

FÍSICA TEÓRICA

MECÁNICA
DE
FLUIDOS

LANDAU^y LIFSHITZ

VOLÚMEN 6

SEGUNDA EDICIÓN

CURSO DE FÍSICA TEÓRICA

Volumen 6

MECÁNICA DE FLUIDOS

L. D. LANDAU E. M. LIFSHITZ
Academia de Ciencias, U.R.S.S.

MECÁNICA DE FLUIDOS

**Volumen 6
del
CURSO DE FÍSICA TEÓRICA**



**EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
BARCELONA-BOGOTÁ-BUENOS AIRES-CARACAS-MÉXICO**

Título de la obra original:
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА.
T. VI. Гидродинамика

Edición original en lengua rusa publicada por:
MEZHDUNARODNAYA KNIGA, MOSCOU
Copyright © MEZHDUNARODNAYA KNIGA.

Versión española por:
Prof. Dr. J. Aguilar Peris
Catedrático de Termología
Facultad de Física de la Universidad Complutense de Madrid

y

Prof. Dr. J. De la Rubia Pacheco
Catedrático de Mecánica Estadística
Facultad de Física de la Universidad de Valencia

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona
Tel: (34) 93 419 33 36 Fax: (34) 93 419 51 89
E-mail: reverté@reverte.com Internet: <http://www.reverte.com>

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

Edición en español
© EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1985
2ª REIMPRESIÓN: ENERO 2001

Impreso en España - Printed in Spain
ISBN: 84-291-4080-8 Obra completa
ISBN: 84-291-4087-5 Tomo 6
Depósito Legal: SE-3514-2001
Impresión: Publidisa (Sevilla)
www.publidisa.com

PREFACIO A LA EDICIÓN INGLESA

Este libro tiene por objeto el estudio de la mecánica de fluidos, es decir, la teoría del movimiento de los líquidos y los gases.

La naturaleza del libro viene determinada ampliamente por el hecho de que describe la mecánica de fluidos como una rama de la física teórica y, por tanto, es notablemente diferente de otros libros de texto escritos sobre el mismo tema. Hemos intentado desarrollar al máximo posible todas las materias de interés físico y hacerlo de modo que nos ofrezcan la imagen más clara posible de los fenómenos y sus interrelaciones. En consecuencia, no discutiremos métodos aproximados de cálculo en mecánica de fluidos, ni teorías empíricas desprovistas de significado físico. Por otra parte, se tratan algunos tópicos que no se encuentran habitualmente en textos de esta materia: la teoría de la transmisión y difusión del calor en fluidos; acústica; la teoría de la combustión; la dinámica de los superfluidos, y la dinámica relativista de fluidos.

En este campo de la mecánica de fluidos, tan extensamente estudiado, es inevitable que hayan aparecido nuevos resultados durante los últimos años desde que se publicó la última edición rusa. Es lamentable que nuestra preocupación por otras materias nos haya impedido su inclusión en la edición inglesa. Simplemente hemos añadido un capítulo más sobre la teoría general de fluctuaciones en dinámica de fluidos.

Agradecemos a los Dres. Sykes y Reid la excelente versión inglesa del libro y a Pergamon Press su conformidad respecto a diferentes cuestiones relacionadas con la publicación.

Moscú

L. D. LANDAU
E. M. LIFSHITZ

NOTACIÓN

ρ	densidad
p	presión
T	temperatura
s	entropía por unidad de masa
ϵ	energía interna por unidad de masa
$w =$	$\epsilon + p/\rho$ entalpía
$\gamma =$	c_p/c_v cociente entre los calores específicos a presión constante y a volumen constante
η	viscosidad dinámica
$\nu =$	η/ρ viscosidad cinemática
κ	conductividad térmica
$\chi =$	$\kappa/\rho c_p$ conductividad termométrica
R	número de Reynolds
c	velocidad del sonido
M	cociente entre la velocidad del fluido y la del sonido

Índice analítico

Prefacio a la edición inglesa	V
Notación	VI

I. Fluidos ideales

§ 1 Ecuación de continuidad	1
§ 2 Ecuación de Euler	3
§ 3 Hidrostática	7
§ 4 Caso en que la convección está ausente	9
§ 5 Ecuación de Bernoulli	11
§ 6 Flujo de energía	12
§ 7 Flujo del impulso	14
§ 8 Conservación de la circulación	16
§ 9 Flujo potencial	18
§ 10 Fluidos incompresibles	22
§ 11 Fuerza de arrastre en un flujo potencial que rodea un cuerpo	34
§ 12 Ondas de gravedad	41
§ 13 Ondas de gravedad largas	47
§ 14 Ondas en un fluido incompresible	49

II. Fluidos viscosos

§ 15 Ecuación del movimiento de un fluido viscoso	53
§ 16 Disipación de energía en un fluido incompresible	59
§ 17 Flujo en una tubería	61
§ 18 Flujo entre cilindros en rotación	67
§ 19 Ley de semejanza	68
§ 20 Fórmula de Stokes	71
§ 21 Estela laminar	79
§ 22 La viscosidad de las suspensiones	85
§ 23 Soluciones exactas de las ecuaciones del movimiento en el caso de un fluido viscoso	88

§ 24	Movimiento oscilante en un fluido viscoso	97
§ 25	Amortiguamiento de las ondas de gravedad	108

III. Turbulencia

§ 26	Estabilidad del flujo estacionario	113
§ 27	Establecimiento de la turbulencia	115
§ 28	Estabilidad del flujo entre cilindros en rotación	119
§ 29	Estabilidad del flujo en una tubería	123
§ 30	Inestabilidad de las discontinuidades tangenciales	128
§ 31	Turbulencia totalmente desarrollada	130
§ 32	Turbulencia local	134
§ 33	Correlación de velocidades	138
§ 34	Región de turbulencia y el fenómeno de separación	144
§ 35	Chorro turbulento	146
§ 36	Estela turbulenta	152
§ 37	Teorema de Joukowski	154
§ 38	Turbulencia isótropa	158

IV. Capas límites

§ 39	Capa límite laminar	163
§ 40	Flujo cerca de la línea de separación	170
§ 41	Estabilidad del flujo en una capa límite laminar	176
§ 42	Perfil logarítmico de velocidades	180
§ 43	Flujo turbulento en tuberías	184
§ 44	Capa límite turbulenta	187
§ 45	Crisis de arrastre o resistencia	190
§ 46	Flujo que rodea a cuerpos con forma aerodinámica	194
§ 47	Arrastre inducido	197
§ 48	La sustentación de un ala delgada	203

V. Conducción térmica en los fluidos

§ 49	Ecuación general de la transferencia de calor	207
§ 50	Conducción térmica en un fluido incompresible	213
§ 51	Conducción térmica en un medio infinito	217
§ 52	Conducción térmica en un medio finito	222
§ 53	Ley de semejanza para la transferencia térmica	228
§ 54	Transferencia térmica en una capa límite	232
§ 55	Calentamiento de un cuerpo en un fluido móvil	237
§ 56	Convección libre	240

VI. Difusión

§ 57	Ecuaciones de la dinámica de fluidos para una mezcla	249
------	--	-----

§ 58	Coeficientes de transferencia de masa y de difusión térmica	253
§ 59	Difusión de partículas suspendidas en un fluido	258

VII. Fenómenos superficiales

§ 60	Fórmula de Laplace	263
§ 61	Ondas de capilaridad	271
§ 62	Influencia de películas adsorbidas sobre el movimiento de un líquido	276

VIII. Sonido

§ 63	Ondas sonoras	281
§ 64	La energía y el impulso de las ondas sonoras	286
§ 65	Reflexión y refracción de ondas sonoras	291
§ 66	Acústica geométrica	293
§ 67	Propagación del sonido en un medio móvil	297
§ 68	Vibraciones características	301
§ 69	Ondas esféricas	304
§ 70	Ondas cilíndricas	307
§ 71	Solución general de la ecuación de onda	310
§ 72	Onda lateral	314
§ 73	Emisión del sonido	319
§ 74	Principio de reciprocidad	330
§ 75	Propagación de los sonidos en un tubo	333
§ 76	Dispersión del sonido	337
§ 77	Absorción del sonido	341
§ 78	Segunda viscosidad	348

IX. Ondas de choque

§ 79	Propagación de las perturbaciones en un gas móvil	355
§ 80	Flujo estacionario de un gas	358
§ 81	Superficies de discontinuidad	363
§ 82	Choque adiabático	365
§ 83	Ondas de choque débiles	369
§ 84	Sentido de variación de las magnitudes en una onda de choque	372
§ 85	Ondas de choque en un gas perfecto	377
§ 86	Ondas de choque oblicuas	381
§ 87	Espesor de las ondas de choque	386
§ 88	Discontinuidad isotérmica	391
§ 89	Discontinuidades débiles	393

X. Flujo gaseoso monodimensional

§ 90	Flujo de un gas a través de una tobera	397
§ 91	Flujo de un gas viscoso en una tubería	401

§ 92	Movimiento de flujo de semejanza monodimensional	404
§ 93	Discontinuidades en las condiciones iniciales	412
§ 94	Ondas móviles monodimensionales	419
§ 95	Formación de discontinuidades en una onda sonora	426
§ 96	Características	432
§ 97	Invariantes de Riemann	437
§ 98	Flujo gaseoso monodimensional arbitrario	441
§ 99	Propagación de ondas de choque intensas	449
§ 100	Teoría del agua poco profunda	452

XI. Intersección de superficies de discontinuidad

§ 101	Ondas de rarefacción	457
§ 102	Intersección de las ondas de choque	464
§ 103	Intersección de ondas de choque con una superficie sólida	469
§ 104	Flujo supersónico alrededor de un ángulo	473
§ 105	Flujo que rodea un obstáculo cónico	479

XII. Flujo gaseoso bidimensional

§ 106	Flujo potencial de un gas	483
§ 107	Ondas simples estacionarias	406
§ 108	Ecuación de Chaplygin: el problema general del flujo gaseoso bidimensional estacionario	492
§ 109	Características de un flujo bidimensional estacionario	496
§ 110	Ecuación de Euler-Tricomi. Flujo transónico	499
§ 111	Soluciones de la ecuación de Euler-Tricomi cerca de puntos no singulares de la superficie sónica	505
§ 112	Flujo a la velocidad del sonido	510
§ 113	Intersección de las discontinuidades con la línea de transición	516

XIII. Flujo que rodea a cuerpos finitos

§ 114	Formación de ondas de choque en flujo supersónico que rodea a los cuerpos	523
§ 115	Flujo supersónico que rodea a un cuerpo puntiagudo	526
§ 116	Flujo subsónico que rodea un ala delgada	531
§ 117	Flujo supersónico que rodea un ala	534
§ 118	Ley de la semejanza transónica	537
§ 119	Ley de la semejanza hipersónica	540

XIV. Dinámica de fluidos de la combustión

§ 120	Combustión lenta	543
§ 121	Detonación	550
§ 122	Propagación de una onda de detonación	559

§ 123	Relación existente entre los diversos modos de combustión	567
§ 124	Discontinuidades de condensación	570
XV. Dinámica relativista de fluidos		
§ 125	Tensor impulso-energía	575
§ 126	Ecuaciones de la dinámica relativista de fluidos	577
§ 127	Ecuaciones relativistas en el caso de procesos disipativos	583
XVI. Dinámica de superfluidos		
§ 128	Propiedades principales de los superfluidos	587
§ 129	Efecto termomecánico	590
§ 130	Ecuaciones de la dinámica de superfluidos	591
§ 131	Propagación del sonido en un superfluido	599
XVII. Fluctuaciones en dinámica de fluidos		
§ 132	Teoría general de fluctuaciones en dinámica de fluidos	607
§ 133	Fluctuaciones en un medio infinito	611
Índice alfabético		615

CAPÍTULO I

FLUIDOS IDEALES

§ 1. Ecuación de continuidad

El estudio del movimiento de fluidos (líquidos y gases) constituye lo que se denomina *dinámica de fluidos*. Puesto que los fenómenos considerados en la dinámica de fluidos son macroscópicos, un fluido se considera como un medio continuo. Esto significa que siempre se supone que cualquier elemento de volumen pequeño del fluido es suficientemente grande para contener un número muy elevado de moléculas. De acuerdo con ello, cuando hablamos de elementos de volumen infinitamente pequeños, siempre queremos significar aquellos que son «físicamente» infinitamente pequeños, es decir, muy pequeños en comparación con el volumen del cuerpo o sistema en consideración, pero grandes comparados con las distancias entre las moléculas. En un sentido semejante han de entenderse las expresiones *partícula de fluido* y *punto en un fluido*. Si, por ejemplo, hablamos del desplazamiento de alguna partícula fluida, no entendemos entonces el desplazamiento de una molécula individual, sino el de un elemento de volumen que contiene muchas moléculas aunque siga considerándose como un punto.

La descripción matemática del estado de un fluido móvil se efectúa con funciones que dan la distribución de la velocidad del fluido $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ y de dos magnitudes termodinámicas cualesquiera que pertenezcan al fluido, por ejemplo, la presión $p(x, y, z, t)$ y la densidad $\rho(x, y, z, t)$. Como es bien conocido, todas las magnitudes termodinámicas quedan determinadas dados los valores de dos cualesquiera de ellas junto con la ecuación de estado; de aquí que si se tienen cinco magnitudes determinadas, a saber las tres componentes de la velocidad \mathbf{v} , la presión p y la densidad ρ , queda totalmente determinado el estado del fluido en movimiento.

En general, todas estas magnitudes son funciones de las coordenadas x , y , z y del tiempo t . También resaltamos que $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ es la velocidad del fluido en un punto determinado (x, y, z) del espacio y en un instante determinado t ; es decir, se refiere a puntos fijos en el espacio y no a partículas fijas del fluido; en el curso del tiempo, estas últimas se estarán moviendo en el espacio. Lo mismo hay que señalar respecto a ρ y p .

Deduciremos a continuación las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos. Empezaremos con la ecuación que expresa la conservación de la materia. Consideremos un cierto volumen V_0 del espacio. La masa de fluido contenida en este volumen es $\int \rho dV$, siendo ρ la densidad del fluido y realizándose la integración respecto al volumen V_0 . La masa del fluido que circula por unidad de tiempo a través de un elemento $d\mathbf{f}$ de la superficie que limita a este volumen es $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$; el módulo del vector $d\mathbf{f}$ es igual al área del elemento superficial y su dirección coincide con la normal a la misma. Por convenio, consideraremos que $d\mathbf{f}$ tiene el sentido normal hacia fuera. Entonces, $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$ es positivo si el fluido está saliendo del volumen y negativo si el flujo es hacia el interior del mismo. La masa total de fluido que sale del volumen V_0 en la unidad de tiempo es, por consiguiente,

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f},$$

en donde la integración se extiende a la totalidad de la superficie cerrada que limita el volumen en cuestión.

A continuación, puede escribirse la disminución de la masa del fluido en el volumen V_0 por unidad de tiempo, como

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV.$$

Igualando ambas expresiones, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}. \quad (1.1)$$

La integral de superficie puede transformarse mediante la fórmula de Green en una integral de volumen:

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV.$$

Así pues,

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0.$$

Como esta ecuación debe ser válida para cualquier volumen, el integrando debe anularse, es decir,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.2)$$

Esta es la denominada *ecuación de continuidad*. Desarrollando la expresión $\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})$, podemos también escribir (1.2) como

$$\partial\rho/\partial t + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0. \quad (1.3)$$

El vector

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad (1.4)$$

se denomina *densidad de flujo mísico*. Su dirección es la del movimiento del fluido, mientras que su valor o módulo es igual a la masa del fluido que circula por la unidad de tiempo a través de la unidad de área perpendicular a la velocidad.

§ 2. Ecuación de Euler

Consideremos cierto volumen del fluido. La fuerza total que actúa sobre el mismo es igual a la integral

$$-\oint p \, df$$

de la presión, extendida a la superficie que limita el volumen. Transformándola en una integral de volumen, tenemos

$$-\oint p \, df = -\int \operatorname{grad} p \, dV.$$

Como puede verse, el fluido que rodea a cualquier elemento de volumen dV ejerce sobre el mismo una fuerza $-dV \operatorname{grad} p$. En otras palabras, podemos decir que sobre la unidad de volumen del fluido actúa una fuerza $-\operatorname{grad} p$.

A continuación podemos escribir la ecuación del movimiento de un elemento de volumen del fluido igualando la fuerza $-\operatorname{grad} p$ al producto de la masa por unidad de volumen (ρ) por la aceleración dv/dt :

$$\rho dv/dt = -\operatorname{grad} p. \quad (2.1)$$

La derivada dv/dt que aparece aquí designa, no la variación respecto al tiempo de la velocidad del fluido en un punto fijo del espacio, sino la variación respecto al tiempo de la velocidad de una partícula fluida determinada cuando se mueve en el espacio. Esta derivada ha de expresarse en función de magnitudes que se refieren a puntos fijos en el espacio. Para ello observemos que la variación dv de la velocidad de la partícula fluida dada durante el tiempo dt se descompone en dos partes, a saber, la variación durante dt de la velocidad en un punto fijo del espacio y la diferencia entre las velocidades (en el mismo instante) en dos puntos separados dr , siendo dr la distancia recorrida por la partícula de fluido dada durante el tiempo dt . La primera parte es $(\partial\mathbf{v}/\partial t)dt$, en donde se considera que la derivada $\partial\mathbf{v}/\partial t$ corres-

pone a valores x, y, z constantes, es decir, a un punto determinado de espacio. La segunda parte es

$$dx\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = (\mathbf{dr} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}.$$

Así pues,

$$d\mathbf{v} = (\partial \mathbf{v} / \partial t)dt + (\mathbf{dr} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v},$$

o sea, dividiendo ambos miembros por dt ,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}. \quad (2.2)$$

Sustituyendo esta expresión en (2.1), nos encontramos con

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p. \quad (2.3)$$

Esta es la ecuación requerida del movimiento del fluido. Fue obtenida por primera vez por L. EULER en 1755. Se denomina *ecuación de Euler* y es una de las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos.

Si el fluido está en el interior de un campo gravitatorio, sobre cualquier volumen unidad actúa una fuerza adicional ρg , siendo g la aceleración debida a la gravedad. Esta fuerza debe sumarse al segundo miembro de la ecuación (2.1), de modo que la ecuación (2.3) toma la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{grad} p}{\rho} + \mathbf{g}. \quad (2.4)$$

Al deducir las ecuaciones del movimiento no hemos tenido en cuenta los procesos de disipación de energía que pueden producirse en un fluido en movimiento como consecuencia de la fricción o rozamiento interno (viscosidad) del fluido y el intercambio térmico entre las diferentes partes del mismo. La totalidad del análisis realizado en ésta y en las secciones siguientes de este capítulo es válida, por consiguiente, sólo en el caso de movimientos de fluidos en los que carecen de importancia la conductividad térmica y la viscosidad; dichos fluidos se denominan *ideales*.

La ausencia de intercambio térmico entre las diferentes partes del fluido (y también, como es natural, entre el fluido y los cuerpos que lo rodean) significa que el movimiento a través del fluido es adiabático. Así pues, el movimiento de un fluido ideal debe suponerse necesariamente que es adiabático.

En el movimiento adiabático la entropía de una partícula cualquiera del fluido permanece constante cuando dicha partícula se mueve en el espacio.

Designando por s la entropía por unidad de masa, podemos expresar la condición correspondiente al movimiento adiabático como

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad (2.5)$$

en donde la derivada total respecto al tiempo designa, como en (2.1), la variación respecto al tiempo de la entropía para una partícula fluida determinada cuando ésta se mueve. Dicha condición puede escribirse también

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0. \quad (2.6)$$

Esta ecuación es la que de modo general describe el movimiento adiabático de un fluido ideal. Utilizando (1.2), podemos escribirla como una «ecuación de continuidad» correspondiente a la entropía:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{v}) = 0. \quad (2.7)$$

El producto $\rho s \mathbf{v}$ es la «densidad de flujo de entropía».

Conviene recordar que la ecuación adiabática normalmente puede ponerse en una forma mucho más sencilla. Si, como suele suceder, la entropía es constante a través del volumen del fluido en un instante inicial determinado, sigue manteniendo el mismo valor constante en todo instante durante cualquier movimiento subsiguiente del fluido. En este caso podemos escribir la ecuación adiabática simplemente como:

$$s = \text{constante}, \quad (2.8)$$

que es lo que haremos normalmente en adelante. Dicho movimiento se dice, entonces, que es *isoentrópico*.

Podemos utilizar el hecho de que el movimiento es isoentrópico para poner la ecuación del movimiento (2.3) en una forma ligeramente distinta. Para ella emplearemos la familiar relación termodinámica

$$dw = T ds + V dp,$$

en donde w es la entalpía* por unidad de masa de fluido, $V = 1/\rho$ el volumen específico y T la temperatura. Puesto que $s = \text{constante}$, tenemos simplemente

$$dw = V dp = dp/\rho,$$

y, por tanto, $(\operatorname{grad} p)/\rho = \operatorname{grad} w$. Por consiguiente, la ecuación (2.3) puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\operatorname{grad} w. \quad (2.9)$$

* N. del T. — Habitualmente la entalpía se representa por la letra H (o h si es por unidad de masa).

Es interesante señalar otra forma que puede adquirir la ecuación de Euler, en la cual interviene sólo la velocidad. Utilizando una fórmula bien conocida en el análisis vectorial,

$$\frac{1}{2} \mathbf{grad} v^2 = \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v},$$

podemos escribir (2.9) en la forma

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + \frac{1}{2} \mathbf{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -\mathbf{grad} w. \quad (2.10)$$

Si tomamos el rotacional de ambos miembros de esta ecuación, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{rot} \mathbf{v}) = \mathbf{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}), \quad (2.11)$$

en la que interviene sólo la velocidad.

Las ecuaciones del movimiento han de suplementarse con las condiciones límites que deben ser satisfechas en las superficies que limitan el fluido. En el caso de un fluido ideal la condición límite expresa simplemente que el fluido no puede penetrar en una superficie sólida. Esto significa que la componente de la velocidad del fluido normal a la superficie límite debe anularse si dicha superficie está en reposo:

$$v_n = 0. \quad (2.12)$$

En el caso general de una superficie móvil, v_n debe ser igual a la componente correspondiente de la velocidad de la superficie.

En una superficie límite entre dos fluidos inmiscibles, la condición es que la presión y la componente de velocidad normal a la superficie de separación debe ser la misma para ambos fluidos y cada una de estas componentes de velocidad debe ser igual a la componente correspondiente de la velocidad de la superficie.

Como se ha dicho al principio del § 1, el estado de un fluido móvil queda determinado por cinco magnitudes: las tres componentes de la velocidad \mathbf{v} y, por ejemplo, la presión p y la densidad ρ . De acuerdo con esto, un sistema completo de ecuaciones de la dinámica de fluidos deberá tener un número de cinco ecuaciones. En el caso de un fluido ideal éstas son las ecuaciones de Euler, la ecuación de continuidad y la ecuación adiabática.

PROBLEMA

Escribir las ecuaciones del movimiento monodimensional de un fluido ideal en función de las variables a , t , siendo a (denominada *variable lagrangiana*)† la coordenada x de una partícula fluida en un momento determinado $t = t_0$.

† Aunque estas variables suelen denominarse *lagrangianas*, debemos mencionar que las ecuaciones del movimiento en estas coordenadas fueron obtenidas en primer lugar por Euler, al mismo tiempo que las ecuaciones (2.3).

Solución. Con estas variables la coordenada x de una partícula fluida cualquiera en un instante también cualquiera se considera como una función de t y de su coordenada a en el instante inicial: $x = x(a, t)$. La condición de conservación de masa durante el movimiento de un elemento de fluido (ecuación de continuidad) se escribe de acuerdo con ello, $\rho dx = \rho_0 da$, o sea,

$$\rho \left(\frac{\partial x}{\partial a} \right)_t = \rho_0,$$

en donde $\rho_0(a)$ es una distribución de densidad inicial determinada. La velocidad de una partícula fluida es, por definición, $v = (\partial x / \partial t)_a$, y la derivada $(\partial v / \partial t)_a$ da la variación respecto al tiempo de la velocidad de la partícula durante su movimiento. La ecuación de Euler se reduce entonces a

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_a = - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial a} \right)_t,$$

y la ecuación adiabática es

$$(\partial s / \partial t)_a = 0.$$

§ 3. Hidrostática

En el caso de un fluido en reposo dentro de un campo gravitatorio uniforme, la ecuación de Euler (2.4) toma la forma

$$\mathbf{grad} p = \rho g. \quad (3.1)$$

Esta ecuación describe el equilibrio mecánico del fluido. (Si no existe ninguna fuerza externa, la ecuación del equilibrio es simplemente $\mathbf{grad} p = 0$, es decir, $p = \text{constante}$; la presión es la misma en todos los puntos del fluido.)

La ecuación (3.1) puede integrarse inmediatamente si la densidad del fluido puede suponerse constante a través de todo su volumen, es decir, si no existe ninguna compresión significativa del fluido bajo la acción de la fuerza exterior. Tomando el eje z vertical y hacia arriba, tenemos

$$\partial p / \partial x = \partial p / \partial y = 0, \quad \partial p / \partial z = - \rho g.$$

De aquí

$$p = - \rho g z + \text{constante}.$$

Si el fluido en reposo tiene una superficie libre a una altura h , en la cual se aplica una presión externa p_0 , que es la misma en todos sus puntos, dicha superficie debe estar en el plano horizontal $z = h$. A partir de la condición $p = p_0$ para $z = h$, encontramos que la constante es $p_0 + \rho gh$, de modo que

$$p = p_0 + \rho g(h - z). \quad (3.2)$$

En el caso de masas grandes de líquido, y para un gas, la densidad ρ no puede, en general, suponerse constante; esto se aplica especialmente en los

gases (por ejemplo, la atmósfera). Supongamos que el fluido no solamente está en equilibrio mecánico, sino también en equilibrio térmico. Entonces, la temperatura es la misma en todos sus puntos y la ecuación (3.1) puede integrarse del modo siguiente. Utilizamos la relación termodinámica familiar

$$d\Phi = -sdT + Vdp,$$

en donde Φ es el potencial termodinámico por unidad de masa.^(*) En el caso de temperatura constante

$$d\Phi = Vdp = dp/\rho.$$

Es fácil ver que la expresión $(\text{grad } p)/\rho$ puede escribirse en este caso como $\text{grad } \Phi$, de modo que la ecuación de equilibrio (3.1) toma la forma

$$\text{grad } \Phi = g.$$

En el caso de un vector constante g dirigido a lo largo del eje z negativo tenemos

$$g \equiv -\text{grad}(gz).$$

Así pues,

$$\text{grad}(\Phi + gz) = 0,$$

De aquí resulta que en todo el fluido

$$\Phi + gz = \text{constante}; \quad (3.3)$$

gz es la energía potencial de la unidad de masa de fluido en el campo gravitatorio. La condición (3.3) resulta de la física estadística aplicada al equilibrio termodinámico de un sistema en un campo externo.

Podemos mencionar aquí otra consecuencia sencilla de la ecuación (3.1). Si un fluido (como la atmósfera) está en equilibrio mecánico dentro de un campo gravitatorio, la presión en él puede ser una función sólo de la altura z (puesto que, si la presión fuese diferente en los distintos puntos con la misma altitud, no estaría en equilibrio). Así resulta a partir de (3.1) que la densidad

$$\rho = -\frac{1}{g} \frac{dp}{dz} \quad (3.4)$$

es también sólo una función de z . La presión y la densidad juntas determinan la temperatura, que es, por tanto, de nuevo una función exclusiva de z . Así pues, en el equilibrio mecánico dentro de un campo gravitatorio, las distribuciones de presión, densidad y temperatura dependen sólo de la altura.

(*) N. del T. Este potencial suele representarse con el símbolo G en la mayor parte de los textos de termodinámica y se denomina potencial de Gibbs o entalpía libre.

Si, por ejemplo, la temperatura es distinta en los diferentes puntos que tienen la misma altitud, entonces es imposible el equilibrio mecánico.

Finalmente, deduciremos la ecuación de equilibrio para una masa muy grande de fluido, cuyas partes separadas se mantienen reunidas por la atracción gravitatoria — como una estrella. Sea ϕ el potencial gravitatorio newtoniano del campo debido al fluido. Éste satisface la ecuación diferencial

$$\nabla^2 \phi = -\Delta \phi = 4\pi G\rho, \quad (3.5)$$

en donde G es la constante de Newton de la gravitación. La aceleración gravitatoria es $-\mathbf{grad} \phi$ y la fuerza sobre una masa ρ es $-\rho \mathbf{grad} \phi$. La condición del equilibrio es, por tanto,

$$\mathbf{grad} p = -\rho \mathbf{grad} \phi.$$

Dividiendo ambos miembros por ρ , tomando la divergencia de ambos miembros y utilizando la ecuación (3.5), obtenemos

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p \right) = -4\pi G\rho. \quad (3.6)$$

Debe resaltarse que el estudio actual se refiere sólo al equilibrio mecánico; la ecuación (3.6) no presupone la existencia de un equilibrio térmico completo.

Si el cuerpo no está girando, será esférico cuando esté en equilibrio y las distribuciones de densidad y de presión tendrán simetría esférica. La ecuación (3.6) toma entonces la forma en coordenadas esféricas

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G\rho. \quad (3.7)$$

§ 4. Caso en que la convección está ausente

Un fluido puede estar en equilibrio mecánico (es decir, no presentar ningún movimiento macroscópico) sin estar en equilibrio térmico. La ecuación (3.1), que es la condición para el equilibrio mecánico, puede satisfacerse aunque la temperatura no sea constante en todo el seno del fluido. Sin embargo, la cuestión que entonces se plantea es la estabilidad de dicho equilibrio. Se encuentra que el equilibrio es estable sólo cuando se cumplen determinadas condiciones. En otro caso, el equilibrio es inestable y esto conduce a la aparición de corrientes en el fluido que tienden a mezclar dicho fluido, de modo tal que se llegue a igualar la temperatura. Este movimiento se denomina *convección*. Así pues, la condición para que un equilibrio mecánico sea estable es la ausencia de convección. Esta puede deducirse del modo siguiente.

Consideremos un elemento fluido a una altura z con un volumen específico $V(p, s)$, en donde p y s son la presión y entropía de equilibrio a la

altura z . Supongamos que este elemento fluido sufre un desplazamiento adiabático hacia arriba a lo largo de un pequeño intervalo ξ ; su volumen específico se transforma entonces en $V(p', s)$, en donde p' es la presión a la altura $z + \xi$. Para que el equilibrio sea estable, es necesario (aunque no suficiente, en general) que la fuerza resultante sobre el elemento tienda a devolverlo a su posición original. Esto significa que el elemento debe ser más pesado que el fluido que «desplaza» en su nueva posición. El volumen específico de este último es $V(p', s')$, siendo s' la entropía de equilibrio a la altura $z + \xi$. Así pues, tenemos la condición de estabilidad

$$V(p', s') - V(p', s) > 0.$$

Desarrollando esta diferencia en potencias de $s' - s = \xi ds/dz$, obtenemos

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dz} > 0. \quad (4.1)$$

Las fórmulas de la termodinámica dan

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p,$$

en donde c_p es el calor específico a presión constante. Tanto c_p como T son positivos, de modo que (4.1) puede escribirse como

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{ds}{dz} > 0. \quad (4.2)$$

La mayoría de las sustancias se dilatan al calentarse, es decir, $(\partial V/\partial T)_p > 0$. La condición de que esté ausente la convección se reduce entonces a

$$ds/dz > 0, \quad (4.3)$$

es decir, la entropía debe aumentar con la altura.

A partir de este resultado encontramos con facilidad la condición que debe ser satisfecha por el gradiente de temperaturas dT/dz . Desarrollando la derivada ds/dz , tenemos

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{dp}{dz} > 0.$$

Finalmente, sustituyendo la expresión dada por (3.4) $dp/dz = -g/V$, se obtiene

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{gT}{c_p V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \quad (4.4)$$

Puede producirse la convección si la temperatura disminuye al aumentar la altura y el valor del gradiente de temperaturas excede a $(gT/c_p V)(\partial V/\partial T)_p$.

Si consideramos el equilibrio de una columna de un gas perfecto, entonces

$$(T/V)(\partial V/\partial T)_p = 1,$$

y la condición correspondiente al equilibrio estable es simplemente

$$dT/dz > -g/c_p. \quad (4.5)$$

§ 5. Ecuación de Bernoulli

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos se ven grandemente simplificadas en el caso de flujo estacionario. Entendemos por *flujo estacionario* aquél en el cual la velocidad es constante en el tiempo en cada punto ocupado por el fluido. En otras palabras, \mathbf{v} es una función sólo de las coordenadas, de modo que $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$. La ecuación (2.10) se reduce entonces a

$$\frac{1}{2} \mathbf{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -\mathbf{grad} w. \quad (5.1)$$

Introduzcamos ahora el concepto de *línea de corriente*. Estas líneas tienen la propiedad de que la tangente a ellas en cualquier punto indica la dirección de la velocidad en dicho punto; quedan determinadas por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \quad (5.2)$$

En el caso de flujo estacionario las líneas de corriente no varían con el tiempo, coincidiendo con las trayectorias de las partículas fluidas. En el flujo no estacionario deja de cumplirse esta coincidencia: las tangentes a las líneas de corrientes dan las direcciones de las velocidades de las partículas fluidas en diversos puntos del espacio en un instante dado, mientras que las tangentes a las trayectorias indican las direcciones de las velocidades de las partículas de fluido dadas en distintos instantes de tiempo.

Formemos el producto escalar de la ecuación (5.1) con el vector unitario tangente a la línea de corriente en cada punto; designaremos este vector unidad por \mathbf{l} . La proyección del gradiente en cualquier dirección es, como sabemos, la derivada en dicha dirección. De aquí que la proyección de $\mathbf{grad} w$ sea $\partial w / \partial l$. El vector $\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}$ es perpendicular a \mathbf{v} , y su proyección en la dirección de \mathbf{l} , por tanto, es cero.

Así pues, obtenemos a partir de la ecuación (5.1)

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) = 0.$$

Se deduce a partir de esta expresión que $\frac{1}{2} v^2 + w$ es constante a lo largo de una línea de corriente:

$$\frac{1}{2} v^2 + w = \text{constante.} \quad (5.3)$$

En general, la constante toma valores diferentes para las distintas líneas de corriente. La ecuación (5.3) se denomina *ecuación de Bernoulli*.

Si el flujo tiene lugar en un campo gravitatorio, la aceleración \mathbf{g} debida a la gravedad debe sumarse al segundo miembro de la ecuación (5.1). Consideremos que la dirección de la gravedad es el eje z , creciendo z en el sentido hacia arriba. Entonces, el coseno del ángulo formado por las direcciones de \mathbf{g} y \mathbf{l} es igual a la derivada $-dz/dl$, de modo que la proyección de \mathbf{g} sobre \mathbf{l} es

$$-g dz/dl.$$

De acuerdo con esto, tenemos ahora

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{2} v^2 + w + gz \right) = 0.$$

Así pues, la ecuación de Bernoulli tiene la siguiente expresión a lo largo de una línea de corriente

$$\frac{1}{2} v^2 + w + gz = \text{constante.} \quad (5.4)$$

§ 6. Flujo de energía

Escojamos un elemento de volumen cualquiera fijo en el espacio y veamos cómo varía con el tiempo la energía del fluido contenido dentro de este elemento de volumen. La energía de la unidad de volumen de fluido es

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon,$$

en donde el primer término es la energía cinética y el segundo la energía interna, siendo ϵ la energía interna por unidad de masa. La variación de esta energía viene dada por la derivada parcial

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right).$$

Para calcular esta magnitud escribamos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t},$$

o bien, utilizando la ecuación de continuidad (1.2) y la ecuación del movimiento (2.3),

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{1}{2} v^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} p - \rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}.$$

En el último término sustituiremos $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}$ por $\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}^2$ y $\operatorname{grad} p$ por $\rho \operatorname{grad} w - \rho T \operatorname{grad} s$ [utilizando la relación termodinámica $dw = Tds + (1/\rho)dp$], con lo que se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{1}{2} v^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) + \rho T \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} s.$$

Con objeto de transformar la derivada $\partial(\rho\epsilon)/\partial t$, utilizaremos la relación termodinámica

$$d\epsilon = Tds - pdV = Tds + (p/\rho^2)d\rho.$$

Puesto que $\epsilon + p/\rho = \epsilon + pV$ es simplemente la función entalpía w por unidad de masa, encontramos que

$$d(\rho\epsilon) = \epsilon dp + \rho d\epsilon = wdp + \rho Tds,$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} = w \frac{\partial p}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} = -w \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) - \rho T \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}s.$$

También hemos utilizado aquí la ecuación adiabática general (2.6).

Combinando los resultados anteriores, encontramos que la variación de energía es

$$\frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon) = -(\frac{1}{2}v^2 + w) \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) - \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\frac{1}{2}v^2 + w),$$

o sea, finalmente,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon) = -\operatorname{div}[\rho\mathbf{v}(\frac{1}{2}v^2 + w)]. \quad (6.1)$$

Con objeto de ver el significado de esta ecuación, integrémosla respecto a un determinado volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int (\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon) dV = - \int \operatorname{div}[\rho\mathbf{v}(\frac{1}{2}v^2 + w)] dV,$$

o bien, convirtiendo la integral de volumen en el segundo miembro en una integral de superficie,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int (\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon) dV = - \oint \rho\mathbf{v}(\frac{1}{2}v^2 + w) \cdot d\mathbf{f}. \quad (6.2)$$

El primer miembro es la variación por unidad de tiempo de la energía del fluido en un volumen determinado. El segundo miembro es, por consiguiente, la cantidad de energía que fluye hacia el exterior de este volumen en la unidad de tiempo. De aquí que la expresión

$$\rho\mathbf{v}(\frac{1}{2}v^2 + w) \quad (6.3)$$

pueda denominarse vector *densidad de flujo de energía*. Su módulo es la cantidad de energía que pasa en la unidad de tiempo a través del área unidad perpendicular a la dirección de la velocidad.

La expresión (6.3) muestra que cualquier masa unitaria de fluido lleva consigo durante su movimiento una cantidad de energía $w + \frac{1}{2}v^2$. El hecho

de que la entalpía w aparezca aquí en lugar de la energía ϵ , tiene un significado físico sencillo. Haciendo $w = \epsilon + p/\rho$, podemos escribir el flujo de energía a través de una superficie cerrada en la forma

$$-\oint \rho v \left(\frac{1}{2} v^2 + \epsilon \right) \cdot d\mathbf{f} - \oint p v \cdot d\mathbf{f}.$$

El primer término es la energía (cinética más interna) transportada por la masa de fluido a través de la superficie en la unidad de tiempo. El segundo término es el trabajo realizado por la fuerza de presión sobre el fluido dentro de la superficie.

§ 7. Flujo del impulso

Consideremos ahora una serie semejante de razonamientos para el impulso o cantidad de movimiento del fluido. El impulso por unidad de volumen es ρv . Determinemos su variación respecto al tiempo, $\partial(\rho v)/\partial t$. Para ello utilizaremos la notación tensorial.[†] Tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i.$$

Utilizando la ecuación de continuidad (1.2) [con $\operatorname{div}(\rho v)$ escrita en la forma $\partial(\rho v_k)/\partial x_k$]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k},$$

y la ecuación de Euler (2.3) en la forma

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) &= -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k). \end{aligned}$$

[†] Los sufijos latinos i, k, \dots , toman los valores 1, 2, 3, correspondientes a los componentes de los vectores y tensores a lo largo de los ejes x, y, z , respectivamente. Escribiremos las sumas del tipo $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \sum A_i B_i$ en la forma $A_i B_i$ simplemente, omitiendo el signo de la suma. Utilizaremos un procedimiento semejante en todos los productos en los que intervengan vectores o tensores: se debe sobreentender siempre la suma respecto a los valores 1, 2, 3, cuando aparece duplicado un sufijo latino en un término cualquiera. Dichos sufijos, a veces, se denominan *mudos*. Al trabajar con sufijos mudos debe recordarse que puede sustituirse cualquier par de dichos sufijos por otro par de letras semejantes, ya que la notación utilizada en el caso de sufijos que pueden tomar todos sus valores posibles no influye evidentemente sobre el valor de la suma.

Escribiremos el primer término del segundo miembro en la forma[†]

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k},$$

y se obtiene, finalmente,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad (7.1)$$

viniendo definido el tensor Π_{ik} como

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k. \quad (7.2)$$

Este tensor es claramente simétrico.

