

puede resultar necesario conservar más de un término en el desarrollo, debido a reducciones que se producen en virtud de que  $1 - \mathbf{nv} \sim \theta^2 \sim (m/\epsilon)^2$ .

Si el operador  $Q^+Q$  se lleva a la forma de producto de operadores que comuten (dentro de la aproximación exigida), para formar el elemento de matriz diagonal  $\langle i | \dots | i \rangle$  bastará substituir estos operadores por los valores clásicos (funciones del tiempo) de las correspondientes cantidades. Esto se consigue de la siguiente manera.

Conforme con lo dicho antes, en la expresión de  $Q(t)$  hay que tener en cuenta únicamente la no comutabilidad de los operadores del electrón con el operador  $\exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)]$ , ligado con el campo del fotón. Tenemos

$$\mathbf{p} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} (\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}), \quad (59.11)$$

$$H(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} H(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}), \quad (59.12)$$

Estas fórmulas son consecuencia de que  $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  es el operador desplazamiento en el espacio de impulsos. Mediante (59.11-12), llevaremos hacia la izquierda el operador  $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)}$  en (59.8a) y escribiremos  $Q(t)$  en la forma

$$Q(t) = e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)} R(t), \quad R(t) = \frac{u_f^{+}(\mathbf{p}')}{\sqrt{2H'}} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^*) \frac{u_i(\mathbf{p})}{\sqrt{2H}}, \quad (59.13)$$

donde  $H' = H(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}$ .

Ahora bien,

$$Q_2^+ Q_1 = R_2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} R_1 \quad (59.14)$$

(aquí y en lo que sigue los índices 1 y 2 representan los valores de una magnitud en los instantes  $t_1 = t - \tau/2$  y  $t_2 = t + \tau/2$ ). Queda por calcular el producto de los dos operadores que no comutan  $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2}$  y  $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1}$ . El propio producto puede ya considerarse que conmuta con los restantes factores.

Hagamos

$$L(\xi) = e^{-i\omega_{\text{c}}(\xi-1)} e^{i\xi\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2} e^{-i\xi\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1}, \quad (59.15)$$

donde  $\xi$  es un parámetro auxiliar; el operador que nos interesa es  $L(1)$ . Derivando la definición (59.15) respecto de  $\xi$ , se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dL}{d\xi} = L(\xi) e^{i\xi\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2} b e^{-i\xi\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1}, \quad (59.16)$$

donde para abreviar se ha hecho

$$b = i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - i\omega\tau.$$

La cantidad  $b$  se puede expresar en función de  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}(t_1)$  mediante la ecuación del movimiento clásico en un plano perpendicular a  $\mathbf{H}^*$ :

\* Cabe proceder así porque la no comutabilidad de las componentes de la velocidad en el campo magnético conduce a términos cuyo orden de magnitud es el de  $\hbar\omega_0/\epsilon$  y carece de importancia.

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{p}_1}{eH} \sin \frac{eH\tau}{\epsilon} + \frac{[\mathbf{p}_1 \times \mathbf{H}]}{eH^2} \left( 1 - \cos \frac{eH\tau}{\epsilon} \right)$$

(véase II, § 21), o bien desarrollando en potencias de  $\tau$ :

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \approx \mathbf{v}_1 \left( \tau - \frac{e^2 H^2}{6\epsilon^2} \tau^3 \right) + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{H} \frac{e}{2\epsilon} \tau^2 \quad (59.17)$$

de aquí se sigue para  $b(\mathbf{p}_1)$ :

$$b(\mathbf{p}_1) \approx i\omega \tau \left\{ (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} - 1) + \tau \frac{e\mathbf{n} \cdot [\mathbf{p}_1 \times \mathbf{H}]}{2\epsilon^2} - \tau^2 \frac{e^2 H^2}{6\epsilon^2} \right\} \quad (59.17a)$$

(en el último término se ha hecho  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1 \approx 1$ ). Teniendo de nuevo en cuenta el sentido de  $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1}$  como operador desplazamiento en el espacio- $p$ , tenemos

$$e^{i\xi\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} b(\mathbf{p}_1) e^{-i\xi\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} = b(\mathbf{p}_1 - \xi\hbar\mathbf{k}) \equiv b_-;$$

el signo menos como subíndice significa aquí y en lo que sigue que la cantidad en cuestión se considera en tanto que función del argumento  $\mathbf{p}_1 - \hbar\xi\mathbf{k}$ . Transformemos  $b_-$  tomando la función  $b(\mathbf{p})$  de (59.17a). En el primer término escribiremos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_- \cdot \mathbf{n} - 1 &\approx \frac{1}{2} [(\mathbf{v}_- \cdot \mathbf{n})^2 - 1] = \frac{1}{2\epsilon_-^2} \{ (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n} - \xi\hbar\omega)^2 - (\mathbf{p}_1 - \xi\hbar\mathbf{k})^2 - m^2 \} = \\ &= \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n})^2 - \epsilon_-^2}{2\epsilon_-^2} \approx \frac{\epsilon_-^2}{\epsilon_-^2} (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} - 1). \end{aligned}$$

La transformación de los términos restantes en (59.17a) queda reducida simplemente a substituir  $\epsilon$  en el denominador por  $\epsilon_-$ . De esta manera,  $b_- = (\epsilon/\epsilon_-)^2 b$ . Teniendo en cuenta ahora que las direcciones  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{n}$  son próximas entre sí y que  $\epsilon \approx p$ , se puede suponer, dentro de los límites de aproximación fijados, que  $\epsilon_- \approx \epsilon - \xi\hbar\omega$ .

En definitiva se obtiene la ecuación (59.16) en la forma

$$\frac{dL}{d\xi} = L(\xi) \frac{\epsilon^2 b}{(\epsilon - \hbar\xi\omega)^2}.$$

El orden de los factores carece aquí ya de importancia y todas las cantidades se pueden entender en sentido clásico. Resolviendo esta ecuación con la condición  $L(0) = e^{i\omega\tau}$ , se obtendrá

$$L(\xi) = \exp \left\{ b \frac{\xi\epsilon}{\epsilon - \hbar\omega\xi} + i\omega\tau \right\},$$

de modo que

$$L(1) = \exp \left\{ i\omega\tau + i \frac{\epsilon}{\epsilon'} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 - \omega\tau) \right\}, \quad (59.18)$$

donde  $\epsilon' = \epsilon - \hbar\omega$ .

Transformaremos los restantes factores en (59.14). El simple desarrollo del producto en  $R(t)$  [con la matriz  $\mathbf{a}$  dada por (21.20)] conduce a

$$\begin{aligned} R(t) &= w_f^* \mathbf{e}^* \cdot (\mathbf{A} + i[\mathbf{B} \times \boldsymbol{\sigma}]) \mathbf{w}_i, \\ \mathbf{A} &= \frac{\mathbf{p}}{2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon'} \right) = \frac{\epsilon + \epsilon'}{2\epsilon'} \mathbf{v}, \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{p}}{\epsilon + m} - \frac{\mathbf{p}'}{\epsilon' + m} \right) \approx \frac{\hbar\omega}{2\epsilon'} \left( \mathbf{n} - \mathbf{v} + \mathbf{v} \frac{m}{\epsilon} \right), \end{aligned} \quad (59.19)$$

donde  $\epsilon' = \epsilon - \hbar\omega$ ,  $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t) - \hbar\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$ ; se ha prescindido de los términos de orden superior respecto de  $m/\epsilon$ . De esta manera, tenemos finalmente

$$\begin{aligned} \langle i | Q_2^+ Q_1 | i \rangle &= R_2^* R_1 \exp \left\{ i\omega\tau + i \frac{\epsilon}{\epsilon'} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 - \omega\tau) \right\}, \\ R_2^* R_1 &= \text{Tr} \frac{1 + \xi_i \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} ((\mathbf{A}_2 - i[\mathbf{B}_2 \times \boldsymbol{\sigma}]) \cdot \mathbf{e}) \frac{1 + \xi_f \boldsymbol{\sigma}}{2} ((\mathbf{A}_1 + i[\mathbf{B}_1 \times \boldsymbol{\sigma}]) \cdot \mathbf{e}^*). \end{aligned} \quad (59.20)$$

Los factores  $(1 + \xi \cdot \boldsymbol{\sigma})/2$  son las matrices  $2 \times 2$  densidad de polarización del electrón inicial y final.

Consideraremos la intensidad de la radiación sumada respecto de las polarizaciones del fotón y del electrón final y promediada respecto de las polarizaciones del electrón inicial. Como resultado de las operaciones indicadas se obtendrá, después de un cálculo simple\*,

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{polar}} R_2^* R_1 = \frac{\epsilon^2 + \epsilon'^2}{2\epsilon''} (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - 1) + \frac{1}{2} \left( \frac{\hbar\omega}{\epsilon'} \right)^2 \left( \frac{m}{\epsilon} \right)^2.$$

Dentro de la aproximación exigida, se tiene

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}^2 - \frac{\tau^2}{4} \dot{\mathbf{v}}^2 + \frac{\tau^2}{4} \mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{v}} = 1 - \frac{m^2}{\epsilon^2} - \frac{1}{2} \omega_0^2 \tau^2.$$

Substituyendo estas expresiones en (59.20) y luego en (59.10), se obtendrá, teniendo en cuenta (59.17),

\* Se han utilizado aquí, también, las siguientes propiedades. Al sumar respecto de  $\mathbf{e}$ , se tiene

$$\sum_{\mathbf{e}} (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{e}) (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{e}^*) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}).$$

Pero al substituir (59.20) en (59.9) cabe efectuar la integración por partes, observando que

$$(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}) \exp \left( -\frac{i\epsilon}{\epsilon'} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 \right) = \frac{i\epsilon'}{\epsilon\omega} \frac{d}{dt_1} \exp \left( -\frac{i\epsilon}{\epsilon'} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 \right),$$

y análogamente para  $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}$ . En definitiva se encuentra que, con vistas a la ulterior integración,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  y  $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}$  se pueden substituir aquí por 1.

$$dI = -\frac{e^2}{4\pi^2} \omega^3 d\omega do_n \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{m^2}{\epsilon\epsilon'} + \frac{\epsilon^2 + \epsilon'^2}{4\epsilon'^2} \omega_0^2 \tau^2 \right) \exp \left\{ -\frac{i\omega\tau\epsilon}{\epsilon'} \left( 1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} + \frac{\tau^2}{24} \omega_0^2 \right) \right\} d\tau. \quad (59.21)$$

Esta fórmula da la distribución espectral y angular de la intensidad de radiación.

Introduzcamos el ángulo  $\vartheta$  formado por  $\mathbf{n}$  y el plano de la órbita del electrón, como también el ángulo  $\psi$  entre las proyecciones del vector  $\mathbf{v}$  sobre este plano y el vector  $\mathbf{n}$ . Teniendo en cuenta que la contribución fundamental a la integral la proporcionan los ángulos pequeños, se puede hacer

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = v \cos \vartheta \cos \psi \approx v \left( 1 - \frac{\vartheta^2 + \psi^2}{2} \right).$$

Al integrar (59.21) conviene introducir en vez de  $\tau$  y  $\psi$  nuevas variables  $x$ ,  $y$  definidas por

$$\omega_0 \tau = \left( \frac{2\omega_0 \epsilon'}{\epsilon \omega} \right)^{1/3} (x + y), \quad \psi = \left( \frac{2\omega_0 \epsilon'}{\epsilon \omega} \right)^{1/3} \frac{x - y}{2}.$$

Entonces el exponente en (59.21) toma la forma

$$-i \left( x\eta + \frac{x^3}{3} + y\eta + \frac{y^3}{3} \right),$$

donde se han introducido las notaciones

$$\eta = \left( \frac{u}{2\chi} \right)^{2/3} (1 + \delta^2), \quad u = \frac{\hbar\omega}{\epsilon'} = \frac{\hbar\omega}{\epsilon - \hbar\omega}, \quad \delta = \frac{\theta\epsilon}{m}. \quad (59.22)$$

Las integrales respecto de  $x$ ,  $y$  se expresan mediante la función de Airy y su derivada \*. Se obtiene así la distribución espectral en forma de integral

$$\frac{dl}{d\omega} = \frac{2e^2 m^2}{\pi \hbar \epsilon} \frac{u}{1+u} \left( \frac{u}{2\chi} \right)^{1/3} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\Phi^2(\eta) + (1 + \delta^2) \left( 1 + \frac{u^2}{2(1+u)} \right) \left[ \Phi^2(\eta) + \frac{1}{\eta} \Phi'^2(\eta) \right] \right\} d\delta. \quad (59.23)$$

La contribución fundamental a ésta la proporcionan los ángulos  $\vartheta \sim m/\epsilon$  ( $\delta \sim 1$ ). En cambio, el máximo de la distribución se encuentra para frecuencias tales que  $\eta \sim (\hbar\omega/\epsilon'\chi)^{2/3} \sim 1$ . Cuando  $\chi \ll 1$  se sigue de aquí (59.1), y cuando  $\chi \gg 1$ , (59.4).

En la figura 5 se representa gráficamente la distribución espectral para dife-

\* Para la definición de la función de Airy y su relación con las funciones de Mac Donald, véase III, § b; II, págs. 199, 267.

rentes valores de  $\chi^*$ . En ordenadas se ha tomado la magnitud

$$\frac{1}{\pi \hbar I_{cl}} \frac{dI}{d(\omega/\omega_c)},$$

como función de la razón  $\omega/\omega_c$ , donde

$$\hbar\omega_c = \frac{e\chi}{2\gamma_3 + \chi}, \quad I_{cl} = \frac{2e^2 m^2 \chi^2}{3\hbar^2} = \frac{2e^4 H^2 \epsilon^2}{3m^4}.$$

La cantidad  $I_{cl}$  es la intensidad total clásica de radiación [cf., II (74.2)].

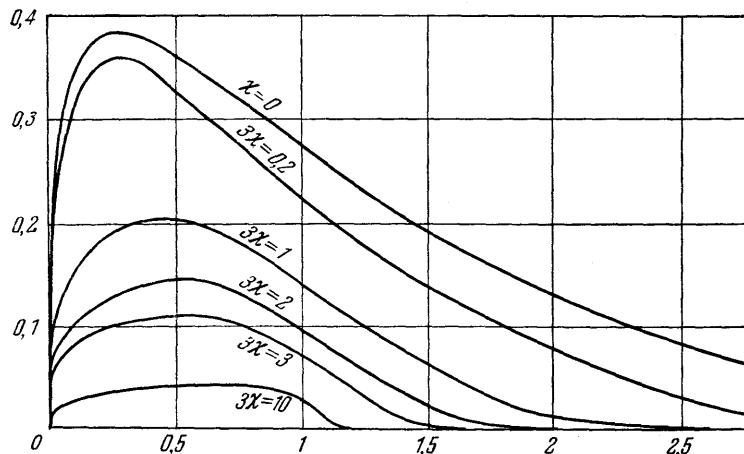


Fig. 5

Utilizando la relación

$$\Phi^2(\eta) + \frac{1}{\eta} \Phi'^2(\eta) = \frac{1}{2\eta} \frac{d^2}{d\eta^2} \Phi^2(\eta)$$

y substituyendo la variable  $\delta$  por la variable  $t = (u/2\chi)^{2/3}\delta^2$ , escribiremos (59.23) en la forma

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{2e^2 m^2}{\pi \hbar \epsilon} \frac{u}{1+u} \left\{ -1 + \frac{2}{x} \left( 1 + \frac{u^2}{2(1+u)} \right) \frac{d^2}{dx^2} \right\} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \Phi^2(2^{-2/3}x+t),$$

donde  $x = (u/\chi)^{2/3}$ . Valiéndonos además de la fórmula  $\star\star$

\* Los gráficos de las figuras 5 y 6 se han construido de acuerdo con los valores calculados por N. P. Klepikov.

\*\* La deducción de esta fórmula puede encontrarse en el artículo de D. E. ASPNES, Phys. Rev. 147, 554 (1966).

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} \Phi^2 (2^{-2/3} x + t) = \frac{\sqrt[3]{\pi}}{2} \int_x^\infty \Phi(x) dx;$$

reducimos la distribución espectral a la forma

$$\frac{dI}{d\omega} = -\frac{e^2 m^2}{\sqrt{\pi} \hbar \varepsilon} \frac{u}{1+u} \left\{ \int_x^\infty \Phi(x) dx + \frac{2}{x} \left( 1 + \frac{u^2}{2(1+u)} \right) \Phi'(x) \right\} \quad (59.24)$$

En el caso límite clásico se tiene  $\hbar\omega \ll \varepsilon$ , de modo que  $u \approx \hbar\omega/\varepsilon$ ,  $x \approx (\omega/\omega_0)^{2/3} (m/\varepsilon)^2$  y (59.24) se transforma en la fórmula clásica II (74.13).

Haciendo

$$dI = \frac{dI}{d\omega} d\omega = \frac{dI}{d\omega} \frac{\varepsilon}{(1+u)^2 \hbar} du$$

e integrando respecto de  $u$  entre los límites 0 e  $\infty$  [efectuando la integración dos veces en el primer término de (59.24)], se obtiene

$$I = -\frac{e^2 m^2 \chi^2}{2 \sqrt{\pi} \hbar^2} \int_0^\infty \frac{4 + 5\chi x^{3/2} + 4\chi^2 x^3}{(1 + \chi x^{3/2})^4} \Phi'(x) x dx. \quad (59.25)$$

En la figura 6 se representa gráficamente la función  $I(\chi) I_{cl}$ .

Cuando  $\chi \ll 1$ , en la integral cuenta esencialmente el dominio en que  $x \sim 1$ . Desarrollando el integrando en potencias de  $\chi$  y efectuando la integración de este desarrollo mediante las fórmulas

$$\int_0^\infty x^\nu \Phi'(x) dx = -\frac{1}{2 \sqrt{\pi}} 3^{(4\nu-1)/6} \Gamma\left(\frac{\nu}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{3} + \frac{1}{3}\right),$$

se obtendrá

$$I = I_{cl} \left( 1 - \frac{55 \sqrt{3}}{16} \chi + 48 \chi^2 - \dots \right). \quad (59.26)$$

Cuando  $\chi \gg 1$ , en la integral influye fundamentalmente el intervalo en que  $\chi x^{3/2} \sim 1$ , es decir,  $x \ll 1$ . En primera aproximación se puede substituir, por consiguiente,  $\Phi'(x)$  por  $\Phi'(0) = -3^{1/6} \Gamma(2/3)/2 \sqrt{\pi}$ , hecho lo cual la integración conduce al resultado

$$I \approx \frac{32 \Gamma(2/3) e^2 m^2}{243 \hbar^2} (3\chi)^{2/3} = 0,82 \frac{e^2 m^2}{\hbar^2} \left( \frac{H_\varepsilon}{H_0 m} \right)^{2/3}. \quad (59.27)$$

La radiación de frenado magnético determina una polarización de los electrones que se mueven en el campo (A. A. Sokolov, I. M. Ternov, 1963). Para estudiar esta cuestión hay que hallar la probabilidad de la transición radiativa con inversión del sentido del spin.

Haciendo en (59.20)  $\zeta_i = -\zeta_f \equiv \zeta$ ,  $|\zeta| = 1$ , se obtendrá

$$R_2^* R_1 = (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2) - (\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{B}_1)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{B}_2) - (\mathbf{e}^* \cdot [\mathbf{B}_1 \times \zeta])(\mathbf{e} \cdot [\mathbf{B}_2 \times \zeta]) - i(\zeta \cdot \mathbf{e}^*)(\mathbf{e} \cdot [\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2]).$$

La suma respecto de las polarizaciones del fotón da, después de transformaciones sencillas,

$$\sum_e R_2^* R_1 = (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2) (1 - (\zeta \cdot \mathbf{n})^2) + (\zeta \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1)(\zeta \cdot \mathbf{B}_2) + \\ + (\zeta \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2)(\zeta \cdot \mathbf{B}_1) - i(\zeta - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \zeta))[\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2]. \quad (59.28)$$

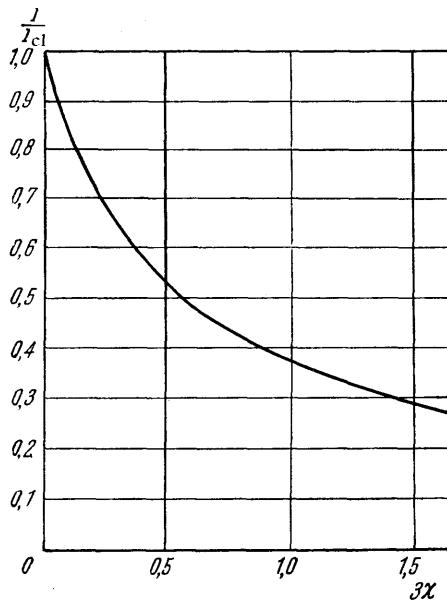


Fig. 6

Supondremos que  $\chi \ll 1$  y se determinará solamente el término principal del desarrollo de la probabilidad en potencias de  $\hbar$ . Puesto que la expresión (59.28) [con  $\mathbf{B}$  dado por (59.19)] contiene ya  $\hbar^2$ , todas las cantidades  $\varepsilon'$  que quedan [entre ellas las que aparecen en el exponente de (59.20)] se pueden substituir por  $\varepsilon$ .

Desarrollando

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \frac{\omega}{2\varepsilon} \left( \mathbf{n} - \mathbf{v} + \frac{\tau}{2} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \frac{m}{\varepsilon} \right), \\ \mathbf{B}_2 &= \frac{\omega}{2\varepsilon} \left( \mathbf{n} - \mathbf{v} - \frac{\tau}{2} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \frac{m}{\varepsilon} \right), \\ \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 &= \tau \mathbf{v} + \frac{\tau^3}{24} \ddot{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

y substituyendo (59.28) en (59.20) y luego en (59.10), se encuentra la probabilidad diferencial de transición por unidad de tiempo ( $d\omega = dI/h\omega$ ). Su integración respecto de  $\mathbf{k}$  se efectúa mediante la fórmula

$$\int f(k_\mu) e^{-ikx} \frac{d^3 k}{\omega} = -f(i\partial_\mu) \frac{4\pi}{(x_0 - i0)^2 - \mathbf{x}^2}, \quad (59.29)$$

donde en el presente caso

$$x_0 = \tau, \quad \mathbf{x} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{x}^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2 = \tau^2 \left( \frac{m^2}{\epsilon^2} + \frac{\tau^2 \omega_0^2}{12} \right).$$

El cálculo conduce al resultado

$$\begin{aligned} w = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\hbar^2}{m^2} \left( \frac{\epsilon}{m} \right)^5 \omega_0^3 \oint \frac{dz}{(1 + z^2/12)^3} & \left[ \frac{3}{z^4} - \frac{5}{12z^2} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{z^4} + \frac{5}{12z^2} \right) (\xi \cdot \mathbf{v})^2 - \frac{2i}{z^3 \omega_0} (\xi \cdot [\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{v}]) \right], \end{aligned}$$

donde se ha substituido  $z = \tau \omega_0 \epsilon / m$  y el camino de integración respecto de  $z$  sigue el eje real por debajo y se cierra en el semiplano inferior. Efectuando esta última integración, obtendremos en definitiva la probabilidad total de transición radiativa con inversión del spin:

$$w = \frac{5\sqrt{3}\alpha}{16} \frac{\hbar^2}{m^2} \left( \frac{\epsilon}{m} \right)^5 \omega_0^3 \left( 1 - \frac{2}{9} \zeta_{||}^2 - \frac{8\sqrt{3}}{15} \frac{e}{|e|} \zeta_{\perp} \right), \quad (59.30)$$

donde  $\zeta_{||} = \xi \cdot \mathbf{v}$ ,  $\zeta_{\perp} = \xi \cdot \mathbf{H}/H$ . Esta fórmula es aplicable tanto a los electrones ( $e < 0$ ), como a los positones ( $e > 0$ ).

La probabilidad (59.30) no depende del signo de la polarización longitudinal  $\zeta_{||}$ , pero sí depende del signo de  $\zeta_{\perp}$ . En consecuencia, también es transversal la polarización que resulta de la emisión de radiación\*. Para electrones la probabilidad de transición de un estado con spin orientado «según el campo» ( $\zeta_{\perp} = 1$ ) a un estado con spin «opuesto al campo» es mayor que la probabilidad de la transición inversa. Por ello, la polarización de los electrones por radiación está dirigida en sentido opuesto al campo y su grado, en un estado estacionario, es igual a (para  $\zeta_{||} = 0$ )

$$\frac{w(\zeta_{\perp} = -1) - w(\zeta_{\perp} = 1)}{w(\zeta_{\perp} = -1) + w(\zeta_{\perp} = 1)} = \frac{8\sqrt{3}}{15} = 0,93.$$

Los positones se polarizan (con igual grado de polarización) en la dirección orientada del campo.

---

\* Esta circunstancia, por cierto, era de prever: el vector axil de la polarización resultante sólo puede estar orientado en el sentido del único vector axil que figura en el problema, el  $\mathbf{H}$ .

## CAPÍTULO 6

### DISPERSIÓN DE LA LUZ

#### § 60. El tensor de dispersión

La dispersión de un fotón por un sistema de electrones (para concretar, hablaremos de un átomo) consiste en la absorción de un fotón inicial  $\mathbf{k}$  con emisión simultánea de otro fotón  $\mathbf{k}'$ . En este proceso el átomo puede quedar bien en el nivel de energía inicial, bien en otro nivel del espectro discreto. En el primer caso la frecuencia del fotón no cambia (*dispersión de Rayleigh o sin desplazamiento*), pero en el segundo varía en una cantidad

$$\omega' - \omega = E_1 - E_2, \quad (60.1)$$

donde  $E_1, E_2$  son las energías inicial y final del átomo (*dispersión combinatoria o con desplazamiento*)<sup>\*</sup>.

Dado que el operador excitación electromagnética carece de elementos de matriz no nulos para transiciones en las que cambian simultáneamente dos números de ocupación fotónica, el efecto de dispersión se manifiesta solamente en la segunda aproximación de la teoría de perturbaciones. Hay que considerarlo como un efecto que se produce pasando por determinados estados intermedios que pueden ser de dos tipos:

I. El fotón  $\mathbf{k}$  es absorbido, el átomo pasa a uno de sus estados excitados  $E_n$ ; en una transición subsiguiente que lleva al estado final se emite el fotón  $\mathbf{k}'$ ;

II. Se emite el fotón  $\mathbf{k}'$ , el átomo pasa a un estado  $E_n$ ; en la transición al estado final, se absorbe el fotón  $\mathbf{k}$ .

El papel de elemento de matriz para el proceso considerado lo representa la suma [véase III (43.6)]

---

\* En este capítulo las cantidades que se refieren al estado inicial y al final del sistema dispersor se distinguirán por los índices 1 y 2.

$$V_{21} = \sum_n' \left( \frac{V'_{2n} V_{n1}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_n^I} + \frac{V_{2n} V'_{n1}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_n^{II}} \right), \quad (60.2)$$

donde la energía inicial del sistema «átomo + fotones» es  $\mathcal{E}_1 = E_1 + \omega$  y las energías de los estados intermedios son

$$\varepsilon_n^I = E_n, \quad \varepsilon_n^{II} = E_n + \omega + \omega'.$$

$V..$  son los elementos de matriz de absorción del fotón  $\mathbf{k}$ ,  $V'..$  los elementos de matriz de emisión del fotón  $\mathbf{k}'$ ; el estado inicial se excluye al sumar respecto de  $n$  (lo que se indica por un apóstrofo en el símbolo de suma). La sección eficaz de dispersión vale

$$d\sigma = 2\pi |V_{21}|^2 \frac{\omega'^2 d\sigma'}{(2\pi)^3}, \quad (60.3)$$

donde  $d\sigma'$  es el elemento de ángulo sólido en las direcciones  $\mathbf{k}' \star$ .

Supondremos que las longitudes de onda de los fotones inicial y final son grandes comparadas con las dimensiones  $a$  del sistema dispersor. De acuerdo con esto, todas las transiciones se estudian en la aproximación dipolar. Si los estados de los fotones se representan por ondas planas, a esta aproximación corresponde la sustitución de los factores  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  por la unidad. Las funciones de onda de los fotones (en el contraste transversal en tres dimensiones) son entonces

$$A_{e\omega} = \sqrt{4\pi} \frac{e}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t}, \quad A_{e'\omega'} = \sqrt{4\pi} \frac{e'}{\sqrt{2\omega'}} e^{-i\omega't}.$$

En las condiciones consideradas, el operador de interacción electromagnética se puede expresar en la forma

$$\mathbf{V} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}, \quad (60.4)$$

donde  $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$  es el operador campo eléctrico y  $\mathbf{d}$  el operador momento dipolar del átomo (relación análoga a la expresión clásica de la energía de un sistema de pequeñas dimensiones en un campo eléctrico — véase II, § 42). Sus elementos de matriz se escriben:

$$V_{n1} = -i\sqrt{2\pi\omega} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{d}_{n1}), \quad V'_{2n} = i\sqrt{2\pi\omega'} (\mathbf{e}'^* \cdot \mathbf{d}_{2n}).$$

Substituyendo estas expresiones en (60.2-3), obtendremos la sección eficaz de dispersión (que escribiremos en unidades ordinarias  $\star\star$ ):

\* La energía de la luz  $dI'$  dispersada (por segundo) en el ángulo sólido  $d\sigma'$ , se expresa en función de la intensidad  $I$  (densidad de flujo de energía) de la luz incidente mediante la relación

$$dI' = I \frac{\omega'}{\omega} d\sigma.$$

\*\* H. A. Kramers y W. Heisenberg, fueron los primeros en obtener esta fórmula. (1925)

$$d\sigma = \left| \sum_n \left\{ \frac{(d_{2n} e'^*) (d_{n1} e)}{\omega_{n1} - \omega} + \frac{(d_{2n} e) (d_{n1} e'^*)}{\omega_{n2} + \omega} \right\} \right|^2 \frac{\omega \omega'^3}{\hbar^2 c^4} d\sigma', \quad (60.5)$$

$$\hbar \omega_{n1} = E_n - E_1, \quad \hbar \omega_{n2} = E_n - E_2.$$

La suma se extiende a todos los estados posibles del átomo, incluidos los estados del espectro continuo (los estados 1 y 2 desaparecen automáticamente de la suma porque los elementos de matriz diagonales  $d_{11} = d_{22} = 0$ ).

Introduzcamos la notación \*

$$(c_{ik})_{21} = \sum_n \left[ \frac{(d_i)_{2n} (d_k)_{n1}}{\omega_{n1} - \omega} + \frac{(d_k)_{2n} (d_i)_{n1}}{\omega_{n2} + \omega} \right] \quad (60.6)$$

( $i, k = x, y, z$  son índices vectoriales en tres dimensiones). En función de esta magnitud, la fórmula (60.5) se escribe también en la forma

$$d\sigma = \omega (\omega + \omega_{12})^3 |(c_{ik})_{21} e_i^* e_k|^2 d\sigma'. \quad (60.7)$$

La notación (60.6) se justifica por el hecho de que esta suma se puede efectivamente representar como elemento de matriz de un cierto tensor. La manera más simple de comprobarlo consiste en introducir una magnitud vectorial  $\mathbf{b}$  cuyo operador satisface la ecuación

$$\left( i \frac{d}{dt} + \omega \right) \mathbf{b} = \mathbf{d}.$$

Sus elementos de matriz son:

$$\mathbf{b}_{n1} = \frac{\mathbf{d}_{n1}}{\omega - \omega_{n1}}, \quad \mathbf{b}_{2n} = \frac{\mathbf{d}_{2n}}{\omega + \omega_{n2}},$$

de modo que

$$(c_{ik})_{21} = (\mathbf{b}_k \mathbf{d}_i - \mathbf{d}_i \mathbf{b}_k)_{21}. \quad (60.8)$$

Llamaremos *tensor de dispersión* de la luz el definido por los elementos de matriz  $(c_{ik})_{21}$ .

De lo dicho se sigue que las reglas de selección para la dispersión coinciden con las reglas de selección para los elementos de matriz de un tensor arbitrario de segundo orden. Pero se advierte en seguida que si el sistema posee un centro de simetría (de modo que sus estados se pueden clasificar según la paridad), las transiciones son sólo posibles entre estados cuya paridad sea la misma (entre ellas las que no van acompañadas de variación del estado). Esta regla está en contradicción con la regla de selección relativa a la paridad en el caso de radiación (dipolar eléctrica) de modo que se tiene una prohibición alternativa: las transiciones permitidas en la radiación están prohibidas en la dispersión, y las que están permitidas en la dispersión, están prohibidas en la radiación.

Descompongamos el tensor  $c_{ik}$  en partes irreducibles:

---

\* La mayoría de los resultados que siguen, expuestos en los §§ 60-62, se deben sobre todo a G. Placzek, 1931-1933.

$$c_{ik} = c^0 \delta_{ik} + c_{ik}^s + c_{ik}^a, \quad (60.9)$$

donde

$$c^0 = \frac{1}{3} c_{ii},$$

$$c_{ik}^s = \frac{1}{2} (c_{ik} + c_{ki}) - c^0 \delta_{ik}, \quad (60.10)$$

$$c_{ik}^a = \frac{1}{2} (c_{ik} - c_{ki})$$

son, respectivamente, un escalar, un tensor simétrico (de traza nula) y un tensor antisimétrico. Sus elementos de matriz se escriben:

$$(c^0)_{21} = \frac{1}{3} \sum_n \frac{\omega_{n1} + \omega_{n2}}{(\omega_{n1} - \omega)(\omega_{n2} + \omega)} (d_i)_{2n} (d_i)_{n1}, \quad (60.11)$$

$$(c_{ik}^s)_{21} = \frac{1}{2} \sum_n \frac{\omega_{n1} + \omega_{n2}}{(\omega_{n1} - \omega)(\omega_{n2} + \omega)} [(d_i)_{2n} (d_k)_{n1} + (d_k)_{2n} (d_i)_{n1}] - (c^0)_{21} \delta_{ik}, \quad (60.12)$$

$$(c_{ik}^a)_{21} = \frac{2\omega + \omega_{12}}{2} \sum_n \frac{(d_i)_{2n} (d_k)_{n1} - (d_k)_{2n} (d_i)_{n1}}{(\omega_{n1} - \omega)(\omega_{n2} + \omega)}. \quad (60.13)$$

Veamos algunas propiedades del tensor de dispersión en los casos límite de frecuencias pequeñas y grandes del fotón\*.

Para la dispersión sin desplazamiento ( $\omega_{12} = 0$ ), la parte antisimétrica del tensor, tiende a cero cuando  $\omega \rightarrow 0$  [gracias al factor  $\omega$  delante de la suma en (60.13)]. En cambio, la parte escalar y la parte simétrica del tensor de dispersión tienden a límites finitos no nulos cuando  $\omega \rightarrow 0$ . De acuerdo con esto, las secciones eficaces son proporcionales a  $\omega^4$  para valores pequeños de  $\omega$ .

En el caso opuesto, cuando la frecuencia  $\omega$  es grande comparada con todas las frecuencias  $\omega_{n1}$ ,  $\omega_{n2}$  que intervienen de manera esencial en (60.6) (pero, naturalmente, manteniéndose como antes la longitud de onda  $\gg a$ ), hemos de encontrar de nuevo las fórmulas de la teoría clásica. El primer término del desarrollo del tensor de dispersión en potencias de  $1/\omega$  es igual a

$$\frac{1}{\omega} \sum_n [(d_k)_{2n} (d_i)_{n1} - (d_i)_{2n} (d_k)_{n1}] = \frac{1}{\omega} (d_k d_i - d_i d_k)_{21}$$

y se anula en virtud de la commutabilidad de los operadores  $d_i$ ,  $d_k$ . El término siguiente del desarrollo se escribe

$$(c_{ik})_{21} = \frac{1}{\omega^2} \sum_n [\omega_{2n} (d_k)_{2n} (d_i)_{n1} - (d_i)_{2n} \omega_{n1} (d_k)_{n1}] = \frac{1}{i\omega^2} (\dot{d}_k d_i - d_i \dot{d}_k)_{21}.$$

Aplicando la definición  $\mathbf{d} = \Sigma e \mathbf{r}$  (la suma se extiende a todos los electrones del

\* El caso de resonancia (cuando  $\omega$  difiere poco de una de las frecuencias  $\omega_{n1}$  u  $\omega_{n2}$ ) se estudiará en el § 64.

átomo) y las reglas de commutación entre impulsos y coordenadas, obtendremos

$$(c_{ik})_{11} = -\frac{Ze^2}{m\omega^2} \delta_{ik}, \quad (c_{ik})_{21} = 0, \quad (60.14)$$

donde  $Z$  es el número total de electrones en el sistema. Así, pues, en el límite de grandes frecuencias queda del tensor de dispersión sólo la parte escalar, produciéndose la dispersión sin que cambie el estado del sistema (es decir, la dispersión es por completo coherente — véase más adelante —). La sección eficaz de dispersión vale en este caso

$$d\sigma = r_e^2 Z^2 |e'^* \cdot e|^2 d\Omega, \quad (60.15)$$

donde  $r_e = e^2/m$ . Después de sumar respecto de las polarizaciones del fotón final, se obtiene la fórmula

$$d\sigma = r_e^2 Z^2 \{1 - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}')^2\} d\Omega' = r_e^2 Z^2 \sin^2 \theta \cdot d\Omega', \quad (60.16)$$

que, en efecto, coincide con la fórmula clásica de Thomson [II (80.7)] ( $\theta$  es el ángulo formado por la dirección de dispersión y el vector polarización del fotón incidente).

Consideremos la dispersión de la luz por un sistema de  $N$  átomos idénticos que se encuentran en un volumen cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con la longitud de onda. El tensor de dispersión de este conjunto de átomos será igual a la suma de los tensores de dispersión de cada uno de ellos. Sin embargo, al aplicar este criterio hay que tener en cuenta que no es posible, sin más, suponer iguales las funciones de onda (mediante las cuales se calcularán los elementos de matriz del momento dipolar) para átomos idénticos, considerados a la vez. Las funciones de onda, por su propia esencia, están definidas tan sólo salvo un factor de fase arbitrario y cada átomo posee su propio factor. La sección eficaz de dispersión debe promediarse respecto de los factores de fase de cada átomo independientemente.

El tensor de dispersión  $(c_{ik})_{21}$  de cada átomo contendrá el factor  $e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ , donde  $\varphi_1, \varphi_2$  son las fases de las funciones de onda de los estados inicial y final. Para la dispersión con desplazamiento, los estados 1 y 2 son distintos y este factor es diferente de la unidad. En el cuadrado del módulo

$$|e_i^* e_k \sum (c_{ik})_{21}|^2$$

(la suma se extiende a los  $N$  átomos), los productos de términos de la suma que corresponden a átomos distintos contendrán factores de fase que se anularán en el promedio independiente respecto de las fases de los átomos; solamente quedan los cuadrados de los módulos de cada uno de los términos. Esto significa que la sección eficaz de dispersión total provocada por  $N$  átomos se obtiene multiplicando por  $N$  la sección eficaz de dispersión de uno sólo (dispersión incoherente).

Pero si el estado inicial y final del átomo coinciden, los factores  $e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = 1$ . La amplitud de dispersión del conjunto de átomos diferirá en este caso en un factor  $N$  de la amplitud de dispersión por un átomo solo, mientras que, de acuerdo

con esto, la sección eficaz de dispersión diferirá en un factor  $N^2$  (dispersión coherente). Si el nivel de energía del átomo no es degenerado, la dispersión sin desplazamiento será, pues, del todo coherente. Pero si el nivel de energía es degenerado, se tendrá también una dispersión incoherente sin desplazamiento debida a transiciones del átomo entre estados diferentes degenerados de dicho nivel. Hay que hacer notar que esto último constituye un efecto puramente cuántico: en la teoría clásica, la dispersión sin cambio de frecuencia es, por ello mismo, coherente.

El tensor de dispersión coherente viene dado por el elemento de matriz diagonal  $(c_{ik})_{11}$ ; designémoslo por  $\alpha_{ik}$  (prescindiendo para simplificar la notación del índice que debería indicar el estado del átomo). Según (60.6):

$$\alpha_{ik}(\omega) \equiv (c_{ik})_{11} = \sum_n \left[ \frac{(d_i)_{1n}(d_k)_{n1}}{\omega_{n1} - \omega} + \frac{(d_k)_{1n}(d_i)_{n1}}{\omega_{n1} + \omega} \right]. \quad (60.17)$$

Observando que  $(d_i)_{1n} = (d_i)_{n1}^*$ , es fácil ver que este tensor es hermítico <sup>★</sup>:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}^*. \quad (60.18)$$

Esto significa que sus partes escalar y simétrica son reales, y la antisimétrica, imaginaria. Observemos que la parte antisimétrica se anula, evidentemente, si el átomo se encuentra en un estado no degenerado; la función de onda de un tal estado es real <sup>★★</sup> y, en consecuencia, reales son también los elementos diagonales de la matriz.

El tensor  $\alpha_{ik}$  está relacionado con la polarizabilidad del átomo en un campo eléctrico exterior. Para establecer esta relación, calculemos la corrección que afecta al valor medio del momento dipolar del sistema cuando éste se coloca en un campo eléctrico exterior

$$\frac{1}{2} (\mathbf{E} e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^* e^{i\omega t}). \quad (60.19)$$

Puede hacerse esto utilizando una conocida fórmula de la teoría de perturbaciones (III, § 40): si sobre un sistema actúa la perturbación

$$\mathbf{V} = \mathbf{F} e^{-i\omega t} + \mathbf{F}^* e^{i\omega t},$$

la corrección de primer orden a los elementos de matriz diagonales de una magnitud  $f$  es igual a

<sup>\*</sup> Este resultado se debe en parte a haber prescindido de la anchura natural de la línea y, con ello, también de la posibilidad de absorción de la luz incidente (véase § 64).

<sup>\*\*</sup> Recordaremos que esta circunstancia está ligada con la simetría respecto del cambio de signo del tiempo (se supone que no existe campo magnético exterior). Al substituir  $t$  por  $-t$ , la función de onda de un estado estacionario  $\psi$  se transforma en  $\psi^*$ , es decir,  $\psi$  y  $\psi^*$  describen, ambas, posibles estados de exactamente la misma energía. De aquí se sigue que si el nivel no es degenerado,  $\psi$  y  $\psi^*$  deben coincidir (salvo un factor de fase que carece de importancia), de modo que es siempre posible definir  $\psi$  de modo que sea una función real. Pero si el nivel es degenerado, al formar las funciones de onda conjugado-complejas de las correspondientes a un nivel dado, estas funciones se transforman entre sí y, por ello, no son necesariamente reales.

$$f_{11}^{(1)}(t) = - \sum_n \left\{ \left[ \frac{f_{1n}^{(0)} F_{n1}}{\omega_{n1} - \omega} + \frac{f_{n1}^{(0)} F_{1n}}{\omega_{n1} + \omega} \right] e^{-i\omega t} + \left[ \frac{f_{1n}^{(0)} F_{1n}^*}{\omega_{n1} + \omega} + \frac{f_{n1}^{(0)} F_{n1}^*}{\omega_{n1} - \omega} \right] e^{i\omega t} \right\}.$$

En el caso presente

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2} \mathbf{d} \cdot \mathbf{E},$$

y la corrección al elemento de matriz diagonal del momento dipolar resulta igual a

$$\mathbf{d}_{11}^{(1)} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{d}} e^{-i\omega t} + \bar{\mathbf{d}}^* e^{i\omega t}), \quad (60.20)$$

donde  $\mathbf{d}$  es el vector de componentes

$$\bar{d}_i = \alpha_{ik} E_k. \quad (60.21)$$

De la última fórmula resulta, evidentemente, que el tensor de dispersión coherente sin desplazamiento  $\alpha_{ik}(\omega)$  es a la vez el *tensor de polarizabilidad* del átomo en un campo de frecuencia  $\omega$ . Cuando  $\omega = 0$  la fórmula (60.21) pasa a ser la fórmula III (76.6), con un tensor de polarizabilidad estadística  $\alpha_{ik}(0)$  cuya forma es la que resulta de aplicar la teoría ordinaria de perturbaciones en un campo constante.

### PROBLEMAS \*

1. Calcular la probabilidad de emisión simultánea de dos fotones por un átomo (*M. Göppert-Mayer*, 1931) \*\*.

*Solución.* La emisión de dos cuantos es, al igual que la dispersión, un efecto de segunda aproximación en la teoría de perturbaciones. La probabilidad buscada difiere de (60.5) tan sólo en: 1) la substitución  $\omega \rightarrow -\omega$ ,  $e \rightarrow e^*$  (emisión del fotón  $\omega$  en vez de su absorción); 2) el factor suplementario

$$\frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = \frac{\omega^3 d\omega d\theta}{(2\pi)^3}.$$

Así, pues, la probabilidad de emisión (por unidad de tiempo) vale

$$dw = \left| \sum_n \left[ \frac{(d_{2n}^* e^*)(d_{n1} e^*)}{\omega_{1n} - \omega} + \frac{(d_{2n}^* e^*)(d_{n1} e^*)}{\omega_{1n} - \omega'} \right] \right|^2 \frac{\omega^3 \omega'^3}{(2\pi)^3 c^6 \hbar^2} d\omega d\theta d\omega' \quad (1)$$

\* En los problemas utilizamos unidades ordinarias.

\*\* La probabilidad de emisión de dos fotones  $\omega$  y  $\omega'$  es, de ordinario, muy pequeña comparada con la probabilidad de emisión de un solo fotón de frecuencia  $\omega + \omega'$ . Constituyen excepción los casos en que las reglas de selección que prohíben el segundo proceso, permiten el primero. Tales son, por ejemplo, las transiciones entre dos estados con  $J = 0$ , para los cuales están rigurosamente prohibidos todos los procesos de emisión de un solo fotón. Otro ejemplo lo ofrece la transición desde el primer estado excitado del átomo de hidrógeno ( $2s_{1/2}$ ) al estado fundamental ( $1s_{1/2}$ ). Para la radiación  $E1$ , esta transición está prohibida rigurosamente por razones de paridad. También está prohibida (si se prescinde de la interacción spin-órbita, que es muy débil) la radiación  $M1$ ; en este caso ( $l = 0$ ), el momento magnético es una magnitud puramente espacial y su elemento de matriz se anula en virtud de la ortogonalidad mutua de las funciones orbitales con diferentes números cuánticos principales. El tiempo de vida del nivel  $2s_{1/2}$ , determinado por la emisión de dos fotones, es del orden de unos 7 s.

(la suma de frecuencias  $\omega + \omega' = \omega_{12}$ ). Sumando esta expresión respecto de las polarizaciones de los fotones e integrando con relación a las direcciones en que se emiten, obtendremos

$$d\omega = \frac{8}{9\pi} \left| \sum_n \left[ \frac{(d_i)_{sn}(d_k)_{n1}}{\omega_{in} - \omega} + \frac{(d_i)_{sn}(d_k)_{n1}}{\omega_{in} - \omega'} \right] \right|^2 \frac{\omega^8 \omega'^8}{\hbar^2 c^6} d\omega.$$

2. Calcular la sección eficaz de la «dispersión forzada»: el fotón incidente  $\mathbf{k}$  no experimenta cambio alguno, pero bajo su influencia el átomo emite dos fotones — un fotón igual al  $\mathbf{k}$  y un fotón «dispersado»  $\mathbf{k}'$ .

*Solución.* La probabilidad del proceso considerado difiere de la probabilidad (1) encontrada en el problema 1 correspondiente a la emisión simultánea de dos cuantos en el factor  $2Nke$ , donde  $Nke$  es el número de fotones de la luz incidente con  $\mathbf{k}$  y  $e$  dados; el factor 2 tiene en cuenta que cualquiera de los dos fotones que figuran en la fórmula (1) puede ser el forzado por la radiación. La densidad de flujo de los fotones incidentes es igual a

$$dl = cN_{ke} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = N_{ke} \frac{\omega^3}{8\pi^3 c^2} d\omega do.$$

Despejando de aquí  $2Nke$  en función de  $dl$  y dividiendo por  $dl$  la probabilidad del proceso, obtenemos la sección eficaz

$$d\sigma = \left| \sum_n \left[ \frac{(d_{en} \cdot e'^*) (d_{n1} \cdot e^*)}{\omega_{in} - \omega} + \frac{(d_{sn} \cdot e^*) (d_{n1} \cdot e'^*)}{\omega_{in} - \omega'} \right] \right|^2 \frac{2\omega\omega'^3}{\hbar^2 c^4} do'.$$

Aquí,  $\omega$  es la frecuencia de los fotones incidente y «forzado»,  $\omega'$  la frecuencia del fotón dispersado ( $\omega + \omega' = \omega_{12}$ ).

3. Calcular la probabilidad de dispersión elástica de un electrón (no-relativista) en una onda luminosa estacionaria casi monocromática (*P. L. Kapitsa, P. A. M. Dirac*, 1933).

*Solución.* Cabe considerar una onda estacionaria como un conjunto de fotones con impulsos  $\mathbf{k}$  y  $-\mathbf{k}$  (y polarizaciones idénticas). En cuanto a la dispersión del electrón, puede concebirse como absorción del fotón  $\mathbf{k}$  y emisión del fotón  $-\mathbf{k}$ , como resultado de lo cual el impulso  $\mathbf{p}$  del electrón experimenta un incremento  $2\hbar\mathbf{k}$ , que lo hace girar (sin que cambie su valor absoluto) un ángulo  $\theta$ :  $|\mathbf{p}| \operatorname{sen}(\theta/2) = \hbar\omega/c$ . La probabilidad de este proceso se puede obtener a partir de la sección eficaz de dispersión Thomson (60.15)

$$d\sigma = r_e^2 |e'^* \cdot e|^2 do' = r_e^2 do'$$

multiplicando por la densidad de flujo de fotones de impulso  $\mathbf{k}$  y por el número de fotones de impulso  $-\mathbf{k}$ .

La densidad de flujo de fotones con frecuencias en el intervalo  $d\omega$  es igual a

$$\frac{cU_\omega d\omega}{2\hbar\omega},$$

donde  $U_\omega d\omega$  es la densidad de energía en la onda estacionaria correspondiente al intervalo espectral  $d\omega$  (el factor 1/2 tiene en cuenta que la energía de la onda se divide por igual entre fotones que se mueven en sentidos opuestos). Los impulsos  $\mathbf{k}$  de todos los fotones que forman la onda estacionaria son paralelos a una determinada dirección  $\mathbf{n}$  («dirección» de la onda estacionaria). En otras palabras, la densidad de energía como función de la frecuencia y de la dirección de los fotones  $\mathbf{n}'$  es:  $U_{\omega n'} = U_\omega \delta^{(2)}(\mathbf{n}' - \mathbf{n})$ . De acuerdo con esto, el número de fotones  $\mathbf{k}$  es igual a

$$\int N_{-\mathbf{k}} do' = \frac{8\pi^3 c^3}{\hbar\omega^2} \frac{U_\omega}{2}$$

[cf. (44.8)]. En definitiva obtenemos para la probabilidad de dispersión del electrón (por segundo)

$$\omega = \frac{2\pi^3 e^4}{m^2 \hbar^2 \omega^4} \int U_\omega^2 d\omega.$$

El factor  $\omega^{-4}$  se ha sacado fuera del signo de integral porque el grado de no-monocromatismo  $\Delta\omega$  se supone pequeño. El valor de la integral es inversamente proporcional al valor  $\Delta\omega$  (para una intensidad total dada).

### § 61. Dispersión por sistemas que se orientan libremente

Si el nivel de energía de un átomo no es degenerado, la polarizabilidad y la intensidad de la dispersión coherente vienen determinadas por un mismo tensor  $\alpha_{ik} \equiv (c_{ik})_{11}$ . Pero si el nivel es degenerado, los valores observados de dichas cantidades se obtienen promediando respecto de todos los estados correspondientes al nivel dado. La polarización debe definirse como valor medio \*:

$$\alpha_{ik} = \overline{(c_{ik})_{11}}.$$

En cambio, la intensidad de dispersión observable se determina por los valores de los productos

$$\overline{(c_{ik})_{11} (c_{lm})_{11}}.$$

En consecuencia, el ligamen entre polarizabilidad y dispersión pasa a ser menos directo.

Para átomos o moléculas libres (que no se encuentran en un campo exterior) la degeneración de los niveles suele estar ligada con la posibilidad de que el momento cinético se oriente libremente en el espacio. Sean  $J_1$  y  $J_2$  los momentos cinéticos en los estados inicial y final de la dispersión, respectivamente. Como de ordinario, la sección eficaz de dispersión debe promediarse respecto de todos los valores de la proyección  $M_1$  y sumarse respecto de los valores  $M_2$ . Después del primer promedio, la sección eficaz deja de depender de  $(2J_2 + 1)$ . De esta manera, la sección eficaz de dispersión promediada vale

$$d\bar{\sigma} = \omega \omega'{}^3 c_{iklm}^{(21)} e_i^* e_k e_l^* e_m^* d\omega', \quad (61.1)$$

donde

$$c_{iklm}^{(21)} = \frac{1}{2J_1 + 1} \sum_{M_1 M_2} (c_{ik})_{21} (c_{lm})_{21}^* = (2J_2 + 1) \overline{(c_{ik})_{21} (c_{lm})_{21}^*}, \quad (61.2)$$

y el trazo con el índice 1 significa el promedio respecto de  $M_1$ .

Para la dispersión sin desplazamiento los estados 1 y 2 se refieren a un mismo nivel de energía ( $\omega_{12} = 0$ ). Si se trata sólo de dispersión coherente, los estados 1 y 2

\* Aunque cada una de las cantidades  $(c_{ik})_{11}$  puede ser compleja, su valor medio (para sistemas que no se encuentran en un campo magnético exterior) es real. En efecto, para efectuar el promedio se puede elegir de manera arbitraria el conjunto de funciones de onda independientes (que corresponden al nivel degenerado dado) y mediante una elección oportuna cabe siempre conseguir que estas funciones sean reales.

deben coincidir exactamente, es decir, ha de ser  $M_1 = M_2$ . Entonces la suma respecto de  $M_2$ , y con ella también el factor  $2J_2 + 1$  en (61.2), desaparecen:

$$c_{iklm}^{\text{coher}} = \overline{(c_{ik})_{21} (c_{lm})_{21}^*}^1. \quad (61.3)$$

El resultado del promedio se puede escribir sin acudir a cálculos especiales si se tiene en cuenta que el promedio respecto de  $M_1$  equivale a promediar con relación a todas las orientaciones del sistema, hecho lo cual el valor medio puede expresarse en función del tensor unidad exclusivamente. En todo esto, pueden resultar diferentes de cero tan sólo los valores medios de los productos de las componentes de las partes escalar, simétrica y antisimétrica del tensor de dispersión por separado; es claro que con el tensor unidad es imposible construir expresiones que, por sus propiedades de simetría, puedan corresponder a productos cruzados. Así, pues,

$$c_{iklm}^{(21)} = G_{21}^0 \delta_{ik} \delta_{lm} + c_{iklm}^{(21)s} + c_{iklm}^{(21)a}, \quad (61.4)$$

donde

$$\begin{aligned} G_{21}^0 &= (2J_2 + 1) \overline{|(c^0)_{21}|^3}^1, \\ c_{iklm}^{(21)s} &= (2J_2 + 1) \overline{(c_{ik}^s)_{21} (c_{lm}^s)_{21}^*}^1, \\ c_{iklm}^{(21)a} &= (2J_2 + 1) \overline{(c_{ik}^a)_{21} (c_{lm}^a)_{21}^*}^1. \end{aligned} \quad (61.5)$$

En otras palabras, la sección eficaz de dispersión (y con ella la intensidad) provocada por un sistema que se orienta libremente se descompone en suma de tres partes independientes, a las que llamaremos *dispersión escalar, simétrica y antisimétrica*.

Cada uno de los tres términos en (61.4) se expresa en función de una única cantidad independiente. La dispersión escalar, en función de la magnitud  $G_{21}^0$ , y para la dispersión simétrica y antisimétrica tenemos

$$\begin{aligned} c_{iklm}^{(21)s} &= \frac{1}{10} G_{21}^s (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \delta_{lm}), \\ G_{21}^s &= (2J_2 + 1) \overline{(c_{ik}^s)_{21} (c_{ik}^s)_{21}^*}^1; \\ c_{iklm}^{(21)a} &= \frac{1}{6} G_{21}^a (\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}), \\ G_{21}^a &= (2J_2 + 1) \overline{(c_{ik}^a)_{21} (c_{ik}^a)_{21}^*}^1 \end{aligned} \quad (61.6)$$

(la combinación de tensores unidad se construye según las propiedades de simetría, después de lo cual el factor común se halla por contracción respecto de los pares de índices  $il$  y  $km$ ).

La substitución de las fórmulas (61.4-6) en (61.1) conduce a la siguiente expresión para la sección eficaz de dispersión:

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma} = \omega \omega'^3 \left\{ G_{21}^0 |e'^* \cdot e|^3 + \frac{1}{10} G_{21}^s \left( 1 + |e' \cdot e|^2 - \frac{2}{3} |e'^* \cdot e|^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} G_{21}^a (1 - |e' \cdot e|^2) \right\} do. \quad (61.7) \end{aligned}$$

Esta fórmula determina en forma explícita la dependencia angular y las propiedades de polarización de la dispersión.

La sección eficaz total de dispersión en todas direcciones, sumada para las polarizaciones del fotón final y promediada respecto de las polarizaciones y direcciones de incidencia del fotón inicial, se obtiene con facilidad directamente a partir de (61.1). Para esto observemos que

$$\overline{e_i^* e_k} = \frac{1}{3} \delta_{ik},$$

si el promedio se efectúa tanto respecto de las polarizaciones como de las direcciones de propagación del fotón (la suma respecto de ellas dará, en cambio, un resultado  $2 \cdot 4\pi$  veces mayor). En definitiva se obtiene

$$\sigma = \frac{8\pi}{9} \omega \omega'^3 C_{ikik}^{(2)} = \frac{8\pi}{9} \omega \omega'^3 (3G_{s1}^0 + G_{s1}^s + G_{s1}^a). \quad (61.8)$$

Se indicó ya antes que las reglas de selección para la dispersión coinciden con las reglas de selección para los elementos de matriz de un tensor arbitrario de segundo orden. En relación con la descomposición de la intensidad de dispersión en tres partes independientes, es lógico formular estas reglas para cada una de las partes por separado.

Las reglas de selección para la dispersión simétrica coinciden con las reglas de selección correspondientes a la radiación cuadripolar eléctrica, puesto que ésta viene también determinada por un tensor simétrico irreducible (el tensor de momentos cuadripolares). Para la dispersión antisimétrica las reglas de selección coinciden con las de la radiación dipolar magnética, ya que una y otra se determinan por un vector axil [recordemos que un tensor antisimétrico es equivalente (dual) a un vector axil] \*. Sin embargo, se tiene ahora una diferencia que consiste en que los elementos de matriz diagonales, que en el caso de radiación dan los valores medios de los momentos eléctricos o magnéticos (y no corresponden a transiciones radiativas), en el caso de dispersión son esenciales — están vinculados a la dispersión coherente.

Para la dispersión escalar las reglas de selección coinciden con las de los elementos de matriz de una magnitud escalar. Esto significa que solamente son posibles transiciones entre estados de igual simetría. En particular, deben ser iguales los valores del momento cinético total  $J$  y de su proyección  $M$  [siendo independientes de  $M$  los elementos de matriz diagonales respecto de  $M$  — véase III (29.2)]. Para la dispersión sin desplazamiento, los estados 1 y 2 deben, por ello mismo, coincidir exactamente (no sólo en lo que concierne a la energía, sino también a  $M$ ), de modo que la dispersión escalar sin desplazamiento es por completo coherente.

---

\* Se trata, claro está, de las reglas de selección debidas a la simetría y no a la forma concreta del vector axil en el caso de la radiación: el vector momento magnético contiene una parte espinorial, mientras que en el caso de la dispersión se trata de elementos de matriz de magnitudes de naturaleza puramente orbital (dependientes de las coordenadas).

Recíprocamente, dado que en la dispersión escalar todos los estados se combinan en cualquier caso consigo mismos, en la dispersión coherente existe siempre la parte escalar.

Análogamente al promedio efectuado más arriba de la sección eficaz de dispersión, para un sistema que se orienta libremente en el espacio también el tensor de polarizabilidad ha de promediarse respecto de las direcciones del momento cinético  $J_1$ . El promedio se calcula de manera muy sencilla: es evidente que

$$\alpha_{ik} \equiv \overline{(c_{ik})_{11}}^1 = \overline{(c^0)_{11}}^1 \delta_{ik}.$$

Las partes simétrica y antisimétrica del tensor de dispersión desaparecen al promediar:  $\delta_{ik}$  es el único tensor isótropo de segundo orden.

Se hizo notar anteriormente que los elementos de matriz diagonales de un escalar no dependen del número  $M_1$ . Por ello, se puede prescindir del signo de promedio sobre  $(c^0)_{11}$  (y calcularlo para un valor cualquiera de  $M_1$ ), de modo que la polarizabilidad vale

$$\alpha_{ik} = (c^0)_{11} \delta_{ik}. \quad (61.9)$$

Por la misma razón se puede prescindir del signo de promedio también en la cantidad  $G_{11}^0$  que determina la parte escalar de la dispersión coherente:

$$G_{11}^0 = \overline{|(c^0)_{11}|^2} = (c^0)_{11}^2 \quad (61.10)$$

[se prescinde del factor  $2J_2 + 1$  de acuerdo con (61.3)]. Se obtiene así una relación simple entre la polarizabilidad promedia y la parte escalar de la dispersión coherente. Una y otra vienen determinadas por la cantidad

$$(c^0)_{11} = \frac{2}{3} \sum_n \frac{\omega_{n1}}{\omega_{n1}^2 - \omega^2} |\mathbf{d}_{n1}|^2. \quad (61.11)$$

### PROBLEMAS

- Hallar la distribución angular y el grado de despolarización en la dispersión de la luz polarizada linealmente.

*Solución.* Sea  $\theta$  el ángulo formado por la dirección de dispersión  $\mathbf{n}'$  y la de polarización de la luz incidente  $\mathbf{e}$ . La luz dispersada contiene dos componentes independientes polarizadas en el plano  $\mathbf{n}', \mathbf{e}$  (intensidad  $I_1$ ) y en otro perpendicular a él (intensidad  $I_2$ ); el grado de despolarización lo da la razón  $I_2/I_1$ . Las intensidades  $I_1$  e  $I_2$  se determinan por la fórmula (61.7) con los  $\mathbf{e}'$  orientados de manera correspondiente.

En la dispersión escalar la luz se conserva por completo polarizada en el mismo plano, y la distribución angular de la intensidad es

$$I = \frac{3}{2} \sin^2 \theta.$$

(Aquí y en lo que sigue las expresiones para  $I = I_1 + I_2$  están normalizadas de modo que su promedio respecto de las direcciones sea igual a 1.) En la dispersión simétrica se tiene

$$I = \frac{3}{20} (6 + \sin^2 \theta), \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{3}{3 + \sin^2 \theta}.$$

En la dispersión antisimétrica, es

$$I = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \theta), \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{\cos^2 \theta}.$$

2. Lo mismo para la dispersión de la luz natural.

*Solución.* El paso en la fórmula (61.7) a luz natural (no polarizada) incidente se lleva a cabo mediante la sustitución

$$e_i e_k^* \rightarrow \frac{1}{2} (\delta_{ik} - n_i n_k),$$

que corresponde al promedio respecto de las direcciones de la polarización  $e$  para una dirección de incidencia  $n$  dada. La luz dispersada estará en parte polarizada, y por razones de simetría es evidente que sus dos componentes independientes estarán polarizadas linealmente en el plano de dispersión  $n, n'$  (intensidad  $I_{||}$ ) y en un plano perpendicular al mismo (intensidad  $I_{\perp}$ ). El ángulo de dispersión (el formado por  $n$  y  $n'$ ) lo designaremos por  $\vartheta$ .

Para la dispersión escalar,

$$I = I_{\perp} + I_{||} = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \vartheta), \quad \frac{I_{||}}{I_{\perp}} = \cos^2 \vartheta.$$

Para la dispersión simétrica

$$I = \frac{3}{40} (13 + \cos^2 \vartheta), \quad \frac{I_{||}}{I_{\perp}} = \frac{6 + \cos^2 \vartheta}{7}.$$

Para la dispersión antisimétrica,

$$I = \frac{3}{8} (2 + \sin^2 \vartheta), \quad \frac{I_{||}}{I_{\perp}} = 1 + \sin^2 \vartheta.$$

3. Para la dispersión de luz polarizada circularmente, determinar el coeficiente de inversión (razón de la intensidad de la componente polarizada circularmente en sentido «inverso», a la intensidad de la componente polarizada en sentido «correcto»).

*Solución.* En el caso de luz incidente polarizada circularmente, la distribución angular y el grado de despolarización (razón  $I_{||}/I_{\perp}$ ) son los mismos que en el caso de dispersión de luz natural.

Supongamos que el vector  $e$  de la luz incidente tiene componentes  $e = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, i, 0)$  (en el sistema de coordenadas cuyo plano  $xz$  coincide con el plano de dispersión y eje  $z$  a lo largo de la dirección  $n$ ). Entonces, para las componentes polarizadas circularmente «inversa» y «correcta» de la luz dispersada, los vectores de polarización son

$$e' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta, -i, -\sin \vartheta) \text{ y } e' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta, i, -\sin \vartheta).$$

Calculando la intensidad mediante (61.7), se encuentran los coeficientes de inversión  $P$  para los tres tipos de dispersión

$$P^0 = \operatorname{tg}^4 \frac{\vartheta}{2}, \quad P^s = \frac{13 + \cos^2 \vartheta + 10 \cos \vartheta}{13 + \cos^2 \vartheta - 10 \cos \vartheta},$$

$$P^a = \frac{1 - \cos^4 \frac{\vartheta}{2}}{1 - \sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

( $\vartheta$  es el ángulo de dispersión).

4. Calcular la sección eficaz de dispersión elástica de los rayos  $\gamma$  por el deuterón (*H. A. Bethe, R. Peierls*, 1935).

*Solución.* Las funciones de onda del estado fundamental del deuterón y de sus estados del espectro continuo (deuterón disociado) se escriben

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} e^{-xr}, \quad \psi_p = e^{ip \cdot r}, \quad x = \sqrt{Ml}$$

[véase (58.2-3)]. El momento dipolar  $d = er/2$  (únicamente el protón posee carga y su vector posición es  $r/2$ ). El elemento de matriz

$$d_{p0} = \int \psi_p^* d_{r0}^0 d^3x = e \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \frac{\partial}{i\partial p} \int \frac{d^3x}{r} e^{-xr+ip \cdot r} = 8\pi ie \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \frac{p}{(x^2 + p^2)^2}$$

[la integral se calcula mediante (57.6a)].

El tensor de polarizabilidad es

$$\alpha_{ik} = \int \frac{2\omega_{p0}}{\omega_{p0}^2 - \omega^2} (d_i)_0 p (d_k)_0 p^0 \frac{d^3p}{(2\pi)^3} - \frac{e^2}{2M\omega^2} \delta_{ik} = \\ = \left\{ \frac{2}{3} \int \frac{\omega_{p0}}{\omega_{p0}^2 - \omega^2} |d_0 p|^2 \frac{d^3p}{(2\pi)^3} - \frac{e^2}{2M\omega^2} \right\} \delta_{ik}.$$

El primer término está asociado con la excitación virtual de los grados de libertad internos del deuterón; se ha escrito en la forma (61.11), siendo las frecuencias  $\omega_{p0} = (p^2 + x^2)/M$ . El segundo término está ligado con la acción del campo de la onda sobre el movimiento de traslación del deuterón como un todo. Dado que este movimiento es cuasiclásico, la parte correspondiente del tensor de dispersión viene dada por la fórmula (60.14) (con la masa del deuterón  $2M$  en vez de  $m$ ).

El cálculo de  $\alpha_{ik}$  se reduce al de la integral

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^4 dz}{(z^2 + 1)^2 [(z^2 + 1)^2 - \gamma^2]}, \quad z = \frac{p}{x}, \quad \gamma = \frac{M\omega}{x^2} = \frac{\omega}{l}.$$

Tenemos

$$J = \frac{1}{8} \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{\lambda} \frac{dJ_0}{d\lambda} \right) \Big|_{\lambda=1},$$

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^4 dz}{(z^2 + \lambda^2) [(z^2 + 1)^2 - \gamma^2]}.$$

Para  $\gamma < 1$  el integrando tiene polos en los puntos  $i\lambda$ ,  $i\sqrt{1+\gamma}$ ,  $i\sqrt{1-\gamma}$  del semiplano superior de la variable compleja  $z$ ; la integral  $J_0$  se calcula a partir de los residuos en estos polos. En definitiva obtendremos

$$J = \pi \left\{ \frac{(1+\gamma)^{3/2}}{2\gamma^4} + \frac{(1-\gamma)^{3/2}}{2\gamma^4} - \left( \frac{3}{8\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^4} \right) \right\}.$$

La sección eficaz de dispersión total se expresa en función de  $\alpha_{ik}$  de acuerdo con (61.8) y (en unidades ordinarias) es igual a

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{Mc^2} \right)^2 \left| -1 - \frac{4}{3\gamma^2} + \frac{2}{3\gamma^2} [(1+\gamma)^{3/2} + (1-\gamma)^{3/2}] \right|^2 \text{ para } \gamma = \frac{\hbar\omega}{I} < 1.$$

La amplitud de dispersión cuando  $\gamma > 1$  (por encima del umbral de disociación del deuteron) se obtiene por prolongación analítica, a partir de la amplitud para  $\gamma < 1$ , apareciendo entonces en ella una parte imaginaria que debe ser positiva:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{Mc^2} \right)^2 \left| -1 - \frac{4}{3\gamma^2} + \frac{2}{3\gamma^2} (\gamma+1)^{3/2} + i \frac{2}{3\gamma^2} (\gamma-1)^{3/2} \right|^2 \text{ para } \gamma > 1.$$

Cuando  $\gamma \gg 1$ , se obtiene  $\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{Mc^2} \right)^2$ , lo que corresponde, como debía ser, a la dispersión (no-relativista) por un protón libre.

La distribución angular de la radiación tiene la forma

$$d\sigma = \sigma \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \theta) \frac{d\omega}{4\pi},$$

donde  $\theta$  es el ángulo de dispersión. Definiendo la amplitud de dispersión de manera que sea  $d\sigma = |f|^2 d\omega$ , tendremos

$$\text{Im}f(0) = \frac{2e^2}{3Mc^2} \frac{(\gamma-1)^{3/2}}{\gamma^2} \text{ para } \gamma > 1.$$

Según el teorema óptico, esta cantidad ha de coincidir con  $\omega\sigma_t/4\pi$ , donde  $\sigma_t$  es la sección eficaz total de dispersión inelástica (fotodisociación) y elástica. Pero en el presente caso la sección de dispersión elástica es de orden superior ( $\sim e^4$ ) al de la sección eficaz de disociación [ $\sim e^2$ , véase (58.4)], de modo que  $\text{Im}f(0) \approx \omega\sigma_{\text{dis}}/4\pi$ . Por este motivo, en la aproximación considerada, la amplitud de dispersión para  $\gamma < 1$  (es decir, por debajo del umbral de disociación) resulta real.

## § 62. Dispersión por las moléculas

La característica específica de la dispersión molecular está vinculada con las mismas propiedades de las moléculas que, de manera general, se encuentran en la base de la teoría de sus espectros — a saber, con la posibilidad de considerar por separado el estado electrónico para núcleos en reposo y el movimiento de los núcleos en un campo efectivo de electrones dado.

Supongamos que la frecuencia  $\omega$  de la luz incidente es menor que la energía  $\omega_e$  del primer nivel electrónico excitado. Entonces, en la dispersión, los términos electrónicos no pueden excitarse. La dispersión o será sin desplazamiento, o con desplazamiento a expensas de la excitación de los niveles de rotación o de vibración.

Supongamos, además, que el término electrónico fundamental de la molécula no es degenerado (y que carece de estructura fina). En otras palabras, se supone que son nulos el spin total de los electrones y la proyección de su momento cinético orbital total sobre el eje de la molécula (para moléculas del tipo de trompo simétrico). Así, para las moléculas diatómicas esto significa que el término electrónico

fundamental debe ser el término  ${}^1\Sigma$ . Como es sabido, estas condiciones se cumplen para los estados fundamentales de la mayoría de moléculas\*.

Finalmente, supondremos que la frecuencia  $\omega$  es grande comparada con los intervalos de estructura nuclear (de rotación y vibratoria) del término fundamental y que la diferencia  $\omega_e - \omega$  guarda igual relación con la estructura nuclear del término electrónico excitado. En otras palabras, la frecuencia de la luz incidente debe encontrarse suficientemente lejos de las resonancias. Precisamente estas condiciones permiten prescindir primero del movimiento de los núcleos al calcular el tensor de dispersión, considerando el problema para una configuración nuclear dada.

En un problema de este tipo el tensor de dispersión coincide con el tensor de polarizabilidad  $\alpha_{ik} \equiv (c_{ik})_{11}$  y se calcula en principio según la fórmula general (60.17), en la que la suma se extiende a todos los términos electrónicos excitados. Las cantidades  $\alpha_{ik}$  que se obtienen de esta manera serán funciones de las coordenadas  $q$  de la configuración nuclear (de las cuales dependen paramétricamente las energías y las funciones de onda de los términos electrónicos). En virtud del carácter no degenerado del estado que se considera, el tensor  $\alpha_{ik}(q)$  será real y, por consiguiente, también simétrico.

El tensor  $\alpha_{ik}(q)$  representa la polarizabilidad electrónica de la configuración nuclear dada de la molécula. Para resolver el problema real de la dispersión, hay que tener en cuenta todavía el movimiento de los núcleos en los estados inicial y final. Sean  $\psi_{s_1}(q)$  y  $\psi_{s_2}(q)$  las funciones de onda nucleares de estos estados (de modo que  $s_1, s_2$  son los conjuntos de números cuánticos vibratorios y de rotación). El tensor de dispersión buscado es el elemento de matriz del tensor  $\alpha_{ik}(q)$  calculado con relación a estas funciones:

$$\langle s_2 | \alpha_{ik} | s_1 \rangle = \int \psi_{s_2}^*(q) \alpha_{ik}(q) \psi_{s_1}(q) dq. \quad (62.1)$$

Dada la simetría del tensor  $\alpha_{ik}(q)$ , será también simétrico (tanto para valores  $s_1, s_2$  que coinciden como para valores distintos) el tensor (62.1). Llegamos así a la consecuencia de que, en las condiciones consideradas, se anulará la parte antisimétrica tanto en la dispersión sin desplazamiento como en la desplazada. La dispersión contendrá solamente las partes escalar y simétrica.

La parte escalar de la polarizabilidad  $\alpha^0(q)$  no depende de la orientación de la molécula, sino sólo de la disposición interna de los átomos en ella. Designaremos por  $v$  el conjunto de los números cuánticos vibratorios de la molécula y por  $r$  el conjunto de los números de rotación, excluido el número cuántico magnético  $m$ . Entonces los elementos de matriz se escribirán

\* Sin embargo, los resultados que se exponen a continuación pueden ser también correctos (con cierta precisión) en casos en que la degeneración del término electrónico fundamental se debe a un spin diferente de cero, y el acoplamiento spin-órbita es pequeño (de modo que puede prescindirse de la estructura fina que provoca). En esta aproximación, los estados con direcciones del spin diferentes no se combinan y, en este sentido, se comportan como no degenerados. Tal es, por ejemplo, el caso de la molécula  $O_2$  con un término fundamental  ${}^3\Sigma$ .

$$\langle v_2 r_2 m_2 | \alpha^0 | v_1 r_1 m_1 \rangle = \langle v_2 | \alpha^0 | v_1 \rangle \delta_{r_1 r_2} \delta_{m_1 m_2}. \quad (62.2)$$

El carácter diagonal respecto de los números  $r, m$  es una propiedad general de todo escalar. Una característica específica de (62.2) es el hecho de que sus elementos no dependen, en este caso, de dichos números. Así, pues, la dispersión escalar es susceptible solamente de transiciones vibratorias puras y no depende del estado de rotación.

La dispersión simétrica se determina por los elementos de matriz del tensor  $\alpha_{ik}^s$ . Sus componentes respecto de un sistema de coordenadas en reposo  $xyz$  se expresan en función de las componentes  $\bar{\alpha}_{i'k'}^s$  en un sistema ligado a la molécula de acuerdo con

$$\alpha_{ik}^s = \sum_{i'k'} \bar{\alpha}_{i'k'}^s D_{i'i} D_{k'k}, \quad (62.3)$$

donde  $D_{i'i}$  son los cosenos directores de los nuevos ejes respecto de los primitivos. Las cantidades  $\bar{\alpha}_{i'k'}^s$  no dependen de la orientación de la molécula y  $D_{i'i}$  es independiente de sus coordenadas internas. Por ello,

$$\begin{aligned} \langle v_2 r_2 m_2 | \alpha_{ik}^s | v_1 r_1 m_1 \rangle &= \\ &= \sum_{i'k'} \langle v_2 | \bar{\alpha}_{i'k'}^s | v_1 \rangle \langle r_2 m_2 | D_{i'i} | r_1 m_1 \rangle \langle r_2 m_2 | D_{k'k} | r_1 m_1 \rangle. \end{aligned}$$

La suma de los cuadrados de los módulos de estas cantidades, extendida a los valores de  $r_2 m_2$ , es igual, como se comprueba fácilmente\*, a

$$\sum_{m_2} \sum_{ik} |\langle v_2 r_2 m_2 | \alpha_{ik}^s | v_1 r_1 m_1 \rangle|^2 = \sum_{i'k'} |\langle v_2 | \bar{\alpha}_{i'k'}^s | v_1 \rangle|^2. \quad (62.4)$$

Esto significa que la intensidad total de dispersión con transiciones que parten de un nivel de vibración-rotación dado  $v_1 - r_1$  a todos los niveles de rotación del estado vibratorio  $v_2$  no depende de  $r_1$ .

Para las moléculas del tipo de trompo simétrico cabe avanzar más en los cálculos y establecer la dependencia de la intensidad de radiación respecto de los números cuánticos rotatorios para cada transición  $v_1 r_1 \rightarrow v_2 r_2$ . Los números  $r$  son en este caso el momento cinético  $J$  y su proyección  $k$  sobre el eje de la molécula. Introduzcamos en vez de las componentes cartesianas  $\alpha_{ik}^s$  el correspondiente tensor esférico de segundo orden, cuyas componentes designaremos por  $\alpha_\lambda (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2)$ . Según (b, 6) los cuadrados de los módulos de sus elementos de matriz valen

\* Al transformar la suma se utiliza la igualdad.

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{r_2 m_2} \langle r_1 m_1 | D_{ii'} | r_2 m_2 \rangle \langle r_2 m_2 | D_{ik'} | r_1 m_1 \rangle &= \\ &= \langle r_1 m_1 | \sum_i D_{ii'} D_{ik'} | r_1 m_1 \rangle = \langle r_1 m_1 | \delta_{i'k'} | r_1 m_1 \rangle = \delta_{i'k'}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle v_2 J_2 k_2 m_2 | \alpha_\lambda | v_1 J_1 k_1 m_1 \rangle|^2 &= \\ &= (2J_1 + 1)(2J_2 + 1) \left( \begin{array}{ccc} J_2 & 2 & J_1 \\ -k_2 & \lambda' & k_1 \end{array} \right)^2 \left( \begin{array}{ccc} J_2 & 2 & J_1 \\ -m_2 & \lambda & m_1 \end{array} \right)^2 |\langle v_2 | \bar{\alpha}_{\lambda'} | v_1 \rangle|^2, \end{aligned}$$

donde  $\alpha_{\lambda'}(q)$  es el tensor esférico de polarización referido a los ejes ligados a la molécula y  $\lambda' = k_2 - k_1$ . Sumando respecto de  $m_2$  y  $\lambda = m_2 - m_1$  (para un  $m$  dado), obtendremos [cf. (b, 7)]

$$\begin{aligned} \sum_{m_2 \lambda} |\langle v_2 J_2 k_2 m_2 | \alpha_\lambda | v_1 J_1 k_1 m_1 \rangle|^2 &= \\ &= (2J_2 + 1) \left( \begin{array}{ccc} J_2 & 2 & J_1 \\ -k_2 & \lambda' & k_1 \end{array} \right)^2 |\langle v_2 | \bar{\alpha}_{\lambda'} | v_1 \rangle|^2. \quad (62.5) \end{aligned}$$

Esta cantidad determina la intensidad de dispersión en una transición rotatorio-vibratoria  $v_1 J_1 k_1 \rightarrow v_2 J_2 k_2$ . Dado que los elementos de matriz  $\langle v_2 | \bar{\alpha}_{\lambda'} | v_1 \rangle$  no dependen en general de la rotación de la molécula, se determina así a la vez la dependencia de la intensidad tanto con relación a los números  $J_1$ ,  $J_2$ , como respecto de  $k_1$ ,  $k_2$ . Obsérvese que en el segundo miembro de (62.5) interviene tan sólo una componente esférica del tensor de polarizabilidad.

Si se suma la igualdad (62.5) respecto de  $J_2$  y  $k_2$ , obtendremos \*

$$\sum_{\lambda} \sum_{J_2 k_2 m_2} |\langle v_2 J_2 k_2 m_2 | \alpha_{\lambda} | v_1 J_1 k_1 m_1 \rangle|^2 = \sum_{\lambda'} |\langle v_2 | \bar{\alpha}_{\lambda'} | v_1 \rangle|^2,$$

es decir, volvemos a la regla de sumas (62.4).

Un caso particular de trompo simétrico es un rotador — es decir, una molécula lineal (en particular, diatómica). La proyección del momento cinético sobre el eje de una de tales moléculas es igual a cero (en un estado electrónico no degenerado con momento orbital de los electrones igual a cero)\*\*. En este caso, por lo tanto, en (62.5) hay que hacer  $k_1 = k_2 = 0$ .

Finalmente, consideraremos el problema de las reglas de selección en la dispersión de combinación vibratoria junto con el problema análogo que plantean los espectros vibratorios de emisión (o de absorción) de una molécula\*\*\*.

Para la dispersión el problema se reduce a determinar en qué condiciones son diferentes de cero los elementos de matriz del tensor  $\alpha_{ik}(q)$  respecto de las fun-

\* Al sumar respecto de  $J_2$  para  $k_1$  y  $\lambda'$  dados (y, por ello, con  $k_2 = k_1 + \lambda'$ ) tenemos

$$\sum_{J_2} (2J_2 + 1) \left( \begin{array}{ccc} J_2 & 2 & J_1 \\ -k_2 & \lambda' & k_1 \end{array} \right)^2 = 1$$

[en virtud de III (106.13)]. Se suma luego respecto de  $k_2$  (o, lo que es lo mismo, respecto de  $\lambda' = k_2 - k_1$ ) para  $k_1$  dado.

\*\* No consideramos aquí los efectos ligados con la interacción de las vibraciones y la rotación de la molécula (véase III, § 104).

\*\*\* Estos espectros se sitúan hacia la región del infrarrojo y se observan particularmente en la absorción.

ciones de onda vibratorias  $\psi_v(q)$ ; al hacerlo, hay que considerar por separado el escalar  $\alpha^0$  (para la dispersión escalar) y el tensor simétrico irreducible  $\alpha_{ik}^s$  (para la dispersión simétrica). Un papel análogo en la radiación (o en la absorción) lo representan los elementos de matriz del vector  $\mathbf{d}(q)$  — el momento dipolar de la molécula promediado respecto del estado electrónico para una posición dada de los núcleos (esta relación se señaló ya en el § 54 para las moléculas diatómicas).

Las vibraciones de una molécula poliatómica se clasifican por tipos de simetría — es decir, según las representaciones irreducibles del correspondiente grupo puntual:  $D_a$ , donde  $a$  es el número de la representación (véase III, § 100). Según estas representaciones se determina también la simetría de las funciones de onda de los estados de vibración de la molécula (véase III, § 101). La simetría de las funciones de onda del primer estado de vibración (número cuántico  $v_a = 1$ ) coincide con la simetría  $D_a$  del tipo de vibración. En cambio, la simetría de estados superiores ( $v_a > 1$ ) viene dada por la representación  $[D_a^v a]$  — producto simétrico de la representación  $D_a$  por sí misma  $v_a$  veces. Finalmente, la simetría de los estados con excitación simultánea de vibraciones diferentes  $a$  y  $b$  la da el producto directo  $[D_a^v a] \times [D_b^v b]$ .<sup>\*</sup> El método para hallar las reglas de selección de las diferentes cantidades (escalar, vector, tensor) según los tipos de simetría se ha expuesto en III, § 97.

Las reglas de selección basadas en las propiedades de simetría de una molécula son rigurosas. Existen, además, reglas de selección aproximadas que se deducen de la hipótesis de que las vibraciones son armónicas y del desarrollo de las funciones  $\alpha_{ik}(q)$  o  $\mathbf{d}(q)$  en potencias de las coordenadas de vibración,  $q$ . Estas reglas son consecuencia de la conocida regla de selección para el oscilador armónico, según la cual los elementos de matriz de la coordenada  $q$  es diferente de cero tan sólo para transiciones en las que el número cuántico vibratorio cambia en  $\Delta v = \pm 1$ .<sup>\*\*</sup>

### § 63. Anchura natural de las rayas espectrales

Hasta aquí al estudiar la emisión y dispersión de la luz hemos considerado todos los niveles del sistema (digamos, de un átomo) como estrictamente discretos. En realidad, los niveles excitados, que tienen una probabilidad de decaer por emisión de luz, poseen una vida finita. Según los principios generales de la mecánica cuántica, esto conduce a que los niveles se conviertan en cuasidiscretos y cobren una anchura no nula (aunque pequeña) (véase III, § 132); se representan en la

\* Las propiedades de simetría de las funciones de onda de vibración no dependen, claro está, de la forma concreta de la energía potencial vibratoria; son independientes, en particular, de la hipótesis que se hizo en III, § 101, acerca del carácter armónico de las vibraciones.

\*\* Una exposición más detallada de la teoría que estudia las cuestiones tratadas en este párrafo se puede encontrar en los libros: G. PLACZEK, Dispersión Rayleigh y efecto Raman, Jarkov, 1935; G. HERZBERG, Espectros de vibración y de rotación de las moléculas poliatómicas; M. A. EL'TASHEVICH, Atomnaia i molekularnaia spektroskopija (Espectroscopía atómica y molecular), Fizmatgiz, 1962.

forma  $E - (1/2)i\Gamma$ , donde  $\Gamma (= \Gamma/\hbar)$  es la probabilidad total (por segundo) de todos los posibles procesos de « decaimiento » del estado dado.

Veamos cómo se manifiesta esta circunstancia en el proceso de radiación (*V. Weisskopf, E. Wigner, 1930*). Es claro que, debido a la anchura no nula de un nivel, la luz emitida no será rigurosamente monocromática: las frecuencias se distribuirán en un intervalo  $\Delta\omega \sim 1/\Gamma (= \Gamma/\hbar)$ . Pero para medir la distribución de fotones en la escala de frecuencias con una tal precisión es necesario un tiempo  $T \gg 1/\Delta\omega \sim 1/\Gamma$ . La probabilidad de que el nivel haya decaído por emisión de luz al cabo de este tiempo es muy grande. En consecuencia, lo que habrá que hacer es hallar la probabilidad total de emisión de un fotón de frecuencia dada, no la probabilidad por unidad de tiempo. Calculemos esta probabilidad en primer lugar para el caso de transición de un átomo desde un nivel excitado

$$E_1 - \frac{i}{2} \Gamma_1$$

al estado fundamental  $E_2$ , cuya vida tiene una duración infinita y que, por lo tanto, es rigurosamente discreto.

Sea  $\Psi$  la función de onda del átomo y del campo fotónico,  $H = H^{(0)} + V$  el hamiltoniano de este sistema, donde  $V$  es el operador interacción del átomo y del campo fotónico. Se trata de hallar el desarrollo de la solución de la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (H^{(0)} + V) \Psi \quad (63.1)$$

en serie de funciones propias de los estados no perturbados del sistema

$$\Psi = \sum_v a_v(t) \Psi_v^{(0)} = \sum_v a_v(t) e^{-i\mathcal{E}_v t} \psi_v^{(0)}. \quad (63.2)$$

Para los coeficientes  $a_v(t)$  obtendremos el sistema de ecuaciones

$$i \frac{\partial a_v}{\partial t} = \sum_{v'} \langle v | V | v' \rangle a_{v'} \exp \{ i(\mathcal{E}_v - \mathcal{E}_{v'}) t \}. \quad (63.3)$$

Sea  $|v\rangle$  el estado con energía  $\mathcal{E}_v = E_2 + \omega$  en el cual el átomo se encuentra en su nivel fundamental  $E_2$  y existe un cuantos de determinada frecuencia  $\omega$ ; designaremos este estado por el símbolo  $|\omega 2\rangle$ . En el instante inicial, el sistema se encuentra en el estado  $|1\rangle$  en el que el átomo ocupa el nivel excitado  $E_1$  y no hay fotones. Es decir, cuando  $t = 0$  debe ser

$$a_1 = 1, \quad a_{v'} = 0 \text{ para } |v' \rangle \neq |1\rangle. \quad (63.4)$$

La solución de la ecuación (63.3) que se encuentra a partir de esta condición inicial dará (de acuerdo con la normalización impuesta de las funciones de onda) la probabilidad en el instante  $t$  de que se haya producido la transición  $1 \rightarrow 2$  del átomo con emisión de un fotón en el intervalo de frecuencia  $d\omega$ :

$$|a_{\omega_2}(t)|^2 dw.$$

Nos interesa la probabilidad límite cuando  $t \rightarrow \infty$ :

$$dw = |a_{\omega_2}(\infty)|^2 dw. \quad (63.5)$$

Para mejor comprender el planteo del problema, recordaremos que si se trata de hallar la probabilidad ordinaria de radiación (por segundo) en la transición  $1 \rightarrow 2$  (sin tener en cuenta la anchura del nivel), hay que resolver la ecuación (63.3) substituyendo en el segundo miembro, en primera aproximación, todas las  $a_v(t)$  por los valores (63.4). La solución obtenida se toma luego para grandes valores de  $t$  (cf. III, § 42). Cabe ahora precisar el sentido de esta manera de proceder: se refiere a tiempos  $t$  que son pequeños comparados con la duración de la vida del estado excitado; valores de  $t$  grandes significa aquí tiempos grandes comparados con el período  $1/(E_1 - E_2)$ , pero, con todo, pequeños comparados con  $1/\Gamma_1$ .

Ahora bien, en nuestro caso, cuando se consideran tiempos comparables con  $1/\Gamma_1$ , la función  $a_1(t)$  disminuye al aumentar el tiempo según la ley

$$a_1(t) = e^{-\frac{\Gamma_1}{2} t} \quad (63.6)$$

Las funciones  $a_{v'}(t)$ , en cambio, que corresponden a los estados  $|v'\rangle$  resultado posible de la emisión de radiación por el átomo, crecen con el tiempo. Si la emisión de luz a partir del nivel dado  $E_1$  permite pasar a diferentes niveles del átomo (además del  $E_2$ ), se tendrán muchas funciones  $a_{v'}(t)$  crecientes; cada una de ellas define un estado en que el átomo se encuentra en uno de sus niveles, a la vez que se tiene un fotón con la correspondiente energía. Con todo, en el segundo miembro de la ecuación (63.3) queda, como antes, tan sólo un término, el que corresponde a  $|v'\rangle = |I\rangle$ . En efecto, dado que los elementos de matriz pueden ser diferentes de cero únicamente para transiciones en las que el número de fotones de una energía cualquiera varía en 1, serán evidentemente iguales a cero para transiciones entre estados cada uno de los cuales contiene un fotón de energía diferente.

Así, pues, para  $a_{\omega_2}(t)$  tenemos la ecuación

$$\begin{aligned} i \frac{da_{\omega_2}}{dt} &= \langle \omega_2 | V | I \rangle e^{i(E_2 + \omega - E_1)t} a_1 = \\ &= \langle \omega_2 | V | I \rangle \exp \left\{ i(\omega - \omega_{12})t - \frac{\Gamma_1}{2}t \right\} \end{aligned} \quad (63.7)$$

(donde  $\omega_{12} = E_1 - E_2$ ). Integrando con la condición  $a_{\omega_2}(0) = 0$ , encontraremos

$$a_{\omega_2} = \langle \omega_2 | V | I \rangle \frac{1 - \exp \left\{ i(\omega - \omega_{12})t - \frac{\Gamma_1}{2}t \right\}}{\omega - \omega_{12} + \frac{i}{2}\Gamma_1}. \quad (63.8)$$

De aquí se sigue la probabilidad  $dw$  (63.5):

$$dw = |\langle \omega_2 | V | I \rangle|^2 \frac{d\omega}{(\omega - \omega_{12})^2 + \frac{1}{4} \Gamma_1^2}.$$

Dado que la anchura  $\Gamma_1 \ll \omega_{12}$ , en el factor  $|\langle \omega_2 | V | I \rangle|^2$  se puede hacer  $\omega = \omega_{12}$ . Entonces la cantidad  $2\pi |\langle \omega_2 | V | I \rangle|^2$  es la probabilidad ordinaria de emisión (por segundo) del fotón que posee la frecuencia  $\omega_{12}$  y también otras características (además de la frecuencia) — dirección del movimiento, polarización — de cuya existencia hemos prescindido hasta aquí para abbreviar la notación. Observemos que la dependencia de la probabilidad respecto de estas características queda completamente determinada por el factor  $|\langle \omega_2 | V | I \rangle|^2$ . En otras palabras, tener en cuenta la anchura del nivel no modifica las propiedades de polarización ni la distribución angular de la radiación.

La suma

$$\Gamma_{1 \rightarrow 2} = 2\pi \sum |\langle \omega_2 | V | I \rangle|^2, \quad (63.9)$$

extendida a las polarizaciones y direcciones del movimiento del fotón es la probabilidad total ordinaria de radiación. Al mismo tiempo es aquella parte de la anchura del nivel  $E_1$  (anchura parcial) vinculada a la transición  $1 \rightarrow 2$ , anchura que difiere de la anchura total  $\Gamma_1$  formada por las contribuciones de todas las maneras posibles de «decaimiento» del estado dado cuasiestacionario\*.

Efectuando la misma suma de la probabilidad  $dw$ , obtendremos la siguiente fórmula final para la distribución en frecuencias de la luz emitida:

$$dw = w_t \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{d\omega}{(\omega_{12} - \omega)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_1^2}, \quad (63.10)$$

donde  $w_t = \Gamma_{1 \rightarrow 2}/\Gamma_1$  es la probabilidad relativa total de la transición dada  $1 \rightarrow 2$ . Esta distribución es del tipo dispersión. La forma de la raya espectral, descrita por la fórmula (63.10), es la propia de un átomo aislado en reposo; se llama forma natural de la raya\*\*.

Supongamos ahora que también el nivel  $E_2$  del átomo es excitado, con una anchura no nula  $\Gamma_2$ . Tendremos en cuenta esta circunstancia admitiendo que, en la ecuación (63.1), se incluyen en el hamiltoniano  $H^{(0)}$  «no perturbado» todos los términos (es decir, los elementos de matriz) que conducen al decaimiento del estado 2. Entonces, en el segundo miembro de la ecuación (63.7) la energía  $E_2$  se substituye por  $E_2 - (1/2)i\Gamma_2$ . En cambio, en el elemento de matriz  $\langle \omega_2 | V | I \rangle$  (que

\* Obsérvese que las transiciones a los estados del espectro continuo, que determinan la anchura no nula del nivel, no están ligadas necesariamente con la emisión de fotones. Los niveles fuertemente excitados (niveles Roentgen) pueden decaer por emisión de un electrón y formación de un ion positivo en el estado fundamental (efecto Auger).

\*\* Para distinguirla del ensanchamiento debido a la interacción del átomo con otros átomos (ensanchamiento por colisión) o a la existencia, en la fuente, de átomos que se mueven con velocidades diferentes (ensanchamiento Doppler).

es pequeño dado que es pequeña  $\Gamma_2$ ), la variación de  $H^{(0)}$  no se refleja dentro de la aproximación exigida. De esta manera, en vez de (63.8) obtendremos

$$a_{\omega 2}(t) = \langle \omega 2 | V | I \rangle \frac{1 - \exp \left\{ i(\omega - \omega_{12})t - \frac{1}{2}(\Gamma_1 - \Gamma_2)t \right\}}{\omega - \omega_{12} + \frac{i}{2}(\Gamma_1 - \Gamma_2)}. \quad (63.11)$$

El estado 2, cuya vida tiene una duración finita, se desexcita con emisión de un fotón de frecuencia  $\omega'$  y el átomo pasa en último término al estado fundamental  $E_0$  (de acuerdo con esto, la probabilidad de encontrar el átomo en el estado 2, igual a  $|a_{\omega 2}(t) \exp(-\Gamma_2 t/2)|^2$ , tiende a cero para  $t \rightarrow \infty$ ) \*. En este estado final del sistema, el átomo se encuentra así en el nivel fundamental  $E_0$  y se tiene un fotón para cada una de las frecuencias  $\omega$  y  $\omega'$ . La amplitud de este estado  $a_{\omega\omega'0}(t)$  satisface una ecuación que difiere de (63.7) tan sólo en las notaciones:

$$\begin{aligned} i \frac{da_{\omega\omega'0}}{dt} &= a_{\omega 2} \langle \omega\omega'0 | V | \omega 2 \rangle \exp \{i(E_0 + \omega + \omega')t - i(E_2 + \omega)t - \frac{\Gamma_2}{2}t\} = \\ &= a_{\omega 2} \langle \omega\omega'0 | V | \omega 2 \rangle \exp \{i(\omega' - \omega_{20})t - \frac{\Gamma_2}{2}t\}. \end{aligned}$$

Substituyendo en el segundo miembro de esta ecuación la expresión (63.11) de  $a_{\omega 2}(t)$ , integrando [con la condición inicial  $a_{\omega 2}(0) = 0$ ] y haciendo luego que  $t \rightarrow \infty$ , obtendremos

$$\begin{aligned} a_{\omega\omega'0}(\infty) &= \frac{\langle \omega 2 | V | I \rangle \langle \omega\omega'0 | V | \omega 2 \rangle}{\omega - \omega_{12} + \frac{i}{2}(\Gamma_1 - \Gamma_2)} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\omega' - \omega_{20} + \frac{i}{2}\Gamma_2} - \frac{1}{\omega + \omega' - \omega_{10} + \frac{i}{2}\Gamma_1} \right\} = \\ &= \frac{\langle \omega\omega'0 | V | \omega 2 \rangle \langle \omega 2 | V | I \rangle}{\left( \omega' - \omega_{20} + \frac{i}{2}\Gamma_2 \right) \left( \omega + \omega' - \omega_{10} + \frac{i}{2}\Gamma_1 \right)}. \end{aligned}$$

La probabilidad de emisión de los fotones  $\omega$  y  $\omega'$  es igual a

$$\begin{aligned} d\omega &= |a_{\omega\omega'0}(\infty)|^2 d\omega d\omega' = \\ &= \frac{\Gamma_{1 \rightarrow 2}}{2\pi} \frac{\Gamma_{2 \rightarrow 0}}{2\pi} \frac{d\omega d\omega'}{\left[ (\omega' - \omega_{20})^2 + \frac{1}{4}\Gamma_2^2 \right] \left[ (\omega + \omega' - \omega_{10})^2 + \frac{1}{4}\Gamma_1^2 \right]}. \quad (63.12) \end{aligned}$$

Como debía ser, esta expresión presenta máximos muy acusados en  $\omega' \approx \omega_{20}$  y en  $\omega \approx \omega_{12}$ .

