theta}) = P_r. \quad (1)$$

Esta ecuación es exactamente análoga a la conocida ecuación de Laplace que determina la diferencia de presión entre dos medios debido a la tensión superficial que actúa en la superficie de separación.

Sea, además,  $Q_z(\theta)$  la resultante, dirigida según el eje polar (eje  $z$ ), de todas las fuerzas externas que actúan sobre la parte de la cáscara situada por encima del paralelo  $\theta = \text{const}$ . Esta fuerza deberá compensarse con la proyección sobre el eje  $z$  de la tensión  $2\pi R \sin \theta h \sigma_{\theta\theta}$ , ejercida sobre la sección  $2\pi Rh \sin \theta$  correspondiente a la circunferencia indicada. De aquí

$$2\pi Rh \sin^2 \theta \sigma_{\theta\theta} = Q_z(\theta). \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) determinan la distribución de tensiones, y el tensor de deformaciones se encuentra entonces mediante las fórmulas

$$u_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma \sigma_{qq}), \quad u_{qq} = \frac{1}{E} (\sigma_{qq} - \sigma \sigma_{\theta\theta}), \quad u_{\theta q} = 0, \quad (3)$$

y, luego, el vector desplazamiento resulta de las ecuaciones

$$u_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left( \frac{du_\theta}{d\theta} + u_r \right), \quad u_{qq} = \frac{1}{R} (u_\theta \operatorname{ctg} \theta + u_r). \quad (4)$$

2. Determinar la deformación, producida por su propio peso, de una cáscara semiesférica colocada en forma de cúpula; el borde de esta cúpula se desplaza libremente sobre un soporte horizontal (fig. 10).

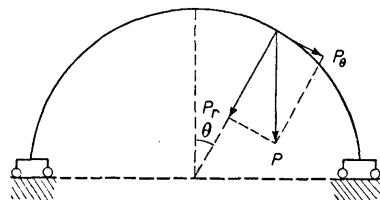


FIG. 10

*Solución.* Tenemos  $P_r = -\rho g h \cos \theta$ ,  $Q_z = -2\pi R^2 (1 - \cos \theta) \rho g h$  ( $Q_z$  es el peso total de la porción situada sobre la circunferencia  $\theta = \text{const}$ ). De (1) y (2) se deduce:

$$\sigma_{\theta\theta} = - \frac{R\varrho g}{1 + \cos \theta}, \quad \sigma_{rr} = R\varrho g \left( \frac{1}{1 + \cos \theta} - \cos \theta \right).$$

Calculemos  $u_{\varphi\varphi}$  y  $u_{\theta\theta}$  de acuerdo con las fórmulas (3), hecho lo cual, mediante las ecuaciones (4) calcularemos  $u_\theta$  y  $u_r$  (la constante que aparece al integrar la primera de estas ecuaciones, se determina de tal modo que, cuando  $\theta = \pi/2$ , sea  $u_\theta = 0$ ). Como resultado, obtenemos:

$$u_\theta = \frac{R^2 \varrho g (1 + \sigma)}{E} \left\{ \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} + \ln (1 + \cos \theta) \right\} \sin \theta,$$

$$u_r = \frac{R^2 \varrho g (1 + \sigma)}{E} \left( 1 - \frac{2 + \sigma}{1 + \sigma} \cos \theta - \cos \theta \ln (1 + \cos \theta) \right).$$

El valor de  $u_r$  para  $\theta = \frac{\pi}{2}$  da el desplazamiento horizontal del apoyo.

3. Hallar la deformación de una cáscara semiesférica de bordes empotrados, colocada como cúpula invertida y llena de líquido (fig. 11); el peso de la cáscara se puede despreciar comparado con el peso del líquido.

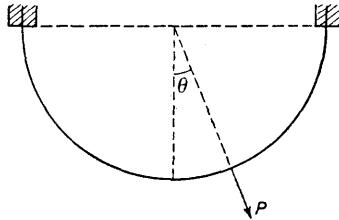


FIG. 11

*Solución.* Tenemos:

$$P_r = \varrho_0 g R \cos \theta, \quad P_\theta = 0,$$

$$Q_z = 2\pi R^2 \int_0^\theta P_r \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{2\pi R^3 \varrho_0 g}{3} (1 - \cos^3 \theta)$$

( $\varrho_0$ =densidad del líquido). Luego, de las fórmulas (1) y (2) deducimos:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{R^3 \varrho_0 g}{3h} \frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{R^2 \varrho_0 g}{3h} \frac{(-1 + 3 \cos \theta - 2 \cos^3 \theta)}{\sin^2 \theta}.$$

Para los desplazamientos se obtiene:

$$u_\theta = -\frac{R^3 \varrho_0 g (1 + \sigma)}{3Eh} \operatorname{sen} \theta \left[ \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} + \ln(1 + \cos \theta) \right]$$

$$u_r = \frac{R^3 \varrho_0 g (1 + \sigma)}{3Eh} \left[ \cos \theta \ln(1 + \cos \theta) - 1 + \frac{3 \cos \theta}{1 + \sigma} \right].$$

Cuando  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $u_r$  es diferente de cero y no se anula, como debería. Esto significa que, en realidad, cerca de la línea de empotramiento de la cáscara, su flexión es tan intensa, que la solución obtenida deja de ser aplicable.

4. Una cáscara cuya forma es la de un segmento esférico, se apoya con sus bordes libres sobre un soporte inmóvil (fig. 12). Determinar su flexión bajo la acción del propio peso  $Q$ .

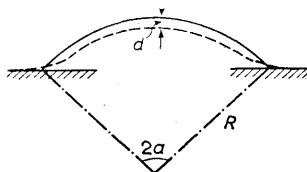


FIG. 12

*Solución.* La deformación principal se produce cerca de los bordes, que se tuercen hacia el exterior (línea punteada en la figura 12). El desplazamiento  $u_\theta$  es pequeño comparado con el desplazamiento radial  $u_r \equiv \zeta$ . Como  $\zeta$  aumenta rápidamente al alejarse de la línea de apoyo, la deformación se puede considerar análoga a la del borde de una larga placa plana (de longitud igual al perímetro de la línea de apoyo,  $2\pi R \operatorname{sen} \alpha$ ). Esta deformación es la suma de una flexión y una dilatación de la placa. La extensión relativa de la placa en cada uno de sus puntos es igual a  $\zeta/R$  ( $R$  es el radio de la cáscara) y, por lo tanto, la energía de dilatación (por unidad de volumen) vale  $E\zeta^2/2R^2$ . Eligiendo como variable independiente la distancia  $x$  a partir de la línea de apoyo, tenemos para la energía total de dilatación:

$$F_{1pl} = 2\pi R \operatorname{sen} \alpha \frac{hE}{2R^2} \int \zeta^2 dx.$$

La energía de flexión es:

$$F_{2pl} = 2\pi R \operatorname{sen} \alpha \frac{h^3 E}{24(1-\sigma^2)} \int \left( \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right)^2 dx.$$

Variando la suma  $F_{1pl} + F_{2pl}$  respecto de  $\zeta$ , hallamos la ecuación:

$$\frac{d^4 \zeta}{dx^4} + \frac{12(1-\sigma^2)}{h^2 R^2} \zeta = 0.$$

Cuando  $x \rightarrow \infty$ ,  $\zeta$  debe tender a cero, y para  $x = 0$  han de cumplirse la condición de contorno de que sea nulo el momento de las fuerzas:  $\zeta'' = 0$  y la condición de igualdad de la fuerza normal a la superficie de la cáscara, generada por la flexión, y la componente de la fuerza de gravedad:

$$2\pi R \operatorname{sen} \alpha \frac{h^3 E}{12(1 - \sigma^2)} \zeta''' = Q \cos \alpha.$$

La solución que satisface estas condiciones es  $\zeta = Ae^{-\kappa x} \cos \alpha x$ , donde

$$\kappa = \left[ \frac{3(1 - \sigma^2)}{h^2 R^2} \right]^{1/4}, \quad A = \frac{Q \operatorname{ctg} \alpha}{Eh} \left[ \frac{3R^2 (1 - \sigma^2)}{8\pi h^2} \right]^{1/4}.$$

La flexión de la cáscara es:

$$d = \zeta(0) \cos \alpha = A \cos \alpha.$$

### § 16. Torsión de barras

Pasemos ahora al estudio de las deformaciones de barras delgadas. Este caso difiere de todos los considerados anteriormente en que el vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$  puede ser grande, aun para deformaciones débiles, esto es, incluso cuando el tensor  $u_{ik}$  es pequeño (\*). Así, en una ligera flexión de una larga barra delgada, sus extremos pueden moverse considerablemente en el espacio, aun cuando los desplazamientos relativos de puntos próximos en la barra sean pequeños.

Existen dos tipos de deformaciones que pueden ir acompañadas de grandes desplazamientos de partes aisladas de la barra. Una de ellas es la flexión de la barra, y la segunda, su *torsión*. Comenzaremos considerando este segundo caso.

La torsión consiste en que en la barra, que se mantiene recta, cada sección transversal gira un cierto ángulo respecto a las situadas más abajo. Si la barra es larga, en una pequeña torsión dos secciones suficientemente separadas una de otra pueden girar un ángulo grande. Las generatrices de la superficie lateral de la barra, paralelas a su eje, adoptan una forma helicoidal después de la torsión.

Consideremos una barra delgada recta de sección arbitraria. Elijamos un sistema de coordenadas con el eje  $z$  a lo largo del eje de la barra y con su origen en un punto cualquiera en su interior. Introduzcamos el *ángulo de torsión*  $\tau$ , definido como ángulo de rotación por unidad de longitud. Esto significa que dos secciones transversales, infinitamente próximas, que se hallan a una distancia  $dz$ , giran, una res-

---

(\*) La única excepción es la simple extensión de la barra sin cambiar su forma; en este caso, el vector  $\mathbf{u}$  es siempre pequeño si lo es el tensor  $u_{ik}$ , es decir, si la dilatación es pequeña.

pecto de otra, un ángulo  $d\varphi = \tau dz$  (de modo que  $\tau = d\varphi/dz$ ). La torsión en sí, es decir, los desplazamientos de las partes vecinas de la barra, se suponen pequeños. La condición para ello es la de que sea pequeña la rotación relativa de secciones separadas, a lo largo del eje de la barra, por distancias del orden de sus dimensiones transversales  $R$ , esto es,

$$\tau R \ll 1. \quad (16.1)$$

Consideremos un pequeño segmento de barra próximo al origen de coordenadas y determinemos el desplazamiento  $\mathbf{u}$  de los puntos de la barra en esta región. Elijamos, en calidad de fija, la sección transversal de la barra en el plano  $x, y$ . Como es sabido, el desplazamiento del extremo del radio-vector  $\mathbf{r}$ , en una rotación de pequeño ángulo  $\delta\varphi$ , se determina mediante la fórmula a

$$\delta\mathbf{r} = \delta\varphi \times \mathbf{r}, \quad (16.2)$$

donde  $\delta\varphi$  es un vector de módulo igual al ángulo de rotación y dirigido según el eje de la misma. En nuestro caso, la rotación se realiza alrededor del eje  $z$ , y el ángulo de rotación, relativo al plano  $x, y$ , de los puntos de coordenada  $z$  es igual a  $\tau z$  (el ángulo  $\tau$  se puede considerar constante en la región próxima al origen de coordenadas). La fórmula (16.2) da ahora para las componentes  $u_x, u_y$  del vector de desplazamiento

$$u_x = -\tau zy, \quad u_y = \tau zx. \quad (16.3)$$

Durante la torsión de la barra, sus puntos también experimentan, generalmente, un desplazamiento a lo largo del eje  $z$ . Como para  $\tau = 0$  este desplazamiento se anula, entonces, cuando es pequeño, cabe considerarlo proporcional a  $\tau$ . De esta manera,

$$u_z = \tau\psi(x, y), \quad (16.4)$$

donde  $\psi(x, y)$  es una cierta función de  $x$  e  $y$ , llamada función de torsión. Como resultado de la deformación representada por las fórmulas (16.3) y (16.4), cada sección transversal de la barra gira alrededor del eje  $z$  y, al mismo tiempo, se encorva, dejando de ser plana. Conviene observar que, al elegir de manera definida el origen de coordenadas en el plano  $x, y$ , «fijamos» un punto determinado de la sección de la barra, de tal modo que no puede desplazarse en este plano (pero sí a lo largo del eje  $z$ ); un cambio en la elección del origen de coordenadas no influye, por supuesto, en la torsión misma, ya que conduce a un desplazamiento general, sin importancia, de toda la barra.

Conociendo  $\mathbf{u}$  se pueden hallar las componentes del tensor de deformaciones. Como  $\mathbf{u}$  es pequeño en la región considerada, se puede utilizar la fórmula  $u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$ . Como resultado hallamos:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{yy} = u_{xy} = u_{zz} = 0, \\ u_{xz} &= \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad u_{yz} = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \quad (16.5)$$

Obsérvese que  $u_h = 0$ ; en otras palabras, la torsión no va acompañada de variación de volumen, es decir, representa una deformación puramente de corte.

Para las componentes del tensor de tensiones hallamos:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0, \\ \sigma_{xz} &= 2\mu u_{xz} = \mu\tau \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad \sigma_{yz} = 2\mu u_{yz} = \mu\tau \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \quad (16.6)$$

(aquí conviene utilizar el módulo de rigidez  $\mu$  en lugar de  $E$  y  $\sigma$ ). Como sólo  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{yz}$  son distintas de cero, las ecuaciones generales de equilibrio  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$  se reducen a la ecuación:

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = 0. \quad (16.7)$$

Substituyendo aquí (16.6), encontramos que la función de torsión debe satisfacer la ecuación:

$$\Delta \psi = 0, \quad (16.8)$$

donde  $\Delta$  es el operador de Laplace bidimensional.

Conviene algo más, sin embargo, usar otra función auxiliar  $\chi(x, y)$ , definida por las igualdades:

$$\sigma_{xz} = 2\mu\tau \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = -2\mu\tau \frac{\partial \chi}{\partial x}; \quad (16.9)$$

para esta función se obtienen condiciones de contorno más convenientes sobre el borde de la sección de la barra (véase más adelante). Comparando (16.9) con (16.6), obtenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y + 2 \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -x - 2 \frac{\partial \chi}{\partial x}. \quad (16.10)$$

Derivando la primera igualdad respecto de  $y$ , la segunda respecto de  $x$  y restando una de otra, obtenemos la siguiente ecuación para la función  $\chi$ :

$$\Delta \chi = -1. \quad (16.11)$$

Para determinar las condiciones de contorno en la superficie de la barra, observemos que, gracias a su pequeño grosor, las fuerzas externas que actúan sobre su superficie lateral son pequeñas comparadas con las tensiones internas que se originan en ella y, por lo tanto, pueden tomarse iguales a cero al buscar las condiciones de contorno. Esta circunstancia es exactamente análoga a la que encontramos al considerar la flexión de placas delgadas. De este modo, en la superficie lateral de la barra debe ser  $\sigma_{ik}n_k = 0$ ; como el eje  $z$  está dirigido según el eje de la barra, el vector normal  $\mathbf{n}$  tiene sólo componentes  $n_x, n_y$ , de modo que la ecuación escrita se reduce a la condición

$$\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y = 0.$$

Reemplazando aquí (16.9), obtenemos:

$$\frac{\partial \chi}{\partial y}n_x - \frac{\partial \chi}{\partial x}n_y = 0.$$

Pero las componentes del vector normal a un contorno plano (el contorno de la sección de la barra) son iguales a  $n_x = -\frac{dy}{dl}$ ,  $n_y = \frac{dx}{dl}$ , donde  $x, y$  son las coordenadas de un punto del contorno, y  $dl$ , el elemento de longitud. De este modo se encuentra

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy = d\chi = 0,$$

de donde  $\chi = \text{const}$ , es decir, a lo largo del contorno de la sección la función  $\chi$  es constante. Como en la definición (16.9) intervienen sólo las derivadas de la función  $\chi$ , está claro que a esta función se le puede añadir cualquier constante. Si el contorno de la sección es simplemente conexo, se puede, por consiguiente, sin perder generalidad, añadir como condición de contorno a la ecuación (16.11) (\*):

$$\chi = 0 \quad (16.12)$$

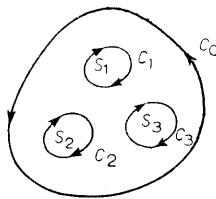


FIG. 13

En el caso de un contorno múltiplemente conexo,  $\chi$  tendrá distintos valores constantes sobre cada una de las curvas cerradas que componen el contorno. Por lo tanto, se puede hacer  $\chi$  igual a cero sobre una de estas curvas, por ejemplo, sobre el contorno exterior ( $C_0$  en la fig. 13). Los valores de  $\chi$  en las porciones restantes del contorno se determinan mediante una condición que es consecuencia de que el desplazamiento  $u_z = \tau\psi(x, y)$  es función uniforme de las coordenadas. En efecto, en vista de la uniformidad de la función de torsión  $\psi(x, y)$ , la integral de su diferencial  $d\psi$  sobre un contorno cerrado debe ser igual a cero. Con ayuda de las relaciones (16.10) tenemos, en consecuencia:

$$\begin{aligned} \oint d\psi &= \oint \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) \\ &= -2 \oint \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} dy - \frac{\partial \chi}{\partial y} dx \right) - 2 \oint (x dy - y dx) = 0, \end{aligned}$$

o

$$\oint \frac{\partial \chi}{\partial n} dl = -S, \quad (16.13)$$

(\*) El problema de la determinación de la torsión mediante la ecuación (16.11), con la condición de contorno (16.12), coincide formalmente con el problema de la determinación de la flexión de una membrana plana uniformemente cargada de acuerdo con la ecuación (14.9).

Conviene notar también una analogía hidrodinámica: una ecuación de la forma (16.11) determina la distribución de velocidades  $v(x, y)$  de un líquido viscoso en la sección de un tubo; la condición de contorno (16.12) corresponde a la condición  $v = 0$  en las paredes inmóviles del tubo (véase *Hidrodinámica*, § 17).

donde  $\frac{\partial \chi}{\partial n}$  es la derivada de la función  $\chi$  en la dirección de la normal exterior al contorno, y  $S$  es el área encerrada por este contorno. Aplicando (16.13) a cada una de las curvas cerradas  $C_1, C_2, \dots$ , obtenemos las condiciones buscadas.

Determinemos la energía libre de una barra sometida a torsión. Para la energía por unidad de volumen tenemos:

$$F = \frac{\sigma_{ik} u_{ik}}{2} = \sigma_{xz} u_{xz} + \sigma_{yz} u_{yz} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)$$

y reemplazando aquí (16.9):

$$F = 2\mu\tau^2 \left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right] \equiv 2\mu\tau^2 (\nabla \chi)^2,$$

donde  $\nabla$  representa el gradiente bidimensional. La energía de torsión por unidad de longitud de la barra se obtiene a partir de aquí integrando sobre el área de la sección transversal, es decir, resulta igual a  $\frac{C\tau^2}{2}$ , donde el coeficiente  $C$  vale

$$C = 4\mu \int (\nabla \chi)^2 \, df.$$

La cantidad  $C$  se llama *rígidez a la torsión* de la barra. La energía elástica total de la barra es igual a la integral

$$F_{barra} = \frac{1}{2} \int C\tau^2 \, dz, \quad (16.14)$$

extendida a su longitud.

Escribiendo:

$$(\nabla \chi)^2 = \nabla(\chi \nabla \chi) - \chi \Delta \chi = \nabla(\chi \nabla \chi) + \chi$$

y transformando la integral del primer término en una integral a lo largo del contorno de la sección de la barra, obtenemos:

$$C = 4\mu \oint \chi \frac{\partial \chi}{\partial n} \, dl + 4\mu \int \chi \, df. \quad (16.15)$$

Si el contorno de la sección es simplemente conexo, el primer término desaparece en virtud de la condición de contorno  $\chi = 0$ , y queda:

$$C = 4\mu \int \chi \, dx \, dy. \quad (16.16)$$

Para un borde múltiplemente conexo (fig. 13), poniendo  $\chi = 0$  en el contorno exterior  $C_0$  y llamado  $\chi_k$  el valor constante de  $\chi$  en los contornos interiores  $C_k$ , obtenemos con ayuda de (16.13):

$$C = 4\mu \sum_k \chi_k S_k + 4\mu \int \chi \, dx \, dy; \quad (16.17)$$

[conviene tener presente que, al integrar, en el primer término de (16.15) el contorno  $C_0$  se recorre en sentido directo, y los contornos  $C_k$ , en sentido retrógrado].

Consideremos el caso más común de torsión en que uno de los extremos de la barra está fijo y las fuerzas externas se aplican sólo a la superficie del otro extremo. Estas fuerzas son tales que únicamente producen una torsión de la barra, sin ninguna otra deformación, por ejemplo, una flexión. En otras palabras, constituyen un par de fuerzas que hace girar la barra alrededor de su eje. Designaremos por  $M$  el momento de este par.

Es natural esperar que, en tal caso, el ángulo de torsión  $\tau$  sea constante a lo largo de la barra. Podemos comprobarlo usando, por ejemplo, la condición de mínimo de la energía libre total de la barra en equilibrio. La energía total de la barra deformada es igual a la suma  $F_{\text{barra}} + U$ , donde  $U$  es la energía potencial determinada por la acción de las fuerzas externas. Haciendo en (16.14)  $\tau = \frac{d\varphi}{dz}$  y variando respecto del ángulo  $\varphi$ , hallamos:

$$\delta \frac{1}{2} \int C \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 dz + \delta U = \int C \frac{d\varphi}{dz} \frac{d\delta\varphi}{dz} dz + \delta U = 0,$$

o, integrando por partes,

$$-\int C \frac{d\tau}{dz} \delta\varphi dz + \delta U + C\tau\delta\varphi = 0.$$

El último término del primer miembro es la diferencia de los correspondientes valores en los límites de integración, es decir, en los extremos de la barra. Uno de ellos, digamos, el inferior, está fijo, de modo que en él  $\delta\varphi = 0$ . En lo concerniente a la variación  $\delta U$  de la energía potencial, ésta representa, con signo cambiado, el trabajo de las fuerzas externas en una rotación de ángulo  $\delta\varphi$ . Como se sabe por mecánica, el trabajo de un par de fuerzas en tal rotación es igual al producto  $M\delta\varphi$  del ángulo de rotación por el momento del par. Como no existen otras fuerzas externas,  $\delta U = -M\delta\varphi$  y obtenemos:

$$\int C \frac{d\tau}{dz} \delta\varphi dz + \delta\varphi(-M + C\tau) = 0. \quad (16.18)$$

En el segundo término se toma su valor en el límite superior. En la integral respecto de  $z$  la variación  $\delta\varphi$  es arbitraria y, en consecuencia, debe ser:

$$C \frac{d\tau}{dz} = 0,$$

es decir,

$$\tau = \text{const} \quad (16.19)$$

De este modo, el ángulo de torsión es constante a lo largo de la barra. El ángulo total de rotación de la base superior respecto de la inferior es, por lo tanto, simplemente igual al producto  $\tau l$  del ángulo  $\tau$  por la longitud de la barra,  $l$ .

En la ecuación (16.18) debe anularse también el segundo término. Hallamos así la siguiente expresión para el ángulo de torsión constante:

$$\tau = \frac{M}{C}. \quad (16.20)$$

#### PROBLEMAS

1. Determinar la rigidez a la torsión de una barra de sección circular (de radio  $R$ ).

*Solución.* Las soluciones de los problemas 1-4 coinciden formalmente con las soluciones de los problemas del movimiento de un líquido viscoso en un tubo de sección correspondiente (véase nota en la página 97); a la cantidad de líquido  $Q$  que pasa a través de una sección del tubo corresponde aquí la cantidad  $C$ .

Para una barra de sección circular tenemos (el origen de coordenadas está en el centro de la sección)  $\chi = \frac{1}{4} (R^2 - x^2 - y^2)$ . La rigidez a la torsión es  $C = \frac{\mu\pi R^4}{2}$ . Para la función  $\psi$ , de (16.10) se deduce  $\psi = \text{const}$ . Pero la constante  $\psi$  corresponde simplemente, según (16.4), a un desplazamiento de toda la barra a lo largo del eje  $z$ ; por lo tanto, se puede considerar que  $\psi = 0$ . De este modo, en la torsión, las secciones transversales de una barra circular permanecen planas.

2. Lo mismo para una barra de sección elíptica (de semiejes  $a$  y  $b$ ).

*Solución.* La rigidez a la torsión es  $C = \pi\mu \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$ . La distribución de desplazamientos longitudinales está dada por la función de torsión  $\psi = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} xy$  (los ejes de coordenadas están dirigidos según los ejes de la elipse).

3. Lo mismo para una barra cuya sección es un triángulo equilátero (de lado  $a$ ).

*Solución.* Rigidez a la torsión  $C = \frac{\sqrt{3}}{80} \mu a^4$ . Función de torsión:

$$\psi = y(x\sqrt{3} + y)(x\sqrt{3} - y)/6a$$

donde como origen de coordenadas se elige el centro del triángulo, y el eje  $x$  coincide con una de sus alturas.

4. Ídem para una barra que tiene la forma de una larga placa delgada (de ancho  $d$  y grueso  $h \ll d$ ).

*Solución.* El problema es equivalente al del flujo de un líquido viscoso entre paredes planas y paralelas. El resultado es  $C = \frac{\mu dh^3}{3}$ .

5. Lo mismo para un tubo cilíndrico (de radios interno  $r_1$  y externo  $R_2$ ).

*Solución.* La función  $\chi = \frac{1}{4}(R^2 - r^2)$  (en coordenadas polares) satisface la condición (16.13) en ambos límites de la sección anular del tubo. De la fórmula (16.17) se sigue  $C = \mu\pi \frac{R_2^4 - R_1^4}{4}$ .

6. Ídem para un tubo de paredes delgadas y sección arbitraria.

*Solución.* Dado que la pared del tubo es delgada, se puede considerar que en ella la función  $\chi$  varía linealmente desde cero, sobre una cara, hasta  $\chi_1$ , sobre la otra:  $\chi = \chi_1 \frac{y}{h}$  ( $y$  es la coordenada a lo largo del espesor de la pared). Entonces la condición (16.13) da  $\frac{\chi_1 L}{h} = S$ , donde  $L$  es la longitud del perímetro de la sección del tubo, y  $S$ , el área que encierra. En la expresión (16.17) el segundo término es pequeño comparado con el primero, y obtenemos  $C = \frac{4hS^2\mu}{L}$ . Si se corta el tubo a lo largo de una de sus generatrices, la rigidez a la torsión disminuye bruscamente, pasando a ser igual (de acuerdo con el resultado del problema 4) a  $C = \frac{\mu L h^3}{3}$ .

### § 17. Flexión de barras

En una barra sometida a flexión algunas de sus partes están dilatadas, y otras, comprimidas. Las fibras del lado convexo de la barra combada están distendidas, mientras que en el lado cóncavo hay una compresión. Como en el caso de las placas, a lo largo de la barra y en su interior existe una superficie «neutra», sobre la cual no hay ni dilatación, ni compresión. Esta superficie separa la región de compresión de la región de dilatación.

Comencemos con el estudio de la flexión en una limitada porción de la barra, donde aquélla se puede considerar pequeña; aquí entendemos por tal una flexión en la que no sólo es pequeño el tensor de deformaciones, sino también el valor absoluto de los desplazamientos de los puntos de la barra. Elijamos un sistema de

coordenadas con origen en un punto de la superficie « neutra » en la porción considerada de la barra. El eje  $z$  se toma paralelo al eje de la barra (sin deformar); la flexión se produce en el plano  $z, x$  (\*).

Como en el caso de la flexión de placas y de la torsión de barras, también en la flexión de barras delgadas las fuerzas externas que actúan sobre la superficie lateral de la barra son pequeñas comparadas con las tensiones que surgen en su interior, y para determinar las condiciones de contorno sobre esta superficie se las puede considerar iguales a cero. De este modo sobre toda la superficie lateral de la barra tenemos  $\sigma_{ik} \cdot n_k = 0$ , o, como  $n_z = 0$ :

$$\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y = 0$$

y análogamente para  $i = y, z$ . Elijamos sobre el contorno de la sección transversal de la barra un punto tal que en él la normal  $n$  esté dirigida paralelamente al eje  $x$ . Otro punto igual se tiene en algún lugar situado en el lado opuesto del contorno. En ambos puntos es  $n_y = 0$ , y de las igualdades escritas más arriba se deduce  $\sigma_{xx} = 0$ . Pero como la barra se ha supuesto delgada, entonces, si  $\sigma_{xx}$  se anula en uno y otro lado de su sección, también será pequeña en toda la sección, de modo que se puede poner  $\sigma_{xx} = 0$  en toda la barra. De la misma manera se comprueba que todas las componentes del tensor de tensiones deben ser iguales a cero, excluyendo sólo la componente  $\sigma_{zz}$ . En otras palabras, en la flexión de una barra delgada sólo es grande la componente dilatadora (o compresora) del tensor de tensiones internas. Una deformación en la cual es distinta de cero sólo la componente  $\sigma_{zz}$  del tensor de tensiones no es sino una dilatación o compresión simple (§ 5). Así, en cada elemento de volumen de la barra combada hay una dilatación (o compresión) simple. La magnitud de esta dilatación es, desde luego, distinta en diferentes punto de cada una de las secciones transversales, lo que, precisamente, da como resultado la flexión de toda la barra.

Es fácil determinar el valor de dilatación relativa en cada punto de la barra. Consideremos un elemento cualquiera de longitud  $dz$ , próximo al origen de coordenadas y paralelo al eje de la barra. Al encorvarse ésta, la longitud  $dz$  varía, haciéndose igual a  $dz'$ . Sólo se conservan invariables los elementos de longitud que pertenecen a la superficie neutra. Sea  $R$  el radio de curvatura de la superficie neutra cerca del origen de coordenadas. Las longitudes  $dz$  y  $dz'$  pueden considerarse elementos de arco de circunferencias de radios  $R$  y  $R+x$  respectivamente, donde  $x$  es el valor de la coordenada  $x$  en el punto en el que se elige el elemento  $dz'$ . Por esta razón:

$$dz' = \frac{R+x}{R} dz = \left(1 + \frac{x}{R}\right) dz.$$

(\*) Cuando la flexión es pequeña, se puede considerar que tiene lugar en un plano. Esto se sigue de un conocido resultado de la geometría diferencial que expresa que la separación del plano de una curva débilmente encorvada (la llamada *torsión de la curva*) es una cantidad pequeña, de orden superior comparada con la curvatura.

Por consiguiente, la dilatación relativa vale

$$\frac{dz' - dz}{dz} = \frac{x}{R}.$$

Por otra parte, la dilatación relativa del elemento de longitud  $dz$  es igual a la componente  $u_{zz}$  del tensor de deformaciones. Por lo tanto:

$$u_{zz} = \frac{x}{R}. \quad (17.1)$$

Podemos escribir ahora  $\sigma_{zz}$ , aprovechando directamente la relación  $\sigma_{zz} = Eu_{zz}$ , válida para una dilatación simple. De este modo:

$$\sigma_{zz} = \frac{x}{R} E. \quad (17.2)$$

Hasta aquí no se ha determinado aún la posición de la superficie «neutra» en la barra combada. Para determinarla se puede partir de la condición que expresa que la deformación aquí considerada debe ser una flexión pura, sin ninguna dilatación o compresión general de la barra. Para esto, la fuerza total de las tensiones internas que actúa sobre una sección transversal de la barra debe ser igual a cero, es decir, se debe anular la integral

$$\int \sigma_{zz} df,$$

extendida a esta superficie. Junto con la expresión (17.2) para  $\sigma_{zz}$ , esto lleva a la condición:

$$\int x df = 0. \quad (17.3)$$

Por otra parte, se puede introducir el concepto de centro de masas de la sección de la barra como centro de masas de un disco homogéneo plano de igual forma. Las coordenadas de este centro se definen, como es sabido, por las integrales:

$$\frac{\int x df}{\int df}, \quad \frac{\int y df}{\int df}.$$

Así, la condición (17.3) indica que en un sistema de coordenadas con origen en la superficie neutra, la coordenada  $x$  del centro de masas de la sección de la barra es igual a cero. En otras palabras, la superficie neutra pasa por los centros de masas de las secciones transversales de la barra.

Además de  $u_{zz}$ , son distintas de cero otras dos componentes del tensor de deformaciones, puesto que en una dilatación simple tenemos  $u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz}$ . Conociendo el tensor de deformaciones, es fácil hallar también los desplazamientos de los puntos. Se tiene:

$$u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{x}{R}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\sigma x}{R},$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0.$$

La integración de estas relaciones lleva a las siguientes expresiones para las componentes del desplazamiento:

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{1}{2R}\{z^2 + \sigma(x^2 - y^2)\}, \\ u_y &= -\sigma xy/R, \quad u_z = xz/R. \end{aligned} \tag{17.4}$$

Las constantes de integración se han tomado iguales a cero; esto significa que fijamos en el espacio la posición del origen de coordenadas.

Las fórmulas (17.4) prueban que los puntos de la sección transversal  $z = \text{const} \equiv z_0$ , después de la flexión están sobre la superficie

$$z = z_0 + u_z = z_0 \left( 1 + \frac{x}{R} \right).$$

Vemos, pues, que en la aproximación considerada las secciones se conservan planas, girando sólo cierto ángulo respecto de su posición inicial. Sin embargo, la forma de la sección varía; así, en la flexión de una barra de sección rectangular (de lados  $a$

y  $b$ ), los bordes laterales de la sección,  $y = \pm b/2$ , después de la flexión ocupan las posiciones:

$$y = \pm \frac{b}{2} + u_y = \pm \frac{b}{2} \left( 1 - \frac{\sigma x}{R} \right),$$

es decir, dejan de ser paralelos, pero conservándose rectos. Los bordes superior e inferior,  $x = \pm a/2$ , se encorvan en forma de paráboles:

$$x = \pm \frac{a}{2} + u_x = \pm \frac{a}{2} - \frac{1}{2R} \left[ z_0^2 + \sigma \left( \frac{a^2}{4} - y^2 \right) \right]$$

(figura 14).

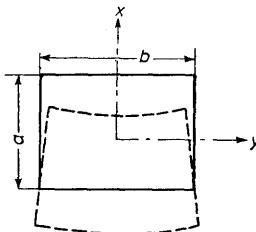


FIG. 14

La energía libre de la unidad de volumen de la barra es:

$$\frac{\sigma_{ik} u_{ik}}{2} = \frac{\sigma_{zz} u_{zz}}{2} = \frac{Ex^2}{2R^2}.$$

Integrando sobre toda la sección transversal de la barra, tenemos:

$$\frac{E}{2R^2} \int x^2 df. \quad (17.5)$$

Esta es la energía libre por unidad de longitud de la barra combada. El radio de curvatura  $R$  se ha definido como igual al radio de curvatura de la superficie «neutra». Pero debido a que la barra es delgada, lo podemos considerar aquí, con la misma aproximación, simplemente como radio de curvatura de la barra misma, considerando ésta como línea sin grosor (esta línea se la llama a menudo *línea elástica*).

En la expresión (17.5) es conveniente introducir el momento de inercia de la

sección transversal de la barra. El momento de inercia de esta sección respecto del eje  $y$ , contenido en su plano, se define por la integral:

$$I_y = \int x^2 df, \quad (17.6)$$

es decir, análogamente a la definición ordinaria de momento de inercia, con la única diferencia que en lugar del elemento de masa aparece simplemente el elemento de superficie  $df$ . La energía libre por unidad de longitud de la barra se escribe entonces en la forma:

$$\frac{E}{2R^2} I_y. \quad (17.7)$$

Determinemos también el momento de las tensiones internas que actúan en una sección dada de la barra (este momento se llama *momento flexor*). Al elemento de superficie  $df$  de la sección está aplicada una fuerza  $\sigma_{zz} df = (x/R) E df$ , dirigida según el eje  $z$ . Su momento respecto del eje  $y$  es:  $x\sigma_{zz} df$ . En consecuencia, el momento total respecto a este eje es:

$$M_y = \frac{E}{R} \int x^2 df = \frac{EI_y}{R}. \quad (17.8)$$

De este modo, la curvatura  $1/R$  de la línea elástica es proporcional al momento flexor que actúa sobre la sección dada.

La cantidad  $I_y$  depende de cómo esté dirigido el eje  $y$  en el plano de la sección. Es conveniente, como se hace en mecánica, expresar  $I_y$  mediante dos momentos principales de inercia. Si  $\theta$  es el ángulo entre el eje  $y$  y uno de los ejes principales de inercia de la sección de la barra, entonces, como es sabido,

$$I_y = I_1 \cos^2 \theta + I_2 \sin^2 \theta, \quad (17.9)$$

donde  $I_1$ ,  $I_2$  son los momentos principales de inercia. Los planos que pasan por el eje  $z$  y los ejes principales de inercia de la sección se llaman *planos principales de flexión*.

Si, por ejemplo, la sección de la barra es rectangular (de lados  $a$  y  $b$ ), su centro de masas se halla en el centro del rectángulo y los ejes principales de inercia son paralelos a sus lados. Los momentos principales de inercia son:

$$I_1 = \frac{a^3 b}{12}, \quad I_2 = \frac{a b^3}{12}. \quad (17.10)$$

Para una sección circular (de radio  $R$ ) el centro de masas coincide con el centro del círculo y la dirección de los ejes principales de inercia es arbitraria. El momento de inercia respecto de cualquier eje contenido en el plano de la sección y que pase por su centro es:

$$I = \frac{\pi R^4}{4}. \quad (17.11)$$

### § 18. La energía de una barra deformada

En el párrafo anterior consideramos sólo una pequeña porción de la barra com-bada. Pasando ahora al estudio de la deformación en toda la barra, es necesario comenzar con la elección de un método conveniente para describir tal deformación. Es esencial que en una fuerte flexión (\*) de la barra aparece al mismo tiempo, generalmente, también una torsión, de modo que la deformación resultante es la combinación de una flexión pura y una torsión.

Para describir la deformación es conveniente proceder de la siguiente manera. Dividamos toda la barra en una serie de elementos infinitamente pequeños, cada uno de los cuales está limitado por dos secciones transversales infinitamente próximas. En cada elemento introduciremos un sistema de coordenadas propio  $\xi, \eta, \zeta$ ; elegimos la dirección de los ejes de modo que en la barra no deformada todos estos sistemas sean paralelos entre sí, y todos los ejes  $\zeta$  estén dirigidos paralelamente al eje de la barra. Al encorvarse la barra, en cada elemento el sistema de coordenadas gira y en general, lo hace en forma diferente en los distintos elementos. Entonces cada dos sistemas infinitamente próximos giran, uno respecto del otro, cierto ángulo infinitamente pequeño.

Sea  $d\varphi$  el vector del ángulo de la rotación relativa de dos sistemas separados por una distancia  $dl$  a lo largo de la barra (como se sabe, un ángulo de rotación infinitamente pequeño se puede considerar como un vector; sus componentes son los ángulos de rotación alrededor de cada uno de los tres ejes de coordenadas).