Para ver el significado del tensor Π_{ik} , integremos la ecuación (7.1) respecto a un volumen determinado:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV = - \int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV.$$

La integral del segundo miembro se transforma en una integral de superficie mediante la fórmula de Green:[‡]

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV = - \oint \Pi_{ik} df_k. \quad (7.3)$$

El primer miembro es la variación respecto al tiempo de la componente i del impulso contenido en el volumen considerado. La integral de superficie del segundo miembro es, por consiguiente, la cantidad de impulso que fluye hacia fuera a través de la superficie límite en la unidad de tiempo. En consecuencia, $\Pi_{ik} df_k$ es la componente i del impulso que fluye a través del elemento superficial df . Si escribimos df_k en la forma $n_k df$, siendo df el área del elemento superficial y n un vector unidad a lo largo de la normal y dirigido hacia fuera, veremos que $\Pi_{ik} n_k$ es el flujo de la componente i del impulso a través del área superficial unidad. Podemos observar, además, que, de acuerdo con (7.2), $\Pi_{ik} n_k = pn_i + \rho v_i v_k n_k$. Esta expresión puede escribirse en forma vectorial

$$p\mathbf{n} + \rho\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}). \quad (7.4)$$

Así pues, Π_{ik} es la componente i de la cantidad de impulso que fluye en la unidad de tiempo a través del área unidad perpendicular al eje x_k . El

[†] δ_{ik} designa el tensor unidad, es decir, el tensor con componentes que son la unidad para $i = k$ y cero para $i \neq k$. Es evidente que $\delta_{ik} A_k = A_i$, siendo A_i un vector cualquiera. Análogamente, si A_{kl} es un tensor de rango dos, tenemos las relaciones $\delta_{ik} A_{kl} = A_{il}$, $\delta_{ik} A_{ik} = A_{ii}$, y así sucesivamente.

[‡] La regla para transformar una integral extendida a una superficie cerrada en otra aplicada al volumen limitado por dicha superficie puede formularse así: debe sustituirse el elemento de superficie df_i por el operador $dV \cdot \partial/\partial x_i$, que ha de aplicarse a la totalidad del integrando.

tensor Π_{ik} se denomina *tensor de densidad de flujo de impulso*. El flujo de energía queda determinado por un vector, siendo la energía un escalar; sin embargo, el flujo de impulso viene determinado por un tensor de orden dos, puesto que el propio impulso es un vector.

El vector (7.4) da el flujo de impulso en la dirección de \mathbf{n} , es decir, a través de una superficie perpendicular a \mathbf{n} . En particular, tomando el vector unidad \mathbf{n} dirigido paralelamente a la velocidad del fluido, veremos que sólo la componente longitudinal del impulso se ve transportada en dicha dirección y su densidad de flujo es $p + \rho v^2$. En una dirección perpendicular a la velocidad, sólo se transporta la componente transversal (relativa a \mathbf{v}) del impulso, siendo su densidad de flujo exactamente p .

§ 8. Conservación de la circulación

La integral

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l},$$

extendida a lo largo de cierto contorno cerrado se denomina *circulación de la velocidad* alrededor de dicho contorno.

Consideremos un contorno cerrado dibujado en el fluido en un instante determinado. Supongamos que sea un «contorno fluido», es decir, compuesto por partículas fluidas que están sobre él mismo. En el curso del tiempo estas partículas se mueven y el contorno se mueve con ellas. Investiguemos lo que le ocurre a la circulación de la velocidad. En otras palabras, calculemos la derivada respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}.$$

Hemos escrito aquí la derivada total respecto del tiempo, puesto que estamos buscando la variación de la circulación a lo largo de un «contorno fluido» cuando éste se mueve y no a lo largo de un contorno fijo en el espacio.

Para evitar confusiones, designaremos temporalmente la derivación respecto a las coordenadas mediante el símbolo δ , manteniendo el símbolo d para la derivación respecto al tiempo. A continuación, observemos que un elemento $d\mathbf{l}$ de la longitud del contorno puede escribirse como la diferencia $\delta\mathbf{r}$ entre los radios vectores \mathbf{r} de los puntos situados en los extremos del elemento. Así pues, escribamos la circulación de la velocidad como $\oint \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r}$. Al derivar esta integral respecto al tiempo, debe tenerse en cuenta que varía no sólo la velocidad, sino también el propio contorno (es decir, su forma).

De aquí que al tomar la derivada temporal bajo el signo integral debemos derivar no solamente \mathbf{v} , sino también $\delta\mathbf{r}$:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} + \oint \mathbf{v} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}}{dt}.$$

Como la velocidad \mathbf{v} es precisamente la derivada respecto al tiempo del radio vector \mathbf{r} , tenemos

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \delta \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} = \delta(\frac{1}{2}v^2).$$

La integral de una diferencia total a lo largo de un contorno cerrado es, sin embargo, cero. Por consiguiente, la segunda integral se anula dejando

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ahora queda sólo sustituir la aceleración $d\mathbf{v}/dt$ por su expresión obtenida en (2.9):

$$d\mathbf{v}/dt = -\mathbf{grad} w.$$

Utilizando la fórmula de Stokes, tenemos entonces

$$\oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \oint \mathbf{rot} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{f} = 0,$$

puesto que $\mathbf{rot} \mathbf{grad} w \equiv 0$. Así pues, volviendo a nuestra notación previa, encontramos[†]

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

o bien

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{constante.} \quad (8.1)$$

Por consiguiente, hemos llegado a la conclusión de que en un fluido ideal, la circulación de la velocidad a lo largo de un contorno «fluido» cerrado es constante en el tiempo (*teorema de Kelvin o ley de conservación de la circulación*).

Debe resaltarse que se ha obtenido este resultado mediante el empleo de la ecuación de Euler en la forma (2.9) y, por consiguiente, en ella interviene la hipótesis de que el flujo es isoentrópico. El teorema no es válido para flujos que no sean isoentrópicos.[‡]

[†] Este resultado sigue siendo válido en un campo gravitatorio uniforme, ya que en este caso $\mathbf{rot} \mathbf{g} \equiv 0$.

[‡] Matemáticamente resulta necesaria una relación biunívoca entre p y ρ [que en el caso de un flujo isoentrópico es $s(p, \rho) = \text{constante}$]; entonces, puede escribirse $-(1/\rho) \mathbf{grad} p$ como el gradiente de una función determinada, resultado imprescindible para deducir el teorema de Kelvin.

§ 9. Flujo potencial

A partir de la ley de conservación de circulación podemos obtener un resultado importante. Supongamos primero que el flujo es estacionario y consideremos una línea de corriente de la cual sabemos que $\omega \equiv \text{rot } \mathbf{v}$ (la vorticidad) es cero en un punto determinado. Dibujemos un contorno cerrado arbitrario infinitamente pequeño que rodee la línea de corriente en dicho punto. Según el teorema de Stokes, la circulación de la velocidad a lo largo de cualquier contorno infinitesimalmente pequeño es igual a $\text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$, siendo $d\mathbf{f}$ el elemento de área encerrado por el contorno. Puesto que el contorno que estamos considerando en este momento está situado en un punto en el cual $\omega \equiv 0$, la circulación de la velocidad a lo largo del mismo es cero. En el transcurso del tiempo, este contorno se mueve con el fluido, pero siempre permanece infinitamente pequeño y siempre rodea a la misma línea de corriente. Puesto que la circulación de la velocidad debe permanecer constante, es decir, cero, se deduce que ω debe ser cero en todos los puntos de la línea de corriente.

Así llegamos a la conclusión de que si en un punto cualquiera de la línea de corriente $\omega = 0$, esto es cierto también en los demás puntos de dicha línea de corriente. Si el flujo no es estacionario, el mismo resultado es válido excepto que en lugar de una línea de corriente podemos considerar la trayectoria que describe en el curso del tiempo una partícula de fluido particular; † recordemos que en flujos no estacionarios estas trayectorias no coinciden, en general, con las líneas de corriente.

A primera vista parece posible basar sobre este resultado el siguiente argumento. Consideremos que el flujo estacionario está pasando alrededor de un cuerpo determinado. Y que el flujo incidente es uniforme en el infinito; su velocidad \mathbf{v} es una constante, de modo que $\omega \equiv 0$ en todas las líneas de corriente. De aquí que concluyamos que ω es cero a lo largo de la totalidad de cada línea de corriente, es decir, en todo el espacio.

Un flujo en el cual $\omega = 0$ en todo el espacio se denomina *flujo potencial* o *flujo irrotacional*, en oposición al *flujo rotacional*, en el cual la vorticidad no es nula en todos los puntos. Así pues, llegamos a la conclusión de que si junto a un cuerpo cualquiera pasa un flujo estacionario y uniforme, en el infinito debe ser un flujo potencial.

Análogamente, podemos razonar del modo siguiente, mediante la ley de conservación de la circulación. Supongamos que en un instante determinado tenemos un flujo potencial en todo el volumen del fluido. Entonces, la circulación de la velocidad alrededor de un contorno cerrado cualquiera del

† Para evitar malas interpretaciones, debemos señalar que este resultado carece de significado en el flujo turbulento (ver capítulo III). Podemos también indicar que puede producirse una vorticidad no nula en una línea de corriente después del paso de una onda de choque. Veremos que esto se debe a que el flujo ya no es isoentrópico y no puede entonces deducirse la ley de conservación de la circulación (§ 106).

fluido es nula.[†] Según el teorema de Kelvin, llegamos a la conclusión de que esto será válido en un instante futuro cualquiera, es decir, encontraremos que, si existe un flujo potencial en un instante determinado, entonces existe un flujo potencial en todos los instantes siguientes (en particular, cualquier flujo para el cual el fluido esté inicialmente en reposo debe ser un flujo potencial). Esto está de acuerdo con el hecho de que, si $\omega = 0$, la ecuación (2.11) se ve idénticamente satisfecha.

Sin embargo, de hecho, todas estas conclusiones son solamente de una validez muy limitada. La razón es que la prueba dada anteriormente de que $\omega = 0$ a lo largo de una línea de corriente es, estrictamente hablando, inválida para una línea que está en la superficie de un sólido junto al cual está circulando el flujo, puesto que la presencia de esta superficie hace imposible dibujar un contorno cerrado en el fluido que rodee dicha línea de corriente. Las ecuaciones del movimiento de un fluido ideal admiten soluciones, por tanto, en las cuales se produce una *separación* en la superficie del cuerpo: las líneas de corriente, que han seguido la superficie del cuerpo durante cierta distancia, empiezan a separarse de ella en un punto determinado y continúan dentro del fluido. El esquema del flujo resultante está caracterizado por la presencia de una «superficie de discontinuidad tangencial» que sale del cuerpo; en esta superficie la velocidad, que es en todas partes tangencial en las dos superficies, tiene una discontinuidad. En otras palabras, en esta superficie una capa del fluido «desliza» sobre otra. La figura 1 muestra una superficie de discontinuidad que separa el fluido que está moviéndose en una región de otra con fluido estacionario detrás del cuerpo. Desde el punto de vista matemático, la discontinuidad en la componente de velocidad tangencial corresponde a una superficie en la cual la vorticidad es nula.

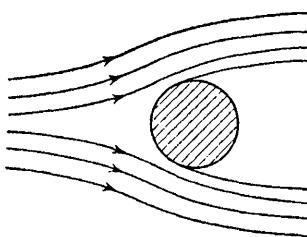


FIG. 1

[†] Hemos supuesto por sencillez que el fluido ocupa una región del espacio simplemente conexa. En el caso de un dominio múltiple conexo se obtendrá el mismo resultado final, pero en los razonamientos a realizar habría que precisar algunas restricciones en la selección de los contornos.

Cuando se incluyen dichos flujos discontinuos, la solución de las ecuaciones del movimiento para un fluido ideal no es única: además del flujo continuo admiten también un número infinito de soluciones que poseen superficies de discontinuidad tangencial partiendo desde cualquier línea prescrita en la superficie del cuerpo por el cual está circulando el flujo en cuestión. Sin embargo, debe resaltarse que carecen de significado físico todas estas soluciones discontinuas, puesto que las discontinuidades tangenciales son totalmente inestables y, por consiguiente, el flujo se haría, de hecho, turbulento (ver capítulo III).

El problema físico real del flujo que pasa a lo largo de un cuerpo tiene, como es natural, una solución única. La razón es que los fluidos ideales no existen realmente; cualquier fluido real tiene una cierta viscosidad, aunque sea muy pequeña. Esta viscosidad puede carecer prácticamente de efectos sobre el movimiento de la mayor parte del fluido, pero, sin importar lo pequeño que éste sea, resultará importante en una capa delgada de fluido junto al cuerpo. Las propiedades del flujo en esta *capa límite* deciden la selección de una de las infinitas soluciones de las ecuaciones del movimiento correspondientes a un fluido ideal. Así resulta que, en el caso general del flujo que rodea a un cuerpo de forma arbitraria, deben rechazarse las soluciones con separación; si se produjese la separación daría como resultado la turbulencia.

A pesar de lo que hemos dicho hasta ahora, el estudio de las soluciones de las ecuaciones del movimiento para un flujo potencial estacionario continuo que circula junto a cuerpos tiene en algunos casos un interesante significado. Aunque, en el caso general del flujo que rodea a cuerpos de forma arbitraria, el flujo real apenas tiene relación con el esquema del flujo potencial, en el caso de cuerpos de formas especiales («aerodinámicas» — ver § 46) pueden diferir muy poco de un flujo potencial; con más precisión, se da un flujo potencial, excepto en una capa delgada de fluido en la superficie del cuerpo y en una «estela» relativamente estrecha detrás del mismo.

Otro caso importante de flujo potencial se presenta cuando existen oscilaciones pequeñas de un cuerpo inmerso en un fluido. Es fácil demostrar que, si la amplitud a de las oscilaciones son pequeñas en comparación con la dimensión l del cuerpo ($a \ll l$), el flujo que circula junto al cuerpo será flujo potencial. Para demostrarlo estimaremos el orden de magnitud de los diversos términos de la ecuación de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p.$$

La velocidad \mathbf{v} varía apreciablemente (en una cantidad del mismo orden que la velocidad \mathbf{u} del cuerpo oscilante) a lo largo de una distancia del orden de la dimensión l del cuerpo. De aquí que las derivadas de \mathbf{v} respecto a las coordenadas son del orden de u/l . El orden de magnitud de la propia \mathbf{v} (a distancias relativamente pequeñas del cuerpo) queda determinado por el

valor de \mathbf{u} . Así pues, tenemos $(\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} \sim u^2/l$. La derivada $\partial\mathbf{v}/\partial t$ es del orden de ωu , siendo ω la frecuencia de las oscilaciones. Puesto que $\omega \sim u/a$, tenemos que $\partial\mathbf{v}/\partial t \sim u^2/a$. Se deduce, por tanto, a partir de la desigualdad $a \ll l$ que el término $(\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v}$ es pequeño en comparación con $\partial\mathbf{v}/\partial t$ y puede despreciarse, de modo que la ecuación de movimiento del fluido se reduce a $\partial\mathbf{v}/\partial t = -\text{grad } w$. Tomando el rotacional de ambos miembros, obtenemos $\partial(\text{rot } \mathbf{v})/\partial t = 0$, y, por tanto, $\text{rot } \mathbf{v} = \text{constante}$. Sin embargo, en el movimiento oscilante, el promedio temporal de la velocidad es cero y, por consiguiente, $\text{rot } \mathbf{v} = \text{constante}$ implica que $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. Así pues, el movimiento de un fluido que realiza pequeñas oscilaciones es un flujo potencial en primera aproximación.

Obtendremos ahora algunas propiedades generales del flujo potencial. Recordemos primeramente que la deducción de la ley de conservación de la circulación y, por lo tanto, todas sus consecuencias, se basaron en la hipótesis de que el flujo era isoentrópico. Si el flujo no es isoentrópico, la ley deja de cumplirse y, por consiguiente, aunque tengamos un flujo potencial en un instante determinado, la vorticidad será, en general, no nula en instantes siguientes. Así pues, únicamente el flujo isoentrópico puede, de hecho, ser flujo potencial.

De acuerdo con el teorema de Stokes,

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f},$$

en donde la integral del segundo miembro se extiende a una superficie limitada por el contorno en cuestión. De aquí vemos que, en el flujo potencial, la circulación de la velocidad alrededor de cualquier contorno cerrado es nula:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (9.1)$$

Se deduce a partir de esto que, en particular, no pueden existir líneas de corriente cerradas en el flujo potencial.[†] Porque, ya que la dirección de una línea de corriente es en todo punto la dirección de la velocidad, la circulación a lo largo de dicha línea no puede nunca ser nula.

En el movimiento rotacional la circulación de la velocidad es, en general, no nula. En este caso pueden existir líneas de corriente cerradas, pero debe resaltarse que la presencia de líneas de corriente cerradas no es una propiedad necesaria del movimiento rotacional.

Del mismo modo que cualquier campo vectorial que posee un rotacional cero, la velocidad en el flujo de potencial puede expresarse como el gra-

[†] Este resultado, como el (19.1), puede que no sea válido en un dominio múltiple conexo del espacio. En el flujo potencial en una región como esta, la circulación de la velocidad puede ser no nula si el contorno cerrado a lo largo del cual se calcula no puede contraerse a un punto sin cortar los límites del dominio.

diente de un escalar. Este escalar se denomina *potencial de velocidad*, y lo designaremos por ϕ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi. \quad (9.2)$$

Escribiendo la ecuación de Euler en la forma (2.10)

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + \frac{1}{2} \mathbf{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -\mathbf{grad} w$$

y sustituyendo $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi$, tenemos

$$\mathbf{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + w \right) = 0,$$

de aquí que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + w = f(t), \quad (9.3)$$

siendo $f(t)$ una función arbitraria del tiempo. Esta ecuación es una primera integral de las ecuaciones del flujo potencial. La función $f(t)$ de la ecuación (9.3) puede ponerse igual a cero sin pérdida de generalidad. Puesto que la velocidad es la derivada espacial de ϕ , podemos sumar a ϕ cualquier función del tiempo; sustituyendo ϕ por $\phi + \int f(t) dt$, obtenemos cero en el segundo miembro de (9.3).

En el caso de flujo estacionario tenemos (considerando que el potencial ϕ es independiente del tiempo) $\partial \phi / \partial t = 0$, $f(t) = \text{constante}$ y (9.3) se transforma en la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{1}{2} v^2 + w = \text{constante}. \quad (9.4)$$

Puede señalarse que existe una diferencia importante entre la ecuación de Bernoulli para el flujo potencial y la correspondiente a otros flujos. En el caso general, la constante del segundo miembro es invariable a lo largo de cualquier línea de corriente dada, pero es diferente para las distintas líneas de corriente. Sin embargo, en el flujo potencial es constante en todo el fluido. Esto resalta la importancia de la ecuación de Bernoulli en el estudio del flujo potencial.

§ 10. Fluidos incompresibles

En un gran número de casos de flujo de líquidos (y también de gases), su densidad puede suponerse invariable, es decir, constante en todo el volumen del fluido y a lo largo de todo su movimiento. En otras palabras, no existe ninguna compresión o dilatación observable del fluido en dichos casos. Hablamos entonces de un *flujo incompresible*.

Las ecuaciones generales de la dinámica de fluidos se simplifican mucho en el caso de un fluido incompresible. Es cierto que la ecuación de Euler

resulta sin variación si ponemos $\rho = \text{constante}$, excepto que ρ puede entonces incluirse bajo el operador gradiente de la ecuación (2.4):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \mathbf{g}. \quad (10.1)$$

La ecuación de continuidad, por otra parte, toma para ρ constante la forma simple

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (10.2)$$

Como la densidad deja de ser una función desconocida como lo era en el caso general, el sistema fundamental de ecuaciones de la dinámica de fluidos incompresibles puede considerarse como ecuaciones en las que interviene la velocidad sólo. Éstas pueden ser la ecuación de continuidad (10.2) y la ecuación (2.11):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}). \quad (10.3)$$

La ecuación de Bernoulli puede escribirse en una forma más sencilla en el caso de un fluido incompresible. La ecuación (10.1) difiere de la ecuación de Euler (2.9), en general, en que hay que escribir $\mathbf{grad}(p/\rho)$ en lugar de $\mathbf{grad}w$. De aquí que podamos escribir la ecuación de Bernoulli inmediatamente sustituyendo simplemente la entalpía en (5.4) por p/ρ :

$$\frac{1}{2}v^2 + p/\rho + gz = \text{constante}. \quad (10.4)$$

En el caso de un fluido incompresible, podemos también escribir p/ρ en lugar de w en la expresión (6.3) que nos da el flujo de energía, el cual resulta entonces

$$\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} \right). \quad (10.5)$$

Como sabemos, a partir de una bien conocida relación termodinámica, la expresión $d\epsilon = Tds - pdV$ corresponde a la variación de la energía interna; en el caso de $s = \text{constante}$ y $V = 1/\rho = \text{constante}$, resulta $d\epsilon = 0$, es decir, $\epsilon = \text{constante}$. Puesto que los términos constantes en la energía carecen de importancia, podemos omitir ϵ en $w = \epsilon + p/\rho$.

Las ecuaciones son particularmente sencillas en el caso del flujo potencial de un fluido incompresible. La ecuación (10.3) se ve satisfecha idénticamente si $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$. La ecuación (10.2), con la sustitución $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi$, se transforma en

$$\Delta \phi = 0, \quad (10.6)$$

es decir, es la ecuación de Laplace[†] para el potencial ϕ . Esta ecuación debe

[†] El potencial de velocidad fue introducido primeramente por EULER, que obtuvo una ecuación de la forma (10.6); esta fórmula se conoció después por ecuación de Laplace.

suplementarse mediante condiciones límites en la superficie donde el fluido se encuentra con cuerpos sólidos. En las superficies sólidas fijas, la componente de velocidad del fluido v_n normal a la superficie debe ser nula, mientras que en el caso de superficies móviles debe ser igual a la componente normal de la velocidad de la superficie (que es una función determinada del tiempo). Sin embargo, la velocidad v_n es igual a la derivada normal del potencial ϕ : $v_n = \partial\phi/\partial n$. Así pues, las condiciones límites generales son que $\partial\phi/\partial n$ es una función determinada de las coordenadas y del tiempo en los límites.

En el caso del flujo potencial, la velocidad está relacionada con la presión mediante la ecuación (9.3). En un fluido incompresible, podemos sustituir w por p/ρ :

$$\partial\phi/\partial t + \frac{1}{2}v^2 + p/\rho = f(t). \quad (10.7)$$

Podemos observar aquí la siguiente propiedad importante del flujo potencial de un fluido incompresible. Supongamos que un cuerpo sólido se está moviendo a través del fluido. Si el resultado es un flujo potencial, en un instante cualquiera depende sólo de la velocidad del cuerpo móvil en dicho instante y no, por ejemplo, de su aceleración. La ecuación (10.6) no contiene explícitamente el tiempo, el cual entra en la solución sólo a través de las condiciones límites y éstas contienen sólo la velocidad del cuerpo móvil.

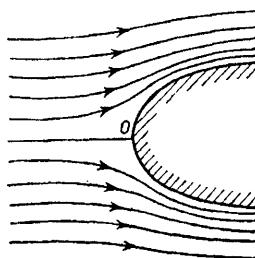


FIG. 2

A partir de la ecuación de Bernoulli, $\frac{1}{2}v^2 + p/\rho = \text{constante}$, vemos que, en el flujo estacionario de un fluido incompresible (no en un campo gravitatorio), la presión más alta se presenta en puntos en donde la velocidad es nula. Dicho punto normalmente se presenta en la superficie de un cuerpo a lo largo del cual se está moviendo el fluido (en el punto O de la figura 2) que se llama *punto de estancamiento*. Si \mathbf{u} es la velocidad de la corriente incidente (es decir, la velocidad del fluido en el infinito) y p_0 la presión en el infinito, la presión en el punto de estancamiento es

$$p_{\max} = p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2. \quad (10.8)$$

Si la distribución de velocidades en un fluido móvil depende solamente de dos coordenadas (por ejemplo, x e y), y la velocidad es en todas partes paralela al plano xy , el flujo se dice que es *bidimensional* o *flujo plano*. Para resolver problemas de flujo bidimensional de un fluido incompresible es, a veces, conveniente expresar la velocidad en función de lo que se denomina la *función de corriente*. A partir de la ecuación de continuidad $\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv \partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y = 0$, vemos que las componentes de la velocidad pueden escribirse como las derivadas

$$v_x = \partial \psi / \partial y, \quad v_y = -\partial \psi / \partial x \quad (10.9)$$

de cierta función $\psi(x, y)$, denominada función de corriente. La ecuación de continuidad se ve satisfecha entonces automáticamente. La ecuación que debe satisfacerse por la función de corriente se obtiene sustituyendo (10.9) en la ecuación (10.3). Obtenemos entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi = 0. \quad (10.10)$$

Si conocemos la función de corriente podemos determinar inmediatamente la forma de las líneas de corriente en el caso del flujo estacionario. La ecuación diferencial de las líneas de corrientes (en flujo bidimensional) es $dx/v_x = dy/v_y$, o sea, $v_y dx - v_x dy = 0$; expresa el hecho de que la dirección de la tangente a una línea de corriente es la dirección de la velocidad. Sustituyendo (10.9), tenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0,$$

de aquí que $\psi = \text{constante}$. Así pues, las líneas de corriente son la familia de curvas obtenida haciendo la función de corriente $\psi(x, y)$ igual a una constante arbitraria.

Si dibujamos una curva entre dos puntos A y B en el plano xy , el flujo de masa Q a través de esta curva viene dada por la diferencia de los valores de la función de corriente en estos dos puntos, independientemente de la forma de la curva. Porque, si v_n es la componente de la velocidad normal a la curva en un punto cualquiera, tenemos

$$Q = \rho \oint_A^B v_n dl = \rho \oint_A^B (-v_y dx + v_x dy) = \rho \int_A^B d\psi,$$

o sea,

$$Q = \rho(\psi_B - \psi_A). \quad (10.11)$$

Existen métodos poderosos para resolver problemas de un flujo potencial bidimensional en el caso de un fluido incompresible que rodea a cuerpos de

diversos perfiles, en los que interviene la aplicación de la teoría de funciones de una variable compleja.[†] La base de estos métodos es la siguiente. La función potencial y la corriente están relacionadas con las componentes de velocidad por

$$v_x = \partial\phi/\partial x = \partial\psi/\partial y, \quad v_y = \partial\phi/\partial y = -\partial\psi/\partial x.$$

Estas relaciones entre las derivadas de ϕ y ψ son, sin embargo, matemáticamente las mismas que las bien conocidas condiciones de Cauchy-Riemann para que una expresión compleja

$$w = \phi + i\psi \quad (10.12)$$

sea una función analítica del argumento complejo $z = x + iy$. Esto significa que la función $w(z)$ tiene en cada punto una derivada bien definida

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_x - iv_y. \quad (10.13)$$

La función w se denomina *potencial complejo* y dw/dz la *velocidad compleja*. El módulo y argumento de esta última dan el módulo v de la velocidad y el ángulo θ formado por la dirección de la velocidad con el eje x :

$$dw/dz = ve^{-i\theta}. \quad (10.14)$$

En una superficie sólida, alrededor de la cual tiene lugar el flujo, la velocidad debe estar dirigida sobre la tangente. Es decir, el contorno del perfil de la superficie debe ser una línea de corriente, o sea, $\psi = \text{constante}$ a lo largo de la misma; la constante puede considerarse como cero y entonces el problema del flujo que rodea un contorno determinado se reduce a la determinación de una función analítica $w(z)$ que tome valores reales en el contorno. El enunciado del problema es más complicado cuando el fluido tiene una superficie libre; se encuentra un ejemplo de este tipo en el problema 9.

Como sabemos, la integral de una función analítica a lo largo de cualquier contorno cerrado C es igual a $2\pi i$ veces la suma de los residuos de la función en sus polos simples en el interior de C ; de aquí,

$$\oint w' dz = 2\pi i \sum_k A_k,$$

siendo A_k los residuos de la velocidad compleja. Tenemos también

$$\begin{aligned} \oint w' dz &= \oint (v_x - iv_y)(dx + idy) \\ &= \oint (v_x dx + v_y dy) + i \oint (v_x dy - v_y dx). \end{aligned}$$

[†] Para una descripción más detallada de estos métodos y de sus diversas aplicaciones, ver N. E. KOCHIN, I. A. KIBEL' y N. ROZU, *Hidromecánica teórica*, parte 1, 4.^a ed., Moscú, 1948; L. I. SEDOV, *Problemas bidimensionales de hidrodinámica y aerodinámica*, Moscú, 1950.

La parte real de esta expresión es precisamente la circulación de la velocidad Γ a lo largo del contorno C . La parte imaginaria, multiplicada por ρ , es el flujo de masa que atraviesa C ; si no existen fuentes de fluido dentro del contorno, este flujo es cero y entonces tenemos simplemente

$$\Gamma = 2\pi i \sum_k A_k; \quad (10.15)$$

siendo en este caso todos los residuos A_k imaginarios puros.

Finalmente, consideremos las condiciones en las que puede considerarse el fluido como incompresible. Cuando la presión varía adiabáticamente en Δp , la densidad varía en $\Delta\rho = (\partial\rho/\partial p)_s \Delta p$. Sin embargo, de acuerdo con la ecuación de Bernoulli, Δp es del orden de ρv^2 en flujo estacionario. Así pues, $\Delta\rho \sim (\partial\rho/\partial p)_s \rho v^2$. Demostraremos en § 63 que la derivada $(\partial p/\partial\rho)_s$ es el cuadrado de la velocidad c del sonido en el fluido, de modo que $\Delta\rho \sim \rho v^2/c^2$. El fluido puede considerarse como incompresible si $\Delta\rho/\rho \ll 1$. Vemos que una condición necesaria para que se cumpla esto es que la velocidad del fluido sea pequeña en comparación con la del sonido:

$$v \ll c. \quad (10.16)$$

No obstante, esta condición es suficiente sólo en flujo estacionario. En un flujo no estacionario, debe cumplirse otra condición adicional. Sean τ y l un tiempo y una longitud del orden de los tiempos y distancias en los que la velocidad del fluido sufre una variación significativa. Si son comparables los términos $\partial\mathbf{v}/\partial t$ y $(1/\rho) \mathbf{grad} p$ en la ecuación de Euler, encontramos, en órdenes de magnitud, $v/\tau \sim \Delta p/l\rho$ o $\Delta p \sim l\rho v/\tau$, y la variación correspondiente en ρ es $\Delta\rho \sim l\rho v/\tau c^2$. Comparando a continuación los términos $\partial\rho/\partial t$ y $\rho \operatorname{div} \mathbf{v}$ en la ecuación de continuidad, vemos que puede despreciarse la derivada $\partial\rho/\partial t$ (es decir, puede suponerse que ρ es constante) si $\Delta\rho/\tau \ll \rho v/l$, o sea,

$$\tau \gg l/c. \quad (10.17)$$

Si se satisfacen simultáneamente las condiciones (10.16) y (10.17) puede considerarse que el fluido es incompresible. La condición (10.17) tiene un significado evidente: el tiempo l/c que emplea una señal sonora en recorrer la distancia l debe ser pequeño en comparación con el tiempo τ durante el cual varía apreciablemente el flujo, de modo que la propagación de las interacciones en el fluido pueda considerarse como instantánea.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la forma de la superficie de un fluido incompresible sometido a un campo gravitatorio y contenido en un recipiente cilíndrico que gira alrededor de su eje (vertical) con una velocidad angular constante Ω .

Solución. Consideremos el eje del cilindro como el eje z . Entonces, $v_x = -y\Omega$, $v_y = +x\Omega$, $v_z = 0$. La condición de continuidad se satisface idénticamente y la ecuación de Euler (10.1) da

$$x\Omega^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad y\Omega^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0.$$

La integral general de estas ecuaciones es

$$p/\rho = \frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2) - gz + \text{constante}.$$

En la superficie libre $p = \text{constante}$, de modo que la superficie es un parabolóide:

$$z = \frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2)/g,$$

habiéndose tomado el origen en el punto más bajo de la superficie.

Problema 2. Una esfera, de radio R , se mueve con velocidad \mathbf{u} dentro de un fluido ideal incompresible. Determinar el flujo potencial del fluido cuando la esfera se mueve.

Solución. La velocidad del fluido debe anularse en el infinito. Las soluciones de la ecuación de Laplace $\Delta\phi = 0$ que se anulan en el infinito se sabe que son del tipo $1/r$ más las derivadas, de diversos órdenes, de $1/r$ con respecto a las coordenadas (se toma el origen en el centro de la esfera). Teniendo en cuenta la simetría completa de la esfera, sólo puede aparecer en la solución un vector constante, la velocidad \mathbf{u} , y de acuerdo con la linealidad tanto de la ecuación de Laplace como de la condición límite, en ϕ debe aparecer \mathbf{u} linealmente. El único escalar que puede formarse con \mathbf{u} y las derivadas de $1/r$ es el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}(1/r)$. Por consiguiente, buscaremos ϕ de modo que cumpla la condición:

$$\phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad}(1/r) = -(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})/r^2,$$

en donde \mathbf{n} es un vector unidad en la dirección de \mathbf{r} . La constante \mathbf{A} se determina a partir de la condición de que las componentes normales de las velocidades \mathbf{v} y \mathbf{u} deben ser iguales en la superficie de la esfera, es decir, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ para $r = R$. Esta condición nos dice que $\mathbf{A} = 1/2\mathbf{u}R^3$, de modo que

$$\phi = -\frac{R^3}{2r^2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{v} = \frac{R^3}{2r^3}[3\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u}].$$

La distribución de presiones viene dada por la ecuación (10.7):

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho v^2 - \rho \partial \phi / \partial t,$$

siendo p_0 la presión en el infinito. Para calcular la derivada $\partial \phi / \partial t$, debemos recordar que el origen (que hemos considerado que coincide con el centro de la esfera) se mueve con velocidad \mathbf{u} . De aquí,

$$\partial \phi / \partial t = (\partial \phi / \partial \mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \phi.$$

La distribución de presiones en la superficie de la esfera viene dada por la fórmula

$$p = p_0 + \frac{1}{8}\rho u^2(9 \cos^2 \theta - 5) + \frac{1}{2}\rho R \mathbf{n} \cdot \mathbf{du} / dt,$$

en donde θ es el ángulo formado entre \mathbf{n} y \mathbf{u} .

Problema 3. Repetir el problema 2, para el caso de un cilindro infinito que se mueve perpendicularmente a su eje.[†]

Solución. El flujo es independiente de la coordenada axial, de modo que hemos de resolver la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Las soluciones que se anulan en el infinito son la primera y posteriores derivadas de $\log r$ respecto a las coordenadas, siendo r el radio vector perpendicular al eje del cilindro. Busquemos una solución de la forma

$$\phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad} \log r = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}/r,$$

A partir de las condiciones límites obtenemos $\mathbf{A} = -R^2\mathbf{u}$, de modo que

$$\phi = -\frac{R^2}{r}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{v} = \frac{R^2}{r^2}[2\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u}].$$

La presión en la superficie del cilindro viene dada por la fórmula

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2(4\cos^2\theta - 3) + \rho R\mathbf{n} \cdot \mathbf{du}/dt.$$

Problema 4. Determinar el flujo potencial de un fluido ideal incompresible en un recipiente elipsoidal que gira alrededor de un eje principal con velocidad angular Ω y determinar el momento angular total del fluido.

Solución. Tomemos las coordenadas cartesianas x, y, z a lo largo de los ejes del elipsoide en un instante determinado, coincidiendo el eje z con el eje de rotación. La velocidad de los puntos del recipiente es

$$\mathbf{u} = \Omega \mathbf{x} \times \mathbf{r},$$

de modo que la condición límite $v_n = \partial\phi/\partial n = u_n$ es

$$\partial\phi/\partial n = \Omega(xn_y - yn_x),$$

o bien, utilizando la ecuación del elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$,

$$\frac{x}{a^2} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{y}{b^2} \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{z}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial z} = xy\Omega \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right).$$

La solución de la ecuación de Laplace que satisface esta condición límite es

$$\phi = \Omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy. \quad (1)$$

El momento angular del fluido dentro del recipiente es

$$M = \rho \int (xv_y - yv_x) dV.$$

Integrando respecto al volumen V del elipsoide, tenemos

$$M = \frac{\Omega\rho V}{5} \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2}.$$

[†] Pueden encontrarse las soluciones a problemas más generales de flujo potencial alrededor de un elipsoide y un cilindro elíptico en N. E. KOCHIN, I. A. KIBEL' y N. V. ROZE, *Hidromecánica teórica*, parte 1, 4.^a ed., págs. 265 y 355, Moscú, 1948; H. LAMB, *Hydrodynamics*, 6.^a ed., §§ 103-116, Cambridge, 1932.

La fórmula (1) da el movimiento absoluto del fluido respecto a la posición instantánea de los ejes x, y, z que están fijos respecto a los recipientes en rotación. El movimiento respecto al recipiente (es decir, respecto a un sistema rotatorio de coordenadas x, y, z) se halla restando la velocidad $\Omega \times \mathbf{r}$ de la velocidad absoluta; designando por \mathbf{v}' la velocidad relativa del fluido, tenemos

$$v'_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + y\Omega = \frac{2\Omega a^2}{a^2+b^2}y, \quad v'_y = -\frac{2\Omega b^2}{a^2+b^2}x, \quad v'_z = 0.$$

Se encuentran las trayectorias del movimiento relativo integrando las ecuaciones $\dot{x} = v'_x$, $\dot{y} = v'_y$, y son las elipses $x^2/a^2 + y^2/b^2 = \text{constante}$, las cuales son semejantes a la ellipse límite.

Problema 5. Determinar el flujo cerca de un punto de estancamiento (figura 2).

Solución. Puede considerarse una pequeña parte de la superficie del cuerpo cerca del punto de estancamiento como un plano. Consideremos que forma el plano xy . Desarrollando ϕ para valores de x, y, z pequeños, tenemos hasta los términos de segundo orden

$$\phi = ax + by + cz + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx;$$

en donde carece de importancia un término constante en ϕ . Los coeficientes constantes se determinan de modo que ϕ satisfaga la ecuación $\Delta\phi = 0$ y las condiciones límites $v_z = \partial\phi/\partial z = 0$ para $z = 0$ y todos los valores de x, y , $\partial\phi/\partial x = \partial\phi/\partial y = 0$ para $x = y = z = 0$ (punto de estancamiento). Esto nos da $a = b = c = 0$; $C = -A - B$, $E = F = 0$. Puede siempre eliminarse el término Dxy mediante una rotación apropiada de los ejes x e y . Tenemos, entonces,

$$\phi = Ax^2 + By^2 - (A + B)z^2. \quad (1)$$

Si el flujo tiene una simetría axial respecto al eje z (flujo simétrico que rodea un sólido de revolución), debemos tener $A = B$, de modo que

$$\phi = A(x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Los componentes de la velocidad son $v_x = 2Ax$, $v_y = 2Ay$, $v_z = -4Az$. Las líneas de corriente vienen dadas por las ecuaciones (5.2), a partir de las cuales encontramos $x^2z = c_1$, $y^2z = c_2$, es decir, las líneas de corriente son hipérbolas cúbicas.

Si el flujo es uniforme en la dirección y (por ejemplo, flujo en la dirección z que rodea un cilindro con su eje en la dirección y), deberíamos tener en (1) que $B = 0$, de modo que

$$\phi = A(x^2 - z^2).$$

Las líneas de corriente son las hipérbolas $xz = \text{constante}$.

Problema 6. Determinar el flujo potencial cerca de un ángulo formado por dos planos que se cortan.

Solución. Consideremos las coordenadas polares r, θ en el plano que forma la sección recta (perpendicular a la línea de la intersección), estando situado el origen en el vértice del ángulo; θ se mide a partir de una de las ramas del ángulo. Supongamos que el ángulo vale α radianes; para $\alpha < \pi$ el flujo tiene lugar dentro del ángulo, mientras que para $\alpha > \pi$ el flujo es exterior. La condición límite de que la componente de velocidad normal

se anule significa que $\partial\phi/\partial\theta = 0$ para $\theta = 0$ y $\theta = \alpha$. Puede escribirse la solución de la ecuación de Laplace que satisface estas condiciones como†

$$\phi = Ar^n \cos n\theta, \quad n = \pi/\alpha,$$

de modo que

$$v_r = nAr^{n-1} \cos n\theta, \quad v_\theta = -nAr^n \sin n\theta.$$

Para $n < 1$ (flujo exterior a un ángulo; figura 3), v_r se hace infinito como $1/r^{1-n}$ en el origen. Para $n > 1$ (flujo en el interior de un ángulo; figura 4), v_r tiende a cero para $r = 0$.

La función de corriente que nos da la forma de las líneas de corrientes es $\psi = Ar^n \sin n\theta$. Las expresiones obtenidas para ϕ y ψ son las partes real e imaginaria del potencial complejo $w = Az^n$.

Problema 7. Un hueco esférico de radio a se forma repentinamente dentro de un fluido incompresible, que llena todo el espacio. Determinar el tiempo que tarda el fluido en llenar dicha cavidad (RAYLEIGH, 1917).