\* Para simplificar, suponemos que la transición  $2 \rightarrow 0$  del átomo ocurre de manera directa, sin etapas intermedias. Esta hipótesis no posee un carácter fundamental y no influye en el resultado final (63.13).

La forma buscada de la raya espectral que corresponde a la transición  $1 \rightarrow 2$  se obtendrá integrando (63.12) respecto de  $\omega'$  (que se puede extender a todo el intervalo de  $-\infty$  a  $+\infty$ ). La manera más fácil de calcular la integral consiste en aplicar la teoría de residuos; en definitiva se obtendrá \*

$$dw = w_t \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi} \frac{d\omega}{(\omega - \omega_{12})^2 + \frac{1}{4}(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2}, \quad (63.13)$$

donde  $w_t = \frac{\Gamma_{1 \rightarrow 2}}{\Gamma_1 \Gamma_2} \Gamma_{2 \rightarrow 0}$  es la probabilidad total para la doble transición  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 0$  \*\*.

La forma de la raya (63.13) difiere de la (63.10) tan sólo en la substitución de  $\Gamma_1$  por  $\Gamma_1 + \Gamma_2$  — es decir, la anchura de la raya es igual a la suma de las anchuras inicial y final.

Obsérvese que la anchura de una raya resulta, hablando en general, no ser igual a la probabilidad  $\Gamma_{1 \rightarrow 2}$  de la propia transición  $1 \rightarrow 2$ , es decir, no es proporcional a la intensidad de la raya (como ocurriría en la teoría clásica). Dado que  $\Gamma_1 + \Gamma_2 > \Gamma_{1 \rightarrow 2}$ , la raya puede tener una anchura grande aun siendo la intensidad relativamente pequeña.

#### § 64. Fluorescencia por resonancia

Es esencial tener en cuenta el valor no nulo de la anchura de los niveles en un problema de dispersión de la luz en los casos en que la frecuencia  $\omega$  de la luz incidente es próxima a una de las frecuencias «intermedias»  $\omega_{n1}$  o  $\omega_{2n}$  (la llamada fluorescencia por resonancia) \*\*\*.

Consideremos la dispersión sin desplazamiento por un sistema (digamos, un átomo) en el estado fundamental, de modo que los niveles inicial y final coinciden y son rigurosamente discretos. Supongamos que la frecuencia de la luz difiere poco de una frecuencia  $\omega_{n1}$ , donde el nivel  $n$  es excitado y, por lo tanto, cuasidiscreto.

Esta cuestión se podría resolver siguiendo el método expuesto en el párrafo anterior. Sin embargo, no es necesario proceder así, ya que el problema es por completo análogo al estudiado en III, § 132, acerca de la dispersión no-relativista

\* La integral se extiende a un contorno formado por el eje real  $\omega'$  y una semicircunferencia infinitamente alejada en el semiplano superior. En este semiplano, el integrando tiene dos polos:

$$\omega' = \omega_{20} + \frac{i}{2}\Gamma_2 \quad \text{y} \quad \omega' = \omega_{10} - \omega + \frac{i}{2}\Gamma_1,$$

en los que los residuos son iguales a

$$\frac{1}{i\Gamma_2} \left[ (\omega - \omega_{12} + \frac{i}{2}\Gamma_2)^2 + \frac{\Gamma_1^2}{4} \right]^{-1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{i\Gamma_1} \left[ (\omega - \omega_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_1)^2 + \frac{\Gamma_2^2}{4} \right]^{-1}.$$

\*\* En casos más complicados (cf. la nota en la pág. 263),  $w_t$  es la probabilidad total de todas las cascadas que empiezan con la transición  $1 \rightarrow 2$  y terminan en el nivel 0.

\*\*\* V. Weisskopf (1931) fue el primero en estudiar esta cuestión.

por resonancia en un nivel cuasidiscreto. De acuerdo con los resultados obtenidos allí, la amplitud de dispersión debe contener un factor que presenta un polo

$$\frac{1}{\omega - \left( E_n - i \frac{\Gamma_n}{2} - E_1 \right)}.$$

Por otra parte, cuando  $|\omega - \omega_{n1}| \gg \Gamma_n$  la fórmula ha de transformarse en la fórmula (60.5) para el caso en que no hay resonancia. Es claro, por ello, que la sección eficaz de dispersión buscada se obtendrá simplemente substituyendo  $E_n$  por  $E_n - (i/2)\Gamma_n$  en la fórmula (60.5), pudiendo limitar la suma respecto de  $n$  a los términos de resonancia solamente

$$d\sigma = \frac{\left| \sum_{M_n} (\mathbf{d}_{2n} \cdot \mathbf{e}'^*) (\mathbf{d}_{n1} \cdot \mathbf{e}) \right|^2}{(\omega_{n1} - \omega)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_n^2} \omega^4 d\omega. \quad (64.1)$$

La suma se extiende a todos los estados (con diferentes proyecciones del momento cinético  $M_n$ ) que corresponden al nivel de resonancia  $E_n$ ; los estados 1 y 2 se refieren a un mismo nivel (el fundamental), pero pueden diferir en los valores  $M_1$  y  $M_2$ .

La sección eficaz (64.1) es máxima para  $\omega = \omega_{n1}$ . En orden de magnitud, su valor en el máximo es igual a  $\sigma_{\max} \sim \omega^4 d^4 / \Gamma_n^2$ . Dado que la probabilidad de la transición espontánea  $n \rightarrow 1$ , y con ella también la anchura  $\Gamma_n \sim \omega^3 d^2$ , este valor es

$$\sigma_{\max} \sim \frac{1}{\omega^2} \sim \lambda^2, \quad (64.2)$$

es decir, del orden del cuadrado de la longitud de onda de la luz e independiente de la constante de estructura fina.

Hay que subrayar que por encontrarse el átomo antes y después de la dispersión en un nivel rigurosamente discreto (el fundamental), también las frecuencias de los fotones primario y secundario coinciden rigurosamente. Por ello, al irradiar con luz monocromática, también la raya dispersada será monocromática. Pero si la luz incidente presenta una distribución espectral de la intensidad  $I(\omega)$ , variando poco la función  $I(\omega)$  en la anchura  $\Gamma_n$ , la intensidad de la luz dispersada será proporcional a

$$\frac{I(\omega_{n1}) d\omega}{(\omega - \omega_{n1})^2 + \frac{1}{4} \Gamma_n^2}. \quad (64.3)$$

En otras palabras, la forma de la raya dispersada coincidirá con la de la raya natural para emisión espontánea desde el nivel  $E_n$ .

A la sección eficaz (64.1) corresponde el tensor de dispersión

$$(c_{ik})_{21} = \frac{\sum_{M_n} (d_i)_{2n} (d_k)_{n1}}{\omega_{n1} - \omega - \frac{i}{2} \Gamma_n}. \quad (64.4)$$

En particular, el tensor de polarizabilidad es

$$\alpha_{ik} = (c_{ik})_{11} = \frac{\sum_{M_n} (d_i)_{1n} (d_k)_{n1}}{\omega_{n1} - \omega - \frac{i}{2} \Gamma_n}. \quad (64.5)$$

Inmediatamente se advierte que añadir una parte imaginaria a los niveles de energía de los estados excitados intermedios, hace perder el carácter hermítico al tensor de polarizabilidad. Aparece en él una parte antihermítica directamente vinculada, como probaremos a continuación, con la absorción de la luz.

Una vez absorbido un cuanto, el átomo, más pronto o más tarde, pasa de nuevo al estado fundamental con emisión de uno o más fotones. Por consiguiente, desde este punto de vista, la sección eficaz de absorción es, simplemente, la sección eficaz  $\sigma_t$  de todos los procesos de dispersión posibles\*. Por otra parte, según el teorema óptico (§ 72) esta sección eficaz se expresa en función de la parte imaginaria de la amplitud  $f(0)$  de dispersión elástica para ángulo cero de acuerdo con

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{\omega} \operatorname{Im} f(0).$$

Como se ve teniendo en cuenta (60.7), la amplitud de dispersión elástica del fotón es la cantidad

$$f = \omega^3 \alpha_{ik} e'_i * e_k.$$

Pero la dispersión a «ángulo cero» significa aquí la dispersión sin variación ni del impulso ni de la polarización del fotón, es decir,  $e' = e$ . Así, pues, la sección eficaz de absorción del fotón es igual a

$$\sigma_{\text{abs}} = 4\pi\omega \operatorname{Im} (\alpha_{ik} e_i^* e_k) = 4\pi\omega e_i^* e_k \frac{\alpha_{ik} - \alpha_{ki}^*}{2i}, \quad (64.6)$$

con lo que se determina a la vez su relación con la parte antihermética del tensor de polarizabilidad.

La fórmula (64.6) tiene un sentido clásico sencillo. El campo eléctrico  $\mathbf{E}$  realiza (por segundo) sobre el sistema de cargas un trabajo que es igual a  $\Sigma e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{d}}$ . Representando el campo en la forma (60.19), el momento dipolar en la forma (60.20-21) y promediando este trabajo respecto del tiempo, obtendremos

$$\frac{1}{2} \omega |E|^3 e_i^* e_k \frac{\alpha_{ik} - \alpha_{ki}^*}{2i}$$

( $\mathbf{E} = e\mathbf{E}$ ). Por otra parte, si  $\mathbf{E}$  es el campo de la luz incidente, la densidad media

\* Hay que subrayar que se trata en este caso de la absorción por un sistema que se encuentra en un nivel estable, el fundamental. En virtud del carácter finito del tiempo de observación, el planteo del problema para un estado excitado sería otro.

de flujo de energía en él es igual a  $(1/8\pi)|E|^2$  y la energía absorbida por el átomo (por segundo) vale

$$\frac{1}{8\pi} |E|^2 \sigma_{\text{abs}}$$

Igualando entre sí las dos expresiones obtenidas, se obtendrá la fórmula (64.6).

Substituyendo en (64.6) la expresión (64.5) del tensor de polarizabilidad, se encuentra la siguiente fórmula para la sección eficaz de absorción de un fotón de frecuencia  $\omega$ , próxima a  $\omega_{n1}$ :

$$\sigma_{\text{abs}} = 4\pi^3 \sum_{M_n} |\mathbf{d}_{n1} \cdot \mathbf{e}|^2 \omega \frac{\Gamma_n/2}{\pi \left[ (\omega - \omega_{n1})^2 + \frac{1}{4} \Gamma_n^2 \right]}. \quad (64.7)$$

En el límite  $\Gamma_n \rightarrow 0$  el último factor de esta fórmula tiende a la función  $\delta(\omega - \omega_{n1})$ , de acuerdo con el hecho de que, en este caso, sólo puede absorberse un fotón cuya frecuencia esté rigurosamente determinada. Supongamos que sobre el átomo incide luz con densidad de flujo espectral y angular de energía  $I_{ke}$  [cf. (44.7)]. Entonces, el número de fotones que por unidad de tiempo atravesarán la unidad de área es igual a  $\frac{I_{ke}}{\omega} d\omega do$  y la probabilidad de absorción

$$dw_{\text{abs}} = \sigma_{\text{abs}} \frac{I_{ke}}{\omega} d\omega do. \quad (64.8)$$

Si la función  $I_{ke}(\omega)$  varía poco en la anchura  $\Gamma_n$ , después de integrar respecto de la frecuencia se obtiene

$$dw_{\text{abs}} = 4\pi^3 \sum_{M_n} |\mathbf{d}_{n1} \cdot \mathbf{e}|^2 I_{ke}(\omega_{n1}) do.$$

Observando, por otra parte, que según (45.5),

$$dw_{\text{esp}} = \frac{\omega^3}{2\pi} \sum_{M_n} |\mathbf{d}_{1n} \cdot \mathbf{e}^*|^2 do = \frac{\omega^3}{2\pi} \sum_{M_n} |\mathbf{d}_{n1} \cdot \mathbf{e}|^2 do$$

es la probabilidad de emisión espontánea de un fotón de frecuencia  $\omega_{n1}$ , volvemos de nuevo a la fórmula (44.9).

### PROBLEMA

Hallar la sección eficaz total de dispersión por resonancia sumada respecto de todas las polarizaciones y direcciones finales del fotón, y también respecto de las proyecciones  $M_2$  finales del momento cinético del átomo (y promediada con relación a las polarizaciones del fotón inicial y de los valores iniciales  $M_1$ ).

*Solución.* Según (61.8), (61.2) y (64.4) la sección eficaz buscada es

$$\sigma = \frac{8\pi\omega^4}{9} \frac{1}{(\omega - \omega_{n1})^2 + \frac{1}{4} \Gamma_n^2} \left\{ (2J_1 + 1) \overline{\left| \sum_{M_n} (d_i)_{2n} (d_k)_{n1} \right|^2} \right\} \quad (1)$$

(dado que los estados 1 y 2 difieren únicamente en los valores  $M_1$  y  $M_2$ , se tiene  $J_2 = J_1$ ). Escribamos la expresión entre llaves en la forma

$$\{ \dots \} = \frac{1}{2J_1 + 1} \sum_{M_1 M_2} \sum_{M_n M'_n} (\mathbf{d}_{2n} \cdot \mathbf{d}_{n'2}) (\mathbf{d}_{1n'} \cdot \mathbf{d}_{n1})$$

(el cuadrado de la suma respecto de  $M_n$  lo representamos como suma doble respecto de  $M_n$  y  $M'_n$ ). Las sumas

$$\sum_{M_2} (\mathbf{d}_{n'2} \cdot \mathbf{d}_{2n}) = \sum_{M_1} (\mathbf{d}_{n1} \cdot \mathbf{d}_{1n'})$$

son diferentes de cero tan sólo para  $M_n = M_{n'}$  y coinciden con la cantidad  $3\Gamma_{n \rightarrow 1}/4\omega^3$ , donde  $\Gamma_{n \rightarrow 1}$  es la probabilidad de la transición  $n \rightarrow 1$  (que, sin embargo, es una anchura parcial del nivel  $E_n$ ). Por ello,

$$\{ \dots \} = \frac{1}{2J_1 + 1} (2J_n + 1) \left( \frac{3}{4\omega^3} \Gamma_{n \rightarrow 1} \right)^2,$$

y la sección eficaz total★ vale

$$\sigma = g \frac{\pi}{\omega^3} \frac{\Gamma_{n1}^2}{(\omega - \omega_{n1})^2 + \frac{1}{4} \Gamma_n^2}, \quad (2)$$

donde

$$g = \frac{2J_n + 1}{2(2J_1 + 1)}.$$

Si únicamente nos interesa la parte coherente de la dispersión (los estados 1 y 2 coinciden, es decir,  $M_1 = M_2$ ), el factor entre llaves en (1) debe sustituirse por

$$\left\{ \left| \sum_{M_n} (\mathbf{d}_i)_{in} (\mathbf{d}_k)_{n1} \right|^2 \right\} = \frac{1}{2J_1 + 1} \sum_{M_1} \sum_{M_n M'_n} (\mathbf{d}_{1n} \cdot \mathbf{d}_{n'1}) (\mathbf{d}_{1n'} \cdot \mathbf{d}_{n1})$$

[cf. (61.3)]. En términos de componentes vectoriales esféricas, el producto escalar se escribe

$$\mathbf{d}_{1n} \cdot \mathbf{d}_{n'1} = \sum_{\lambda} (-1)^{1-\lambda} (d_{\lambda})_{1n} (d_{-\lambda})_{n'1};$$

es diferente de cero sólo cuando  $M_n = M_{n'}$ . Expresando los elementos de matriz en función de los elementos reducidos e introduciendo de nuevo las anchuras parciales

$$\Gamma_{n \rightarrow 1} = \frac{4\omega^3}{3} \frac{1}{2J_n + 1} |\langle n \parallel d \parallel 1 \rangle|^2,$$

obtendremos para  $\sigma_{\text{cohe}}$  la fórmula (2) con

\* Como era de esperar (dada la analogía formal de los problemas), esta fórmula coincide con la fórmula de Breit-Wigner para la dispersión elástica por resonancia de los neutrones lentos por un núcleo [véase III (142.16), (142.18)]. El factor  $g$  es la probabilidad de obtener el valor dado  $J_n$  en la composición arbitraria de los momentos cinéticos del átomo inicial y del fotón.

$$g = \frac{(2J_n + 1)^2}{2(2J_1 + 1)} \sum_{M_1 M_n} \begin{pmatrix} J_n & 1 & J_1 \\ -M_n & \lambda & M_1 \end{pmatrix}^4$$

Para los tres casos posibles

$$J_n = J_1, \quad J_1 \pm 1$$

el cálculo directo de la suma da

$$g = \begin{cases} \frac{7J_1(J_1 + 1) + 1}{30J_1(J_1 + 1)}, & J_n = J_1 \neq 0; \\ \frac{(2J_1 + 3)[16(J_1 + 1)^2 - 1]}{30(2J_1 + 1)^2(J_1 + 1)}, & J_n = J_1 + 1; \\ \frac{(2J_1 - 1)(16J_1^2 - 1)}{30J_1(2J_1 + 1)^2}, & J_n = J_1 - 1, \quad J_1 \geq 1. \end{cases}$$



## CAPÍTULO 7

### LA MATRIZ DE DISPERSIÓN

#### § 65. Amplitud de dispersión

El planteo general del problema de las colisiones se puede formular como sigue: dado el estado inicial de un sistema (un cierto conjunto de partículas libres), hallar las probabilidades de los diferentes estados finales posibles (otros conjuntos de partículas libres). Si el símbolo  $|i\rangle$  designa el estado inicial, el resultado de la colisión se puede representar como superposición de estados

$$\sum_f |f\rangle \langle f|S|i\rangle, \quad (65.1)$$

donde la suma se extiende a los diferentes estados finales posibles  $|f\rangle$ . Los coeficientes de este desarrollo  $\langle f|S|i\rangle$  (o abreviadamente  $S_{fi}$ ) constituyen la *matriz de dispersión* o *matriz-S*\*. Los cuadrados  $|S_{fi}|^2$  dan las probabilidades de las transiciones a determinados estados  $|f\rangle$ .

Si no existiera interacción entre las partículas, el estado del sistema no cambiaría y la matriz-S sería la matriz unidad (ausencia de dispersión). Es conveniente separar siempre la matriz unidad y representar la matriz de dispersión en la forma

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi}, \quad (65.2)$$

donde  $T_{fi}$  es una nueva matriz. En el segundo miembro se ha separado como factor la función- $\delta$  de cuatro dimensiones que expresa la conservación del 4-impulso ( $P_i$  y  $P_f$  son las sumas de los 4-impulsos de todas las partículas en los estados inicial y final); los demás factores se han introducido porque así conviene para lo que sigue. En los elementos de matriz no diagonales no aparece el primer término de (65.2), de modo que para la transición  $i \rightarrow f$  los elementos de las matrices S y T están ligados entre sí por la igualdad

\* De la palabra inglesa *scattering* o del alemán *Streuung*.

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi}. \quad (65.3)$$

Los elementos de matriz  $T_{fi}$  que quedan después de separar la función- $\delta$  constituyen lo que llamaremos *amplitudes de dispersión*.

Al elevar al cuadrado los módulos  $|S_{fi}|$  aparece el cuadrado de la función- $\delta$ . Este cuadrado debe entenderse en el sentido siguiente: la función- $\delta$  resulta de la integral

$$\delta^{(4)}(P_f - P_i) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(P_f - P_i) \cdot x} d^4x. \quad (65.4)$$

Si se calcula otra integral como ésta para  $P_f = P_i$  (en virtud de que existe ya una función- $\delta$ ) y se extendiese la integración a un volumen grande pero finito  $V$  y a un intervalo de tiempo  $t$ , se obtendría  $Vt/(2\pi)^4$ \*. Por ello se puede escribir

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 Vt.$$

Dividiendo por  $t$  obtendremos la probabilidad de transición por unidad de tiempo

$$w_{f \leftarrow i} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 V. \quad (65.5)$$

Cada una de las partículas libres (iniciales y finales) se describe por su función de onda, que es una onda plana con cierta amplitud  $u$  (para el electrón ésta es un bispinor, para un fotón, un 4-vector, etc.). La amplitud de dispersión  $T_{fi}$  tiene una estructura de la forma

$$T_{fi} = u_1^* u_2^* \dots Q u_1 u_2 \dots, \quad (65.6)$$

donde a la izquierda aparecen las amplitudes de las funciones de onda de las partículas finales, y a la derecha las amplitudes de las iniciales;  $Q$  es una cierta matriz (respecto de los índices de las componentes de las amplitudes de onda de todas las partículas).

Los casos más importantes son aquellos en que en el estado inicial se tienen solamente una o dos partículas. En los del primer tipo se trata de la desintegración de una partícula, en los del segundo, del choque de dos partículas.

Consideremos primero la desintegración de una partícula en un número arbitrario de otras partículas con impulsos  $p'_a$  en el elemento del espacio de impulsos  $\prod_a d^3 p'_a$  (el índice  $a$  numera las partículas en el estado final, de modo que  $\sum_a p'_a = P_f$ ).

El número de estados que corresponden a este elemento (y al volumen de normalización  $V^{**}$ ) es

\* Esto se puede probar de otra manera, calculando primero la integral para cada una de las coordenadas en (65.4) entre límites finitos y haciendo tender luego los límites a infinito mediante la fórmula III (42.4):

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \alpha \xi}{\xi \alpha^2} = \pi \delta(\alpha).$$

\*\* Con el fin de hacer más evidentes los cálculos, en este párrafo no supondremos que el volumen de normalización sea igual a la unidad.

$$\prod_a \frac{V d^3 p'_a}{(2\pi)^3}.$$

La expresión (65.5) hay que multiplicarla por esta cantidad:

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 V \prod_a \frac{V d^3 p'_a}{(2\pi)^3}. \quad (65.7)$$

En todo esto las funciones de onda de todas las partículas, utilizadas en el cálculo del elemento de matriz, deben estar normalizadas a razón de «una partícula en el volumen  $V$ » \*. Así, para un electrón dicha función es la onda plana (23.1), para una partícula de spin 1, la (14.12), para un fotón, la (4.3). Todas estas funciones contienen el factor  $1/\sqrt{2\epsilon V}$ , donde  $\epsilon$  es la energía de la partícula. Sin embargo, en lo que sigue resultará conveniente escribir en todos los cálculos la función de onda de las partículas sin dichos factores (que incluiremos en la expresión de la probabilidad). De esta manera, la onda plana del electrón será

$$\psi = ne^{-ipx}, \quad au = 2m, \quad (65.8)$$

y la onda de fotón

$$A = \sqrt{4\pi} ee^{-ikx}, \quad ee^* = -1, \quad ek = 0. \quad (65.9)$$

La amplitud de dispersión calculada con tales funciones las designaremos (para distinguirlas de las  $T_{fi}$ ) por  $M_{fi}$ . Es evidente que

$$T_{fi} = \frac{M_{fi}}{(2\epsilon_1 V \dots 2\epsilon_n V \dots)^{1/2}}; \quad (65.10)$$

en el denominador aparece un factor  $\sqrt{2\epsilon V}$  por cada una de las partículas inicial o final.

En particular, para la probabilidad de desintegración obtendremos en vez de (65.7)

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |M_{fi}|^2 \frac{1}{2\epsilon} \prod_a \frac{d^3 p'_a}{(2\pi)^3 2\epsilon'_a}, \quad (65.11)$$

donde  $\epsilon$  es la energía de la partícula que se desintegra; el volumen de normalización desaparece en esta fórmula, como debía ser \*\*.

Demos a la fórmula (65.11) una forma más acabada (eliminando de ella la función- $\delta$ ) para el caso en que la desintegración se produce dando lugar a dos partículas (con impulsos  $p'_1, p'_2$  y energías  $\epsilon'_1, \epsilon'_2$ ). En el sistema de reposo de la partícula que se desintegra se tiene  $p'_1 = -p'_2 = p'$ ,  $\epsilon'_1 + \epsilon'_2 = m$ . Por lo tanto,

\* Recordaremos (cf. la nota de la pág. 170) que esta manera de normalizar equivale a la normalización de las funciones de onda de las partículas finales respecto de la función  $\delta(p)$  y a referir la probabilidad a  $d^3 p'_1 \dots$

\*\* Si entre las partículas finales hay  $N$  idénticas entre sí, al integrar respecto de sus impulsos (a fin de hallar la probabilidad integral) ha de introducirse el factor  $1/N!$  que tiene en cuenta la identidad de los estados que difieren entre sí en una permutación de las partículas.

$$d\omega = \frac{1}{(2\pi)^2} |M_{fi}|^2 \frac{1}{2m} \frac{1}{4\epsilon'_1 \epsilon'_2} \delta(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2) \delta(\epsilon'_1 + \epsilon'_2 - m) d^3 p'_1 d^3 p'_2.$$

La primera función- $\delta$  desaparece al integrar respecto de  $d^3 p'_2$ ; la diferencial  $d^3 p'_1$ , en cambio, la escribiremos en la forma

$$d^3 p' = |\mathbf{p}'| d|\mathbf{p}'| d\Omega = |\mathbf{p}'| d\Omega \frac{\epsilon'_1 \epsilon'_2 d(\epsilon'_1 + \epsilon'_2)}{\epsilon'_1 + \epsilon'_2} \quad (65.12)$$

(es fácil convencerse de que esta notación es correcta observando que

$$\epsilon'^2 - m'^2 = \epsilon'^2 - m'^2 = |\mathbf{p}'|^2).$$

La integración respecto de  $d(\epsilon'_1 + \epsilon'_2)$  hace desaparecer la segunda función- $\delta$  y se obtiene

$$d\omega = \frac{1}{32\pi^2 m^2} |M_{fi}|^2 |\mathbf{p}'| d\Omega'. \quad (65.13)$$

Consideremos ahora la colisión de dos partículas (con impulsos  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  y energías  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ ) en la que éstas se transforman en el conjunto de un número arbitrario de partículas con impulsos  $\mathbf{p}'_a$ . En vez de (65.11) tendremos ahora

$$d\omega = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |M_{fi}|^2 \frac{1}{4\epsilon_1 \epsilon_2 V} \prod_a \frac{d^3 p'_a}{(2\pi)^3 2\epsilon'_a}.$$

En este caso la cantidad que nos interesa, sin embargo, no es la probabilidad, sino la sección eficaz  $d\sigma$ . La sección eficaz invariante (respecto de las transformaciones de Lorentz) se obtiene a partir de  $d\omega$  dividiendo por la cantidad

$$j = \frac{I}{V \epsilon_1 \epsilon_2}, \quad (65.14)$$

donde  $I$  representa el 4-escalar

$$I = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \quad (65.15)$$

(véase II, § 12)★. En el sistema del centro de masa ( $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$ ) se tiene

$$I = |\mathbf{p}| (\epsilon_1 + \epsilon_2), \quad (65.16)$$

de modo que

$$j = \frac{|\mathbf{p}|}{V} \left( \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right) = \frac{v_1 + v_2}{V}, \quad (65.17)$$

que coincide con la definición ordinaria de la densidad de flujo de las partículas que chocan ( $v_1$ ,  $v_2$  son sus velocidades)★★. Así, pues, para la sección eficaz encon-

\* Con vistas a futuras referencias, escribiremos también la expresión de  $I$  en la forma

$$I^2 = \frac{1}{4} [s - (m_1 + m_2)^2] [s - (m_1 - m_2)^2], \quad (65.15a)$$

donde  $s = (p_1 + p_2)^2$ .

\*\* En un sistema arbitrario de referencia,

$$j = \frac{1}{V} \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2}.$$

Esta expresión se reduce a la densidad ordinaria de flujo en todos los casos en que  $\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2$ :  $j = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|/V$ .

tramos la fórmula

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |M_{fi}|^2 \frac{1}{4I} \prod_a \frac{d^3 p_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon_a}. \quad (65.18)$$

Demos a esta fórmula su forma definitiva eliminando de ella la función- $\delta$  para el caso en que se tienen también tan sólo dos partículas en el estado final. Estudiaremos el proceso en el sistema del centro de masa. Sea  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2$  la energía total;  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$  y  $\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2 \equiv \mathbf{p}'$  los impulsos inicial y final. La función- $\delta$  se elimina de la misma manera como se hizo al deducir (65.13) y se obtiene

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} |M_{fi}|^2 \frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}| \varepsilon^2} d\omega' \quad (65.19)$$

(en el caso particular de la dispersión elástica, cuando la especie de las partículas no cambia en la colisión, se tiene  $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$ ).

Escribamos esta fórmula en otra forma todavía, introduciendo en ella la cantidad invariante

$$\begin{aligned} t &\equiv (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 = m_1^2 + m'_1{}^2 - 2(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}'_1) = \\ &= m_1^2 + m'_1{}^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon'_1 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}'_1| \cos \theta, \end{aligned} \quad (65.20)$$

donde  $\theta$  es el ángulo formado por  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}'_1$ . En el sistema del centro de masa, los impulsos  $|\mathbf{p}_1| \equiv |\mathbf{p}|$  y  $|\mathbf{p}'_1| \equiv |\mathbf{p}'|$  vienen determinados por la energía total  $\varepsilon$  únicamente, y para  $\varepsilon$  dado se tiene

$$dt = 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'|d\cos\theta. \quad (65.21)$$

Por ello, en (65.19) se puede substituir

$$d\omega' = -d\varphi d\cos\theta = \frac{d\varphi d(-t)}{2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'|},$$

donde  $\varphi$  es el acimut de  $\mathbf{p}'_1$  respecto de  $\mathbf{p}_1^*$ . De esta manera,

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi} |M_{fi}|^2 \frac{dt}{I^2} \frac{d\varphi}{2\pi} \quad (65.22)$$

[hemos introducido de nuevo el invariante  $I$  de acuerdo con (65.16)]. El acimut  $\varphi$ , y con él también la sección eficaz en la forma (65.22), son invariantes respecto de las transformaciones de Lorentz que no cambian el sentido del movimiento de las partículas. Si la sección eficaz no depende del acimut, la fórmula (65.22) toma la forma particularmente simple

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi} |M_{fi}|^2 \frac{dt}{I^2}. \quad (65.23)$$

Si una de las partículas que chocan es suficientemente pesada (y su estado no

\* Dado que el signo correcto de la diferencial en casos semejantes es evidente, para simplificar escribiremos en lo que sigue  $dt$  en vez de  $d(-t)$ , etc.

cambia a consecuencia de la colisión) su papel en el proceso queda reducido al de una fuente inmóvil de un campo constante en el que se dispersa la otra partícula. De acuerdo con el hecho de que en un campo constante se conserva la energía del sistema (¡pero no el impulso!), en esta manera de tratar el proceso de colisión representaremos los elementos de la matriz  $S$  en la forma

$$S_{fi} = i 2\pi \delta(E_f - E_i) T_{fi}. \quad (65.24)$$

En la expresión  $|S_{fi}|^2$  el cuadrado de la función- $\delta$  unidimensional debe interpretarse en el sentido de que

$$[\delta(E_f - E_i)]^2 \rightarrow \frac{1}{2\pi} \delta(E_f - E_i) t.$$

Pasando luego [al igual que en la deducción de (65.11)] a la amplitud  $M_{fi}$  en vez de  $T_{fi}$ , obtendremos la siguiente expresión para la probabilidad del proceso en que una partícula, que experimenta dispersión en un campo constante, origina en el estado final un cierto número de otras partículas:

$$dw = 2\pi \delta(E_f - \varepsilon) |M_{fi}|^2 \frac{1}{2\pi V} \prod_a \frac{d^3 p'_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}.$$

También aquí  $\varepsilon (= E_i)$  es la energía de la partícula inicial,  $p'_a$  y  $\varepsilon'_a$ , los impulsos y las energías de las partículas finales. En cuanto a la sección eficaz de dispersión, ésta se obtiene dividiendo  $dw$  por la densidad de flujo  $j = v/V$ , donde  $v = |\mathbf{p}|/\varepsilon$  es la velocidad de la partícula dispersada. En definitiva el volumen de normalización desaparece del resultado, como debía ser, y se obtiene

$$d\sigma = 2\pi \delta(E_f - \varepsilon) |M_{fi}|^2 \frac{1}{2|\mathbf{p}|} \prod_a \frac{d^3 p'_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}. \quad (65.25)$$

En el caso particular de dispersión elástica, en el estado final se tiene también una sola partícula con igual impulso (en módulo) e igual energía. Substituyendo  $d^3 p' \rightarrow p'^2 d|\mathbf{p}'| d\omega' = |\mathbf{p}'| \varepsilon' d\varepsilon' d\omega'$  y eliminando la función  $\delta(\varepsilon' - \varepsilon)$  por integración respecto de  $d\varepsilon'$ , obtendremos la sección eficaz en la forma

$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^2} |M_{fi}|^2 d\omega'. \quad (65.26)$$

Finalmente, si el campo exterior depende del tiempo (por ejemplo, el campo de un sistema de partículas pesadas que efectúan un movimiento dado), de la matriz  $S$  desaparece también la función- $\delta$  de la energía. Entonces es  $S_{fi} = iT_{fi}$  y después de pasar de  $T_{fi}$  a  $M_{fi}$  según (65.10), la probabilidad, por ejemplo, del proceso en que el campo origina un determinado conjunto de partículas vendrá dada por la fórmula

$$dw = |M_{fi}|^2 \prod_a \frac{d^3 p'_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a} \quad (65.27)$$

## § 66. Reacciones con partículas polarizadas

En este párrafo mostraremos mediante ejemplos sencillos de qué manera se tiene en cuenta en el cálculo de la sección eficaz de dispersión el estado de polarización de las partículas que participan en la reacción.

Supongamos que tanto en el estado inicial como en el final se tiene un electrón. Entonces la amplitud de dispersión tiene la forma

$$M_{fi} = \bar{u}' A u (\equiv \bar{u}'_i A_{ik} u_k), \quad (66.1)$$

donde  $u$  y  $u'$  son las amplitudes bispinoriales del electrón inicial y final y  $A$  una cierta matriz (que depende de los impulsos y de las polarizaciones de las demás partículas que toman parte en la reacción, si las hay).

La sección eficaz de dispersión es proporcional a  $|M_{fi}|^2$ . Se tiene

$$(\bar{u}' A u)^* = u' \gamma^{0*} A^* u^* = u^* A^+ \gamma^{0+} u',$$

o bien

$$(\bar{u}' A u)^* = \bar{u} \bar{A} u', \quad (66.2)$$

donde \*

$$\bar{A} = \gamma^0 A^+ \gamma^0.$$

Así, pues,

$$|M_{fi}|^2 = (\bar{u}' A u) (\bar{u} \bar{A} u') \equiv u'_i \bar{u}'_k A_{kl} u_l \bar{u}_m \bar{A}_{mi}. \quad (66.3)$$

Si el electrón inicial se encontrara en un estado mezclado (parcialmente polarizado) con una matriz densidad  $\rho$  y si nos interesa la sección eficaz del proceso de formación de un electrón final en un estado de polarización dado a priori  $\rho'$ , habrá que substituir los productos de las componentes de las amplitudes bispinoriales de acuerdo con

$$u'_i \bar{u}'_k \rightarrow \rho'_{ik}, \quad u_l \bar{u}_m \rightarrow \rho_{lm}.$$

Entonces

$$|M_{fi}|^2 = \text{Tr} (\rho' A \rho \bar{A}). \quad (66.4)$$

Las matrices densidad  $\rho$  y  $\rho'$  vienen dadas por la fórmula (29.13)

$$\rho = \frac{1}{2} (\hat{p} + m) (1 - \gamma^5 \hat{a}) \quad (66.5)$$

(y análogamente para  $\rho'$ ).

Si el electrón inicial no está polarizado, se tendrá

$$\rho = \frac{1}{2} (\hat{p} + m). \quad (66.6)$$

\* En relación con la necesidad de formar la matriz  $\bar{A}$  haremos observar para más adelante las siguientes igualdades que es fácil comprobar:

$$\bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu, \quad \overline{\gamma^\mu \gamma^\nu \dots \gamma^\rho} = \gamma^\rho \dots \gamma^\nu \gamma^\mu, \quad \bar{\gamma^5} = -\gamma^5, \quad \bar{\gamma^5 \gamma^\mu} = \gamma^5 \gamma^\mu. \quad (66.2a)$$

La substitución de esta expresión equivale a promediar respecto de las polarizaciones del electrón. Si se pide determinar la sección eficaz de dispersión con una polarización arbitraria del electrón final, hay que hacer también  $\rho' = (\hat{p}' + m)/2$  y multiplicar por dos el resultado; esta operación es equivalente a la de sumar respecto de las polarizaciones del electrón. De esta manera obtendremos

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = \frac{1}{2} \text{Tr} \{(\hat{p}' + m) A (\hat{p} + m) \bar{A}\}, \quad (66.7)$$

donde  $\sum_{\text{polar}}$  designa la suma respecto de las polarizaciones iniciales y finales y el factor  $1/2$  transforma una de estas sumas en un promedio.

La matriz densidad  $\rho'$  en (66.4) es un concepto auxiliar que caracteriza, en esencia, las propiedades del detector (que distingue una u otra polarización del electrón final) y no del proceso de dispersión en sí. Se plantea la cuestión de cuál sea el estado de polarización del electrón al que lo conduce el propio proceso de dispersión. Si  $\rho^{(f)}$  es la matriz densidad de este estado, la probabilidad de detectar el electrón en el estado  $\rho'$  se obtendrá proyectando  $\rho^{(f)}$  sobre  $\rho'$ , es decir, formando la traza  $\text{Tr}(\rho^{(f)}\rho')$ . A esta misma cantidad será proporcional la correspondiente sección eficaz, es decir, el cuadrado  $|M_{fi}|^2$ . Comparando con (66.4), llegamos a la conclusión de que

$$\rho^{(f)} \sim A \rho \bar{A}. \quad (66.8)$$

Dado que se sabe a priori que  $\rho^{(f)}$  ha de tener la forma (66.5) con un cierto 4-vector  $a^{(f)}$ , el asunto se reduce a determinar este último. Esto podría hacerse mediante la fórmula (29.14), pero es todavía más fácil proceder como se indica a continuación.

En el § 29 vimos que las componentes del 4-vector  $a$  se expresan en función de las componentes de un 3-vector  $\zeta$  — que es el doble del valor medio del spin del electrón en su sistema de reposo. Los estados de polarización de los electrones quedan por completo determinados por estos vectores y es lógico expresar también en función de ellos la sección eficaz de dispersión. El cuadrado  $|M_{fi}|^2$  será, evidentemente, lineal respecto de cada uno de los vectores  $\zeta$  y  $\zeta'$  que se refieren a los electrones inicial y final. Como función de  $\zeta'$  tendrá la forma

$$|M_{fi}|^2 = \alpha + \beta \cdot \zeta', \quad (66.9)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son a su vez funciones lineales de  $\zeta$ .

El vector  $\zeta'$  en (66.9) es la polarización dada del electrón final vista por el detector. En cuanto al vector  $\zeta^{(f)}$ , que corresponde a la matriz densidad  $\rho^{(f)}$ , es fácil hallarlo de la siguiente manera. De acuerdo con lo dicho más arriba

$$|M_{fi}|^2 \sim \text{Tr}(\rho' \rho^{(f)}).$$

Dada la invariancia relativista de esta magnitud, es posible calcularla en un sistema de referencia cualquiera. En el sistema de reposo del electrón final tenemos, según (29.20),

$$\rho' \rho^{(f)} \sim (1 + \sigma \cdot \zeta') (1 + \sigma \cdot \zeta^{(f)}).$$

Por consiguiente,

$$|M_{fi}|^2 \sim 1 + \zeta' \cdot \zeta^{(f)}$$

y, comparando con (66.9), se encuentra que

$$\zeta^{(f)} = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (66.10)$$

De esta manera, calculando la sección eficaz en función del parámetro  $\zeta'$ , determinamos también a la vez la polarización  $\zeta^{(f)}$ .

En casos más complicados, cuando se tiene más de un electrón inicial o final, los cálculos se efectúan de manera análoga de acuerdo con el esquema expuesto.

Así, si al principio y al final se tienen dos electrones, la amplitud de dispersión tiene la forma

$$M_{fi} = (\bar{u}'_1 A u_1) (\bar{u}'_2 B u_2) + (\bar{u}'_2 C u_1) (\bar{u}'_1 D u_2),$$

donde  $u_1, u_2$  son las amplitudes bispinoriales de los electrones iniciales, y  $u'_1, u'_2$ , las de los finales. Al formar el cuadrado  $|M_{fi}|^2$  aparecen términos del tipo

$$|\bar{u}'_1 A u_1|^2 |\bar{u}'_2 B u_2|^2$$

y de la forma

$$(\bar{u}'_1 A u_1) (\bar{u}'_2 B u_2) (\bar{u}'_2 C u_1)^* (\bar{u}'_1 D u_2)^*.$$

Los primeros se reducen a productos de dos trazas del tipo (66.4), y los segundos, a trazas de la forma

$$\text{Tr} (\rho'_1 A \rho_1 \bar{C} \rho'_2 B \rho_2 \bar{D}).$$

Los positones se representan por amplitudes « de frecuencia negativa »  $u(-p)$ . Para reacciones en las que participan positones la diferencia con relación a lo expuesto más arriba se reduce a que hay que utilizar como matriz densidad ciertas expresiones que difieren de (66.5-6) tan sólo en el cambio de signo de  $m$  [cf. (29.16-17)].

Pasemos ahora a los estados de polarización de los fotones que participan en la reacción.

La polarización de cada fotón inicial figura linealmente en la amplitud de dispersión en forma de 4-vector  $e$ , y la de cada fotón final, en forma de 4-vector  $e^*$ . En ambos casos, en la sección eficaz (es decir, en el cuadrado  $|M_{fi}|^2$ ) aparece el 4-tensor  $e_\mu e_\nu^*$ . Para pasar al caso de un estado parcialmente polarizado arbitrario este tensor debe substituirse por una matriz densidad cuadridimensional — por un 4-tensor  $\rho_{\mu\nu}$ :

$$e_\mu e_\nu^* \rightarrow \rho_{\mu\nu}. \quad (66.11)$$

En particular, para un fotón no polarizado, según (8.15) se tendrá

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}. \quad (66.12)$$

De esta manera el promedio respecto de las polarizaciones del fotón se reduce a la contracción tensorial en  $|M_{fi}|^2$  respecto de los dos índices tensoriales  $\mu\nu$ .\*

Si se pide efectuar no el promedio, sino la suma respecto de las polarizaciones del fotón, hay que substituir  $e_\mu e_\nu^*$  por la expresión dos veces mayor

$$e_\mu e_\nu^* \rightarrow -g_{\mu\nu}. \quad (66.13)$$

La matriz densidad de un fotón polarizado viene dada por la fórmula (8.17). La elección de los 4-vectores  $e^{(1)}$  y  $e^{(2)}$  que figuran en esta expresión viene dictada de ordinario por las condiciones concretas del problema. En unos casos estos vectores pueden estar vinculados a determinadas direcciones espaciales en un cierto sistema de referencia. En otros casos es más conveniente referirlos a los 4-vectores característicos que figuran en las condiciones del problema — los 4-impulsos de las partículas.

En (8.17) la polarización del fotón se representó por los parámetros de Stokes, que forman un «vector»  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Al igual que en el caso del electrón, hay que distinguir la polarización  $\xi^{(f)}$  del fotón final en sí de la polarización  $\xi'$  que ve el detector. Si se conoce el cuadrado de la amplitud de dispersión en función del parámetro  $\xi'$ :

$$|M_{fi}|^2 = \alpha + \beta \cdot \xi',$$

se tiene para la polarización  $\xi^{(f)} = \beta/\alpha$ , igualdad que es por completo análoga a la fórmula (66.10).

### § 67. Invariantes cinemáticos

Consideremos algunas relaciones cinemáticas para los procesos de dispersión en los cuales tanto en el estado inicial como en el estado final se tienen sólo dos partículas. Se trata de relaciones que son consecuencia únicamente de las leyes generales de conservación y que, por lo tanto, valen con independencia de cuál sea la naturaleza de las partículas y la de las leyes de su interacción.

Escribamos la ley de conservación del 4-impulso en forma general, sin decidir de antemano qué impulsos se refieren a las partículas iniciales y cuáles a las finales

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0. \quad (67.1)$$

Los  $\pm q_a$  son aquí 4-vectores impulso, de los cuales dos corresponden a las partículas incidentes, y dos, a las dispersadas; para las últimas, los impulsos son los  $-q_a$ . En otras palabras, en dos de los  $q_a$  la componente es  $q_a^0 > 0$  y para los otros dos es  $q_a^0 < 0$ .

Junto con la conservación del 4-impulso debe cumplirse la ley de conservación de la carga. En este sentido, se puede entender por carga no sólo la carga eléctrica, sino también otras cantidades que se conservan y que tienen signos opuestos en las partículas y en las antipartículas.

---

\* La expresión (66.12) en cierto modo reduce el promedio respecto de las dos polarizaciones realmente posibles del fotón al promedio respecto de las cuatro direcciones independientes del 4-vector  $e$ .

Para especies dadas de las partículas que toman parte en el proceso, los cuadrados de los 4-vectores  $q_a$  son los cuadrados dados de las masas de las partículas ( $q_a^2 = m_a^2$ ). Según los valores atribuidos a las componentes temporales  $q_a^0$  y los valores de las cargas, obtendremos tres reacciones diferentes. Escribamos estos tres procesos como sigue:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & 1 + 2 \rightarrow 3 + 4, \\ \text{II)} \quad & 1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4, \\ \text{III)} \quad & 1 + \bar{4} \rightarrow \bar{2} + 3. \end{aligned} \quad (67.2)$$

La cifra designa aquí el número de la partícula, y el trazo encima de la primera distingue la antipartícula de la partícula. Al paso de una de las reacciones a otra, es decir, al paso de una partícula de un miembro de la fórmula al otro, corresponde el cambio de signo de la componente temporal  $q_a^0$  asociada y también del signo de la carga, esto es, el cambio de una partícula por la antipartícula. [Junto con los procesos (67.2) son también posibles, naturalmente, las reacciones inversas.]

De los tres procesos (67.2) se dice que son los tres *canales cruzados* (o *de cruce*) de una misma reacción (generalizada).

Veamos algunos ejemplos. Si las partículas 1 y 3 son electrones, y las 2 y 4 son fotones, el canal I es la dispersión de un fotón por un electrón; teniendo en cuenta que el fotón es una partícula realmente neutra, el canal III coincide con el canal I. En cambio, el canal II representa la transformación de un par electrón-positón en dos fotones. Si las cuatro partículas son electrones, el canal I es la dispersión de un electrón por un electrón y los canales II y III corresponden a la dispersión de un positón por un electrón. Si las partículas 1 y 3 son electrones y las 2 y 4 muones, el canal I es la dispersión de un  $e$  por un  $\mu$ , el canal III, la dispersión de un  $e$  por un  $\bar{\mu}$  y el canal II, la conversión de un par  $e\bar{e}$  en un par  $\mu\bar{\mu}$ .

En el estudio de los procesos de dispersión representan un papel especial las cantidades invariantes que se pueden construir a partir de los 4-impulsos. Las amplitudes invariantes de dispersión (§ 71) son funciones de ellas.

Mediante los 4-impulsos es posible formar dos cantidades invariantes independientes. En efecto, en virtud de (67.1), sólo tres de los 4-vectores  $q_a$  son independientes; sean éstos los  $q_1, q_2, q_3$ . A partir de ellos se pueden construir seis invariantes: los tres cuadrados  $q_1^2, q_2^2, q_3^2$  y los tres productos  $q_1 q_2, q_1 q_3, q_2 q_3$ . Pero los tres primeros son los cuadrados dados de las masas y los tres segundos están ligados por una relación que se sigue de la igualdad \*

\* En el caso general, cuando en la reacción toman parte  $n \geq 4$  partículas, el número de variables invariantes funcionalmente independientes es igual a  $3n - 10$ . En efecto, en total se tienen  $4n$  cantidades – las componentes de los  $n$  4-impulsos  $q_a$ . Entre ellas existen  $n$  relaciones funcionales  $q_a^2 = m_a^2$  y otras

$n$  dadas por la ley de conservación  $\sum_{a=1}^n q_a = 0$ . Se pueden dar valores arbitrarios a 6 cantidades, de acuerdo

con el número de parámetros que determinan una transformación general de Lorentz (rotación cuadridimensional general). Por ello, el número de variables invariantes independientes es  $4n - n - 4 - 6 = 3n - 10$ .

$$(q_1 + q_2 + q_3)^2 = q_4^2 = m_4^2$$

Para conseguir una mayor simetría conviene, sin embargo, considerar no dos, sino tres invariantes, para los cuales elegiremos los siguientes:

$$\begin{aligned} s &= (q_1 + q_2)^2 = (q_3 + q_4)^2, \\ t &= (q_1 + q_3)^2 = (q_2 + q_4)^2, \\ u &= (q_1 + q_4)^2 = (q_2 + q_3)^2. \end{aligned} \quad (67.3)$$

Éstos están ligados, como es fácil ver, por la relación

$$s + t + u = h, \quad (67.4)$$

donde

$$h = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \quad (67.5)$$

En el canal fundamental (I) el invariante  $s$  tiene una significación física sencilla: es el cuadrado de la energía total de las partículas que chocan (1 y 2) en el sistema de su centro de masa [para  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 : s = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2$ ]. En el canal II representa un papel análogo el invariante  $t$ , y en el canal III, el invariante  $u$ . Debido a esto, los canales I, II, III se llaman a menudo canales  $s$ ,  $t$  y  $u$ .

No ofrece dificultad expresar todos los invariantes  $s$ ,  $t$ ,  $u$  en función de las energías y de los impulsos de las partículas que chocan en cada uno de los canales. Consideremos el canal  $s$ . En el sistema del centro de masa de las partículas 1 y 2, las componentes temporales y espaciales de los 4-vectores  $q_a$  se dan en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 = (\varepsilon_1, \mathbf{p}_s), & q_2 &= p_2 = (\varepsilon_2, -\mathbf{p}_s), \\ q_3 &= -p_3 = (-\varepsilon_3, -\mathbf{p}'_s), & q_4 &= -p_4 = (-\varepsilon_4, \mathbf{p}'_s) \end{aligned} \quad (67.6)$$

(el índice  $s$  en  $\mathbf{p}_s$ ,  $\mathbf{p}'_s$  sirve para recordar que sus impulsos se refieren a la reacción en el canal  $s$ ). Entonces

$$s = \varepsilon_s^2, \quad \varepsilon_s = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4; \quad (67.7)$$

$$4s\mathbf{p}_s^2 = [s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2], \quad (67.8)$$

$$4s\mathbf{p}'_s^2 = [s - (m_3 + m_4)^2][s - (m_3 - m_4)^2];$$

$$2t = h - s + 4\mathbf{p}_s \cdot \mathbf{p}'_s - \frac{1}{s}(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2), \quad (67.9)$$

$$2u = h - s - 4\mathbf{p}_s \cdot \mathbf{p}'_s + \frac{1}{s}(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2).$$

En el caso de dispersión elástica ( $m_1 = m_3$ ,  $m_2 = m_4$ ) tenemos  $|\mathbf{p}_s| = |\mathbf{p}'_s|$ , de modo que  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_4$ . Entonces en vez de (67.9) se obtienen las fórmulas más simples

$$\begin{aligned} t &= -(\mathbf{p}_s - \mathbf{p}'_s)^2 = -2\mathbf{p}_s^2(1 - \cos \theta_s), \\ u &= -2\mathbf{p}_s^2(1 + \cos \theta_s) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2, \end{aligned} \quad (67.10)$$

donde  $\theta_s$  es el ángulo formado por  $\mathbf{p}_s$  y  $\mathbf{p}'_s$ . Obsérvese que el invariante  $-t$  representa en este caso el cuadrado del impulso (tridimensional) transferido en la colisión.

Fórmulas análogas para los demás canales se obtienen mediante simples cambios de notación. Para pasar al canal  $t$  hay que efectuar en (67.6-10) la sustitución  $s \leftrightarrow t$ ,  $2 \leftrightarrow 3$ ; para pasar al canal  $u$ , la sustitución  $s \leftrightarrow u$ ,  $2 \leftrightarrow 4$ .

### § 68. Regiones físicas

Al considerar las amplitudes de dispersión como funciones de las variables independientes  $s$ ,  $t$ ,  $u$  (ligadas solamente por la relación  $s + t + u = h$ ), nos encontramos con la necesidad de distinguir las regiones de sus valores físicamente admisibles e inadmisibles. Los valores que pueden corresponder a un proceso físico de dispersión deben satisfacer determinadas condiciones que son consecuencias de la ley de conservación del 4-impulso y del hecho de que el cuadrado de cada uno de los 4-vectores  $q_a$  es una cantidad dada:  $q_a^2 = m_a^2$ .

Los productos de dos 4-impulsos son tales que

$$p_a p_b \geq m_a m_b. \quad (68.1)$$

En consecuencia,  $(q_a + q_b)^2 = (p_a + p_b)^2 \geq (m_a + m_b)^2$ ,

si  $q_a = p_a$ ,  $q_b = p_b$  (o  $q_a = -p_a$ ,  $q_b = -p_b$ ), o bien

$$(q_a + q_b)^2 = (p_a - p_b)^2 \leq (m_a - m_b)^2,$$

si  $q_a = p_a$ ,  $q_b = -p_b$ . De aquí se sigue que para la reacción en el canal  $s$  ha de ser

$$\begin{aligned} (m_1 + m_3)^2 &\leq s \geq (m_3 + m_4)^2, \\ (m_1 - m_3)^2 &\geq t \leq (m_3 - m_4)^2, \\ (m_1 - m_4)^2 &\geq u \leq (m_3 - m_4)^2 \end{aligned} \quad (68.2)$$

(desigualdades análogas valen en los canales  $t$  y  $u$ ).

Para hallar las restantes condiciones formaremos el 4-vector  $L$ , dual del producto de tres cualesquiera de los 4-vectores  $q_a$ , por ejemplo:

$$L_\lambda = e_{\lambda\mu\nu\rho} q_1^\mu q_2^\nu q_3^\rho. \quad (68.3)$$

En el sistema de reposo de una de las partículas (por ejemplo, de la partícula 1) es  $q_1 = (q_1^0, 0)$ . En estas condiciones,  $L$  tiene únicamente componentes espaciales:  $L_i = e_{i0kl} q_1^0 q_2^k q_3^l$ . En otras palabras,  $L$  es un vector espacial, y en cualquier sistema de referencia se tiene  $L^2 \leq 0$ . Desarrollando el cuadrado  $L^2$ , obtenemos la condición

$$\left| \begin{array}{ccc} q_1^0 & q_1 q_2 & q_1 q_3 \\ q_2 q_1 & q_2^0 & q_2 q_3 \\ q_3 q_1 & q_3 q_2 & q_3^0 \end{array} \right| \geq 0. \quad (68.4)$$

Ésta puede expresarse en función de los invariantes  $s, t, u$  en una forma que es la misma para todos los canales

$$stu \geq as + bt + cu, \quad (68.5)$$

donde

$$\begin{aligned} ah &= (m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2)(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2), \\ bh &= (m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2)(m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2), \\ ch &= (m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2)(m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2) \end{aligned} \quad (68.6)$$

(T. W. B. Kibble, 1960).

Para representar gráficamente los dominios de variación de las variables  $s, t, u$  conviene utilizar las llamadas coordenadas triangulares en un plano (plano de Mandelstam, S. Mandelstam, 1958). Los ejes de coordenadas en él son tres rectas que se cortan formando un triángulo equilátero. Las coordenadas  $s, t, u$  se cuentan sobre direcciones perpendiculares a estas tres rectas (considerando positivas las direcciones orientadas hacia dentro del triángulo, como se indica en la figura 7 mediante flechas). En otras palabras, a cada uno de los puntos del plano corresponden valores  $s, t, u$  que se representan (con sus correspondientes signos) por las longitudes de las perpendiculares trazadas sobre los tres ejes. Que se cumple la condición  $s + t + u = h$  queda garantizado por un conocido teorema de geometría (si la altura del triángulo equilátero es igual a  $h$ )<sup>\*</sup>.

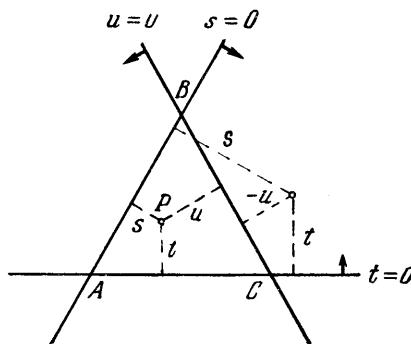


FIG. 7.

Consideremos el caso importante en que al canal fundamental ( $s$ ) corresponde la dispersión elástica; entonces las masas de las partículas son iguales dos a dos:

$$m_1 = m_3 \equiv m, \quad m_2 = m_4 \equiv \mu. \quad (68.7)$$

\* Uniendo, por ejemplo, el punto  $P$  (fig. 7) con los tres vértices del triángulo  $ABC$ , lo descomponemos en tres triángulos cuyas alturas son  $s, t, u$ ; igualando la suma de sus áreas al área del triángulo  $ABC$ , se encuentra la igualdad en cuestión. De manera análoga se demuestra también en el caso en que el punto  $P$  se encuentra fuera del triángulo  $ABC$ .

Sea  $m > \mu$ . En la condición (68.5) tenemos

$$h = 2(m^2 + \mu^2), \quad a = c = 0, \quad b = (m^2 - \mu^2)^2,$$

de modo que

$$su t \geq (m^2 - \mu^2)^2 t. \quad (68.8)$$

La frontera de la región determinada por esta desigualdad está constituida por la recta  $t = 0$  y la hipérbola

$$su = (m^2 - \mu^2)^2, \quad (68.9)$$

cuyas dos ramas se encuentran en los sectores  $u < 0, s < 0$  y  $s > 0, u > 0$ ; los ejes  $s = 0$  y  $u = 0$  son las asíntotas de la hipérbola. En vez de (68.8) se puede escribir

$$t > 0, \quad su > (m^2 - \mu^2)^2 \text{ o bien } t < 0, \quad su < (m^2 - \mu^2)^2.$$

Además, de las condiciones (68.2) se sigue que hay que tener en cuenta también la desigualdad  $s > (m + \mu)^2$  en el canal  $s$  y la  $u > (m + \mu)^2$  en el canal  $u$ ; las demás desigualdades se cumplen luego automáticamente. En definitiva encontramos que a los canales I, II, III ( $s, t, u$ ) corresponden, como suele decirse, las *regiones físicas* representadas en sombreado en la figura 8.

Si  $\mu = 0$  (las partículas 2, 4 son fotones), la rama inferior de la hipérbola es tangente al eje  $t = 0$  y las regiones físicas tienen el aspecto que muestra la figura 9.

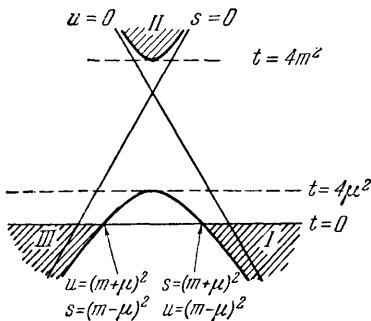


Fig. 8.

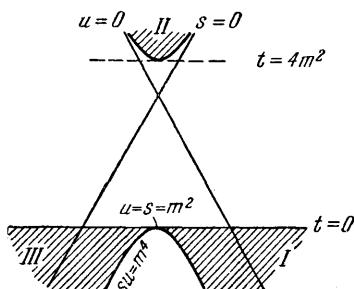


Fig. 9.

Pero si  $m = \mu$ , las fronteras de la región (68.8) degeneran en los ejes de coordenadas y las regiones físicas son los tres sectores representados en la figura 10.

En el caso general de cuatro masas diferentes, la ecuación

$$stu = as + bt + cu \quad (68.10)$$

determina una curva de tercer grado cuyas ramas limitan las regiones físicas de los tres canales, como muestra la figura 11. Supongamos que

$$m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq m_4.$$

Entonces

$$a \geq b \geq c, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

La curva (68.10) corta a los ejes de coordenadas en puntos que se encuentran sobre la recta

$$as + bt + cu = 0.$$

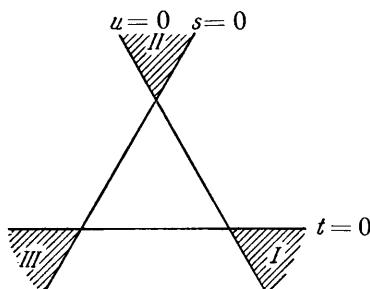


Fig. 10.

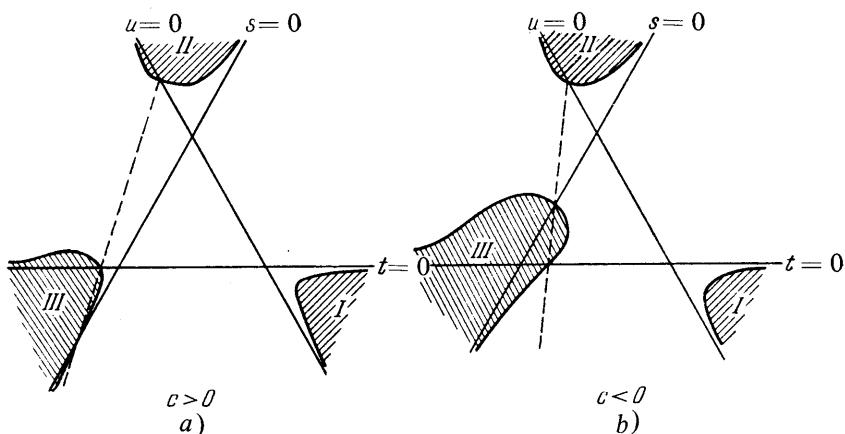


Fig. 11.

Según sea el signo de  $c$ , su forma es la que indica la figura 11, a y b. Cuando  $c < 0$  la región física del canal  $u$  ocupa parte del área del triángulo de coordenadas; en otras palabras, en este caso las cantidades  $s$ ,  $t$ ,  $u$  pueden ser todas positivas. Las tres ramas de la curva frontera admiten como asíntotas los correspondientes ejes de coordenadas [es fácil cerciorarse de que es así eliminando de la ecuación (68.10) una de las variables mediante la relación  $s + t + u = h$  y haciendo tender luego a infinito una de las variables restantes]. Las condiciones (68.2) no aportan nada

nuevo en el caso general en comparación con las fronteras que establece la ecuación (68.10). Las rectas que corresponden a los signos de igualdad en (68.2) no cortan las regiones físicas rayadas en la figura 11, *a*, *b*; algunas de ellas son tangentes a las fronteras de estas regiones, lo que corresponde a valores extremos de las variables *s*, *t* o *u* según sea el canal de que se trate.

En el caso en que la masa de una de las partículas sea mayor que la suma de las masas de las otras tres ( $m_1 > m_2 + m_3 + m_4$ ), junto con los canales I, II, III es posible aun un cuarto canal de reacción que corresponde a la desintegración



Para este canal, en el sistema de reposo de la partícula que se desintegra se tiene

$$\begin{aligned} q_1 &= (m_1, 0), \quad q_2 = (-\varepsilon_2, -\mathbf{p}_2), \quad q_3 = (-\varepsilon_3, -\mathbf{p}_3), \quad q_4 = (-\varepsilon_4, -\mathbf{p}_4), \\ \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 &= m_1, \quad \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = 0. \end{aligned}$$

Los invariantes son:

$$\begin{aligned} s &= m_1^2 + m_2^2 - 2m_1\varepsilon_2, \\ t &= m_1^2 + m_3^2 - 2m_1\varepsilon_3, \\ u &= m_1^2 + m_4^2 - 2m_1\varepsilon_4. \end{aligned} \quad (68.12)$$

De (68.1) se deduce ahora:

$$\begin{aligned} (m_3 + m_4)^2 &\leq s \leq (m_1 - m_3)^2, \\ (m_2 + m_4)^2 &\leq t \leq (m_1 - m_3)^2, \\ (m_2 + m_3)^2 &\leq u \leq (m_1 - m_4)^2. \end{aligned} \quad (68.13)$$

De esta manera los tres invariantes resultan todos positivos, es decir, la región física del canal de desintegración es interior al triángulo de coordenadas y está limitada por la curva cerrada que se deduce de (68.10).

### PROBLEMAS

1. Hallar las regiones físicas en el caso de tres masas iguales:  $m_1 \equiv m$ ,  $m_2 = m_3 = m_4 \equiv \mu$  (por ejemplo, la reacción  $K + \pi \rightarrow \pi + \pi$ ).

*Solución.* La ecuación (68.10) toma la forma

$$stu = \mu^2 (m^2 - \mu^2)^2, \quad (1)$$

con

$$s + t + u = 3\mu^2 + m^2.$$

Las regiones I, II, III están limitadas por curvas de igual forma (para I:  $s > 0$ ,  $t < 0$ ,  $u < 0$ , y análogamente para II y III). Si  $m > 3\mu$ , (1) tiene también una rama [curva cerrada] con  $s > 0$ ,  $t > 0$ ,  $u > 0$ , que es la frontera de la región del canal IV (fig. 12).

2. Lo mismo en el caso en que  $m_1 \equiv m$ ,  $m_2 \equiv \mu$ ,  $m_3 = m_4 = 0$ ,  $m > \mu$  (por ejemplo, la reacción  $\mu + v \rightarrow e + v$ ).

*Solución.* La condición (68.5) toma la forma

$$stu \geq m^2 \mu^2 s,$$

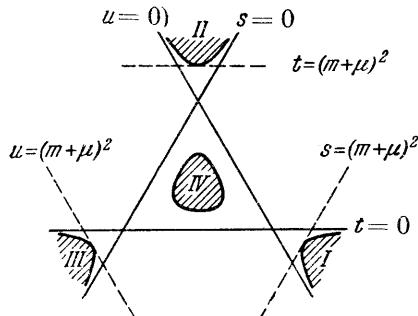


Fig. 12.

con  $s + t + u = m^2 + \mu^2$ . Las regiones físicas están limitadas por el eje  $s = 0$  y las dos ramas de la hipérbola  $tu = m^2\mu^2$  (fig. 13).

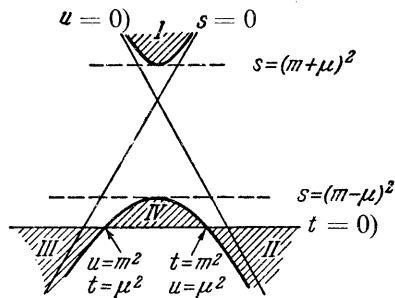


Fig. 13.

3. Lo mismo en el caso en que  $m_1 = m_3 \equiv m$ ,  $m_2 = 0$ ,  $m_4 \equiv \mu$  y, además,  $m > 2\mu$ . (por ejemplo, la reacción  $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$ ).

*Solución.* La ecuación de las fronteras (68.10) toma la forma

$$\begin{aligned} stu &= a(s+u) + bt, \\ ah &= m^2\mu^4, \quad bh = m^4(2m^2 - \mu^2), \quad h = 2m^2 + \mu^2. \end{aligned}$$

Eliminando  $u$ , obtendremos

$$t^2 + \left( \frac{b-a}{s} + s - h \right) t + \frac{ah}{s} = 0.$$

Para  $s$  dado, ésta es una ecuación cuadrática en  $t$ . Para  $s > (m + \mu)^2$  (región del canal  $s$ ), a cada  $s$  corresponden dos valores negativos de  $t$ . Cuando  $s = (m + \mu)^2$ , estas dos raíces de la ecuación de segundo grado se confunden en una:  $t = -m\mu^2/(m + \mu)$ . La frontera de la región del canal  $s$  tiene la forma que indica la figura 14. La rama inferior de la curva frontera tiende asintóticamente al eje  $u = 0$  y la rama superior corta este eje en el punto  $t = \mu^4/(\mu^2 - m^2)$ .

La región del canal  $u$  es simétrica respecto de la región del canal  $s$ , y la región del canal  $t$  está colocada según se indica en la figura.

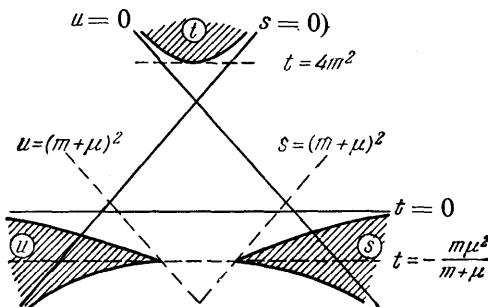


Fig. 14.

### § 69. Desarrollo en amplitudes parciales

La etapa esencial en el análisis de una reacción del tipo



es el desarrollo de la amplitud de dispersión en amplitudes parciales, cada una de las cuales corresponde (para un valor dado de la energía total  $\epsilon$ ) a un determinado valor del momento cinético total  $J$  de las partículas en el sistema de su centro de masa\*.

Estas amplitudes parciales representan, en otras palabras, los elementos de la matriz  $S$  en la representación de momentos:

$$\langle \epsilon J' M' | S | \epsilon J M \rangle.$$

Dado que el momento cinético  $J$  y su proyección  $M$  sobre un eje  $z$  dado se conservan, la matriz  $S$  es diagonal respecto de estos números (como también respecto de la energía  $\epsilon$ ). Además, en virtud de la isotropía del espacio los elementos diagonales son independientes del valor de  $M$ . Para  $J$ ,  $M$ ,  $\epsilon$  dados, la matriz de dispersión sigue siendo una matriz respecto de los números cuánticos espinoriales; los elementos de esta matriz los representaremos de manera abreviada en la forma

$$\langle \epsilon JM\lambda' | S | \epsilon JM\lambda \rangle \equiv \langle \lambda' | S^J(\epsilon) | \lambda \rangle, \quad (69.2)$$

donde  $\lambda$  y  $\lambda'$  son los conjuntos de números cuánticos espinoriales. Para estos últimos lo más natural es utilizar aquí las helicidades de las partículas. Recordaremos que la helicidad (a diferencia de la proyección del spin sobre un eje arbitrario en el espacio) se conserva para una partícula libre, y también que comuta tanto con el impulso como con el momento cinético de la partícula (§ 16). Por ello, cabe utilizar las helicidades lo mismo en la representación de impulsos que en la representación de momentos de la matriz de dispersión.

\* Gran parte de los resultados expuestos en los §§ 69, 70 se deben a *M. Jacob y G. C. Wick*, 1959.

Los elementos de la matriz  $S$  respecto de los índices de helicidad los llamaremos *amplitudes de helicidad* (o helicoidales) de la dispersión  $y$ , de esta manera, entenderemos por  $\lambda$  y  $\lambda'$  los conjuntos de las helicidades de las partículas iniciales y finales:  $\lambda = (\lambda_a, \lambda_b)$ ,  $\lambda' = (\lambda_c, \lambda_d)$ .

En la representación de impulsos los elementos de la matriz de dispersión se determinan respecto de los estados  $|\varepsilon n \lambda\rangle$  (donde  $n = p/|p|$  es la dirección orientada del impulso del movimiento relativo en el sistema del centro de masa), y en la de momentos, respecto de los estados  $|\varepsilon JM\lambda\rangle$ . Cada una se expresa en función de la otra mediante desarrollos de la forma

$$|JM\lambda\rangle = \int |\mathbf{n}\lambda\rangle \langle \mathbf{n}\lambda | JM\lambda \rangle d\sigma_{\mathbf{n}}, \quad (69.3)$$

donde la integración se extiende a las direcciones de  $\mathbf{n}$  (prescindiremos, para abreviar, de la energía  $\varepsilon$  en los símbolos de los estados). En virtud del carácter unitario de esta transformación (véase III, § 12), los coeficientes de la transformación inversa son

$$\langle JM\lambda | \mathbf{n}\lambda \rangle = \langle \mathbf{n}\lambda | JM\lambda \rangle^*. \quad (69.4)$$

Según la regla de transformación de las matrices, estos mismos coeficientes determinan la relación entre los elementos de la matriz  $S$  en ambas representaciones:

$$\langle \mathbf{n}'\lambda' | S | \mathbf{n}\lambda \rangle = \sum_{JM} \langle \mathbf{n}'\lambda' | JM\lambda' \rangle \langle JM\lambda' | S | JM\lambda \rangle \langle JM\lambda | \mathbf{n}\lambda \rangle. \quad (69.5)$$

Los coeficientes del desarrollo (69.3) se hallan fácilmente mediante los resultados del § 16.

Expresemos las funciones de onda de todos los estados en la representación de impulsos, es decir, como funciones de la dirección orientada del impulso (para una energía dada); esta dirección, en tanto que variable independiente, la designaremos por  $\mathbf{v}$  para distinguirla de la dirección  $\mathbf{n}$  en tanto que número cuántico del estado. En esta representación, la función de onda tiene la forma (16.2)

$$\psi_{n\lambda}(\mathbf{v}) = u^{(\lambda)} \delta^{(2)}(\mathbf{v} - \mathbf{n}). \quad (69.6)$$

Al substituir (69.6) en el desarrollo (69.3), éste se reduce a un solo término:

$$\psi_{JM\lambda} = \langle \mathbf{v}\lambda | JM\lambda \rangle u^{(\lambda)}. \quad (69.7)$$

Las helicidades  $\lambda_a$  y  $\lambda_b$  de cada una de las dos partículas se determinan como proyección de su spin sobre la dirección de su propio impulso. Si los impulsos de las partículas son  $\mathbf{p}_a \equiv \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}_b = -\mathbf{p}$ , para la primera partícula dicha proyección coincide con la dirección de  $\mathbf{n}$ , y para la segunda, con la dirección de  $-\mathbf{n}$ . Si consideramos ahora el sistema como una sola partícula de helicidad  $\Lambda$  en la dirección  $\mathbf{n}$ , se tendrá  $\Lambda = \lambda_a - \lambda_b$ . Su función de onda (en la representación de impulsos) se puede representar, según (16.4), en la forma

$$\psi_{JM\lambda}(\mathbf{v}) = u^{(\lambda)} D_{\Lambda M}^{(J)}(\mathbf{v}) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}. \quad (69.8)$$

Comparando las dos expresiones (69.7-8) (y cambiando la notación de la variable  $\mathbf{v}$  por  $\mathbf{n}$ ), obtendremos para los coeficientes buscados

$$\langle \mathbf{n}\lambda | JM\lambda \rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} D_{\Lambda M}^{(J)}(\mathbf{n}). \quad (69.9)$$

La substitución de estos coeficientes en (69.5) da

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}'\lambda' | S | \mathbf{n}\lambda \rangle &= \sum_{JM} \frac{2J+1}{4\pi} D_{\Lambda M}^{(J)}(\mathbf{n}') D_{\Lambda M}^{(J)*}(\mathbf{n}) \langle \lambda' | S^J | \lambda \rangle, \\ \Lambda &= \lambda_a - \lambda_b, \quad \Lambda' = \lambda_c - \lambda_d, \end{aligned} \quad (69.10)$$

donde se ha utilizado la notación abreviada (69.2). Elijamos el eje  $z$  en la dirección de  $\mathbf{n}$ ; entonces

$$D_{\Lambda M}^{(J)}(\mathbf{n}) = \delta_{\Lambda M}$$

y (69.10) toma la forma

$$\langle \mathbf{n}'\lambda' | S | \mathbf{n}\lambda \rangle = \sum_J \frac{2J+1}{4\pi} D_{\Lambda'\Lambda}^{(J)}(\mathbf{n}') \langle \lambda' | S^J | \lambda \rangle. \quad (69.11)$$

Vemos así que el desarrollo en amplitudes parciales se consigue tomando como coeficiente las funciones  $D_{\Lambda'\Lambda}^{(J)}$ . Para una reacción de la forma (69.1) conviene definir la amplitud de dispersión  $f$  de manera que la sección eficaz (en el sistema del centro de masa) sea

$$d\sigma = |\langle \mathbf{n}'\lambda' | f | \mathbf{n}\lambda \rangle|^2 d\omega \quad (69.12)$$

[comparando con (65.19), cabe vincular esta amplitud con el elemento de matriz  $M_{fi}$ . Escribiremos su desarrollo en amplitudes parciales en la forma

$$\langle \mathbf{n}'\lambda' | f | \mathbf{n}\lambda \rangle = \sum_{JM} (2J+1) D_{\Lambda'M}^{(J)}(\mathbf{n}') D_{\Lambda M}^{(J)*}(\mathbf{n}) \langle \lambda' | f^J | \lambda \rangle, \quad (69.13)$$

o bien, eligiendo el eje  $z$  en la dirección de  $\mathbf{n}$ :

$$\langle \mathbf{n}'\lambda' | f | \mathbf{n}\lambda \rangle = \sum_J (2J+1) D_{\Lambda'\Lambda}^{(J)}(\mathbf{n}') \langle \lambda' | f^J | \lambda \rangle. \quad (69.14)$$

Esta fórmula constituye la generalización del desarrollo ordinario en amplitudes parciales para la dispersión de partículas sin spin [véase III (122.13)]. Dado que  $D_{00}^{(L)} = P_L(\cos \theta)$ , para spins iguales a cero (69.14) se reduce al desarrollo en polinomios de Legendre

$$f(\theta) = \sum_L (2L+1) f_L P_L(\cos \theta).$$

La sección eficaz (69.12) corresponde al caso en que todas las partículas poseen

helicidades determinadas. Pero si las partículas se encuentran en estados de polarización del tipo mezcla, la sección eficaz se obtiene promediando el producto

$$\langle \lambda_c \lambda_d | f | \lambda_a \lambda_b \rangle \langle \lambda'_c \lambda'_d | f' | \lambda'_a \lambda'_b \rangle^*$$

respecto de las matrices densidad de polarización de las partículas

$$\langle \lambda_a | \rho^{(a)} | \lambda'_a \rangle \langle \lambda_b | \rho^{(b)} | \lambda'_b \rangle \langle \lambda'_c | \rho^{(c)} | \lambda_c \rangle \langle \lambda'_d | \rho^{(d)} | \lambda_d \rangle$$

(véase la nota en la página 183). Así, para la reacción entre dos partículas no polarizadas  $a, b$  que conduce a la formación de partículas asimismo no polarizadas  $c, d$ , obtendremos

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{(2s_a + 1)(2s_b + 1)} \sum_{(\lambda)} \sum_{JJ'} (2J+1)(2J'+1) \langle \lambda_c \lambda_d | f^J | \lambda_a \lambda_b \rangle \times \\ \times \langle \lambda_c \lambda_d | f'^{J'} | \lambda_a \lambda_b \rangle^* D_{\Lambda'\Lambda}^{(J')}(\mathbf{n}') D_{\Lambda'\Lambda}^{(J')*}(\mathbf{n}) \quad (69.15)$$

(el eje  $z$  está orientado en la dirección de  $\mathbf{n}$ , el signo  $\Sigma_{(\lambda)}$  representa la suma respecto de  $\lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d$ ). Substituyendo la función  $D_{\Lambda'\Lambda}^{(J')*}$  de acuerdo con (a, 12) y utilizando luego el desarrollo (b, 2) se obtendrá finalmente

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{(2s_a + 1)(2s_b + 1)} \sum_{(\lambda)} \sum_{JJ'} (-1)^{\Lambda - \Lambda'} (2J+1)(2J'+1) \langle \lambda_c \lambda_d | f^J | \lambda_a \lambda_b \rangle \times \\ \times \langle \lambda_c \lambda_d | f'^{J'} | \lambda_a \lambda_b \rangle^* \sum_L (2L+1) \begin{pmatrix} J & J' & L \\ \Lambda & -\Lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & J' & L \\ \Lambda' & -\Lambda' & 0 \end{pmatrix} P_L(\cos \theta) \quad (69.16)$$

( $\theta$  es el ángulo formado por  $\mathbf{n}'$  y el eje  $z$ ); la suma respecto de  $L$  se extiende a todos los valores enteros que resultan de la composición vectorial de  $J$  y  $J'$ . El desarrollo de la amplitud de dispersión en amplitudes parciales tiene por completo en cuenta todas las propiedades de la distribución angular de la dispersión ligadas con la simetría respecto de las rotaciones espaciales. Sin embargo, no tiene en cuenta de manera explícita las propiedades vinculadas con la simetría respecto de la inversión espacial. La invariancia  $P$  (si la interacción la posee) conduce a determinadas relaciones entre las distintas amplitudes de helicidad (véase a continuación, § 70).

### § 70. Simetría de las amplitudes helicoidales de dispersión

Las condiciones que impone la simetría respecto de las transformaciones  $P, T, C$  (sí, claro está, el proceso de interacción dado entre partículas posee en efecto esta simetría), conducen al establecimiento de determinadas relaciones entre las diferentes amplitudes helicoidales de dispersión y disminuyen con ello el número de amplitudes independientes \*.

\* El número de amplitudes independientes no depende en sí, naturalmente, de la representación concreta de la matriz  $S^J$  y es el mismo cualquiera que sea la elección de variables de spin.

Para establecer estas relaciones, pongamos antes en claro las propiedades de simetría de los estados de helicidad de un sistema de dos partículas.

Consideremos las partículas en el sistema de su centro de masa. Una de ellas posee el impulso  $\mathbf{p}_1 \equiv \mathbf{p}$  y la helicidad  $\lambda_1$  respecto de la dirección de  $\mathbf{p}$ , y la otra, el impulso  $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}$  y la helicidad  $\lambda_2$  respecto de la dirección de  $-\mathbf{p}$ . Pero si se trata de determinar la helicidad de ambas partículas respecto de una misma dirección, la de  $\mathbf{p}$ , éstas serán  $\lambda_1$  y  $-\lambda_2$ . De acuerdo con esto, dichas partículas se representarán por ondas planas con amplitudes  $u_p^{(\lambda_1)}$  y  $u_p^{(-\lambda_2)}$ . En cambio, el sistema constituido por ambas partículas se representa por una función (de varias componentes)  $u_p^{(\lambda_1 \lambda_2)}$  formada a partir de los productos de las amplitudes  $u_p^{(\lambda_1)}$  y  $u_p^{(-\lambda_2)}$ .

Considerando ahora el sistema como una única partícula de helicidad  $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2$  en la dirección  $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ , podemos escribir la función de onda (en la representación de impulsos, es decir, como función de  $\mathbf{n}$ ) para el estado con valores determinados  $J$ ,  $M$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  (y también con energía total  $\varepsilon$ ):

$$\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = u_p^{(\lambda_1 \lambda_2)} D_{\Lambda M}^{(J)}(\mathbf{n}) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}, \quad \Lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \quad (70.1)$$

[cf. (69.8)]. Dado que  $\Lambda$  es la proyección del momento cinético total sobre  $\mathbf{p}$ , debe ser

$$|\Lambda| \leq J. \quad (70.2)$$

Según (16.14), en la inversión

$$P u^{(\lambda_1 \lambda_2)}(\mathbf{n}) = \eta_1 \eta_2 u^{(\lambda_1 \lambda_2)}(-\mathbf{n}) = \eta_1 \eta_2 (-1)^{s_1 + s_2 - \lambda_1 + \lambda_2} u^{(-\lambda_1 - \lambda_2)}(\mathbf{n}), \quad (70.3)$$

donde  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  son las paridades intrínsecas de las partículas. Utilizando también (16.10), encontramos la ley de transformación de las funciones (70.1):

$$P \psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = \eta_1 \eta_2 (-1)^{s_1 + s_2 - J} \psi_{JM - \lambda_1 - \lambda_2}. \quad (70.4)$$

Si ambas partículas son idénticas, se plantea la cuestión de cuál sea la simetría respecto de su permutación. Permutar las partículas significa permutar sus impulsos y sus spins. Para poner de manifiesto el sentido de esta operación cuando se aplica a la función (70.1), observemos que, en su definición, va implícita una asimetría que consiste en que los momentos cinéticos de ambas partículas se proyectan sobre la dirección de un mismo vector  $\mathbf{p}_1 \equiv \mathbf{p}$  — es decir, sobre el impulso de una de ellas (la primera). Después de la permutación, el puesto de este vector lo ocupa el vector  $\mathbf{p}_2 \equiv -\mathbf{p}$ ; las proyecciones de los momentos  $\mathbf{j}_1$  y  $\mathbf{j}_2$  sobre él serán  $-\lambda_1$  y  $\lambda_2$  (en vez de las proyecciones  $\lambda_1$  y  $-\lambda_2$  sobre  $\mathbf{p}$ ). Por ello, el resultado de aplicar el operador permutación de las partículas ( $P_{12}$ ) a la función (70.1) se puede representar mediante la fórmula

$$P_{12} \psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = u^{(-\lambda_2 - \lambda_1)}(-\mathbf{n}) D_{\Lambda M}^{(J)}(-\mathbf{n}) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}$$

(donde, como antes,  $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ ). Utilizando luego (70.3) y (16.10), se encuentra

$$P_{12}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = (-1)^{2s} - J\psi_{JM\lambda_2\lambda_1}, \quad (70.5)$$

donde  $s_1 = s_2 \equiv s$ .

Para partículas idénticas son admisibles sólo los estados simétricos (para bosones) o los antisimétricos (para fermiones) respecto de la permutación. Dado que el primer caso se presenta para spin de las partículas  $s$  entero, y el segundo, para spin semientero, en ambos casos los estados de helicidad admisibles del sistema de dos partículas se pueden escribir como combinaciones lineales.

$$[1 + (-1)^{2s} P_{12}] \psi_{JM\lambda_1\lambda_2}$$

o bien, según (70.5),

$$\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} + (-1)^J \psi_{JM\lambda_2\lambda_1}. \quad (70.6)$$

Es notable que esta combinación tiene la misma forma para bosones y para fermiones.

Para un sistema formado por partículas y antipartículas el resultado de la permutación se expresa por la misma fórmula (70.5). Sin embargo, en contraste con el caso de partículas idénticas, aquí son admisibles estados de una y otra simetría, es decir, ambas combinaciones

$$\psi^\pm = \psi_{JM\lambda_1\lambda_2} \pm (-1)^J \psi_{JM\lambda_2\lambda_1}. \quad (70.7)$$

Estos estados poseen paridades de carga determinadas  $C$ . La operación de conjugación de carga se puede representar como resultado de la permutación completa de todas las variables (de spin y de carga) de las dos partículas seguida de la permutación inversa de las variables de spin (de las helicidades). El resultado de la primera operación debe coincidir con el resultado de la permutación en un sistema de dos partículas idénticas. Es claro por esto, que cuando vale el signo superior en (70.7) [que coincide con el signo en un estado admisible para partículas idénticas (70.6)] el sistema será par respecto de la carga, y cuando valga el signo inferior, impar respecto de la misma

$$C\psi^\pm = \pm \psi^\pm.$$

Finalmente, consideremos la operación inversión del sentido del tiempo. La función de onda de una partícula en reposo cuyo spin es  $s$  y con proyección  $\sigma$  del mismo se transforma de acuerdo con

$$T\psi_{ss} = (-1)^{s-\sigma} \psi_{s,-\sigma}$$

[véase III (60.2)]. La función de onda de dos partículas en el sistema de su centro de masa se puede considerar también (en relación con sus propiedades de transformación) como función de onda de una «partícula en reposo» de momento cinético  $J$  y proyección  $M$  del mismo. En lo que concierne a las helicidades  $\lambda_1, \lambda_2$ , éstas no cambian: la inversión del tiempo cambia de signo los vectores impulso y momento cinético y, en consecuencia, los productos  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{p}$  no cambian. Así, pues,

$$T\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = (-1)^{J-M}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2}. \quad (70.8)$$

Es ahora posible escribir sin más las relaciones de simetría para las amplitudes de helicidad.

Si la interacción es invariante-*P*, para la reacción



deben coincidir (para *J* y  $\varepsilon$  dados) las amplitudes de las transiciones

$$|\lambda_a\lambda_b\rangle \rightarrow |\lambda_c\lambda_d\rangle \quad \text{y} \quad P|\lambda_a\lambda_b\rangle \rightarrow P|\lambda_c\lambda_d\rangle.$$

Utilizando (70.4), se encuentra por ello que

$$\begin{aligned} \langle\lambda_c\lambda_d|S^J|\lambda_a\lambda_b\rangle &= \\ &= \frac{\eta_c\eta_d}{\eta_a\eta_b}(-1)^{s_c+s_d-s_a-s_b}\langle-\lambda_c, -\lambda_d|S^J|-\lambda_a, -\lambda_b\rangle. \end{aligned} \quad (70.9)$$

Pero si en vez de estados con helicidad determinada se eligen estados con determinadas paridades, es decir, las combinaciones

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} \pm P\psi_{JM\lambda_1\lambda_2})$$

(donde  $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_a\lambda_b$  o  $\lambda_c\lambda_d$ ), se anularán las amplitudes de las transiciones en que no se conserve la paridad.

La inversión del tiempo transforma cada estado según (70.8) y, además, permuta entre sí los estados inicial y final. En consecuencia, la invariancia-*T* conduce a las relaciones

$$\langle\lambda_c\lambda_d|S^J(\varepsilon)|\lambda_a\lambda_b\rangle = \langle\lambda_a\lambda_b|S^J(\varepsilon)|\lambda_c\lambda_d\rangle. \quad (70.10)$$

Estas dos amplitudes, sin embargo, se refieren a procesos distintos (a la reacción directa y a la inversa). Tan sólo en el caso de dispersión elástica ambos procesos coinciden esencialmente, y entonces (70.10) constituye una determinada relación entre las amplitudes helicoidales de una misma reacción.

En la dispersión elástica de dos partículas idénticas el número de amplitudes diferentes disminuye aún más en virtud de la simetría de permutación. Vimos que, para *J* dado, se presenta únicamente o bien estados simétricos respecto de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  o bien únicamente estados antisimétricos. Por este motivo, la conservación del momento cinético significa automáticamente que se conserva también la simetría respecto de la permutación de las helicidades.

Una situación análoga se presenta en la dispersión elástica de una partícula por la antipartícula asociada (o en la conversión de un tal par en otro par, es decir, en una reacción de la forma  $a + \bar{a} \rightarrow b + \bar{b}$ ). Para *J* dado, existen tanto estados simétricos respecto de  $\lambda_1, \lambda_2$ , como estados antisimétricos, pero a estos estados corresponden valores diferentes de la variable carga del sistema. De aquí se sigue que si la interacción de las partículas es invariante-*C*, de modo que la paridad

de carga se conserva, las transiciones entre estados de diferente simetría respecto de  $\lambda_1, \lambda_2$  están prohibidas\*. Hay que subrayar, sin embargo, la diferencia respecto del caso de partículas idénticas, caso en que, para cada  $J$  dado, no existen los estados de una de las dos simetrías. En cambio, en el caso «partícula-antipartícula» están prohibidas únicamente las transiciones entre estados de diferente simetría, si bien estos estados existen de suyo (para cada  $J$ ).

En virtud de la invariancia universal  $CPT$ , el que se cumpla la invariancia  $T$  significa que también existe la invariancia  $CP$ . Esta última conduce a la igualdad de las amplitudes de las reacciones, una de las cuales resulta de la otra substituyendo todas las partículas por sus antipartículas (y cambiando el signo de las helicidades):

$$\langle \lambda_c \lambda_d | S^J | \lambda_a \lambda_b \rangle = \langle \lambda_c \lambda_{\bar{d}} | S^J | \lambda_{\bar{a}} \lambda_{\bar{b}} \rangle, \quad (70.11)$$

igualdad en la que  $\lambda_{\bar{a}} = -\lambda_a, \dots$  \*\*.

El número de amplitudes independientes es el mismo para todos los canales cruzados de una misma reacción generalizada; por ello, para determinar este número cabe considerar uno cualquiera de los canales. Así, por el mismo número de amplitudes independientes se representan la dispersión elástica y la aniquilación,  $a + b \rightarrow a + b$  y  $a + \bar{a} \rightarrow b + \bar{b}$ . Además, las limitaciones impuestas en el primer caso por la invariancia- $T$  son equivalentes a las que impone en el segundo caso la invariancia- $C$ .

Analicemos aún la reacción en la que una partícula se desintegra en dos:  $a \rightarrow b + c$ . En el sistema del centro de masa (que es el sistema de reposo de la partícula  $a$ ) se tiene  $\mathbf{p}_b = -\mathbf{p}_c$ . Multiplicando por  $\mathbf{p}_b$  la igualdad  $\mathbf{j}_a = \mathbf{j}_b + \mathbf{j}_c$ , obtendremos

$$\lambda_a = \lambda_b - \lambda_c \quad (70.12)$$

(la helicidad  $\lambda_a$  de la partícula primaria se define por la proyección de su spin sobre la dirección del impulso de una de las partículas secundarias). Esta relación, por así decirlo, es consecuencia de una simetría adicional que posee el proceso en cuestión: la simetría axial en torno de la dirección de  $\mathbf{p}_b$  y  $\mathbf{p}_c$ . Si el spin de la partícula primaria es  $s_a < s_b + s_c$ , la relación (70.12) disminuye el número de conjuntos posibles de valores y, con ello, el número de amplitudes de helicidad independientes para la desintegración. El momento cinético total  $J$  coincide en este caso con el spin de la partícula primaria  $s_a$ , de modo que es una cantidad fija.

La invariancia- $P$  en la desintegración se expresa por la relación

\* Una prohibición análoga puede surgir también como consecuencia de la invariancia isotópica de la interacción entre partículas no idénticas. Si se tiene en cuenta esta invariancia, están prohibidas las transiciones entre estados con simetría diferente respecto de  $\lambda_1, \lambda_2$  en la dispersión de un neutrón por un protón.

\*\* Dado que estas dos amplitudes se refieren a reacciones distintas, por lo que es imposible la interferencia entre ellas, el factor de fase (70.11) carecería en general de sentido y lo podemos igualar a 1. Únicamente posee significado real la igualdad entre secciones eficaces que se deduce de (70.11).

$$\langle \lambda_b \lambda_c | S^J | \lambda_a \rangle = \frac{\eta_b \eta_c}{\eta_a} (-1)^{s_a - s_b - s_c} \langle -\lambda_b, -\lambda_c | S^J | -\lambda_a \rangle \quad (70.13)$$

[aquí se utiliza, junto con (70.4), también la ley de transformación de la función de onda de una sola partícula (16.16)].

Si la partícula primaria es realmente neutra, aparecen nuevas limitaciones si se conserva la paridad- $C$ . Hay que distinguir aquí tres casos. Si los productos de desintegración son también realmente neutros, debe tenerse  $C_a = C_b C_c$ ; esta condición o prohíbe en absoluto la desintegración o queda satisfecha, sin conducir a nuevas limitaciones. Si las partículas  $b$  y  $c$  son del todo diferentes, la invariancia- $C$  establece una relación entre las amplitudes de los diferentes procesos  $a \rightarrow b + c$  y  $a \rightarrow \bar{b} + \bar{c}$ . Finalmente, para la desintegración  $a \rightarrow b + \bar{b}$  nos encontramos con una limitación ligada a que, para una paridad de carga dada  $C$  y un momento cinético total dado  $J = s_a$ , el sistema puede encontrarse solamente o en estados simétricos respecto de la helicidad o en estados antisimétricos, según sea la paridad del número  $J$  y el signo de  $C$ .

La invariancia- $CP$  conduce a la igualdad de las amplitudes de las desintegraciones  $a \rightarrow b + c$  y  $\bar{a} \rightarrow \bar{b} + \bar{c}$ :

$$\langle \lambda_b \lambda_c | S^J | \lambda_a \rangle = \langle \lambda_{\bar{b}} \lambda_{\bar{c}} | S^J | \lambda_{\bar{a}} \rangle \quad (70.14)$$

(donde  $\lambda_{\bar{a}} = -\lambda_a, \dots$ ), es decir, a la igualdad de las probabilidades de desintegración de las partículas y de las antipartículas. Si la partícula puede desintegrarse de diferentes modos (es decir, según canales distintos), esta igualdad vale para cada uno de los canales. Hay que subrayar, sin embargo, que este resultado presupone que se cumpla la invariancia- $CP$ , invariancia que no es una propiedad universal de la naturaleza. Tan sólo la invariancia- $CPT$  tiene carácter universal; esta condición de invariancia conduciría de suyo tan sólo a la igualdad

$$\langle \lambda_b \lambda_c | S^J | \lambda_a \rangle = \langle \lambda_{\bar{a}} | S^J | \lambda_{\bar{b}} \lambda_{\bar{c}} \rangle,$$

en la cual el segundo miembro se refiere al proceso inverso del de desintegración. Veremos más adelante (§ 72) que la condición de invariancia- $CPT$ , junto con la condición de unitariedad, conduce, sin embargo, a una relación para la probabilidad de desintegración de una partícula y de una antipartícula, si bien más limitada.

### PROBLEMAS

1. Mediante (70.6) obtener una clasificación de los estados posibles del sistema de dos fotones.

*Solución.* En este caso  $\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1$ . Para valores  $J$  pares ( $J > 0$ ), según (70.6) son admisibles tres estados simétricos respecto de  $\lambda_1 \lambda_2$ :

$$a) \psi_{JM11}, \quad b) \psi_{JM-1-1}, \quad c) \psi_{JM1-1} + \psi_{JM-11}.$$

Para valores  $J$  impares (con  $J > 1$ ) es admisible sólo un estado antisimétrico

$$d) \psi_{JM1-1} - \psi_{JM-11}.$$

Los estados c) y d) poseen a la vez determinada paridad (+ 1): según (70.4),

$$P(\psi_{JM1-1} \pm \psi_{JM-11}) = \pm (-1)^J (\psi_{JM1-1} \pm \psi_{JM-11});$$

el factor  $\pm (-1)^J = 1$ , ya que el signo superior se refiere a valores de  $J$  pares, y el inferior, a valores impares. En cambio, los estados a) y b) no poseen de suyo una paridad determinada, pero formando a partir de ellos las combinaciones

$$a') \psi_{JM11} + \psi_{JM-1-1}, \quad b') \psi_{JM11} - \psi_{JM-1-1},$$

obtendremos estados pares e impares. Para  $J = 0$  son admisibles (en virtud de la condición  $|\lambda_1 - \lambda_2| \leq J$ ) solamente los valores  $\lambda_1 = \lambda_2$ , de modo que el estado c) desaparece y subsisten solamente un estado par a') y un estado impar b'). Finalmente, cuando  $J = 1$  el único estado admisible para valores de  $J$  impares, el estado d), está prohibido, ya que para él  $\lambda = 2 > J$ . De esta manera llegamos a la tabla de estados admisibles (9.5).