Para describir la deformación, introduciremos el vector:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dl}, \quad (18.1)$$

que define la « velocidad » de rotación de los ejes de coordenadas a lo largo de la barra. Si la deformación es una torsión pura, la rotación de los sucesivos sistemas de coordenadas se produce sólo alrededor del eje de la barra, es decir, alrededor de los ejes  $\zeta$ . En tal caso, por consiguiente, el vector  $\Omega$  está dirigido según el eje de la barra y no es sino el ángulo de torsión  $\tau$  que usamos en el § 16. En correspondencia con esto, también en el caso general de una deformación arbitraria la componente  $\Omega_\zeta$  del vector  $\Omega$  se puede denominar ángulo de torsión. En una flexión pura de la barra en un plano, el vector  $\Omega$  no tiene componente  $\Omega_\zeta$ , esto es, en cada punto está enteramente en el plano  $\xi, \eta$ . Si se elige al plano en que ocurre la flexión como plano  $\xi, \zeta$ , en cada punto la rotación tiene lugar entonces alrededor del eje  $\eta$ , es decir,  $\Omega$  es paralelo al eje  $\eta$ .

Introduzcamos el vector unitario  $t$ , dirigido según la tangente a la barra, con-

---

(\*) Recordemos que entendemos aquí por fuerte una deformación en la cual el vector  $u$  no es pequeño pero el tensor de deformaciones, como antes, si lo es.

siderada aquí simplemente como «línea elástica». La derivada  $\frac{dt}{dl}$  se llama, como es sabido, *vector de curvatura de la línea*; su módulo es igual a  $\frac{1}{R}$ , donde  $R$  es el radio de curvatura (\*), y su dirección se llama *dirección de la normal principal* a la línea. Como se sabe, la variación de un vector en una rotación infinitamente pequeña es igual al producto vectorial del vector del ángulo de rotación por el vector considerado. Por esta razón, la diferencia de los vectores  $t$  en dos puntos infinitamente próximos de la línea elástica se puede escribir así:

$$dt = d\varphi \times t,$$

o, dividiendo por  $dl$ :

$$\frac{dt}{dl} = \Omega \times t. \quad (18.2)$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad vectorialmente por  $t$ , obtenemos:

$$\Omega = t \times \frac{dt}{dl} + t(t \cdot \Omega). \quad (18.3)$$

La dirección del vector tangente en cada punto coincide con la dirección del eje  $\zeta$  en ese mismo punto. Por eso  $t \cdot \Omega = \Omega_\zeta$ . Introduciendo el vector unitario  $n$  de la normal principal (de modo que  $\frac{dt}{dl} = n \frac{1}{R}$ ), podemos, por lo tanto, escribir:

$$\Omega = \frac{1}{R} t \times n + t \Omega_\zeta. \quad (18.4)$$

El primer término del segundo miembro es un vector con dos componentes  $\Omega_\zeta, \Omega_\eta$ . El vector unitario  $t \times n$  se llama, como es sabido, *vector unitario de la binormal*. De esta manera, las componentes  $\Omega_\zeta, \Omega_\eta$  forman un vector, dirigido según la binormal a la barra y de módulo igual a su curvatura  $\frac{1}{R}$ .

---

(\*) Recordemos que cada curva del espacio se caracteriza en cada punto por su curvatura y su torsión. Esta torsión (que no será utilizada por nosotros) no debe confundirse con la que aquí llamamos *deformación de torsión*, que es un retorcimiento de la barra alrededor de su eje.

Una vez introducido de este modo el vector  $\Omega$ , que caracteriza a la deformación, y vistas sus propiedades, podemos deducir una expresión para la energía libre elástica de la barra combada. La energía elástica (por unidad de longitud) es una función cuadrática de las componentes del vector  $\Omega$ . Es fácil ver que en esta forma cuadrática deben faltar los términos proporcionales a  $\Omega_\xi \Omega_\zeta$  o a  $\Omega_\eta \Omega_\zeta$ . En efecto, como la barra es homogénea en toda su longitud, todas las cantidades, en particular también la energía, deben conservarse al cambiar el sentido positivo del eje  $\zeta$ , esto es, al sustituir  $\zeta$  por  $-\zeta$ ; pero los productos indicados cambiarían su signo con tal sustitución.

En lo que concierne al término con el cuadrado  $\Omega_\xi^2$ , es preciso recordar que cuando  $\Omega_\xi = \Omega_\eta = 0$  tenemos una torsión pura, y entonces la expresión para la energía debe coincidir con la expresión obtenida en el § 16. De esta manera, el término correspondiente en la energía libre tiene la forma:

$$\frac{C\Omega_\xi^2}{2}.$$

Por último, los términos cuadráticos en  $\Omega_\xi$ ,  $\Omega_\eta$  se pueden escribir partiendo de la expresión (17.7) para la energía de una pequeña porción de barra, débilmente encorvada. Supongamos que la barra está sometida a una flexión poco intensa. El plano de ésta se elige como plano  $\xi$ ,  $\zeta$ , de modo que la componente  $\Omega_\xi$  se anula; la torsión también se anula en una flexión débil. La expresión para la energía debe coincidir en este caso con (17.7):

$$\frac{E}{2R^2} I_\eta.$$

Pero vimos que  $\frac{1}{R^2}$  es justamente el cuadrado del vector plano  $(\Omega_\xi, \Omega_\eta)$ . Por esta razón, la energía deberá tener la forma:

$$\frac{E}{2} I_\eta \Omega_\eta^2.$$

Al elegir arbitrariamente los ejes  $\xi$ ,  $\eta$ , esta expresión se escribe, como se sabe por mecánica, en la forma:

$$\frac{E}{2} (I_{\eta\eta} \Omega_\eta^2 + 2I_{\eta\xi} \Omega_\eta \Omega_\xi + I_{\xi\xi} \Omega_\xi^2),$$

donde  $I_{\eta\eta}$ ,  $I_{\eta\xi}$ ,  $I_{\xi\xi}$  son los componentes del tensor de inercia de la sección de la barra. Es conveniente elegir los ejes  $\xi$ ,  $\eta$  de modo que coincidan con los ejes principales de inercia de la sección. Entonces tendremos simplemente:

$$\frac{E}{2} (I_1 \Omega_\xi^2 + I_2 \Omega_\eta^2),$$

donde  $I_1$ ,  $I_2$  son los momentos principales de inercia de la sección. Como los coeficientes de  $\Omega_\xi^2$  y  $\Omega_\eta^2$  son constantes, las expresiones obtenidas deben ser válidas también para una flexión fuerte.

Por último, integrando sobre toda la longitud de la barra, obtenemos la siguiente expresión para la energía libre elástica de una barra combada:

$$F_{barra} = \int \left\{ \frac{I_1 E}{2} \Omega_\xi^2 + \frac{I_2 E}{2} \Omega_\eta^2 + \frac{C}{2} \Omega_\zeta^2 \right\} dl. \quad (18.5)$$

Expresemos ahora en función de  $\Omega$  el momento de las fuerzas que actúan sobre una sección de la barra. Esto es fácil de hacer, utilizando de nuevo los resultados obtenidos anteriormente para una torsión pura y para una flexión pura pequeña. En una torsión pura el momento respecto del eje de la barra es igual a  $C\tau$ . Por esta razón concluimos que en el caso general el momento  $M_\zeta$  respecto al eje  $\zeta$  debe ser  $M_\zeta = C \Omega_\zeta$ . Además, en una flexión pequeña en el plano  $\xi$ ,  $\zeta$  el momento respecto del eje  $\eta$  es  $\frac{EI_2}{R}$ . Pero en una tal flexión el vector  $\Omega$  está dirigido según el eje  $\eta$  de modo que  $\frac{1}{R}$  es simplemente su módulo, y  $\frac{EI_2}{R} = EI_2 \Omega$ . De aquí se sigue que en el caso general debe ser  $M_\xi = EI_1 \Omega_\xi$ ,  $M_\eta = EI_2 \Omega_\eta$  (los ejes  $\xi$ ,  $\eta$  se eligen según los ejes principales de inercia de la sección). Así, pues, las componentes del vector momento  $\mathbf{M}$  son:

$$M_\xi = EI_1 \Omega_\xi, \quad M_\eta = EI_2 \Omega_\eta, \quad M_\zeta = C \Omega_\zeta. \quad (18.6)$$

La energía elástica (18.5), expresada en función del momento de las fuerzas, tiene la forma:

$$F_{barra} = \int \left\{ \frac{M_\xi^2}{2I_1 E} + \frac{M_\eta^2}{2I_2 E} + \frac{M_\zeta^2}{2C} \right\} dl. \quad (18.7)$$

Un caso importante de flexión de barras es el de una ligera flexión en la cual, en toda

la extensión de la barra, su desviación de la posición inicial es pequeña comparada con su longitud. En este caso, se puede considerar que no hay torsión de modo que cabe hacer  $\Omega_z = 0$ , y por (18.4) tenemos, simplemente:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{R} \mathbf{t} \times \mathbf{n} \equiv \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{t}}{dl}. \quad (18.8)$$

Introduzcamos un sistema de coordenadas  $x, y, z$ , fijo en el espacio con el eje  $z$  dirigido según el eje de la barra no deformada (en vez de las coordenadas  $\xi, \eta, \zeta$  vinculadas a cada punto de la barra). Designaremos mediante  $X, Y$  las coordenadas  $x, y$  de los puntos de la línea elástica de la barra;  $X$  e  $Y$  determinan el desplazamiento de los puntos de dicha línea desde su posición inicial antes de la flexión.

Dado que la flexión es pequeña, el vector tangente  $\mathbf{t}$  es casi paralelo al eje  $z$  de modo que, aproximadamente, podemos considerarlo dirigido según este eje. El vector unitario de la tangente es igual, como es sabido, a la derivada

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{dl}$$

del radio-vector  $\mathbf{r}$  de los puntos de la curva respecto de su longitud. Por lo tanto, tenemos:

$$\frac{dt}{dl} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} \approx \frac{d^2\mathbf{r}}{dz^2}$$

(las derivadas respecto de la longitud se pueden reemplazar aproximadamente por derivadas respecto de  $z$ ). En particular, las componentes  $x$  e  $y$  de este vector son iguales a  $d^2X/dz^2$  y  $d^2Y/dz^2$ , respectivamente. Las componentes  $\Omega_\xi, \Omega_\eta$  con la misma precisión, son iguales ahora a las componentes  $\Omega_x, \Omega_y$ , y de (18.8) se deduce:

$$\Omega_\xi = -\frac{d^2Y}{dz^2}, \quad \Omega_\eta = \frac{d^2X}{dz^2}. \quad (18.9)$$

Substituyendo estas expresiones en (18.5), obtenemos la energía elástica de una barra ligeramente encorvada en la forma:

$$F_{barra} = \frac{E}{2} \int \left\{ I_1 \left( \frac{d^2Y}{dz^2} \right)^2 + I_2 \left( \frac{d^2X}{dz^2} \right)^2 \right\} dz. \quad (18.10)$$

Recordemos que  $I_1, I_2$  son los momentos de inercia relativos a los ejes  $x, y$ , respectivamente, que son los ejes principales de inercia.

En particular, en una barra de sección circular  $I_1 = I_2 \equiv I$ , y en el integrando se tiene simplemente una suma de cuadrados de segundas derivadas, que en la aproximación considerada coincide con el cuadrado de la curvatura de la barra:

$$\frac{d^2X}{dz^2} + \frac{d^2Y}{dz^2} \approx \frac{1}{R^2}.$$

En vista de esto, la fórmula (18.10) se puede generalizar de modo natural al caso de una ligera flexión de una barra (de sección circular) que en su estado no deformado tiene una forma no rectilínea cualquiera. Para ello es necesario escribir la energía de flexión en la forma:

$$F_{barra} = \frac{EI}{2} \int \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)^2 dz, \quad (18.11)$$

donde  $R_0$  es el radio de curvatura primitivo de la barra en cada uno de sus puntos. Esta expresión, como corresponde, tiene un mínimo en el estado no deformado ( $R = R_0$ ), y cuando  $R_0 \rightarrow \infty$  se transforma en la fórmula (18.10).

### § 19. Las ecuaciones de equilibrio de las barras

Podemos ahora pasar a deducir las ecuaciones de equilibrio de las barras comidas. Consideremos de nuevo uno cualquiera de los elementos infinitamente pequeños de la barra limitado por dos secciones infinitamente próximas, y calculemos la fuerza total que sobre él actúa. Designaremos mediante  $\mathbf{F}$  (\*) la fuerza de tensión interna aplicada sobre la sección de la barra. Las componentes de este vector son iguales a las integrales de  $\sigma_{i\xi}$  extendidas al área de la sección:

$$\mathbf{F}_t = \int \sigma_{i\xi} df. \quad (19.1)$$

Si se consideran las dos secciones infinitamente próximas como bases del elemento de barra, sobre la base superior actúa entonces la fuerza  $\mathbf{F} + d\mathbf{F}$ , y sobre la inferior la fuerza —  $\mathbf{F}$ ; su suma es la diferencial  $d\mathbf{F}$ . Sea  $\mathbf{K}$  la fuerza externa por unidad de longitud que actúa sobre la barra. Entonces en un elemento de longitud  $dl$  actúa una fuerza externa  $\mathbf{K} dl$ . La resultante de todas las fuerzas que actúan sobre este

(\*) La designación de esta fuerza por medio de  $\mathbf{F}$  no puede llevar a confundirla con la energía libre, que no usaremos a continuación, en los párrafos 19-21.

elemento es, por consiguiente,  $d\mathbf{F} + \mathbf{K} dl$ . En equilibrio esta fuerza debe anularse. De este modo obtenemos:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dl} = -\mathbf{K}. \quad (19.2)$$

La segunda ecuación se obtiene a partir de la condición de anulación del momento de las fuerzas aplicadas al elemento dado. Sea  $\mathbf{M}$  el momento de las tensiones internas que actúan sobre la sección de la barra. Este momento se toma respecto de un punto (origen de coordenadas) que pertenece al mismo plano de esta sección; sus componentes se determinan por las fórmulas (18.6). Calculemos el momento total aplicado a un elemento dado de la barra respecto de un punto (que llamaremos  $O$ ) perteneciente al plano de su base superior. Las tensiones internas en esta base dan entonces un momento  $\mathbf{M} + d\mathbf{M}$ . El momento (respecto de  $O$ ) de las fuerzas de tensión interna de la base inferior del elemento es la suma del momento  $-\mathbf{M}$  de estas fuerzas, respecto al origen de coordenadas del plano de la base inferior (punto  $O'$ ), y del momento (respecto de  $O$ ) de la fuerza total  $-\mathbf{F}$  que actúa sobre esta base. Este segundo momento es igual a  $(-dl) \times (-\mathbf{F})$ , donde  $dl$  es el vector del elemento de longitud de la barra desde  $O'$  hasta  $O$ . El momento de las fuerzas externas  $\mathbf{K}$  es una cantidad pequeña de orden superior. De este modo, el momento total que actúa sobre el elemento de la barra es  $d\mathbf{M} + [dl \times \mathbf{F}]$ . En equilibrio debe ser igual a cero:

$$d\mathbf{M} + [dl \times \mathbf{F}] = 0.$$

Dividiendo esta igualdad por  $dl$  y recordando que  $dl/dl = \mathbf{t}$  es el vector unitario de la tangente a la barra (considerada como línea), obtenemos la ecuación:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dl} = \mathbf{F} \times \mathbf{t}. \quad (19.3)$$

Las ecuaciones (19.2) y (19.3) forman un sistema completo de ecuaciones de equilibrio para una barra encorvada de manera arbitraria.

Si las fuerzas externas que actúan sobre la barra están concentradas, es decir, están aplicadas a puntos aislados de la misma, en las regiones de la barra que median entre puntos de aplicación de fuerzas las ecuaciones de equilibrio se simplifican considerablemente. De (19.2) resulta, cuando  $\mathbf{K} = 0$ ,

$$\mathbf{F} = \text{const} \quad (19.4)$$

esto es, las fuerzas de tensión interna son constantes en cada una de aquellas porciones de la barra. Los valores de estas constantes se determinan de modo que la diferencia  $F_2 - F_1$  de los valores de la fuerza en los puntos 1 y 2 sea

$$F_2 - F_1 = - \Sigma K, \quad (19.5)$$

donde la suma se extiende a todas las fuerzas aplicadas en la porción de barra comprendida entre los puntos 1 y 2. Hay que hacer notar que, en la diferencia  $F_2 - F_1$ , el punto 2 está más alejado del punto a partir del cual se mide la longitud  $l$  de la barra, que el punto 1; esta observación es esencial para determinar los signos en la igualdad (19.5). En particular, si sobre la barra actúa sólo una fuerza concentrada  $f$ , aplicada a su extremo libre, entonces  $F$  es constante a lo largo de toda la barra e igual a  $f$ .

La segunda ecuación de equilibrio (19.3) también se simplifica. Haciendo en ella  $t = \frac{dl}{dl} = \frac{dr}{dl}$  (donde  $r$  es el radio-vector desde un punto dado a un punto arbitrario de la barra) e integrando, obtenemos, dado que  $F$  es constante:

$$\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{r} + \text{const.} \quad (19.6)$$

Si tampoco existen fuerzas concentradas, pero la flexión de la barra se produce por la acción de momentos concentrados aplicados sobre ella (es decir, por pares de fuerzas concentrados), entonces  $F = \text{const}$  a lo largo de toda la barra, y  $\mathbf{M}$  experimenta variaciones bruscas en los puntos de aplicación de los pares, iguales a sus momentos.

Pasemos ahora a la cuestión de las condiciones de contorno en los extremos de la barra combada. Aquí se pueden presentar distintos casos.

Se dice que el extremo de la barra está empotrado (fig. 4, a; pág. 67) cuando no puede experimentar ningún desplazamiento, ni longitudinal, ni transversal y, sobre todo, no puede variar su dirección (es decir, la dirección de la tangente a la barra en su extremo). En este caso las condiciones de contorno consisten en que se dan las coordenadas del extremo de la barra y el vector unitario de la tangente  $t$  en él. La fuerza y el momento de la reacción, que el soporte ejerce sobre la barra en el punto de fijación, se obtienen como resultado de la resolución de las ecuaciones.

El caso opuesto es el de un extremo libre. En este caso las coordenadas del extremo y su dirección son arbitrarias. Las condiciones de contorno consisten en que la fuerza  $F$  y el momento  $M$  deben anularse en el extremo de la barra (\*).

Si el extremo de la barra está articulado, no puede experimentar ningún desplazamiento, pero su dirección no está dada. El momento que actúa sobre tal extremo, que puede girar libremente, debe anularse.

(\*) Si en el extremo libre está aplicada una fuerza concentrada  $f$ , la condición de contorno no es  $F = 0$ , sino  $F = f$ .

Por último, si la barra descansa en algún punto de apoyo (fig. 4, b), puede deslizarse sobre este punto, pero no puede desplazarse transversalmente. En este caso no están fijadas ni la dirección  $\mathbf{t}$  ni la posición sobre la barra del punto en el que se apoya la barra. El momento en el punto de apoyo debe ser igual a cero, de conformidad con que la barra puede girar libremente y la fuerza  $\mathbf{F}$  en este punto debe ser perpendicular a la barra; una componente longitudinal de la fuerza provocaría su deslizamiento ulterior en el punto de apoyo.

En forma análoga es fácil establecer las condiciones de contorno también para otros modos de fijar la barra. No nos detendremos aquí en esto, limitándonos a los ejemplos típicos citados.

Ya en el comienzo del párrafo anterior se señaló que una flexión intensa de una barra de sección arbitraria va acompañada, generalmente, de su torsión, aún si a la barra no se aplican momentos de torsión externos. La flexión de una barra en sus planos principales es una excepción. En ella la torsión no se produce. En una barra de sección circular la flexión no va nunca acompañada de torsión (claro está, si no hay momentos de torsión externos). Que así es puede verse de la siguiente manera. La torsión se define como la componente  $\Omega_\zeta = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{t}$  del vector  $\boldsymbol{\Omega}$ . Calculemos su derivada respecto a la longitud de la barra. Para ello escribimos, recordando

que  $\Omega_\zeta = \frac{\mathbf{M}_\zeta}{C}$ ;

$$\frac{d}{dl}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{t}) = C \frac{d\Omega_\zeta}{dl} = \frac{d\mathbf{M}}{dl} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{M} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{dl}.$$

Al substituir (19.3) el primer término se anula, de modo que

$$C \frac{d\Omega_\zeta}{dl} = \mathbf{M} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{dl}.$$

En una barra de sección circular  $I_1 = I_2 \equiv I$ ; de acuerdo con (18.3) y (18.6) se puede, por esa razón, escribir  $\mathbf{M}$  en la forma:

$$\mathbf{M} = EI \left[ \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{t}}{dl} \right] + \mathbf{t} C \Omega_\zeta. \quad (19.7)$$

Al multiplicar por  $\frac{dt}{dl}$ , ambos términos dan cero, así que:

$$\frac{d\Omega_\zeta}{dl} = 0,$$

de donde

$$\Omega_\zeta = \text{const.} \quad (19.8)$$

es decir, el ángulo de torsión es constante a lo largo de la barra. Si en sus extremos no se aplican momentos de torsión,  $\Omega_\zeta$  es en ellos igual a cero y, por lo tanto, no existe torsión en toda la longitud de la barra.

Para una barra de sección circular se puede, de este modo, escribir en una flexión pura

$$M = EI t \times dt/dl = EI \frac{dr}{dl} \times \frac{d^2r}{dl^2}. \quad (19.9)$$

Substituyendo esta expresión en (19.3), la ecuación de la flexión pura de una barra de sección circular se reduce a la forma

$$EI \frac{dr}{dl} \times \frac{d^3r}{dl^3} = F \times \frac{dr}{dl}. \quad (19.10)$$

#### PROBLEMAS

1. Reducir a cuadraturas el problema de la determinación de la forma de una barra de sección circular (varilla elástica), fuertemente combada en un plano por fuerzas concentradas.

*Solución.* Consideremos una porción de la barra comprendida entre puntos de aplicación de las fuerzas; en tal región es  $F = \text{const}$ . Elijamos el plano de la flexión como plano  $x, y$ , con el eje  $y$  paralelo a la fuerza  $F$  e introduzcamos el ángulo  $\theta$  entre la tangente a la línea de la barra y el eje  $y$ . Entonces  $\frac{dx}{dl} = \sin \theta$ ,  $\frac{dy}{dl} = \cos \theta$ , donde  $x, y$  son las coordenadas de los puntos de la barra. Desarrollando los productos vectoriales en (19.10), obtenemos una ecuación para  $\theta$ , considerado como función de la longitud de arco  $l$ :  $IE \frac{d^2\theta}{dl^2} - F \sin \theta = 0$ . La primera integración da  $\frac{IE}{2} \left( \frac{d\theta}{dl} \right)^2 + F \cos \theta = c_1$  y de aquí:

$$l = \pm \sqrt{\frac{IE}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{c_1 - F \cos \theta}} + c_2. \quad (1)$$

La función  $\theta(l)$  puede expresarse, a partir de aquí, mediante funciones elípticas. Para las coordenadas  $x = \int \sin \theta \, dl$ ,  $y = \int \cos \theta \, dl$  obtenemos:

$$x = \pm \frac{1}{F} \sqrt{2IE} \sqrt{c_1 - F \cos \theta} + \text{const.}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{IE}{2}} \int \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sqrt{c_1 - F \cos \theta}} + \text{const'}. \quad (2)$$

El momento  $M$  (19.9) está dirigido según el eje  $z$  y su módulo vale  $M = IE \frac{d\theta}{dl}$ .

2. Hallar la forma de una barra fuertemente encorvada, uno de cuyos extremos está empotrado, y en el otro, que es libre, se aplica una fuerza  $f$ ; la dirección de  $f$  es perpendicular a la recta de la barra no deformada (fig. 15).

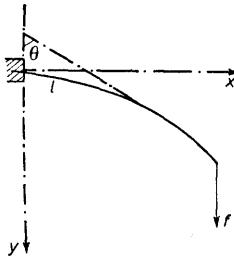


FIG. 15

*Solución.* En toda longitud de la barra es  $F = \text{const} = f$ . En el extremo empotrado ( $l = 0$ ) se tiene  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , y en el libre ( $l = L$ , donde  $L$  es la longitud de la barra),  $M = 0$ , esto es,  $\theta' = 0$ . Introduciendo la notación  $\theta_0 = \theta(L)$ , tenemos en (1)  $c_1 = f \cos \theta_0$ :

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}.$$

De aquí se deduce la ecuación que determina  $\theta_0$ :

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}$$

La forma de la barra se halla mediante las fórmulas:

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}} \left( \sqrt{1 - \cos \theta_0} - \sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta} \right), \quad y = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}.$$

3. Idem, si la fuerza  $f$ , aplicada en el extremo libre, está dirigida paralelamente a la línea de la barra no deformada.

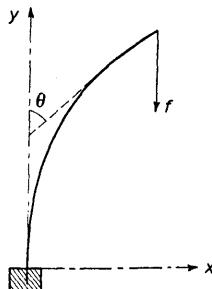


FIG. 16

*Solución.* Tenemos  $\mathbf{F} = -\mathbf{f}$  (los ejes de coordenadas se eligen en la forma indicada en la figura 16). Condiciones de contorno:  $\theta = 0$  en  $l = 0$ ,  $\theta' = 0$  en  $l = L$ . Tenemos:

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}},$$

donde  $\theta_0 = \theta(L)$  se determina por

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

Para  $x$  e  $y$  obtenemos:

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}} \left( \sqrt{1 - \cos \theta_0} - \sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta} \right),$$

$$y = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta} \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

En una flexión pequeña es  $\theta_0 \ll 1$  y se puede escribir:

$$L \approx \sqrt{\frac{IE}{f} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{IE}{f}},$$

esto es,  $\theta_0$  desaparece de esta relación. Esto indica, de conformidad con el resultado del problema 3 § 21, que la solución considerada existe sólo cuando  $f \geq \frac{\pi^2 IE}{4L^2}$ , es decir, después de la pérdida de estabilidad de la forma rectilínea.

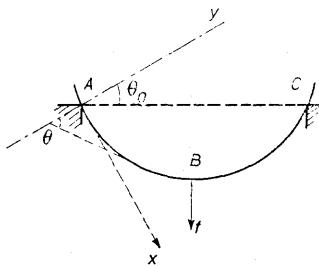


FIG. 17

4. Ídem, si ambos extremos de la barra están apoyados y en su punto medio se aplica una fuerza  $F$ ; la distancia entre los puntos de apoyo es  $L_0$ .

*Solución.* Elijamos los ejes de coordenadas en la forma indicada en la figura 17. La fuerza  $F$  es constante en cada una de las porciones  $AB$  y  $BC$ , y en cada una de ellas es perpendicular a la línea de la barra en los puntos de apoyo  $A$  y  $C$ , respectivamente. La diferencia entre los valores de  $F$  en  $AB$  y  $BC$  es igual a  $f$ , de donde se deduce que en  $AB$  es  $F \sin \theta_0 = -\frac{f}{2}$ , donde  $\theta_0$  es el ángulo entre el eje y la línea  $AC$ . En el punto  $A$  ( $l = 0$ ) tenemos las condiciones  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y  $M = 0$ , es decir,  $\theta' = 0$ , de modo que en  $AB$ :

$$I = \sqrt{\frac{IE}{f}} \sqrt{\sin \theta_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} \quad x = 2 \sqrt{\frac{IE \sin \theta_0}{f}} \sqrt{\cos \theta},$$

$$y = \sqrt{\frac{IE \sin \theta_0}{f}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \theta} d\theta.$$

El ángulo  $\theta_0$  se determina mediante la condición que expresa que la proyección del arco  $AB$  sobre la recta  $AC$  debe ser igual a  $\frac{L_0}{2}$ , de donde:

$$\frac{L_0}{2} = \sqrt{\frac{IE \operatorname{sen} \theta_0}{f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{\sqrt{\operatorname{sen} \theta}} d\theta.$$

Para determinado valor de  $\theta_0$  entre  $0$  y  $\frac{\pi}{2}$  la derivada  $\frac{df}{d\theta_0}$  (donde  $f$  se considera función de  $\theta_0$ ) se anula y pasa a ser positiva. A una ulterior disminución de  $\theta_0$ , esto es, a un incremento de la flexión, correspondería una reducción de  $f$ . Esto indica que la solución encontrada se hace inestable; la barra se desliza hacia abajo entre ambos soportes.

5. Reducir a cuadraturas el problema de una barra fuertemente combada en el espacio por la acción de fuerzas concentradas.

*Solución.* Consideremos una porción de la barra comprendida entre puntos de aplicación de las fuerzas, en la cual es  $\mathbf{F} = \text{const.}$  Integrando (19.10), obtenemos

$$EI \frac{d\mathbf{r}}{dl} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} = \mathbf{F} \times \mathbf{r} + c\mathbf{F}; \quad (1)$$

la constante de integración se ha escrito como un vector  $c\mathbf{F}$ , dirigido según  $\mathbf{F}$ , porque con una elección adecuada del origen de coordenadas, es decir, añadiendo a  $\mathbf{r}$  cierto vector constante, se puede eliminar un vector aditivo perpendicular a  $\mathbf{F}$ . Multiplicando (1) escalar y vectorialmente por  $\mathbf{r}'$  (el apóstrofo significa derivación respecto de  $l$ ) y recordando que  $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = 0$  (porque  $\mathbf{r}^2 = 1$ ), obtenemos  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{r}' + c\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = 0$ ,  $EI\mathbf{r}'' = [\mathbf{F} \times \mathbf{r}] \times \mathbf{r}' + c\mathbf{F} \times \mathbf{r}'$ . En componentes (el eje  $z$  se elige en la dirección de  $\mathbf{F}$ )  $(xy' - yx') + cz' = 0$ ,  $EIz'' = -F(xx' + yy')$ . Introduciendo en estas ecuaciones coordenadas cilíndricas  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ , obtenemos:

$$r^2\varphi' + cz' = 0, \quad EIz'' = -Frr'. \quad (2)$$

De la segunda ecuación se sigue:

$$z' = \frac{F}{2EI} (A - r^2) \quad (3)$$

(donde  $A$  es una constante). Combinando (2) y (3) con la identidad  $r'^2 + r^2\varphi'^2 + z^2 = 1$ , obtenemos:

$$dl = \sqrt{\frac{r dr}{r^2 - (r^2 + c^2)(A - r^2)^2 \frac{F^2}{4E^2 I^2}}},$$

y (2) y (3) dan entonces:

$$z = \frac{F}{2EI} \int \frac{(A - r^2)r dr}{\sqrt{r^2 - \frac{F^2}{4E^2 I^2}(r^2 + c^2)(A - r^2)^2}}$$

$$\varphi = -\frac{cF}{2EI} \int \frac{(A - r^2) dr}{r \sqrt{r^2 - \frac{F^2}{4E^2 I^2}(r^2 + c^2)(A - r^2)^2}}$$

con lo que se determina la forma de la barra combada.

6. Una barra de sección circular se somete a una torsión (ángulo de torsión  $\tau$ ) y se comba en forma de hélice. Determinar la fuerza y el momento que deben aplicarse al extremo de la barra para mantenerla en tal estado.

*Solución.* Sea  $R$  el radio del cilindro sobre cuya superficie está arrollada la hélice (elegimos como eje  $z$  el eje de este cilindro),  $y \alpha$  el ángulo entre la tangente a la curva y el plano perpendicular al eje  $z$ ; el paso de la hélice  $h$  está ligado con  $\alpha$  y  $R$  por la igualdad  $h = 2\pi R \operatorname{tg} \alpha$ . La ecuación de la hélice es  $x = R \cos \varphi$ ,  $y = R \sin \varphi$ ,  $z = \varphi R \operatorname{tg} \alpha$  ( $\varphi$  es el ángulo de rotación alrededor del eje  $z$ ); el elemento de arco  $dl = \frac{R}{\cos \alpha} d\varphi$ . Substituyendo estas expresiones en (19.7), se calculan las componentes del vector  $\mathbf{M}$  y, luego, con la fórmula (19.3), la fuerza  $F$  (constante a lo largo de toda la barra). Hallamos como resultado que la fuerza  $F$  está dirigida según el eje  $z$  y que su módulo vale  $F_z = F = Cr \frac{\operatorname{sen} \alpha}{R} - \frac{EI}{R^2} \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha$ . El momento  $\mathbf{M}$  tiene la componente según el eje  $z$ ,  $M_z = Cr \operatorname{sen} \alpha + \frac{EI}{R} \cos^3 \alpha$  y la componente  $M_q$ , dirigida en cada punto de la barra según la tangente a la circunferencia de la sección transversal del cilindro, es tal que  $M_q = FR$ .

7. Hallar la forma de un hilo flexible (cuya resistencia a la flexión se puede despreciar comparada con su resistencia a la tracción), suspendido por dos puntos en un campo gravitatorio.

*Solución.* Elijamos el plano en el que se encuentra el hilo como plano  $xy$ , con el eje  $y$  dirigido verticalmente hacia abajo. En la ecuación (19.3) se puede despreciar el término  $\frac{dM}{dl}$ , puesto que  $M$  es proporcional a  $EI$ . Luego,  $F \times t = 0$ , es decir,  $F$  está dirigida, en cada punto del hilo, según  $t$ , y se puede escribir  $F = Ft$ . La ecuación (19.2) da ahora

$$\frac{d}{dl} \left( F \frac{dx}{dl} \right) = 0, \quad \frac{d}{dl} \left( F \frac{dy}{dl} \right) = q,$$

( $q$  es el peso de la unidad de longitud del hilo), de donde  $F \frac{dx}{dl} = c$ ,  $F \frac{dy}{dl} = ql$ . De aquí se deduce  $F = \sqrt{(c^2 + q^2 l^2)}$ , de modo que  $\frac{dx}{dl} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + l^2}}$ ,  $\frac{dy}{dl} = \frac{l}{\sqrt{A^2 + l^2}}$  (donde  $A = \frac{c}{q}$ ). La integración da  $x = A \operatorname{arsen} \frac{l}{A}$ ,  $y = \sqrt{A^2 + l^2}$ , de donde  $y = A \cosh \frac{x}{A}$ , esto es, el hilo tiene la forma de una catenaria. El origen de coordenadas y la constante  $A$  se determinan por la condición de que la curva debe pasar por dos puntos dados y debe tener una longitud dada.

## § 20. Flexión pequeña de barras

Las ecuaciones de equilibrio se simplifican notablemente en el importante caso práctico de una flexión poco intensa de las barras. La flexión es pequeña si la dirección de la tangente  $t$  a la barra varía lentamente a lo largo de su longitud, esto es, si la derivada  $\frac{dt}{dl}$  es pequeña. En otras palabras, el radio de curvatura de la barra combada deberá ser, en cada punto, grande comparado con su longitud. Subrayaremos que de ningún modo se exige que la flexión sea pequeña comparada con el grueso de la barra, como hubo que hacer en la teoría aproximada de la flexión pequeña de placas desarrollada en los §§ 11-12 (\*).

Derivemos (19.3) respecto a la longitud:

$$\frac{d^2M}{dl^2} = \frac{dF}{dl} \times t + F \times \frac{dt}{dl}. \quad (20.1)$$

El segundo término contiene la pequeña cantidad  $\frac{dt}{dl}$ , por lo que generalmente

(\*) No expondremos la muy complicada teoría de la flexión de barras que en su estado natural, no deformado, tienen forma encorvada (limitándonos solamente a un ejemplo sencillo en los problemas 8 y 9 de este párrafo).

(excluyendo algunos casos particulares, de los cuales se trata más adelante) cabe despreciarlo. Substituyendo en el primer término  $\frac{dF}{dl} = -K$ , obtenemos la ecuación de equilibrio en la forma

$$\frac{d^2M}{dl^2} = t \times K. \quad (20.2)$$

Pasemos esta ecuación a componentes, para lo cual substituiremos en ella, de acuerdo con (18.6) y (18.9),

$$M_x = -EI_1 Y'', \quad M_y = EI_2 X'', \quad M_z = 0, \quad (20.3)$$

(el signo ' significa, en todas partes, derivación respecto de  $z$ ). El vector unitario  $t$  se puede considerar dirigido según el eje  $z$ . Entonces, de (20.2) se sigue

$$EI_2 X'''' - K_x = 0, \quad EI_1 Y'''' - K_y = 0. \quad (20.4)$$

Estas ecuaciones determinan la dependencia de las deflexiones  $X$  e  $Y$  respecto de  $z$ , es decir, la forma de una barra débilmente combada.

La fuerza  $F$  de tensión interna que actúa sobre una sección transversal de la barra, también se puede expresar mediante las derivadas de  $X$  e  $Y$ . Reemplazando (20.3) en (19.3), obtenemos:

$$F_x = -EI_2 X''', \quad F_y = -EI_1 Y'''. \quad (20.5)$$

Vemos así que las segundas derivadas determinan el momento de las fuerzas de tensión interna, y las terceras, estas mismas fuerzas. La fuerza (20.5) se llama *fuerza de corte*. Si la flexión es producida por fuerzas concentradas, la fuerza de corte es constante en cada una de las porciones de la barra que median entre puntos de aplicación de las fuerzas, y en cada uno de estos puntos presenta una discontinuidad, igual a la fuerza externa aplicada.

Las cantidades  $EI_2$  y  $EI_1$  se llaman *rigidez de la barra* a la flexión en los planos principales  $x, z$  e  $y, z$ , respectivamente (\*).

Si las fuerzas externas aplicadas a la barra actúan en un plano, también la flexión de la barra se producirá en un plano. Estos dos planos, sin embargo, en un caso general, no coinciden entre sí; es fácil hallar el ángulo entre ellos. Si  $\alpha$  es el ángulo entre el plano de acción de las fuerzas y el primer plano principal de flexión (plano  $x, z$ ), las ecuaciones de equilibrio toman la forma

$$X'''' = \frac{\cos \alpha}{I_2 E} K, \quad Y'''' = \frac{\sin \alpha}{I_1 E} K.$$

Ambas ecuaciones se distinguen sólo por el coeficiente de  $K$ . Por lo tanto,  $X$  e  $Y$  son proporcionales una a otra, y

$$Y = X \frac{I_2}{I_1} \operatorname{tg} \alpha.$$

El ángulo  $\theta$  entre el plano de la flexión y el plano  $x, z$  se define por medio de la igualdad

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{I_2}{I_1} \operatorname{tg} \alpha. \quad (20.6)$$

En una barra de sección circular  $I_1 = I_2$  y  $\alpha = \theta$ , es decir, la flexión tiene lugar en

(\*) Mediante una ecuación de la forma

$$DX'''' - K_x = 0 \quad (20.4a)$$

se describe también la flexión de una placa delgada en ciertos casos límites. Consideremos una placa rectangular (de lados  $a$  y  $b$  y grueso  $h$ ) fijada por sus lados  $a$  (dirección  $y$ ) y combada a lo largo de los lados  $b$  (eje  $z$ ) por una carga homogénea en la dirección del eje  $y$ . En el caso general de  $a$  y  $b$  arbitrarios, para determinar la flexión hay que utilizar la ecuación bidimensional (12.5) con condiciones de contorno apropiadas en los bordes fijos y libres de la placa. En el caso límite  $a \gg b$  la deformación se puede considerar uniforme a lo largo del eje  $y$ , y entonces la ecuación bidimensional de equilibrio se transforma en una ecuación de la forma de (20.4 a), y el papel de la rigidez a la flexión lo representa la cantidad

$$D = \frac{Eh^3a}{12(1-\sigma^2)}$$

La ecuación (20.4 a) es aplicable también en el caso límite  $a \ll b$ , en el que la placa se puede considerar como una barra de longitud  $b$  de sección rectangular estrecha (la sección tiene forma rectangular de lados  $a$  y  $h$ ); en este caso, sin embargo, la rigidez a la flexión se determina mediante otra expresión:

$$D = EI_2 = \frac{Eh^3a}{12}.$$

el plano de acción de las fuerzas. Lo mismo sucede también en una barra de sección arbitraria cuando  $\alpha = 0$ , esto es, cuando las fuerzas son paralelas al plano principal. Para el valor absoluto de la flexión

$$\zeta = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

vale de ecuación

$$EI\zeta''' = K, \quad I = \frac{I_1 I_2}{\sqrt{I_1^2 \cos^2 \alpha + I_2^2 \sin^2 \alpha}} \quad (20.7)$$

La fuerza de corte  $F$  está situada en el mismo plano que  $K$ , y su módulo es

$$F = -EI\zeta''. \quad (20.8)$$

La cantidad  $I$  desempeña el papel de valor « efectivo » del momento de inercia de la sección de la barra.