Solución. El flujo después de la formación de la cavidad poseerá simetría esférica, estando dirigida la velocidad en todos los puntos hacia el centro de la misma. Para la velocidad radial $v_r \equiv v < 0$ tenemos la ecuación de Euler en coordenadas polares esféricas:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (1)$$

La ecuación de continuidad nos da

$$r^2 v = F(t), \quad (2)$$

en donde $F(t)$ es una función arbitraria del tiempo; esta ecuación expresa el hecho de que, puesto que el fluido es incompresible, el volumen que fluye a través de cualquier superficie esférica es independiente de su radio.

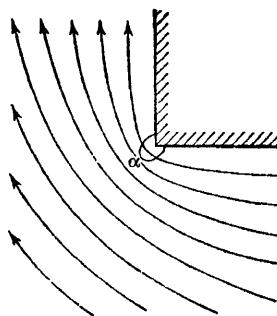


FIG. 3

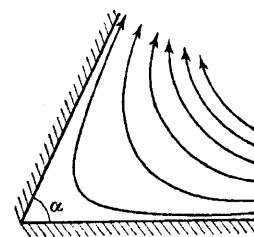


FIG. 4

† Tomaremos la solución en que aparezca la potencia positiva más pequeña de r , puesto que r es pequeño.

Sustituyendo el valor de v de (2) en (1), tenemos

$$\frac{F'(t)}{r^2} + v \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Integrando esta ecuación respecto a r para el radio instantáneo $R = R(t) \leq a$ de la cavidad hasta el infinito, obtenemos

$$-\frac{F'(t)}{R} + \frac{1}{2}V^2 = \frac{p_0}{\rho} \quad (3)$$

en donde $V = dR(t)/dt$ es la variación respecto al tiempo del radio de la cavidad y p_0 es la presión en el infinito; la velocidad del fluido en el infinito es cero, y lo mismo la presión en la superficie del orificio. A partir de la ecuación (2) para los puntos situados en la superficie del orificio, tenemos

$$F(t) = R^2(t)V(t),$$

y, sustituyendo esta expresión para $F(t)$ en (3), obtenemos la ecuación

$$-\frac{3V^2}{2} - \frac{1}{2}R \frac{dV^2}{dR} = \frac{p_0}{\rho}. \quad (4)$$

Integrando con la condición límite $V = 0$ para $R = a$ (el fluido está inicialmente en reposo), tenemos

$$V \equiv \frac{dR}{dt} = - \sqrt{\left[\frac{2p_0}{3\rho} \left(\frac{a^3}{R^3} - 1 \right) \right]}.$$

De aquí se encuentra para el tiempo total necesario para llenar la cavidad la expresión

$$-\frac{F'(t)}{R} + \frac{1}{2}V^2 = \frac{p_0}{\rho} - \frac{P(t)}{\rho}$$

Esta integral se reduce a la función beta, y tenemos, finalmente,

$$\tau = \sqrt{\frac{3a^2\rho\pi}{2p_0} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)}} = 0,915a \sqrt{\frac{\rho}{p_0}}$$

Problema 8. Una esfera sumergida en un fluido incompresible se dilata de acuerdo con una ley determinada $R = R(t)$. Determinar la presión del fluido en la superficie de la esfera.

Solución. Supongamos que la presión buscada sea $P(t)$. Cálculos exactamente semejantes a los del problema 7, excepto en que la presión en $r = R$ es $P(t)$ y no cero, dan en lugar de (3) la ecuación

$$-\frac{F'(t)}{R} + \frac{1}{2}V^2 = \frac{p_0}{\rho} - \frac{P(t)}{\rho}$$

y, de acuerdo con esto, en lugar de (4) se obtiene la ecuación

$$\frac{p_0 - P(t)}{\rho} = - \frac{3V^2}{2} - RV \frac{dV}{dR}.$$

Recordando el hecho de que $V = dR/dt$, podemos escribir la presión correspondiente a $P(t)$ en la forma

$$P(t) = p_0 + \frac{1}{2}\rho \left[\frac{d^2(R^2)}{dt^2} + \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right].$$

Problema 9. Determinar la forma de un chorro que emerge de una rendija infinitamente larga situada en una pared plana.

Solución. Supongamos que la pared está situada a lo largo del eje x en el plano xy y que la abertura corresponde al segmento $-1/2a \leq x \leq +1/2a$ de este eje, ocupando el fluido el semiplano $y > 0$. Lejos de la pared ($y \rightarrow \infty$) la velocidad del fluido es cero y la presión es p_0 , por ejemplo.

En la superficie libre del chorro (BC y $B'C'$ de la figura 5a) la presión es $p = 0$, mientras que la velocidad toma el valor constante $v_1 = \sqrt{(2p_0/\rho)}$, según la ecuación de Bernoulli. Las líneas de la pared son líneas de corriente y éstas continúan dentro de los límites libres del chorro. Sea ψ cero en la línea ABC ; entonces, en la línea $A'B'C'$, $\psi = -Q/\rho$, en donde $Q = \rho a_1 v_1$ es la velocidad a la cual el fluido emerge del chorro (correspondiendo a_1 y v_1 a la anchura y la velocidad en el infinito). El potencial ϕ varía desde $-\infty$ hasta $+\infty$ a lo largo de ABC y de $A'B'C'$; ϕ será cero en B y B' . Entonces, en el plano de la variable compleja w , la región de flujo es una cinta infinita de anchura Q/ρ (figura 5b). (Los puntos de la figura 5b, c y d se denominan en correspondencia con los de la figura 5a.)

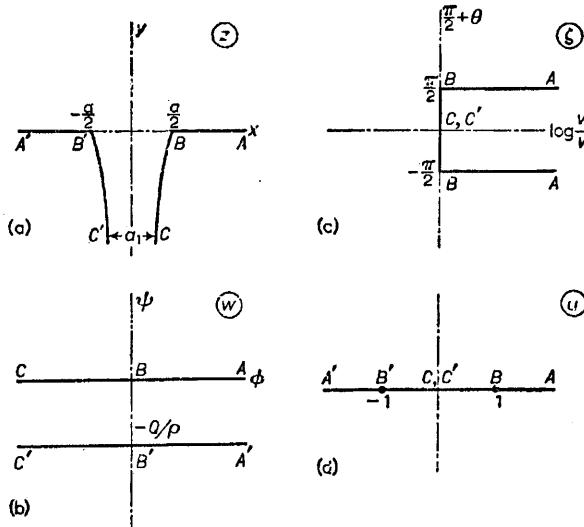


FIG. 5

Introduzcamos una nueva variable compleja, el logaritmo de la velocidad compleja:

$$\zeta = -\log \left[\frac{1}{v e^{i\pi}} \frac{dw}{dz} \right] = \log \frac{v_1}{v} + i(\frac{1}{2}\pi + \theta); \quad (1)$$

en donde $v_1 e^{i\pi/2}$ es la velocidad compleja del chorro en el infinito. En $A'B'$ tenemos $\theta = 0$; en AB , $\theta = -\pi$; en BC y $B'C'$, $v = v_1$, mientras que en el infinito en el chorro $\theta = 1/2\pi$.

Por consiguiente, en el plano de la variable compleja ζ , la región de flujo es una cinta semiinfinita de anchura π en el semiplano de la derecha (figura 5c). Si podemos ahora encontrar una transformación conforme que transforme la cinta en el plano w en la semicírcula del plano ζ (con los puntos correspondientes como en la figura 5), habremos determinado w en función de dw/dz , y entonces puede hallarse w mediante una simple cuadratura.

Con objeto de encontrar la transformación deseada, introduzcamos una variable compleja auxiliar adicional, u , tal que la región del flujo en el plano u es el semiplano superior, correspondiendo los puntos B y B' a $u = \pm 1$, los puntos C y C' a $u = 0$, y los puntos infinitamente distantes A y A' a $u = \pm\infty$ (figura 5d). La dependencia de w respecto a esta variable auxiliar viene dada por una transformación conforme que convierte la mitad superior del plano u en la cinta en el plano w . Con la correspondencia anterior de puntos, esta transformación es

$$w = -\frac{Q}{\rho\pi} \log u. \quad (2)$$

Con objeto de hallar la dependencia de ζ respecto a u , hemos de encontrar una transformación conforme que convierta la semicinta del plano ζ en la mitad superior del palno u . Considerando esta semicinta como un triángulo, uno de cuyos vértices está en el infinito, podemos encontrar la transformación deseada mediante la bien conocida fórmula de Schwarz-Christoffel; ésta es

$$\zeta = -i \operatorname{sen}^{-1} u. \quad (3)$$

Las fórmulas (2) y (3) dan la solución del problema, puesto que proporcionan la dependencia de dw/dz con w en forma paramétrica.

Determinemos ahora la forma del chorro. En BC tenemos $w = \phi$, $\zeta = i(1/2\pi + \theta)$, mientras que u varía desde 1 a 0. A partir de (2) y (3), obtenemos

$$\phi = -\frac{Q}{\rho\pi} \log(-\cos\theta), \quad (4)$$

y a partir de (1) resulta:

$$d\phi/dz = v_1 e^{-i\theta},$$

o sea,

$$dz \equiv dx + i dy = \frac{1}{v_1} e^{i\theta} d\phi = \frac{a_1}{\pi} e^{i\theta} \operatorname{tg}\theta d\theta,$$

de aquí que encontraremos, mediante integración y con las condiciones $y = 0$, $x = 1/2a$ para $\theta = -\pi$, la forma del chorro expresada paramétricamente. En particular, la compresión del chorro es $a_1/a = \pi/(2 + \pi) = 0,61$.

§ 11. Fuerza de arrastre en un flujo potencial que rodea un cuerpo

Consideremos ahora el problema del flujo potencial de un fluido ideal incompresible que rodea un cuerpo sólido. Como es natural, este problema es completamente equivalente al del movimiento de un fluido cuando el mismo cuerpo se mueve a su través. Para obtener el último caso a partir del primero necesitamos únicamente cambiar a un sistema de coordenadas en las cuales el fluido está en reposo en el infinito. De hecho, diremos en lo que sigue que el cuerpo se está moviendo a través del fluido.

Determinemos la naturaleza de la distribución de velocidades del fluido a una distancia grande del cuerpo móvil. El flujo potencial de un fluido incompresible satisface la ecuación de Laplace, $\Delta\phi = 0$. Hemos de considerar soluciones de esta ecuación que se anulen en el infinito, puesto que el fluido está allí en reposo. Consideraremos el origen en algún lugar en el interior del cuerpo móvil; el sistema coordenado se mueve con el cuerpo, pero consideraremos la distribución de velocidades del fluido en un instante particular. Como sabemos, la ecuación de Laplace tiene una solución $1/r$, en donde r es la distancia respecto al origen. También son soluciones el gradiente de $1/r$ y las derivadas espaciales de orden superior. Todas estas soluciones y cualquier combinación lineal de ellas, se anulan en el infinito. De aquí que la forma general de la solución requerida de la ecuación de Laplace a gran distancia del cuerpo es

$$\phi = -\frac{a}{r} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad} \frac{1}{r} + \dots,$$

en donde a y \mathbf{A} son independientes de las coordenadas; los términos omitidos contienen derivadas de $1/r$ de orden superior. Es fácil ver que la constante a debe ser nula. Para el potencial $\phi = -a/r$ se obtiene una velocidad

$$\mathbf{v} = -\mathbf{grad}(a/r) = ar/r^3.$$

Calculemos el correspondiente flujo de masa a través de alguna superficie cerrada, por ejemplo, una esfera de radio R . En esta superficie la velocidad es constante e igual a a/R^2 ; el flujo total a su través es, por consiguiente, $\rho(a/R^2)4\pi R^2 = 4\pi\rho a$. Pero el flujo de un fluido incompresible a través de cualquier superficie cerrada debe ser nulo, como es natural. De aquí que obtenemos la conclusión de que $a = 0$.

Así pues, ϕ contiene términos del orden de $1/r^2$ y superiores. Puesto que estamos buscando la velocidad a distancias grandes, pueden despreciarse los términos de orden superior y tenemos

$$\phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad}(1/r) = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}/r^2, \quad (11.1)$$

y la velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi$ es

$$\mathbf{v} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{grad} \frac{1}{r} = \frac{3(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{A}}{r^3}, \quad (11.2)$$

en donde \mathbf{n} es un vector unidad en la dirección de \mathbf{r} . Vemos que a distancias grandes la velocidad disminuye según la función $1/r^3$. El vector \mathbf{A} depende de la forma real y de la velocidad del cuerpo y puede determinarse sólo resolviendo por completo la ecuación $\Delta\phi = 0$ a todas las distancias, teniendo en cuenta las condiciones límites apropiadas en la superficie del cuerpo móvil.

El vector \mathbf{A} que aparece en (11.2) está relacionado de un modo definido con el impulso y la energía totales del fluido en su movimiento alrededor del cuerpo. La energía cinética del fluido (la energía interna de un fluido incompresible es constante) es $E = \frac{1}{2} \int \rho v^2 dV$, tomándose la integración en todo el espacio exterior al cuerpo. Consideremos una región del espacio V limitado por una esfera de radio grande R , cuyo centro está en el origen, e integremos en primer lugar sólo respecto a V , haciendo posteriormente que R tienda hacia infinito. Tenemos idénticamente

$$\int v^2 dV = \int u^2 dV + \int (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) dV,$$

en donde \mathbf{u} es la velocidad del cuerpo. Puesto que \mathbf{u} es independiente de las coordenadas, la primera integral del segundo miembro es simplemente $u^2(V - V_0)$, en donde V_0 es el volumen del cuerpo. En la segunda integral, escribiremos la suma $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ en forma de $\text{grad}(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})$; puesto que $\text{div } \mathbf{v} = 0$ (ecuación de continuidad) y $\text{div } \mathbf{u} \equiv 0$, tenemos

$$\int v^2 dV = u^2(V - V_0) + \int \text{div}[(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u})] dV.$$

La segunda integral se transforma ahora en una integral respecto a la superficie S de la esfera y la superficie S_0 del cuerpo:

$$\int v^2 dV = u^2(V - V_0) + \oint_{S+S_0} (\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{f}.$$

En la superficie del cuerpo, las componentes normales de \mathbf{v} y \mathbf{u} son iguales en virtud de las condiciones límites; puesto que el vector $d\mathbf{f}$ está dirigido a lo largo de la normal a la superficie, es claro que la integral respecto a S_0 se anula idénticamente. En la superficie remota S se sustituyen las expresiones (11.1), (11.2) para ϕ y \mathbf{v} , y se desprecian los términos que se anulan cuando $R \rightarrow \infty$. Escribiendo el elemento de superficie de la esfera S en la forma $d\mathbf{f} = \mathbf{n}R^2 d\omega$, en donde $d\omega$ es un elemento de ángulo sólido, obtenemos

$$\int v^2 dV = u^2(\frac{4}{3}\pi R^3 - V_0) + \int [3(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 R^3] d\omega.$$

Finalmente, efectuando la integración[†] y multiplicando por $\frac{1}{2}\rho$, se obtiene la expresión siguiente para la energía total del fluido:

$$E = \frac{1}{2}\rho(4\pi\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} - V_0 u^2). \quad (11.3)$$

[†] La integración respecto a ω es equivalente a promediar el integrando respecto a todas las direcciones del vector \mathbf{n} y multiplicar por 4π . Para promediar expresiones del tipo $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \equiv A_i n_i B_k n_k$, siendo \mathbf{A} y \mathbf{B} vectores constantes, obsérvese que los valores medios $n_i n_k$ forman un tensor simétrico, que puede expresarse en función del tensor unidad δ_{ik} : $n_i n_k = a \delta_{ik}$. Contrayendo respecto a los sufijos i y k , y recordando que $n_i n_i = 1$, se halla que $a = 1/3$. De aquí que

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) = \frac{1}{3} \delta_{ik} A_i B_k = \frac{1}{3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Como ya hemos mencionado, el cálculo exacto del vector \mathbf{A} exige una solución completa de la ecuación $\Delta\phi = 0$, teniendo en cuenta las condiciones límites particulares en la superficie del cuerpo. Sin embargo, puede hallarse directamente la naturaleza general de la dependencia de \mathbf{A} respecto a la velocidad \mathbf{u} del cuerpo, teniendo en cuenta que la ecuación es lineal en ϕ y de que las condiciones límites son lineales tanto en ϕ como en \mathbf{u} . Se deduce de esto que \mathbf{A} debe ser una función lineal de las componentes de \mathbf{u} . La energía E dada por la fórmula (11.3) es, por consiguiente, una función cuadrática de las componentes de \mathbf{u} y puede escribirse en la forma

$$E = \frac{1}{2}m_{ik}u_i u_k, \quad (11.4)$$

siendo m_{ik} un tensor simétrico constante, cuyos componentes pueden calcularse a partir de los de \mathbf{A} ; se denomina *tensor de masas asociadas*.

Conociendo la energía E , podemos obtener una expresión para el impulso total \mathbf{P} del fluido. Para ello observamos que las variaciones infinitesimales en E y \mathbf{P} están relacionadas mediante $dE = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{P}$; se deduce de ello que si se expresa E en la forma (11.4), las componentes de \mathbf{P} deben ser

$$P_i = m_{ik}u_k. \quad (11.5)$$

Finalmente, comparando las fórmulas (11.3), (11.4) y (11.5) se ve que \mathbf{P} viene dado en función de \mathbf{A} por

$$\mathbf{P} = 4\pi\rho\mathbf{A} - \rho V_0 \mathbf{u}. \quad (11.6)$$

Señalemos que el impulso total del fluido es una magnitud finita perfectamente definida.

El impulso transmitido al fluido por el cuerpo en la unidad de tiempo es $d\mathbf{P}/dt$. Cambiar el signo da evidentemente la reacción \mathbf{F} del fluido, es decir, la fuerza que actúa sobre el cuerpo:

$$\mathbf{F} = -d\mathbf{P}/dt. \quad (11.7)$$

† En efecto, supongamos acelerado el cuerpo por una fuerza exterior cualquiera \mathbf{F} . Irá creciendo el impulso del fluido; supongamos que aumenta en $d\mathbf{P}$ durante un tiempo dt . Este incremento está relacionado con la fuerza por $d\mathbf{P} = \mathbf{F} dt$, y al multiplicar escalarmente por la velocidad \mathbf{u} , tenemos $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dt$, es decir, el trabajo realizado por la fuerza \mathbf{F} actuando a lo largo de la distancia $\mathbf{u} dt$, que a su vez debe ser igual al aumento dE de la energía del fluido.

Debe señalarse que no será posible calcular directamente el impulso como la integral de $\rho v dV$ extendida al volumen total del fluido. La razón es que esta integral diverge, si la velocidad v se distribuye de acuerdo con (11.2), en el sentido de que el resultado de la integración, aunque finito, depende de cómo se realice la operación: al efectuar la integración sobre una región grande, cuyas dimensiones se hacen tender a continuación a infinito, obtenemos un valor que depende de la forma de la región (esfera, cilindro, etc.). El método de calcular el impulso que utilizamos aquí, partiendo de la relación $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{P} = dE$, conduce a un resultado final completamente definido, dado por la fórmula (11.6), que ciertamente satisface la relación física existente entre la variación del impulso por unidad de tiempo y las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

La componente de \mathbf{F} paralela a la velocidad del cuerpo se denomina *fuerza de arrastre* y la componente perpendicular se denomina *fuerza de sustentación*.

Si fuese posible tener un flujo potencial alrededor de un cuerpo moviéndose uniformemente dentro de un fluido ideal, deberíamos tener $P = \text{constante}$, puesto que $u = \text{constante}$ y, por tanto, $F = 0$. Es decir, no existiría ni arrastre ni sustentación; las fuerzas de presión ejercidas sobre el cuerpo por el fluido estarían equilibradas (resultado conocido como paradoja de d'Alambert). Puede verse con mayor claridad el origen de esta paradoja mediante la consideración del arrastre. La presencia de una fuerza de arrastre en un movimiento uniforme de un cuerpo significaría que, para mantener el movimiento, debe realizarse de modo continuo un trabajo por alguna fuerza externa, siendo este trabajo disipado dentro del fluido o convertido en energía cinética del mismo, de tal forma que el resultado sería un flujo continuo de energía hacia el infinito por el interior del fluido. Sin embargo, no existe por definición ninguna disipación de energía en un fluido ideal y la velocidad del fluido puesto en movimiento por el cuerpo disminuye tan rápidamente al aumentar la distancia de éste que no puede haber ningún flujo de energía hacia el infinito.

Sin embargo, debe resaltarse que todos estos argumentos se relacionan sólo con el movimiento de un cuerpo en un volumen infinito de fluido. Si, por ejemplo, el fluido tiene una superficie libre, un cuerpo que tuviese un movimiento uniforme y paralelo a esta superficie experimentaría la acción de un arrastre. La aparición de esta fuerza (denominada *resistencia de onda*) se debe a la presencia de un sistema de ondas propagadas en la superficie libre, las cuales continuamente van eliminando energía hacia el infinito.

Supongamos que un cuerpo está ejecutando un movimiento oscilante bajo la acción de una fuerza externa \mathbf{f} . Cuando se cumplen las condiciones estudiadas en § 10, el fluido que rodea el cuerpo se mueve con un flujo potencial y podemos utilizar las relaciones previamente obtenidas para deducir las ecuaciones del movimiento del cuerpo. La fuerza \mathbf{f} debe ser igual a la derivada respecto al tiempo del impulso total del sistema y éste es la suma del impulso $M\mathbf{u}$ del cuerpo (siendo M la masa del cuerpo) y el impulso \mathbf{P} del fluido:

$$M \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{f}.$$

Utilizando (11.5), se obtiene entonces

$$M \frac{du_i}{dt} + m_{ik} \frac{du_k}{dt} = f_i,$$

que puede también escribirse

$$\frac{du_k}{dt} (M\delta_{ik} + m_{ik}) = f_i. \quad (11.8)$$

Esta es la ecuación del movimiento de un cuerpo sumergido en un fluido ideal.

Consideremos ahora lo que constituye en cierto modo el problema inverso. Supongamos que el fluido realiza algún movimiento oscilatorio producido por alguna causa externa al cuerpo. Este movimiento también pondrá al cuerpo en movimiento.[†] Deduciremos la ecuación de su movimiento.

Supongamos que la velocidad del fluido varía sólo ligeramente en distancias del orden de la dimensión del cuerpo. Sea v la velocidad del fluido que existiría en la posición ocupada por el cuerpo si éste estuviese ausente; es decir, v es la velocidad del flujo no perturbado. De acuerdo con la hipótesis anterior, puede suponerse que v es constante en todo el volumen ocupado por el cuerpo. Designemos la velocidad del cuerpo por u como antes.

Puede determinarse la fuerza que actúa sobre el cuerpo y que lo pone en movimiento del modo siguiente. Si el cuerpo fuese totalmente transportado por el fluido (es decir, si $v = u$), la fuerza que actuase sobre él debería ser la misma que la fuerza que actuaría sobre el líquido en el mismo volumen, si el cuerpo estuviese ausente. El impulso de este volumen de fluido es $\rho V_0 v$, y, por consiguiente, la fuerza sobre el mismo es $\rho V_0 dv/dt$. Sin embargo, el cuerpo no es, en realidad, totalmente transportado con el fluido; existe un movimiento del cuerpo respecto a éste, y, en consecuencia, el propio fluido adquiere un cierto movimiento adicional. El impulso adicional resultante del fluido es $m_{ik}(u_k - v_k)$, puesto que debemos ahora sustituir u en (11.5) por la velocidad $u - v$ del cuerpo respecto al fluido. La variación de este impulso con el tiempo da como resultado la aparición de una fuerza de reacción adicional sobre el cuerpo de valor $-m_{ik}d(u_k - v_k)/dt$. Así pues, la fuerza total que actúa sobre el cuerpo es

$$\rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ik} \frac{d}{dt}(u_k - v_k).$$

Esta fuerza ha de igualarse a la derivada temporal del impulso del cuerpo. Así pues, obtenemos la siguiente ecuación del movimiento:

$$\frac{d}{dt}(Mu_i) = \rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ik} \frac{d}{dt}(u_k - v_k).$$

Integrando ambos miembros respecto al tiempo, se tiene

$$Mu_i = \rho V_0 v_i - m_{ik}(u_k - v_k),$$

o sea,

$$(M\delta_{ik} + m_{ik})u_k = (m_{ik} + \rho V_0 \delta_{ik})v_k. \quad (11.9)$$

[†] Por ejemplo, podríamos estar considerando el movimiento de un cuerpo en un fluido a través del cual se está propagando una onda sonora, cuya longitud de onda es grande en comparación con las dimensiones del cuerpo.

Hagamos la constante de integración igual a cero, puesto que la velocidad \mathbf{u} del cuerpo en su movimiento producido por el fluido debe anularse cuando \mathbf{v} se hace cero. La relación obtenida determina la velocidad del cuerpo a partir de la velocidad del fluido. Si la densidad del cuerpo es igual a la del fluido ($M = \rho V_0$), tenemos $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, como era de esperar.

PROBLEMAS

Problema 1. Obtener la ecuación del movimiento para una esfera que realiza un movimiento oscilante dentro de un fluido ideal y en el caso de una esfera puesta en movimiento por un fluido oscilante.

Solución. Comparando (11.1) con la expresión dada para ϕ en el caso de un flujo que rodea una esfera obtenida en § 10, problema 2, vemos que

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}R^3\mathbf{u},$$

siendo R el radio de la esfera. El impulso total transmitido al fluido por la esfera, de acuerdo con (11.6), es $\mathbf{P} = (2/3)\pi\rho R^3\mathbf{u}$, de modo que el tensor m_{ik} es

$$m_{ik} = \frac{2}{3}\pi\rho R^3 \delta_{ik}.$$

El arrastre sobre la esfera móvil es

$$\mathbf{F} = -\frac{2}{3}\pi\rho R^3 d\mathbf{u}/dt,$$

y la ecuación del movimiento de la esfera oscilando en el fluido es

$$\frac{4}{3}\pi R^3(\rho_0 + \frac{1}{2}\rho) \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f},$$

siendo ρ_0 la densidad de la esfera. El coeficiente de $d\mathbf{u}/dt$ es la *masa virtual* de la esfera; se compone de la masa real de la misma y de la masa asociada o inducida, en este caso la mitad de la masa del fluido desplazado por la esfera.

Si la esfera inicia su movimiento debido al fluido, tenemos para su velocidad, a partir de (11.9),

$$\mathbf{u} = \frac{3\rho}{\rho + 2\rho_0} \mathbf{v}.$$

Si la densidad de la esfera supera a la del fluido ($\rho_0 > \rho$), $u < v$, es decir, la esfera «se retrasa» respecto al fluido; si $\rho_0 < \rho$ la esfera «adelanta».

Problema 2. Expresar el momento de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo móvil en un fluido en función del vector \mathbf{A} .

Solución. Como sabemos de la mecánica, el momento \mathbf{M} de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo viene determinado a partir de su función lagrangiana (en este caso, la energía E) mediante la relación $\delta E = \mathbf{M} \cdot \delta\theta$, siendo $\delta\theta$ el vector de una rotación infinitesimal del cuerpo y siendo δE la variación resultante en E . En lugar de hacer girar el cuerpo un ángulo $\delta\theta$ (y cambiar en correspondencia los componentes m_{ik}), podemos hacer girar el fluido un ángulo $-\delta\theta$ respecto al cuerpo (y en correspondencia modificar la velocidad \mathbf{u}). Tenemos, además, $\delta\mathbf{u} = -\delta\theta \times \mathbf{u}$, de modo que

$$\delta E = \mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{u} = -\delta\theta \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{P}.$$

Utilizando la expresión (11.6) para \mathbf{P} , obtenemos entonces la fórmula requerida:

$$\mathbf{M} = -\mathbf{u} \times \mathbf{P} = 4\pi\rho A \times \mathbf{u}.$$

§ 12. Ondas de gravedad

La superficie libre de un líquido en equilibrio en un campo gravitatorio es plana. Si, bajo la acción de alguna perturbación externa, se mueve la superficie separándose de su posición de equilibrio en un punto determinado, aparecerá un movimiento en el líquido. Este movimiento se propagará a lo largo de toda la superficie en forma de ondas, que se denominan *ondas de gravedad*, puesto que se deben a la acción del campo gravitatorio. Las ondas de gravedad aparecen principalmente en la superficie del líquido, pero afectan también el interior aunque cada vez menos, según va aumentando la profundidad.

Consideraremos ahora las ondas de gravedad en las cuales la velocidad de las partículas del fluido móvil es tan pequeña que podemos despreciar el término $(\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v}$ en comparación con $\partial\mathbf{v}/\partial t$ en la ecuación de Euler. El significado físico de esto se ve fácilmente. Durante un intervalo de tiempo del orden del período τ de las oscilaciones de las partículas del fluido en la onda, estas partículas recorren una distancia del orden de la amplitud a de la onda. Por consiguiente, su velocidad es del orden de a/τ . Varía notablemente a intervalos de tiempo del orden de τ y distancias del orden de λ en la dirección de propagación (siendo λ la longitud de onda). De aquí que la derivada temporal de la velocidad sea del orden de v/τ y las derivadas espaciales del orden de v/λ . Así pues, la condición $(\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} \ll \partial\mathbf{v}/\partial t$ es equivalente a

$$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{a}{\tau} \right)^2 \ll \frac{a}{\tau} \cdot \frac{1}{\tau},$$

o sea,

$$a \ll \lambda, \quad (12.1)$$

es decir, la amplitud de las oscilaciones en la onda debe ser pequeña en comparación con su longitud de onda. Hemos visto en § 9 que, si puede despreciarse el término $(\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v}$ en la ecuación del movimiento, tenemos un flujo potencial. Admitiendo que el fluido es incompresible podemos utilizar, por consiguiente, las ecuaciones (10.6) y (10.7). Puede despreciarse el término $\frac{1}{2}v^2$ en la última ecuación, puesto que contiene el cuadrado de la velocidad; haciendo $f(t) = 0$ e incluyendo un término ρgz para tener en cuenta el campo gravitatorio, se obtiene

$$p = -\rho gz - \rho \partial \phi / \partial t. \quad (12.2)$$

Tomaremos el eje z verticalmente hacia arriba, como es normal, y el plano xy de modo que se corresponda con la superficie de equilibrio del fluido.

Designemos por ζ la coordenada z de un punto de la superficie; ζ es una función de x , y y t . En el equilibrio es $\zeta = 0$, de modo que ζ da el desplazamiento vertical de la superficie en sus oscilaciones. Supongamos que sobre la superficie actúa una presión constante p_0 (por ejemplo, la presión atmosférica). Entonces tenemos en la superficie, según (12.2),

$$p_0 = -\rho g \zeta - \rho \partial \phi / \partial t.$$

En lugar del potencial ϕ , podemos utilizar un potencial $\phi' = \phi + (p_0/\rho)t$; esto no constituye ninguna diferencia, puesto que $\mathbf{v} = \text{grad } \phi = \text{grad } \phi'$. Sin embargo, se elimina el término p_0 de la ecuación anterior y al prescindir del signo prima obtenemos la condición en la superficie como

$$g\zeta + (\partial \phi / \partial t)_{z=\zeta} = 0. \quad (12.3)$$

Como la amplitud de las oscilaciones de las ondas es pequeña, el desplazamiento ζ es pequeño también. De aquí que podemos suponer, con el mismo grado de aproximación, que la componente vertical de la velocidad de los puntos en la superficie es simplemente la derivada respecto al tiempo de ζ :

$$v_z = \partial \zeta / \partial t.$$

Pero $v_z = \partial \phi / \partial z$, de modo que

$$(\partial \phi / \partial z)_{z=\zeta} = \partial \zeta / \partial t.$$

Sustituyendo ζ a partir de (12.3), tenemos

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=\zeta} = 0.$$

Como las oscilaciones son pequeñas, podemos tomar el valor del paréntesis en $z = 0$ en lugar de $z = \zeta$. Así pues, tenemos, finalmente, el siguiente sistema de ecuaciones para determinar el movimiento en un campo gravitatorio:

$$\Delta \phi = 0, \quad (12.4)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=0} = 0. \quad (12.5)$$

Consideremos aquí ondas en la superficie de un fluido cuya área es ilimitada y supondremos también que la longitud de onda es pequeña en comparación con la profundidad del fluido; podemos, por tanto, considerar el fluido como de profundidad infinita. Entonces omitiremos las condiciones límites en los bordes y en la parte inferior.

Consideremos una onda de gravedad que se propaga a lo largo del eje x y que es uniforme en la dirección y ; en dicha onda, todas las magnitudes son

independientes de y . Buscaremos una solución que sea una función periódica simple del tiempo y de la coordenada x , es decir, haremos:

$$\phi = f(z) \cos(kx - \omega t).$$

Aquí ω es lo que se denomina *frecuencia circular* o *frecuencia angular* (la denominaremos simplemente *frecuencia*) de la onda; $2\pi/\omega$ es el período del movimiento en un punto determinado; k se denomina *número de onda*; $\lambda = 2\pi/k$ es la longitud de onda, es decir, el período del movimiento a lo largo del eje x en un tiempo determinado.

Sustituyendo en la ecuación

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0,$$

tenemos

$$d^2f/dz^2 - k^2f = 0.$$

Esta ecuación tiene la solución e^{kz} y e^{-kz} . Debemos considerar la primera, puesto que la última da un aumento ilimitado de ϕ cuando pasamos al interior del fluido (recordemos que el fluido ocupa la región $z < 0$). Así pues, obtenemos para el potencial de velocidad

$$\phi = A e^{kz} \cos(kx - \omega t). \quad (12.6)$$

También ha de satisfacerse la condición límite (12.5). Sustituyendo (12.6), obtenemos

$$k - \omega^2/g = 0,$$

o sea,

$$\omega^2 = kg. \quad (12.7)$$

Esto nos da la relación existente entre el número de onda y la frecuencia de una onda de gravedad.

La distribución de velocidades en el fluido móvil se encuentra tomando simplemente las derivadas espaciales de ϕ :

$$v_x = -A k e^{kz} \sin(kx - \omega t), \quad v_z = A k e^{kz} \cos(kx - \omega t). \quad (12.8)$$

Vemos que la velocidad disminuye exponencialmente al penetrar en el fluido. En un punto determinado cualquiera del espacio (es decir, para x, z dados) el vector velocidad gira uniformemente en el plano xz , permaneciendo su módulo constante e igual a $A k e^{kz}$.

Determinemos también las trayectorias de las partículas del fluido en la onda. Temporalmente designaremos por x, z las coordenadas de una partícula del fluido móvil (y no las de un punto fijo en el espacio) y por x_0, z_0 los valores de x y z en la posición de equilibrio de la partícula. Entonces, $v_x = dx/dt$,

$v_z = dz/dt$, y podemos aproximar el segundo miembro de (12.8) escribiendo x_0, z_0 en lugar de x, z , puesto que las oscilaciones son pequeñas. Una integración respecto al tiempo nos da entonces

$$\begin{aligned}x - x_0 &= -A \frac{k}{\omega} e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t), \\z - z_0 &= -A \frac{k}{\omega} e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t).\end{aligned}\quad (12.9)$$

Así pues, las partículas del fluido describen circunferencias de radio $(Ak/\omega)e^{kz_0}$ alrededor de los puntos (x_0, z_0) ; este radio disminuye exponencialmente al aumentar la profundidad.

La velocidad de propagación U de la onda es, como demostraremos en § 66, $U = \partial\omega/\partial k$. Sustituyendo aquí $\omega = \sqrt{(kg)}$, vemos que la velocidad de propagación de las ondas de gravedad en el caso de una superficie sin limitaciones de un fluido de profundidad infinita es

$$U = \frac{1}{2} \sqrt{g/k} = \frac{1}{2} \sqrt{g\lambda/2\pi}. \quad (12.10)$$

Esta velocidad aumenta con la longitud de onda.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la velocidad de propagación de las ondas de gravedad en el caso de una superficie sin limitaciones de un fluido de profundidad h .

Solución. En el fondo del fluido la componente de la velocidad normal debe ser cero, es decir, $v_z = \partial\phi/\partial z = 0$ para $z = -h$. A partir de esta condición, encontramos el cociente de las constantes A y B en la solución general

$$\phi = [Ae^{kz} + Be^{-kz}] \cos(kx - \omega t).$$

El resultado es

$$\phi = A \cos(kx - \omega t) \cosh k(z + h).$$

A partir de la condición límite (12.5) vemos que la relación entre k y ω es

$$\omega^2 = gk \operatorname{tgh} kh.$$

La velocidad de propagación de las ondas es

$$U = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k \operatorname{tgh} kh}} \left[\operatorname{tg} h kh + \frac{kh}{\cosh^2 kh} \right].$$

En el caso $kh \gg 1$ tenemos el resultado (12.10) y para $kh \ll 1$ el resultado (13.10) (ver a continuación).

Problema 2. Determinar la relación existente entre la frecuencia y la longitud de onda en el caso de ondas de gravedad en la superficie que separa dos fluidos, estando limitado el fluido superior por encima mediante un plano horizontal fijo, mientras el fluido infe-

ríor está limitado de modo semejante por debajo. La densidad y profundidad del fluido inferior son ρ y h y las del fluido superior son ρ' y h' , siendo $\rho > \rho'$.

Solución. Consideremos el plano xy como el plano de equilibrio de separación de los dos fluidos. Busquemos una solución que posea en ambos fluidos la forma

$$\begin{aligned}\phi &= A \cosh k(z+h) \cos(kx - \omega t), \\ \phi' &= B \cosh k(z-h') \cos(kx - \omega t),\end{aligned}\quad (1)$$

de modo que las condiciones en los límites superior e inferior pueden satisfacerse; véase la solución al problema 1. En la superficie de separación, la presión debe ser continua; por (12.2), esto da la condición

$$\rho g \zeta + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho' g \zeta + \rho' \frac{\partial \phi'}{\partial t} \text{ para } z = \zeta,$$

o sea

$$\zeta = \frac{1}{g(\rho - \rho')} \left(\rho' \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \quad (2)$$

Además, la componente de velocidad v_z debe ser la misma para cada fluido en la superficie de separación. Esto da la condición

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi'}{\partial z} \text{ para } z = 0. \quad (3)$$

Ahora bien, $v_z = \partial \phi / \partial z = \partial \zeta / \partial t$ y, sustituyendo (2), tenemos

$$g(\rho - \rho') \frac{\partial \phi}{\partial z} = \rho' \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Sustituyendo (1) en (3) y (4) se tienen dos ecuaciones lineales homogéneas para A y B y la condición de compatibilidad nos da

$$\omega^2 = \frac{kg(\rho - \rho')}{\rho \coth kh + \rho' \coth kh'}.$$

En el caso de $kh \gg 1$, $kh' \gg 1$ (ambos fluidos muy profundos),

$$\omega^2 = kg \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'},$$

mientras que para $kh \ll 1$, $kh' \ll 1$ (ondas largas),

$$\omega = k \sqrt{\frac{g(\rho - \rho')hh'}{\rho h' + \rho'h}}.$$

Problema 3. Determinar la relación existente entre la frecuencia y la longitud de onda para ondas de gravedad que se propagan simultáneamente en la superficie de separación y en la superficie superior de dos capas fluidas, teniendo la inferior (de densidad ρ) una profundidad infinita, mientras que la superior (de densidad ρ') tiene una profundidad h' y la superficie superior libre.

Solución. Consideremos el plano xy como el plano de equilibrio de la separación de ambos fluidos. Busquemos una solución que posea para ambos fluidos las formas

$$\begin{aligned}\phi &= Ae^{kz} \cos(kx - \omega t), \\ \phi' &= [Be^{-kz} + Ce^{kz}] \cos(kx - \omega t).\end{aligned}\quad (1)$$

En la superficie de separación, es decir, para $z = 0$, tenemos las condiciones (ver problema 2)

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi'}{\partial z}, \quad g(\rho - \rho') \frac{\partial \phi}{\partial z} = \rho' \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (2)$$

y en la superficie superior, es decir, para $z = h'$, la condición

$$\frac{\partial \phi'}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

La primera ecuación (2), nos da $A = C - B$ al sustituir en (1), y las dos condiciones restantes nos dan, entonces, dos ecuaciones para B y C ; a partir de la condición de compatibilidad obtenemos una ecuación cuadrática para ω^2 , cuyas raíces son

$$\omega^2 = kg \frac{(\rho - \rho')(1 - e^{-2kh'})}{\rho + \rho' + (\rho - \rho')e^{-2kh'}}, \quad \omega^2 = kg.$$

En el caso de $h' \rightarrow \infty$, estas raíces corresponden a ondas que se propagan independientemente en la superficie de separación y en la superficie superior.

Problema 4. Determinar las frecuencias de oscilación[†] posibles (ondas estacionarias) de un fluido de profundidad h en un depósito o tanque rectangular de anchura a y longitud b .