2. En la aproximación no-relativista, el momento cinético total  $J$  del sistema resulta de la composición del spin  $S$  y del momento cinético orbital  $L$ . Para un sistema de dos partículas, hallar la relación entre los estados  $|JLSM\rangle$  y  $|JM\lambda_1\lambda_2\rangle$ .

*Solución.* Según la regla de formación de las funciones de onda en la composición de momentos cinéticos, se tiene

$$\psi_{JLSM} = \sum \{ \psi_{s_1\sigma_1} \psi_{s_2\sigma_2} C_{\sigma_1\sigma_2}^{SM_S} \} \psi_{LM_L} C_{M_L M_S}^{JM}. \quad (1)$$

Las  $\psi_{s\sigma}$  son aquí funciones propias del spin  $s$  con proyección  $\sigma$  (sobre un eje fijo  $z$ ), y  $\psi_{LM_L}$ , las funciones correspondientes al momento cinético orbital  $L$  con proyección  $M_L$ ; la expresión entre paréntesis corresponde a la composición de  $s_1$  y  $s_2$  para formar  $S$ , hecho lo cual  $S$  se compone con  $L$  para dar lugar a  $J$ ; la suma se extiende a todos los índices- $m$ . Expresemos todas las funciones en la representación de impulsos como funciones de la dirección  $\mathbf{n}$  (del impulso  $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_1$ ), expresando las funciones  $\psi_{s\sigma}$  como combinación de funciones de estados de helicidad  $\psi_{n\lambda}$  mediante (a, 1):

$$\begin{aligned} \psi_{s_1\sigma_1} &= \sum_{\lambda_1} D_{\lambda_1\sigma_1}^{(s_1)}(\mathbf{n}) \psi_{n\lambda_1}, \\ \psi_{s_2\sigma_2} &= \sum_{\lambda_2} D_{-\lambda_2\sigma_2}^{(s_2)}(\mathbf{n}) \psi_{n, -\lambda_2}. \end{aligned}$$

Para la función  $\psi_{LM_L}$ , en cambio, tenemos

$$\psi_{LM_L} = Y_{LM_L}(\mathbf{n}) = i^L \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} D_{0M_L}^{(L)}(\mathbf{n})$$

[se han utilizado (a, 18) y la definición (16.5)]. Substituyendo estas funciones en (1) y aplicando dos veces el desarrollo (b, 1), como también la propiedad de ortogonalidad de los coeficientes de Clebsch-Gordan III (106.13), se obtiene en definitiva  $\psi_{JLSM}$  en forma de desarrollo

$$\psi_{JLSM} = \sum_{\lambda_1\lambda_2} \psi_{JM\lambda_1\lambda_2} \langle JM\lambda_1\lambda_2 | JLSM \rangle, \quad (2)$$

donde

$$\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = \psi_{n\lambda_1} \psi_{n, -\lambda_2} D_{\Lambda M}^{(J)}(\mathbf{n}) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}, \quad \Lambda = \lambda_1 - \lambda_2,$$

con los coeficientes dados por

$$\begin{aligned} \langle JM\lambda_1\lambda_2 | JLSM \rangle &= \\ &= (-i)^L (-1)^{s_1 - s_2 + S} \sqrt{(2L+1)(2S+1)} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & S \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & S & J \\ 0 & \Lambda & -\Lambda \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

En virtud del carácter unitario de la transformación (2) se tiene

$$\langle JLSM | JM\lambda_1\lambda_2 \rangle = \langle JM\rangle_1\lambda_2 | JLSM \rangle^*.$$

3. Determinar el número de amplitudes parciales independientes para los siguientes procesos de dispersión: a)  $\pi + N \rightarrow \pi + N$ , b)  $\gamma + \pi \rightarrow \gamma + \pi$ , c)  $\gamma + N \rightarrow \gamma + N$ , d)  $e + N \rightarrow e + N$ , e)  $v + e \rightarrow v + e$ , f)  $p + \gamma \rightarrow n + \pi^+$ , g)  $N + N \rightarrow N + N^*$ .

*Solución.* a), b). El número total de elementos de la matriz  $S^J$  (es decir, el número de conjuntos diferentes de números  $\lambda_1\lambda_2\lambda'_1\lambda'_2$ ) es  $N = 4$ . Teniendo en cuenta la invariancia- $P$ , el número de elementos independientes se reduce a  $N_P = 2$ ; si se tiene en cuenta la invariancia- $T$ , dicho número se reduce a  $N_T = 3$  y si se tienen en cuenta una y otra, a  $N_{PT} = 2$ .

c), d)  $N = 16$ ,  $N_P = 8$ ,  $N_T = 10$ ,  $N_{PT} = 6$ .

e)  $N = 4$ ,  $N_T = 3$ .

f)  $N = 8$ ,  $N_P = 4$ .

g) Para efectuar la cuenta conviene partir de las combinaciones lineales de estados de helicidad:

$$\psi_{1g} = \psi_{++} + \psi_{--}, \quad \psi_{2g} = \psi_{++} - \psi_{--}, \quad \psi_{sg} = \psi_{+-} + \psi_{-+}, \quad \psi_u = \psi_{+-} - \psi_{-+},$$

donde los índices  $\pm$  indican los signos de las helicidades ( $\pm 1/2$ ) de las dos partículas. Los estados  $1g$ ,  $2g$ ,  $3g$  son pares, y el estado  $u$  es impar respecto de la permutación de las partículas. En consecuencia, las transiciones  $g \leftrightarrow u$  están prohibidas, de modo que, teniendo en cuenta la simetría de permutación, queda  $N = 16 - 6 = 10$ . Respecto de la inversión- $P$  las funciones  $\psi_{1g}$ ,  $\psi_{sg}$  y  $\psi_{2g}$ ,  $\psi_u$  tienen paridades opuestas [ $(-1)^{J+1}$  y  $(-1)^J$ , respectivamente]; la prohibición de las transiciones entre ellas reduce el número de amplitudes independientes a  $N_P = 6$ . Finalmente, la invariancia- $T$  hace que coincidan las amplitudes  $1g \rightarrow 3g$ ,  $3g \rightarrow 1g$ , de modo que  $N_{PT} = 5$ .

### § 71. Amplitudes invariantes

En las amplitudes de helicidad se utiliza un determinado sistema de referencia —el sistema del centro de masa—. En cambio, en el cálculo de las amplitudes de dispersión fundado en la teoría invariante de perturbaciones (y también para investigar sus propiedades analíticas generales) conviene escribir las amplitudes en forma explícitamente invariante.

Si las partículas que intervienen en la reacción carecen de spin, la amplitud de dispersión depende tan sólo de los productos invariantes de los 4-impulsos de las partículas. Para una reacción de la forma

$$a + b \rightarrow c + d \tag{71.1}$$

se puede elegir para tales invariantes dos cualesquiera de las magnitudes  $s$ ,  $t$ ,  $u$ , definidas en el § 67. Entonces, la amplitud de dispersión se reduce a una única función  $M_{fi} = f(s, t)$ .

Pero si las partículas poseen spin, junto con los invariantes cinemáticos  $s$ ,  $t$ ,  $u$ , tenemos también los invariantes que se pueden construir mediante las amplitudes de onda de las partículas (bispinores, 4-tensores, etc.). Las amplitudes de dispersión deben entonces tener la forma

\* En estos ejemplos importan tan sólo, claro está, los spins de las partículas y la simetría de su interacción mutua.

$$M_{fi} = \sum_n f_n(s, t) F_n, \quad (71.2)$$

donde  $F_n$  son invariantes que dependen linealmente de las amplitudes de onda de todas las partículas que intervienen en la reacción (y también de sus 4-impulsos). Los coeficientes  $f_n(s, t)$  se llaman *amplitudes invariantes*.

Eliriendo las amplitudes de onda de modo que correspondan a partículas con helicidades determinadas, obtendremos valores determinados de los invariantes  $F_n = F_n(\lambda_i, \lambda_f)$ . Las amplitudes de helicidad de la dispersión aparecen entonces en forma de combinaciones lineales homogéneas de las amplitudes invariantes  $f_n$ . Es evidente por ello que el número de funciones independientes  $f_n(s, t)$  coincide con el número de amplitudes de helicidad independientes. Dado que es fácil determinar el número de éstas (conforme se explicó en el § 70), al mismo tiempo se simplifica con ello el problema de construir los invariantes  $F_n$ : sabemos a priori cuántos de ellos debe haber.

Consideremos algunos ejemplos. En todos supondremos que la interacción es invariante- $T$  e invariante- $P$ ; esta última propiedad significa que los invariantes  $F_n$  deben ser escalares en sentido estricto (y no pseudoescalares).

1) Dispersión de una partícula de spin 0 por una partícula de spin 1/2. El número de invariantes es igual a 2 (véase el problema 3, § 70). Como a tales cabe elegir

$$F_1 = \bar{u}' u, \quad F_2 = \bar{u}' \hat{K} u, \quad (71.3)$$

donde  $u = u(p)$ ,  $u' = u(p')$  son amplitudes bispinoriales del fermión inicial y final;  $K = k + k'$ , donde  $k$  y  $k'$  son los 4-impulsos de los bosones inicial y final\*.

La invariancia- $T$  de las magnitudes (71.3) puede comprobarse fácilmente de modo inmediato. La inversión del tiempo permuta los estados inicial y final y sustituye las amplitudes  $u(p)$  por las « inversas respecto del tiempo »:

$$\bar{u}^T = U_T \bar{u}, \quad \bar{u}'^T = -U_T^\dagger u$$

[véase (28.5)]. Por ello,

$$\bar{u}' u \rightarrow \bar{u}^T u'^T = - (U_T^\dagger u) (U_T \bar{u}') = - \bar{u}' \tilde{U}_T U_T^\dagger u = \bar{u}' U_T U_T^\dagger u = \bar{u}' u,$$

con lo que queda demostrada la invariancia- $T$  de  $F_1$ . De manera análoga, tenemos

$$\bar{u}' \gamma^\mu u \rightarrow \bar{u}^T \gamma^\mu u'^T = - (U_T^\dagger u) \gamma^\mu (U_T \bar{u}') = \bar{u}' U_T \tilde{\gamma}^\mu U_T^\dagger u,$$

o teniendo en cuenta (26.12) \*\*

\* A primera vista podría formarse todavía un invariante del tipo

$$\bar{u}' \sigma_{\mu\nu} k^\mu k^\nu u.$$

Sin embargo, es fácil comprobar que éste se reduce a los invariantes (71.3) si se tiene en cuenta la ley de conservación  $k' = p + k - p'$  y las ecuaciones  $\hat{p} u = mu$ ,  $\bar{u}' \hat{p}' = m\bar{u}'$ , a que satisfacen las amplitudes bispinoriales.

\*\* Estas leyes de transformación se siguen también, naturalmente, del comportamiento, puesto de manifiesto en el § 28, en la inversión del tiempo de los operadores  $\bar{\Psi} \psi$ ,  $\bar{\Psi}^\mu \psi$ , cuyos elementos de matriz son precisamente los productos  $\bar{u}' u$ ,  $\bar{u}' \gamma^\mu u$ .

$$\bar{u}'\gamma^0 u \rightarrow \bar{u}'\gamma^0 u, \quad \bar{u}'\gamma u \rightarrow -\bar{u}'\gamma u.$$

De la misma manera se transforman los 4-impulsos:  $(K^0, \mathbf{K}) \rightarrow (K^0 - \mathbf{K})$ , y el producto escalar  $F_2 = K_\mu(\bar{u}'\gamma^\mu u)$ , por consiguiente, es invariante.

2) Dispersión elástica de dos partículas idénticas de spin 1/2. Existen 5 invariantes independientes, para los cuales cabe elegir

$$\begin{aligned} F_1 &= (\bar{u}'_1 u_1)(\bar{u}'_2 u_2), \quad F_2 = (\bar{u}'_1 \gamma^\mu u_1)(\bar{u}'_2 \gamma^\mu u_2), \\ F_3 &= (\bar{u}'_1 \gamma^\mu u_1)(\bar{u}'_2 \gamma_\mu u_2), \quad F_4 = (\bar{u}'_1 \gamma^\mu \gamma^\nu u_1)(\bar{u}'_2 \gamma_\mu \gamma^\nu u_2), \\ F_5 &= (\bar{u}'_1 \sigma^{\mu\nu} u_1)(\bar{u}'_2 \sigma_{\mu\nu} u_2), \end{aligned} \quad (71.4)$$

donde  $u_1, u_2$  son las amplitudes bispinoriales de las partículas iniciales, y  $\bar{u}'_1, u'_2$ , las de las finales. La permutación de las partículas iniciales (o de las finales) no conduce a nuevos invariantes: los nuevos invariantes se expresan en función de los antiguos (problema 1, § 28). Pero la expresión (71.2), con  $F_n$  dada por (71.4), no tiene en cuenta de manera explícita la condición que exige que la permutación de dos fermiones idénticos debe cambiar el signo de la amplitud de dispersión. Es posible escribir la expresión correspondiente que satisface a esta condición en la forma

$$M_{fi} = [(\bar{u}'_1 u_1)(\bar{u}'_2 u_2) f_1(t, u) - (\bar{u}'_2 u_1)(\bar{u}'_1 u_2) f_1(u, t)] + \dots \quad (71.5)$$

Al permutar  $p'_1$  y  $p'_2$  (o  $p_1$  y  $p_2$ ) los invariantes cinemáticos se transforman de acuerdo con:  $s \rightarrow s$ ,  $t \rightarrow u$ ,  $u \rightarrow t$ , de modo que la condición antes indicada se cumple automáticamente.

Consideremos aún dos ejemplos más: la dispersión elástica de un fotón por partículas de spin 0 ó 1/2. Es lógico expresar la amplitud de este proceso mediante los 4-vectores unitarios espaciales  $e^{(1)}, e^{(2)}$  que satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} e^{(1)\lambda} e^{(2)\lambda} &= e^{(2)\lambda} e^{(1)\lambda} = -1, & e^{(1)} e^{(2)} &= 0, \\ e^{(1)k} e^{(2)k} &= e^{(2)k} e^{(1)k} = 0, & e^{(1)k'} e^{(2)k'} &= e^{(2)k'} e^{(1)k'} = 0 \end{aligned} \quad (71.6)$$

(para cada uno de los dos fotones, el papel de estos 4-vectores pueden representarlo los 4-versores que permitieron conseguir la representación invariante de las propiedades de polarización de aquéllos — véase § 8).

Sean  $k$  y  $k'$  los 4-impulsos del fotón inicial y final y  $p$  y  $p'$  los correspondientes a la partícula dispersada. Consideremos los 4-vectores

$$\begin{aligned} P^\lambda &= p^\lambda + p'^\lambda - K^\lambda \frac{pK + p'K}{K^2}, \\ N^\lambda &= e^{\lambda\mu\nu\rho} P_\mu q_\nu K_\rho, \end{aligned} \quad (71.7)$$

donde

$$K = k + k', \quad q = p - p' = k' - k.$$

Es evidente que son ortogonales entre sí. También son ortogonales a los 4-vectores  $K$  y  $q$  y, por consiguiente, a  $k$ ,  $k'$ . Por ser ortogonales al 4-vector temporal  $K$  ( $K^2 = 2kk' > 0$ ), son del tipo espacial (en efecto, en el sistema de referencia en el cual  $K = 0$ , de  $KP = 0$  se sigue que  $P_0 = 0$  y, por lo tanto, que  $P^2 < 0$ ). Norma-

lizando  $P$  y  $N$ , es decir, formando los vectores

$$e^{(1)\lambda} = \frac{N^\lambda}{\sqrt{-N^2}}, \quad e^{(2)\lambda} = \frac{P^\lambda}{\sqrt{-P^2}}, \quad (71.8)$$

obtenemos un par de 4-vectores que poseen todas las propiedades exigidas. Obsérvese que  $e^{(2)}$  es un vector en sentido estricto, y  $e^{(1)}$  un pseudovector.

Representaremos la amplitud de dispersión del fotón en la forma

$$M_{fi} = F^{\lambda\mu} e_\lambda^{(1)*} e_\mu, \quad (71.9)$$

separando en ella los 4-vectores polarización  $e$  y  $e'$  de los fotones inicial y final.

3) Dispersión de un fotón por una partícula de spin 0. El tensor  $F^{\lambda\mu}$  de (71.9) ha de construirse exclusivamente a partir de los 4-impulsos de las partículas. Es posible representarlo en la forma

$$F^{\lambda\mu} = f_1 e^{(1)\lambda} e^{(1)\mu} + f_2 e^{(2)\lambda} e^{(2)\mu}, \quad (71.10)$$

donde  $f_1, f_2$  son amplitudes invariantes, cuyo número, en el presente caso, es igual a 2. Hay que prestar atención al hecho de que es imposible que en  $F^{\lambda\mu}$  aparezca un término con el producto  $e^{(1)\lambda} e^{(2)\mu}$ , ya que este producto es un pseudotensor y al substituirlo en (71.9) daría lugar a un pseudoescalar.

4) Dispersión de un fotón por una partícula de spin 1/2. Representemos el tensor  $F_{\lambda\mu}$  en la forma

$$\begin{aligned} F_{\lambda\mu} = G_0 (e_\lambda^{(1)} e_\mu^{(1)} + e_\lambda^{(2)} e_\mu^{(2)}) + G_1 (e_\lambda^{(1)} e_\mu^{(2)} + e_\lambda^{(2)} e_\mu^{(1)}) + \\ + G_2 (e_\lambda^{(1)} e_\mu^{(2)} - e_\lambda^{(2)} e_\mu^{(1)}) + G_3 (e_\lambda^{(1)} e_\mu^{(1)} - e_\lambda^{(2)} e_\mu^{(2)}), \end{aligned} \quad (71.11)$$

donde  $G_0, G_3$  son escalares, y  $G_1, G_2$ , pseudoescalares. Tanto unos como otros son bilineales respecto de las amplitudes bispinoriales de los fermiones  $\bar{u}(p')$  y  $u(p)$ , es decir, tienen la forma

$$G_n = \bar{u}(p') Q_n u(p). \quad (71.12)$$

La forma general de las matrices (respecto de los índices bispinoriales)  $Q_n$  es:

$$\begin{aligned} Q_0 &= f_1 + f_2 \hat{K}, & Q_1 &= \gamma^5 (f_3 + f_4 \hat{K}), \\ Q_2 &= \gamma^5 (f_5 + f_6 \hat{K}), & Q_3 &= f_7 + f_8 \hat{K}, \end{aligned} \quad (71.13)$$

donde  $K = k + k'$ . Los coeficientes  $f_1, \dots, f_8$  son amplitudes invariantes, cuyo número resulta ser aquí igual a 8 (en vez del número necesario de 6) debido a que todavía no se ha tenido en cuenta la condición de invariancia- $T$ .

La inversión del tiempo permuta los 4-impulsos de las partículas iniciales y finales, cambiando también los signos de sus componentes espaciales:

$$(k_0, \mathbf{k}) \leftrightarrow (k'_0, -\mathbf{k}'), \quad (p_0, \mathbf{p}) \leftrightarrow (p'_0, -\mathbf{p}'). \quad (71.14)$$

Los 4-vectores polarización de los fotones se transforman según la ley

$$(e_0, e) \leftrightarrow (e_0^*, -e^*) \quad (71.15)$$

[cf. (8, 11a)], de modo que

$$(e_0^* e_0, e_i^* e_0, e_i^* e_k) \rightarrow (e_0^* e_0, -e_0^* e_i, e_k^* e_i).$$

En virtud de esta última transformación, la condición de invariancia de la amplitud de dispersión (71.9) equivale a exigir que

$$(F_{00}, F_{i0}, F_{ik}) \rightarrow (F_{00}, -F_{0i}, F_{ki}).$$

Por otra parte, como consecuencia de las sustituciones (71.14) tenemos

$$\begin{aligned} (K_0, K) &\rightarrow (K_0, -K), \quad (q_0, q) \rightarrow (-q_0, q), \\ (P_0, P) &\rightarrow (P_0, -P), \quad (N_0, N) \rightarrow (N_0, -N), \end{aligned}$$

de modo que

$$(e_0^{(1,2)}, e^{(1,2)}) \rightarrow (e_0^{(1,2)}, -e^{(1,2)}). \quad (71.16)$$

De la expresión (71.11) se sigue, por lo tanto, que debe ser

$$G_{0,1,3} \rightarrow G_{0,1,3}, \quad G_3 \rightarrow -G_3.$$

Vimos antes que en la inversión del tiempo se tiene

$$\bar{u}' u \rightarrow \bar{u}' u, \quad \bar{u}' \hat{K} u \rightarrow \bar{u}' \hat{K} u. \quad (71.17)$$

De manera análoga se puede hallar que

$$\bar{u}' \gamma^5 u \rightarrow -\bar{u}' \gamma^5 u, \quad \bar{u}' \gamma^5 \hat{K} u \rightarrow \bar{u}' \gamma^5 \hat{K} u. \quad (71.18)$$

De las expresiones (71.12-13) se sigue ahora claramente que, en virtud de la invariancia- $T$  de la amplitud de dispersión, ha de ser

$$f_3 = f_6 = 0. \quad (71.19)$$

## § 72. La condición de unitariedad

La matriz de dispersión debe ser unitaria:  $SS^+ = 1$ , o bien en elementos de matriz

$$(SS^+)_{fi} = \sum_n S_{fn} S_{in}^* = \delta_{fi}, \quad (72.1)$$

donde el índice  $n$  numera todos los estados intermedios posibles \*. Es ésta la propiedad más general de la matriz- $S$ , propiedad que permite garantizar la conservación de la ortogonalidad y la normalización de los estados en una reacción (cf. III, § 124, 141). En particular, los elementos diagonales de la igualdad (72.1) expresan

\* El significado concreto del símbolo  $\delta_{fi}$  en (72.1) depende, naturalmente, de cuál sea la elección particular de números cuánticos y de la normalización de las funciones de onda del sistema. Hay que definirlo de manera que sea:  $\sum_f \delta_{fi} = 1$ .

simplemente el hecho de que la suma de las probabilidades de la transición del estado inicial dado a un estado final arbitrario es igual a la unidad:

$$\sum_n |S_{ni}|^2 = 1.$$

Substituyendo en (72.1) los elementos de matriz dados por (65.2), se obtendrá \*

$$T_{fi} - T_{if}^* = i(2\pi)^4 \sum_n \delta^{(4)}(P_f - P_n) T_{fn} T_{in}^*. \quad (72.2)$$

Conviene observar que el primer miembro de esta igualdad es lineal en los elementos de matriz de  $T$ , y el segundo miembro, cuadrático. Si la interacción (como, por ejemplo, la electromagnética) contiene un pequeño parámetro, el primer miembro será, por ello, de primer orden de pequeñez, y el segundo miembro, de segundo orden. Por consiguiente, en primera aproximación cabe prescindir de este último, con lo cual

$$T_{fi} = T_{if}^*, \quad (72.3)$$

es decir, la matriz  $T$  es hermítica.

Para dar a la condición de unitariedad (72.2) un aspecto más concreto hay que precisar qué se entiende exactamente por suma respecto de  $n$ . Hagámoslo para el caso de la colisión de dos partículas suponiendo, además, que las leyes de conservación permiten solamente la dispersión elástica; entonces también todos los estados intermedios en (72.2) serán estados de «dos partículas». La suma respecto de dichos estados significa la integración con relación a los impulsos intermedios  $\mathbf{p}_1'', \mathbf{p}_2''$  y la suma para los números cuánticos espinoriales (por ejemplo, las helicidades) de ambas partículas, que representaremos por  $\lambda''$ :

$$\sum_n = \int \frac{V^2 d^3 p_1'' d^3 p_2''}{(2\pi)^6} \sum_{\lambda''}.$$

Eliminando las funciones  $\delta$  de la misma manera como se hizo en el § 65, obtendremos la condición de unitariedad «para dos partículas» en la forma

$$T_{fi} - T_{if}^* = \frac{iV^2}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda''} \frac{|\mathbf{p}|}{\varepsilon} \int T_{fn} T_{in}^* \varepsilon_1'' \varepsilon_2'' d\sigma'',$$

donde  $\mathbf{p}$  es el impulso y  $\varepsilon$  es la energía total en el sistema del centro de masa. El volumen de normalización desaparece de esta relación después de pasar de las amplitudes  $T_{fi}$  a las amplitudes  $M_{fi}$  de acuerdo con (65.10):

\* Si se escribe la condición de unitariedad en la forma  $S^+ S = 1$  (con los factores  $S^+$  y  $S$  en el otro orden) (72.2), se presenta en la forma equivalente

$$T_{fi} - T_{if}^* = i(2\pi)^4 \sum_n \delta^{(4)}(P_f - P_n) T_{nf}^* T_{ni}. \quad (72.2a)$$

$$M_{fi} - M_{fi}^* = \frac{i}{(4\pi)^4} \sum_{\lambda''} \frac{|\mathbf{p}|}{\epsilon} \int M_{fn} M_{in}^* d\sigma'' \quad (72.4)$$

Definiremos la amplitud de dispersión elástica de manera que sea

$$d\sigma = |\langle n'\lambda' | f | n\lambda \rangle|^2 d\sigma' \quad (72.5)$$

( $n, n'$  son las direcciones de los impulsos inicial y final;  $\lambda, \lambda'$ , los números cuánticos espinoriales iniciales y finales) La comparación con (65.19) prueba que

$$\langle n'\lambda' | f | n\lambda \rangle = \frac{1}{8\pi\epsilon} M_{fi} \quad (72.6)$$

y la condición de unitariedad (72.4) toma la forma

$$\begin{aligned} \langle n'\lambda' | f | n\lambda \rangle - \langle n\lambda | f | n'\lambda' \rangle^* &= \\ &= \frac{i|\mathbf{p}|}{2\pi} \sum_{\lambda''} \int \langle n'\lambda' | f | n''\lambda'' \rangle \langle n\lambda | f | n''\lambda'' \rangle^* d\sigma'', \end{aligned} \quad (72.7)$$

que generaliza la conocida fórmula de la teoría no-relativista III (124.8).

Se llama amplitud de dispersión elástica a ángulo cero el elemento de matriz diagonal  $T_{ii}$  en el que el estado final de la partícula coincide con el inicial\*. Para esta amplitud la condición de unitariedad (72.2) toma la forma

$$2 \operatorname{Im} T_{ii} = (2\pi)^4 \sum_n |T_{in}|^2 \delta^{(4)}(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_n). \quad (72.8)$$

El segundo miembro de esta igualdad difiere únicamente en un factor de la sección eficaz total de todos los procesos posibles de dispersión que parten del estado inicial dado  $i$ ; designemos esta sección eficaz por  $\sigma_t$ . En efecto, sumando la probabilidad (65.5) respecto de los estados  $f$  y dividiendo por la densidad de flujo  $j$ , se encuentra

$$\sigma_t = \frac{(2\pi)^4 V}{j} \sum_n |T_{in}|^2 \delta^{(4)}(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_n),$$

de modo que

$$\frac{2V}{j} \operatorname{Im} T_{ii} = \sigma_t.$$

El volumen de normalización desaparece de aquí después de hacer

$$T_{ii} = M_{ii} (2\epsilon_1 V \cdot 2\epsilon_2 V)$$

( $\epsilon_1, \epsilon_2$  son las energías de las partículas en el sistema del centro de masa), y substituyendo la expresión (65.17) de  $j$  se obtiene:

$$\operatorname{Im} M_{ii} = 2 |\mathbf{p}| \varepsilon \sigma_t. \quad (72.9)$$

Esta fórmula expresa el contenido del llamado *teorema óptico*. Si se introduce la amplitud de dispersión elástica (72.6), adopta su forma ordinaria

\* Hay que subrayar que se trata precisamente de los elementos de la matriz  $T$ , y no de la  $S$ , es decir, los elementos de matriz se toman después de restar de  $S$  la matriz unidad.

$$\operatorname{Im} \langle \mathbf{n}\lambda | f | \mathbf{n}\lambda \rangle = \frac{|\mathbf{p}|}{4\pi} \sigma_f \quad (72.10)$$

[cf. III (139.10)].

Si la matriz  $S$  se da en la representación de momentos cinéticos (amplitudes parciales) y se tiene en cuenta que es diagonal respecto de  $J$ , la condición de unitariedad se escribe para cada valor de  $J$  por separado.

Así, si sólo es posible la dispersión elástica, la condición de unitariedad tiene la forma

$$\sum_{\lambda''} \langle \lambda' | S^J | \lambda'' \rangle \langle \lambda | S^J | \lambda'' \rangle^* = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (72.11)$$

En virtud de la invariancia- $T$ , la matriz de dispersión elástica es simétrica [cf. (70.10)] y, en consecuencia, se puede reducir a la forma diagonal. Efectuada esta reducción, la condición de unitariedad exige que los elementos diagonales sean iguales a la unidad en módulo; en tal caso, se suele escribirlos en la forma

$$S_n^J = \exp(2i\delta_{Jn}), \quad (72.12)$$

donde los  $\delta_{Jn}$  — que son constantes reales — dependen de la energía (el subíndice  $n$  numera los elementos diagonales para el valor dado de  $J$ ). En el caso general, cuando el número  $N$  de amplitudes independientes supera a la característica de la matriz (cuadrada)  $S^J$ , los coeficientes de la transformación que permite reducir  $S^J$  a la forma diagonal dependen de  $J$  y de  $E$  (en estos coeficientes, junto con los valores principales de la matriz, se incluyen entonces cantidades independientes equivalentes a las  $N$  cantidades de partida). Pero si el número  $N$  coincide con la característica de la matriz  $S^J$  (y, por ello, con el número de sus valores principales), los coeficientes de la diagonalización son universales. En tal caso, los estados que permite la diagonalización son estados con paridades determinadas (pero, claro está, sin poseer ya helicidades determinadas).

La condición (72.11), expresada mediante las amplitudes parciales  $\langle \lambda' | f^J | \lambda \rangle$  tiene la forma

$$\langle \lambda' | f^J | \lambda \rangle - \langle \lambda | f^J | \lambda' \rangle^* = 2i |\mathbf{p}| \sum_{\lambda''} \langle \lambda' | f^J | \lambda'' \rangle \langle \lambda | f^J | \lambda'' \rangle^*, \quad (72.13)$$

lo que es fácil comprobar substituyendo en (72.7) el desarrollo (69.13) y teniendo en cuenta el carácter ortogonal de las funciones  $D$ . Si se cumple la invariancia- $T$ , la matriz  $\langle \lambda' | f^J | \lambda \rangle$  es simétrica y (72.13) toma la forma

$$\operatorname{Im} \langle \lambda' | f^J | \lambda \rangle = |\mathbf{p}| \langle \lambda' | f^J f^J + | \lambda \rangle. \quad (72.14)$$

Si la matriz se ha diagonalizado, sus elementos diagonales son

$$f_n^J = \frac{1}{2i |\mathbf{p}|} (e^{2i\delta_{Jn}} - 1) = \frac{1}{|\mathbf{p}|} e^{i\delta_{Jn}} \sin \delta_{Jn}. \quad (72.15)$$

Finalmente, señalemos algunas consecuencias que se siguen de la condición de

unitariedad junto con la condición de que se cumpla la invariancia-*CPT*. En virtud de esta última

$$T_{fi} = T_{\bar{i}\bar{f}} \quad (72.16)$$

donde  $\bar{i}$  y  $\bar{f}$  son estados que difieren de  $i$  y  $f$  en la sustitución de todas las partículas por antipartículas (y también en el cambio de signo de los vectores momento cinético manteniendo invariables los impulsos). En particular, para los elementos diagonales se tiene

$$T_{ii} = T_{\bar{i}\bar{i}}.$$

De (72.8) o de (72.9) se sigue por ello que la sección eficaz total de todos los procesos posibles (con estado inicial dado) es la misma para las reacciones entre partículas y antipartículas.

En particular, son iguales las probabilidades totales de desintegración (es decir, el tiempo de vida) de las partículas y antipartículas. Estos resultados (junto con la igualdad de las masas de unas y de otras — § 11) constituyen las más importantes consecuencias de la invariancia-*CPT* de las interacciones. Recordaremos (véase el final del § 70) que poder afirmar lo mismo para cada uno de los posibles canales de desintegración por separado exigiría que se cumpliera también la invariancia-*CP*.

### PROBLEMA

Partiendo de la condición de unitariedad, hallar la relación que existe entre las fases de las amplitudes parciales de la fotoproducción de piones en nucleones ( $\gamma + N \rightarrow \pi + N$ ) y de la dispersión elástica de piones por nucleones ( $\pi + N \rightarrow \pi + N$ ); además, se tiene en cuenta que la dispersión- $\pi N$  está ligada con las interacciones fuertes, y que la fotoproducción y la dispersión- $\gamma N$  dependen de la interacción electromagnética.

*Solución.* Designemos las amplitudes parciales como sigue:

$$\langle \pi N | S | \gamma N \rangle = S_{\pi\gamma}, \quad \langle \gamma N | S | \gamma N \rangle = S_{\gamma\gamma}, \quad \langle \pi N | S | \pi N \rangle = S_{\pi\pi}$$

(se ha prescindido de los índices  $J$  y de las helicidades). La fotoproducción es un proceso de primer orden respecto de la carga  $e$ , y la dispersión- $\gamma N$ , un proceso de segundo orden; en consecuencia,  $S_{\pi\gamma} \sim e$ ,  $S_{\gamma\gamma} \sim 1 \sim e^2$ . En cambio, la amplitud  $S_{\pi\pi}$  no contiene ningún elemento pequeño. Limitando la aproximación a los términos  $\sim e$ , las condiciones (72.1) darán

$$S_{\pi\gamma} S_{\pi\gamma}^* + S_{\pi\pi} S_{\pi\pi}^* \approx S_{\pi\gamma} + S_{\pi\pi} S_{\pi\pi}^* = 0, \quad (1)$$

$$S_{\pi\gamma} S_{\pi\gamma}^* + S_{\pi\pi} S_{\pi\pi}^* \approx S_{\pi\pi} S_{\pi\pi}^* = 1 \quad (2)$$

[en el segundo miembro de la igualdad (2) hay que interpretar 1 como matriz unidad respecto de las variables de spin]. En virtud de la invariancia-*T* la matriz  $S_{\pi\pi}$  es simétrica, y  $S_{\gamma\gamma} = S_{\pi\gamma}$ . Eligiremos la matriz  $S_{\pi\pi}$  en forma diagonal, es decir, con relación a estados del pión de paridades determinadas: de (2) se sigue entonces que los elementos diagonales tienen la forma  $e^{2i\delta_\pi}$  con diferentes constantes  $\delta_\pi$ . Hecho esto, a partir de (1) encontramos para cada uno de los elementos de la matriz  $S_{\pi\gamma}$ :

$$\frac{S_{\pi\gamma}}{S_{\pi\gamma}^*} = -e^{2i\delta_\pi},$$

de donde

$$S_{\pi\gamma} = \pm |S_{\pi\gamma}| ie^{i\delta_\pi}.$$

De esta manera, la fase de la amplitud parcial de fotoproducción (en un estado con paridad dada) se determina por la fase de la dispersión- $\pi N$  elástica.

## CAPÍTULO 8

### TEORÍA INVARIANTE DE PERTURBACIONES

#### § 73. Producto cronológico

Las probabilidades de los diferentes procesos en las colisiones entre partículas, cuya interacción mutua se puede considerar pequeña, se calculan mediante la teoría de perturbaciones. En su forma ordinaria (para la mecánica cuántica no-relativista) el formalismo de esta teoría tiene, sin embargo, el inconveniente de que en él no aparecen de manera explícita las condiciones que impone la invariancia relativista. Si bien al aplicar este formalismo a los problemas relativistas el resultado final cumplirá también dichas condiciones, con todo la forma no-invariante de las fórmulas intermedias complica mucho los cálculos. El presente capítulo se dedica al desarrollo de una teoría de perturbaciones relativista coherente libre del inconveniente aquél. Esta teoría fue construida por R. P. Feynman, 1948-1949.

Con vistas a la descripción de un sistema en el formalismo de la segunda cuantificación, designaremos por  $\Phi$  su función de onda en el « espacio » de los números de ocupación de los diferentes estados de las partículas libres. El hamiltoniano del sistema es  $H = H_0 + V$ , donde  $V$  es el operador de interacción. Sean  $\Phi_n$  las funciones propias del hamiltoniano no perturbado; cada una de ellas corresponde a determinados valores de todos los números de ocupación. Una función arbitraria  $\Phi$  se representa en forma de desarrollo  $\Phi = \sum C_n \Phi_n$ . Entonces, la ecuación de onda exacta

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (H_0 + V) \Phi \quad (73.1)$$

adopta la forma de un sistema de ecuaciones para los coeficientes  $C_n$ :

$$i \dot{C}_n = \sum_m V_{nm} e^{i(E_n - E_m)t} C_m, \quad (73.2)$$

donde  $V_{nm}$  son los elementos de matriz, independientes del tiempo, del operador  $V$ , y  $E_n$ , los niveles de energía del sistema no perturbado (cf. III, § 40).

Por su propia definición, el operador  $V$  no depende explícitamente del tiempo. En cuanto a las magnitudes

$$V_{nm}(t) = V_{nm} e^{i(E_n - E_m)t} \quad (73.3)$$

cabe considerarlas como elementos de matriz del operador

$$V(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}. \quad (73.4)$$

que sí depende del tiempo. De éste suele decirse que es el operador en la *representación de interacción* (para distinguirlo del operador de partida de Schrödinger, independiente del tiempo  $V^*$ ). Designando ahora por la misma letra  $\Phi$  que antes la función de onda en esta nueva representación, escribiremos las ecuaciones (73.2) en la forma simbólica

$$i\dot{\Phi} = V(t)\Phi. \quad (73.5)$$

Todas las variaciones de la función de onda en esta representación se deben exclusivamente a la influencia de la perturbación, es decir, corresponden a procesos que tienen lugar gracias a la interacción de las partículas.

Si  $\Phi(t)$  y  $\Phi(t + \delta t)$  son los valores de  $\Phi$  en dos instantes infinitamente próximos, en virtud de (73.5) dichos valores están ligados entre sí por

$$\Phi(t + \delta t) = [1 - i\delta t \cdot V(t)] \Phi(t) = e^{-i\delta t \cdot V(t)} \Phi(t).$$

Según esto, el valor  $\Phi$  en un instante arbitrario  $t_f$  puede expresarse en función del valor en un instante inicial  $t_i$  ( $t_f > t_i$ ) mediante la igualdad

$$\Phi(t_f) = \left( \prod_i^f e^{-i\delta t_a V(t_a)} \right) \Phi(t_i), \quad (73.6)$$

donde el signo  $\prod$  significa el límite del producto para todos los intervalos infinitamente pequeños  $\delta t_a$  entre  $t_i$  y  $t_f$ . Si  $V(t)$  fuese una función ordinaria, este límite se reduciría simplemente a

$$\exp \left( -i \int_{t_i}^{t_f} V(t) dt \right).$$

Pero esta reducción se basa en la commutabilidad de los factores tomados en los diferentes instantes, commutabilidad que se presupone al pasar del producto (73.6) a la suma de los exponentes. Para el operador  $V(t)$  no vale tal commutabilidad y es imposible la reducción a una integral ordinaria.

\* Subrayaremos que en la definición (73.4) figura el hamiltoniano no perturbado  $H_0$ . En esto difiere aquélla de la llamada *representación de Heisenberg* de los operadores, en la cual

$$V^H(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}$$

Escribamos (73.6) en la forma simbólica

$$\Phi(t_f) = T \exp \left\{ -i \int_{t_i}^{t_f} V(t) dt \right\} \Phi(t_i), \quad (73.7)$$

donde  $T$  es el *operador cronológico*\*, que caracteriza un determinado orden de sucesión (el cronológico) de los instantes en los sucesivos factores del producto (73.6). En particular, haciendo  $t_i \rightarrow -\infty$ ,  $t_f \rightarrow +\infty$  tenemos

$$\Phi(+\infty) = S \Phi(-\infty), \quad (73.8)$$

donde

$$S = T \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} V(t) dt \right\}. \quad (73.9)$$

El significado de los símbolos (73.7-9) para la solución formalmente exacta de la ecuación de onda consiste en que tal notación permite escribir fácilmente una serie que representa el desarrollo en serie de potencias de la perturbación:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_k \cdot T \{V(t_1) V(t_2) \dots V(t_k)\}. \quad (73.10)$$

Aquí, en cada término la potencia  $k$ -ésima de la integral se escribe en forma de integral múltiple de orden  $k$  y el operador  $T$  significa que en cada dominio de valores de las variables  $t_1, t_2, \dots, t_k$  hay que disponer los correspondientes operadores en orden cronológico: de derecha a izquierda en orden de valores crecientes de  $t$ \*\*.

Por la definición (73.8) es claro que si antes de la colisión el sistema se encontraba en un estado  $\Phi_i$  (un cierto conjunto de partículas libres), la amplitud de probabilidad de su paso al estado  $\Phi_f$  (otro conjunto de partículas libres) es el elemento de matriz  $S_{fi}$ . En otras palabras, estos elementos precisamente constituyen la matriz- $S$ .

El operador de interacción electromagnética se escribió ya en el § 43:

$$V = e \int (jA) d^3x. \quad (73.11)$$

Substituyéndolo en (73.9), obtendremos

$$S = T \exp \left\{ -ie \int (jA) d^4x \right\}. \quad (73.12)$$

El hecho de que el operador (73.12) sea relativísticamente invariante es esencial. Que sí lo es se ve teniendo en cuenta el carácter escalar del integrando  $(jA)$ , el carácter invariante de la integración respecto de  $d^4x$  y la invariancia de la operación de ordenación cronológica. Esta última circunstancia, sin embargo, exige justificación.

\* ¡No confundirlo con el operador inversión del tiempo!

\*\* La deducción de las reglas de la teoría relativista de perturbaciones basada en el desarrollo (73.10) se debe a F. Dyson, 1949.

Como es sabido, el orden de sucesión de dos instantes  $t_1$  y  $t_2$  (es decir, el signo de la diferencia  $t_2 - t_1$ ) no depende de la elección del sistema de referencia si estos instantes corresponden a puntos de universo  $x_1$  y  $x_2$  separados por un intervalo temporal:  $(x_2 - x_1)^2 > 0$ . En tal caso, la invariancia de la ordenación cronológica es automática. Pero si  $(x_2 - x_1)^2 < 0$  (intervalo espacial), en diferentes sistemas de referencia puede ser tanto  $t_2 > t_1$  como  $t_2 < t_1$ \*. Pero estos dos puntos corresponden a sucesos entre los que no puede existir una relación causal. Es evidente, por ello, que no pueden existir operadores no conmutables de dos magnitudes físicas que correspondan a tales puntos: la no-conmutabilidad de los operadores significa físicamente la no-mensurabilidad simultánea de las magnitudes dadas, lo que presupone la existencia de un enlace físico entre ambas mediciones. En consecuencia, la ordenación cronológica de un producto se conserva también invariante en este caso: aunque la transformación de Lorentz puede violar el orden de sucesión de los instantes, dado que entonces los factores comutan entre sí es posible llevarlos de nuevo al orden cronológico\*\*.

Es fácil ver que la definición que se ha dado en este párrafo de la matriz- $S$  satisface automáticamente la condición de unitariedad. Representando  $S$  en la forma de producto cronológico que aparece en (73.6) y teniendo en cuenta el carácter hermítico de  $V$  se encuentra que  $S^*$  se expresa por el producto de esos mismos factores  $\exp [i\delta t_a \cdot V(t_a)]$  (con signo opuesto en el exponente) en orden cronológico inverso. En consecuencia, al multiplicar  $S$  y  $S^*$  todos los factores se reducen dos a dos.

Hay que hacer observar que el carácter unitario del operador  $S$  queda garantizado en este caso por la hermiticidad del hamiltoniano. Pero la condición de unitariedad posee realmente un carácter más general que el de las hipótesis que se encuentran en la base de la teoría expuesta. Dicha condición debería cumplirse también en una descripción mecanicocuántica en la que no se utilizasen los conceptos de hamiltoniano y de funciones de onda.

#### § 74. Diagramas de Feynman para la dispersión de electrones

Pongamos de manifiesto en ejemplos concretos cómo se realiza el cálculo de los elementos de la matriz de dispersión. Estos ejemplos harán más fácil una formulación ulterior de las reglas generales de la teoría invariante de perturbaciones.

\* En vez de intervalos temporales y espaciales, para abreviar se suele hablar a menudo de los dominios interior y exterior al cono de luz, respectivamente: todos los puntos  $x$  separados del punto  $x'$  por intervalos con  $(x - x')^2 > 0$ , se encuentran dentro del cono de dos hojas cuyo vértice coincide con el punto  $x'$ , y los puntos separados por intervalos con  $(x - x')^2 < 0$ , fuera de dicho cono.

\*\* Al aplicar esta afirmación al producto  $V(t_1) V(t_2) \dots$  hay que precisarla un poco más para evitar equívocos. Dado que el propio operador  $V$  no posee la invariancia de contraste (varia a la vez que  $A$ ), los factores  $V(t_1), V(t_2), \dots$ , que comuten entre sí para un contraste dado del potencial, pueden no comutar en otro contraste. Lo afirmado más arriba, por consiguiente, debe formularse como posibilidad de elegir un contraste del potencial con dichas características de modo que  $V(t_1)$  y  $(V(t_2))$  comuten fuera del cono de luz. Esta reserva, evidentemente, en modo alguno se refleja en la invariancia de la matriz- $S$ : las amplitudes de dispersión, en tanto que cantidades físicas reales, no pueden en absoluto depender del contraste del potencial (esta independencia se sigue formalmente de la invariancia de contraste de la integral de acción a que nos referimos en el § 43).

El operador corriente  $j$  contiene el producto de dos operadores- $\psi$  electrónicos. Por ello, dentro del primer orden de la teoría de perturbaciones podrían originarse procesos en los que participan en total (en los estados inicial y final) tres partículas — dos electrones (el operador  $j$ ) y un fotón (el operador  $A$ ) —. Sin embargo, es fácil ver que dichos procesos son imposibles entre partículas libres, puesto que están prohibidos por la ley de conservación de la energía y del impulso. Si  $p_1$  y  $p_2$  son los 4-impulsos de los electrones, y  $k$ , el del fotón, la conservación del 4-impulso se traduciría en la igualdad  $k = p_2 - p_1$  o  $k = p_2 + p_1$ . Pero tales igualdades son imposibles, puesto que para el fotón  $k^2 = 0$  y el cuadrado  $(p_2 \pm p_1)^2$  es distinto de cero. En efecto, calculando el valor del invariante  $(p_2 \pm p_1)^2$  en el sistema de reposo de uno de los electrones, obtendremos

$$(p_2 \pm p_1)^2 = 2(m^2 \pm p_1 p_2) = 2(m^2 \pm \epsilon_1 \epsilon_2 \mp \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) = 2m(m \pm \epsilon_2).$$

Dado que  $\epsilon_2 > m$ , se tendrá

$$(p_2 + p_1)^2 > 0, \quad (p_2 - p_1)^2 < 0. \quad (74.1)$$

Así, pues, los primeros elementos (no diagonales) no nulos de la matriz  $S$  pueden aparecer solamente en el segundo orden de la teoría de perturbaciones. Todos los procesos que se refieren a este caso quedan comprendidos en el operador de segundo orden que se obtiene al desarrollar la expresión (73.12):

$$S^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int \int d^4x d^4x' \cdot T(j^\mu(x) A_\mu(x) j^\nu(x') A_\nu(x')).$$

Puesto que los operadores de electrón y fotón conmutan entre sí, el producto- $T$  que aquí aparece se puede descomponer en dos productos- $T$ :

$$S^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int \int d^4x d^4x' \cdot T(j^\mu(x) j^\nu(x')) T(A_\mu(x) A_\nu(x')). \quad (74.2)$$

Como primer ejemplo consideremos la dispersión elástica de dos electrones: en el estado inicial tenemos dos electrones con 4-impulsos  $p_1$  y  $p_2$ , y en el final, dos electrones con otros 4-impulsos  $p_3$  y  $p_4$ . Se supone también que todos los electrones se encuentran en estados de spin determinados. Para abreviar prescindimos de las variables espinoriales.

Dado que ni en uno ni en otro estado existen fotones, el elemento de matriz que necesitamos del producto  $T$  de los operadores del fotón es el elemento diagonal  $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$ , donde el símbolo  $|0\rangle$  representa el estado de vacío fotónico. Este valor medio del producto- $T$  respecto del vacío es una determinada función de las coordenadas de los dos puntos  $x$  y  $x'$  (para cada par de índices  $\mu\nu$ ). Además, en virtud de la homogeneidad del 4-espacio, las coordenadas pueden intervenir únicamente en la forma de diferencia  $x - x'$ . El tensor

$$D_{\mu\nu}(x - x') = i \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(x') | 0 \rangle \quad (74.3)$$

se llama *función propagación de fotón* (o *propagador de fotón*). Su cálculo efectivo se llevará a cabo en el § 77.

Para el producto- $T$  de los operadores de electrón, hemos de calcular el elemento de matriz

$$\langle 34 | T j^\mu(x) j^\nu(x') | 12 \rangle, \quad (74.4)$$

donde los símbolos  $|12\rangle$ ,  $|34\rangle$  representan los estados con los pares de electrones dotados de los correspondientes impulsos. También este elemento puede representarse en la forma de promedio respecto del vacío mediante la igualdad evidente

$$\langle 2 | F | 1 \rangle = \langle 0 | a_2 F a_1^+ | 0 \rangle,$$

donde  $F$  es un operador arbitrario y  $a a_1^+$  y  $a_2$  son los operadores de creación del primer electrón y de aniquilación del segundo, respectivamente. En consecuencia, en vez de (74.4) se puede calcular la cantidad

$$\langle 0 | a_3 a_4 T (j^\mu(x) j^\nu(x')) a_2^+ a_1^+ | 0 \rangle \quad (74.5)$$

(los índices 1, 2, ... substituyen, para abreviar, a  $p_1, p_2, \dots$ ).

Cada uno de los dos operadores corriente es un producto  $j = \bar{\Psi} \gamma \Psi$ , y cada uno de los operadores- $\psi$  se representa por una suma

$$\Psi = \sum_p (a_p \psi_p + b_p^+ \psi_{-p}), \quad \bar{\Psi} = \sum_p (a_p^+ \bar{\psi}_p + b_p \bar{\psi}_{-p}) \quad (74.6)$$

(los segundos términos contienen operadores de positón, que en el presente caso «no trabajan»). Por ello, el producto  $j^\mu(x) j^\nu(x')$  aparece en la forma de una suma de términos cada uno de los cuales contiene el producto de dos operadores  $a_p$  y de dos  $a_p^+$ . Estos operadores deben asegurar la aniquilación de los electrones 1, 2 y la creación de los electrones, 3, 4. En otras palabras, deben ser los operadores  $a_1, a_2, a_3, a_4$  que, como suele decirse, se *enlazan* (o *contraen*) con los operadores «exteriores»  $a_1^+, a_2^+, a_3, a_4$  en (74.5) y se reducen de acuerdo con la igualdad

$$\langle 0 | a_p a_p^+ | 0 \rangle = 1. \quad (74.7)$$

Según sean los operadores- $\psi$  de los que se toman  $a_1, a_2, a_3^+, a_4^+$  en (74.5), resultan cuatro términos:

$$(74.5) = \underbrace{a_3 a_4 (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi)}_{+} \underbrace{(\bar{\Psi}' \gamma^\nu \Psi')}_{+} a_2^+ a_1^+ + \underbrace{a_3 a_4 (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi)}_{+} \underbrace{(\Psi' \gamma^\nu \bar{\Psi}')}_{+} a_2^+ a_1^+ + \\ + \underbrace{a_3 a_4 (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi)}_{+} \underbrace{(\bar{\Psi}' \gamma^\nu \Psi')}_{+} a_2^+ a_1^+ + \underbrace{a_3 a_4 (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi)}_{+} \underbrace{(\Psi' \gamma^\nu \bar{\Psi}')}_{+} a_2^+ a_1^+, \quad (74.8)$$

donde  $\Psi = \Psi(x)$ ,  $\Psi' = \Psi(x')$  y se han unido con vínculos los operadores que se enlazan, es decir, aquellos de que se toman los pares de operadores  $a, a^+$  para la

reducción de acuerdo con (74.7). En cada uno de estos términos, mediante permutaciones sucesivas de los operadores  $a_1, a_2, \dots$  llevaremos los operadores conjugados a la contigüidad con el que hace pareja ( $a_1 a_1^+$  y así sucesivamente), hecho lo cual el valor medio de sus productos se reduce al producto de los valores medios (74.7). Teniendo en cuenta que todos estos operadores anticommutan ( $j_1, j_2, j_3, j_4$ , son estados diferentes!) \*, se encuentra que el elemento de matriz (74.4) es igual a

$$\langle 34 | T j^\mu(x) j^\nu(x') | 12 \rangle = (\bar{\psi}_4 \gamma^\mu \psi_2) (\bar{\psi}_3 \gamma^\nu \psi_1') + (\bar{\psi}_3 \gamma^\mu \psi_1) (\bar{\psi}_4 \gamma^\nu \psi_2') - \\ - (\bar{\psi}_3 \gamma^\mu \psi_2) (\bar{\psi}_4 \gamma^\nu \psi_1') - (\bar{\psi}_4 \gamma^\mu \psi_1) (\bar{\psi}_3 \gamma^\nu \psi_2'). \quad (74.9)$$

Observemos que el signo común de esta suma es convencional y depende del orden en que se dispongan los operadores «exteriores» en (74.5). Esta circunstancia se debe a que el signo común del elemento de matriz para la dispersión de fermiones idénticos es absolutamente arbitrario. En cambio, el signo relativo de los diferentes términos en (74.9) no depende, naturalmente, del orden adoptado al disponer los operadores exteriores.

Los dos términos en la primera y segunda filas de (74.9) difieren entre sí únicamente en la permutación simultánea de los índices  $\mu, \nu$  y de los argumentos  $x, x'$ . Esta permutación, evidentemente, no modifica tampoco al elemento de matriz (74.3) (en el cual el orden de los factores queda establecido en cualquier caso por el símbolo  $T$ ). Por consiguiente, después de multiplicar (74.3) y (74.9) e integrar respecto de  $d^4x d^4x'$ , los cuatro términos de (74.9) dan resultados iguales dos a dos, de modo que el elemento de matriz es

$$S_{ij} = ie^2 \iiint d^4x d^4x' \cdot D_{\mu\nu}(x - x') \{(\bar{\psi}_4 \gamma^\mu \psi_2) (\bar{\psi}_3 \gamma^\nu \psi_1') - (\bar{\psi}_4 \gamma^\mu \psi_1) (\bar{\psi}_3 \gamma^\nu \psi_2')\} \quad (74.10)$$

(obsérvese que ha desaparecido el factor  $1/2!$ ).

Las funciones de onda electrónicas son las ondas planas (65.8). Por ello, la expresión entre llaves se escribe

$$\{ \dots \} = (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1) e^{-i(p_2 - p_4)x - i(p_1 - p_3)x'} - \\ - (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_2) e^{-i(p_1 - p_4)x - i(p_2 - p_3)x'} = \\ = \{(\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1) e^{-i[(p_2 - p_4) + (p_3 - p_1)]\xi/2} - \\ - (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_2) e^{-i[(p_1 - p_4) + (p_3 - p_2)]\xi/2}\} e^{-i(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)X},$$

donde  $X = (x + x')/2$ ,  $\xi = x - x'$ . La integración respecto de  $d^4x d^4x'$  se substituye por la integración respecto de  $d^4\xi d^4X$ . La integral respecto de  $d^4X$  da una función- $\delta$  (en virtud de la cual  $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ ). Pasando luego de la matriz  $S$  a la matriz  $M$  (§ 65), obtenemos finalmente para la amplitud de dispersión

\* Dado este carácter anticomutativo, los operadores  $j(x)$  y  $j(x')$  se pueden considerar en este caso (en el cálculo del elemento de matriz) como comutables y prescindir por ello del signo del producto- $T$ .

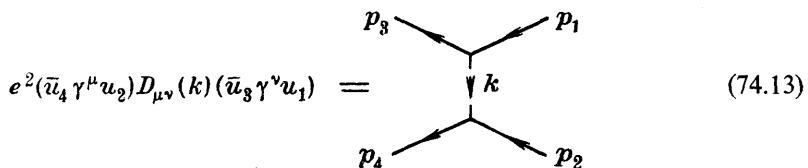
$$M_{fi} = e^2 \{ (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2) D_{\mu\nu} (p_4 - p_2) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1) - \\ - (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2) D_{\mu\nu} (p_4 - p_1) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1) \}. \quad (74.11)$$

Se ha introducido aquí el propagador de fotón en la representación de impulsos

$$D_{\mu\nu}(k) = \int D_{\mu\nu}(\xi) e^{ik\xi} d^4\xi. \quad (74.12)$$

Cada uno de los dos términos de la amplitud (74.11) se puede representar simbólicamente en la forma de los llamados *diagramas de Feynman*.

El primer término se representa por el diagrama



A cada uno de los puntos de intersección de las líneas (vértices del diagrama) se asocia un factor  $\gamma$ . Las líneas de trazo continuo «incidentes», que se dirigen a un vértice, corresponden a los electrones iniciales; se les asocian los factores  $u$  — las amplitudes bispinoriales de los correspondientes estados electrónicos—. Las líneas de trazo continuo «emergentes», que parten de los vértices, corresponden a los electrones finales; a estas líneas se les asocian los factores  $\bar{u}$ . Al «leer» un diagrama, los factores indicados se escriben de izquierda a derecha en un orden que corresponde al movimiento a lo largo de las líneas de trazo continuo y en sentido opuesto al de las flechas. Los dos vértices se unen por una línea de trazos que corresponde a un fotón *virtual* (intermedio), «emitido» en un vértice y «absorbido» en el otro; a esta línea se asocia el factor  $iD_{\mu\nu}(k)$ . El 4-impulso del fotón virtual  $k$  se determina por la «conservación del 4-impulso en el vértice»: por la igualdad de los impulsos totales de las líneas incidentes y emergentes; en el presente caso,  $k = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$ \*. Junto con todos los factores enumerados, al diagrama en conjunto se atribuye, además, un factor común ( $-ie$ )<sup>2</sup> (el exponente es el número de vértices en el diagrama) y en esta forma interviene como componente en  $iM_{fi}$ . De manera análoga, el segundo término en (74.11) se representa por el diagrama

\* Es del todo indiferente el que se empiece la lectura del diagrama a partir del terminal  $p_3$  o del  $p_4$ ; las expresiones que se obtienen en uno y otro caso coinciden entre sí en virtud de la simetría del tensor  $D_{\mu\nu}$ . Es también indiferente cómo se elija el sentido de la línea del fotón virtual: cambiar su sentido conduce únicamente a cambiar el signo de  $k$ , lo que carece de importancia en virtud de la paridad de la función  $D_{\mu\nu}(k)$  (véase § 77).

$$e^2 (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_1) D_{\mu\nu} (k') (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_2) = \begin{array}{c} p_4 \quad \quad \quad p_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad k' \\ \diagup \quad \diagdown \\ p_3 \quad \quad p_2 \end{array} \quad (74.14)$$

(con  $k' = p_1 - p_4 = p_3 - p_2$ ) \*

Las líneas correspondientes a las partículas iniciales y finales se llaman *líneas exteriores* o *terminales libres* del diagrama. Los diagramas (74.13) y (74.14) difieren entre sí en el intercambio de dos terminales libres de electrón ( $p_3$  y  $-p_4$ ). Esta permutación de dos fermiones cambia el signo del diagrama; esta regla corresponde al hecho de que en la amplitud (74.11) ambos términos aparecen con signos opuestos.

Consideremos ahora la dispersión mutua de un electrón y un positón; designemos sus impulsos iniciales por  $p_-$  y  $p_+$ , respectivamente, y los finales, por  $p'_-$  y  $p'_+$ .

Los operadores de creación y aniquilación de los positones aparecen en los operadores- $\psi$  (74.6) junto con los correspondientes operadores de aniquilación y creación de electrones. Mientras que en el caso anterior la aniquilación de las dos partículas iniciales quedaba asegurada por el operador  $\psi$  y la creación de las dos partículas finales por el operador  $\bar{\psi}$ , el papel de estos operadores es aquí el opuesto respecto de electrones y positones. En consecuencia, la función conjugada  $\bar{\psi}(-p_+)$  representará ahora el positón inicial, y el positón final lo será por la función  $\psi(-p'_+)$  (siendo, además, una y otra funciones del 4-impulso con signo opuesto). Teniendo en cuenta esta diferencia, obtendremos en definitiva la amplitud de dispersión\*\*

$$M_{fi} = -e^2 (\bar{u}(p'_-) \gamma^\mu u(p_-)) D_{\mu\nu}(p_- - p'_-) (\bar{u}(-p_+) \gamma^\nu u(-p'_+)) + \\ + e^2 (\bar{u}(-p_+) \gamma^\mu u(p_-)) D_{\mu\nu}(p_- + p_+) (\bar{u}(p'_-) \gamma^\nu u(-p'_+)). \quad (74.15)$$

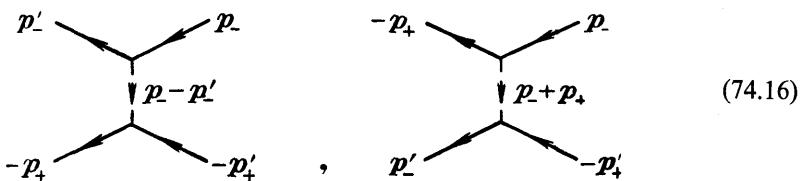
Los términos primero y segundo en esta expresión se representan por los siguientes diagramas:

\* Los diagramas de Feynman pueden trazarse en correspondencia con los términos de la amplitud de dispersión no sólo en la representación de impulsos, sino también en su representación original, la de coordenadas [la integral (74.10)]. El papel de amplitudes de electrón lo representan en tal caso las correspondientes funciones de coordenadas, y los propagadores se toman en la representación correspondiente. A cada vértice se asocia una de las variables de integración [ $x$  o  $x'$  en (74.10)]; los factores atribuidos a las líneas que se cortan en un vértice se toman en función de esta variable.

\*\* En la dispersión de partículas no idénticas, el signo común de la amplitud es unívoco. Viene determinado por la condición de que en (74.5) los operadores «exteriores» deben estar dispuestos de tal manera que los dos operadores de electrón se encuentren en los extremos:

$$\langle 0 | a' b' \dots b^+ a^+ | 0 \rangle$$

(o bien ambos en el centro); mediante esta condición se consigue el «mismo signo» de los estados inicial y final del vacío. El signo común de la amplitud se puede comprobar también pasando al límite no-relativista: veremos más adelante (§ 82) que en este límite el segundo término de (74.15) tiende a cero, y el primero, a la amplitud de Born en la dispersión de Rutherford.

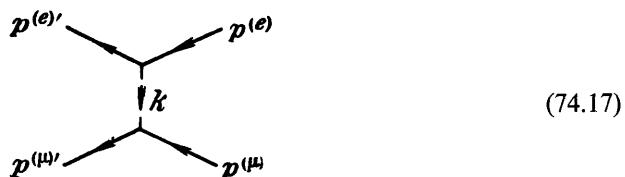


Las reglas para construir los diagramas cambian solamente en la parte que se refiere a los positones. Antes las líneas de trazo continuo incidentes iban acompañadas del factor  $u$ , y las emergentes, del  $\bar{u}$ . Pero ahora las líneas incidentes corresponden al positón final, y las emergentes, al inicial, tomándose los impulsos de todos los positones con signo opuesto.

Hay que observar el diferente carácter de los dos diagramas (74.16). En el primer diagrama, en uno de los vértices se cortan las líneas del electrón inicial y final, y en el otro vértice, lo hacen las correspondientes al positón. Por el contrario, en el segundo diagrama en cada uno de los vértices se cortan líneas de electrón y de positón —iniciales y finales—; en el superior tiene lugar, por así decirlo, la aniquilación de un par con emisión de un fotón virtual, y en el inferior, la creación de un par al que da origen dicho fotón.

Esta diferencia se refleja, también, en las propiedades de los fotones virtuales en uno y en otro diagramas. En el primer diagrama (diagrama de tipo «dispersivo») el 4-impulso del fotón virtual es igual a la diferencia de los 4-impulsos de los electrones (o de los dos positones); por ello  $k^2 < 0$  [cf. (74.1)]. En el segundo diagrama, en cambio (del tipo «destructivo»),  $k' = p_- + p_+$  y, por lo tanto,  $k'^2 > 0$ . Observemos en relación con esto que para el fotón virtual es siempre  $k^2 \neq 0$ , en contraste con un fotón real, para el cual  $k^2 = 0$ .

Si las partículas que chocan no son idénticas ni tampoco son una partícula y una antipartícula (digamos un electrón y un muón), la amplitud de dispersión se representa por un solo diagrama:



Es imposible en este caso un diagrama del tipo destructivo o de intercambio. Se obtiene este resultado analíticamente escribiendo el operador corriente como suma de las corrientes del electrón y del muón

$$j = j^{(e)} + j^{(\mu)} = (\bar{\Psi}^{(e)} \gamma \Psi^{(e)}) + (\bar{\Psi}^{(\mu)} \gamma \Psi^{(\mu)})$$

y formando en el producto  $j^{(\mu)}(x) j^{(\nu)}(x')$  los elementos de matriz de los términos que dan lugar a la creación y aniquilación impuestas de partículas.

Volvamos a los procesos de primer orden que están prohibidos, como se probó al principio de este párrafo, por la ley de conservación del 4-impulso. Los elementos de matriz del operador

$$S^{(1)} = -ie \int j(x) A(x) d^4 x \quad (74.18)$$

para tales transiciones corresponden a la creación o a la aniquilación «en un mismo punto  $x$  precisamente» de tres partículas reales: dos electrones y un fotón. Dichos elementos aparecen como resultado del enlace (contracción) de los operadores  $\bar{\psi}(x)$  y  $\psi(x)$  en un mismo punto  $x$  y se determinan (por ejemplo, en la emisión de un fotón) por integrales de la forma

$$S_{fi} = -ie \int \bar{\psi}_2(x) \psi_1(x) \hat{A}^*(x) d^4 x,$$

que se anulan debido a la presencia en el integrando del factor  $\exp[-i(p_1 - p_2 - k)x]$  con un exponente diferente de cero. En el lenguaje de los diagramas, esto significa que son nulos los diagramas con tres terminales libres



Por esta misma causa son imposibles los procesos de segundo orden en los que participarían (en el estado inicial y en el final) seis partículas. En el elemento de matriz  $S_{fi}$  de las correspondientes transiciones, la integral respecto de  $d^4x d^4x'$  se descompondría en producto de dos integrales respecto de  $d^4x$  y de  $d^4x'$  del producto de tres funciones de onda tomadas en un mismo punto precisamente, integrales que se anulan. En otras palabras, los correspondientes diagramas se descompondrían en dos diagramas independientes de la forma (74.19).

### § 75. Diagramas de Feynman para la dispersión de un fotón

Consideremos otro efecto de segundo orden — la dispersión de un fotón por un electrón (*efecto Compton*) —. Supongamos que en el estado inicial el fotón y el electrón tienen 4-impulsos  $k_1$  y  $p_1$ , y en el estado final  $k_2$  y  $p_2$  (y también polarizaciones determinadas que, para abreviar, no indicaremos).

El elemento de matriz de fotón es

$$\langle 2 | T(A_\mu(x) A_\nu(x')) | 1 \rangle = \langle 0 | c_2 T(A_\mu(x) A_\nu(x')) c_1^+ | 0 \rangle, \quad (75.1)$$

donde

$$A = \sum_k (c_k A_k + c_k^+ A_k^*).$$

Enlazando los operadores exteriores e interiores, obtendremos

$$(75.1) = \underbrace{c_2 A_\mu}_{\text{exterior}} \underbrace{A_\nu c_1^+}_{\text{interior}} + \underbrace{c_2 A_\mu}_{\text{interior}} \underbrace{A_\nu c_1^+}_{\text{exterior}} = A_{2\mu}^* A_{1\nu} + A_{1\mu} A_{2\nu}^* \quad (75.2)$$

(aquí se tiene en cuenta la conmutabilidad de los operadores  $c_1$ ,  $c_2^+$ ; por esta misma razón se puede prescindir del signo de T en el presente caso).

El elemento de matriz de electrón es

$$\langle 2 | T(j^\mu(x) j^\nu(x')) | 1 \rangle = \langle 0 | a_2 T [(\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) (\bar{\Psi}' \gamma^\nu \Psi')] a_1^+ | 0 \rangle. \quad (75.3)$$

En él figuran cuatro operadores- $\psi$ . Solamente dos de ellos se encargarán de aniquilar el electrón 1 y de crear el electrón 2, es decir, se enlazarán con los operadores  $a_1^+$  y  $a_2$ . Estos pueden ser los operadores  $\bar{\Psi}'$ ,  $\Psi$  o los  $\bar{\Psi}' \bar{\Psi}$  (pero no  $\bar{\Psi}$ ,  $\Psi$  o  $\bar{\Psi}' \Psi'$ : la creación y aniquilación en un mismo punto  $x$  o  $x'$  de dos electrones reales junto con un fotón real conduce a una expresión igual a cero). Efectuando el enlace de estas dos maneras, obtendremos en el elemento de matriz (75.3) dos términos; los escribiremos primero en el supuesto de que sea  $t > t'$ :

$$(75.3) = a_2 (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) (\bar{\Psi}' \gamma^\nu \Psi') a_1^+ + a_2 (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) \underbrace{(\bar{\Psi}' \gamma^\nu \Psi')}_{\text{enlace}} a_1^+. \quad (75.4)$$

En el primer término se enlazan los operadores

$$a_2 \bar{\Psi} \rightarrow a_2 a_2^+ \bar{\Psi}, \quad \bar{\Psi}' a_1^+ \rightarrow a_1 a_1^+ \bar{\Psi}'.$$

Dado que los operadores  $a_2 a_2^+$  y  $a_1 a_1^+$  son diagonales y se encuentran en los extremos del producto, estos operadores se substituyen por sus valores medios respecto del vacío, es decir, por la unidad. Para la transformación análoga del segundo término en (75.4) hay que «arrastrar» primero el operador  $a_2^+$  hacia la izquierda, y el  $a_1$  hacia la derecha. Esto se lleva a cabo mediante las reglas de conmutación de los operadores  $a_p$ ,  $a_p^+$  en virtud de las cuales

$$\left. \begin{aligned} \{a_p, \Psi\}_+ &= \{a_p^+, \bar{\Psi}\}_+ = 0, \\ \{a_p, \bar{\Psi}\}_+ &= \bar{\Psi}_p, \quad \{a_p^+, \Psi\}_+ = \Psi_p. \end{aligned} \right\} \quad (75.5)$$

En definitiva la expresión (75.4) pasa a tomar la forma

$$\langle 0 | (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) (\bar{\Psi}' \gamma^\nu \Psi') - (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) (\bar{\Psi}' \gamma^\nu \Psi') | 0 \rangle, \quad t > t' \quad (76.6)$$

(claro está, se someten al promedio tan sólo los factores que son operadores). De manera análoga obtendremos para  $t < t'$  una expresión que difiere de la precedente en la permutación de los apóstrofos y de los índices  $\mu$ ,  $\nu$ :

$$\langle 0 | - (\bar{\Psi}' \gamma^\nu \Psi') (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) + (\bar{\Psi}' \gamma^\nu \Psi') (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) | 0 \rangle, \quad t < t'. \quad (75.7)$$

Las dos expresiones (75.6) y (75.7) se pueden escribir en forma única introduciendo el producto cronológico de los operadores- $\psi$  de acuerdo con la definición

$$T \psi_i(x) \bar{\psi}_k(x') = \begin{cases} \psi_i(x) \bar{\psi}_k(x'), & t' < t; \\ -\bar{\psi}_k(x') \psi_i(x), & t' > t. \end{cases} \quad (75.8)$$

( $i, k$  son índices bispinoriales). Entonces los términos primeros y segundos de (75.6-7) se reúnen en un único símbolo:

$$\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \langle 0 | T \psi \cdot \bar{\psi}' | 0 \rangle \gamma^\nu \psi_1 + \bar{\psi}' \gamma^\nu \langle 0 | T \psi \cdot \bar{\psi} | 0 \rangle \gamma^\mu \psi_1 \quad (75.9)$$

( $\psi \cdot \bar{\psi}$  representa la matriz  $\psi_i \bar{\psi}_k$ ).

Hay que hacer observar que en la definición (75.8), que surge de manera natural, los productos de los operadores para  $t < t'$  y para  $t > t'$  se toman con signos opuestos. En esto se diferencia de la definición del producto- $T$  que utilizamos para los operadores  $A$  y  $j$ . El origen de esta diferencia procede de que los operadores de fermión  $\psi, \bar{\psi}$  anticonmutan fuera del cono de luz (en contraste con el carácter comutativo de los operadores de bosón  $A$  y también de los operadores bilineales  $j = \bar{\Psi} \Gamma \Psi$ ). Al mismo tiempo, se garantiza con esto la invariancia relativista de la definición (75.8) (una demostración formal de las reglas de commutación de los operadores- $\psi$  se dará en el § 76)\*\*.

Introduzcamos la función propagación de electrón (o propagador de electrón) que es el bispinor de segundo orden  $G_{ik}(x - x')$  definido por

$$G_{ik}(x - x') = -i \langle 0 | T \psi_i(x) \bar{\psi}_k(x') | 0 \rangle. \quad (75.10)$$

Entonces, el elemento de matriz de electrón se escribirá en la forma

$$\langle 2 | T j^\mu(x) j^\nu(x') | 1 \rangle = i \bar{\psi}_2 \gamma^\mu G \gamma^\nu \psi_1 + i \bar{\psi}' \gamma^\nu G \gamma^\mu \psi_1. \quad (75.11)$$

Después de multiplicar por el elemento de matriz de fotón (74.1) e integrar respecto de  $d^4x d^4x'$ , los dos términos de (75.11) darán el mismo resultado, de modo que se obtiene

$$S_{fi} = -ie^2 \iint d^4x d^4x' \bar{\psi}_2(x) \gamma^\mu G(x - x') \gamma^\nu \psi_1(x') \times \\ \times \{ A_{2\mu}^*(x) A_{1\nu}(x') + A_{2\nu}^*(x') A_{1\mu}(x) \}. \quad (75.12)$$

Substituyendo para las funciones de onda de electrón y de fotón las ondas

\* Recordaremos que, por sí mismos, los operadores- $\psi$  no corresponden a ninguna magnitud física medible y, por consiguiente, no tienen por qué ser comutables fuera del cono de luz.

\*\* Análogamente se puede definir el producto- $T$  de un número arbitrario de operadores- $\psi$ . Este producto es igual al producto de todos los operadores en cuestión colocados de derecha a izquierda en orden creciente de tiempos, determinándose el signo por la paridad de la permutación que hay que aplicar para obtener esta ordenación a partir de la que figura detrás del símbolo del producto- $T$ . Según esta definición el signo del producto- $T$  cambia al permutar dos operadores- $\psi$  cualesquiera, por ejemplo:

$$T \psi_i(x) \bar{\psi}_k(x') = -T \bar{\psi}_k(x') \psi_i(x).$$

planas (65.8-9) y eliminando la función- $\delta$  al igual que se hizo en (74.10), obtendremos en definitiva la amplitud de dispersión

$$M_{fi} = -4\pi e^2 \bar{u}_2 \{ \hat{e}_2^* G(p_1 + k_1) \hat{e}_1 + \hat{e}_1 G(p_1 - k_2) \hat{e}_2^* \} u_1, \quad (75.13)$$

donde  $e_1, e_2$  son los 4-vectores polarización de los fotones, y  $G(p)$  el propagador de electrón en la representación de impulsos.

Los dos términos de esta expresión se representan por los siguientes diagramas de Feynman

$$\begin{aligned} 4\pi e^2 \bar{u}_2 \hat{e}_2^* G(f) \hat{e}_1 u_1 &= \text{Diagrama 1:} \\ &\text{Fotón } p_2 \text{ (línea sólida)} \rightarrow \text{Electrón } p_1 \text{ (línea sólida)} + \text{Fotón } k_1 \text{ (línea discontinua)} \\ &\text{Fotón } k_2 \text{ (línea discontinua)} \rightarrow \text{Electrón } p_1 \text{ (línea sólida)} + \text{Fotón } p_1 \text{ (línea sólida)} \\ &f = p_1 + k_1 \\ \\ 4\pi e^2 \bar{u}_2 \hat{e}_1 G(f') \hat{e}_2^* u_1 &= \text{Diagrama 2:} \\ &\text{Fotón } p_2 \text{ (línea sólida)} \rightarrow \text{Electrón } k_1 \text{ (línea discontinua)} + \text{Fotón } k_2 \text{ (línea discontinua)} \\ &\text{Electrón } p_1 \text{ (línea sólida)} \rightarrow \text{Electrón } p_1 \text{ (línea sólida)} + \text{Fotón } k_2 \text{ (línea discontinua)} \\ &f' = p_1 - k_2 \end{aligned} \quad (75.14)$$

Los terminales libres en líneas de trazos corresponden a fotones reales; a las líneas incidentes (fotón inicial) acompaña el factor  $\sqrt{4\pi}e$ , y a las líneas emergentes (fotón final), el factor  $\sqrt{4\pi}e^*$ , donde  $e$  es el 4-vector polarización. En el primer diagrama el fotón inicial es absorbido junto con el electrón inicial, y el fotón final se emite junto con el electrón final. En el segundo diagrama la emisión del fotón final tiene lugar junto con la aniquilación del electrón inicial, y la absorción del fotón inicial, junto con la creación del electrón final.

La línea de trazo continuo interior (que une ambos vértices) corresponde a un electrón virtual cuyo 4-impulso se determina por la conservación del 4-impulso en los vértices. A esta línea se asocia el factor  $iG(f)$ . En contraste con el 4-impulso de una partícula real, el cuadrado del 4-impulso del electrón virtual no es igual a  $m^2$ . Considerando el invariante  $f^2$ , por ejemplo, en el sistema de reposo del electrón, es fácil hallar que

$$f^2 = (p_1 + k_1)^2 > m^2, \quad f'^2 = (p_1 - k_2)^2 < m^2. \quad (75.15)$$

### § 76. Propagador de electrón

El concepto de funciones propagación (propagadores) introducido en los párrafos que preceden representa un papel fundamental en el formalismo de la elec-

trodinámica cuántica. El propagador de fotón  $D_{\mu\nu}$  pasa a ser la magnitud fundamental que caracteriza la interacción de dos electrones. Este papel suyo se manifiesta de manera evidente en la posición que ocupa en la amplitud de dispersión de electrones, donde  $D_{\mu\nu}$  aparece multiplicado por las corrientes de transición de las dos partículas. Un papel análogo lo desempeña el propagador de electrón en la interacción entre un electrón y un fotón.

Pasemos ahora a ocuparnos del cálculo efectivo de los propagadores, comenzando con el caso del electrón.

Apliquemos a la función

$$G_{ik}(x - x') = -i \langle 0 | T \Psi_i(x) \bar{\Psi}_k(x') | 0 \rangle \quad (76.1)$$

( $i, k$  son índices bispinoriales) el operador  $\hat{p} - m$ , donde  $p_\mu = i\partial_\mu$ . Dado que  $\Psi(x)$  satisface la ecuación de Dirac  $(\hat{p} - m)\Psi(x) = 0$ , obtendremos en definitiva el valor cero en todos los puntos  $x$  con la única excepción de aquellos en los que  $t = t'$ . Ello es así porque  $G(x - x')$  tiende a límites diferentes para  $t \rightarrow t' + 0$  y para  $t \rightarrow t' - 0$ : según la definición (75.8) estos límites son iguales, respectivamente, a

$$-i \langle 0 | \Psi_i(r, t) \bar{\Psi}_k(r', t) | 0 \rangle \text{ y } +i \langle 0 | \bar{\Psi}_k(r', t) \Psi_i(r, t) | 0 \rangle$$

y, conforme veremos, no coinciden sobre el cono de luz. Esto conduce a que en la derivada  $\partial G/\partial t$  aparezca un término complementario con una función- $\delta$ :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -i \langle 0 | T \frac{\partial \Psi_i(x)}{\partial t} \bar{\Psi}_k(x') | 0 \rangle + \delta(t - t')(G|_{t=t'+0} - G|_{t=t'-0}). \quad (76.2)$$

Observando que en el operador  $\hat{p} - m$  la derivada respecto de  $t$  aparece en la forma  $i\gamma^0\partial/\partial t$ , tenemos por ello

$$(\hat{p} - m)_{ik} G_{kl}(x - x') = \delta(t - t') \gamma^0_{ik} \langle 0 | \{ \Psi_k(r, t), \bar{\Psi}_l(r', t) \}_+ | 0 \rangle. \quad (76.3)$$

Calculemos el anticomutador que aquí aparece. Multiplicando los operadores  $\Psi(r, t)$  y  $\bar{\Psi}(r', t)$  [véase (74.6)] y teniendo en cuenta las reglas de commutación para los operadores de fermión  $a_p$  y  $b_p$ , se encuentra

$$\{ \Psi_i(r, t), \bar{\Psi}_k(r', t) \}_+ = \sum_p [\psi_{pi}(r) \bar{\psi}_{pk}(r') + \psi_{-pi}(r) \bar{\psi}_{-pk}(r')], \quad (76.4)$$

donde  $\psi_{\pm p}(r)$  son las funciones de onda sin el factor temporal (como en los §§ 74, 75, para abreviar no escribiremos en ellas los índices de polarización). Pero el conjunto de todas las funciones  $\psi_{\pm p}(r)$  — funciones propias del hamiltoniano del electrón — constituye un sistema completo de funciones normalizadas, y de acuerdo con las propiedades generales de tales sistemas [cf. III (5.12)]:

$$\sum_p [\psi_{pi}(r) \psi^*_{pk}(r') + \psi_{-pi}(r) \psi^*_{-pk}(r')] = \delta_{ik} \delta(r - r'). \quad (76.5)$$

Ahora bien, la suma que aparece en el segundo miembro de la igualdad (76.4) difiere de

la suma (76.5) en la substitución de  $\psi^*_k$  por  $(\psi^*\gamma^0)_k$  y es igual a  $\gamma^0_{ik}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Así, pues,

$$\{\Psi_i(\mathbf{r}, t), \bar{\Psi}_k(\mathbf{r}', t)\}_+ = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \gamma^0_{ik}. \quad (76.6)$$

Observemos que de esta fórmula se sigue, en particular, la afirmación recordada ya en el § 75 acerca del carácter anticonmutativo de los operadores  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  fuera del cono de luz. Para  $(x - x')^2 < 0$  existe siempre un sistema de referencia en el cual  $t = t'$ ; si, además,  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ , el anticonmutador (76.6) es, en efecto, igual a cero.

Substituyendo (76.6) en (76.3) (y prescindiendo de los índices bispinoriales), encontramos finalmente \*

$$(\hat{p} - m) G(x - x') = \delta^{(4)}(x - x'). \quad (76.7)$$

Así, pues, el propagador de electrón satisface la ecuación de Dirac con la función- $\delta$  en el segundo miembro. En otras palabras, desde el punto de vista matemático dicho propagador es una *función de Green* para la ecuación de Dirac.

Más adelante necesitaremos considerar, no la propia función  $G(\xi)$  ( $\xi = x - x'$ ), sino sus componentes de Fourier

$$G(p) = \int G(\xi) e^{ip\xi} d^4\xi \quad (76.8)$$

(el propagador en la representación de impulso). Formando la componente de Fourier de ambos miembros de (76.7), se encuentra que  $G(p)$  satisface el sistema de ecuaciones algebraicas

$$(\hat{p} - m) G(p) = 1. \quad (76.9)$$

La solución de este sistema es:

$$G(p) = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2}. \quad (76.10)$$

Las cuatro componentes del 4-vector  $p$  en  $G(p)$  son variables independientes (no ligadas por la relación  $p^2 \equiv p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ ). Escribiendo el denominador de (76.10) en la forma  $p_0^2 - (\mathbf{p}^2 + m^2)$ , vemos que  $G(p)$ , considerada como función de  $p_0$  para  $\mathbf{p}$  dado, tiene dos polos: para  $p_0 = \pm \epsilon$ , donde  $\epsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . Al integrar respecto de  $dp_0$  en la integral

$$G(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ip\xi} G(p) d^4p = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3p \cdot e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \int dp_0 \cdot e^{-ip_0\tau} G(p) \quad (76.11)$$

( $\tau = t - t'$ ) se plantea, por consiguiente, la cuestión de cómo hay que sortear estos polos; si no se indica cómo hay que proceder para ello, la expresión (76.10) es todavía esencialmente indeterminada.

Para poner en claro esta cuestión, volvamos a la definición de partida (76.1). Substituyamos en ella los operadores- $\psi$  por sus expresiones en forma de suma

\* De forma explícita y con índices bispinoriales.

$$(\hat{p} - m)_{il} G_{lk}(x - x') = \delta^{(4)}(x - x') \delta_{il}. \quad (76.7a)$$

(74.6), observando al hacerlo que los únicos promedios respecto del vacío distintos de cero son los correspondientes a los siguientes productos de operadores de creación y de aniquilación:

$$\langle 0 | a_p a_p^\dagger | 0 \rangle = 1, \quad \langle 0 | b_p b_p^\dagger | 0 \rangle = 1.$$

(Puesto que en el estado de vacío no existe partícula alguna, antes de «aniquilar» una partícula mediante el operador  $a_p$  o  $b_p$ , hay que «crearla» mediante el operador  $a_p^\dagger$  o  $b_p^\dagger$ ). Se obtendrá

$$\begin{aligned} G_{ik}(x - x') &= -i \sum_p \psi_{pi}(\mathbf{r}, t) \bar{\psi}_{pk}(\mathbf{r}', t') = \\ &= -i \sum_p e^{-i\varepsilon(t-t')} \psi_{pi}(\mathbf{r}) \bar{\psi}_{pk}(\mathbf{r}') \quad \text{para } t - t' > 0; \end{aligned} \quad (76.12)$$

$$\begin{aligned} G_{ik}(x - x') &= i \sum_p \bar{\psi}_{-pk}(\mathbf{r}', t') \psi_{-pi}(\mathbf{r}, t) = \\ &= i \sum_p e^{i\varepsilon(t-t')} \psi_{-pi}(\mathbf{r}) \bar{\psi}_{-pk}(\mathbf{r}') \quad \text{para } t - t' < 0 \end{aligned}$$

(cuando  $t > t'$  contribuyen en  $G$  únicamente los términos de electrón, y cuando  $t < t'$ , sólo los términos de positón).

Imaginando que la suma respecto de  $\mathbf{p}$  se substituye por la integración respecto de  $d^3 p$  y comparando (76.12) con (76.11), vemos que la integral

$$\int e^{-ip_0\tau} G(p) dp_0 \quad (76.13)$$

debe tener un factor de fase  $e^{-i\varepsilon\tau}$  para  $\tau > 0$  y  $e^{i\varepsilon\tau}$  para  $\tau < 0$ . Satisfacemos esta condición si convenimos en sortear los polos  $p_0 = \varepsilon$  y  $p_0 = -\varepsilon$ , respectivamente, por arriba y por abajo (en el plano de la variable compleja  $p_0$ ):



En efecto, cuando  $\tau > 0$  cerraremos el camino de integración por una semicircunferencia infinitamente alejada en el semiplano inferior, con lo cual el valor de la integral vendrá dado por el residuo en el polo  $p_0 = +\varepsilon$ ; cuando  $\tau < 0$ , cerraremos el contorno en el semiplano superior y la integral vendrá determinada por el residuo en el polo  $p_0 = -\varepsilon$ . En ambos casos se obtiene el resultado pedido.

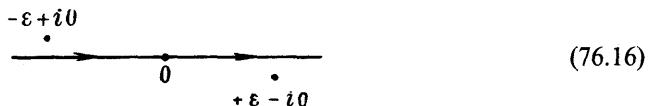
Esta regla para sortear los polos (*regla de Feynman*) se puede formular de otra manera: la integración se efectúa siempre a lo largo del propio eje real, pero a la masa de la partícula  $m$  se atribuye una parte imaginaria negativa infinitamente pequeña:

$$m \rightarrow m - i0. \quad (76.15)$$

Se tiene entonces, en efecto,

$$\varepsilon \rightarrow \sqrt[m]{\mathbf{p}^2 + (m - i0)^2} = \sqrt[m]{\mathbf{p}^2 + m^2 - i0} = \varepsilon - i0.$$

En otras palabras, los polos  $p_0 = \pm \varepsilon$  se desplazan hacia abajo y hacia arriba a partir del eje real:



de modo que la integración a lo largo de este eje resulta equivalente a la integración a lo largo del camino (76.14)\*. Teniendo en cuenta la regla (76.15), el propagador (76.10) se puede escribir en la forma

$$G(p) = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i0}. \quad (76.17)$$

La regla de integración asociada con el desplazamiento de un polo se traduce en la siguiente relación:

$$\frac{1}{x + i0} = P \frac{1}{x} - i\pi\delta(x). \quad (76.18)$$

Ésta hay que interpretarla en el sentido de que al multiplicar por una función  $f(x)$  arbitraria e integrar se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x + i0} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx - i\pi f(0) \quad (76.19)$$

(donde el trazo en el signo de la integral, o el símbolo  $P$ , designan el valor principal).

La función de Green (76.10) es el producto del factor bispinorial  $\hat{p} + m$  y el escalar:

$$G^{(0)}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2}. \quad (76.20)$$

La correspondiente función de las coordenadas  $G^{(0)}(\xi)$  es, evidentemente, solución de la ecuación

$$(p^2 - m^2) G^{(0)}(x - x') = \delta^{(4)}(x - x'), \quad (76.21)$$

es decir, es función de Green de la ecuación  $(p^2 - m^2)\psi = 0$ . En este sentido cabe decir que  $G^{(0)}(x - x')$  es el propagador de las partículas escalares. Mediante el cálculo se comprueba fácilmente (de manera análoga a cómo se ha procedido antes), que la función propagación de un campo escalar se expresa en función de los operadores- $\psi$  (11.2) por la fórmula

$$G^{(0)}(x - x') = -i \langle 0 | T\psi(x) \psi^+(x') | 0 \rangle, \quad (76.22)$$

análoga a la definición (76.1). En este caso el producto cronológico se define (como para operadores de bosón cualesquiera) de la manera siguiente:

\* Conviene observar que la regla de desplazamiento de los polos corresponde al hecho de que  $G(x - x')$  experimente un amortiguamiento infinitamente pequeño respecto de  $|t - t'|$ .

$$T\psi(x)\psi^+(x') = \begin{cases} \psi(x)\psi^+(x'), & t > t' ; \\ \psi^+(x')\psi(x), & t < t' \end{cases}$$

(con signos iguales para  $t > t'$  y  $t < t'$ ).

### § 77. Propagador de fotón

Hasta aquí tuvimos que utilizar (en los §§ 43, 75) la forma explícita de los operadores  $A$  del campo electromagnético al hallar los elementos de matriz tan sólo con relación al cambio del número de fotones reales. Para este fin bastó la representación de los potenciales del campo libre dada en el § 2 como desarrollo en ondas planas transversales.

Dicha representación, sin embargo, no proporciona por si sola una descripción completa de un campo arbitrario. Esto resulta claro ya en la situación análoga que encontramos en la electrodinámica clásica: un campo arbitrario (cuando existen cargas) no puede desarrollarse en ondas transversales; junto con la parte transversal del campo (descrita por el potencial vector que obedece a la condición  $\text{div } A = 0$ ), existe también una interacción estática, coulombiana, que se representa por el potencial escalar  $\Phi^*$ .

Así, pues, en esencia no poseemos todavía una definición completa de los operadores  $A$ , sin la cual es imposible el cálculo directo del propagador de fotón de acuerdo con la fórmula

$$D_{\mu\nu}(x - x') = i \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(x') | 0 \rangle. \quad (77.1)$$

Por otra parte, la no-univocidad de contraste de los potenciales priva en grado considerable de sentido físico aquellos operadores que fue necesario introducir para una cuantificación completa del campo electromagnético.

Estas dificultades, sin embargo, tienen solamente un carácter formal, no un carácter físico, y es posible evitarlas acudiendo a algunas propiedades generales del propagador que son evidentes de antemano en virtud de las condiciones impuestas de invariancia relativista y de contraste.

La forma más general de un 4-tensor de segundo orden que depende solamente del 4-vector  $\xi = x - x'$ , es

$$D_{\mu\nu}(\xi) = g_{\mu\nu} D(\xi^2) - \partial_\mu \partial_\nu D^{(I)}(\xi^2), \quad (77.2)$$

\* Cuando se cumple la condición  $\text{div } A = 0$ , las ecuaciones de Maxwell conducen a las siguientes ecuaciones para  $A$  y  $\Phi$ :

$$\square A = -4\pi j + \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \Delta \Phi = -4\pi \rho.$$

En estas condiciones,  $A$  se puede desarrollar en ondas transversales (soluciones de la ecuación homogénea  $\square A = 0$ ). En cambio, el potencial  $\Phi$  satisface la ecuación estática de Poisson.

donde  $D$ ,  $D^{(l)}$  son funciones escalares del invariante  $\xi^2$ . \* Observemos que el tensor resulta simétrico automáticamente.

De acuerdo con esto, en la representación de impulsos tendremos

$$D_{\mu\nu}(k) = D(k^2)g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu D^{(l)}(k^2), \quad (77.3)$$

donde  $D(k^2)$ ,  $D^{(l)}(k^2)$  son las componentes de Fourier de las funciones  $D(\xi^2)$ ,  $D^{(l)}(\xi^2)$ .

En las magnitudes físicas — las amplitudes de dispersión — el propagador de fotón aparece multiplicado por las corrientes de transición de dos electrones, es decir, en combinaciones de la forma  $j^\mu{}_{21}D_{\mu\nu}j^\nu{}_{43}$  [véase, por ejemplo (74.13)]. Pero en virtud de la conservación de la corriente ( $\partial_\mu j^\mu = 0$ ), sus elementos de matriz  $j_{21} = \bar{\psi}_2 \gamma \psi_1$  satisfacen la condición de 4-transversalidad

$$k_\mu (j^\mu)_{21} = 0, \quad (77.4)$$

donde  $k = p_2 - p_1$  [cf. (43.13)]. Es claro, por ello, que ningún resultado físico varía al efectuar la sustitución

$$D_{\mu\nu} \rightarrow D_{\mu\nu} + \chi_\mu k_\nu + \chi_\nu k_\mu, \quad (77.5)$$

donde  $\chi_\mu$  son funciones arbitrarias de  $\mathbf{k}$  y  $k_0$ . Esta arbitrariedad en la elección de  $D_{\mu\nu}$  corresponde a la arbitrariedad en la elección del contraste de los potenciales del campo.

Una transformación de contraste arbitraria (77.5) puede violar la forma invariante relativista de  $D_{\mu\nu}$  que se ha supuesto en (77.3) (si las cantidades  $\chi_\mu$  no forman un 4-vector). Pero incluso manteniéndonos dentro de los límites de las formas relativísticamente invariantes del propagador, vemos que la elección de la función  $D^{(l)}(k^2)$  en (77.3) es por completo arbitraria; dicha elección no se reflejará en los resultados físicos y puede hacerse según convenga \*\*.

De esta manera, el problema de hallar la función propagación se reduce a determinar una sola función  $D(k^2)$  que posea la invariancia de contraste. Si se considera un valor dado de  $k^2$  y se elige el eje  $z$  en la dirección de  $\mathbf{k}$ , la transformación (77.5) no modificará las componentes  $D_{xx} = D_{yy} = -D(k^2)$ . Basta, por lo tanto, calcular únicamente la componente  $D_{xx}$ , utilizando al hacerlo cualquier contraste de los potenciales.

Utilicemos el contraste en el cual  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  y el operador  $\mathbf{A}$  viene dado por el desarrollo (2.17-18):

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} (c_{\mathbf{k}\alpha} e^{(\alpha)} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + c_{\mathbf{k}\alpha}^+ e^{(\alpha)*} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}), \quad \omega = |\mathbf{k}| \quad (77.6)$$

(el índice  $\alpha = 1, 2$  numera las polarizaciones). De todos los valores medios respecto

\* Estas funciones son distintas en tres dominios de valores del argumento que no se transforman entre sí en las transformaciones de Lorentz: fuera del cono de luz ( $\xi^2 < 0$ ) en la región cónica superior ( $\xi^2 > 0$ ,  $\xi_0 > 0$ ) y en la región cónica inferior ( $\xi^2 > 0$ ,  $\xi_0 < 0$ ).

\*\* L. D. Landau, A. A. Abrikosov e I. M. Jajatnikov, señalaron esta circunstancia (1954).

del vacío de los productos de operadores  $c, c^+$  son distintos de cero únicamente los  $\langle 0|c_{k\alpha}c_{k\alpha}^+|0\rangle = 1$ . Según la definición (77.1) obtendremos, por consiguiente,

$$D_{ik}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{2\pi i d^3 k}{\omega} \left( \sum_{\alpha} e_i^{(\alpha)} e_k^{(\alpha)*} \right) e^{-i\omega|\tau| + ik \cdot \xi} \quad (77.7)$$

[ $i, k = x, y, z$  son índices vectoriales tridimensionales; hemos pasado de la suma respecto de  $\mathbf{k}$  a la integración respecto de  $d^3 k / (2\pi)^3$ ].