Escribamos en forma explícita las condiciones de contorno para las ecuaciones de equilibrio de una barra débilmente combada. Si el extremo de la barra está empotrado, en él deben ser  $X = Y = 0$  y, sobre todo, no puede cambiar su dirección, es decir, deben ser  $X' = Y' = 0$ . De este modo, en el extremo empotrado de la barra han de cumplirse las condiciones:

$$X = Y = 0, \quad X' = Y' = 0. \quad (20.9)$$

La fuerza y el momento de la reacción en los puntos de apoyo se determinan, a partir de la solución conocida, por las fórmulas (20.3) y (20.5).

En una flexión suficientemente pequeña, los casos de extremo articulado y apoyado son equivalentes en lo que respecta a las condiciones de contorno. Ello se debe a que en el segundo caso el desplazamiento longitudinal de la barra en el punto de apoyo es una cantidad de segundo orden, comparada con la deflexión transversal, y por eso debe considerarse igual a cero. Las condiciones de contorno, que expresan la anulación del desplazamiento transversal y del momento, son en estos casos:

$$X = Y = 0, \quad X'' = Y'' = 0. \quad (20.10)$$

La dirección del extremo de la barra y la fuerza de reacción en el punto de apoyo se obtienen como resultado de la resolución de las ecuaciones.

Por último, en el extremo libre deben anularse la fuerza  $F$  y el momento  $M$ . De acuerdo con (20.3) y (20.5), esto lleva a las condiciones

$$X'' = Y'' = 0, \quad X''' = Y''' = 0. \quad (20.11)$$

(si en el extremo libre está aplicada una fuerza concentrada,  $F$  debe ser igual a esta fuerza, y no a cero).

Sin dificultad se generalizan las ecuaciones (20.4) para el caso de una barra de sección variable. En tales barras, los momentos de inercia  $I_1$  e  $I_2$  son funciones de  $z$ . Las fórmulas (20.3), que determinan los momentos en cada sección de la barra, son válidas como antes. Su introducción en (20.2) lleva ahora a las ecuaciones

$$E \frac{d^2}{dz^2} \left( I_1 \frac{d^2 Y}{dz^2} \right) = K_y, \quad E \frac{d^2}{dz^2} \left( I_2 \frac{d^2 X}{dz^2} \right) = K_x, \quad (20.12)$$

en las cuales  $I_1$  e  $I_2$  no se pueden permutar con el signo de derivación. Para las fuerzas de corte tenemos:

$$F_x = -E \frac{d}{dz} \left( I_2 \frac{d^2 X}{dz^2} \right), \quad F_y = -E \frac{d}{dz} \left( I_1 \frac{d^2 Y}{dz^2} \right). \quad (20.13)$$

Volvamos nuevamente a las ecuaciones (20.1). El haber prescindido del segundo término en el segundo miembro de la igualdad puede, en algunos casos, no estar justificado ni aun para una flexión pequeña. Estos casos son aquellos en los que, a lo largo de la barra, actúa una fuerza de tensión interna grande, es decir, cuando  $F_z$  es muy grande. La existencia de una tal fuerza se debe, generalmente, a una fuerte distensión de la barra por fuerzas externas de tracción aplicadas a sus extremos. Designemos la tensión constante que actúa a lo largo de la barra mediante  $T$ , es decir,  $F_z = T$ . Si la barra se somete a una fuerte compresión, y no a una dilatación, la fuerza  $T$  es negativa. Al desarrollar el producto vectorial  $\mathbf{F} \times \frac{dt}{dl}$ , debemos conservar ahora los términos que contienen a  $T$ ; los términos con  $F_x$  y  $F_y$  se pueden despreciar, como antes. Reemplazando las componentes del vector  $\frac{dt}{dl}$  por  $X''$ ,  $Y''$  y 1, respectivamente, obtenemos las ecuaciones de equilibrio en la forma

$$\begin{aligned} I_2 E X''' - TX'' - K_x &= 0, \\ I_1 E Y''' - TY'' - K_y &= 0. \end{aligned} \quad (20.14)$$

A las expresiones (20.5) para la fuerza de corte deben agregársele ahora términos iguales a las proyecciones sobre los ejes  $x$  e  $y$  de la fuerza  $T$ , que actúa según el vector  $\mathbf{t}$ :

$$F_x = -EI_2X''' + TX', \quad F_y = -EI_1Y''' + TY'. \quad (20.15)$$

Estas fórmulas pueden también obtenerse, desde luego, directamente de (19.3).

Una intensa fuerza  $T$  puede, en algunos casos, aparecer también como resultado de la misma flexión, aun cuando ninguna fuerza de tracción se ha aplicado especialmente. Consideremos una barra cuyos extremos están empotados o articulados en apoyos inmóviles, de modo que no pueden experimentar un desplazamiento longitudinal. Entonces la flexión de la barra va acompañada inevitablemente de un alargamiento, lo que lleva a la aparición en ella de la fuerza  $T$ . Se calcula fácilmente la magnitud de la flexión para la cual esta fuerza llega a ser importante. La longitud  $L + \Delta L$  de la barra curva es igual a la integral

$$L + \Delta L = \int_0^L \sqrt{(1 + X'^2 + Y'^2)} dz,$$

tomada sobre la recta que une los puntos de apoyo. En una ligera flexión se puede desarrollar la raíz en serie, y obtenemos para el alargamiento  $\Delta L$  la expresión

$$\Delta L = \frac{1}{2} \int_0^L (X'^2 + Y'^2) dz.$$

La fuerza de tensión que surge en una extensión simple es igual a la dilatación relativa multiplicada por el módulo de Young y por el área  $S$  de la sección de la barra. De este modo, la fuerza  $T$  es

$$T = \frac{ES}{2L} \int_0^L (X'^2 + Y'^2) dz. \quad (20.16)$$

Si  $\delta$  es el orden de magnitud de la flexión transversal, las derivadas  $X'$  e  $Y'$  son del orden de  $\frac{\delta}{L}$ , de modo que la integral en (20.16) es del orden de magnitud de

$\frac{\delta^2}{L^2} L = \frac{\delta^2}{L}$  y  $T \sim \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 ES$ . El orden de magnitud de los primeros y segundos

términos en (20.14) es, respectivamente,  $IE \frac{\delta}{L^4}$  y  $T \frac{\delta}{L^2} \sim ES \frac{\delta^3}{L^4}$ . El momento

de inercia  $I \sim h^4$ , y  $S \sim h^2$ , donde  $h$  es el grosor de la barra. Substituyendo, fácilmente obtenemos que los primeros y segundos términos en (20.14) son comparables, en orden de magnitud, cuando

$$\delta \sim h.$$

De esta manera, en la flexión de barras con ambos extremos fijos, se pueden utilizar las ecuaciones de equilibrio en la forma (20.4), sólo si la deflexión es pequeña comparada con el grueso de la barra. Si  $\delta$  no es pequeña en comparación con  $h$  (aunque, desde luego,  $\delta \ll L$ , como antes), entonces es necesario usar las ecuaciones (20.14). La fuerza  $T$ , en estas ecuaciones, no se conoce de antemano. Para resolverlas es necesario, primero, considerar a  $T$  como un parámetro dado y, luego, a partir de la solución obtenida, determinar  $T$  según la fórmula (20.16), con lo que se establece la relación entre  $T$  y las fuerzas flexoras aplicadas a la barra.

El caso límite opuesto es aquél en que la resistencia de la barra a la flexión es pequeña comparada con su resistencia a la tracción, de modo que, en las ecuaciones (20.14), se pueden despreciar los primeros términos en comparación con los segundos. Físicamente, tal caso puede realizarse o bien mediante una tensión muy intensa  $T$ , o cuando  $EI$  es suficientemente pequeño, lo que a su vez puede deberse a que el grueso  $h$  sea pequeño (las barras muy tensas se llaman *cuerdas*). Las ecuaciones de equilibrio nos dicen en estos casos, que:

$$TX'' + K_x = 0, \quad TY'' + K_y = 0. \quad (20.17)$$

Los extremos de la cuerda se deben considerar fijos, en el sentido de que sus coordenadas están dadas, esto es,

$$X = Y = 0. \quad (20.18)$$

La dirección de los extremos, en cambio, no puede darse en forma arbitraria, sino que viene determinada por la solución de las ecuaciones.

Para finalizar, mostraremos de qué manera las ecuaciones de equilibrio de una barra ligeramente curva se pueden obtener a partir del principio variacional, usando la expresión (18.10) para la energía elástica:

$$F_{barra} = \frac{E}{2} \int \{I_1 Y''^2 + I_2 X''^2\} dz.$$

En el equilibrio debe ser mínima la suma de esta energía con la energía potencial debida a las fuerzas externas  $\mathbf{K}$  que actúan sobre la barra, es decir, debe ser

$$\delta F_{\text{barra}} - \int (K_x \delta X + K_y \delta Y) dz = 0$$

(el segundo término representa el trabajo de las fuerzas externas en un desplazamiento infinitamente pequeño de la línea de la barra). En la variación de  $F_{\text{barra}}$  efectuemos dos integraciones por partes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta \int X''^2 dz &= \int X'' \delta X''' dz = X'' \delta X' \Big| - \int X''' \delta X' dz = \\ &= X'' \delta X' \Big| - X''' \delta X \Big| + \int X'''' \delta X dz \end{aligned}$$

y análogamente en la integral de  $Y''^2$ . Reuniendo los distintos términos, obtenemos:

$$\begin{aligned} &\int [(EI_1 Y'''' - K_y) \delta Y + (EI_2 X'''' - K_x) \delta X] dz + \\ &+ EI_1 (Y'' \delta Y' - Y''' \delta Y) + EI_2 (X'' \delta X' - X''' \delta X) = 0.. \end{aligned}$$

Del primer término, el de la integral, se siguen, dado que las variaciones  $\delta X$  y  $\delta Y$  son arbitrarias, las ecuaciones de equilibrio (20.4). Los restantes términos, ya integrados, dan las condiciones de contorno para estas ecuaciones; así, en un extremo libre, las variaciones  $\delta X$ ,  $\delta Y$ ,  $\delta X'$ ,  $\delta Y'$  son arbitrarias y se obtienen, de acuerdo con ello, las condiciones (20.11). Al mismo tiempo, los coeficientes de  $\delta X$  y  $\delta Y$  en estos términos dan las expresiones (20.5) para las componentes de la fuerza de corte, y los coeficientes de  $\delta X'$  y  $\delta Y'$ , las expresiones (20.3) para las componentes del momento flexor.

Por último, las ecuaciones de equilibrio (20.14) cuando existe una fuerza de tracción  $T$ , se pueden obtener por el mismo procedimiento sumando a la energía a variar la cantidad

$$T \Delta L = \frac{T}{2} \int (X'^2 + Y'^2) dz,$$

que representa el trabajo de la fuerza  $T$  a lo largo de  $\Delta L$ , que es el alargamiento de la barra.

## PROBLEMAS

1. Hallar la forma de una barra (de longitud  $l$ ), combada por la acción de su propio peso, para diferentes maneras de fijar sus extremos.

*Solución.* La forma buscada se obtiene como solución de la ecuación  $\zeta'''' = \frac{q}{EI}$  ( $q$  es el peso de la barra por unidad de longitud) con condiciones de contorno en sus extremos como las formuladas en el texto. Para distintos apoyos de los extremos de la barra se obtienen las formas de flexión y los desplazamientos máximos (flechas de la línea elástica) siguientes; el origen de coordenadas coincide siempre con uno de los extremos de la barra.

- a) Ambos extremos empotados:

$$\zeta = -\frac{q}{24EI} z^2(z-l)^2, \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{1}{384} \frac{ql^4}{EI}.$$

- b) Ambos extremos apoyados:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z(z^3 - 2l z^2 + l^3), \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}.$$

- c) Un extremo ( $z = l$ ) empotrado, y el otro ( $z = 0$ ) apoyado:

$$\zeta = \frac{q}{48EI} z(2z^3 - 3lz^2 + l^3), \quad \zeta(0,42l) = 0,0054 \frac{ql^4}{EI}.$$

- d) Un extremo ( $z = 0$ ) empotrado, y el otro ( $z = l$ ) libre:

$$\zeta = -\frac{q}{24EI} z^2(z^2 - 4lz + 6l^2), \quad \zeta(l) = \frac{1}{8} \frac{ql^4}{EI}.$$

2. Determinar la forma de una barra encorvada por la acción de una fuerza concentrada  $f$ , aplicada en su punto medio.

*Solución.* En todas partes, menos en el punto  $z = l/2$ , tenemos la ecuación  $\zeta'''' = 0$ . Las condiciones de contorno en los extremos de la barra ( $z = 0$  y  $z = l$ ) se determinan por el modo de fijación; en el punto  $z = l/2$  deben ser continuas  $\zeta$ ,  $\zeta'$ ,  $\zeta''$ , pero la diferencia de las fuerzas de corte  $F = -El\zeta'''$  a uno y otro lado de este punto debe ser igual a la fuerza  $f$ .

La forma de la barra (en la porción  $0 \leq z \leq l/2$ ) y la flecha de la línea elástica vienen dadas por las siguientes fórmulas:

- a) Ambos extremos empotados:

$$\zeta = -\frac{f}{48EI} z^2(3l - 4z), \quad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{fl^3}{192EI}.$$

b) Ambos extremos apoyados:

$$\zeta = \frac{f}{48EI} z (3l^2 - 4z^2), \quad \zeta \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{fl^3}{48EI}.$$

La forma de la barra es simétrica respecto a su punto medio, de modo que la función  $\zeta(z)$  en la porción  $l/2 \leq z \leq l$  se obtiene cambiando simplemente  $z$  por  $l - z$  en estas expresiones.

3. Ídem, para una barra con uno de sus extremos ( $z = 0$ ) empotrado y el otro ( $z = l$ ) libre; en este último está aplicada una fuerza concentrada  $f$ .

*Solución.* A lo largo de toda la barra es  $F = \text{const} = f$ , de modo que  $\zeta''' = -f/EI$ . Con las condiciones  $\zeta = 0$ ,  $\zeta' = 0$  para  $z = 0$  y  $\zeta'' = 0$  para  $z = l$  obtenemos:

$$\zeta = \frac{f}{6EI} z^2 (3l - z), \quad \zeta(l) = \frac{fl^3}{3EI}.$$

4. Hallar la forma de una barra con extremos fijos, combada por la acción de un par de fuerzas concentrado aplicado en su punto medio.

*Solución.* A lo largo de toda la barra es  $\zeta'''' = 0$ , pero en el punto  $z = l/2$  el momento  $M = EI\zeta''$  experimenta un salto, igual al momento  $m$  del par concentrado, aplicado en él. Con condiciones apropiadas en los extremos, obtenemos:

a) Ambos extremos empotrados:

$$\zeta = \frac{m}{24EIl} z^2 (l + 2z) \text{ cuando } 0 \leq z \leq l/2$$

$$\zeta = -\frac{m}{24EIl} (l - z)^2 [l + 2(l - z)] \text{ cuando } l/2 \leq z \leq l$$

b) Ambos extremos articulados:

$$\zeta = \frac{m}{24EIl} z (l^2 - 4z^2) \text{ cuando } 0 \leq z \leq l/2$$

$$\zeta = -\frac{m}{24EIl} (l - z) [l^2 - 4(l - z)^2] \text{ cuando } l/2 \leq z \leq l.$$

La barra se flexiona en sentidos opuestos a uno y a otro lado del punto  $z = l/2$ .

5. Ídem, si el par concentrado está aplicado en el extremo libre de una barra, cuyo otro extremo se encuentra empotrado.

*Solución.* A lo largo de toda la barra tenemos  $M = EI\zeta'' = m$ , y en el punto  $z = 0$  es  $\zeta = 0$ ,  $\zeta' = 0$ . La forma de la flexión viene dada por la fórmula  $\zeta = \frac{m}{2EI} z^2$ .

6. Determinar la forma de una barra (de sección circular) con extremos articulados, tensa por una fuerza  $T$  y combada por una fuerza  $f$  aplicada a su punto medio.

*Solución.* En el segmento  $0 < z < l/2$  la fuerza de corte es igual a  $f/2$ , de modo que (20.15) da la ecuación:

$$\zeta''' - \frac{T}{EI} \zeta' = -\frac{f}{2EI}.$$

Condiciones de contorno:  $\zeta = 0$ ,  $\zeta' = 0$  para  $z = 0$ ,  $l$ , y en  $z = l/2$  debe ser  $\zeta' = 0$  (por la continuidad de  $\zeta'$ ). Para la forma de la barra (en la porción  $0 < z < l/2$ ) obtenemos la fórmula:

$$\zeta = \frac{f}{2T} \left( z - \frac{\operatorname{senh} kz}{k \cosh \frac{1}{2} kl} \right), \quad k = \sqrt{(T/EI)}.$$

Para pequeños  $k$  esta expresión se transforma en la fórmula obtenida en el problema 2, b. Para valores grandes de  $k$  se transforma en:  $\zeta = \frac{f}{2T} z$ , es decir, de acuerdo con la ecuación (20.17), un hilo flexible toma, por la acción de una fuerza  $f$ , una forma compuesta por dos segmentos de recta con un extremo común en el punto  $z = l/2$ .

Si la fuerza  $T$  aparece como resultado de la distensión de la barra por una fuerza transversal, para determinarla es necesario usar la fórmula (20.16). Substituyendo en ésta la expresión obtenida, hallamos la ecuación

$$\frac{1}{k^6} \left[ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tgh}^2 \frac{kl}{2} - \frac{3}{kl} \operatorname{tgh} \frac{kl}{2} \right] = \frac{8E^2 I^3}{f^2 S},$$

que determina, en forma implícita,  $T$  como función de  $f$ .

7. Una barra (de sección circular) de longitud infinita descansa sobre una base elástica, esto es, de modo que en una flexión actúa sobre ella una fuerza  $K = -\alpha \zeta$ , proporcional a la desviación. Hallar la forma que adopta la barra por la acción de una fuerza concentrada  $f$ .

*Solución.* Elijamos como origen de coordenadas el punto de aplicación de la fuerza  $f$ . En todas partes, excepto en el punto  $z = 0$ , vale la ecuación  $EI\zeta'''' = -\alpha\zeta$ . La solución debe satisfacer la condición  $\zeta = 0$  en  $z = \pm\infty$ , y en  $z = 0$  deben ser continuas  $\zeta'$ ,  $\zeta''$ ; la diferencia de los valores de la fuerza de corte  $F = -EI\zeta'''$  para  $z \rightarrow +0$  y  $z \rightarrow -0$  debe ser igual a  $f$ . Tal solución es:

$$\zeta = \frac{f}{8\beta^3 EI} e^{-\beta|z|} [\cos \beta|z| + \operatorname{sen} \beta|z|], \quad \beta = \left( \frac{\alpha}{4EI} \right)^{1/4}.$$

8. Deducir la ecuación de equilibrio para la flexión pequeña de una barra delgada (de sección circular), que en su estado natural tiene forma de arco de circunferencia, combada en su plano por fuerzas radiales.

*Solución.* Eligiendo como origen de las coordenadas polares  $r, \varphi$  el centro de la circunferencia, escribamos la ecuación de la línea deformada de la barra en la forma  $r = a + \zeta(\varphi)$ , donde  $a$  es el radio del arco, y  $\zeta$ , el pequeño desplazamiento radial que se produce en la flexión. Utilizando la expresión conocida para el radio de curvatura en coordenadas polares, encontramos hasta el primer orden en  $\zeta$

$$\frac{1}{R} = \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{a} - \frac{\zeta + \zeta''}{a^2},$$

(' significa derivación respecto de  $\varphi$ ). De acuerdo con (18.11), hallamos la energía elástica de la flexión:

$$F_{barra} = -\frac{EI}{2} \int_0^{\varphi_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right)^2 a \, d\varphi = \frac{EI}{2a^3} \int_0^{\varphi_0} (\zeta + \zeta'')^2 \, d\varphi$$

( $\varphi_0$  es el ángulo central del arco). La ecuación de equilibrio se obtiene a partir del principio variacional:

$$\delta F_{barra} - \int_0^{\varphi_0} \delta \zeta K_r a \, d\varphi = 0$$

( $K_r$  es la fuerza radial externa por unidad de longitud) con la condición adicional

$$\int_0^{\varphi_0} \zeta \, d\varphi = 0,$$

que expresa, en la aproximación considerada, la condición de invariabilidad de la longitud de la barra, es decir, la condición de ausencia de una dilatación general de la misma. Siguiendo el método de Lagrange, igualaremos a cero la suma:

$$\delta F_{barra} - \int_0^{\varphi_0} a K_r \delta \zeta \, d\varphi + a \alpha \int_0^{\varphi_0} \delta \zeta \, d\varphi = 0,$$

donde  $\alpha$  es una constante. Efectuando la variación del integrando de  $F_{barra}$  e integrando el término con  $\delta \zeta''$  dos veces por partes, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \left[ \frac{EI}{a^3} (\zeta + 2\zeta'' + \zeta''') - a K_r + \alpha a \right] \delta \zeta \, d\varphi + \\ + \left. \frac{EI}{a^2} (\zeta + \zeta'') \delta \zeta \right| - \left. \frac{EI}{a^2} (\zeta' + \zeta''') \delta \zeta \right| = 0. \end{aligned}$$

De aquí resulta la ecuación de equilibrio (\*):

$$\frac{EI}{a^4} (\zeta'''' + 2\zeta'' + \zeta) - K_r + \alpha = 0, \quad (1)$$

(\*) En ausencia de fuerzas externas es  $K_r = 0$  y  $\alpha = 0$ ; las soluciones no nulas de la ecuación homogénea obtenida corresponden a una traslación simple o a una rotación de la barra en conjunto.

la expresión para la fuerza de corte  $F = \frac{EI}{a^3}(\zeta' + \zeta'')$  y la expresión para el momento flexor  $M = \frac{EI}{a^2}(\zeta + \zeta'')$  (véase el final del § 20). La constante  $\alpha$  se determina por la condición de ausencia de una dilatación general de la barra.

9. Hallar la deformación de un anillo circular, ovalado por dos fuerzas concentradas  $f$  que actúan a lo largo de un diámetro (fig. 18).

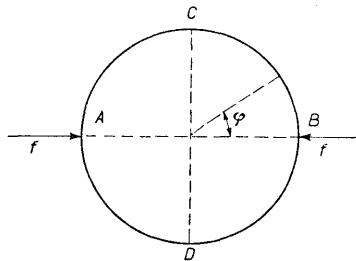


FIG. 18

**Solución.** Integrando la ecuación (1) a lo largo de todo el anillo, hallamos que:

$$2\pi\alpha a = \int K_r a d\varphi = 2f.$$

En todas partes, menos en los puntos  $\varphi = 0$  y  $\varphi = \pi$ , tenemos la ecuación (1) con  $K_r = 0$ :

$$\zeta'''' + 2\zeta'' + \zeta + \frac{fa^3}{\pi EI} = 0.$$

La deformación del anillo buscada es simétrica respecto a los diámetros  $AB$  y  $CD$ , por lo cual, en los puntos  $A, B, C, D$ , debe ser  $\zeta' = 0$ . La diferencia de los valores de la fuerza de corte para  $\varphi \rightarrow \pm 0$  debe ser igual a  $f$ . La solución de la ecuación de equilibrio que satisface estas condiciones es:

$$\zeta = \frac{fa^3}{EI} \left( \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} \varphi \cos \varphi - \frac{\pi}{8} \cos \varphi - \frac{1}{4} \operatorname{sen} \varphi \right), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

En particular, los puntos  $A$  y  $B$  se acercan mutuamente una distancia:

$$|\zeta(0) + \zeta(\pi)| = \frac{fa^3}{EI} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right).$$

## § 21. Estabilidad de los sistemas elásticos

El comportamiento de una barra sometida a la acción de fuerzas compresoras longitudinales, representa el ejemplo más sencillo del importante fenómeno de *inestabilidad elástica*, descubierto por L. Euler.

Cuando no existen fuerzas flexoras externas transversales  $K_x$ ,  $K_y$ , las ecuaciones de equilibrio de una barra comprimida (20.14) tienen la solución evidente  $X = Y = 0$ , correspondiente a una barra que se conserva rectilínea bajo la acción de una fuerza longitudinal  $|T|$ . Esta solución, sin embargo, corresponde a un equilibrio estable de la barra sólo mientras la fuerza compresora  $|T|$  se mantiene menor que cierto valor crítico  $T_{cr}$ . Cuando  $|T| < T_{cr}$ , la forma rectilínea de la barra es estable respecto a una perturbación arbitraria pequeña. En otras palabras, si por la acción de una pequeña fuerza la barra experimenta una ligera flexión, al dejar de actuar esta fuerza la barra tenderá a volver al estado inicial.

Por el contrario, cuando  $|T| > T_{cr}$ , la forma rectilínea corresponde a un equilibrio inestable. Es suficiente ya una fuerza infinitamente pequeña (de flexión) para destruir el equilibrio, como resultado de lo cual se produce una fuerte flexión de la barra. Está claro que, en estas condiciones, una barra comprimida no puede existir realmente en una forma no encorvada.

El comportamiento de la barra después de la pérdida de la estabilidad debe describirse mediante las ecuaciones de la flexión intensa. Sin embargo, el valor mismo de la carga crítica  $T_{cr}$  puede obtenerse con ayuda de las ecuaciones de la flexión pequeña. Cuando  $|T| = T_{cr}$  la forma rectilínea de la barra corresponde a un cierto equilibrio indiferente. Esto significa que, junto a la solución  $X = Y = 0$ , deben existir otros estados para los que la flexión es pequeña y que también estén en equilibrio. Por eso, el valor crítico  $T_{cr}$  se puede definir como aquel valor de  $T$  para el cual las ecuaciones

$$EI_2 X'''' + |T| X'' = 0, \quad EI_1 Y'''' + |T| Y'' = 0 \quad (21.1)$$

admiten una solución distinta de cero. Esta misma solución determina el carácter de la deformación a la que queda sometida la barra inmediatamente después de perder la estabilidad.

En los problemas de este párrafo se presentan una serie de casos típicos de pérdida de estabilidad para distintos sistemas elásticos.

### PROBLEMAS

- Hallar la fuerza crítica de compresión para una barra con extremos articulados.

*Solución.* Como nos interesa el valor mínimo de  $|T|$  para el cual se obtiene una solución, distinta de cero, de las ecuaciones (21.1), de estas dos ecuaciones es suficiente considerar sólo la que

contiene el menor de los valores  $I_1, I_2$ ; sea  $I_2 < I_1$ . La integral general de la ecuación  $EI_2 X'''' + |T|X'' = 0$  es de la forma  $X = A + Bz + C \operatorname{sen} kz + D \cos kz$ , donde  $k = \sqrt{T/EI_2}$ . La solución diferente de cero que satisface las condiciones  $X = 0, X'' = 0$  en  $z = 0$  y  $z = l$ , es

$$X = C \operatorname{sen} kz,$$

y, además, debe ser  $\operatorname{sen} kl = 0$ . De aquí se deduce la fuerza crítica buscada:

$$T_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{l^2}$$

Después de perder la estabilidad, la barra toma la forma dibujada en la fig. 19, a.

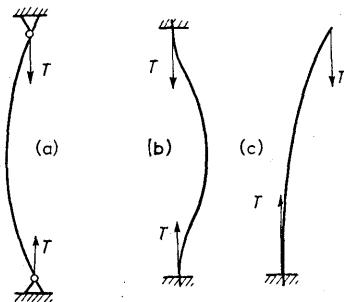


FIG. 19

2. Ídem, para una barra con extremos empotados (fig. 19, b).

$$\text{Solución. } T_{cr} = \frac{4\pi^2 EI_2}{l^2}.$$

3. Ídem, para una barra con un extremo empotrado y el otro libre (fig. 19, c):

$$\text{Solución. } T_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{4l^2}.$$

4. Hallar la fuerza de compresión crítica para una barra (de sección circular) con extremos articulados que descansa sobre una base elástica (véase problema 7, § 20).

*Solución.* En lugar de la ecuación (21.1) es necesario considerar aquí la ecuación  $EIX'''' + |T|X'' + \alpha X = 0$ . Un análisis análogo lleva a la solución

$$X = A \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} z, \quad T_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left( n^2 + \frac{\alpha l^4}{n^2 \pi^4 EI} \right),$$

donde para  $n$  hay que tomar el número entero para el cual se obtiene el valor mínimo de  $T_{cr}$ . Para

valores de  $\alpha$  suficientemente grandes se tiene  $n > 1$ , es decir, después de perder la estabilidad la barra adopta una forma ondulada.

5. Una barra de sección circular experimenta una torsión, manteniéndose sus extremos empotrados. Hallar la torsión crítica, por encima de la cual la forma rectilínea de la barra se vuelve inestable.

*Solución.* El valor crítico del ángulo de torsión se determina por la aparición de soluciones no nulas de las ecuaciones correspondientes a la flexión pequeña de una barra sometida a torsión. Para deducir estas ecuaciones, substituyamos la expresión (19.7)  $M = EI \left[ t \times \frac{dt}{dl} \right] + C\tau t$  ( $\tau$  es el ángulo de torsión constante) en la ecuación (19.3); esto da:

$$EI t \times \frac{d^2 t}{dl^2} + C\tau \frac{dt}{dl} - F \times t = 0.$$

Derivemos esta ecuación; como la flexión es pequeña, al derivar los términos primero y tercero se puede considerar que  $t$  es constante, igual al vector  $t_0$  dirigido según el eje de la barra (eje z). Recordando también que  $\frac{dF}{dl} = 0$  (no existen fuerzas externas a lo largo de la barra), obtenemos:

$$EI t_0 \times \frac{d^3 t}{dl^3} + C\tau \frac{d^2 t}{dl^2} = 0,$$

o, en componentes:

$$Y'''' - \kappa Y''' = 0,$$

$$X'''' + \kappa Y''' = 0,$$

donde  $\kappa = \frac{C\tau}{EI}$ . Introduciendo como función incógnita  $\xi = X + iY$ , obtenemos la ecuación  $\xi'''' - i\kappa \xi''' = 0$ . Para la solución, que satisface las condiciones  $\xi = 0$ ,  $\xi' = 0$  en  $z = 0$ ,  $z = l$ , buscaremos una expresión de la forma  $\xi = a(1 + i\kappa z - e^{i\kappa z}) + bz^2$ . Como condición de compatibilidad de las ecuaciones obtenidas para  $a$  y  $b$  se obtiene la relación  $e^{i\kappa l} = \frac{2 + i\kappa l}{2 - i\kappa l}$ , de donde  $\frac{\kappa l}{2} = \operatorname{tg} \frac{\kappa l}{2}$ . La menor raíz de esta ecuación es  $\frac{\kappa l}{2} = 4,49$ , de modo que  $\tau_{cr} = \frac{8,98EI}{Cl}$ .

6. Lo mismo para una barra con extremos articulados.

*Solución.* Aquí se obtiene  $\xi = a(1 - e^{i\kappa z} - \frac{\kappa^2}{2} z^2) + bz$ , donde  $\kappa$  se determina por  $e^{i\kappa l} = 1$ ,

es decir,  $\kappa l = 2\pi$ . Por esta razón, el valor buscado del ángulo de torsión crítico es  $\tau_{cr} = \frac{2\pi EI}{Cl}$ .

7. Hallar el límite de estabilidad de una barra vertical que se encuentra bajo la acción de su propio peso; el extremo inferior de la barra está empotrado.

*Solución.* Si la tensión longitudinal  $F_z \equiv T$  varía a lo largo de la barra, en el primer término de (20.1) es  $\frac{dF_z}{dl} \neq 0$  y en lugar de las ecuaciones (20.14) se obtiene:

$$\begin{aligned} I_2 EX'''' - (TX')' - K_x &= 0, \\ I_1 EY'''' - (TY')' - K_y &= 0. \end{aligned}$$

En el caso dado, la fuerza flexora transversal se anula en toda la barra, y  $T = -q(l-z)$ , donde  $q$  es el peso de la barra por unidad de longitud y  $z$  se cuenta desde el extremo inferior. Suponiendo que  $I_2 < I_1$ , consideremos la ecuación:

$$I_2 EX''' = TX' = -q(l-z)X';$$

(en  $z = l$  tenemos, automáticamente,  $X''' = 0$ ). La integral general de esta ecuación para la función  $u = X'$  es:

$$u = \eta^{\frac{1}{3}} [aJ_{-\frac{1}{3}}(\eta) + bJ_{\frac{1}{3}}(\eta)],$$

donde:

$$\eta = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{q}{EI_2} (l-z)^3}.$$

Las condiciones de contorno  $X' = 0$  en  $z = 0$  y  $X'' = 0$  en  $z = l$  dan para la función  $u(\eta)$  las condiciones  $u = 0$  para  $\eta = \eta_0 = \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{ql^3}{EI_2}\right)}$ ,  $u'\eta^{\frac{1}{3}} = 0$  para  $\eta = 0$ . Para satisfacer estas condiciones es necesario hacer  $b = 0$ , con  $J_{-\frac{1}{3}}(\eta_0) = 0$ .

La menor raíz de esta ecuación es  $\eta_0 = 1,87$ , de donde resulta para el valor crítico de la longitud de la barra  $l_{cr} = 1,98 \left(\frac{EI_2}{q}\right)^{\frac{1}{3}}$ .

8. Una barra tiene una sección transversal de forma alargada, de modo que  $I_2 \gg I_1$ . Un extremo de la barra está empotrado, y en el extremo libre está aplicada una fuerza  $f$  que la encorva en su plano principal  $x, z$  (en el que la rigidez a la flexión es  $EI_2$ ). Determinar el valor crítico  $f_{cr}$  a partir del cual la forma plana de la barra se hace inestable y la barra se flexiona lateralmente (en el plano  $y, z$ ), sufriendo al mismo tiempo una torsión.

*Solución.* Dado que el valor de la rigidez  $EI_2$  es grande en comparación con  $EI_1$  (y con la rigidez a la torsión  $C$ ) (\*), la inestabilidad respecto de una fuerte flexión lateral aparece cuando la flexión

(\*) Así, para una sección rectangular estrecha de grueso  $h$  y altura  $b \gg h$ , tenemos  $EI_1 = \frac{bh^3}{12} E$ ,  $EI_2 = \frac{b^3h}{12} E$ ,  $C = \frac{bh^3}{3} \mu$ .

en el plano  $x, z$  es aún pequeña. Para determinar el momento en que se produce la inestabilidad, es necesario establecer las ecuaciones para una débil flexión lateral de la barra, conservando en ellas los términos proporcionales a los productos de la fuerza  $f$ , que actúa en el plano  $x, z$ , por los pequeños desplazamientos. Como la fuerza concentrada se aplica al extremo libre de la barra, a lo largo de toda su longitud es  $F = f$ , y en el extremo libre ( $z = l$ ) el momento es  $M = 0$ ; de acuerdo con la fórmula (19.6), para las componentes del momento respecto a un sistema fijo de coordenadas  $x, y, z$  se encuentra  $M_x = 0$ ,  $M_y = (l - z)f$ ,  $M_z = (Y - Y_0)f$ , donde  $Y_0 = Y(l)$ . Proyectemos estos momentos sobre los ejes ligados, en cada punto, con la barra; hasta los términos de primer orden en los desplazamientos, hallamos  $M_\xi = \varphi(l - z)f$ ,  $M_\eta = (l - z)f$ ,  $M_\zeta = (l - z)f \frac{dY}{dz} + f(Y - Y_0)$ , donde  $\varphi$  es el ángulo de rotación total de la sección debido a la torsión (el ángulo de torsión  $\tau = \frac{d\varphi}{dz}$  aquí no es constante a lo largo de la barra). Por otro lado, según (18.6) y (18.9) tenemos en una flexión pequeña,

$$M_\xi = -EI_1Y'', \quad M_\eta = EI_2X'', \quad M_\zeta = C\varphi'$$

y, comparando estas expresiones, obtenemos las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} EI_2X'' &= (l - z)f, \\ EI_1Y'' &= -\varphi(l - z)f, \quad C\varphi' = (l - z)fY' + (Y - Y_0)f. \end{aligned}$$

La primera de estas ecuaciones determina la flexión principal de la barra en el plano  $x, z$ ; se trata de hallar el valor de  $f$  para el que las ecuaciones segunda y tercera admiten una solución distinta de cero. Eliminando de ellas  $Y$ , encontramos:

$$\varphi'' + k^2(l - z)^2\varphi = 0, \quad k^2 = \frac{f^2}{EI_1C}.$$

La integral general de esta ecuación es:

$$\varphi = a\sqrt{l - z}J_{1/4}\left(\frac{k}{2}(l - z)^2\right) + b\sqrt{l - z}J_{-1/4}\left(\frac{k}{2}(l - z)^2\right).$$

En el extremo empotrado ( $z = 0$ ) debe ser  $\varphi = 0$ , y en el libre, el momento de torsión  $C\varphi' = 0$ . De la segunda condición resulta  $a = 0$ , y la primera da  $J_{-1/4}\left(\frac{kl^2}{2}\right) = 0$ . La menor raíz de esta ecuación es  $\frac{kl^2}{2} = 2,006$ , de donde  $f_{cr} = \frac{4,01\sqrt{EI_1C}}{l^2}$ .



## CAPÍTULO III

### ONDAS ELÁSTICAS

#### § 22. Ondas elásticas en un medio isótropo

Si ocurren movimientos dentro de un cuerpo deformado, la temperatura no será, en general, constante sino que variará tanto en el tiempo como en el espacio. Esto complica considerablemente la solución exacta de las ecuaciones de movimiento en el caso de movimientos arbitrarios.