Solución. Tomaremos los ejes x e y a lo largo de los dos lados del depósito. Busquemos una solución en forma de una onda estacionaria:

$$\phi = f(x, y) \cosh k(z + h) \cos \omega t.$$

Obtenemos para f la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0,$$

y la condición en la superficie libre da, como en el problema 1, la relación

$$\omega^2 = gk \operatorname{tgh} kh.$$

Tomaremos la solución de la ecuación correspondiente a f en la forma

$$f = \cos px \cos qy, \quad p^2 + q^2 = k^2.$$

En los lados del depósito debemos tener las condiciones

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \text{ para } x = 0, a; \\ v_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ para } y = 0, b.\end{aligned}$$

[†] Ver § 68.

De aquí que encontremos $p = m\pi/a$, $q = n\pi/b$, siendo m y n números enteros. Por consiguiente, los valores posibles de k^2 son

$$k^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right).$$

§ 13. Ondas de gravedad largas

Habiendo considerado las ondas de gravedad de pequeña longitud en comparación con la profundidad del fluido, estudiemos ahora el caso límite opuesto de ondas de longitud grande en comparación con la profundidad. Estas ondas se denominan *largas*.

Examinemos primeramente la propagación de ondas largas en un canal. Se supone que el canal está dirigido a lo largo del eje x y tiene longitud infinita. La sección recta del canal puede tener cualquier forma y puede variar a lo largo de su longitud. Designaremos el área de la sección recta del fluido o del canal mediante $S = S(x, t)$. Se supone que la anchura y profundidad del canal son pequeñas en comparación con la longitud de onda.

Consideraremos aquí ondas longitudinales, en las cuales el fluido se mueve a lo largo del canal. En dichas ondas la componente de velocidad v_x a lo largo del canal es grande en comparación con las componentes v_y, v_z .

Designaremos v_x simplemente por v y omitiremos los términos pequeños. La componente x de la ecuación de Euler puede escribirse entonces en la forma

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

y la componente z en la forma

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g;$$

Omitimos los términos cuadráticos de la velocidad, puesto que se supone de nuevo que es pequeña la longitud de onda. A partir de la segunda ecuación tenemos, puesto que la presión en la superficie libre ($z = \xi$) debe ser p_0 ,

$$p = p_0 + g\rho(\xi - z).$$

Sustituyendo esta expresión en la primera ecuación, se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (13.1)$$

La segunda ecuación necesaria para determinar las dos incógnitas v y ξ puede deducirse de modo semejante a la ecuación de continuidad; esencialmente es la ecuación de continuidad para el caso en cuestión. Consideremos un volumen de fluido limitado por dos secciones rectas planas del canal distantes entre sí una distancia dx . En la unidad de tiempo fluye a través de uno de los planos un volumen $(Sv)_x$ de fluido y a través del otro un volu-

men $(Sv)_{x+dx}$. De aquí que el volumen de fluido entre ambos planos varía en la cantidad

$$(Sv)_{x+dx} - (Sv)_x = \frac{\partial(Sv)}{\partial x} dx.$$

Sin embargo, como el fluido es incompresible, esta variación se deberá simplemente a la variación del nivel de fluido. El cambio por unidad de tiempo del volumen de fluido comprendidos entre los dos planos considerados es $(\partial S/\partial t)dx$. Por consiguiente, podemos escribir

$$\frac{\partial S}{\partial t} dx = - \frac{\partial(Sv)}{\partial x} dx,$$

o sea,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Sv)}{\partial x} = 0. \quad (13.2)$$

Esta es la ecuación de continuidad solicitada.

Sea S_0 el área de la sección recta de equilibrio del fluido en el canal. Entonces, $S = S_0 + S'$, siendo S' la variación en el área de la sección recta producida por la onda. Puesto que el cambio en el nivel del fluido es pequeño, podemos escribir S' en la forma $b\zeta$, siendo b la anchura del canal en la superficie del fluido. La ecuación (13.2) se transforma entonces en

$$b \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(S_0 v)}{\partial x} = 0. \quad (13.3)$$

Derivando (13.3) respecto a t y sustituyendo $\partial v / \partial t$ de (13.1), obtenemos

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{g}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left(S_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = 0. \quad (13.4)$$

Si la sección recta del canal es la misma en todos los puntos, entonces $S_0 = \text{constante}$ y

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{g S_0}{b} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0. \quad (13.5)$$

Esta ecuación se denomina una *ecuación de onda*: como veremos en § 63, corresponde a la propagación de ondas con una velocidad U que es independiente de la frecuencia y es la raíz cuadrada del coeficiente de $\partial^2 \zeta / \partial x^2$. Así pues, la velocidad de propagación de ondas de gravedad largas en canales es

$$U = \sqrt{(g S_0 / b)}. \quad (13.6)$$

De un modo totalmente semejante podemos considerar ondas largas en un depósito grande, que suponemos infinito en dos direcciones (las correspondientes a x e y). Se designa por h la profundidad del fluido en el depó-

sito. La componente v_z de la velocidad es ahora pequeña. La ecuación de Euler toma una forma semejante a (13.1):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0. \quad (13.7)$$

Se deduce la ecuación de continuidad del mismo modo que (13.2) y es

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hv_y)}{\partial y} = 0.$$

Escribamos la profundidad h como $h_0 + \zeta$, siendo h_0 la profundidad de equilibrio. Entonces,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(h_0 v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(h_0 v_y)}{\partial y} = 0. \quad (13.8)$$

Admitamos que el depósito tiene un fondo horizontal ($h_0 = \text{constante}$). Derivando (13.8) respecto a t y sustituyendo el valor de (13.7), obtenemos

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gh \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (13.9)$$

Que es de nuevo una ecuación de onda (bidimensional); corresponde a ondas que se propagan con una velocidad

$$U = \sqrt{gh}. \quad (13.10)$$

§ 14. Ondas en un fluido incompresible

Existe un tipo de onda de gravedad que puede propagarse en el interior de un fluido incompresible. Dichas ondas se deben a una inhomogeneidad del fluido producida por el campo gravitatorio. La presión (y por consiguiente la entropía s) varía necesariamente con la altura; de aquí que cualquier desplazamiento de una partícula de fluido en altura destruye el equilibrio mecánico y, en consecuencia, produce un movimiento oscilante. En efecto, puesto que el movimiento es adiabático, la partícula transporta con ella a su nueva posición toda su entropía anterior s , que no es la misma que la correspondiente al valor de equilibrio en la nueva posición.

Supondremos a continuación que la longitud de onda es pequeña en comparación con las distancias sobre las que el campo gravitatorio produce una modificación notable en la densidad; y consideraremos al propio fluido como incompresible. Esto significa que podemos despreciar las variaciones producidas en su densidad por la variación de presión de la onda. La modificación de la densidad producida por la dilatación térmica no puede despreciarse, puesto que es la que origina el fenómeno en cuestión.

Describamos a continuación un sistema de ecuaciones hidrodinámicas para este movimiento. Utilizaremos un sufijo 0 para distinguir los valores de las

magnitudes correspondientes al equilibrio mecánico y una prima para marcar las pequeñas desviaciones de estos valores. Entonces puede escribirse la ecuación de conservación de la entropía $s = s_0 + s'$ hasta el primer orden,

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s_0 = 0, \quad (14.1)$$

en donde s_0 , igual que los valores de equilibrio de otras magnitudes, es una función determinada de la coordenada vertical z .

A continuación, despreciaremos de nuevo en la ecuación de Euler el término $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ (puesto que las oscilaciones son pequeñas); y teniendo en cuenta además el hecho de que la distribución de presiones de equilibrio viene dada por $\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g}$, tenemos hasta el mismo grado de exactitud

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} = - \frac{\nabla p'}{\rho_0} + \frac{\nabla p_0}{\rho^2}.$$

Puesto que, según hemos visto anteriormente, la variación de la densidad se debe únicamente al cambio de entropía y no a la variación de presión, podemos escribir

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0} \right)_p s',$$

y así se obtiene entonces la ecuación de Euler en la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0} \right)_p s' - \nabla \frac{p'}{\rho_0}. \quad (14.2)$$

Podemos incluir ρ_0 bajo el operador gradiente, puesto que, como se dijo anteriormente, siempre despreciamos la variación de la densidad de equilibrio en distancias del orden de una longitud de onda. Por esta misma razón se puede suponer constante la densidad en la ecuación de continuidad, que resulta entonces

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (14.3)$$

Buscaremos una solución de las ecuaciones (14.1)-(14.3) en la forma de una onda plana:

$$\mathbf{v} = \text{constante} \times e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

y análogamente para s' y p' . Sustituyendo la ecuación de continuidad (14.3) se tiene

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (14.4)$$

es decir, la velocidad del fluido es en todas partes perpendicular al vector de onda \mathbf{k} (onda transversal). Las ecuaciones (14.1) y (14.2) dan

$$i\omega s' = \mathbf{v} \cdot \nabla s_0, \quad -i\omega \mathbf{v} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0} \right)_p s' \mathbf{g} - \frac{i\mathbf{k}}{\rho_0} p'.$$

La condición $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0$, junto a la segunda de estas ecuaciones, da

$$ik^2 p' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0} \right)_p s' \mathbf{g} \cdot \mathbf{k},$$

y, eliminando \mathbf{v} y s' de ambas ecuaciones, obtenemos la relación deseada entre el vector de onda y la frecuencia,

$$\omega^2 = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p g \frac{ds}{dz} \sin^2 \theta. \quad (14.5)$$

Aquí y en lo que sigue omitiremos el sufijo cero para los valores de equilibrio de las magnitudes termodinámicas; el eje z es vertical y hacia arriba y θ es el ángulo entre este eje y la dirección de \mathbf{k} . Si la expresión en el segundo miembro de (14.5) es positiva, se cumple la condición para la estabilidad de la distribución de equilibrio $s(z)$ (condición de que la convección esté ausente — ver § 4).

Vemos que la frecuencia depende sólo de la dirección del vector de onda y no de su valor. Para $\theta = 0$ tenemos $\omega = 0$; esto significa que no pueden existir ondas del tipo considerado, con su vector de onda vertical.

Si el fluido está tanto en equilibrio mecánico como en equilibrio termodinámico completo, su temperatura es constante y podemos escribir

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dz} = -\rho g \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T.$$

Finalmente, utilizando las relaciones termodinámicas bien conocidas

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p,$$

en donde c_p es el calor específico por unidad de masa, encontramos

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{c_p \rho}} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \sin \theta. \quad (14.6)$$

En particular, en el caso de un gas perfecto,

$$\omega = \frac{g}{\sqrt{(c_p T)}} \sin \theta. \quad (14.7)$$

CAPÍTULO II

FLUIDOS VISCOSOS

§ 15. Ecuación del movimiento de un fluido viscoso

Estudiaremos ahora el efecto producido por la disipación de energía, que se produce durante el movimiento de un fluido, sobre el propio movimiento. Este proceso es el resultado de la irreversibilidad termodinámica del movimiento. Siempre se presenta dicha irreversibilidad en alguna cuantía y se debe a la fricción interna (viscosidad) y a la conducción térmica.

Con objeto de obtener las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido viscoso, hemos de incluir algunos términos adicionales en la ecuación del movimiento de un fluido ideal. La ecuación de continuidad, como vimos en su deducción, es válida igualmente para cualquier fluido, sea viscoso o no. Por otra parte, la ecuación de Euler exige ciertas modificaciones.

Hemos visto en § 7 que la ecuación de Euler puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k},$$

en donde Π_{ik} es el tensor de densidad de flujos del impulso. El flujo del impulso dado por la fórmula (7.2) representa una transferencia de impulso completamente reversible debida simplemente al transporte mecánico de las distintas partículas de fluido de un lugar a otro y a las fuerzas de presión que actúan en dicho fluido. La viscosidad (rozamiento interno) se debe a una transferencia de impulso, irreversible, de unos puntos en donde la velocidad es grande a otros puntos donde la velocidad es pequeña.

La ecuación del movimiento de un fluido viscoso puede, por consiguiente, obtenerse sumando al flujo de impulso «ideal» (7.2) un término — σ'_{ik} que da la transferencia de impulso «viscoso» irreversible en el fluido. Así pues, escribiremos el tensor densidad de flujo del impulso en el caso de un fluido viscoso en la forma

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k. \quad (15.1)$$

El tensor

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik} \quad (15.2)$$

se denomina *tensor de tensiones* y σ'_{ik} es el *tensor de tensiones de la viscosidad*. σ_{ik} expresa la parte del flujo del impulso que no se debe a transferencia directa de impulso con la masa del fluido móvil.[†]

Puede establecerse la forma general del tensor σ'_{ik} del modo siguiente. En un fluido se presentan procesos de rozamiento interno únicamente en el caso en que las distintas partículas del fluido se muevan con velocidades diferentes, de modo que exista un movimiento relativo entre las distintas partes del fluido. De aquí que σ'_{ik} dependa de las derivadas espaciales de la velocidad. Si los gradientes de velocidad son pequeños, podemos suponer que la transferencia de impulso debida a la viscosidad depende sólo de las primeras derivadas de la velocidad. Con la misma aproximación, σ'_{ik} puede suponerse que es una función lineal de las derivadas $\partial v_i / \partial x_k$. No pueden existir términos en σ'_{ik} independientes de $\partial v_i / \partial x_k$, puesto que σ'_{ik} debe anularse para $v = \text{constante}$. A continuación, observaremos que σ'_{ik} debe también anularse cuando el fluido completo está en rotación uniforme, puesto que es evidente que en dicho movimiento no se produce ningún rozamiento interno en el fluido. En el caso de rotación uniforme con velocidad angular Ω , la velocidad v es igual al producto vectorial $\Omega \times r$. Las sumas

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

son combinaciones lineales de las derivadas $\partial v_i / \partial x_k$, y se anulan cuando $v = \Omega \times r$. De aquí que σ'_{ik} deberá contener exactamente estas combinaciones simétricas de las derivadas $\partial v_i / \partial x_k$.

El tensor más general de rango dos que satisface las condiciones anteriores es

$$\sigma'_{ik} = a \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + b \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik},$$

siendo a y b independientes de la velocidad.[‡] Sin embargo, es conveniente escribir esta expresión en una forma ligeramente distinta, en la que a y b se sustituyen por otras constantes:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \quad (15.3)$$

La expresión entre paréntesis tiene la propiedad de anularse por contracción respecto a i y k , es decir, cuando se hace la suma de las componentes en el

[†] Veremos más adelante que σ'_{ik} contiene un término proporcional a δ_{ik} , es decir, de la misma forma que $p \delta_{ik}$. Por tanto, cuando el tensor del flujo de impulso se pone en dicha forma, deberemos especificar qué se entiende por presión p ; ver al final del § 49.

[‡] Para hacer esta afirmación hacemos uso del hecho de que el fluido es isoentrópico, de modo que sus propiedades deben describirse solamente mediante magnitudes escalares (en este caso a y b).

caso en que $i = k$. Las constantes η y ζ se denominan *coeficientes de viscosidad*. Como veremos en §§ 16 y 49, ambos son positivos:

$$\eta > 0, \quad \zeta > 0. \quad (15.4)$$

Las ecuaciones del movimiento de un fluido viscoso pueden ahora obtenerse sumando simplemente las expresiones $\partial\sigma'_{ik}/\partial x_k$ en el segundo miembro de la ecuación de Euler

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Así pues, tenemos

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right). \end{aligned} \quad (15.5)$$

Esta forma de las ecuaciones del movimiento de un fluido viscoso es la más general de todas. Las magnitudes η y ζ son funciones de la presión y la temperatura. En general, p y T , y, por consiguiente, η y ζ , no son constantes en todo el fluido, de modo que η y ζ no puede extraerse fuera del operador gradiente.

Sin embargo, en la mayor parte de los casos, los coeficientes de viscosidad no varían notablemente en el fluido y pueden, por tanto, considerarse como constantes. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} &= \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \\ &= \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + (\zeta + \frac{1}{3}\eta) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \end{aligned}$$

Pero

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \equiv \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} \equiv \Delta v_i.$$

De aquí que podemos escribir la ecuación del movimiento de un fluido viscoso en forma vectorial

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} \right] = - \operatorname{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v} + (\zeta + \frac{1}{3}\eta) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (15.6)$$

Si el fluido puede considerarse como incompresible, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, y el último término en el segundo miembro de (15.6) es cero. Así pues, la ecuación del movimiento de un fluido viscoso incompresible es

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}. \quad (15.7)$$

Esta ecuación se denomina de *Navier-Stokes*. El tensor de tensiones en un fluido incompresible toma la forma sencilla

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \quad (15.8)$$

Vemos que la viscosidad de un fluido incompresible queda determinada sólo por un coeficiente. Puesto que la mayor parte de los fluidos pueden considerarse como prácticamente incompresibles, este coeficiente de viscosidad η es el que tiene, en general, importancia. El cociente

$$\nu = \eta/\rho \quad (15.9)$$

se denomina *viscosidad cinemática* (mientras que el propio η se denomina *viscosidad dinámica*). A continuación, damos los valores de η y ν para diversos fluidos a una temperatura de 20°C:

	η (g/cm s)	ν (cm ² /s)
Agua	0,010	0,010
Aire	0,00018	0,150
Alcohol	0,018	0,022
Glicerina	8,5	6,8
Mercurio	0,0156	0,0012

Conviene mencionar que la viscosidad dinámica de un gas a una temperatura determinada es independiente de la presión. Sin embargo, la viscosidad cinemática es inversamente proporcional a la presión.

La presión puede eliminarse en la ecuación de Navier-Stokes del mismo modo que se hizo en la ecuación de Euler. Tomando el rotacional de ambos miembros de la ecuación (15.7), obtenemos, en lugar de la ecuación (2.11) correspondiente a un fluido ideal, la expresión

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \mathbf{v}) = \text{rot}(\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) + \nu \Delta(\text{rot } \mathbf{v}). \quad (15.10)$$

También escribiremos a continuación las condiciones límites que actúan sobre las ecuaciones del movimiento de un fluido viscoso. Existen siempre fuerzas de atracción molecular entre un fluido viscoso y la superficie de un cuerpo sólido. Estas fuerzas dan lugar a que la capa de fluido inmediata adyacente a la superficie quede totalmente en reposo y se «adhiera» a la superficie. De acuerdo con ello, las condiciones límites en las ecuaciones del movimiento de un fluido viscoso exigen que la velocidad del fluido se anule en las superficies sólidas fijas:

$$\mathbf{v} = 0. \quad (15.11)$$

Puede resaltarse que tanto la componente de velocidad normal como la tangencial se deben anular, mientras que en el caso de un fluido ideal las condiciones límites exigen únicamente la anulación de v_n .[†]

[†] Podemos señalar que, en general, las ecuaciones de Euler no pueden ser satisfechas con la condición límite $\mathbf{v} = 0$.

En el caso general de una superficie móvil, la velocidad \mathbf{v} debe ser igual a la velocidad de la superficie.

Es sencillo escribir a continuación una expresión para la fuerza que actúa sobre una superficie sólida que limita el fluido. La fuerza que actúa sobre un elemento de la superficie coincide con el flujo de impulso a través de dicho elemento. El flujo de impulso a través del elemento de superficie $d\mathbf{f}$ es

$$\Pi_{ik} d\mathbf{f}_k = (\rho v_i v_k - \sigma_{ik}) d\mathbf{f}_k.$$

Escribiendo $d\mathbf{f}_k$ en la forma $d\mathbf{f}_k = n_k d\mathbf{f}$, en donde \mathbf{n} es un vector unidad a lo largo de la normal y recordando que $\mathbf{v} = 0$ en una superficie sólida, encontramos que la fuerza \mathbf{P} que actúa sobre la superficie de área unidad es

$$\mathbf{P}_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k. \quad (15.12)$$

El primer término es la presión ordinaria del fluido, mientras que el segundo es la fuerza de rozamiento, debida a la viscosidad, que actúa sobre la superficie. Debemos resaltar que \mathbf{n} en (15.12) es un vector unidad a lo largo de la normal y hacia fuera del fluido, es decir, a lo largo de la normal hacia dentro en la superficie sólida.

Si tenemos una superficie de separación entre dos fluidos inmiscibles, las velocidades de los fluidos deben ser iguales en la superficie y las fuerzas que se ejercen entre sí deben ser iguales y opuestas. La última condición se escribe

$$n_{1,k} \sigma_{1,k} + n_{2,k} \sigma_{2,k} = 0,$$

en donde los sufijos 1 y 2 se refieren a los dos fluidos. Los vectores normales \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 tienen sentidos opuestos, es decir, $n_{1,i} = -n_{2,i} = n_i$, de modo que podemos escribir

$$n_i \sigma_{1,k} = n_i \sigma_{2,k}. \quad (15.13)$$

En una superficie libre del fluido debe cumplirse la condición

$$\sigma_{ik} n_k \equiv \sigma'_{ik} n_k - p n_i = 0 \quad (15.14)$$

Como referencia, daremos a continuación las expresiones correspondientes a las componentes del tensor de tensiones y la ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas y esféricas. En coordenadas cilíndricas r, ϕ, z , los componentes del tensor de tensiones son

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, & \sigma_{r\phi} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right), \\ \sigma_{\phi\phi} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} \right), & \sigma_{\phi z} &= \eta \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} \right), \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \sigma_{zr} &= \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (15.15)$$

[†] Al determinar la fuerza que actúa sobre la esfera, debe considerarse cada elemento superficial en un sistema de referencia en el cual esté en reposo. La fuerza sólo es igual al flujo del impulso cuando la superficie está fija.

Los tres componentes de la ecuación de Navier-Stokes y de la ecuación de continuidad son

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} \\
 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_r}{r^2} \right), \\
 \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_r v_\phi}{r} \\
 = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2} \right), \\
 \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \\
 \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0. \tag{15.16}
 \end{aligned}$$

En coordenadas esféricas r, ϕ, θ , tenemos para el tensor de tensiones

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\
 \sigma_{\phi\phi} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right), \\
 \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right), \\
 \sigma_{r\theta} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \\
 \sigma_{\theta\phi} &= \eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{v_\phi \cot \theta}{r} \right), \\
 \sigma_{\phi r} &= \eta \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \right), \tag{15.17}
 \end{aligned}$$

mientras que las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \\
 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rv_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} v_\theta \right], \\
 & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \\
 &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rv_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \\
 & \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \\
 &= -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rv_\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \\
 & \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} = 0. \tag{15.18}
 \end{aligned}$$

Finalmente, damos la ecuación que debe ser satisfecha por la función de corriente $\psi(x, y)$ en un flujo bidimensional de un fluido viscoso incompresible. Se obtiene sustituyendo $v_x = \partial \psi / \partial y$, $v_y = -\partial \psi / \partial x$, $v_z = 0$ en la ecuación (15.10):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial (\Delta \psi)}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial (\Delta \psi)}{\partial x} - \nu \Delta^2 \psi = 0. \tag{15.19}$$

§ 16. Disipación de energía en un fluido incompresible

La presencia de la viscosidad da como resultado la disipación de energía que finalmente se transforma en calor. El cálculo de la disipación de energía es especialmente sencillo en el caso de un fluido incompresible.

La energía cinética total de un fluido incompresible es

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \rho \int v^2 dV.$$

Tomemos la derivada temporal de esta energía escribiendo $\partial(\frac{1}{2}\rho v^2)/\partial t = \rho v_i \partial v_i / \partial t$ y sustituyendo $\partial v_i / \partial t$ por la expresión correspondiente que se obtiene mediante la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}.$$

El resultado es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} \rho v^2) &= -\rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \\ &= -\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) + \operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}') - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

En esta expresión $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}'$ designa el vector cuyas componentes son $v_i \sigma'_{ik}$. Puesto que $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ en el caso de un fluido incompresible, podemos escribir el primer término del segundo miembro como una divergencia:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} \rho v^2) = -\operatorname{div} \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' \right] - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (16.1)$$

La expresión entre corchetes es exactamente la densidad de flujo de energía en el fluido: el término $\rho \mathbf{v} (\frac{1}{2} v^2 + p/\rho)$ es el flujo de energía debido a la transferencia real de masa de fluido y equivale al flujo de energía correspondiente a un fluido ideal [ver (10.5)]. El segundo término, $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}'$, es el flujo de energía debido a los procesos de rozamiento interno. Pero la presencia de la viscosidad da como resultado un flujo de impulso σ'_{ik} ; sin embargo, en una transferencia de impulso siempre interviene una transferencia de energía y el flujo de energía es evidentemente igual al producto escalar del flujo de impulso por la velocidad.

Si integramos (16.1) respecto a un volumen V , obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} \rho v^2 dV = - \oint \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' \right] \cdot d\mathbf{f} - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV. \quad (16.2)$$

El primer término del segundo miembro nos da la variación respecto al tiempo de la energía cinética del fluido contenido en V debido al flujo de energía a través de la superficie que limita a V . La integral del segundo término es, en consecuencia, la disminución por unidad de tiempo de la energía cinética debida a la disipación.

Si se extiende la integración al volumen total del fluido, la integral de superficie se anula (puesto que la velocidad se anula en el infinito[†]) y encontramos que la energía disipada por unidad de tiempo en la totalidad del fluido es

$$\dot{E}_k = - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV.$$

En fluidos incompresibles, el tensor σ'_{ik} viene dado por (15.8), de modo que

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right).$$

Es fácil de comprobar que en esta expresión puede escribirse

$$\frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2.$$

Así pues, tenemos, finalmente, para la disipación de energía en un fluido incompresible

$$\dot{E}_k = - \frac{1}{2} \eta \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV. \quad (16.3)$$

La disipación conduce a una disminución de energía mecánica, es decir, debemos tener $E_{kin} < 0$. Sin embargo, la integral (16.3) es siempre positiva. Por tanto, se llega a la conclusión de que el coeficiente de viscosidad η es siempre positivo.

PROBLEMA

Transformar la integral (16.3) correspondiente a un flujo potencial en una integral extendida a la superficie que limita a la región del flujo.

Solución. Poniendo $\partial v_i / \partial x_k = \partial v_k / \partial x_i$ e integrando una vez por partes, encontramos

$$\dot{E}_k = - 2\eta \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2 dV = - 2\eta \int v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} df_k,$$

o sea

$$\dot{E}_k = - \eta \int \mathbf{grad} v^2 \cdot d\mathbf{f}.$$

§ 17. Flujo en una tubería

Consideremos ahora algunos problemas sencillos de movimiento de un fluido viscoso incompresible.

Supongamos que el fluido está encerrado entre dos planos paralelos que se mueven con una velocidad relativa constante \mathbf{u} . Tomemos uno de ellos

[†] Se considera el movimiento del fluido en un sistema de coordenadas donde el fluido se encuentra en reposo en el infinito. En este momento y en otros semejantes nos referimos para mayor precisión a volúmenes infinitos de fluido, pero sin que esto implique pérdida de generalidad. En el caso de un fluido encerrado en un volumen finito, la integral de superficie también se anula, debido a que se hace cero la componente de la velocidad normal a la superficie.

como plano xz con el eje x en la dirección \mathbf{u} . Es evidente que todas las magnitudes dependen solamente de y , y que la velocidad del fluido está siempre dirigida en la dirección x . A partir de (15.7) obtenemos para el flujo estacionario

$$\frac{dp}{dy} = 0, \quad \frac{d^2v}{dy^2} = 0.$$

(La ecuación de continuidad se satisface idénticamente.) De aquí que $p = \text{constante}$, $v = ay + b$. Para $y = 0$ e $y = h$ (siendo h la distancia entre los planos) resulta, respectivamente, $v = 0$ y $v = u$. Así pues,

$$v = yu/h. \quad (17.1)$$

Por consiguiente, la distribución de velocidades del fluido es lineal. La velocidad media del fluido, definida como

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v \, dy,$$

es

$$\bar{v} = \frac{1}{2}u. \quad (17.2)$$

Según (15.12) vemos que la componente normal de la fuerza sobre cualquiera de los planos es exactamente p , como es lógico, mientras que la fuerza de rozamiento tangencial sobre el plano $y = 0$ es

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{dv}{dy} = \eta u/h; \quad (17.3)$$

y la fuerza sobre el plano $y = h$ es $-\eta u/h$.

A continuación, consideremos el flujo estacionario entre dos planos paralelos fijos en presencia de un gradiente de presión. Escojaremos las coordenadas como antes; el eje x en la dirección del movimiento del fluido. Las ecuaciones de Navier-Stokes, puesto que la velocidad depende evidentemente sólo de y , nos dan:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

La segunda ecuación demuestra que la presión es independiente de y , es decir, que es constante a través de la profundidad del fluido situado entre dos planos. El segundo miembro de la primera ecuación es, por tanto, una función solamente de x , mientras que el primer miembro es solamente una función de y ; esto únicamente puede ser cierto si ambos miembros son constantes. Así pues, $dp/dx = \text{constante}$, es decir, la presión es una función lineal de la coordenada x a lo largo de la dirección del flujo. Para la velocidad obtenemos ahora

$$v = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} y^2 + ay + b.$$

Se determinan las constantes a y b a partir de las condiciones límites, $v = 0$ para $y = 0$ e $y = h$. El resultado es

$$v = -\frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} [\frac{1}{4}h^2 - (y - \frac{1}{2}h)^2]. \quad (17.4)$$

Así pues, la velocidad varía parabólicamente a través del fluido, alcanzando su valor máximo en la mitad. La velocidad media del fluido (promediada en toda la profundidad del mismo) es de nuevo

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v \, dy;$$

y al calcular esta expresión, se encuentra

$$\bar{v} = -\frac{h^2}{12\eta} \frac{dp}{dx}. \quad (17.5)$$

Podemos también calcular la fuerza de rozamiento $\sigma_{xy} = \eta(\partial v / \partial y)_{y=0}$ que actúa sobre uno de los planos fijos. La sustitución de (17.4) da

$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{2}h \frac{dp}{dx}. \quad (17.6)$$

Finalmente, consideremos el flujo estacionario en una tubería de sección recta arbitraria (que es, sin embargo, la misma a lo largo de la longitud completa de la misma). Tomaremos el eje de la tubería como el eje x . Evidentemente, la velocidad de fluido está dirigida a lo largo del eje x en todos los puntos y es una función solamente de y y z . La ecuación de continuidad se satisface idénticamente, mientras que las componentes y y z de la ecuación de Navier-Stokes nos dan de nuevo $\partial p / \partial y = \partial p / \partial z = 0$, es decir, la presión es constante en toda la sección recta de la tubería. La componente x de la ecuación (15.7) nos da:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx}. \quad (17.7)$$

De nuevo se tiene la conclusión de que $dp/dx = \text{constante}$; el gradiente de presión puede, por consiguiente, escribirse $-\Delta p/l$, siendo Δp la diferencia de presiones entre los extremos de la tubería y l su longitud.

Así pues, la distribución de velocidades correspondiente al flujo en una tubería está determinado por una ecuación bidimensional de la forma $\Delta v = \text{constante}$. Esta ecuación ha de resolverse con la condición límite $v = 0$ en la periferia de la sección recta de la tubería. Resolveremos la ecuación para una tubería de sección recta circular. Tomando el origen en el centro del círculo y utilizando coordenadas polares, tenemos por simetría que $v = v(r)$. Utilizando la expresión correspondiente a la laplaciana en coordenadas polares, tenemos

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\eta l}.$$

Integrando, encontramos

$$v = -\frac{\Delta p}{4\eta l}r^2 + a \log r + b. \quad (17.8)$$

La constante a debe ponerse igual a cero, puesto que la velocidad debe permanecer finita en el centro de la tubería. Se determina la constante b a partir del requisito de que $v = 0$ para $r = R$, siendo R el radio de la tubería. Entonces se tiene

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2). \quad (17.9)$$

Así pues, la distribución de velocidades a través de la tubería es parabólica.

Es sencillo determinar la masa Q de fluido que pasa cada segundo a través de una sección recta cualquiera de la tubería (denominada *caudal*). A través de un elemento anular $2\pi r dr$ del área de la sección recta pasa por segundo una masa $\rho \cdot 2\pi r v dr$. De aquí que

$$Q = 2\pi\rho \int_0^R rv dr.$$

Utilizando (17.9), obtenemos

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8\nu l} R^4. \quad (17.10)$$

Por tanto, la masa de fluido es proporcional a la cuarta potencia del radio de la tubería (*fórmula de Poiseuille*).

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el flujo en una tubería de sección recta anular, siendo los radios interno y externo R_1 y R_2 .

Solución. Determinando las constantes a y b en la función general (17.8) a partir de las condiciones de que $v = 0$ para $r = R_1$ y $r = R_2$, encontramos

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l} \left[R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\log(R_2/R_1)} \log \frac{r}{R_2} \right].$$

El caudal es

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8\nu l} \left[R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\log(R_2/R_1)} \right].$$

Problema 2. El mismo que el problema 1, pero en el caso de una tubería de sección recta elíptica.

Solución. Busquemos una solución de la ecuación (17.7) en la forma $v = Ay^2 + Bz^2 + C$. Se determinan las constantes A , B y C a partir del requisito de que esta expresión debe satisfacer la condición límite $v = 0$ en la circunferencia de la elipse (es decir, $Ay^2 + Bz^2 +$

$+ C = 0$ debe ser igual que la ecuación $y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$, en donde a y b son los semiejes de la elipse). El resultado es

$$v = \frac{\Delta p}{2\eta l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right).$$

El caudal es

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{4\nu l} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Problema 3. Igual que el problema 1, pero en el caso de una tubería cuya sección recta sea un triángulo equilátero de lado a .

Solución. La solución de la ecuación (17.7) que se anula en los límites del triángulo es

$$v = \frac{\Delta p}{l} \frac{2}{\sqrt{3}a\eta} h_1 h_2 h_3,$$

en donde h_1, h_2, h_3 son las longitudes de las perpendiculares desde un punto determinado del triángulo a sus tres lados. En efecto, cada uno de los laplacianos $\Delta h_1, \Delta h_2, \Delta h_3$ (en donde $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$) es nulo; esto resulta del hecho de cada una de las perpendiculares h_1, h_2, h_3 puede tomarse como eje y o z y el resultado de aplicar el laplaciano a una coordenada es cero. Por consiguiente, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta(h_1 h_2 h_3) &= 2(h_1 \operatorname{grad} h_2 \cdot \operatorname{grad} h_3 + h_2 \operatorname{grad} h_3 \cdot \operatorname{grad} h_1 + \\ &\quad + h_3 \operatorname{grad} h_1 \cdot \operatorname{grad} h_2). \end{aligned}$$

Pero $\operatorname{grad} h_1 = \mathbf{n}_1$, $\operatorname{grad} h_2 = \mathbf{n}_2$, $\operatorname{grad} h_3 = \mathbf{n}_3$, en donde $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ son vectores unidad a lo largo de las perpendiculares h_1, h_2, h_3 . Dos cualesquiera de los vectores $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ y \mathbf{n}_3 forman entre sí un ángulo $2\pi/3$, de modo que $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos(2\pi/3) = -1/2$, y así sucesivamente. Obtenemos, por tanto, la relación

$$\Delta(h_1 h_2 h_3) = -(h_1 + h_2 + h_3) = -\frac{1}{2}\sqrt{3a},$$

y vemos que entonces queda satisfecha la ecuación (17.7). El caudal es

$$Q = \frac{\sqrt{3a^4 \Delta p}}{320\nu l}.$$

Problema 4. Un cilindro de radio R_1 se mueve con velocidad u dentro de un cilindro coaxial de radio R_2 , siendo paralelos sus ejes. Determinar el movimiento del fluido que ocupa el espacio situado entre los cilindros.

Solución. Consideraremos coordenadas cilíndricas, con el eje z situado a lo largo de los ejes de los cilindros. La velocidad de todos los puntos está dirigida a lo largo del eje z y depende sólo de r (como, asimismo, la presión): $v_z = v(r)$. Obtenemos para v la ecuación

$$\Delta v = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 0;$$

el término $(\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} = v \partial v / \partial z$ se anula idénticamente. Utilizando las condiciones límites $v = u$ para $r = R_1$ y $v = 0$ para $r = R_2$, se tiene

$$v = u \frac{\log(r/R_2)}{\log(R_1/R_2)}.$$

La fuerza de rozamiento por unidad de longitud en cualquier cilindro es $2\pi\eta u / \log(R_2/R_1)$.

Problema 5. Una capa de fluido de espesor h está limitada por encima por una superficie libre y por debajo por un plano fijo inclinado un ángulo α respecto a la horizontal. Determinar el flujo debido a la gravedad.

Solución. Tomaremos el plano fijo como plano xy , con el eje x en la dirección del flujo (figura 6). Buscaremos una solución que dependa solamente de z . Las ecuaciones de Navier-Stokes con $v_x = v(z)$ en un campo gravitatorio son

$$\eta \frac{d^2v}{dz^2} + \rho g \operatorname{sen} \alpha = 0, \quad \frac{dp}{dz} + \rho g \cos \alpha = 0.$$

En la superficie libre ($z = h$) debemos tener $\sigma_{xz} = \eta dv/dz = 0$, $\sigma_{zz} = -p = -p_0$ (siendo p_0 la presión atmosférica). Para $z = 0$ debemos tener $v = 0$. La solución que satisface estas condiciones es

$$p = p_0 + \rho g(h-z) \cos \alpha, \quad v = \frac{\rho g \operatorname{sen} \alpha}{2\eta} z(2h-z).$$

El caudal, por unidad de longitud en la dirección y , es

$$Q = \rho \int_0^h v dz = \frac{\rho g h^3 \operatorname{sen} \alpha}{3\eta}.$$

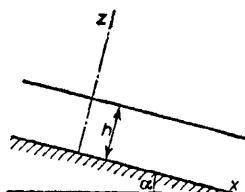


FIG. 6

Problema 6. Determinar el modo en que disminuye la presión a lo largo de un tubo de sección recta circular en el que está fluyendo isotérmicamente un gas perfecto viscoso (recordando que la viscosidad dinámica de un gas perfecto es independiente de la presión).

Solución. En una sección corta de la tubería puede suponerse que el gas es incompresible, siempre que el gradiente de presiones no sea demasiado alto, y, por consiguiente, podemos utilizar la fórmula (17.10), de acuerdo con la cual

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{8\eta Q}{\pi R^4}.$$

Sin embargo, en distancias mayores ρ varía y la presión no es una función lineal de x . De acuerdo con la ecuación de estado, la densidad del gas es $\rho = mp/kT$, en donde m es la masa de una molécula y k la constante de Boltzmann, de modo que

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{8\eta Q k T}{\pi m R^4} \cdot \frac{1}{p}.$$

(El caudal Q del gas a través del tubo es evidentemente el mismo, sea o no el gas incompresible.) A partir de esta expresión encontramos

$$p_2^2 - p_1^2 = \frac{16\eta Q k T}{\pi m R^4} l,$$

en donde p_2 y p_1 son las presiones en los extremos de una sección de tubo de longitud l .

§ 18. Flujo entre cilindros en rotación

Consideremos ahora el movimiento de un fluido entre dos cilindros coaxiales infinitos de radio R_1 , R_2 ($R_2 > R_1$), girando alrededor de sus ejes con velocidades angulares Ω_1 , Ω_2 . Tomaremos coordenadas cilíndricas r , ϕ , z , con el eje z a lo largo de los ejes de los cilindros. Por la simetría del problema es evidente que

$$v_z = v_r = 0, \quad v_\phi = v(r), \quad p = p(r).$$

La ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas da en este caso dos ecuaciones:

$$\frac{dp}{dr} = \rho v^2/r, \quad (18.1)$$

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0. \quad (18.2)$$

La última ecuación tiene solución en la forma r^n ; sustituyendo resulta $n = \pm 1$, de modo que

$$v = ar + \frac{b}{r}$$

Las constantes a y b se deducen de las condiciones límites, de acuerdo con las cuales la velocidad del fluido en las superficies cilíndricas internas y externas deben ser iguales a las del cilindro correspondiente: $v = R_1 \Omega_1$ para $r = R_1$, $v = R_2 \Omega_2$ para $r = R_2$. Como resultado tenemos que la distribución de velocidades es

$$v = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}. \quad (18.3)$$

Entonces se encuentra la distribución de presiones mediante (18.1) por una integración directa.

Para $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ tenemos simplemente que $v = \Omega r$, es decir, el fluido gira rígidamente con los cilindros. Cuando está ausente el cilindro exterior ($\Omega_2 = 0$, $R_2 = \infty$) tenemos $v = \Omega_1 R_1^2 / r$.