Por (77.7) es evidente que el integrando sin el factor  $e^{ik \cdot \xi}$  es la componente del desarrollo tridimensional de Fourier de la función  $D_{ik}(\mathbf{r}, t)$ . Para  $D_{xx} = -D$  dicha componente es igual a

$$\frac{2\pi i}{\omega} e^{-i\omega|\tau|}$$

(la suma respecto de las polarizaciones es tal que  $\sum |e_x^{(\alpha)}|^2 = 1$ ). Para hallar  $D_{xx}(k^2)$  hace falta desarrollar esta función en integral de Fourier respecto del tiempo. Este desarrollo viene dado por la fórmula

$$\frac{2\pi i}{\omega} e^{-i\omega|\tau|} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi}{k_0^2 - k^2 + i0} e^{-ik_0\tau} dk_0.$$

Conforme se explicó en el párrafo que precede, dicha integración presupone un cierto criterio para sortear los polos  $k_0 = \pm |\mathbf{k}| = \pm \omega$  por encima y por debajo, respectivamente; para  $\tau > 0$  la integral viene determinada por el residuo en el polo  $k_0 = +\omega$ , y para  $\tau < 0$ , por el residuo en el polo  $k_0 = -\omega$ .

De esta manera se encuentra finalmente

$$D(k^2) = \frac{4\pi}{k^2 + i0}. \quad (77.8)$$

La presencia en el denominador del sumando  $+i0$  al que nos ha conducido automáticamente el razonamiento expuesto, coincide con la regla (76.15): de la masa del fotón (igual a cero) se resta  $i0$ . De (77.8) se sigue, evidentemente, que la correspondiente función de las coordenadas  $D(\xi^2)$  satisface la ecuación

$$-\partial_\mu \partial^\mu D(x - x') = 4\pi \delta^{(4)}(x - x'), \quad (77.9)$$

es decir, es una función de Green de la ecuación de onda.

De ordinario supondremos  $D^{(l)} = 0$ , es decir, utilizaremos como propagador una función de la forma

$$D_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} D(k^2) = \frac{4\pi}{k^2 + i0} g_{\mu\nu}. \quad (77.10)$$

Indiquemos también otros métodos de contraste que pueden presentar determinadas ventajas en ciertas aplicaciones.

Haciendo  $D^{(l)} = -D/k^2$ , obtendremos el propagador en la forma

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (77.11)$$

(contraste de Landau). En este caso es  $D_{\mu\nu} k^\nu = 0$ . Esta elección es análoga al contraste de Lorentz de los potenciales ( $A_\mu k^\mu = 0$ ).\*

El contraste de los potenciales por la condición tridimensional  $\operatorname{div} A = 0$  es análogo al contraste del propagador mediante las condiciones  $D_{il} k^l = 0$ ,  $D_{0l} k^l = 0$ . Junto con la igualdad  $D_{xx} = -D = -4\pi/k^2$ , estas condiciones dan

$$D_{il} = -\frac{4\pi}{\omega^2 - k^2} \left( \delta_{il} - \frac{k_i k_l}{k^2} \right). \quad (77.12)$$

Para obtener una función  $D_{il}$  de estas características, hay que aplicar al propagador (77.10) la transformación (77.5) haciendo

$$\chi_0 = -\frac{4\pi\omega}{(\omega^2 - k^2)k^2}, \quad \chi_i = \frac{4\pi k_i}{(\omega^2 - k^2)k^2}.$$

A la vez, para las restantes componentes  $D_{\mu\nu}$  se obtiene

$$D_{00} = -\frac{4\pi}{k^2}, \quad D_{0i} = 0. \quad (77.13)$$

Este contraste se llama de Coulomb (E. Salpeter, 1952); obsérvese que  $D_{00}$  es aquí la componente de Fourier del potencial coulombiano.

Finalmente, a la calibración de los potenciales por la condición  $\Phi = 0$  es análoga la calibración del propagador en la cual

$$D_{il} = -\frac{4\pi}{\omega^2 - k^2} \left( \delta_{il} - \frac{k_i k_l}{\omega^2} \right), \quad D_{0i} = D_{00} = 0. \quad (77.14)$$

Esta forma resulta cómoda para la aplicación en los problemas no-relativistas (I. E. Dzialoshinskii, L. P. Pitaevskii, 1959).

### § 78. Reglas generales de la técnica de diagramas

Los cálculos efectuados en los §§ 74, 75 para algunos casos sencillos de elementos de la matriz de dispersión encierran en sí todos los rasgos principales del método general. No exige un esfuerzo especial el establecer, mediante las correspondientes generalizaciones, las reglas del cálculo de los elementos de matriz en un orden cualquiera de la teoría de perturbaciones.

Conforme se indicó ya, el elemento de matriz del operador de dispersión S

\* Por la fórmula análoga

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2 - m^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right), \quad (77.11a)$$

se da el propagador para partículas de spin 1 que poseen masa no nula. En este caso no existe la invariancia de contraste y la elección del propagador es única. La estructura tensorial del propagador (77.11a), como debe ser, coincide con la estructura de la matriz densidad de las partículas vectoriales no polarizadas (14.15).

correspondiente a la transición entre dos estados cualesquiera inicial y final coincide con el valor medio respecto del vacío del operador que se obtiene multiplicando  $S$  a la derecha por los operadores de creación de las partículas iniciales y a la izquierda por los operadores de aniquilación de todas las partículas finales.

Como resultado de esta reducción el elemento de la matriz- $S$  en el  $n$ -ésimo orden de la teoría de perturbaciones toma la forma

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(n)} | i \rangle = \\ = \frac{(-ie)^n}{n!} \langle 0 | \dots b_{3f} b_{1f} \dots a_{1f} \dots c_{1f} | \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n T \{ (\bar{\Psi}_1 \hat{A}_1 \Psi_1) \dots (\bar{\Psi}_n \hat{A}_n \Psi_n) \} \times \\ \times c_{1i}^\dagger \dots a_{1i}^\dagger \dots b_{1i}^\dagger \dots | 0 \rangle \end{aligned} \quad (78.1)$$

[los índices  $1i, 2i, \dots$  numeran las partículas iniciales (por separado los positones, electrones y fotones), los índices  $1f, 2f, \dots$ , las partículas finales; los índices  $1, 2, \dots$  en los operadores  $\Psi$  y  $A$  tienen el significado siguiente:  $\Psi_1 = \Psi(x_1), \dots$ ]. Los operadores  $\Psi, A$  que aquí intervienen son combinaciones lineales de operadores de creación y de aniquilación de las correspondientes partículas en los diferentes estados. De esta manera obtenemos para los elementos de matriz una expresión en forma de promedios respecto del vacío de los productos de operadores de creación y de aniquilación de las partículas y de sus combinaciones lineales. El cálculo de tales promedios se efectúa de acuerdo con las siguientes proposiciones que constituyen el contenido del *teorema de Wick* (1950).

1) El promedio respecto del vacío del producto de un número cualquiera de operadores de bosón  $c^\dagger, c$  es igual a la suma de los productos de todos los promedios posibles de pares (enlaces o contracciones) de estos operadores. En cada par los factores deben figurar en el mismo orden que en el producto inicial.

2) Para los operadores de fermión  $a^\dagger, a, b^\dagger, b$  (de partículas iguales o distintas) la regla cambia tan sólo en que cada término interviene en la suma con el signo + o el signo — según sea par o impar el número de transposiciones de operadores de fermión que son necesarias para colocar uno junto a otro todos los operadores que se promedian dos a dos.

Es claro que el valor medio puede ser diferente de cero tan sólo si junto con cada uno de los factores  $a, b, c$  figuran en el producto también los factores  $a^\dagger, b^\dagger, c^\dagger$ . Además, hay que enlazar solamente pares de operadores  $(a, a^\dagger), \dots$ , que corresponden a estados iguales y, por supuesto, solamente aquellos en los que  $a^\dagger, \dots$  aparece a la derecha de  $a, \dots$ : la partícula es primero creada y luego aniquilada (en cambio, los valores medios  $\langle 0 | a^\dagger a | 0 \rangle = 0, \dots$ ).

Si cada par  $(a, a^\dagger), \dots$  aparece en el producto una sola vez, el teorema de Wick es evidente (el valor medio se reduce entonces a un único producto de promedios de pares). El teorema es también evidente cuando todos los operadores de aniquilación  $a, b, c$  aparecen en el producto a la derecha de los operadores de creación  $a^\dagger, b^\dagger, c^\dagger$  (estos productos se califican de *normales*); el valor medio es entonces igual a cero. A partir de aquí es fácil demostrar por inducción completa el teorema

de Wick para el caso general en que un mismo par de operadores aparece en el producto un cierto número ( $k$ ) de veces.

Consideremos el valor medio  $\langle 0|..cc^+..|0\rangle$  en el cual un par de operadores de bosón  $c, c^+$  aparece  $k$  veces (los razonamientos que siguen son del todo análogos para los operadores de fermión). Permutando los factores  $c, c^+$  en un cierto par, obtendremos, basándonos en las reglas de conmutación,

$$\langle 0|..cc^+..|0\rangle = \langle 0|..c^+c..|0\rangle + \langle 0|..1..|0\rangle. \quad (78.2)$$

El valor medio  $\langle 0..1..|0\rangle$  contiene  $k - 1$  pares y para él se supone válido el teorema de Wick. Por otra parte, si se desarrolla el valor medio  $\langle 0|..c c^+..|0\rangle$  siguiendo la regla del teorema de Wick, dicho valor medio diferirá del valor medio  $\langle 0|..c^+c..|0\rangle$  precisamente en el término

$$\langle 0|..1..|0\rangle \langle 0|cc^+|0\rangle = \langle 0|..1..|0\rangle$$

(al desarrollar  $\langle 0|..c^+c..|0\rangle$  el término análogo  $\langle 0|..1..|0\rangle \langle 0|c^+c|0\rangle = 0$ ). Por ello, de (78.2) se sigue que si el teorema de Wick es válido para el elemento de matriz  $\langle 0|..c^+c..|0\rangle$ , también lo es después de permutar  $c$  y  $c^+$ . Dado que para un determinado orden (el normal) de los factores el teorema de Wick es válido evidentemente, dicho teorema es por ello válido en el caso general\*.

Dado que el teorema de Wick es válido para los productos de operadores  $a, b, \dots$ , también lo es para productos cualesquiera que contengan, junto con los operadores  $a, b, \dots$ , también sus combinaciones lineales  $\psi, \bar{\psi}, A$ . Aplicando este teorema al elemento de matriz (78.1), éste aparece como suma de términos cada uno de los cuales será el producto de ciertos promedios de pares. Entre estos últimos se encontrarán contracciones de operadores  $\psi, \bar{\psi}, A$  con operadores «exteriores» — es decir, con los operadores de creación de las partículas iniciales o los de aniquilación de las partículas finales. Estos enlaces se expresan mediante las funciones de onda de las partículas iniciales y finales de acuerdo con las fórmulas:

\* Como ejemplo escribamos los valores medios respecto del vacío de los productos de cuatro operadores (dos pares idénticos). Para operadores de bosón tenemos

$$\begin{aligned} \langle 0|cc^+cc^+|0\rangle &= \overbrace{cc^+} \overbrace{cc^+} = 1, \\ \langle 0|ccc^+c^+|0\rangle &= \underbrace{c}_{\text{contracción}} \underbrace{c^+}_{\text{contracción}} + \underbrace{c}_{\text{contracción}} \underbrace{c^+}_{\text{contracción}} = 2, \end{aligned}$$

donde las contracciones se designan por vínculos. Es fácil comprobar que este mismo resultado se obtendría también mediante el cálculo directo según los elementos de matriz. Así,

$$\langle 0|ccc^+c^+|0\rangle = \langle 0|c|1\rangle \langle 1|cc^+|1\rangle \langle 1|c^+|0\rangle = 1 \cdot 2 \cdot 1.$$

Para los operadores de fermión, el mismo enlace da

$$\begin{aligned} \langle 0|aa^+aa^+|0\rangle &= 1, \\ \langle 0|aaa^+a^+|0\rangle &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

(la última igualdad, naturalmente, era de prever basándose en el principio de Pauli: la creación de dos fermiones en un mismo estado es imposible).

$$\begin{aligned} \langle 0 | A c_p^+ | 0 \rangle &= A_p, \quad \langle 0 | c_p A | 0 \rangle = A_p^*, \\ \langle 0 | \bar{\psi} a_p^+ | 0 \rangle &= \psi_p, \quad \langle 0 | a_p \bar{\psi} | 0 \rangle = \bar{\psi}_p, \\ \langle 0 | b_p \bar{\psi} | 0 \rangle &= \psi_{-p}, \quad \langle 0 | \bar{\psi} b_p^+ | 0 \rangle = \bar{\psi}_{-p}, \end{aligned} \quad (78.3)$$

donde  $A_p$ ,  $\psi_p$  son funciones de onda de fotón y de electrón con impulsos  $p$  (al igual que en los §§ 74, 75 no escribimos, para abreviar, los índices de polarización). Se encontrarán también contracciones de operadores « interiores » que siguen al signo de productos- $T$ . Dado que al aplicar el teorema de Wick el orden de los factores se conserva en cada par enlazado, en estos enlaces se conserva también el orden cronológico de los operadores, con lo cual éstos se substituyen por los correspondientes propagadores \*.

Cada uno de los términos de la suma en que se descompone el elemento de matriz como resultado de su desarrollo de acuerdo con el teorema de Wick, se representa por un determinado diagrama de Feynman. El diagrama de  $n$ -ésima aproximación contiene  $n$  vértices con cada uno de los cuales se encuentra en correspondencia una de las variables de integración — uno de los 4-vectores  $x_1, x_2, \dots$ . En cada vértice se unen tres rayos — dos de trazo continuo (líneas de electrón) y uno de trazos (línea de fotón), a los que corresponden operadores de electrón ( $\psi$  y  $\bar{\psi}$ ) y de fotón ( $A$ ) como funciones de una misma variable  $x$ . Además, al operador  $\psi$  corresponde la línea que incide en dicho vértice, y al  $\bar{\psi}$ , la que parte de él.

Para ilustrar estas ideas presentaremos algunos ejemplos de correspondencia entre diagramas y términos del elemento de matriz de 3.<sup>a</sup> aproximación. Prescindiendo del signo de integral y del signo T y no indicando los argumentos de los operadores, escribiremos estos términos simbólicamente en la forma

$$\begin{aligned} a) \quad (\bar{\psi} \hat{A} \psi) (\bar{\psi} \hat{A} \psi) (\bar{\psi} \hat{A} \psi) &= \text{Diagrama } a, \\ b) \quad (\bar{\psi} \hat{A} \psi) (\bar{\psi} \hat{A} \psi) (\bar{\psi} \hat{A} \psi) &= \text{Diagrama } b, \\ c) \quad (\bar{\psi} \hat{A} \psi) (\bar{\psi} \hat{A} \psi) (\bar{\psi} \hat{A} \psi) &= \text{Diagrama } c, \end{aligned} \quad (78.4)$$

\* Acerca de esto último hay que hacer la siguiente observación. Al demostrar el teorema de Wick hemos utilizado las reglas de commutación de los operadores  $c$ ,  $c^*$ , que tienen únicamente sentido para los fotones reales (« transversales »). Los operadores « exteriores »  $c_i^+$ ,  $c_f$  corresponden, claro está, precisamente a tales fotones (los iniciales y los finales). En cambio los operadores  $A$  (que siguen al signo de producto- $T$ ) conforme se indicó en el § 77, no sólo representan campos electromagnéticos transversales. La situación es aquí la misma que cuando se calculó  $D_{\mu\nu}$  en el § 77. En virtud de la invariancia relativista y la de contraste, basta demostrar el teorema para aquellos productos (es decir, aquellas componentes de los tensores  $\langle 0 | T A_\mu A_\nu \dots | 0 \rangle$ ) que vienen determinados por las partes transversales de los potenciales. Con ello el teorema será también válido para productos cualesquiera.

$$d) (\bar{\psi} \hat{A} \psi) (\bar{\psi} \hat{A} \psi) (\bar{\psi} \hat{A} \psi) = \text{---} \circ \text{---} \mid$$

Para que resulte más intuitivo, los enlaces de electrón y de fotón se han representado, al igual que en el diagrama, por vínculos de trazo continuo y de trazos, respectivamente. La dirección de las flechas en los enlaces de electrón — de  $\bar{\psi}$  a  $\psi$  — corresponde a su sentido en los diagramas. Para los enlaces interiores de fotón, el sentido es indiferente (lo que se manifiesta también en la paridad del propagador de fotón como función de  $x - x'$ ).

Entre los términos obtenidos de esta manera los hay que son equivalentes, difiriendo entre sí tan sólo en la permutación de los números de los vértices — es decir, en la correspondencia entre vértices y números de las variables  $x_1, x_2, \dots$ , esto es, sencillamente en la designación de las variables de integración. El número de tales permutaciones es igual a  $n!$  Este factor reduce al factor  $1/n!$  en (78.1), con lo cual ya no es necesario considerar los diagramas con vértices permutados. Con esta situación nos encontramos ya en los §§ 74, 75. Así, son equivalentes los dos diagramas de 2.<sup>a</sup> aproximación:

$$\begin{aligned} (\bar{\psi} \hat{A} \psi) (\bar{\psi} \hat{A} \psi) &= \left\{ \text{---} \circ \text{---} \mid \right. \\ (\bar{\psi} \hat{A} \psi) (\bar{\psi} \hat{A} \psi) &= \left. \text{---} \circ \text{---} \mid \right\} \end{aligned} \quad (78.5)$$

En (78.4) y (78.5) se han representado solamente los enlaces interiores, a los que corresponden líneas interiores de los diagramas (electrones y fotones virtuales). Los operadores libres que quedan se enlazan con operadores exteriores, y el resultado de este enlace es el establecimiento de una correspondencia entre los terminales libres de los diagramas y las partículas iniciales y finales. En estas condiciones,  $\bar{\psi}$  (al enlazarse con los operadores  $a_i$  o  $b_i$ ) da una línea de electrón final o de positón inicial, y  $\psi$  (al enlazarse con  $a_i^+$  o  $b_i$ ), una de electrón inicial o de positón final. Un operador libre  $A$  (que se enlaza con  $c_i^+$  o  $c_i$ ) puede corresponder tanto a un fotón inicial como a uno final. De esta manera se obtienen diagramas topológicamente idénticos (es decir, constituidos por un número igual de líneas igualmente dispuestas) que difieren entre sí tan sólo en las permutaciones de partículas iniciales y finales entre los terminales libres incidentes y emergentes.

Cada una de tales permutaciones equivale, evidentemente, a una determinada permutación de los operadores exteriores  $a, b, \dots$  en (78.1). Es claro, por ello, que si entre las partículas iniciales o entre las finales figuran fermiones idénticos, los signos relativos de los diagramas que difieren en un número impar de transposiciones de terminales libres deben ser opuestos.

Una sucesión no interrumpida de flechas de trazo continuo forma en los diagramas una línea de electrón, a lo largo de la cual las flechas conservan siempre el mismo sentido. Una de estas líneas puede o bien tener dos terminales libres, o formar un lazo cerrado. Así, el diagrama

$$(\bar{\psi} \hat{A} \psi) (\bar{\psi} \hat{A} \psi) = \text{---} \circ \text{---}$$

presenta un lazo con dos vértices. La conservación del sentido a lo largo de una línea de electrón es la expresión gráfica de la conservación de la carga: la carga que «incide» en cada vértice es igual a la carga que «emerge» de él.

La disposición de los índices bispinoriales a lo largo de una línea de electrón continua corresponde a la de escribir las matrices de izquierda a derecha en el movimiento opuesto al de las flechas. Los índices bispinoriales de las líneas de electrón diferentes nunca se entrelazan. A lo largo de una línea no cerrada, la sucesión de índices acaba, en los terminales libres, en funciones de onda de electrón (o de positón). En cambio, en un lazo cerrado, la sucesión de índices se cierra también, es decir, a un lazo corresponde la traza del producto de las matrices dispuestas a lo largo de él. Es fácil ver que esta traza debe tomarse con signo menos.

En efecto, a un lazo con  $k$  vértices corresponde un conjunto de  $k$  contracciones

$$(\bar{\psi} \hat{A} \psi) (\bar{\psi} \hat{A} \psi) \dots (\bar{\psi} \hat{A} \psi)$$

(u otro conjunto equivalente que difiere de éste en la permutación de los vértices). En la  $(k - 1)$ -ésima contracción los operadores  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  se encuentran ya uno junto a otro precisamente en el orden en el que deben aparecer en el propagador de electrón ( $\bar{\psi}$  a la derecha de  $\psi$ ). En cambio, los operadores que se encuentran en los extremos se llevan uno junto a otro mediante un número par de transposiciones con otros operadores- $\psi$ , después de lo cual aparecen en el orden  $\bar{\psi} \psi$ .

Dado que

$$\langle 0 | T \bar{\psi}' \psi' | 0 \rangle = - \langle 0 | T \bar{\psi} \psi' | 0 \rangle$$

(cf. la nota en la pág. 321), la substitución de esta contracción por el correspondiente propagador determina el cambio de signo de toda la expresión.

El paso a la representación de impulsos en el caso general se efectúa de manera del todo análoga a como se hizo en los §§ 74, 75. Junto con la regla general de conservación del 4-impulso, deben cumplirse también las «leyes de conservación» en cada vértice. Sin embargo, todas estas leyes pueden resultar insuficientes para una determinación única de los impulsos de todas las líneas interiores del diagrama. En tales casos hay que integrar todavía respecto de todos los impulsos interiores que queden indeterminados [elemento diferencial  $d^4 p / (2\pi)^4$ ] en todo el espacio- $p$  (en particular, respecto de  $dp_0$  desde  $-\infty$  a  $+\infty$ ).

En los razonamientos que preceden se ha supuesto implícitamente que el papel de perturbación lo representa la interacción entre las propias partículas que participan «activamente» en la reacción (es decir, entre las partículas cuyo estado cambia como resultado del proceso). De manera análoga se estudia también el caso en que en el problema figura un campo electromagnético exterior, es decir, un campo creado por partículas «pasivas», cuyos estados no cambian en el proceso en cuestión.

Sea  $A^{(e)}(x)$  el 4-potencial del campo exterior. Este potencial interviene en el lagrangiano de interacción junto con el operador de fotón  $A$  en forma de suma  $A + A^{(e)}$  (que se multiplica por el operador corriente  $j$ ). Dado que  $A^{(e)}$  no contiene ningún operador, no puede dar lugar a contracciones con otros operadores. Dicho de otra manera, a un campo exterior corresponderán en el diagrama de Feynman únicamente líneas exteriores.

Representaremos  $A^{(e)}$  en forma de integral de Fourier:

$$\begin{aligned} A^{(e)}(x) &= \int A^{(e)}(q) e^{-iqx} \frac{d^4q}{(2\pi)^4}, \\ A^{(e)}(q) &= \int A^{(e)}(x) e^{iqx} d^4x. \end{aligned} \quad (78.6)$$

En las expresiones de los elementos de matriz en la representación de impulsos, el 4-vector  $q$  figurará junto con los 4-impulsos de las otras líneas exteriores que corresponden a partículas reales. Cada una de dichas líneas del campo exterior va acompañada de un factor  $A^{(e)}(q)$  y hay que considerar una tal línea como «incidente» debido al signo del exponente del factor  $e^{-iqx}$  con que aparece  $A^{(e)}(q)$  en la integral de Fourier [a una línea «emergente», en cambio, debería asociarse el factor  $A^{*(e)}(q)$ ]. Si al proceder así resulta que la ley de conservación del 4-impulso no fija de manera única los 4-impulsos de todas las líneas del campo exterior (para 4-impulsos dados de todas las partículas reales), para los  $q$  que queden «libres» se efectúa la integración [respecto de  $d^4q/(2\pi)^4$ ] al igual que para todos los 4-impulsos indeterminados de las líneas del diagrama.

Si el campo exterior no depende del tiempo, se tendrá

$$A^{(e)}(q) = 2\pi\delta(q^0) A^{(e)}(\mathbf{q}) \quad (78.7)$$

donde  $A^{(e)}(q)$  es la componente tridimensional de Fourier:

$$A^{(e)}(\mathbf{q}) = \int A^{(e)}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3x \quad (78.8)$$

A una línea del campo exterior corresponde en este caso  $A^{(e)}(\mathbf{q})$  y se le atribuye el 4-impulso  $q^\mu = (0, \mathbf{q})$  siendo iguales las energías de las líneas de electrón que convergen (junto con la línea del campo) en el correspondiente vértice en virtud de la ley de conservación. Para los impulsos tridimensionales  $\mathbf{p}$  que quedan «libres» de las líneas interiores, hay que efectuar la integración respecto de  $d^3p/(2\pi)^3$ . La amplitud calculada de esta manera  $M_{fi}$  determina, por ejemplo, la sección eficaz de dispersión de acuerdo con (65.25).

Damos a continuación un resumen de las reglas finales de la *técnica de diagramas* de acuerdo con las que se construye la expresión de la amplitud de dispersión en la representación de impulsos.

1) A la  $n$ -ésima aproximación de la teoría de perturbaciones corresponden diagramas con  $n$  vértices en cada uno de los cuales se unen una línea de electrón incidente y una emergente (líneas de trazo continuo) y una línea de fotón (línea de trazos). En la amplitud del proceso de dispersión intervienen todos los diagramas que poseen terminales libres (líneas exteriores) en número igual al número de partículas iniciales y finales.

2) A cada línea de trazo continuo exterior incidente se asocia la amplitud de un electrón inicial  $u(p)$  o de un positón final  $u(-p)$  ( $p$  es el 4-impulso de la partícula). A cada línea de trazo continuo emergente acompaña la amplitud de un electrón final  $\bar{u}(p)$  o de un positón inicial  $\bar{u}(-p)$ .

3) A cada vértice se asocia el 4-vector —  $i\gamma^\mu$ .

4) A cada línea de trazos incidente exterior se asocia una amplitud de fotón inicial  $\sqrt{4\pi}e_\mu$ , y a una línea emergente, la amplitud  $\sqrt{4\pi}e_\mu^*$  de un fotón final ( $e$  es el 4-vector polarización). El índice vectorial  $\mu$  coincide con el índice de la matriz  $\gamma^\mu$  en el correspondiente vértice (de modo que se forma el producto escalar  $\hat{e} = e\gamma$  ó  $\hat{e}^*$ ).

5) A cada línea interior de trazo continuo se asocia el factor  $iG(p)$ , y a una línea de trazos interior, el factor —  $iD_{\mu\nu}(p)$ . Los índices tensoriales  $\mu\nu$  coinciden con los índices de las matrices  $\gamma^\mu$ ,  $\gamma^\nu$  en los vértices unidos por la línea de trazos.

6) A lo largo de cada sucesión ininterrumpida de líneas de electrón las flechas conservan su sentido, y la ordenación de los índices bispinoriales, a lo largo de ellas, corresponde a escribir las matrices de izquierda a derecha en el sentido opuesto al de las flechas. A un lazo cerrado de electrón corresponde la traza del producto de las matrices dispuestas a lo largo del mismo.

7) En cada vértice, los 4-impulsos de las líneas que se cortan en él satisfacen la ley de conservación, es decir, la suma de los impulsos de las líneas incidentes es igual a la suma de los impulsos de las líneas emergentes. Los impulsos de los terminales libres son cantidades dadas (que cumplen la regla general de conservación), atribuyéndose a una línea de positón el impulso —  $p$ . Se integra con relación a los impulsos de las líneas interiores que quedan sin determinar después de tener en cuenta las leyes de conservación en todos los vértices (elemento diferencial  $d^4p/(2\pi)^4$ ).

8) A un terminal incidente libre que corresponde a un campo exterior se asocia el factor  $A^{(e)}(q)$ ; el 4-vector  $q$  está ligado con los 4-impulsos de las otras líneas por la ley de conservación en el vértice. Si el campo es constante, a la línea se asocia el factor  $A^{(e)}(q)$  y hay que integrar respecto de los impulsos tridimensionales de las líneas interiores que quedan sin determinar [elemento diferencial,  $d^3p/(2\pi)^3$ ].

9) El factor común en un diagrama, con el que interviene en  $iM_{fi}$ , será  $e^n$ . Además, un factor complementario —1 se añade por cada lazo cerrado de electrón en el diagrama y a cada par de terminales exteriores de positón, si estos terminales

son el principio y el fin de una sucesión ininterrumpida de líneas de trazo continuo. Si entre las partículas iniciales o entre las finales figuran electrones o positones, el signo relativo de los diagramas que difieren en un número impar de transposiciones de pares de partículas idénticas (es decir, de los correspondientes terminales exteriores) debe ser opuesto\*.

### § 79. Invariancia de cruce

La representación de las amplitudes de dispersión  $M_{fi}$  por integrales de Feynman pone de manifiesto su notable simetría, que consiste en lo siguiente.

Cualquiera de las líneas exteriores incidentes de un diagrama de Feynman se puede considerar (sin cambiar el sentido de su flecha) como una partícula en un estado inicial o una antipartícula en un estado final, y cada línea emergente, como una partícula final o una antipartícula inicial. A la vez que se pasa de una partícula a una antipartícula, cambia también el significado del 4-impulso  $p$  atribuido a la línea:  $p = p_e$  para la partícula (digamos, un electrón) y  $p = -p_p$  para el positón. En el caso del fotón, en tanto que partícula realmente neutra, esto significa simplemente pasar de la emisión de un fotón a su absorción, o recíprocamente: una línea exterior de fotón con impulso  $k$  corresponde o a la absorción de un fotón de impulso  $k_{\text{abs}} = k$  o a la emisión de un fotón de impulso  $k_{\text{em}} = -k$ .

Este cambio del significado de las líneas exteriores es equivalente al paso de un canal de cruce de reacción a otros canales. De aquí se sigue que exactamente la misma amplitud, como función de los impulsos de los terminales libres de los diagramas, describe todos los canales de reacción\*\*. Según sea el canal, cambia únicamente el significado de los argumentos de la función: al pasar de una partícula a una antipartícula se substituye  $p_i \rightarrow -p_f$ , donde  $p_i$  es el 4-impulso de la partícula inicial (en un canal) y  $p_f$  el 4-impulso de la partícula final (en el otro canal). Esta propiedad de la amplitud de dispersión se llama *simetría de cruce* o *invariancia de cruce*.

En términos de las amplitudes introducidas en el § 71, que son funciones de los invariantes cinemáticos, cabe decir que estas funciones serán exactamente las mismas para todos los canales, pero para cada canal sus argumentos toman valores en su propia región física. En otras palabras, las integrales de Feynman determinan las amplitudes invariantes como funciones analíticas; sus valores en las diferentes regiones físicas son prolongación analítica de una función dada en una de las regiones. Dado que los integrandos de las integrales de Feynman presentan singula-

\* Para precisar la última regla añadiremos que, en cualquier caso, deben tener el mismo signo los diagramas con líneas de trazo continuo iguales, es decir, los diagramas que resultarían ser idénticos después de suprimir en ellos todas las líneas de fotón.

Recordaremos también que cuando existen fermiones idénticos el signo común de la amplitud es puramente convencional.

\*\* Si un cierto canal está prohibido por la conservación del 4-impulso, la probabilidad de la transición se anula automáticamente por la función- $\delta$  que figura en (65.5) como factor común.

ridades, también las amplitudes invariantes poseerán singularidades que se determinan a partir de las expresiones de dichas integrales (teniendo en cuenta la regla para sortear los polos). Si las amplitudes invariantes se calculan para un determinado canal mediante integrales de Feynman, también su prolongación analítica a los otros canales tendrá en cuenta automáticamente tales singularidades.

Hay que subrayar que la invariancia de cruce es algo más general que las propiedades de la matriz de dispersión resultantes de las condiciones generales de simetría espacio-temporal. Estas últimas exigen la igualdad de las amplitudes de los procesos que se obtienen uno del otro mediante la permutación de los estados inicial y final acompañada de la substitución de todas las partículas por antipartículas (conservando invariables los impulsos  $\mathbf{p}$  de todas las partículas y el signo de las proyecciones de sus momentos cinéticos). Esta es la condición que impone la invariancia-*CPT*\*. En cambio, la invariancia de cruce permite efectuar dicha transformación no sólo para todas las partículas a la vez, sino también para cada partícula por separado.

### § 80. Partículas virtuales

Las líneas interiores de los diagramas de Feynman representan en la teoría invariante de perturbaciones un papel análogo al papel de los estados intermedios en la teoría «ordinaria». El carácter de estos estados, sin embargo, es diferente en ambas teorías. En la teoría ordinaria, el impulso (tridimensional) se conserva en los estados intermedios, pero no se conserva la energía; en este sentido se dice de ellos que son *estados virtuales*. En la teoría invariante, en cambio, el impulso y la energía intervienen en plan de igualdad. En los estados intermedios se conserva el 4-impulso en conjunto (como resultado del hecho de que en los elementos de la matriz-*S* la integración se efectúa tanto respecto de las coordenadas, como con relación al tiempo, consiguiéndose así la invariancia de la teoría). Sin embargo, cuando así se procede se viola en los estados intermedios el enlace inherente a las partículas reales entre energía e impulso (expresado por la igualdad  $p^2 = m^2$ ). En este sentido, se habla de *partículas virtuales* intermedias. La relación entre el impulso y la energía de una partícula virtual es arbitraria — únicamente aquella que viene impuesta por la conservación del 4-impulso en los vértices.

Consideremos un diagrama constituido por dos partes (I y II) unidas por una línea. No interesándonos la estructura interna de estas partes, representaremos el diagrama esquemáticamente en la forma



\* Hay que observar que la descripción formal del paso de una de las indicadas reacciones a otra mediante el cambio de signo de todos los 4-impulsos en los diagramas de Feynman corresponde al significado de la operación *CPT* en tanto que 4-inversión.

(las líneas representadas pueden ser tanto de trazo continuo como de trazos). En virtud de la ley general de conservación, la suma de los 4-impulsos de las líneas exteriores de las partes I y II son iguales. En virtud de la conservación en cada vértice, a esta misma cantidad será igual también el 4-impulso  $p$  de la línea interior que une las partes I y II. En otras palabras, este impulso está únicamente determinado, de modo que en el elemento de matriz no hay que integrar respecto de él.

Según sea el canal de reacción, el cuadrado  $p^2$  puede ser tanto positivo como negativo. Existe siempre un canal tal que en él será  $p^2 > 0$ \*. Entonces, por sus propiedades formales, la partícula virtual se convierte en algo totalmente análogo a una partícula real, con una masa real  $M = \sqrt{p^2}$ . Para ella se puede introducir un sistema de reposo, se puede determinar su spin, etc.

El propagador de fotón (77.11) coincide por su estructura tensorial con la matriz densidad de una partícula no polarizada de spin 1 con masa diferente de cero:

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{3} \left( g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right)$$

(4-tensor ortogonal al 4-impulso). Por otra parte, el propagador (como magnitud construida como expresión cuadrática a partir de los operadores del campo) representa para una partícula virtual un papel análogo al de la matriz densidad de una partícula real. Por ello, a un fotón virtual hay que atribuirle, al igual que a uno real, spin 1. Sin embargo, en contraste con un fotón real con sus dos polarizaciones independientes, el fotón virtual, en tanto que «partícula» de masa no nula, puede tener las tres polarizaciones.

La función propagación de electrón es

$$G \propto \hat{p} + m.$$

Aquí  $m$  es la masa del electrón real mientras que la «masa» de la partícula virtual vale  $M = \sqrt{p^2}$ . Haciendo

$$\hat{p} + m = \frac{M+m}{2M} (\hat{p} + M) + \frac{M-m}{2M} (\hat{p} - M), \quad (80.2)$$

vemos que el primer término corresponde a la matriz densidad de una partícula de masa  $M$  y spin 1/2, y el segundo término, a la matriz densidad de la correspondiente «antipartícula» [cf. (29.10) y (29.17)]. Recordando que una partícula y su antipartícula tienen paridades intrínsecas diferentes (§ 27), llegamos a la conclusión de que a un electrón virtual hay que atribuirle el mismo spin 1/2, pero que es imposible atribuirle una paridad determinada.

Una peculiaridad característica del diagrama (80.1) consiste en que se puede

\* Tal es, por ejemplo, el canal (si es admisible energéticamente) en el cual todos los terminales libres de la parte I corresponden a las partículas iniciales, y los de la parte II, a las finales. Entonces es  $p = P_i$  (suma de los 4-impulsos de todas las partículas iniciales) y en el sistema del centro de masa se tiene  $p = (P_i^0, 0)$ , de modo que  $p^2 > 0$ .

descomponer en dos partes no ligadas entre sí sin más que cortar una sola línea interior\*. Esta línea corresponde en tal caso a un estado intermedio de una sola partícula — a un estado con una única partícula virtual —. La amplitud de dispersión que corresponde a dicho diagrama contiene un factor característico (que no se integra!)

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i0},$$

que procede de la línea interior  $p$  (siendo  $m$  la masa del electrón si la línea es de electrón o  $m = 0$  si es una línea de fotón). En otras palabras, la amplitud de dispersión posee un polo para aquellos valores  $p$  para los cuales la partícula virtual se convertiría en partícula física ( $p^2 = m^2$ ). Esta situación es análoga a la que se presenta cuando en la mecánica cuántica no-relativista la amplitud de dispersión tiene polos para ciertos valores de la energía, valores que corresponden a estados de enlace del sistema constituido por las partículas que chocan (III, § 128).

Consideremos el diagrama (80.1) para el canal de reacción en el cual todos los terminales libres a la derecha corresponden a partículas iniciales, y todos los de la izquierda a partículas finales; con esto  $p^2 > 0$ . Entonces cabe decir que en el estado intermedio el sistema de partículas iniciales se transforma en una partícula virtual. Ello es posible tan sólo si dicha transformación no contradice las leyes necesarias de conservación (aparte la conservación del 4-impulso): conservación del momento cinético, de la carga, de la paridad de carga, etc. En esto consiste precisamente la condición necesaria para que se presenten los llamados *diagramas polares*. Si existen para uno de los canales, dichos diagramas existirán también, por ello mismo, para los demás canales de reacción en virtud de la invariancia de cruce.

Por ejemplo, las leyes de conservación indicadas no impiden el que aparezca un electrón virtual de acuerdo con  $e + \gamma \rightarrow e$ . Esta posibilidad corresponde a un polo de la amplitud del efecto Compton (y, en consecuencia, también para otro canal de esta reacción — la aniquilación de un par electrón-positón con emisión de dos fotones —). La aparición de un fotón virtual de acuerdo con  $e^- + e^+ \rightarrow \gamma$  corresponde a un polo de la amplitud de dispersión de un electrón por un positón y, por lo tanto, también para la dispersión electrón-electrón. En cambio, a partir de dos fotones no es posible obtener ni un electrón virtual ni un fotón virtual (la transformación  $\gamma + \gamma \rightarrow e$  está prohibida por la conservación de la carga y del momento cinético y la transformación  $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma$  lo está por la conservación de la paridad de carga). De acuerdo con esto, la amplitud de dispersión fotón-fotón no puede contener diagramas polares.

El origen de las singularidades polares de las amplitudes de dispersión, que fijamos partiendo de las integrales de Feynman, tiene en realidad un carácter

\* Esta propiedad la poseen los diagramas de casi todos los procesos en la primera aproximación no nula.

más general no ligado con la teoría de perturbaciones. Probemos que estas singularidades aparecen ya como consecuencia de la condición de unitariedad (72.2).

Supongamos que entre los  $n$  estados intermedios que figuran en (72.2) hay uno que corresponde a una partícula única. La contribución de este estado es:

$$(T_{fi} - T_{if}^*)^{(\text{unip})} = i(2\pi)^4 \sum_{\lambda} \int \delta^{(4)}(P_f - p) T_{fn} T_{in}^* \frac{Vd^3p}{(2\pi)^3},$$

donde  $p$  y  $\lambda$  son el 4-impulso y la helicidad de la partícula intermedia. La integración respecto de  $d^3p$  la substituiremos por la integración respecto de  $d^4p$  (en la región  $p^0 \equiv \epsilon > 0$ ) de acuerdo con

$$d^3p \rightarrow 2\epsilon \delta(p^2 - M^2) d^4p$$

( $M$  es la masa de la partícula intermedia). La integración elimina la función- $\delta$   $\delta^{(4)}(P_f - p)$ ; pasando luego de las amplitudes  $T_{fi}$  a las amplitudes  $M_{fi}$  según (65.10), obtendremos

$$(M_{fi} - M_{if}^*)^{(\text{unip})} = 2\pi i \delta(p^2 - M^2) \sum_{\lambda} M_{fn} M_{in}^*. \quad (80.3)$$

Suponiendo que se cumplen las invariancias  $T$  y  $P$ , tendremos (salvo un factor de fase)  $M_{if} = M_{f'i'}$ , donde los estados  $i', f'$  difieren de los  $i, f$  únicamente en las helicidades de las partículas (para iguales impulsos). Sumando la igualdad (80.3) y la correspondiente a  $M_{f'i'} - M_{i'f'}^*$ , obtendremos

$$\text{Im } \bar{M}_{fi}^{(\text{unip})} = -\pi \delta(p^2 - M^2) R, \quad (80.4)$$

donde se ha hecho

$$\bar{M}_{fi} = M_{fi} + M_{f'i'},$$

$$R = -\sum_{\lambda} (M_{fn} M_{in}^* + M_{f'n} M_{i'n}^*).$$

De aquí se sigue precisamente que  $\bar{M}_{fi}$ , considerada como función analítica de  $p^2 = P_i^2 = P_f^2$  presenta un polo en  $p^2 = M^2$ . De acuerdo con (76.18) tenemos para la parte correspondiente al polo

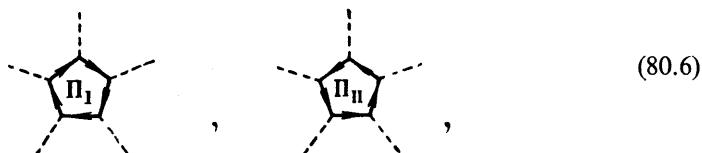
$$\bar{M}_{fi}^{(\text{unip})} = \frac{R}{p^2 - M^2 + i0}. \quad (80.5)$$

Las transiciones reales a un estado de una sola partícula son posibles únicamente para un valor  $P_i^2 = P_f^2$ , igual a  $M^2$ . De esta manera, hemos obtenido la estructura efectiva de la amplitud de dispersión que corresponde a un diagrama de la forma (80.1).

Finalmente, examinemos una importante propiedad de los diagramas que contienen lazos cerrados de electrón. Esta propiedad se puede obtener fácilmente aplicando a un fotón virtual el concepto de paridad de carga: a un fotón virtual, como

también a uno real, hay que atribuir una determinada paridad de carga (negativa)★.

Si un diagrama contiene un lazo cerrado (con un número de vértices  $N > 2$ ), junto con este diagrama debe figurar también en la amplitud del proceso considerado otro diagrama que difiere del primero tan sólo en el sentido en que se recorre el lazo (para  $N = 2$  el concepto de sentido de recorrido carece, evidentemente, de significado). «Cortemos» estos lazos mediante líneas de trazos que inciden sobre él. Obtendremos entonces dos lazos  $\Pi_I$  y  $\Pi_{II}$ :



que se pueden considerar como diagramas que determinan la amplitud del proceso de transformación de un conjunto de fotones (reales o virtuales) en otro; el número  $N$  es, según esto, la suma de los números de fotones iniciales y finales. Pero la conservación de la paridad de carga prohíbe la transformación de un número par de fotones en un número impar. En consecuencia, cuando  $N$  es impar, la suma de las expresiones correspondientes a los lazos (80.6) debe anularse. Por consiguiente, se anula también la contribución total de los dos diagramas a la amplitud de dispersión que contienen estos lazos como partes constituyentes (*teorema de Furry; W. H. Furry, 1937*).

Así, pues, al formar la amplitud de un proceso cualquiera puede siempre prescindirse de los diagramas que contienen lazos con un número impar de vértices.

Investiguemos más detalladamente el origen de esa compensación mutua de los diagramas. A un lazo cerrado de electrón corresponde una expresión (para impulsos dados de las líneas de fotón  $k_1, k_2, \dots, k_N$ )

$$\int d^4 p \cdot \text{Tr} [e_1 G(p) e_2 G(p + k_1) \dots], \quad (80.7)$$

donde  $p, p + k_1, \dots$  son los impulsos de las líneas de electrón (que quedan sin determinar del todo una vez se ha tenido en cuenta las leyes de conservación en los vértices). Aplicemos a las matrices  $\gamma^\mu$  y  $G$  la operación de conjugación de carga, es decir, substituyámoslas por  $U_C^{-1} \gamma^\mu U_C$  y  $U_C^{-1} G U_C$ . La expresión (80.7) no cambia con esto, ya que la traza del producto de matrices es invariante respecto de dicha transformación. Por otra parte, según (26.3)

\* Esto se sigue de las mismas consideraciones acerca del operador de la interacción electromagnética que actúa en cada vértice expuestas al final del § 13 para un fotón real.

$$U_C^{-1} \gamma^\mu U_C = -\tilde{\gamma}^\mu, \quad (80.8)$$

y por esto

$$U_C^{-1} G(p) U_C = \frac{-p\tilde{\gamma} + m}{p^2 - m^2} = \tilde{G}(-p). \quad (80.9)$$

Pero la substitución de  $G(p)$  por la matriz transpuesta con el signo de  $p$  cambiado, significa, evidentemente, invertir el sentido de recorrido del lazo, de modo que los sentidos de todas las flechas se cambian en los opuestos. En otras palabras, la aplicación de dicha transformación hace pasar de uno de los lazos al otro, apareciendo además el factor  $(-1)^N$  que procede de la sustitución (80.8) en cada vértice. Así, pues,

$$\Pi_I = (-1)^N \Pi_{II}, \quad (80.10)$$

es decir, las contribuciones de los dos lazos son iguales para un número par de vértices e iguales y de signos opuestos cuando dicho número es impar.

## CAPÍTULO 9

### INTERACCIÓN DE ELECTRÓNES

#### § 81. Dispersión de un electrón en un campo exterior

La dispersión elástica de un electrón en un campo exterior constante constituye el proceso más simple, que existe ya en la primera aproximación de la teoría de perturbaciones (primera aproximación de Born). A ella corresponde el diagrama con un sólo vértice



donde  $p$  y  $p'$  son los 4-impulsos inicial y final del electrón y  $q = p' - p$ . Dado que la energía del electrón se conserva en la dispersión en un campo constante ( $\epsilon = \epsilon'$ ), se tendrá  $q = (0, \mathbf{q})^*$ .

La correspondiente amplitud de dispersión se escribe

$$M_{fi} = -e\bar{u}(p') \hat{A}^{(e)}(\mathbf{q}) u(p), \quad (81.2)$$

donde  $A^{(e)}(\mathbf{q})$  es la componente del desarrollo espacial de Fourier del campo exterior. La sección eficaz de dispersión vale [de acuerdo con (65.26)]

$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^2} |M_{fi}|^2 d\omega'. \quad (81.3)$$

Para un campo electrostático  $A^{(e)} = (A_0^{(e)}, 0)$ , de manera que

$$M_{fi} = -e\bar{u}(p') \gamma^0 u(p) A_0^{(e)}(\mathbf{q}) = -eu^*(p') u(p) A_0^{(e)}(\mathbf{q}). \quad (81.4)$$

\* En el caso en que existe un campo exterior, este diagrama no está prohibido, naturalmente, por la ley de conservación del 4-impulso [como ocurriría en el diagrama (71.19) con un fotón real]: el cuadrado  $q^2$ , en contraste con el cuadrado del 4-impulso del fotón real, no tiene por qué ser igual a cero; de la integral de Fourier que representa al campo exterior, se elige automáticamente la componente que corresponde al valor necesario de  $q$ .

En el caso no-relativista las amplitudes bispinoriales de las ondas planas  $u(p)$  se reducen a las amplitudes no-relativistas (dos componentes). Para un electrón no polarizado dichas amplitudes constituyen una cantidad independiente de  $p$  y, además, en virtud de la condición de normalización que hemos adoptado se tiene  $u^*u = 2m$ . Teniendo en cuenta esto, obtendremos

$$d\sigma = \left| -\frac{m}{2\pi} U(\mathbf{q}) \right|^2 d\omega,$$

donde  $U(\mathbf{q}) = eA_0^{(e)}(\mathbf{q})$  es la componente de Fourier de la energía potencial del electrón en el campo; esta expresión coincide con la conocida fórmula de Born (III; 125.4).

En el caso relativista general, la sección eficaz de dispersión de electrones no polarizados se obtiene promediando el cuadrado  $|M_{fi}|^2$  respecto de las polarizaciones iniciales y sumando con relación a las finales, es decir, formando la cantidad

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2,$$

donde la suma se extiende a todas las direcciones del spin de los electrones inicial y final; el factor 1/2 transforma una de estas sumas en promedio. Según las reglas expuestas en el § 66, se obtendrá

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = 2 \text{Tr} \rho \hat{A}^{(e)*} \rho' \hat{A}^{(e)} = \frac{1}{2} |A_0^{(e)}(\mathbf{q})|^2 \text{Tr} (m + \hat{p}) \gamma^0 (m + \hat{p}') \gamma^0.$$

Para calcular la traza observemos que  $\gamma^0 \hat{p}' \gamma^0 = \hat{p}'$ , donde  $\hat{p}' = (\epsilon', -\mathbf{p}')$ , y por ello

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{Tr} (m + \hat{p}) \gamma^0 (m + \hat{p}') \gamma^0 &= \frac{1}{4} \text{Tr} (m + \hat{p})(m + \hat{p}') = \\ &= m^2 + p\bar{p}' = \epsilon^2 + m^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = 2\epsilon^2 - \frac{\mathbf{q}^2}{2}. \end{aligned}$$

De aquí se sigue la sección eficaz

$$d\sigma = \frac{e^2 |A_0^{(e)}(\mathbf{q})|^2}{4\pi^2} \epsilon^2 \left( 1 - \frac{\mathbf{q}^2}{4\epsilon^2} \right) d\omega. \quad (81.5)$$

Para un campo creado por una distribución estática de cargas con densidad  $\rho(\mathbf{r})$ , se tiene

$$A_0^{(e)}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi\rho(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2}, \quad (81.6)$$

donde  $\rho(\mathbf{q})$  es la imagen de Fourier de la distribución  $\rho(\mathbf{r})$  (factor de forma). En particular, para el campo coulombiano de una carga puntual  $Ze$  tenemos:  $\rho(\mathbf{q}) = Ze$ . Entonces la sección eficaz de dispersión es

$$d\sigma = d\omega' \frac{4(Ze^2)^2 \epsilon^2}{\mathbf{q}^4} \left( 1 - \frac{\mathbf{q}^2}{4\epsilon^2} \right) \quad (81.7)$$

(N. F. Mott, 1929). El cuadrado  $q^2 = 4\mathbf{p}^2 \operatorname{sen}^2(\theta/2)$ , donde  $\theta$  es el ángulo de dispersión. En consecuencia, debido a su dependencia angular, la expresión ante el paréntesis puede llamarse sección eficaz de Rutherford:

$$d\sigma_{\text{Ruth}} = d\Omega \frac{4(Ze^2)^2 \epsilon^2}{q^4} = d\Omega \frac{(Ze^2)^2 \epsilon^2}{4\mathbf{p}^4} \operatorname{sen}^{-4} \frac{\theta}{2} \quad (81.8)$$

(en el límite no-relativista el coeficiente  $\epsilon^2/\mathbf{p}^4 \rightarrow 1/m^2 v^4$ ). Así, pues, \*

$$d\sigma = d\sigma_{\text{Ruth}} \left( 1 - v^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (81.9)$$

Obsérvese que en el caso ultrarrelativista la distribución angular difiere de la no-relativista por la fuerte disminución de la dispersión hacia atrás (para  $\theta \rightarrow \pi$ :  $d\sigma/d\sigma_{\text{Ruth}} \rightarrow m^2/\epsilon^2$ ).

En el caso ultrarrelativista, (81.7) da para la dispersión a ángulos pequeños

$$d\sigma = \frac{4(Ze^2)^2}{\epsilon^2 \theta^4} d\Omega' \quad (81.10)$$

Aunque esta fórmula la hemos obtenido en la aproximación de Born (es decir, suponiendo  $Ze^2 \ll 1$ ), sin embargo sigue siendo válida también cuando  $Ze^2 \sim 1$  (para ángulos  $\theta \lesssim m/\epsilon$ ). Cabe comprobar que así es utilizando la función de onda ultrarrelativista exacta (respecto de  $Ze^2$ )  $\psi_{\epsilon p}^+$  (39.10). Esta solución, que es válida en el dominio (39.2), sigue siendo válida, naturalmente, en la región asintótica de valores de  $r$  arbitrariamente grandes. Aquí se tiene

$$F \sim 1 + \operatorname{const} \cdot e^{i(\mathbf{p}r - \mathbf{p}'r)}, \quad \frac{\mathbf{a} \cdot \nabla F}{\epsilon} \sim 1 - \cos \theta \sim \theta^2 \ll 1,$$

de modo que el término correctivo se conserva pequeño, como debía ser. Pero una función de onda de la forma  $e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} F$ , que coincide formalmente con la función no-relativista (con un cambio evidente de los parámetros), tiene exactamente la misma expresión asintótica y, por consiguiente, también para la sección eficaz se obtiene la expresión de Rutherford.

Para el cálculo de la sección eficaz de electrones arbitrariamente polarizados cabría utilizar, según las reglas generales, la matriz densidad (29.13). En el caso presente, sin embargo, se puede obtener el resultado de manera menos pesada representando las amplitudes bispinoriales  $u(p')$  y  $u(p)$  en la forma (23.9); multiplicándolas, se obtiene

$$u^*(p') u(p) = w^* \{ \epsilon + m + (\epsilon - m)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \} w,$$

\* La diferencia que expresa esta fórmula entre  $d\sigma$  y  $d\sigma_{\text{Ruth}}$  es específica de las partículas con spin 1/2. En la dispersión de partículas de spin 0 (si su movimiento en un campo electromagnético se describiera por una ecuación de onda) se obtendría  $d\sigma = d\sigma_{\text{Ruth}}$ . A primera vista puede resultar sorprendente que el factor que expresa este efecto puramente cuántico no contenga  $\hbar$ . Sin embargo, hay que recordar que la condición de aplicabilidad de la aproximación de Born ( $\epsilon^2/\hbar v \ll 1$ ) es opuesta a la condición de que el movimiento en el campo de Coulomb sea cuasiclásico y, por lo tanto, la transición al caso clásico en la fórmula (81.9) es imposible.

o bien, utilizando la forma (33.5),

$$u^*(p') u(p) = w'^* f w, \quad (81.11)$$

donde \*

$$f = A + B \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

$$A = (\epsilon + m) + (\epsilon - m) \cos \theta, \quad B = -i(\epsilon - m) \sin \theta, \\ \mathbf{v} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{n}'}{\sin \theta}. \quad (81.12)$$

La cantidad con dos componentes (espinor tridimensional)  $w$  es la función de onda no-relativista espinorial del electrón. El paso a estados parcialmente polarizados se consigue, por ello, substituyendo los productos  $w_\alpha w_\beta^*$  ( $\alpha, \beta$  son índices espinoriales) por la matriz  $2 \times 2$  densidad no-relativista  $\rho_{\alpha\beta}$ . De esta manera, hay que substituir

$$|M_{fi}|^2 \rightarrow e^2 |A_0^{(e)}(\mathbf{q})|^2 \operatorname{Tr} \rho (A - B \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \rho' (A + B \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

donde

$$\rho = \frac{1}{2} (1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\zeta}), \quad \rho' = \frac{1}{2} (1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\zeta}'),$$

y  $\boldsymbol{\zeta}$  y  $\boldsymbol{\zeta}'$  son los vectores polarización inicial y final que ve el detector. El cálculo de la traza conduce al resultado

$$d\sigma = d\sigma_0 \left\{ 1 + \frac{(A^2 - |B|^2) \boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\zeta}' + 2|B|^2 (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\zeta})(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\zeta}') + 2A|B| |\mathbf{v}| [\boldsymbol{\zeta} \times \boldsymbol{\zeta}']} {A^2 + |B|^2} \right\}, \quad (81.13)$$

donde  $d\sigma_0$  es la sección eficaz de dispersión de los electrones no polarizados.

Representando la expresión entre llaves de (81.13) en la forma  $\{1 + \boldsymbol{\zeta}^{(f)} \cdot \boldsymbol{\zeta}'\}$ , hallamos la polarización propia  $\boldsymbol{\zeta}^{(f)}$  del electrón final (que hay que distinguir de la polarización detectada  $\boldsymbol{\zeta}'$ , véase § 66)\*\*:

$$\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = \frac{(A^2 - |B|^2) \boldsymbol{\zeta} + 2|B|^2 (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \mathbf{v} + 2A|B| |\mathbf{v}| \times \boldsymbol{\zeta}}{A^2 + |B|^2}. \quad (81.14)$$

Vemos, pues, que los electrones dispersados están polarizados tan sólo si lo están los electrones incidentes. Esta circunstancia es una propiedad general de la primera aproximación de Born (cf. III, § 138).

En el caso no-relativista ( $\epsilon \rightarrow m$ ) de (81.14) se sigue  $\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = \boldsymbol{\zeta}$ , es decir, el electrón conserva su polarización en la dispersión (lo que es consecuencia natural de haber prescindido de la interacción spin-órbita).

En el caso opuesto, el ultrarrelativista, tenemos

$$A = \epsilon (1 + \cos \theta), \quad B = -i \epsilon \sin \theta$$

[de acuerdo con la fórmula (38.2)].

\* La definición de  $f$  aquí y en el § 38 difieren en un factor común.

\*\* La fórmula (81.14) corresponde a la fórmula obtenida en el problema 1, III, § 138 y resulta de ella en el caso de  $A$  real y  $B$  imaginario.

Si, además, el electrón incidente posee una determinada helicidad ( $\zeta = 2\lambda n$ ,  $\lambda = \pm 1/2$ ), de (81.14) resulta mediante una simple reducción,

$$\xi^{(j)} = 2\lambda n'.$$

En otras palabras, después de la dispersión el electrón sigue poseyendo helicidad, conservando el valor inicial ( $\lambda$ ) de la misma.

Como ya se explicó en el § 38, esta propiedad se debe a que, cuando se prescinde de la masa, la ecuación de Dirac en la representación espinorial se descompone en dos ecuaciones independientes para las funciones  $\xi$  y  $\eta$ . Este resultado tiene incluso una significación más general, puesto que la corriente

$$j = (\xi^* \xi + \eta^* \eta, \xi^* \sigma \xi - \eta^* \sigma \eta),$$

y con ella también la perturbación electromagnética  $V = e j A$ , no contiene términos mezclados respecto de  $\xi$  y  $\eta$ , y, por lo tanto, carece de elementos de matriz no nulos para transiciones entre estados  $\xi$  y  $\eta$ . De aquí se sigue que si un electrón ultrarrelativista posee una determinada helicidad (es decir, si o  $\xi$  o  $\eta$  es diferente de cero), en los procesos de interacción se conservará esta helicidad dentro de la aproximación en la que se prescinde por completo de la masa del electrón.

### § 82. Dispersión de electrones y positones por un electrón

Consideremos la dispersión electrón-electrón: dos electrones con 4-impulsos  $p_1, p_2$  chocan entre sí, adquiriendo los 4-impulsos  $p'_1, p'_2$ . La conservación del 4-impulso se expresa por la igualdad

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2. \quad (82.1)$$

En lo que sigue utilizaremos los invariantes cinemáticos introducidos en el § 67, definidos de acuerdo con

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = 2(m^2 + p_1 p_2), \\ t &= (p_1 - p'_1)^2 = 2(m^2 - p_1 p'_1), \\ u &= (p_1 - p'_2)^2 = 2(m^2 - p_1 p'_2), \\ s + t + u &= 4m^2. \end{aligned} \quad (82.2)$$

El proceso considerado se representa por los dos diagramas de Feynman (74.13-14) y su amplitud es \*

$$M_{fi} = 4\pi e^2 \left\{ \frac{1}{t} (\bar{u}'_2 \gamma^\mu u_2) (\bar{u}'_1 \gamma_\mu u_1) - \frac{1}{u} (\bar{u}'_1 \gamma^\nu u_2) (\bar{u}'_2 \gamma_\nu u_1) \right\}. \quad (82.3)$$

De acuerdo con las reglas señaladas en el § 66, para los estados de las partículas

\* Esta forma de  $M_{fi}$  concuerda con la expresión general (71.5). En la primera aproximación no nula de la teoría de perturbaciones, de las cinco amplitudes invariantes resulta diferente de cero tan sólo una:  $f_3(t, u) = 4\pi e^2/t$ .

iniciales y finales, representados por las matrices densidad de polarización  $\rho_1, \rho'_1, \dots$ , aplicaremos la sustitución

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 &\longrightarrow 16\pi^2 e^4 \left\{ \frac{1}{t^2} \text{Tr}(\rho'_1 \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu) \text{Tr}(\rho'_1 \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu) + \right. \\ &\quad + \frac{1}{u^2} \text{Tr}(\rho'_1 \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu) \text{Tr}(\rho'_2 \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu) - \\ &\quad \left. - \frac{1}{tu} \text{Tr}(\rho'_2 \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu \rho'_1 \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu) - \frac{1}{tu} \text{Tr}(\rho'_1 \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu \rho'_2 \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu) \right\}. \end{aligned} \quad (82.4)$$

Si se trata de la dispersión de electrones no polarizados (cuando, además, no nos interesa su polarización después de la dispersión) debemos tomar para todas las matrices densidad  $\rho = 1/2 (\hat{p} + m)$ , multiplicando el resultado por  $2 \times 2 = 4$  (el promedio respecto de las polarizaciones de los dos electrones iniciales y la suma respecto de las polarizaciones de los dos finales). La sección eficaz de dispersión se determina por la fórmula (65.23), en la que hay que hacer, según (65.15a),  $I^2 = \frac{1}{4}s(s - 4m^2)$ . Representaremos la sección eficaz en la forma

$$\begin{aligned} d\sigma &= dt \frac{4\pi e^4}{s(s - 4m^2)} \{f(t, u) + g(t, u) + f(u, t) + g(u, t)\}, \\ f(t, u) &= \frac{1}{16t^2} \text{Tr}[(\hat{\rho}_2 + m) \gamma^\mu (\hat{\rho}_2 + m) \gamma^\nu] \text{Tr}[(\hat{\rho}'_1 + m) \gamma_\mu (p_1 + m) \gamma_\nu], \\ g(t, u) &= -\frac{1}{16tu} \text{Tr}[(\hat{\rho}_2 + m) \gamma^\mu (\hat{\rho}_2 + m) \gamma^\nu (\hat{\rho}'_1 + m) \gamma_\mu (\hat{\rho}_1 + m) \gamma_\nu]. \end{aligned} \quad (82.5)$$

En  $f(t, u)$  se calculan primero las trazas [mediante (22.9-10)], y luego se suma respecto de  $\mu$  y  $\nu$ ; en  $g(t, u)$  se efectúa primero la suma respecto de  $\mu$  y  $\nu$  [mediante las fórmulas (22.6)]. En definitiva se obtiene

$$\begin{aligned} f(t, u) &= \frac{2}{t^2} [(p_1 p_2)^2 + (p_1 p'_2)^2 + 2m^2(m^2 - p_1 p'_1)], \\ g(t, u) &= \frac{2}{tu} (p_1 p_2 - 2m^2)(p_1 p'_2), \end{aligned}$$

o, en función de los invariantes (82.2),

$$\begin{aligned} f(t, u) &= \frac{1}{t^2} \left[ \frac{s^2 + u^2}{2} + 4m^2(t - m^2) \right], \\ g(t, u) &= g(u, t) = \frac{2}{tu} \left( \frac{s}{2} - m^2 \right) \left( \frac{s}{2} - 3m^2 \right). \end{aligned} \quad (82.6)$$

Así, pues, la sección eficaz vale

\* Con vistas a futuras referencias, haremos notar la fórmula

$$\frac{1}{4} \text{Tr}(\hat{\rho}_1 + m) \gamma^\mu (\hat{\rho}_2 + m) \gamma^\nu = g^{\mu\nu} (m^2 - p_1 p_2) + p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu.$$

$$d\sigma = r_e^2 \frac{4\pi m^2}{s(s-4m^2)} \left\{ \frac{1}{t^2} \left[ \frac{s^2 + u^2}{2} + 4m^2(t - m^2) \right] + \frac{1}{u^2} \left[ \frac{s^2 + t^2}{2} + 4m^2(u - m^2) \right] + \frac{4}{tu} \left( \frac{s}{2} - m^2 \right) \left( \frac{s}{2} - 3m^2 \right) \right\} \quad (82.7)$$

(donde  $r_e = e^2/m$ ).

Apliquemos esta fórmula en el sistema del centro de masa. Aquí es

$$\begin{aligned} s &= 4\varepsilon^2, \quad t = -4\mathbf{p}^2 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}, \quad u = -4\mathbf{p}^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\ -dt &= -2\mathbf{p}^2 d \cos \theta = \frac{\mathbf{p}^2}{\pi} d\theta \end{aligned} \quad (82.8)$$

( $|\mathbf{p}|, \varepsilon$  son el módulo del impulso y la energía de los electrones, que no varían en la dispersión;  $\theta$  es el ángulo de dispersión). En el caso no-relativista ( $\varepsilon \approx m$ )\* obtendremos

$$\begin{aligned} d\sigma &= r_e^2 \frac{\pi m^4 dt}{\mathbf{p}^2} \left( \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{tu} \right) = \\ &= \left( \frac{e^2}{mv^2} \right)^2 \left( \frac{1}{\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right) d\theta = \\ &= \left( \frac{e^2}{mv^2} \right)^2 \frac{4(1+3\cos^2 \theta)}{\text{sen}^4 \theta} d\theta \quad (\text{n. r.}) \end{aligned} \quad (82.9)$$

(donde  $v = 2\mathbf{p}/m$  es la velocidad relativa de los electrones), de acuerdo con la teoría no-relativista (véase III, § 135). En el caso general de velocidades arbitrarias, la fórmula (82.7), después de substituir en ella (82.8) y efectuar simples transformaciones, puede escribirse en la forma

$$d\sigma = r_e^2 \frac{m^2(\varepsilon^2 + \mathbf{p}^2)^2}{4\mathbf{p}^4 \varepsilon^2} \left[ \frac{4}{\text{sen}^4 \theta} - \frac{3}{\text{sen}^2 \theta} + \left( \frac{\mathbf{p}^2}{\varepsilon^2 + \mathbf{p}^2} \right)^2 \left( 1 + \frac{4}{\text{sen}^2 \theta} \right) \right] d\theta \quad (82.10)$$

(Ch. Möller, 1932). En el caso ultrarrelativista ( $\mathbf{p}^2 \approx \varepsilon^2$ ),

$$d\sigma = r_e^2 \frac{m^2(3 + \cos^2 \theta)^2}{\varepsilon^2 4 \text{sen}^4 \theta} d\theta \quad (\text{u. r.}) \quad (82.11)$$

En el sistema de referencia del laboratorio, en el cual uno de los electrones (digamos, el segundo) se hallaba en reposo antes del choque, expresaremos la sección eficaz en función de la cantidad

$$\Delta = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon'_1}{m} = \frac{\varepsilon'_2 - m}{m} \quad (82.12)$$

que es la energía (tomando  $m$  como unidad) cedida por el electrón incidente (el primero) al segundo\*\*. Los invariantes son

\* La velocidad  $v$  se supone pequeña ( $v \ll 1$ ), pero suficientemente grande como para que se pueda aplicar aún la teoría de perturbaciones:  $e^2/\mathbf{p}(= e^2/\hbar v) \ll 1$ .

\*\* Las relaciones cinemáticas para los choques elásticos en diferentes sistemas de referencia pueden verse en II, § 13.

$$\begin{aligned} s &= 2m(m + \varepsilon_1), \quad t = -2m^2\Delta, \\ u &= -2m(\varepsilon_1 - m - m\Delta). \end{aligned} \quad (82.13)$$

La substitución de estas expresiones en (82.7) conduce a la siguiente fórmula para la distribución energética de los electrones secundarios (o, como se suele decir, de los *electrones-δ*), que resultan de la dispersión de electrones primarios rápidos

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{d\Delta}{\gamma^2 - 1} \left\{ \frac{(\gamma - 1)^2 \gamma^2}{\Delta^2 (\gamma - 1 - \Delta)^2} - \frac{2\gamma^2 + 2\gamma - 1}{\Delta (\gamma - 1 - \Delta)} + 1 \right\}, \quad (82.14)$$

donde  $\gamma = \varepsilon_1/m$ . Las energías cinéticas de los dos electrones son  $m\Delta$  y  $m(\gamma - 1 - \Delta)$ ; la identidad de ambas partículas se traduce aquí en la simetría de la fórmula respecto de estas cantidades. Si convenímos en llamar electrón de retroceso a aquél de los dos que tiene menor energía,  $\Delta$  variará entre 0 y  $(\gamma - 1)/2$ . Para valores pequeños de  $\Delta$  la fórmula (82.14) toma la forma

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \frac{d\Delta}{\Delta^2} = \frac{2\pi r_e^2}{v_i^2} \frac{d\Delta}{\Delta^2}, \quad \Delta \ll \gamma - 1. \quad (82.15)$$

Observemos que esta fórmula, expresada en función de la velocidad del electrón incidente ( $v_i = |\mathbf{p}_i|/\varepsilon_i$ ), conserva su forma cuando se pasa al caso no-relativista. Es natural, por ello, que coincida formalmente con el resultado de la teoría no-relativista [cf. III (145.17)].

Consideremos ahora la dispersión de un positrón por un electrón (H. Bhabha, 1936). Este proceso es otro canal de cruce de la misma reacción generalizada a que pertenece la dispersión electrón-electrón. Si  $p_-$ ,  $p_+$  son los impulsos iniciales del electrón y del positrón, y  $p'_-$ ,  $p'_+$  los impulsos finales, el paso de un caso al otro se efectúa mediante la sustitución

$$p_1 \rightarrow -p'_+, \quad p_2 \rightarrow p_-, \quad p'_1 \rightarrow -p_+, \quad p'_2 \rightarrow p'_-.$$

Entonces los invariantes cinemáticos (82.2) adoptan el siguiente significado:

$$s = (p_- - p'_+)^2, \quad t = (p_+ - p'_+)^2, \quad u = (p_- + p_+)^2. \quad (82.16)$$

Si la dispersión- $ee$  era en el canal- $s$ , la dispersión- $\bar{e}e$  es la reacción en el canal- $u$ . El cuadrado de la amplitud de dispersión, expresado en función de  $s$ ,  $t$ ,  $u$ , sigue siendo el de antes, y en el denominador de la fórmula (82.5) hay que substituir  $s \rightarrow u$ . De esta manera, para la sección eficaz de dispersión positrón-electrón obtendremos, en vez de (82.7),

$$\begin{aligned} d\sigma &= r_e^2 \frac{4\pi m^2 dt}{u(u - 4m^2)} \left\{ \frac{1}{t^2} \left[ \frac{s^2 + u^2}{2} + 4m^2(t - m^2) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{u^2} \left[ \frac{s^2 + t^2}{2} + 4m^2(u - m^2) \right] + \frac{4}{tu} \left( \frac{s}{2} - m^2 \right) \left( \frac{s}{2} - 3m^2 \right) \right\}. \quad (82.17) \end{aligned}$$

En el sistema del centro de masa los valores de los invariantes  $s$ ,  $t$ ,  $u$  difieren de (82.8) en la permutación de  $s$  y  $u$ :

$$s = -4\mathbf{p}^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad t = -4\mathbf{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad u = 4\varepsilon^2. \quad (82.18)$$

La fórmula (82.17), en el límite no-relativista, se reduce a la fórmula de Rutherford

$$d\sigma = \left( \frac{e^2}{mv^2} \right)^2 \frac{d\sigma}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (\text{n.r.}) \quad (82.19)$$

(donde  $\mathbf{v} = 2\mathbf{p}/m$ ). Esta fórmula se obtiene a partir del primer término de la expresión entre llaves en (82.17), término que procede de un diagrama del tipo «dispersión» (véase § 74). En cambio, las contribuciones del diagrama de «destrucción» [segundo término de (82.17)] y de su interferencia con el diagrama de dispersión (tercer término) se anulan en el límite de la aproximación no-relativista\*.

En el caso general de velocidades cualesquiera, las contribuciones de estos tres términos en (82.17) tienen el mismo orden de magnitud (únicamente en la región de ángulos pequeños predomina el primer término debido al factor  $t^{-2} \approx \sin^4 \frac{\theta}{2}$ ). Después de reducir términos semejantes, la sección eficaz de dispersión de un positón por un electrón (en el sistema del centro de masa) se puede representar en la forma

$$\begin{aligned} d\sigma = d_0 & \frac{r_e^2 m^2}{16 \varepsilon^2} \left\{ \frac{(\varepsilon^2 + \mathbf{p}^2)^2}{\mathbf{p}^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{8\varepsilon^4 - m^4}{\mathbf{p}^2 \varepsilon^3} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} + \right. \\ & \left. + \frac{12\varepsilon^4 + m^4}{\varepsilon^4} - \frac{4\mathbf{p}^2 (\varepsilon^2 + \mathbf{p}^2)}{\varepsilon^4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{4\mathbf{p}^4}{\varepsilon^4} \sin^4 \frac{\theta}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (82.20)$$

La simetría respecto de la sustitución  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ , que es característica de la dispersión de partículas idénticas, desaparece, claro está, en la dispersión de un positón por un electrón. En el límite ultrarrelativista, la expresión (82.20) difiere de la sección eficaz de dispersión electrón-electrón tan sólo en el factor  $\cos^4 \frac{\theta}{2}$ :

$$d\sigma_{ee} = \cos^4 \frac{\theta}{2} d\sigma_{ee} \quad (\text{u.r.}) \quad (82.21)$$

En el sistema de referencia del laboratorio, en el cual una de las partículas

\* En el límite no-relativista, las amplitudes  $u$  se convierten en magnitudes de dos componentes — véase (23.12) — ; además, el 4-vector de electrón  $\bar{u}'_- \gamma^\mu u_- = (2m\omega'_- \mathbf{w}_-, 0)$  y lo mismo vale para el positón. El término de dispersión en la amplitud (74.15) toma la forma

$$-(2m)^2 (\omega'_- \mathbf{w}_-) (\omega'_+ \mathbf{w}_+) U_q,$$

donde

$$U_q = \frac{4\pi e^2}{q^2} = -\frac{4\pi e^2}{q^2}$$

(para el fotón virtual, en el diagrama de dispersión es  $q^0 = 0$  en el sistema del centro de masa);  $U_q$  es la componente de Fourier de la energía de la interacción coulombiana de cargas con signos opuestos ( $-e^2/r$ ). Para el fotón virtual en el diagrama de aniquilación se tiene  $q^0 = 2m (= 2mc)$  en virtud de lo cual este término se anula en el límite.

(digamos, el electrón) se encontraba en reposo antes del choque, introduciremos de nuevo la cantidad

$$\Delta = \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon'_+}{m} = \frac{\varepsilon'_- - m}{m}, \quad (82.22)$$

es decir, la energía cedida por el positón al electrón. De manera análoga a (82.13), se tiene ahora

$$s = -2m(\varepsilon_+ - m - m\Delta), \quad t = -2m^2\Delta, \quad u = 2m(m + \varepsilon_+).$$

Substituyendo estas expresiones en (82.17), después de simples transformaciones obtendremos la siguiente fórmula para la distribución energética de los electrones secundarios:

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{d\Delta}{\gamma^2 - 1} \left\{ \frac{\gamma^2}{\Delta^2} - \frac{2\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma + 1} \frac{1}{\Delta} + \right. \\ \left. + \frac{3\gamma^2 + 6\gamma + 4}{(\gamma + 1)^2} - \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)^2} \Delta + \frac{1}{(\gamma + 1)^2} \Delta^2 \right\}, \quad (82.23)$$

donde  $\gamma = \varepsilon_+/m$ ;  $\Delta$  varía entre 0 y  $\gamma - 1$ . Para  $\Delta \ll \gamma - 1$ , de (82.23) se obtiene la misma fórmula (82.15) que para las dispersiones de electrones.

Los efectos de polarización en la dispersión de electrones o de positones se calculan según las reglas generales expuestas en el § 66. En uno cualquiera de los casos generales, los cálculos conducen a fórmulas complicadas para las cuales referimos al lector a los artículos originales o a los trabajos especiales de puesta a punto \*. Aquí nos limitaremos solamente a algunas observaciones.

En la aproximación considerada (la primera no nula) de la teoría de perturbaciones, en la expresión de las secciones eficaces no existen términos lineales respecto de los vectores polarización de las partículas iniciales o finales. Al igual que en la teoría no-relativista (III, § 138) tales términos están prohibidos por condiciones que resultan del carácter hermítico de la matriz de dispersión. Por ello, la sección eficaz de dispersión no cambia si solamente una de las partículas que chocan está polarizada, y la dispersión de partículas no polarizadas no conduce a su polarización.

Estas mismas condiciones prohíben, en las secciones eficaces, los términos de correlación que contienen los productos de las polarizaciones de tres de las partículas que toman parte en el proceso (iniciales y finales). Sin embargo, la sección eficaz contiene términos de correlación binaria y cuaternaria. En la dispersión de partículas no idénticas (electrón y positón; electrón y muón), estos términos se anulan en el límite no-relativista, ya que no existe la interacción spin-órbita. En la colisión de partículas idénticas, en cambio, se tienen términos de correlación ya en el caso no-relativista debido a los efectos de intercambio.

\* A. M. BINCER, Phys. Rev. **107**, 1434 (1957); G. W. FORD, C. J. MULLIN, Phys. Rev. **108**, 477 (1957) (corrigendum: Phys. Rev. **110**, 1485, 1958); A. RACZKA, R. RACZKA, Phys. Rev. **110**, 1469, 1958; W. H. MCMASTER, Rev. Mod. Phys. **33**, 8 (1961).

## PROBLEMAS

1. Determinar la sección eficaz de dispersión de electrones polarizados en el caso no-relativista.

*Solución.* En el caso no-relativista las amplitudes bispinoriales pasan a ser de dos componentes en la representación típica y las matrices densidad son las matrices  $2 \times 2$  (29.20). En la amplitud de dispersión (82.3) se conservan diferentes de cero tan sólo los términos con  $\mu = \nu = 0$  que contienen las matrices  $\gamma^0$ , diagonales en la representación típica. En vez de (82.4) tendremos

$$\sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = 16\pi^2 e^4 \cdot 4m^4 \left\{ \left( \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} \right) \text{Tr}(1 + \sigma \cdot \zeta_1) \text{Tr}(1 + \sigma \cdot \zeta_2) - \right. \\ \left. - \frac{2}{tu} \text{Tr}(1 + \sigma \cdot \zeta_1)(1 + \sigma \cdot \zeta_2) \right\} = 16\pi^2 e^4 \cdot 4m^4 \cdot 4 \left[ \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{tu} (1 + \zeta_1 \cdot \zeta_2) \right]$$

(la suma se refiere a las polarizaciones de los electrones finales). De aquí se sigue la sección eficaz de dispersión

$$d\sigma = d\sigma_0 \left( 1 - \frac{\sin^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta} \zeta_1 \cdot \zeta_2 \right),$$

donde  $\theta$  es el ángulo de dispersión en el sistema del centro de masa, y  $d\sigma_0$ , la sección eficaz para partículas no polarizadas (82.9) \*

En la dispersión de positones por electrones, la dependencia respecto de la polarización no existe en esta misma aproximación ( $d\sigma = d\sigma_0$ ); es fácil comprobar que así es observando que, en el límite no-relativista, las amplitudes  $u_p$  y  $u_{-p}$  de los electrones y de los positones tienen componentes no nulas que corresponden a pares diferentes.

2. Determinar, en el límite no-relativista, la polarización de los electrones de un haz no polarizado dispersados por un blanco polarizado.

*Solución.* Calculemos la sección eficaz de dispersión para una polarización inicial dada  $\zeta_2$  y una polarización final detectada  $\zeta'_1$  (se detecta la polarización de tan sólo uno de los electrones finales). Siguiendo el mismo procedimiento que en el problema 1, obtendremos

$$d\sigma = \frac{1}{2} d\sigma_0 \left[ 1 - \zeta'_1 \cdot \zeta_2 \frac{2 \cos \theta (1 - \cos \theta)}{1 + 3 \cos^2 \theta} \right].$$

De aquí se sigue para el vector polarización del electrón dispersado

$$\zeta'_1(f) = -\zeta_2 \frac{2 \cos \theta (1 - \cos \theta)}{1 + 3 \cos^2 \theta}.$$

3. En el caso no-relativista, determinar la probabilidad de que se invierta el spin de un electrón completamente polarizado como consecuencia de su dispersión por un electrón no polarizado.

*Solución.* De manera análoga se encuentra la sección eficaz para polarizaciones dadas  $\zeta_1$  y  $\zeta'_1$ :

$$d\sigma = \frac{1}{2} d\sigma_0 \left[ 1 + \zeta'_1 \cdot \zeta_1 \frac{2 \cos \theta (1 + \cos \theta)}{1 + 3 \cos^2 \theta} \right].$$

Haciendo  $\zeta'_1 \cdot \zeta_1 = -1$ , deducimos de aquí la probabilidad de inversión del sentido del spin

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0} = \frac{(1 - \cos \theta)^2}{2(1 + 3 \cos^2 \theta)}.$$

4. Determinar la razón de las secciones eficaces de dispersión de los electrones con helicidades determinadas y spins paralelos y antiparalelos en el caso ultrarrelativista.

*Solución.* En (82.4) hay que hacer, según (29.22),

\* Para electrones del todo polarizados, esta fórmula coincide con el resultado del problema en III, § 135 (con  $|\zeta_1| = |\zeta_2| = 1$ ,  $\zeta_1 \cdot \zeta_2 = \cos \alpha$ , y  $\alpha$  es el ángulo formado por las direcciones de polarización de los electrones).

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \hat{\rho}_1 (1 - 2\lambda_1 \gamma^5), \quad \rho_2 = \frac{1}{2} \hat{\rho}_2 (1 - 2\lambda_2 \gamma^5), \quad \rho'_1 = \frac{1}{2} \hat{\rho}'_1, \quad \rho'_2 = \frac{1}{2} \hat{\rho}'_2,$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1/2$ . El cálculo de las trazas se efectúa de acuerdo con las fórmulas deducidas en el § 22; en particular,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^5 \hat{a} \gamma^\mu \hat{b} \gamma^\nu) \text{Tr}(\gamma^5 \hat{c} \gamma_\mu \hat{d} \gamma_\nu) &= i^2 (e^{\rho \mu \lambda \nu} a_\rho b_\lambda) (e_{\sigma \mu \tau \nu} c^\sigma d^\tau) = \\ &= 2 (\delta_\sigma^\rho \delta_\tau^\lambda - \delta_\tau^\rho \delta_\sigma^\lambda) a_\rho b_\lambda c^\sigma d^\tau = 2(ac)(bd) - 2(ad)(bc). \end{aligned}$$

En definitiva obtendremos

$$\frac{ds}{dt} \propto \left( \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu} \right) + 4\lambda_1 \lambda_2 \left( \frac{s^2 - u^2}{t^2} + \frac{s^2 - t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu} \right).$$

Dado que los impulsos de los electrones que chocan son opuestos entre sí (en el sistema del centro de masa), a helicidades idénticas ( $\lambda_1 = \lambda_2$ ) corresponden spins antiparalelos, y a helicidades diferentes ( $\lambda_1 = -\lambda_2$ ), spins paralelos. Substituyendo las expresiones  $s, t, u$  dadas por (82.8) (haciendo además  $p^2 \approx \varepsilon^2$ ), se encuentra para la razón buscada

$$\frac{d\sigma_{\uparrow\uparrow}}{d\sigma_{\downarrow\downarrow}} = \frac{1}{8} (1 + 6 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta). \quad (1)$$

Esta razón es mínima (1/8) para  $\theta = \pi/2$ .

5. Lo mismo para la dispersión de positones por electrones.

*Solución.* En este caso, en vez de (82.4) hay que calcular

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 \rightarrow 16\pi^2 e^4 \left\{ \frac{1}{t^2} \text{Tr}(\rho_- \gamma^\mu \rho_- \gamma^\nu) \text{Tr}(\rho_+ \gamma_\mu \rho_+ \gamma_\nu) - \right. \\ \left. - \frac{1}{tu} \text{Tr}(\rho_- \gamma^\mu \rho_- \gamma^\nu \rho_+ \gamma_\mu \rho_+ \gamma_\nu) + \dots \right\} \end{aligned}$$

(los demás términos se obtienen a partir de los escritos permutando  $\rho_+$  y  $\rho_-$ ). Las matrices densidad son:

$$\rho_- = \frac{1}{2} \hat{\rho}_- (1 - 2\lambda_- \gamma^5), \quad \rho_+ = \frac{1}{2} \hat{\rho}_+ (1 + 2\lambda_+ \gamma^5), \quad \rho'_- = \frac{1}{2} \hat{\rho}'_-, \quad \rho'_+ = \frac{1}{2} \hat{\rho}'_+,$$

donde  $\lambda_+, \lambda_- = \pm 1/2$  (para el positón, al igual que para el electrón,  $\lambda_+ = 1/2$  indica que el spin está dirigido en el sentido del impulso). El cálculo da

$$\frac{ds}{dt} \propto \left( \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu} \right) - 4\lambda_+ \lambda_- \left( \frac{s^2 - u^2}{t^2} + \frac{s^2 - t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu} \right).$$

A partir de aquí se obtiene para la razón de secciones eficaces un resultado que coincide con la fórmula (1) del problema 4.

6. Determinar la sección eficaz de dispersión de muones por electrones.

*Solución.* El proceso se representa por un único diagrama (74.17). En vez de (82.5) tenemos

$$\begin{aligned} ds &= \frac{\pi e^4 dt}{(\rho_e p_\mu)^2 - m^2 \mu^2} f(t, u) = \frac{4\pi e^4 dt}{[s - (m + \mu)^2][s - (m - \mu)^2]} f(t, u), \\ f(t, u) &= \frac{1}{16t^2} \text{Tr}[(\hat{\rho}'_\mu + \mu) \gamma^\lambda (\hat{\rho}_\mu + \mu) \gamma^\nu] \text{Tr}[(\hat{\rho}'_e + m) \gamma_\lambda (\hat{\rho}_e + m) \gamma_\nu] \end{aligned} \quad (1)$$

( $p_e, p_\mu$  y  $p'_e, p'_\mu$  son los 4-impulsos iniciales y finales del electrón y del muón;  $m$  y  $\mu$ , son sus masas). Los invariantes se escriben:

$$\begin{aligned} s &= (p_e + p_\mu)^2 = m^2 + \mu^2 + 2p_e p_\mu, \\ t &= (p_e - p'_e)^2 = 2(m^2 - p_e p'_e) = 2(\mu^2 - p_\mu p'_\mu), \end{aligned}$$

$$u = (p_e - p'_\mu)^2 = m^2 + \mu^2 - 2p_e p'_\mu,$$

$$s + t + u = 2(m^2 + \mu^2).$$

El cálculo conduce al resultado

$$f = \frac{2}{t^2} \left\{ (p_e p_\mu)^2 + (p_e p'_\mu)^2 + \frac{1}{2} (m^2 + \mu^2) t \right\} =$$

$$= \frac{1}{t^2} \left[ \frac{s^2 + u^2}{2} + (m^2 + \mu^2) (2t - m^2 - \mu^2) \right]. \quad (2)$$

Las fórmulas (1) y (2) resuelven el problema planteado. En el sistema del centro de masa

$$d\sigma = \frac{e^4 d\theta}{8(\epsilon_e + \epsilon_\mu)^2 p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \times$$

$$\times \left[ (\epsilon_e \epsilon_\mu + p^2)^2 + (\epsilon_e \epsilon_\mu + p^2 \cos \theta)^2 - 2(m^2 + \mu^2) p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right],$$

donde  $d\theta = 2\pi \sin \theta d\theta$ ;  $\epsilon_e, \epsilon_\mu$  son las energías del electrón y del muón;  $p^2 = \epsilon_e^2 - m^2 = \epsilon_\mu^2 - \mu^2$ . Cuando  $p^2 \ll \mu^2$ , volvemos a la fórmula (81.9) para la dispersión por un centro coulombiano inmóvil. En el caso ultrarrelativista ( $p^2 \gg \mu^2$ )

$$d\sigma = \frac{e^4}{8p^4} \frac{1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\theta.$$

En el sistema del laboratorio (en el que el electrón se encuentra en reposo antes de la colisión):

$$d\sigma = 2\pi \left( \frac{e^2}{m} \right)^2 \frac{d\Delta}{v_\mu^2 \Delta^4} \left( 1 - v_\mu^2 \frac{\Delta}{\Delta_{\max}} + \frac{m^2}{2\epsilon_\mu^2} \Delta^2 \right).$$

Aquí  $\epsilon_\mu$  es la energía y  $v_\mu = p_\mu/\epsilon_\mu$  la velocidad del muón incidente;  $m\Delta = \epsilon'_e - m = \epsilon_\mu - \epsilon'_\mu$  es la energía del electrón de retroceso, y

$$\Delta_{\max} = \frac{2p_\mu^2}{m^2 + \mu^2 + 2m\epsilon_\mu}$$

el valor máximo de  $\Delta$  (que se alcanza en la dispersión hacia atrás).

7. Determinar la razón de las secciones eficaces de la dispersión mutua de electrones y muones con helicidades determinadas y spins paralelos y antiparalelos en el caso ultrarrelativista ( $\epsilon_\mu \gg \mu, \epsilon_e \gg m$ ).

*Solución.* De manera análoga al problema 4, se encuentra

$$\frac{d\sigma_{||}}{d\sigma_{\perp}} = \cos^4 \frac{\theta}{2}$$

( $\theta$  es el ángulo de dispersión en el sistema del centro de masa).

8. Determinar la sección eficaz de conversión de un par de electrones en un par de muones (V. B. Berestetskiĭ, I. Ia. Pomeranchuk, 1955).

*Solución.* Éste es otro canal de cruce de la reacción a la que pertenece la dispersión- $\mu e$ . En este canal

$$s = (p_e - \bar{p}_\mu)^2, \quad t = (p_e + \bar{p}_e)^2, \quad u = (p_e - p_\mu)^2,$$

donde  $p_e, \bar{p}_e$  son los 4-impulsos del electrón y del positón, y  $p_\mu, \bar{p}_\mu$  los del muón y del antimuón. El umbral de la reacción corresponde a una energía del par electrón-positón igual a  $2\mu$  (en el

sistema del centro de masa), de modo que debe ser  $t > 4\mu^2$ . En el sistema del laboratorio, en el cual, antes del choque, el electrón se encuentra en reposo y el positrón tiene una energía  $\varepsilon_+$ , es

$$t = 2m(\varepsilon_+ + m) \approx 2m\varepsilon_+,$$

de modo que debe tenerse  $\varepsilon_+ > \varepsilon_u$ , donde la energía umbral vale  $\varepsilon_u = 2\mu^2/m$  (aquí y en lo que sigue se han efectuado todas las simplificaciones que permite la desigualdad  $\mu \gg m$ ).

La sección eficaz diferencial [en vez de (1) (2) del problema 6] resulta ser

$$d\sigma = \frac{4\pi e^4 ds}{(t - 4m^2)t} f(t, u) \approx 4\pi e^4 \frac{ds}{t^4} \left[ \frac{s^2 + u^2}{2} + 2\mu^2 t - \mu^4 \right].$$

Para  $t$  dado, la cantidad  $s$  varía entre los límites determinados por las ecuaciones  $su \approx \mu^4$ ,  $s + t + u \approx 2\mu^2$ , es decir,

$$\mu^2 - \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{t(t - 4\mu^2)} \leq s \leq \mu^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{t(t - 4\mu^2)}.$$

Una integración elemental conduce al resultado

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} r_e^2 \frac{m^2}{t} \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{t}} \left( 1 + \frac{2u^2}{t} \right), \quad r_e = \frac{e^2}{m}$$

(en el sistema del laboratorio,  $t = 2m\varepsilon_+$ ).<sup>\*</sup> Esta fórmula es inaplicable en la inmediata vecindad de la energía umbral: cuando  $\varepsilon_+ - \varepsilon_u \sim \mu e^4$ , es imposible considerar como partículas libres los muones que se forman (pero si se tiene en cuenta la interacción de Coulomb entre ellos, la sección eficaz tenderá para  $\varepsilon_+ \rightarrow \varepsilon_u$  no a cero, sino a una constante no nula — véase III, § 144).

### § 83. Ecuación de Breit

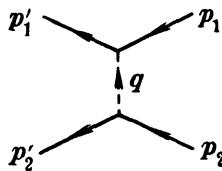
Como es sabido, un sistema de partículas en interacción se puede describir en la electrodinámica clásica mediante una función de Lagrange que depende solamente de las coordenadas y de las velocidades de las propias partículas y es correcta con una precisión hasta términos  $\sim 1/c^2$  (II, § 65). Esta circunstancia se debe a que la radiación se manifiesta solamente como un efecto del orden de  $1/c^3$ .

En la teoría cuántica, a esta situación corresponde la posibilidad de describir el sistema por una ecuación de Schrödinger que tiene en cuenta los términos de segundo orden. Tal ecuación se estableció en el § 33 para un electrón que se mueve en un campo electromagnético exterior. Nos ocuparemos ahora de deducir la ecuación análoga que representa un sistema de partículas en interacción.

Partiremos de la expresión relativista de la amplitud de dispersión de dos partículas. En la aproximación no-relativista se reduce a la amplitud de Born ordinaria, que es proporcional a la componente de Fourier del potencial de la interacción electrostática de las dos cargas. Pero calculando la amplitud con una precisión correspondiente a los términos de segundo orden, podremos establecer la forma del potencial que corresponde a dicha interacción y tiene en cuenta los términos  $\sim 1/c^2$ .

\* Esta sección eficaz es máxima para  $\varepsilon_+ = 1,7\varepsilon_u$ . Su valor en el máximo es aproximadamente 20 veces menor que la sección eficaz de aniquilación en dos fotones para la misma energía.

Supongamos primero que las dos partículas son diferentes, con masas  $m_1$  y  $m_2$  (digamos, un electrón y un muón). Entonces la dispersión se representa por un solo diagrama



A él corresponde la amplitud

$$M_{fi} = e^2 (\bar{u}_1 \gamma^\mu u_1) D_{\mu\nu}(q) (\bar{u}_2 \gamma^\nu u_2),$$

$$q = p_1' - p_1 = p_2 - p_2' \quad (83.1)$$

(aquí se ha supuesto que las cargas de las partículas son de igual signo; en el caso contrario,  $e^2$  se substituye por  $-e^2$ ).

Los cálculos siguientes se simplifican notablemente si el propagador de fotón  $D_{\mu\nu}$  se elige no en el contraste ordinario, sino en el de Coulomb (77.12-13)\*:

$$D_{00} = -\frac{4\pi}{q^2}, \quad D_{0i} = 0, \quad D_{ik} = \frac{4\pi}{q^2 - \omega^2} \left( \delta_{ik} - \frac{q_i q_k}{q^2} \right). \quad (83.2)$$

La amplitud de dispersión es entonces

$$M_{fi} = e^2 \{ (\bar{u}_1 \gamma^0 u_1) (\bar{u}_2 \gamma^0 u_2) D_{00} + (\bar{u}_1 \gamma^i u_1) (\bar{u}_2 \gamma^k u_2) D_{ik} \}. \quad (83.3)$$

Al prescindir de todos los términos que contienen  $1/c$ , el segundo término entre llaves desaparece, y el primero da

$$M_{fi} = -2m_1 \cdot 2m_2 (w_1^{(0)*} w_1^{(0)}) (w_2^{(0)*} w_2^{(0)}) U(q), \quad (83.4)$$

donde

$$U(q) = \frac{4\pi e^2}{q^2}, \quad (83.5)$$

y se han designado por  $w_1^{(0)}$ ,  $w_2^{(0)}$ , ... las amplitudes espinoriales (de dos componentes) de las ondas planas no-relativistas introducidas en el § 23. La función  $U(q)$  es la componente de Fourier de la energía potencial de interacción coulombiana:  $U(r) = e^2/r$ .

En la aproximación siguiente (respecto de  $1/c$ ) la función de onda «de Schrödinger» de la partícula libre  $\varphi_{\text{Schr}}$  (normalizada según la integral  $\int |\varphi_{\text{Schr}}|^2 d^3x$ ) satisface la ecuación

\* En este párrafo escribimos en todas las fórmulas intermedias el factor  $c$ , y en las fórmulas finales, también el  $\hbar$ .

$$\begin{aligned} H^{(0)} \varphi_{\text{Schr}} &= (\epsilon - mc^2) \varphi_{\text{Schr}} \\ H^{(0)} &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^2c^2}, \quad \mathbf{p} = -i\nabla, \end{aligned} \quad (83.6)$$

en la que se ha tenido en cuenta el término siguiente del desarrollo de la expresión relativista de la energía cinética. La amplitud (espinorial) de esa onda plana la designaremos por  $w$  (para  $1/c \rightarrow 0$  pasa a ser  $w^{(0)}$ ). En función precisamente de estas amplitudes ha de expresarse la amplitud de dispersión buscada para que, por su forma, sea posible determinar el potencial «de Schrödinger» de interacción de las partículas en la aproximación considerada.

En correspondencia con la fórmula (33.11), la amplitud bispinorial de una partícula libre  $u$  se expresa en función de la amplitud «de Schrödinger»  $w$  — con la precisión que se exige aquí — en la forma

$$u = \sqrt{2m} \left( \begin{pmatrix} \left( 1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2c^2} \right) w \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2mc} w \end{pmatrix} \right). \quad (83.7)$$

Mediante esta fórmula se encuentra

$$\begin{aligned} u'_1 \gamma^0 u_1 &= u'_1 * u_1 = 2m_1 \left( 1 - \frac{\mathbf{p}'_1^2 + \mathbf{p}_1^2}{8m_1^2c^2} \right) w'_1 * w_1 + \frac{1}{2m_1 c^2} w'_1 * (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'_1) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1) w_1 = \\ &= 2m_1 w'_1 * \left\{ 1 - \frac{\mathbf{q}^2}{8m_1^2c^2} + \frac{i\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1]}{4m_1^2c^2} \right\} w_1, \\ \bar{u}'_1 \gamma u_1 &= u'_1 * \mathbf{a} u_1 = \frac{1}{c} w'_1 * \{ \boldsymbol{\sigma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1) + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'_1) \boldsymbol{\sigma} \} w_1 = \\ &= \frac{1}{c} w'_1 * \{ i[\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q}] + 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{q} \} w_1 \end{aligned}$$

(donde  $\mathbf{q} = \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2$ ). Las expresiones análogas para  $(\bar{u}'_2 \gamma^0 u_2)$  y  $(\bar{u}'_2 \gamma u_2)$  difieren de éstas por la sustitución del índice 1 por 2 y la correspondiente sustitución de  $\mathbf{q}$  por  $-\mathbf{q}$ .