Usualmente, sin embargo, el problema puede simplificarse teniendo en cuenta el hecho que la transmisión de calor dentro del cuerpo (por simple conducción térmica) ocurre muy lentamente. Si el intercambio de calor que se produce durante intervalos de tiempo del orden del período de los movimientos oscilatorios es despreciable, podemos considerar cualquier parte del cuerpo como térmicamente aislada, o sea, el movimiento será adiabático. Ahora, en las deformaciones adiabáticas  $\sigma_{ik}$  se obtiene en términos de  $u_{ik}$  mediante las fórmulas usuales con la única diferencia de que hay que reemplazar los valores de  $E$  y  $\sigma$  ordinarios (los « isotérmicos ») por sus correspondientes valores adiabáticos  $E_{ad}$  y  $\sigma_{ad}$  (§ 6). Supondremos de ahora en adelante que aquella condición se cumple y, en consecuencia, los valores de  $E$  y  $\sigma$  que aparecen en el resto del capítulo son los adiabáticos.

Para obtener las ecuaciones de movimiento de un medio elástico, deberemos igualar la fuerza provocada por las tensiones internas  $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$  al producto de la aceleración  $\ddot{u}_i$  y la masa por unidad de volumen, o sea, la densidad  $\varrho$ :

$$\varrho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (22.1)$$

Ésta es la ecuación general de movimiento.

En particular, las ecuaciones de movimiento de un medio isótropo elástico pueden escribirse directamente por analogía con la ecuación de equilibrio (7.2). Tenemos:

$$\varrho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \Delta \mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (22.2)$$

Como se supone que todas las deformaciones son pequeñas, los movimientos considerados en la teoría de la elasticidad son pequeñas *oscilaciones elásticas* u *ondas elásticas*. Comenzaremos discutiendo el caso de una onda plana elástica en un medio infinito e isótropo, o sea, una onda en la cual la deformación  $\mathbf{u}$  es función de una sola coordenada (por ejemplo,  $x$ ) y del tiempo. Todas las derivadas con respecto a  $y$  y  $z$  son entonces nulas en las ecuaciones (22.2) y obtenemos para las componentes del vector  $\mathbf{u}$  y las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0 \quad (22.3)$$

(la ecuación para  $u_z$  es la misma que para  $u_y$ ); en estas expresiones hemos puesto(\*):

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\varrho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\varrho(1+\sigma)}}. \quad (22.4)$$

Las ecuaciones (22.3) son ecuaciones ordinarias de ondas en una dimensión; las cantidades  $c_l$  y  $c_t$  que aparecen en ellas son las velocidades de propagación de las mismas. Vemos así que la velocidad de propagación de la componente  $u_x$  es diferente de las velocidades de propagación de las componentes  $u_y$  y  $u_z$ .

Una onda elástica, pues, consiste en dos ondas que se propagan independientemente. En una ( $u_x$ ) el desplazamiento es en la dirección de propagación; esta es una *onda longitudinal* que se propaga con velocidad  $c_l$ . En la otra onda ( $u_y, u_z$ ) el desplazamiento es en un plano perpendicular a la dirección de propagación; esta es una onda transversal que se propaga con velocidad  $c_t$ . Las ecuaciones (22.4) prueban que la velocidad de propagación de las ondas longitudinales es siempre mayor que la de las ondas transversales: cumplen siempre la relación(\*\*)

$$c_l > c_t \sqrt{\frac{4}{3}}. \quad (22.5)$$

(\*) Podemos dar también expresiones para  $c_l$  y  $c_t$  en función de los módulos de compresión y rigidez y de los coeficientes de Lamé:

$$c_l = \sqrt{\frac{3K+4\mu}{3\varrho}} = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}.$$

(\*\*) Como  $\sigma$  en realidad varía solamente entre 0 y  $1/2$  (véase la nota de la pág. 19) se cumple siempre la desigualdad más restrictiva

$$c_l > c_t \sqrt{2}.$$

Las velocidades  $c_l$  y  $c_t$  se llaman a menudo *velocidades longitudinal y transversal del sonido*.

Sabemos que el cambio de volumen en una deformación está dado por la suma de los elementos diagonales del tensor de deformaciones, o sea por  $u_{ii} \equiv \operatorname{div} \mathbf{u}$ . En una onda transversal no hay componente  $u_x$  y como las otras componentes no dependen de  $y$  o  $z$ , resulta entonces  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  para estas ondas. En las ondas transversales no hay, pues, cambio de volumen. Para ondas longitudinales, en cambio, es  $\operatorname{div} \mathbf{u} \neq 0$  y estas ondas provocan expansiones y compresiones del cuerpo.

La separación de la onda en dos partes que se propagan independientemente con diferentes velocidades puede efectuarse también en el caso general de una onda arbitraria (no plana) que se propaga en un medio elástico infinito. Escribamos nuevamente la ecuación (22.2), pero ahora en términos de las velocidades  $c_l$  y  $c_t$ :

$$\ddot{\mathbf{u}} = c_t^2 \Delta \mathbf{u} + (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (22.6)$$

Representemos el vector  $\mathbf{u}$  como la suma de dos partes:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t, \quad (22.7)$$

una de las cuales satisface la condición

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0 \quad (22.8)$$

y la otra, la condición

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0. \quad (22.9)$$

Sabemos por análisis vectorial que esta representación (es decir, la expresión de un vector como la suma del rotacional de un vector y del gradiente de un escalar) es siempre posible.

Substituyendo  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_l$  en (22.6) obtenemos

$$\ddot{\mathbf{u}}_l + \ddot{\mathbf{u}}_t = c_t^2 \Delta (\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t) + (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_l. \quad (22.10)$$

Tomemos ahora la divergencia de ambos miembros. Como  $\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0$ , el resultado es

$$\operatorname{div} \ddot{\mathbf{u}}_l = c_t^2 \Delta \operatorname{div} \mathbf{u}_l + (c_l^2 - c_t^2) \Delta \operatorname{div} \mathbf{u}_l,$$

o sea,  $\operatorname{div}(\ddot{\mathbf{u}}_l - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l) = 0$ . En virtud de (22.9) el rotacional de la expresión entre paréntesis también es cero. Si el rotacional y la divergencia de un vector se anulan simultáneamente en todo el espacio, el vector debe ser idénticamente nulo. Resulta entonces

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l = 0. \quad (22.11)$$

Análogamente, tomando el rotacional de la ecuación (22.10), debido a que los rotacionales de  $\mathbf{u}_t$  y de cualquier gradiente son cero, obtenemos una ecuación de la misma forma que (22.11):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t = 0. \quad (22.12)$$

Las ecuaciones (22.11) y (22.12) son ecuaciones de ondas en tres dimensiones. Cada una de ellas representa la propagación de una onda elástica, con velocidades  $c_l$  y  $c_t$ , respectivamente. Una onda ( $\mathbf{u}_l$ ) no va acompañada de cambios de volumen ( $\operatorname{div} \mathbf{u}_l = 0$ ) mientras que la otra ( $\mathbf{u}_t$ ) va acompañada por compresiones y extensiones de volumen.

En una onda elástica y monocromática el vector desplazamiento es

$$\mathbf{u} = \operatorname{Re}\{\mathbf{u}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\}, \quad (22.13)$$

donde  $\mathbf{u}_0$  es una función de las coordenadas que satisface la ecuación

$$c_l^2 \Delta \mathbf{u}_0 + (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 + \omega^2 \mathbf{u}_0 = 0, \quad (22.14)$$

obtenida substituyendo (22.13) en (22.6). Las partes longitudinal y transversal de una onda monocromática satisfacen las ecuaciones

$$\Delta \mathbf{u}_l + k_l^2 \mathbf{u}_l = 0, \quad \Delta \mathbf{u}_t + k_t^2 \mathbf{u}_t = 0, \quad (22.15)$$

donde  $k_l = \omega/c_l$ ,  $k_t = \omega/c_t$  son los números de onda de las ondas longitudinal y transversal, respectivamente.

Consideremos finalmente la reflexión y refracción de una onda elástica plana y monocromática en la superficie de separación entre dos medios elásticos diferentes. En este caso, debe tenerse presente que, en general, durante la reflexión o refracción se altera la naturaleza de la onda. Si una onda transversal pura o longitudinal pura incide sobre una superficie de separación, el resultado será una onda que contiene

una parte longitudinal y una parte transversal. La naturaleza de la onda permanece inalterada (como es claro por razones de simetría) sólo cuando incide normalmente a la superficie de separación o cuando una onda transversal cuyas vibraciones son paralelas a la superficie de separación incide sobre ésta, cualquiera que sea el ángulo.

Las relaciones que dan las direcciones de las ondas reflejada y refractada pueden obtenerse inmediatamente de la constancia de la frecuencia y de los componentes tangenciales del vector de onda(\*). Sean  $\theta$  y  $\theta'$  los ángulos de incidencia y reflexión (o refracción) y  $c$  y  $c'$  las velocidades de las dos ondas consideradas. Entonces resulta

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta'} = \frac{c}{c'}. \quad (22.16)$$

Por ejemplo, supongamos que incide una onda transversal. Entonces será  $c = c_{t1}$  en el medio 1. Para la onda transversal reflejada tenemos también  $c' = c_{t1}$ , de manera que (22.16) nos da  $\theta = \theta'$ , o sea, el ángulo de incidencia es igual al de reflexión. Para la onda longitudinal reflejada tenemos  $c' = c_{l1}$  y en consecuencia

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta'} = \frac{c_{t1}}{c_{l1}}.$$

Para la parte transversal de la onda refractada será  $c' = c_{t2}$  y, para una onda incidente transversal, resultará

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta'} = \frac{c_{t1}}{c_{t2}}.$$

Análogamente, para la onda longitudinal refractada será

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta'} = \frac{c_{t1}}{c_{l2}}.$$

(\*) Véase «Hidrodinámica», § 65 (en el libro *Mecánica de los medios continuos*). Los argumentos allí desarrollados son enteramente aplicables también aquí.

## PROBLEMAS

1. Determinar el coeficiente de reflexión para una onda longitudinal monocromática que incide con un ángulo arbitrario sobre la superficie de un cuerpo (rodeado de vacío). (\*).

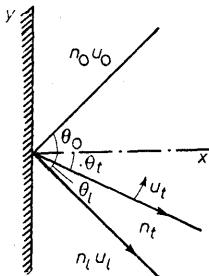


FIG. 20

*Solución.* Cuando el ángulo de incidencia es arbitrario, en la reflexión se producen una onda longitudinal y una onda transversal reflejadas. Es evidente por simetría que el vector desplazamiento de la onda transversal reflejada yace en el plano de incidencia (fig. 20 donde  $\mathbf{n}_0$ ,  $\mathbf{n}_l$  y  $\mathbf{n}_t$  son vectores unitarios en la dirección de la onda incidente, longitudinal reflejada y transversal reflejada, respectivamente y  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{u}_l$  y  $\mathbf{u}_t$  los respectivos vectores de desplazamiento). El desplazamiento total en el cuerpo es igual a la suma (omitiendo para simplificar el factor común  $e^{-i\omega t}$ ):

$$\mathbf{u} = A_0 \mathbf{n}_0 e^{i \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} + A_l \mathbf{n}_l e^{i \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} + A_t \mathbf{a} \times \mathbf{n}_t e^{i \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}},$$

donde  $\mathbf{a}$  es un vector unitario perpendicular al plano de incidencia. Las magnitudes de los vectores de onda son  $k_0 = k_l = \omega/c_l$ ,  $k_t = \omega/c_t$  y los ángulos de incidencia  $\theta_0$  y de reflexión  $\theta_l$ ,  $\theta_t$  están relacionados mediante las expresiones  $\theta_l = \theta_0$ ,  $\operatorname{sen} \theta_t = (c_t/c_l) \operatorname{sen} \theta_0$ . Para las componentes del tensor de deformaciones en la superficie de separación obtenemos

$$u_{xx} = ik_0(A_0 + A_l) \cos^2 \theta_0 + iA_t k_t \cos \theta_t \operatorname{sen} \theta_t,$$

$$u_{ll} = ik_0(A_0 + A_l),$$

$$u_{xy} = ik_0(A_0 - A_l) \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0 + \frac{i}{2} A_t k_t (\cos^2 \theta_t - \operatorname{sen}^2 \theta_t)$$

(\*) El caso más general de reflexión de ondas acústicas desde la frontera de un sólido con un líquido y también el problema análogo de la reflexión de una onda que incide sobre un sólido desde un líquido puede verse en el libro de L. M. Brejovskii, Volny v sloistyj sredaj (Ondas en medios estratificados), Editorial de la Academia de Ciencias de la URSS, 1957, § 4.

habiendo omitido nuevamente el factor exponencial común. Las componentes del tensor de tensiones se calculan mediante la fórmula general (5.11), que conviene escribir aquí en la forma

$$\sigma_{ik} = 2\varrho c_t^2 u_{ik} + \varrho(c_t^2 - 2c_l^2)u_{ll}\delta_{ik}.$$

Las condiciones de contorno en la superficie libre son  $\sigma_{ik}n_k = 0$ , o sea,  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$ , que nos proporcionan dos condiciones que expresan  $A_l$  y  $A_t$  en función de  $A_0$ . El resultado es

$$A_l = A_0 \frac{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 - c_l^2 \cos^2 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_t},$$

$$A_t = -A_0 \frac{2c_l c_t \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_t}.$$

Para  $\theta_0 = 0$  obtenemos  $A_l = -A_0$ ,  $A_t = 0$ , o sea, la onda se refleja como puramente longitudinal. La razón de las componentes normales a la superficie de la densidad de flujo de energía en las ondas reflejada e incidente longitudinales es

$$R_l = \left| \frac{A_l}{A_0} \right|^2.$$

La razón correspondiente para la onda reflejada transversal es

$$R_t = \frac{c_t \cos \theta_t}{c_l \cos \theta_0} \left| \frac{A_t}{A_0} \right|^2.$$

La suma de  $R_l$  y  $R_t$  es, por supuesto, igual a 1.

2. Análogo al problema 1, pero para una onda incidente transversal (con las oscilaciones en el plano de incidencia). (\*).

*Solución.* La onda reflejada es una mezcla de transversal y longitudinal con  $\theta_t = \theta_0$ ,  $c_t \sin \theta_t = c_l \sin \theta_0$ . El vector desplazamiento total es

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{n}_0 A_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{n}_l A_l e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{a} \times \mathbf{n}_t A_t e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}}.$$

Las expresiones para las amplitudes de las ondas reflejadas son

$$\frac{A_l}{A_0} = \frac{c_t^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 - c_l^2 \cos^2 2\theta_0}{c_t^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_0},$$

$$\frac{A_t}{A_0} = \frac{2c_l c_t \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_0}{c_t^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_0}.$$

---

(\*) Si las vibraciones son perpendiculares al plano de incidencia, la onda se refleja totalmente conservando su forma, de modo que  $R_t = 1$ .

3. Determinar las vibraciones radiales características de una esfera elástica.

*Solución.* Tomemos coordenadas esféricas con origen en el centro de la esfera. Para vibraciones radiales  $\mathbf{u}$  tiene la dirección del radio y es una función de  $r$  y  $t$  solamente. Por lo tanto, será  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ . Introduzcamos el «potencial» de corrimiento  $\varphi$  de acuerdo con  $u_r = u = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ . La ecuación del movimiento expresada mediante  $\varphi$  se reduce a la ecuación de onda  $c_t^2 \Delta \varphi = \ddot{\varphi}$ , o para las oscilaciones periódicas respecto del tiempo ( $\sim e^{-i\omega t}$ ):

$$\Delta \varphi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -k^2 \varphi, \quad k = \frac{\omega}{c_t} \quad (1)$$

La solución finita en todo el volumen de la esfera, incluso en su centro, es

$$\varphi = A \frac{\sin kr}{r}$$

(no escribimos el factor temporal). Las tensiones radiales son:

$$\sigma_{rr} = \rho \left\{ (c_t^2 - 2c_t^2)u_{ii} + 2c_t^2u_{rr} \right\} = \rho \left\{ (c_t^2 - 2c_t^2)\Delta \varphi + 2c_t^2\varphi'' \right\}$$

o bien, utilizando la ecuación (1):

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{rr} = -\omega^2 \varphi - 4c_t^2 \frac{1}{r} \varphi' \quad (2)$$

La condición de contorno  $\sigma_{rr}(R) = 0$  conduce a la ecuación

$$\frac{\operatorname{tg} kR}{kR} = \frac{1}{1 - (kRc_t/2c_t)^2}$$

Sus raíces determinan las frecuencias de las vibraciones propias  $\omega = c_t k$ .

4. Determinar la frecuencia de las oscilaciones radiales de una cavidad esférica en un medio elástico ilimitado para el que es  $c_t \gg c_e$  (M. A. Isakovich, 1949).

*Solución.* En el medio ilimitado las oscilaciones radiales de la cavidad van acompañadas de la radiación de ondas acústicas longitudinales, lo que conduce a una pérdida de energía y, por ello, a un amortiguamiento de las oscilaciones. Para  $c_t \gg c_e$  (es decir,  $K \gg \mu$ ) esta radiación será débil y es posible hablar de frecuencias propias de las oscilaciones con un pequeño coeficiente de amortiguamiento.

Busquemos la solución de la ecuación (1) en la forma de una onda esférica divergente

$$\varphi = A \frac{e^{ikr}}{r}, \quad k = \frac{\omega}{c_l}$$

con lo que, mediante (2), obtenemos a partir de la condición de contorno  $\sigma_{rr}(R) = 0$ :

$$\left( kR \frac{c_l}{c_t} \right)^2 = 4(1 - ikR).$$

De aquí se sigue (para  $c_l \gg c_t$ ):

$$\omega = \frac{2c_l}{R} \left( 1 - i \frac{c_t}{c_l} \right).$$

La parte real de  $\omega$  da la frecuencia propia de las oscilaciones, y la parte imaginaria, el coeficiente de amortiguamiento; en un medio incomprensible ( $c_l \rightarrow \infty$ ) el amortiguamiento, claro está, no existiría. Estas oscilaciones son un resultado específico de la resistividad del medio al cizallamiento ( $\mu \neq 0$ ). Obsérvese que para ellas es  $kR = 2c_l/c_t$ , es decir, su longitud de onda es grande comparada con  $R$  [es interesante comparar este resultado con el correspondiente a las oscilaciones de una esfera elástica, para las cuales, cuando  $c_l \gg c_t$ , la primera frecuencia propia se determina, según (3), a partir de  $kR = \pi$ ].

### § 23. Ondas elásticas en cristales

La propagación de ondas elásticas en medios anisótropos, esto es, en cristales, es más complicada que en medios isótropos. Para investigar tales ondas debemos acudir a las ecuaciones generales de movimiento

$$\varrho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

y utilizar para  $\sigma_{ik}$  la expresión general (10.3)

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm}.$$

De acuerdo con lo dicho al comienzo del párrafo 22,  $\lambda_{iklm}$  denota siempre módulos de elasticidad adiabáticos.

Substituyendo la expresión para  $\sigma_{ik}$  en las ecuaciones de movimiento obtenemos

$$\begin{aligned}\varrho \ddot{u}_i &= \lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} = \frac{\lambda_{iklm}}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{1}{2} \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l}.\end{aligned}$$

Como el tensor  $\lambda_{iklm}$  es simétrico con respecto a los subíndices  $l$  y  $m$ , podremos intercambiarlos en el primer término que resultará entonces igual al segundo. Como resultado, las ecuaciones de movimiento serán

$$\varrho \ddot{u}_i = \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l}. \quad (23.1)$$

Consideremos una onda elástica monocromática en un cristal. Para ello hemos de buscar una solución de las ecuaciones de movimiento de la forma

$$u_i = u_{0i} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

( $u_{0i}$ -constantes), determinando la relación entre el vector de onda  $\mathbf{k}$  y la frecuencia  $\omega$  de tal manera que esta función satisfaga efectivamente la ecuación (23.1). Al derivar  $u_i$  respecto del tiempo aparecerá un factor  $-i\omega$ , y al derivarlo respecto de  $x_k$ , un factor  $ik_k$ . En resumen, la sustitución precedente convierte la ecuación (23.1) en

$$\varrho \omega^2 u_i = \lambda_{iklm} k_k k_l u_m.$$

Haciendo  $u_i = \delta_{im} u_m$ , podremos reescribirla como

$$(\varrho \omega^2 \delta_{im} - \lambda_{iklm} k_k k_l) u_m = 0. \quad (23.2)$$

Este es un sistema de tres ecuaciones homogéneas de primer grado en las incógnitas  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ . Como es sabido, un tal sistema tiene solución no nula sólo si el determinante de los coeficientes es cero. Deberá entonces cumplirse la condición

$$|\lambda_{iklm} k_k k_l - \varrho \omega^2 \delta_{im}| = 0. \quad (23.3)$$

Esta es una ecuación cúbica en  $\omega^2$ . Tiene, pues, tres raíces que, en general, serán diferentes. Cada raíz da la frecuencia como función del vector de onda  $\mathbf{k}$ <sup>(\*)</sup> Substituyendo sucesivamente las tres raíces en la ecuación (23.2), obtendremos las ecuaciones que dan las componentes del vector desplazamiento correspondiente  $u_i$  (por supuesto, como las ecuaciones son homogéneas, se obtendrán solamente las razones entre las tres componentes de cada vector y no sus valores absolutos; así, pues, cada vector podrá determinarse salvo un factor arbitrario).

La velocidad de propagación de la onda (*velocidad de grupo*) es igual, por definición, a la derivada de la frecuencia respecto del vector de onda. En un cuerpo isótropo la frecuencia es proporcional al módulo de  $\mathbf{k}$ ; la dirección de la velocidad  $\mathbf{U} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  es también la del vector  $\mathbf{k}$ . En los cristales esta relación ya no es válida y la dirección de propagación no coincidirá en general con el vector  $\mathbf{k}$ .

La ecuación (23.3) prueba que  $\omega$  es una función homogénea de primer grado en las componentes  $k_i$ ; si se toma como incógnita el cociente  $\omega/k$ , los coeficientes de la ecuación no dependen de  $\mathbf{k}$ . Luego, la velocidad de propagación  $\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  es

una función homogénea de grado cero en  $k_i$ . Así, pues, la velocidad de una onda es una función de su dirección, pero no de su frecuencia.

Como hay tres tipos de relaciones posibles entre  $\omega$  y  $\mathbf{k}$ , para cada dirección del cristal habrá en general tres velocidades de propagación diferentes para las ondas elásticas. Estas velocidades pueden coincidir solamente en ciertas direcciones excepcionales.

En un medio isótropo a las dos velocidades de propagación diferentes correspondían ondas puramente longitudinales y puramente transversales. Por el contrario, en un cristal a cada velocidad de propagación le corresponde una onda en la cual el vector desplazamiento tiene una componente paralela a la dirección de propagación y otra perpendicular.

Finalmente, debemos tener en cuenta lo siguiente. Para un dado vector de onda  $\mathbf{k}$  en un cristal pueden existir tres ondas con diferentes frecuencias y velocidades de propagación. Es fácil ver que los vectores desplazamiento  $\mathbf{u}$  en estas tres ondas son perpendiculares dos a dos. En efecto, dado el vector  $\mathbf{k}$ , puede considerarse que la ecuación (23.3) determina los valores principales  $\rho\omega^2$  de un tensor de rango dos,  $\lambda_{iklm}k_kk_l$  que es simétrico respecto de los subíndices  $i, m$ <sup>(\*\*)</sup>. Las ecuaciones (23.2) dan entonces los ejes principales de este tensor que, como se sabe, son perpendiculares dos a dos.

(\*) En un cuerpo isótropo, la ecuación (23.3) da el resultado obtenido previamente: una raíz  $\omega^2 = c_l^2 k^2$  y dos raíces coincidentes  $\omega^2 = c_t^2 k^2$ .

(\*\*) Por la simetría del tensor  $\lambda_{iklm}$ , tenemos  $\lambda_{iklm}k_kk_l = \lambda_{kilm}k_kk_l = \lambda_{mlki}k_kk_l$ . La última expresión difiere de  $\lambda_{mklkk_l}$  solamente en la designación de los subíndices  $k$  y  $l$ , de manera que el tensor  $\lambda_{iklm}k_kk_l$  tiene la simetría establecida.

## PROBLEMA

Determinar la frecuencia como función del vector de onda para ondas elásticas que se propagan en un cristal perteneciente al sistema hexagonal.

*Solución.* Las componentes no nulas del tensor  $\lambda_{iklm}$  en las coordenadas  $x, y, z$  están relacionadas con las «coordenadas»  $\xi, \eta, z$  ( $\S$  10) mediante

$$\lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy} = a+b, \quad \lambda_{xxyy} = a-b, \quad \lambda_{xyxy} = b,$$

$$\lambda_{xxzz} = \lambda_{yyzz} = c, \quad \lambda_{xzzz} = \lambda_{yzyz} = d, \quad \lambda_{zzzz} = f,$$

donde hemos escrito

$$\lambda_{\xi\eta\xi\eta} = 4a, \quad \lambda_{\xi\xi\eta\eta} = 8b, \quad \lambda_{\xi\eta\eta\eta} = 2c, \quad \lambda_{\xi\eta\eta\eta} = 2d.$$

El eje  $z$  está dirigido a lo largo del eje senario de simetría; las direcciones de los ejes  $x$  e  $y$  son arbitrarias. Tomemos el plano  $xz$  de tal manera que contenga al vector de onda  $\mathbf{k}$ . Entonces será  $k_x = k \operatorname{sen} \theta$ ,  $k_y = 0$ ,  $k_z = k \cos \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{k}$  y el eje  $z$ . Formando la ecuación (23.3) y luego resolviéndola, obtenemos tres relaciones diferentes entre  $\omega$  y  $\mathbf{k}$ :

$$\omega_1^2 = \frac{k^2}{\varrho} (b \operatorname{sen}^2 \theta + d \cos^2 \theta),$$

$$\omega_2^2 = \frac{k^2}{2\varrho} \left\{ (a+b) \operatorname{sen}^2 \theta + f \cos^2 \theta + d \pm \sqrt{[(a+b-d) \operatorname{sen}^2 \theta + (d-f) \cos^2 \theta]^2 + 4(c+d)^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta} \right\}.$$

## § 24. Ondas de superficie

Un tipo particular de ondas elásticas son aquellas que se propagan cerca de la superficie de un cuerpo sin penetrar en él (*ondas de Rayleigh*). Escribamos la ecuación de movimiento en la forma (22.11) y (22.12)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0, \tag{24.1}$$

donde  $u$  es cualquier componente de los vectores  $\mathbf{u}_l$ ,  $\mathbf{u}_t$ , y  $c$  es la velocidad correspondiente,  $c_l$  o  $c_t$ . La superficie del medio elástico la supondremos plana e infinita. Eligiremos este plano como plano  $xy$ . Supondremos, además, que el cuerpo ocupa el semiespacio  $z < 0$ .

Consideremos una onda de superficie, «plana» y monocromática, que se propaga a lo largo del eje  $x$ . Según esto, buscaremos  $u$  en la forma

$$u = e^{i(kx - \omega t)} f(z).$$

Substituyendo esta expresión en (24.1), obtenemos para  $f(z)$  la ecuación

$$\frac{d^2f}{dz^2} = \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) f.$$

Si  $k^2 - \omega^2/c^2 < 0$ , esta ecuación nos da una función periódica  $f$ , o sea, obtenemos una onda plana ordinaria que no se amortigua dentro del cuerpo. Debemos suponer, pues, que  $k^2 - \omega^2/c^2 > 0$ . Las soluciones para  $f$  son entonces

$$f(z) = \text{const} \cdot \exp \left( \pm z \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \right).$$

La solución con el signo menos correspondería a un aumento ilimitado de la deformación para  $z \rightarrow -\infty$ . Esta solución, evidentemente, carece de sentido y hemos de elegir para el exponente el signo positivo.

Tenemos entonces la siguiente solución de las ecuaciones de movimiento:

$$u = \text{const} \cdot e^{i(kx - \omega t)} e^{kz}, \quad (24.2)$$

donde

$$z = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (24.3)$$

Esta solución corresponde a una onda que se amortigua exponencialmente hacia el interior del cuerpo, o sea, una onda que se propaga solamente cerca de su superficie. El valor de  $z$  determina la rapidez del amortiguamiento.

El verdadero vector desplazamiento es la suma de los vectores  $\mathbf{u}_l$  y  $\mathbf{u}_t$ , cuyas componentes satisfacen la ecuación (24.1) con  $c = c_l$  para  $\mathbf{u}_l$  y  $c = c_t$  para  $\mathbf{u}_t$ . En el caso de ondas de volumen en un medio infinito estas dos partes representan dos

ondas que se propagan independientemente. En el caso ondas de superficie, en cambio, esta división en dos partes independientes no es posible debido a las condiciones de contorno. El vector desplazamiento  $\mathbf{u}$  debe ser una determinada combinación lineal de los vectores  $\mathbf{u}_l$  y  $\mathbf{u}_t$ . Debemos aclarar que estos vectores ya no poseen ahora el significado intuitivo de componentes del desplazamiento en las direcciones paralela y perpendicular a la dirección de propagación.

Para determinar la combinación lineal de los vectores  $\mathbf{u}_l$  y  $\mathbf{u}_t$  que da el desplazamiento correcto  $\mathbf{u}$  debemos utilizar las condiciones de contorno. Éstas, en efecto, proporcionan una relación entre el vector de onda  $\mathbf{k}$  y la frecuencia  $\omega$  y, por consiguiente, determinan también la velocidad de propagación de la onda. En la superficie libre deberá ser  $\sigma_{ik}n_k = 0$ . Como el vector normal  $\mathbf{n}$  es paralelo al eje  $z$ , resulta:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0,$$

o sea,

$$u_{xz} = 0, \quad u_{yz} = 0, \quad \sigma(u_{xx} + u_{yy}) + (1 - \sigma)u_{zz} = 0. \quad (24.4)$$

Como todas las magnitudes son independientes de la coordenada  $y$ , la segunda de estas condiciones da

$$u_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0.$$

Utilizando (24.2), tenemos entonces

$$u_y = 0. \quad (24.5)$$

Así, el vector desplazamiento  $\mathbf{u}$  en una onda de superficie se encuentra en un plano que contiene a la dirección de propagación y es perpendicular a la superficie.

La parte «transversal»  $\mathbf{u}_t$  de la onda debe satisfacer la condición (22.8)  $\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0$ , o

$$\frac{\partial u_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{tz}}{\partial z} = 0.$$

La dependencia de  $u_{tx}$  y  $u_{tz}$  respecto de  $x$  y  $z$  queda determinada por el factor  $e^{ikx+\kappa_t z}$ , donde  $\kappa_t$  está dado por la expresión (24.3) con  $c = c_t$ :

$$\kappa_t = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}}.$$

Esta condición nos lleva a la igualdad

$$iku_{lx} + \kappa_l u_{lz} = 0, \text{ o bien } \frac{u_{lx}}{u_{lz}} = -\frac{\kappa_l}{ik}.$$

Podemos escribir entonces

$$u_{lx} = \kappa_l a e^{ikx + \kappa_l z - i\omega t}, \quad u_{lz} = -ikae^{ikx + \kappa_l z - i\omega t}, \quad (24.6)$$

donde  $a$  es una constante.

La parte «longitudinal»  $\mathbf{u}_l$  satisface la condición (22.9)  $\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0$ , o

$$\frac{\partial u_{lx}}{\partial z} - \frac{\partial u_{lz}}{\partial x} = 0,$$

de donde

$$iku_{lz} - \kappa_l u_{lx} = 0 \left( \kappa_l = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}} \right).$$

Por lo tanto, debe ser

$$u_{lx} = kbe^{ikx + \kappa_l z - i\omega t}, \quad u_{lz} = -i\kappa b e^{ikx + \kappa_l z - i\omega t}, \quad (24.7)$$

donde  $b$  es una constante.

Aplicemos ahora la primera y la tercera de las condiciones (24.4). Expresando  $u_{lk}$  en términos de las derivadas de  $u_i$  e introduciendo las velocidades  $c_l$ ,  $c_t$  podemos escribir esas condiciones en la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} &= 0, \\ c_l^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + (c_l^2 - 2c_t^2) \frac{\partial u_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (24.8)$$

Aquí hay que substituir

$$u_x = u_{lx} + u_{xs}, \quad u_z = u_{lz} + u_{zs}.$$

El resultado es que la primera condición (24.8) nos da

$$a(k^2 + \kappa_t^2) + 2bk\kappa_l = 0. \quad (24.9)$$

mientras que la segunda lleva a la igualdad

$$2ac_t^2\kappa_l k + b[c_t^2(\kappa_t^2 - k^2) + 2c_t^2k^2] = 0.$$

Dividiendo esta ecuación por  $c_t^2$  y substituyendo

$$\kappa_t^2 - k^2 = -\frac{\omega^2}{c_t^2} = -(k^2 - \kappa_t^2)\frac{c_t^2}{c_l^2},$$

la podremos escribir en la forma

$$2a\kappa_l k + b(k^2 + \kappa_t^2) = 0. \quad (24.10)$$

La condición para que las dos ecuaciones homogéneas (24.9) y (24.10) sean compatibles es que

$$(k^2 + \kappa_t^2)^2 = 4k^2\kappa_l\kappa_t$$

o, elevando el cuadrado y substituyendo las expresiones para  $\kappa_t^2$  y  $\kappa_l^2$ :

$$\left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)^4 = 16k^4\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}\right). \quad (24.11)$$

A partir de esta ecuación se determina la relación entre  $\omega$  y  $k$ . Para ello, es conveniente escribir

$$\omega = c_t k \xi; \quad (24.12)$$

$k^8$  se cancela en ambos miembros de la ecuación y, desarrollando, obtenemos para  $\xi$  la ecuación

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8\xi^2\left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right) - 16\left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) = 0. \quad (24.13)$$

Vemos, pues, que  $\xi$  depende solamente del cociente  $c_l/c_t$ , que es una constante,

característica de cada substancia, dependiente a su vez tan sólo del coeficiente de Poisson:

$$\frac{c_t}{c_l} = \sqrt{\frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)}}.$$

La cantidad debe ser, por supuesto, real, positiva y menor que 1 (de manera tal que  $\alpha_t$  y  $\alpha_l$  sean reales). La ecuación (24.13) tiene solamente una raíz que satisface estas condiciones; así, pues, para cada valor de  $c_t/c_l$  se obtiene un solo valor de  $\xi$ .

Por consiguiente, tanto en el caso de ondas de superficie como en el de ondas de volumen la frecuencia es proporcional al número de onda. El coeficiente de proporcionalidad es la velocidad de propagación de la onda,

$$U = c_l \xi. \quad (24.14)$$

Esta ecuación da la velocidad de propagación de la onda de superficie en función de las velocidades  $c_t$  y  $c_l$  de las ondas transversal y longitudinal de volumen. La razón de la amplitud de la parte longitudinal a la transversal de la onda se obtiene, en función de  $\xi$ , mediante la fórmula

$$\frac{a}{b} = -\frac{2 - \xi^2}{2\sqrt{(1 - \xi^2)}}. \quad (24.15)$$

El cociente  $c_t/c_l$  varía, en realidad, entre  $1/\sqrt{2}$  y 0, correspondiendo a variaciones de  $\sigma$  entre 0 y  $1/2$ ;  $\xi$  variará entre 0,874 y 0,955. La figura 21 es un gráfico de la variación de  $\xi$  como función de  $\sigma$ .

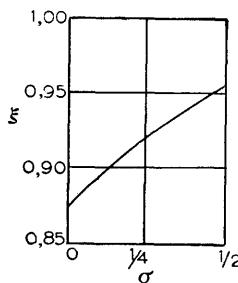


FIG. 21

## PROBLEMA

Una lámina plana de caras paralelas de espesor  $h$  (medio 1) yace sobre un semiespacio elástico (medio 2). Determinar la frecuencia como función del número de onda para ondas transversas en la placa, cuya dirección de oscilación es paralela a las caras de la misma.

*Solución.* Tomemos el plano que separa la placa del semiespacio como plano  $xy$ , hallándose el semiespacio ocupado en  $z < 0$ , y la placa, en  $0 \leq z \leq h$ . En la placa tenemos

$$u_{x1} = u_{z1} = 0, \quad u_{y1} = f(z)e^{i(kx-\omega t)},$$

y en el medio 2 una onda amortiguada:

$$u_{x2} = u_{z2} = 0, \quad u_{y2} = Ae^{\kappa_2 z} e^{i(kx-\omega t)}, \quad \kappa_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_{t2}^2}}.$$

Para la función  $f(z)$  tenemos la ecuación

$$f'' + \kappa_1^2 f = 0, \quad \kappa_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{t1}^2} - k^2}$$

(veremos más adelante que  $\kappa_1^2 > 0$ ); por lo tanto,  $f(z) = B \operatorname{sen} \kappa_1 z + C \cos \kappa_1 z$ . En la superficie libre de la placa ( $z = h$ ) debe ser  $\sigma_{zy} = 0$ , es decir,  $\partial u_{yt}/\partial z = 0$ . En cambio, en la superficie de separación entre ambos medios ( $z = 0$ ) las condiciones son  $u_{y1} = u_{y2}$ ,  $\mu_1 \frac{\partial u_{y1}}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial u_{y2}}{\partial z}$  ( $\mu_1, \mu_2$ , módulos de rigidez para los dos medios). De estas condiciones resultan tres ecuaciones para  $A, B, C$ . La condición de compatibilidad es  $\operatorname{tg} \kappa_1 h = \frac{\mu_2 \kappa_2}{\mu_1 \kappa_1}$ . Esta ecuación nos da  $\omega$  como función implícita de  $k$ ; tiene soluciones solamente para valores reales de  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ , con lo que siempre será  $c_{t2} > \frac{\omega}{k} > c_{t1}$ . Por lo tanto, la propagación de este tipo de ondas es posible sólo si se cumple la condición  $c_{t2} > c_{t1}$ .

## § 25. Vibraciones de varillas y placas

Las ondas que se propagan en varillas y placas delgadas son fundamentalmente diferentes de las que se propagan en medios infinitos en todas direcciones. Estudiaremos aquí las ondas cuya longitud es grande comparada con el grueso de la varilla o de la placa. En el otro caso límite, cuando la longitud de onda es pequeña comparada con el grosor de la varilla o de la placa, estos medios se comportan como infinitos en todas direcciones y se obtendrían para la propagación de las ondas los mismos resultados que en las secciones precedentes.

Debe distinguirse el caso de ondas en las cuales las oscilaciones son paralelas

al eje de la varilla o al plano de la placa de aquel en que las vibraciones son perpendiculares a los mismos. Comenzaremos con el estudio de ondas longitudinales en varillas.

Una deformación longitudinal de la varilla (uniforme en cualquier sección transversal), sin que existan fuerzas externas aplicadas a su superficie lateral, es una extensión o compresión simple. Las ondas longitudinales consisten, pues, en compresiones y extensiones que se propagan a lo largo de la varilla. En una extensión simple, sin embargo, solamente la componente  $\sigma_{zz}$  del tensor de tensiones (supuesto el eje  $z$  en la dirección del eje de la misma) es distinta de cero; entre esta componente y el tensor de deformaciones existe la relación (§ 5):

$$\sigma_{zz} = Eu_{zz} = E \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Substituyendo en la ecuación general de movimiento

$$\varrho \ddot{u}_z = \frac{\partial \sigma_{zk}}{\partial x_k},$$

encontramos

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{\varrho}{E} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0. \quad (25.1)$$

Esta es la ecuación para vibraciones longitudinales en varillas. Su forma es la de la ecuación general de ondas. La velocidad de propagación de las ondas longitudinales en varillas resulta igual a

$$\sqrt{\frac{E}{\varrho}}. \quad (25.2)$$

Comparando esta expresión con la (22.4) para  $c_l$ , vemos que el valor (25.2) es menor que la velocidad de propagación para ondas longitudinales en un medio infinito.