Determinemos también el momento de las fuerzas de rotación que actúan sobre los cilindros. La fuerza de rozamiento que actúa sobre la unidad de área del cilindro interior está dirigida a lo largo de la tangente a su super-

ficie y, según (15.12), es igual a la componente $\sigma'_{r\phi}$ del tensor de tensiones. Utilizando las fórmulas (15.5), se tiene

$$\begin{aligned} [\sigma'_{r\phi}]_{r=R_1} &= \eta \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \right]_{r=R_1} \\ &= -2\eta \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \end{aligned}$$

La fuerza que actúa sobre la unidad de longitud del cilindro se obtiene multiplicando por $2\pi R_1$, y el momento M_1 de esa fuerza multiplicando el resultado por R_1 . Así pues, se tiene

$$M_1 = -\frac{4\pi\eta(\Omega_1 - \Omega_2)R_1^2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (18.4)$$

El momento M_2 de las fuerzas que actúan sobre el cilindro interno es evidentemente $-M_1$.[†]

Puede hacerse la siguiente observación general respecto a las soluciones de las ecuaciones del movimiento de un fluido viscoso que se han obtenido en §§ 17 y 18. En todos estos casos el término no lineal $(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})\mathbf{v}$ en las ecuaciones que determinan la distribución de velocidades es idénticamente nulo, de modo que estamos resolviendo realmente ecuaciones lineales, hecho que simplifica mucho el problema. Por esta razón, todas las soluciones satisfacen también las ecuaciones del movimiento correspondiente a un fluido ideal incompresible, por ejemplo, las que se presentan en la forma (10.2) y (10.3). Esta es la razón por la cual las fórmulas (17.1) y (18.3) no contienen en absoluto el coeficiente de viscosidad. Este coeficiente aparece solamente en las fórmulas, como la (17.9), que relaciona la velocidad con el gradiente de presiones en el fluido, puesto que la presencia de un gradiente de presión se debe a la viscosidad; un fluido ideal podría fluir por una tubería aunque no existiese ningún gradiente de presión.

§ 19. Ley de semejanza

Al estudiar el movimiento de fluidos viscosos podemos obtener un cierto número de resultados importantes a partir de razonamientos sencillos que se refieren a las dimensiones de las diversas magnitudes físicas. Consideraremos un tipo cualquiera particular de movimiento, por ejemplo, el movimiento de un cuerpo de una forma definida a través de un fluido. Si el cuerpo no es una esfera, debe también especificarse su dirección de movimiento: por

[†] La solución del problema más complejo del movimiento de un fluido viscoso en un espacio estrecho situado entre dos cilindros cuyos ejes son paralelos, pero no coincidentes, puede encontrarse en N. E. KOCHIN, I. A. KIBEL' y N. V. ROZE, *Theoretical Hydromechanics* (*Teoreticheskaya gidromekhanika*), parte 2, 3.^a ed., p. 419, Moscow, 1948; A. SOMMERFELD, *Mechanics of Deformable Bodies*, § 36, Academic Press, New York, 1950.

ejemplo, el movimiento de un elipsoide en la dirección de su eje mayor o menor. O bien, podemos estar considerando el flujo en una región con límites de una forma definida (una tubería de sección recta determinada, etc.).

En estos casos decimos que los cuerpos de la misma forma son geométricamente semejantes; pueden obtenerse uno del otro cambiando todas las dimensiones lineales en la misma relación. De aquí que, si se da la forma del cuerpo, basta con especificar cualquiera de sus dimensiones lineales (el radio de una esfera o de una tubería cilíndrica, un semieje de un esferoide de una excentricidad determinada, y así sucesivamente) con objeto de determinar por completo sus dimensiones.

Consideremos en el momento actual el flujo estacionario. Si estamos discutiendo, por ejemplo, el flujo que rodea a un cuerpo sólido (que es el caso que analizaremos a continuación, para ser más concretos), debe ser constante la velocidad de la corriente principal. Supondremos que el fluido es incompresible.

De los parámetros que caracterizan al propio fluido, solamente aparece en las ecuaciones de la hidrodinámica (ecuación de Navier-Stokes) la viscosidad cinemática $\nu = \eta/\rho$; las funciones incógnitas que han de determinarse resolviendo las ecuaciones son la velocidad \mathbf{v} y el cociente p/ρ entre la presión p y la densidad constante ρ . Además, el flujo depende, a través de las condiciones límites, de la forma y dimensiones del cuerpo que se mueve a través del fluido y de su velocidad. Puesto que se supone que la forma del cuerpo es conocida, quedan determinadas sus propiedades geométricas mediante una sola dimensión lineal, que designaremos por l . Supongamos que la velocidad de la corriente principal es u . Entonces cualquier flujo viene especificado por tres parámetros, ν , u y l . Estas magnitudes tienen las siguientes dimensiones:

$$\nu = \text{cm}^2/\text{s}, \quad l = \text{cm}, \quad u = \text{cm/s}.$$

Es sencillo de comprobar que sólo puede formarse una magnitud adimensional con las tres anteriores, a saber, ul/ν . Esta combinación se denomina *número de Reynolds* y se designa por R :

$$R = \rho ul/\eta = ul/\nu. \quad (19.1)$$

Cualquier otro parámetro adimensional puede escribirse en función de R .

A continuación, mediremos las longitudes en función de l y la velocidad en función de u , es decir, introduciremos las magnitudes adimensionales r/l , v/u . Puesto que el único parámetro adimensional es el número de Reynolds, es evidente que la distribución de velocidad obtenida resolviendo las ecuaciones del flujo incompresible viene dada por una función de la forma

$$\mathbf{v} = u\mathbf{f}(r/l, R). \quad (19.2)$$

A partir de esta expresión se ve que, en dos flujos diferentes del mismo tipo (por ejemplo, flujo que rodea a esferas de radios distintos siendo los fluidos de viscosidades diferentes), las velocidades v/u son las mismas funciones del cociente r/l si el número de Reynolds es el mismo para cada flujo. Los flujos que pueden obtenerse unos de otros, cambiando simplemente la unidad de medida de las coordenadas de velocidades, se dice que son *semejantes*. Así pues, los flujos del mismo tipo con los mismos números de Reynolds son semejantes. Esto se denomina *ley de semejanza* (O. REYNOLDS, 1883).

Puede escribirse una fórmula semejante a (19.2) para la distribución de presiones de los fluidos. Para ello, debemos construir a partir de los parámetros v , l , u , alguna magnitud con las dimensiones de presión dividida por densidad; esta magnitud puede ser u^2 , por ejemplo. Entonces podemos decir que $p/\rho u^2$ es una función de la variable adimensional r/l y del parámetro adimensional R . Así pues,

$$p = \rho u^2 f(r/l, R). \quad (19.3)$$

Finalmente, pueden también aplicarse consideraciones análogas a magnitudes que caracterizan el flujo pero que no sean funciones de las coordenadas. Una magnitud de este tipo es, por ejemplo, la fuerza de arrastre F que actúa sobre el cuerpo. Podemos decir que el cociente adimensional de F con alguna magnitud formada con v , u , l , ρ y que tengan las dimensiones de fuerza debe ser una función del número de Reynolds solamente. Dicha combinación de v , u , l , ρ puede ser $\rho u^2 l^2$, por ejemplo. Entonces,

$$F = \rho u^2 l^2 f(R). \quad (19.4)$$

Si la fuerza de la gravedad tiene un efecto importante sobre el flujo, entonces este último está determinado no por tres parámetros, sino por cuatro, l , u , v y la aceleración debida a la gravedad g . Con estos parámetros podemos construir, no una, sino dos magnitudes independientes adimensionales. Estas pueden ser, por ejemplo, el número de Reynolds y el *número de Froude*, que es

$$F = u^2/l g. \quad (19.5)$$

En las fórmulas (19.2)-(19.4) la función f dependerá ahora, no de un parámetro, sino de dos (R y F) y dos flujos serán semejantes únicamente si los dos números poseen los mismos valores.

Finalmente, diremos algo respecto a los flujos no estacionarios. Un flujo no estacionario de un determinado tipo está caracterizado no sólo por las magnitudes v , u , l , sino también por algún intervalo de tiempo τ característico de flujo que determina la variación de flujo respecto al tiempo. Por ejemplo, en las oscilaciones, de acuerdo con una ley determinada, de un cuerpo sólido de una forma determinada y sumergida en un fluido, τ puede ser el período de oscilación. A partir de las cuatro magnitudes v , u , l , τ , podemos

construir de nuevo dos magnitudes adimensionales independientes, que pueden ser el número de Reynolds y el número

$$S = u\tau/l, \quad (19.6)$$

a veces denominado *número de Strouhal*. En estos casos tiene lugar un movimiento semejante sólo si todos estos números tienen los mismos valores.

Si las oscilaciones del fluido se presentan espontáneamente (y no bajo la acción de una fuerza excitadora externa determinada), entonces el movimiento de un tipo determinado S será una función definida de R:

$$S = f(R).$$

§ 20. Fórmula de Stokes

La ecuación de Navier-Stokes se simplifica considerablemente en el caso de flujos con números de Reynolds pequeños. En el caso de flujo estacionario de un fluido incompresible esta ecuación es

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -(1/\rho) \nabla p + (\eta/\rho) \Delta \mathbf{v}.$$

El término $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ es del orden de magnitud de u^2/l , teniendo u y l el mismo significado que en § 19. La magnitud $(\eta/\rho) \Delta \mathbf{v}$ es del orden de magnitud de $\eta u / \rho l^2$. El cociente de las dos es precisamente el número de Reynolds. De aquí que pueda despreciarse el término $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ si es pequeño el número de Reynolds y entonces la ecuación del movimiento se reduce a una ecuación lineal

$$\eta \Delta \mathbf{v} - \nabla p = 0. \quad (20.1)$$

Esta ecuación junto con la ecuación de continuidad

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (20.2)$$

determina por completo el movimiento. Es interesante señalar también la ecuación

$$\Delta \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \quad (20.3)$$

que se obtiene tomando el rotacional de la ecuación (20.1).

Como ejemplo, consideremos el movimiento rectilíneo y uniforme de una esfera en un fluido viscoso. El problema del movimiento de una esfera es exactamente equivalente, como es obvio, al del flujo que pasa alrededor de una esfera fija, teniendo el fluido una velocidad determinada \mathbf{u} en el infinito. La distribución de velocidades en el primer problema se obtiene respecto a la del segundo problema restando simplemente la velocidad \mathbf{u} ; el fluido entonces está en reposo en el infinito, mientras que la esfera se mueve con velocidad $-\mathbf{u}$. Si consideramos el flujo como estacionario debemos, como es natural, hablar del flujo que pasa rodeando una esfera fija, puesto

que cuando la esfera se mueve, la velocidad del fluido en un punto cualquiera del espacio varía con el tiempo.

Así pues, debemos tener $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ en el infinito; haremos $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$, de modo que \mathbf{v}' sea cero en el infinito. Puesto que $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0$, \mathbf{v}' puede escribirse como rotacional de un vector dado: $\mathbf{v}' = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mathbf{u}$. El rotacional de un vector polar se sabe bien que es un vector axial y viceversa. Puesto que la velocidad es un vector polar ordinario, \mathbf{A} debe ser un vector axial. Ahora bien, \mathbf{v}' , y por consiguiente \mathbf{A} , depende sólo del radio vector \mathbf{r} (tomamos el origen en el centro de la esfera) y del parámetro \mathbf{u} ; ambos vectores son polares. Además, \mathbf{A} debe, evidentemente, ser una función lineal de \mathbf{u} . El único vector axial que puede construirse para un cuerpo con simetría total (la esfera) con dos vectores polares es el producto vectorial $\mathbf{r} \times \mathbf{u}$. De aquí que \mathbf{A} deba tener la forma $f(r)\mathbf{n} \times \mathbf{u}$, en donde $f(r)$ es una función escalar de \mathbf{r} y \mathbf{n} es un vector unidad en la dirección del radio vector. El producto $f(r)\mathbf{n}$ puede escribirse como un gradiente, $\operatorname{grad} f(r)$, de una determinada función $f(r)$, de modo que la forma general de \mathbf{A} es $\operatorname{grad} f \times \mathbf{u}$. De aquí que podamos escribir la velocidad \mathbf{v}' como

$$\mathbf{v}' = \operatorname{rot} [\operatorname{grad} f \times \mathbf{u}].$$

Puesto que \mathbf{u} es constante, $\operatorname{grad} f \times \mathbf{u} = \operatorname{rot} (\mathbf{f}\mathbf{u})$, de modo que

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{f}\mathbf{u}) + \mathbf{u}. \quad (20.4)$$

Para determinar la función f , utilizaremos la ecuación (20.3). Puesto que

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{f}\mathbf{u}) = (\operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta) \operatorname{rot} (\mathbf{f}\mathbf{u}) = -\Delta \operatorname{rot} (\mathbf{f}\mathbf{u}),$$

(20.3) toma la forma $\Delta^2 \operatorname{rot} (\mathbf{f}\mathbf{u}) = 0$, o sea, puesto que $\mathbf{u} = \text{constante}$,

$$\Delta^2(\operatorname{grad} f \times \mathbf{u}) = (\Delta^2 \operatorname{grad} f) \times \mathbf{u} = 0.$$

deduciéndose de esto que

$$\Delta^2 \operatorname{grad} f = 0. \quad (20.5)$$

Una primera integración da

$$\Delta^2 f = \text{constante},$$

Es fácil ver que la constante debe ser nula, puesto que la velocidad \mathbf{v} debe anularse en el infinito y lo mismo debe ocurrir con sus derivadas. La expresión $\Delta^2 f$ contiene cuatro derivadas de f , mientras que la velocidad se da en función de las derivadas segundas de f . Así pues, tenemos

$$\Delta^2 f \equiv \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \Delta f = 0.$$

De aquí

$$\Delta f = 2a/r + A.$$

La constante A debe ser nula si la velocidad ha de anularse en el infinito. A partir de $\Delta f = 2a/r$ obtenemos

$$f = ar + b/r. \quad (20.6)$$

Se omite la constante aditiva, puesto que carece de importancia (ya que la velocidad viene dada por las derivadas de f).

Al sustituir en (20.4), tenemos, después de un cálculo sencillo,

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - a \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r} + b \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u}}{r^3}. \quad (20.7)$$

Las constantes a y b han de determinarse mediante las condiciones límites: en la superficie de la esfera ($r = R$), $\mathbf{v} = 0$, es decir,

$$\mathbf{u} - a \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{R} + b \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u}}{R^3} = 0.$$

Puesto que esta ecuación debe ser válida para todo \mathbf{n} , los coeficientes de \mathbf{u} y $\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$ deben todos ellos anularse:

$$\frac{a}{R} + \frac{b}{R^3} - 1 = 0, \quad -\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3} = 0.$$

De aquí que $a = 3R/4$, $b = R^3/4$. Así pues, tenemos finalmente

$$f = \frac{3}{4}Rr + \frac{1}{4}R^3/r, \quad (20.8)$$

$$\mathbf{v} = -\frac{3}{4}R \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r} - \frac{1}{4}R^3 \frac{\mathbf{u} - 3\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r^3} + \mathbf{u}, \quad (20.9)$$

o bien, en componentes esféricas,

$$\begin{aligned} v_r &= u \cos \theta \left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right], \\ v_\theta &= -u \sin \theta \left[1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right]. \end{aligned} \quad (20.10)$$

Esto da la distribución de velocidades alrededor de la esfera móvil. Para determinar la presión, sustituiremos (20.4) en (20.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} p &= \eta \Delta \mathbf{v} = \eta \Delta \mathbf{rot} \mathbf{rot} (\mathbf{f}\mathbf{u}) \\ &= \eta \Delta (\mathbf{grad} \operatorname{div} (\mathbf{f}\mathbf{u}) - \mathbf{u} \Delta f). \end{aligned}$$

Pero $\Delta^2 f = 0$, y, por tanto,

$$\mathbf{grad} p = \mathbf{grad} [\eta \Delta \operatorname{div} (\mathbf{f}\mathbf{u})] = \mathbf{grad} (\eta \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \Delta f).$$

De aquí que

$$p = \eta \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \Delta f + p_0, \quad (20.11)$$

siendo p_0 la presión del fluido en el infinito. Sustituyendo f se tiene como expresión final

$$p = p_0 - \frac{3}{2}\eta \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{r^2} R. \quad (20.12)$$

Utilizando las fórmulas anteriores podemos calcular la fuerza \mathbf{F} ejercida sobre la esfera por el fluido móvil (o lo que es lo mismo, el arrastre sobre la esfera cuando se mueve a través del fluido). Para ello, tomaremos coordenadas esféricas con el eje polar paralelo a \mathbf{u} ; por simetría, todas las magnitudes son funciones únicamente de r y del ángulo polar θ . La fuerza \mathbf{F} es, evidentemente, paralela a la velocidad \mathbf{u} . Puede determinarse el valor de esta fuerza mediante (15.12). Tomando de esta fórmula las componentes normal y tangencial a la superficie de la fuerza ejercida sobre un elemento de la superficie de la esfera y proyectando estas componentes en la dirección de \mathbf{u} , encontramos

$$F = \oint (-p \cos \theta + \sigma'_{rr} \cos \theta - \sigma'_{r\theta} \sin \theta) df, \quad (20.13)$$

en donde la integración ha de realizarse sobre la totalidad de la superficie de la esfera.

Sustituyendo las expresiones (20.10) en las fórmulas

$$\sigma'_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \sigma'_{r\theta} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

[ver (15.17)], encontramos que en la superficie de la esfera

$$\sigma'_{rr} = 0, \quad \sigma'_{r\theta} = -(3\eta/2R)u \sin \theta,$$

mientras que la presión (20.12) es $p = p_0 - (3\eta/2R)u \cos \theta$. De aquí que la integral (20.13) se reduzca a $F = (3\eta u/2R) \int df$, o sea, finalmente,[†]

$$F = 6\pi R\eta u. \quad (20.14)$$

Esta fórmula (denominada *fórmula de Stokes*) da el arrastre que actúa sobre una esfera que se mueve lentamente en un fluido. Podemos observar que el arrastre es proporcional a la primera potencia de la velocidad y de la dimensión lineal del cuerpo.[‡]

[†] Previendo algunas aplicaciones posteriores, podemos mencionar que si se hacen los cálculos con la fórmula (20.7) para la velocidad (estando indeterminadas las constantes a y b), se tiene

$$F = 8\pi a\eta u. \quad (20.14a)$$

[‡] También puede calcularse el arrastre en el caso de un elipsoide de forma cualquiera y en movimiento lento. Las fórmulas correspondientes vienen dadas por H. LAMB, *Hidrodynamics*, 6.^a ed., § 339, Cambridge, 1932. Damos a continuación las expresiones límites correspondientes a un disco circular plano de radio R moviéndose perpendicularmente a su plano:

$$F = 16\eta Ru$$

y para un disco análogo moviéndose en su plano:

$$F = 32\eta Ru/3.$$

Esta dependencia del arrastre con la velocidad y la dimensión es válida para cuerpos que se mueven lentamente, aunque sean de otras formas. La dirección del arrastre sobre un cuerpo de forma arbitraria no es la misma que la de la velocidad; la forma general de la relación entre \mathbf{F} y \mathbf{u} puede escribirse

$$\mathbf{F}_t = a_{ik} u_k, \quad (20.15)$$

en donde a_{ik} es un tensor de rango dos independiente de la velocidad. Es importante señalar que este tensor es simétrico ($a_{ik} = a_{ki}$), resultado que es válido en la proximación lineal respecto a la velocidad y que es un caso particular de una ley general válida para el movimiento lento acompañado por procesos disipativos.[†]

La solución que acabamos de obtener para el flujo que rodea a una esfera no es válida a grandes distancias de ella, aunque el número de Reynolds sea pequeño. Con objeto de darse cuenta de esto estimaremos el valor del término $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, que despreciamos en (20.1). A grandes distancias la velocidad es \mathbf{u} . Se ve a partir de (20.9) que las derivadas de la velocidad a estas distancias son del orden de uR/r^2 . Así pues, $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ es del orden de $u^2 R/r^2$. Los términos retenidos en la ecuación (20.1), por ejemplo $(1/\rho) \nabla p$, son del orden de $\eta Ru/\rho r^3$ [ver ecuación (20.12)]. La condición

$$u\eta R/\rho r^3 \gg u^2 R/r^2$$

es válida únicamente a distancias $r \ll r/u$, siendo $r = \eta/\rho$. A distancias mayores, los términos que hemos omitido no pueden despreciarse legítimamente y la distribución de velocidades obtenida es incorrecta.

Para obtener la distribución de velocidades a distancias grandes del cuerpo, hemos de tener en cuenta el término $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ omitido en (20.1). Puesto que la velocidad \mathbf{v} es casi igual a \mathbf{u} a esta distancia, podemos poner aproximadamente $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ en lugar de $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$. Entonces encontramos para la velocidad, a distancias grandes, la ecuación lineal

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -(1/\rho) \nabla p + v \Delta \mathbf{v} \quad (20.16)$$

(C. W. OSEEN, 1910).

No nos detendremos aquí para dar la solución de esta ecuación en el caso de un flujo que rodea a una esfera,[‡] sino que simplemente mencionaremos el hecho de que la distribución de velocidades así obtenida puede utilizarse para deducir una fórmula más exacta para el arrastre sobre la esfera, en la

[†] Ver, por ejemplo, *Física Estadística*, § 120, Ed. Reverté, Barcelona.

[‡] Una descripción detallada de los cálculos en el caso de una esfera y un cilindro vienen dados en N. E. KOCHIN, I. A. KIBEL' y N. V. ROZE, *Theoretical Hydromechanics* (Teoreticheskaya gidromekhanika), parte 2, 3.^a ed., capítulo II, §§ 25-26, Moscow, 1948; H. LAMB, *Hydrodynamics*, 6.^a ed., §§ 342-3, Cambridge, 1932.

que se incluye el término siguiente del desarrollo del arrastre en potencias del número de Reynolds uR/ν . Esta fórmula es[†]

$$F = 6\pi\eta uR \left(1 + \frac{3uR}{8\nu} \right). \quad (20.17)$$

Finalmente, mencionaremos que, al resolver el problema del flujo que rodea a un cilindro infinito con la corriente principal perpendicular al eje del mismo, se ha utilizado la ecuación de Oseen desde el principio; en este caso, la ecuación (20.1) no tiene ninguna solución que satisfaga las condiciones límites en la superficie de cilindro y que al mismo tiempo se anule en el infinito. El arrastre por unidad de longitud del cilindro resulta ser

$$F = \frac{4\pi\eta u}{\frac{1}{2} - \gamma - \log(uR/4\nu)}, \quad (20.18)$$

en donde $\gamma \approx 0,577$ es la constante de Euler.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el movimiento de un fluido que ocupa el espacio situado entre dos esferas concéntricas de radio R_1, R_2 ($R_2 > R_1$), y que giran uniformemente alrededor de diámetros diferentes con velocidades angulares Ω_1, Ω_2 ; los números de Reynolds $\Omega_1 R_1^2 / \nu, \Omega_2 R_2^2 / \nu$ son pequeños en comparación con la unidad.

Solución. Para tener en cuenta la linealidad de las ecuaciones, puede considerarse el movimiento entre dos esferas en rotación como la superposición de dos movimientos obtenidos cuando una esfera está en reposo y la otra gira. Primero supondremos $\Omega_2 = 0$, es decir, que únicamente está girando la esfera interior. Es razonable suponer que la velocidad del fluido en todo punto está dirigida a lo largo de la tangente a una circunferencia contenida en un plano perpendicular al eje de rotación y con su centro sobre el eje. Para tener en cuenta la simetría axial, el gradiente de presiones en esta dirección es cero. De aquí que la ecuación del movimiento (20.10) resulte $\Delta v = 0$. El vector velocidad angular Ω_1 es un vector axial. Razonamientos semejantes a los dados previamente muestran que la velocidad puede escribirse como

$$\mathbf{v} = \text{rot}[f(r)\Omega_1] = \text{grad } f \times \Omega_1.$$

La ecuación del movimiento da entonces $\text{grad } \Delta f \times \Omega_1 = 0$. Puesto que el vector $\text{grad } \Delta f$ es paralelo al radio vector, y el producto vectorial $\mathbf{r} \times \Omega_1$ no puede ser nulo para un Ω_1 determinado y un radio \mathbf{r} arbitrario, debemos tener $\text{grad } \Delta f = 0$, de modo que

$$\Delta f = \text{constante.}$$

[†] A primera vista podría parecer que la ecuación de OSEEN, que no da correctamente la distribución de velocidades cerca de la esfera, no podría utilizarse para calcular la corrección al arrastre. Sin embargo, de hecho, la contribución a F , debida al movimiento del fluido próximo (en donde $u \ll v/r$), debe desarrollarse en potencias del vector u . El primer término de corrección no nulo en F que procede de esta contribución es, entonces, proporcional a $u^3 u$, es decir, resulta de segundo orden respecto al número de Reynolds; por tanto, no afecta a la corrección de primer orden de la fórmula (20.17). Con la fórmula de Oseen no pueden calcularse correcciones adicionales a la fórmula de Stokes.

Integrando, tenemos

$$f = ar^2 + \frac{b}{r}, \quad \mathbf{v} = \left(\frac{b}{r^3} - 2a \right) \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r}.$$

Se encuentran las constantes a y b mediante las condiciones de que $\mathbf{v} = 0$ para $r = R_2$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ para $r = R_1$, en donde $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r}$ es la velocidad de los puntos situados sobre la esfera en rotación. El resultado es

$$\mathbf{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r}.$$

La presión del fluido es constante ($p = p_0$). Análogamente, tenemos para el caso en el que la esfera exterior gira y la interior está en reposo ($\boldsymbol{\Omega}_1 = 0$)

$$\mathbf{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{r^3} \right) \boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{r}.$$

En el caso general en que ambas esferas giran, tenemos

$$\mathbf{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \left\{ \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r} + \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{r^3} \right) \boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{r} \right\}.$$

Si no existe la esfera exterior ($R_2 = \infty, \boldsymbol{\Omega}_2 = 0$), es decir, si tenemos simplemente una esfera de radio R que gira en un fluido infinito, entonces

$$\mathbf{v} = (R^3/r^3) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}.$$

Calculemos el momento de las fuerzas de rozamiento que actúan sobre la esfera en este caso. Si tomamos coordenadas esféricas con el eje polar paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$, tenemos $v_r = v_\theta = 0$, $v_\phi = v = (R^3 \Omega / r^2) \sin \theta$. La fuerza de rozamiento sobre la unidad de área de la esfera es

$$\sigma'_{r\phi} = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)_{r=R} = -3\eta \Omega \sin \theta.$$

El momento total sobre la esfera es

$$M = \int_0^\pi \sigma'_{r\phi} R \sin \theta \cdot 2\pi R^2 \sin \theta d\theta,$$

de aquí que encontramos

$$M = -8\pi\eta R^3 \Omega.$$

Si no existe la esfera interior, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{r}$, es decir, el fluido gira rígidamente con la esfera que lo rodea.

Problema 2. Determinar la velocidad de una gota esférica de fluido (de viscosidad η') moviéndose bajo la gravedad en un fluido de viscosidad η (W. RYBCZYNSKI, 1911).

Solución. Utilicemos un sistema de coordenadas en el cual esté en reposo la gota. Para el fluido exterior a la gota buscaremos de nuevo una solución de la ecuación (20.5) en la forma (20.6), de modo que la velocidad tenga la forma (20.7). Para el fluido en el interior de la gota, hemos de encontrar una solución que no tenga una singularidad en $r = 0$ (y deben también permanecer finitas las segundas derivadas de f , que determinan la velocidad). Esta solución es

$$f = \frac{1}{4} Ar^2 + \frac{1}{8} Br^4,$$

y la velocidad correspondiente es

$$\mathbf{v} = -A\mathbf{u} + Br^2[\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - 2\mathbf{u}].$$

En la superficie de la esfera † deben satisfacerse las condiciones siguientes. Deben ser cero las componentes de la velocidad normal hacia el exterior (v_r) y hacia el interior (v_i) de la gota:

$$v_{i,r} = v_{e,r} = 0.$$

Debe ser continua la componente tangencial de la velocidad:

$$v_{t,\theta} = v_{e,\theta},$$

lo mismo debe ocurrir con las componentes $\sigma_{r\theta}$ del tensor de tensiones:

$$\sigma_{i,r\theta} = \sigma_{e,r\theta}.$$

La condición de que las componentes del tensor de tensiones σ_{rr} , sean iguales no es necesario escribirlos; simplemente servirían para determinar la velocidad requerida u , que se encuentra de modo más simple del modo indicado a continuación. A partir de las cuatro condiciones anteriores obtenemos cuatro ecuaciones para las constantes a , b , A , B , cuyas soluciones son

$$a = R \frac{2\eta + 3\eta'}{4(\eta + \eta')}, \quad b = R^3 \frac{\eta'}{4(\eta + \eta')}, \quad A = -BR^2 = \frac{\eta}{2(\eta + \eta')}.$$

Según (20.14a), tenemos para el arrastre

$$F = 2\pi u\eta R(2\eta + 3\eta')/(\eta + \eta').$$

Cuando $\eta' \rightarrow \infty$ (lo que corresponde a una esfera maciza o sólida) esta fórmula se transforma en la de Stokes. En el límite $\eta' \rightarrow 0$ (que corresponde a una burbuja gaseosa) tenemos $F = 4\pi u\eta R$, es decir, el arrastre es dos tercios del correspondiente a una esfera sólida.

IGualando F a la fuerza de la gravedad que actúa sobre la gota, $4/3\pi R^3(\rho - \rho')g$, tenemos

$$u = \frac{2R^2g(\rho - \rho')(\eta + \eta')}{3\eta(2\eta + 3\eta')}.$$

Problema 3. Dos discos circulares planos paralelos (de radio R) están uno sobre el otro separados una pequeña distancia; el espacio entre ellos está lleno con un cierto fluido. Los discos se aproximan a una velocidad constante u , desplazando al fluido. Determinar la resistencia a su movimiento (O. REYNOLDS).

Solución. Tomemos coordenadas cilíndricas con el origen en el centro del disco inferior, que se supone fijo. El flujo es simétrico axialmente, y puesto que la capa de fluido es delgada, predominantemente radial: $v_z \ll v_r$ y también $\partial v_r / \partial r \ll \partial v_r / \partial z$. De aquí que las ecuaciones del movimiento se conviertan en

$$\eta \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

† Podemos despreciar la variación de forma de la gota durante su movimiento, puesto que esta variación es de un orden superior de una magnitud pequeña. Sin embargo, debe recordarse que, con objeto de que la gota móvil sea de hecho esférica, las fuerzas debidas a la tensión superficial en su periferia deben superar a las fuerzas producidas por las diferencias de presión, que tienden a hacer que la gota deje de ser esférica. Esto significa que debemos tener $\eta u/R \ll \alpha/R$, en donde α es el coeficiente de tensión superficial, o sea, al sustituir $u \sim R^2 gp/\eta$,

$$R \ll \sqrt{(\alpha/pg)}.$$

con las condiciones límites

$$\text{en } z = 0: \quad v_r = v_z = 0;$$

$$\text{en } z = h: \quad v_r = 0, \quad v_z = -u;$$

$$\text{en } r = R: \quad p = p_0,$$

en donde h es la distancia entre dos discos y p_0 la presión externa. A partir de las ecuaciones (1) tenemos

$$v_r = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial r} z(z-h).$$

Integrando la ecuación (2) respecto a z , obtenemos

$$u = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^h rv_r dz = -\frac{h^3}{12\eta r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right),$$

de aquí que

$$p = p_0 + \frac{3\eta u}{h^3} (R^2 - r^2).$$

La resistencia total al disco móvil es

$$F = 3\pi\eta u R^4 / 2h^3.$$

§ 21. Estela laminar

Cuando tenemos un flujo estacionario de un fluido alrededor de un cuerpo sólido, el flujo a distancias elevadas detrás del cuerpo tiene determinadas características que pueden estudiarse independientemente de la forma particular del cuerpo.

Designemos mediante \mathbf{U} la velocidad constante de la corriente incidente; tomemos la dirección de \mathbf{U} como eje x , con el origen dentro del cuerpo. La velocidad del fluido real en un punto cualquiera puede escribirse como $\mathbf{U} + \mathbf{v}$; \mathbf{v} se anula en el infinito.

Resulta que, a distancias grandes detrás del cuerpo, la velocidad \mathbf{v} es notablemente diferente de cero sólo en una región relativamente estrecha cercana al eje x . Esta región, denominada *estela laminar*,[†] es alcanzada por partículas del fluido que se mueven a lo largo de líneas de corriente que pasan muy cerca del cuerpo. De aquí que el flujo en la estela sea esencialmente rotacional. Por otra parte, la viscosidad apenas tiene influencia en los puntos de las líneas de corriente que no pasan cerca del cuerpo, y la vorticidad, que es cero en la corriente incidente, permanece prácticamente nula sobre esta línea de corriente como si se tratase de un fluido ideal. Así pues, el flujo a distancias grandes del cuerpo puede considerarse como un flujo potencial en todas partes, excepto en la estela.

[†] En contraposición a la estela turbulenta; ver § 36.

Deduciremos a continuación unas fórmulas que relacionan las propiedades del flujo en la estela con las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. El impulso total transportado por el fluido a través de una superficie cerrada cualquiera que rodea el cuerpo es igual a la integral del tensor densidad de flujo del impulso extendida a dicha superficie, $\oint \Pi_{ik} df_k$. Las componentes del tensor Π_{ik} son

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho(U_i + v_i)(U_k + v_k).$$

Escribamos la presión en la forma $p = p_0 + p'$, en donde p_0 es la presión en el infinito. La integración del término constante $p_0\delta_{ik} + \rho U_i U_k$ da cero, puesto que la integral vectorial $\oint df$ respecto a una superficie cerrada es nula. También se anula la integral $U_i \oint \rho v_k df_k$: como la masa total del fluido en el volumen considerado es constante, el flujo de masa total $\oint \rho v \cdot df$ a través de la superficie que rodea el volumen debe ser cero. Finalmente, la velocidad v cuando estamos lejos del cuerpo es pequeña en comparación con U . De aquí puede despreciarse el término $\rho v_i v_k$ en Π_{ik} en comparación con $\rho U_i v_i$ si la superficie en cuestión está suficientemente lejos del cuerpo. Así pues, el flujo del impulso total es

$$\oint (p'\delta_{ik} + \rho U_k v_i) df_k.$$

Supongamos ahora que el volumen de fluido que nos concierne es el volumen comprendido entre dos planos infinitos $x = \text{constante}$, uno de ellos lejos delante del cuerpo y el otro lejos detrás de él. Cuando se calcula el flujo total del impulso, la integral sobre la superficie «lateral» en el infinito es nula (puesto que $p' = v = 0$ en el infinito) y, por consiguiente, es suficiente integrar sólo en los dos planos indicados. El flujo del impulso obtenido así es evidentemente la diferencia entre el flujo del impulso total que entra a través del plano delantero y el que sale a través del plano trasero. Pero esta diferencia es también la cantidad de impulso que pasa en la unidad de tiempo desde el fluido hacia el cuerpo, es decir, la fuerza \mathbf{F} que actúa sobre dicho cuerpo.

Así pues, las componentes de la fuerza \mathbf{F} son

$$F_x = \left(\iint_{x=x_0} - \iint_{x=x_1} \right) (p' + \rho U v_x) dy dz,$$

$$F_y = \left(\iint_{x=x_0} - \iint_{x=x_1} \right) \rho U v_y dy dz,$$

$$F_z = \left(\iint_{x=x_0} - \iint_{x=x_1} \right) \rho U v_z dy dz,$$

en donde la integración se extiende a los planos infinitos $x = x_1$ (bastante detrás del cuerpo) y $x = x_2$ (muy delante de él). Consideremos primero la expresión correspondiente a F_x .

En el exterior de la estela tenemos un flujo potencial y, por consiguiente, es válida la ecuación de Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\rho(U + v)^2 = \text{constante} \equiv p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2$$

o sea, despreciando el término $\frac{1}{2}\rho v^2$ en comparación con $\rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{v}$,

$$p' = -\rho U v_x.$$

Vemos que en esta aproximación se anula el integrando en F_x en todos los puntos en el exterior de la estela. En otras palabras, la integral respecto al plano $x = x_2$ (que está delante del cuerpo y que no corta a la estela) es nula y la integral extendida al plano $x = x_1$ sólo es necesario realizarla en el área cubierta por la sección recta de la estela. Sin embargo, dentro de ésta la variación de presión p' es del orden de ρv^2 , es decir, pequeña en comparación con $\rho U v_x$. Así pues, obtenemos, en definitiva, el resultado de que el arrastre que actúa sobre el cuerpo es

$$F_x = -\rho U \iint v_x \, dy \, dz, \quad (21.1)$$

en donde la integración se extiende al área de la sección recta de la estela bastante detrás del cuerpo. Como es natural, la velocidad v_x de la estela es negativa: el fluido se mueve más lentamente que si estuviese ausente el cuerpo. Debe llamarse la atención al hecho de que la integral en (21.1) da el déficit del caudal de fluido a través de la sección de la estela respecto al valor que tendría en ausencia del cuerpo.

Consideremos ahora la fuerza (cuyas componentes son F_y , F_z) que tiende a mover transversalmente el cuerpo. Esta fuerza se denomina *sustentación*. En el exterior de la estela, en donde tenemos flujo potencial, podemos escribir $v_y = \partial \phi / \partial y$, $v_z = \partial \phi / \partial z$; siendo cero la integral extendida al plano $x = x_2$, que no corta a la estela:

$$\iint v_y \, dy \, dz = \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} \, dy \, dz = 0, \quad \iint \frac{\partial \phi}{\partial z} \, dy \, dz = 0,$$

puesto que $\phi = 0$ en el infinito. Por consiguiente, encontramos para la sustentación

$$F_y = -\rho U \iint v_y \, dy \, dz, \quad F_z = -\rho U \iint v_z \, dy \, dz. \quad (21.2)$$

De nuevo hay que realizar las integraciones en estas fórmulas sólo respecto al área de la sección recta de la estela. Si el cuerpo tiene un eje de simetría (que no necesariamente debe ser una simetría axial completa), y si el flujo es paralelo a este eje, entonces el flujo que rodea el cuerpo tiene también un eje de simetría. En este caso, la sustentación es cero, como es natural.

Volvamos al flujo de la estela. Una estimación de los valores de los diversos términos de la ecuación de Navier-Stokes muestra que el término $\nu \Delta v$ puede despreciarse, en general, a una distancia r del cuerpo tal que $rU/\nu \gg 1$ (comparar con la deducción de la condición opuesta que se estableció al principio del § 20); estas son las distancias en las que el flujo en el interior de la estela puede considerarse como un flujo potencial. Sin embargo, no es posible despreciar este término en el interior de la estela ni siquiera a esta distancia, puesto que las derivadas transversales $\partial^2 v / \partial y^2$, $\partial^2 v / \partial z^2$ son grandes en comparación con $\partial^2 v / \partial x^2$.

El término $(v \cdot \text{grad})v$ en la ecuación de Navier-Stokes es del orden de magnitud $(U + v) \partial v / \partial x \sim Uv/x$ en la estela. El término $\nu \Delta v$ es del orden de $\nu \partial^2 v / \partial y^2 \sim \nu v / Y^2$, en donde Y designa la anchura de la estela, es decir, es del orden de magnitud de la distancia respecto al eje x , en la cual la velocidad v tiende marcadamente a cero. Si son comparables ambas magnitudes, tenemos

$$Y \sim \sqrt{(vx/U)}. \quad (21.3)$$

Esta cantidad es, de hecho, pequeña en comparación con x , por la condición supuesta $Ux/\nu \gg 1$. Así pues, la anchura de la estela laminar aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada de la distancia respecto al cuerpo.

Con objeto de determinar cómo disminuye la velocidad al aumentar x en la estela, volvamos a la fórmula (21.1). La región de integración tiene un área del orden de Y^2 . De aquí que pueda estimarse la integral como $F_x \sim \rho U v Y^2$, y utilizando la relación (21.3) obtenemos

$$v \sim F_x / \rho vx. \quad (21.4)$$

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el flujo en la estela laminar cuando existe tanto arrastre como sustentación.

Solución. Escribiendo en la ecuación de Navier-Stokes la velocidad en la forma $\mathbf{U} + \mathbf{v}$ y omitiendo los términos cuadráticos en \mathbf{v} (lejos del cuerpo), obtenemos

$$U \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = -\mathbf{grad} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} \right);$$

también hemos despreciado el término $\partial^2 \mathbf{v} / \partial x^2$ en $\Delta \mathbf{v}$. Busquemos una solución de la forma $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, en donde \mathbf{v}_1 satisface a

$$U \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial z^2} \right).$$

El término \mathbf{v}_2 , que aparece debido al término $-\mathbf{grad}(p/\rho)$ de la ecuación original, puede tomarse como el gradiente $\mathbf{grad} \Phi$ de un escalar. Puesto que las derivadas respecto a x , lejos del cuerpo, son pequeñas en comparación con las derivadas respecto a y y z ,

podemos con la misma aproximación despreciar el término $\partial\Phi/\partial x$ en v_x , es decir, considerar que $v_x = v_{1x}$.