Substituyamos estas expresiones en (83.3). Dado que el producto  $(\bar{u}'_1 \gamma u_1) (\bar{u}'_2 \gamma u_2)$  contiene ya el factor  $1/c^2$ , se puede prescindir en  $D_{ik}$  del factor  $\omega^2/c^2$  en el denominador. En definitiva se obtiene la amplitud de dispersión en la forma

$$M_{fi} = -2m_1 \cdot 2m_2 (w'_1 * w'_2 * U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}) w_1 w_2), \quad (83.8)$$

donde

$$\begin{aligned} U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}) &= 4\pi e^2 \left\{ \frac{1}{\mathbf{q}^2} - \frac{1}{8m_1^2c^2} - \frac{1}{8m_2^2c^2} + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_2)}{m_1 m_2 \mathbf{q}^4} - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{m_1 m_2 \mathbf{q}^2} + \right. \\ &+ \frac{i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1]}{4m_1^2c^2 \mathbf{q}^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2]}{2m_1 m_2 c^2 \mathbf{q}^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2]}{4m_2^2c^2 \mathbf{q}^2} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1]}{2m_1 m_2 c^2 \mathbf{q}^2} + \\ &\left. + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})}{4m_1 m_2 c^2 \mathbf{q}^2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{4m_1 m_2 c^2} \right\} \end{aligned} \quad (83.9)$$

(los índices 1 y 2 en las matrices de Pauli indican sobre qué índices espinoriales actúan:  $\sigma_1$  actúa sobre  $w_1$ , y  $\sigma_2$  sobre  $w_2$ ).

La función  $U(p_1, p_2, q)$  es el operador de interacción de las partículas en la representación de impulsos. Está ligado con el operador  $U(p_1, p_2, r)$  en la representación de coordenadas por la fórmula

$$\int e^{-i(p'_1 \cdot r_1 + p'_2 \cdot r_2)} U(p_1, p_2, r) e^{i(p_1 \cdot r_1 + p_2 \cdot r_2)} d^3x_1 d^3x_2 = \\ = (2\pi)^3 \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) U(p_1, p_2, q). \quad (83.10)$$

Si el operador  $U$  es simplemente la función  $U(r)$  ( $r = r_1 - r_2$ ),  $U(p_1, p_2, q)$  no depende de  $p_1$ ,  $p_2$  y la fórmula (83.10) se reduce a la definición ordinaria de la componente de Fourier

$$\int e^{-iq \cdot r} U(r) d^3x = U(q).$$

Es claro por esto que para hallar  $U(p_1, p_2, r)$  hay que calcular la integral

$$\int e^{iq \cdot r} U(p_1, p_2, q) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}$$

y luego substituir  $p_1$ ,  $p_2$  por los operadores  $p_1 = i\nabla_1$ ,  $p_2 = -i\nabla_2$ , colocándolos a la derecha de todos los demás factores.

Las integrales necesarias se calculan derivando la fórmula

$$\int e^{iq \cdot r} \frac{4\pi}{q^2} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{r}. \quad (83.11)$$

Así, formando el gradiente encontraremos

$$\int e^{iq \cdot r} \frac{4\pi q}{q^2} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = -i \nabla \frac{1}{r} = \frac{ir}{r^3}. \quad (83.12)$$

Además (si  $a$ ,  $b$  son vectores constantes)

$$\int \frac{4\pi(a \cdot q)(b \cdot q)}{q^4} e^{iq \cdot r} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{i}{2} \left( a \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) \int e^{iq \cdot r} \left( b \cdot \frac{\partial}{\partial q} \right) \frac{1}{q^2} \frac{d^3q}{(2\pi)^3};$$

la integral que se obtiene después de integrar por partes se reduce a (83.12) y da

$$\int \frac{4\pi(a \cdot q)(b \cdot q)}{q^4} e^{iq \cdot r} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2} (a \cdot \nabla) \frac{b \cdot r}{r} = \frac{1}{2r} \left[ a \cdot b - \frac{(a \cdot r)(b \cdot r)}{r^2} \right]. \quad (83.13)$$

Finalmente,

$$\int \frac{4\pi(a \cdot q)(b \cdot q)}{q^2} e^{iq \cdot r} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = -(a \cdot \nabla) (b \cdot \nabla) \frac{1}{r}.$$

Al calcular las derivadas no hay que perder de vista que esta expresión contiene una función- $\delta$ , la  $\delta(r)$ . Para separarla observemos que, después de promediar respecto de las direcciones de  $r$ , resulta

$$-(\mathbf{a} \cdot \nabla)(\mathbf{b} \cdot \nabla) \frac{1}{r} = -\frac{1}{3}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \Delta \frac{1}{r} = \frac{4\pi}{3}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \delta(\mathbf{r}).$$

Calculando ahora explícitamente las derivadas de la manera ordinaria, obtendremos

$$\int \frac{4\pi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{q})}{\mathbf{q}^3} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{r^3} \left\{ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 3 \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right\} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \delta(\mathbf{r}) \quad (83.14)$$

(al promediar respecto de las direcciones de  $\mathbf{r}$  se anula el primer término y queda, como debe ser, tan sólo el término con la función- $\delta$ ).

Mediante estas fórmulas se obtiene la siguiente expresión final para el operador de interacción de las partículas

$$\begin{aligned} U(p_1, p_2, r) = & \frac{e^2}{r} - \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2c^2} \left( \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \delta(r) - \\ & - \frac{e^2}{2m_1 m_2 c^2 r} \left[ \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_1) \mathbf{p}_2}{r^2} \right] - \frac{e^2 \hbar}{4m_1^2 c^2 r^3} [\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1] \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{e^2 \hbar}{4m_2^2 c^2 r^3} [\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2] \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - \\ & - \frac{e^2 \hbar}{2m_1 m_2 c^2 r^3} \{ [\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1] \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - [\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2] \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 \} + \frac{e^2 \hbar^2}{4m_1 m_2 c^2} \left\{ \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{r^3} - 3 \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right. - \\ & \left. - \frac{8\pi}{3} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \delta(r) \right\}, \end{aligned} \quad (83.15)$$

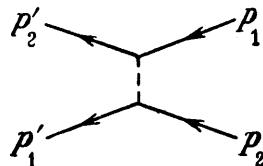
El hamiltoniano total del sistema de dos partículas en esta aproximación es

$$H = H_1^{(0)} + H_2^{(0)} + U, \quad (83.16)$$

donde  $H^{(0)}$  son los hamiltonianos de las partículas libres dados por (83.6).

### Dos electrones

Si las dos partículas son idénticas (dos electrones), en la amplitud de dispersión aparece un segundo término que se representa por el diagrama « de intercambio »



No hay necesidad, sin embargo, de calcular su contribución al operador de interacción. Ello se debe a que la descripción de un sistema de partículas idénticas mediante la ecuación de Schrödinger se puede conseguir con ayuda del mismo operador de interacción que en el caso de partículas no idénticas, si se conviene en aplicar la debida simetrización de las soluciones de la ecuación. En particular, al estudiar la dispersión de partículas dicha simetrización tiene en cuenta automáticamente las contribuciones a la amplitud que corresponden a ambos diagramas de Feynman.

De esta manera, el hamiltoniano del sistema de dos electrones se obtendrá a partir de las fórmulas (83.15-16) con sólo hacer en ellas  $m_1 = m_2$ <sup>\*</sup>:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} (\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2) - \frac{1}{8m^3 c^2} (\mathbf{p}_1^4 + \mathbf{p}_2^4) + U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{r}), \\ U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{r}) &= \frac{e^2}{r} - \pi \left( \frac{e\hbar}{mc} \right)^2 \delta(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{2m^2 c^2 r} \left( \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{p}_2}{r^2} \right) + \\ &+ \frac{e^2 \hbar}{4m^2 c^2 r^3} \left\{ -(\boldsymbol{\sigma}_1 + 2\boldsymbol{\sigma}_2) \cdot [\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1] + (\boldsymbol{\sigma}_2 + 2\boldsymbol{\sigma}_1) \cdot [\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2] \right\} + \\ &+ \frac{1}{4} \left( \frac{e\hbar}{mc} \right)^2 \left\{ \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2}{r^8} - \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{8\pi}{3} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \delta(\mathbf{r}) \right\}. \end{aligned} \quad (83.17)$$

Haremos observar que la presencia de los términos con  $\delta(\mathbf{r})$  no significa, claro está, la existencia de una interacción especialmente fuerte. El valor integral de todos los términos correctivos es el mismo, y, por el propio sentido del desarrollo efectuado, todos ellos deben considerarse como pequeños comparados con el primer término — la interacción coulombiana.

Los diferentes grupos de términos en el operador de interacción (83.15) son de carácter diferente. Los términos de la primera línea tienen un origen puramente orbital. En la segunda línea aparecen términos que son lineales respecto de los operadores de spin de las partículas; estos términos corresponden a la interacción spin-órbita. Finalmente, los términos cuadráticos respecto de los operadores de spin de la tercera línea representan la interacción spin-spin<sup>\*\*</sup>.

### Electrón y positón

El sistema constituido por un electrón y un positón exige un estudio especial. La amplitud de dispersión en este caso es suma de dos términos:

$$\begin{aligned} M_{fi} &= -e^2 [\bar{u}(p'_-) \gamma^\mu u(p_-)] D_{\mu\nu}(p_- - p'_-) [\bar{u}(-p_+) \gamma^\nu u(-p'_+)] + \\ &+ e^2 [\bar{u}(-p_+) \gamma^\mu u(p_-)] D_{\mu\nu}(p_- + p_+) [\bar{u}(p'_-) \gamma^\nu u(-p'_+)] \end{aligned} \quad (83.18)$$

(el primero corresponde a un diagrama de dispersión, y el segundo, a uno de aniquilación). Dado que la función de onda del sistema «electrón + positón» no debe ser antisimétrica, las contribuciones de ambos términos al operador de interacción son independientes.

El primer término [cuya estructura coincide con la estructura de la amplitud (83.1)] conduce, naturalmente, a un operador que difiere de (83.17) tan sólo en el signo común. Pasemos a la transformación del segundo término.

\* G. Breit (1929) fue el primero en establecer la ecuación de onda con el hamiltoniano (83.17) y L. D. Landau (1932) la dedujo rigurosamente con los métodos de la mecánica cuántica.

\*\* Esta interacción se recordó en III, § 72 en relación con la estructura fina de los niveles atómicos, y la interacción spin-spin de los electrones con el núcleo se estudió en el III, § 120 al tratar de la estructura hiperfina de los niveles. En particular, la fórmula III (120.9) corresponde al término con la función- $\delta$  en el operador de interacción spin-spin.

Aquí utilizaremos el propagador de fotón en el contraste ordinario:

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2} g_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} g_{\mu\nu}.$$

En el presente caso,  $k = p_+ + p_-$  y dado que las partículas son «casi no-relativistas», se tendrá

$$\frac{\omega^2}{c^2} \equiv \frac{(\epsilon_+ + \epsilon_-)^2}{c^2} \approx 4m^3c^3 \gg (p_+ + p_-)^2 \equiv k^2. \quad (83.19)$$

En consecuencia, para el operador de fotón basta escribir

$$D_{\mu\nu} \approx \frac{\pi}{m^2 c^2} g_{\mu\nu}.$$

Aquí se incluye ya el factor  $1/c^2$ . Por lo tanto, basta tomar las amplitudes  $u(p)$  en la aproximación de orden cero:

$$u(p_-) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} w_-^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(-p_+) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ w^{(0)} \end{pmatrix},$$

donde  $w_-^{(0)}$ ,  $w^{(0)}$  son los espines tridimensionales que figuran en (23.12) [prescindiremos en lo que sigue de los superíndices (0) que los distinguen]. Con estas amplitudes

$$\bar{u}(-p_+) \gamma^0 u(p_-) = u^*(-p_+) u(p_-) = 0,$$

$$\bar{u}(-p_+) \gamma u(p_-) = u^*(-p_+) \alpha u(p_-) = 2m(w^* \sigma w_-).$$

Después de substituir estas expresiones, el término «de aniquilación» de la amplitud de dispersión toma la forma

$$M_{fi}^{(an)} = -e^2 \frac{\pi}{m^2 c^2} (2m)^2 (w^* \sigma w_-) \cdot (w_-^* \sigma w). \quad (83.20)$$

Sin embargo, es todavía imposible deducir de aquí directamente conclusión alguna acerca de la forma del operador de interacción. En primer lugar, los espines  $w$ , en función de los cuales se expresan las amplitudes  $u(-p_+)$ , no son aún funciones de positón en sentido estricto. Las amplitudes de positón se obtienen a partir de  $u(-p_+)$  mediante la aplicación de la conjugación de carga; según (26.6) los espines que les corresponden (designémoslos por  $w_+$ ) están ligados con  $w$  por la relación  $w_+ = \sigma_y w^*$ , de donde

$$w^* = \sigma_y w_+ = -w_+ \sigma_y, \quad w = -\sigma_y w_+^*. \quad (83.21)$$

En segundo lugar, la amplitud de dispersión debe reducirse a una forma en la cual se enlacen entre sí los espines de electrón ( $w_- y w_-'$ ) y de positón ( $w_+ y w_+'$ ). Esto se consigue mediante la fórmula

$$(w^* \sigma w_-) \cdot (w'^* \sigma w') = \frac{3}{2} (w'^* w_-) (w^* w') - \frac{1}{2} (w'^* \sigma w_-) \cdot (w^* \sigma w'), \quad (83.22)$$

que a su vez se deduce de (28.17).

Finalmente, expresando  $w$  y  $w'$  en función de  $w_+$  y  $w'_+$  de acuerdo con (83.21), se encuentra, como es fácil comprobar,

$$\begin{aligned} (w^* w') &= (w'^* w_+), \\ (w^* \sigma w') &= -(w'^* \sigma w_+). \end{aligned} \quad (83.23)$$

Substituyendo (83.23) en (83.22) y luego en (83.20), obtendremos la expresión final para la parte de aniquilación de la amplitud de dispersión

$$M_{fi}^{(an)} = -4m^3 \left( (w'^* w_+)^* \left[ \frac{\pi e^2}{2m^2 c^2} (3 + \sigma_+ \cdot \sigma_-) \right] w_- w_+ \right)$$

(las matrices  $\sigma_-$  y  $\sigma_+$  actúan sobre  $w_-$  y  $w_+$ , respectivamente). La expresión entre paréntesis rectos constituye el operador de interacción en la representación de impulsos. El correspondiente operador en el espacio de coordenadas es

$$U^{(an)}(\mathbf{r}) = \frac{\pi \hbar^2 e^2}{2m^2 c^2} (3 + \sigma_+ \cdot \sigma_-) \delta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_- - \mathbf{r}_+, \quad (83.24)$$

(Pirenne, 1947; V. B. Bereststetskiĭ y L. D. Landau, 1949). El operador de interacción total del electrón y del positón se escribe

$$-U + U^{(an)}$$

con  $U$  dado por (83.17).

#### § 84. El positonio

Las fórmulas obtenidas en el párrafo que precede se pueden aplicar al positonio — que es un sistema hidrogenoide formado por un electrón y un positón.

En el sistema del centro de masa, los operadores impulso del electrón y del positón son:  $\mathbf{p}_- = -\mathbf{p}_+ \equiv \mathbf{p}$ , donde  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$  es el operador impulso del movimiento relativo que corresponde al vector posición relativa  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_- - \mathbf{r}_+$ . El hamiltoniano total del positonio es \*

$$\begin{aligned} H &= \frac{\mathbf{p}^2}{m} - \frac{e^2}{r} + V_1 + V_2 + V_3, \\ V_1 &= -\frac{\mathbf{p}^4}{4m^2 c^2} + 4\pi\mu_0^2 \delta(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{2m^2 c^2 r} \left\{ \mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \cdot \mathbf{p}}{r^2} \right\}, \\ V_2 &= 6\mu_0^2 \frac{1}{r^3} \mathbf{l} \cdot \mathbf{S}, \\ V_3 &= 6\mu_0^2 \frac{1}{r^3} \left\{ \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})}{r^2} - \frac{1}{3} \mathbf{S}^2 \right\} + 4\pi\mu_0^2 \left( \frac{7}{3} \mathbf{S}^2 - 2 \right) \delta(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (84.1)$$

\* En unidades ordinarias.

En estas fórmulas  $\mu_0 = e\hbar/2mc$  es el magnetón de Bohr y  $\mathbf{hl} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , el operador momento cinético orbital;  $\mathbf{S} = (\sigma_+ + \sigma_-)/2$  es el operador del spin total del sistema [su cuadrado  $\mathbf{S}^2 = \frac{1}{2}(3 + \sigma_1 \cdot \sigma_2)$ ]. En  $V_1$  se han incluido todos los términos correctivos que tienen carácter puramente orbital;  $V_2$  es la interacción spin-órbita;  $V_3$  incluye las interacciones spin-spin y de «aniquilación».

El hamiltoniano «no perturbado» se escribe

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{m} - \frac{e^2}{r}$$

y difiere, como es natural, del hamiltoniano del átomo de hidrógeno únicamente en la substitución de la masa del electrón por la masa reducida  $m/2$ . Los niveles de energía del positonio serán por ello la mitad (en valor absoluto) del número de niveles del átomo de hidrógeno

$$E = -\frac{me^4}{4\hbar^2 n^2} \quad (84.2)$$

( $n$  es el número cuántico principal).

Los términos restantes en (84.1) conducen al desdoblamiento de los niveles (84.2), es decir, a la aparición de una estructura fina. Los niveles que así resultan se clasifican en primer lugar de acuerdo con los valores del momento cinético total  $j$ . Vemos también que los operadores spin de las partículas intervienen en el hamiltoniano (84.1) tan sólo en forma de suma  $\mathbf{S}$ . Esto significa que el hamiltoniano commuta con el operador del cuadrado del spin total  $\mathbf{S}^2$ , es decir, el módulo del spin total sigue conservándose también en la aproximación considerada (la segunda respecto de  $1/c$ ). En consecuencia, los niveles de energía del positonio se pueden clasificar también de acuerdo con el spin total, que toma los valores  $S = 0$  y  $S = 1$ . Los niveles con spin 0 se llaman niveles de *parapositonio*, y los niveles con spin 1, niveles de *ortopositonio*.

Hay que subrayar que la conservación del spin total en el positonio constituye en realidad una ley exacta, no vinculada con una particular aproximación respecto de  $1/c$ ; dicha ley se sigue de la invariancia-*CP* de las interacciones electromagnéticas. El positonio constituye un sistema realmente neutro y, por lo tanto, sus estados se caracterizan por determinadas paridades de carga y combinada. Esta última es igual a  $(-1)^{S+1}$  (véase el problema en el § 27); dado que  $S$  puede tomar solamente dos valores, 0 y 1, la conservación de la paridad combinada es equivalente a la conservación del spin total.

Para  $S = 0$  el momento cinético total  $j$  coincide con el orbital. En cambio, cuando  $S = 1$  y se da  $j$ , el número  $l$  puede tomar los valores  $j, j \pm 1$  en correspondencia con lo cual cada nivel  $(n, j)$  del ortopositonio se desdobra, hablando en general, en tres niveles. Dado que a los valores  $l = j$  y  $l = j \pm 1$  corresponden paridades diferentes, el hamiltoniano no tiene elementos de matriz que liguen a estos estados. Sin embargo, el operador perturbación (primer término en  $V_3$ ) posee, en general, elementos no diagonales que ligan los estados con  $l = j + 1$  y  $l = j - 1$ ;

en este caso, claro está, el número  $l$  pierde su sentido estricto de momento cinético orbital.

El efecto Zeeman en el positonio goza de propiedades específicas (*V. B. Berezetskii, I. Ia. Pomeranchuk, 1949*).

El momento magnético orbital del positonio es siempre igual a cero: puesto que en el positonio  $\mathbf{r}_+ \times \mathbf{p}_+ = \mathbf{r}_- \times \mathbf{p}_-$ , el operador

$$\mu_l = \mu_0 (\mathbf{r}_+ \times \mathbf{p}_+ - \mathbf{r}_- \times \mathbf{p}_-) = 0.$$

El operador del momento magnético de spin, en cambio,

$$\mu_s = \mu_0 (\sigma_+ - \sigma_-) \quad (84.3)$$

no es proporcional al operador del spin total  $S = (1/2)(\sigma_+ + \sigma_-)$ , y los operadores  $S^2$  y  $\mu^2$  no comutan entre sí. Por ello, los estados con valores determinados del módulo del spin total  $S$  y de su proyección  $S_z$  no son, en general, estados propios del momento magnético.

Los estados con valores dados de  $S$  y  $S_z$  se representan por funciones de spin  $\chi_{SS_z}$  que tienen la forma

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= \alpha_+ \alpha_-, \quad \chi_{1-1} = \beta_+ \beta_-, \\ \chi_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_+ \beta_- + \alpha_- \beta_+), \\ \chi_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_+ \beta_- - \alpha_- \beta_+), \end{aligned} \quad (84.4)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son funciones espinoriales para una sola partícula que corresponden a las proyecciones  $+1/2$  y  $-1/2$  del spin (los subíndices  $+$  o  $-$  indican que la función se refiere al positón o al electrón). De ellas, las dos primeras ( $\chi_{11}$  y  $\chi_{1-1}$ ) son también a la vez funciones propias del operador  $\mu_z$  correspondientes al valor propio  $\mu_z = 0$ . En cambio, las funciones  $\chi_{10}$  y  $\chi_{00}$  no son funciones propias de  $\mu_z$ ; si lo son las combinaciones

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{10} + \chi_{00}) = \alpha_+ \beta_-, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{10} - \chi_{00}) = \alpha_- \beta_+. \quad (84.5)$$

Es fácil ver que los únicos elementos de matriz  $\langle S' S'_z | \mu_z | SS_z \rangle$  diferentes de cero, calculados respecto de las funciones (84.4), son los elementos

$$\langle 00 | \mu_z | 10 \rangle = \langle 10 | \mu_z | 00 \rangle = 2\mu_0. \quad (84.6)$$

En campos magnéticos débiles (cuando  $\mu_0 H \ll \Delta$ , donde  $\Delta$  es la diferencia entre los niveles de energía con  $S = 0$  y  $S = 1$ ) la aproximación de partida para el cálculo del desdoblamiento Zeeman son estados con valores determinados del spin total. En primera aproximación este desdoblamiento viene dado por el valor medio del operador de la energía de perturbación

$$V_H = -\mu_z H.$$

Pero todos los elementos de matriz diagonales del operador  $\mu_z$  (y por ello también de  $V_H$ ), calculados mediante las funciones (84.4) son iguales a cero. Así, pues, en los campos débiles no existe efecto Zeeman lineal en el positonio.

En el caso límite opuesto de campos intensos ( $\mu_0 H \gg \Delta$ ) se puede prescindir de la interacción de los spins, interacción que conduce a establecer determinados valores de  $S$ . Las componentes del nivel desdoblado corresponderán entonces a estados con valores determinados  $\mu_z = \pm 2\mu_0$  [representados por las funciones (84.5)], y el valor de su desplazamiento será igual a  $\pm 2\mu_0 H$ .

### PROBLEMAS

- Determinar la estructura fina de los niveles del parápositonio (V. B. Berestetskiĭ, 1949)\*.

*Solución.* La energía buscada de desdoblamiento del nivel viene dada por los valores medios de los términos correctivos en el hamiltoniano (84.1) calculados respecto de las funciones de onda de los estados no perturbados con diferentes valores  $j = l$  (iguales a  $0, 1, \dots, n-1$ ). Para  $S = 0$  la contribución distinta de cero resulta solamente de  $V_1$  y del segundo término en  $V_3$ .

Las funciones de onda no perturbadas (designémoslas por  $\psi$ ) satisfacen la ecuación de Schrödinger \*\*

$$\mathbf{p}^2\psi = -\Delta\psi = \left(E + \frac{1}{r}\right)\psi, E = -\frac{1}{4n^2}.$$

Por ello

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^4\psi &= \mathbf{p}^2 \left(E + \frac{1}{r}\right)\psi = \left(E + \frac{1}{r}\right)^2\psi - \psi \Delta \frac{1}{r} - 2\left(\nabla \frac{1}{r}\right) \cdot (\nabla\psi) = \\ &= \left(E + \frac{1}{r}\right)^2\psi + 4\pi\delta(r)\psi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial r}. \end{aligned}$$

El valor medio es:

$$\overline{\mathbf{p}^4} = \overline{\left(E + \frac{1}{r}\right)^2} + 4\pi|\psi(0)|^2 + \int \int \frac{\partial |\psi|^2}{\partial r} dr do.$$

La última integral es igual a  $-\int |\psi(0)|^2 do$ ; dado que  $\psi(0) \neq 0$  solamente para  $l = 0$  y que las funciones de onda de los estados-S poseen simetría esférica, la integral es igual a  $4\pi|\psi(0)|^2$  y se reduce con el segundo término.

Introduciendo el operador momento cinético orbital  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , escribamos:

$$-\mathbf{p}^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\mathbf{l}^2\psi}{r^2} = -\left(E + \frac{1}{r}\right)\psi.$$

De aquí se sigue para el otro valor medio que necesitamos

$$\int \psi^* \frac{r}{r^8} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} \psi d^3x = - \int \psi^* \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} d^3x = \frac{1}{r} \left(E + \frac{1}{r}\right) - 4\pi|\psi(0)|^2 - l(l+1)\overline{r^{-8}}$$

(para  $l = 0$  no existe el último término).

\* El cálculo de la estructura fina del ortopositonio puede verse en V. B. BERESTETSKIĬ, Zh. ETF, 19, 1130 (1949); R. FERRELL, Phys. Rev. 84, 858 (1951); A. A. SOKOLOV, V. N. TSYTOVICH, Zh. ETF, 24, 253 (1953).

\*\* Para el cálculo conviene utilizar unidades atómicas.

De acuerdo con las conocidas fórmulas de la teoría del átomo de hidrógeno [cf. III (36.14) (36.16)] — teniendo en cuenta la substitución de la masa  $m$  del electrón por  $m/2$  — tenemos

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{8\pi n^3} \delta_{l0}, \quad \bar{r}^{-1} = \frac{1}{2n^2}, \quad \bar{r}^{-2} = \frac{1}{2n^3(2l+1)},$$

$$\bar{r}^{-3} = \frac{1}{4n^3 l(l+1)(2l+1)} \quad (l \neq 0).$$

Mediante las fórmulas que preceden se obtiene para los niveles de energía buscados del parapositonio

$$E_{nl} = -\frac{1}{4n^2} - \alpha^2 \frac{me^4}{\hbar^2} \frac{1}{2n^3} \left( \frac{1}{2l+1} - \frac{11}{32n} \right).$$

2. Determinar la diferencia de energías de los estados fundamentales ( $n = 1, l = 0$ ) del orto- y parapositonio.

*Solución.* La dependencia de la energía con relación al spin total  $S$  para  $l = 0$  está contenida tan sólo en el valor medio del segundo término en  $V_3$  (el primer término, en cambio, se anula al promediar respecto de los ángulos en un estado- $S$ , que presenta simetría esférica★). El nivel fundamental del ortopositonio ( ${}^3S_1$ ) se encuentra por encima del nivel fundamental del parapositonio ( ${}^1S_0$ ) y la distancia entre ambos niveles es

$$E({}^3S_1) - E({}^1S_0) = \frac{7}{12} \alpha^2 \frac{me^4}{\hbar^2} = 8,2 \cdot 10^{-4} \text{ eV}.$$

### § 85. Interacción de los átomos a grandes distancias

Entre dos átomos neutros que se encuentran a distancias  $r$  grandes (en comparación con sus propias dimensiones) actúan fuerzas de atracción. El cálculo ordinario de estas fuerzas según la mecánica cuántica (III, § 89) deja de ser aplicable, sin embargo, a distancias demasiado grandes. Ocurre, en efecto, que en este cálculo se considera solamente la interacción electrostática, es decir, no se tienen en cuenta los efectos de retardo. Esta manera de abordar el problema es válido tan sólo en tanto que la distancia  $r$  se conserva pequeña comparada con las longitudes características de las ondas  $\lambda_0$  en los espectros de los átomos en interacción mutua. En este párrafo el cálculo se efectuará de manera que esté libre de tal limitación.

Procederemos más o menos como en el § 83, es decir, calcularemos la amplitud de dispersión elástica (sin variación del estado interno) de dos átomos diferentes en la primera aproximación no nula. La expresión a que se llegue se comparará con la amplitud que se obtendría representando la interacción de los átomos por una energía potencial  $U(r)$ .

En este último caso, el primer elemento de la matriz- $S$  que no se anula y que describe el proceso en cuestión, sería un elemento de primera aproximación

\* El promedio respecto de los ángulos debe efectuarse antes de integrar respecto de  $r$ , como es evidente por el método de cálculo de la integral (83.14) que conduce al primer término de  $V_3$ .

$$S_{fi} = -i \int \psi_1^*(\mathbf{r}_1) \psi_2^*(\mathbf{r}_2) U(r) \psi_1(\mathbf{r}_1) \psi_2(\mathbf{r}_2) d^3x_1 d^3x_2 \times \\ \times \int \exp \{ -i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2)t \} dt. \quad (85.1)$$

Aquí  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  y  $\psi'_1$ ,  $\psi'_2$  son las partes, independientes del tiempo, de las funciones de onda (ondas planas) que representan el movimiento de translación de los dos átomos con los impulsos iniciales y finales;  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon'_1$ ,  $\varepsilon'_2$  son las energías cinéticas de este movimiento; las coordenadas  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  de los átomos como un todo pueden interpretarse como las coordenadas de sus núcleos, y la distancia  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . La integral respecto del tiempo en (85.1) da, como de ordinario, una función-δ que expresa la ley de conservación de la energía. Para facilitar la ulterior comparación, sin embargo, será conveniente considerar formalmente el caso límite en que las masas de los átomos son infinitamente grandes; para impulsos dados, a este límite corresponden energías ε iguales a cero. Cabe decir, de otra manera, que se consideran intervalos de tiempo que son pequeños comparados con los períodos  $1/\varepsilon$ . Entonces (85.1) toma la forma

$$S_{fi} = -it \iint \psi_1^* \psi_2^* U(r) \psi_1 \psi_2 d^3x_1 d^3x_2, \quad (85.2)$$

donde  $t$  es el intervalo de integración respecto del tiempo.

El cálculo efectivo de la amplitud de dispersión elástica se puede desarrollar en dos etapas en el caso de las hipótesis que hemos hecho. En primer lugar, promediamos el operador- $S$  respecto de las funciones de onda de los estados no alterados (los fundamentales) de ambos átomos (para coordenadas  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  dadas de sus núcleos) y también respecto del vacío fotónico — ya que no existen fotones ni al principio ni al final del proceso. En definitiva obtendremos una cantidad que es función de la distancia entre los núcleos; designémosla por  $\langle S(r) \rangle^{1*}$ . Para hallar el elemento de matriz buscado de la transición hay que calcular luego la integral

$$S_{fi} = \iint \psi_1^* \psi_2^* \langle S(r) \rangle \psi_1 \psi_2 d^3x_1 d^3x_2. \quad (85.3)$$

Comparando con (85.2), vemos que si se obtuviera la expresión  $\langle S(r) \rangle$  en la forma

$$\langle S(r) \rangle = -itU(r),$$

la función  $U(r)$  será precisamente la energía buscada de interacción de los átomos.

Dado que en el presente caso se trata no de la colisión de partículas elementales, sino de sistemas complejos (de átomos que en los estados intermedios pueden estar excitados), las reglas ordinarias formales de la técnica de diagramas no son aplicables aquí de manera inmediata y partiremos de la expresión inicial del operador  $S$  en forma de desarrollo (73.10).

Para la interacción de los átomos son esenciales las componentes de los campos con frecuencias del orden de las atómicas (y menores). Las correspondientes longi-

---

\* En vez de la notación más compleja del elemento de matriz diagonal con indicación de los estados del átomo y del campo de fotones.

tudes de onda son grandes en comparación con las dimensiones atómicas. En consecuencia, el operador de interacción electromagnética se puede tomar en la forma

$$V = -E(\mathbf{r}_1) \mathbf{d}_1 - E(\mathbf{r}_2) \mathbf{d}_2, \quad (85.4)$$

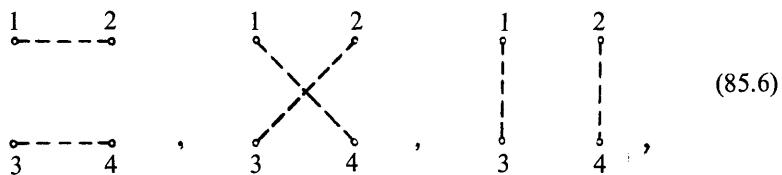
donde  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$  son los operadores de los momentos dipolares de los átomos (se trata de operadores que dependen del tiempo, es decir, operadores de Heisenberg), y  $E(\mathbf{r})$  es el operador del campo eléctrico en los puntos en que se encuentran los correspondientes átomos.

Como es sabido, los valores medios del momento dipolar de un átomo en sus estados estacionarios es igual a cero (III, § 75). Se sigue de aquí que una amplitud de dispersión diferente de cero aparece tan sólo en la cuarta aproximación de la teoría de perturbaciones, es decir, como elemento de matriz del operador

$$S^{(4)} = \frac{(-i)^4}{4!} \int dt_1 \dots \int dt_4 \cdot T \{ V(t_1) V(t_2) V(t_3) V(t_4) \}. \quad (85.5)$$

En efecto, en los órdenes de aproximación más bajos cada término en los productos de los operadores  $V$  contendrá por lo menos uno de los operadores  $\mathbf{d}_1$  o  $\mathbf{d}_2$  en primer grado y se anulará al promediar respecto del estado del correspondiente átomo.

Promediemos el operador (85.5) respecto del vacío fotónico. Según el teorema de Wick, el valor medio del producto de los cuatro operadores del campo  $E$  se reduce a la suma de los productos de sus promedios dos a dos (contracciones). La descomposición en pares se puede efectuar de tres maneras, que cabe representar mediante los diagramas



donde las líneas de trazo representan los enlaces, y a los números corresponden los argumentos  $t_1, t_2, t_3, t_4$ . Además, a cada punto pueden corresponder las coordenadas espaciales  $\mathbf{r}_1$  o  $\mathbf{r}_2$  (a dos puntos corresponde  $\mathbf{r}_1$ , y a dos,  $\mathbf{r}_2$ ; en el caso contrario, en el término en cuestión de la suma uno de los operadores  $\mathbf{d}_1$  o  $\mathbf{d}_2$  actúa en primer grado y se anula al promediar respecto al estado del átomo). Es evidente que en los puntos unidos por líneas deben encontrarse diferentes  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ . De no ser así, el diagrama (es decir, el término que le corresponde en el elemento de matriz) se reducirá al producto de funciones de  $\mathbf{r}_1$  y de  $\mathbf{r}_2$  independientes, en vez de ser función de la diferencia  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ; tales términos nada tienen que ver con la dis-

persión\*. De acuerdo con estas condiciones se pueden distribuir los argumentos  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  según los cuatro puntos del diagrama de cuatro maneras diferentes. Teniendo en cuenta también que los operadores  $\mathbf{d}_1$  y  $\mathbf{d}_2$  comutan y promediando respecto de los estados de cada uno de los átomos, se encuentra que todos los  $3 \cdot 4 = 12$  términos que se obtienen de esta manera son iguales entre sí (difieren tan sólo en la notación de las variables de integración). En definitiva obtendremos

$$\begin{aligned} \langle S(r) \rangle &= \frac{1}{2} \int dt_1 \dots \int dt_4 \cdot \langle T(E_i(\mathbf{r}_1, t_1) E_k(\mathbf{r}_2, t_2)) \rangle \times \\ &\quad \times \langle T(E_l(\mathbf{r}_3, t_3) E_m(\mathbf{r}_4, t_4)) \rangle \langle T(d_{1i}(t_1) d_{1m}(t_4)) \rangle \langle T(d_{2k}(t_2) d_{2l}(t_3)) \rangle, \end{aligned} \quad (85.7)$$

donde  $i, k$  son índices vectoriales tridimensionales.

Para calcular las cantidades

$$D_{ik}^E(x_1 - x_2) = \langle T(E_i(x_1) E_k(x_2)) \rangle \quad (85.8)$$

nos valdremos del contraste de los potenciales en el que el potencial escalar  $\Phi = 0$ . Entonces es  $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t$  y tenemos

$$D_{ik}^E(x_1 - x_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle T(A_i(x_1) A_k(x_2)) \rangle = i \frac{\partial^2}{\partial t^2} D_{ik}(x),$$

donde  $x = x_1 - x_2$  y  $D_{ik}(x)$  es el propagador de fotón en el contraste adoptado\*\*. Por ello,

$$D_{ik}^E(x) = -i \int \omega^3 D_{ik}(k) e^{-ikx} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}, \quad (85.9)$$

donde  $D_{ik}(k)$  es el propagador de fotón en la representación de impulsos; según (77.14),

$$D_{ik}(k) = -\frac{4\pi}{\omega^2 - \mathbf{k}^2 + i0} \left( \delta_{ik} - \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_k}{\omega^2} \right). \quad (85.10)$$

Las cantidades

$$\alpha_{ik}(t_1 - t_2) = i \langle T(d_i(t_1) d_k(t_2)) \rangle \quad (85.11)$$

las desarrollaremos en integral de Fourier

$$\alpha_{ik}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \alpha_{ik}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Haciendo por comodidad  $t_2 = 0$ ,  $t_1 = t$ , según la definición del producto- $T$  escribiremos

\* Estos términos conducen a correcciones de los valores propios de la energía de cada uno de los átomos, correcciones que aquí no nos interesan.

\*\* La primera derivada  $\frac{\partial}{\partial t} D_{ik}(t)$  presenta un salto finito en  $t = 0$ . En consecuencia, la derivada segunda, es decir, la función  $D_{ik}^E(t)$ , contiene también un término con la función- $\delta$  [ $\sim \delta^4(x_2 - x_1)$ ]. Este término, sin embargo, es igual a cero para todo  $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$  y no nos interesa aquí.

$$\begin{aligned}\alpha_{ik}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \alpha_{ik}(t) dt = \\ &= i \int_{-\infty}^0 e^{i\omega t} \langle d_k(0) d_i(t) \rangle dt + i \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \langle d_i(t) d_k(0) \rangle dt.\end{aligned}\quad (85.12)$$

Los valores medios que aquí intervienen (relativos al estado fundamental del átomo) se expresan en función de los elementos de matriz del momento dipolar:

$$\begin{aligned}\langle d_k(0) d_i(t) \rangle &= \sum_n (d_k)_{0n} (d_i)_{n0} e^{i\omega_{n0} t}, \\ \langle d_i(t) d_k(0) \rangle &= \sum_n (d_i)_{0n} (d_k)_{n0} e^{-i\omega_{n0} t}.\end{aligned}$$

Substituyendo estas expresiones en (85.12) y efectuando la integración, se obtendrá \*

$$\alpha_{ik}(\omega) = \sum_n \left\{ \frac{(d_i)_{0n} (d_k)_{n0}}{\omega_{n0} - \omega} + \frac{(d_k)_{0n} (d_i)_{n0}}{\omega_{n0} + \omega} \right\}. \quad (85.13)$$

Si el estado fundamental del átomo es un estado  $S$ , este tensor se reduce al escalar  $\alpha_{ik}(\omega) = \alpha(\omega)\delta_{ik}$ . Pero si el átomo posee un momento cinético, este mismo resultado se obtiene después de promediar respecto de las direcciones de dicho momento, operación que supondremos se ha llevado a cabo (naturalmente, nos interesa la interacción de los átomos promediada respecto de sus orientaciones mutuas). En (85.13) se ve también que

$$\alpha(-\omega) = \alpha(\omega).$$

La magnitud  $\alpha(\omega)$  (para  $\omega > 0$ ) no es sino la polarizabilidad del átomo [cf. (60.17)].

Substituyendo las expresiones obtenidas en (85.7), se encuentra

$$\begin{aligned}\langle S(r) \rangle &= \frac{1}{2} \int dt_1 \dots dt_4 \cdot \frac{d\Omega_1}{2\pi} \frac{d\Omega_2}{2\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \alpha_1(\Omega_1) \alpha_2(\Omega_2) \times \\ &\quad \times \omega_1^2 D_{ik}(k_1) \omega_2^2 D_{ik}(k_2) \times \\ &\quad \times \exp \{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - i\omega_1(t_1 - t_2) - i\omega_2(t_3 - t_4) - \\ &\quad - i\Omega_1(t_1 - t_4) - i\Omega_2(t_2 - t_3)\}.\end{aligned}$$

La integración respecto de las tres primeras variables tiempo da funciones- $\delta$  (en virtud de las cuales  $\Omega_1 = \Omega_2 = \omega_2 = \omega_1 \equiv \omega$ ), y al integrar respecto de la cuarta, se obtiene el factor  $t$ :

$$\langle S(r) \rangle = -itU(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|),$$

donde

---

\* Para la convergencia de las integrales en (85.12) hay que interpretar  $\omega$  en la primera de ellas como  $\omega - i0$ , y en la segunda, como  $\omega + i0$ . Con esto, a la vez, se explica en qué sentido hay que entender la expresión (85.13) cerca de sus polos.

$$U(r) = \frac{i}{2(2\pi)^4} \int d^3k_1 d^3k_2 d\omega \cdot \omega^4 \alpha_1(\omega) \alpha_2(\omega) D_{ik}(\mathbf{k}_1, \omega) D_{ik}(\mathbf{k}_2, \omega) \times \\ \times \exp \{i\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\},$$

o bien substituyendo aquí (85.10),

$$U(r) = \frac{i}{16\pi^5} \int d^3k_1 d^3k_2 d\omega \cdot \alpha_1(\omega) \alpha_2(\omega) \times \\ \times \frac{3\omega^4 - \omega^2(k_1^2 + k_2^2) + (k_1 k_2)^2}{(\omega^2 - k_1^2 + i0)(\omega^2 - k_2^2 + i0)} e^{i\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)}. \quad (85.14)$$

Esta fórmula da también la energía de interacción de los átomos a distancias cualesquiera que sean grandes en comparación con las dimensiones atómicas  $a$ . La integral puede simplificarse y ser calculada hasta el final en los casos límite de distancias «pequeñas» ( $a \ll r \ll \lambda_0$ ) y «grandes» ( $r \gg \lambda_0$ ).

Para una distancia dada  $r$ , en la integral cuenta esencialmente el dominio de valores de los vectores de onda tales que  $|\mathbf{k}| \sim 1/r$ . Para  $r \ll \lambda_0$  tenemos:  $|\mathbf{k}| \gg \omega_0$  ( $\omega_0$  son las frecuencias atómicas), y en el integrando de (85.14) se puede prescindir en todas partes [salvo en las funciones  $\alpha(\omega)$ ] de los términos en  $\omega^2$ , frente a los términos que contienen  $\mathbf{k}^2$ . Hecho esto, no es difícil reducir  $U(r)$  a la fórmula ordinaria de London (III, § 89).

Consideremos el caso opuesto en que  $r \gg \lambda_0$ . Ante todo, efectuemos en (85.14) la integración respecto de  $d\omega$ . Cerremos el camino de integración en el semiplano superior de la variable compleja  $\omega$  y calculemos la integral mediante los residuos del integrando en los polos que presenta en dicho semiplano. Al hacerlo basta tener en cuenta únicamente los ceros del denominador, que son tales que

$$\omega \sim |\mathbf{k}| \sim \frac{1}{r} \ll \omega_0;$$

los polos de la función  $\alpha(\omega)$ , en cambio, se hallan cerca de  $\omega \sim \omega_0$  y, en el caso presente, carecen de importancia. Calculando así la integral respecto de  $d\omega$  y substituyendo luego la integración respecto de  $\mathbf{k}_1$  y  $\mathbf{k}_2$  por integraciones respecto de  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$  y  $\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}_2$ , reducimos  $U(r)$  a una integral de Fourier

$$U(r) = \int U(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \frac{d^3q}{(2\pi)^3}, \quad (85.15)$$

en la que

$$U(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha_1(0) \alpha_2(0)}{2\pi} \int \frac{d^3k}{kk_1} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)^2 - kk_1(2k_1^2 + 2k^2 + 3kk_1)}{k + k_1} \quad (85.16)$$

(aquí y en lo que sigue  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k} + \mathbf{q}$ ,  $k_1 = |\mathbf{k}_1|$ ,  $k = |\mathbf{k}|$ ). En las funciones  $\alpha_1(\omega)$ ,  $\alpha_2(\omega)$ , tomadas en los puntos  $\omega \sim k$ , substituimos los pequeños valores del argumento ( $\omega \ll \omega_0$ ) por cero, es decir, se han substituido estas funciones por las polarizabilidades estáticas de los átomos.

La integral (85.16) diverge cuando  $k \rightarrow \infty$ , lo que se debe a que la aproximación dipolar utilizada deja de ser aplicable para  $k \gtrsim 1/a$ . Esta divergencia, sin embargo, no tiene importancia. En efecto, para el cálculo del comportamiento asintótico

de  $U(r)$  cuando  $r \rightarrow \infty$  cuentan solamente los términos de  $U(q)$  que poseen una singularidad en  $q = 0$ ; precisamente estos términos singulares dan una contribución de tipo potencial (respecto de  $1/r$ ) en  $U(r)$ . Pero el término singular en  $U(q)$ , conforme veremos, viene determinado por la parte convergente de la integral (85.16).

El elemento de integración  $d^3k$  en (85.16) lo substituiremos por  $2\pi k^2 dk d \cos \theta$  (donde  $\theta$  es el ángulo formado por  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{q}$ ) y la diferencial  $d \cos \theta$  por

$$d \cos \theta = \frac{k_1 dk_1}{q k},$$

donde

$$k_1 = \sqrt{k^2 + q^2 + 2kq \cos \theta}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1 = \frac{1}{2}(k_1^2 + k^2 - q^2).$$

De esta manera, en (85.16) se aplica la sustitución

$$\frac{d^3k}{k k_1} \rightarrow \frac{2\pi}{q} dk dk_1,$$

a la vez que la integración respecto de  $dk_1$  se efectúa entre los límites  $|k - q|$  y  $k + q$ . Por la forma del integrando llegamos a la conclusión de que la singularidad puede proceder solamente de la integración del denominador. Dado que únicamente nos interesa el término singular, podemos por ello simplificar sin más la integral desarrollando el numerador en potencias de  $k + k_1$  y limitarnos al término de orden cero (en otras palabras, en el numerador se hace simplemente  $k_1 = -k$ ). Hecho esto obtendremos

$$U(q) = -\frac{\alpha_1(0) \alpha_2(0)}{4q} \int_0^\infty (8k^4 - 4k^2 q^2 + q^4) \ln \frac{2k + q}{2k - q} dk. \quad (85.17)$$

El término singular (para  $q \rightarrow 0$ ) en esta integral tiene la forma  $q^5 \ln q$ . Separándolo, obtenemos para la componente de Fourier de la energía de interacción \*

$$U(q) = \frac{23\alpha_1(0) \alpha_2(0)}{120} q^4 \ln q. \quad (85.18)$$

\* La integral (85.17) se calcula de manera elemental, aunque pesada; tomando como límite superior un número grande  $N$  en vez de  $\infty$  y separando los términos que contienen  $\ln q$ , se obtendrá el resultado (85.18). Sin embargo, es mucho más sencillo obtener este resultado observando que, en tanto la parte de la integral que nos interesa presenta una singularidad logarítmica para  $q \rightarrow 0$ , esta parte viene determinada por el intervalo de integración en que  $k \gg q$ . Desarrollando el logaritmo en potencias de  $q/2k$ ,

$$\ln \frac{2k + q}{2k - q} \approx 2 \left[ \frac{q}{2k} + \frac{1}{3} \left( \frac{q}{2k} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{q}{2k} \right)^5 \right],$$

separamos integrales divergentes de la forma  $\int dk/k$ , que hay que cortar inferiormente para  $k \sim q$  (en cambio, el límite superior carece de importancia).

La transformación inversa de Fourier se efectúa mediante la fórmula \*

$$\int e^{iqr} q^4 \ln q \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} = -\frac{30}{\pi r^7}. \quad (85.19)$$

De esta manera, obtenemos en definitiva

$$U(r) = -\frac{23}{4\pi} \frac{\alpha_1(0) \alpha_2(0)}{r^7}, \quad (85.20)$$

con lo que queda determinada la interacción de dos átomos a grandes distancias ( $r \ll \lambda_0$ ).\*\*.

\* Una integración en el espacio- $q$ , inmediata en coordenadas esféricas, permite obtener

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int e^{iqr-q\delta} q^\nu \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} = -\frac{\Gamma(\nu+2) \operatorname{sen} \frac{\pi\nu}{2}}{2\pi^2 r^{\nu+8}}.$$

Derivando esta fórmula respecto del parámetro  $\nu$  y haciendo luego  $\nu = 4$  se obtiene el resultado (85.19).

\*\* Los primeros en obtener esta fórmula fueron H. B. Casimir y D. Polder, 1948. En la deducción aquí presentada hemos seguido a I. E. Dzialoshinskii.

## CAPÍTULO X

### INTERACCIÓN DE ELECTRONES CON FOTONES

#### § 86. La dispersión de un fotón por un electrón

La conservación del 4-impulso en la dispersión de un fotón por un electrón libre (*efecto Compton*) se expresa por la igualdad

$$p + k = p' + k', \quad (86.1)$$

donde  $p$  y  $k$  son los 4-impulsos del electrón y del fotón antes del choque, y  $p'$  y  $k'$  sus 4-impulsos después del mismo. Los invariantes cinemáticos introducidos en el § 67 son:

$$\begin{aligned} s &= (p + k)^2 = (p' + k')^2 = m^2 + 2pk = m^2 + 2p'k', \\ t &= (p - p')^2 = (k' - k)^2 = 2(m^2 - pp') = -2kk', \\ u &= (p - k')^2 = (p' - k)^2 = m^2 - 2pk' = m^2 - 2p'k, \\ s + t + u &= 2m^2. \end{aligned} \quad (86.2)$$

El proceso considerado se representa por dos diagramas de Feynman (75.14) y su amplitud es

$$M_{fi} = -4\pi e^3 e'_\mu e_\nu (\bar{u}' Q^{\mu\nu} u), \quad (86.3)$$

donde

$$Q^{\mu\nu} = \frac{1}{s - m^2} \gamma^\mu (\hat{p} + \hat{k} + m) \gamma^\nu + \frac{1}{u - m^2} \gamma^\nu (\hat{p} - \hat{k}' + m) \gamma^\mu. \quad (86.4)$$

Aquí,  $e$ ,  $e'$  son los 4-vectores polarización de los fotones inicial y final;  $u$ ,  $u'$ , las amplitudes bispinoriales de los correspondientes electrones.

Según las reglas expuestas en el § 66, para estados de polarización arbitrarios de las partículas el cuadrado  $|M_{fi}|^2$  se substituye por

$$|M_{fi}|^2 \rightarrow 16\pi^3 e^6 \text{Tr} \{ \rho^{(e)} \rho_{\lambda\mu}^{(\gamma')} Q^{\mu\nu} \rho^{(e)} \rho_{\nu\sigma}^{(\gamma)} \bar{Q}^{\lambda\sigma} \}. \quad (86.5)$$

En esta expresión  $\rho^{(e)}$ ,  $\rho^{(e)'}'$  son las matrices densidad del electrón inicial y final;

$\rho^{(\gamma)}$ ,  $\rho^{(\gamma')}$  son las magnitudes análogas para los fotones; los índices de fotón (tensoriales) aparecen en forma explícita, y los de electrón (bispinoriales) se sobreentienden; el signo Tr se refiere precisamente a estos últimos. A estos mismos índices se refiere el signo + en la definición  $\bar{Q}_{\mu\nu} = \gamma^0 Q_{\mu\nu}^+ \gamma^0$ .

Consideremos la dispersión de un fotón no polarizado por un electrón asimismo no polarizado, sin que nos interesen cuáles sean sus polarizaciones después de la dispersión. El promedio respecto de las polarizaciones de todas las partículas se consigue mediante las matrices densidad:

$$\rho_{\lambda\mu}^{(\gamma)} = \rho_{\lambda\mu}^{(\gamma')} = -\frac{1}{2} g_{\lambda\mu}, \quad \rho^{(e)} = \frac{1}{2} (\hat{p} + m), \quad \rho^{(e)\prime} = \frac{1}{2} (\hat{p}' + m);$$

el paso a la suma respecto de las polarizaciones de las partículas finales se logra multiplicando luego por  $2 \cdot 2 = 4$ .

Según la fórmula (65.23) [en la cual hay que hacer ahora  $I^2 = \frac{1}{4} (s - m^2)^2$  — véase (65.15a)—] obtendremos para la sección eficaz

$$d\sigma = \frac{\pi e^4}{4} \frac{dt}{(s - m^2)^2} \text{Tr} \{ (\hat{p}' + m) Q^{\lambda\mu} (\hat{p} + m) \bar{Q}_{\lambda\mu} \}.$$

Mediante las fórmulas (66.2a) se encuentra que  $\bar{Q}_{\mu\lambda} = Q_{\lambda\mu}$ . Separando los términos que se transforman entre sí al aplicar la sustitución  $k \leftrightarrow -k'$  (y, según esto, en la  $s \leftrightarrow u$ ), representaremos la sección eficaz en la forma

$$d\sigma = dt \frac{\pi e^4}{(s - m^2)^2} [f(s, u) + g(s, u) + f(u, s) + g(u, s)],$$

donde se ha hecho

$$\begin{aligned} f(s, u) &= \\ &= \frac{1}{4(s - m^2)^2} \text{Tr} \{ (\hat{p}' + m) \gamma^\mu (\hat{p} + \hat{k} + m) \gamma^\nu (\hat{p} + m) \gamma_\nu (\hat{p} + \hat{k} + m) \gamma_\mu \}, \\ g(s, u) &= \frac{1}{4(s - m^2)(u - m^2)} \times \\ &\quad \times \text{Tr} \{ (\hat{p}' + m) \gamma^\mu (\hat{p} + \hat{k} + m) \gamma^\nu (\hat{p} + m) \gamma_\mu (\hat{p} - \hat{k}' + m) \gamma_\nu \} \end{aligned}$$

(al introducir estas definiciones lo hacemos teniendo ya presente que el resultado dependerá sólo de magnitudes invariantes).

La suma respecto de  $\mu$  y  $\nu$  se efectúa mediante las fórmulas (22.6); prescindiendo luego de los términos que contienen un número impar de factores  $\gamma$ , obtendremos

$$\begin{aligned} f(s, u) &= \frac{1}{(s - m^2)^2} \times \\ &\quad \times \text{Tr} \{ \hat{p}' (\hat{p} + \hat{k}) \hat{p} (\hat{p} + \hat{k}) + 4m^2 (\hat{p} + \hat{k})(\hat{k} - \hat{p}') + m^2 \hat{p} \hat{p}' + 4m^4 \}. \end{aligned}$$

Calculando la traza de acuerdo con la fórmula (22.13) y expresando todas las cantidades en función de los invariantes  $s$ ,  $u$ , se encuentra después de simples transformaciones

$$f(s, u) = \frac{2}{(s - m^2)^2} \{4m^4 - (s - m^2)(u - m^2) + 2m^2(s - m^2)\}.$$

De manera análoga se calcula  $g$ :

$$g(s, u) = \frac{2m^2}{(s - m^2)(u - m^2)} \{4m^2 + (s - m^2) + (u - m^2)\}.$$

En definitiva, para la sección eficaz obtendremos

$$d\sigma = 8\pi r_e^2 \frac{m^2 dt}{(s - m^2)^2} \left\{ \left( \frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{s - m^2}{u - m^2} + \frac{u - m^2}{s - m^2} \right) \right\}, \quad (86.6)$$

donde  $r_e = e^2/m$ . Esta fórmula expresa la sección eficaz en función de cantidades invariantes. Mediante ella es fácil expresar la sección eficaz en función de los parámetros de la colisión en cualquier sistema de referencia concreto.

Hagámoslo para el sistema de referencia del laboratorio, en el cual el electrón se encuentra en reposo antes del choque:  $p = (m, 0)$ . Aquí

$$s - m^2 = 2m\omega, \quad u - m^2 = -2m\omega'. \quad (86.7)$$

Escribiendo la ecuación de conservación del 4-impulso en la forma  $p + k - k' = p'$  y elevándola al cuadrado, obtendremos

$$pk - pk' - kk' = 0,$$

de donde (en el sistema del laboratorio)

$$m(\omega - \omega') - \omega\omega'(1 - \cos \vartheta) = 0,$$

$\vartheta$  es el ángulo de dispersión del fotón. Esta igualdad determina la relación entre el cambio de energía del fotón y el ángulo de dispersión:

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1 - \cos \vartheta). \quad (86.8)$$

El invariante  $t$  se reduce a

$$t = -2kk' = -2\omega\omega'(1 - \cos \vartheta).$$

Para una energía  $\omega$  dada se encuentra [mediante (86.8)]

$$dt = 2\omega'^2 d \cos \vartheta = \frac{1}{\pi} \omega'^2 d\omega' \quad (d\omega' = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta).$$

La substitución de las expresiones que preceden en (86.6) conduce a la forma siguiente de la sección eficaz de dispersión en el sistema de referencia del laboratorio:

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{2} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2 \vartheta \right) d\omega' \quad (86.9)$$

(O. Klein, Y. Nishina, 1929; I. E. Tamm, 1930).

Dado que el ángulo  $\vartheta$  está ligado de manera unívoca con  $\omega'$  por la relación (86.8), la sección eficaz se puede expresar en función de la energía  $\omega'$  del fotón dispersado:

$$d\sigma = \pi r_e^2 \frac{m d\omega'}{\omega^2} \left[ \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} + \left( \frac{m}{\omega'} - \frac{m}{\omega} \right)^2 - 2m \left( \frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} \right) \right], \quad (86.10)$$

variando  $\omega'$  entre los límites

$$\frac{\omega}{1 + 2 \frac{\omega}{m}} \leq \omega' \leq \omega. \quad (86.11)$$

Para  $\omega \ll m$  en (86.9) se puede suponer  $\omega \approx \omega$  y se obtiene, como debía ser, la fórmula clásica no-relativista de Thomson

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \theta) d\omega \quad (86.12)$$

[véase II (78.5)].

Para calcular la sección eficaz total volvamos a la fórmula (86.6). Los invariantes  $s, t, u$  que intervienen en ella toman valores que satisfacen las desigualdades

$$s \geq m^2, \quad t \leq 0, \quad us \leq m^4. \quad (86.13)$$

Éstas se obtuvieron ya en el § 68 (la región física que les corresponde es la I de la fig. 9). Es fácil comprobarlas también directamente escribiendo las expresiones de los invariantes en el sistema del centro de masa. En él  $\mathbf{p} + \mathbf{k} = 0$  y las energías del electrón  $\epsilon$  y del fotón  $\omega$  están ligadas por la igualdad  $\epsilon = \sqrt{\omega^2 + m^2}$ . Los invariantes son:

$$\begin{aligned} s &= (\epsilon + \omega)^2 = m^2 + 2\omega(\omega + \epsilon), \\ u &= m^2 - 2\omega(\epsilon + \omega \cos \theta), \\ t &= -2\omega^2(1 - \cos \theta), \end{aligned} \quad (86.14)$$

donde  $\theta$  es el ángulo de dispersión (ángulo entre  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{p}'$  ó entre  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{k}'$ ). Las tres desigualdades (86.13) se obtienen a partir de las condiciones:  $\omega \geq 0$ ,  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ .

Para  $s$  dado (es decir, para una energía dada de las partículas), la integración respecto de  $t$  se puede substituir por la integración respecto de  $u = 2m^2 - s - t$  en el intervalo

$$\frac{m^4}{s} \leq u \leq 2m^2 - s.$$

Introduciendo en vez de  $s, u$  las cantidades

$$x = \frac{s - m^2}{m^2}, \quad y = \frac{m^2 - u}{m^2}, \quad (86.15)$$

obtendremos

$$\sigma = \frac{8\pi r_e^2}{x^2} \int_{x/(x+1)}^x \left[ \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{4} \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right] dy$$

y después de una integración elemental

$$\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{1}{x} \left\{ \left( 1 - \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2} \right) \ln(1+x) + \frac{1}{2} + \frac{8}{x} - \frac{1}{2(1+x)^2} \right\}. \quad (86.16)$$

Los primeros términos del desarrollo dan, cuando  $x \ll 1$  (caso no relativista),

$$\sigma = \frac{8\pi r_e^2}{3} (1-x). \quad (86.17)$$

El primer término es la sección eficaz clásica de Thomson. En el caso opuesto, el ultrarrelativista, en que  $x \gg 1$ , también el desarrollo de la fórmula (86.16) da

$$\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{1}{x} \left( \ln x + \frac{1}{2} \right). \quad (86.18)$$

En el sistema de referencia del laboratorio

$$x = \frac{2\omega}{m}, \quad (86.19)$$

de modo que las fórmulas (86.16-19) proporcionan directamente la dependencia de la sección eficaz de dispersión por un electrón en reposo en función de la energía del fotón. En la fig. 15 se representa gráficamente  $\sigma$  en función de  $\omega/m$ .

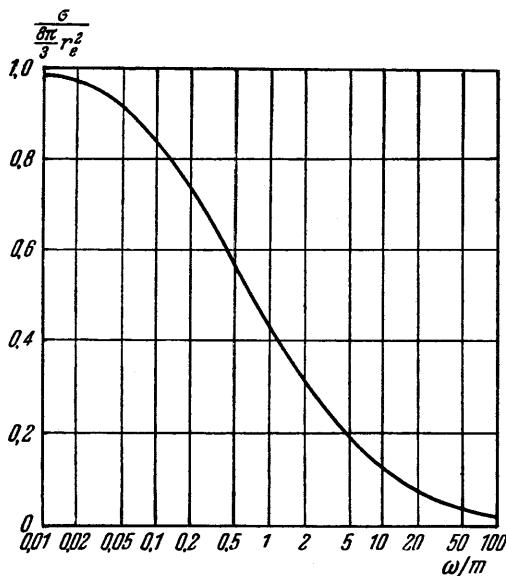


Fig. 15.

Observemos que en el caso ultrarrelativista la sección eficaz decrece al aumentar la energía, tanto en el sistema de referencia del laboratorio ( $\sigma \sim \omega^{-1} \ln \omega$ ), como en el sistema del centro de masa ( $x \approx 4\omega^2/m^2$ ,  $\sigma \sim \omega^{-2} \ln \omega$ ). En cambio, la dis-

tribución angular en el mismo caso ultrarrelativista posee un carácter por completo diferente en estos dos sistemas de referencia.

En el sistema del laboratorio la sección eficaz diferencial presenta un máximo acusado en la dirección hacia adelante. En el estrecho cono  $\vartheta \lesssim \sqrt{m/\omega}$  tenemos  $\omega' \sim \omega$  y la sección eficaz es  $d\sigma/d\omega' \sim r_e^2$  (alcanzando el valor  $r_e^2$  para  $\vartheta \rightarrow 0$ ). Fuera de este cono, la sección eficaz decrece y en la región  $\vartheta^2 \gg m/\omega$  [donde  $\omega' \approx m/(1 - \cos \vartheta)$ ] tenemos:

$$\frac{d\sigma}{d\omega'} = \frac{r_e^2}{2} \frac{m}{\omega(1 - \cos \vartheta)},$$

es decir, la sección eficaz queda dividida por  $\sim \omega/m$ .

En el sistema del centro de masa, en cambio, la sección eficaz diferencial presenta un máximo en la dirección hacia atrás. Para  $\pi - \theta \ll 1$  tenemos, según (86.14),

$$\frac{s - m^2}{m^2} \approx \frac{4\omega^2}{m^2}, \quad \frac{m^2 - u}{m^2} \approx 1 + \frac{\omega^2}{m^2}(\pi - \theta)^2.$$

El término mayor en la expresión (86.6) de la sección eficaz da

$$d\sigma \approx 8\pi r_e^2 \frac{m^2 dt}{4(s - m^2)(m^2 - u)},$$

de donde

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{2} \frac{do'}{1 + (\pi - \theta)^2 \omega^2/m^2}.$$

La sección eficaz vale  $d\sigma/do' \sim r_e^2$  en el estrecho cono  $\pi - \theta \lesssim m/\omega$ , y fuera de él queda dividida por  $\sim \omega^2/m^2$ .

### § 87. Dispersión de un fotón por un electrón. Efectos de polarización

Volvamos a las fórmulas de partida del párrafo precedente y veamos cómo deben efectuarse los cálculos teniendo en cuenta las polarizaciones de los fotones y electrones iniciales y finales.

La matriz densidad del fotón se expresa, según (8.17), mediante un par de 4-vectores unitarios  $e^{(1)}, e^{(2)}$  que satisfacen las condiciones (8.16). En el presente caso cabe elegir dichos vectores de la misma manera para ambos fotones: estos vectores son los 4-vectores introducidos en el § 71 \*

\* Otra manera de efectuar el cálculo consiste en considerar desde el principio un determinado sistema de referencia (digamos, el del laboratorio) y elegir para  $e^{(1)}, e^{(2)}$  vectores unitarios puramente espaciales [ $e = (0, e)$ ], perpendiculares a los impulsos de los fotones:

$$e^{(1)} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} \times \mathbf{k}'|}, \quad e^{(2)} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times e^{(1)}$$

para el fotón  $\mathbf{k}$  y

$$e^{(1)} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} \times \mathbf{k}'|}, \quad e^{(2)} = \frac{1}{\omega'} \mathbf{k}' \times e^{(1)}$$

para el fotón  $\mathbf{k}'$ . Sin embargo, todos los cálculos se realizarán entonces en forma tridimensional y el resultado no tendrá una forma invariante.

$$e^{(1)} = \frac{N}{V - N^2}, \quad e^{(2)} = \frac{P}{V - P^2}, \quad (87.1)$$

donde

$$\begin{aligned} P^\lambda &= (p^\lambda + p'^\lambda) - K^\lambda \frac{pK + p'K}{K^2}, \\ N^\lambda &= e^{\lambda\mu\nu\rho} P_\mu q_\nu K_\rho, \\ K^\lambda &= k^\lambda + k'^\lambda, \quad q^\lambda = k'^\lambda - k^\lambda = p^\lambda - p'^\lambda. \end{aligned} \quad (87.2)$$

Las expresiones  $Q^{\mu\nu}$  en (86.5) vienen dadas por la fórmula (86.4). Cabe considerarlas como componentes de un 4-tensor (en el sentido de que forman un 4-tensor después de formar las cantidades  $\bar{u}' Q^{\mu\nu} u$ , «en los encuadramientos», como se dice). Todas las componentes de un 4-tensor se pueden obtener proyectándolo sobre cuatro 4-vectores ortogonales dos a dos, por ejemplo, sobre los vectores antes definidos  $P$ ,  $N$ ,  $q$ ,  $K$ . Dado que los tensores  $\rho_{\mu\nu}^{(\gamma\gamma)}$ ,  $\rho_{\mu\nu}^{(\gamma\gamma)}$  contienen sólo componentes respecto de  $P$  y  $N$ , de hecho necesitaremos únicamente las componentes  $Q_{\mu\nu}$  respecto de estos 4-vectores. En otras palabras, basta buscar en  $Q_{\mu\nu}$  los términos de la forma

$$Q_{\mu\nu} = Q_0 (e_\mu^{(1)} e_\nu^{(1)} + e_\mu^{(2)} e_\nu^{(2)}) + Q_1 (e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} + e_\mu^{(2)} e_\nu^{(1)}) - i Q_2 (e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} - e_\mu^{(2)} e_\nu^{(1)}) + Q_3 (e_\mu^{(1)} e_\nu^{(1)} - e_\mu^{(2)} e_\nu^{(2)}); \quad (87.3)$$

los demás términos desaparecerían, de todas maneras, al substituir en (86.5). Las cantidades  $Q_0$  y  $Q_3$  son escalares, en el mismo sentido en que  $Q_{\mu\nu}$  es un 4-tensor; contienen, por ello, las matrices  $\gamma$  tan sólo en combinaciones «invariantes»:  $\hat{K}$  y análogas. En este mismo sentido  $Q_1$  y  $Q_2$  son pseudoescalares ( $N$  es un pseudovector!) y, en consecuencia, deben contener la matriz  $\gamma^5$ .

Proyectando directamente el tensor  $Q_{\mu\nu}$ , se encuentra

$$Q_0 = \frac{1}{2} Q^{\mu\nu} (e_\mu^{(1)} e_\nu^{(1)} + e_\mu^{(2)} e_\nu^{(2)})$$

etcétera. Para el cálculo conviene expresar primero  $Q_{\mu\nu}$  en función de los 4-vectores  $P$ ,  $N$ ,  $q$ ,  $K$  ortogonales entre sí:

$$Q^{\mu\nu} = \gamma^\mu \frac{\frac{1}{2} \hat{P} + m}{s - m^2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{\frac{1}{2} \hat{P} + m}{u - m^2} \gamma^\mu - \frac{1}{t} (\gamma^\mu \hat{K} \gamma^\nu - \gamma^\nu \hat{K} \gamma^\mu).$$

El cálculo que después sigue se reduce a puras transformaciones algebraicas basadas en las fórmulas deducidas en el § 22. Además, es posible efectuar cambios en  $Q^{\mu\nu}$  que no se reflejan en el resultado al formar los productos  $\bar{u}' Q^{\mu\nu} u$ . Por ejemplo, dado que

$$\begin{aligned} \bar{u}' (\hat{p} + \hat{p}') u &= 2m \bar{u}' u, \\ \bar{u}' \gamma^5 \hat{q} u &= \bar{u}' (\gamma^5 \hat{p} + \hat{p}' \gamma^5) u = 2m \bar{u}' \gamma^5 u, \end{aligned}$$

en  $Q^{\mu\nu}$  se pueden substituir los términos

$$\hat{p} + \hat{p}' \rightarrow 2m, \quad \gamma^5 \hat{q} \rightarrow 2m\gamma^5. \quad (87.4)$$

Prescindiendo de los detalles del cálculo, he aquí el resultado \*:

$$\begin{aligned} Q_0 &= -ma_+, \quad Q_1 = \frac{i}{2} a_+ \gamma^5 \hat{K}, \\ Q_2 &= -ma_+ \gamma^5, \quad Q_3 = ma_+ + \frac{1}{2} a_- \hat{K}, \end{aligned} \quad (87.5)$$

donde

$$a_{\pm} = \frac{1}{s - m^2} \pm \frac{1}{u - m^2}.$$

Con vistas a los cálculos que seguirán conviene aplicar a  $Q_{\mu\nu}$  el mismo método formal que se describió en el § 8 para la matriz densidad de un fotón: las cuatro componentes del tensor (87.3) respecto de las direcciones orientadas  $e^{(1)}, e^{(2)}$  las reunimos en una matriz  $2 \times 2$ ,  $Q$ , que descompondremos luego en matrices de Pauli. De manera análoga a la fórmula (8.18), resulta

$$Q = Q_0 \cdot 1 + Q \cdot \sigma, \quad Q = (Q_1, Q_2, Q_3). \quad (87.6)$$

En lo que concierne al tensor  $\bar{Q}_{\mu\nu} = \gamma^0 Q_{\mu\nu} \gamma^0$  que figura en (86.5), a partir de (87.3) y (87.5) es fácil comprobar [apoyándose en las reglas (66.2a)] que sus componentes se obtienen a partir de las componentes  $Q_{\mu\nu}$  substituyendo las cantidades  $Q_0, Q_1, \dots$  por  $\bar{Q}_0, \bar{Q}_1, \dots$ , donde

$$\bar{Q}_0 = Q_0, \quad \bar{Q}_1 = -Q_1, \quad \bar{Q}_2 = -Q_3, \quad \bar{Q}_3 = Q_2, \quad (87.7)$$

y permutando al mismo tiempo los índices  $\mu\nu^{**}$ . En forma matricial, esto significa que

$$\bar{Q} = \bar{Q}_0 \cdot 1 + \bar{Q} \cdot \tilde{\sigma}. \quad (87.8)$$

Precisemos ahora el sentido de los 4-vectores  $e^{(1)}, e^{(2)}$  en lo que concierne a sus relaciones con la polarización de los fotones. Para cada uno de éstos las direcciones de polarización se determinarán por las componentes transversales (con relación al impulso del fotón  $\mathbf{k}$ ) de los 3-vectores  $e^{(1)}, e^{(2)}***$ . Es fácil ver que tanto en el sistema del centro de masa, como en el sistema del laboratorio (sistema de reposo del electrón inicial) el vector  $\mathbf{P}$  se encuentra en el plano  $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$  y que el vector  $\mathbf{N}$  es perpendicular a este plano. Por consiguiente, la dirección de  $e^{(1)}$  define la polarización perpendicularmente al plano de dispersión, y la dirección de  $e^{(2)}$ , la pola-

\* La expresión (87.3) con los valores (87.5) corresponde a la forma (77.11-13) establecida en el § 71 a partir de consideraciones generales. Junto con las igualdades  $f_3 = f_6 = 0$ , que se siguen de la invariancia- $T$ , resulta aquí ser igual a cero una amplitud invariante más (la  $f_2$ ). Es ésta una propiedad de la aproximación considerada de la teoría de perturbaciones y desaparecería en aproximaciones de orden superior.

\* Para la matriz  $Q_{\mu\nu}$  en la forma de partida (86.4) tendríamos simplemente  $\bar{Q}_{\mu\nu} = Q_{\nu\mu}$ . Sin embargo, esta propiedad se pierde como resultado de transformaciones que implican cambios del tipo (87.4) y otros análogos.

\*\* En cambio, las componentes longitudinales de  $e$  (como también las componentes temporales de los 4-vectores  $e$ ) es posible ignorarlas sin más en este caso: que en nada intervienen queda asegurado por la invariancia de contraste.

rización en el plano de dispersión. Hay que tener también en cuenta que los parámetros de Stokes  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  se determinan respecto de ejes  $xyz$  que forman un sistema directo (con el eje  $z$  a lo largo de la dirección orientada de  $\mathbf{k}$ ). Es fácil ver que para el fotón inicial constituyen un tal sistema los vectores  $\mathbf{N}, \mathbf{P}_\perp, \mathbf{k}$ , y para el fotón final, los vectores  $\mathbf{N}, -\mathbf{P}'_\perp, \mathbf{k}'$  ( $\mathbf{P}, \mathbf{P}'_\perp$  son los componentes de  $\mathbf{P}$  perpendiculares a  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{k}'$ , respectivamente). El cambio de signo de  $e^{(2)}$  en la matriz densidad del fotón (8.17) equivale a cambiar el signo de  $\xi_1$  y  $\xi_2$ . Por ello, las matrices densidad de los fotones inicial y final, referidas a los 4-versores  $e^{(1)}, e^{(2)}$ , serán

$$\rho^{(\gamma)} = \frac{1}{2}(1 + \xi \cdot \sigma), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3);$$

$$\rho^{(\gamma)\prime} = \frac{1}{2}(1 + \xi' \cdot \sigma), \quad \xi' = (-\xi_1, -\xi_2, \xi_3). \quad (87.9)$$

La traza tensorial

$$\rho_{\lambda\mu}^{(\gamma)\nu} Q^{\mu\nu} \rho_{\nu\rho}^{(\gamma)\lambda} \tilde{Q}^{\rho\lambda}$$

se calcula ahora como traza del producto de matrices (87.6-9) mediante (33.5). Se obtiene en definitiva

$$|M_{fi}|^2 = 8\pi^2 e^4 \text{Tr} \{ (\rho^{(e)\prime} Q_0 \rho^{(e)} \bar{Q}_0 + \rho^{(e)\prime} Q \cdot \rho^{(e)} \bar{Q}) + \\ + (\xi + \xi') \cdot (\rho^{(e)\prime} Q_0 \rho^{(e)} \bar{Q} + \rho^{(e)\prime} Q \rho^{(e)} \bar{Q}_0) - \\ - i(\xi - \xi') \cdot [\rho^{(e)\prime} Q \times \rho^{(e)} \bar{Q}] + \\ + (\xi \cdot \xi') (\rho^{(e)\prime} Q_0 \rho^{(e)} \bar{Q}_0 - \rho^{(e)\prime} Q \cdot \rho^{(e)} \bar{Q}) + \\ + \rho^{(e)\prime} (\xi' \cdot Q) \rho^{(e)} (\xi \cdot \bar{Q}) + \rho^{(e)\prime} (\xi \cdot Q) \rho^{(e)} (\xi' \cdot \bar{Q}) - \\ - i[\xi \times \xi'] \cdot (\rho^{(e)\prime} Q_0 \rho^{(e)} \bar{Q} - \rho^{(e)\prime} Q \rho^{(e)} \bar{Q}_0) \}. \quad (87.10)$$

### Dispersión por electrones no polarizados

Calculemos, hasta determinarla, la sección eficaz de dispersión de fotones polarizados por un electrón no polarizado, sumada respecto de las polarizaciones del electrón final. Para ello hay que hacer en (87.10)

$$\rho^{(e)} = \frac{1}{2}(\hat{p} + m), \quad \rho^{(e)\prime} = \frac{1}{2}(p' + m)$$

y multiplicar por dos el resultado, que debe substituirse en vez de  $|M_{fi}|^2$  en la fórmula de la sección eficaz (65.22)

$$d\sigma = \frac{1}{32\pi^2} \frac{dt d\varphi}{(s - m^2)^2} |M_{fi}|^2$$

( $\varphi$  es el acimut en el sistema del centro de masa o en el sistema del laboratorio). Toda una serie de términos en (87.10) se anulan idénticamente (los términos en las líneas 3.<sup>a</sup> y 6.<sup>a</sup> y parte de los que aparecen en la 2.<sup>a</sup> y 5.<sup>a</sup>). El cálculo de los términos que quedan conduce al siguiente resultado [con las notaciones de (86.15)]:

$$d\sigma = \frac{1}{2} d\bar{\sigma} + 2r_e^2 \frac{dy d\varphi}{x^2} \left\{ (\xi_3 + \xi'_3) \left[ -\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \right] + \right.$$

$$+ \xi_1 \xi'_1 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \right) + \xi_2 \xi'_2 \frac{1}{4} \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \left( 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{y} \right) +$$

$$\left. + \xi_3 \xi'_3 \left[ \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{2} \right] \right\}. \quad (87.11)$$

$d\bar{\sigma}$  es la sección eficaz de dispersión de los fotones no polarizados dada por la fórmula (86.9); el factor 1/2 procede de que en (87.11) no se ha sumado respecto de las polarizaciones del fotón final.

En el sistema del laboratorio la fórmula (87.11) toma la forma

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{4} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 d\theta' \{ F_0 + F_3 (\xi_3 + \xi'_3) + F_{11} \xi_1 \xi'_1 + \right.$$

$$\left. + F_{22} \xi_2 \xi'_2 + F_{33} \xi_3 \xi'_3 \}, \quad d\theta' = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (87.12)$$

donde

$$F_0 = \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2 \vartheta, \quad F_3 = \sin^2 \vartheta,$$

$$F_{11} = 2 \cos \vartheta, \quad F_{22} = \left( \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} \right) \cos \vartheta, \quad F_{33} = 1 + \cos^2 \vartheta \quad (87.13)$$

(U. Fano, 1949). Nótese que aunque la expresión (87.12) no contiene una dependencia explícita respecto del acimut del plano de dispersión  $\varphi$ , existe una dependencia implícita, ya que los parámetros  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  se definen con relación a los ejes  $xyz$ , que están vinculados con dicho plano. Recordemos que el eje  $x$  es el mismo para ambos fotones y perpendicular al plano de dispersión:

$$x \parallel \mathbf{k} \times \mathbf{k}',$$

y el eje  $y$  se encuentra en dicho plano:

$$y \parallel \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{k}'], \quad y' \parallel \mathbf{k}' \times [\mathbf{k} \times \mathbf{k}'].$$

Formando la suma de las secciones eficaces que difieren en el signo de  $\xi'$  (es decir, haciendo  $\xi' = 0$  y multiplicando el resultado por dos) obtendremos la sección eficaz total de dispersión (sumada respecto de las polarizaciones del fotón final) de un fotón polarizado que choca con un electrón no polarizado. Designándola por  $d\sigma(\xi)$  tenemos

$$d\sigma(\xi) = \frac{1}{2} r_e^2 \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 F d\theta', \quad (87.14)$$

donde

$$F = F_0 + \xi_3 F_3 = \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - (1 - \xi_3) \sin^2 \vartheta. \quad (87.15)$$

Vemos, pues, que la sección eficaz de dispersión de los fotones polarizados perpendicularmente al plano de dispersión ( $\xi_3 = 1$ ) es mayor que para los fotones polarizados en dicho plano ( $\xi_3 = -1$ ). La sección eficaz, en cambio, no depende de la polarización circular. Tampoco depende del parámetro  $\xi_1$ . Por consiguiente

la sección eficaz de dispersión coincide con la correspondiente a fotones no polarizados si no existe polarización lineal respecto de los ejes  $x$  o  $y$  ( $\xi_3 = 0$ ) o incluso si el fotón está polarizado en direcciones que forman ángulos de  $45^\circ$  con estos ejes.

Propiedades análogas posee la sección eficaz de dispersión de fotones no polarizados cuando se detecta el fotón polarizado. Esta sección eficaz [designémosla por  $d\sigma(\xi')$ ] se obtendrá a partir de la fórmula (87.12) si en ella se hace  $\xi = 0$ :

$$d\sigma(\xi') = \frac{1}{4} r_e^2 \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 F' d\alpha', \quad F' = F_0 + \xi'_3 F_3. \quad (87.16)$$

La fórmula (87.12) permite hallar también la polarización del fotón secundario como a tal; los parámetros de esta polarización los representaremos por  $\xi^{(f)}$  para distinguirlos de los correspondientes a la polarización detectada  $\xi'$ . Según las reglas expuestas en el § 66 las cantidades  $\xi_i^{(f)}$  son iguales a las razones de los coeficientes de  $\xi'_i$  al término que no contiene  $\xi'$ :

$$\xi_1^{(f)} = \frac{F_{11}}{F} \xi_1, \quad \xi_2^{(f)} = \frac{F_{22}}{F} \xi_2, \quad \xi_3^{(f)} = \frac{F_3 + F_{33}\xi_3}{F}. \quad (87.17)$$

En particular, en la dispersión de un fotón no polarizado,

$$\xi_1^{(f)} = \xi_2^{(f)} = 0, \quad \xi_3^{(f)} = \frac{\sin^2 \theta}{\omega/\omega' + \omega'/\omega - \sin^2 \theta}. \quad (87.18)$$

En esta expresión  $\xi_3^{(f)} > 0$ , es decir, el fotón secundario se polariza perpendicularmente al plano de dispersión. En cambio, la polarización circular de dicho fotón se produce tan sólo si el fotón primario está polarizado circularmente;  $\xi_2^{(f)} \neq 0$  únicamente cuando  $\xi_2 \neq 0$ .

Consideremos el caso en que el fotón incidente está por completo polarizado linealmente ( $\xi_2 = 0$ ,  $\xi_1^2 + \xi_3^2 = 1$ ) y determinemos la sección eficaz de la dispersión en la que se detecta también la polarización lineal del fotón secundario. Expresando los parámetros  $\xi_i$  y  $\xi'_i$  en función de las componentes de los vectores polarización  $e$  y  $e'$  de los fotones, obtendremos la siguiente expresión para la sección eficaz de dispersión:

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{4} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2 + 4 \cos^2 \Theta \right) d\alpha', \quad (87.19)$$

donde  $\Theta$  es el ángulo formado por las direcciones de polarización de los fotones incidente y dispersado  $\star$ .

Según esta fórmula la sección eficaz se comporta de manera esencialmente distinta en los casos en que las polarizaciones  $e$  y  $e'$  son perpendiculares entre sí y

$\star$  La propia fórmula (87.19) se podría obtener de manera más sencilla haciendo, ya desde el principio,  $e = (0, e)$ ,  $e' = (0, e')$  en la amplitud de dispersión (86.3) y efectuando luego el cálculo del cuadrado de la amplitud en forma tridimensional (es decir, separando las componentes temporales y espaciales de los 4-vectores).

Promediando  $\cos^2 \Theta = (e \cdot e')^2$  respecto de las direcciones  $e$  y  $e'$  [mediante (45.4a)] y multiplicando por dos la sección eficaz (paso a la suma respecto de  $e'$ ), volvemos, naturalmente, a (86.9).

cuando se encuentran en un mismo plano. Distinguendo estos dos casos mediante los índices  $\perp$  y  $\parallel$ , en el límite no-relativista ( $\omega \ll m$ ,  $\omega' \approx \omega$ ) tenemos

$$d\sigma_{\perp} = 0, \quad d\sigma_{\parallel} = r_e^2 \cos^2 \Theta \, d\Omega' \quad (87.20)$$

de acuerdo con las fórmulas clásicas. En el caso opuesto, el ultrarrelativista, se tiene  $\omega \gg m$ ,  $\omega' \approx m/(1 - \cos \vartheta)$ . Aquí hay que diferenciar la región en que los ángulos son grandes y aquella en que son pequeños ( $\omega/\omega'$  grande o pequeño):

$$\begin{aligned} d\sigma_{\perp} = d\sigma_{\parallel} &= \frac{1}{4} r_e^2 \frac{\omega'}{\omega} d\Omega' = \frac{1}{4} r_e^2 \frac{md\Omega'}{\omega(1 - \cos \vartheta)} \text{ para } \vartheta \gg \frac{m}{\omega}; \\ d\sigma_{\perp} &= 0, \quad d\sigma_{\parallel} = r_e^2 \cos^2 \Theta \, d\Omega' \text{ para } \vartheta \ll \frac{m}{\omega}. \end{aligned} \quad (87.21)$$

Vemos, pues, que en la región de ángulos muy pequeños la sección eficaz de dispersión coincide con la clásica. En cambio, la igualdad  $d\sigma_{\perp} \approx d\sigma_{\parallel}$  que se obtiene para ángulos no demasiado pequeños significa que, en el caso ultrarrelativista y en esta región, no está polarizada la radiación dispersa; subrayemos, con todo, que esta conclusión se refiere precisamente a un fotón incidente linealmente polarizado: de (87.17) se deduce que en el caso ultrarrelativista y para un fotón cuya polarización sea circular se tiene  $\xi_2^{(j)} \approx \cos \vartheta \cdot \xi_2$ .

### Dispersión por electrones polarizados

En el caso de electrones polarizados el cálculo de las trazas en la fórmula (87.10) resulta muy pesado, aunque no ofrezca dificultades de principio. Presentaremos aquí algunos resultados finales de dicho cálculo\*.

En el caso general, la sección eficaz depende tanto de los parámetros de polarización de los fotones inicial y final  $\xi$  y  $\xi'$ , como de las polarizaciones de los electrones inicial y final, caracterizadas por los vectores  $\zeta$  y  $\zeta'$ . La dependencia de la sección eficaz en relación con cada uno de estos parámetros es lineal. La sección eficaz tiene la forma

$$\begin{aligned} d\sigma = \frac{1}{2} d\sigma(\xi, \xi') + \frac{r_e^2}{8} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 d\Omega' \{ &f \cdot \xi \xi'_2 + f' \cdot \xi' \xi'_2 + \\ &+ g \cdot \xi' \xi'_2 + g' \cdot \xi' \xi'_2 + G_{ik} \zeta_i \zeta'_k + \dots \}. \end{aligned} \quad (87.22)$$

Aquí  $d\sigma(\xi, \xi')$  es la sección eficaz (87.12). Se han escrito todos los términos que contienen los productos de dos parámetros de polarización. Los términos que contienen productos de tres o de cuatro parámetros no se han incluido; estos términos carecen de importancia si lo que nos interesa es la correlación entre las polarizaciones de dos partículas solamente: dichos términos desaparecen cuando los parámetros de polarización de otras dos partículas se suponen iguales a cero.

\* La deducción completa de los mismos puede verse en los artículos originales: F. LIPPS, H. A. TOLHOEK, Physica **20**, 85, 395 (1954). Véanse también los artículos de puesta al día: H. A. TOLHOEK, Rev. Mod. Phys. **28**, 277 (1956); H. McMASTER, Rev. Mod. Phys., **33**, 8 (1961).

He aquí los valores de algunos de los coeficientes en el sistema del laboratorio

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= -\frac{1}{m}(1 - \cos \vartheta)(\mathbf{k} \cos \vartheta + \mathbf{k}'), \\ \mathbf{f}' &= -\frac{1}{m}(1 - \cos \vartheta)(\mathbf{k} + \mathbf{k}' \cos \vartheta), \\ \mathbf{g} &= -\frac{1}{m}(1 - \cos \vartheta) \left[ (\mathbf{k} \cos \vartheta + \mathbf{k}') - (1 + \cos \vartheta) \frac{\omega + \omega'}{\omega - \omega' + 2m} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \right], \\ \mathbf{g}' &= -\frac{1}{m}(1 - \cos \vartheta) \left[ (\mathbf{k} + \mathbf{k}' \cos \vartheta) - (1 + \cos \vartheta) \frac{\omega + \omega'}{\omega - \omega' + 2m} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \right]. \end{aligned} \quad (87.23)$$

En la sección eficaz (87.22) no existe un término de la forma  $\mathbf{G} \cdot \zeta$ ; esto significa que la polarización del electrón no influye sobre la sección eficaz total de dispersión (la que resulta de sumar respecto de  $\zeta'$  y  $\zeta'$ ) de fotones no polarizados. Falta también un término de la forma  $\mathbf{G} \cdot \zeta'$ ; esto significa que en la dispersión de fotones no polarizados no se polariza el electrón de retroceso.

Vemos asimismo que en los términos bilineales respecto de las polarizaciones del electrón y del fotón intervienen solamente los parámetros  $\xi_2, \xi'_2$  que corresponden a la polarización circular del fotón. Los vectores polarización de los electrones  $\xi$  y  $\xi'$ , en cambio, aparecen en forma de productos escalares  $\mathbf{f} \cdot \zeta, \dots$ , que contienen sólo las proyecciones de estos vectores sobre el plano de dispersión. En consecuencia, por ejemplo, la sección eficaz de dispersión de un fotón polarizado por un electrón polarizado

$$d\sigma(\xi, \xi) = d\sigma(\xi) + \frac{1}{2} r_e^2 \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \xi_2 \mathbf{f} \cdot \zeta \, d\alpha' \quad (87.24)$$

difiere de  $d\sigma(\xi)$  únicamente si el fotón está polarizado circularmente y los electrones poseen una proyección del valor medio del spin no nula sobre el plano de dispersión. Por la misma razón, el electrón de retroceso se polariza tan sólo en el caso en que el fotón está polarizado circularmente; el vector polarización del electrón que resulta del proceso se encuentra entonces en el plano de dispersión:

$$\xi^{(j)} = \frac{1}{F} \xi_2 \mathbf{g}. \quad (87.25)$$

### Relaciones de simetría

Probemos, resumiendo, que las propiedades cualitativas de los efectos de polarización en la dispersión de fotones por electrones se siguen ya de las condiciones generales de simetría.

El parámetro  $\xi_2$  de la polarización circular es un pseudoescalar (véase § 8). Por ello, en virtud de la condición de invariancia- $P$ , los términos de la forma  $\propto \xi_2$  ( $\text{o } \propto \xi'_2$ ) en la sección eficaz de dispersión pueden aparecer solamente como producto de  $\xi_2$  por un cierto pseudoescalar construido a partir de los vectores de que

disponemos  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{k}'$ . Pero a partir de dos vectores polares es imposible formar un pseudoescalar. De aquí se deduce que dichos términos no pueden existir en la sección eficaz.

Los parámetros de polarización lineal  $\xi_1$  y  $\xi_3$  están ligados con las componentes de un tensor simétrico bidimensional (en un plano perpendicular a  $\mathbf{k}$ ) por

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\rho_{\alpha\beta}^{(\gamma)} + \rho_{\beta\alpha}^{(\gamma)}) = \frac{1}{2} \left( \begin{matrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 \\ \xi_1 & 1 - \xi_3 \end{matrix} \right).$$

En el presente caso, uno de los ejes de polarización se ha elegido a lo largo del vector  $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \mathbf{k}'$  y el otro se encuentra en el plano  $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$  (a lo largo del vector  $\mathbf{k} \times \mathbf{v}$  o  $\mathbf{k}' \times \mathbf{v}$  para uno u otro fotón). Los términos  $\propto \xi_1$  pueden aparecer en la sección eficaz únicamente en forma de productos  $S_{\alpha\beta} v_\alpha (\mathbf{k}' \times \mathbf{v})_\beta$  (o, lo que es lo mismo  $S_{\alpha\beta} v_\alpha k'_\beta$ ), etc. Pero dado que  $\mathbf{v}$  es un vector axil,  $\mathbf{k}$  es un vector polar y  $S_{\alpha\beta}$  es un tensor en sentido estricto, dichos productos no son invariantes respecto de la inversión. En consecuencia, tampoco puede existir en la sección eficaz términos  $\propto \xi_1$  (o  $\propto \xi'_1$ ). En cambio, términos  $\propto \xi_3$  (o  $\propto \xi'_3$ ) aparecen como productos  $S_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta$ , etc., y no están prohibidos por consideraciones de simetría.

Los términos en la sección eficaz proporcionales a la polarización del electrón  $\zeta$  no están prohibidos por razones de paridad: dichos términos podrían formarse como productos de dos vectores axiles:  $\zeta \cdot \mathbf{v}$ . Sin embargo, deben faltar en la aproximación que consideramos, la primera no nula, de la teoría de perturbaciones como consecuencia del carácter hermítico de la matriz de dispersión en dicha aproximación (§ 72).

En virtud de esta hermiticidad, el cuadrado de la amplitud de dispersión (y con él también la sección eficaz) no cambia al permutar los estados inicial y final. Por otra parte, la sección eficaz debe también ser invariante respecto de la inversión del tiempo —es decir, respecto de la permutación de los estados inicial y final junto con el cambio del signo de los vectores impulso y momento cinético de todas las partículas— (los parámetros de Stokes  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  no varían con ello —véase § 8—). Combinando estas dos condiciones, llegamos a la conclusión de que en la aproximación considerada la sección eficaz no debe variar si se cambian a la vez el signo de todos los impulsos y momentos cinéticos sin permutar los estados inicial y final, es decir, en la transformación

$$\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k}' \rightarrow -\mathbf{k}', \quad \zeta \rightarrow -\zeta, \quad \zeta' \rightarrow -\zeta' \quad (87.26)$$

conservando invariables los parámetros  $\xi, \xi'$ .

La transformación (87.26) cambia el signo del producto  $\zeta \cdot \mathbf{v}$  y, por ello, tales términos no pueden figurar en la sección eficaz. Hay que subrayar, sin embargo,

---

\* Consideraremos el proceso en el sistema del laboratorio, en el que  $\mathbf{p} = 0, \mathbf{p}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ . Es evidente que las consecuencias que nos interesan de las condiciones de simetría (existencia o falta de ciertos términos en la sección eficaz) no dependen de la elección del sistema de referencia.

que esta prohibición no es consecuencia de las condiciones rigurosas de simetría y, por lo tanto, puede quedar violada en las aproximaciones siguientes de la teoría de perturbaciones.

De los términos de correlación binaria entre las polarizaciones de los fotones entre sí, solamente están prohibidos por la simetría respecto de la paridad los términos de la forma  $\xi_1\xi_3$  y  $\xi_2\xi_3$ , y en la correlación de fotones con electrones no está prohibido ningún término. Sin embargo, todos los términos de la forma  $\xi_1\xi_2$ ;  $\xi_1\zeta$ ,  $\xi_3\zeta$  están prohibidos en la primera aproximación por la condición de invariancia respecto de la transformación (87.26). Así, podrían formarse términos de la forma  $\xi_1\xi'_2$  y  $\xi_1\zeta$  (desde el punto de vista de que se conserve la paridad) como escalares, por ejemplo,  $\xi'_2 S_{\alpha\beta} k'_\alpha v_\beta$  y  $(S_{\alpha\beta} k'_\alpha v_\beta)(\zeta \cdot \mathbf{k})$ ; estas combinaciones, con todo, cambian de signo en la transformación (87.26).

Términos de correlación permitidos de la forma  $\xi_2\zeta$  pueden aparecer como productos del tipo  $\xi_2(\zeta \cdot \mathbf{k})$ . Los vectores de polarización de los electrones intervienen en ellos sólo en la forma de proyecciones sobre el plano de dispersión.

Finalmente, toda una serie de relaciones entre los coeficientes de los términos permitidos resulta de las condiciones de universalidad de cruce. Los canales de reacción que difieren en la permutación de los fotones inicial y final corresponden a un único proceso — la dispersión de un fotón por un electrón —. Por ello, el cuadrado del módulo de la amplitud, y con él también la sección eficaz de dispersión, deben ser invariantes respecto de la transformación que expresa el paso de uno de estos canales al otro,

$$k \leftrightarrow -k', \quad e \leftrightarrow e'^*$$

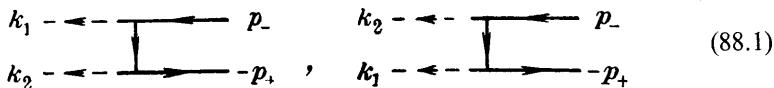
conservando invariables los impulsos y las polarizaciones de los electrones. En forma tridimensional, esta transformación significa la sustitución:

$$\begin{aligned} \omega &\leftrightarrow -\omega', \quad \mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}', \\ \xi_1 &\leftrightarrow \xi'_1, \quad \xi_2 \leftrightarrow -\xi'_2, \quad \xi_3 \leftrightarrow \xi'_3. \end{aligned} \quad (87.27)$$

El cambio de signo del parámetro  $\xi_2$  es evidente si se tiene en cuenta la expresión  $\xi_2 = i(\mathbf{e} \times \mathbf{e}^*) \cdot \mathbf{n}$  en la cual el vector  $\mathbf{e} \times \mathbf{e}^*$  cambia de signo al substituir  $\mathbf{e} \leftrightarrow \mathbf{e}^*$ , y el vector  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$  no varía al substituir  $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$ ,  $\omega \leftrightarrow -\omega$ . La transformación (87.27), que no afecta a los impulsos de los electrones, deja al sistema del laboratorio en reposo en el laboratorio. Por ello la sección eficaz (87.22) no debe cambiar su forma en esta transformación; las fórmulas (87.12), (87.22-23) satisfacen, en efecto, esta condición.