Consideremos ahora las ondas longitudinales en placas delgadas. Las ecuaciones de movimiento para tales vibraciones pueden escribirse inmediatamente substituyendo  $P_x$  y  $P_y$  en las ecuaciones de equilibrio (13.4) por  $-\varrho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$  y  $-\varrho h \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\varrho}{E} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\varrho}{E} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (25.3)$$

Tomemos el caso de una onda « plana » que se propaga a lo largo del eje  $x$ , es decir, una onda en la cual la deformación depende solamente de la coordenada  $x$ , pero no de  $y$ . Entonces, las ecuaciones (25.3) se simplifican considerablemente resultando:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \frac{E}{2\varrho(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = 0. \quad (25.4)$$

Obtenemos así nuevamente simples ecuaciones de ondas. Los coeficientes son diferentes para  $u_x$  y  $u_y$ . La velocidad de propagación de una onda con oscilaciones paralelas a la dirección de propagación ( $u_x$ ) es

$$\sqrt{\frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)}}. \quad (25.5)$$

La velocidad de propagación de una onda ( $u_y$ ) con oscilaciones perpendiculares a la dirección de propagación (pero aún en el plano de la placa) es igual a la velocidad  $c_t$  de las ondas transversales en un medio infinito.

Vemos, pues, que las ondas « longitudinales » en placas y varillas son de naturaleza análoga a las de un medio infinito, de las que difieren sólo en el valor de su velocidad de propagación, que, como antes, es independiente de la frecuencia. Se obtienen resultados completamente diferentes para las llamadas *ondas combantes* en placas y varillas, en las que las oscilaciones son perpendiculares al eje de la varilla o al plano de la placa, o sea, ondas que implican *combamiento*.

Las ecuaciones para oscilaciones libres pueden escribirse directamente a partir de la ecuación de equilibrio (12.5). Para hacerlo debemos reemplazar —  $P$  por la aceleración  $\ddot{\zeta}$  multiplicada por la masa  $\varrho h$  por unidad de superficie de la placa. Esto da

$$\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta = 0, \quad (25.6)$$

donde  $\Delta$  es el Laplaciano bidimensional.

Consideremos una onda elástica monocromática  $y$ , de acuerdo con esto, probemos como solución de (25.6) una función de la forma

$$\zeta = \text{const} \times e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (25.7)$$

donde el vector de onda  $\mathbf{k}$  tiene, por supuesto, solamente componentes  $k_x$  y  $k_y$ . Substituyendo en (25.6) obtenemos la ecuación

$$-\varrho \omega^2 + \frac{h^2 E}{12(1-\sigma^2)} k^4 = 0,$$

de la que resulta la siguiente relación entre la frecuencia y el vector de onda:

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{h^2 E}{12\varrho(1-\sigma^2)}}. \quad (25.8)$$

Así, pues, la frecuencia es en este caso proporcional al cuadrado del módulo del vector de onda, mientras que en ondas en un medio infinito es proporcional al módulo del mismo.

Conociendo la relación entre la frecuencia y el vector de onda, podemos determinar la velocidad de propagación de la onda a partir de la fórmula

$$\mathbf{U} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}.$$

Las derivadas de  $k^2$  respecto a las componentes  $k_x, k_y$  son, respectivamente,  $2k_x, 2k_y$ . La velocidad de propagación de la onda es entonces

$$\mathbf{U} = \sqrt{\frac{h^2 E}{3\varrho(1-\sigma^2)}} \mathbf{k}. \quad (25.9)$$

Resulta, pues, proporcional al vector de onda, y no constante como en el caso de ondas en un medio infinito en tres dimensiones (\*).

Resultados análogos se obtienen para ondas combantes en varillas delgadas. Los combamientos de las varillas se suponen pequeños. Las ecuaciones de movimiento se obtienen substituyendo  $-K_x$  y  $-K_y$  en las ecuaciones de equilibrio para una varilla levemente combada (20.4) por el producto de la aceleración  $\ddot{X}$  o  $\ddot{Y}$  y la masa  $\varrho S$  por unidad de longitud de la varilla ( $S$  es el área transversal). Por lo tanto:

$$\varrho S \ddot{X} = EI_y \frac{\partial^4 X}{\partial z^4}, \quad \varrho S \ddot{Y} = EI_x \frac{\partial^4 Y}{\partial z^4}. \quad (25.10)$$

Probemos nuevamente soluciones de la forma

$$X = \text{const.} \cdot e^{i(kz - \omega t)}, \quad Y = \text{const.} \cdot e^{i(kz - \omega t)}.$$

(\*) El número de onda es  $k = 2\pi/\lambda$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda. La velocidad de propagación, por consiguiente, debería tender a infinito a medida que la longitud de onda tiende a cero. Este resultado, físicamente absurdo, se obtiene porque la fórmula (25.9), en realidad, no es válida para ondas cortas.

Substituyendo en (25.10) obtenemos las siguientes relaciones entre la frecuencia y el vector de onda:

$$\omega = \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}} k^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{EI_x}{\rho S}} k^2 \quad (25.11)$$

para vibraciones en las direcciones  $x$  e  $y$ , respectivamente. Las velocidades de propagación correspondientes son:

$$U^{(x)} = 2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}} k, \quad U^{(y)} = 2 \sqrt{\frac{EI_x}{\rho S}} k. \quad (25.12)$$

Finalmente, hay un caso particular interesante de vibraciones en varillas: las denominadas *vibraciones torsionales*. Las ecuaciones de movimiento correspondientes se obtienen igualando  $C \frac{\partial \tau}{\partial z}$  ( $\S$  18) a la derivada temporal del momento angular de la varilla por unidad de longitud. Este momento angular es  $\rho I \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , donde  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  es la velocidad angular ( $\varphi$  es el ángulo de rotación de la sección considerada) e  $I = \int (x^2 + y^2) df$  es el momento de inercia de la sección transversal respecto del centro de masas; para vibraciones torsionales puras, cada sección transversal realiza rotaciones alrededor del centro de masas, que permanece en reposo. Haciendo  $\tau = \partial \varphi / \partial z$ , obtenemos una ecuación de movimiento de la forma

$$C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (25.13)$$

Vemos, pues, que la velocidad de propagación de las oscilaciones torsionales a lo largo de la varilla es igual a

$$\sqrt{\frac{C}{\rho I}}. \quad (25.14)$$

#### PROBLEMAS

1. Determinar las frecuencias de las vibraciones características longitudinales de una varilla de longitud  $l$ , fija en un extremo, y libre en el otro.

*Solución.* En el extremo fijo ( $z = 0$ ) debemos tener  $u_z = 0$ , y en el extremo libre ( $z = l$ ),  $\sigma_{zz} = Eu_{zz} = 0$ ; o sea,  $\partial u_z / \partial z = 0$ . Probemos como solución de la ecuación (25.1) una función de la forma

$$u_z = A \cos(\omega t + \alpha) \operatorname{sen} kz,$$

donde  $k = \omega \sqrt{(\rho/E)}$ . De la condición  $z = l$  se deduce  $\cos kl = 0$ ; por lo tanto, las frecuencias características son

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{\pi}{2l} (2n+1) \quad ,$$

donde  $n$  es un entero.

2. Análogo al problema 1, pero con ambos extremos o libres o fijos.

*Solución.* En ambos casos

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{\pi}{l} n.$$

3. Determinar las frecuencias características de vibración de una cuerda de longitud  $l$ .

*Solución.* La ecuación de movimiento de una cuerda es

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\rho S}{T} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0;$$

[cf., la ecuación de contorno (20.17)]. Las condiciones de contorno son  $X = 0$  para  $z = 0$  y  $z = l$ . Las frecuencias características son

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho S}{T}} \frac{n\pi}{l}.$$

4. Determinar las vibraciones características transversales de una varilla (de longitud  $l$ ) cuyos extremos están sujetos.

*Solución.* Substituyendo  $X = X_0(z) \cos(\omega t + \alpha)$  en la ecuación (25.10) obtenemos

$$\frac{d^4 X_0}{dz^4} = \kappa^4 X_0,$$

donde  $\omega^2 = \frac{\rho S}{EI_y}$ . La integral general de esta ecuación es

$$X_0 = A \cos \kappa z + B \operatorname{sen} \kappa z + C \cosh \kappa z + D \operatorname{senh} \kappa z.$$

Las constantes  $A, B, C$  y  $D$  se determinan a partir de las condiciones de contorno  $X = \frac{dX}{dz} = 0$  para  $z = 0$  y  $z = l$ . El resultado es

$$X_0 = A \left\{ (\operatorname{sen} \kappa l - \operatorname{senh} \kappa l) (\cos \kappa z - \cosh \kappa z) - (\cos \kappa l - \cosh \kappa l) (\operatorname{sen} \kappa z - \operatorname{senh} \kappa z) \right\}$$

además de la ecuación  $\cos \kappa l \cosh \kappa l = 1$ , cuyas raíces determinan las frecuencias características. La frecuencia característica mínima es

$$\omega_{\min} = \frac{22,4}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}}.$$

5. Análogo al problema 4 pero con los extremos apoyados.

*Solución.* De manera análoga al problema 4, obtenemos  $X_0 = A \operatorname{sen} \kappa z$ ; las frecuencias características están dadas por  $\operatorname{sen} \kappa l = 0$ , o sea,  $\kappa = \frac{n\pi}{l}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). La mínima frecuencia característica es

$$\omega_{\min} = \frac{9,87}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}}.$$

6. Análogo al problema 4, pero para una varilla con un extremo sujeto y el otro libre.

*Solución.* Obtenemos para el desplazamiento

$$X_0 = A \{ (\cos \kappa l + \cosh \kappa l) (\cos \kappa z - \cosh \kappa z) + (\operatorname{sen} \kappa l - \operatorname{senh} \kappa l) (\operatorname{sen} \kappa z - \operatorname{senh} \kappa z) \}$$

(el extremo sujeto se halla en  $z = 0$ , y el extremo libre, en  $z = l$ ) y para las frecuencias características la ecuación  $\cos \kappa l \cosh \kappa l + 1 = 0$ . La frecuencia mínima es

$$\omega_{\min} = \frac{3,52}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}}.$$

7. Determinar las vibraciones características de una placa rectangular de lados  $a$  y  $b$  con sus bordes apoyados.

*Solución.* Efectuando la sustitución

$$\zeta = \zeta_0(x, y) \cos(\omega t + \alpha)$$

en la ecuación (25.6), obtenemos  $\Delta\Delta\zeta_0 - \alpha^4\zeta_0 = 0$ ,  $\alpha^4 = \omega^2 = 12\rho(1-\sigma^2)/h^2E$ . Tomemos como ejes coordenados los bordes de la placa. Las condiciones de contorno (12.11) serán

$$\begin{aligned}\zeta &= \partial^2\zeta/\partial x^2 = 0, \text{ para } x = 0, x = a; \\ \zeta &= \partial^2\zeta/\partial y^2 = 0, \text{ para } y = 0, y = b.\end{aligned}$$

La solución que satisface estas condiciones es

$$\zeta_0 = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

donde  $m$  y  $n$  son enteros. Las frecuencias están dadas por

$$\omega = h \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\sigma^2)}} \pi^2 \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right].$$

8. Determinar las frecuencias características de vibración de una membrana rectangular de lados  $a$  y  $b$ .

*Solución.* La ecuación de vibración de una membrana es  $T\Delta\zeta = \rho h \ddot{\zeta}$  [cf. la ecuación de equilibrio (14.9)]. Los bordes de la membrana están fijos ( $\zeta = 0$ ). La solución correspondiente a una membrana rectangular es

$$\zeta = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \omega t,$$

donde las frecuencias características son

$$\omega^2 = \frac{T}{\rho h} \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

con  $m$  y  $n$  enteros.

9. Determinar la velocidad de propagación de vibraciones torsionales en una varilla cuya sección transversal es un círculo, una elipse, un triángulo equilátero o un rectángulo (con  $b \ll a$ ).

*Solución.* Para una sección circular de radio  $R$  el momento de inercia es  $I = \frac{\pi R^4}{2}$ ; tomando para  $C$  el valor del problema 1, § 16, encontramos que la velocidad es  $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ , que coincide con la velocidad  $c_t$ . Análogamente (utilizando los resultados de los problemas 2 y 4, § 16), encontramos

para una sección elíptica la velocidad  $\frac{2ab}{a^2+b^2} \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$ ; para una sección transversal de la varilla

en forma de triángulo equilátero,  $\sqrt{\frac{3\mu}{5\varrho}}$ ; para una sección rectangular (con  $a \ll b$ )  $2 \frac{h}{d} \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$ .

Todas estas velocidades son menores que  $c_t$ .

10. La superficie de un fluido incompresible de profundidad infinita está cubierta por una delgada placa elástica. Determinar la relación entre el número de onda y la frecuencia para ondas que se propagan simultáneamente en la placa y cerca de la superficie del fluido.

*Solución.* Elijamos el plano de la placa como plano  $z = 0$ , y el eje  $x$ , en la dirección de propagación de la onda. El fluido se halla en el semiespacio  $z < 0$ . La ecuación de movimiento de la placa libre sería

$$\varrho_0 h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = - \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4},$$

donde  $\varrho_0$  es la densidad del material de la placa. Cuando se halla presente el fluido, en el segundo miembro de la ecuación debe incluirse la fuerza que ejerce el fluido sobre la unidad de área de la placa, o sea, la presión  $p$  del mismo. Pero la presión en la onda puede expresarse en términos del potencial de velocidades mediante  $p = -\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  (despreciamos la gravedad). Por ello obtenemos la ecuación

$$\varrho_0 h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = - \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} - \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (1)$$

Además, la componente normal de la velocidad del líquido en la superficie debe ser igual a la de la placa, lo que da la condición

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (2)$$

En todo el fluido el potencial debe satisfacer la ecuación

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

Probemos para  $\zeta$  una función de la forma  $\zeta = \zeta_0 e^{ikx-i\omega t}$  (onda móvil); de acuerdo con esto, tomemos como solución de la ecuación (3) la onda superficial  $\varphi = \varphi_0 e^{i(kx-\omega t)} e^{kz}$  que se amortigua en el interior del fluido. Substituyendo estas expresiones en (1) y (2), obtenemos dos ecuaciones para  $\varphi_0$  y  $\zeta_0$ ; la condición de compatibilidad conduce a

$$\omega^2 = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \cdot \frac{k^5}{\varrho + h\varrho_0 k}.$$

## § 26. Vibraciones anarmónicas

Toda la teoría de las vibraciones elásticas que acabamos de exponer es aproximada en el mismo sentido en que lo es toda teoría de la elasticidad que está basada en la ley de Hooke. Recordemos que la teoría parte de un desarrollo de la energía elástica en potencias del tensor de deformaciones que incluye términos hasta el segundo orden exclusivamente. Las componentes del tensor de tensiones son entonces funciones lineales de las componentes del tensor de deformaciones y las ecuaciones de movimiento resultan lineales.

La propiedad más característica de las ondas elásticas en esta aproximación es que cualquier onda puede obtenerse simplemente por superposición (como combinación lineal) de ondas monocromáticas. Cada una de ellas se propaga independientemente y podría existir por sí misma, sin que sea necesario la presencia de ningún otro movimiento. Podemos decir que en un mismo medio elástico pueden propagarse simultáneamente varias ondas monocromáticas sin « interactuar » entre sí.

Sin embargo, estas propiedades ya no son válidas en aproximaciones subsiguientes. Los efectos que aparecen en estas nuevas aproximaciones, aunque en general pequeños, pueden tener importancia en ciertos fenómenos. Se les llama habitualmente *efectos anarmónicos* porque las ecuaciones de movimiento correspondientes no son lineales y no admiten soluciones periódicas (armónicas) simples.

Consideremos aquí efectos anarmónicos de tercer orden, provenientes de términos de la energía elástica que son cúbicos en las deformaciones. Sería demasiado complicado escribir las ecuaciones de movimiento en su forma general. Sin embargo, la naturaleza de los efectos resultantes puede ponerse en claro como sigue. Los términos cúbicos de la energía elástica dan términos cuadráticos en el tensor de tensiones y, por consiguiente, también en las ecuaciones de movimiento. Supongamos que en estas ecuaciones pasamos todos los términos lineales al primer miembro y todos los términos cuadráticos al segundo. Al resolver estas ecuaciones por el método de aproximaciones sucesivas hemos de prescindir de los términos cuadráticos en la primera aproximación. Esto nos lleva a las ecuaciones lineales ordinarias, cuya solución  $\mathbf{u}_0$  puede representarse como superposición de ondas monocromáticas móviles:  $\text{const.} \cdot e^{i(kr - \omega t)}$ , con relaciones definidas entre  $\omega$  y  $k$ . Al pasar a la segunda aproximación, debemos hacer  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$  y conservar sólo los términos en  $\mathbf{u}_0$  en los segundos miembros de las ecuaciones (los términos cuadráticos). Como  $\mathbf{u}_0$ , por definición, satisface las ecuaciones lineales homogéneas con los segundos miembros iguales a cero, los términos en  $\mathbf{u}_0$  deben cancelarse entre sí en los primeros miembros. El resultado es un sistema de ecuaciones no homogéneas para las componentes del vector  $\mathbf{u}_1$  en el que los segundos miembros contienen solamente funciones conocidas de las coordenadas y del tiempo. Estas funciones que se obtienen substituyendo  $\mathbf{u}$  por  $\mathbf{u}_0$  en los segundos miembros de las ecuaciones originales, son sumas de términos, cada uno de los cuales es proporcional a

o a

$$e^{i[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\omega_1 - \omega_2)t]}$$

$$e^{i[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\omega_1 + \omega_2)t]},$$

donde  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  son las frecuencias y los vectores de onda de dos ondas monocromáticas cualesquiera, soluciones de la primera aproximación.

Como es sabido, una integral particular de las ecuaciones lineales de este tipo es una suma de términos que contienen los mismos factores exponenciales que los términos independientes (segundos miembros) con coeficientes convenientemente elegidos. Cada uno de esos términos corresponde a ondas móviles de frecuencia  $\omega_1 \pm \omega_2$  y vectores de onda  $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$ . Las frecuencias correspondientes a la suma y a la diferencia de las ondas originales se llaman *frecuencias de combinación*. Por lo tanto, los efectos anarmónicos de tercer orden traen como resultado que al conjunto de ondas monocromáticas fundamentales (de frecuencias  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  ... y vectores de onda  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$ , ...) se le superponen otras « ondas » de débil intensidad cuyas frecuencias son las frecuencias de combinación tales como  $\omega_1 \pm \omega_2$  y cuyos vectores de onda son de la forma  $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$ . Hablamos aquí de « ondas » entre comillas debido a que son un efecto correctivo y no pueden existir por sí mismas excepto en ciertos casos especiales (véase más adelante). En general los valores de  $\omega_1 \pm \omega_2$  y  $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$  no satisfacen las relaciones existentes entre frecuencias y vectores de onda para ondas monocromáticas.

Es evidente sin embargo que puede ocurrir que para valores particulares de  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\mathbf{k}_2$ , una de las relaciones para ondas monocromáticas en el medio considerado valga también para  $\omega_1 + \omega_2$  y  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  (por simplicidad consideraremos solamente las sumas y no las diferencias). Escribiendo  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ,  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ , podemos decir que, matemáticamente hablando,  $\omega_3$  y  $\mathbf{k}_3$  corresponden a ondas que satisfacen las ecuaciones lineales homogéneas de movimiento (con cero en el segundo miembro) de la primera aproximación. Si los segundos miembros de las ecuaciones de la segunda aproximación contienen términos proporcionales a  $e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} - \omega_3 t)}$ , entonces, como es sabido, una integral particular será una onda con la misma frecuencia y cuya amplitud crece indefinidamente con el tiempo.

Por lo tanto, la superposición de dos ondas monocromáticas de valores de  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\mathbf{k}_2$  tales que las sumas  $\omega_3$ ,  $\mathbf{k}_3$  satisfacen la condición anterior produce, debido a los efectos anarmónicos, una resonancia: se forma una nueva onda monocromática (con parámetros  $\omega_3$ ,  $\mathbf{k}_3$ ) cuya amplitud aumenta con el tiempo y que finalmente deja de ser pequeña. Es evidente que si una onda con  $\omega_3$ ,  $\mathbf{k}_3$  se ha formado mediante la superposición de ondas con  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\mathbf{k}_2$ , la superposición de ondas con  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$ ,  $\omega_3$ ,  $\mathbf{k}_3$  también producirá una resonancia para  $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ ,  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1$  y, análogamente,  $\mathbf{k}_2$ ,  $\omega_2$  y  $\mathbf{k}_3$ ,  $\omega_3$  darán origen a la onda  $\mathbf{k}_1$ ,  $\omega_1$ .

En particular, para un cuerpo isotrópico  $\omega$  está relacionada con  $\mathbf{k}$  por  $\omega = c_l k$  o  $\omega = c_l k$  con  $c_l > c_t$ . Es fácil averiguar en qué casos es posible que se cumpla una de estas dos ecuaciones para cada una de las tres combinaciones de ondas  $\omega_1$ ,

$\mathbf{k}_1$ ;  $\omega_2$ ,  $\mathbf{k}_2$  y  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ,  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ . Si  $\mathbf{k}_1$  y  $\mathbf{k}_2$  no están en la misma dirección, se tendrá  $k_3 < k_1 + k_2$ ; es claro, por consiguiente, que la resonancia puede ocurrir solamente en los dos siguientes casos: (1) las ondas  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$  y  $\omega_2$ ,  $\mathbf{k}_2$  son transversales y la onda  $\omega_3$ ,  $\mathbf{k}_3$  es longitudinal; (2) una de las ondas  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$ , u  $\omega_2$ ,  $\mathbf{k}_2$  es transversal, la otra longitudinal y la onda  $\omega_3$ ,  $\mathbf{k}_3$  es longitudinal. En cambio, si los vectores  $\mathbf{k}_1$  y  $\mathbf{k}_2$  tienen la misma dirección, la resonancia sólo puede ocurrir si las tres ondas son transversales o las tres longitudinales.

El efecto anarmónico con resonancia puede ocurrir aún cuando exista una sola onda, de parámetros  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$ . En este caso, los segundos miembros de las ecuaciones de movimiento contienen términos proporcionales a  $e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)}$ . Pero si  $\omega_1$  y  $\mathbf{k}_1$  satisfacen la condición habitual, también la satisface  $2\omega_1$  y  $2\mathbf{k}_1$ , porque esta condición es homogénea y de primer grado. Por lo tanto, el efecto anarmónico conduce a que, junto con las ondas monocromáticas  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$  previamente obtenidas, aparezcan ondas  $2\omega_1$ ,  $2\mathbf{k}_1$  o sea con frecuencia doble y vector de onda doble, cuya amplitud crece con el tiempo.

Finalmente, vamos a discutir brevemente cómo podemos establecer las ecuaciones de movimiento incluyendo los términos anarmónicos. El tensor de deformaciones debe definirse ahora por la expresión completa (1.3):

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right), \quad (26.1)$$

en la que no cabe prescindir de los términos cuadráticos en  $u_i$ . Además, la expresión general que da la densidad de energía(\*)  $\mathcal{E}$ , para cuerpos con una dada simetría, ha de escribirse como un escalar formado con las componentes del tensor  $u_{ik}$  y las componentes de ciertos tensores constantes que contengan las características del medio; este escalar contendrá términos hasta la potencia adecuada de  $u_{ik}$ . Substituyendo la expresión (26.1) para  $u_{ik}$  y omitiendo términos de órdenes mayores que el de esa potencia, encontramos una expresión para la energía  $\mathcal{E}$  como función de las derivadas  $\partial u_i / \partial x_k$  con el grado de aproximación requerido.

A fin de obtener las ecuaciones de movimiento, observemos lo que sigue. La variación  $\delta \mathcal{E}$  puede escribirse

$$\delta \mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_k},$$

(\*) Aquí utilizamos la energía interna  $\mathcal{E}$  en lugar de la energía libre  $F$  porque se hallan involucradas solamente vibraciones adiabáticas.

o también, haciendo

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)}, \quad (26.2)$$

en la forma siguiente:

$$\delta \mathcal{E} = \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} \delta u_i) - \delta u_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}.$$

Los coeficientes de  $-\delta u_i$  son las componentes de la fuerza por unidad de volumen del cuerpo. Su expresión formal es la misma que antes y, por consiguiente, las ecuaciones de movimiento pueden escribirse

$$\rho_0 \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (26.3)$$

donde  $\rho_0$  es la densidad del cuerpo sin deformar y las componentes del tensor  $\sigma_{ik}$  están dadas ahora por (26.2), con  $\mathcal{E}$  escrita con la precisión requerida. El tensor  $\sigma_{ik}$  ya no es simétrico(\*)

#### PROBLEMA

Escribir la expresión general de la energía elástica de un cuerpo isotrópico en tercera aproximación.

*Solución.* Con las componentes de un tensor simétrico de rango dos podemos formar dos escalares cuadráticos ( $u_{ik}^2$  y  $u_{il}^2$ ) y tres cúbicos ( $u_{il}^3$ ,  $u_{ll}u_{ik}^2$  y  $u_{ik}u_{il}u_{kl}$ ). Por lo tanto, el escalar más general que contiene términos cuadráticos y cúbicos en  $u_{ik}$  con coeficientes escalares (porque el cuerpo es isotrópico) es

$$\mathcal{E} = \mu u_{ik}^2 + \left( \frac{K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) u_{ll}^2 + \frac{A}{3} u_{ik}u_{il}u_{kl} + Bu_{ik}^2 u_{ll} + \frac{C}{3} u_{ll}^3$$

(\*) Debe señalarse que  $\sigma_{ik}$  no significa ya la densidad de flujo de momento (tensor de tensiones). En la teoría ordinaria esta interpretación se obtuvo integrando la densidad de fuerzas de volumen  $\partial \sigma_{ik} / \partial x_k$  en todo el volumen del cuerpo. Para llegar a este resultado era esencial el hecho de que, al realizar la integración, no hicíésemos distinción entre las coordenadas antes y después de la deformación. Sin embargo, en aproximaciones sucesivas esta distinción debe hacerse y la superficie límite del recinto de integración ya no coincidirá con la superficie real después de la deformación.

Se ha demostrado en § 2 que la simetría del tensor  $\sigma_{ik}$  es una consecuencia de la conservación del momento angular. Ese resultado ya no es válido, pues la «densidad de momento angular» ya no es  $x_i u_k - x_k u_i$  sino  $(x_i + u_i)\dot{u}_k - (x_k + u_k)\dot{u}_i$ .

(los coeficientes de  $u_{ik}^2$  y  $u_{li}^2$  se han expresado en términos de los módulos de compresión y rigidez y  $A$ ,  $B$ ,  $C$  son tres nuevas constantes). Substituyendo la expresión (26.1) para  $u_{ik}$  y conservando términos hasta el tercer orden inclusive, encontramos que la energía elástica es

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = & \frac{\mu}{4} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)^2 + \left( \mu + \frac{A}{4} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \\ & + \left( \frac{B+K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{A}{12} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \frac{B}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \\ & + \frac{C}{3} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)^3.\end{aligned}$$



## CATÁTULO IV

### DISLOCACIONES

#### § 27. Deformaciones elásticas y dislocaciones

Las deformaciones elásticas en un cristal pueden deberse no sólo a la acción sobre él de fuerzas externas, sino también a la existencia en el cristal de defectos internos de estructura. Las llamadas *dislocaciones* constituyen la forma principal de tales defectos, que afectan de manera esencial a las propiedades mecánicas de los cristales. El estudio de las propiedades de las dislocaciones desde un punto de vista atómico, microscópico, no entra, por supuesto, en el plan de este libro; consideraremos aquí sólo los aspectos puramente macroscópicos de estos fenómenos, desde el punto de vista de la teoría de la elasticidad. Sin embargo, para comprender mejor el significado físico de las relaciones expuestas, recordaremos previamente mediante dos sencillos ejemplos en qué consiste el carácter de los defectos por dislocación desde el punto de vista de la estructura de la red cristalina.

Imaginemos que en una red cristalina (un corte de la cual se representa en la figura 22) se introduce un semiplano cristalino «extra» (que coincide en el dibujo con el semiplano superior  $y, z$ ). La línea del borde de este semiplano (el eje  $z$ , perpendicular al plano de la figura) se llama en este caso *dislocación de borde*. La deformación de la estructura de la red en las proximidades inmediatas de la dislocación

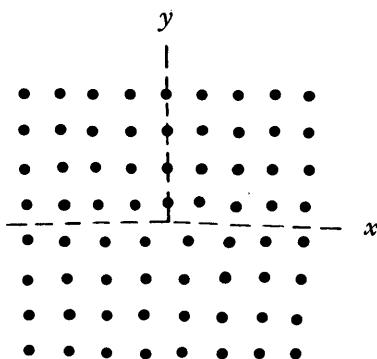


FIG. 22

es grande, pero ya a distancias del orden de algunos períodos, los planos cristalinos se continúan uno en otro casi de forma regular. La deformación existe, sin embargo, también lejos de la dislocación. Así, se manifiesta claramente al moverse en el plano  $x$ , y a lo largo de un contorno cerrado alrededor del origen de coordenadas, que pasa por los nodos de la red: si se define el vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$  de cada nodo a partir de su posición en la red ideal, el incremento total de este vector al girar será distinto de cero e igual a un período a lo largo del eje  $x$ .

Otro tipo de dislocación puede representarse intuitivamente como resultado de un «corte» de la red según un semiplano, después del cual las partes de la red situadas a uno y otro lado del corte se desplazan un período en sentidos opuestos, una a lo largo de la otra, paralelamente al borde de la sección (en este caso el borde se llama *dislocación helicoidal*). La presencia de tal dislocación convierte los planos cristalinos de la red en una superficie helicoidal (semejante a una escalera de caracol sin peldaños). En una vuelta completa alrededor de la línea de dislocación (el eje de la superficie helicoidal) el vector de desplazamiento de los nodos recibe un incremento de un período, paralelamente a este eje. En la figura 23 está esquematizado el corte descrito.

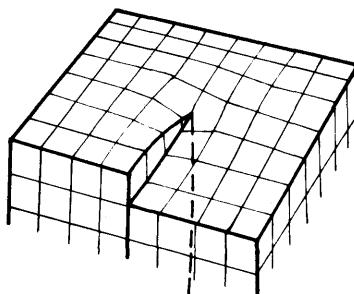


FIG. 23

Desde un punto de vista macroscópico, la deformación por dislocación de un cristal, considerado como medio continuo, goza en el caso general de la siguiente propiedad: al circular sobre cualquier contorno cerrado  $L$  que rodee la línea de dislocación  $D$ , el vector de desplazamiento elástico  $\mathbf{u}$  recibe un incremento definido y finito  $\mathbf{b}$ , igual (en módulo y dirección) a uno de los períodos de la red; el vector constante  $\mathbf{b}$  se llama *vector de Burgers* de la dislocación considerada. Esta propiedad se escribe en la forma

$$\oint_L \mathbf{d}u_i = \oint_L \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k = -b_i, \quad (27.1)$$

conveniéndose que el contorno se recorre en una dirección ligada mediante la regla del tirabuzón con la dirección elegida para el vector tangente a la línea de dislocación  $\tau$  (fig. 24)(\*). La línea de dislocación es una línea de puntos singulares del campo de deformación.

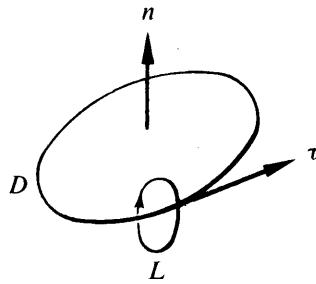


FIG. 24

Evidentemente, el vector de Burgers  $\mathbf{b}$  es necesariamente constante a lo largo de toda la línea de dislocación. Es evidente también que la línea de dislocación no puede, simplemente, terminar dentro del cristal. Sus extremos deben salir a la superficie del mismo, o (como generalmente ocurre en los casos reales) la línea debe formar un lazo cerrado.

La condición (27.1) expresa, en otras palabras, que cuando existe dislocación el vector de desplazamiento es una función no uniforme de las coordenadas, que recibe un incremento dado al rodear la línea de dislocación. Físicamente, por supuesto, no existe ninguna falta de uniformidad: el incremento  $\mathbf{b}$  denota un corrimiento adicional de los puntos de la red en uno de los períodos, lo que por lo común no altera su estado.

Para lo que sigue será conveniente introducir la notación

$$w_{ik} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \quad (27.2)$$

con ayuda de la cual la condición (27.1) se escribe en la forma

$$\oint_L w_{ik} dx_i = -b_k \quad (27.3)$$

(\*) A los casos sencillos de las dislocaciones de borde y helicoidal, mencionados más arriba, corresponden líneas  $D$  rectas, a lo largo de las cuales  $\tau \perp \mathbf{b}$  o  $\tau \parallel \mathbf{b}$ . Señalemos también que en la fig. 22 las dislocaciones de borde con sentidos opuestos de  $\mathbf{b}$  se distinguen en que el semiplano cristalino «extra» está por encima o por debajo del plano  $x, z$  (se dice que tales dislocaciones tienen distinto signo).

El tensor  $w_{ik}$  (no simétrico) recibe el nombre de *tensor de distorsión*. Su parte simétrica da el habitual tensor de la deformación:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} (w_{ik} + w_{ki}). \quad (27.4)$$

Según lo dicho anteriormente, los tensores  $w_{ik}$  y  $u_{ik}$  (y con ellos también el tensor de las tensiones  $\sigma_{ik}$ ) son funciones uniformes de las coordenadas, en contraste con la función no uniforme  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ .

La condición (27.3) se puede escribir también en forma diferencial. Para esto transformaremos la integral a lo largo del contorno  $L$  en una integral sobre una superficie cualquiera  $S_L$ , apoyada en este contorno(\*):

$$\oint_L w_{mk} dx_m = \int_{S_L} e_{ilm} \frac{\partial w_{mk}}{\partial x_l} df_i.$$

El vector constante  $b_k$  a su vez se representará en forma de integral sobre la misma superficie con ayuda de la función  $\delta$  bidimensional:

$$b = \int_{S_L} \tau_i b \delta_k(\xi) df_i, \quad (27.5)$$

donde  $\xi$  es el radio-vector bidimensional, contado a partir del eje de la dislocación en el plano perpendicular al vector  $\tau$  del punto dado. Dada la arbitrariedad del contorno  $L$ , la igualdad de estas integrales significa igualdad de los integrados:

$$e_{ilm} \frac{\partial w_{mk}}{\partial x_l} = -\tau_i b \delta_k(\xi). \quad (27.6)$$

Esta es la relación diferencial buscada(\*\*).

(\*) La transformación se efectúa, según el teorema de Stokes, reemplazando  $dx_m$  por el operador

$$dx_m \rightarrow df_i e_{ilm} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

donde  $e_{ilm}$  es el tensor antisimétrico unitario.

(\*\*) Señalemos, para evitar malentendidos, que sobre la misma línea de dislocación ( $\xi \rightarrow 0$ ), la representación de  $w_{ik}$  en forma de derivadas (27.2) carece de sentido, pues es una línea de puntos singulares.

El campo de desplazamiento  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , alrededor de la dislocación, puede expresarse en forma general si se conoce el tensor de Green  $G_{ik}(\mathbf{r})$  de las ecuaciones de equilibrio del medio anisótropo considerado, esto es, la función que determina la componente  $u_i$  del desplazamiento provocado en un medio ilimitado por una fuerza unitaria concentrada en el origen de coordenadas y dirigida según el eje  $x_k$  (§ 8). Esto es fácil de hacer con ayuda del siguiente procedimiento formal.

En lugar de buscar las soluciones no uniformes de las ecuaciones de equilibrio, consideraremos  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  como una función uniforme, conviniendo que experimenta un salto dado  $\mathbf{b}$  sobre una superficie arbitrariamente elegida  $S_D$ , que se apoya sobre el lazo de dislocación  $D$ . Entonces el tensor de la deformación, definido formalmente según (27.4), tendrá sobre la «superficie de discontinuidad» una singularidad de tipo  $\delta$ :

$$u_{ik}^{(S)} = \frac{1}{2} (n_i b_k + n_k b_i) \delta(\zeta), \quad (27.7)$$

donde  $\zeta$  es la coordenada contada a partir de la superficie  $S_D$  a lo largo de la normal  $\mathbf{n}$  (dirigida respecto de  $\tau$  según lo indica la fig. 24).

Como en realidad no existe ninguna singularidad física en el espacio que rodea la dislocación, el tensor de tensiones  $\sigma_{ik}$ , como ya indicamos, debe ser una función continua y uniforme en todas partes. En cambio, con el tensor de la deformación (27.7) está formalmente relacionado el tensor de las tensiones  $\sigma_{ik}^{(S)} = \lambda_{iklm} u_{lm}^{(S)}$ , que también tiene una singularidad en la superficie  $S_D$ . Para eliminarlo, es necesario introducir fuerzas de volumen ficticias, distribuidas sobre la superficie  $S_D$  con una determinada densidad  $f_i^{(S)}$ . Las ecuaciones de equilibrio cuando existen fuerzas de volumen tienen la forma  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i^{(S)} = 0$  [c. f. (2.7)]. De aquí resulta claro que es necesario hacer

$$f_i^{(S)} = - \frac{\partial \sigma_{ik}^{(S)}}{\partial x_k} = - \lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}^{(S)}}{\partial x_k}. \quad (27.8)$$

De este modo, el problema de la determinación de la función no uniforme  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  es equivalente al de hallar una función uniforme, pero discontinua, en presencia de fuerzas de volumen definidas por las fórmulas (27.7) y (27.8). Podemos ahora utilizar la fórmula

$$u_i(\mathbf{r}) = \int G_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f_j^{(S)}(\mathbf{r}') dV'.$$

Sustituyendo aquí (27.8), efectuemos la integración por partes; hecho esto, la integración de la función  $\delta$  es trivial y se obtiene:

$$u_i(\mathbf{r}) = -\lambda_{jklm} b_m \int_{S_D} n_l \frac{\partial}{\partial x_k} G_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') df' \quad (27.9)$$

De esta manera queda resuelto el problema propuesto (\*).

La deformación (27.9) adopta su forma más sencilla lejos del lazo de dislocación cerrado. Si se imagina el lazo ubicado cerca del origen de coordenadas, a distancias  $r$  grandes (en comparación con sus dimensiones lineales), tenemos:

$$u_i(\mathbf{r}) = -\lambda_{jklm} d_{lm} \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{r})}{\partial x_k}, \quad (27.10)$$

donde

$$d_{ik} = S_i b_k, \quad S_i = \int_{S_D} n_i df = \frac{1}{2} e_{ikl} \oint_D x_k dx_l, \quad (27.11)$$

y  $e_{ikl}$  es el tensor unitario antisimétrico. Las componentes del vector axil  $S$  son iguales a las áreas delimitadas por las proyecciones del lazo  $D$  sobre los planos perpendiculares a los respectivos ejes de coordenadas; es natural llamar al tensor  $d_{ik}$  tensor del *momento de dislocación*. Las componentes del tensor  $G_{ij}$  son funciones homogéneas de primer orden de las coordenadas  $x, y, z$  (pág. 42). Por esta razón, la (27.10) nos dice que  $u_i \sim 1/r^2$ . De acuerdo con esto, el campo de tensiones  $\sigma_{ik} \sim 1/r^3$ .