Así pues, tenemos para v_x la ecuación

$$U \frac{\partial v_x}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right).$$

Esta ecuación es formalmente la misma que la ecuación bidimensional de la conducción térmica, teniendo en lugar del tiempo la expresión x/U , y habiendo sustituido la conductividad termométrica por la viscosidad ν . La solución que disminuye al aumentar y y z (para un x fijo) y que da una estela infinitamente estrecha cuando $x \rightarrow 0$ (en esta aproximación se consideran las dimensiones del cuerpo como pequeñas) es (ver § 51)

$$v_x = - \frac{F_x}{4\pi\rho\nu} \frac{1}{x} e^{-U(y^2+z^2)/4\nu x}. \quad (1)$$

El coeficiente constante en esta fórmula se expresa en función del arrastre mediante la fórmula (21.1), en la cual la integración respecto a y y z puede extenderse hasta $\pm\infty$ para tener en cuenta la disminución rápida de v_x . Si sustituimos las coordenadas cartesianas por coordenadas esféricas r, θ, ϕ con el eje polar a lo largo del eje x , entonces la región de la estela [$\sqrt{(y^2+z^2)} \ll x$] corresponde a $\theta \ll 1$. En estas coordenadas la fórmula (1) se transforma en

$$v_x = - \frac{F_x}{4\pi\rho\nu} \frac{1}{r} e^{-Ur\theta^2/4\nu}. \quad (1')$$

El término $\partial\Phi/\partial x$ [con Φ dado por la fórmula (3) que veremos a continuación], que hemos omitido, daría un término en v_x , que disminuye más rápidamente, según $1/r^2$.

v_{1y} y v_{1z} deben tener la misma forma que (1). Tomemos la dirección de la sustentación como el eje y (de modo que $F_z = 0$). De acuerdo con (21.2) tenemos, puesto que $\Phi = 0$ en el infinito,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_y dy dz &= \iint \left(v_{1y} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) dy dz \\ &= \iint v_{1y} dy dz = -F_y/\rho U, \\ \iint v_{1z} dy dz &= 0. \end{aligned}$$

Determinando las constantes en v_{1y} y v_{1z} a partir de estas condiciones, tenemos

$$v_y = - \frac{F_y}{4\pi\rho\nu} \frac{1}{x} e^{-U(y^2+z^2)/4\nu x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z}. \quad (2)$$

Para determinar la función Φ procederemos del modo siguiente. Según la ecuación de continuidad,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \approx \partial v_y / \partial y + \partial v_z / \partial z = 0;$$

y al sustituir en (2), tendremos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = - \frac{\partial v_{1y}}{\partial y}.$$

Derivando esta ecuación respecto a x y utilizando la ecuación que satisface v_{1y} , se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_{1y}}{\partial x} \right) \\ &= - \frac{\nu}{U} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial v_{1y}}{\partial y}. \end{aligned}$$

De aquí que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = - \frac{\nu}{U} \frac{\partial v_{1y}}{\partial y}.$$

Finalmente, sustituyendo la expresión correspondiente a v_{1y} e integrando respecto a x , tenemos

$$\Phi = - \frac{F_y}{2\pi\rho U} \frac{y}{y^2 + z^2} [e^{-U(y^2 + z^2)/4\nu x} - 1]. \quad (3)$$

La constante de integración se escoge de modo que Φ permanece finita cuando $y = z = 0$. En coordenadas esféricas (medido el ángulo acimutal ϕ respecto al plano xy)

$$\Phi = - \frac{F_y}{2\pi\rho U} \frac{\cos\phi}{r\theta} [e^{-Ur\theta^2/4\nu} - 1]. \quad (3')$$

Se ve de (2) y (3) que v_x y v_z , a diferencia de v_y , contienen términos que disminuyen sólo como $1/\theta^2$ cuando se mueven alejándose del «eje» de la estela, en comparación con aquéllos que disminuyen con mayor rapidez exponencialmente con θ (para un r dado).

Los resultados cualitativos (21.3) y (21.4) están de acuerdo con las fórmulas anteriores como era de esperar. Si no existe sustentación, el flujo en la estela tiene simetría axial.

Problema 2. Determinar el flujo en el exterior de una estela lejos del cuerpo.

Solución. Fuera de la estela podemos suponer que el flujo es potencial. Puesto que solamente estamos interesados en los términos del potencial Φ que disminuyen con menor rapidez con la distancia, buscaremos una solución de la ecuación de Laplace $\Delta\Phi = 0$ en forma de suma de dos términos:

$$\Phi = \frac{a}{r} + \frac{\cos\phi}{r} f(\theta),$$

de los cuales el primero tiene una simetría central y pertenece a la fuerza F_z , mientras que el segundo tiene simetría respecto al plano xy y pertenece a la fuerza F_y .

Utilizando la expresión correspondiente a $\Delta\Phi$ en coordenadas esféricas, obtenemos para la función $f(\theta)$ la ecuación

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{df}{d\theta} \right) - \frac{f}{\sin\theta} = 0.$$

La solución de esta ecuación finita cuando $\theta \rightarrow \pi$ es $f = b \cot g 1/2\theta$. Debe determinarse el coeficiente b de modo que nos dé el valor correcto de F_y . Sin embargo, es más sencillo utilizar el hecho de que en el intervalo $\sqrt{(\nu/U)r} \ll \theta \ll 1$, esta parte de Φ debe ser la misma que la expresión

$$\Phi = \frac{F_y}{2\pi\rho U} \frac{\cos\phi}{r\theta},$$

obtenida de la fórmula (3'), problema 1, para Φ dentro de la estela. De aquí que $b = F_x/4\pi\rho U$.

Para determinar el coeficiente a , observemos que el flujo de masa total que atraviesa una esfera S de radio grande r es igual a cero, como sucede para cualquier superficie cerrada. El flujo de entrada por unidad de tiempo a través de la parte S_0 de S que intersecta a la estela es

$$-\iint_{S_0} v_x dy dz = F_x/\rho U.$$

De aquí que la misma cantidad del líquido debe estar saliendo del resto de la superficie de la esfera, es decir, debemos tener

$$\oint_{S-S_0} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = F_x/\rho U.$$

Como S_0 es pequeño en comparación con S , podemos poner

$$\oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \oint_S \mathbf{grad} \Phi \cdot d\mathbf{f} = -4\pi a = F_x/\rho U,$$

de aquí que $a = -F_x/4\pi\rho U$.

La solución completa viene dada por la suma de ambas expresiones:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\rho Ur} (-F_x + F_y \cos\phi \cot\frac{1}{2}\theta), \quad (1)$$

que da el flujo en todo punto exterior a la estela y lejos del cuerpo. El potencial disminuye al aumentar la distancia proporcionalmente a $1/r$; la velocidad \mathbf{v} , por tanto, disminuye como $1/r^2$. Si no existe sustentación, el flujo en el exterior de la estela tiene simetría esférica.

§ 22. La viscosidad de las suspensiones

Un fluido en el que están suspendidas numerosas partículas sólidas finas (formando una suspensión) puede considerarse como un medio homogéneo, si nos referimos a fenómenos cuyas longitudes características son grandes en comparación con el tamaño de las partículas. Dicho medio tiene una viscosidad efectiva η que es diferente de la viscosidad η_0 del fluido en que están las partículas en suspensión. El valor de η puede calcularse para el caso en que la concentración de las partículas es pequeña (es decir, su volumen total es pequeño en comparación con el del fluido). Los cálculos son relativamente sencillos en el caso de partículas esféricas (A. EINSTEIN, 1906).

En primer lugar es necesario considerar el efecto que tendrá sobre un flujo o corriente con gradiente de velocidad constante la acción de un solo glóbulo sólido, sumergido en dicho fluido. Supongamos que el fluido sin perturbar está descrito por una distribución de velocidades lineal

$$v_{0i} = \alpha_{ik} x_k, \quad (22.1)$$

siendo α_{ik} un tensor simétrico constante. La presión del fluido es constante:

$$p_0 = \text{constante},$$

y en el futuro tomaremos p_0 como cero, es decir, mediremos únicamente las desviaciones respecto a este valor constante. Si el fluido es incompresible ($\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0$), la suma de los elementos diagonales del tensor α_{ik} debe ser nula:

$$\alpha_{ii} = 0. \quad (22.2)$$

Supongamos ahora que tenemos una pequeña esfera de radio R situada en el origen. Designaremos la velocidad alterada del fluido por $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$; \mathbf{v}_1 debe anularse en el infinito, pero cerca de la esfera \mathbf{v}_1 no es pequeña en comparación con \mathbf{v}_0 . Resulta obvio que, debido a la simetría de la corriente, la esfera permanecerá en reposo, de modo que la condición límite es $\mathbf{v} = 0$ para $r = R$.

La solución buscada de las ecuaciones del movimiento (20.1) a (20.3) puede obtenerse de una vez a partir de la solución (20.4), con la función f dada por (20.6), si observamos que las derivadas espaciales de esta solución son también soluciones. En el caso presente buscamos una solución que dependa de las componentes del tensor α_{ik} de modo paramétrico (y no del vector \mathbf{u} como en el caso del § 20). Dicha solución es

$$\mathbf{v}_1 = \operatorname{rot} \operatorname{rot} [(\boldsymbol{\alpha} \cdot \operatorname{grad})f], \quad p = \eta_0 \alpha_{ik} \partial^2 f / \partial x_i \partial x_k,$$

en donde $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \operatorname{grad})f$ designa un vector cuyas componentes son $\alpha_{ik} \partial f / \partial x_k$. Desarrollando estas expresiones y determinando las constantes a y b en la función $f = ar + b/r$ de modo que satisfaga las condiciones límites en la superficie de la esfera, obtenemos las fórmulas siguientes para la velocidad y la presión:

$$v_{1t} = \frac{5}{2} \left(\frac{R^5}{r^4} - \frac{R^3}{r^2} \right) \alpha_{kl} n_l n_k n_l - \frac{R^5}{r^4} \alpha_{ik} n_k, \quad (22.3)$$

$$p = -5\eta_0 \frac{R^5}{r^3} \alpha_{ik} n_i n_k, \quad (22.4)$$

siendo \mathbf{n} un vector unidad en la dirección del radio vector.

Volviendo ahora al problema de determinar la viscosidad efectiva de una suspensión, calcularemos el valor medio (promediado respecto al volumen) del tensor de densidad de flujo del impulso Π_{ik} , el cual, en la aproximación lineal respecto a la velocidad, es el mismo que el tensor de tensiones — σ_{ik} :

$$\bar{\sigma}_{ik} = (1/V) \int \sigma_{ik} dV.$$

En este caso la integración puede realizarse sobre el volumen V de una esfera de radio grande, que luego se amplía hasta el infinito.

En primer lugar, tenemos la identidad

$$\bar{\sigma}_{ik} = \eta_0 \left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}} \right) - \bar{p} \delta_{ik} + \frac{1}{V} \int \left(\sigma_{ik} - \eta_0 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + p \delta_{ik} \right) dV. \quad (22.5)$$

El integrando del segundo miembro es cero, excepto dentro de las esferas sólidas; puesto que se supone pequeña la concentración de la suspensión, puede calcularse la integral para una sola esfera como si las otras estuvieran ausentes y luego multiplicar por la concentración c de la suspensión (que es el número de esferas por unidad de volumen). El cálculo directo de esta integral exigiría un estudio de las tensiones internas en las esferas. Sin embargo, podemos soslayar esta dificultad transformando la integral de volumen en una integral de superficie extendida sobre una esfera infinitamente alejada, que está totalmente dentro del fluido. Para ello, observemos que la ecuación del movimiento $\partial\sigma_{ii}/\partial x_i = 0$ conduce a la identidad

$$\sigma_{ik} = \partial(\sigma_{uxk})/\partial x_i;$$

de aquí que la transformación de la integral de volumen en una integral de superficie dé

$$\sigma_{ik} = \eta_0 \left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}} \right) + c \oint \{ \sigma_{uxk} df_i - \eta_0(v_i df_k + v_k df_i) \}.$$

Hemos omitido el término en \bar{p} , puesto que la presión media es necesariamente cero; \bar{p} es un escalar que debe venir dado por una combinación lineal de las componentes α_{ik} , y el único escalar que cumple esta condición es $\alpha_{ii} = 0$.

Al calcular la integral extendida a una esfera de radio muy grande, sólo necesitan retenerse en la expresión (22.3) los términos del orden de $1/r^2$ para obtener la velocidad. Un cálculo sencillo da el valor de la integral que es

$$c\eta_0 \cdot 20\pi R^3 \{ 5\alpha_{im}\overline{n_i n_k n_l n_m} - \alpha_{il}\overline{n_k n_l} \},$$

en donde la barra designa un promedio respecto a las direcciones del vector unidad \mathbf{n} . Efectuando la operación de promediar,[†] se obtiene, finalmente,

$$\sigma_{ik} = \eta_0 \left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}} \right) + 5\eta_0\alpha_{ik} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 c. \quad (22.6)$$

El cociente del segundo término al primero determina la corrección relativa requerida para dar la viscosidad efectiva de la suspensión. Si estamos interesados únicamente en correcciones del primer orden, podemos tomar el primer término como si fuese $2\eta_0\alpha_{ik}$. Entonces se obtiene como valor de la viscosidad efectiva de la suspensión

$$\eta = \eta_0(1 + \frac{5}{3}\phi), \quad (22.7)$$

en donde $\phi = 4/3\pi R^3 c$ es el cociente del volumen total de las esferas al volumen total de la suspensión, que es pequeño.

[†] Los valores medios de los productos de los componentes del vector unidad son tensores simétricos que sólo pueden formarse a partir del tensor unidad δ_{ki} . Se obtiene fácilmente

$$\overline{n_i n_k} = \delta_{ik},$$

$$\overline{n_i n_k n_l n_m} = \frac{1}{15}(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}).$$

§ 23. Soluciones exactas de las ecuaciones del movimiento en el caso de un fluido viscoso

Si los términos no lineales en las ecuaciones del movimiento de un fluido viscoso no se anulan idénticamente, la resolución de estas ecuaciones ofrece graves dificultades, y solamente pueden obtenerse soluciones exactas en un número muy pequeño de casos. Además, todavía no resulta posible el llevar a cabo un estudio completo del flujo estacionario en el caso de un fluido viscoso en todo el espacio que rodea a un cuerpo en el límite de números de Reynolds muy grandes. Aunque dicho flujo no permanece estacionario en la práctica, como veremos, la solución del problema resulta ser de gran interés metodológico.[†]

Daremos a continuación varios ejemplos de soluciones exactas de las ecuaciones del movimiento en el caso de un fluido viscoso.

(1) Un disco plano infinito sumergido en un fluido viscoso gira uniformemente alrededor de su eje. Determinar el movimiento del fluido producido por este movimiento del disco (T. von KÁRMÁN, 1921).

Tomemos coordenadas cilíndricas, escogiendo el plano del disco como plano $z = 0$. Supongamos que el disco gira alrededor del eje z con una velocidad angular Ω . Consideremos el volumen ilimitado de fluido en el semiespacio $z > 0$. Las condiciones límites son

$$\begin{aligned} v_r &= 0, & v_\phi &= \Omega r, & v_z &= 0 \quad \text{para } z = 0, \\ v_r &= 0, & v_\phi &= 0 & & \text{para } z = \infty. \end{aligned}$$

La velocidad axial v_z no se anula cuando $z \rightarrow \infty$, pero tiende hacia un valor negativo constante determinado por las ecuaciones del movimiento. La razón es que, como el fluido se mueve radialmente alejándose del eje de rotación, especialmente cerca del disco, debe existir un flujo vertical constante desde el infinito con objeto de satisfacer la ecuación de continuidad. Busquemos una solución de las ecuaciones del movimiento de la forma

$$\begin{aligned} v_r &= r\Omega F(z_1); & v_\phi &= r\Omega G(z_1); & v_z &= \sqrt{(\nu\Omega)H(z_1)}; \\ p &= -\rho\nu\Omega P(z_1), \quad \text{donde } z_1 = \sqrt{(\Omega/\nu)z}. \end{aligned} \tag{23.1}$$

En esta distribución de velocidades, las velocidades radial y azimutal son proporcionales a la distancia respecto al eje de rotación, mientras que v_z es constante en cada plano horizontal.

Sustituyendo en la ecuación de Navier-Stokes y en la ecuación de continuidad, obtenemos las ecuaciones siguientes para las funciones F , G , H y P :

$$\begin{aligned} F^2 - G^2 + F'H &= F'', & 2FG + G'H &= G'', \\ HH' &= P' + H'', & 2F + H' &= 0; \end{aligned} \tag{23.2}$$

[†] Oseen ha desarrollado para este problema la «teoría de la viscosidad evanescente», pero resulta insatisfactoria porque se basa en una simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes. Por lo que se refiere a la teoría de Prandtl de la capa límite (§ 39), ésta no resuelve el problema en todo el fluido.

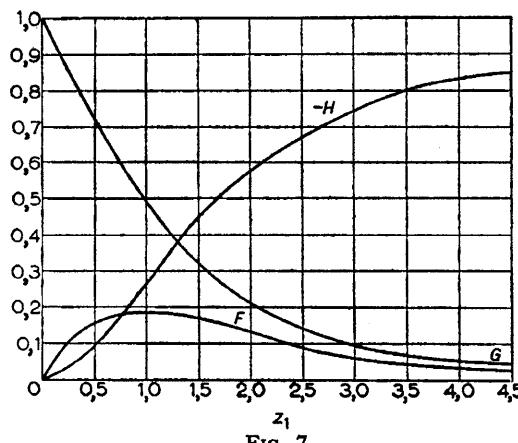


FIG. 7

el símbolo prima designa derivación respecto a z_1 . Las condiciones límites son

$$\begin{aligned} F &= 0, & G &= 1, & H &= 0 \quad \text{para } z_1 = 0. \\ F &= 0, & G &= 0 & & \text{para } z_1 = \infty. \end{aligned} \tag{23.3}$$

Por tanto, hemos reducido la resolución del problema a la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con una sola variable; esto puede conseguirse numéricamente.[†] La figura 7 muestra las funciones F , G y $-H$ obtenidas de este modo. El valor límite de H cuando $z_1 \rightarrow \infty$ es -0.886 ; en otras palabras, la velocidad del fluido en el infinito es $v_z(\infty) = -0.886\sqrt(\nu\Omega)$.

La fuerza de rozamiento que actúa sobre la unidad de área del disco perpendicularmente a su radio es $\sigma_{z\phi} = \eta(\partial v_\phi / \partial z)_{z=0}$. Despreciando los efectos de los bordes, podemos escribir el momento de las fuerzas de rozamiento que actúan sobre un disco de radio R grande, pero finito, como

$$M = 2 \int_0^R 2\pi r^2 \sigma_{z\phi} dr = \pi R^4 \rho \sqrt(\nu\Omega^3) G'(0).$$

El factor 2 delante de la integral aparece debido a que el disco tiene dos caras expuestas al fluido. Un cálculo numérico de la función G conduce a la fórmula

$$M = -1,94 R^4 \rho \sqrt(\nu\Omega^3). \tag{23.4}$$

[†] También se ha llevado a cabo la integración numérica en otro problema semejante, en el que el fluido gira uniformemente en el infinito y el disco está en reposo (U. T. BÖDEWADT, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 20, 241, 1940).

- (2) Determinar el flujo estacionario que se produce entre dos paredes planas que intersectan formando un ángulo α (la figura 8 muestra una sección recta de los planos); el fluido fluye hacia fuera procedente de la línea de intersección de ambos planos (G. HAMEL, 1916).

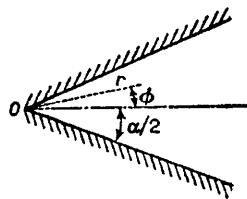


FIG. 8

Tomemos coordenadas cilíndricas r, z, ϕ , con el eje z a lo largo de la línea de intersección de los planos (el punto O en la figura 8) y midiendo el ángulo ϕ como se ve en la figura 8. El flujo es uniforme en la dirección z y como es natural supondremos que es totalmente radial, es decir,

$$v_\phi = v_z = 0, \quad v_r = v(r, \phi).$$

Las ecuaciones (15.16) dan

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right), \quad (23.5)$$

$$-\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{2\nu}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \phi} = 0, \quad (23.6)$$

$$\partial(rv)/\partial r = 0.$$

Se ve a partir de la última de estas ecuaciones que rv es una función solamente de ϕ . Introduciendo la función

$$u(\phi) = rv/6\nu, \quad (23.7)$$

obtenemos a partir de (23.6)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \phi} = \frac{12\nu^2}{r^2} \frac{du}{d\phi},$$

de aquí que

$$\frac{p}{\rho} = \frac{12\nu^2}{r^2} u(\phi) + f(r).$$

Sustituyendo esta expresión en (23.5), tenemos

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + 4u + 6u^2 = \frac{1}{6\nu^2} r^3 f'(r),$$

de la cual vemos que, puesto que el segundo miembro depende sólo de ϕ y el primero únicamente de r , cada uno de ellos debe ser una constante que llamaremos $2C_1$. Así pues, $f'(r) = 12r^2C_1/r^3$, de aquí que $f(r) = -6r^2C_1/r^2 +$ constante, y así tenemos para la presión

$$\frac{p}{\rho} = \frac{6\nu^2}{r^2}(2u - C_1) + \text{constante.} \quad (23.8)$$

Para $u(\phi)$ resulta la ecuación

$$u'' + 4u + 6u^2 = 2C_1,$$

que, al multiplicar por u' y realizar una integración, nos da

$$\frac{1}{2}u'^2 + 2u^2 + 2u^3 - 2C_1u - 2C_2 = 0.$$

A partir de ella resulta la expresión

$$2\phi = \pm \int \frac{du}{\sqrt{(-u^3 - u^2 + C_1u + C_2)}} + C_3, \quad (23.9)$$

que nos da la dependencia pedida de la velocidad respecto a ϕ ; la función $u(\phi)$ puede expresarse mediante funciones elípticas. Se determinan las tres constantes C_1 , C_2 y C_3 a partir de las condiciones límites

$$u(\pm \frac{1}{2}\alpha) = 0 \quad (23.10)$$

y de la condición según la cual pasa la misma masa de fluido Q en la unidad de tiempo a través de cualquier sección en la que $r = \text{constante}$:

$$Q = \rho \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} vr d\phi = 6\nu\rho \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} ud\phi. \quad (23.11)$$

Q puede ser positivo o negativo. Si $Q > 0$, la línea de intersección de los planos es una fuente, es decir, el fluido emerge del vértice del ángulo: se denomina *flujo en un canal divergente*. Si $Q < 0$, la línea de corte es un sumidero y tenemos *flujo en un canal convergente*. El cociente $|Q|/\nu\rho$ es adimensional y juega el papel del número de Reynolds en el problema que se trata.

Estudiaremos en primer lugar el flujo convergente ($Q < 0$). Para analizar la solución (23.9)-(23.11) haremos las hipótesis, que justificaremos posteriormente, de que el flujo es simétrico respecto al plano $\phi = 0$ [es decir, $u(\phi) = u(-\phi)]$, y que la función $u(\phi)$ es negativa en todos los puntos (es decir, la velocidad está dirigida siempre hacia el vértice) y disminuye monótonamente desde $u = 0$ para $\phi = \pm \frac{1}{2}\alpha$ hasta $u = -u_0 < 0$ para $\phi = 0$, de modo que u_0 es el valor máximo de $|u|$. Entonces para $u = -u_0$ debemos tener $du/d\phi = 0$; de aquí se deduce que $u = -u_0$ es un cero de la expresión cúbica bajo el radical contenido en el integrando de (23.9). Por consiguiente, podemos escribir

$$-u^3 - u^2 + C_1u + C_2 = (u + u_0)\{-u^2 - (1 - u_0)u + q\},$$

siendo q otra constante. Así pues,

$$2\phi = \pm \int_{-u_0}^u \frac{du}{\sqrt{[(u+u_0)\{-u^2-(1-u_0)u+q\}]}} \quad (23.12)$$

Las constantes u_0 y q vienen determinadas mediante las condiciones

$$\alpha = \int_{-u_0}^0 \frac{du}{\sqrt{[(u+u_0)\{-u^2-(1-u_0)u+q\}]}} \quad (23.13)$$

$$\frac{1}{\theta} R = \int_{-u_0}^0 \frac{u du}{\sqrt{[(u+u_0)\{-u^2-(1-u_0)u+q\}]}}$$

($R = |Q|/\nu\rho$); la constante q debe ser positiva, puesto que en otro caso estas integrales serían complejas. Puede demostrarse que las dos ecuaciones que acabamos de exponer tienen soluciones u_0 y q para cualquier valor de R y $\alpha < \pi$. En otras palabras, el flujo simétrico convergente (figura 9) es posible para cualquier ángulo de apertura α y cualquier número de Reynolds. Consideraremos con más detalle el flujo correspondiente a un valor muy grande de R . Este valor corresponde a u_0 grande. Escribiendo (12.12) (para $\phi > 0$) como

$$2(\frac{1}{2}\alpha - \phi) = \int_u^0 \frac{du}{\sqrt{[(u+u_0)\{-u^2-(1-u_0)u+q\}]}}$$

vemos que el integrando es pequeño en todo el intervalo de integración si u no es próximo a u_0 . Esto significa que $|u|$ puede diferir apreciablemente de u_0 solamente en el caso de que ϕ esté cercano a $\pm \alpha/2$, es decir, en la proximi-

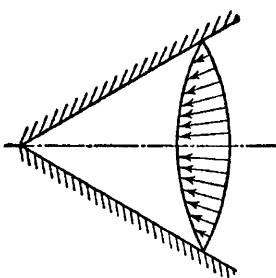


FIG. 9

dad inmediata de las paredes.[†] En otras palabras, tenemos $u \approx \text{constante} = -u_0$ para casi todos los ángulos ϕ , y además $u_0 = R/6\alpha$, como vemos a partir de las ecuaciones (23.13). La propia velocidad v es $|Q|/\rho ar$, dando un flujo potencial no viscoso con una velocidad independiente del ángulo e inversamente proporcional a r . Así pues, para números de Reynolds grandes, el flujo en un canal convergente difiere muy poco del flujo potencial de un fluido ideal. El efecto de la viscosidad aparece sólo en una capa muy estrecha cerca de las paredes, en donde la velocidad disminuye rápidamente hacia cero a partir del valor correspondiente al flujo potencial (figura 10).

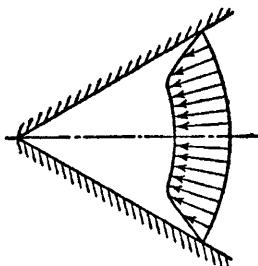


FIG. 10

Supongamos ahora que $Q > 0$, de modo que tenemos un flujo divergente. En principio, podemos suponer de nuevo que el flujo es simétrico respecto al plano $\phi = 0$, y que $u(\phi)$ (en donde ahora $u > 0$) varía monótonamente desde cero para $\phi = \pm \alpha/2$ hasta $u_0 > 0$ para $\phi = 0$. En lugar de (23.13) tenemos ahora

$$\alpha = \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{[(u_0 - u)(u^2 + (1 + u_0)u + q)]}}, \quad (23.14)$$

$$\frac{1}{8}R = \int_0^{u_0} \frac{u du}{\sqrt{[(u_0 - u)(u^2 + (1 + u_0)u + q)]}}.$$

Si consideramos que u está determinado, entonces α incrementa monótonamente cuando q disminuye y toma su valor mayor para $q = 0$:

$$\alpha_{\max} = \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{[u(u_0 - u)(u + u_0 + 1)]}}.$$

[†] La cuestión que puede plantearse es cómo puede dejar de ser pequeña la integral, aunque $u \approx -u_0$. La respuesta es que, para u_0 muy grande, una de las raíces de $-u^2 - (1 - u_0)u + q = 0$ está próxima a $-u_0$, de modo que el radicando tiene dos ceros casi coincidentes, siendo, por tanto, «casi divergente» la integral completa para $u = -u_0$.

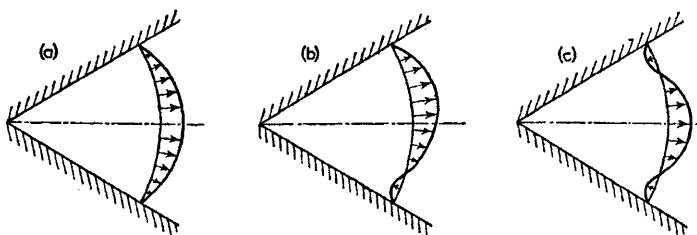


FIG. 11

Por otra parte, es fácil ver que para q dado, α es una función de u_0 con disminución monótona. De aquí se deduce que u_0 es una función decreciente monótonamente de q para un α dado, de modo que su mayor valor corresponde a $q = 0$ y viene expresado por la ecuación anterior. El máximo $R = R_{\max}$ corresponde al máximo u_0 . Utilizando las sustituciones $k^2 = u_0/(1 + 2u_0)$, $u = u_0 \cos^2 x$, podemos escribir la relación entre R_{\max} y α en la forma paramétrica

$$\alpha = 2\sqrt{(1-2k^2)} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 x)}}, \quad (23.15)$$

$$R_{\max} = -6\alpha \frac{1-k^2}{1-2k^2} + \frac{12}{\sqrt{(1-2k^2)}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1-k^2 \sin^2 x)} dx.$$

Así pues, el flujo simétrico divergente en todos los puntos (figura 11a) para un ángulo en la apertura dado, es posible únicamente en el caso en que los números de Reynolds no superen un valor definido. Cuando $\alpha \rightarrow \pi$ ($k \rightarrow 0$), $R_{\max} \rightarrow 0$; cuando $\alpha \rightarrow 0$ ($k \rightarrow 1/\sqrt{2}$), R_{\max} tiende a infinito como $18.8/\alpha$.

Para $R > R_{\max}$ la hipótesis del flujo simétrico, divergente en todas partes, resulta sin justificar, puesto que las condiciones (23.14) no pueden ser satisfechas. En el margen de ángulos $-\alpha/2 \leq \phi \leq \alpha/2$ la función $u(\phi)$ debe ahora tener o máximos o mínimos. Los valores de $u(\phi)$ correspondientes a estos extremos deben ser de nuevo ceros del polinomio que está bajo el signo radical. Por consiguiente, resulta claro que el trinomio $u^2 + (1+u_0)u + q$ (con $u_0 > 0$, $q > 0$) debe tener dos raíces negativas reales en el margen mencionado, de modo que el radicando puede escribirse como $(u_0 - u)(u + u_0')(u + u_0'')$, en donde $u_0 > 0$, $u_0' > 0$, $u_0'' > 0$; supongamos $u_0' < u_0''$. La función $u(\phi)$ puede variar en el intervalo $u_0 \geq u \geq -u_0'$, correspondiendo el valor $u = u_0$ a un máximo positivo de $u(\phi)$, y $u = -u_0'$ a un mínimo negativo. Sin hacer ningún estudio detallado de las soluciones obtenidas por este procedimiento, conviene mencionar que para $R > R_{\max}$ aparece una solución en la cual la velocidad tiene un máximo y un mínimo, siendo el flujo asimétrico respecto al plano $\phi = 0$ (figura 11b). Cuando R aumenta aún más, aparece una solu-

ción simétrica con un mínimo y dos máximos (figura 11c), y así sucesivamente. Por consiguiente, en todas estas soluciones existen regiones tanto de flujo hacia dentro como hacia fuera (aunque, como es natural, el caudal total Q es positivo). Cuando $R \rightarrow \infty$, el número de máximos y mínimos alternativos aumenta sin límite, de modo que no existe una solución límite definida. Podemos resaltar que en el caso de flujo divergente cuando $R \rightarrow \infty$ la solución no tiende, por consiguiente, a la solución de las ecuaciones de Euler, como ocurría en el caso del flujo convergente. Finalmente, puede mencionarse que cuando R aumenta, el flujo divergente estacionario del tipo descrito resulta inestable en cuanto R supera a R_{\max} , y en la práctica se produce un flujo no estacionario o turbulento (capítulo III).

(3) Determinar el flujo de un chorro que emerge del extremo de un tubo estrecho y se introduce en un espacio infinito lleno con el fluido — *chorro sumergido* (L. LANDAU, 1943).

Tomemos coordenadas esféricas r, θ, ϕ , con el eje polar en la dirección del chorro en su punto de emergencia y con este punto como origen. El flujo es simétrico respecto al eje polar, de modo que $v_\phi = 0$ y v_θ, v_r son funciones de r y θ solamente. A través de cualquier superficie cerrada que rodea el origen debe pasar el mismo flujo de impulso total (el «impulso del chorro») y eso en particular debe ocurrir también a través de superficies que estén infinitamente alejadas. Para que esto sea así, la velocidad debe ser inversamente proporcional a r , de modo que

$$v_r = F(\theta)/r, \quad v_\theta = f(\theta)/r, \quad (23.16)$$

en donde F y f son unas funciones determinadas de θ únicamente. La ecuación de continuidad es

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \sin \theta) = 0.$$

De aquí que

$$F(\theta) = -df/d\theta - f \cot \theta. \quad (23.17)$$

Las componentes $\Pi_{r\phi}, \Pi_{\theta\phi}$ del tensor de densidad de flujo del impulso en el chorro se anulan idénticamente por simetría. Admitamos que las componentes $\Pi_{\theta\theta}$ y $\Pi_{\phi\phi}$ también se anulan; se justificará esta hipótesis cuando obtengamos una solución que satisfaga todas las condiciones necesarias. Utilizando las expresiones (15.17) para el componente del tensor σ_{ik} , y las fórmulas (23.16), (23.17), podemos ver fácilmente que la relación

$$\sin^2 \theta \Pi_{r\theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin^2 \theta (\Pi_{\phi\phi} - \Pi_{\theta\theta})]$$

es válida entre los componentes del tensor de densidad de flujo del impulso en el chorro. De aquí se deduce que $\Pi_{r\theta} = 0$. Por tanto, solamente el compo-

nente Π_{rr} es no nulo, variando en la forma $1/r^2$. Es fácil ver que se satisfacen automáticamente las ecuaciones del movimiento $\partial\Pi_{ik}/\partial x_k = 0$.

A continuación, escribamos

$$(\Pi_{\theta\theta} - \Pi_{\phi\phi})/\rho = (f^2 + 2\nu f \cot \theta - 2\nu f')/r^2 = 0,$$

o sea,

$$d(1/f)/d\theta + (1/f)\cot \theta + 1/2\nu = 0.$$

La solución de esta ecuación es

$$f = -2\nu \operatorname{sen} \theta / (A - \cos \theta), \quad (23.18)$$

y entonces a partir de (23.17)

$$F = 2\nu \left\{ \frac{A^2 - 1}{(A - \cos \theta)^2} - 1 \right\}. \quad (23.19)$$

Se encuentra la distribución de presiones mediante la ecuación

$$\Pi_{\theta\theta}/\rho = p/\rho + f(f + 2\nu \cot \theta)/r^2 = 0,$$

que da

$$p = \frac{4\nu r^2 (A \cos \theta - 1)}{r^2 (A - \cos \theta)^2}. \quad (23.20)$$

Puede calcularse la constante A en función del impulso del chorro, es decir, del flujo del impulso total del mismo. Este flujo es igual a la integral extendida a la superficie de una esfera

$$P = \oint \Pi_{rr} \cos \theta df = 2\pi \int_0^\pi r^2 \Pi_{rr} \cos \theta \operatorname{sen} \theta d\theta.$$

El valor de Π_{rr} viene dado por

$$\frac{1}{\rho} \Pi_{rr} = \frac{4\nu^2}{r^2} \left\{ \frac{(A^2 - 1)^2}{(A - \cos \theta)^4} - \frac{A}{A - \cos \theta} \right\},$$

y un cálculo de la integral nos da

$$P = 16\pi\nu^2\rho A \left\{ 1 + \frac{4}{3(A^2 - 1)} - \frac{1}{2} A \log \frac{A+1}{A-1} \right\}. \quad (23.21)$$

Las fórmulas (23.16)-(23.21) dan la solución del problema.[†]

[†] La solución obtenida es exacta para un chorro que se considera que procede de una fuente puntual. Si se tienen en cuenta las dimensiones finitas de la boca del tubo, la solución resulta ser el primer término de un desarrollo en potencias del cociente entre estas dimensiones y la distancia r a la boca del tubo. Esta es la razón por la que el resultado es cero, si se calcula mediante la solución anterior el flujo de masa total que atraviesa una superficie cerrada que rodea al origen. Cuando se consideran en el desarrollo mencionado otros términos se obtiene un flujo de masa no nulo; ver Yu. B. RUMER, *Priladnaya matematika i mehanika*, 16, 255, 1952.

El chorro laminar sumergido con momento angular no nulo ha sido estudiado por L. G. LOYTSIANSKI (*ibid.*, 17, 3, 1953).

Las líneas de corriente se determinan mediante la ecuación $dr/v_r = rd\theta/v_\theta$, cuya integración nos da $r \operatorname{sen}^2 \theta / (A - \cos \theta) = \text{constante}$. La figura 12 muestra las líneas de corriente del chorro (para $A > 1$).

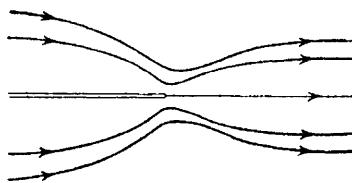


FIG. 12

Consideremos dos casos límites: un chorro débil (impulso pequeño P) y un chorro intenso (P grande). Cuando $P \rightarrow 0$, la constante A tiende a infinito: según (23.21) tenemos que $P = 16\pi r^2 \rho / A$. En este caso, tenemos para la velocidad

$$v_\theta = -P \operatorname{sen} \theta / 8\pi \nu r, \quad v_r = P \cos \theta / 4\pi \nu r.$$

Cuando $P \rightarrow \infty$ (chorro fuerte[†]), A tiende a ser la unidad: (23.21) da $A = 1 + \alpha^2/2$, en donde $\alpha = 32\pi r^2 \rho / 3P$. Para ángulos grandes ($\theta \sim 1$), la velocidad viene dada por

$$v_\theta = -(2\nu/r) \cot \frac{1}{2}\theta, \quad v_r = -2\nu/r,$$

pero en el caso de ángulos pequeños ($\theta \sim \alpha$), tenemos

$$v_\theta = -4\nu\theta/(\alpha^2 + \theta^2), \quad v_r = 8\nu\alpha^2/(\alpha^2 + \theta^2)^2.$$

§ 24. Movimiento oscilante en un fluido viscoso

Cuando un cuerpo sólido sumergido en un fluido viscoso se pone a oscilar, el flujo que se crea tiene un cierto número de propiedades características. Con objeto de estudiarlas es conveniente empezar con un ejemplo sencillo pero típico. Supongamos que un fluido incompresible está limitado por una superficie plana infinita que realiza una oscilación armónica simple en su propio plano, con frecuencia ω . Queremos encontrar el movimiento resultante del fluido. Consideraremos la superficie sólida como plano yz y la región del fluido como $x > 0$; se toma el eje y en la dirección de la oscilación. La velocidad u de la superficie oscilante es una función del tiempo, de la forma $A \cos(\omega t + \alpha)$. Es conveniente escribir esta expresión como la parte real de una magnitud compleja:

$$u = \operatorname{re}(u_0 e^{-i\omega t}),$$

[†] Debe recordarse, no obstante, que el flujo en un chorro suficientemente intenso es realmente turbulento (§ 35).

en donde la constante $u_0 = Ae^{-i\omega t}$ es, en general, compleja, pero que siempre puede hacerse real mediante una selección adecuada del origen de los tiempos.

Siempre que en los cálculos intervengan sólo operaciones lineales respecto a la velocidad u , podemos omitir el signo i y proceder como si u fuese complejo, tomando la parte real del resultado final. Así pues, escribamos

$$u_y = u = u_0 e^{-i\omega t}. \quad (24.1)$$

La velocidad del fluido debe satisfacer la condición límite $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ para $x = 0$, es decir, $v_x = v_z = 0$, $v_y = u$.

Es evidente, a partir de la simetría del problema, que todas las magnitudes dependerán sólo de la coordenada x y del tiempo t . En la ecuación de continuidad $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ y, por consiguiente, $\partial v_x / \partial x = 0$, de donde $v_x = \text{constante} = 0$, debido a la condición límite. Puesto que todas las magnitudes son independientes de las coordenadas y y z , tendremos $(\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{v} = v_x \partial \mathbf{v} / \partial x$, y puesto que v_x es cero se deduce que $(\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{v} = 0$ idénticamente. La ecuación del movimiento (15.7) se transforma en

$$\partial \mathbf{v} / \partial t = -(1/\rho) \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (24.2)$$

Esta ecuación es lineal. Su componente x es $\partial p / \partial x = 0$, es decir, $p = \text{constante}$.