### § 88. Aniquilación de un par electrón-positón en dos fotones

A la aniquilación de un electrón y de un positón (4-impulsos  $p_-$  y  $p_+$ ) con formación de dos fotones ( $k_1$  y  $k_2$ ), corresponden dos diagramas:



Estos difieren de los diagramas de dispersión de un fotón por un electrón en la sustitución

$$p \rightarrow p_-, \quad p' \rightarrow -p_+, \quad k \rightarrow -k_1, \quad k' \rightarrow k_2. \quad (88.2)$$

Ambos procesos son dos canales de cruce de una misma reacción (generalizada). Después de aplicar la sustitución (88.2), los invariantes cinemáticos (86.2) cobran el significado siguiente:

$$\begin{aligned} s &= (p_- - k_1)^2, \\ t &= (p_- + p_+)^2 = (k_1 + k_2)^2, \\ u &= (p_- - k_2)^2. \end{aligned} \quad (88.3)$$

Si la dispersión del fotón era el canal- $s$ , la aniquilación es el canal- $t$ .

Dado que el cuadrado  $|M_{fi}|^2$  para la aniquilación (promediado respecto de las polarizaciones de los electrones y sumado para las polarizaciones de los fotones) se expresa en función de los invariantes  $s$ ,  $u$ , coincide con la magnitud análoga para la dispersión sin más que cambiar el significado de los invariantes  $\star$ . En la fórmula para la sección eficaz (65.23), en los factores que aparecen en  $|M_{fi}|^2$  hay que substituir, además,  $s \leftrightarrow t$  y para la cantidad  $I$  se tiene ahora, según (65.15a),  $I^2 = \frac{1}{4}t(t - 4m^2)$ . Efectuando los correspondientes cambios en la fórmula (86.6), obtenemos en definitiva la sección eficaz de aniquilación

$$d\sigma = 8\pi r_e^2 \frac{m^2 ds}{t(t - 4m^2)} \left\{ \left( \frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right)^2 + \left( \frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{s - m^2}{u - m^2} + \frac{u - m^2}{s - m^2} \right) \right\}. \quad (88.4)$$

La región física del canal de aniquilación es la región II de la fig. 9. Para  $t$  dado (energía dada en el sistema del centro de masa) el intervalo de variación de  $s$  se determina por la ecuación de la frontera  $su = m^4$ . Junto con la relación  $s+t+u=2m^2$  esto da

$$-\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{t(t - 4m^2)} \leq s - m^2 \leq -\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{t(t - 4m^2)}. \quad (88.5)$$

La integración de la expresión (88.4) es elemental; el resultado ha de dividirse todavía por 2, teniendo en cuenta la identidad de las dos partículas finales (de los fotones). De esta manera obtenemos

\* Se tiene en cuenta aquí que los fotones y los electrones tienen el mismo número (dos) de polarizaciones independientes y, por ello, carece de importancia respecto de cuáles se promedia  $|M_{fi}|^2$  y respecto de cuáles se suma.

$$\sigma = \frac{2\pi r_e^2}{\tau^2(\tau-4)} \left[ (\tau^2 + 4\tau - 8) \ln \frac{\sqrt{\tau} + \sqrt{\tau-4}}{\sqrt{\tau} - \sqrt{\tau-4}} - (\tau + 4) \sqrt{\tau(\tau-4)} \right], \quad (88.6)$$

donde  $\tau = t/m^2$  (*P. A. M. Dirac*, 1930).

En el límite no-relativista ( $\tau \rightarrow 4$ ) obtenemos a partir de aquí

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2}{V\tau - 4}. \quad (88.7)$$

En cambio, en el caso ultrarrelativista ( $\tau \rightarrow \infty$ ) resulta

$$\sigma = \frac{2\pi r_e^2}{\tau} (\ln \tau - 1). \quad (88.8)$$

En el sistema del laboratorio, en el cual una de las partículas (digamos el electrón) estaba en reposo antes del choque, el invariante  $\tau$  es

$$\tau = 2(1 + \gamma), \quad \gamma = \frac{\epsilon_+}{m}. \quad (88.9)$$

Las fórmulas (88.6-8) dan la dependencia de la sección eficaz total respecto de la energía del positón incidente:

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2}{\gamma + 1} \left[ \frac{\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2 - 1} \ln (\gamma + V\sqrt{\gamma^2 - 1}) - \frac{\gamma + 3}{V\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right]. \quad (88.10)$$

En particular, en el límite no-relativista \*

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2}{v_+}, \quad (\text{n. r.}) \quad (88.11)$$

donde  $v_+$  es la velocidad del positón.

En el sistema del centro de masa, el electrón, el positón y los dos fotones tienen energías iguales  $\epsilon = \omega$ . Los invariantes son:

$$\begin{aligned} m^2 - s &= 2\epsilon(\epsilon - |\mathbf{p}| \cos \theta), & m^2 - u &= 2\epsilon(\epsilon + |\mathbf{p}| \cos \theta), \\ t &= 4\epsilon^2, \end{aligned} \quad (88.12)$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forman los impulsos del electrón y de uno de los fotones. Substituyendo en (88.4), obtendremos la distribución angular de los fotones de aniquilación

$$d\sigma = \frac{r_e^2 m^2}{4\epsilon |\mathbf{p}|} \left[ \frac{\epsilon^2 + \mathbf{p}^2(1 + \sin^2 \theta)}{\epsilon^2 - \mathbf{p}^2 \cos^2 \theta} - \frac{2\mathbf{p}^4 \sin^4 \theta}{(\epsilon^2 - \mathbf{p}^2 \cos^2 \theta)^2} \right] d\theta. \quad (88.13)$$

En el caso ultrarrelativista, presenta máximos simétricos en las direcciones  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ . Cerca de  $\theta = 0$

\* Esta fórmula, sin embargo, deja de ser aplicable cuando  $v_+ \lesssim \alpha$ , y es imposible prescindir de la interacción coulombiana de las componentes del par (cf. final del § 92).

$$d\sigma \approx \frac{r_e^2 m^2 d\omega}{2\epsilon^2 (\theta^2 + m^2/\epsilon^2)}. \quad (\text{u. r.}) \quad (88.14)$$

La sección eficaz total se obtiene de (88.6):

$$\sigma = \pi r_e^2 \frac{1-v^2}{4v} \left[ \frac{3-v^4}{v} \ln \frac{1+v}{1-v} - 2(2-v^2) \right], \quad (88.15)$$

donde  $v = |\mathbf{p}|/\epsilon = \sqrt{\epsilon^2 - m^2/\epsilon}$  es la velocidad de las partículas que chocan.

No estudiaremos aquí en detalle los efectos de polarización que resultan de la aniquilación de un par \*. Nos limitaremos solamente a algunas propiedades cualitativas de estos efectos en los casos límite de velocidades  $v$  grandes y pequeñas de las partículas que chocan. El proceso lo consideraremos en el sistema del centro de masa.

En el límite  $v \rightarrow 0$  el único estado que da una contribución diferente de cero a la sección eficaz es el de momento cinético orbital  $l=0$  en el movimiento relativo. Pero un estado- $S$  del sistema «electrón + positón» posee paridad negativa (véase el problema del § 27). Ahora bien, en los estados impares del sistema de dos fotones sus polarizaciones son ortogonales entre sí (§ 9). Esta misma propiedad deberán poseer por consiguiente, los fotones de aniquilación en el caso no relativista.

Si el electrón y el positón están polarizados, en el mismo caso no-relativista cabe afirmar que su aniquilación es posible tan sólo si sus spins son antiparalelos. En efecto, dado que la aniquilación tiene lugar en un estado- $S$ , el momento cinético total del sistema coincide con el spin total de las partículas, igual a 1 en el caso de spins paralelos. Pero el sistema de dos fotones no tiene estados cuyo momento cinético total sea igual a 1 (§ 9).

En el límite ultrarelativista ( $v \rightarrow 1$ ), la aniquilación de un electrón y un positón polarizados longitudinalmente (con helicidad determinada) es sólo posible cuando sus helicidades son de diferente signo \*\*. En este caso límite las partículas con helicidad determinada se comportan como un neutrino (véase el final del § 81) y, por ello, el electrón y el positón que se destruyen deben ser análogos a un neutrino y a un antineutrino, de donde se sigue lo antes afirmado.

En cuanto a la aniquilación de un electrón y un positón con helicidades iguales, ésta se produce en el caso ultrarelativista únicamente cuando se tienen en cuenta términos que contiene  $m$ . En orden de magnitud, la amplitud de este proceso difiere de la amplitud de destrucción de un par con spins paralelos en el factor  $m/\epsilon$ ; según esto, la sección eficaz diferirá, por consiguiente, en el factor  $(m/\epsilon)^2$ .

#### PROBLEMA

Hallar la sección eficaz de formación de un par electrón-positón en el choque de dos fotones (G. Breit, J. A. Wheeler, 1934).

\* Véase L. A. PAGE, Phys. Rev., 106, 394 (1957); H. McMMASTER, Rev. Mod. Phys., 33, 8 (1961).

\*\* Dado que al mismo tiempo son opuestos (en el sistema del centro de masa) los sentidos de los impulsos de las partículas, el hecho de que las helicidades sean de signo contrario corresponde a spins paralelos.

*Solución.* Este proceso es el inverso de la aniquilación de un par electrón-positón en dos fotones. Los cuadrados de la amplitud de ambos procesos son iguales y su relación con la sección eficaz difiere solamente en que ahora se tiene  $I^2 = (k_1 k_2)^2 = t^2/4$ . Por ello,

$$d\sigma_{\text{for}} = d\sigma_{\text{ani}} \frac{t - 4m^2}{t}.$$

En el sistema del centro de masa ( $t = 4\varepsilon^2 = 4\omega^2$ )

$$d\sigma_{\text{for}} = v^2 d\sigma_{\text{ani}},$$

donde  $v$  es la velocidad de los componentes del par. Al integrar con vistas a hallar la sección eficaz total, hay que tener en cuenta que, dada la no identidad de las dos partículas finales (un electrón y un positón), no es necesario dividir el resultado por 2, como en el caso de la aniquilación. Por ello (en el sistema del centro de masa)

$$\sigma_{\text{for}} = 2v^2 \sigma_{\text{ani}} = \frac{\pi r_e^2}{2} (1 - v^4) \left\{ (3 - v^4) \ln \frac{1 + v}{1 - v} - 2v(2 - v^2) \right\}. \quad (1)$$

En un sistema cualquiera de referencia  $K$ , en el cual los dos fotones  $k_1$  y  $k_2$  se dirijan uno hacia el otro, tenemos (por la invariancia de  $k_1 k_2$ ).

$$\omega_1 \omega_2 = \omega^2,$$

donde  $\omega$  es la energía de los fotones en el sistema del centro de masa. Dado que en este sistema las energías de los fotones y de los componentes del par coinciden, se tendrá  $\omega = \varepsilon = m/\sqrt{1 - v^2}$ . Por consiguiente, para pasar al sistema  $K$  hay que hacer en (1)

$$v = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega_1 \omega_2}}.$$

### § 89. Aniquilación del positonio

En virtud de la conservación del impulso, la aniquilación del electrón y del positón en el positonio debe ir acompañada de la emisión de dos fotones por lo menos. Esta desintegración, sin embargo, es posible (en el estado fundamental) tan sólo para el parapositonio. En el § 9 se probó que el momento cinético total del sistema de dos fotones no puede ser igual a 1. Por consiguiente, el ortopositonio, que se encuentra en un estado  ${}^3S_1$ , no puede desintegrarse dando lugar a dos fotones. Además, dado que en el estado  ${}^3S_1$  el positonio constituye un sistema impar respecto de la carga (véase el problema del § 27), en virtud del teorema de Furry (§ 80) su desintegración en un número par de fotones es también imposible. En cambio, en el estado  ${}^1S_0$  el positonio es par respecto de la carga y, en consecuencia, está prohibida la desintegración del parapositonio en un número impar cualquiera de fotones.

El proceso fundamental que determina la duración de la vida del positonio es, de esta manera, la aniquilación en dos fotones en el caso del parapositonio y la aniquilación en tres fotones en el caso del ortopositonio (I. Ia. Pomeranchuk, 1948). La probabilidad de desintegración puede vincularse con la sección eficaz de aniquilación de un par libre.

Los impulsos del electrón y del positón en el positonio son  $\sim me^2/\hbar$ , es decir,

pequeños comparados con  $mc$ . Por ello, al calcular la probabilidad de aniquilación cabe pasar al límite de dos partículas que se encuentran en reposo en el origen de coordenadas. Sea  $\bar{\sigma}_{2\gamma}$  la sección eficaz de aniquilación de un par libre en dos fotones promediada respecto de las direcciones de los spins de ambas partículas. En el límite no relativista, según (88.11) \*, se tiene

$$\bar{\sigma}_{2\gamma} = \pi \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{c}{v}, \quad (89.1)$$

donde  $v$  es la velocidad relativa de las partículas. Obtendremos la probabilidad de aniquilación  $\bar{w}_{2\gamma}$  multiplicando  $\bar{\sigma}_{2\gamma}$  por la densidad de flujo, que es igual a  $v|\psi(0)|^2$ . Aquí  $\psi(r)$  es la función de onda, normalizada a 1, del estado fundamental del positonio

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}, \quad a = \frac{2\hbar^2}{me^2} \quad (89.2)$$

(el radio de Bohr del positonio  $a$  es dos veces mayor que el radio del átomo de hidrógeno debido a que la masa reducida es dos veces menor). Esta probabilidad, sin embargo, corresponde al promedio respecto de los spins del estado inicial. Pero, en el positonio, de los cuatro estados de spin posibles del sistema formado por las dos partículas sólo uno es susceptible de destrucción dando lugar a dos fotones (con spin total 0). Por consiguiente, el valor medio de la probabilidad de desintegración  $\bar{w}_{2\gamma}$  está ligado con la probabilidad de desintegración del parapositonio  $w_0$  por la relación  $\bar{w}_{2\gamma} = w_0/4$ . De esta manera,

$$w_0 = 4 |\psi(0)|^2 (v \bar{\sigma}_{2\gamma})_{v \rightarrow 0}. \quad (89.3)$$

Substituyendo los valores de (89.1-2) obtendremos para la duración de la vida del parapositonio

$$\tau_0 = \frac{2\hbar}{mc^2 a^5} = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ s}. \quad (89.4)$$

Hay que hacer observar que la anchura del nivel  $\Gamma_0 = \hbar/\tau_0$  es pequeña comparada con su energía

$$|E_{\text{fun}}| = \frac{me^4}{4\hbar^2} = mc^2 \frac{a^2}{4}.$$

Precisamente esta circunstancia permite considerar el positonio como un sistema cuasiestacionario.

De manera análoga se halla que la probabilidad de desintegración del ortopositonio está ligada con el valor medio, respecto de los spins, de la sección eficaz de aniquilación de un par libre en tres fotones por la relación

$$w_1 = \frac{4}{3} \bar{w}_{3\gamma} = \frac{4}{3} |\psi(0)|^2 (v \bar{\sigma}_{3\gamma})_{v \rightarrow 0} \quad (89.5)$$

\* Las fórmulas (89.1-7) se han escrito en unidades ordinarias.

(3/4 es el peso estadístico del estado con spin 1). Adelantando ideas, indicaremos que

$$\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{4(\pi^2 - 9)c}{3v} \alpha \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2. \quad (89.6)$$

Por ello la vida del ortopositonio es de

$$\tau_1 = \frac{9\pi}{2(\pi^2 - 9)} \frac{\hbar}{mc^2 \alpha^6} = 1.4 \cdot 10^{-7} \text{ s}. \quad (89.7)$$

La desigualdad  $\Gamma_1 \ll |E_{\text{fun}}|$  en este caso se cumple, naturalmente, en mayor medida que en el caso del parapositonio.

Efectuemos ahora el cálculo de la sección eficaz de la aniquilación de un par libre, en tres fotones (*A. Ore, J. L. Powell, 1949\**).

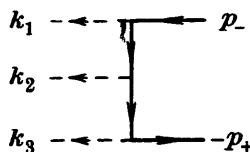
Según (65.18) la sección eficaz del proceso considerado en el sistema del centro de masa se expresa por el cuadrado de la amplitud mediante la fórmula

$$d\sigma_{3\gamma} = \frac{(2\pi)^4 |M_{fi}|^2}{4I} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 2m) \times \\ \times \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3}{(2\pi)^9 2\omega_1 \cdot 2\omega_2 \cdot 2\omega_3}, \quad (89.8)$$

en la que, según (65.16),  $I = 2m \cdot \frac{m}{2} v = m^2 v$ , donde  $v$  es la velocidad relativa del

positón y el electrón (velocidad que se supone pequeña);  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$  y  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  son los vectores de onda y las frecuencias de los fotones que se originan; las funciones- $\delta$  expresan las leyes de conservación de la energía y del impulso. En virtud de estas leyes, las tres frecuencias  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  deben representarse por las longitudes de los lados de un triángulo cuyo perímetro es  $2m$ . En otras palabras, los valores absolutos de los impulsos  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$  y los ángulos que forman entre sí están por completo determinados cuando se dan dos de las frecuencias.

A la aniquilación en tres fotones corresponde el diagrama



y cinco diagramas más que se obtienen permutando los fotones  $k_1, k_2, k_3$ . La correspondiente amplitud la escribiremos en la forma

$$M_{fi} = (4\pi)^{8/3} e_{\lambda}^{(3)*} e_{\mu}^{(2)*} e_{\nu}^{(1)*} \bar{u}(-p_+) Q^{\lambda\mu\nu} u(p_-), \quad (89.9)$$

donde

$$Q^{\lambda\mu\nu} = \sum_{\text{per}} \gamma^\lambda G(k_3 - p_+) \gamma^\mu G(p_- - k_1) \gamma^\nu, \quad (89.10)$$

\* Otro canal de esta misma reacción es el doble efecto Compton:  $e + \gamma \rightarrow e + \gamma + \gamma$ . [Para la sección eficaz de este proceso, véase F. MANDL, T. H. R. SQUIRME, Proc. Roy. Soc. A 215, 497 (1952)].

y la suma se extiende a todas las permutaciones de los números de fotones 1, 2, 3, junto con las permutaciones, al mismo tiempo, de los correspondientes índices tensoriales  $\lambda\mu\nu$ . El cuadrado del módulo de la amplitud, promediado respecto de las polarizaciones del electrón y del positón y sumado para las polarizaciones de los fotones, es

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = (4\pi)^3 \text{Tr} \{ \rho_+ Q^{\lambda\mu\nu} \rho_- \bar{Q}_{\lambda\mu\nu} \}, \quad (89.11)$$

donde

$$\rho_- = \frac{1}{2} (\hat{p}_- + m), \quad \rho_+ = \frac{1}{2} (\hat{p}_+ - m).$$

Las matrices  $\bar{Q}^{\lambda\mu\nu}$  difieren de las matrices  $Q^{\lambda\mu\nu}$  en la inversión del orden de los factores en cada término de la suma. En el caso que aquí nos interesa de pequeñas velocidades del electrón y del positón, se pueden igualar a cero los 3-impulsos  $\mathbf{p}_-$  y  $\mathbf{p}_+$ , es decir, tomar  $p_- = p_+ = (m, 0)$ . Entonces las funciones de Green de electrón adoptan la forma

$$G(p_- - k_1) = \frac{\hat{p} - \hat{k}_1 + m}{(p - k_1)^2 - m^2} \approx \frac{-k_1 + m(\gamma^0 + 1)}{-2m\omega_1}$$

etc., y las matrices densidad se reducen a

$$\rho_{\mp} = \frac{m}{2} (\gamma^0 \pm 1).$$

Al efectuar el producto en (89.11) aparecen un gran número de términos. Sin embargo, el número de ellos que efectivamente hay que calcular se puede reducir considerablemente utilizando al máximo las propiedades de simetría respecto de las permutaciones de los fotones. Así, basta multiplicar los seis términos de  $Q^{\lambda\mu\nu}$  (89.10) por sólo uno, cualquiera, de los términos de  $\bar{Q}_{\lambda\mu\nu}$ . En las seis trazas que así quedan cabe separar partes que se transforman entre sí al aplicar las diferentes permutaciones de fotones. Los productos de 4-vectores  $p, k_1, k_2, k_3$  que resultan al explicitar las trazas se expresan todos ellos en función de las frecuencias  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Dado que  $p = (m, 0)$ , se tendrá  $pk_1 = m\omega_1, \dots$ . En cambio, los productos  $k_1k_2, \dots$  se determinan a partir de la ley de conservación del 4-impulso:  $2p = k_1 + k_2 + k_3$ ; así, escribiendo esta igualdad en la forma  $2p - k_3 = k_1 + k_2$  y elevándola al cuadrado, obtendremos

$$k_1k_2 = 2m(m - \omega_3), \dots \quad (89.12)$$

Mediante un cálculo a pesar de todo bastante largo, se obtiene en definitiva

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = (4\pi)^3 e^6 \cdot 16 \left[ \left( \frac{m - \omega_1}{\omega_2 \omega_3} \right)^2 + \left( \frac{m - \omega_2}{\omega_1 \omega_3} \right)^2 + \left( \frac{m - \omega_3}{\omega_1 \omega_2} \right)^2 \right].$$

Substituyendo esta expresión en (89.8), resulta la sección eficaz diferencial de aniquilamiento en tres fotones:

$$d\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{e^6}{\pi^2 m^2 v} \left[ \left( \frac{m - \omega_1}{\omega_1 \omega_3} \right)^2 + \left( \frac{m - \omega_2}{\omega_1 \omega_3} \right)^2 + \left( \frac{m - \omega_3}{\omega_1 \omega_3} \right)^2 \right] \times \\ \times \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 2m) \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3}{\omega_1 \omega_2 \omega_3}. \quad (89.13)$$

De aquí hay que eliminar aún las funciones- $\delta$ . La primera de ellas se elimina integrando respecto de  $d^3 k_3$ , hecho lo cual substituimos las diferenciales que quedan de acuerdo con

$$d^3 k_1 d^3 k_2 \rightarrow 4\pi \omega_1^2 d\omega_1 \cdot 2\pi \omega_2^2 d(\cos \theta_{12}) d\omega_2,$$

donde  $\theta_{12}$  es el ángulo formado por  $\mathbf{k}_1$  y  $\mathbf{k}_2$ ; se supone que ya se ha efectuado la integración respecto de la dirección de  $\mathbf{k}_1$  y del acimut de  $\mathbf{k}_2$  respecto de  $\mathbf{k}_1$ . Diferenciando la igualdad

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \cos \theta_{12}}$$

encontramos

$$d \cos \theta_{12} = \frac{\omega_3}{\omega_1 \omega_2} d\omega_3.$$

La integración respecto de  $d\omega_3$  elimina la segunda función- $\delta$ . El resultado que se obtiene para la sección eficaz de aniquilación con formación de fotones de energías dadas tiene así la forma

$$d\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{1}{6} \frac{8e^6}{vm^2} \left\{ \left( \frac{m - \omega_3}{\omega_1 \omega_2} \right)^2 + \left( \frac{m - \omega_2}{\omega_1 \omega_3} \right)^2 + \left( \frac{m - \omega_1}{\omega_2 \omega_3} \right)^2 \right\} d\omega_1 d\omega_2 \quad (89.14)$$

(con vistas a una ulterior integración respecto de las frecuencias, se ha introducido aquí el factor 1/6 que tiene en cuenta la identidad de los fotones — cf. la nota de la pág. 273).

Cada una de las frecuencias  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  pueden tomar valores entre 0 y  $m$  (el valor  $m$  se alcanza para dos frecuencias cuando la tercera es igual a cero). Para  $\omega_1$  dada, la frecuencia  $\omega_2$  varía entre  $m - \omega_1$  y  $m$ . Integrando (89.14) respecto de  $d\omega_2$  entre estos límites, se obtendrá la distribuciónpectral de los fotones de desintegración:

$$d\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{8e^6}{3v m^8} F(\omega_1) d\omega_1, \\ F(\omega_1) = \frac{\omega_1(m - \omega_1)}{(2m - \omega_1)^2} + \frac{2m - \omega_1}{\omega_1} + \left[ \frac{2m(m - \omega_1)}{\omega_1^2} - \right. \\ \left. - \frac{2m(m - \omega_1)^2}{(2m - \omega_1)^3} \right] \ln \frac{m - \omega_1}{m}.$$

La función  $F(\omega_1)$  crece de manera monótona a partir de cero para  $\omega_1 = 0$  hasta 1 para  $\omega_1 = m$ ; la fig. 16 la representa gráficamente.

La sección eficaz total de aniquilación se obtiene integrando (89.14) respecto de ambas frecuencias:

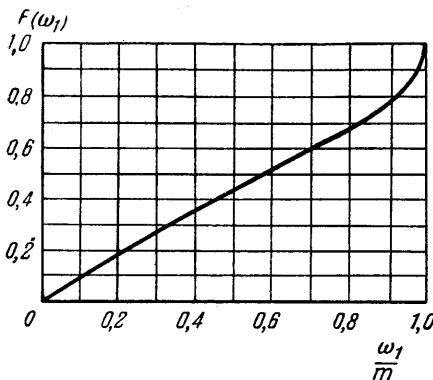


FIG. 16.

$$\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{4e^6}{3vm^2} 3 \int_0^m \int_{m-\omega_1}^m \frac{(\omega_1 + \omega_2 - m)^2}{\omega_1^2 \omega_2^2} d\omega_1 d\omega_2.$$

La integral que aquí aparece es igual a  $(\pi^2 - 9)/3$ , con lo que llegamos a la fórmula ya señalada (89.6).

### § 90. Radiación de frenado de un electrón por un núcleo. Caso no-relativista

Éste y algunos de los párrafos que siguen se dedican al importante fenómeno de la *radiación de frenado*, es decir, a la radiación que acompaña al choque de las partículas. Empezaremos por la colisión no-relativista de un electrón y un núcleo. Supondremos que el núcleo permanece en reposo, es decir, consideraremos la radiación que se produce en la dispersión de un electrón por el campo coulombiano de un centro inmóvil (*A. Sommerfeld*, 1931).

Partiremos de la fórmula (45.5) para la probabilidad de radiación dipolar

$$dw = \frac{\omega^3}{2\pi} |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{d}_{fi}|^2 d\Omega_k \quad (90.1)$$

En el presente caso los estados inicial y final del electrón pertenecen al espectro continuo y la frecuencia del fotón es

$$\omega = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}'^2), \quad (90.2)$$

donde  $\mathbf{p} = mv$  y  $\mathbf{p}' = mv'$  son los impulsos inicial y final del electrón. Si las funciones de onda inicial y final de éste están normalizadas «a una partícula en el volumen  $V = 1$ », la expresión (90.1) multiplicada por  $d^3 p' / (2\pi)^3$  y dividida por la densidad de flujo incidente,  $v/V = v$ , dará la sección eficaz  $d\sigma_{kp'}$  de emisión del fotón  $k$  en el ángulo sólido  $d\Omega_k$  acompañada de la dispersión del electrón en el intervalo

de estados  $d^3p'$ . Substituyendo el elemento de matriz del momento dipolar  $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$  por el elemento de matriz del impulso de acuerdo con

$$\mathbf{d}_{fi} = -\frac{1}{i\omega m} \frac{e}{m} \mathbf{p}_{fi},$$

escribiremos la expresión de la sección eficaz en la forma \*

$$d\sigma_{kp'} = \frac{\omega e^2}{(2\pi)^4 mp} |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{p}_{fi}|^2 d\sigma_k d^3p', \quad (90.3)$$

donde

$$\mathbf{p}_{fi} = \int \psi_f^* \mathbf{p} \psi_i d^3x = -i \int \psi_f^* \nabla \psi_i d^3x.$$

Para las funciones  $\psi_i$  y  $\psi_f$  hay que utilizar las funciones de onda exactas en el campo atractivo de Coulomb, precisamente aquellas funciones que contienen asintóticamente una onda plana y una onda esférica; en  $\psi_f$  la onda esférica debe ser convergente, y en  $\psi_i$ , divergente (véase III, § 134). Estas funciones son de la forma

$$\psi_i = A_i e^{ipr} F(iv, 1, i(pr - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})), \quad v = \frac{Ze^2 m}{p}; \quad (90.4)$$

$$\psi_f = A_f e^{ip'r} F(-iv', 1, -i(p'r + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{r})), \quad v' = \frac{Ze^2 m}{p'}$$

con los coeficientes de normalización \*\*

$$A_i = e^{\pi v/2} \Gamma(1 - iv), \quad A_f = e^{\pi v'/2} \Gamma(1 + iv'). \quad (90.5)$$

Observando que

$$\nabla F(iv, 1, i(pr - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})) = i \left( p \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{p} \right) F' = -\frac{p}{r} \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \right)_v,$$

escribiremos el gradiante  $\nabla \psi_i$  en la forma

$$\nabla \psi_i = ip \psi_i - A_i e^{ip \cdot r} \frac{p}{r} \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \right)_v.$$

Multiplicando por  $\psi_f^*$  e integrando, el primer término se anula en virtud de la ortogonalidad de  $\psi_i$  y  $\psi_f$ . Por consiguiente, para el elemento de matriz  $\mathbf{p}_{fi}$  tenemos

$$\mathbf{p}_{fi} = i A_i A_f p \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}}, \quad (90.6)$$

donde  $J$  designa la integral

$$J = \int \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{r} F(iv, 1, i(p'r + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{r})) F(iv, 1, i(pr - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})) d^3x, \quad (90.7)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$$

Hemos sacado  $\partial/\partial \mathbf{p}$  fuera del signo de integral suponiendo que al derivar  $J$  las

\* En este párrafo hemos hecho  $p = |\mathbf{p}|$ ,  $p' = |\mathbf{p}'|$ .

\*\* La normalización corresponde a densidad unidad en vez de la normalización respecto de  $\delta(\mathbf{p})$  en III, § 134!

cantidades  $v$ ,  $v'$ ,  $\mathbf{q}$  deben considerarse como parámetros independientes y tan sólo después de efectuar la derivación hay que expresar  $v$  y  $\mathbf{q}$  en función de  $\mathbf{p}$ .

La integral se calcula substituyendo cada una de las funciones hipergeométricas degeneradas por sus representaciones en forma de integrales de contorno. Presentaremos aquí solamente el resultado \*:

$$\begin{aligned} J &= BF(iv', iv, 1, z), \\ B &= 4\pi e^{-\pi v} (-\mathbf{q}^2 - 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^{-iv} (\mathbf{q}^2 - 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}')^{-iv'} (\mathbf{q}^2)^{iv+iv'-1}, \\ z &= 2 \frac{\mathbf{q}^2(pp' + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}') - 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}')}{(\mathbf{q}^2 - 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}')(\mathbf{q}^2 + 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})}. \end{aligned} \quad (90.8)$$

$F(iv', iv, 1, z)$  es la función hipergeométrica completa.

Después de efectuar la derivación en (90.6) se puede hacer  $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ ; entonces

$$z = -2 \frac{pp' - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'}{(p - p')^2}, \quad \mathbf{q}^2 = (p - p')^2(1 - z) \quad (90.9)$$

( $z < 0$ ). Observemos también que

$$-\mathbf{q}^2 - 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{q}^2 - 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}' = \mathbf{p}^2 - \mathbf{p}'^2 > 0.$$

En definitiva encontramos para el elemento de matriz la siguiente expresión final:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{fi} &= A_i A_f \frac{8\pi i e^{-\pi v}}{(p - p')^3 (p + p')} \left( \frac{p + p'}{p - p'} \right)^{-i(v+v')} \times \\ &\times (1 - z)^{i(v+v') - 1} [ivp\mathbf{q}F(z) + (1 - z)F'(z)(p'\mathbf{p} - p\mathbf{p}')], \end{aligned} \quad (90.10)$$

donde para abreviar se ha hecho

$$F(z) = F(iv', iv, 1, z). \quad (90.11)$$

La sección eficaz se obtiene substituyendo (90.10) en (90.3), pero la fórmula general es muy compleja y difícilmente descriptible. Por ello pasamos directamente al cálculo de la distribución espectral de la radiación, es decir, integramos la sección eficaz respecto de las direcciones del fotón y del electrón final.

La integración respecto  $d\sigma_{\mathbf{k}}$  y la suma para todas las polarizaciones del fotón se reduce a promediar respecto de las direcciones  $e$  y a multiplicar por  $2 \cdot 4\pi$ , es decir, a la sustitución

$$e_i e_k^* d\sigma_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{8\pi}{3} \delta_{ik}.$$

Hecho esto, la sección eficaz resulta ser

$$d\sigma_{\mathbf{p}'} = \frac{4\omega e^2}{3m} |\mathbf{p}_{fi}|^2 \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} = \frac{\omega e^2 p'}{6\pi^3 p} |\mathbf{p}_{fi}|^2 d\omega d\sigma_{\mathbf{p'}}. \quad (90.12)$$

El cuadrado  $|\mathbf{p}_{fi}|^2$  se calcula utilizando (90.9-11) y teniendo en cuenta que

\* Para el cálculo, véase A. NORDSIECK, Phys. Rev. 93, 758 (1954).

$$|\Gamma(1 - i\nu)|^2 = \frac{\pi\nu}{\sinh \pi\nu}.$$

Se obtiene así

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_{fi}|^2 &= \frac{32\pi(Ze^2)^2 m^3}{p(p+p')^2 (p-p')^4 (1-e^{-2\pi\nu}) (e^{2\pi\nu}-1)} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{\nu\nu'}{1-z} |F|^2 - z|F'|^2 + i \frac{\nu+\nu'}{2} \frac{z}{1-z} (FF'^* - F'^*F) \right\}. \end{aligned} \quad (90.13)$$

Para integrar la sección eficaz (90.12) respecto de  $d\sigma_{p'} = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$  pasaremos de la variable  $\vartheta$  (ángulo de dispersión) a la variable

$$z = -\frac{2pp'}{(p-p')^2} (1 - \cos \vartheta), \quad d\sigma_{p'} \rightarrow \frac{\pi(p-p')^2}{pp'} dz.$$

La integral respecto de  $dz$  se obtiene a su vez transformando la expresión entre llaves en (90.13). De acuerdo con la ecuación diferencial de las funciones hipergeométricas [véase III (e, 2)] tenemos

$$\begin{aligned} z(1-z)F'' + [1 - (1+i\nu+i\nu')z]F' + \nu\nu'F &= 0, \\ z(1-z)F'^* + [1 - (1-i\nu-i\nu')z]F'^* + \nu\nu'F^* &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando estas dos ecuaciones por  $F^*$  y  $F$ , respectivamente, y sumando, resulta

$$(1-z) \left[ \frac{d}{dz} z(F'F^* + F'^*F) - 2z|F'|^2 + \frac{i(\nu+\nu')z}{1-z} (F'^*F - F'F^*) + \frac{2\nu\nu'}{1-z} |F|^2 \right] = 0.$$

Vemos así que la expresión entre llaves en (90.13) es igual a

$$\{\dots\} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dz} z (F'F^* + F'^*F) \quad (90.14)$$

y se integra sin más.

Resumiendo las fórmulas obtenidas, se encuentra la expresión final para la sección eficaz de la radiación de frenado en el intervalo de frecuencias  $d\omega$

$$d\sigma_\omega = \frac{64\pi^2}{3} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{m^3 c^2}{(p-p')^2} \frac{p'}{p} \frac{1}{(1-e^{-2\pi\nu}) (e^{2\pi\nu}-1)} \left( -\frac{d}{d\xi} |F(\xi)|^2 \right) \frac{d\omega}{\omega}, \quad (90.15)$$

donde

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{Zamc}{p} = \frac{Ze^2}{\hbar v}, \quad \nu' = \frac{Ze^2}{\hbar v'}, \quad p' = \sqrt{p^2 - 2m\hbar\omega}, \\ F(\xi) &= F(i\nu', i\nu, 1, \xi), \quad \xi = -\frac{4pp'}{(p-p')^2}. \end{aligned}$$

La fórmula mecánico-cuántica (90.15) debe transformarse en el resultado de la

\* Las fórmulas (90.15-19) se han escrito en unidades ordinarias.

teoría clásica (véase II, § 70) en el caso límite en el que  $v \gg 1$  y  $\hbar\omega \ll p^2/2m$  (la primera de estas desigualdades es la condición que permite considerar el movimiento del electrón en el campo coulombiano como cuasiclásico, la segunda es la que hace posible atribuir dicho carácter al elemento de matriz de la transición). Para llevar a cabo el paso al límite es necesario obtener las expresiones asintóticas de las funciones hipergeométricas para grandes valores del argumento y de los parámetros, en lo que aquí no nos detendremos.

Consideremos el caso límite en que ambas velocidades  $v$  y  $v'$  son tan grandes que  $v \ll 1$ ,  $v' \ll 1$  (pero, claro está,  $v \ll 1$  como antes, de modo que  $Z\alpha \ll v \ll 1$ ; esto es posible solamente para un pequeño valor de  $Z$ ). Para calcular en este caso la derivada  $F'(\xi)$  utilizaremos la fórmula

$$\frac{d}{dz} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, z),$$

que es fácil obtener mediante una simple derivación de la serie hipergeométrica. Tenemos

$$F'(\xi) \approx iv \cdot iv' F(1, 1, 2, \xi) = \frac{vv'}{\xi} \ln(1 - \xi)$$

(la última igualdad es evidente por comparación directa de las correspondientes series). Para la propia función  $F(\xi)$ , se tiene simplemente

$$F(\xi) \approx F(0, 0, 1, \xi) = 1.$$

En definitiva encontramos, partiendo de (90.15),

$$\begin{aligned} d\sigma_\omega &= \frac{16}{3} Z^3 \alpha r_e^2 \frac{c^2}{v^2} \ln \frac{v+v'}{v-v'} \frac{d\omega}{\omega}, \\ \frac{Ze^2}{\hbar v} &\ll 1, \quad \frac{Ze^2}{\hbar v'} \ll 1. \end{aligned} \quad (90.16)$$

El que  $v$  y  $v'$  sean pequeñas es precisamente la condición de aplicabilidad de la aproximación de Born en el caso de la interacción coulombiana. En consecuencia, la propia fórmula (90.16) se puede obtener de manera más fácil acudiendo directamente a la teoría de perturbaciones (véase problema 1).

Supongamos ahora que un electrón rápido ( $v \ll 1$ ) pierde al emitir radiación una fracción apreciable de su energía, de modo que  $v' \ll v$  y  $v'$  puede no ser pequeña. Entonces

$$-\xi \approx \frac{4p'}{p} = \frac{4v}{v'} \ll 1, \quad F(\xi) \approx F(iv', 0, 1, \xi) = 1,$$

$$F'(\xi) \approx -vv' F(1 + iv', 1, 2, \xi) \approx -vv',$$

y la sección eficaz es

$$d\sigma_\omega = \frac{64\pi}{3} Z^3 \alpha^3 r_e^2 \left(\frac{c}{v}\right)^8 \frac{1}{1 - \exp(-2\pi Ze^2/\hbar v')} \frac{d\omega}{\omega}, \quad (90.17)$$

$$\frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1, \quad \frac{Ze^2}{\hbar v'} \gtrsim 1.$$

Cuando  $v' \ll v$  esta fórmula da la misma expresión límite

$$d\sigma_\omega = \frac{32}{3} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{c^2 v'}{v^3} \frac{d\omega}{\omega},$$

que la fórmula (90.16) para  $v' \ll v$ . Por ello, las fórmulas (90.16-17) juntas cubren (para  $v \ll 1$ ) todo el intervalo de valores de  $v'$ .

Si  $\omega \rightarrow \omega_0$  (donde  $\hbar\omega_0 = mv^2/2$ ), la velocidad  $v' \rightarrow 0$  y  $v' \rightarrow \infty$ . En este límite, (90.17) nos da

$$d\sigma_\omega = \frac{128\pi}{3} Z^3 \alpha^3 r_e^2 \left(\frac{c}{v}\right)^3 \frac{\hbar d\omega}{mv^2}. \quad (90.18)$$

Así, pues,  $d\sigma_\omega/d\omega$  tiende a un límite finito no nulo cuando  $\omega \rightarrow \omega_0$ . Esta circunstancia se puede explicar de manera general por consideraciones análogas a las expuestas en III, § 144. Físicamente está vinculada con el hecho de que la frecuencia  $\omega = \omega_0$  es la frontera únicamente del espectro continuo de frenado. El electrón también puede emitir radiación con una frecuencia  $\omega > \omega_0$  pasando a un estado de enlace. Pero los estados de enlace fuertemente excitados en un campo de Coulomb difieren poco en sus propiedades de los estados libres próximos a su frontera. Por consiguiente, la frontera que separa el espectro continuo del discreto no es en esencia un punto físicamente discernible.

Todas las fórmulas escritas se refieren a un campo de Coulomb atractivo. La sección eficaz de radiación en un campo repulsivo se obtiene de (90.15) por la sustitución:  $v \rightarrow -v$ ,  $v' \rightarrow -v'$ . Con ello, en particular, en nada cambia la fórmula límite de Born (90.16). Pero en el límite  $v \ll 1$ ,  $v' \rightarrow \infty$  obtendremos, en vez de (90.18),

$$d\sigma_\omega = \frac{128\pi}{3} Z^3 \alpha^3 r_e^2 \left(\frac{c}{v}\right)^3 \exp\left(-\frac{\sqrt{2mc^2}\pi Z\alpha}{\sqrt{\hbar(\omega_0 - \omega)}}\right) \frac{\hbar d\omega}{mv^2}, \quad (90.19)$$

es decir, la sección eficaz diferencial tiende exponencialmente a cero para  $\omega \rightarrow \omega_0$ . De nuevo este resultado es natural: en un campo de repulsión no existen estados de enlace y la frecuencia  $\omega = \omega_0$  es la frontera real del espectro de radiación.

### PROBLEMAS

- Hallar, en la aproximación de Born, la sección eficaz de radiación de frenado en el choque no-relativista de dos partículas con valores diferentes de la razón  $e/m$ .

*Solución.* El momento dipolar de dos partículas con cargas  $e_1$ ,  $e_2$  y masas  $m_1$ ,  $m_2$  en el sistema de su centro de masa es igual a

$$\mathbf{d} = \mu \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \mathbf{r},$$

donde  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . De aquí se sigue

$$\ddot{\mathbf{d}} = \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \mu \ddot{\mathbf{r}} = - \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \nabla \frac{e_1 e_2}{r}.$$

El elemento de matriz

$$\mathbf{d}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = -\frac{1}{\omega^2} (\ddot{\mathbf{a}})_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}, \quad \omega = \frac{p^2 - p'^2}{2\mu}$$

( $\mathbf{p} = \mu \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{p}' = \mu' \mathbf{v}'$  son los impulsos del movimiento relativo) se calcula referido a ondas planas\*

$$\psi_{\mathbf{p}} = e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}, \quad \psi_{\mathbf{p}'} = e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}}$$

mediante la fórmula

$$\left( \nabla \frac{1}{r} \right)_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = \frac{4\pi i \mathbf{q}}{q^2}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}.$$

En definitiva obtendremos

$$d\sigma_{\mathbf{k}\mathbf{p}'} = \frac{e_1^2 e_2^2}{\pi^2} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{v'}{v} \frac{\mu^2}{q^4} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{q}) (\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{q}) \frac{d\omega}{\omega} d\omega_{\mathbf{p}'} d\omega_{\mathbf{k}}.$$

Después de sumar respecto de las polarizaciones, la distribución angular de la radiación viene dada por el factor  $\sin^2 \Theta$ , donde  $\Theta$  es el ángulo formado por la dirección del fotón  $\mathbf{k}$  y el vector  $\mathbf{q}$ , que se encuentran en el plano de dispersión [véase (45.4a)].

Después de integrar respecto de las direcciones del fotón, resulta

$$d\sigma_{\omega\theta} = \frac{16}{3} e_1^2 e_2^2 \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{v'}{v} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\sin \theta d\theta}{v^2 + v'^2 - 2vv' \cos \theta},$$

donde  $\theta$  es el ángulo de dispersión. Finalmente, la integración respecto de  $d\theta$  da

$$d\sigma_{\omega} = \frac{16}{3} e_1^2 e_2^2 \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{1}{v^2} \ln \frac{v + v'}{v - v'} \frac{d\omega}{\omega}.$$

Para la radiación en el campo de un centro de Coulomb inmóvil esta fórmula coincide con la (90.16).

2. Hallar, en la aproximación de Born, la sección eficaz de radiación de frenado en la colisión no-relativista de dos electrones \*\*.

*Solución.* La radiación dipolar no existe en este caso, de modo que hay que considerar la cuadripolar. En la teoría clásica la distribución espectral de la intensidad total de la radiación cuadripolar viene dada por la fórmula

$$I_{\omega} = \frac{1}{90} |(\vec{D}_{ik})_{\omega}|^2,$$

donde  $D_{ik} = \Sigma e (3x_i x_k - r^2 \delta_{ik})$  es el tensor del momento cuadripolar del sistema de cargas \*\*\*. Para dos electrones en el sistema de su centro de masa,

$$D_{ik} = \frac{e}{2} (3x_i x_k - r^2 \delta_{ik}), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Al pasar a la teoría cuántica, hay que substituir las componentes de Fourier por elementos de matriz (cf. lo dicho en el § 45 acerca de la radiación dipolar) y de acuerdo con la normalización impuesta a las funciones de onda (ondas planas) se obtendrá, después de dividir por la energía del fotón  $\omega$ , la sección eficaz de radiación con dispersión de los electrones en el intervalo de estados  $d^3 p'$ :

\* La substitución de dos partículas por una sola partícula con la masa reducida es admisible, claro está, tan sólo en el caso no-relativista.

\*\* La velocidad de choque  $v$  satisface las condiciones  $\alpha \ll e^2/\hbar v \ll 1$ . El caso clásico ( $e^2/\hbar v \gg 1$ ) se estudió en el problema de II, § 71.

\*\*\* Esta fórmula se obtiene a partir de II (71.5) de la misma manera como se obtuvo II (67.11) a partir de II (67.8).

$$d\sigma_{p'} = \frac{1}{90\omega} |(\ddot{D}_{ik})_{p'p}|^2 \frac{d^3 p'}{\nu(2\pi)^3},$$

donde  $\nu = 2p/m$  es la velocidad inicial del movimiento relativo; la frecuencia emitida es  
 $\omega = (p^2 - p'^2)/m$ .

El operador  $\ddot{D}_{ik}$  se calcula mediante triple conmutación del operador  $D_{ik}$  con el hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{m} + \frac{e^2}{r}$$

y resulta igual a \*

$$\begin{aligned} \ddot{D}_{ik} = \frac{2e^3}{m} & \left[ 6 \left( \frac{x_i}{r^3} p_k + p_k \frac{x_i}{r^3} \right) + 6 \left( \frac{x_k}{r^3} p_i + p_i \frac{x_k}{r^3} \right) - \right. \\ & \left. - 9 \left( \frac{x_i x_k x_l}{r^5} p_l + p_l \frac{x_i x_k x_l}{r^5} \right) - \delta_{ik} \left( \frac{x_l}{r^3} p_l + p_l \frac{x_l}{r^3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Teniendo presente la identidad de ambas partículas (las dos son electrones), los elementos de matriz se calculan referidos a las funciones de onda

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{ip \cdot r} \pm e^{-ip \cdot r}), \quad \psi_{p'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{ip' \cdot r} \pm e^{-ip' \cdot r}),$$

donde los signos + y — corresponden a los spins totales 0 y 1 de los electrones (a la permutación de los electrones corresponde la substitución  $r \rightarrow -r$ ).

Cálculos pesados ★★ conducen a la siguiente fórmula para la distribución espectral de la radiación:

$$d\sigma_\omega = \frac{4}{15} \alpha r_e^2 \left\{ 17 - \frac{3x^2}{(2-x)^2} + \frac{12(2-x)^4 - 7(2-x)^2 x^2 - 3x^4}{(2-x)^3 \sqrt{1-x}} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{arcosh} \frac{1}{\sqrt{x}} \right\} \frac{\sqrt{1-x}}{x} dx,$$

donde  $x = \omega/\epsilon$  y  $\epsilon = p^2/m$  es la energía del movimiento relativo de los electrones; la sección eficaz se ha promediado con relación a los valores del spin total de los electrones. La sección eficaz de pérdida de energía por radiación es:

$$\frac{1}{\epsilon} \int_0^\infty d\sigma_\omega = 8,1 \alpha r_e^2.$$

3. Determinar la energía de la radiación que se produce cuando un núcleo emite un electrón no-relativista en un estado-s.

*Solución.* La función de onda del electrón emitido por el núcleo es una onda-s esférica divergente normalizada de modo que el flujo total sea igual a la unidad:

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu}} \frac{e^{ipr}}{r}$$

- Esta expresión es análoga a la fórmula clásica

$$\ddot{D}_{ik} = \frac{4e^3}{m^2} \left[ 6 \frac{x_i}{r^3} p_k + 6 \frac{x_k}{r^3} p_i - 9 \frac{x_i x_k}{r^5} p \cdot r - \frac{1}{r^3} \delta_{ik} p \cdot r \right],$$

que se obtendría como resultado de derivar  $D_{ik}$  teniendo en cuenta la ecuación clásica del movimiento

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 = \frac{e^2 r}{r^3}.$$

\*\* Cómo efectuarlos puede verse en B. K. FEDIUSHIN, Zh ETF 22, 140, 1952.

[véase III (33.12)]. Como función de onda del estado final del electrón (después de emitido el fotón) eligiremos una onda plana

$$\psi_f = e^{ip' \cdot r}.$$

El elemento de matriz de la transición es

$$\begin{aligned} p_{fi} &= (\mathbf{p}_{if})^* = \left( \int \psi_i^* \mathbf{p} \psi_f d^3x \right)^* = \\ &= \frac{\mathbf{p}'}{\sqrt{4\pi v}} \int e^{-ip' \cdot r + ipr} \frac{d^3x}{r} = \sqrt{\frac{4\pi}{v}} \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}'^2 - \mathbf{p}^2} = -\sqrt{\frac{\pi}{v}} \frac{\mathbf{v}'}{\omega} \end{aligned}$$

[la integral se calcula de acuerdo con (57.6a)]. La energía de la radiación se obtiene a partir de la fórmula (45.8) multiplicada por  $d^3p'/(2\pi)^3$  e integrada respecto de las direcciones  $\mathbf{p}'$  (lo que se reduce a multiplicar por  $4\pi$ ). En definitiva obtendremos la distribución espectral de la energía radiada

$$dE_\omega = \frac{2e^2 v'}{3\pi v} d\omega.$$

Cuando  $\omega \rightarrow 0$ , la velocidad final del electrón  $v' \rightarrow v$  y esta fórmula coincide, como debía ocurrir, con el límite no-relativista del resultado clásico (véase el problema en II, § 69). La energía total emitida (en unidades ordinarias) vale

$$E = \frac{4}{15\pi} \alpha \left( \frac{v}{c} \right)^2 \epsilon,$$

donde  $\epsilon = mv^2/2$  es la energía inicial del electrón.

4. Determinar la energía de la radiación que se produce al reflejarse un electrón no-relativista en una «pared de potencial» infinitamente alta.

*Solución.* Supongamos que el electrón se mueve perpendicularmente a la pared. Aunque el fotón puede ser emitido en una dirección cualquiera, sin embargo, dado que en el caso no-relativista el impulso del fotón es pequeño comparado con el impulso del electrón, se puede considerar que también el electrón reflejado se moverá perpendicularmente al plano de la pared. Tomemos este plano como plano  $x = 0$ , y supongamos que el electrón se mueve hacia él del lado  $x > 0$ . Las funciones de onda de los estados estacionarios del movimiento unidimensional normalizadas respecto de  $\delta(p)$  ( $p = p_x$ ) tienen la forma de ondas estacionarias (III, § 21):

$$\psi_i = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} px, \quad \psi_f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} p'x.$$

El elemento de matriz del operador  $\mathbf{p} = p_x$ \* es

$$\begin{aligned} p_{fi} &= -\frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{sen} p'x \frac{d}{dx} \operatorname{sen} px dx = -\frac{2ip}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{sen} p'x \cos px dx = \\ &= -\frac{2i}{\pi} \frac{pp'}{p^2 - p'^2}. \end{aligned}$$

La energía emitida en una sola reflexión del electrón se obtiene de (45.8) multiplicando por  $dp' = d\omega/v'$  y dividiendo por  $v/2\pi$  (densidad de flujo de la onda que se dirige a la barrera en la función inicial  $\psi_i$ ):

$$dE_\omega = \frac{4\omega^2 e^2}{3m^2} |p_{fi}|^2 \frac{2\pi d\omega}{vv'} = \frac{8}{3\pi} e^2 v v' d\omega. \quad (1)$$

\* Las integrales de esta forma hay que interpretarlas como límite para  $\delta \rightarrow 0$  del valor que se obtiene introduciendo en el integrando el factor  $e^{-\delta x}$ .

Para pequeñas frecuencias ( $\omega \ll \epsilon = mv^2/2$ ) tenemos  $v' \approx v$  y (1) pasa a ser la fórmula clásica II (69.5) (que hay que integrar respecto de los ángulos y tener en cuenta, además, que  $v = \Delta v/2$ , donde  $\Delta v$  es la variación de la velocidad del electrón en la reflexión); así debía ocurrir, dado que en la reflexión en la pared la condición de que el tiempo de colisión sea pequeño [II (69.1)] se cumple en cualquier caso. La fórmula cuántica (1) permite, sin embargo, hallar también la energía total radiada:

$$E = \int_0^\epsilon \frac{dE_\omega}{d\omega} d\omega = \frac{16}{9\pi} \alpha \epsilon \frac{v^2}{c^3}$$

(en unidades ordinarias).

### § 91. Radiación de frenado de un electrón por un núcleo. Caso relativista

Pasemos a la radiación de frenado de un electrón por un núcleo en el caso en que las velocidades del electrón son relativistas\*. Supondremos, además, que se cumple la condición de aplicabilidad de la aproximación de Born, es decir, tanto para la velocidad inicial ( $v$ ) como para la final ( $v'$ ) del electrón se tiene:  $Ze^2/\hbar v \ll 1$ ,  $Ze^2/\hbar v' \ll 1$ . Por otra parte, en cualquier caso la carga del núcleo no debe ser demasiado grande:  $Z\alpha \ll 1$ .

Como en el párrafo precedente, prescindiremos del retroceso del núcleo, ya que éste representa sólo el papel de fuente del campo exterior (acerca de la justificación de esta manera de proceder, véase § 94).

Según (65.25) la sección eficaz del proceso es

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{1}{8|\mathbf{p}'|\epsilon'\omega} \delta(\epsilon - \epsilon' - \omega) \frac{d^3p' d^3k}{(2\pi)^5}. \quad (91.1)$$

Aquí  $\mathbf{p}$ ,  $\epsilon$  y  $\mathbf{p}'$ ,  $\epsilon'$  son los impulsos y las energías iniciales y finales del electrón;  $\mathbf{k}$ ,  $\omega$ , el impulso y la energía del fotón. La función- $\delta$  se elimina integrando respecto de  $d\epsilon'$ ; dado que  $\mathbf{p}'$  y  $\mathbf{k}$  son variables independientes, dicha integración se efectúa de manera muy sencilla. Observando que

$$d^3p' = |\mathbf{p}'| \epsilon' d\epsilon' d\Omega', \quad d^3k = \omega^2 d\omega d\Omega_k,$$

basta substituir simplemente

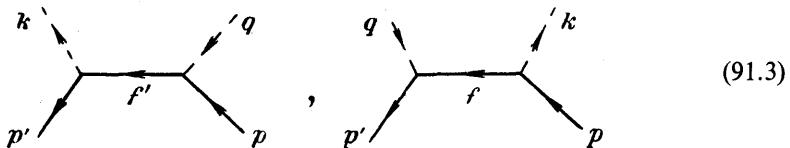
$$\delta(\epsilon - \epsilon' - \omega) d^3p' d^3k \rightarrow \omega^2 |\mathbf{p}'| \epsilon' d\Omega_k d\omega' d\omega.$$

Entonces

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^5} |M_{fi}|^2 \frac{\omega |\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|} d\Omega_k d\omega' d\omega. \quad (91.2)$$

En la primera aproximación no nula, al elemento de matriz  $M_{fi}$  le corresponden dos diagramas

\* La mayor parte de los resultados que se exponen a continuación fueron obtenidos por primera vez por H. A. Bethe y W. Heitler, 1934, y por F. Sauter, 1934, independientemente.



El terminal libre  $q$  corresponde al campo exterior, de modo que  $q = p' - p + k$  es el 4-vector de transferencia de impulso al núcleo. El haber prescindido del retroceso significa que la componente temporal es  $q^0 = 0$ .

Según el diagrama (91.3) tenemos

$$M_{fi} = -e^2 A_0^{(e)}(\mathbf{q}) \sqrt{4\pi} e_\mu^* \bar{u}' \left( \gamma^\mu \frac{\hat{f} + m}{f'^2 - m^2} \gamma^0 + \gamma^0 \frac{\hat{f} + m}{f^2 - m^2} \gamma^\mu \right) u. \quad (91.4)$$

Los 4-impulsos intermedios son  $f = p - k$ ,  $f' = p' + k$ ; introduzcamos las notaciones:

$$f^2 - m^2 = -2kp = -2\omega, \quad f'^2 - m^2 = 2kp' = 2\omega'. \quad (91.5)$$

$A_0^{(e)}$  es el potencial escalar del campo exterior; para un campo puramente coulombiano,

$$A_0^{(e)}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi Ze}{q^2}. \quad (91.6)$$

Substituyendo en (91.2), tenemos para la sección eficaz

$$d\sigma = \frac{Z^2 e^6}{4\pi^2} \frac{|\mathbf{p}'| \omega}{|\mathbf{p}| |\mathbf{q}^4|} e_\mu^* e_\nu (\bar{u}' Q^\mu u) (\bar{u} \bar{Q}^\nu u') d\omega_k d\omega' d\omega,$$

donde

$$Q^\mu = \gamma^\mu \frac{\hat{f} + m}{2\omega'} \gamma^0 - \gamma^0 \frac{\hat{f} + m}{2\omega} \gamma^\mu,$$

$$\bar{Q}^\nu = \gamma^0 Q^{\nu+} \gamma^0 = \gamma^0 \frac{\hat{f} + m}{2\omega'} \gamma^* - \gamma^* \frac{\hat{f} + m}{2\omega} \gamma^0.$$

No considerando los efectos de polarización, promediaremos la sección eficaz respecto de las direcciones del spin del electrón inicial y sumaremos con relación a las polarizaciones del electrón final y del fotón. Todo esto se reduce a la sustitución

$$e_\mu^* e_\nu (\bar{u}' Q^\mu u) (\bar{u} \bar{Q}^\nu u') \rightarrow -\frac{1}{2} \text{Tr } Q_\mu (\hat{p} + m) \bar{Q}^\mu (\hat{p}' + m).$$

El cálculo de la traza se efectúa siguiendo las fórmulas ordinarias (§ 22). Los cálculos se pueden simplificar un poco utilizando la igualdad

$$\gamma^0 \hat{p} \gamma^0 = \hat{p},$$

en la que  $\hat{p} = (\epsilon, -\mathbf{p})$ , si  $p = (\epsilon, \mathbf{p})$ . Además, el número de términos que hay que calcular puede reducirse si se tiene en cuenta la simetría respecto de la sustitución  $p \leftrightarrow p'$ ,  $k \rightarrow -k$ ,  $q \rightarrow -q$  (esta sustitución conduce únicamente a la permutación cíclica de los factores en el producto de matrices y, por consiguiente, no modifica su traza).

En definitiva se obtiene la siguiente expresión para la sección eficaz de radiación de frenado con emisión de un fotón de frecuencia y dirección dadas y salida de un electrón secundario en una dirección dada \*:

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha r_e^2}{4\pi^2} \frac{p' m^4}{pq^4} \frac{d\omega}{\omega} d\Omega_k d\Omega' \times \\ \times \left\{ \frac{q^2}{\chi \chi' m^2} (2\epsilon^2 + 2\epsilon'^2 - q^2) + q^2 \left( \frac{1}{\chi} - \frac{1}{\chi'} \right)^2 - 4 \left( \frac{\epsilon}{\chi'} - \frac{\epsilon'}{\chi} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{2\omega q^2}{m^2} \left( \frac{1}{\chi'} - \frac{1}{\chi} \right) - \frac{2\omega^2}{m^2} \left( \frac{\chi'}{\chi} + \frac{\chi}{\chi'} \right) \right\}, \quad (91.7)$$

donde

$$\chi = \epsilon - \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}, \quad \chi' = \epsilon' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}' \quad (\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega), \quad q = \mathbf{p}' + \mathbf{k} - \mathbf{p}.$$

Mediante simples transformaciones se puede dar a esta fórmula una estructura más cómoda para el estudio del problema

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha r_e^2}{2\pi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{p' m^2}{pq^4} \sin \theta d\theta \sin \theta' d\theta' d\varphi \times \\ \times \left\{ \frac{p'^2}{\chi'^2} (4\epsilon^2 - q^2) \sin^2 \theta' + \frac{p^2}{\chi^2} (4\epsilon'^2 - q^2) \sin^2 \theta + \right. \\ \left. + \frac{2\omega^2}{\chi \chi'} (p^2 \sin^2 \theta + p'^2 \sin^2 \theta') - \frac{2pp'}{\chi \chi'} (2\epsilon^2 + 2\epsilon'^2 - q^2) \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi \right\}, \quad (91.8)$$

donde

$$\chi = \epsilon - p \cos \theta, \quad \chi' = \epsilon' - p' \cos \theta',$$

$$q^2 = p^2 + p'^2 + \omega^2 - 2p\omega \cos \theta + 2p'\omega \cos \theta' - \\ - 2pp' (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi);$$

$\theta$  y  $\theta'$  son los ángulos formados por  $\mathbf{k}$  con  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{p}'$ , respectivamente;  $\varphi$  es el ángulo entre los planos  $(\mathbf{k}, \mathbf{p})$  y  $(\mathbf{k}, \mathbf{p}')$ .

La integración de (91.8) respecto de las direcciones del fotón y del electrón secundario resulta bastante pesada. La fórmula a que conduce para la distribución espectral de la radiación es la siguiente\*\*:

$$d\sigma_\omega = Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{p'}{p} \left\{ \frac{4}{3} - 2\epsilon\epsilon' \frac{p^2 + p'^2}{p^2 p'^2} + m^2 \left( l \frac{\epsilon'}{p^3} + l' \frac{\epsilon}{p'^3} - \frac{ll'}{pp'} \right) + \right. \\ \left. + L \left[ \frac{8\epsilon\epsilon'}{3pp'} + \frac{\omega^2}{p^2 p'^2} (\epsilon^2 \epsilon'^2 + p^2 p'^2 + m^2 \epsilon \epsilon') + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m^2 \omega}{2pp'} \left( l \frac{\epsilon\epsilon' + p^2}{p^3} - l' \frac{\epsilon\epsilon' + p'^2}{p'^3} \right) \right] \right\}, \quad (91.9)$$

donde

\* Aquí y en lo que sigue de este párrafo  $p$ ,  $p'$ ,  $q$  designarán los módulos de los vectores tridimensionales:  $p = |\mathbf{p}|$ ,  $p' = |\mathbf{p}'|$ ,  $q = |\mathbf{q}|$ .

\*\* La integración respecto de las direcciones de tan sólo el electrón secundario se puede también efectuar en forma analítica — véase R. L. GLUCKSTERN, M. H. HULL, Phys. Rev. 90, 1.030 (1953).

Indicaremos también el artículo de puesta al día por H. W. KOCH, J. W. MOTZ, Rev. Mod. Phys. 31, 920 (1959), en el cual se dan representaciones gráficas de las fórmulas de radiación de frenado.

$$L = \ln \frac{\epsilon\epsilon' + pp' - m^2}{\epsilon\epsilon' - pp' - m^2},$$

$$l = \ln \frac{\epsilon + p}{\epsilon - p}, \quad l' = \ln \frac{\epsilon' + p'}{\epsilon' - p'}.$$

Recordaremos que los valores de las frecuencias admisibles en las fórmulas obtenidas están limitados solamente por la condición impuesta a la velocidad final del electrón ( $Ze^2/v' \ll 1$ ): el electrón no debe perder casi toda su energía. Para  $\omega \rightarrow 0$  la sección eficaz de radiación diverge como  $d\omega/\omega$ ; éste es un aspecto de la regla general que se considerará en el § 95.

En el límite no-relativista ( $p \ll m$ ) el impulso del fotón es pequeño comparado con el impulso del electrón, puesto que

$$\omega = \frac{p'^2 - p^2}{2m} \ll p.$$

Por lo tanto,  $q^2 \approx (p' - p)^2$ . Haciendo en (91.8)  $\epsilon = \epsilon' = m$  y prescindiendo de  $p$ ,  $p'$ ,  $\omega$  comparados con  $m$ , obtendremos

$$d\sigma = \frac{2}{\pi} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{p'm^2}{pq^4} \sin \theta d\theta \sin \theta' d\theta' d\varphi \times \\ \times (p^2 \sin^2 \theta + p'^2 \sin^2 \theta' - 2pp' \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi),$$

o bien

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha^3 p'}{\pi^2} [\mathbf{n} \times \mathbf{q}]^2 \frac{d\omega}{q^4} \frac{d\theta}{\omega} \quad (91.10)$$

de acuerdo con la fórmula obtenida en la aproximación de Born en el problema 1 del § 90. Según esto, también para la distribución angular de la radiación se obtiene el resultado (90.16) que ya conocemos \*.

En el caso ultrarrelativista, cuando son grandes tanto la energía inicial del electrón como la final ( $\epsilon, \epsilon' \gg m$ ), la distribución angular de los fotones y de los electrones secundarios tiene un carácter muy específico. Cuando los ángulos  $\theta, \theta'$  son pequeños, las cantidades  $x, x'$  que figuran en los denominadores de la fórmula (91.8) son iguales a

$$x \approx \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{m^2}{\epsilon^2} + \theta^2 \right), \quad x' \approx \frac{\epsilon'}{2} \left( \frac{m^2}{\epsilon'^2} + \theta'^2 \right) \quad (91.11)$$

y en el intervalo en que  $\theta \lesssim m/\epsilon$  llegan a ser muy pequeñas. En este intervalo es también pequeño el módulo del vector  $\mathbf{q}$  ( $q \sim m$ ). Así, pues, en el caso ultrarrelativista el fotón y el electrón secundario se dirigen hacia adelante dentro de un estrecho cono de apertura  $\sim m/\epsilon$ .

\* Sin embargo, obtener esta fórmula por paso al límite en (91.9) es bastante complicado dada la reducción de varios términos entre sí.

Es fácil obtener a partir de (91.8) una fórmula cuantitativa para la distribución angular en el caso ultrarrelativista substituyendo los valores (91.11) de  $\kappa$ ,  $\kappa'$ , haciendo en todos los demás términos  $p = \epsilon$  y  $p' = \epsilon'$  y prescindiendo de  $q^2$  frente a  $\epsilon^2$ . Introduciendo las notaciones convenientes:

$$\delta = \frac{\epsilon}{m} \theta, \quad \delta' = \frac{\epsilon'}{m} \theta', \quad (91.12)$$

presentaremos esta fórmula en la forma

$$d\sigma = \frac{8}{\pi} Z^2 a r_e^2 \frac{\epsilon' m^4}{\epsilon q^4} \frac{d\omega}{\omega} \delta d\delta \cdot \delta' d\delta' d\varphi \times \\ \times \left\{ \frac{\delta^2}{(1+\delta^2)^2} + \frac{\delta'^2}{(1+\delta'^2)^2} + \frac{\omega^2}{2\epsilon\epsilon'} \frac{\delta^2 + \delta'^2}{(1+\delta^2)(1+\delta'^2)} - \right. \\ \left. - \left( \frac{\epsilon'}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\epsilon'} \right) \frac{\delta\delta' \cos\varphi}{(1+\delta^2)(1+\delta'^2)} \right\}. \quad (91.13)$$

Haciendo  $\mathbf{n}^2 = [\mathbf{n} \times \mathbf{q}]^2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{q})^2$  ( $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$ ), es fácil hallar que para ángulos pequeños se tiene

$$\frac{q^2}{m^2} = (\delta^2 + \delta'^2 - 2\delta\delta' \cos\varphi) + m^2 \left( \frac{1+\delta^2}{2\epsilon} - \frac{1+\delta'^2}{2\epsilon'} \right)^2. \quad (91.14)$$

Cuando  $\delta \sim \delta' \sim 1$  el segundo término es aquí pequeño comparado con el primero. Ambos términos son comparables en la región de ángulos todavía menores, donde  $\delta \sim m/\epsilon$ . Aunque entonces  $q$  pasa a ser notablemente pequeño ( $q \sim m^2/\epsilon \ll m$ ), la contribución integral de esta región a la sección eficaz, con todo, es pequeña comparada con la contribución de toda la región en la que  $\delta \gtrsim 1$  (como es fácil ver, la razón de dichas contribuciones vale  $m^2/\epsilon^2$ ). Pero  $q$  puede alcanzar valores  $q \sim m^2/\epsilon$  también cuando  $\delta \sim \delta' \sim 1$  si, además,

$$|\delta - \delta'| \lesssim \frac{m}{\epsilon}, \quad \varphi \lesssim \frac{m}{\epsilon}. \quad (91.15)$$

La contribución de este dominio es del mismo orden de magnitud que toda la sección eficaz integrada (o incluso es la fundamental en ella, véase más adelante).

La integración de la fórmula (91.13) respecto de  $d\varphi$  y de  $d\delta'$  da la distribución angular de los fotones (de frecuencia dada) con independencia de las direcciones de los electrones secundarios \*:

$$d\sigma = 8Z^2 a r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{\epsilon'}{\epsilon} \frac{\delta \cdot d\delta}{(1+\delta^2)^2} \times \\ \times \left\{ \left[ \frac{\epsilon}{\epsilon'} + \frac{\epsilon'}{\epsilon} - \frac{4\delta^2}{(1+\delta^2)^2} \right] \ln \frac{2\epsilon\epsilon'}{m\omega} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\epsilon}{\epsilon'} + \frac{\epsilon'}{\epsilon} + 2 - \frac{16\delta^2}{(1+\delta^2)^2} \right] \right\}. \quad (91.16)$$

\* Primero se efectúa la integración respecto de  $d\varphi$  (entre los límites 0 y  $2\pi$ ). La integración respecto de  $d\delta'$  conviene substituirla por la integración respecto de la diferencia  $|\Delta| = |\delta' - \delta|$  descomponiendo su dominio en dos partes: de 0 a un cierto valor  $\Delta_0$  y de  $\Delta_0$  a  $\infty$ , donde  $\Delta_0$  satisface las desigualdades  $m/\epsilon \ll \Delta_0 \ll 1$ . En cada dominio es posible prescindir en el integrando de ciertos términos correspondientes a los mismos.

Una vez se ha efectuado la integración respecto de  $d\delta$ , se encuentra la distribuciónpectral de la radiación en el caso ultrarrelativista:

$$d\sigma_\omega = 4Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{\epsilon'}{\epsilon} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon'} + \frac{\epsilon'}{\epsilon} - \frac{2}{3} \right) \left( \ln \frac{2\epsilon\epsilon'}{m\omega} - \frac{1}{2} \right) \quad (91.17)$$

[esta fórmula se puede obtener, naturalmente, también a partir de (91.9) y de manera inmediata].

Préstese atención a la existencia en (91.16) y (91.17) del logaritmo de una cantidad grande (incluso cuando  $\omega \sim \epsilon$ , la razón  $\frac{\epsilon\epsilon'}{m\omega} \sim \frac{\epsilon'}{m} \gg 1$ ). Si ésta es hasta tal punto grande que incluso lo es su logaritmo, pasan a ser fundamentales en las fórmulas indicadas los términos que contienen logaritmos. Obsérvese que este logaritmo procede de la integración en el dominio (91.15)\*. De esta manera, en la aproximación logarítmica (es decir, prescindiendo de los términos que no contienen el logaritmo cuyo valor es grande) el electrón secundario se mueve en la dirección de incidencia dentro de un ángulo  $\sim (m/\epsilon)^2$ .

Finalmente, he aquí la fórmula límite para el dominio cerca de la frontera bien definida del espectro en la que el electrón ultrarrelativista emite casi toda su energía:  $\omega \approx \epsilon \gg \epsilon'$ . De (91.9) se sigue fácilmente

$$d\sigma_\omega = 2Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\epsilon} \left\{ \frac{\epsilon'^2}{p'^2} \ln \frac{\epsilon' + p'}{\epsilon' - p'} - \frac{m^2 \epsilon'}{4p'^3} \ln^2 \frac{\epsilon' + p'}{\epsilon' - p'} - \frac{\epsilon'}{p'} \right\}. \quad (91.18)$$

Obsérvese que las fórmulas (91.17-18) cubren todo el intervalo de valores  $\omega$  para el electrón inicial ultrarrelativista; cuando  $\omega \approx \epsilon \gg \epsilon' \gg m$  ambas fórmulas coinciden. Si el electrón secundario es no-relativista ( $p' \ll m$ ), se tiene

$$d\sigma_\omega = 2Z^2 \alpha r_e^2 \frac{\sqrt{2m(\epsilon - \omega)}}{m} \frac{d\omega}{\epsilon}. \quad (91.19)$$

### Efectos de polarización

Los efectos de polarización en la radiación de frenado se pueden investigar siguiendo el mismo método general que se describió en el § 66. La cuestión de la elección de los 4-vectores  $e^{(1)}$ ,  $e^{(2)}$  es particularmente sencilla en este caso. Dado que el proceso conviene considerarlo de hecho tan sólo en un determinado sistema de coordenadas (el sistema de reposo del núcleo), basta tomar  $e^{(1)} = (0, \mathbf{e}^{(1)})$ ,

\* Es fácil comprobarlo considerando el dominio de integración en el cual  $\varphi$  y  $\Delta = \delta' - \delta$  satisfacen las condiciones:  $m/\epsilon \ll \Delta$ ,  $\varphi \ll 1$ . En este dominio  $q^2/m^2 \approx \Delta^2 + \varphi^2 \delta^2$  y la expresión entre llaves de (91.13) contiene términos que son proporcionales a  $\varphi^2$  o a  $\Delta^2$  (cuando  $\varphi = 0$  y  $\Delta = 0$ , dicha expresión se anula). Pero las integrales de la forma

$$\int \frac{\varphi^2 d\varphi d\Delta}{(\Delta^2 + \varphi^2 \delta^2)^2} \quad \text{o} \quad \int \frac{\Delta^2 d\varphi d\Delta}{(\Delta^2 + \varphi^2 \delta^2)^2}$$

divergen logarítmicamente; su «corte» tiene lugar en las fronteras del dominio indicado de valores de las variables.

$e^{(2)} = (0, e^{(2)})$ ), donde  $e^{(1)}, e^{(2)}$  son vectores unitarios perpendiculares a  $\mathbf{k}$ , uno de los cuales se encuentra en el plano  $(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ , y el otro es perpendicular a él.

No presentaremos aquí ni los propios cálculos, que son bastante pesados, ni sus resultados cuantitativos \*. Haremos notar solamente algunas propiedades cualitativas de los efectos de polarización. Estas propiedades se pueden obtener mediante diferentes relaciones de simetría, de manera análoga a como se procedió en el § 87 para el efecto Compton.

La teoría expuesta corresponde a la primera aproximación no nula de la teoría de perturbaciones. En esta aproximación, la sección eficaz no puede contener un término que sea proporcional a tan sólo un vector polarización de electrón, sea el inicial ( $\zeta$ ) o el final ( $\zeta'$ ). Que no exista un término  $\propto \zeta$  significa que la sección eficaz total de radiación (sumada respecto de las polarizaciones del fotón y del electrón secundario) no depende de la polarización del electrón incidente.

De los términos proporcionales a un solo parámetro de polarización de fotón ( $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3$ ) falta el término  $\propto \xi'_2$ . Esto significa que en la radiación por un electrón no polarizado, el fotón carece de polarización circular. Sin embargo, existe aquí una diferencia respecto del resultado análogo para el efecto Compton. En el último caso, tales términos estaban prohibidos por la paridad espacial debido a la imposibilidad de construir un pseudoescalar a partir de los únicos dos vectores independientes  $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$  a nuestra disposición. En cambio, en el caso de la radiación de frenado, se tienen tres impulsos independientes  $(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{k})$ , lo que basta para construir el pseudoescalar  $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{p}')$ . Un término de la forma  $\xi'_2 \mathbf{k} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{p}')$  no contradice la paridad espacial y, por ello, rigurosamente hablando, es diferente de cero. Sin embargo, no es invariante respecto del cambio de los signos de todos los impulsos [cf. (87.26)] y, en consecuencia, no aparece en la primera aproximación de Born.

La existencia del pseudoescalar  $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{p}')$  conduce también a que, junto con un término  $\propto \xi'_3$ , esté permitido en la sección eficaz también un término  $\propto \xi'_1$  (en contraste con la situación que se da en el efecto Compton). Dicho término resulta como producto de la forma

$$S_{\alpha\beta} v_\alpha [\mathbf{k} \times \mathbf{v}]_\beta (\mathbf{k} \cdot [\mathbf{p} \times \mathbf{p}'])$$

(donde  $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \mathbf{p}$ ), invariante tanto respecto de la inversión espacial, como con relación al cambio de signo de todos los impulsos. De esta manera, el fotón emitido posee una polarización lineal de ambos tipos (lo mismo en las direcciones de los ejes  $e^{(1)}$  y  $e^{(2)}$ , como en las direcciones «diagonales» que forman un ángulo de  $45^\circ$  con estos ejes). Esto se refiere, sin embargo, tan sólo a aquellas condiciones en

\* Véanse para esto los artículos originales: R. L. GLUCKSTER, H. H. HULL, G. BREIT, Phys. Rev. **90**, 1.026 (1953); G. L. VYSOTSKII, A. A. KRESNIN, L. N. ROZENTSVEIG, Zh.ETF **32**, 1.078 (1957); K. MCVOY, Phys. Rev. **106**, 828, 1957; **111**, 1.333 (1958); H. BANERJEE, Phys. Rev. **111**, 532 (1958); C. FRONSDAL, H. ÜBERALL, Phys. Rev. **111**, 580 (1955). (En estos mismos artículos se dan referencias más detalladas acerca del tema.) Véase también el artículo de puesta al día por H. McMMASTER, Rev. Mod. Phys. **33**, 8 (1961).

que se registre también la dirección en que se emite el electrón secundario, ya que al integrar respecto de todas las direcciones  $\mathbf{p}'$ , el término  $\sim \xi'_1$  se anula. Este resultado era de prever, evidentemente, por consideraciones de simetría: después de integrar, las dos direcciones «diagonales», que no coinciden entre sí, se transforman en equivalentes y, por ello, es imposible la polarización preferente a lo largo de una de ellas (hecho que ocurre cuando  $\xi'_1 \neq 0$ ).

El grado de polarización lineal no depende del estado de polarización del electrón incidente: los términos de correlación en la sección eficaz de la forma  $\xi'_1 \zeta$  y  $\xi'_3 \zeta$  están prohibidos en la primera aproximación de Born. En cambio, está permitido el término  $\xi'_2 \zeta$ , de modo que, en la radiación por un electrón polarizado, el fotón posee una polarización circular (*Ia. B. Zel'dovich, 1952*).

### *Apantallamiento*

Las fórmulas obtenidas más arriba se han deducido para un campo puramente coulombiano. Pero si de lo que se trata es no de la radiación en el choque con un núcleo «desnudo», sino con un átomo, deberá tenerse en cuenta el apantallamiento del campo del núcleo por los electrones, apantallamiento que conduce a una disminución de la sección eficaz. Para ello es necesario introducir en el potencial del campo exterior  $A^{(e)}(q)$  el factor atómico de forma  $F(q)$  (véase III, § 137). Según III (137.2) esto se consigue substituyendo  $Z$  por  $Z - F(q)$ . Veamos en qué condiciones el apantallamiento es esencial.

A un determinado valor  $q$  en el factor de forma corresponden distancias  $r \sim 1/q$  en la distribución espacial de las cargas electrónicas del átomo. El factor de forma se acerca al valor  $Z$  (apantallamiento total) cuando  $q \lesssim 1/a$ , donde  $a$  caracteriza las dimensiones del átomo.

Por otra parte, en el caso ultrarrelativista la contribución principal a la sección eficaz de radiación procede, como vimos antes, del dominio de valores de  $q$  próximo al valor mínimo que puede poseer  $q$  para energías dadas inicial y final del electrón. En el caso ultrarrelativista,

$$q_{\min} = p - p' - \omega = \sqrt{\epsilon^2 - m^2} - \sqrt{\epsilon'^2 - m^2} - (\epsilon - \epsilon') \approx \frac{m^2 \omega}{2\epsilon \epsilon'}.$$

El apantallamiento es importante si  $q_{\min} \lesssim 1/a$ , o bien

$$\frac{\epsilon \epsilon'}{m \omega} \gtrsim \frac{a}{1/m}. \quad (91.20)$$

Esta condición se cumple en cualquier caso para energías suficientemente grandes del electrón incidente.

Si  $q_{\min} \ll 1/a$  («apantallamiento total»), en la aproximación logarítmica se puede escribir sin más el resultado para la distribución espectral de la radiación. En efecto, en (91.17) aparece bajo el signo de logaritmo precisamente el primer término de la desigualdad  $\epsilon \epsilon'/m \omega \gg ma$ . Si la desigualdad se cumple, la integral respecto de  $dq$  que conduce a este logaritmo se corta para valores que son del orden

de magnitud del segundo miembro de la desigualdad. Según el modelo de Thomas-Fermi se tiene  $a \sim a_0 Z^{-1/3}$ , donde  $a_0 \sim 1/me^2$  es el radio de Bohr (véase III, § 70); entonces  $am \sim 1/\alpha Z^{1/3}$ . De esta manera, en el caso de apantallamiento total hay que substituir el logaritmo en (91.17) por  $\ln(1/\alpha Z^{1/3})$ \*.

### Pérdida de energía

La pérdida de energía por un electrón debida a radiación se caracteriza por un «frenado eficaz»:

$$\chi_{\text{rad}} = \int_0^{\varepsilon - m} \omega d\sigma_\omega. \quad (91.21)$$

El cálculo de la integral con  $d\sigma_\omega$  dada por (91.17) conduce al siguiente resultado\*\*:

$$\begin{aligned} \chi_{\text{rad}} = Z^3 \alpha r_e^2 \varepsilon & \left\{ \frac{12\varepsilon^2 + 4m^2}{3\varepsilon p} \ln \frac{\varepsilon + p}{m} - \right. \\ & \left. - \frac{(8\varepsilon + 6p)m^2}{3\varepsilon p^2} \ln^2 \frac{\varepsilon + p}{m} - \frac{4}{3} + \frac{2m^2}{\varepsilon p} F\left(\frac{2p(\varepsilon + p)}{m^2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (91.22)$$

donde la función  $F(x)$  se define por

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+y)}{y} dy.$$

Para valores  $x$  pequeños

$$F(x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \dots$$

Para valores  $x$  grandes cabe utilizar la fórmula exacta

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln^2 x - F\left(\frac{1}{x}\right).$$

El caso no-relativista (91.22) se transforma en

$$\chi_{\text{rad}} = \frac{16}{3} Z^3 \alpha r_e^2 m. \quad (91.23)$$

Naturalmente, esta fórmula se puede obtener por integración inmediata de la fórmula no-relativista de Born (90.16).

En el caso ultrarrelativista

$$\chi_{\text{rad}} = 4Z^3 \alpha r_e^2 \varepsilon \left( \ln \frac{2\varepsilon}{m} - \frac{1}{3} \right). \quad (91.24)$$

\* Para un estudio más detallado de esta cuestión véase H. A. BETHE, W. HEITLER, Proc. Roy. Soc. A **146**, 83 (1934); H. A. BETHE, Proc. Cam. Phil. Soc. **30**, 524 (1934).

\*\* Aunque la fórmula (91.17) no es aplicable cerca del límite superior, sin embargo, teniendo en cuenta la convergencia de la integral, este hecho carece de importancia.

La razón  $\kappa_{\text{rad}}/\epsilon$  se llama también sección eficaz de pérdida de energía por radiación. Para grandes valores de  $\epsilon$  crece logarítmicamente. Sin embargo, este aumento desaparece cuando se tiene en cuenta el apantallamiento. En el caso de apantallamiento completo,  $\kappa_{\text{rad}}/\epsilon$  tiende a un límite constante  $\approx 4Z^2\alpha r_e^2 \ln(1/\alpha Z^{1/3})$ .

En la colisión con un átomo es necesario tener presente también que parte de la radiación procede, no sólo de la colisión con el núcleo, sino también con los electrones. Veremos más adelante (§ 94) que en el caso ultrarrelativista la sección eficaz de radiación del electrón en el choque con electrones difiere de la correspondiente sección eficaz en el caso del núcleo tan sólo en que no existe factor  $Z^2$ . Por ello, la existencia de  $Z$  electrones atómicos se puede tener en cuenta de manera aproximada substituyendo  $Z^2$  por  $Z(Z + 1)$ .

### § 92. Formación de un par por un fotón en el campo de un núcleo

La formación de un par electrón-positón en el choque de un fotón con un núcleo ( $Z + \gamma \rightarrow Z + e^- + e^+$ ) es otro canal de cruce de la misma reacción a que pertenece la radiación de frenado producida cuando un electrón choca con un núcleo ( $Z + e^- \rightarrow Z + e^- + \gamma$ ). Por consiguiente, la amplitud  $M_{fi}$  de este proceso se obtiene a partir de la amplitud de la radiación de frenado simplemente mediante las sustituciones

$$\begin{aligned} \epsilon, \mathbf{p} &\rightarrow -\epsilon_+, -\mathbf{p}_+, & \epsilon', \mathbf{p}' &\rightarrow \epsilon_-, \mathbf{p}_-, \\ \omega, \mathbf{k} &\rightarrow -\omega, -\mathbf{k} \end{aligned} \quad (92.1)$$

(los índices — y + se refieren al electrón y al positón). En términos de módulos y ángulos, la transformación de los impulsos es

$$p \rightarrow p_+, \quad p' \rightarrow p_-, \quad \theta \rightarrow \pi - \theta_+, \quad \theta' \rightarrow \theta_-, \quad \varphi \rightarrow \varphi - \pi,$$

donde  $\theta_\pm$  son los ángulos formados por  $\mathbf{p}_\pm$  y  $\mathbf{k}$ ;  $\varphi$  es el ángulo entre los planos  $(\mathbf{k}, \mathbf{p}_+)$  y  $(\mathbf{k}, \mathbf{p}_-)$ .

La sección eficaz se expresa ahora en función de  $M_{fi}$  de acuerdo con

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{1}{8\omega\epsilon_-\epsilon_+} \delta(\omega - \epsilon_+ - \epsilon_-) \frac{d^3p_+ d^3p_-}{(2\pi)^6}$$

[en vez de (91.1)], o después de eliminar la función- $\delta$

$$d\sigma = \frac{p_+ p_-}{(2\pi)^6 \omega} |M_{fi}|^2 d\omega_+ d\omega_- d\epsilon_+.$$

(En este párrafo  $p_\pm = |\mathbf{p}_\pm|$ ,  $q = |\mathbf{q}|$ ). Comparando con (91.2), vemos que para obtener la sección eficaz de formación de un par a partir de la sección eficaz de la radiación de frenado hay que efectuar en ésta la sustitución (92.1), multiplicándola por

$$\frac{p_+^2}{\omega^2} \frac{d\epsilon_+}{d\omega}, \quad (92.2)$$

y substituir  $d\omega' d\omega_k$  por  $d\omega_+ d\omega_-$ .

De esta manera obtenemos a partir de (91.8) la expresión siguiente para la sección eficaz diferencial de formación de un par por un fotón no polarizado promediada respecto de las polarizaciones de las componentes del par \*:

$$\begin{aligned} d\sigma = & - \frac{Z^2 \alpha r_e^2}{2\pi} \frac{m^2 p_+ p_- d\epsilon_+}{\omega^3 q^4} \sin\theta_+ d\theta_+ \cdot \sin\theta_- d\theta_- d\varphi \times \\ & \times \left\{ \frac{p_+^2}{x_+^2} (4\epsilon_-^2 - q^2) \sin^2\theta_+ + \frac{p_-^2}{x_-^2} (4\epsilon_+^2 - q^2) \sin^2\theta_- - \right. \\ & - \frac{2\omega^2}{x_+ x_-} (p_+^2 \sin^2\theta_+ + p_-^2 \sin^2\theta_-) - \frac{2p_+ p_-}{x_+ x_-} (2\epsilon_+^2 + 2\epsilon_-^2 - q^2) \sin\theta_+ \sin\theta_- \cos\varphi \Big\}, \\ x_{\pm} = & \epsilon_{\pm} - p_{\pm} \cos\theta_{\pm}, \quad q^2 = (p_+ + p_- - k)^2, \quad \epsilon_+ + \epsilon_- = \omega \end{aligned} \quad (92.3)$$

(H. A. Bethe, W. Heitler, 1934).

Mediante la misma transformación se obtiene de (91.9) la distribución energética de los componentes del par:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\epsilon_+} = & Z^2 \alpha r_e^2 \frac{p_+ p_-}{\omega^3} d\epsilon_+ \left\{ -\frac{4}{3} - 2\epsilon_+ \epsilon_- \frac{p_+^2 + p_-^2}{p_+^2 p_-^2} + m^2 \left( l_- \frac{\epsilon_+}{p_-^3} + l_+ \frac{\epsilon_-}{p_+^3} - \right. \right. \\ & \left. \left. - l_+ l_- \frac{1}{p_+ p_-} \right) + L \left[ -\frac{8\epsilon_+ \epsilon_-}{3p_+ p_-} + \frac{\omega^2}{p_+^2 p_-^3} (\epsilon_+^2 \epsilon_-^2 + p_+^2 p_-^2 - m^2 \epsilon_+ \epsilon_-) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{m^2 \omega}{2p_+ p_-} \left( l_+ \frac{\epsilon_+ \epsilon_- - p_-^2}{p_-^3} + l_- \frac{\epsilon_+ \epsilon_- - p_+^2}{p_+^3} \right) \right] \right\}, \\ L = & \ln \frac{\epsilon_+ \epsilon_- + p_+ p_- + m^2}{\epsilon_+ \epsilon_- - p_+ p_- + m^2}, \quad l_{\pm} = \ln \frac{\epsilon_{\pm} + p_{\pm}}{\epsilon_{\pm} - p_{\pm}}. \end{aligned} \quad (92.4)$$

Dado que las fórmulas obtenidas se basan en la aproximación de Born, son válidas con tal que se cumplan las condiciones  $Ze^2/v_{\pm} \ll 1$ . Haremos observar que la simetría de las fórmulas (92.3-4) respecto del electrón y del positón son precisamente consecuencia de la aproximación de Born; dicha simetría desaparecería en aproximaciones de orden superior.

En el caso ultrarrelativista ( $\epsilon_{\pm} \gg m$ ) el electrón y el positón son emitidos formando ángulos  $\theta_{\pm} \sim m/\epsilon_{\pm}$  respecto de la dirección del fotón incidente. La distribución angular viene dada por una fórmula análoga a la (91.13):

$$\begin{aligned} d\sigma = & \frac{8}{\pi} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{m^4 \epsilon_+ \epsilon_-}{\omega^3 q^4} d\epsilon_+ \left\{ -\frac{\delta_+^2}{(1 + \delta_+^2)^2} - \frac{\delta_-^2}{(1 + \delta_-^2)^2} + \frac{\omega^2}{2\epsilon_+ \epsilon_-} \frac{\delta_+^2 + \delta_-^2}{(1 + \delta_+^2)(1 + \delta_-^2)} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\epsilon_+}{\epsilon_-} + \frac{\epsilon_-}{\epsilon_+} \right) \frac{\delta_+ \delta_- \cos\varphi}{(1 + \delta_+^2)(1 + \delta_-^2)} \right\} \delta_+ \delta_- \cdot d\delta_+ d\delta_- \cdot d\varphi, \end{aligned} \quad (92.5)$$

en la que

$$\frac{q^2}{m^2} = \delta_+^2 + \delta_-^2 + 2\delta_+ \delta_- \cos\varphi + m^2 \left( \frac{1 + \delta_+^2}{2\epsilon_+} + \frac{1 + \delta_-^2}{2\epsilon_-} \right)^2. \quad (92.6)$$

\* Para los efectos de polarización en la formación de un par por un fotón véase la misma literatura a que se hizo referencia en el § 91 al tratar de la radiación de frenado.

La distribución en energías para este mismo caso es:

$$d\sigma = 4Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\varepsilon_+}{\omega^3} \left( \varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3} \varepsilon_+ \varepsilon_- \right) \left( \ln \frac{2\varepsilon_+ \varepsilon_-}{m\omega} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{u. r.}) \quad (92.7)$$

La integración de esta expresión respecto de  $d\varepsilon_+$  (entre los límites  $m$  y  $\omega$ ) conduce a la sección eficaz total de formación de pares por un fotón de energía dada \*:

$$\sigma = \frac{28}{9} Z^2 \alpha r_e^2 \left( \ln \frac{2\omega}{m} - \frac{109}{42} \right), \quad \omega \gg m. \quad (92.8)$$

Al igual que en la radiación de frenado, para el caso ultrarrelativista el término logarítmico en la sección eficaz procede del intervalo de valores  $q \sim m^2/\epsilon$ . A éste corresponden ahora ángulos para los cuales

$$|\delta_+ - \delta_-| \lesssim \frac{m}{\epsilon}, \quad |\pi - \varphi| \lesssim \frac{m}{\epsilon}$$

[en vez de  $\varphi \lesssim m/\epsilon$  en (91.15)]. De esta manera, en la aproximación logarítmica las direcciones del electrón y del positón forman con la dirección del fotón ángulos inversamente proporcionales a las energías de las partículas y se encuentran prácticamente en un mismo plano con aquélla, pero a lados distintos de la misma.

Cerca del umbral de reacción ( $\omega \rightarrow 2m$ ), la aproximación de Born es inaplicable. Deducir en este caso fórmulas cuantitativas exigiría un cálculo exacto de la interacción coulombiana de las tres partículas cargadas que se encuentran en el estado final (el núcleo y el par). La simetría respecto del electrón (atraído hacia el núcleo) y del positón (repelido por el núcleo) desaparece entonces, naturalmente.

Si

$$Z\alpha \ll \sqrt{\frac{\omega - 2m}{\omega}} \ll 1, \quad (92.9)$$

la aproximación de Born es todavía aplicable. Para energías no-relativistas del par se tiene  $\omega \approx 2m \gg p_{\pm}$ , por lo cual  $q \approx \omega$ . En (92.3) se puede hacer  $\varepsilon_{\pm} = x_{\pm} = m$ ,  $\omega = 2m$ , con lo cual esta fórmula se reduce a la expresión

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha r_e^2}{64\pi^2} \frac{p_+ p_-}{m^5} (p_+^2 \sin^2 \theta_+ + p_-^2 \sin^2 \theta_-) d\theta_+ d\theta_- d\varepsilon_+. \quad (92.10)$$

Después de integrar respecto de los ángulos, queda

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{6} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{p_+ p_- (p_+^2 + p_-^2)}{m^5} d\varepsilon_+ = \\ &= \frac{2Z^2 \alpha r_e^2}{3m^3} (\omega - 2m) \sqrt{(\varepsilon_+ - m)(\varepsilon_- - m)} d\varepsilon_+. \end{aligned} \quad (92.11)$$

Finalmente, integrando respecto de  $d\varepsilon_+$  (entre los límites 0 y  $\omega - m$ ), obtendremos la sección eficaz total

\* Teniendo en cuenta la convergencia de la integral en ambos límites, la no aplicabilidad de la fórmula (92.7) para valores  $\varepsilon_{\pm} - m$  pequeños carece de importancia.

$$\sigma = \frac{\pi}{12} Z^2 \alpha r_e^2 \left( \frac{\omega - 2m}{m} \right)^3. \quad (92.12)$$

Si la velocidad relativa ( $v_0$ ) de las componentes del par que se crea resulta pequeña, es necesario tener en cuenta la interacción de Coulomb entre ellas (A. D. Sajarov, 1948). Esta interacción llega a ser importante cuando  $v_0$  es del orden de magnitud (o menor) que las velocidades de la partícula en el estado ligado del electrón y el positón (positonio):

$$v_0 \lesssim \alpha. \quad (92.13)$$

Consideremos el proceso en el sistema del centro de masa del par. En los diagramas que representan el proceso en este sistema son esenciales los impulsos virtuales  $\sim m$ . En otras palabras, las distancias entre el electrón y el positón  $\sim 1/m$  cobran importancia. Por otra parte, la función de onda de su movimiento relativo  $\psi(r)$  cambia de manera notable tan sólo para distancias  $r \sim 1/m v_0 \sim 1/m\alpha$ , es decir, para distancias que son grandes comparadas con  $1/m$ . Por ello, el tener en cuenta la interacción de las partículas se reduce, simplemente, a que aparezca en el elemento de matriz de la transición el factor  $\psi^*(0)$ . De acuerdo con esto, la sección eficaz diferencial queda multiplicada por  $|\psi(0)|^2$ , es decir, por

$$\frac{2\pi\alpha/v_0}{1 - e^{-2\pi\alpha/v_0}} \quad (92.14)$$

[véase III (134.11)]. La velocidad relativa de dos partículas es la velocidad de una de ellas en el sistema de reposo de la otra. Comparando los valores del invariante  $p_{+\mu}p_{-}^{\mu}$  en este sistema y en el sistema del laboratorio (sistema de reposo del núcleo), se obtiene

$$\frac{m^2}{\sqrt{1 - v_0^2}} = \epsilon_+ \epsilon_- - \mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-,$$

de donde puede deducirse  $v_0$ . Si  $\mathbf{p}_+$  y  $\mathbf{p}_-$  son próximos entre sí tanto en módulo como en dirección, para  $v_0$  resulta la fórmula aproximada

$$v_0^2 = p^2 \vartheta^2 + \frac{(\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_-)^2}{\epsilon^2} \quad (92.15)$$

(aplicable cuando  $v_0 \ll 1$ ); en ella  $p = (p_+ + p_-)/2$ ,  $\epsilon = (\epsilon_+ + \epsilon_-)/2$  y  $\vartheta$  es el ángulo formado por  $\mathbf{p}_+$  y  $\mathbf{p}_-$ .

Cuando se corrige el valor de la sección eficaz dado por las fórmulas (92.14-15), se manifiesta una anomalía en la correlación entre los impulsos del electrón y del positón que se forman: aparece un máximo acusado para  $\mathbf{p}_+ \approx \mathbf{p}_-$ .