Es fácil determinar también el carácter de la dependencia espacial de las tensiones elásticas alrededor de una dislocación rectilínea. En coordenadas cilíndricas  $z, r, \varphi$  (con el eje  $z$  a lo largo de la línea de dislocación) la deformación dependerá sólo de  $r$  y  $\varphi$ . La integral (27.3) no debe variar, en particular, al efectuar una transformación de semejanza arbitraria sobre cualquier contorno en el plano  $x, y$ . Es evidente que esto es posible sólo si todas las  $w_{ik} \sim 1/r$ . Luego, el tensor  $u_{ik}$  será proporcional a la misma potencia  $1/r$ , y con él también las tensiones:  $\sigma_{ik} \sim 1/r$  (\*\*).

Aunque hasta ahora hemos hablado sólo de las dislocaciones, las fórmulas obtenidas son aplicables también a las deformaciones provocadas por otra clase de

(\*) El tensor  $G_{ij}$  para un medio anisótropo fue hallado por I. M. LIFSHITZ y L. N. ROZENTSVEIG en el artículo citado en la página 40. Este tensor, por lo general, es muy complejo. En el caso de una dislocación rectilínea, donde se nos presenta un problema plano de teoría de la elasticidad, puede resultar más sencillo resolver directamente las ecuaciones de equilibrio.

(\*\*) Obsérvese la analogía existente entre el campo de la deformación elástica alrededor de la línea de dislocación y el campo magnético de las corrientes lineales constantes; el vector de Burgers desempeña aquí el papel de la intensidad de la corriente (su invariabilidad a lo largo de la línea de dislocación es tan ineludible como la invariabilidad de la intensidad de la corriente). También se hallarán fácilmente analogías semejantes en las relaciones expuestas más adelante. Sin embargo, y sin referirnos a la naturaleza completamente diferente de unos y otros fenómenos físicos, estas analogías no son de índole profunda debido, además, al distinto carácter tensorial de las cantidades correspondientes.

defectos de la estructura cristalina. Las dislocaciones son defectos de estructura lineales. Junto con ellos, existen defectos en los cuales la perturbación de la estructura regular está distribuida en una región próxima a cierta superficie<sup>(\*)</sup>. Desde un punto de vista macroscópico tal defecto puede describirse como una superficie de discontinuidad, sobre la cual el vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$  experimenta un salto (las tensiones  $\sigma_{ik}$  se mantienen continuas en virtud de las condiciones de equilibrio). Si sobre toda la superficie la magnitud  $\mathbf{b}$  del salto es la misma, entonces, en lo que respecta a las deformaciones creadas por ella, tal discontinuidad en nada se distingue de una dislocación (a lo largo de su borde). La única diferencia consiste en que el vector  $\mathbf{b}$  no es igual a un período de la red. Además, la posición de la superficie  $S_D$ , de la cual hablamos más arriba, deja de ser arbitraria y debe coincidir con la posición real de la discontinuidad física. Una determinada energía adicional está asociada con tal superficie de discontinuidad, y puede ser debidamente considerada introduciendo un coeficiente de tensión superficial adecuado.

#### PROBLEMAS

1. Escribir las ecuaciones diferenciales de equilibrio para una deformación por dislocación en un medio isótropo, mediante el vector de desplazamiento (\*\*).

*Solución.* En términos del tensor de las tensiones o del tensor de las deformaciones, las ecuaciones de equilibrio tienen la forma habitual:  $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k = 0$ , o, reemplazando  $\sigma_{ik}$  por la expresión (5.11):

$$\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} = 0. \quad (1)$$

Pero al pasar al vector  $\mathbf{u}$  es necesario tener en cuenta la condición diferencial (27.6). Multiplicando (27.6) por  $e_{ikn}$  y contrayendo respecto  $i, k$ , obtenemos (\*\*\*):

$$\frac{\partial w_{nk}}{\partial x_k} - \frac{\partial w_{kk}}{\partial x_n} = -(\tau \times \mathbf{b})_n \delta(\xi). \quad (2)$$

Escribiendo (1) en la forma

$$\frac{1}{2} \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_{ki}}{\partial x_k} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} \frac{\partial w_{ll}}{\partial x_i} = 0$$

(\*) Un conocido ejemplo de tal clase de defectos es el de una delgada capa de transición en un cristal.

(\*\*) El sentido físico de este y otros problemas, concernientes a un medio isótropo, es convencional, porque las dislocaciones reales, por su misma naturaleza, son propias sólo de los cristales, esto es, de un medio anisotropo. Estos problemas, sin embargo, presentan cierto interés ilustrativo.

(\*\*\*) Recordaremos la fórmula:

$$e_{ilm} e_{ikn} = \delta_{lk} \delta_{mn} - \delta_{ln} \delta_{mk}$$

e introduciendo aquí (2), hallamos:

$$\frac{\partial w_{ki}}{\partial x_k} + \frac{1}{1-2\sigma} \frac{\partial w_{ll}}{\partial x_i} = (\tau \times \mathbf{b})_i \delta(\xi).$$

Pasando ahora a  $\mathbf{u}$ , según (27.2), encontramos la ecuación buscada para la función no uniforme  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  en la forma

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = \tau \times \mathbf{b} \delta(\xi). \quad (3)$$

2. Determinar la deformación alrededor de una dislocación helicoidal rectilínea en un medio isótropo.

*Solución.* Elegimos las coordenadas cilíndricas  $z, r, \varphi$ , con el eje  $z$  a lo largo de la línea de dislocación; el vector de Burgers:  $b_x = b_y = 0, b_z = b$ . Por razones de simetría, es evidente que el desplazamiento  $\mathbf{u}$  es paralelo al eje  $z$  y no depende de la coordenada  $z$ . La ecuación de equilibrio (3) del problema (1) se reduce a  $\Delta u_z = 0$ . La solución que satisface la condición (27.1) es (\*):

$$u_z = \frac{b}{2\pi} \varphi.$$

De los tensores  $u_{ik}$  y  $\sigma_{ik}$ , son distintas de cero sólo las componentes

$$u_{z\varphi} = \frac{b}{4\pi r}, \quad \sigma_{z\varphi} = \frac{\mu b}{2\pi r},$$

de modo que la deformación es puramente de corte.

La energía libre de la dislocación (por unidad de longitud de la misma) viene dada por la integral

$$F = \frac{1}{2} \int 2u_{z\varphi}\sigma_{z\varphi} dV = \frac{\mu b^2}{4\pi} \int \frac{dr}{r},$$

que diverge logarítmicamente en ambos límites. Como límite inferior hay que tomar una cantidad del orden de las distancias atómicas ( $\sim b$ ), a las cuales la deformación es grande y la teoría macroscópica es inaplicable. El límite superior viene determinado por dimensiones del orden de la longitud  $L$  de la dislocación. Entonces

$$F = \frac{\mu b^2}{4\pi} \ln \frac{L}{b}.$$

La energía de deformación en el «núcleo» de la dislocación próximo al eje de la misma (en una

---

(\*) En todos los problemas sobre dislocaciones rectilíneas tomaremos el vector  $\tau$  en la dirección negativa del eje  $z$ .

región de sección  $\sim b^2$ ) se puede estimar como  $\sim \mu b^2$ . Cuando  $\ln(L/b) \gg 1$  esta energía es pequeña en comparación con la energía del campo de deformación elástica (\*).

3. Hallar las tensiones internas en un medio anisótropo, alrededor de una dislocación helicoidal perpendicular a un plano de simetría del cristal.

*Solución.* Elijamos un sistema de coordenadas  $x, y, z$  de modo que el eje  $z$  coincida con la línea de dislocación (y nuevamente escribamos  $b_z = b$ ). El vector  $u$  tiene otra vez sólo componente  $u_z = u(x, y)$ . Como el plano  $x, y$  es un plano de simetría, son iguales a cero todas las componentes del tensor  $\lambda_{iklm}$  en las que el índice  $z$  figura un número impar de veces. Por esta razón, sólo dos componentes del tensor  $\sigma_{ik}$  son distintas de cero:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= \lambda_{xzxz} \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_{xzyz} \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \sigma_{yz} &= \lambda_{yzxz} \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_{yzyz} \frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}$$

Introduzcamos el vector  $\sigma$  y el tensor  $\lambda_{\alpha\beta}$  bidimensionales:  $\sigma_\alpha = \sigma_{az}$ ,  $\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{az\beta z}$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Entonces

$$\sigma_\alpha = \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta},$$

y la ecuación de equilibrio se escribe en la forma  $\operatorname{div} \sigma = 0$ . La solución buscada de esta ecuación debe satisfacer la condición (27.1):  $\oint \nabla u \cdot d\mathbf{l} = b$ .

En tal forma el problema coincide con el de encontrar la inducción y la intensidad del campo magnético (cuyo papel desempeñan  $\sigma$  y  $\nabla u$ ) en un medio anisótropo (con permeabilidad magnética  $\lambda_{\alpha\beta}$ ), alrededor de una corriente rectilínea de intensidad  $I = cb/4\pi$ . Utilizando la solución de este problema, conocida por electrodinámica, hallamos (\*\*):

$$\sigma_{az} = -\frac{b}{2\pi} \frac{\lambda_{\alpha\beta} e_{\beta\gamma z} x_\gamma}{\sqrt{|\lambda|} \lambda_{\alpha'\beta'}^{-1} x_{\alpha'} x_{\beta'}},$$

donde  $|\lambda|$  es el determinante del tensor  $\lambda_{\alpha\beta}$ .

4. Determinar la deformación alrededor de una dislocación de borde rectilínea en un medio isotrópico.

*Solución.* Supongamos el eje  $z$  dirigido a lo largo de la línea de dislocación, y sea  $b_x = b$ ,  $b_y = b_z = 0$  el vector de Burgers. Por la simetría del problema es evidente que el vector de deformación está en el plano  $x, y$  y no depende de  $z$ , de modo que se nos presenta un problema plano. En lo que

(\*) Esta estimación tiene carácter general y es válida, en orden de magnitud, para cualquier dislocación (no sólo helicoidal). Conviene señalar que, en realidad, el valor  $\ln(L/b)$  no es de ordinario tan grande, de modo que la energía del «núcleo» constituye una parte considerable de la energía total de la dislocación.

(\*\*) Véase «Electrodinámica de los medios continuos», problema 5 del § 29.

sigue de este problema todos los vectores y operadores vectoriales son bidimensionales en el plano  $x, y$ .

Buscaremos una solución de la ecuación

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1 - 2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = -b\mathbf{j}\delta(\mathbf{r})$$

(véase problema 1;  $\mathbf{j}$  es el vector unitario a lo largo del eje  $y$ ) que sea de la forma  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{w}$ , donde  $\mathbf{u}^{(0)}$  es un vector con componentes

$$u_x^{(0)} = \frac{b}{2\pi} \varphi, \quad u_y^{(0)} = \frac{b}{2\pi} \ln r$$

[las partes imaginaria y real de  $(b/2\pi) \ln(x+iy)$ ];  $r, \varphi$  son coordenadas polares en el plano  $x, y$ . Este vector satisface la condición (27.1). Por esta razón, el problema se reduce a encontrar la función uniforme  $\mathbf{w}$ . Dado que, como es fácil comprobar,

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad \Delta \mathbf{u}^{(0)} = b\mathbf{j}\delta(\mathbf{r}),$$

$\mathbf{w}$  satisface la ecuación

$$\Delta \mathbf{w} + \frac{1}{1 - 2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} = -2b\mathbf{j}\delta(\mathbf{r}).$$

Esta es la ecuación de equilibrio bajo la acción de fuerzas concentradas a lo largo del eje  $z$  con una densidad de volumen  $\{Eb\mathbf{j}/2(l+\sigma)\}\delta(\mathbf{r})$  [véase la ecuación (1) en el problema del § 8]. Con ayuda del tensor de Green para un medio ilimitado, hallado en ese problema, la determinación de  $\mathbf{w}$  se reduce al cálculo de la integral

$$\mathbf{w} = \frac{b}{8\pi(1-\sigma)} 2 \int_0^\infty \left[ \frac{(3-4\sigma)\mathbf{j}}{R} + \frac{\mathbf{r}y}{R^3} \right] dz', \quad R = \sqrt{r^2 + z'^2}.$$

Obtenemos en definitiva:

$$u_x = \frac{b}{2\pi} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right\},$$

$$u_y = -\frac{b}{2\pi} \left\{ \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right\}.$$

El tensor de tensiones calculado a partir de aquí tiene las componentes cartesianas

$$\sigma_{xx} = -bD \frac{y(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_{yy} = bD \frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_{xy} = bD \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

o polares

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -bD \frac{\sin \varphi}{r}, \quad \sigma_{r\varphi} = bD \frac{\cos \varphi}{r},$$

donde  $D = \mu/2\pi(1 - \sigma)$ .

5. Un número infinito de dislocaciones de borde idénticas, rectilíneas y paralelas, en un medio isótropo, están distribuidas en un plano perpendicular a sus vectores de Burgers, a distancias iguales  $h$  una de otra. Hallar las tensiones de corte, provocadas por tal «muro de dislocación», a distancias grandes en comparación con  $h$ .

*Solución.* Supongamos que las dislocaciones son paralelas al eje  $z$  y que están situadas en el plano  $y, z$ . Según los resultados del problema 4, la tensión total creada por todas las dislocaciones en el punto  $x, y$ , viene dada por la suma

$$\sigma_{xy}(x, y) = bDx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - (y - nh)^2}{[x^2 + (y - nh)^2]^2}.$$

Escribamos esta suma en la forma

$$\sigma_{xy} = -bD \frac{\alpha}{h} \left[ J(\alpha, \beta) + \alpha \frac{\partial J(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right],$$

donde

$$J(\alpha, \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + (\beta - n)^2}. \quad \alpha = \frac{x}{h}, \quad \beta = \frac{y}{h}.$$

De acuerdo con la fórmula de suma de Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i kx} dx,$$

hallamos:

$$J(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\alpha^2 + \xi^2} + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi i k \beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k \xi} d\xi}{\alpha^2 + \xi^2} = \frac{\pi}{\alpha} + \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi k \alpha} \cos 2\pi k \beta.$$

Cuando  $\alpha = x/h \gg 1$  en la suma según  $k$  se puede conservar sólo el primer término y obtenemos finalmente

$$\sigma_{xy} = 4\pi^2 D \frac{bx}{h^2} e^{-2\pi x/h} \cos\left(2\pi \frac{y}{h}\right)$$

De esta forma, las tensiones decrecen, al alejarse del «muro», según una ley exponencial.

### § 28. Acción de un campo de tensiones sobre una dislocación

Consideremos un lazo de dislocación  $D$  en el campo de las tensiones elásticas  $\sigma_{ik}^{(e)}$  creadas por cargas externas dadas, y calculemos la fuerza que actúa sobre él en este campo.

De acuerdo con las reglas generales, para ello es necesario hallar el trabajo  $\delta R$ , realizado por las tensiones internas en un desplazamiento infinitamente pequeño del anillo  $D$ . Si  $\delta u_{ik}$  es la variación del tensor de la deformación, provocada por este desplazamiento, entonces, según (3.1), tenemos (\*):

$$\delta R = - \int \sigma_{ik}^{(e)} \delta u_{ik} \, dV.$$

Como la distribución de las tensiones  $\sigma_{ik}^{(e)}$  se supone independiente de la posición de la dislocación, se puede sacar fuera de la integral el símbolo  $\delta$ . Teniendo en cuenta también la simetría del tensor  $\sigma_{ik}^{(e)}$  y la ecuación de equilibrio  $\partial \sigma_{ik}^{(e)} / \partial x_k = 0$ , escribiremos:

$$\begin{aligned} \delta R &= - \delta \int \sigma_{ik}^{(e)} u_{ik} \, dV = - \delta \int \sigma_{ik}^{(e)} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \, dV = \\ &= - \delta \int \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ik}^{(e)} u_k) \, dV. \end{aligned} \quad (28.1)$$

Como se explicó en el párrafo anterior consideraremos que el desplazamiento  $\mathbf{u}$  es una función uniforme que experimenta una discontinuidad sobre una superficie  $S_D$  apoyada en la línea  $D$ . Entonces la integral de volumen de (28.1) se puede transformar en una integral extendida a una superficie cerrada formada por las caras superior e inferior de la discontinuidad  $S_D$  unidas mediante una superficie lateral infinitamente estrecha (tubo), que contornea la línea  $D$ . En ambas caras, los valores

(\*) Para evitar posibles confusiones hay que subrayar que en esta fórmula hay que entender por  $\delta u_{ik}$  [de acuerdo con el significado de esta magnitud (3.1)] la variación total, geométrica, de la deformación para un desplazamiento infinitesimal de la dislocación. Esta variación se compone, en el presente caso, tanto de una parte elástica como de una plástica (véase el párrafo siguiente).

de las cantidades continuas  $\sigma_{ik}^{(e)}$  son iguales, pero los valores de  $\mathbf{u}$  se diferencian en una cantidad dada  $\mathbf{b}$ . Por esta razón obtenemos (\*):

$$\delta R = -b_k \delta \int_{S_D} \sigma_{ik}^{(e)} df_i. \quad (28.2)$$

Desplazemos cada elemento  $dl$  de la línea de dislocación una cantidad  $\delta r$ . Con este corrimiento, el área de la superficie  $S_D$  sufre una variación, cuyo elemento es igual a  $\delta f = \delta r \times dl$ , esto es

$$\delta f_i = e_{imn} \delta x_m \delta l_n = e_{imn} \delta x_m \tau_n dl.$$

Por este motivo, el trabajo (28.2) se presenta en forma de integral curvilinea a lo largo del lazo de dislocación:

$$\delta R = - \oint_D b_k e_{imn} \sigma_{ik}^{(e)} \delta x_m \tau_n dl,$$

donde  $\tau$  es el vector tangente a  $D$ .

El coeficiente de  $\delta x_m$  en el integrando es (con signo opuesto) la fuerza  $f_m$  que actúa por unidad de longitud de la línea de dislocación. De este modo:

$$f_i = e_{ikl} \tau_k \sigma_{lm}^{(e)} b_m \quad (28.3)$$

(M. Peach y J. Koehler, 1950). Obsérvese que la fuerza  $\mathbf{f}$  es perpendicular al vector  $\tau$ , es decir, a la línea de dislocación, y también al vector  $\sigma_{ik}^{(e)} b_k$ .

El plano determinado por los vectores  $\tau$  y  $\mathbf{b}$  en cada punto de la dislocación se llama *plano de deslizamiento* del correspondiente elemento de la dislocación (los planos de todos los elementos son, naturalmente, tangentes a la superficie de deslizamiento de toda la dislocación, que es una superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al vector de Burgers  $\mathbf{b}$  de la misma). La importancia física del plano de deslizamiento consiste en que sólo en él es posible realizar, con relativa facilidad, un desplazamiento mecánico de la dislocación (\*\*).

(\*) La integral sobre el tubo lateral de radio  $\varrho$  tiende a cero cuando  $\varrho \rightarrow 0$ , dado que  $u_k$  tiende a infinito más lentamente que  $1/\varrho$ .

(\*\*) Esta circunstancia, como es sabido, resulta del aspecto microscópico del defecto por dislocación. Así, para trasladar la dislocación de borde, representada en la figura 22, en su plano de deslizamiento (plano  $x, z$ ), sólo se necesitan desplazamientos relativamente limitados de los átomos; como resultado de ellos, podrán convertirse en «extras» los semiplanos cristalinos más alejados del plano  $y, z$  (pero, como antes, paralelos a él). En cambio, el movimiento de la dislocación en otras direcciones es sólo posible mediante procesos de difusión. Así, la dislocación representada en la figura 22 puede desplazarse en el plano  $y, z$  sólo a expensas de que los átomos abandonen por difusión el semiplano «extra». En realidad, tal proceso sólo puede desempeñar un papel a temperaturas suficientemente elevadas.

En relación con esto, es interesante determinar la componente de la fuerza (28.3) en este plano.

Sea  $\boldsymbol{\nu}$  el vector normal a la línea de dislocación en el plano de deslizamiento. Entonces la componente buscada de la fuerza (llamémosla  $f_{\perp}$ ) es  $f_{\perp} = \boldsymbol{\nu}_i f_i = e_{ikl} \boldsymbol{\nu}_i \tau_k b_m \sigma_{lm}^{(e)}$ , o bien

$$f_{\perp} = \nu_l \sigma_{lm}^{(e)} b_m, \quad (28.4)$$

donde  $\boldsymbol{\nu} = [\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau}]$  es el vector normal al plano de deslizamiento. Como los vectores  $\boldsymbol{b}$  y  $\boldsymbol{\nu}$  son perpendiculares entre sí, eligiendo dos de los ejes de coordenadas a lo largo de ellos vemos que la fuerza  $f_{\perp}$  se determina con sólo una de las componentes  $\sigma_{lm}^{(e)}$ .

La fuerza total que actúa sobre todo el lazo de dislocación es

$$F_i = e_{ikl} b_m \oint_D \sigma_{lm}^{(e)} dx_k. \quad (28.5)$$

Esta fuerza es distinta de cero sólo en el caso de un campo no homogéneo de tensiones (cuando  $\sigma_{lm}^{(e)} = \text{const}$ , la integral se reduce a  $\oint dx_k = 0$ ). Si a lo largo del lazo el campo de tensiones varía poco, se puede escribir:

$$F_i = e_{ikl} b_m \frac{\partial \sigma_{lm}^{(e)}}{\partial x_p} \oint_D x_p dx_k$$

(supongamos que el lazo está cerca del origen de coordenadas). Esta fuerza se puede expresar mediante el momento de dislocación  $d_{kl}$ , introducido en (27.11):

$$F_i = d_{kl} \frac{\partial \sigma_{kl}^{(e)}}{\partial x_i} \quad (28.6)$$

#### PROBLEMAS

1. Hallar la fuerza de interacción entre dos dislocaciones helicoidales paralelas en un medio isótropo.

*Solución.* La fuerza que actúa sobre la unidad de longitud de una de las dislocaciones, en el campo de las tensiones creadas por la dislocación, se determina según la fórmula (28.4) con ayuda de los resultados del problema 2, § 27. Su dirección es radial e igual a

$$f = \frac{\mu b_1 b_2}{2\pi r}.$$

Las dislocaciones de un mismo signo ( $b_1 b_2 > 0$ ) se repelen, las dislocaciones de distinto signo ( $b_1 b_2 < 0$ ) se atraen.

2. Una dislocación helicoidal rectilínea es paralela al plano de la superficie libre de un medio isótropo. Encontrar la fuerza que actúa sobre la dislocación.

*Solución.* Hagamos coincidir el plano  $y, z$  con la superficie del cuerpo; supongamos que la dislocación es paralela al eje  $z$  y con coordenadas  $x = x_0, y = 0$ .

El campo de tensiones que deja libre la superficie del medio, se representa por la suma de los campos de la dislocación y de su imagen en el plano  $y, z$  como si éstas estuvieran ubicadas en un medio ilimitado:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= \frac{\mu b}{2\pi} \left[ \frac{y}{(x - x_0)^2 + y^2} - \frac{y}{(x + x_0)^2 + y^2} \right], \\ \sigma_{yz} &= -\frac{\mu b}{2\pi} \left[ \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + y^2} - \frac{x + x_0}{(x + x_0)^2 + y^2} \right].\end{aligned}$$

Tal campo actúa sobre la dislocación considerada con una fuerza igual a la atracción de su imagen, es decir, la dislocación es atraída hacia la superficie del medio con una fuerza

$$f = \frac{\mu b^2}{4\pi x_0}.$$

3. Hallar la fuerza de interacción entre dos dislocaciones de borde paralelas en un medio isótropo, situadas en planos de deslizamiento paralelos.

*Solución.* Supongamos los planos de deslizamiento paralelos al plano  $x, z$ , y el eje  $z$  paralelo a las líneas de dislocación; como en el problema 4 § 27, haremos  $\tau_z = -1, b_x = b$ . Entonces, la fuerza actuante por unidad de longitud de la dislocación, en un campo de tensiones elásticas  $\sigma_{ik}$ , tiene por componentes

$$f_x = b\sigma_{xy}, \quad f_y = -b\sigma_{xx}.$$

En el caso dado,  $\sigma_{ik}$  viene determinado por las expresiones halladas en el problema 4, § 27. Si una de las dislocaciones coincide con el eje  $z$ , ésta actúa sobre la segunda dislocación, que pasa por el punto  $x, y$  en el plano  $x, y$ , con una fuerza cuyas componentes en coordenadas polares son

$$f_r = \frac{b_1 b_2 D}{r}, \quad f_\varphi = \frac{b_1 b_2 D}{r} \operatorname{sen} 2\varphi, \quad D = \frac{\mu}{2\pi(1 - \sigma)}.$$

La proyección de esta fuerza sobre el plano de deslizamiento es

$$f_x = b_1 b_2 D \frac{\cos \varphi \cos 2\varphi}{r}.$$

Esta fuerza se anula cuando  $\varphi = \pi/2$  y cuando  $\varphi = \pi/4$ . La primera de estas posiciones corresponde al equilibrio estable cuando  $b_1 b_2 > 0$ , y la segunda, cuando  $b_1 b_2 < 0$ .

### § 29. Distribución continua de dislocaciones

Si en un cristal se tienen simultáneamente muchas dislocaciones que se hallan a distancias relativamente pequeñas (aunque, desde luego, grandes comparadas con la constante de la red), resulta conveniente considerarlas en promedio. En otras palabras, se consideran elementos de volumen del cristal «físicamente infinitesimales», a través de los cuales pasan suficientes líneas de dislocación.

Se llega a la formulación de la ecuación que expresa la propiedad fundamental de las deformaciones por dislocación, mediante una generalización natural de la ecuación (27.6). Introduzcamos el tensor  $\varrho_{ik}$  (*tensor de la densidad de dislocaciones*) de modo tal que su integral sobre una superficie apoyada en cualquier contorno  $L$  sea igual a la suma  $\mathbf{b}$  de los vectores de Burgers de todas las líneas de dislocación abrazadas por este contorno:

$$\int_{S_L} \varrho_{ik} df_i = b_k. \quad (29.1)$$

Las funciones continuas  $\varrho_{ik}$  describen la distribución de las dislocaciones en el cristal. Este tensor sustituye ahora a la expresión del segundo miembro de la ecuación (27.6):

$$e_{ilm} \frac{\partial w_{mk}}{\partial x_l} = -\varrho_{ik}. \quad (29.2)$$

Como se ve por esta ecuación, el tensor  $\varrho_{ik}$  debe satisfacer la condición

$$\frac{\partial \varrho_{ik}}{\partial x_i} = 0 \quad (29.3)$$

(en el caso de una única dislocación esta condición expresa simplemente que el vector de Burgers es constante a lo largo de la línea de dislocación).

Consideradas así las dislocaciones, el tensor  $w_{ik}$  se convierte en una cantidad fundamental que describe la deformación y determina el tensor de las deformaciones según (27.4). En cambio, el vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$ , que estaría relacionado con  $w_{ik}$  por la definición (27.2), no es posible introducirlo en estas condiciones [está claro, pues con tal definición, el primer miembro de la ecuación (29.2) resultaría idénticamente nulo en todo el volumen del cristal].

Hasta aquí, hemos supuesto que las dislocaciones estaban inmóviles. Veamos ahora de qué manera se debe formular un sistema de ecuaciones que permita, en principio, determinar las deformaciones elásticas y las tensiones en un medio en el

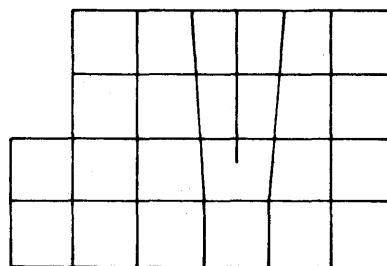
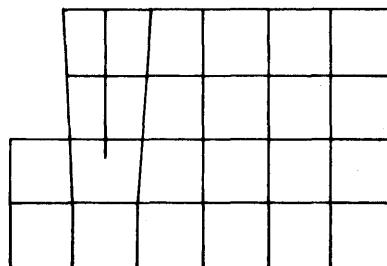
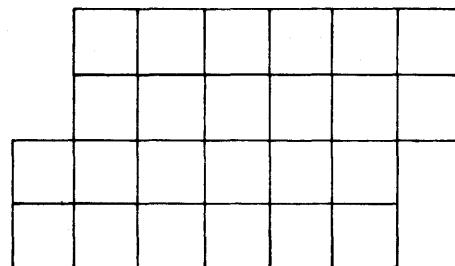
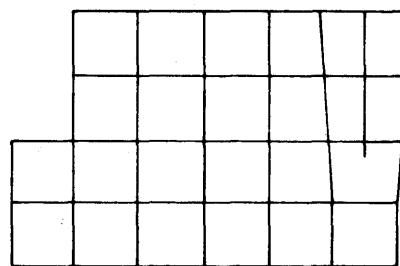


FIG. 25



cual las dislocaciones realizan un movimiento dado (E. Kröner, G. Rieder, 1956)(\*).

La ecuación (29.2) no depende de que las dislocaciones estén en reposo o en movimiento. Además, el tensor  $w_{ik}$ , como antes, es una cantidad que determina la deformación elástica; su parte simétrica es el tensor de la deformación elástica, relacionado de la manera habitual, por la ley de Hooke, con el tensor de las tensiones.

Esta ecuación, sin embargo, no es ahora suficiente para una formulación completa del problema. El sistema completo de ecuaciones debe determinar también la velocidad de traslación  $v$  de los puntos del medio.

Pero para ello es necesario tener en cuenta que el movimiento de las dislocaciones va acompañado, no sólo de una variación de la deformación elástica, sino también de un cambio de forma del cristal no vinculado con la aparición de tensiones, es decir por una *deformación plástica*. Como es sabido, el movimiento de las dislocaciones constituye justamente el mecanismo base de la deformación plástica. (La relación entre el movimiento de las dislocaciones y la deformación plástica queda claramente de manifiesto en la figura 25: como consecuencia del paso de la dislocación de borde de izquierda a derecha, la parte superior — situada sobre el plano de deslizamiento — del cristal resulta desplazada un período de la red; dado que, como resultado, la red continúa siendo regular, el cristal sigue estando libre de tensiones). En contraste con la deformación elástica, ligada unívocamente con el estado termodinámico del cuerpo, la deformación plástica es una función del proceso. Al considerar las dislocaciones en reposo, no se plantea el problema de separar las deformaciones elástica y plástica: en ese caso nos interesa sólo las tensiones, las cuales no dependen de la historia del cristal.

Sea  $\mathbf{u}$  el vector del desplazamiento geométrico de los puntos del medio, contado, digamos, desde su posición anterior al comienzo del proceso de deformación; su derivada respecto del tiempo es  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$ . Si se forma con ayuda del vector  $\mathbf{u}$  el tensor de «distorsión total»  $W_{ik} = \partial u_k / \partial x_i$ , obtendremos su «parte plástica»  $w_{ik}^{(pl)}$  restando de  $W_{ik}$  el tensor de «distorsión elástica», coincidente con el tensor  $w_{ik}$  que figura en (29.2). Introduzcamos la notación

$$-j_{ik} = \frac{\partial w_{ik}^{(pl)}}{\partial t}; \quad (29.4)$$

la parte simétrica de  $j_{ik}$  determina la velocidad de variación del tensor de la deformación plástica: la variación de  $u_{ik}^{(pl)}$  en un intervalo infinitesimal  $\delta t$  es

$$\delta u_{ik}^{(pl)} = -\frac{1}{2} (j_{ik} + j_{ki}) \delta t. \quad (29.5)$$

(\*) No nos ocupamos aquí del problema de hallar el movimiento mismo de las dislocaciones a partir de las fuerzas aplicadas al cuerpo. La solución de esta cuestión exige un estudio detallado del mecanismo microscópico del movimiento de las dislocaciones y de su frenado en distintos defectos, lo cual debe realizarse teniendo en cuenta los datos experimentales relativos a los cristales reales.

Observemos, en particular, que si la deformación plástica ocurre sin romper la continuidad del medio, la traza del tensor  $j_{ik}$  es igual a cero. En efecto, la deformación plástica no conduce a una dilatación o compresión del cuerpo (las cuales siempre están vinculadas con la aparición de tensiones internas), esto es  $u_{kk}^{(pl)} = 0$ , y en consecuencia también  $j_{kk} = -\partial u_{kk}^{(pl)}/\partial t = 0$ .

Substituyendo en la definición (29.4)  $w_{ik}^{(pl)} = W_{ik} - w_{ik}$ , la escribiremos en forma de una ecuación

$$\frac{\partial w_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + j_{ik}, \quad (29.6)$$

que liga las velocidades de variación de las deformaciones elástica y plástica. Aquí es menester considerar las  $j_{ik}$  como cantidades dadas, que deben satisfacer condiciones que garanticen la compatibilidad de las ecuaciones (29.6) y (29.2). Estas condiciones se obtienen derivando la (29.2) respecto del tiempo e introduciendo en la misma la (29.6); resulta así la ecuación

$$\frac{\partial \varrho_{ik}}{\partial t} + e_{ilm} \frac{\partial j_{mk}}{\partial x_l} = 0. \quad (29.7)$$

El sistema completo está formado por las ecuaciones (29.2) y (29.6), junto con las ecuaciones dinámicas

$$\varrho \dot{v}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (29.8)$$

donde  $\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm} = \lambda_{iklm} w_{lm}$ . Los tensores  $\varrho_{ik}$  y  $j_{ik}$  que aparecen en estas ecuaciones son funciones dadas de las coordenadas (y del tiempo) que caracterizan la distribución y el movimiento de las dislocaciones. Estas funciones deben satisfacer las condiciones de compatibilidad de las ecuaciones (29.2) entre sí y con la ecuación (29.6), las cuales vienen dadas por las igualdades (29.3) y (29.7).

La condición (29.7) puede ser considerada como expresión diferencial de la «ley de conservación del vector de Burgers» en el medio. Efectivamente, integrando ambos miembros de la ecuación (29.7) sobre una superficie apoyada en una línea cerrada  $L$ , introduciendo de acuerdo con (29.1) el vector de Burgers total de las dislocaciones abrazadas por la línea  $L$ , y utilizando el teorema de Stokes, obtendremos

$$\frac{db_k}{dt} = -\oint_L j_{ik} dx_i. \quad (29.9)$$

De la forma de esta igualdad resulta evidente que la integral del segundo miembro determina la cantidad de vector de Burgers «que fluye» en la unidad de tiempo a través del contorno  $L$ , esto es, el transportado por las dislocaciones que atraviesan la línea  $L$ . Por esta razón, es natural llamar a  $j_{ik}$  tensor de la *densidad de corriente de las dislocaciones*.

Está claro, en particular, que en el caso de un lazo de dislocación aislado, el tensor  $j_{ik}$  tiene la forma

$$j_{ik} = e_{ilm} \varrho_{lk} V_m = e_{ilm} \tau_l V_m b_k \delta(\xi) \quad (29.10)$$

[con el  $\varrho_{ik}$ , de (27.6)], donde  $V$  es la velocidad de la línea de dislocación en el punto dado de la misma. En este caso el vector de la corriente que atraviesa un elemento  $dl$  del contorno  $L$  ( $j_{ik} dl_i$ ) es proporcional a  $dl \cdot (\tau \times V) = V \cdot (dl \times \tau)$ , esto es, a la

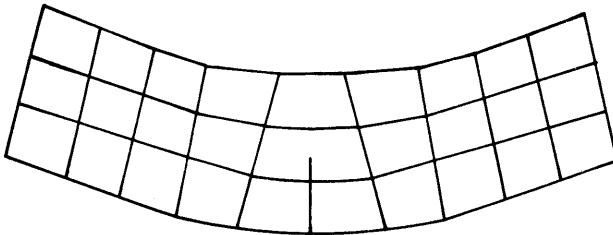


FIG. 26

proyección de la velocidad  $V$  sobre una dirección perpendicular a  $dl$  y a  $\tau$ ; es evidente, por consideraciones geométricas, que así debe ser: sólo esta proyección de la velocidad conduce a la intersección de la dislocación con el elemento  $dl$ .

Obsérvese que la traza del tensor (29.10) es proporcional a la proyección de la velocidad de la dislocación sobre la normal a su plano de deslizamiento. Se indicó antes que la ausencia de un cambio inelástico de la densidad del medio está garantizada por la condición  $j_{ii} = 0$ . Vemos ahora que para una dislocación aislada esta condición traduce el movimiento en el plano de deslizamiento, de acuerdo con lo dicho más arriba sobre la naturaleza física del movimiento de las dislocaciones (véase la nota en la pág. 185).

Finalmente, consideraremos el caso en que los lazos de dislocación están distribuidos en el cristal de tal manera, que su vector de Burgers resultante (llamémoslo  $\mathbf{B}$ )

es igual a cero (\*). Esta condición trae consigo que al integrar sobre cualquier sección transversal del cuerpo es

$$\int \varrho_{ik} df_i = 0 \quad (29.11)$$

De aquí se sigue que la densidad de las dislocaciones, en este caso, puede ser representada en la forma

$$\varrho_{ik} = e_{ilm} \frac{\partial P_{mk}}{\partial x_l} \quad (29.12)$$

(F. Kroupa, 1962); la integral (29.11) se transforma entonces en una integral a lo largo de un contorno exterior al cuerpo, y se anula. Señalaremos además que la expresión (29.12) satisface automáticamente la condición (29.3).

Se ve fácilmente que el tensor  $P_{ik}$  definido de esta manera representa la densidad de momento de dislocación en el cristal deformado (por esta razón es natural llamarlo *polarización de dislocación*). En efecto, el momento de dislocación total del cristal  $D_{ik}$  es igual, por definición, a:

$$D_{ik} = \sum S_i b_k = \frac{1}{2} e_{ilm} \sum b_k \oint x_l dx_m = \frac{1}{2} \int e_{ilm} x_l \varrho_{mk} dV,$$

donde la suma se extiende a todos los lazos de dislocación, y la integración, a todo el volumen del cristal. Introduciendo aquí (29.12), tenemos:

$$D_{ik} = \frac{1}{2} \int e_{ilm} e_{mpq} x_l \frac{\partial P_{qk}}{\partial x_p} dV = \frac{1}{2} \int x_m \left( \frac{\partial P_{mk}}{\partial x_i} - \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_m} \right) dV$$

y después de integrar por partes ambos términos

$$D_{ik} = \int P_{ik} dV. \quad (29.13)$$

La densidad de la corriente de dislocaciones se expresa en función del mismo tensor  $P_{ik}$  mediante la igualdad

$$j_{ik} = - \frac{\partial P_{ik}}{\partial t}. \quad (29.14)$$

---

(\*) La existencia de una dislocación va ligada a una cierta flexión del cristal, como esquemáticamente se ha representado en forma exagerada en la figura 26. La condición  $\mathbf{B} = 0$  significa ausencia de una flexión macroscópica de la totalidad del cristal.