Además, es evidente por simetría que la velocidad \mathbf{v} en todo punto tiene la dirección y . Para $v_y = v$ tenemos, según (24.2),

$$\partial v / \partial t = \nu \partial^2 v / \partial x^2, \quad (24.3)$$

que equivale a la ecuación de conducción térmica monodimensional. Busquemos una solución a esta ecuación que sea periódica en x y t , de la forma

$$v = u_0 e^{i(kx - \omega t)},$$

con una amplitud compleja u_0 , de modo que $v = u$ para $x = 0$. Sustituyendo en (24.3), encontramos $i\omega = \nu k^2$; de aquí resulta

$$k = \sqrt{(i\omega/\nu)} = \pm (i+1)\sqrt{(\omega/2\nu)},$$

de modo que la velocidad v es

$$v = u_0 e^{-\sqrt{(\omega/2\nu)}x} e^{i[\sqrt{(\omega/2\nu)}x - \omega t]}; \quad (24.4)$$

hemos tomado k como si tuviese una parte imaginaria positiva, puesto que en otro caso la velocidad aumentaría sin límites en el interior del fluido, lo cual es físicamente imposible.

La solución obtenida representa una onda transversal: su velocidad $v_y = v$ es perpendicular a la dirección de propagación. La propiedad más importante de esta onda es que se ve rápidamente amortiguada en el interior del fluido: la amplitud disminuye exponencialmente cuando aumenta la distancia x a la superficie sólida.[†]

[†] En una distancia de una longitud de onda la amplitud disminuye en un factor de $e^{2\pi} \approx 540$.

Así pues, pueden presentarse ondas transversales en un fluido viscoso, pero se ven rápidamente amortiguadas cuando se alejan de la superficie sólida, cuyo movimiento genera las ondas.

La distancia δ , en la cual la amplitud decae en un factor de e , se denomina *profundidad de penetración* de la onda. Vemos a partir (24.4) que

$$\delta = \sqrt{(2\nu/\omega)}. \quad (24.5)$$

La profundidad de penetración disminuye, por tanto, al aumentar la frecuencia, pero crece con la viscosidad cinemática del fluido.

Calculemos la fuerza de rozamiento que actúa sobre la unidad de área del plano que oscila en el fluido viscoso. La dirección de esta fuerza coincide evidentemente con la del eje y y es igual a la componente $\sigma_{xy} = \eta \partial v_y / \partial x$ del tensor de tensiones; el valor de la derivada debe tomarse en la propia superficie, es decir, para $x = 0$. Sustituyendo (24.4), obtenemos

$$\sigma_{xy} = \sqrt{(\frac{1}{2}\omega\eta\rho)}(i-1)u. \quad (24.6)$$

Suponiendo u_0 real y tomando la parte real de (24.6), tenemos

$$\sigma_{xy} = -\sqrt{(\omega\eta\rho)}u_0 \cos(\omega t + \frac{1}{4}\pi).$$

Sin embargo, la velocidad de la superficie oscilante es $u = u_0 \cos \omega t$. Por consiguiente, existe una diferencia de fase entre la velocidad y la fuerza de rozamiento.[†]

También es sencillo calcular el promedio (temporal) de la disipación de energía en el problema anterior. Esto puede hacerse mediante la fórmula general (16.3); sin embargo, en este caso particular es más sencillo calcular la disipación que se pide directamente como el trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento. La energía disipada por unidad de tiempo y por unidad de área del plano oscilante es igual al valor medio del producto de la fuerza σ_{xy} por la velocidad $u_y = u$:

$$-\overline{\sigma_{xy}u} = \frac{1}{2}u_0^2\sqrt{(\frac{1}{2}\omega\eta\rho)}. \quad (24.7)$$

Este valor es proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia de las oscilaciones y a la raíz cuadrada de la viscosidad.

También puede darse una solución explícita del problema de un fluido puesto en movimiento mediante una superficie plana que se mueve en su

[†] En el caso de oscilaciones de un semiplano (paralelamente a su borde) existe una fuerza de rozamiento adicional debida a los efectos de los bordes. El problema del movimiento de un fluido viscoso producido por oscilaciones de un semiplano, e incluso el problema más general de las oscilaciones de una cuña de ángulo cualquiera, puede resolverse mediante una clase de soluciones de la ecuación $\Delta f + k^2 f = 0$, utilizada por A. SOMMERFELD en la teoría de la difracción por una cuña; ver, por ejemplo, M. von LAUE, *Interferenz und Beugung elektromagnetischer Wellen* (*Interferencia y difracción de ondas electromagnéticas*), *Handbuch der Experimentalphysik*, 18, 333, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1928.

Aquí damos sólo un resultado, para referencia posterior: el aumento de la fuerza de rozamiento sobre un semiplano, originado por el efecto de los bordes, puede considerarse como el resultado de aumentar el área del semiplano trasladando el borde una distancia $\delta = \sqrt{(\nu/2\omega)/2}$.

plano de acuerdo con cualquier ley $u = u(t)$. No nos entretendremos en hacer los cálculos correspondientes ahora, puesto que la solución requerida de la ecuación (24.3) es formalmente idéntica a la del problema análogo de la teoría de la conducción térmica que estudiaremos en § 52 [la solución es la fórmula (52.15)]. En particular, la fuerza de rozamiento sobre la unidad de área de la superficie viene dada por

$$\sigma_{xy} = \sqrt{\frac{\eta\rho}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{du(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}}; \quad (24.8)$$

ver (52.16).

Consideremos a continuación el caso general de un cuerpo oscilante de forma arbitraria. En el caso considerado anteriormente de un plano oscilante, el término $(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})\mathbf{v}$ de la ecuación del movimiento del fluido era idénticamente nulo. Esto no ocurre, como es natural, en el caso de una superficie de forma arbitraria. Sin embargo, supondremos que ese término es pequeño en comparación con los demás, de modo que pueda despreciarse. Las condiciones necesarias para que sea válido este procedimiento se examinarán a continuación.

Empezaremos, por tanto, como antes a partir de la ecuación lineal (24.2). Tomaremos el rotacional de ambos miembros; el término $\text{rot grad } p$ se anula idénticamente, dando

$$\partial(\text{rot } \mathbf{v})/\partial t = \nu \Delta \text{rot } \mathbf{v}, \quad (24.9)$$

es decir, $\text{rot } \mathbf{v}$ satisface una ecuación de condición térmica. Sin embargo, hemos visto anteriormente que una ecuación de este tipo da una disminución exponencial de la magnitud que la satisface. Por consiguiente, podemos decir que la vorticidad disminuye hacia el interior del fluido. En otras palabras, el movimiento del fluido producido por las oscilaciones del cuerpo es rotacional en una determinada capa alrededor del cuerpo, mientras que a distancias mayores varía rápidamente, convirtiéndose en un flujo potencial. La profundidad de penetración del flujo rotacional es del orden de $\delta \sim \sqrt{(\nu/\omega)}$.

Ahora son posibles dos casos límites importantes: la magnitud δ puede ser grande o pequeña en comparación con las dimensiones del cuerpo oscilante. Supongamos que l es una magnitud del orden de esta dimensión. En primer lugar, consideraremos el caso $\delta \gg l$; esto implica que $l^2\omega \ll \nu$. Además de esta condición supondremos también que el número de Reynolds es pequeño. Si a es la amplitud de las oscilaciones, la velocidad del cuerpo es del orden de $a\omega$. El número de Reynolds para el movimiento en cuestión es, por tanto, $\omega al/\nu$. Supondremos entonces que

$$l^2\omega \ll \nu, \quad \omega al/\nu \ll 1. \quad (24.10)$$

Este es el caso de frecuencias bajas de oscilación, lo que a su vez significa que la velocidad varía sólo lentamente con el tiempo y, por tanto, que pode-

mos despreciar la derivada $\partial \mathbf{v} / \partial t$ en la ecuación general del movimiento. El término $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, por otra parte, puede despreciarse debido a que el número de Reynolds es pequeño.

La ausencia del término $\partial \mathbf{v} / \partial t$ de la ecuación del movimiento significa que el flujo es estacionario. Así pues, para $\delta \gg l$, puede considerarse el flujo como estacionario en un instante dado cualquiera. Esto significa que el flujo en dicho instante es el que aparecería si el cuerpo se estuviese moviendo uniformemente con su velocidad instantánea. Si, por ejemplo, estamos considerando las oscilaciones de una esfera sumergida en el fluido, de una frecuencia que satisface las desigualdades (24.10) (siendo ahora l el radio de la esfera), entonces podemos decir que el arrastre sobre la esfera será el dado por la fórmula de Stokes (20.14) para el caso de un movimiento uniforme de la esfera con números de Reynolds pequeños.

Consideremos, a continuación, el caso opuesto, en el que $l \gg \delta$. Con objeto de que el término $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ sea de nuevo despreciable, es necesario que la amplitud de las oscilaciones sea pequeña en comparación con las dimensiones del cuerpo:

$$l^2 \omega \gg v, \quad a \ll l; \quad (24.11)$$

En este caso, lo cual debe resaltarse, no es necesario que sea pequeño el número de Reynolds. La desigualdad anterior se obtiene estimando el valor de $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. El operador $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ designa una derivación en la dirección de la velocidad. Sin embargo, cerca de la superficie del cuerpo la velocidad es casi tangencial. En la dirección tangencial la velocidad varía apreciablemente sólo en distancias del orden de la dimensión del cuerpo, de aquí que

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \sim v^2/l \sim a^2 \omega^2/l,$$

puesto que la propia velocidad es del orden de $a\omega$. Sin embargo, la derivada $\partial \mathbf{v} / \partial t$, es del orden de $v\omega \sim a\omega^2$. Comparando ambas expresiones, vemos que

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \ll \partial \mathbf{v} / \partial t$$

si $a \ll l$. Los términos $\partial \mathbf{v} / \partial t$ y $v \Delta \mathbf{v}$ se ve fácilmente entonces que son del mismo orden.

A continuación podemos estudiar la naturaleza del flujo que rodea un cuerpo oscilante cuando se cumplen las condiciones (24.11). En una capa delgada próxima a la superficie del cuerpo el flujo es rotacional, pero en el resto del fluido tenemos un flujo potencial.[†] De aquí que, excepto en la capa próxima

[†] En el caso de oscilaciones de una superficie plana, no sólo disminuye exponencialmente con el aumento de la distancia característica el rot \mathbf{v} , sino también la propia \mathbf{v} . Esto se debe a que el plano oscilante no desplaza al fluido y, por tanto, el que está alejado del plano permanece en reposo. Cuando las oscilaciones las realiza un cuerpo de otra forma cualquiera, el fluido se ve desplazado y entonces realiza un movimiento en el que la velocidad disminuye apreciablemente sólo a distancias del orden de las dimensiones del propio cuerpo.

al cuerpo, el flujo en todos los demás puntos viene dado por las ecuaciones
 $\text{rot } \mathbf{v} = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0.$ (24.12)

De aquí resulta que $\Delta \mathbf{v} = 0$, y la ecuación de Navier-Stokes se reduce a la ecuación de Euler. Por consiguiente, el flujo es ideal en todas partes, excepto en la capa superficial. Puesto que esta capa es delgada, al resolver las ecuaciones (24.12) para determinar el flujo del resto del fluido deberemos tomar como condiciones límites aquéllas que deben satisfacerse en las superficies del cuerpo, es decir, que la velocidad del fluido es igual a la del cuerpo. Sin embargo, las soluciones de las ecuaciones del movimiento para un fluido ideal no pueden satisfacer estas condiciones. Entonces podemos exigir únicamente que se cumpla la condición correspondiente para la componente normal a la superficie de la velocidad del fluido.

Aunque las ecuaciones (24.12) son inaplicables en la capa superficial del fluido, la distribución de velocidades obtenida al resolverlas satisface la condición límite necesaria para la componente de velocidad normal y, por consiguiente, carece de propiedades significativas la variación real de esta componente cerca de la superficie. Se podría hallar la componente tangencial resolviendo la ecuación (24.12) y así se encuentra que tiene valores diferentes a la componente de velocidad correspondiente del cuerpo, aunque estas componentes de velocidad deberían ser también iguales. De aquí que la componente de velocidad tangencial debe variar rápidamente en la capa superficial. Se determina fácilmente la naturaleza de esta variación. Consideremos una porción cualquiera de la superficie del cuerpo, de dimensión grande en comparación con δ , pero pequeña en comparación con la dimensión del cuerpo. Puede considerarse dicha parte como aproximadamente plana y, por consiguiente, podemos utilizar los resultados obtenidos anteriormente para una superficie plana. Supongamos que el eje x está dirigido a lo largo de la normal a la parte considerada y que el eje y es paralelo a la componente de velocidad tangencial de la superficie en dicho punto. Designaremos por v_y la componente tangencial de la velocidad del fluido relativa al cuerpo; v_y debe anularse en la superficie. Finalmente, sea $v_0 e^{-i\omega t}$ el valor de v_y que se encuentra al resolver las ecuaciones (24.12). A partir de los resultados obtenidos al principio de esta sección, podemos decir que en la capa superficial la cantidad v_y tenderá hacia cero cuando nos acercamos a la superficie de acuerdo con la ley

$$v_y = v_0 e^{-i\omega t} [1 - e^{-(1-i)x\sqrt{(\omega/2\nu)}}]. \quad (24.13)$$

Finalmente, la cantidad total de energía disipada en la unidad de tiempo vendrá dada por la integral

$$\bar{E}_{\text{kin}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\eta\rho\omega\right)} \oint |v_0|^2 \, df \quad (24.14)$$

extendida a toda la superficie del cuerpo oscilante.

En los problemas al final de esta sección calcularemos el arrastre sobre varios cuerpos que oscilan dentro de un fluido viscoso. En este momento haremos las siguientes consideraciones generales respecto a estas fuerzas. Escribiendo la velocidad del cuerpo en forma compleja $u = u_0 e^{-i\omega t}$, obtenemos una fuerza de arrastre F proporcional a la velocidad u , y también compleja: $F = \beta u$, en donde $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ es una constante compleja. Esta expresión puede escribirse como la suma de dos términos con coeficientes reales:

$$F = (\beta_1 + i\beta_2)u = \beta_1 u - \beta_2 \dot{u}/\omega, \quad (24.15)$$

Uno de ellos es proporcional a la velocidad u y el otro a la aceleración \dot{u} .

El promedio temporal de la disipación de energía viene dado por el producto medio del arrastre por la velocidad, en donde, como es natural, debemos primero tomar las partes reales de las expresiones dadas anteriormente, es decir, $u = \frac{1}{2}(u_0 e^{-i\omega t} + u_0^* e^{i\omega t})$ y $F = \frac{1}{2}(u_0 \beta e^{-i\omega t} + u_0^* \beta^* e^{i\omega t})$. Observando que los valores medios de $e^{\pm 2i\omega t}$ son nulos, tenemos

$$\overline{Fu} = \frac{1}{4}(\beta + \beta^*)|u_0|^2 = \frac{1}{2}\beta_1|u_0|^2. \quad (24.16)$$

Así pues, vemos que la disipación de energía surge únicamente de la parte real de β ; la parte correspondiente de la fuerza de arrastre (24.15), proporcional a la velocidad, puede denominarse la *parte disipativa*. La otra parte del arrastre, proporcional a la aceleración y determinada por la parte imaginaria de β , no origina disipación de energía y puede denominarse *parte inercial*.

Son válidas consideraciones semejantes para el momento de las fuerzas sobre un cuerpo que realiza oscilaciones de rotación en un fluido viscoso.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la fuerza de rozamiento sobre cada uno de los dos planos paralelos entre los cuales existen una capa de fluido viscoso, cuando uno de ellos oscila en su propio plano.

Solución. Busquemos una solución de la ecuación (24.3) de la forma†

$$v = (A \operatorname{sen} kx + B \cos kx)e^{-i\omega t}$$

y determinemos A y B mediante las condiciones $v = u = u_0 e^{-i\omega t}$ para $x = 0$ y $v = 0$ cuando $x = h$, siendo h la distancia entre los planos. El resultado es

$$v = u \frac{\operatorname{sen} k(h-x)}{\operatorname{sen} kh}.$$

La fuerza de rozamiento por área unidad sobre el plano móvil es

$$P_{1x} = \eta(\partial v / \partial x)_{x=0} = -\eta k u \cot kh,$$

† En todos los problemas de esta sección, δ designa la magnitud (24.5):

$$\delta = \sqrt{(2\nu/\omega)}, \quad \text{y} \quad k = (1+i)/\delta.$$

mientras que la correspondiente al plano fijo es

$$P_{2x} = -\eta(\partial v/\partial x)_{x=h} = \eta k u \operatorname{cosec} kh,$$

sobreentendiéndose que se trata de las partes reales de todas las magnitudes.

Problema 2. Determinar la fuerza de rozamiento sobre un plano oscilante cubierto por una capa de fluido de espesor h , cuya superficie superior está libre.

Solución. La condición límite en el plano sólido es $v = u$ para $x = 0$, y la correspondiente a la superficie libre es $\sigma_{xy} = \eta \partial v / \partial x = 0$ para $x = h$. Así hallamos la velocidad

$$v = u \frac{\cos k(h-x)}{\cos kh}.$$

La fuerza de rozamiento es

$$P_x = \eta(\partial v/\partial x)_{x=0} = \eta k u \operatorname{tg} kh.$$

Problema 3. Un disco plano de radio grande R realiza unas oscilaciones de rotación de amplitud pequeña alrededor de su eje, siendo el ángulo de rotación $\theta = \theta_0 \cos \omega t$, en donde $\theta_0 \ll 1$. Determinar el momento de las fuerzas de rozamiento que actúan sobre el disco.

Solución. En el caso de oscilaciones de amplitud pequeña el término $(\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{v}$ en la ecuación del movimiento es siempre pequeño en comparación con $\partial v / \partial t$, sea cual sea la frecuencia ω . Si $R \gg \delta$, puede considerarse como infinito el disco al determinar la distribución de velocidades. Tomaremos ordenadas cilíndricas con el eje z situado a lo largo del eje de rotación y buscaremos una solución tal que $v_r = v_z = 0$, $v_\phi = v = r\Omega(z, t)$. Para la velocidad angular $\Omega(z, t)$ del fluido obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}.$$

La solución de esta ecuación que vale $-\omega \theta_0 \operatorname{sen} \omega t$ para $z = 0$ y cero para $z = \infty$ es

$$\Omega = -\omega \theta_0 e^{-z/\delta} \operatorname{sen}(\omega t - z/\delta).$$

El momento de las fuerzas de rozamiento sobre ambas caras del disco es

$$M = 2 \int_0^R r \cdot 2\pi r \eta (\partial v / \partial z)_{z=0} dr = \omega \theta_0 \pi \sqrt{(\omega \rho \eta)} R^4 \cos(\omega t - \frac{1}{4}\pi).$$

Problema 4. Determinar el flujo existente entre dos planos paralelos cuando existe un gradiente de presiones que varía armónicamente con el tiempo.

Solución. Tomaremos el plano intermedio entre ambos planos como plano coordenado xz , estando el eje x paralelo al gradiente de presiones, el cual puede escribirse en la forma

$$-(1/\rho) \partial p / \partial x = ae^{-i\omega t}.$$

La velocidad en todo punto tiene la dirección x y está determinada por la ecuación

$$\partial v / \partial t = ae^{-i\omega t} + \nu \partial^2 v / \partial y^2.$$

La solución de esta ecuación que satisface las condiciones $v = 0$ para $y = \pm 1/2h$ es

$$v = \frac{ia}{\omega} e^{-i\omega t} \left[1 - \frac{\cos ky}{\cos \frac{1}{2}kh} \right].$$

El valor medio de la velocidad en toda sección recta es

$$\bar{v} = \frac{ia}{\omega} e^{-i\omega t} \left(1 - \frac{2}{kh} \operatorname{tg} \frac{1}{2} kh \right).$$

Para $h/\delta \ll 1$ esta expresión se transforma en

$$\bar{v} \approx ae^{-i\omega t} h^2/12\nu,$$

de acuerdo con (17.5), mientras que para $h/\delta \gg 1$ tenemos

$$\bar{v} \approx (ia/\omega)e^{-i\omega t},$$

de acuerdo con el hecho de que en este caso la velocidad debe ser casi constante en toda la sección recta, variando únicamente en una capa superficial estrecha.

Problema 5. Determinar la fuerza de arrastre sobre una esfera de radio R que realiza oscilaciones de traslación dentro de un fluido.

Solución. Escribamos la velocidad de la esfera en la forma $\mathbf{u} = u_0 e^{-i\omega t}$. Del mismo modo que en § 20, buscaremos una velocidad del fluido en la forma $\mathbf{v} = e^{-i\omega t} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{f} \mathbf{u}_0$, en donde f es una función de r únicamente. (Se toma el origen en la posición instantánea del centro de la esfera.) Sustituyendo en (24.9) y realizando unas transformaciones semejantes a las realizadas en § 20, obtenemos la ecuación

$$\Delta^2 f + (i\omega/\nu) \Delta f = 0$$

(en lugar de la ecuación $\Delta^2 f = 0$ que se obtuvo en § 20). De aquí que obtengamos

$$\Delta f = \text{constant} \times e^{ikr}/r,$$

escogiéndose la solución de tal modo que disminuye exponencialmente con r . Integrando, tenemos

$$df/dr = [ae^{ikr}(r - 1/ik) + b]/r^2; \quad (1)$$

no es necesario tener la propia función f , puesto que únicamente aparecen en la velocidad las derivadas f' y f'' . Se determinan las constantes a y b a partir de la condición de que $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ para $r = R$, y resultan ser

$$a = -\frac{3R}{2ik} e^{-ikR}, \quad b = -\frac{1}{2} R^3 \left(1 - \frac{3}{ikR} - \frac{3}{k^2 R^2} \right). \quad (2)$$

Debe señalarse que, a distancias grandes ($R \gg \delta$), $a \rightarrow 0$ y $b \rightarrow -1/2R^3$, habiéndose obtenido los valores para el flujo potencial en § 10, problema 2; éste está de acuerdo con lo que se ha dicho en § 24.

Se calcula el arrastre mediante la fórmula (20.13), en la cual la integración se extiende a la superficie de la esfera. El resultado es

$$F = 6\pi\eta R \left(1 + \frac{R}{\delta} \right) u + 3\pi R^2 \sqrt{(2\eta\rho/\omega)} \left(1 + \frac{2R}{9\delta} \right) \frac{du}{dt}. \quad (3)$$

Para $\omega = 0$ esta expresión se transforma en la fórmula de Stokes, mientras que para frecuencias grandes tenemos

$$F = \frac{2}{3}\pi\rho R^3 \frac{du}{dt} + 3\pi R^2 \sqrt{(2\eta\rho\omega)} u.$$

El primer término de esta expresión corresponde a la fuerza inercial en el flujo potencial que rodea la esfera (ver § 11, problema 1), mientras que el segundo da el límite de la fuerza disipativa.

Problema 6. Determinar el arrastre sobre una esfera que se mueve en una forma arbitraria, viiniendo dada la velocidad por una función $u(t)$.

Solución. Representaremos $u(t)$ como una integral de Fourier:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega, \quad u_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau.$$

Puesto que las ecuaciones son lineales, el arrastre total puede escribirse como la integral de las fuerzas del arrastre para las velocidades que son las componentes separadas de Fourier $u_{\omega} e^{-i\omega t}$; estas fuerzas vienen dadas por (3) del problema 5, y son

$$\pi\rho R^3 u_{\omega} e^{-i\omega t} \left\{ \frac{6\nu}{R^2} - \frac{2i\omega}{3} + \frac{3\sqrt{(2\nu)}}{R} (1-i)\sqrt{\omega} \right\}.$$

Observando que $(du/dt)_{\omega} = -i\omega u_{\omega}$, podemos volver a escribir esta expresión como

$$\pi\rho R^3 e^{-i\omega t} \left\{ \frac{6\nu}{R^2} u_{\omega} + \frac{3(i\dot{u})_{\omega}}{R} + \frac{3\sqrt{(2\nu)}}{R} (\dot{u})_{\omega} \frac{1+i}{\sqrt{\omega}} \right\}.$$

Al realizar la integración respecto a ω , el primero y segundo término dan, respectivamente, $u(t)$ y $\dot{u}(t)$. Para integrar el tercer término observaremos primero que en el caso de ω negativo este término debe escribirse en la forma del complejo conjugado, teniéndose que sustituir la forma $(1+i)/\sqrt{\omega}$ por $(1-i)/\sqrt{|w|}$; esto se debe a que la fórmula (3) del problema 5 se dedujo para una velocidad $u = u_0 e^{-i\omega t}$, con $\omega > 0$, y para una velocidad $u_0 e^{i\omega t}$ deberíamos obtener la conjugada compleja. En lugar de una integral respecto a ω extendida desde $-\infty$ hasta $+\infty$, podemos tomar el doble de la parte real del integrando desde 0 hasta ∞ . Escribiremos así

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{re} \left\{ (1+i) \int_0^{\infty} \frac{(\dot{u})_{\omega} e^{-i\omega t}}{\sqrt{\omega}} d\omega \right\} &= \frac{1}{\pi} \operatorname{re} \left\{ (1+i) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\dot{u}(\tau) e^{i\omega(\tau-t)}}{\sqrt{\omega}} d\omega d\tau \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{re} \left\{ (1+i) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\dot{u}(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)}}{\sqrt{\omega}} d\omega d\tau + (1+i) \int_t^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\dot{u}(\tau) e^{i\omega(\tau-t)}}{\sqrt{\omega}} d\omega d\tau \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{re} \left\{ \int_{-\infty}^t \frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)}} d\tau + i \int_t^{\infty} \frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{(\tau-t)}} d\tau \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)}} d\tau. \end{aligned}$$

Así pues, tenemos finalmente para la fuerza de arrastre

$$F = 2\pi\rho R^3 \left\{ \frac{1}{3} \frac{du}{dt} + \frac{3\nu u}{R^2} + \frac{3}{R} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}} \right\}. \quad (1)$$

Problema 7. Determinar el arrastre sobre una esfera que en el instante $t = 0$ empieza a moverse con una aceleración uniforme $\mathbf{u} = \alpha t$.

Solución. Poniendo en la fórmula (1) del problema 6, $\mathbf{u} = 0$ para $t < 0$ y $\mathbf{u} = \alpha t$ para $t > 0$, tenemos para $t > 0$

$$F = 2\pi\rho R^3 \alpha \left[\frac{1}{3} + \frac{3vt}{R^2} + \frac{6}{R} \sqrt{\frac{tv}{\pi}} \right].$$

Problema 8. Igual que el problema 7, pero ahora para una esfera que se pone instantáneamente en movimiento uniforme.

Solución. Tenemos ahora $\mathbf{u} = 0$ para $t < 0$ y $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ para $t > 0$. La derivada $d\mathbf{u}/dt$ es cero excepto en el instante $t = 0$, en cuyo momento es infinita, pero la integral temporal de $d\mathbf{u}/dt$ es finita e igual a \mathbf{u}_0 . Como resultado, tenemos para todo $t > 0$

$$F = 6\pi\rho v R u_0 \left[1 + \frac{R}{\sqrt{(vt)}} \right] + \frac{2}{3}\pi\rho R^3 u_0 \delta(t),$$

siendo $\delta(t)$ la función delta. Para $t \rightarrow \infty$ esta expresión tiende asintóticamente al valor dado por la fórmula de Stokes. Se obtiene la fuerza de arrastre impulsivo sobre la esfera en el instante $t = 0$ integrando el último término y resulta valer $2\pi\rho R^3 u_0 / 3$.

Problema 9. Determinar el momento de las fuerzas que actúan sobre una esfera que está realizando oscilaciones de rotación alrededor de un diámetro y en el interior de un fluido viscoso.

Solución. Por las mismas razones que en § 20, problema 1, el término de gradiente de presión puede omitirse en la ecuación del movimiento, de modo que tenemos $\partial\mathbf{v}/\partial t = \mathbf{v}\Delta\mathbf{v}$. Busquemos una solución de la forma $\mathbf{v} = \mathbf{rot} f \Omega_0 e^{-i\omega t}$, en donde $\Omega = \Omega_0 e^{-i\omega t}$ es la velocidad angular de rotación de la esfera. Entonces, obtenemos para f , en lugar de la ecuación $\Delta f = \text{constante}$, la expresión

$$\Delta f + k^2 f = \text{constante}.$$

Omitiendo un término constante que carece de importancia en la solución de esta cuestión, hallamos $f = ae^{ikr}/r$ tomando la solución que se anula en el infinito. Se determina la constante a mediante la condición límite de que $\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r}$ en la superficie de la esfera. El resultado es

$$f = \frac{R^3}{1-ikR} e^{ik(r-R)}, \quad \mathbf{v} = (\Omega \times \mathbf{r}) \left(\frac{R}{r} \right)^3 \frac{1-ikr}{1-ikR} e^{ik(r-R)},$$

siendo R el radio de la esfera. Un cálculo semejante al realizado en § 20, problema 1, da la siguiente expresión para el momento de las fuerzas ejercidas por el fluido sobre la esfera:

$$M = -\frac{8\pi}{3}\eta R^3 \Omega \frac{3 + 6R/\delta + 6(R/\delta)^2 + 2(R/\delta)^3 - 2i(R/\delta)^2(1+R/\delta)}{1 + 2R/\delta + 2(R/\delta)^2}.$$

Para $\omega \rightarrow 0$ (es decir, $\delta \rightarrow \infty$), obtenemos $M = -8\pi\eta R^3 \Omega$, que corresponde a una rotación uniforme de la esfera (ver § 20, problema 1). En el caso límite opuesto $R/\delta \gg 1$, encontramos

$$M = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi R^4 \sqrt{(\eta\rho\omega)}(i-1)\Omega.$$

Esta expresión puede obtenerse también directamente: para $\delta \gg R$ cada elemento de la superficie de la esfera puede considerarse como plano y la fuerza de rozamiento que actúa sobre el mismo se encuentra sustituyendo en la fórmula (24.6) $u = \Omega R \operatorname{sen} \theta$.

Problema 10. Determinar el momento de las fuerzas sobre una esfera hueca llena con fluido viscoso que realiza unas oscilaciones de rotación alrededor de un diámetro.

Solución. Buscaremos la velocidad en la misma forma que en el problema 9. Para这点aremos la solución $(a/r) \operatorname{sen} kr$, que es finita en todo punto dentro de la esfera, incluyendo el centro. Determinando a mediante la condición límite, tenemos

$$\mathbf{v} = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \left(\frac{R}{r} \right)^3 \frac{kr \cos kr - \operatorname{sen} kr}{kR \cos kr - \operatorname{sen} kr}.$$

Un cálculo del momento de las fuerzas de rozamiento da la expresión

$$M = \frac{8}{5} \pi \eta R^3 \Omega \frac{k^2 R^2 \operatorname{sen} kr + 3kR \cos kr - 3 \operatorname{sen} kr}{kR \cos kr - \operatorname{sen} kr}.$$

El valor límite para $\delta \gg 1$ es, como es natural, el mismo que en el problema anterior. Si $R/\delta \ll 1$ tenemos

$$M = \frac{8}{15} \pi \rho \omega R^5 \Omega \left(i - \frac{R^2 \omega}{35 \nu} \right).$$

El primer término corresponde a las fuerzas de inercia que se presentan en la rotación rígida del fluido completo.

§ 25. Amortiguamiento de las ondas de gravedad

Pueden adelantarse razonamientos semejantes a los dados anteriormente respecto a la distribución de velocidades cerca de la superficie libre de un fluido. Consideremos el movimiento oscilante que se produce cerca de la superficie (por ejemplo, ondas de gravedad). Supongamos que son válidas las condiciones (24.11) sustituyendo ahora la dimensión l por la longitud de onda λ :

$$\lambda^2 \omega \gg \nu, \quad a \ll \lambda; \quad (25.1)$$

a es la amplitud de la onda y ω su frecuencia. Podemos decir entonces que el flujo es rotacional únicamente en una capa de superficie delgada, mientras que en todo el resto del fluido tenemos un flujo potencial, lo mismo que ocurriría en el caso de un fluido ideal.

El movimiento de un fluido viscoso debe satisfacer las condiciones límites (15.14) en la superficie libre; esto exige que se anulen ciertas combinaciones de las derivadas espaciales de la velocidad. El flujo obtenido resolviendo las ecuaciones de la dinámica de los fluidos ideales no satisface, sin embargo, estas condiciones. Como en el estudio de v_r realizado en la sección anterior, podemos concluir que las correspondientes derivadas de la veloci-

dad disminuyen rápidamente en el interior de una capa superficial delgada. Es importante observar que esto no implica un gradiente de velocidades grande, como ocurre cerca de una superficie sólida.

Calculemos la disipación de energía en una onda de gravedad. Aquí debemos considerar la disipación, no de la energía cinética sola, sino de la energía mecánica E_{mec} , que incluye tanto la energía cinética como la energía potencial del campo gravitatorio. Sin embargo, resulta claro que la presencia o ausencia de un campo gravitatorio no puede influir en la disipación de energía debido a los procesos de rozamiento interno en el fluido. De aquí que \dot{E}_{mec} venga dada por la misma fórmula (16.3):

$$\dot{E}_{\text{mec}} = -\frac{1}{2}\eta \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV.$$

Al calcular esta integral para una onda de gravedad, debe señalarse que, puesto que es pequeño el volumen de la región superficial de flujo de rotación y mientras no sea grande el gradiente de velocidad allí, puede ignorarse la existencia de esta región a diferencia de lo que sucedía en el caso de oscilaciones de una superficie sólida. En otras palabras, la integración ha de extenderse a todo el volumen del fluido, el cual, como hemos visto, se mueve como si fuese un fluido ideal.

El flujo de una onda de gravedad en el caso de un fluido ideal ya se ha determinado en § 12. Puesto que tenemos flujo potencial,

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i},$$

de modo que

$$\dot{E}_{\text{mec}} = -2\eta \int \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 dV.$$

El potencial ϕ tiene la forma

$$\phi = \phi_0 \cos(kx - \omega t + \alpha) e^{-kz}.$$

Como es natural, estamos interesados no en el valor instantáneo de la disipación de energía, sino en su valor medio \bar{E}_{mec} respecto al tiempo. Observando que son iguales los valores medios de los senos y cosenos al cuadrado, se tiene

$$\bar{E}_{\text{mec}} = -8\eta k^4 \int \overline{\phi^2} dV. \quad (25.2)$$

Puede calcularse la propia energía E_{mec} en el caso de una onda de gravedad utilizando un teorema de la mecánica que dice que en un sistema cualquiera, que realiza pequeñas oscilaciones (es decir, de pequeña amplitud), son iguales la energía cinética y la energía potencial media. Por consiguiente, podemos escribir \bar{E}_{mec} como el doble de la energía cinética:

$$E_{\text{mec}} = \rho \int \overline{v^2} dV = \rho \int (\overline{\partial \phi / \partial x_i})^2 dV,$$

y de aquí

$$E_{\text{mec}} = 2\rho k^2 \int \overline{\phi^2} dV. \quad (25.3)$$

El amortiguamiento de las ondas se caracteriza de modo conveniente por el *coeficiente de amortiguamiento* γ , definido como

$$\gamma = |\bar{E}_{\text{mec}}|/2\bar{E}_{\text{mec}}. \quad (25.4)$$

En el transcurso del tiempo, la energía de la onda disminuye de acuerdo con la ley $\bar{E}_{\text{mec}} = \text{constante} \times e^{-2\gamma t}$; puesto que la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud, la última disminuye con el tiempo, como $e^{-\gamma t}$.

Utilizando (25.2) y (25.3), tenemos

$$\gamma = 2\nu k^2. \quad (25.5)$$

Sustituyendo aquí la expresión (12.7), obtenemos el coeficiente de amortiguamiento para ondas de gravedad en la forma

$$\gamma = 2\nu\omega^4/g^2. \quad (25.6)$$

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el coeficiente de amortiguamiento para ondas de gravedad largas que se propagan en un canal de sección recta constante; se supone que la frecuencia es tan grande que $\sqrt{(\nu/\omega)}$ es pequeño en comparación con la profundidad del fluido en el canal.

Solución. La principal disipación de energía se produce en la capa superficial de fluido, en donde la velocidad varía desde cero en su límite hasta el valor $v = v_0 e^{-k_0 a t}$ que tiene en la onda. La disipación de energía media por unidad de longitud del canal viene dada según (24.14) por $l|v_0|^2 \sqrt{(\eta \rho \omega / 8)}$, en donde l es el perímetro de la parte de la sección recta de canal ocupada por el fluido. La energía media del fluido (de nuevo por unidad de longitud) es $S \rho v^2 = 1/2 S \rho |v_0|^2$, siendo S el área de la sección recta del fluido en el canal. El coeficiente de amortiguamiento es $\gamma = l \sqrt{(\nu \omega / 8S)}$. Por consiguiente, en el caso de un canal de sección rectangular,

$$\gamma = \frac{2h + a}{2\sqrt{2ah}} \sqrt{(\nu \omega)},$$

siendo a la anchura y h la profundidad del fluido.

Problema 2. Determinar el flujo de una onda de gravedad en el caso de un fluido muy viscoso.

Solución. El cálculo del coeficiente de amortiguamiento, tal y como hemos visto anteriormente, es válido únicamente cuando el coeficiente es pequeño, de modo que el movimiento pueda considerarse como el correspondiente a un fluido ideal en primera aproximación. Si tenemos una viscosidad arbitraria buscaremos una solución de las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

que dependa de t y de x como $e^{-i\omega t+ikx}$, y disminuya en el interior del fluido ($z < 0$). Así se tiene

$$v_x = e^{-i\omega t+ikx}(Ae^{kz} + Be^{mz}), \quad v_z = e^{-i\omega t+ikx}(-iAe^{kz} - \frac{ik}{m}Be^{mz}),$$

$$p/\rho = e^{-i\omega t+ikx}\omega Ae^{kz}/k - gz, \text{ en donde } m = \sqrt{(k^2 - i\omega/\nu)}.$$

Las condiciones límites en la superficie del fluido son

$$\sigma_{zz} = -p + 2\eta \partial v_z / \partial z = 0, \quad \sigma_{xz} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 0 \text{ para } z = \zeta.$$

De la segunda condición se puede poner inmediatamente $z = 0$ en lugar de $z = \zeta$. Sin embargo, la primera condición deberá derivarse respecto a t , después de lo cual sustituiremos $g\partial\zeta/\partial t$ por gv_z y luego haremos $z = 0$. La condición de que son compatibles las dos ecuaciones homogéneas resultantes para A y B nos da

$$\left(2 - \frac{i\omega}{\nu k^2} \right)^2 + \frac{g}{\nu^2 k^3} = 4 \sqrt{\left(1 - \frac{i\omega}{\nu k^2} \right)}. \quad (2)$$

Esta ecuación da ω en función del número de ondas k ; ω es compleja, dando su parte real la frecuencia de las oscilaciones y su parte imaginaria el coeficiente de amortiguamiento. Las soluciones de la ecuación (2) que tienen significado físico son aquéllas cuya parte imaginaria son negativas (que corresponden al amortiguamiento de la onda); solamente dos de las raíces de (2) cumplen este requisito. Si $\nu k^2 \ll \sqrt{(gk)}$ [la condición (25.1)], entonces el coeficiente de amortiguamiento pequeño y (2) da aproximadamente $\omega = \pm \sqrt{(gk)} - i \cdot 2\nu k^2$, un resultado que ya sabíamos. En el caso límite opuesto $\nu k^2 \gg \sqrt{(gk)}$, la ecuación (2) tiene dos raíces imaginarias puras, lo cual corresponde a un flujo aperiódico amortiguado. Una raíz es $\omega = -ig/2\nu k$, mientras que la otra es mucho mayor (del orden de νk^2), y, por consiguiente, carece de interés, puesto que el movimiento correspondiente está muy amortiguado.

CAPÍTULO III

TURBULENCIA

§ 26. Estabilidad del flujo estacionario

Al resolver las ecuaciones del flujo estacionario correspondientes a un fluido viscoso suele ser necesario hacer ciertas aproximaciones para simplificar determinadas dificultades matemáticas. Como es natural, la validez de estas soluciones aproximadas es restringida. Por ejemplo, tal es el caso de la solución del problema del flujo que rodea una esfera dado en § 20, que únicamente es válido para números de Reynolds pequeños.

Sin embargo, en principio debe existir una solución estacionaria exacta de las ecuaciones de la dinámica de fluidos para cualquier problema con condiciones externas estacionarias dadas; dichas soluciones exactas se han considerado en §§ 17, 18 y 23. Estas soluciones son válidas formalmente para todos los valores de los números de Reynolds.