### § 93. Teoría exacta de la creación de pares y de la radiación de frenado en el caso ultrarrelativista

En los dos párrafos que preceden, la radiación de frenado y la creación de pares

por un fotón en la región relativista se estudiaron tomando como base la aproximación de Born, para lo cual se exigía en cualquier caso que se cumpliera la condición  $Z\alpha \ll 1$ . En este párrafo se expone una teoría de estos procesos libre de dicha limitación, es decir, una teoría que vale también para  $Z\alpha \sim 1$  (*H. A. Bethe, L. Maximon, 1954*). Se supondrá en ella que ambas partículas (el electrón inicial y el final o los componentes del par) son ultrarrelativistas; su energía es  $\epsilon \gg m$ .

Vimos que, en el caso ultrarrelativista, las dos partículas se mueven formando ángulos pequeños ( $\theta, \theta'$  ó  $\theta_+, \theta_-$ ) con la dirección del fotón:  $\theta \lesssim m/\epsilon$ . Esta propiedad se conserva también en la teoría exacta (respecto de  $Z\alpha$ ) y, por lo tanto, examinaremos precisamente qué ocurre en esta región angular.

La transferencia de impulso al núcleo en dicha región es  $q \sim m$ . Esto significa que en las funciones de onda son esenciales los parámetros de impacto  $\rho \sim 1/q \sim 1/m$ , es decir, las distancias «grandes». A tales distancias cabe utilizar la función de onda obtenida en el § 39.

### Creación de pares

La sección eficaz de creación de un par tiene una forma que es análoga a la sección eficaz del efecto fotoeléctrico (cf. 56.1-2):

$$d\sigma = 2\pi \left| e \sqrt{4\pi} \frac{1}{V^{2\omega}} M_{fi} \right|^2 \delta(\omega - \epsilon_+ - \epsilon_-) \frac{d^3 p_+ d^3 p_-}{(2\pi)^6}, \quad (93.1)$$

donde

$$M_{fi} = \int \psi_{-\mathbf{p}_-}^{(-)*} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \psi_{-\epsilon_+ - \mathbf{p}_+}^{(+)} d^3 x. \quad (93.2)$$

Aquí  $\psi_{-\mathbf{p}_-}^{(-)}$  es la función de onda del electrón, y  $\psi_{-\epsilon_+ - \mathbf{p}_+}^{(+)}$  la función de onda con energía negativa ( $-\epsilon_+$ ) e impulso  $-\mathbf{p}_+$ .

La función  $\psi_{-\mathbf{p}_-}^{(-)}$ , que se refiere a una partícula en el estado final, debe contener en su expresión asintótica (junto con una onda plana) una onda esférica convergente; esta circunstancia se ha caracterizado por el superíndice  $(-)$  en la función. De acuerdo con (39.10), dicha función de onda es \*

$$\begin{aligned} \psi_{-\mathbf{p}_-}^{(-)} &= \frac{C^{(-)}}{\sqrt{2\epsilon_-}} e^{ip_- \cdot r} \left( 1 - \frac{i\mathbf{a} \cdot \nabla}{2\epsilon_-} \right) F(-iv, 1, -i(p_- \cdot r + \mathbf{p}_- \cdot \mathbf{r})) u(p_-), \\ C^{(-)} &= e^{\pi v/2} \Gamma(1 + iv), \quad v = Z\alpha. \end{aligned} \quad (93.3)$$

En cambio, la forma asintótica de la función  $\psi_{-\epsilon_+ - \mathbf{p}_+}^{(+)}$  ha de contener una onda esférica divergente [superíndice  $(+)$ ], dado que por su propio sentido es la función de onda de un «estado inicial con energía negativa». En cuanto a la función de onda del positón (función que se forma a partir de  $\psi_{-\epsilon_+ - \mathbf{p}_+}^{(+)*}$ ) su expresión asintótica presenta en estas condiciones una onda convergente, como debe ser para una partícula final. Según (39.11) esta función es

\* En este párrafo  $p_\pm = |\mathbf{p}_\pm|$ ,  $q = |\mathbf{q}|$ .

$$\psi_{-\varepsilon_+ - \mathbf{p}_+}^{(+)} = \frac{C^{(+)}}{\sqrt{2\varepsilon_+}} e^{-i\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{r}} \left( 1 + \frac{i\mathbf{a} \cdot \nabla}{2\varepsilon_+} \right) F(-lv, 1, l(p_+ \cdot r + \mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{r})) u(-\mathbf{p}_+), \quad (93.4)$$

$$C^{(+)} = e^{-\pi v/2} \Gamma(1 + lv).$$

Obsérvese que la necesidad de tener en cuenta los términos  $\sim 1/\varepsilon$  en (93.3-4) se debe a la estructura matricial de  $M_{fi}$  dada por (93.2). El elemento de matriz  $(\mathbf{a})_{fi}$  es un vector cuya dirección es próxima a la de  $\mathbf{k}$ . En consecuencia, el término fundamental en  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})_{fi}$  resulta ser pequeño y los términos correctivos son del mismo orden que él mismo.

Substituyendo (93.3-4) en (93.2) y prescindiendo de los términos  $\sim 1/\varepsilon_+ \varepsilon_-$ , se encuentra

$$M_{fi} = \frac{N}{2\sqrt{\varepsilon_+ \varepsilon_-}} u^*(p_-) \{(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) I + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{I}_+) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{I}_-)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})\} u(-\mathbf{p}_+), \quad (93.5)$$

donde

$$N = C^{(+)} C^{(-)} = \frac{\pi v}{\sinh \pi v}, \quad (93.6)$$

$$I = \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} F_-^* F_+ d^3x,$$

$$I_+ = \frac{i}{2\varepsilon_+} \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} F_-^* \nabla F_+ d^3x, \quad I_- = \frac{i}{2\varepsilon_-} \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} (\nabla F_-)^* F_+ d^3x, \quad (93.7)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_- - \mathbf{k}$$

[ $F_-$  y  $F_+$  designan, para abreviar, las funciones hipergeométricas introducidas en (93.3) y (93.4)]. Se observa inmediatamente que las integrales  $I$ ,  $I_+$ ,  $I_-$  están ligadas por una identidad: de

$$\int \nabla (e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} F_-^* F_+) d^3x = 0.$$

se sigue

$$qI + 2\varepsilon_+ I_+ + 2\varepsilon_- I_- = 0 \quad (93.8)$$

El cuadrado  $|M_{fi}|^2$  lo promediaremos respecto de las polarizaciones del fotón incidente y lo sumaremos con relación a los spins del electrón y el positón \*. Esto se consigue substituyendo el tensor

$$e_i e_k^* \rightarrow \frac{1}{2} (\delta_{ik} - n_i n_k), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{\omega},$$

y los productos bispinoriales

$$u_{\pm} \cdot \bar{u}_{\pm} \rightarrow 2\rho_{\pm} = (\varepsilon_{\pm} \gamma^0 - \mathbf{p}_{\pm} \cdot \mathbf{v} \mp m).$$

Substituyendo también  $\mathbf{a} = \gamma^0 \mathbf{v}$ , se encuentra

---

\* Para el cálculo teniendo en cuenta las polarizaciones de las partículas véase H. OLSEN, L. MAXIMON, Phys. Rev., 114, 887 (1959).

$$|M_{fi}|^2 \rightarrow \frac{N^2}{2\varepsilon_+ \varepsilon_-} \left\{ \text{Tr } \rho_- Q \rho_+ Q - \text{Tr } \rho_- (\mathbf{n} \cdot Q) \rho_+ (\mathbf{n} \cdot \bar{Q}) \right\},$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q}I - \gamma^0 \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{I}_+) - \gamma^0 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{I}_-) \mathbf{v},$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{q}I^* - \gamma^0 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{I}_+^*) \mathbf{v} - \gamma^0 \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{I}_-^*).$$

Escribamos sin más el resultado que se obtiene después de prescindir de los términos que no nos interesan para el caso relativista en la región de ángulos pequeños

$$\theta_{\pm} \sim \frac{m}{e} \ll 1. \quad (93.9)$$

Introduciendo los vectores auxiliares:

$$\delta_{\pm} = \frac{1}{m} (\mathbf{p}_{\pm})_{\perp}, \quad \delta_{\pm} = \frac{e_{\pm}}{m} \theta_{\pm} \quad (93.10)$$

(el subíndice  $\perp$  representa la componente perpendicular a la dirección de  $\mathbf{k}$ ), el resultado toma la forma

$$|M_{fi}|^2 \rightarrow \frac{N^2}{4} \left\{ \frac{m^2 \omega^2}{2\varepsilon_+^2 \varepsilon_-^2} |I|^2 + 2 \left| I \frac{m\delta_{\pm}}{2\varepsilon_+} + \mathbf{I}_+ \right|^2 + 2 \left| I \frac{m\delta_{\pm}}{2\varepsilon_-} + \mathbf{I}_- \right|^2 \right\}. \quad (93.11)$$

Aquí se ha tenido en cuenta que  $I \sim \frac{e}{q} I_{\pm} \sim \frac{e}{m} I_{\pm}$  [como puede verse en (93.8)]

y se ha prescindido de los términos de orden superior respecto de  $m/e$ .

Las integrales  $\mathbf{I}_{\pm}$  pueden escribirse en la forma

$$\mathbf{I}_{\pm} = i \frac{p_{\pm}}{2\varepsilon_{\pm}} \frac{\partial J}{\partial p_{\pm}},$$

con

$$J = \int \frac{e^{-iq \cdot r}}{r} F(-iv, 1, i(p_+ r + \mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{r})) F(iv, 1, i(p_- r + \mathbf{p}_- \cdot \mathbf{r})) d^3x. \quad (93.12)$$

La integral  $J$  se expresa mediante la función hipergeométrica completa (no degenerada) \*

$$J = \frac{4\pi}{q^2} \left( \frac{q^2 - 2\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{q}}{q^2 - 2\mathbf{p}_- \cdot \mathbf{q}} \right)^{iv} F(-iv, iv, 1, z),$$

$$z = 2 \frac{q^2 (p_+ p_- - \mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-) + 2 (\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{q}) (\mathbf{p}_- \cdot \mathbf{q})}{(q^2 - 2\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{q}) (q^2 - 2\mathbf{p}_- \cdot \mathbf{q})}. \quad (93.13)$$

La derivación respecto de  $\mathbf{p}_{\pm}$  debe efectuarse para un valor dado del parámetro  $q$  y sólo después puede hacerse  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_- - \mathbf{k}$ . He aquí el resultado en una forma en que se ha prescindido ya de las cantidades que no interesan en el caso ultra-relativista y cuando se cumplen las condiciones (93.9):

\* Cómo efectuar los cálculos puede verse en el artículo de NORDSIECK citado en la pág. 402.

$$I_{\pm} = \frac{4\pi}{q^2} \frac{\varepsilon_{\mp}}{m^2 \omega} \left( \frac{\varepsilon_+ \xi_+}{\varepsilon_- \xi_-} \right)^{iv} \left\{ \pm v q \xi_{\mp} F(z) + i \frac{q^2}{m^2} F'(z) (\eta \xi_{\mp} - m \delta_{\pm}) \right\}. \quad (93.14)$$

Para abreviar se han introducido las notaciones:

$$\begin{aligned} \xi_{\pm} &= \frac{1}{1 + \delta_{\pm}^2}, \quad z = 1 - \frac{q^2}{m^2} \xi_+ \xi_-, \\ F(z) &= F(-iv, iv, 1, z) \end{aligned} \quad (93.15)$$

[ $F(z)$  es una función real]. La integral  $I$  se calcula luego directamente a partir de (93.8).

Substituyendo los valores de las integrales en (93.11) y a continuación en (93.1), obtendremos la sección eficaz diferencial buscada. La fórmula final es

$$\begin{aligned} d\sigma = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\pi v}{\operatorname{senh} \pi v} \right)^2 Z^2 \alpha r_e^2 \frac{m^4}{q^4 \omega^8} \delta_+ d\delta_+ \cdot \delta_- d\delta_- \cdot d\varphi d\varepsilon_+ \cdot \{ &F^2(z) \times \\ \times [-2\varepsilon_+ \varepsilon_- (\delta_+^2 \xi_+^2 + \delta_-^2 \xi_-^2) + \omega^2 (\delta_+^2 + \delta_-^2) \xi_+ \xi_- + 2(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2) \delta_+ \delta_- \xi_+ \xi_- \cos \varphi] + \\ + \frac{q^4}{m^4} \frac{\xi_+^2 \xi_-^2}{v^2} F'^2(z) [-2\varepsilon_+ \varepsilon_- (\delta_+^2 \xi_+^2 + \delta_-^2 \xi_-^2) + \omega^2 (1 + \delta_+^2 \delta_-^2) \xi_+ \xi_- - \\ - 2(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2) \delta_+ \delta_- \xi_+ \xi_- \cos \varphi] \}. \end{aligned} \quad (93.16)$$

Cuando  $v \rightarrow 0$ , se tiene

$$\frac{\pi v}{\operatorname{senh} \pi v} \rightarrow 1, \quad F(z) \rightarrow 1, \quad F'(z) \approx v^2 \rightarrow 0.$$

La expresión (93.16) se reduce en tal caso, como debe ser, a la fórmula de Bethe-Heitler (92.5), que corresponde a la aproximación de Born. A la misma fórmula se reduce también para  $v$  arbitrario si los ángulos que forman las componentes del par satisfacen las condiciones

$$|\delta_+ - \delta_-| \ll 1, \quad |\pi - \varphi| \ll 1.$$

En efecto, en tal caso es  $q \ll m$ , de modo que en (93.16) se puede prescindir del segundo término de la expresión entre llaves teniendo en cuenta la presencia en él del factor suplementario (en comparación con el primer término)  $(q/m)^4$ . En cambio, en el primer término tenemos [observando que  $(1 - z) \sim q^2/m^2 \ll 1$ ]<sup>\*</sup>

$$F(z) \rightarrow F(1) \equiv F(-iv, iv, 1, 1) = \frac{1}{\Gamma(1 - iv) \Gamma(1 + iv)} = \frac{\operatorname{senh} \pi v}{\pi v}, \quad (93.17)$$

por lo que se reduce el factor análogo que aparece ante dicha expresión.

Pasemos a la integración de la sección eficaz respecto de las direcciones de emisión de las componentes del par.

La integración respecto de los ángulos la descompondremos en dos intervalos, I y II, en los cuales se tiene, respectivamente,

$$\text{I) } 1 - z > 1 - z_1, \quad \text{II) } 1 - z < 1 - z_1,$$

\* Este valor de la función puede obtenerse a partir de la fórmula III (e, 7) que liga las funciones hipergeométricas de argumento  $z$  y  $1 - z$ .

donde  $z_1$  es un valor para el cual  $1 - z_1 \gg (m/\epsilon)^2$ . Dado que en el intervalo II se tiene  $1 - z \ll 1$ ,  $\hat{q}^2 \ll m^2$ , por lo dicho antes se tendrá en él  $d\sigma \approx d\sigma_B \equiv d\sigma|_{v=0}$ , donde  $d\sigma_B$  es la sección eficaz en la aproximación de Born. En consecuencia, para la integral respecto de los ángulos se obtiene

$$d\sigma_{\epsilon+} \equiv \int d\sigma = \int_I d\sigma + \int_{II} d\sigma|_{v \rightarrow 0} = (d\sigma_{\epsilon+})_B + \int_I (d\sigma - d\sigma|_{v \rightarrow 0}), \quad (93.18)$$

donde  $(d\sigma_{\epsilon+})_B$  es la integral correspondiente a la sección eficaz de Born (92.7).

En el intervalo I tenemos

$$\frac{q^2}{m^2} \approx \delta_+^2 + \delta_-^2 + 2\delta_+\delta_- \cos\varphi.$$

Pasemos de las variables  $\delta_+$ ,  $\delta_-$ ,  $\varphi$  a las variables  $\xi_+$ ,  $\xi_-$ ,  $z$ . El cálculo directo del jacobiano de la transformación nos da

$$\delta_+ d\delta_+ \cdot \delta_- d\delta_- \cdot d\varphi \rightarrow \frac{\epsilon_+ \epsilon_-}{8m^2} \frac{d\xi_+ d\xi_- dz}{(\xi_+ \xi_-)^3 \sin\varphi},$$

y, además, se tiene

$$1 - z = \frac{q^2}{m^2} \xi_+ \xi_- = \xi_+ + \xi_- - 2\xi_+ \xi_- + 2\sqrt{\xi_+ \xi_- (1 - \xi_+) (1 - \xi_-)} \cos\varphi.$$

Despejando de aquí  $\cos\varphi$  y  $\sin\varphi$  y substituyendo en (93.16), obtendremos, después de simples transformaciones algebraicas,

$$\begin{aligned} d\sigma &= A d\epsilon_+ \frac{2d\xi_+ d\xi_- dz}{[z(1-z) - (1-z)(\xi_+ + \xi_- - 1)^2 - z(\xi_+ - \xi_-)^2]^{1/2}} \times \\ &\times \left\{ \frac{F^2(z)}{(1-z)^2} [(\epsilon_+^2 + \epsilon_-^2)(1-z) + 2\epsilon_+ \epsilon_- (\xi_+ - \xi_-)^2] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{F'^2(z)}{\nu^2} [(\epsilon_+^2 + \epsilon_-^2)z + 2\epsilon_+ \epsilon_- (\xi_+ + \xi_- - 1)^2] \right\}, \\ A &= \left( \frac{\pi\nu}{\sinh \pi\nu} \right)^3 \frac{Z^2 \alpha_e^2}{2\pi\nu^3}. \end{aligned}$$

Finalmente, introduzcamos en vez de  $\xi_+$ ,  $\xi_-$  nuevas variables «esféricas»  $\chi$ ,  $\psi$  de acuerdo con

$$\xi_+ + \xi_- - 1 = \sqrt{z} \sin\chi \cos\psi,$$

$$\xi_+ - \xi_- = \sqrt{1-z} \sin\chi \sin\psi;$$

$$0 \leq \chi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi;$$

$$2d\xi_+ d\xi_- \rightarrow \sqrt{z(1-z)} \sin\chi \cos\chi d\chi d\psi.$$

Los intervalos indicados de variación de  $\chi$  y  $\psi$  corresponden a la variación de  $\xi_+$  y  $\xi_-$  entre 0 y 1, es decir, de  $\delta_+$  y  $\delta_-$  (o, lo que es lo mismo, de  $\theta_+$  y  $\theta_-$ ) entre 0 y  $\infty$ ; la rápida convergencia de la integral permite esta ampliación del intervalo de variación de los ángulos. Después de la transformación, la raíz en el denominador se reduce a  $\sqrt{z(1-z)} \cos\chi$ ; la integración respecto de  $d\chi$  y  $d\psi$  es elemental y da

$$d\sigma = 2A \cdot 2\pi dz \left( \varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3} \varepsilon_+ \varepsilon_- \right) \left[ \frac{F^2(z)}{1-z} + \frac{z}{\nu^2} F'^2(z) \right] d\varepsilon_+.$$

Se ha introducido aquí el factor suplementario 2 que tiene en cuenta el hecho de que la integración respecto de  $dz$  se efectuará entre 0 y  $z_1$ , mientras que al variar el acimut  $\varphi$  entre 0 y  $\pi$  y de  $\pi$  a  $2\pi$  cada valor de  $z$  aparece dos veces.

La integración respecto de  $dz$  se lleva a cabo mediante la fórmula (90.14), que para  $\nu' = -\nu$  [y  $F(z)$  real] tiene la forma

$$\frac{F^2}{1-z^2} + \frac{z}{\nu^2} F'^2 = \frac{1}{\nu^2} \frac{d}{dz} (zFF').$$

La integral de esta expresión es igual a  $z_1 F(z_1) F'(z_1)/\nu^2$ . El valor  $z_1 F(z_1) \approx F(1)$  se toma de (93.17) y la expresión límite para  $F'(z_1 \rightarrow 1)$  viene dada por la fórmula \*

$$\frac{1}{\nu^2} F'(z) = F(1 - i\nu, 1 + i\nu, 2, z) \approx -[\ln(1-z) + 2f(\nu)] \frac{\sinh \pi\nu}{\pi\nu},$$

donde

$$f(\nu) = \frac{1}{2} [\Psi(1+i\nu) + \Psi(1-i\nu) - 2\Psi(1)] = \nu^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+\nu^2)}, \quad (93.19)$$

$$\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z).$$

Substituyendo en (93.18) todas las expresiones obtenidas, se llega a la siguiente fórmula final:

$$d\sigma_{\varepsilon_+} = 4Z^2 \alpha r_e^2 \left( \varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3} \varepsilon_+ \varepsilon_- \right) \left[ \ln \frac{2\varepsilon_+ \varepsilon_-}{m\omega} - \frac{1}{2} - f(\alpha Z) \right] \frac{d\varepsilon_+}{\omega^3}. \quad (93.20)$$

La sección eficaz total de formación de un par por un fotón de energía  $\omega$  es

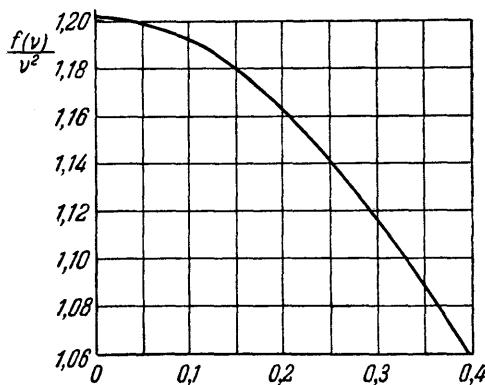


FIG. 17.

\* La deducción de estas fórmulas puede encontrarse en el apéndice al artículo de H. DAVIES, H. A. BETHE, L. C. MAXIMON, Phys. Rev., 93, 788 (1954).

$$\sigma = \frac{28}{9} Z^2 \alpha r_e^2 \left[ \ln \frac{2\omega}{m} - \frac{109}{42} - f(\alpha Z) \right]. \quad (93.21)$$

Vemos así que, en estas fórmulas, las modificaciones se reducen a restar del logaritmo una función universal  $f(\alpha Z)$  del número atómico. En la fig. 17 se representa gráficamente esta función. Cuando  $v \ll 1$ , se tiene  $f(v) \approx 1,2v^2$ .

### Radiación de frenado

El elemento de matriz para el proceso de radiación de frenado se escribe

$$M_{fi}^{\text{fren}} = \int \psi_{\epsilon \rightarrow p'}^{(-)*} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^*) e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \psi_{\epsilon p}^{(+)} d^3x; \quad (93.22)$$

las funciones de onda del electrón inicial ( $\epsilon, \mathbf{p}$ ) y del final ( $\epsilon', \mathbf{p}'$ ) contienen en su expresión asintótica una onda esférica divergente y convergente, respectivamente. El cálculo de esta integral es análogo al del elemento de matriz (93.2). Sin embargo, no nos detendremos en efectuarlo.

En vez de ello expondremos otro método de cálculo de la sección eficaz de la radiación de frenado que se basa en un problema cuasiclásico y no utiliza de manera explícita las funciones de onda del electrón en el campo de un núcleo (y, en este sentido, no está ligado con la forma exacta del potencial del campo) \*.

En el proceso de emisión de radiación de frenado el núcleo cede al electrón y al fotón un impulso  $\mathbf{q} = \mathbf{p}' + \mathbf{k} - \mathbf{p}$ . Al igual que antes (en el problema de creación de pares), hay que distinguir dos dominios de valores de la componente transversal (respecto de  $\mathbf{p}$ ) del impulso transferido  $q_\perp$ :

$$\text{I}) \quad m \gtrsim q_\perp \gg \frac{\omega m^2}{\epsilon^2}, \quad \text{II}) \quad q_\perp \sim \frac{\omega m^2}{\epsilon^2} \ll m. \quad (93.23)$$

Es claro que en la región I la sección eficaz de radiación coincide con la de Born. Ello se debe a que para tales valores de  $q_\perp$  carece de importancia el retroceso en la emisión del fotón por el electrón [como se demostrará detenidamente en el § 95; véase el razonamiento que conduce a la condición (95.10)]. Por ello, en la región I la sección eficaz del proceso se descompone en el producto de la sección eficaz exacta de dispersión del electrón en el campo del núcleo por la probabilidad de emisión del fotón, que es independiente de la forma del campo. Pero dado que según (81.10) la sección eficaz de dispersión en un campo de Coulomb coincide, para ángulos pequeños, con la sección eficaz de Born, con ésta coincidirá también la sección eficaz total del proceso en la región I.

Así, pues, basta considerar tan sólo la región II. A una pequeña transferencia de impulso corresponde el paso del electrón por delante del núcleo a grandes dis-

---

\* La deducción expuesta en lo que sigue se debe a V. N. BAIER y V. M. KATKOV (1968). Para otro método de cálculo cuasiclásico, véase H. OLSEN, L. MAXIMON, H. WERGELAND, Phys. Rev., 106, 27 (1957).

tancias de impacto:  $\rho \sim 1/q_\perp \sim \epsilon/m^2$ . Pero a tales distancias el movimiento del electrón es, evidentemente, cuasiclásico [de lo que es fácil convencerse también mediante una inmediata aplicación de la condición ordinaria para que se dé el carácter cuasiclásico, III (46.7), a la ecuación ultrarrelativista (39.5)].

El hecho de que el movimiento sea cuasiclásico permite utilizar el método que ya se aplicó en el § 59 a la radiación de frenado magnético. La probabilidad de que se emita un fotón viene dada por la integral (59.9) [con  $Q$  dada por (59.13)], que en el presente caso es igual a la probabilidad de emisión en un solo paso del electrón por delante del núcleo.

Como en el § 59, es necesario ante todo calcular la cantidad  $L$  definida por (59.15). La única diferencia consiste en la forma de la trayectoria clásica del electrón  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ .

Para grandes distancias de impacto, el movimiento tiene lugar en una región en la que el campo del núcleo  $U(r)$  se puede ya considerar débil. En la aproximación de orden cero la trayectoria es una recta que pasa a distancia  $\rho$  del centro. En la aproximación siguiente, tenemos la ecuación del movimiento (cf. I § 20):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\rho}{r} \frac{dU}{dr},$$

donde  $\rho$  es un vector en el plano  $xy$ , perpendicular al impulso inicial del electrón, y la variable  $r$  en el segundo miembro de la igualdad hay que interpretarla como función de la aproximación de orden cero:

$$r \approx \sqrt{\rho^2 + v^2 t^2} \approx \sqrt{\rho^2 + t^2}.$$

De aquí se sigue

$$\mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) = -\rho \int_{t_1}^{t_2} \frac{dU}{dr} \frac{dt}{r}. \quad (93.24)$$

La velocidad  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{p}(t)/\epsilon$ , igualdad en la que la energía  $\epsilon$  [que depende solamente del módulo, pero no de la dirección de  $\mathbf{p}(t)$ ] puede considerarse constante dentro de la precisión exigida. En consecuencia, una integración más nos da

$$\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{v}(t_1)(t_2 - t_1) - \frac{\rho}{\epsilon} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^t \frac{dU}{dr} \frac{dt'}{r(t')}, \quad (93.25)$$

En lo que sigue haremos  $t_1 \rightarrow -\infty$ , de modo que las cantidades  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(-\infty)$  y  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(-\infty)$  son el impulso y la velocidad iniciales del electrón.

Esta fórmula tiene exactamente la misma estructura que (59.17): el primer término es paralelo, y el segundo, perpendicular a  $\mathbf{v}$ , conteniendo el coeficiente del segundo término el factor  $1/\epsilon$ . Por lo tanto, se obtiene para  $L$  la anterior expresión (59.18), con  $\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$  dado por (93.25).

Utilizando esta expresión, representaremos la probabilidad (59.9) en la forma

$$dw = |a(\rho)|^2 \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \quad (93.26)$$

donde

$$\begin{aligned} a(\rho) &= e \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} R(t) \exp \left\{ i \frac{\epsilon'}{\epsilon} (\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)) \right\} dt, \\ R(t) &= \frac{u^* \epsilon' p'}{\sqrt{2\epsilon}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^* \frac{u \epsilon p}{\sqrt{2\epsilon}} \end{aligned} \quad (93.27)$$

y, además, todos los factores del integrando se pueden considerar ya como magnitudes clásicas, es decir, cabe prescindir de su carácter no conmutativo \*.

Recordaremos que en (93.27)

$$\epsilon' = \epsilon - \omega, \quad \mathbf{p}(t') = \mathbf{p}(t) - \mathbf{k}.$$

La función clásica  $\mathbf{p}(t)$ , en cambio, viene dada por (93.24). Interpretando  $\mathbf{p}$  como impulso inicial de la partícula, para un campo de Coulomb ( $U = -v/r$ ,  $v = Z\alpha$ ) obtendremos:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p} - \frac{v \mathbf{p}}{\rho^2} \left[ \frac{t}{\sqrt{\rho^2 + t^2}} + 1 \right].$$

Además,

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{p}}{\epsilon} t - \frac{\mathbf{p}}{\rho^2} \frac{v}{\epsilon} [\sqrt{\rho^2 + t^2} + t].$$

Introduciendo la variación del impulso en la dispersión clásica

$$\Delta = \mathbf{p}(\infty) - \mathbf{p}(-\infty) = -\frac{2\mathbf{p} v}{\rho^2}, \quad (93.28)$$

escribiremos estas fórmulas como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \mathbf{p} + \frac{\Delta}{2} \left[ \frac{t}{\sqrt{t^2 + \rho^2}} + 1 \right], \\ \mathbf{r}(t) &= \left( \mathbf{p} + \frac{\Delta}{2} \right) \frac{t}{\epsilon} + \frac{\Delta}{2\epsilon} \sqrt{t^2 + \rho^2}. \end{aligned} \quad (93.29)$$

Utilizando ahora la fórmula (59.19) para  $R(t)$  y las expresiones (93.29) para  $\mathbf{p}(t)$  y  $\mathbf{r}(t)$ , es posible calcular la integral respecto del tiempo en (93.27). La integración se efectúa cambiando la variable  $t$  por

---

\* La posibilidad de proceder así, al igual que en el § 59, viene asegurada por la desigualdad  $\omega \gg \omega_0$ , donde  $\omega_0$  es la frecuencia característica del movimiento. En el caso presente se tiene  $\omega_0 \sim v/\rho \ll m$ , y  $\omega \sim \epsilon$ .

$$\xi = -\frac{\epsilon}{\epsilon'} (\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t))$$

y aplicando la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{-i\xi} d\xi}{\sqrt{\chi^2 + \xi^2}} = 2i\chi K_1(\chi)$$

( $K_1$  es la función de McDonald). Sin embargo, de hecho no es necesario efectuar estos cálculos hasta el final. Ello se debe a que lo que se nos pide es la expresión de  $a(\rho)$  tan sólo para pequeños valores del módulo ( $\Delta \ll m$ ) de la cantidad  $A$  (que en el cálculo se considera como un parámetro independiente). Se obtiene entonces para  $a(\rho)$  una expresión de la forma

$$a(\rho) = w_f^* \mathbf{D} w_i \cdot A \chi K_1(\chi) \quad (93.30)$$

con

$$\chi = \rho \frac{\omega \epsilon}{\epsilon'} (1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}),$$

donde  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$  y  $\mathbf{D}$  es una cierta función de  $\mathbf{p}$ ,  $\epsilon$ ,  $\mathbf{k}$  (pero ya no de  $\rho$ ); no nos hace falta la forma de esta función \*. Dado que en el caso ultrarrelativista el fotón se emite formando un ángulo pequeño  $\theta$  con la dirección de la velocidad del electrón, se tendrá

$$\chi \approx \rho \frac{\epsilon}{\epsilon'} \omega \left( 1 - v + \frac{\theta^2}{2} \right)$$

o bien

$$\chi = \rho \frac{\omega m^2}{2\epsilon \epsilon'} (1 + \delta^2). \quad (93.31)$$

Dijimos ya que (93.26) es la probabilidad de que se emita un fotón al pasar una sola vez por delante del núcleo con un parámetro de impacto  $\rho$ . En cambio, la sección eficaz del proceso de emisión de un fotón con frecuencia y dirección dadas se obtendrá multiplicando por  $v^{-1} d\rho_x d\rho_y \approx d\rho_x d\rho_y \equiv d^2\rho$  e integrando respecto del parámetro de impacto:

$$d\sigma = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int |a(\rho)|^2 d^2\rho. \quad (93.32)$$

Sin embargo, no hay que pensar que, sin efectuar la integración respecto de  $d^2\rho$ , esta fórmula daría también la distribución de los electrones finales según sus direcciones. Ello se debe a que la desviación del electrón en su movimiento siguiendo

\* Obsérvese que en la integración se pueden considerar como constantes los espines  $w_i$ ,  $w_f$ , es decir, cabe prescindir del cambio en la polarización  $\xi$  del electrón en su movimiento ultrarrelativista clásico. Que así es puede comprobarse basándose en las ecuaciones obtenidas en el § 41.

una trayectoria clásica, que está unívocamente determinada por el campo exterior, en modo alguno coincide con la desviación indeterminada desde el punto de vista de la mecánica cuántica [de modo que tampoco el límite  $\mathbf{p}'(\infty)$  de la función clásica  $\mathbf{p}'(t)$  coincide con el impulso final del electrón  $\mathbf{p}'$ ]. Por esto, para obtener la distribución angular de los electrones es necesario efectuar el desarrollo de su función de onda en ondas planas, de manera análoga a como se hizo en III, § 127.

De (93.32) se deduce evidentemente que  $a(\rho)$  es la amplitud de emisión de un fotón cuando el electrón pasa con un parámetro de impacto  $\rho$ . Las expresiones (93.26-27) determinan, sin embargo, esta amplitud tan sólo salvo un factor de fase. Se comprende fácilmente que este factor es igual a  $e^{-ik \cdot \rho}$ . En efecto, del hecho de que en  $\mathbf{r}(t)$  aparezca una parte independiente del tiempo  $\mathbf{r}_\perp(-\infty) = \rho$  se sigue que dicho factor constante se tenía ya en la expresión para  $V_{fi}(t)$ . Este factor se puede sacar fuera de la integral respecto del tiempo, y gracias a que no se trata de un operador no se ve afectado por el proceso de commutación de los operadores. Así, pues, la amplitud correspondiente al proceso de emisión de radiación es

$$e^{-ik \cdot \rho} a(\rho), \quad (93.33)$$

donde  $a(\rho)$  viene dada por (93.30).

Supongamos ahora que el electrón se representa para  $z \rightarrow -\infty$  por una onda plana con impulso  $\mathbf{p}$  dirigido a lo largo del eje  $z$ . Esto significa que para  $z \rightarrow -\infty$  la función de onda del electrón en el plano  $xy$  se reduce a una constante independiente de  $\rho$ , constante que se puede hacer igual a la unidad. (Para simplificar, prescindimos de las amplitudes bispinoriales que carecen de importancia en los razonamientos que siguen). Entonces, según III (127.2), la función de onda del electrón que atraviesa el campo será igual, para  $z \rightarrow \infty$ , a \*

$$\psi(\infty) = \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z) dz \right\} \equiv S(\rho) \quad (93.34)$$

Por el propio sentido de amplitud de transición de (93.33), la función de onda del electrón que atraviesa el campo y emite un cuantos será

$$e^{-ik \cdot \rho} a(\rho) S(\rho). \quad (93.35)$$

Entonces la amplitud de emisión del fotón con paso del electrón a un estado con impulso determinado  $\mathbf{p}'$  vendrá dada por la correspondiente componente de Fourier de (93.35), es decir, según III (127.3-4), por la expresión

$$a(\mathbf{q}_\perp) = \int e^{-i' \mathbf{p} \cdot \rho} e^{-ik \cdot \rho} a(\rho) S(\rho) d^2 \rho = \int e^{-i \mathbf{q}_\perp \cdot \rho} a(\rho) S(\rho) d^2 \rho, \quad (93.36)$$

\* Al referirnos a la fórmula III (127.2), tenemos presente la analogía entre la ecuación (39.5) (en la que suponemos  $\mathbf{p}^2 \approx \epsilon^2$ ) y la ecuación no-relativista de Schrödinger (39.5a). Teniendo en cuenta la diferencia en el significado de los coeficientes de dichas ecuaciones, es fácil ver que, en nuestro caso, se cumplen efectivamente las condiciones III (127.1) de aplicabilidad de la fórmula III (127.2). El hecho de que esta fórmula no sea aplicable para valores de  $z$  arbitrariamente grandes, carece aquí de importancia por las mismas razones que en III § 127.

en la que  $\mathbf{q}_\perp$  es la componente normal del impulso transferido por el núcleo. La sección eficaz de dispersión con una transferencia dada  $\mathbf{q}_\perp$  será

$$d\sigma = |a(\mathbf{q}_\perp)|^2 \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^2 q_\perp}{(2\pi)^2} \quad (93.37)$$

Calculemos ahora  $S(\rho)$ . En el caso que nos interesa, el de un campo de Coulomb, la integral en el exponente diverge (lo que refleja la divergencia de las fases en la dispersión coulombiana). Por ello, hay que calcular la integral primero entre límites finitos:

$$\int_{-R}^R U dz = -2v \int_0^R \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = -2v [\ln(R + \sqrt{R^2 + \rho^2}) - \ln \rho] \approx \\ \approx -2v \ln 2R + 2v \ln \rho$$

$(R \gg \rho)$ . El primer término constante carece de importancia, de modo que

$$S(\rho) = e^{-2iv \ln \rho} = \rho^{-2iv}. \quad (93.38)$$

Substituyendo (93.30) y (93.38) en (93.35) y efectuando la integración respecto de las direcciones del vector  $\rho$  en el plano  $xy$ , obtendremos

$$a(\mathbf{q}_\perp) \sim v \int_0^\infty \rho^{-2iv} K_1(x) J_1(q_\perp \rho) \rho \, d\rho \quad (93.39)$$

( $J_1$  es una función de Bessel). No se han escrito aquí los factores que no contienen  $v = Z\alpha$ .

Vemos, pues, que la dependencia de la amplitud  $a(\mathbf{q}_\perp)$  [y por lo mismo también de la sección eficaz (93.37)] con relación a  $v$  queda limitada a un solo factor. Por otra parte, cuando  $v \rightarrow 0$  la sección eficaz debe pasar a ser la correspondiente expresión de Born. De aquí se sigue ya, evidentemente, que la sección eficaz diferirá de la de Born tan sólo en un factor, factor éste que no depende de la polarización del electrón y que, por lo tanto, no modifica los efectos de polarización.

La integral (93.39) se expresa mediante una función hipergeométrica según la fórmula

$$\int_0^\infty x^{-\lambda} K_1(ax) J_1(bx) x dx = \\ = \frac{b \Gamma(2 - \frac{\lambda}{2}) \Gamma(1 - \frac{\lambda}{2})}{2^2 a^{3-\lambda}} \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) F \left( \frac{\lambda}{2}, 1 - \frac{\lambda}{2}, 2, -\frac{b^2}{a^2 + b^2} \right).$$

Esto da

$$a(\mathbf{q}_\perp) \sim v \left( \frac{q}{2} \right)^{2iv} (1 - iv) \Gamma^2(1 - iv) F(iv, 1 - iv, 2, z), \quad (93.40)$$

donde

$$z = 1 - \frac{m^4 \omega^2}{4q^2 \epsilon^2 \epsilon'^2} (1 + \delta^2)^2, \quad \delta = \frac{\epsilon \theta}{m}. \quad (93.41)$$

Se ha utilizado aquí el hecho de que en la región II de valores de  $\mathbf{q}_\perp$  la componente de  $\mathbf{q}$  paralela al vector  $\mathbf{p}$  es:

$$q_{||}^2 = \mathbf{q}^2 - \mathbf{q}_\perp^2 \approx \frac{m^4 \omega^2}{4\epsilon^2 \epsilon'^2} (1 + \delta^2)^2. \quad (93.42)$$

Esta relación se comprueba fácilmente teniendo en cuenta que en dicha región los ángulos entre los impulsos  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}'$  y  $\mathbf{k}$  satisfacen las condiciones (91.15).

La función hipergeométrica que aparece en (93.40) puede reducirse a la función  $F(z)$  de (93.15) mediante la fórmula

$$F(a, b + 1, c + 1, z) = \frac{c}{a - c} F(a, b, c, z) + c \frac{(1 - z)}{b(a - c)} F'(a, b, c, z).$$

En definitiva obtendremos el siguiente resultado final:

$$d\sigma = d\sigma_B \left[ F^2(z) + \frac{(1 - z)^2}{v^2} F'^2(z) \right] \frac{1}{F^2(1)}, \quad (93.43)$$

donde  $d\sigma_B$  es la sección eficaz de Born (91.13). Cuando  $q \gg m^2/\epsilon$ , tenemos  $z \approx 1$  y todo el factor que multiplica a  $d\sigma_B$  se reduce a 1 [en este sentido la fórmula (93.43), deducida para la región II, es aplicable automáticamente para cualesquiera  $q \lesssim m$ ]. Recordemos que para  $q \lesssim m^2/\epsilon$ , cuando el factor correctivo en (93.43) es diferente de 1, los vectores  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}'$ ,  $\mathbf{k}$  son casi coplanarios y las cantidades  $\delta$  y  $\delta'$  son casi iguales, circunstancia que se utilizó ya en (93.42). Teniendo esto en cuenta, el cuadrado  $q^2$  en la expresión (93.41) de  $z$  se puede escribir

$$\frac{q^2}{m^2} = \delta^2 + \delta'^2 - 2\delta\delta' \cos \varphi + \frac{m^2 \omega^2}{4\epsilon^2 \epsilon'^2} (1 + \delta^2)^2, \quad (93.44)$$

es decir, cabe hacer  $\delta = \delta'$  en el segundo término de (91.14), pero no en el primero, que no contiene el pequeño coeficiente  $\sim m^2/\epsilon^2$ .

Para hallar la integral (angular) de la sección eficaz no es necesario efectuar de nuevo la integración. El resultado puede encontrarse por analogía con el problema de la formación de pares, volviendo al elemento de matriz de la transición en la forma (93.23) y aplicando el siguiente razonamiento (H. Olsen, 1955). Las diferentes direcciones de  $\mathbf{p}'$  (para una energía dada  $\epsilon'$ ) corresponden a la degeneración del estado final del electrón. Es evidente que el resultado de la suma respecto de los estados que se refieren a un mismo nivel degenerado, no depende de cuál sea precisamente la forma como se elija el conjunto completo de tales estados. Con vistas a efectuar la suma relativa a las direcciones de  $\mathbf{p}'$ , podemos por ello utilizar el sistema de funciones  $\psi_{\epsilon'}^{(+)} \mathbf{p}'$  en vez del sistema  $\psi_{\epsilon'}^{(-)} \mathbf{p}'$  (necesario para el cálculo

lo de la sección eficaz diferencial), es decir, cabe determinar el elemento de matriz de la radiación de frenado mediante la fórmula

$$M_{fi}^{\text{fren}} = \int \psi_{\epsilon p}^{(+)}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^*) e^{-i\mathbf{k}_* \cdot \mathbf{r}} \psi_{\epsilon p}^{(+)} d^3x.$$

Es fácil comprobar que esta integral coincide con la integral  $(M_{fi}^{\text{par}})^*$ , si en esta última se substituyen los parámetros de las funciones de onda de acuerdo con

$$\mathbf{p}_+, p_+, \epsilon_+ \rightarrow -\mathbf{p}, -p, -\epsilon; \quad \mathbf{p}_-, p_-, \epsilon_- \rightarrow \mathbf{p}', p', \epsilon'; \quad \mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$$

(y también se efectúa el cambio de variables de integración  $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ ).

Es claro por esto que la integral (angular) de la sección eficaz de radiación de frenado se puede obtener a partir de la sección total de formación de un par (93.20) multiplicando ésta por

$$\frac{\omega^2}{p_+^2} \frac{d\omega}{d\epsilon_+} \approx \frac{\omega^2}{\epsilon_+^2} \frac{d\omega}{d\epsilon_+}$$

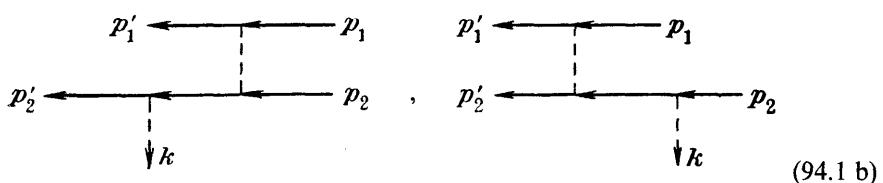
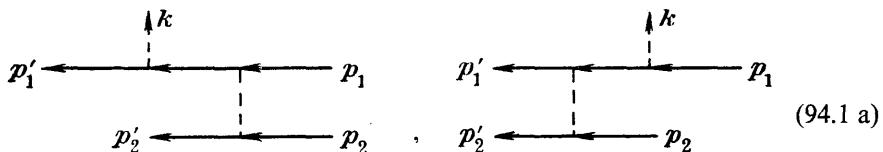
[cf. (92.2)] y substituyendo  $\epsilon_+ \rightarrow -\epsilon, \epsilon_- \rightarrow \epsilon'$ . De esta manera, se encuentra

$$d\sigma = 4Z^2 \alpha r_e^2 \frac{\epsilon'}{\epsilon} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon'} + \frac{2}{3} \right) \left[ \ln \frac{2\epsilon\epsilon'}{m\omega} - \frac{1}{2} - f(\alpha Z) \right] \frac{d\omega}{\omega}. \quad (93.45)$$

Vemos así que las correcciones a las fórmulas de Born para las secciones eficaces totales de radiación de frenado y de formación de pares vienen dadas por la misma función  $f(\alpha Z)$ .

#### § 94. Radiación de frenado por un electrón que choca con un electrón en el caso ultrarrelativista

La radiación de frenado de un electrón que choca con un electrón se representa por ocho diagramas de Feynman: los cuatro



diagramas y los cuatro diagramas «de intercambio» que se obtienen a partir de ellos permutando  $p_1$  y  $p'_2$ . Presentaremos aquí los resultados de los cálculos para el caso ultrarrelativista\*.

En el sistema de referencia del laboratorio (sistema de reposo de uno de los electrones iniciales, digamos, el segundo) la integral respecto de las direcciones del fotón de la sección eficaz de radiación se puede representar en forma de suma  $d\sigma = d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)}$ , donde

$$d\sigma^{(1)} = 4\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{\epsilon - \omega}{\epsilon} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon - \omega} + \frac{\epsilon - \omega}{\epsilon} - \frac{2}{3} \right) \left( \ln \frac{2\epsilon(\epsilon - \omega)}{m\omega} - \frac{1}{2} \right); \quad (94.2)$$

$$d\sigma^{(2)} = \frac{2}{3} \alpha r_e^2 \frac{md\omega}{\omega^2} \left\{ \left( 4 - \frac{m}{\omega} + \frac{m^2}{4\omega^2} \right) \ln \frac{2\epsilon}{m} - 2 + \frac{2m}{\omega} - \frac{5m^2}{8\omega^2} \right\} \text{ para } \omega \geq \frac{m}{2}; \quad (94.3)$$

$$d\sigma^{(3)} = \frac{2}{3} \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \left\{ 8 \left( 1 - \frac{\omega}{m} + \frac{\omega^2}{m^2} \right) \ln \frac{\epsilon}{\omega} - \left( 1 - \frac{2\omega}{m} \right) \ln \left( 1 - \frac{2\omega}{m} \right) \left[ \frac{m^3}{4\omega^3} - \frac{m^2}{2\omega^2} + \frac{3m}{\omega} - 2 + \frac{4\omega}{m} \right] - \frac{m^2}{2\omega^2} + \frac{3m}{2\omega} - 2 + \frac{2\omega}{m} - \frac{4\omega^2}{m^2} \right\} \text{ para } \omega \leq \frac{m}{2} \quad (94.4)$$

( $\epsilon$  es la energía inicial del electrón primero).

La precisión de estas fórmulas alcanza a los términos del orden de  $m/\epsilon$ . Dentro de este límite de precisión resulta que las contribuciones a la sección eficaz debidas a los diferentes diagramas no interfieren entre sí y, en este sentido,  $d\sigma^{(1)}$  y  $d\sigma^{(2)}$  corresponden a la radiación de cada uno de los dos electrones — a saber, al electrón rápido y al electrón de retroceso, respectivamente — [diagramas (94.1 a) y (94.1 b)].

Los diagramas del tipo de intercambio dan la misma contribución a la sección eficaz que los diagramas «directos». En virtud de la identidad de los electrones, la contribución total de los diagramas directos y de intercambio hay que dividirla por 2; por ello, cabe considerar solamente la contribución de los diagramas directos y no tener en cuenta la identidad de las partículas. En cambio, en la colisión de un electrón con un positón, en vez de los diagramas de intercambio aparecen los de aniquilación. Su contribución, sin embargo, resulta ser de un orden relativo de magnitud  $m/\epsilon$ , es decir, cabe prescindir de ella. Por lo tanto, dentro de la precisión indicada, las secciones eficaces de radiación de frenado en las colisiones de un electrón con un electrón y con un positón son las mismas.

Cuando  $\omega \gg m$ , para la razón  $\frac{d\sigma^{(2)}}{d\sigma^{(1)}}$  se tiene

\* Estos resultados se han obtenido en los trabajos de V. N. BAIER, V. M. GALITSKII, Zh ETF 49, 661 (1965); V. N. BAIER V. S. FADIN, V. A. JOZE, Zh ETF 51, 1 135 (1966); 53, 2 194 (1967). En estos artículos hay que prestar atención al método de integración de la sección eficaz diferencial basado en la introducción de variables invariantes; la utilización de este método simplifica los cálculos de manera muy notable.

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{d\sigma^{(1)}} \sim \frac{m}{\omega} \ll 1,$$

es decir, la radiación por el electrón de retroceso es pequeña comparada con la radiación emitida por el electrón rápido [cuando esta razón llega a ser del orden de  $m/\epsilon$ , la fórmula (94.3), claro está, pierde su sentido]. Por el contrario, cuando  $\omega \ll m$  ambas partes de la sección eficaz son casi comparables:

$$d\sigma^{(1)} = \frac{16}{3} \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \ln \frac{2\epsilon^2}{m\omega}, \quad d\sigma^{(2)} = \frac{16}{3} \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \ln \frac{\epsilon}{\omega}, \quad \omega \ll m. \quad (94.5)$$

Para que las fórmulas (94.2-5) sean válidas, es necesario que por lo menos uno de los electrones siga siendo ultrarrelativista después de emitida la radiación. En otras palabras, la frecuencia del fotón debe encontrarse suficientemente alejada de la bien delimitada frontera del espectro, es decir, de la frecuencia máxima  $\omega_{\max}$  que se puede emitir. La energía final de los electrones será mínima, y la energía del fotón será máxima, cuando los dos electrones se muevan después de emitir la radiación en la dirección del fotón y tengan igual velocidad. De las leyes de conservación se sigue entonces

$$\epsilon + m = \omega_{\max} + 2\epsilon', \quad |\mathbf{p}| = \omega_{\max} + 2|\mathbf{p}'|.$$

Eliminando entre ellas  $\epsilon'$  y  $\mathbf{p}'$ , obtendremos

$$(\epsilon + m - \omega_{\max})^2 - (|\mathbf{p}| - \omega_{\max})^2 = 4m^2,$$

de donde

$$\omega_{\max} = \frac{m(\epsilon - m)}{m + \epsilon - |\mathbf{p}|}. \quad (94.6)$$

Cuando  $\epsilon \gg m$  tenemos  $\omega_{\max} \approx \epsilon$ . De esta manera, las fórmulas (94.2-4) son válidas a condición de que

$$\omega_{\max} - \omega \sim \epsilon - \omega \gg m. \quad (94.7)$$

La sección eficaz de radiación por un electrón rápido (94.2) coincide exactamente con la sección eficaz de radiación (91.17) por un electrón que choca con un núcleo para el que  $Z = 1$ . Esta coincidencia no es casual y sus causas se explican analizando el papel del retroceso en el fenómeno de radiación.

Al deducir la fórmula (91.17) hemos prescindido del retroceso de la partícula en reposo (el núcleo), es decir, la hemos substituido por un campo exterior constante. Esto se reduce a prescindir de la componente temporal del 4-vector de transferencia de impulso  $q = p' - p + k$  (energía de retroceso). Demostraremos que en el caso ultrarrelativista cabe prescindir de dicho término no sólo para la radiación emitida por un electrón que choca con un núcleo, sino también para el que choca con otro electrón.

Escribamos  $q^2$  en la forma

$$-q^2 = -(\epsilon' + \omega - \epsilon)^2 + (p'_{||} + \omega - p_{||})^2 + (p'_{\perp} - p_{\perp})^2, \quad (94.8)$$

donde los subíndices indican las componentes de los vectores  $\mathbf{p}'$  y  $\mathbf{p}$  (impulsos inicial y final del electrón) paralelas y perpendiculares a la dirección del fotón  $\mathbf{k}$ . En el caso ultrarrelativista, los ángulos  $\theta$  y  $\theta'$  (formados por  $\mathbf{k}$  y por  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{p}'$ , respectivamente) son pequeños:  $\theta \lesssim m/\epsilon$ ,  $\theta' \lesssim m/\epsilon'$ . Por ello,

$$|\mathbf{p}_\perp| \sim |\mathbf{p}| \theta \sim m, \\ p_{||} \approx |\mathbf{p}| - \frac{\mathbf{p}_\perp^2}{2|\mathbf{p}|} \approx \epsilon - \frac{m^2}{2\epsilon} - \frac{\mathbf{p}_\perp^2}{2\epsilon}, \quad (94.9)$$

y análogamente, para  $\mathbf{p}'_\perp$ ,  $\mathbf{p}'_{||}$ .

Si no se tiene en cuenta el retroceso, tenemos  $\epsilon' + \omega - \epsilon = 0$ ; la diferencia  $p'_{||} + \omega - p_{||} \sim m^2/\epsilon$ , de modo que

$$-q^2 \approx (\mathbf{p}'_\perp - \mathbf{p}_\perp)^2 \sim m^2. \quad (94.10)$$

La energía de retroceso (del electrón) es:

$$q_0 = \epsilon' + \omega - \epsilon \sim \frac{q^2}{2m} \sim m. \quad (94.11)$$

Por otra parte, puede prescindirse de la variación de  $\mathbf{p}'_\perp$  debida al cambio de  $\epsilon'$ . En consecuencia, los dos primeros términos de (94.8) dan la variación de  $q^2$  debida a tener en cuenta el retroceso; designémosla por  $\Delta q^2$ . Aplicando (94.9), se obtendrá

$$\Delta q^2 \approx (\epsilon' + \omega - \epsilon) \left( -\frac{m^2}{\epsilon'} - \frac{\mathbf{p}'_\perp^2}{\epsilon'} + \frac{m^2}{\epsilon} + \frac{\mathbf{p}_\perp^2}{\epsilon} \right) \sim m^2 \frac{m}{\epsilon}.$$

Comparando con (94.10), vemos que  $\Delta q^2 \ll |q^2|$ , con lo cual queda justificado el prescindir del retroceso \*.

El hecho de que una partícula rápida emite la radiación dentro de un cono estrecho (de abertura  $\sim m/\epsilon$ ) en la dirección de su movimiento permite obtener la sección eficaz de radiación en el sistema del centro de masa mediante un simple cálculo a partir de la sección eficaz (94.2) en el sistema del laboratorio \*\*.

En el sistema del centro de masa ambos electrones radian de igual manera, cada uno en la dirección de su movimiento\*\*\*. La energía  $E$  de un electrón ultrarrelativista en el sistema del centro de masa está ligada con su energía  $\epsilon$  en el sistema del laboratorio por la relación  $2E^2 = m\epsilon$ , mientras que las frecuencias  $\Omega$  y  $\omega$  del fotón en dichos sistemas lo están por la relación  $\omega/\epsilon = \Omega/E$  [estas igualdades se obtienen fácilmente comparando los valores de los invariantes  $(p_1 p_2)$  y  $(p_1 k)$  en ambos sistemas]. Por ello, para la sección eficaz de radiación emitida por cada uno de los electrones en el sistema del centro de masa se encuentra

\* Es claro que esta conclusión está aún más justificada para la radiación de un electrón que choca con un núcleo, caso éste en que la energía de retroceso  $q_0 \approx q^2/2M \sim m^2/M$ , donde  $M$  es la masa del núcleo.

\*\* En el caso general este cálculo no es posible puesto que la contribución al espectro en un intervalo dado de frecuencias  $d\omega$  procede de fotones que son emitidos en direcciones esencialmente diferentes.

\*\*\* Obsérvese que esta circunstancia explica intuitivamente la causa de que no exista interferencia entre las radiaciones de una y otra partícula.

$$\begin{aligned} d\sigma^{(1)} &= d\sigma^{(2)} = \\ &= 4\alpha r_e^2 \frac{d\Omega}{\Omega} \frac{E - \Omega}{E} \left( \frac{E}{E - \Omega} + \frac{E - \Omega}{E} - \frac{2}{3} \right) \left( \ln \frac{4E^2(E - \Omega)}{m^2\Omega} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (94.12)$$

(G. Altarelli, F. Bucella, 1964).

Para que sea aplicable (94.12) es también necesario que la frecuencia del fotón no esté próxima a la frontera del espectro. Si una partícula es ultrarrelativista, la transformación antes indicada da directamente, partiendo de  $\omega_{\max} \approx \epsilon$

$$\Omega_{\max} \approx \omega_{\max} \frac{E}{\epsilon} \approx E. \quad (94.13)$$

Así, pues, en el sistema del centro de masa los electrones pueden radiar solamente la mitad de su energía total  $2E$ . Es fácil efectuar el cálculo directo de  $\Omega_{\max}$  observando que, después de la emisión de un tal fotón, los electrones se moverán (en el mismo sistema) con idénticas velocidades en direcciones opuestas a la dirección del fotón. Se tiene

$$2E = 2E' + \Omega_{\max}, \quad 2|\mathbf{p}'| = \Omega_{\max},$$

de donde

$$\Omega_{\max} = \frac{\mathbf{p}^2}{E} = E - \frac{m^2}{E}, \quad (94.14)$$

y en el caso ultrarrelativista encontramos de nuevo (94.13). Por consiguiente, la fórmula (94.12) es aplicable a condición de que

$$\Omega_{\max} - \Omega \sim E - \Omega \gg m. \quad (94.15)$$

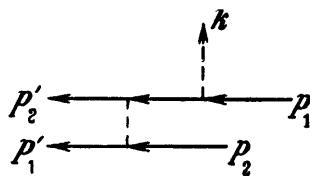
Veamos ahora las fórmulas para la radiación en el sistema del centro de masa en el caso límite opuesto, cerca de la frontera del espectro, cuando \*

$$\Omega_{\max} - \Omega \ll m. \quad (94.16)$$

Dado que en este caso el retroceso es muy importante, los resultados difieren de los correspondientes al caso de la dispersión por un centro inmóvil y resultan ser diferentes para la dispersión electrón-electrón y electrón-positón.

En el caso de la dispersión electrón-electrón, además de los cuadrados de los diagramas (94.1), contribuyen también a la sección eficaz de radiación cerca del límite del espectro los productos (términos de interferencia) de los diagramas directos y de intercambio, en los cuales radia una y la misma partícula inicial, por ejemplo, el producto del segundo de los diagramas (94.1 a) y el diagrama

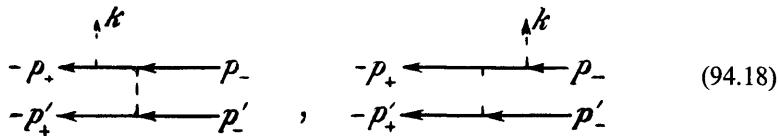
\* Claro está, el resultado obtenido en la aproximación de Born es útil, como de ordinario, tan sólo en tanto que la velocidad relativa de los electrones finales sea grande comparada con  $\alpha$ . En el caso contrario hay que tener en cuenta la interacción de las partículas en el estado final.



Esto se debe a que, cerca de la frontera, las partículas finales poseen impulsos próximos entre sí y no hay razón alguna para que los términos de intercambio sean pequeños. El resultado definitivo para la sección eficaz es:

$$d\sigma = 2\alpha r_e^2 \frac{[E(\Omega_{\max} - \Omega)]^{1/2}}{m} \frac{d\Omega}{\Omega_{\max}}. \quad (94.17)$$

En la dispersión electrón-positón, aportan una contribución logarítmica grande a la sección eficaz de radiación los cuadrados de los diagramas de aniquilación, en los cuales radian las partículas iniciales:



En la aproximación no-logarítmica cuentan también de manera esencial los cuadrados de los demás diagramas. Los términos de interferencia, en cambio, son pequeños. El resultado final es:

$$d\sigma = 2\alpha r_e^2 \frac{[E(\Omega_{\max} - \Omega)]^{1/2}}{m} \left( \ln \frac{2E}{m} + 1 \right) \frac{d\Omega}{\Omega_{\max}}. \quad (94.19)$$

Por lo tanto, en la dispersión electrón-positón la radiación emitida es logarítmicamente grande comparada con la radiación en la dispersión electrón-electrón.

### § 95. Emisión de fotones blandos en las colisiones

Sea  $d\sigma_0$  la sección eficaz de un cierto proceso de dispersión de partículas cargadas que puede ir acompañado de la emisión de un determinado número de fotones. Junto con este proceso consideraremos también otro que difiere del primero tan sólo en la emisión de un fotón más. Si la frecuencia  $\omega$  de este fotón es suficientemente pequeña (las correspondientes condiciones se formularán más adelante) la sección eficaz  $d\sigma$  del segundo proceso está ligada con  $d\sigma_0$  de manera sencilla.

En efecto, para valores  $\omega$  pequeños se puede prescindir de la influencia de la emisión de este cuanto sobre el propio proceso de dispersión. En otras palabras, la sección eficaz  $d\sigma$  puede representarse en forma de producto de dos factores independientes: de la sección eficaz  $d\sigma_0$  y de la probabilidad  $d\omega$  de que se emita un

fotón en la colisión. La emisión de un fotón blando es un proceso cuasiclásico; por consiguiente, su probabilidad coincide con el número de cuantos emitidos en la colisión calculado clásicamente, es decir, con la intensidad clásica (energía total) de la radiación  $dI$  dividida por  $\omega (= \hbar\omega)$ . Así, pues,

$$d\sigma = d\sigma_0 \frac{dI}{\omega}. \quad (95.1)$$

Veamos cómo esta fórmula se puede obtener mediante las reglas generales de la técnica de diagramas (*J. M. Jauch, F. Rohrlich, 1954*).

Los diagramas del proceso con emisión de un fotón adicional se obtienen a partir de los diagramas del proceso fundamental añadiendo una línea exterior de fotón « que forma un ramal » a partir de una línea de electrón cualquiera (exterior o interior), es decir, mediante la sustitución de

$$(95.2)$$

Es fácil ver que el papel fundamental lo representarán los diagramas que se obtienen mediante esta sustitución aplicada a las líneas de electrón exteriores. En efecto, si  $p$  es el impulso de una línea exterior ( $p^2 = m^2$ ), para valores de  $k$  pequeños será también  $(p - k^2)^2 \approx m^2$ , es decir, el factor  $G(p - k)$  que se añade en el diagrama se encontrará próximo a su polo.

Para la línea del electrón inicial  $p$  la sustitución (95.2) se reduce a substituir en la amplitud de reacción

$$\begin{aligned} u(p) \rightarrow e \sqrt{4\pi} G(p - k) \hat{e}^* u(p) &= e \sqrt{4\pi} \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(\hat{p} - \hat{k})^2 - m^2} \hat{e}^* u(p) \approx \\ &\approx -e \sqrt{4\pi} \frac{\hat{p} + m}{2(\hat{p}\hat{k})} \hat{e}^* u(p) \end{aligned}$$

(el primer factor  $e$  es la carga).

Observando que  $\hat{p}\hat{e}^* = 2pe^* - \hat{e}^*\hat{p}$  y que  $\hat{p}u(p) = mu(p)$ , se obtendrá la regla de sustitución en la forma

$$u(p) \rightarrow -e \sqrt{4\pi} \frac{(pe^*)}{(pk)} u(p). \quad (95.3)$$

De manera análoga, para la línea de electrón  $p'$ , la sustitución en el diagrama

significa que en la amplitud se substituye

$$\bar{u}(p') \rightarrow e \sqrt{4\pi} \bar{u}(p') \frac{(p'e^*)}{(p'k)}. \quad (95.4)$$

En todas las demás partes del diagrama se puede prescindir de manera general de la variación de los impulsos de las líneas vinculadas con la emisión del fotón  $k$ . Al proceder así se sobreentiende que la energía del fotón  $\omega$  es, en cualquier caso, pequeña comparada con las energías de todas las partículas que intervienen en la reacción (en particular, comparada con las energías de los fotones duros emitidos, si los hay).

Supongamos para concretar que la sección eficaz  $d\sigma_0$  se refiere a la dispersión de un electrón por un núcleo en reposo (con la posible emisión de fotones duros). La amplitud de este proceso tiene la forma

$$M_{fi}^{(0)} = \bar{u}(p') M u(p).$$

Aplicando a la misma una vez la sustitución (95.3), otra la sustitución (95.4) y sumando los resultados, obtendremos la amplitud de radiación de frenado correspondiente a aquellos mismos fotones duros y al fotón blando  $k^*$

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} e \sqrt{4\pi} \left( \frac{p' e^*}{p' k} - \frac{p e^*}{p k} \right). \quad (95.5)$$

De acuerdo con esto, para la sección eficaz se tendrá

$$d\sigma = d\sigma_0 \cdot 4\pi e^2 \left| \frac{p' e}{p' k} - \frac{p e}{p k} \right|^2 \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega}. \quad (95.6)$$

Sumando respecto de las polarizaciones del fotón  $k$ , obtendremos

$$d\sigma = -e^2 \left[ \frac{p'}{(p' k)} - \frac{p}{(p k)} \right]^2 \frac{d^3 k}{4\pi^2 \omega} d\sigma_0 \quad (95.7)$$

Expresada en términos de magnitudes tridimensionales, esta fórmula se escribe\*\*

$$d\sigma = \alpha \left( \frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{n}}{1 - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{n}}{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}} \right)^2 \frac{d\omega}{4\pi^2 \omega} d\sigma_0, \quad (95.8)$$

donde  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$  y  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{v}'$  son las velocidades inicial y final del electrón. Vemos, así, que la expresión que multiplica a  $d\sigma_0$  coincide efectivamente con la intensidad clásica de radiación [cf. II (69.4)] dividida por  $\omega$ , como se afirmó en la fórmula (95.1).

La condición de aplicabilidad de las fórmulas obtenidas exige que la transferencia de impulso al núcleo  $\mathbf{q}$  sea grande comparada con la variación  $\delta \mathbf{q}$  de esta cantidad debida a la emisión del fotón blando. Se tiene

$$\delta \mathbf{q} = (\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{k}) - (\mathbf{p}' - \mathbf{p})|_{\omega=0} = \delta \mathbf{p}' - \mathbf{k},$$

con  $|\delta \mathbf{p}'| \sim \frac{\partial |\mathbf{p}'|}{\partial \epsilon} \omega \sim \frac{\omega}{v}$  y  $|\mathbf{k}| = \omega$ . En el caso no-relativista ( $v \ll 1$ ) obtenemos, por ello, la condición

\* Conviene observar el hecho de que la aparición de una diferencia en esta fórmula es un resultado natural de la invariancia de contraste: la amplitud de reacción no debe cambiar al substituir el 4-vector polarización  $e$  por  $e + \text{const } k$ .

\*\* Para deducirla, conviene volver a (95.6) haciendo  $p = (\epsilon, \epsilon \mathbf{v}), p k = \epsilon \omega (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}), \dots, e = (0, \mathbf{e})$  y efectuando de nuevo la suma respecto de las polarizaciones utilizando (45.4a).

$$\frac{\omega}{|\mathbf{q}|v} \ll 1. \quad (95.9)$$

Dado que, por otra parte,  $|\mathbf{q}| \sim 1/\rho$  ( $\rho$  es el parámetro de impacto) esta condición puede presentarse también en la forma  $\omega\tau \ll 1$ , donde  $\tau \sim \rho/v$  es el tiempo característico de colisión.

En el caso ultrarrelativista, los fotones se emiten fundamentalmente en direcciones próximas a  $\mathbf{v}$  o a  $\mathbf{v}'$  [como puede verse por la forma de los denominadores de (95.8)]. Si el ángulo  $\theta$  de dispersión del electrón es pequeño, las direcciones de los tres vectores  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}'$ ,  $\mathbf{n}$  son próximas entre sí. Entonces

$$|\delta\mathbf{q}| = |\delta\mathbf{p}'| - |\mathbf{k}| = \omega \left( \frac{1}{v} - 1 \right) \sim \frac{\omega m^2}{\epsilon^2},$$

y dado que  $|\mathbf{q}| \sim \epsilon\theta$ , obtenemos la condición

$$\theta \gg \frac{\omega}{\epsilon} \frac{m^2}{\epsilon^2}. \quad (95.10)$$

Dado el carácter cuasiclásico de las fórmulas (95.5-8), éstas son válidas para la radiación por partículas cargadas cualesquiera (no necesariamente por electrones, para los cuales han sido deducidas). En el caso general, cuando en la reacción participan varias de tales partículas, la fórmula (95.5) debe escribirse en la forma

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} e \sqrt{4\pi} \sum Z \left( \frac{p'e^*}{p'k} - \frac{pe^*}{pk} \right), \quad (95.11)$$

donde la suma se extiende a todas las partículas (con cargas  $Ze$ ); de manera análoga se modifican también las fórmulas (95.6-8).

En particular, en el caso no-relativista

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} \frac{e \sqrt{4\pi}}{\omega} \sum Z(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}^*. \quad (95.12)$$

Para dos partículas esta fórmula se escribe

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} \frac{\sqrt{4\pi}}{\omega} \left( \frac{Z_1 e}{m_1} - \frac{Z_2 e}{m_2} \right) \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}^*, \quad (95.13)$$

$$\mathbf{q} = m(\mathbf{v}' - \mathbf{v}), \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

donde  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{v}'$  son la velocidad relativa de la partícula antes y después de la colisión.

Los resultados obtenidos se generalizan al caso de radiación simultánea de un cierto número de fotones blandos. Para cada uno de éstos, en la amplitud  $M_{fi}$  se añade el correspondiente factor, de la misma forma que el que aparece como factor de  $M_{fi}^{(0)}$  en (95.5). Es fácil cerciorarse de que así es directamente, digamos, en el ejemplo de dos fotones. Las líneas de los dos fotones emitidos deben añadirse a líneas exteriores de electrón, precisamente en dos sucesiones diferentes, es decir, el diagrama con una línea exterior  $p$  se substituye por dos diagramas con las líneas



ó

Cada uno de ellos contiene un factor (denominadores de los propagadores de electrón)

$$\frac{1}{2(pk_1 + pk_2)} \frac{1}{2pk_1} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{2(pk_1 + pk_2)} \frac{1}{2pk_2}.$$

Su suma es igual a

$$\frac{1}{2pk_1} \frac{1}{2pk_2},$$

es decir, contiene el producto de dos factores independientes que corresponden al primer fotón y al segundo. Hecho esto, en la suma de todos los diagramas los términos se agrupan (en virtud de la invariancia de contraste) en el producto de diferencias

$$\left( \frac{p'e_1^*}{p'k_1} - \frac{pe_1^*}{pk_1} \right) \left( \frac{p'e_2^*}{p'k_2} - \frac{pe_2^*}{pk_2} \right).$$

De acuerdo con la factorización de la amplitud, se descompone también en factores la sección eficaz del proceso. Así, pues, los fotones blandos se emiten independientemente. La sección eficaz de un proceso en el que se emiten  $n$  fotones blandos puede representarse en la forma

$$d\sigma = d\sigma_0 dw_1 \dots dw_n \quad (95.14)$$

donde  $dw_1, dw_2, \dots$  son las probabilidades de emisión de los fotones  $k_1, k_2, \dots$  por separado. Al integrar esta fórmula en el intervalo de valores finales de las variables (frecuencias y direcciones), que es el mismo para todos los cuantos, hay que introducir el factor  $1/n!$  que tiene en cuenta la identidad de los fotones.

Si se integra la sección eficaz de radiación (95.1) respecto de la frecuencia en un cierto intervalo finito desde  $\omega_1$  a  $\omega_2$ , obtendremos una expresión de la forma

$$d\sigma \sim \alpha \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} d\sigma_0 \quad (95.15)$$

[cf. (95.8)]. Se supone aquí que ambas frecuencias son pequeñas, de modo que los valores posibles de  $\omega_2$  están limitados por la condición de aplicabilidad del método. Con precisión logarítmica, sin embargo, se puede hacer  $\omega_2 \sim \epsilon$ , donde  $\epsilon$  es la energía inicial de la partícula que radia. Los valores de  $\omega_1$ , en cambio, no están en modo alguno limitados inferiormente. Pero haciendo tender  $\omega_1 \rightarrow 0$  resulta que la sección eficaz de radiación de todos los cuantos blandos posibles tiende a infinito. Veamos cuál es el sentido de esta situación — de la llamada *catástrofe en el infrarrojo* — (F. Bloch, A. Nordsieck, 1937).

Cuando

$$\alpha \ln \frac{\epsilon}{\omega_1} \gtrsim 1 \quad (95.16)$$

se tendrá:  $d\sigma \gtrsim d\sigma_0$ . Pero esto significa que la teoría de perturbaciones no es aplicable, es decir, que es imposible calcular  $d\sigma$  como una cantidad de orden de pequeño más elevado que  $d\sigma_0$ . En otras palabras, en este caso debe considerarse como parámetro pequeño no  $\alpha$ , sino el producto  $\alpha \ln (\epsilon/\omega_1)$ .

De esta manera, la deducción de las fórmulas (95.5-8) basada en la teoría de perturbaciones resulta ser incorrecta para frecuencias suficientemente pequeñas. Por otra parte, la fórmula clásica para la intensidad  $dI$  [II (69.4)] es aplicable en grado tanto mayor cuanto menor es  $\omega$ . Por ello la fórmula (95.1) sigue siendo válida si se modifica un tanto su sentido, orientándolo hacia un carácter más clásico. En (95.1) se supuso precisamente que se emitía un solo fotón; entonces la energía que pierde la partícula al emitirlo coincide con  $\omega$  y la «sección eficaz de pérdida relativa de energía» viene dada por la expresión  $\omega d\sigma/\epsilon$ , o bien

$$d\sigma_0 = \frac{dI}{\epsilon}. \quad (95.17)$$

En realidad, sin embargo, para valores suficientemente pequeños de  $\omega$  la probabilidad de emisión no es pequeña, y la probabilidad de que se emitan dos y más fotones no es menor, sino mayor que la probabilidad de que se emita un solo fotón. En estas condiciones, la expresión (95.17) conserva su validez, pero la intensidad clásica  $dI$  determinará no la probabilidad de que se emita un fotón, sino el número medio de fotones radiados

$$d\bar{n} = \frac{dI}{\omega}, \quad (95.18)$$

o bien, en un intervalo finito de frecuencias,

$$\bar{n} = \int_{\omega=\omega_1}^{\omega_2} \frac{dI}{\omega}. \quad (95.19)$$

Dado que los fotones blandos se emiten con independencia estadística (esto es correcto en todas las aproximaciones de la teoría de perturbaciones), al proceso de emisión múltiple se puede aplicar la fórmula de Poisson: la probabilidad  $w(n)$  de que se emitan  $n$  fotones se expresa en función del valor medio  $\bar{n}$  por la fórmula

$$w(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}. \quad (95.20)$$

Representemos la sección eficaz del proceso de dispersión acompañada de emisión de fotones en la forma

$$d\sigma = d\sigma_0 \cdot w(n). \quad (95.21)$$

Dado que  $\sum w(n) = 1$ ,  $d\sigma_0$  es la sección eficaz total de dispersión acompañada de radiación blanda cualquiera. Esta circunstancia es evidente por consideraciones

clásicas; la teoría de perturbaciones, en cambio, ve en  $d\sigma_0$  la sección eficaz del proceso de pura dispersión elástica. Pero la teoría de perturbaciones es inaplicable aquí. El hecho es que  $d\sigma_0$ , calculado según la teoría de perturbaciones como sección eficaz de dispersión elástica, tiene en cuenta en realidad la radiación de un número arbitrario de fotones blandos. En lo que concierne a la sección eficaz de dispersión elástica pura, ésta en realidad resulta igual a cero: cuando  $\omega_1 \rightarrow 0$ , el número medio  $\bar{n} \rightarrow \infty$  y según (95.20) tiende a cero la probabilidad de emisión de un número cualquiera finito de fotones\*

### PROBLEMAS \*\*

- Hallar la distribución espectral de la radiación de frenado de cuantos blandos emitidos por un electrón ultrarrelativista que choca con un núcleo.

*Solución.* La integración de la fórmula (95.8) respecto de  $d\omega$  da

$$d\sigma = \alpha K(\xi) \frac{d\omega}{\omega} d\sigma_0, \quad (1)$$

donde

$$K(\xi) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2\xi^2 + 1}{\xi\sqrt{\xi^2 + 1}} \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) - 1 \right], \quad \xi = \frac{|p|}{m} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2)$$

( $p$  es el impulso y  $\theta$  el ángulo de dispersión del electrón). En el caso ultrarrelativista el papel más importante lo representa el intervalo de ángulos en que

$$\frac{m^2 \omega}{e^3} \ll \theta \ll \frac{m}{e} \quad (3)$$

[el límite inferior, es la condición (95.10); acerca del límite superior, véase más adelante]. En estas condiciones  $\xi \approx e\theta/2m \ll 1$ , de modo que

$$K(\xi) \approx \frac{8}{3\pi} \xi^2,$$

y la sección eficaz de dispersión elástica del electrón por el núcleo [véase (81.10)] es

$$d\sigma_0 \approx 4Z^2 r_e^2 \frac{m^2}{e^2} \frac{d\theta}{\theta^4}. \quad (4)$$

$$d\sigma_\omega = \frac{16}{3} Z^2 a r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \int \frac{d\theta}{\theta}$$

La integral diverge logarítmicamente; se la corta inferiormente para ángulos  $\theta \sim m^2 \omega / e^3$ ; el límite superior se fija en  $\xi \sim 1$ , es decir, para ángulos  $\theta \sim m/e$  (cuando  $\xi \rightarrow \infty$

$$K \approx \frac{4}{\pi} \ln \xi,$$

de modo que la integral converge). De esta manera, con precisión logarítmica encontramos

\* Volveremos a considerar esta situación con mayor detenimiento en la segunda parte de este libro en relación con el estudio de las correcciones por radiación.

\*\* Las aplicaciones de la fórmula (95.7) presentadas a continuación se deben a V. N. Baier y V. M. Galitskii (1964).

$$d\sigma_\omega = \frac{16}{3} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \ln \frac{\epsilon^2}{m\omega} \quad (5)$$

de acuerdo con la parte logarítmica de la fórmula (91.17) (en la cual haya que hacer  $\epsilon \approx \epsilon'$ ). Es posible alcanzar una precisión no logarítmica únicamente yendo más allá de los límites que fija el carácter cuasicártico.

2. Para el choque de dos electrones ultrarrelativistas, determinar (en el sistema del centro de masa) la sección eficaz de emisión simultánea de dos fotones blandos, en sentidos opuestos y formando ángulos pequeños con el impulso de los electrones.

*Solución.* Los fotones que se separan en sentidos opuestos son emitidos por electrones diferentes, cada uno en el sentido de su movimiento. La sección eficaz de emisión simultánea es

$$d\sigma = d\sigma_0 \cdot \alpha K(\xi) \frac{d\omega_1}{\omega_1} \cdot \alpha K(\xi) \frac{d\omega_2}{\omega_2}, \quad \xi = \frac{\epsilon}{m} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (6)$$

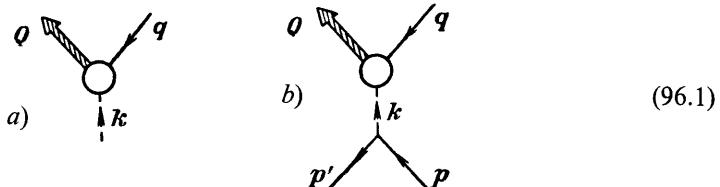
donde  $\epsilon$  es la energía de cada uno de los electrones y  $\theta$  el ángulo de dispersión en el sistema del centro de masa, el mismo para ambos electrones (dado que los fotones se emiten en sentidos opuestos, no hay necesidad de introducir en la sección eficaz el factor  $1/2$ ). La sección eficaz de dispersión elástica de los electrones a ángulos pequeños en el sistema del centro de masa coincide con (4) en el caso ultrarrelativista [cf. (82.11)]. En contraste con (1), la sección eficaz (6) se comporta como  $\theta d\theta$  para  $\theta \rightarrow 0$ , de modo que la integral converge. De una parte, esta circunstancia permite llevar la integración hasta  $\theta = 0$  (sin preocuparse por la posible violación de la condición de aplicabilidad del método). Por otra parte, la contribución fundamental a la sección eficaz integral se debe ahora a la región en que  $\theta \sim m/\epsilon$  (y no en la que  $\theta \ll m/\epsilon$ ), de forma que es necesario utilizar la expresión exacta (2). El resultado de la integración de la sección eficaz respecto de los ángulos de dispersión es:

$$d\sigma_{\omega_1 \omega_2} = \frac{2}{\pi} \left[ 5 + \frac{7}{2} \zeta(3) \right] r_e^2 \alpha^2 \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2} = 5,9 r_e^2 \alpha^2 \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2}$$

[ $\zeta$  es la función de Rieman;  $\zeta(3) = 1,202$ ].

### § 96. Método de los fotones equivalentes

Comparemos los dos procesos descritos por los diagramas



(los círculos representan por convenio toda la parte interior del diagrama). El diagrama *a*) representa la colisión de un fotón  $k(k^2 = 0)$  con cierta partícula cuyo 4-impulso es  $q$  (y de masa  $m$ ;  $q^2 = m^2$ ). Como resultado de la colisión se forma un sistema (una partícula o un grupo de partículas) con 4-impulso total  $Q$ . El diagrama *b*) representa la colisión de la misma partícula  $q$  con otra partícula, cuyo 4-impulso es  $p$  y la masa de la cual es  $M(p^2 = M^2)$ . Como consecuencia de la colisión esta última partícula adquiere el 4-impulso  $p'$  y se forma el mismo sistema  $Q$ .

El segundo proceso puede considerarse como colisión de la partícula  $q$  con un fotón virtual emitido por la partícula  $p$ , fotón cuyo impulso es  $k = p - p'$  ( $k^2 < 0$ ). Si además  $|k^2|$  es pequeño, el fotón virtual difiere poco de un fotón real. Es evidente que podemos encontrarnos con una situación tal en las colisiones de partículas muy rápidas: el campo electromagnético de una partícula cargada que se mueve con velocidad  $v \approx 1$  es casi transversal y, por ello, semejante por sus propiedades al campo de una onda luminosa. En estas condiciones, la sección eficaz del proceso  $b$ ) puede expresarse por medio de la sección eficaz del proceso  $a)$ \*.

Así, pues, consideraremos que la partícula  $M$  es ultrarrelativista: su energía (en el sistema de reposo de la partícula  $m$ ) es  $\epsilon \gg M$ . Si las masas  $m$  y  $M$  de las partículas que chocan son diferentes, para concretar supondremos que es  $m < M$ .

La amplitud del proceso  $a)$  (en el que participa un fotón real) se puede representar en la forma

$$M_{fi}^{(r)} = -e \sqrt{4\pi} (e_\mu J^\mu), \quad (96.2)$$

donde  $e_\mu$  es el 4-vector polarización del fotón, y  $J^\mu$  la corriente de transición que corresponde al vértice (círculo) del diagrama. En cambio, la amplitud del proceso  $b$ ) es

$$M_{fi} = Ze^{\frac{4\pi}{k^2}} (j_\mu J^\mu), \quad (96.3)$$

donde  $j_\mu$  es la corriente de transición de la partícula  $m$  (vértice inferior del diagrama);  $Ze$  es la carga de esta partícula. La corriente  $J$  es función de  $k = Q - q$  y, en consecuencia, diferente en un caso y en otro:  $k^2 = 0$  en (96.2) y  $k^2 \neq 0$  en (96.3). Pero si en el segundo caso se tiene

$$|k^2| \ll m^2, \quad (96.4)$$

también entonces se puede tomar para  $J$  el valor correspondiente a  $k^2 = 0$ .

La variación del impulso de la partícula  $M$  cuando se emite el fotón virtual,  $\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \mathbf{k}$ , es pequeña comparada con su impulso inicial  $|\mathbf{p}| \approx \epsilon$ ; por ello, en la corriente de transición  $j$  se puede hacer  $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ . En otras palabras, consideramos el movimiento de la partícula  $M$  como rectilíneo y uniforme. Dado que este movimiento es cuasiclásico, la correspondiente corriente no depende del spin de la partícula \*\* :

$$j^\mu = 2p^\mu. \quad (96.5)$$

\* El método que se expone a continuación fue ideado por K. Weizsäcker, E. J. Williams, 1934; la idea fundamental de este método había sido expuesta ya antes por E. Fermi, 1924.

\*\* En la normalización de las funciones de onda a razón de una partícula por unidad de volumen, la corriente es  $j^\mu = (1, \mathbf{v})$ , donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad. Pero convinimos (§ 65) en prescindir en las funciones de onda del factor de normalización  $1/\sqrt{2\epsilon}$ . De acuerdo con esto, es necesario introducir en  $j^\mu$  un factor suplementario  $2\epsilon$ , con lo que pasamos a la expresión (96.5).

La condición de transversalidad de la corriente ( $jk = 0$ ) da ahora  $\epsilon\omega - p_x k_x = 0$ , donde el eje  $x$  se ha elegido en la dirección de  $\mathbf{p}$ . De aquí se sigue

$$\omega = v k_x, \quad (96.6)$$

donde  $v = p_x/\epsilon$  es la velocidad de la partícula  $M$ . Dado que

$$-k^2 = -\omega^2 + k_x^2 + \mathbf{k}_\perp^2 \approx \omega^2(1 - v^2) + \mathbf{k}_\perp^2 \quad (96.7)$$

( $\mathbf{k}_\perp$  es el componente del vector  $\mathbf{k}$  perpendicular al eje  $x$ ), la condición (96.4) es equivalente a la desigualdad  $|\mathbf{k}_\perp| \ll m$  y a la desigualdad considerablemente más débil para  $\omega$ :  $\omega \ll m/\sqrt{1 - v^2}$ .

Además, de la condición de transversalidad de la corriente  $J$  ( $Jk = 0$ ), se sigue utilizando (96.6),

$$J_0 = \frac{J_x}{v} + \frac{\mathbf{J}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp}{\omega}.$$

Por lo tanto, para el producto escalar  $jJ$  se obtendrá

$$jJ = 2(J_0\epsilon - J_x p_x) \approx 2\frac{\epsilon}{\omega} \left( \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{J}_\perp + \frac{\omega M^2}{\epsilon^2} J_x \right). \quad (96.8)$$

En cuanto al producto  $Je$  en (96.2), escribámoslo explícitamente eligiendo el 4-vector polarización del fotón real en el contraste transversal en tres dimensiones:  $e\mathbf{k} = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{k} = 0$ , de donde  $e_x \approx -\mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp / \omega$ . Entonces

$$Je = -\mathbf{e}_\perp \cdot \left( \mathbf{J}_\perp - \frac{\mathbf{k}_\perp}{\omega} J_x \right). \quad (96.9)$$

Comparemos las expresiones (96.8) y (96.9). Éstas resultarán proporcionales una a otra si es posible prescindir de los segundos términos en los paréntesis. Dado que la corriente  $J$  corresponde al nudo superior del diagrama (96.16), no está ligada con la dirección de  $\mathbf{p}$ ; por lo tanto,  $J_x$  y  $J_\perp$  se han de considerar como cantidades del mismo orden. En consecuencia, el que sea admisible prescindir de aquellos términos exige que se cumplan las condiciones  $|\mathbf{k}_\perp| \ll \omega$  y  $\omega \ll \epsilon^2 |\mathbf{k}_\perp| / M^2$ ; éstas no están en contradicción con las condiciones anteriores, ya impuestas a  $\mathbf{k}_\perp$  y  $\omega$ .

Admitiendo que en (96.9) el fotón está polarizado en el plano  $x$ ,  $\mathbf{k}$  (de modo que  $\mathbf{e}_\perp \parallel \mathbf{k}_\perp$ ) y observando que, en virtud de las condiciones impuestas, es  $\mathbf{e}_\perp^2 \approx \mathbf{e}^2 = 1$ , obtendremos ahora

$$M_{fi} = M_{fi}^{(r)} \frac{Ze \sqrt{4\pi} 2\epsilon}{-\mathbf{k}^2 \omega} |\mathbf{k}_\perp|. \quad (96.10)$$

De acuerdo con lo dicho antes, se supone en todo eso que quedan satisfechas las condiciones

$$|\mathbf{k}_\perp| \ll \omega \ll m\gamma, \quad (96.11)$$

$$\frac{\omega}{\gamma^2} \ll |\mathbf{k}_\perp| \ll m, \quad (96.12)$$

donde para abreviar se ha hecho

$$\gamma = \frac{\epsilon}{M} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

A partir de aquí es posible hallar la relación entre las correspondientes secciones eficaces. Según la fórmula general (65.18), tenemos (en el sistema de reposo de la partícula  $m$ )

$$d\sigma_r = |M_{fi}^{(r)}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{1}{4m\omega} d\rho_Q,$$

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{1}{4m\epsilon} \frac{d^3 p'}{2\epsilon (2\pi)^3} d\rho_Q,$$

donde  $d\rho_Q$  es el peso estadístico de la partícula  $Q$ . Utilizando (96.10) y (96.7) obtenemos

$$d\sigma = d\sigma_r \cdot n(\mathbf{k}) d^3 p', \quad (96.13)$$

donde

$$n(\mathbf{k}) = \frac{Z^2 e^2}{\pi^2} \frac{\mathbf{k}_\perp^2}{\omega \left( \mathbf{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2} \right)^2}. \quad (96.14)$$

Recordaremos que  $d\sigma$ , es la sección eficaz del proceso *a*) provocado por la colisión de un fotón real con una partícula en reposo, colisión en la que se forma el sistema de partículas  $Q$  en determinados intervalos para sus impulsos. En cambio, la sección eficaz  $d\sigma$  se refiere al proceso *b*) de formación del mismo sistema  $Q$  en la colisión de una partícula rápida (de masa  $M$ ) con la misma partícula en reposo, colisión en la que la partícula rápida pierde el impulso  $\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \mathbf{k}$  quedando en el intervalo  $d^3 p'$  de valores de  $\mathbf{p}'$ . El factor  $n(\mathbf{k})$  en (96.13) se puede interpretar como densidad (en el espacio- $k$ ) del número de fotones al que es equivalente el campo electromagnético de la partícula rápida.

Integrar con relación a  $d^3 p'$  es lo mismo que integrar respecto de  $d^3 k = d\omega d^2 k_\perp$ . Efectuando la integración respecto de  $d^2 k_\perp$ , obtendremos la sección eficaz del proceso en que la energía total  $E$  del sistema de partículas  $Q$  se encuentra en el intervalo dado  $dE = d\omega$  ( $E - m = \epsilon - \epsilon' = \omega$ , donde  $\epsilon$  y  $\epsilon'$  son las energías inicial y final de la partícula  $M$ ). Integrar con relación a las direcciones de  $\mathbf{k}_\perp$  significa promediar respecto de las direcciones de la polarización del fotón incidente (junto con la multiplicación por  $2\pi$ ). Hecho esto se obtiene

$$d\sigma = n(\omega) d\sigma_r d\omega, \quad (96.15)$$

donde

$$n(\omega) = \int n(\mathbf{k}) 2\pi k_\perp dk_\perp = \frac{2Z^2 e^2}{\pi \omega} \int \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{\left( k_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2} \right)^2}.$$

La integral respecto de  $dk_{\perp}$  diverge para grandes valores de  $k_{\perp}$ . Sin embargo, la divergencia es tan solo logarítmica. Esta circunstancia permite (dentro de los límites de aplicabilidad del método expuesto) obtener el resultado en la aproximación logarítmica: se supone que no sólo es grande el argumento del logaritmo, sino también el propio logaritmo. Con esta precisión, basta tomar para el límite superior de integración  $k_{\perp\max} \sim m$ , es decir, el límite superior de la desigualdad (96.12). Efectuando la integración, obtendremos para la distribución espectral de los fotones equivalentes (en unidades ordinarias)

$$n(\omega) d\omega = \frac{2}{\pi} Z\alpha \ln \frac{\gamma mc^2}{\hbar\omega} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (96.16)$$

La aproximación adoptada implica que queda sin determinar el coeficiente numérico del argumento del logaritmo: la introducción de dicho coeficiente significaría sumar a un logaritmo que es grande una cantidad relativamente pequeña ( $\sim 1$ ) y representaría un aumento de la precisión admitida.

#### PROBLEMAS

1. Hallar la sección eficaz de radiación de frenado en la colisión de un electrón con un núcleo partiendo de la sección eficaz de dispersión de fotones por un electrón.

*Solución.* En el sistema de referencia  $K_1$  en el que el electrón se encuentra en reposo antes del choque, el proceso se puede considerar como dispersión de los fotones equivalentes al campo del núcleo por el electrón\*. Según (86.10) la sección eficaz de dispersión del fotón por el electrón en el sistema  $K_1$  es

$$d\sigma_{\text{dis}}(\omega_1, \omega'_1) = \pi r_e^2 \frac{m d\omega'_1}{\omega_1^2} \left[ \frac{\omega_1}{\omega'_1} + \frac{\omega'_1}{\omega_1} + \left( \frac{m}{\omega'_1} - \frac{m}{\omega_1} \right)^2 - 2m \left( \frac{1}{\omega'_1} - \frac{1}{\omega_1} \right) \right], \quad (1)$$

donde  $\omega_1$  y  $\omega'_1$  son las energías inicial y final del fotón en este sistema. La sección eficaz de radiación de frenado en el sistema  $K_1$  se escribe

$$d\sigma_{\text{rad}}(\omega'_1) = \int d\omega_1 \cdot n(\omega_1) d\sigma_{\text{dis}}(\omega_1, \omega'_1), \quad (2)$$

donde  $n(\omega_1)$  es la función (96.16). Dada la invariancia de la sección eficaz, el paso al sistema de referencia  $K$  en el que se encuentra en reposo el núcleo se reduce a un cambio de la frecuencia  $\omega'_1$ . Las frecuencias  $\omega'_1$  y  $\omega'$  en los sistemas  $K_1$  y  $K$  están ligadas por la fórmula de Lorentz

$$\omega' = \gamma \omega'_1 (1 - v \cos \theta_1), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (3)$$

donde  $\theta_1$  es el ángulo de dispersión en el sistema  $K_1$ . Este mismo ángulo liga entre sí  $\omega'_1$  y  $\omega_1$  de acuerdo con (86.8):

$$\frac{1}{\omega'_1} - \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{m} (1 - \cos \theta_1). \quad (4)$$

De (3) y (4) se deduce

$$\omega'_1 = \omega_1 \frac{\epsilon'}{\epsilon}, \quad (5)$$

\* En cambio, se excluye la dispersión de los fotones virtuales por el núcleo (en el sistema de reposo de éste) debido a la gran masa del mismo: la sección eficaz de dispersión tiende a cero al tender a infinito la masa de la partícula que disperga.

donde  $\epsilon = m\gamma$  y  $\epsilon'$  son las energías inicial y final del electrón en el sistema  $K$  ( $\epsilon - \epsilon' = \omega'$ ). Substituyendo (5) en (1) se obtendrá

$$d\sigma_{\text{dis}} = \pi r_e^2 \frac{m d\omega'}{\epsilon \omega_1} \left( \frac{\epsilon'}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\epsilon'} + \frac{m^2 \omega'^2}{\epsilon'^2 \omega_1^2} - \frac{2m\omega'}{\omega_1 \epsilon'} \right).$$

Esta expresión hay que substituirla en (2) e integrar respecto de  $d\omega_1$  para  $\omega'$  dado (es decir,  $\epsilon'$  dada) entre los límites

$$\omega_{1\max} = \frac{2\epsilon\omega'}{m}, \quad \omega_{1\min} = \frac{m\omega'}{2\epsilon'}$$

[estos valores se obtienen de (3) — (4) para  $\theta_1 = 0$  y  $\theta_1 = \pi$ ]. Dada la rápida convergencia de la integral para grandes valores de  $\omega_1$ , la mayor contribución a la misma procede de la región de valores de  $\omega_1$  próximos al límite inferior (es decir, se puede hacer  $\omega_{1\max} \rightarrow \infty$ ). Calculando la integral con precisión logarítmica\*, se obtiene

$$d\sigma_{\text{rad}} = 4r_e^2 \alpha Z \frac{d\omega'}{\omega'} \frac{\epsilon'}{\epsilon} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon'} + \frac{\epsilon'}{\epsilon} - \frac{2}{3} \right) \ln \frac{\epsilon\epsilon'}{m\omega'}.$$

Para que este resultado sea correcto, junto con la condición  $\epsilon \gg m$  (electrón ultrarrelativista) debe quedar satisfecha la condición (96.11): las frecuencias  $\omega_1 \sim \omega_{1\min}$  que importan en la interacción deben ser  $\ll \epsilon$ . De aquí se sigue  $\epsilon - \epsilon' = \omega' \ll \epsilon\epsilon'/m$ . En estas condiciones, el resultado obtenido, como debía ser, coincide con (91.17) dentro de la precisión logarítmica.

2. Lo mismo para la radiación de frenado de un electrón por un electrón.

*Solución.* En este caso el fotón virtual puede ser dispersado bien por el electrón rápido, bien por el electrón de retroceso; los fotones equivalentes al campo de un electrón son dispersados por el otro, y recíprocamente. La dispersión de fotones virtuales por un electrón rápido da la sección eficaz  $d\sigma_{\text{rad}}^{(1)}$  que coincide con la sección eficaz de radiación del electrón que choca con un núcleo para el que  $Z = 1$ .