Es fácil comprobarlo, por ejemplo, calculando la integral  $\int_{V_k} dV$  extendida a una región arbitraria del volumen del cuerpo como suma para todos los lazos de dislocación encerrados en este volumen y utilizando la expresión (29.10). Indicaremos que la expresión (29.14) junto con la (29.12) automáticamente satisfacen la condición (29.7).

Comparando (29.14) con (29.4), vemos que  $\delta w_{ik}^{(pl)} = \delta P_{ik}$ . Si se conviene en considerar que no existe deformación plástica en el estado con  $P_{ik} = 0$ , será también  $w_{ik}^{(pl)} = P_{ik}$  (\*). Entonces

$$w_{ik} = W_{ik} - w_{ik}^{(pl)} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - P_{ik}, \quad (29.15)$$

donde nuevamente  $u_k$  es el vector del desplazamiento geométrico total a partir de la posición en el estado no deformado. La ecuación (29.6) queda ahora satisfecha idénticamente, y la ecuación dinámica (29.8) adopta la forma

$$\varrho \ddot{u}_i - \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} = - \lambda_{iklm} \frac{\partial P_{lm}}{\partial x_k}. \quad (29.16)$$

De esta manera, la determinación de la deformación elástica provocada por dislocaciones en movimiento con  $B = 0$ , se reduce a un problema ordinario de teoría de la elasticidad con fuerzas de volumen distribuidas en el cristal con una densidad  $-\lambda_{iklm} \frac{\partial P_{lm}}{\partial x_k}$  (A. M. Kosevich, 1963).

### § 30. Distribución de dislocaciones en interacción

Consideremos un conjunto de un gran número de dislocaciones rectilíneas iguales, ubicadas paralelamente en un mismo plano de deslizamiento, y deduzcamos la ecuación que determina su distribución de equilibrio. Supondremos que el eje  $z$  es paralelo a las dislocaciones, y que el plano  $x, z$  coincide con el plano de deslizamiento.

Para precisar, supongamos que el vector de Burgers de las dislocaciones está dirigido a lo largo del eje  $x$ . Entonces, la fuerza que actúa en el plano de deslizamiento, por unidad de longitud de una dislocación, es igual a  $b\sigma_{xy}$ , donde  $\sigma_{xy}$  es la tensión en el punto en que se halla la dislocación.

Las tensiones creadas por una dislocación rectilínea (y actuantes sobre otra

(\*) Se da por supuesto que todo el proceso de deformación ocurre siendo  $B = 0$ . Es necesario subrayar esta circunstancia, dado que entre los tensores  $P_{ik}$  y  $w_{ik}^{(pl)}$  existe una diferencia de principio: mientras  $P_{ik}$  es una función del estado del cuerpo, el tensor  $w_{ik}^{(pl)}$  no es una función de estado, sino que depende del proceso que condujo el cuerpo al estado considerado.

dislocación), disminuyen en proporción inversa de la distancia a la misma. Por esta razón, la tensión creada en el punto  $x$  por la dislocación que se encuentra en el punto  $x'$ , tiene la forma  $bD/(x - x')$ , donde  $D$  es una constante del orden de magnitud de los módulos elásticos del cristal. Se puede demostrar que esta constante es  $D > 0$ , esto es, dos dislocaciones iguales en un mismo plano de deslizamiento se repelen (\*).

Designaremos mediante  $\varrho(x)$  a la densidad lineal de las dislocaciones distribuidas en el segmento  $(a_1, a_2)$  del eje  $x$ ;  $\varrho(x) dx$  es la suma de los vectores de Burgers de las dislocaciones que pasan por los puntos del intervalo  $dx$ . Entonces la tensión total, creada por todas las dislocaciones en el punto  $x$  del eje  $x$ , se escribe en forma de integral

$$\sigma_{xy}(x) = -D \int_{a_1}^{a_2} \frac{\varrho(\xi) d\xi}{\xi - x}. \quad (30.1)$$

Para los puntos interiores al mismo segmento  $(a_1, a_2)$ , esta integral debe interpretarse en el sentido de valor principal a fin de excluir la acción de la dislocación sobre sí misma, desprovista de significado físico.

Si en el cristal hay también un campo plano de tensiones (en el plano  $x, y$ )  $\sigma_{xy}^{(e)}$  ( $x, y$ ), creado por cargas externas dadas, entonces cada dislocación se hallará bajo la acción de una fuerza  $b(\sigma_{xy} + p(x))$ , donde para abreviar usamos la notación  $p(x) = \sigma_{xy}^{(e)}(x, 0)$ . La condición de equilibrio consiste en anular esta fuerza:  $\sigma_{xy} + p = 0$ , esto es

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{\varrho(\xi) d\xi}{\xi - x} = \frac{p(x)}{D} \equiv \omega(x), \quad (30.2)$$

donde, como se suele hacer, se ha indicado el valor principal cruzando el símbolo de integración. Esta ecuación integral permite determinar la distribución de equilibrio  $\varrho(x)$ . Pertenece al tipo de ecuaciones integrales singulares con núcleo de Cauchy.

La resolución de tal ecuación se reduce a un problema de teoría de las funciones de variable compleja, formulado de la siguiente manera.

Designemos por  $\Omega(z)$  la función definida en todo el plano complejo  $z$  [con un corte en el segmento  $(a_1, a_2)$ ] por la integral

$$\Omega(z) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\varrho(\xi) d\xi}{\xi - z}. \quad (30.3)$$

(\*) Esto se demostró para un medio isótropo en el problema 3, § 28.

Sean  $\Omega^+(x)$  y  $\Omega^-(x)$  los valores límites de  $\Omega(z)$  en los bordes superior e inferior del corte. Estos valores son iguales a las mismas integrales, tomadas sobre el segmento  $(a_1, a_2)$  rodeando el punto  $z = x$  con una semicircunferencia infinitamente pequeña, situada respectivamente abajo o arriba del punto, es decir,

$$\Omega^\pm(x) = \oint_{a_1}^{a_2} \frac{\varrho(\xi) d\xi}{\xi - x} \pm i\pi\varrho(x). \quad (30.4)$$

Si  $\varrho(\xi)$  satisface la ecuación (30.2), el valor principal de la integral es igual a  $\omega(x)$ , de modo que tenemos:

$$\Omega^+(x) + \Omega^-(x) = 2\omega(x), \quad (30.5)$$

$$\Omega^+(x) - \Omega^-(x) = 2i\pi\varrho(x). \quad (30.6)$$

De esta manera, el problema de resolver la ecuación (30.2) es equivalente al problema de encontrar una función analítica  $\Omega(z)$  con la propiedad (30.5);  $\varrho(x)$  viene entonces determinada por medio de (30.6). Además, las condiciones físicas del problema considerado exigen también que sea  $\Omega(\infty) = 0$ ; esto se sigue de que, lejos del sistema de dislocaciones ( $x \rightarrow \pm\infty$ ), las tensiones  $\sigma_{xy}$  deben anularse [según la definición (30.3), fuera del segmento  $(a_1, a_2)$  es  $\sigma_{xy}(x) = -D\Omega(x)$ ].

Estudiemos primero el caso en que no existen tensiones externas ( $p(x) \equiv 0$ ) y las dislocaciones se ven detenidas por ciertos obstáculos (defectos de la red), situados en los extremos del segmento  $(a_1, a_2)$ . Cuando  $\omega(x) = 0$  tenemos por (30.5):  $\Omega^+(x) = -\Omega^-(x)$ , esto es, la función  $\Omega(z)$  debe cambiar de signo al rodear cada uno de los dos puntos  $a_1, a_2$ . Esta condición queda satisfecha por cualquier función de la forma

$$\Omega(z) = \frac{P(z)}{\sqrt{(a_2 - z)(z - a_1)}}, \quad (30.7)$$

donde  $P(z)$  es un polinomio. La condición  $\Omega(\infty) = 0$ , por su parte, impone (salvo un coeficiente constante) la elección  $P(z) = 1$ , de modo que

$$\Omega(z) = \frac{1}{\sqrt{(a_2 - z)(z - a_1)}}. \quad (30.8)$$

Según (30.6), la misma forma tendrá también la función incógnita  $\varrho(x)$ . Determinando su coeficiente de acuerdo con la condición

$$\int_{a_1}^{a_2} \varrho(\xi) d\xi = B \quad (30.9)$$

( $B$  es la suma de los vectores de Burgers de todas las dislocaciones), obtendremos:

$$\varrho(x) = \frac{B}{\pi \sqrt{(a_2 - x)(x - a_1)}}. \quad (30.10)$$

Vemos, pues, que las dislocaciones se acumulan en dirección a los obstáculos (los límites del segmento) con una densidad inversamente proporcional a la raíz de las distancias a ellos. Las tensiones fuera del segmento ( $a_1, a_2$ ) crecen con la misma ley al aproximarse a  $a_1$  o  $a_2$ ; así, cuando  $x > a_2$

$$\sigma_{xy} \cong \frac{BD}{\sqrt{(x - a_2)(a_2 - a_1)}}.$$

En otras palabras, la concentración de dislocaciones junto a un lado de la frontera produce la misma concentración de tensiones al otro lado de la misma.

Supongamos ahora que, en las mismas condiciones (obstáculos en los extremos dados de un segmento), se tiene además un campo externo de tensiones  $p(x)$ . Designemos mediante  $\Omega_0(z)$  una función del tipo (30.7) y escribamos la igualdad (30.5) (dividiéndola por  $\Omega_0^+ = -\Omega_0^-$ ) en la forma

$$\frac{\Omega^+(x)}{\Omega_0^+(x)} - \frac{\Omega^-(x)}{\Omega_0^-(x)} = \frac{2\omega(x)}{\Omega_0^+(x)}.$$

Comparando esta igualdad con (30.6), concluimos que

$$\frac{\Omega(z)}{\Omega_0(z)} = \frac{1}{i\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\omega(\xi)}{\Omega_0^+(\xi)} \frac{d\xi}{\xi - z} + i\pi P(z), \quad (30.11)$$

donde  $P(z)$  es un polinomio. Obtendremos la solución que satisface la condición  $\Omega(\infty) = 0$  eligiendo para  $\Omega_0(z)$  la función (30.8) y haciendo  $P(z) = C$  ( $C$  es una

constante). La función incógnita  $\varrho(x)$  se encuentra a partir de aquí mediante la fórmula (30.6) y es igual a

$$\begin{aligned} \varrho(x) = & -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{(a_2-x)(x-a_1)}} \int_{a_1}^{a_2} \omega(\xi) \sqrt{(a_2-\xi)(\xi-a_1)} \frac{d\xi}{\xi-x} + \\ & + \frac{C}{\sqrt{(a_2-\xi)(\xi-a_1)}}. \end{aligned} \quad (30.12)$$

La constante  $C$  se determina con la condición (30.9). También ahora  $\varrho(x)$  crece según la ley  $(a_2-x)^{-\frac{1}{2}}$  cuando  $x \rightarrow a_2$  (o  $x \rightarrow a_1$ ), y al otro lado del obstáculo aparece la misma concentración de tensiones.

Si se tiene un obstáculo sólo a un lado (digamos, en el punto  $a_2$ ), la solución requerida debe satisfacer la condición de que las tensiones sean finitas para todos los  $x < a_2$ , incluyendo el punto  $x = a_1$ ; la posición de este último punto se desconoce de antemano y hay que determinarla como resultado de la solución del problema. En términos de  $\Omega(z)$  esto significa que  $\Omega(a_1)$  debe ser finita. Una tal función (que también satisface la condición  $\Omega(\infty)=0$ ) se obtiene con la misma fórmula (30.11), si se elige para  $\Omega_0(z)$  la función

$$\Omega_0(z) = \sqrt{\frac{z-a_1}{a_2-z}},$$

que es también del tipo (30.7), y haciendo en la (30.11)  $P(z) = 0$ . Obtendremos así

$$\varrho(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{x-a_1}{a_2-x}} \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{\frac{a_2-\xi}{\xi-a_1}} \frac{\omega(\xi) d\xi}{\xi-x}. \quad (30.13)$$

Cuando  $x \rightarrow a_1$ ,  $\varrho(x)$  se anula como  $\sqrt{x-a_1}$ . Al otro lado del punto  $a_1$ , tiende a cero según la misma ley la tensión total  $\sigma_{xy}(x)+p(x)$ .

Para finalizar, supongamos que no existen obstáculos en ninguno de los extremos del segmento y que las dislocaciones sólo son contenidas por las tensiones externas  $p(x)$ . La  $\Omega(z)$  correspondiente se obtiene poniendo en (30.11)

$$\Omega_0(z) = \sqrt{(a_2-z)(z-a_1)}, \quad P(z) = 0.$$

Sin embargo, la condición  $\Omega(\infty) = 0$  exige en este caso que se cumpla una condición adicional: efectuando en la (30.11) el paso al límite para  $z \rightarrow \infty$ , se encuentra

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{\omega(\xi) d\xi}{\sqrt{(a_2 - \xi)(\xi - a_1)}} = 0. \quad (30.14)$$

La función incógnita  $\varrho(x)$  viene dada por la fórmula

$$\varrho(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{(a_2 - x)(x - a_1)} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\omega(\xi)}{\sqrt{(a_2 - \xi)(\xi - a_1)}} \frac{d\xi}{\xi - x}, \quad (30.15)$$

donde las coordenadas  $a_1, a_2$  de los extremos del segmento se determinan con las condiciones (30.9) y (30.14).

#### PROBLEMA

Hallar la distribución de las dislocaciones en un campo homogéneo de tensiones  $[p(x) = p_0]$ , en un segmento con obstáculos en uno o en ambos extremos.

*Solución.* En el caso de obstáculo en un extremo ( $a_2$ ), el cálculo de la integral (30.13) da:

$$\varrho(x) = \frac{p_0}{\pi D} \sqrt{\frac{x - a_1}{a_2 - x}}.$$

De la condición (30.9) se deduce la longitud del segmento donde están ubicadas las dislocaciones:  $a_2 - a_1 = 2BD/p_0$ . Al otro lado del obstáculo y cerca de él, las tensiones están concentradas según la ley

$$\varrho_{xy} \cong p_0 \sqrt{\frac{a_2 - a_1}{x - a_2}}.$$

En el caso de un segmento (de longitud  $2L$ ) limitado por dos obstáculos, tomaremos el origen de la coordenada  $x$  en su punto medio y obtenemos según (30.12):

$$\varrho(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{L^2 - x^2}} \left( \frac{p_0}{D} x + B \right).$$

### § 31. Equilibrio de una grieta en un medio elástico

Comparando con otros problemas de la teoría de la elasticidad, el problema del equilibrio de una grieta tiene características muy peculiares. Desde el punto de vista

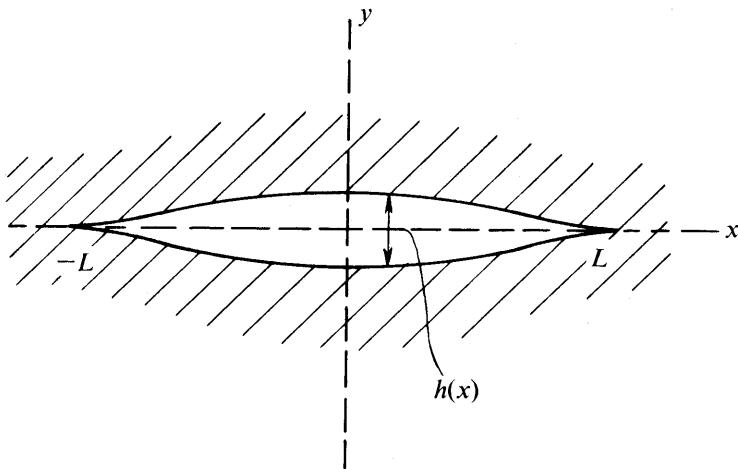


FIG. 27

de la teoría de la elasticidad, una grieta es una cavidad en un medio elástico, cavidad que existe en presencia de tensiones internas en el cuerpo y que se « cierra » bruscamente al suprimir las cargas. La forma y las dimensiones de la grieta dependen fundamentalmente de las tensiones actuantes. En consecuencia, la característica específica de este problema desde el punto de vista matemático consiste en que las condiciones de contorno se dan sobre una superficie a priori desconocida que debe determinarse al resolver el problema (\*).

Consideremos en un medio isótropo una grieta de longitud infinita, homogénea en una dirección (a lo largo del eje  $z$ ), que se encuentra en un campo plano de tensiones  $\sigma_{ik}^{(c)}(x, y)$ ; en otras palabras, consideremos el problema plano de teoría de la elasticidad. Supondremos que las tensiones son simétricas respecto al centro de la sección de la grieta. Entonces el perfil de la sección también será simétrico (figura 27). Llámemos a su longitud  $2L$ , y al ancho variable,  $h(x)$ ; debido a la simetría de la grieta  $h(-x) = h(x)$ .

(\*) La teoría cuantitativa de las grietas expuesta se debe a G. I. BARENBLATT (1959).

Supongamos que la grieta es angosta:  $h \ll L$ . Entonces las condiciones de contorno sobre su superficie se pueden referir al correspondiente segmento del eje  $x$ . En otras palabras, la grieta se considerará como una línea de discontinuidad (en el plano  $x, y$ ), sobre la cual la componente normal del desplazamiento experimenta un salto  $u_y = \pm h/2$ .

En lugar de  $h(x)$  introduzcamos otra función incógnita  $\varrho(x)$ , definiéndola por la fórmula

$$h(x) = \int_x^L \varrho(x) dx, \quad \varrho(-x) = -\varrho(x). \quad (31.1)$$

De una manera puramente formal, conviene interpretar la función  $\varrho(x)$  como densidad de dislocaciones rectilíneas (a lo largo del eje  $z$ ), distribuidas en forma continua sobre el eje  $x$ , cuyos vectores de Burgers son paralelos al eje  $y$  (\*). En el § 27 se indicó que una línea de dislocación puede ser considerada como borde de una superficie de discontinuidad, sobre la cual el corrimiento  $\mathbf{u}$  experimenta un salto  $\mathbf{b}$ . En la representación (31.1), la discontinuidad  $h$  del desplazamiento normal en el punto  $x$  se considera como suma de los vectores de Burgers de todas las dislocaciones que pasan a la derecha de este punto (la igualdad  $\varrho(-x) = -\varrho(x)$  significa que las dislocaciones situadas a la derecha y a la izquierda del punto  $x = 0$  tienen distinto signo.)

Tal representación permite escribir sin más la expresión de las tensiones normales ( $\sigma_{yy}$ ) sobre el eje  $x$ . Éstas son la suma de las tensiones  $\sigma_{yy}^{(e)}(x, 0)$  provenientes de las cargas externas [llámémolas para abreviar  $p(x)$ ], y de las tensiones  $\sigma_{yy}^{gr}(x)$  producidas por la deformación que aparece con la grieta. Considerando estas últimas como determinadas por dislocaciones distribuidas en el segmento  $(-L, L)$ , obtendremos [análogamente a (30.1)]:

$$\sigma_{yy}^{gr}(x) = -D \int_{-L}^L \frac{\varrho(\xi) d\xi}{\xi - x} \quad (31.2)$$

[para puntos en el mismo segmento  $(-L, L)$  la integral debe entenderse en el sentido de valor principal]. Para un medio isótropo

$$D = \frac{\mu}{2\pi(1-\sigma)} = \frac{E}{4\pi(1-\sigma^2)} \quad (31.3)$$

(\*) Por esto precisamente exponemos la teoría de las grietas en el capítulo sobre dislocaciones, aunque desde un punto de vista físico se trata de fenómenos completamente distintos.

(véase problema 3 § 28). En cambio, las tensiones  $\sigma_{xy}$  producidas por tales dislocaciones en un medio isótropo se anulan sobre el eje  $x$ .

La condición de contorno sobre la superficie libre de la grieta, referida (como indicamos anteriormente) al correspondiente segmento del eje  $x$ , exige la anulación de las tensiones normales  $\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^{(gr)} + p(x)$ . Esta condición, sin embargo, debe determinarse de modo más preciso debido a la siguiente circunstancia.

Supongamos que, en el borde, los labios de la grieta se cierran suavemente (lo cual se verá confirmado por los resultados que se obtienen), de modo que ambas superficies se aproximan hasta distancias muy pequeñas en sus cercanías. En estas condiciones, es necesario tener en cuenta las fuerzas de atracción molecular entre las superficies, cuya acción se propaga, como es sabido, hasta distancias  $r_0$ , grandes en comparación con las distancias interatómicas. Estas fuerzas desempeñarán un papel esencial en una estrecha región próxima al borde de la grieta, en la cual  $h \leq r_0$  (designaremos por  $d$  el orden de magnitud del ancho de esta región; su estimación se dará más adelante).

Sea  $G$  la fuerza de cohesión molecular, referida a la unidad de área de la grieta;  $G$  depende de la distancia  $h$  entre las superficies. Teniendo en cuenta estas fuerzas, la condición de contorno se escribe en la forma

$$\sigma_{yy}^{(gr)} + p(x) - G = 0. \quad (31.4)$$

Es natural suponer que la forma de la grieta en la región próxima a su borde viene determinada por el carácter de las fuerzas de cohesión y no depende de las fuerzas externas aplicadas al cuerpo. Entonces, al determinar la forma de la parte principal de una grieta producida por fuerzas externas  $p(x)$ , la cantidad  $G$  cobra el carácter de una función dada  $G(x)$ , independiente de  $p(x)$  (en la región de ancho  $d$ , la única en que es esencial) (\*).

Substituyendo en (31.4)  $\sigma_{yy}^{(gr)}$  por el valor (31.2), obtendremos la siguiente ecuación integral para  $\varrho(x)$ :

$$\int_{-L}^L \frac{\varrho(\xi) d\xi}{\xi - x} = \frac{1}{D} p(x) - \frac{1}{D} G(x) \equiv \omega(x). \quad (31.5)$$

Como se supone que los bordes de la grieta no están fijos, las tensiones en ellos deben mantenerse finitas. Esto significa que al resolver la ecuación integral (31.5), nos encontramos ante el último de los casos considerados en el § 30, cuya respuesta

(\*). En la teoría macroscópica, hay que imaginar que la función  $G(x)$  crece de manera continua (al disminuir  $L - x$ ) hasta un cierto valor máximo que se alcanza en el borde de la grieta.

viene dada por la fórmula (30.15). Con nuestra elección del origen de coordenadas [el punto medio del segmento ( $-L, L$ )], esta fórmula tiene la forma

$$\varrho(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{L^2 - x^2} \int_{-L}^L \frac{\omega(\xi)}{\sqrt{L^2 - \xi^2}} \frac{d\xi}{\xi - x}. \quad (31.6)$$

Además, debe satisfacerse la condición (30.14), según la cual, en el caso dado,

$$\int_0^L \frac{p(x) dx}{\sqrt{L^2 - x^2}} - \int_0^L \frac{G(x) dx}{\sqrt{L^2 - x^2}} = 0 \quad (31.7)$$

[utilizando la simetría del problema, pasamos de una integral a lo largo del segmento ( $-L, L$ ) a una integral de 0 a  $L$ ]. Como  $G(x)$  es distinta de cero sólo en la región  $L - x \sim d$ , en la segunda integral se puede poner  $L^2 - x^2 \cong 2L(L - x)$ , y entonces la condición (31.7) toma la forma

$$\int_0^L \frac{p(x) dx}{\sqrt{L^2 - x^2}} = \frac{M}{\sqrt{2L}}, \quad (31.8)$$

donde  $M$  es una constante (que dependen del material del medio):

$$M = \int_0^d \frac{G(\xi) d\xi}{\sqrt{\xi}}. \quad (31.9)$$

Esta constante puede expresarse por medio de las habituales características macroscópicas del cuerpo — sus módulos elásticos y su tensión superficial  $\alpha$ ; como veremos más adelante, esta relación viene dada por la fórmula

$$M = \sqrt{\frac{\pi \alpha E}{1 - \sigma^2}}. \quad (31.10)$$

La igualdad (31.8) es una ecuación que determina la longitud de la grieta  $2L$  para una distribución dada de tensiones  $p(x)$ . Así, para una grieta dilatada por fuer-

zas concentradas  $f$ , aplicadas en el punto medio de sus caras [ $p(x) = f\delta(x)$ ], llamamos:

$$2L = \frac{f^2}{M^2} = \frac{f^2(1 - \sigma^2)}{\pi a E}. \quad (31.11)$$

Sin embargo, hay que tener en cuenta que no es posible el equilibrio estable de la grieta para una distribución  $p(x)$  cualquiera. Así, para tensiones dilatadoras homogéneas [ $p(x) = \text{const} = p_0$ ] obtendremos a partir de (31.8):

$$2L = \frac{4M^2}{\pi^2 p_0^2} = \frac{4\alpha E}{\pi(1 - \sigma^2)p_0^2}. \quad (31.12)$$

El carácter inverso de esta dependencia (disminución de  $L$  al aumentar  $p_0$ ) indica la inestabilidad del estado. El valor de  $L$  definido por (31.12) corresponde a un equilibrio inestable y da la longitud « crítica » de la grieta: grietas más largas, crecen espontáneamente, y más cortas, se « cierran » bruscamente (este resultado fue obtenido por vez primera por A. Griffith, 1920).

Pasemos ahora a estudiar el perfil de la grieta. Cuando  $L - x \leq d$  el dominio en el que  $L - x \sim d$  representa la principal contribución a la integral (31.6). Ésta puede entonces ser sustituida por su valor límite para  $x \rightarrow L$  y se obtiene  $\varrho = \text{const} \sqrt{L - x}$ , de donde (\*)

$$h(x) = \text{const} (L - x)^{3/2} \quad (L - x \sim d). \quad (31.13)$$

Vemos que, efectivamente, en la región final  $d$  ambos labios de la grieta se cierran suavemente. El valor del coeficiente en (31.13) depende de la naturaleza de las fuerzas de cohesión y no puede expresarse mediante los parámetros macroscópicos habituales (\*\*).

Para una zona del perfil más separada del borde, en la cual  $d \ll L - x \ll L$ , de nuevo desempeña un papel fundamental en la integral de (31.6) la región  $L - \xi \sim d$ , siendo  $\omega(\xi) \cong -G(\xi)/D$ . Pero además de las sustituciones  $L^2 - x^2 \cong 2L(L - x)$ ,

(\*) Para llevar a cabo el paso al límite hay que descomponer previamente la integral que aparece en (31.6) en suma de dos integrales con los numeradores  $\omega(\xi) - \omega(L)$  y  $\omega(L)$ ; la segunda de éstas integrales no contribuye al valor límite buscado.

(\*\*) La estimación del coeficiente en (31.13) conduce al valor  $\text{const} \sim \sqrt{a/d}$ , donde  $a$  representa las dimensiones atómicas (se han utilizado, además, las estimaciones  $\alpha \sim aE$ ,  $\mu \sim E\sqrt{a}$ ). La estimación de la longitud  $d$  se obtiene a partir de la condición  $h(d) \sim r_0$ , de donde  $d \sim r_0^2/a$ , es decir,  $d \gg r_0$ . Sin embargo, hay que decir que las desigualdades efectivamente necesarias para las estimaciones no poseen un margen muy grande, de modo que a la forma « en pico » que se obtiene no hay que atribuir un significado demasiado literal.

$L^2 - \xi^2 \cong 2L(L - \xi)$ , se puede reemplazar aquí  $\xi - x \cong L - x$ . Obtendremos en definitiva:

$$\varrho = \frac{M}{\pi^2 D \sqrt{L - x}},$$

donde  $M$  es la misma constante (31.9)-(31.10). De aquí se sigue

$$h(x) = \frac{2M}{\pi^2 D} \sqrt{L - x} \quad (d \ll L - x \ll L). \quad (31.14)$$

De esta manera, el extremo del perfil resulta independiente de las fuerzas aplicadas (y a la vez también de la longitud de la grieta) en toda la región  $L - x \ll L$ : cuando  $L - x \gg d$ , el perfil viene dado por la expresión (31.14), y cuando  $L - x \sim d$ , tiene un « pico » infinitamente agudo (31.13) (fig. 28). En la parte restante, la forma de la grieta depende de las fuerzas aplicadas.

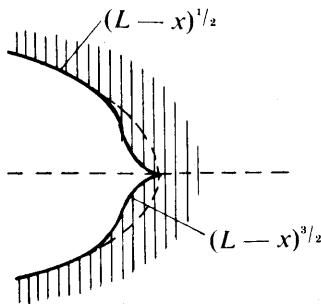


FIG. 28

De este modo, prescindiendo de detalles cuyas dimensiones son del orden del radio de acción de las fuerzas cohesivas, la grieta tiene un perfil suave con extremos redondeados según las parábolas (31.14) y este perfil se determina completamente a partir de las fuerzas aplicadas y mediante los parámetros macroscópicos ordinarios. Pero los pequeños « picos » ( $\sim d$ ) que, en realidad, aparecen en los extremos, tienen una gran importancia: precisamente ellos garantizan que las tensiones sean finitas en los bordes de la grieta.

Las tensiones provocadas por la grieta a lo largo del eje  $x$  se determinan con la fórmula (31.2). A distancias  $x - L$ , tales que  $d \ll x - L \ll L$  (\*):

$$\sigma_{yy} \cong \varrho_{yy}^{(gr)} \cong \frac{M}{\pi \sqrt{x - L}}. \quad (31.15)$$

(\*) Es fácil calcular la integral directamente, pero esto ni siquiera es necesario si se utiliza la relación entre las funciones  $\varrho(x)$  para  $x < L$  y  $\sigma_{yy}^{(gr)}$  para  $x > L$ , evidente a partir de las conclusiones expuestas en el § 30.

El aumento de las tensiones al aproximarse al borde de la grieta continúa según esta ley hasta distancias  $x = L \sim d$ , después  $\sigma_{yy}$  decrece hasta anularse en el punto  $x = L$ .

Resta deducir la fórmula (31.10) citada anteriormente, que relaciona la constante  $M$  con las cantidades macroscópicas habituales. Para ello escribiremos la condición de mínimo de la energía libre total, igualando a cero su variación cuando se modifica la longitud  $L$ .

Por una parte, al aumentar la longitud de la grieta en  $\delta L$  la energía de superficie de sus dos superficies libres aumenta en  $\delta F_{sup} = 2\alpha\delta L$ . Al mismo tiempo, al « abrirse » los labios de la grieta, disminuye la energía elástica  $F_{el}$  en una cantidad

$$\frac{1}{2} \int \sigma_{yy}(x) \nu(x) dx,$$

donde  $\nu(x)$  es la diferencia entre el ancho de los contornos de la grieta trasladado  $y$  sin trasladar. Como el perfil del extremo de la grieta no depende de su longitud, será  $\nu(x) = h(x - \delta L) - h(x)$ . Las tensiones  $\sigma_{yy} = 0$  cuando  $x < L$ , y  $h(x) = 0$  cuando  $x > L$ . Por esta razón tenemos:

$$\delta F_{el} = -\frac{1}{2} \int_L^{L+\delta L} \sigma_{yy}(x) h(x - \delta L) dx.$$

Substituyendo aquí (31.14) y (31.15), obtendremos:

$$\delta F_{el} = -\frac{M^2}{\pi^3 D} \int_L^{L+\delta L} \sqrt{\frac{L + \delta L - x}{x - L}} dx = -\frac{M^2}{\pi^3 D} \int_0^{\delta L} \frac{\sqrt{y} dy}{\sqrt{\delta L - y}} = -\frac{M^2}{2\pi^2 D} \delta L.$$

Finalmente, de la condición  $\delta F_{sup} + \delta F_{el} = 0$  se sigue la relación  $M^2 = 4\pi^2 z D$ , de donde resulta (31.10) (\*).

---

(\*) Señalaremos que la teoría expuesta, en su forma textual, incluyendo la relación (31.10), es aplicable, en realidad, a los cuerpos frágiles ideales, esto es, a aquello que conservan su elasticidad lineal hasta ser destruidos (tales como el vidrio y el cuarzo fundido). En los cuerpos que poseen plasticidad, la formación de una grieta puede ir acompañada de una deformación plástica en sus extremos.

## CAPÍTULO V

### CONDUCCIÓN TÉRMICA Y VISCOSIDAD EN SÓLIDOS

#### § 32. Ecuación de la conducción térmica en sólidos

El calentamiento no uniforme de un sólido no produce convección tal como sucede generalmente con fluidos. Por lo tanto, en los sólidos la transmisión de calor se produce por conducción térmica solamente. Los procesos de conducción térmica en sólidos se describen, en consecuencia, mediante ecuaciones más simples que en fluidos, donde la convección trae complicaciones adicionales.

La ecuación de conducción térmica en un sólido puede obtenerse inmediatamente a partir del principio de conservación de la energía en forma de una «ecuación de continuidad para el calor». La cantidad de calor absorbida por la unidad de volumen de un cuerpo en la unidad de tiempo es  $T \frac{\partial S}{\partial t}$ , donde  $S$  es la entropía por unidad de volumen. Este valor deberá igualarse a  $-\operatorname{div} \mathbf{q}$ , donde  $\mathbf{q}$  es la densidad de flujo de calor. Este flujo puede escribirse casi siempre como  $-\kappa \operatorname{grad} T$ , o sea, es proporcional al gradiente de la temperatura (siendo  $\kappa$  la conductividad térmica). Entonces resulta

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \operatorname{div} (\kappa \nabla T). \quad (32.1)$$

De acuerdo a la fórmula (6.4) la entropía puede escribirse en la forma

$$S = S_0(T) + K \alpha u_{tt},$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación y  $S_0$  la entropía del cuerpo en el estado no deformado. Supondremos que, tal como ocurre habitualmente, las diferencias de temperatura son suficientemente pequeñas como para que  $\kappa$ ,  $\alpha$ , etc., puedan ser considerados constantes. En esas condiciones, la ecuación (32.1), después de substituir en ella la expresión dada para  $S$ , se escribe

$$T \frac{\partial S_0}{\partial t} + \alpha K T \frac{\partial u_{tt}}{\partial t} = \kappa \Delta T.$$

Según una fórmula bien conocida de la termodinámica tenemos

$$C_p - C_v = K\alpha^2 T,$$

de donde

$$\chi KT = \frac{C_p - C_v}{\alpha}$$

La derivada temporal de  $S_0$  puede escribirse como  $(\partial S_0 / \partial T)(\partial T / \partial t)$  donde la derivada  $\partial S_0 / \partial T$  se toma para  $u_{ii} = \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , o sea, a volumen constante, y es por lo tanto igual a  $C_v/T$ .

La ecuación resultante para la conducción térmica es

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{C_p - C_v}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u} = \chi \Delta T. \quad (32.2)$$

A fin de obtener un sistema completo de ecuaciones es necesario agregar a ésta una ecuación que determine la deformación de un cuerpo calentado no uniformemente. Esta ecuación es la ecuación de equilibrio (7.8):

$$2(1-\sigma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - (1-2\sigma) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{2\alpha(1+\sigma)}{3} \nabla T. \quad (32.3)$$

Con la ecuación (32.3) podemos en principio determinar la deformación de un cuerpo para cualquier distribución dada de temperaturas. Substituyendo en (32.2) la expresión así obtenida para  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  se llega a una ecuación para la distribución de temperaturas en la cual la única incógnita es  $T(x, y, z, t)$ .

Consideremos, por ejemplo, la conducción térmica en un sólido infinito en el cual la distribución de temperatura satisface una única condición: la temperatura tiende en el infinito a un valor constante  $T_0$  y allí no existe deformación. En tales condiciones, la ecuación (32.3) nos da la siguiente relación entre  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  y  $T$  (véase § 7, problema 8):

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \alpha(T - T_0).$$

Substituyendo esta expresión en (32.2), obtenemos

$$\frac{(1 + \sigma) C_p + 2(1 - 2\sigma) C_v}{3(1 - \sigma)} \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T \quad (32.4)$$

que es del tipo de la ecuación ordinaria para la conducción térmica.

Por una ecuación de este mismo tipo se describe también la distribución de temperaturas a lo largo de una varilla recta y delgada si uno de sus extremos (o ambos) está libre. La distribución de la temperatura puede suponerse constante en cada sección transversal de la varilla, de manera que  $T$  será función solamente de la coordenada  $x$  (dirigida a lo largo de la varilla) y del tiempo. La dilatación térmica en tales varillas provocará solamente un cambio en su longitud, pero no afectará a su forma rectilínea ni hará aparecer tensiones internas. Es claro entonces que la derivada  $\partial S / \partial t$  en la ecuación (32.1) deberá tomarse a presión constante, y como  $(\partial S / \partial T)_p = C_p / T$ , la distribución de temperaturas satisfará la ecuación de la conducción térmica en una dimensión

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Debe señalarse, sin embargo, que la distribución de temperaturas en un sólido puede determinarse siempre en la práctica, con suficiente precisión, mediante una simple ecuación de conducción térmica. La razón es que el segundo término del primer miembro de la ecuación (32.2) es una corrección del orden de  $(C_p - C_v)/C_v$  respecto del primer término. Pero en los sólidos la diferencia entre los dos calores específicos es muy pequeña, y si se desprecia ese término, la ecuación de conducción térmica puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \quad (32.5)$$

donde  $\chi$  es la conductividad termométrica definida como el cociente entre la conductividad térmica  $\chi$  y un cierto calor específico promedio  $C$  por unidad de volumen.

### § 33. Conducción térmica en cristales

En un cuerpo anisótropo la dirección del flujo de calor no tiene porqué coincidir, en general, con el gradiente de la temperatura. Por consiguiente, en lugar de la fórmula

$$\mathbf{q} = -\chi \operatorname{grad} T$$

entre  $\mathbf{q}$  y el gradiente de la temperatura deberá usarse para cristales la relación más general.

$$q_i = -\kappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \quad (33.1)$$

El tensor de segundo rango  $\kappa_{ik}$  se llama *tensor de conductividad térmica* del cristal. De acuerdo con esta dependencia, también la ecuación de conducción térmica (32.5) tiene una forma más general:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_{ik} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (33.2)$$

Podemos enunciar ahora un teorema general: el tensor de conductividad térmica  $\kappa_{ik}$  es simétrico, o sea:

$$\kappa_{ik} = \kappa_{ki}. \quad (33.3)$$

Esta relación, que a continuación demostramos, es una consecuencia de la simetría de los coeficientes cinéticos(\*)).

La velocidad de aumento de la entropía total de un cuerpo debido a procesos irreversibles de conducción térmica es

$$\dot{S}_{tot} = - \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{T} dV = - \int \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} dV + \int \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{T} dV.$$

Puede verse que si transformamos la primera integral en una integral de superficie resulta igual a cero. De esta manera, obtenemos

$$\dot{S}_{tot} = \int \mathbf{q} \cdot \nabla \frac{1}{T} dV = - \int \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2} dV,$$

o sea

$$\dot{S}_{tot} = - \int \frac{1}{T^2} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} dV. \quad (33.4)$$

---

(\*) Véase «Física estadística», § 122.

Según la definición general de los coeficientes cinéticos, de (33.4) se puede deducir que, en el caso presente, lo son los coeficientes  $T^2 \kappa_{ik}$  en las expresiones (\*).

$$q_i = -T^2 \kappa_{ik} \left( \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right).$$

Por lo tanto, el resultado (33.3) es consecuencia inmediata de la simetría de los coeficientes cinéticos.