La dispersión de los fotones virtuales por el electrón de retroceso, en cambio, da la sección eficaz de radiación

$$d\sigma_{\text{rad}}^{(2)} = \int d\omega \cdot n(\omega) d\sigma_{\text{dis}}(\omega, \omega')$$

donde  $d\sigma_{\text{dis}}(\omega, \omega')$  viene dada por (1) (con el correspondiente cambio en la manera de designar las frecuencias). En el intervalo de valores que toma  $\omega$  para  $\omega'$  dado, tenemos [cf. (4)]

$$\omega' \leq \omega \leq \infty \quad \text{para} \quad \omega' > \frac{m}{2};$$

$$\omega' \leq \omega \leq \frac{\omega'}{m - 2\omega'} \quad \text{para} \quad \omega' < \frac{m}{2}.$$

Cuando  $\omega' < m/2$  la integración respecto de  $d\omega$  da

$$d\sigma_{\text{rad}}^{(2)} = \frac{16}{3} \alpha r_e^2 \frac{d\omega'}{\omega'} \left( 1 - \frac{\omega'}{m} + \frac{\omega'^2}{m^2} \right) \ln \frac{\epsilon}{\omega'}$$

de acuerdo con (94.4). Pero si  $\omega' > m/2$ , hay que distinguir los casos  $\omega' \sim m$  y  $\omega' \sim \epsilon \gg m$ . En el primero de ellos se obtiene

$$d\sigma_{\text{rad}}^{(2)} = \frac{2}{3} \alpha r_e^2 \frac{m d\omega'}{\omega'^2} \left( 4 - \frac{m}{\omega'} + \frac{m^3}{4\omega'^3} \right) \ln \frac{\epsilon}{m}$$

de acuerdo con (94.3) (en el argumento del logaritmo hemos substituido  $\epsilon/\omega'$  por  $\epsilon/m$ , manteniéndolos dentro de la precisión exigida). En cambio, cuando  $\omega' \sim \epsilon$  el método de los fotones equi-

\* Esto significa que mediante una sola integración por partes se separa el término que contiene el logaritmo, que es grande, y se prescinde de los demás términos. Esta operación se reduce a sacar fuera del símbolo de integral el logaritmo  $\ln(\epsilon/\omega_1)$  para el valor  $\omega_1 = \omega_{1\min}$ .

valentes es, en general, implicable para el cálculo de  $d\sigma_{\text{rad}}^{(2)}$ . La frecuencia de los fotones virtuales  $\omega$  toma valores a partir de  $\omega'$  y cuando  $\omega = \omega' \sim \epsilon$ , por consiguiente, no se cumple la condición (96.11).

3. Determinar la sección eficaz total de formación de un par en el choque de un fotón con un núcleo partiendo de la sección eficaz de formación de un par en la colisión de dos fotones.

*Solución.* La energía del fotón en el sistema de reposo del núcleo (sistema  $K$ ) es  $\omega = m\gamma$ ,  $\gamma \gg 1$ . Pasemos al sistema de referencia  $K_0$  en el que el núcleo se mueve hacia el fotón con velocidad  $v_0$  tal que

$$\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}} = \frac{\gamma}{2}.$$

En este sistema la energía del fotón vale

$$\omega_0 = \omega \frac{1-v_0}{\sqrt{1-v_0^2}} \approx \frac{\omega}{2} \sqrt{1-v_0^2} = m.$$

La sección eficaz buscada  $\sigma$  se calcula en el sistema  $K_0$  como sección eficaz de formación de un par en las colisiones del fotón incidente  $\omega_0$  con los fotones equivalentes del núcleo, cuya energía designaremos por  $\omega'$ :

$$\sigma = \int \sigma_{\gamma\gamma} n(\omega') d\omega',$$

donde  $\sigma_{\gamma\gamma}$  es la sección eficaz de formación de un par por dos fotones; ésta viene dada por la fórmula (1) obtenida en el problema del § 88, fórmula en la que hay que hacer

$$v = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega_0 \omega'}} = \sqrt{1 - \frac{m}{\omega'}}.$$

Pasando de la variable  $\omega'$  a la variable  $v$ , tenemos

$$\sigma = 2r_e^2 \alpha Z \int_0^1 v \ln [\gamma(1-v^2)] \left\{ (3-v^4) \ln \frac{1+v}{1-v} - 2v(2-v^2) \right\} dv.$$

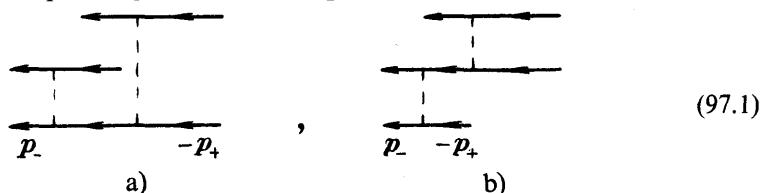
Si se tiene en cuenta la convergencia de la integral en el límite superior, la integración se extiende a todo el intervalo desde el umbral de la reacción  $\omega' = m$  ( $v = 0$ ) hasta  $\omega' = \infty$  ( $v = 1$ ) y se efectúa con precisión logarítmica (es decir, el logaritmo  $\ln [\gamma(1-v^2)]$  se substituye por su valor en  $v = 0$  y se saca fuera del signo de integral). En definitiva obtendremos

$$\sigma = \frac{28}{9} \alpha Z^2 r_e^2 \ln \gamma$$

de acuerdo con (92.8); la fórmula es correcta para  $\ln \gamma \gg 1$ .

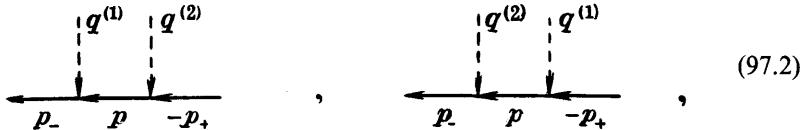
### § 97. Formación de pares en las colisiones de partículas

La formación de un par electrón-positón en la colisión de dos partículas cargadas se representa por diagramas de dos tipos:



Las dos líneas de trazo continuo superiores corresponden a las partículas que chocan, la inferior, al par que se crea.

Consideremos en el caso ultrarrelativista el choque de dos partículas pesadas (de dos núcleos). Se puede prescindir del cambio de estado de movimiento de las propias partículas en un tal choque, es decir, cabe considerarlas como fuentes de un campo exterior. A esto corresponden dos diagramas del primer tipo



donde  $q^{(1)}$ ,  $q^{(2)}$  son los «impulsos» componentes de Fourier de los campos de las dos partículas.

La sección eficaz de formación de un par se puede determinar en este caso siguiendo el método de los fotones equivalentes y partiendo de la sección eficaz de formación de un par por un fotón que choca con un núcleo, que ya conocemos. La sustitución del campo de una de las partículas (digamos, de la primera) por el espectro de fotones equivalentes significa que en los diagramas (97.2) las líneas  $q^{(1)}$  se consideran como líneas de fotones reales. El conjunto de estos diagramas pasa entonces a coincidir con el conjunto de diagramas correspondientes a la formación de un par por un fotón que choca con el núcleo 2. Cuando  $\epsilon_+, \epsilon_- \gg m$ , la sección eficaz de este último proceso viene dada por la fórmula (92.7). Multiplicando esta expresión por el espectro (96.16) de los fotones equivalentes del primer núcleo, obtendremos (con precisión logarítmica) la sección eficaz diferencial de formación de un par en el choque de las partículas:

$$d\sigma = \frac{8}{\pi} r_e^2 (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \frac{d\epsilon_+ d\epsilon_-}{(\epsilon_+ + \epsilon_-)^4} \left( \epsilon_+^2 + \epsilon_-^2 + \frac{2}{3} \epsilon_+ \epsilon_- \right) \ln \frac{\epsilon_+ \epsilon_-}{m (\epsilon_+ + \epsilon_-)} \ln \frac{m\gamma}{\epsilon_+ + \epsilon_-}, \quad (97.3)$$

donde  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2} \gg 1$ .

Se ha supuesto aquí que

$$m \ll \epsilon_+, \epsilon_- \ll m\gamma; \quad (97.4)$$

la desigualdad anterior es la condición de aplicabilidad del método de los fotones equivalentes. Al mismo tiempo la región determinada por las desigualdades (97.4) coincide con el intervalo de valores de las energías del electrón y del positón que más cuentan en la integración de la expresión (97.3). Al integrar respecto de  $d\epsilon_+$  o de  $d\epsilon_-$  para un valor dado de la suma  $\epsilon \equiv \epsilon_+ + \epsilon_- (\gg m)$ , es esencial la región próxima al límite superior; prescindiendo de los términos que no contienen el logaritmo, que es grande, se obtendrá

$$d\sigma = \frac{56}{9\pi} r_e^2 (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \ln \frac{\epsilon}{m} \ln \frac{m\gamma}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{\epsilon}.$$

La integral respecto de  $d\varepsilon$  extendida al dominio (97.4) diverge como el cubo del logaritmo y en las fronteras del mismo tan sólo como el cuadrado del mismo. En la aproximación logarítmica ( $\ln \gamma \gg 1$ ), por consiguiente, la región (97.4) es, efectivamente, la fundamental y cabe extender la integral entre los límites  $m$  y  $m\gamma$ . Se tiene

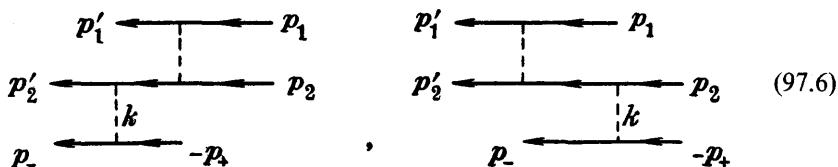
$$\int_1^{\infty} \ln \xi (\ln \gamma - \ln \xi) \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{6} \ln^3 \gamma,$$

de modo que la sección eficaz total de formación de un par es

$$\sigma = \frac{28}{27\pi} r_e^2 (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \ln^3 \frac{1}{1-v^2} \quad (97.5)$$

(L. D. Landau, E. M. Lifshits, 1934).

Consideremos ahora el caso en que las velocidades de los núcleos que chocan son no-relativistas. En este caso pasa a cobrar importancia la variación en el movimiento de los núcleos bajo la influencia de su interacción y la contribución fundamental a la sección eficaz de formación de un par la proporcionan los diagramas del segundo tipo en (97.1). Cuatro son los diagramas que se tienen del mismo: los dos diagramas



y otros dos más, análogos, en los que el fotón virtual  $k$  (que crea al par) se emite no por el segundo núcleo, sino por el primero \*

Supondremos que la energía del par es pequeña comparada con la energía cinética del movimiento relativo de los núcleos en el sistema de su centro de masa:

$$\varepsilon_+ + \varepsilon_- \ll \frac{Mv^2}{2} \quad (97.7)$$

[ $v$  es la velocidad relativa inicial, y  $M = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$  es la masa reducida de los núcleos]. Es entonces posible prescindir de la influencia de la formación del par sobre el movimiento de los núcleos. Si en los diagramas (97.6) se suprime la línea electrón-positón, las partes que quedan representarán la emisión de un fotón virtual de baja frecuencia ( $\omega = \varepsilon_+ + \varepsilon_-$ ) por las partículas que chocan. Volvemos así a la situación considerada en el § 95 correspondiente a la emisión de un fotón

\* Obsérvese que a la formación de un par en la colisión de dos electrones corresponden en total 36 diagramas:  $2! \cdot 3! = 12$  diagramas del tipo *a*), que se obtienen uno de otro permutando dos electrones iniciales y tres finales, más  $2 \cdot 2! \cdot 3! = 24$  diagramas del tipo *b*) que resultan de la misma manera a partir de los dos diagramas (97.6).

real blando y podemos utilizar la fórmula (95.13) obtenida allí para el caso no-relativista (con la diferencia de que en vez de la amplitud  $\sqrt{4\pi}e^*$  del fotón real aparecerá el propagador del fotón virtual  $\star$ ). De esta manera, la amplitud de todo el proceso de creación del par se escribirá en la forma

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} \frac{1}{\omega} \left( \frac{Z_1 e}{M_1} - \frac{Z_2 e}{M_2} \right) q^\lambda D_{\lambda\mu}(k) [-ie(\bar{u}_-\gamma^\mu u_+)], \quad (97.8)$$

donde  $q = (0, \mathbf{q})$ ,  $\mathbf{q} = M(\mathbf{v}' - \mathbf{v})$ .

Como de ordinario, en el caso no-relativista el propagador de fotón hay que elegirlo de acuerdo con el contraste (77.14). Según la amplitud (97.8), se encuentra para la sección eficaz del proceso:

$$d\sigma = d\sigma_{\text{dis}} \cdot e^4 \left( \frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2} \right)^2 \frac{d^3 p_+ d^3 p_-}{2\epsilon_+ 2\epsilon_- (2\pi)^6 \omega^2 (\omega^2 - k^2)^2} (4\pi)^3 |\bar{u}_- \gamma \cdot Q u_+|^2, \quad (97.9)$$

donde

$$\omega = \epsilon_+ + \epsilon_-, \quad \mathbf{k} = \mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{q} - \frac{1}{\omega^2} \mathbf{k} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{k});$$

$d\sigma_{\text{dis}}$  es la sección eficaz de dispersión elástica de un núcleo por el otro (en el sistema de su centro de masa). Esta sección eficaz viene dada por la fórmula de Rutherford  $\star\star$

$$d\sigma_{\text{dis}} = 4(Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{M^2 d\sigma}{q^4} \approx 4(Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{dq_x dq_z}{v^3 q^4} \quad (97.10)$$

(la última igualdad supone que los núcleos se desvían muy poco respecto de la dirección inicial del movimiento, el eje  $x$ ). Substituyendo esta expresión en (97.9) y efectuando de la manera ordinaria la suma respecto de las polarizaciones del par, obtendremos

$$d\sigma = (Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{e^4}{v^2} \left( \frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2} \right)^2 \text{Tr} \{ (\hat{p}_- + m) (\gamma \cdot Q) (\hat{p}_+ - m) (\gamma \cdot Q) \} \times \\ \times \frac{d^3 p_+ d^3 p_- dq_y dq_z}{4\pi^4 \epsilon_+ \epsilon_- q^4 (\omega^2 - k^2)^2 \omega^3}. \quad (97.11)$$

A partir de aquí el cálculo se efectúa en la aproximación en la que todos los logaritmos que resultan de la integración se consideran cantidades grandes. Veremos que con esta precisión el papel fundamental lo representan las energías del par  $\epsilon_+$ ,  $\epsilon_- \gg m$  y los ángulos  $\theta$  entre  $\mathbf{p}_+$  y  $\mathbf{p}_-$  tales que

\* En el caso no-relativista el impulso del fotón es pequeño comparado con la variación del impulso de las partículas que radian ( $|\delta p| \sim \omega/v$ ) y, por ello, se puede prescindir del mismo (en comparación con  $\delta p$ ) incluso allí donde no se prescinde de la energía del fotón. En el presente caso, esto se refiere sobre todo al fotón virtual, para el cual el cuadrado cuadridimensional  $k^2 = (p_+ + p_-)^2 > 0$ , de modo que  $|k| < \omega$ . La diferencia entre un fotón real y uno virtual se desvanece en estas condiciones, con lo cual queda justificada la utilización de la fórmula (95.15).

\*\* Los diagramas (97.6) se han representado en el supuesto de que la aproximación de Born es válida para la dispersión de los núcleos. Sin embargo, dado que la fórmula de Rutherford es exacta (para la interacción coulombiana), el que los resultados obtenidos sean correctos no exige, en realidad, que se cumpla la condición de aplicabilidad de dicha aproximación.

$$\frac{m}{\epsilon} \ll \theta \ll 1. \quad (97.12)$$

El cálculo de la traza en (97.11), prescindiendo de los términos que corresponde, da

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\dots\} = 16 [(\epsilon_+ \epsilon_- - \mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_-) \left( \mathbf{q}^2 - \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{k})^2}{\omega^2} \right) + \\ + 2(\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{q})(\mathbf{p}_- \cdot \mathbf{q}) + \frac{2\epsilon_+ \epsilon_-}{\omega^2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{k})^2 - \frac{2\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}}{\omega} (\epsilon_+ \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_- + \epsilon_- \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_+)], \end{aligned}$$

pudiéndose además hacer  $|\mathbf{p}_+| = \epsilon_+$ ,  $|\mathbf{p}_-| = \epsilon$ . En el denominador, en cambio,

$$\omega^2 - \mathbf{k}^2 \approx \epsilon_+ \epsilon_- \theta^2 + m^2 \frac{(\epsilon_+ + \epsilon_-)^2}{\epsilon_+ \epsilon_-}.$$

Efectuando la integración respecto de las direcciones de  $\mathbf{p}_+$  y  $\mathbf{p}_-$  para un valor dado del ángulo formado por ellos, se obtendrá

$$\begin{aligned} d\sigma = \frac{32}{3\pi^2} (Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{e^4}{v^2} \left( \frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2} \right)^2 (\epsilon_+^2 + \epsilon_-^2) d\epsilon_+ d\epsilon_- \times \\ \times \frac{\theta^3 d\theta}{\left[ \theta^2 + \frac{m^2 (\epsilon_+ + \epsilon_-)^2}{\epsilon_+^2 \epsilon_-^2} \right]^{\frac{3}{2}}} \frac{dq_y dq_z}{\mathbf{q}^2}. \quad (97.13) \end{aligned}$$

La forma de la dependencia con relación a  $\theta$  confirma la hipótesis (97.12), y la

integración respecto de  $d\theta$  da  $\ln \frac{\epsilon_+ + \epsilon_-}{m(\epsilon_+ + \epsilon_-)}$ . En cuanto a la integración del último

factor en (97.13), ésta se efectúa entre los límites  $q_y = q_z = 0$  y  $\sqrt{q_y^2 + q_z^2} \sim 1/R$ , donde  $R$  es una cantidad del orden del radio del núcleo (este valor corresponde a los parámetros de impacto mínimos, véase más adelante); esta integración da

$$\pi \ln (q_x^2 + q_y^2 + q_z^2) \approx 2\pi \ln \frac{1}{Rq_x}.$$

Por otra parte, la energía total del par, igual a la variación de energía de los núcleos, es

$$\epsilon \equiv (\epsilon_+ + \epsilon_-) = \frac{M}{2} (\mathbf{v}'^2 - \mathbf{v}^2) \approx Mv (v'_x - v_x) = vq_x,$$

de donde  $q_x = \epsilon/v$ . De esta manera se encuentra que

$$d\sigma = \frac{64}{3\pi} (Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{e^4 m^2}{v^2} \left( \frac{Z_2}{M_2} - \frac{Z_1}{M_1} \right)^2 \frac{\epsilon_+^2 + \epsilon_-^2}{\epsilon^4} \ln \frac{v}{R\epsilon} \ln \frac{\epsilon_+ \epsilon_-}{m\epsilon} d\epsilon_+ d\epsilon_-,$$

y después de integrar respecto de  $d\epsilon_+$  y de  $d\epsilon_-$  para un valor dado de la suma  $\epsilon$ :

$$d\sigma = \frac{27}{9\pi} (Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{e^4 m^2}{v^2} \left( \frac{Z_2}{M_2} - \frac{Z_1}{M_1} \right)^2 \ln \frac{v}{R\epsilon} \ln \frac{\epsilon}{m} \frac{d\epsilon}{\epsilon}. \quad (97.14)$$

La energía  $\varepsilon$  puede expresarse mediante el parámetro de impacto  $\rho \sim v/\varepsilon$  (la energía del par es del orden de magnitud de la frecuencia que corresponde al tiempo de colisión). Por ello, la divergencia logarítmica al integrar respecto de  $d\varepsilon$  en (97.14) trae consigo la misma divergencia respecto de los parámetros de impacto. Esto significa que lo que cuentan son los grandes valores de  $\rho$  [con ello, a la vez, queda justificado el uso de la sección eficaz de dispersión (97.10) en el campo puramente coulombiano del núcleo]. De acuerdo con esto, la región de energías que más influye es tal que  $m \ll \varepsilon \ll v/R$ . La integral de (97.14) da la sección eficaz total de formación de un par; en definitiva se obtiene (en unidades ordinarias)

$$\sigma = \frac{64}{27\pi} (Z_1 Z_2 \alpha)^3 r_e^2 \left( \frac{c}{v} \right)^2 \left( \frac{Z_2 m}{M_2} - \frac{Z_1 m}{M_1} \right)^2 \ln^3 \frac{\hbar v}{mc^2 R} \quad (97.15)$$

(E. M. Lifshits, 1935).

### PROBLEMA

Escribir la expresión de la sección eficaz de formación de un par en la colisión de dos núcleos rápidos que corresponde a los diagramas (97.2).

*Solución.* La amplitud de reacción es

$$M_{fi} = e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_-) \hat{A}^{(1)}(p_- - p) G(p) \hat{A}^{(2)}(p_+ + p) u(-p_+) + (1 \leftrightarrow 2),$$

donde  $A^{(1)}(q)$ ,  $A^{(2)}(q)$  son los campos exteriores creados por el primer núcleo y por el segundo; el término que no se ha escrito se obtiene a partir del primero permutando los números que caracterizan a los núcleos.

El potencial  $A^\mu = (A_0, \mathbf{A})$  creado por una partícula clásica que se mueve uniformemente con velocidad  $\mathbf{v}$  satisface las ecuaciones

$$\begin{aligned} \square A_0 &= -4\pi Ze\delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt} - \mathbf{r}_0), \\ \square \mathbf{A} &= -4\pi Zev\delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt} - \mathbf{r}_0). \end{aligned}$$

Sus componentes de Fourier son

$$A_0(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{8\pi^2 Ze}{\omega^2 - \mathbf{k}^2} e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_0} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}),$$

y análogamente para  $\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega)$ . En forma cuadridimensional

$$A^\mu(q) = -\frac{8\pi^2 Ze}{q^2} e^{iqx_0} U^\mu \delta(Uq),$$

donde  $U$  es la 4-velocidad de la partícula y  $x_0 = (0, \mathbf{r}_0)$ . Si el núcleo 1 se encuentra en reposo en el origen de coordenadas ( $\mathbf{r}_0^{(1)} = 0$ ),  $\rho \equiv \mathbf{r}_0^{(2)}$  es el vector correspondiente al parámetro de impacto (en el plano perpendicular a la dirección del movimiento del núcleo 2).

La amplitud es ahora

$$\begin{aligned} M_{fi} &= 4Z_1 Z_2 e^4 \bar{u}(p_-) Qu(-p_+), \\ Q &= \hat{U}^{(1)} (\hat{I} + I_m) \hat{u}^{(2)} + \hat{U}^{(2)} (\hat{I}' + I'_m) \hat{U}^{(1)}, \\ \bar{Q} &= \hat{U}^{(2)} (\hat{I}^* + I_m^*) \hat{u}^{(1)} + \hat{U}^{(1)} (\hat{I}'^* + I_m'^*) \hat{U}^{(2)}, \end{aligned}$$

donde  $I, I'$  son las integrales 4-vectoriales

$$I = \int p \frac{e^{-i(p_+ + p_-)p} \delta[U^{(1)}(p_- - p)] \delta[U^{(2)}(p_+ + p)]}{(p_- - p)^2 (p^2 + m^2) (p_+ + p)^2} d^4p,$$

$$I' = \int p \frac{e^{-i(p_- - p)p} \delta[U^{(1)}(p_+ + p)] \delta[U^{(2)}(p_- - p)]}{(p_- - p)^2 (p^2 + m^2) (p_+ + p)^2} d^4p,$$

e  $I_m, I'_m$  se obtienen substituyendo en el integrando  $p$  por  $m$ .

La probabilidad de que se forme un par en la colisión con un parámetro de impacto dado es

$$dw = \frac{|M_{fi}|^2}{2\epsilon_+ 2\epsilon_-} \frac{d^3p_+}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_-}{(2\pi)^3},$$

y después de sumar respecto de las polarizaciones del par se obtiene

$$dw = \frac{(Z_1 Z_2 e^4)^2}{(2\pi)^4 \epsilon_+ \epsilon_-} \text{Tr} \{ (\hat{p}_- + m) Q (\hat{p}_+ - m) \bar{Q} \} d^3p_+ d^3p_-.$$

En cuanto a la sección eficaz, ésta se obtiene integrando  $dw$  respecto de  $d^3p$  \*.

### § 98. Emisión de un fotón por un electrón en el campo de una onda electromagnética intensa

La aplicabilidad de la teoría de perturbaciones a los procesos de interacción de un electrón con el campo de radiación supone, no sólo que la constante de interacción  $\alpha$  sea pequeña, sino también que dicho campo sea suficientemente débil. Si  $a$  es la amplitud del 4-potencial clásico del campo de la onda electromagnética, una cantidad característica en este sentido lo es la razón invariante sin dimensiones

$$\xi = \frac{eV - a^2}{m}. \quad (98.1)$$

En este párrafo estudiaremos los procesos de radiación que se producen en la interacción de un electrón con el campo de una onda electromagnética intensa, para la cual  $\xi$  puede tener un valor cualquiera. El método aplicado se basa en tener en cuenta esta interacción de manera exacta; en cambio, la interacción del electrón con los nuevos fotones emitidos se puede considerar, al igual que antes, como una pequeña perturbación \*\*.

Consideremos una onda plana monocromática, que, para concretar, supondremos polarizada circularmente. Su 4-potencial lo escribiremos en la forma

$$A = a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi, \quad \varphi = kx, \quad (98.2)$$

donde  $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$  es el 4-vector de la onda ( $k^2 = 0$ ) y las 4-amplitudes  $a_1$  y  $a_2$  son iguales en módulo y ortogonales entre sí:

\* Cómo realizar los cálculos puede verse en L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITS, Phys. Zs. Sowjet., **6**, 244 (1934).

\*\* Un análisis sistemático de los diferentes procesos cuánticos en el campo de una intensa onda electromagnética plana se presenta en los trabajos siguientes: A. I. NIKISHOV, V. I. RITUS, Zh ETF **46**, 776, 1, 768 (1964); **47**, 1, 130 (1964); **52**, 1, 707 (1967); L. B. NAROZHNYI, A. I. NIKISHOV, V. I. RITUS, Zh ETF **47**, 930 (1964). En estos trabajos (que seguimos en nuestra exposición) se consideran, en particular, la radiación de un fotón y la formación de pares en el campo de la onda plana con diferentes polarizaciones.

$$a_1^2 = a_2^2 \equiv a^2, \quad a_1 a_2 = 0.$$

Supondremos que el potencial se ajusta al contraste que fija la condición de Lorentz, de modo que  $a_1 k = a_2 k = 0$ .

La función de onda exacta del electrón en el campo de una onda electromagnética plana cualquiera se encontró en el § 40 y viene dada por las fórmulas (40.7-8). Cambiaremos, sin embargo, su normalización: impondremos la condición de que  $\psi_p$  corresponda a una densidad espacial media del número de partículas igual a la unidad, de manera análoga a como normalizamos las funciones de onda de las partículas libres a razón de «una partícula por unidad de volumen». Dado que para la función (40.7) la densidad media es igual a  $\bar{J}_0 = q_0/p_0$ , para conseguir la normalización impuesta hay que multiplicarla por  $\sqrt{p_0/q_0}$ , es decir, en (40.7) hay que substituir el factor  $1/\sqrt{2p_0}$  por  $1/\sqrt{2q_0}$ . Para una onda con el 4-potencial (98.2) obtendremos

$$\begin{aligned} \psi_p = & \left[ 1 + \frac{e}{2(kp)} (\hat{k}a_1 \cos \varphi + \hat{k}a_2 \operatorname{sen} \varphi) \right] \frac{u(p)}{\sqrt{2q_0}} \times \\ & \times \exp \left\{ -ie \frac{(a_1 p)}{(kp)} \operatorname{sen} \varphi + ie \frac{(a_2 p)}{(kp)} \cos \varphi - iq x \right\}, \end{aligned} \quad (98.3)$$

donde

$$q^\mu = p^\mu - e^2 \frac{a^2}{2(kp)} k^\mu. \quad (98.4)$$

Según (40.14) el 4-vector  $q$  es el 4-impulso cinético medio del electrón; lo llamaremos quasi-impulso.

El elemento de matriz  $S$  para la transición del electrón del estado  $\psi_p$  al estado  $\psi_{p'}$  acompañada de emisión de un fotón con 4-impulso  $k^{\mu'} = (\omega', \mathbf{k}')$  y 4-vector polarización  $e'$  es

$$S_{fi} = -ie \int (\bar{\psi}_{p'} e' \psi_p) \frac{e^{ik'x}}{\sqrt{2\omega'}} d^4x. \quad (98.5)$$

El integrando en (98.5) es combinación lineal de las cantidades

$$\begin{aligned} & e^{-ia_1 \operatorname{sen} \varphi + ia_2 \cos \varphi}, \\ & \cos \varphi e^{-ia_1 \operatorname{sen} \varphi + ia_2 \cos \varphi}, \\ & \operatorname{sen} \varphi e^{-ia_1 \operatorname{sen} \varphi + ia_2 \cos \varphi}, \end{aligned}$$

donde

$$a_1 = e \left( \frac{a_1 p}{kp} - \frac{a_1 p'}{kp'} \right), \quad a_2 = e \left( \frac{a_2 p}{kp} - \frac{a_2 p'}{kp'} \right). \quad (98.6)$$

Junto con el factor  $\exp [i(k' + p' - p)x]$ , en estas cantidades se incluye toda la dependencia del integrando con relación a  $x$ .

Desarrollémoslas en serie de Fournier, designando los coeficientes del desarrollo por  $B_s$ ,  $B_{1s}$ ,  $B_{2s}$ , respectivamente, por ejemplo:

$$e^{-ia_1 \operatorname{sen} \varphi + ia_2 \cos \varphi} = e^{-i\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} B_s e^{-is\varphi}.$$

Estos coeficientes se expresan mediante funciones de Bessel según las fórmulas:

$$\begin{aligned} B_s &= J_s(z) e^{is\varphi_0}, \\ B_{1s} &= \frac{1}{2} [J_{s+1}(z) e^{i(s+1)\varphi_0} + J_{s-1}(z) e^{i(s-1)\varphi_0}], \\ B_{2s} &= \frac{1}{2i} [J_{s+1}(z) e^{i(s+1)\varphi_0} - J_{s-1}(z) e^{i(s-1)\varphi_0}], \end{aligned} \quad (98.7)$$

donde

$$z = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{\alpha_1}{z}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{\alpha_2}{z}.$$

Las funciones  $B_s$ ,  $B_{1s}$ ,  $B_{2s}$  están ligadas entre sí por la relación

$$\alpha_1 B_{1s} + \alpha_2 B_{2s} = s B_s, \quad (98.8)$$

que es consecuencia de la conocida relación entre funciones de Bessel:

$$J_{s-1}(z) + J_{s+1}(z) = 2s J_s(z)/z.$$

En definitiva, el elemento de matriz (98.5) toma la forma

$$S_{fi} = \frac{1}{(2\omega' 2q_0 2q_0)^{1/2}} \sum_s M_{fi}^{(s)} (2\pi)^4 i \delta^{(4)}(sk + q - q' - k'), \quad (98.9)$$

donde

$$\begin{aligned} M_{fi}^{(s)} = & -e\sqrt{4\pi} \bar{u}(p') \left\{ \left( \hat{e}' - e^2 \frac{a^2(k\hat{e}')}{2(kp)(kp')} \hat{k} \right) B_s + \right. \\ & \left. + e \left( \frac{a_1 \hat{k} \hat{e}'}{2(kp')} + \frac{\hat{e}' \hat{k} a_1}{2(kp)} \right) B_{1s} + e \left( \frac{a_2 \hat{k} \hat{e}'}{2(kp')} + \frac{\hat{e}' \hat{k} a_2}{2(kp)} \right) B_{2s} \right\} u(p). \end{aligned} \quad (98.10)$$

Así, pues, el elemento de matriz  $S_{fi}$  es una suma de infinitos términos, a cada uno de los cuales corresponde la ley de conservación

$$sk + q = q' + k'. \quad (98.11)$$

Dado que

$$q^2 = q'^2 = m^2 (1 + \xi^2) \equiv m_*^2 \quad (98.12)$$

[cf. (40.15)] y que  $k^2 = k'^2 = 0$ , la igualdad (98.11) es sólo posible para  $s \geq 1$ . El término  $s$  de la suma representa la emisión de un fotón  $k'$  a expensas de la absorción de  $s$  fotones constituyentes de la onda con 4-impulsos  $k$ . Por la forma de la igualdad (98.11) es evidente que todas las relaciones cinemáticas que valen para el efecto Compton son aplicables a los procesos considerados si se substituyen los impulsos del electrón por los cuasi-impulsos  $q$ , y el impulso del fotón incidente, por el 4-vector  $sk$ . En particular, para la frecuencia del fotón emitido, en el sistema de referencia en que el electrón se encuentra inmóvil en promedio ( $\mathbf{q} = 0$ ,  $q_0 = m_*$ ), tenemos

$$\omega' = \frac{s\omega}{1 + \frac{s\omega}{m_*} (1 - \cos \theta)}, \quad (98.13)$$

donde  $\theta$  es el ángulo formado por  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{k}'$  [cf. (86.8)]. Cabe decir que las frecuencias  $\omega'$  son armónicos de la frecuencia  $\omega$ .

Según las notaciones que hemos adoptado (§ 65), la amplitud del proceso de emisión del armónico de orden  $s$  coincide con  $M_{fi}^{(s)}$ , y la expresión

$$dW_s = |M_{fi}^{(s)}|^2 \frac{d^3 k' d^3 q'}{(2\pi)^6 2\omega' 2q_0' 2q_0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(sk + q - q' - k') \quad (98.14)$$

da la correspondiente probabilidad diferencial (referida a la unidad de volumen y a la unidad de tiempo) \*.

La estructura de las amplitudes (98.10) es análoga a la estructura de las amplitudes de dispersión con ondas planas. Por ello, también las operaciones de suma respecto de las polarizaciones de las partículas se efectúa de la manera ordinaria. Después de sumar respecto de las polarizaciones del electrón y del fotón finales y de promediar con relación a la polarización del electrón inicial, se obtiene

$$\begin{aligned} dW_s = & \frac{e^2 m^2}{4\pi} \frac{d^3 k' d^3 q'}{q_0' q_0' \omega'} \delta^{(4)}(sk + q - q' - k') \times \\ & \times \left\{ -2J_s^s(z) + \xi^s \left( 1 + \frac{(kk')^2}{2(kp)(kp')} \right) (J_{s+1}^s + J_{s-1}^s - 2J_s^s) \right\}. \end{aligned} \quad (98.15)$$

Con vistas a la integración de la expresión (98.15) haremos observar que, dada la simetría axil del campo de la onda polarizada circularmente, la probabilidad diferencial es independiente del ángulo acimutal común  $\varphi$  en torno de la dirección de  $\mathbf{k}$ . Junto con la presencia de una función- $\delta$ , esta circunstancia hace posible efectuar la integración respecto de todas las variables, salvo una; para ésta elegiremos la cantidad invariante  $u = (kk')/(kp')$ . Entonces, después de integrar respecto de  $d^3 k d\varphi d(q_0' + \omega')$ , se tiene

$$\delta^{(4)}(sk + q - q' - k') \frac{d^3 q' d^3 k'}{q_0' \omega'} \rightarrow \frac{2\pi d u}{(1+u)^2}.$$

En efecto, en el sistema del centro de masa (el sistema en el cual  $s\mathbf{k} + \mathbf{q} = \mathbf{q} + \mathbf{k}' = 0$ ) dicha integración da  $2\pi|q'|d\cos\theta/E_s$ , donde  $E_s = s\omega + q_0 = \omega' + q_0'$  y  $\theta$  es el ángulo formado por  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{q}'$  [cf. la transformación (65.12)]. Por otra parte, en este mismo sistema

$$u = \frac{E_s}{q_0' - |\mathbf{q}'|\cos\theta} - 1, \quad d\cos\theta = \frac{E_s du}{|\mathbf{q}'|(1+u)^2}.$$

Al intervalo  $-1 \leq \cos\theta \leq 1$  corresponde el intervalo

$$0 \leq u \leq u_s \equiv \frac{E_s^2}{m_*^2} - 1 = \frac{2s(kp)}{m_*^2}$$

(al efectuar las transformaciones hay que recordar que  $kp = kq$ ).

\* Hay que hacer observar que la normalización de las funciones  $\psi_p$  a densidad unidad corresponde a la normalización respecto de la función- $\delta$  «relativa a la escala  $\mathbf{q}$ » [cf. (40.17), donde el factor  $q_0/p_0$  no existirá ahora en el segundo miembro de la igualdad]. Precisamente por esto el número de estados finales del electrón debe medirse por el elemento  $d^3 q'$ .

De esta manera, la probabilidad total de radiación por unidad de volumen y unidad de tiempo valdrá \*

$$W = \sum_{s=1}^{\infty} W_s = \frac{e^2 m^2}{4q_0} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{u_s} \frac{du}{(1+u)^2} \left\{ -4J_s^2(z) + \right. \\ \left. + \xi^2 \left( 2 + \frac{u^2}{1+u} \right) (J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2 - 2J_s^2) \right\}, \quad (98.16)$$

donde \*\*

$$u = \frac{(kk')}{(kp)}, \quad u_s = 2s \frac{(kp)}{m_*^2}, \quad z = 2sm^2 \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \sqrt{\frac{u}{u_s} \left( 1 - \frac{u}{u_s} \right)}. \quad (98.17)$$

Cuando  $\xi \ll 1$  (condición de aplicabilidad de la teoría de perturbaciones), los integrandos en (98.16) se pueden desarrollar en serie de potencias de  $\xi$ . Así, para el primer término del desarrollo de  $W_1$  se encuentra

$$W_1 = \frac{e^2 m^2}{4p_0} \xi^3 \int_0^{u_1} \left[ 2 + \frac{u^2}{1+u} - 4 \frac{u}{u_1} \left( 1 - \frac{u}{u_1} \right) \right] du = \\ = \frac{e^2 m^2}{4p_0} \xi^3 \left[ \left( 1 - \frac{4}{u_1} - \frac{8}{u_1^2} \right) \ln(1+u_1) + \frac{1}{2} + \frac{8}{u_1} - \frac{1}{2(1+u_1)^2} \right], \quad (98.18)$$

expresión en la cual  $u_1 \approx 2(kp)/m^2$ . Como debía ocurrir, este resultado coincide con la fórmula de Klein-Nishina para la dispersión de un fotón por un electrón: haciendo en (98.18) —  $a^2 = 4\pi/\omega$ ,  $\xi^2 = 4\pi e^2/m^2 \omega$  y dividiendo por la densidad de flujo incidente (65.14), volvemos a (86.16) (la sección eficaz integral de dispersión no depende de la polarización inicial del fotón) \*\*\*.

Escribamos también la expresión para la probabilidad de emisión del 2º armónico (primer término del desarrollo de  $W_2$  para  $\xi \ll 1$ ):

$$W_2 = \frac{e^2 m^2 \xi^4}{p_0} \int_0^{u_2} \frac{du}{(1+u)^2} \frac{u}{u_2} \left( 1 - \frac{u}{u_2} \right) \left[ 2 + \frac{u^2}{1+u} - 4 \frac{u}{u_2} \left( 1 - \frac{u}{u_2} \right) \right] = \\ = \frac{e^2 m^2 \xi^4}{p_0} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{3u_1} - \frac{4}{u_1^2} - \frac{2}{u_1^3} - \frac{1}{2(1+2u_1)} - \left( \frac{1}{2u_1} - \frac{3}{2u_1^2} - \frac{3}{u_1^3} - \frac{1}{u_1^4} \right) \times \right. \\ \left. \times \ln(1+2u_1) \right]. \quad (98.19)$$

En general, el término fundamental en  $W_s$  (para valores de  $s$  no demasiado grandes) es proporcional a  $\xi^{2s}$ .

\* Esta fórmula fue obtenida también por I. I. Gol'dman (1964).

\*\* Para el cálculo de  $z$  hay que tener antes en cuenta que  $z^2 = (a_1 Q)^2 + (a_2 Q)^2 = a^2 Q^2$ , donde  $Q = q/(kq) - q'/(kq')$ . Es fácil comprobar esta igualdad eligiendo el sistema de referencia en que  $(a_1)_0 = (a_2)_0 = 0$  y los vectores  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $k$  están dirigidos según los ejes  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ , y observando que, en virtud de  $kQ = 0$ , será  $Q_0 = Q_3$ .

\*\*\* El valor indicado de  $a^2$  corresponde a la normalización del 4-potencial a razón de « un fotón por unidad de volumen ». Para determinarlo hay que igualar  $\omega$  a la energía del campo clásico con el 4-potencial real (98.2).

Consideremos ahora el caso opuesto:  $\xi \gg 1$ . El parámetro  $\xi$  puede aumentarse, por ejemplo, disminuyendo la frecuencia  $\omega$  manteniendo fija la intensidad del campo (es evidente que  $\xi = eF/m\omega$ , donde  $F$  es la amplitud de dicha intensidad). Es claro por ello que el caso  $\xi \gg 1$  se reduce en esencia al de los procesos que ocurren en un campo homogéneo constante, cuyas intensidades  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  son perpendiculares entre sí e iguales en módulo (como es costumbre, llamaremos a un campo de estas características campo en cruz). La probabilidad de radiación en este campo se puede obtener pasando al límite para  $\xi \rightarrow \infty$ , pero es más sencillo efectuar los cálculos directamente para un campo constante, tomando el 4-potencial en la forma

$$A^\mu = a^\mu \varphi, \quad \varphi = kx, \quad (ak) = 0 \quad (98.20)$$

(de modo que  $F_{\mu\nu} = k_\mu a_\nu - k_\nu a_\mu = \text{const}$ ). La función de onda exacta del electrón en este campo se obtiene substituyendo (98.20) en (40.7-8):

$$\begin{aligned} \psi_p = & \left[ 1 + e^{\frac{\hat{k}a}{2(kp)} \varphi} \right] \frac{u(p)}{\sqrt{2p_0}} \times \\ & \times \exp \left\{ -ie \frac{(ap)}{2(kp)} \varphi^2 + ie^2 \frac{a^2}{6(kp)} \varphi^3 - ipx \right\}. \end{aligned} \quad (98.21)$$

El resultado que se obtiene mediante esta fórmula es exacto para la emisión de la radiación por un electrón en un campo en cruz, cualquiera que sea la energía del electrón. Sin embargo, es notable que, en el caso ultrarrelativista, este resultado (en la forma en que lo hemos presentado, véase más adelante) corresponde a la radiación por un electrón no sólo en un campo en cruz, sino también en cualquier campo electromagnético homogéneo constante, en particular en un campo magnético constante (caso que se estudió en el § 59).

Para expresar en fórmulas lo que acabamos de decir, observemos que el estado de una partícula en un campo homogéneo constante arbitrario se determina por tantos números cuánticos cuantos son necesarios para fijar el estado de una partícula libre y que estos números cuánticos se pueden siempre elegir de manera que al desconectar el campo se transformen en los números cuánticos de una partícula libre, es decir, en su 4-impulso  $p^\mu (p^2 = m^2)$ . De esta manera, el estado de una partícula en un campo constante se representará por un 4-vector constante  $p$ .

La intensidad total de la radiación, que es una cantidad invariante, depende solamente de los invariantes que se pueden formar a partir del 4-tensor  $F_{\mu\nu}$  y del 4-vector  $p^\mu$ , ambos constantes\*. Teniendo también en cuenta que  $F_{\mu\nu}$  debe figurar en la intensidad únicamente junto con la carga  $e$ , obtendremos tres invariantes sin dimensiones

$$\begin{aligned} \chi^2 = & -\frac{e^2}{m^6} (F_{\mu\nu} p^\nu)^2 = -\frac{e^2}{m^6} a^2 (kp)^2, \quad f = \frac{e^2 (F_{\mu\nu})^2}{m^4}, \\ g = & \frac{e^2}{m^4} e_{\lambda\mu\nu\rho} F^{\lambda\mu} F^{\nu\rho}. \end{aligned} \quad (98.22)$$

\* Razonamientos análogos pueden aplicarse también a la intensidad diferencial.

En un campo en cruz es  $f = g \equiv 0$ , mientras que en el caso general son diferentes de cero los tres invariantes. Pero si el electrón es ultrarrelativista ( $p_0 \gg m$ ) y el vector  $\mathbf{p}$  forma con los campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  ángulos tales que  $\theta \gg m/p_0$ , se tendrá  $\chi^2 \gg f, g$  (en otras palabras, si una partícula es ultrarrelativista, para casi todas las direcciones de  $\mathbf{p}$  un campo constante arbitrario se comporta como un campo en cruz). Si, además, las intensidades del campo  $|\mathbf{E}|, |\mathbf{H}| \ll m^2/e (= m^2c^3/e\hbar)$ , se tendrá  $|f|, |g| \ll 1$ <sup>\*</sup>. En estas condiciones, la intensidad calculada para el campo en cruz y expresada en función del invariante  $\chi$  valdrá también para la radiación en cualquier campo constante.

El invariante  $\chi$  a su vez se expresa en función de las intensidades  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , mediante la relación

$$\chi^2 = \frac{e^2}{m^6} \{ (|\mathbf{p} \times \mathbf{H}| + p_0 E)^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})^2 \}.$$

Para un campo magnético constante  $\chi$  coincide con la magnitud (59.3) introducida en el § 59, de modo que las consideraciones aquí expuestas proporcionan otro método para obtener los resultados del § 59<sup>\*\*</sup>.

---

\* Obsérvese que, en todo esto, en la cantidad  $(F_{\mu\nu}p^\nu)^2$ , y sin perder precisión, se puede considerar  $p$  como 4-impulso cinético ordinario de la partícula.  
 \*\* Cómo se efectúan los cálculos siguiendo este método, puede verse en: A. I. NIKISHOV, V. I. RITUS, Zh ETF **46**, 1.769 (1964).



## APÉNDICE \*

### § a. El operador de las rotaciones finitas

Los operadores  $\mathbf{j}^2$  — el cuadrado del momento cinético — y  $j_z$  — la proyección de dicho momento sobre el eje de coordenadas  $z$  — commutan no solamente entre sí, sino también con el operador  $j_\zeta = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$ , proyección del momento cinético sobre una dirección dada  $\mathbf{n}$  (eje  $\zeta$ ) en el espacio. Esta circunstancia se comprueba fácilmente mediante un cálculo directo, pero es también evidente a priori. El operador momento cinético está vinculado con el operador de una rotación infinitesimal, y el producto escalar de dos vectores  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$  es invariante respecto de cualquier rotación del sistema de coordenadas.

De esta manera, son posibles estados con determinados valores de los números  $j, j_z = m$  y  $j_\zeta = m'$  y surge la cuestión de cómo hallar las correspondientes funciones de onda — funciones propias comunes a los operadores  $\mathbf{j}^2, j_z, j_\zeta$ . Recordemos que tales estados los encontramos ya, en particular, al cuantificar la rotación de un sistema que posee simetría axial, considerado como un sólido (trompo simétrico); en este caso la dirección  $\mathbf{n}$  es el eje del trompo (III, § 103).

El problema es hallar las funciones  $\psi_{jmm'}$  está íntimamente ligado desde el punto de vista matemático con la cuestión de cómo se transforman las funciones propias del momento cinético en las rotaciones de ángulo finito.

Introduzcamos dos sistemas de coordenadas (ambos directos): el sistema fijo  $xyz$  y el sistema «móvil»  $\xi\eta\zeta$ , de eje  $\zeta$  dirigido según el versor arbitrario  $\mathbf{n}$ (variable). Fijaremos la rotación del sistema  $\xi\eta\zeta$  respecto del  $xyz$  mediante los tres ángulos de Euler  $\alpha, \beta, \gamma$ , definidos de la siguiente manera: 1) rotación de ángulo  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ) en torno del eje  $z$ , 2) rotación de ángulo  $\beta$  ( $0 \leq \beta \leq \pi$ ) en torno de la nueva posición ( $y'$ ) del eje  $y$ , 3) rotación de ángulo  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ ) en torno de la posición

\* Los dos párrafos de este apéndice son continuación del capítulo 14 de la *Mecánica cuántica* y deben seguir a III, § 109.

final ( $\zeta$ ) que se obtiene para el eje  $z^*$ . Es evidente que los ángulos  $\alpha, \beta$  coinciden con los ángulos esféricos  $\varphi$  y  $\theta$  del nuevo eje  $\zeta$  respecto de los ejes  $xyz$ :

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = \theta.$$

Sean  $\psi_{jm}$  ( $m = -j, \dots, j$ ) las funciones que en el sistema de coordenadas  $xyz$  representa un estado con un valor determinado de  $j$  y  $\psi'_{jm}$ , el mismo estado referido a los ejes  $\xi\eta\zeta$ ; en el primer caso  $m$  es el valor de  $j_z$ , y en el segundo,  $m' = j_\zeta$ . Las funciones del primer grupo y las del segundo están ligadas entre sí por relaciones lineales que escribiremos en la forma

$$\psi_{jm} = \sum_{m'} D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) \psi'_{jm'}. \quad (a.1)$$

Los coeficientes  $D_{m'm}^{(j)}$  constituyen (con relación a los índices  $m'm$ ) una matriz de orden  $(2j + 1)$  —una matriz de rotaciones finitas—. Sus elementos son funciones de los ángulos  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Si imaginamos los ejes  $\xi\eta\zeta$  «rígidamente» ligados con el sistema físico, las cantidades  $\psi'_{jm'}$  tendrán valores determinados que no dependen de la orientación del sistema (designémoslos por  $\psi_{jm}'$ ). Por su parte, las fórmulas (a.1) darán la dependencia angular de las funciones  $\psi_{jm}$ . Supongamos ahora que el estado  $jm$  posee también un valor determinado  $m'$  de la proyección del momento cinético sobre el eje  $\zeta$ . Esto significa que de todas las cantidades  $\psi_{jm}'$  sólo una será diferente de cero —la que posee el valor dado  $m'$ —. Entonces la suma que figura en (a.1) se reduce a un sólo término:

$$\psi_{jm'm'} = \psi_{jm}' D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma). \quad (a.2)$$

Vemos así que los elementos de matriz  $D_{m'm}^{(j)}$  determinan la dependencia angular de las funciones  $\psi_{jm'm'}$ . A la vez queda establecida así la relación antes citada entre los elementos de matriz de las rotaciones finitas y las funciones de onda  $\psi_{jm'm'}$ .

La construcción efectiva de la matriz  $D^{(j)}$  se puede llevar a cabo mediante la representación espinorial de las funciones  $\psi_{jm}$ . Con vistas a esto, recordemos las fórmulas de transformación de los espinores (véase III, § 58), escribiéndolas de acuerdo con la definición de los ángulos de Euler que hemos adoptado aquí. Las componentes de un spinor contravariante ( $\psi^1, \psi^2$ ) en el sistema  $xyz$  están ligadas con las componentes ( $\psi'^1, \psi'^2$ ) en el sistema  $\xi\eta\zeta$ , obtenido a partir del  $xyz$  mediante la rotación de ángulos  $\alpha\beta\gamma$ , por las fórmulas de transformación

\* Esta definición de los ángulos de Euler difiere de la utilizada en I (§ 35) y III (§ 58) en que la segunda rotación tiene lugar en torno del eje  $y'$ , y no en torno del eje  $x'$ . Los ángulos  $\alpha, \beta, \gamma$  están ligados con los ángulos  $\varphi, \theta, \psi$  de I y III (no se confundan con los ángulos esféricos  $\varphi, \theta$ !) por las igualdades:

$$\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \beta, \quad \psi = \gamma - \frac{\pi}{2}.$$

En esta definición de  $\alpha, \beta, \gamma$  seguimos a Edmonds (A. R. EDMONDS, *Angular momentum in quantum mechanics*, Princeton, 1957).

$$\begin{aligned}\psi^1 &= \psi^{1'} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \frac{\beta}{2} - \psi^{3'} e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \sin \frac{\beta}{2}, \\ \psi^3 &= \psi^{1'} e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \sin \frac{\beta}{2} + \psi^{3'} e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \frac{\beta}{2}.\end{aligned}\quad (\text{a.3})$$

En cuanto a las componentes covariantes de un espinor ( $\psi_1, \psi_2$ ), éstas se transforman según la ley conjugado-compleja.

Para  $j = 1/2$  las dos funciones  $\psi_{1/2m}$  ( $m = \pm 1/2$ ) constituyen precisamente un espinor covariante de primer orden (véase III, § 58). Esto permite escribir sin más la matriz de la transformación (a.1):

$$D_{m'm}^{(1/2)} = e^{im'\gamma} d_{m'm}^{(1/2)}(\beta) e^{ima},$$

donde la matriz

$$d_{m'm}^{(1/2)} = \left\{ \begin{array}{c|cc} m' \diagdown m & | & \\ \hline & 1/2 & -1/2 \\ \hline 1/2 & \cos \frac{\beta}{2} & \sin \frac{\beta}{2} \\ -1/2 & -\sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{array} \right. . \quad (\text{a.4})$$

Para  $j$  arbitrario, se puede establecer una correspondencia entre las funciones  $\psi_{jm}$  ( $m = j, j-1, \dots, -j$ ) y las componentes de un espinor simétrico de orden  $2j$  según la fórmula III (58.1):

$$\psi_{jm} = \frac{1}{V(j+m)! (j-m)!} \underbrace{\psi}_{j+m} \underbrace{\psi}_{j-m} \dots \underbrace{\psi}_{j+1} \underbrace{\psi}_{j-1} \dots$$

La matriz de transformación de las componentes de un espinor de orden  $2j$  es el producto de  $2j$  matrices  $D^{(1/2)}$ , cada una de las cuales actúa sobre uno de los índices espinoriales. Efectuando el producto y pasando de nuevo a las funciones  $\psi_{jm}$ , obtendremos la transformación de estas últimas en la forma

$$D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{im'\gamma} d_{m'm}^{(j)}(\beta) e^{ima} \quad (\text{a.5})$$

con determinadas funciones  $d_{m'm}^{(j)}(\beta)$  <sup>★</sup>. (No escribiremos aquí el resultado que se obtiene de esta manera, ya que una expresión más conveniente en el caso de las funciones  $d_{m'm}^{(j)}$  puede obtenerse basándose en otras consideraciones — véase más adelante.)

La matriz  $D_{m'm}^{(j)}$  — en tanto que matriz correspondiente a una rotación — es unitaria. A la vez lo es también la matriz  $d_{m'm}^{(j)}$ . Además, esta última es real [conforme se sigue de (a.4) y de su generalización para  $j$  arbitrario]. Dado que la trans-

<sup>★</sup> Véase el libro antes citado de Edmonds [la definición adoptada por nosotros para las funciones  $D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)$  difiere de la definición de Edmonds en la permutación de  $\alpha$  y  $\gamma$ ].

formación inversa se obtiene cambiando de signo  $\alpha\beta\gamma$ , la condición de unitariedad nos da

$$d_{m'm}^{(j)}(-\beta) = d_{mm'}^{(j)}(\beta). \quad (\text{a.6})$$

Además, son válidas las siguientes igualdades:

$$d_{m'm}^{(j)}(\beta) = d_{-m,-m'}^{(j)}(\beta), \quad (\text{a.7})$$

$$\begin{aligned} d_{m'm}^{(j)}(\pi) &= (-1)^{j+m} \delta_{m',-m}, \quad d_{m'm}^{(j)}(-\pi) = (-1)^{j-m} \delta_{m',-m}, \\ d_{m'm}^{(j)}(0) &= \delta_{m'm}. \end{aligned} \quad (\text{a.8})$$

Estas son evidentes para  $j = 1/2$  teniendo en cuenta (a.4), y también lo es su generalización al caso de valores arbitrarios cualesquiera de  $j$  en virtud del método antes descrito para construir la matriz de la transformación.

Efectuemos un giro de ángulo  $\pi - \beta$  considerado como resultado de dos rotaciones sucesivas de ángulos  $\pi$  y  $-\beta$ :

$$d_{m'm}^{(j)}(\pi - \beta) = \sum_{m''} d_{m'm''}^{(j)}(\pi) d_{m''m}^{(j)}(-\beta) = (-1)^{j-m'} d_{-m'm}^{(j)}(-\beta),$$

o bien, aplicando (a.6),

$$d_{m'm}^{(j)}(\pi - \beta) = (-1)^{j-m'} d_{m,-m'}^{(j)}(\beta). \quad (\text{a.9})$$

El resultado de dos rotaciones en torno de un mismo eje es independiente del orden en que se suceden. Por lo tanto, hemos de obtener el mismo resultado efectuando las rotaciones de ángulos  $-\beta$  y  $\pi$  en orden inverso. Haciéndolo así y comparando con (a.9) el resultado a que se llega, se obtendrá la relación

$$d_{m'm}^{(j)}(\beta) = (-1)^{m'-m} d_{-m',-m}^{(j)}(\beta). \quad (\text{a.10})$$

De (a.10) y (a.7) se sigue que

$$d_{m'm}^{(j)}(\beta) = (-1)^{m'-m} d_{mm'}^{(j)}(\beta). \quad (\text{a.11})$$

Tomando (a.6-11) como base, se pueden escribir diferentes propiedades de simetría de los elementos de matriz  $D_{m'm}^{(j)}$ . Observemos, en particular, la expresión del elemento conjugado-complejo:

$$D_{m'm}^{(j)*}(\alpha, \beta, \gamma) = D_{m'm}^{(j)}(-\alpha, \beta, -\gamma) = (-1)^{m'-m} D_{-m',-m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma). \quad (\text{a.12})$$

Desde el punto de vista matemático, las matrices  $D^{(j)}$  constituyen una representación unitaria irreducible del grupo de las rotaciones de dimensión  $2j + 1$ . De aquí se siguen, sin más, las relaciones de ortogonalidad y de normalización para estas matrices:

$$\int D_{m'_1 m'_2}^{(j_1)*}(\alpha, \beta, \gamma) D_{m'_2 m'_3}^{(j_2)}(\alpha, \beta, \gamma) \frac{d\omega}{8\pi^2} = \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} \delta_{m'_1 m'_2} \frac{1}{2j_1 + 1}, \quad (\text{a.13})$$

donde  $d\omega = \sin \beta d\alpha d\beta d\gamma$ , de modo que  $\int d\omega = 8\pi^2$ .

La ortogonalidad de las funciones respecto de los índices  $m$  y  $m'$  queda asegurada por el factor  $e^{i(m\alpha+m'\gamma)}$ . En cambio, la ortogonalidad con relación al índice  $j$  está ligada con las funciones  $d_{m'm}^{(j)}$ , para las cuales tenemos

$$\int_0^\pi d_{m'_1 m}^{(j_1)} d_{m'_2 m}^{(j_2)} \frac{\sin \beta d\beta}{2} = \frac{1}{2j+1} \delta_{j_1 j_2}. \quad (\text{a.14})$$

Al principio de este párrafo se recordó que el problema de los estados con valores determinados  $jmm'$  fue considerado ya en la cuantificación del movimiento del trompo simétrico. La dependencia angular de las funciones de onda de estos estados se determinó por la fórmula III (103.10). Utilizando este resultado y cambiando como corresponde la notación de las variables y la normalización de las funciones, obtendremos

$$d_{m'm}^{(j)}(\beta) = (-1)^{j-m'} \left[ \frac{(j+m')!}{2^{j+m'} (j-m')! (j+m)! (j-m)!} \right]^{1/2} (1 + \cos \beta)^{-\frac{m'+m}{2}} \times \\ \times (1 - \cos \beta)^{-\frac{m'-m}{2}} \left( \frac{d}{d \cos \beta} \right)^{j-m'} [(1 + \cos \beta)^{j+m} (1 - \cos \beta)^{j-m}]. \quad (\text{a.15})$$

Si bien al deducir esta fórmula en el problema del trompo se consideraban valores de  $j$  enteros, en realidad expresaba, sin embargo, propiedades generales de las representaciones continuas del grupo de rotaciones y es válida para valores  $j$  cualesquiera.

En particular, para  $j = 1$  se obtendrá

$$d_{11}^{(1)} = d_{-1-1}^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + \cos \beta), \quad d_{00}^{(1)} = \cos \beta, \\ d_{1-1}^{(1)} = d_{-11}^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - \cos \beta), \quad d_{10}^{(1)} = -d_{01}^{(1)} = d_{0-1}^{(1)} = \\ = -d_{-10}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta. \quad (\text{a.16})$$

Para  $j = l$  y  $m' = 0$  la fórmula (a.15) se transforma en

\* Esta relación para las representaciones de un grupo continuo constituye una generalización inmediata de las relaciones de ortogonalidad para las representaciones de los grupos finitos,

$$\frac{1}{g} \sum_G G_{ik}^{(\alpha)} G_{lm}^{(\beta)} = \frac{1}{f_\alpha} \delta_{il} \delta_{km} \delta_{\alpha\beta}$$

[véase II (94.9);  $\alpha$  y  $\beta$  son los números de las representaciones,  $f_\alpha$  su dimensión y  $g$  el orden del grupo].

La integración respecto de  $d\omega$  es la llamada integración invariante en el grupo; el elemento de integración se elige de manera que aplicándole todos los elementos del grupo se obtiene de nuevo el elemento de integración.

$$d_{0m}^{(l)}(\beta) = (-1)^m \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \beta). \quad (\text{a.17})$$

Es fácil reconocer el origen de esta fórmula en la definición de partida (a.1). Sea  $\psi_{jm}$  una función propia del momento orbital, es decir, un armónico esférico  $Y_{lm}(\beta, \alpha)$  (función de los ángulos esféricos,  $\varphi \equiv \alpha$ ,  $\theta \equiv \beta$ ); refiramos al eje  $\zeta$  los valores de  $Y_{lm}$  en el segundo miembro de la igualdad (a.1). Teniendo en cuenta (7.2 a), de (a.1) se deduce

$$Y_{lm}(\beta, \alpha) = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_{0m}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma), \quad (\text{a.18})$$

lo que equivale a (a.17).

Una expresión simple para las funciones  $d_{\pm 1m}^{(l)}$  se obtuvo en el § 16 [véase (16.24)].

### § b. Elementos de matriz para el trompo

El operador de la transformación del producto de dos funciones propias del momento cinético ( $\psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2}$ ) que corresponde a una rotación es el producto de las matrices  $D^{(j_1)} D^{(j_2)}$ . Por otra parte, según la fórmula de composición de los momentos

$$\psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} = \sum_j C_{m_1 m_2}^{jm} \psi_{jm} \equiv C \psi_{jm}$$

( $C_{m_1 m_2}^{jm}$  son los coeficientes de Clebsch-Gordan;  $m = m_1 + m_2$ ) estos productos están ligados por una matriz unitaria  $C$  con las funciones  $\psi_{jm}$ , que se transforman en una rotación según la matriz  $D^{(j)}$ . De aquí se sigue que

$$D^{(j_1)} D^{(j_2)} = C^+ D^{(J)} C,$$

o en forma explícita

$$D_{m_1' m_1}^{(j_1)}(\omega) D_{m_2' m_2}^{(j_2)}(\omega) = \sum_j C_{m_1' m_2'}^{jm'} D_{m' m}^{(J)}(\omega) C_{m_1 m_2}^{jm} \quad (\text{b.1})$$

(donde  $m = m_1 + m_2$ ,  $m' = m'_1 + m'_2$  y  $\omega$  designa, para abreviar, el conjunto de los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ). Expresada en términos de los símbolos-3j, esta fórmula toma la forma

$$\begin{aligned} D_{m_1' m_1}^{(j_1)}(\omega) D_{m_2' m_2}^{(j_2)}(\omega) &= \\ &= \sum_j (2j+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1' & m_2' & -m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} D_{-m', -m}^{(J)*}(\omega) \quad (\text{b.2}) \end{aligned}$$

[aquí se ha utilizado también (a.12)].

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por  $D_{-m'_1, -m'_2}^{(J)}(\omega)$  e integrando respecto de  $d\omega$  mediante la fórmula (a.13), obtendremos

$$\int D_{m'_1 m_1}^{(J_1)}(\omega) D_{m'_2 m_2}^{(J_2)}(\omega) D_{m'_3 m_3}^{(J_3)}(\omega) \frac{d\omega}{8\pi^2} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (\text{b.3})$$

(para conseguir una mayor simetría, hemos efectuado aquí un cambio evidente en la designación de los índices) \*.

Esta fórmula es fundamental para el cálculo de elementos de matriz de las magnitudes físicas que caracterizan un sistema del tipo del trompo simétrico.

Sea  $\bar{f}_{kq}'$  un tensor esférico de orden  $k$  que caracteriza a un trompo en el sistema de ejes de coordenadas  $\xi\eta\zeta$  ligados al mismo (el eje  $\zeta$  coincide con el eje del trompo); uno de estos tensores es, por ejemplo, el tensor momento eléctrico o magnético multipolar. Sean  $f_{kq}$  las componentes de este mismo tensor respecto del sistema de coordenadas en reposo  $xyz$ . Las cantidades  $\bar{f}_{kq}'$  son constantes que no dependen de la rotación del trompo, mientras que las cantidades  $f_{kq}$  son funciones de los ángulos  $\alpha, \beta, \gamma$ , que determinan la orientación del mismo. La relación entre unas y otras viene determinada por una matriz de rotaciones finitas de acuerdo con

$$f_{kq} = \sum_{q'} D_{q'q}^{(k)}(\omega) \bar{f}_{kq'} \quad (\text{b.4})$$

Las funciones de onda de un trompo difieren de las funciones  $D_{\Omega M}^{(J)}(\omega)$  únicamente en la normalización ( $J$  es el momento cinético total del trompo,  $\Omega$  su proyección sobre el eje del mismo y  $M$  su proyección sobre el eje inmóvil  $z$ ) \*\* :

$$\psi_{JM}(\omega) = i^{J-\Omega} \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}} D_{\Omega M}^{(J)}(\omega) \quad (\text{b.5})$$

Calculando para estas funciones el elemento de matriz de la cantidad (b.4), la fórmula (b.3) conduce a

$$\begin{aligned} (J'\Omega' M' | f_{kq} | J\Omega M) &= \\ &= i^{J+J'-\Omega-\Omega'} (-)^{J'-M'} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} J' & k & J \\ -\Omega' & q' & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & k & J \\ -M' & q & M \end{pmatrix} \bar{f}_{kq'} \end{aligned}$$

(con  $q' = \Omega' - \Omega, q = M' - M$ ).

\* Para valores  $j_1 = l_1, j_2 = l_2, j_3 = l_3$  enteros y  $m'_1 = m'_2 = m'_3 = 0$ , las funciones  $D_{0m}^{(l)}$  se reducen, de acuerdo con (a.18), a armónicos esféricos y la fórmula (b.3) da una expresión para la integral del producto de tres de tales armónicos que coincide con III (107.13-16).

\*\* El factor de fase se ha elegido de manera que para  $\Omega = 0$  la función (b.5) se transforma en la función de onda del momento cinético libre  $J$  (entero) con proyección  $M$  [cf. (a.18)].

La fórmula (b.6) resuelve el problema planteado y determina la dependencia de los elementos de matriz respecto de los momentos  $J, J'$  y sus proyecciones  $M, M'$ . En lo que concierne a los números cuánticos  $\Omega, \Omega'$ , la dependencia con relación a los mismos sigue siendo indeterminada, como es natural: los valores de estos números están vinculados con el estado « interno » del trompo y las cantidades  $\bar{f}_{kq'}$ , dependen, en general, de los mismos. La dependencia de los elementos de matriz respecto de los números  $M, M'$ , claro está, es exactamente la misma que para un sistema cualquiera con un momento cinético total dado [cf. III (107.6)].

El cuadrado del módulo del elemento de matriz (b.6), sumado respecto de todos los valores del número final  $M'$  (y respecto de  $q = M' - M$ ) para  $M$  dado, no depende del valor de  $M$  y es igual a

$$\sum_{qM'} |(J'\Omega' M' | f_{kq} | J\Omega M\rangle|^2 = (2J+1) \left( \frac{J'}{\Omega'} \frac{k}{q'} \frac{J}{\Omega} \right)^2 |\bar{f}_{kq'}|^2 \quad (\text{b.7})$$

[la suma se efectúa aplicando la regla III (107.11)].

La fórmula (b.6) es también aplicable (con alguna variación en el significado de los símbolos) a sistemas con simetría axil, tales como una molécula diatómica o un núcleo no esférico (axil). En contraste con el caso del trompo, la rotación de estos sistemas se define por dos ángulos solamente ( $\alpha \equiv \varphi, \beta \equiv \theta$ ), los que determinan la dirección del eje del sistema. La función de onda de rotación difiere de (b.5) en que en ella no aparece el factor  $e^{i\Omega\gamma}/\sqrt{2\pi}$ . Sin embargo, esta diferencia no se refleja en los elementos de matriz: dado que la dependencia de las funciones  $D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)$  respecto de  $\gamma$  se reduce al factor  $e^{im'\gamma}$ , la fórmula (b.3) puede escribirse también en la forma

$$\delta_{m'0} \int D_{m_1'm_1}^{(j_1)}(\alpha, \beta, 0) D_{m_2'm_2}^{(j_2)}(\alpha, \beta, 0) D_{m_3'm_3}^{(j_3)}(\alpha, \beta, 0) \frac{\sin \beta d\alpha d\beta}{4\pi} = \\ = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix}$$

(donde  $m' = m'_1 + m'_2 + m'_3$ ) y el resultado del cálculo de la integral no cambia. En este caso, además, la regla de selección relativa a la proyección del momento cinético sobre el eje conserva su forma primitiva ( $\Omega' - \Omega = q'$ ) y es consecuencia de la ortogonalidad de las funciones de onda electrónicas. En la fórmula (b.6) hay que entender ahora por  $f_{kq'}$  los elementos de matriz de la magnitud  $f$  respecto de los estados electrónicos para núcleos en reposo (en el sistema de coordenadas  $\xi\eta\zeta$  ligado con el eje de la molécula).

## SUPLEMENTO A LA PARTE I

### § 82a. Pérdidas de energía de las partículas rápidas por ionización

Consideremos los choques de una partícula rápida relativista con un átomo acompañados de excitación o ionización de este último. En el caso no relativista estas colisiones inelásticas se estudiaron en III, §§ 145, 146; generalizaremos aquí las fórmulas allí obtenidas (*H. A. Bethe*, 1933).

La velocidad de la partícula que incide sobre el átomo se supone que es grande comparada con las velocidades de los electrones atómicos (por lo que, en cualquier caso, se supone que  $Z\alpha \ll 1$ , es decir, que el número atómico no es demasiado grande). Esta condición asegura la aplicabilidad de la aproximación de Born al proceso considerado. La solución del problema es un tanto diferente según se trate de una partícula rápida ligera (electrón, positón) o pesada (mesón, protón, partícula- $\alpha$ , etc.). Estudiaremos aquí el último caso, que es más simple.

Sean  $p = (\epsilon, \mathbf{p})$  y  $p' = (\epsilon', \mathbf{p}')$  los impulsos inicial y final de la partícula rápida en el sistema de referencia del laboratorio, sistema respecto del cual el átomo se encontraba en reposo antes del choque; la diferencia  $q = p' - p$  da la energía y el impulso transferidos por la partícula al átomo. Descompongamos el intervalo de valores posibles del impulso cedido en dos regiones:

$$\text{I)} \frac{q^2}{m} \ll m, \quad \text{II)} \frac{q^2}{m} \gg I, \quad (82a.1)$$

donde  $m$  es la masa del electrón, e  $I$ , una cierta energía atómica media (potencial de ionización del átomo). Estas dos regiones se solapan cuando  $I \ll q^2/m \ll m$ ; esta circunstancia permite llevar a cabo un empalme exacto de los resultados que se obtienen para cada una de ellas. Llamaremos a los valores  $q$  de la primera región y de la segunda, respectivamente, transferencias de impulso pequeñas y grandes.

#### *Pequeñas transferencias de impulso*

En esta región se pueden considerar los electrones atómicos como no relativistas, tanto en el estado inicial del átomo como en el final.

La amplitud del proceso viene dada por la expresión

$$M_{fi}^{(n)} = e^2 J_{n0}^\mu (-q) J_{p'p}^\nu (q) D_{\mu\nu}(q), \quad (82a.2)$$

donde  $J_{n0}$  es la 4-corriente de transición del átomo desde el estado inicial (0) al final ( $n$ ), y  $J_{p'p}$  es la 4-corriente de transición de la partícula rápida; estas corrientes substituyen aquí las expresiones  $(u' \gamma u)$  que aparecerían, por ejemplo, en la amplitud de dispersión de dos partículas «elementales», el electrón y el muón (74.17) [cf. también (140.3)]. Las corrientes de transición se toman en la representación de impulsos [véase (43.11)]. La sección eficaz del proceso en el sistema de referencia del laboratorio se escribe:

$$d\sigma_n = 2\pi\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega_{n0}) |M_{fi}^{(n)}|^2 \frac{d^3 p'}{2 |\mathbf{p}| 2\varepsilon' (2\pi)^3}, \quad (82a.3)$$

donde  $\omega_{n0} = E_n - E_0$  es la frecuencia de transición entre estados del átomo.

El estado final puede pertenecer tanto al espectro discreto como al continuo; el primer caso corresponde a la excitación del átomo, el segundo, a su ionización. En la ley de conservación de la energía [que se tiene en cuenta mediante la función  $\delta$  en (82a.3)] se prescinde de la energía de retroceso del átomo, lo que evidentemente es admissible para pequeñas transferencias de impulso.

Conviene elegir el propagador de fotón en este caso adoptando el contraste (77.14), en el cual son diferentes de cero sólo sus componentes espaciales

$$D_{ik}(q) = - \frac{4\pi}{\omega^2 - q^2} \left( \delta_{ik} - \frac{q_i q_k}{\omega^2} \right). \quad (82a.4)$$

Entonces, también para las 4-corrientes de transición en (88a.2) son necesarias solamente sus componentes espaciales.

La corriente atómica de transición  $\mathbf{J}_{n0}(q)$  es en el presente caso la componente de Fourier de la expresión no relativista ordinaria:

$$\mathbf{J}_{n0}(q) = \frac{i}{2m} \int e^{-iq\cdot r} (\psi_0 \nabla \psi_n^* - \psi_n^* \nabla \psi_0) d^3x, \quad (82a.5)$$

donde  $\psi_0$ ,  $\psi_n$  son las funciones de onda atómicas (además, para simplificar la notación, hemos suprimido aquí y en lo que sigue el signo de suma respecto de los electrones del átomo, es decir, hemos escrito la fórmula como si en él hubiera tan sólo un electrón). Integrando el primer término por partes, esta expresión puede escribirse en forma de elemento de matriz:

$$\mathbf{J}_{n0}(q) = \frac{1}{2} (\mathbf{v} e^{-iq\cdot r} + e^{-iq\cdot r} \mathbf{v})_{n0}, \quad (82a.6)$$

donde  $\mathbf{v} = -\frac{i}{m} \nabla$  — es el operador velocidad del electrón.

En cuanto a la corriente de transición de la partícula dispersada, teniendo en cuenta que el impulso que pierde es relativamente pequeño ( $|q| \ll |\mathbf{p}|$ ), cabe substituirla simplemente por el elemento diagonal

$$\mathbf{J}_{pp}(0) = 2\mathbf{p}z, \quad (82a.7)$$

que corresponde al movimiento rectilíneo clásico [cf. (96.5)]; aquí se ha introducido también el factor  $z$ , que tiene en cuenta la posible diferencia de la carga de la partícula ( $ze$ ) respecto de la carga del electrón.

Que  $q$  sea pequeño significa que también lo será el ángulo de desviación de la partícula  $\vartheta$ . En estas condiciones, las componentes de  $q$  longitudinal y transversal (respecto de  $\mathbf{p}$ ) son iguales a

$$-q_{\parallel} \approx \frac{dp}{de} \omega_{n0} = \frac{\omega_{n0}}{v}, \quad q_{\perp} \approx |\mathbf{p}| \vartheta, \quad (82a.8)$$

de modo que  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \approx -e\omega_{n0}$ .

La sustitución de (82a.4-8) en (82a.2) da

$$M_{fi}^{(n)} = -\frac{4\pi ze^2}{q^2} \langle n | \frac{e}{\omega_{n0}} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v} e^{-iq \cdot r} + e^{-iq \cdot r} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} e^{-iq \cdot r} + e^{-iq \cdot r} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}) | 0 \rangle.$$

Observemos que en el primer término

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{v} f + f \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} = 2if,$$

donde  $f \equiv e^{-iq \cdot r}$  (véase III, pág. 671); por ello, el elemento de matriz de este operador coincide con el elemento de matriz  $2i(f)_{n0} = 2\omega_{n0}f_{n0}$ . En cuanto al segundo término, basta substituir, al ser  $q$  pequeño,  $e^{-iq \cdot r}$  por la unidad. Entonces

$$M_{fi}^{(n)} = -\frac{8\pi ze^2}{q^2} \{e (e^{-iq \cdot r})_{n0} - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_{n0} \omega_{n0}\}.$$

El cuadrado del módulo de esta expresión vale:

$$|M_{fi}^{(n)}|^2 = \frac{64\pi^2 (ze^2)^2}{(q^2)^2} \{e^2 |(e^{-iq \cdot r})_{n0}|^2 + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_{n0})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_{n0}) e \omega_{n0} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_{n0})^2 \omega_{n0}^2\} \quad (82a.9)$$

(en el segundo término se ha hecho aquí  $e^{-iq \cdot r} \cong 1 - iq \cdot r$ ; no es posible hacer esto en el primero por la razón que se verá más adelante — véase la nota en la pág. 292).

La pérdida de energía de la partícula rápida como resultado de sus colisiones inelásticas con los átomos \* viene determinada por la cantidad

\* Estas pérdidas se llaman a menudo pérdidas por ionización, a pesar de que están ligadas no solamente con la ionización, sino también con la excitación de los átomos.

$$\kappa = \sum_n \int \omega_{n0} d\sigma_n = \frac{1}{16\pi^2} \sum_n \int \omega_{n0} |M_{fi}^{(n)}|^2 d\Omega', \quad (82a.10)$$

donde la suma se extiende a todos los estados finales posibles del átomo, y la integración, a las direcciones de la partícula dispersada; llamaremos a esta cantidad *frenado efectivo* (se le llama también *sección eficaz de pérdida de energía*).

La integración en (82a.10) puede efectuarse en dos etapas: primero como promedio respecto del acimut de la dirección de  $\mathbf{p}'$  respecto de  $\mathbf{p}$  y, luego, como integración respecto de  $d\Omega' \cong 2\pi d\vartheta$ , donde  $\vartheta$  es el ángulo de dispersión, que es pequeño. La primera operación substituye  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_{n0}$  por

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_{n0} \rightarrow q_{\parallel} x_{n0} = -\frac{\omega_{n0}}{v} x_{n0},$$

donde  $x_{n0}$  es el elemento de matriz de una de las coordenadas cartesianas de los electrones atómicos \*. A su vez, la integración respecto de  $d\vartheta$  se puede substituir por una integración respecto de  $q^2$ , observando que

$$-q^2 = -\omega_{n0}^2 + q^2 \approx -\omega_{n0}^2 + \frac{\omega_{n0}^2}{v^2} + p^2 \theta^2 = \frac{\omega_{n0}^2 M^2}{p^2} + p^2 \theta^2 \quad (82a.11)$$

y, por esto,  $2\vartheta d\vartheta = d|q^2|/p^2$  ( $M$  es la masa de la partícula rápida). Obtenemos en definitiva

$$\kappa = 4\pi (ze^2)^2 \sum_n \int \left\{ |(e^{-iq \cdot r})_{n0}|^2 \frac{\omega_{n0}}{v^2} - \omega_{n0}^3 |x_{n0}|^2 \left(\frac{M^2}{p^2} + \frac{1}{v^2}\right)\right\} \frac{d|q^2|}{|q^2|^2}. \quad (82a.12)$$

El límite inferior de integración respecto de  $q^2$  es

$$|q^2|_{\min} = \frac{M^2}{p^2} \omega_{n0}^2. \quad (82a.13)$$

En cuanto al límite superior, para él elegiremos un cierto valor  $|q^2|_1$  tal que

$$I \ll \frac{|q^2|_1}{m} \ll m, \quad (82a.14)$$

es decir, un valor que se encuentra en la región en que se solapan los dominios I y II (82a.1).

La integración y la suma en (82a.12) se lleva a cabo de manera análoga a como

\* No importa cuál: después de la suma respecto de las direcciones del momento cinético del átomo, que se introduce más adelante, en el estado final, el elemento de matriz  $x_{n0}$  no depende ya de la dirección del eje  $x$ .

se procedió en III, § 146 para el caso no relativista. Se descompone el intervalo de integración en dos partes: a) de  $|q^2|_{\min}$  a  $|q^2|_0$  y b) de  $|q^2|_0$  a  $|q^2|_1$ , donde el valor  $|q^2|_0$  se elige de modo que

$$\frac{IM}{|p|} \ll \sqrt{|q^2|_0} \ll ma \quad (82a.15)$$

(la cantidad  $ma$ , que aparece a la derecha es del orden de magnitud de los impulsos de los electrones atómicos). En la región a) se puede hacer  $e^{-iq \cdot r} \approx 1 - iq \cdot r$  y la contribución de la misma a  $\propto$  toma la forma

$$\begin{aligned} 4\pi(ze^2)^2 \sum_n \int_{|q^2|_{\min}}^{|q^2|_0} & \left\{ \frac{1}{v^2} \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \frac{1}{|q^2|} - \frac{M^2}{p^2} \omega_{n0}^3 |x_{n0}|^2 \frac{1}{|q^2|^2} \right\} d|q^2| \approx \\ & \approx \frac{4\pi(ze^2)^2}{v^2} \sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \left[ \ln \frac{|q^2|_0 p^2}{M^2 \omega_{n0}^2} - v^2 \right]. \end{aligned}$$

(La integral en el segundo término se puede extender hasta el infinito.) La suma se efectúa aplicando la fórmula

$$\sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 = \frac{1}{2m} Z, \quad (82a.16)$$

donde  $Z$  es el número de electrones en el átomo [véase III, (146.10)]. El resultado lo escribiremos en la forma

$$\frac{2\pi(ze^2)^2 Z}{mv^2} \left[ \ln \frac{|q^2|_0 p^2}{M^2 I^2} - v^2 \right], \quad (82a.17)$$

donde  $I$  es una cierta energía media determinada por la fórmula

$$\ln I = \frac{\sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \ln \omega_{n0}}{\sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2} = \frac{2m}{Z} \sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \ln \omega_{n0}. \quad (82a.18)$$

En el dominio b), en cambio, tenemos según (82a.11)  $|q^2| \approx p^2 \approx v^2$ , es decir,  $|q^2|$  no depende del número  $n$  del estado final del átomo; tampoco dependen de  $n$  los límites de integración. En consecuencia, la suma respecto de  $n$  en (82a.12) puede efectuarse bajo el signo de integral. En el primer término, se calcula mediante la fórmula

$$\sum_n |(e^{-iq\cdot r})_{n0}|^2 \omega_{n0} = \frac{Z}{2m} q^2 \quad (82a.19)$$

[véase III, (146.5)] y su integral es igual a \*

$$\frac{2\pi Z (ze^2)^2}{mv^2} \ln \frac{|q^2|_1}{|q^2|_0}.$$

La integral del segundo término en (82a.12), en cambio, da en este dominio una contribución insignificante a  $\alpha$ .

Sumando la última fórmula con (82a.17) se encuentra para la contribución a  $\alpha$  debida a todo el dominio de transferencias pequeñas:

$$\frac{2\pi Z (ze^2)^2}{mv^2} \left[ \ln \frac{|q^2|_1 p^2}{M^2 l^2} - v^2 \right]. \quad (82a.20)$$

### Grandes transferencias de impulso

Pasemos a considerar las colisiones en las que el impulso transferido es grande comparado con el impulso de los electrones atómicos ( $q^2 \gg mI$ ). En esta región, evidentemente, se puede prescindir del hecho de que los electrones estén ligados al átomo, es decir, cabe considerarlos como libres. De acuerdo con esto, el choque de la partícula rápida con el átomo equivaldrá a la dispersión elástica por cada uno de los  $Z$  electrones atómicos. Además, dado que la velocidad de la partícula es grande, podemos suponer que los electrones atómicos se encuentran inicialmente en reposo.

Designemos por  $m\Delta$  la energía que la partícula rápida cede a un electrón atómico y sea  $d\sigma_\Delta$  la sección eficaz de dispersión elástica correspondiente a la misma. El frenado efectivo diferencial para todo el átomo será entonces

$$d\alpha = Zm\Delta d\sigma_\Delta. \quad (82a.21)$$

La energía máxima que se puede transferir a un electrón en reposo por la partícula de masa  $M \gg m$  que choca con él es igual a

$$m\Delta_{\max} = \frac{2mp^2}{m^2 + M^2 + 2m\varepsilon} \approx \frac{2mp^2}{M^2 + 2m\varepsilon},$$

donde  $\varepsilon$  y  $p$  son la energía y el impulso de la partícula incidente [véase II, (13.13)].

\* La divergencia logarítmica de la integral en el límite superior es precisamente la causa por la que, en el primer término de (82a.12), fue imposible desarrollar  $e^{-iq\cdot r}$  en potencias de  $q$ .

Admitiremos, además, que aunque la energía  $\epsilon$  puede ser ultrarrelativista ( $\epsilon \gg M$ ), se tiene a la vez, sin embargo,

$$\epsilon \ll \frac{M^2}{m}. \quad (82a.22)$$

Entonces, incluso la energía máxima transferida

$$m\Delta_{\max} \approx \frac{2mp^2}{M^2} = 2mv^2\gamma^2 \quad (\gamma = \epsilon/M = 1/\sqrt{1-v^2}) \quad (82a.23)$$

se mantiene aún pequeña comparada con la energía cinética inicial de la partícula incidente ( $m\Delta_{\max} \ll \epsilon - M$ ). Según esto, también el impulso cedido  $q$  será siempre pequeño en comparación con el impulso inicial de la partícula,  $p$ . Esta circunstancia permite considerar que el movimiento de esta última no varía en el choque, es decir, suponer que la partícula incidente es infinitamente pesada. Entonces la sección eficaz de dispersión se obtiene, simplemente, refiriendo la sección eficaz de dispersión del electrón por un centro inmóvil (81.7) al sistema de referencia del laboratorio, sistema en el que el electrón se encontraba inicialmente en reposo. Esto se hace fácilmente, observando que, dentro de la aproximación indicada,

$$-q^2 \approx q^2 = 4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad d\Omega' = \frac{\pi d|q^2|}{p^2},$$

y que la velocidad relativa en ambos sistemas es la misma,  $v$ . La fórmula (81.7) toma la forma

$$d\sigma = \frac{4\pi (ze^2)^2}{v^2} \left(1 - \frac{|q^2|}{4m^2\gamma^2}\right) \frac{d|q^2|}{|q^2|}.$$

La energía cedida  $\Delta$  se expresa en función del mismo invariante  $q^2$  de acuerdo con  $-q^2 = 2m^2\Delta$ . Tenemos así \*

$$d\sigma_\Delta = \frac{2\pi (ze^2)^2}{m^2 v^2} \left(1 - v^2 \frac{\Delta^2}{\Delta_{\max}^2}\right) \frac{d\Delta}{\Delta^2}. \quad (82a.24)$$

La contribución al frenado efectivo debida a la región de transferencias de impulso que estamos considerando, se obtendrá integrando (82a.21) entre el límite antes introducido  $|q^2|_1$  y  $|q^2|_{\max} = 2m^2\Delta_{\max}$ . Dicha contribución es igual a

\* En esta fórmula no se tienen en cuenta, naturalmente, los efectos específicos de las interacciones fuertes, si la partícula pesada es un hadrón. Estos efectos (factor de forma hadrónico), sin embargo, sólo cobran importancia cuando  $|q^2| \propto 1/M^2$ , y en las condiciones (82a.22) tales transferencias de impulso quedan excluidas.

$$\frac{2\pi(ze^2)^2 Z}{mv^2} \left( \ln^2 \frac{2\Delta_{\max}m^2}{|q^2|_1} - v^2 \right). \quad (82a.25)$$

Finalmente, sumando las contribuciones (82a.20) y (82a.25), obtendremos el siguiente resultado para la pérdida total de energía de una partícula pesada rápida por ionización:

$$\kappa = \frac{4\pi Z(ze^2)^2}{mv^2} \left( \ln \frac{2mv^2}{I \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (82a.26)$$

(en unidades ordinarias). En el caso no relativista se sigue de aquí la fórmula ya conocida III, (147.10):

$$\kappa = \frac{4\pi Z(ze^2)}{mv^2} \ln \frac{2mv^2}{I}, \quad (82a.27)$$

y en el caso ultrarrelativista

$$\kappa = \frac{4\pi Z(ze^2)}{mc^2} \left( \ln \frac{2mc^2}{I \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} - 1 \right). \quad (82a.28)$$

El frenado depende tan sólo de la velocidad de la partícula rápida (pero no de su masa). La disminución del frenado al aumentar la velocidad, tal como se sigue de (82a.27), se transforma en la región ultrarrelativista en un crecimiento lento (logarítmico).

### PROBLEMAS

1. Determinar el frenado eficaz de un electrón relativista.

*Solución.* La contribución debida a la región de pequeñas transferencias de impulso viene dada, como antes, por (82a.20). En la región de transferencias de impulso grandes, en vez de (82a.24) hay que aplicar la fórmula (82.14) que tiene en cuenta los efectos de intercambio. Integrando  $\Delta d\sigma_\Delta$  respecto de  $d\Delta$  desde  $|q^2|_1/2m^2$  a  $(\gamma - 1)/2$  y sumando con (82a.20), resulta

$$\kappa = \frac{2\pi Ze^4}{mv^2} \left[ \ln \frac{m^2(\gamma^2 - 1)(\gamma - 1)c^4}{2I^2} - \left( \frac{2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \ln 2 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{(\gamma - 1)^2}{8\gamma^2} \right], \quad (1)$$

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

En el caso no relativista obtenemos la fórmula del problema III, § 146, y en el ultrarrelativista ( $\gamma \gg 1$ )

$$\kappa = \frac{2\pi Ze^4}{mc^2} \left( \ln \frac{m^2 c^4 \gamma^3}{2I^2} + \frac{1}{8} \right). \quad (2)$$

2. El mismo problema para el positón.

*Solución.* Para  $d\sigma_\Delta$  hay que utilizar, en la región de transferencias grandes, la fórmula (82.23), tomando como límite superior respecto de  $d\Delta$  el valor  $\gamma - 1$ . La solución en el caso ultrarrelativista es:

$$\kappa = \frac{2\pi Ze^4}{mc^2} \left( \ln \frac{2m^2 c^4 \gamma^3}{I^2} - \frac{23}{12} \right).$$



## ÍNDICE ALFABÉTICO

- Alternancia de las intensidades, 211  
Aniquilación de un par en tres fotones, 397  
Aproximación logarítmica, 414, 416, 451  
Arista o cabeza de una banda, 211  
Átomos, reglas de selección en los, 191
- Banda, arista o cabeza de una, 211  
Bispinor, 76
- Campo escalar, propagador de un, 326  
— exterior, reglas de selección en un, 200  
— magnético, precesión del spin en un, 160, 164  
— vectorial, propagador de un, 330  
Canales de reacción, 281, 338  
Captura radiativa de un protón por un neutrón, 229  
Carga efectiva del protón, 215  
Coeficientes de Einstein, 172  
Compton, efecto, 377  
— — doble, 397  
Condición de «carácter completo» de las matrices de Dirac, 110  
— — — de Pauli, 110  
Conjugación de carga, 50, 100  
Comutación, reglas para operadores- $\psi$ , 323  
Constante de estructura fina, 167  
Contracción de operadores, 314  
Contraste de Landau, 330  
— grupo de, 48  
— transversal en cuatro dimensiones, 16, 330  
— — tres dimensiones, 16, 330  
Corrección relativista a la función de onda, 155  
Corriente de transición, 168  
Corrimiento de fase, 138, 148  
— — en el caso ultrarrelativista, 151  
— — en la fotoproducción de piones, 307  
— — en un campo de Coulomb, 146  
Coulomb, integral del movimiento de, 135
- Densidad de corriente de las partículas escales, 41  
— — de los electrones, 177  
Diagrama, líneas exteriores de un, 317, 322  
— — interiores de un, 322  
— vértice de un, 316  
Diagramas polares, 341  
Dirac, función conjugada de, 83  
— matrices en la representación espacial, 81  
— — — típica, 84  
Dispersión antisimétrica, 250  
— coherente, 245, 268  
— combinatoria, 241  
— de Rayleigh, 241  
— de la luz por un electrón, 254  
— de un electrón por un muón, 356, 357  
— forzada, 248  
— reglas de selección en la, 251, 258, 259  
— simétrica, 250
- Ecuación de Klein-Fok, 39  
— de Pauli, 131  
— de segundo orden para un electrón en un campo, 127  
Efecto Compton, 377  
— — doble, 397  
— Stark en los niveles de estructura fina, 205  
Efectos de polarización en la dispersión de un electrón por un electrón, 353, 355  
— — — — por un muón, 357  
— — — de un fotón por un electrón, 382  
— — — en la radiación de frenado, 414  
Electrones, densidad de corriente de los, 177  
Emisión de dos cuantos, 247  
— forzada, 171  
Espinores esféricos, 94  
Estados de helicidad esféricos, 62  
Estructura fina, constante de, 167  
— — efecto Stark en los niveles de, 205

- Factor de Thomas, 133  
 Feynman, reglas de, 325  
 Foldy-Wouthuysen, representación de, 101  
 Fotón eléctrico, 22  
   — magnético, 22  
 Frank-London, principio de, 212  
 Función conjugada de Dirac, 83  
   — de onda, corrección relativista a la, 155  
   — propagación, 314, 321  
 Furry, teorema de, 343
- Grupo de contraste, 48
- Heisenberg, representación de, 232, 310  
 Helicidad, 29, 60  
   — conservación en el caso ultrarrelativista de la, 149, 349  
   — estados esféricos de, 62
- Índices puntados, 68  
 Infrarrojo, catástrofe en el, 444  
 Integral del movimiento de Coulomb, 135  
 Intensidad de las rayas de transición, 191  
 Intensidades, alternancia de las, 211  
 Interacción de aniquilación, 364  
   — representación de, 310  
   — spin-órbita, 133, 363  
   — spin-spin, 363  
 Inversión, 20, 49, 73, 74  
   — combinada, 52  
   — cuadridimensional, 43  
   — del tiempo, 31, 48, 102
- Klein-Fok, ecuación de, 39
- Lagrangiano de la interacción electromagnética, 167  
   — de un campo escalar, 40  
   — — espinorial, 100  
 Landau, contraste de, véase Contraste de Landau  
 Lorentz, grupo propio, ampliado, 49  
   — transformación de un bispinor, 85  
   — — de un espinor, 72
- Majorana, representación de, 86, 105  
 Mandelstam, plano de, 284  
 Matriz densidad de polarización del electrón, 120  
   — — — del fotón, 30  
   — — — del neutrino, 120
- Matrices de Dirac, condición de «carácter completo» de las, 110  
   — — en la representación espinorial, 81  
   — — — típica, 84  
   — de Pauli, condición de «carácter completo» de las, 110  
 Moléculas, reglas de selección en las, 207, 208, 211, 213  
 Momento eléctrico de una transición, 180  
   — magnético anómalo, 160  
   — — de una transición, 176  
 Momentos de polarización de los núcleos, 187  
 Multiplete, rayas principales de un, 193
- Niveles de energía de un electrón en un campo de Coulomb, 135, 143  
   — — en un campo magnético, 129
- Operadores, contracción de, 314
- Parámetros de Stokes, 31  
 Paridad de carga, 51  
   — — de un sistema partícula-antipartícula, 55  
   — — del fotón, 55  
   — — del positonio, 107  
   — de los estados esféricos de un electrón, 94, 95  
   — de un fotón, 21  
   — intrínseca, 49  
   — relativa, 105  
   — — de una partícula y de una antipartícula, 55, 105  
 Partículas escalares, 37, 39  
   — — densidad de corriente de las, 41  
   — vectoriales, 55  
 Pauli, ecuación de, 131  
 Pauli-Fierz, transformación de las formas biliniales, 110, 111  
 Pérdida de energía, sección eficaz de, 407, 418  
 Plano de Mandelstam, 284  
 Positonio, efecto Zeeman en el, 367  
   — orto-, para-, 366  
 Precesión del spin en un campo magnético, 160, 164  
 Principio de correspondencia, 174  
   — de Frank-London, 212  
 Producto normal, 13, 331  
 Propagador, 314, 321  
   — de un campo escalar, 326

- Propagador de un campo vectorial, 330  
 Protón, carga efectiva del, 215
- R**iadiación de frenado, cálculo según Weiszacker-Williams de la, 448  
 — cuadripolar, 406  
 — de cuantos blandos, 446  
 — dipolar, 405  
 — efecto de polarización de la, 414  
 — — — del apantallamiento en la, 416  
 — — en la emisión de una partícula, 407  
 — — en la reflexión por una pared de potencial, 408  
 — — papel del retroceso en la, 437  
 — — pérdida de energía en la, 417  
 — multipolar, reglas de selección, 178, 181  
 — regla de las sumas en la, 204  
 Rayas de transición, intensidad de las, 191  
 — satélite, 193  
 Rayleigh, dispersión de, 241  
 Recombinación radiativa, 221  
 Regla de las sumas en la radiación, 204  
 Reglas de commutación para operadores- $\psi$ , 323  
 — de Feynman, 325  
 — de selección de la radiación multipolar, 178, 181  
 — — en la dispersión, 251, 258, 259  
 — — en las moléculas, 207, 208, 211, 213  
 — — en los átomos, 191  
 — — en un campo exterior, 200  
 — — según el spin isotópico, 214  
 Representación de Foldy-Wouthuysen, 101  
 — de Heisenberg, 232, 310  
 — de interacción, 310  
 — de Majorana, 86, 105
- Residuo en un polo de la amplitud de dispersión, 139, 147  
 Resonancia paramagnética, 200
- Sección eficaz de pérdida de energía, 407, 418  
 Spin isotópico, reglas de selección según el, 214  
 Stokes, parámetros de, 31
- T**ensor de dispersión, 243  
 — de polarizabilidad, 247  
 Tensores irreducibles, 78  
 Teorema de Furry, 343  
 — de Wick, 331  
 — óptico, 266, 305  
 Thomas, factor de, 133  
 Transformación de contraste de la matriz densidad de un fotón, 31  
 — — del propagador de fotón, 327  
 — — de dos fotones en un par electrón-positón, 394, 395  
 — — de Lorentz de un bispinor, 85  
 — — — de un espinor, 72  
 — — de Pauli-Fierz de las formas bilineales, 110, 111  
 — — de un par electrón-positón en un par muónico, 357
- V**ectores esféricos, 23
- W**eiszacker-Williams, cálculo de la radiación de frenado según, 448  
 — — método de, 448  
 Wick, teorema de, 331