La forma cuadrática

$$-q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \kappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_k}$$

debe ser definida positiva, porque la derivada temporal (33.4) de la entropía debe ser positiva. Como es sabido, la condición para que una forma cuadrática sea definida positiva es que los valores propios de la matriz de sus coeficientes sean positivos. De aquí resulta que todos los valores principales del tensor de conductividad térmica  $\kappa_{ik}$  son siempre positivos, lo que, por otra parte, es evidente a partir de simples consideraciones acerca de la dirección del flujo de calor.

El número de componentes independientes del tensor  $\kappa_{ik}$  depende de la simetría del cristal. Como el tensor  $\kappa_{ik}$  es simétrico, este número es evidentemente igual al número de componentes independientes del tensor de dilatación térmica (§ 10), que es también un tensor simétrico de rango dos.

### § 34. Viscosidad de sólidos

Al estudiar el movimiento de los cuerpos elásticos supusimos hasta aquí que la deformación era reversible. En realidad, un proceso es termodinámicamente reversible solamente si se realiza con velocidad infinitamente pequeña, de modo que el estado de equilibrio termodinámico llega a establecerse en cada instante en el cuerpo. Sin embargo, un movimiento real se produce a velocidades finitas, el cuerpo no se encuentra en equilibrio en cada instante y, en consecuencia, tendrán lugar en él procesos internos que tiendan a llevarlo al estado de equilibrio. La existencia de estos procesos hace que el movimiento resultante sea irreversible lo que, en particular, se manifiesta en que la energía mecánica(\*\*) se disipa y transforma finalmente en calor.

(\*) Utilizamos aquí la definición dada en « Hidrodinámica », § 58.

(\*\*) Entendemos aquí por *energía mecánica* la suma de la energía cinética del movimiento macroscópico en el cuerpo elástico y su energía potencial (elástica) proveniente de la deformación.

El proceso de disipación de energía ocurre por la acción de dos mecanismos diferentes. El primero consiste en la conducción irreversible de calor entre puntos de diferente temperatura. El segundo, en que si ocurre algún movimiento interno en el cuerpo, habrá procesos irreversibles debidos a las velocidades finitas de esos movimientos; estos procesos de disipación de la energía pueden llamarse, como en el caso de los fluidos, procesos de fricción interna o *viscosidad*.

En la mayoría de los casos, la velocidad de los movimientos macroscópicos en un cuerpo es tan pequeña que la disipación de energía es insignificante. Tales procesos « casi irreversibles » pueden describirse mediante la *función disipativa* (\*). Si tenemos un sistema mecánico cuyo movimiento va acompañado de disipación de energía, su movimiento puede describirse mediante las ecuaciones ordinarias de movimiento incluyendo entre las fuerzas que actúan sobre él las *fuerzas disipativas* o *fuerzas de fricción*, que son funciones lineales de las velocidades. Estas fuerzas pueden escribirse como las derivadas respecto de la velocidad de una cierta función, cuadrática en las velocidades, llamado función disipativa. La « fuerza de fricción »  $f_a$  correspondiente a la coordenada generalizada  $q_a$  del sistema tiene entonces la forma

$$f_a = - \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}_a}.$$

La función disipativa es una forma cuadrática definida positiva en las  $q_a$ . Esta relación equivale a la siguiente:

$$\delta\Psi = - \sum_a f_a \delta \dot{q}_a, \quad (34.1)$$

donde  $\delta\Psi$  es el cambio en la función disipativa provocado por un cambio infinitesimal en las velocidades. Puede demostrarse también que la función disipativa vale la mitad de la disminución de la energía mecánica por unidad de tiempo.

Es fácil generalizar la ecuación (34.1) al caso de un movimiento con fricción en un medio continuo. El estado del sistema se determina en este caso mediante una sucesión continua de coordenadas generalizadas. Estas coordenadas son las componentes del vector desplazamiento  $\mathbf{u}$ , dado en cada punto del cuerpo. Así, pues, la relación (34.1) debe escribirse en la forma integral:

$$\delta \int \Psi \, dV = - \int f_i \delta \dot{u}_i \, dV, \quad (34.2)$$

donde  $f_i$  son las componentes del vector fuerza disipativa  $\mathbf{f}$  por unidad de volumen del cuerpo; podemos escribir la función total disipativa del cuerpo como  $\int \Psi \, dV$ , donde  $\Psi$  es la función disipativa por unidad de volumen.

(\*) ) « Física estadística », § 123.

Vamos a determinar ahora la forma general de la función disipativa  $\Psi$  para cuerpos deformados. La función  $\Psi$  que describe la fricción interna debe ser cero si no existe movimiento interno, en particular, si el cuerpo realiza como un todo un movimiento translatorio o rotatorio puro. En otras palabras, la función disipativa debe ser cero si  $\dot{\mathbf{u}} = \text{const}$  o  $\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ . Esto significa que la función debe depender, no de la propia velocidad, sino de su gradiente y que puede contener sólo combinaciones de las derivadas tales que la función se anule cuando  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ . Estas son las sumas

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i},$$

o sea, las derivadas temporales  $\dot{u}_{ik}$  de las componentes del tensor de las deformaciones (\*). La forma más general de tal función es

$$\Psi = \frac{1}{2} \eta_{iklm} \dot{u}_{ik} \dot{u}_{lm}. \quad (34.3)$$

El tensor  $\eta_{iklm}$ , que es de rango cuatro, puede llamarse *tensor de viscosidad*. Este tensor tiene las siguientes propiedades evidentes de simetría:

$$\eta_{iklm} = \eta_{ilmk} = \eta_{kilm} = \eta_{ikml}. \quad (34.4)$$

La expresión (34.3) es exactamente análoga a la expresión (10.1) para la energía libre de un cristal: en vez del tensor módulo elástico, aparece en ella el tensor  $\eta_{iklm}$ , y en vez de  $u_{ik}$ , el tensor  $\dot{u}_{ik}$ . Por lo tanto los resultados obtenidos en § 10 para el tensor  $\lambda_{iklm}$  en cristales de diferentes simetrías son también válidas para el tensor  $\eta_{iklm}$ . En particular, el tensor  $\eta_{iklm}$  en un cuerpo isótropo tiene solamente dos componentes independientes y  $\Psi$  puede escribirse en una forma análoga a la expresión (4.3) para la energía elástica de un cuerpo isótropo:

$$\Psi = \eta \left( \dot{u}_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \dot{u}_{ll} \right)^2 + \frac{\zeta}{2} \dot{u}_{ll}^2, \quad (34.5)$$

donde  $\eta$  y  $\zeta$  son los dos coeficientes de viscosidad. Como  $\Psi$  es una función definida positiva, los coeficientes  $\eta$  y  $\zeta$  deben ser también positivos.

La expresión (34.2) es enteramente análoga a la que vale para la energía libre elástica,

$$\delta \int F dV = - \int F_i \delta u_i dV,$$

---

(\*) Cf. los argumentos enteramente análogos en el caso de viscosidad de fluidos, «Hidrodinámica» § 15.

donde  $F_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k$  es la fuerza por unidad de volumen. Por lo tanto, la expresión para la fuerza disipativa  $f_i$  en términos del tensor  $\dot{u}_{ik}$  puede escribirse inmediatamente por analogía con la expresión para  $F_i$  en términos de  $u_{ik}$ . Tenemos:

$$f_i = \frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}, \quad (34.6)$$

donde el tensor de tensiones «disipativas»  $\sigma'_{ik}$  está definido mediante la ecuación

$$\sigma'_{ik} = \frac{\partial\Psi}{\partial\dot{u}_{ik}} = \gamma_{iklm}\dot{u}_{lm}. \quad (34.7)$$

La viscosidad puede tenerse en cuenta, pues, en las ecuaciones de movimiento, simplemente reemplazando en ellas el tensor de tensiones  $\sigma_{ik}$  por la suma  $\sigma_{ik} + \sigma'_{ik}$ .

En un cuerpo isótropo resulta

$$\sigma'_{ik} = 2\eta(\dot{u}_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\dot{u}_{ll}) + \zeta\dot{u}_{ll}\delta_{ik}. \quad (34.8)$$

Esta expresión es, tal como esperábamos, formalmente idéntica a la obtenida para el tensor de tensiones viscosas en fluidos.

### § 35. Absorción del sonido en sólidos

La absorción del sonido en sólidos puede calcularse en una forma totalmente análoga a como se calcula el coeficiente de absorción en fluidos (\*). Haremos aquí los cálculos correspondientes para un cuerpo isótropo. La parte correspondiente a la conducción térmica en la disipación de energía  $\dot{E}_{mec}$  es la integral

$$-\frac{\kappa}{T} \int (\nabla T)^2 dV.$$

Pero debido a la viscosidad, se disipa una cantidad de energía  $2\Psi$  por unidad de tiempo y volumen, de manera que la parte total de  $\dot{E}_{mec}$  correspondiente a la viscosidad es  $-2\int\Psi dV$ . Utilizando la expresión (34.5), obtenemos finalmente

$$\dot{E}_{mec} = -\frac{\kappa}{T} \int (\nabla T)^2 dV - 2\eta \int \left( \dot{u}_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\dot{u}_{ll} \right)^2 dV - \zeta \int \dot{u}_{ll}^2 dV. \quad (35.1)$$

(\*) «Hidrodinámica», § 77.

Para calcular el gradiente de temperatura utilizaremos el hecho que las oscilaciones acústicas son adiabáticas en primera aproximación. Empleando la expresión (6.4) para la entropía, podemos escribir la condición de adiabatismo en la forma

$$S_0(T) + K \alpha u_{ii} = S_0(T_0),$$

donde  $T_0$  es la temperatura del cuerpo no deformado. Desarrollando la diferencia  $S_0(T) - S_0(T_0)$  en serie de potencias de  $T - T_0$ , obtenemos en primer orden

$$S_0(T) - S_0(T_0) = (T - T_0) \frac{\partial S_0}{\partial T_0} = \frac{C_v}{T_0} (T - T_0)$$

(la derivada de la entropía debe tomarse para  $u_{ii} = 0$ , o sea, a volumen constante). Resulta, pues,

$$T - T_0 = - \frac{T \alpha K}{C_v} u_{ii}.$$

Utilizando también las relaciones

$$K \equiv K_{iso} = \frac{C_v}{C_p} K_{ad} \text{ y } \frac{K_{ad}}{\varrho} = c_l^2 - \frac{4}{3} c_t^2,$$

podemos escribir finalmente el resultado como

$$T - T_0 = - \frac{T \alpha \varrho}{C_p} \left( c_l^2 - \frac{4}{3} c_t^2 \right) u_{ii}. \quad (35.2)$$

Consideremos primeramente la absorción de ondas elásticas transversales. La conducción térmica no puede conducir a la absorción de estas ondas (en la primera aproximación considerada). En efecto, en una onda transversal es  $u_{ii} = 0$  y, en consecuencia, la temperatura en ella es constante (35.2). Supongamos que la onda se propaga en la dirección del eje  $x$ ; entonces será

$$u_x = 0, \quad u_y = u_{0y} \cos(kx - \omega t), \quad u_z = u_{0z} \cos(kx - \omega t);$$

además, las únicas componentes no nulas del tensor de deformaciones son

$$u_{xy} = - \frac{u_{0y} k}{2} \sin(kx - \omega t), \quad u_{xz} = - \frac{u_{0z} k}{2} \sin(kx - \omega t).$$

Consideremos la disipación de energía por unidad de volumen del cuerpo; el promedio temporal de esta cantidad es, en virtud de (35.1),

$$\bar{E}_{mec} = -\frac{\eta \omega^4}{2c_l^2} (u_0^2 y + u_0^2 z),$$

donde hemos puesto  $k = \omega/c_l$ . Por otra parte, la energía media total de la onda es dos veces la energía cinética media:

$$\bar{E} = \rho \int \bar{u^2} dV;$$

refiriendo también esta magnitud a la unidad de volumen, obtenemos

$$\bar{E} = \frac{\rho \omega^2}{2} (u_0^2 y + u_0^2 z).$$

El coeficiente de absorción del sonido se define como razón de la energía media disipada al doble del flujo medio de energía de la onda; este coeficiente determina la ley de variación de la amplitud de la onda con la distancia, amplitud que decrece proporcionalmente a  $e^{-\gamma x}$ . Obtenemos así la siguiente expresión para el coeficiente de absorción de ondas transversales:

$$\gamma_t = \frac{|\bar{E}_{mec}|}{2c_l \bar{E}} = \frac{\eta \omega^2}{2\rho c_l^3}. \quad (35.3)$$

En una onda sonora longitudinal es  $u_x = u_0 \cos(kx - \omega t)$ ,  $u_y = u_z = 0$ . Un cálculo análogo al anterior, utilizando las fórmulas (35.1) y (35.2), nos da

$$\gamma_t = \frac{\omega^2}{2\rho c_l^3} \left[ \left( \frac{4}{3} \eta + \zeta \right) + \frac{\pi T \alpha^2 \rho^2 c_l^2}{C_p^2} \left( 1 - \frac{4c_l^2}{3c_l^2} \right)^2 \right]. \quad (35.4)$$

Estas fórmulas se refieren, en rigor, únicamente a cuerpos amorfos totalmente isótropos. Sin embargo, dan también el orden de magnitud correcto para la absorción del sonido en monocristales anisótropos.

La absorción del sonido en cuerpos policristalinos presenta propiedades muy particulares. Si la longitud de onda  $\lambda$  de la onda sonora es pequeña comparada con la dimensión  $a$  de los cristales individuales, el sonido se absorberá en cada cristal de la misma manera que en un cristal grande y el coeficiente de absorción será proporcional a  $\omega^2$ .

En cambio, si  $\lambda \gg a$  la naturaleza de la absorción es diferente. En este caso podemos suponer que cada cristalito está sometido a una presión uniformemente

distribuida. Sin embargo, como los cristalitos son anisótropos y también lo son las condiciones de contorno en sus superficies de contacto, la deformación resultante no es uniforme. Varía considerablemente (en una cantidad del mismo orden que ella misma) en distancias del orden de las dimensiones del cristalito, no en una longitud de onda como en los cuerpos homogéneos. Para la absorción del sonido son esenciales las velocidades de deformación ( $\dot{u}_{ik}$ ) y los gradientes de temperatura adquieren importancia. De estas magnitudes, las primeras tendrán, como antes, un orden de magnitud normal. Los gradientes térmicos, en cambio, dentro de cada cristalito son anómalamente grandes. En consecuencia la absorción debida a conducción térmica será grande respecto de la absorción debida a viscosidad y bastará calcular la primera solamente.

Consideremos dos casos límites. El tiempo durante el cual la temperatura se iguala por conducción térmica en distancias del orden de  $a$  (el tiempo de relajación para la conducción térmica) es del orden de  $a^2/\chi$ . Supongamos primero que  $\omega \ll \chi/a^2$ . Esto significa que el tiempo de relajación es pequeño comparado con el período de oscilación de la onda y el equilibrio térmico se establece prácticamente en cada cristalito; en este caso, tenemos oscilaciones prácticamente isotérmicas.

Sea  $T'$  la diferencia de temperaturas en un cristalito y  $T'_0$  la diferencia correspondiente a un proceso adiabático. El calor transferido por conducción térmica (por unidad de volumen) es

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} = \kappa \Delta T' \sim \frac{\kappa T'}{a^2}.$$

La cantidad de calor desarrollada en la deformación es del orden de  $T'_0 C \sim \omega T'_0 C$ , donde  $C$  es la capacidad calorífica. Igualando las dos expresiones obtenemos

$$T' \sim T'_0 \frac{\omega a^2}{\chi}.$$

La temperatura varía en una cantidad del orden de  $T'$  en las dimensiones del cristalito, de modo que su gradiente es del orden de  $T'/a$ . Finalmente,  $T'_0$  se obtiene a partir de (35.2) haciendo  $u_{ii} \sim ku \sim \omega u/c$  ( $u$  es la amplitud del vector desplazamiento):

$$T'_0 \sim \frac{T \varrho c \omega}{C} u \quad (35.5)$$

(naturalmente, al obtener órdenes de magnitud hemos despreciado la diferencia

entre las distintas velocidades del sonido). Utilizando estos resultados, podemos calcular la energía disipada por unidad de volumen:

$$\bar{E}_{mec} \sim \frac{\chi}{T} (\nabla T)^2 \sim \frac{\chi}{T} \left( \frac{T'}{a} \right)^2$$

Dividiéndola por el flujo de energía  $c\bar{E} \sim c\rho\omega^2 u^2$ , podemos calcular el coeficiente de amortiguamiento:

$$\gamma \sim \frac{T\alpha^2 \rho c a^2}{\chi C} \omega^2 \text{ para } \omega \ll \frac{\chi}{a^2} \quad (35.6)$$

(C. Zener, 1938). Comparando esta expresión con las expresiones generales (35.3) y (35.4), cabe decir que, en el caso considerado, la absorción del sonido en un cuerpo policristalino es la misma que si éste tuviera una viscosidad

$$\eta \sim \frac{T\alpha^2 \rho^2 c^4 a^2}{\chi C},$$

mucho mayor que la viscosidad real de los monocrstales que lo constituyen.

Consideremos ahora el caso límite opuesto, en el que es  $\omega \gg \chi/a^2$ . En otras palabras, el tiempo de relajación es grande comparado con el período de oscilación de la onda y no ocurre igualación apreciable de las temperaturas durante un período completo, diferencias de temperatura éstas que se deben a la deformación. Sería incorrecto, sin embargo, suponer que los gradientes de temperatura que determinan la absorción del sonido son del orden de  $T_0'/a$ . Esta suposición tendría en cuenta solamente la conducción térmica en cada cristalito, mientras que, tal como señaló M. A. Isakovich (1948), es importante en este caso el intercambio de calor entre cristales vecinos. Si los cristalitos estuviesen térmicamente aislados, las diferencias de temperatura existentes en sus fronteras comunes serían del mismo orden  $T_0'$  que las existentes dentro de los límites de un cristalito aislado. En realidad, las condiciones de contorno imponen la continuidad de la temperatura al atravesar las superficies de separación entre cristalitos. Tenemos entonces « ondas de temperatura » que se « propagan » desde la periferia hacia el interior de cada cristalito; estas ondas se amortiguan al recorrer una distancia (\*)  $\delta \sim \sqrt{(\chi/\omega)}$ . En el caso que estamos considerando,  $\delta \ll a$ , o sea, el gradiente térmico más importante es del orden de  $T_0'/\delta$  y se presenta a distancias pequeñas comparadas con la dimensión total del

(\*) Debe recordarse que si tenemos un medio conductor térmico limitado por un plano  $x = 0$  en el cual el exceso de temperatura varía periódicamente según  $T' = T_0 e^{-i\omega t}$ , la distribución de temperatura en el medio puede representarse mediante una « onda térmica »  $T' = T_0 e^{-i\omega t} e^{-(1+i)x} V_{\omega/2\gamma}$  (véase, « Hidrodinámica », § 52)

cristalito. La fracción correspondiente de volumen de éste es  $\sim a^2\delta$ ; efectuando el cociente entre este volumen y el volumen total del cristal ( $\sim a^3$ ), obtenemos la disipación media de energía;

$$\bar{E}_{mec} \sim \frac{\chi}{T} \left( \frac{T'_0}{\delta} \right)^2 \frac{a^2\delta}{a^3} \approx \frac{\chi T'^2_0}{Ta\delta}.$$

Substituyendo  $T'_0$  por la expresión (35.5) y dividiendo por  $c\bar{E} \sim c\rho\omega^2u^2$  obtenemos el coeficiente de absorción requerido:

$$\gamma \sim \frac{T\alpha^2\rho c}{aC} \sqrt{\chi\omega} \text{ para } \omega \gg \frac{\chi}{a^2}. \quad (35.7)$$

Resulta, pues, proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia (\*).

En resumen, el coeficiente de absorción del sonido en un cuerpo policristalino varía como  $\omega^2$  a muy bajas frecuencias ( $\omega \ll \chi/a^2$ ); para  $\chi/a^2 \ll \omega \ll c/a$  varía como  $\sqrt{\omega}$ , y para  $\omega \gg c/a$  nuevamente varía como  $\omega^2$ .

Consideraciones análogas valen para el amortiguamiento de ondas transversas en varillas delgadas y placas (C. Zener, 1938). Si  $h$  es el grosor de la placa o varilla, para  $\lambda \gg h$  el gradiente térmico transversal tendrá importancia y el amortiguamiento se deberá en su mayor parte a conducción térmica (véase Problemas). Si además  $\omega \ll \chi/h^2$ , las oscilaciones podrán considerarse como isotérmicas, y al determinar (por ejemplo) las frecuencias propias de vibración de la varilla o placa deberán utilizarse los módulos de elasticidad isotérmicos.

#### PROBLEMAS

- Determinar el coeficiente de amortiguamiento para las oscilaciones propias longitudinales de una varilla.

*Solución.* El coeficiente de amortiguamiento de las vibraciones con el tiempo se define por  $\beta = |\bar{E}_{mec}|/2\bar{E}$ ; la amplitud de vibración disminuye con el tiempo proporcionalmente a  $e^{-\beta t}$

En una onda longitudinal, cualquier sección transversal está sujeta a tracción o compresión simples; las componentes del tensor de deformaciones son:  $u_{zz} = \partial u_z / \partial z$ ,  $\dot{u}_{zz} = u_{yy} = -\sigma_{zz}\partial u_z / \partial z$ . Hagamos  $u_z = u_0 \cos kz \cos \omega t$ , donde  $k = \omega / \sqrt{(E_{ad}/\rho)}$ . Cálculos análogos a los efectuados en el texto conducen a la siguiente expresión para el coeficiente de amortiguamiento:

$$\beta = \frac{\omega^3}{2\rho} \left\{ \frac{\eta}{3} \frac{3c_t^2 - 4c_i^2}{(c_t^2 - c_i^2)c_t^2} + \frac{\zeta c_t^2}{(c_t^2 - c_i^2)(3c_t^2 - 4c_i^2)} + \frac{\chi T_0^2 \alpha^2}{9C_p^2} \right\}.$$

(\*) Se encuentra una dependencia análoga con la frecuencia en la absorción del sonido que se propaga en un fluido próximo a una pared sólida (un caño, por ejemplo); véase «Hidrodinámica», § 77.

Hemos escrito  $E_{ad}$ ,  $\sigma_{ad}$  en función de las velocidades  $c_l$ ,  $c_t$  mediante las fórmulas (22.4).

2. Análogo al problema 1, pero para oscilaciones longitudinales de una placa.

*Solución.* Para ondas cuya dirección de oscilación coincide con la de propagación (por ejemplo, el eje  $x$ ) las componentes no nulas del tensor de deformaciones son

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad u_{zz} = -\frac{\sigma_{ad}}{1 - \sigma_{ad}} \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

[véase (13.1)]. La velocidad de propagación para estas ondas es  $\sqrt{[E_{ad}/\varrho(1 - \sigma_{ad}^2)]}$ . El cálculo de  $\beta$  nos da:

$$\beta = \frac{\omega^2}{2\varrho} \left\{ \eta \left( \frac{3c_l^4 + 4c_t^4 - 6c_l^2c_t^2}{c_l^2c_t^2(c_l^2 - c_t^2)} + \frac{\zeta c_t^2}{c_l^2(c_l^2 - c_t^2)} + \frac{\varkappa T \alpha^2 \varrho^2 (1 + \sigma_{ad})^2}{9C_p^2} \right) \right\}.$$

Para ondas cuya dirección de oscilación es perpendicular a la dirección de propagación, es  $u_{ll} = 0$  y el amortiguamiento está provocado únicamente por la viscosidad  $\eta$ . En este caso el coeficiente de amortiguamiento se determina siempre por la fórmula  $\beta = \frac{\eta \omega^2}{2\varrho c_t^2}$ . Esta fórmula se aplica también al amortiguamiento de vibraciones torsionales en barras.

3. Determinar el coeficiente de amortiguamiento para las vibraciones propias transversales de una varilla (con frecuencias tales que  $\omega \gg \chi/h^2$ , donde  $h$  es el diámetro de la varilla).

*Solución.* El amortiguamiento se debe principalmente a conducción térmica. De acuerdo con § 17, en cada elemento de volumen tenemos  $u_{zz} = x/R$ ,  $u_{xx} = u_{yy} = -\sigma_{ad}x/R$  (para combamiento en el plano  $xz$ ); cuando  $\omega \gg \chi/h^2$  las vibraciones son adiabáticas. Para pequeñas reflexiones el radio de curvatura es  $R = 1/X''$ , de manera que es  $u_{ll} = (1 - 2\sigma_{ad})xX''$  (el apóstrofo indica derivación respecto de  $z$ ). La variación más rápida de temperatura se produce perpendicularmente a la varilla, por lo que  $(\text{grad } T)^2 \approx (\partial T/\partial x)^2$ . Usando (35.1) y (35.2), obtenemos para la disipación media de la energía en toda la varilla  $-\frac{\varkappa T \alpha^2 E_{ad}^2 S}{9C_p^2} \int X'^{-2} dz$  ( $S$  es el área de la sección transversal).

La energía media total es dos veces la energía potencial  $E_{ad} I_y \int X'^{-2} dz$ . El coeficiente de amortiguamiento vale, por lo tanto,  $\beta = \frac{\varkappa T \alpha^2 S E_{ad}}{18I_y C_p^2}$ .

4. Análogo al problema 3, pero para vibraciones transversales en una placa.

*Solución.* Para cualquier elemento de volumen de la placa tenemos, según (11.4),

$$u_{ll} = -\frac{1 - 2\sigma_{ad}}{1 - \sigma_{ad}} z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

(para combamiento en el plano  $xz$ ). La disipación de energía se obtiene mediante las fórmulas (35.1) y (35.2); la energía media total es dos veces la expresión (11.6). El coeficiente de amortiguamiento es

$$\beta = \frac{2\varkappa T \alpha^2 E_{ad}}{3C_p^2 h^2} \frac{1 + \sigma_{ad}}{1 - \sigma_{ad}} = \frac{2\varkappa T \alpha^2 \varrho}{3C_p^2 h^2} \frac{(3c_l^2 - 4c_t^2)^2 c_l^2}{(c_l^2 - c_t^2) c_l^2}.$$

5. Determinar el cambio en las frecuencias características de las vibraciones transversales de una varilla debido al hecho que las vibraciones no son adiabáticas. La varilla tiene la forma de una larga placa de grosor  $h$ . Se supone que su superficie exterior está térmicamente aislada.

*Solución.* Sea  $T_{ad}(x, t)$  la distribución de temperaturas en la varilla para vibraciones adiabáticas y  $T(x, t)$  la distribución real de temperaturas;  $x$  es una coordenada perpendicular a la dimensión mayor de la varilla; la variación de temperatura en el plano  $yz$  puede despreciarse. Como para  $T = T_{ad}$  no existe intercambio de calor entre las diferentes partes del cuerpo, es evidente que la ecuación de conducción térmica debe ser

$$\frac{\partial}{\partial t}(T - T_{ad}) = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Para vibraciones periódicas de frecuencia  $\omega$  las diferencias  $\tau_{ad} = T_{ad} - T_0$ ,  $\tau = T - T_0$  respecto de la temperatura de equilibrio  $T_0$  son proporcionales a  $e^{-i\omega t}$  y tenemos  $\tau'' + \frac{i\omega}{\chi} \tau = \frac{i\omega}{\chi} \tau_{ad}$  (el apóstrofo indica derivación respecto de  $x$ ). Como  $\tau_{ad}$  es proporcional a  $u_t$  [véase (35.2)] y las componentes  $u_{ik}$  son proporcionales a  $x$  (véase § 17), se ve que es  $\tau_{ad} = Ax$ , donde  $A$  es una constante que no necesita ser calculada porque no aparece en los resultados finales. La solución de la ecuación  $\tau'' + i\omega\tau/\chi = i\omega Ax/\chi$  con la condición de contorno  $\tau' = 0$  para  $x = \pm h/2$  (la superficie de la varilla está térmicamente aislada) es

$$\tau = A \left( x - \frac{\operatorname{sen} kx}{k \cos k \frac{h}{2}} \right), \quad k = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}.$$

El momento  $M_y$  de las tensiones internas en una varilla combada en el plano  $xz$  está compuesto de la parte isotérmica  $M_{yiso}$  (o sea, el valor en el combamiento isotérmico) y de la parte debida a calentamiento no uniforme de la varilla. Si  $M_{yad}$  es el momento en combamiento adiabático, la segunda parte del momento queda reducida en un factor

$$1 + f(\omega) = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} z\tau dz}{\int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{ad} dz}.$$

respecto de  $M_{yad} - M_{yiso}$ . Definiendo el módulo de Young  $E_\omega$  para cualquier frecuencia como el coeficiente de proporcionalidad entre  $M_y$  e  $I_y/R$  [véase (17.8)] y teniendo en cuenta además que  $E_{ad} - E = E^2 T \alpha^2 / 9 C_p$  [véase (6.8)] ( $E$  es el módulo de Young isotérmico), podemos escribir

$$E_\omega = E + [1 + f(\omega)] E^2 \frac{T \alpha^2}{9 C_p}.$$

El cálculo da para  $f(\omega)$  la expresión  $f(\omega) = \frac{24}{h^3 k^3} \left( \frac{kh}{2} - \operatorname{tg} \frac{kh}{2} \right)$ . Cuando  $\omega \rightarrow \infty$  obtenemos  $f = 1$ , lo que es correcto, pues  $E_\infty = E_{ad}$ , y para  $\omega \rightarrow 0$ ,  $E_0 = E$  y  $f = 0$ .

Las frecuencias de las vibraciones características son proporcionales a la raíz cuadrada del módulo de Young (véase § 25, problemas 4-6). Luego, es

$$\omega = \omega_0 \left[ 1 + f(\omega_0) \frac{ET\alpha^2}{18C_p} \right],$$

donde  $\omega_0$  son las frecuencias características para las vibraciones adiabáticas. Este valor de  $\omega$  es complejo. Separando las partes real e imaginaria ( $\omega = \omega' + i\beta$ ) encontramos para una frecuencia característica

$$\omega' = \omega_0 \left[ 1 - \frac{ET\alpha^2}{3C_p h^2} \frac{1}{\xi^3} \frac{\operatorname{senh} \xi - \operatorname{sen} \xi}{\cosh \xi + \cos \xi} \right]$$

y para el coeficiente de amortiguamiento

$$\beta = \frac{2ET\alpha^2 \chi}{3C_p h^2} \left[ 1 - \frac{1}{\xi} \frac{\operatorname{senh} \xi + \operatorname{sen} \xi}{\cosh \xi + \cos \xi} \right],$$

donde  $\xi = h \sqrt{\left( \frac{\omega_0}{2\chi} \right)}$ .

Para un valor grande  $\xi$  la frecuencia tiende a  $\omega_0$ , como debe ser, y el coeficiente de amortiguamiento a  $\beta = \frac{2ET\alpha^2 \chi}{3C_p h^2}$  en concordancia con el resultado del problema 3. Los pequeños valores de  $\xi$  corresponden a condiciones casi isotérmicas; en este caso

$$\omega \approx \omega_0 \left( 1 - \frac{ET\alpha^2}{18C_p} \right) \approx \omega_0 \sqrt{\frac{E}{E_{ad}}},$$

y el coeficiente de amortiguamiento es  $\beta = \frac{ET^2\alpha^2 h^2}{180C_p \chi} \omega_0^2$ .

### § 36. Fluidos altamente viscosos

Para fluidos típicos las ecuaciones de Navier-Stokes son válidas si los períodos de movimiento son grandes comparados con los tiempos característicos de las moléculas. Sin embargo, esto no es cierto para fluidos muy viscosos. En tales fluidos las ecuaciones usuales de la mecánica de los fluidos no serán válidas ya para períodos de movimiento mucho más largos. Hay fluidos viscosos que durante intervalos de

tiempo suficientemente cortos (aunque largos comparados con los moleculares) se comportan como sólidos (por ejemplo, la glicerina y la resina). Los sólidos amorfos (por ejemplo el vidrio) pueden considerarse como el caso límite de tales fluidos con muy alta viscosidad.

Las propiedades de estos fluidos pueden describirse de la siguiente manera (propuesta por Maxwell). Durante cortos intervalos de tiempo, estos fluidos se deforman elásticamente. Cuando la deformación cesa, subsisten en ellos tensiones de corte que, sin embargo, se amortiguan con el tiempo, de modo que después de un intervalo de tiempo suficientemente largo desaparecen prácticamente las tensiones dentro del fluido. Sea  $\tau$  el orden de magnitud del intervalo de tiempo en el cual se amortiguan las tensiones (*tiempo de relajación maxwelliano*). Supongamos que el fluido está sujeto a ciertas fuerzas externas variables que varían periódicamente en el tiempo con frecuencia  $\omega$ . Si el período  $1/\omega$  es grande comparado con el tiempo de relajación  $\tau$  ( $\omega\tau \ll 1$ ), el fluido considerado se comportará como un fluido viscoso ordinario. Por el contrario, si la frecuencia  $\omega$  es suficientemente grande ( $\omega\tau \gg 1$ ), el fluido se comportará como un sólido amorfo.

De acuerdo con estas propiedades «intermedias», los fluidos en cuestión pueden caracterizarse por un coeficiente de viscosidad  $\eta$  y un cierto «módulo de rigidez»  $\mu$ . Es fácil obtener una relación entre los órdenes de magnitud de  $\eta$ ,  $\mu$  y el tiempo de relajación  $\tau$ . Cuando actúan fuerzas periódicas de frecuencia suficientemente pequeña y el fluido se comporta como un fluido ordinario, el tensor de tensiones está dado por la expresión ordinaria para tensiones viscosas:

$$\sigma_{ik} = 2\eta u_{ik} = -2\eta\omega u_{ik}.$$

En el caso límite opuesto de grandes frecuencias, el fluido se comporta como un sólido y las tensiones deben venir dadas por las fórmulas de la teoría de la elasticidad, o sea  $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$  (se trata constantemente de «deformaciones de puro corte», de modo que se supone  $u_{ii} = \sigma_{ii} = 0$ ). Para frecuencias  $\omega \sim 1/\tau$  las tensiones dadas por estas dos expresiones deben ser del mismo orden de magnitud. Tenemos, por lo tanto,  $\eta\omega/\tau\lambda \sim \mu\omega/\lambda$ , es decir:

$$\eta \sim \tau\mu. \quad (36.1)$$

Esta es precisamente la relación buscada.

Finalmente, vamos a obtener la ecuación de movimiento que describe cualitativamente el comportamiento de estos fluidos. Para hacerlo partiremos de una hipótesis muy simple acerca del amortiguamiento de las tensiones internas (cuando

cesa el movimiento): supondremos que éstas se amortiguan exponencialmente:  $d\sigma_{ik}/dt = -\sigma_{ik}/\tau$ . En un sólido, además, es  $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$  y, por lo tanto,

$$\frac{d\sigma_{ik}}{dt} = 2\mu \frac{du_{ik}}{dt}.$$

Es fácil ver que la ecuación

$$\frac{d\sigma_{ik}}{dt} + \frac{1}{\tau} \sigma_{ik} = 2\mu \frac{du_{ik}}{dt} \quad (36.2)$$

da el resultado correcto en los dos casos límites de movimientos rápidos y lentos y sirve como ecuación interpolatoria en los casos intermedios.

Por ejemplo, en un movimiento periódico en que  $u_{ik}$  y  $\sigma_{ik}$  dependen del tiempo a través del factor  $e^{-i\omega t}$ , obtenemos de (36.2):

$$-i\omega\sigma_{ik} + \frac{1}{\tau} \sigma_{ik} = -2i\omega\mu u_{ik},$$

Por lo tanto,

$$\sigma_{ik} = \frac{2\mu}{1 + \frac{i}{\omega\tau}} u_{ik}. \quad (36.3)$$

Para  $\omega\tau \gg 1$  esta fórmula nos da  $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$ , o sea, la expresión usual para cuerpos sólidos, mientras que para  $\omega\tau \ll 1$  obtenemos

$$\sigma_{ik} = -2i\mu\tau\omega u_{ik} = 2\mu\tau\dot{u}_{ik},$$

que es la expresión ordinaria para un fluido de viscosidad  $\mu\tau$ .

## ÍNDICE ALFABÉTICO

- Absorción del sonido en sólidos, 214.  
Ángulo de torsión, 93.
- Barra (Ecuación de equilibrio), 112.  
— (Flexión), 101.  
— (Flexión pequeña), 122.  
— (Torsión), 93.  
— deformada (Energía), 107.
- Cáscaras (Deformaciones), 84.  
Coeficiente de composición hidrostática, 17.  
— de dilatación térmica, 22.  
— de Lamé, 14.  
— de Poisson, 19.  
Compresión hidrostática, 9, 14.  
— — (coeficiente), 17.  
— unilateral, 21.  
Conducción térmica en cristales, 209.  
— — en sólidos, 207.  
— — — (Ecuación), 207.  
Cristales (Ondas elásticas), 149.  
— (Propiedades elásticas), 50.  
Cuerpos isótropos (Ecuaciones de equilibrio), 24.  
— sólidos en contacto, 42.
- Deformaciones de corte, 14.  
— elásticas, 11, 173.  
— homogéneas, 18.  
— longitudinales (Placa), 71.  
— (Termodinámica de las), 10.  
— con variación de temperatura, 21.  
Dislocaciones, 173.  
— (Acción de un campo de tensiones), 184.  
— (Distribución continua), 188.  
— (Plano de deslizamiento), 185.  
— (Tensor de la densidad), 188.  
— en interacción (Distribución), 194.
- Ecuación de equilibrio (Barra), 112.  
— — (Placa), 62.  
Energía de una barra deformada, 107.  
Equilibrio de una grieta en un medio elástico, 200.
- Flexión de barras, 101.  
Fluidos altamente viscosos, 222.
- Grietas (Equilibrio en un medio elástico), 200.
- Ley de Hooke, 13.
- Medio elástico limitado por un plano (Equilibrio), 35.  
Membranas (Deformaciones), 83.  
Módulo de Young, 18.  
— isotérmicos, 22.
- Ondas de superficie, 152.  
— elásticas en cristales, 149.  
— — — en un medio isótropo, 141.
- Placa (Ecuación de equilibrio), 62.  
— (Deformaciones longitudinales), 71.  
— (Vibraciones), 158.  
— curvada (Energía), 59.  
Placas fuertemente combinadas, 78.  
Propiedades elásticas de los cristales, 50.  
— — — (Sistema cúbico), 55.  
— — — (Sistema hexagonal), 54.  
— — — (Sistema monoclinico), 51.  
— — — (Sistema rómbico), 52.  
— — — (Sistema romboédrico), 53.  
— — — (Sistema triclinico), 51.
- Sistemas elásticos (Estabilidad), 135.  
Sólidos (Absorción del sonido), 214.

- Tensiones internas, 6.  
Tensor de conductividad térmica, 210.  
— de deformación, 1.  
— de tensiones, 5.  
Termodinámica de las deformaciones, 10.  
Torsión (Ángulo), 93.
- de barras, 93.  
Varillas (Vibraciones), 158.  
Vector de Burgers, 174.  
Vibraciones anarmónicas, 167.  
— de varillas y placas, 158.  
Viscosidad de sólidos, 211.