Pero ni siquiera todas las soluciones de las ecuaciones del movimiento, aunque sean exactas, pueden realmente producirse en la naturaleza. Los flujos que se presentan en la naturaleza no sólo deben obedecer las ecuaciones de la dinámica de los fluidos, sino también ser estables. Para que el flujo sea estable es necesario que si se producen pequeñas perturbaciones éstas disminuyan con el tiempo. Por el contrario, si las pequeñas perturbaciones que se producen inevitablemente en el flujo tienden a aumentar con el tiempo, entonces el flujo es absolutamente inestable. No puede existir entonces un flujo inestable de este tipo producido por perturbaciones infinitamente pequeñas.

El estudio o análisis matemático de la estabilidad de un flujo determinado respecto a perturbaciones infinitamente pequeñas se realiza del modo siguiente. En lo que se refiere a la solución estacionaria [cuya distribución de velocidades es $v_0(x, y, z)$, por ejemplo], supondremos una pequeña perturbación no estacionaria $v_1(x, y, z, t)$, que debe ser de un tipo tal que la velocidad resultante $v = v_0 + v_1$ satisfaga las ecuaciones del movimiento. Se obtiene la ecuación para v_1 sustituyendo en las ecuaciones

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \text{grad})v = - \frac{\text{grad } p}{\rho} + \nu \Delta v, \quad \text{div } v = 0$$

la velocidad y la presión $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$, $p = p_0 + p_1$, en donde las funciones conocidas \mathbf{v}_0 y p_0 satisfacen las ecuaciones sin perturbar

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}_0 = -\frac{\mathbf{grad} p_0}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}_0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0.$$

Omitiendo los términos superiores al primer orden en \mathbf{v}_1 , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}_0 \\ = -\frac{\mathbf{grad} p_1}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}_1, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0. \end{aligned} \quad (26.1)$$

La condición límite es que \mathbf{v}_1 se anule en las superficies sólidas.

Así pues, \mathbf{v}_1 satisface un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes que son funciones de las coordenadas únicamente y no del tiempo. Puede representarse la solución general de dichas ecuaciones como una suma de soluciones particulares en las que \mathbf{v}_1 depende del tiempo como $e^{-i\omega t}$. Las «frecuencias» ω de las perturbaciones no son arbitrarias, sino que se determinan resolviendo las ecuaciones (26.1) con las condiciones de los límites apropiadas. En general, las «frecuencias» son complejas. Si existen valores de ω cuyas partes imaginarias sean positivas, $e^{-i\omega t}$ aumentará indefinidamente con el tiempo. En otras palabras, dichas perturbaciones, una vez producidas, aumentarán, siendo el flujo inestable respecto a las mismas. Para que el flujo sea estable es necesario que la parte imaginaria de cualquier posible «frecuencia» sea negativa. Las perturbaciones que se produzcan disminuirán entonces exponencialmente con el tiempo.

Sin embargo, el estudio matemático de la estabilidad es extraordinariamente complicado. Todavía no ha sido resuelto el problema teórico de la estabilidad del flujo estacionario que rodea a un cuerpo de dimensiones finitas. Es cierto que el flujo estacionario es estable para números de Reynolds suficientemente pequeños. Los datos experimentales parecen indicar que, cuando R aumenta, finalmente se alcance un valor R_{cr} (*número de Reynolds crítico*), más allá del cual el flujo es inestable respecto a perturbaciones infinitesimales. Para valores suficientemente grandes del número de Reynolds ($R > R_{cr}$) es imposible, por tanto, el flujo estacionario rodeando a cuerpos sólidos. Como es natural, el número de Reynolds crítico no es una constante universal, sino que toma un valor diferente para cada tipo de flujo. Estos valores parecen ser del orden de diez a cien; por ejemplo, se ha observado para valores de $R = ud/\nu = 34$, la existencia de unos flujos alrededor de cilindros que son no estacionarios y no amortiguados, siendo d el diámetro del cilindro. Sin embargo, no se han realizado todavía medidas exactas de R_{cr} .

§ 27. Establecimiento de la turbulencia

Consideremos ahora la naturaleza del flujo no estacionario que se establece como resultado de la inestabilidad absoluta del flujo estacionario para números de Reynolds grandes. Empezaremos examinando las propiedades de este flujo a números de Reynolds sólo ligeramente mayores que R_{cr} . Para $R < R_{cr}$ las partes imaginarias de las «frecuencias» complejas $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$ son negativas para todas las perturbaciones posibles de velocidad pequeña ($\gamma_1 < 0$). Para $R = R_{cr}$ existe una frecuencia cuya parte imaginaria es cero. Para $R > R_{cr}$ la parte imaginaria de esta frecuencia es positiva, pero cuando R está próximo a R_{cr} , γ_1 es pequeña en comparación con la parte real ω_1 .[†] La función v_1 correspondiente a esta frecuencia es de la forma

$$v_1 = A(t)f(x, y, z), \quad (27.1)$$

siendo f una función compleja de las coordenadas, y siendo $A(t)$ la «amplitud» compleja[‡]

$$A(t) = \text{constante} \times e^{\gamma_1 t} e^{-i\omega_1 t}. \quad (27.2)$$

Sin embargo, esta expresión para $A(t)$ es realmente válida sólo durante un intervalo corto de tiempo después de la rotura del flujo estacionario; el factor $e^{\gamma_1 t}$ aumenta rápidamente con el tiempo, mientras que el método de determinar v_1 dado en § 26, que condujo a expresiones como (27.1) y (27.2), se aplica únicamente cuando $|v|$ es pequeño. Como es natural, el módulo $|A|$ de la amplitud del flujo no estacionario, en realidad no aumenta sin límite, sino que tiende a un valor finito. Para R próximo a R_{cr} (con lo que queremos significar siempre $R > R_{cr}$), este valor finito es pequeño y puede determinarse del modo siguiente.

Obtengamos la derivada respecto al tiempo del cuadrado de la amplitud $|A|^2$. Para valores muy pequeños de t , cuando (27.2) sigue siendo válida, tenemos $d|A|^2/dt = 2\gamma_1|A|^2$. Esta expresión coincide exactamente con el primer término de un desarrollo en serie de potencias de A y A^* . Cuando aumenta el módulo $|A|$ (siendo todavía pequeño), deben tenerse en cuenta los términos siguientes de este desarrollo. Los términos que siguen son los de tercer orden en A . Sin embargo, no estamos interesados en el valor exacto de la derivada $d|A|^2/dt$, sino en su promedio temporal tomado en tiempos grandes en comparación con el período $2\pi/\omega_1$ del factor $e^{-i\omega_1 t}$; recordemos que, puesto que $\omega_1 \gg \gamma_1$, este período es pequeño en comparación con el tiempo $1/\gamma_1$.

[†] Debe recordarse que el conjunto (o *espectro*) de todas las frecuencias posibles para un tipo de flujo determinado incluye tanto los valores aislados separados (*espectro discreto*) y la totalidad de los diversos intervalos continuos de frecuencia (*espectro continuo*). Sin embargo, puede verse que las frecuencias con partes imaginarias positivas que nos interesan aparecen, en general, sólo en el espectro discreto.

[‡] Como es normal, entendemos la parte real de (27.2).

requerido para que varíe apreciablemente el módulo de la amplitud $|A|$. Sin embargo, los términos de tercer orden deben contener el factor periódico y , por tanto, se anulan al promediar.[†] En los términos de cuarto orden se incluye uno que es proporcional a $A^2 A^{*2} = |A|^4$, que claramente no se anula al promediar. Así pues, tenemos hasta los términos de cuarto orden

$$\overline{d|A|^2/dt} = 2\gamma_1|A|^2 - \alpha|A|^4. \quad (27.3)$$

en donde α puede ser positivo o negativo.

Supongamos que α es positivo.[‡] No hemos puesto barras encima de $|A|^2$ y $|A|^4$, puesto que el promedio corresponde únicamente a un intervalo de tiempo corto en comparación con $1/\gamma_1$. Por la misma razón, al resolver la ecuación procederemos como si se omitiese la barra situada también sobre la derivada. La solución de la ecuación (27.3) es

$$1/|A|^2 = \alpha/2\gamma_1 + \text{constante} \times e^{-2\gamma_1 t}.$$

Resulta evidente que $|A|^2$ tiende asintóticamente a un límite finito:

$$|A|_{\max}^2 = 2\gamma_1/\alpha. \quad (27.4)$$

La magnitud γ_1 es una función determinada del número de Reynolds. Cerca de R_{cr} puede desarrollarse en una serie de potencias de $R - R_{cr}$. Pero $\gamma_1(R_{cr}) = 0$, por definición del número de Reynolds crítico. De aquí que el término de orden cero del desarrollo sea nulo y tenemos hasta el primer orden $\gamma_1 = \text{constante} \times (R - R_{cr})$. Sustituyendo este valor en (27.4), vemos que el módulo $|A|$ de la amplitud es proporcional a la raíz cuadrada de $R - R_{cr}$:

$$|A|_{\max} \sim \sqrt{(R - R_{cr})}. \quad (27.5)$$

Resumamos estos resultados. La inestabilidad absoluta del flujo para $R > R_{cr}$ conduce a la aparición de un flujo periódico no estacionario. Para R próximo a R_{cr} este último flujo puede representarse superponiendo sobre el flujo estacionario $v_0(x, y, z)$ un flujo periódico $v_1(x, y, z, t)$ con una amplitud pequeña pero finita que aumenta con R proporcionalmente a la raíz cuadrada de $R - R_{cr}$. La distribución de velocidades en este flujo es de la forma

$$v_1 = f(x, y, z)e^{-i(\omega_1 t + \beta_1)}, \quad (27.6)$$

en donde f es una función compleja de las coordenadas y β_1 es una determinada fase inicial. Para valores grandes de $R - R_{cr}$, la separación o descomposición de la velocidad en v_0 y v_1 deja de tener significado. Entonces tenemos simplemente un cierto flujo periódico con frecuencia ω_1 . Si, en lugar de tiem-

[†] Estrictamente hablando, los términos de tercer orden no dan un resultado nulo al promediar, sino términos de cuarto orden, que se suponen incluidos en los otros términos de cuarto orden del desarrollo.

[‡] Esto parece ser cierto en el caso de flujos normales alrededor de los cuerpos.

po, utilizamos como variable independiente la fase $\phi_1 \equiv \omega_1 t + \beta_1$, podemos decir que la función $\mathbf{v}(x, y, z, \phi_1)$ es una función periódica de ϕ_1 con período 2π . Sin embargo, esta función ya no es una función trigonométrica sencilla. Su desarrollo en serie de Fourier

$$\mathbf{v} = \sum_p \mathbf{A}_p(x, y, z) e^{-ip\phi_1} \quad (27.7)$$

(en donde la suma se extiende a todos los números enteros p , positivos y negativos) incluye no solamente los términos con la frecuencia fundamental ω_1 , sino también términos cuyas frecuencias son múltiplos enteros de ω_1 .

También debe mencionarse la siguiente propiedad importante de este flujo no estacionario. La ecuación (27.3) determina únicamente el módulo del factor temporal $A(t)$ y no su fase. La fase $\phi_1 = \omega_1 t + \beta_1$ del flujo periódico permanece esencialmente indeterminada, y depende de las condiciones iniciales particulares que se producen en el instante en que empieza el flujo. La fase inicial de esta suma puede tener cualquier valor, dependiendo de estas condiciones. Así pues, el flujo periódico en consideración no está determinado únicamente por las condiciones externas estacionarias dadas en las que tiene lugar el flujo. Permanece arbitraria una cantidad — la fase inicial de la velocidad. Podemos decir que el flujo tiene un grado de libertad, mientras que el flujo estacionario que está totalmente determinado por las condiciones externas no tiene ningún grado de libertad. Consideremos, a continuación, los fenómenos que se producen cuando aumenta aún más el número de Reynolds. Cuando esto ocurre, llega, finalmente, un tiempo en que el flujo periódico estudiado anteriormente a su vez se hace inestable. La investigación de esta inestabilidad deberá seguir un método[†] semejante al dado anteriormente para determinar la inestabilidad del flujo estacionario original. La parte del flujo no perturbado se toma ahora como flujo periódico $\mathbf{v}_0(x, y, z, t)$ (con frecuencia ω_1), y en las ecuaciones del movimiento sustituimos $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2$, en donde \mathbf{v}_2 es una pequeña corrección. Para \mathbf{v}_2 obtenemos de nuevo una ecuación lineal, pero los coeficientes son ahora funciones del tiempo, lo mismo que de las coordenadas, siendo periódicas en tiempo con período $2\pi/\omega_1$. La solución de dicha ecuación debe buscarse en la forma $\mathbf{v}_2 = \Pi(x, y, z, t)e^{-i\omega t}$, en donde $\Pi(x, y, z, t)$ es una función periódica del tiempo, con período $2\pi/\omega_1$. Se produce de nuevo la inestabilidad cuando aparece una frecuencia $\omega = \omega_2 + i\gamma_2$ tal que la parte imaginaria γ_2 sea positiva. La parte real correspondiente ω_2 determina entonces la nueva frecuencia que aparece.

Por consiguiente, el resultado es que aparece un flujo quasi periódico, caracterizado por dos períodos diferentes. Así como el flujo tenía un solo grado de libertad después de la aparición del primer flujo periódico, ahora apare-

[†] Pero no se han llevado a cabo, ni siquiera en casos particulares, debido a excepcionales dificultades matemáticas.

cen dos magnitudes arbitrarias (fases), es decir, existen dos grados de libertad.

Cuando el número de Reynolds sigue aumentando aún más, aparecen sucesivamente cada vez más períodos. El margen de números de Reynolds entre apariciones sucesivas de nuevas frecuencias disminuye rápidamente de tamaño. Los propios flujos nuevos son de escala cada vez menor. Esto significa que el orden de magnitud de las distancias donde la velocidad varía apreciablemente es menor cuanto más tarde aparece el flujo en cuestión.

Por tanto, para $R > R_{cr}$, el flujo se hace rápidamente complicado y confuso. Dicho flujo se dice que es *turbulento*; sus propiedades se estudiarán con detalle en las secciones siguientes. En contraposición al flujo turbulento, se dice *laminar* al flujo regular, en el cual el fluido se mueve como si existiesen capas con velocidades distintas.

Podemos escribir ahora la forma general de una función $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, cuya dependencia con el tiempo venga dada por un número determinado n de frecuencias distintas ω_j ($j = 1, 2, \dots, n$). En lugar de una fase $\phi_1 = \omega_1 t + \beta_1$, tenemos ahora n fases diferentes $\phi_j = \omega_j t + \beta_j$. La función \mathbf{v} puede considerarse como una función de estas fases (y de las coordenadas) y es periódica en cada una de ellas con períodos 2π . Dicha función puede escribirse como una serie:

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \sum_{p_1, p_2, \dots, p_n} \mathbf{A}_{p_1, \dots, p_n}(x, y, z) \exp[-i \sum_{j=1}^n p_j \phi_j], \quad (27.8)$$

extendiéndose la suma a todos los enteros p_1, p_2, \dots, p_n . Esta fórmula es una generalización de la (27.7). Podemos observar que la selección de las frecuencias fundamentales $\omega_1, \dots, \omega_n$, no es por sí misma única, como vemos en (27.8); podríamos, igualmente, haber tomado n combinaciones lineales independientes cualesquiera de ω_j con coeficientes enteros.[†]

Un flujo descrito por una fórmula como (27.8) tiene n grados de libertad; en ella intervienen n fases iniciales arbitrarias β_j . Cuando aumenta el número de Reynolds, aumentan tanto el número de las frecuencias como el número de grados de libertad. En el límite, cuando R tiende a infinito, el número de grados de libertad también aumenta indefinidamente.

Debe recordarse que, puesto que la velocidad es una función periódica de las fases con período 2π , los estados cuyas fases difieren solamente en un múltiplo entero de 2π son físicamente indistinguibles. En otras palabras, podemos decir que todos los valores esencialmente diferentes de cada fase están comprendidos en el margen $0 \leq \phi_j \leq 2\pi$. Consideremos dos fases cualesquiera $\phi_1 = \omega_1 t + \beta_1$ y $\phi_2 = \omega_2 t + \beta_2$. Supóngase que, en un instante determi-

[†] Estas combinaciones lineales deben ser de un tipo tal que a partir de ellas se puedan formar todos los números posibles $\sum p_j \phi_j$. Es fácil ver que, para conseguir esto, debe ser la unidad el determinante de los coeficientes de transformación que relacionan las frecuencias iniciales con las nuevas.

nado, ϕ_1 tiene el valor α . Entonces, por lo que acabamos de decir, ϕ_1 tendrá valores equivalentes a α en todos los instantes $t = (\alpha - \beta_1 + 2\pi r)/\omega_1$, siendo r un número entero cualquiera. En estos instantes la fase ϕ_2 tendrá los valores

$$\phi_2 = \omega_2(\alpha - \beta_1)/\omega_1 + \beta_2 + 2\pi r \omega_2/\omega_1.$$

Las distintas frecuencias son, generalmente, incommensurables, de modo que ω_2/ω_1 es un número irracional. Si reducimos cada valor de ϕ_2 al intervalo 0 a 2π restando el múltiplo entero apropiado de π , obtendremos, por tanto, cuando r varía de 0 a infinito, valores para ϕ_2 que están arbitrariamente cercanos a cualquier número dado en este margen. En otras palabras, en el transcurso de un tiempo suficientemente largo, ϕ_1 y ϕ_2 estarán arbitrariamente próximos de modo simultáneo a cualquier par dado de valores. Evidentemente, lo mismo es cierto también para las fases. Así pues, el movimiento turbulento tiene una determinada propiedad cuasiperiódica; en el curso de un tiempo suficientemente largo, el fluido pasa a través de estados arbitrariamente próximos a cualquier estado dado, determinado por una selección posible cualquiera de valores simultáneos de las fases ϕ .

Presentábamos el concepto del número de Reynolds crítico como aquel valor de R en el cual se produce en primer lugar la inestabilidad del flujo estacionario en el sentido descrito anteriormente. Sin embargo, el número de Reynolds crítico puede considerarse desde un punto de vista ligeramente distinto. Para $R < R_{cr}$ no existe ninguna solución no estacionaria estable de las ecuaciones de movimiento que no se amortigüen en el tiempo. Después de alcanzar el valor crítico aparece una solución no estacionaria estable, que es la que realmente aparece en un fluido móvil.

Por lo que se refiere a las investigaciones experimentales de los flujos que rodean a cualquier cuerpo ordinario de tamaño finito, parecen ser coincidentes las dos definiciones de R_{cr} . Sin embargo, y como es lógico, esto no es necesario que sea así, y pueden presentarse casos en principio en los que existan dos valores críticos diferentes: uno por encima del cual no pueda producirse ningún flujo no estacionario sin su amortiguamiento y otro por encima del cual resulte totalmente inestable el flujo estacionario. Evidentemente, el segundo debe ser mayor que el primero. Sin embargo, como hasta el presente no existe ninguna indicación de que existan realmente dichos casos de inestabilidad, no nos detendremos a analizarlos con más detalle.[†]

§ 28. Estabilidad del flujo entre cilindros en rotación

Para estudiar la estabilidad del flujo estacionario entre dos cilindros en rotación (§ 18) en el límite de número de Reynolds, muy grandes, podemos

[†] Ahora no nos ocupa el flujo por un tubo, en donde la pérdida de estabilidad posee unas propiedades poco usuales (ver § 29).

utilizar un método sencillo como el utilizado en § 4 para deducir la condición correspondiente a la estabilidad mecánica de un fluido en reposo en el interior de un campo gravitatorio (RAYLEIGH, 1916). El principio del método consiste en considerar cualquier elemento pequeño del fluido y suponer que este elemento se desplaza de la trayectoria que sigue en el flujo de que se trate. Como resultado de este desplazamiento, aparecen fuerzas que actúan sobre el elemento desplazado. Si el flujo original es estable, estas fuerzas deben tender a devolver el elemento a su posición original.

Cada elemento de fluido en el flujo no perturbado se mueve en una circunferencia $r = \text{constante}$ alrededor del eje de los cilindros. Sea $\mu(r) = mr^2\phi$ el momento angular o cinético de un elemento de masa m , siendo ϕ la velocidad angular. La fuerza centrífuga que actúa sobre él es μ^2/mr^3 ; esta fuerza está equilibrada por el gradiente radial de presiones en el fluido en rotación. Supongamos que se desplaza de su trayecto ligeramente un elemento de fluido situado a una distancia r_0 del eje, trasladándose a una distancia $r > r_0$ del eje. El momento angular del elemento permanece igual a su valor original $\mu_0 = \mu(r_0)$. La fuerza centrífuga que actúa sobre el elemento en su nueva posición es, por tanto, μ_0^2/mr^3 . Con objeto de que el elemento tienda a volver a su posición inicial, esta fuerza debe ser menor que el valor de equilibrio μ^2/mr^3 que se ve contrarrestado por el gradiente de presiones a la distancia r . Así pues, la condición necesaria para la estabilidad es $\mu^2 - \mu_0^2 > 0$. Desarrollando $\mu(r)$ en potencias de la diferencia positiva $r - r_0$, podemos escribir esta condición en la forma

$$\mu d\mu/dr > 0. \quad (28.1)$$

De acuerdo con la fórmula (18.3), la velocidad angular ϕ de las partículas del fluido móvil es

$$\phi = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2}.$$

Calculando $\mu = mr^2\phi$ y omitiendo factores que son ciertamente positivos, podemos escribir la condición (28.1) como

$$(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2)\phi > 0. \quad (28.2)$$

La velocidad angular ϕ varía monótonamente con Ω_1 en el cilindro interior hasta Ω_2 en el cilindro exterior. Si los dos cilindros giran en sentidos opuestos, es decir, si Ω_1 y Ω_2 tienen signos opuestos, la función ϕ varía de signo entre los cilindros y su producto por el número constante $\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2$ no puede ser positivo en todos los puntos. Así pues, en este caso (28.2) no es válido en todos los puntos del fluido y el flujo es inestable.

Estudiemos ahora los dos cilindros girando en el mismo sentido; tomando este sentido de rotación como positivo, tendremos $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 > 0$. Enton-

ces ϕ es positiva en todos los puntos y para que se cumpla la condición (28.2) es necesario que

$$\Omega_2 R_2^2 > \Omega_1 R_1^2. \quad (28.3)$$

Si $\Omega_2 R_2^2 < \Omega_1 R_1^2$, el flujo es inestable. Por ejemplo, si el cilindro exterior está en reposo ($\Omega_2 = 0$), mientras que el interior rota, entonces el flujo es inestable. Si, por otra parte, el cilindro interior está en reposo ($\Omega_1 = 0$), el flujo es estable.

Debe resaltarse que no se han tenido en cuenta en los razonamientos anteriores la influencia de las fuerzas viscosas cuando se desplaza el elemento de fluido. Por consiguiente, el método es únicamente aplicable para viscosidades pequeñas, es decir, para R grande.

Para estudiar la estabilidad del flujo para cualquier R es necesario seguir el método general partiendo de las ecuaciones (26.1) (G. I. TAYLOR, 1923). En el caso presente la distribución de velocidades no perturbada \mathbf{v}_0 depende únicamente de la coordenada radial (cilíndrica) r , y no del ángulo ϕ ni de la coordenada axial z . Así pues, tenemos para la perturbación \mathbf{v}_1 un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes que no contienen ni el tiempo ni las coordenadas ϕ y z . Podemos buscar soluciones de estas ecuaciones en la forma

$$\mathbf{v}_1 = e^{i(kz-\omega t)} \mathbf{f}(r), \quad (28.4)$$

siendo arbitraria la dirección del vector \mathbf{f} ; esta solución depende de z a través del factor periódico e^{ikz} , y el número de ondas k determina la periodicidad de la perturbación en la dirección z . Las frecuencias posibles ω , obtenidas resolviendo las ecuaciones con las condiciones límites necesarias en un plano perpendicular al eje ($\mathbf{v}_1 = 0$ para $r = R_1$ y $r = R_2$), serán entonces funciones de k , interviniendo R como un parámetro: $\omega = \omega(k, R)$. El punto donde aparece la inestabilidad está determinado por el valor de R , en el cual la función $\gamma_1 = \text{im } \omega$ se hace primeramente cero para algún determinado valor de k . Para $R < R_{\text{cr}}$, la función $\gamma_1(k, R)$ es siempre negativa, pero para $R > R_{\text{cr}}$ tenemos $\gamma_1 > 0$ en un determinado intervalo de valores de k . Supongamos que es k_{cr} el valor de k , para el cual $\gamma_1 = 0$ cuando $R = R_{\text{cr}}$. La función (28.4) correspondiente da la naturaleza del flujo que aparece (superpuesto al flujo original) en el fluido en el instante en que el flujo original deja de ser estable; es periódico a lo largo del eje de los cilindros, con una longitud de onda $2\pi/k_{\text{cr}}$.†

† Cuando R es ligeramente mayor que R_{cr} no existe un valor solo de k , sino todo un intervalo de valores en el cual $\text{im } \omega > 0$. Sin embargo, no debe pensarse que el flujo resultante tendrá que ser una superposición de flujos con diversas periodicidades. En realidad, se produce para cada R un flujo de periodicidad definida que estabiliza al flujo total. Sin embargo, esta periodicidad no puede establecerse a partir de las ecuaciones linealizadas (26.1).

Además de soluciones de la forma (28.4), que son independientes del ángulo ϕ , el sistema de ecuaciones que estamos considerando tiene también soluciones en las que v_1 contiene un factor $e^{im\phi}$, siendo m un número entero. Sin embargo, estamos interesados únicamente en la solución que corresponde a la primera aparición de la estabilidad. La solución con $m \neq 0$ nunca ha sido estudiada a este respecto. Sin embargo, es natural suponer que se presenta la inestabilidad primeramente respecto a las perturbaciones con $m = 0$, suposición que se ve totalmente confirmada por los resultados experimentales.

Debe también recordarse que incluso para un k determinado, la solución de la forma (28.4) no es única. En general, un cierto número de soluciones con valores diferentes de ω se corresponden con un valor dado de k . De nuevo estamos interesados únicamente en aquella que da el menor valor R_{cr} .

Resulta que una función imaginaria pura $\omega(k)$ corresponde a la solución que da el menor valor de R_{cr} . De aquí que, cuando $k = k_{cr}$, no sólo $im\omega$, sino el propio ω es cero. Esto significa que la primera inestabilidad del flujo estacionario entre cilindros en rotación conduce a la aparición de otro flujo que es también estacionario.

Teniendo en cuenta la gran complejidad del cálculo,[†] únicamente se han obtenido resultados numéricos para el caso en que el espacio situado entre dos cilindros es estrecho ($R_2 - R_1 \ll R_2$). La figura 13 muestra un ejemplo de la curva que separa las regiones de flujo estable e inestable (sombreadas). La rama de la derecha de la curva, correspondiente a la rotación de los dos cilindros en el mismo sentido es asintótica con la línea recta $\Omega_2 R_2^2 = \Omega_1 R_1^2$. Cuando aumenta el número de Reynolds, para un tipo determinado de flujo, los dos números $\Omega_1 R_1^2 / v$ y $\Omega_2 R_2^2 / v$ aumentan en factores iguales. En la figura 13 esto corresponde a un movimiento hacia arriba a lo largo de una linea que

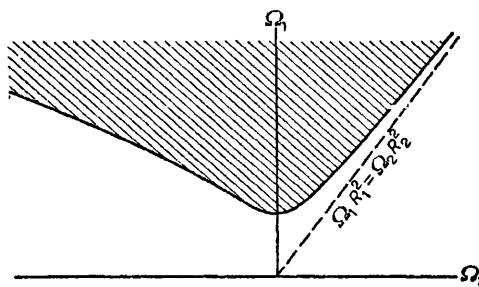


FIG. 13

[†] Podrán encontrarse detalles adicionales en el libro de C. C. LIN, *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge, 1955.

pasa por el origen con una pendiente determinada. En la parte de la derecha del diagrama (Ω_1 y Ω_2 positivos), las líneas para las cuales $\Omega_2 R_2^2 / \Omega_1 R_1^2 > 1$ no cortan a la curva que limita la región de inestabilidad. Por otra parte, si $\Omega_2 R_2^2 / \Omega_1 R_1^2 < 1$, entonces para números de Reynolds suficientemente grandes entramos en la región de inestabilidad, de acuerdo con la condición (28.3). En la parte izquierda del diagrama (Ω_1 y Ω_2 con signos opuestos), cualquier línea que pasa por el origen corta finalmente a la curva, es decir, el flujo puede hacerse inestable para cualquier valor del cociente $\Omega_2 R_2^2 / \Omega_1 R_1^2$, de acuerdo una vez más con los resultados obtenidos anteriormente. Para $\Omega_2 = 0$ (cuando únicamente gira el cilindro interior) la inestabilidad se establece cuando

$$\Omega_1 = 41,3\nu/h\sqrt{(hR_2)}, \quad (28.5)$$

en donde $h = R_2 - R_1$.

Sin embargo, la estabilidad del flujo en la parte no sombreada de la figura 13 no significa que el flujo permanezca realmente estacionario sin importar lo grande que se haga R . Los experimentos muestran que existe un límite más allá del cual resulta posible un flujo estable no estacionario. En esta región el flujo estacionario es «metaestable»: es estable respecto a pequeñas perturbaciones, pero inestable respecto a perturbaciones mayores. Si, debido a dichas perturbaciones, se presenta un flujo no estacionario en alguna región entre los cilindros, finalmente acabará por «desplazar» al flujo laminar en todo el espacio. Este flujo no estacionario tiene, tan pronto como aparece, un gran número de «grados de libertad» (en el sentido explicado en § 27), es decir, se desarrolla totalmente la turbulencia.

En la parte sombreada de la figura 13, el flujo resulta de nuevo turbulento para un valor de R suficientemente grande, pero existe al parecer muy pocos datos respecto al modo como aparece.

Un caso límite del flujo entre cilindros en rotación correspondientes a radios grande y pequeño $h = R_2 - R_1$, es el flujo entre dos planos paralelos con movimiento relativo (ver § 17). Este flujo es estable respecto a perturbaciones infinitamente pequeñas para cualquier valor de $R = Uh/\nu$, en donde U es la velocidad relativa de los planos. Sin embargo, resulta posible el movimiento turbulento estable para valores de R mayores que 1500 aproximadamente.

§ 29. Estabilidad del flujo en una tubería

El flujo estacionario en una tubería estudiado en § 17 pierde su estabilidad de una manera poco usual. Puesto que el flujo es uniforme en la dirección x (a lo largo de la tubería), la distribución de velocidades no perturbada v_0 es independiente de x . Análogamente al procedimiento seguido en § 28,

podemos, por consiguiente, buscar soluciones de las ecuaciones (26.1) que tengan la forma

$$\mathbf{v}_1 = e^{i(kx - \omega t)} \mathbf{f}(y, z). \quad (29.1)$$

Aquí de nuevo existe un valor $R = R_{cr}$, para el cual $\gamma_1 = im \omega$ se hace cero en primer lugar para un valor de k determinado. Sin embargo, tiene importancia el que la parte real de la función $\omega(k)$ es ahora no nula.

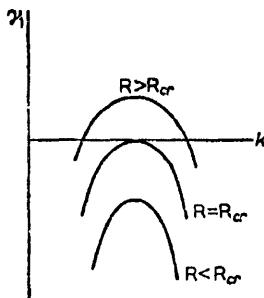


FIG. 14

Para valores de R sólo ligeramente superiores a R_{cr} , el margen de valores de k para los cuales $\gamma_1(k) > 0$ es pequeño y cae cerca del punto en el cual $\gamma_1(k)$ es un máximo, es decir, $d\gamma_1/dk = 0$ (como se ve en la figura 14). Supongamos que se produce una pequeña perturbación en alguna parte del flujo; éste será un paquete de ondas obtenido superponiendo una serie de componentes de la forma (29.1). En el transcurso del tiempo, las componentes para las cuales $\gamma_1(k) > 0$ serán amplificadas, mientras que las restantes se amortiguarán. El paquete de ondas amplificado así formado también será arrastrado corriente abajo con una velocidad igual a la velocidad $d\omega/dk$ del paquete; puesto que ahora estamos considerando ondas cuyos números de onda caen en un margen pequeño cerca del punto en el que $d\gamma_1/dk = 0$, la cantidad $d\omega/dk \approx d\omega_1/dk$ es real, y, por lo tanto, también lo es la velocidad real de propagación del paquete.

Este desplazamiento corriente abajo de la perturbación es muy importante y hace que la pérdida de estabilidad sea totalmente diferente de la descrita en § 28.

Hemos visto que, en el caso de flujo entre cilindros en rotación con $R > R_{cr}$ (cuando existen frecuencias con $im \omega > 0$), el flujo estacionario original deja de ser posible, puesto que incluso perturbaciones pequeñas se van incrementando hasta una amplitud infinita. Sin embargo, en el caso de flujo en la tubería, la amplificación de la perturbación se ve acompañada por su desplazamiento aguas abajo; si consideramos el flujo en un punto determinado de la tubería, resulta que la perturbación allí no se amplifica, sino que se

amortigua. También debe recordarse que, puesto que en realidad tenemos tuberías de longitud finita, aunque sea grande, cualquier perturbación puede transportarse fuera de la tubería antes de que llegue a romper el flujo laminar. Así pues, incluso para $R > R_{cr}$, el flujo estacionario en una tubería es, efectivamente, estable respecto a pequeñas perturbaciones y puede, en principio, tener lugar para valores de R considerablemente superiores a R_{cr} .

Puesto que las perturbaciones aumentan con la coordenada x (aguas abajo) y no con el tiempo en un punto determinado, es razonable estudiar este tipo de estabilidad del modo siguiente. Supongamos que en un punto determinado se aplica al flujo una perturbación que actúa continuamente con una frecuencia ω y examinenos lo que le ocurrirá a esta perturbación cuando se vea transportada por la corriente. Invertiendo la función $\omega = \omega(k)$, vemos que el número de ondas k corresponde a la frecuencia dada (real) ω . Si $\text{im } k < 0$, el factor e^{ikx} aumenta con x , es decir, la perturbación se ve amplificada aguas abajo. La curva en el plano ωR , dada por la ecuación $\text{im } k(\omega, R) = 0$, define la región de estabilidad y separa para cada R las frecuencias de las perturbaciones que son amplificadas y amortiguadas aguas abajo.

Los cálculos reales son extremadamente complicados. Se ha realizado una investigación completa únicamente para el flujo entre dos planos paralelos (C. C. LIN, 1946).[†] Sin embargo, es razonable suponer que los resultados serán cualitativamente iguales para el flujo en una tubería circular.

La curva límite para el flujo entre dos planos se muestra esquemáticamente en la figura 15. El área sombreada dentro de la curva es la región de inestabilidad. Cuando $R \rightarrow \infty$, ambas ramas de la curva son asintóticas hacia el eje R .[‡] Para el valor más pequeño de R , en el cual son posibles las pertur-

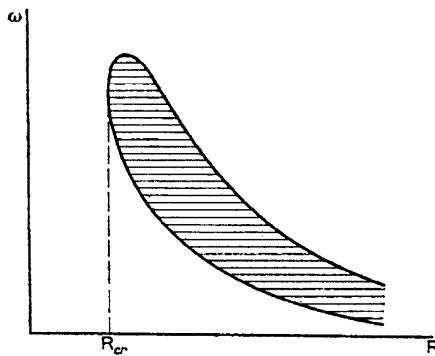


FIG. 15

[†] Un estudio detallado viene en el texto de C. C. LIN, *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge, 1955.

[‡] Las ecuaciones asintóticas de las dos ramas en el caso de R grande son: $\omega h/U = 5,0/R^{3/11}$, $\omega h/U = 11,2/R^{3/7}$.

baciones no amortiguadas, se encuentra, mediante los cálculos que $R_{cr} \approx 7700$, estando definida R como Uh/ν , en el que h es la distancia entre dos planos y U , la velocidad del fluido promediada a lo largo de esta distancia.

Así pues, para cualquier frecuencia comprendida entre cero y un valor máximo determinado, existe un intervalo finito de valores R , para el cual serán amplificadas las perturbaciones que posean la frecuencia de que se trate. Es interesante señalar que una viscosidad pequeña pero finita del fluido tiene, en cierto sentido, un efecto desestabilizador en comparación con la situación correspondiente a un fluido estrictamente ideal. Porque, cuando $R \rightarrow \infty$, se amortiguan las perturbaciones con cualquier frecuencia finita, pero cuando se introduce una viscosidad finita se alcanza, finalmente, una región de inestabilidad; un aumento adicional de la viscosidad (disminución de R), finalmente, hace que nos salgamos de esta región.

Sin embargo, estos cálculos no responden a la cuestión de si, para un valor suficientemente grande de R , el flujo en la tubería no presentará también una verdadera inestabilidad respecto a perturbaciones infinitamente pequeñas, es decir, a una inestabilidad resultante de la amplificación de las perturbaciones con el tiempo en un punto determinado. Reseñaremos el significado matemático de dicha inestabilidad. Consideraremos que se produce en el tiempo $t = 0$, en una región finita, una pequeña perturbación. Desarrollándola en forma de integral de Fourier respecto a x , podemos escribirla como

$$\iint f(\xi) e^{ik(x-\xi)} d\xi dk,$$

en donde $f(x)$ es una función que describe la perturbación inicial. En el transcurso del tiempo, cada componente de Fourier de la perturbación variará como $e^{-\omega t}$, con una frecuencia $\omega = \omega(k, R)$, de modo que la perturbación en el instante t vendrá dada por la integral

$$\iint f(\xi) e^{ik(x-\xi)-i\omega t} d\xi dk.$$

Como $f(x)$ es cero, excepto en una región finita, $x - \xi$ tiene un margen finito de valores. De aquí que el comportamiento de la integral para t grande está determinado esencialmente por el comportamiento de la integral

$$\int e^{-i\omega(k)t} dk.$$

Si esta integral tiende a infinito con t , el flujo es, de hecho, absolutamente inestable.

No se ha hecho todavía ningún estudio de este tipo, ni siquiera para un caso particular. Sin embargo, los resultados experimentales relativos al flujo en tuberías dan razones para suponer que no existe una verdadera inestabilidad respecto a perturbaciones arbitrariamente pequeñas para cualquier valor de R . Esto está indicado por el hecho de que si se evitan con todo cuidado

las perturbaciones a la entrada de la tubería, se obtienen números de Reynolds cada vez mayores, para los cuales puede observarse un flujo laminar.[†]

Sin embargo, los resultados experimentales también muestran que existe otro número de Reynolds crítico (que designaremos por $R_{cr'}$); éste determina el límite más allá del cual puede existir un flujo no estacionario estable (ver el final de § 27). Si se produce un flujo turbulento en una sección cualquiera de la tubería, entonces para $R < R_{cr'}$ la región turbulenta será arrastrada aguas abajo y disminuirá de tamaño hasta que desaparezca por completo; si, por otra parte, $R > R_{cr'}$, la región turbulenta se extenderá en el transcurso del tiempo hasta incluir cada vez más parte del flujo. Si se producen continuamente en la entrada de la tubería perturbaciones del flujo, entonces para $R < R_{cr'}$ se verán amortiguadas a alguna distancia hacia abajo de la tubería sin importar lo fuertes que sean inicialmente. Si, por otra parte, $R > R_{cr'}$, el flujo se convierte en turbulento en toda la tubería y esto puede conseguirse mediante perturbaciones que son tanto más débiles cuanto mayor sea R .[‡] Así pues, el flujo laminar en una tubería con $R > R_{cr'}$ es metaestable, siendo inestable respecto a perturbaciones de intensidad finita; la intensidad necesaria es tanto menor cuanto mayor sea R .

Como hemos mencionado al final del § 28, el flujo no estacionario que se produce por la rotura del flujo laminar metaestable es ya una turbulencia totalmente desarrollada. En este sentido, la aparición de turbulencias en una tubería es esencialmente diferente de la aparición de turbulencias debidas a la inestabilidad absoluta del flujo estacionario que rodea a cuerpos finitos. En este último caso, el flujo no estacionario parece que surge de un modo continuo en cuanto pasamos del valor $R_{cr'}$, aumentando gradualmente el número de grados de libertad (como se explicó en §§ 26 y 27). Sin embargo, en el caso de un flujo en una tubería, la turbulencia aparece discontinuamente. Esta diferencia origina, en particular, las distintas dependencias de la fuerza de arrastre con el número de Reynolds en ambos casos. Por ejemplo, si consideramos el movimiento de un cuerpo cualquiera dentro de un fluido, la fuerza F de arrastre sobre él es continua para $R = R_{cr'}$, en donde el flujo estacionario se hace absolutamente inestable. En este punto la curva $F = F(R)$ puede tener solamente un codo correspondiente a la variación en la naturaleza del flujo. Por otra parte, para el flujo en una tubería existen esencialmente dos leyes diferentes de arrastre para $R \geq R_{cr'}$: una para el flujo estacionario y la otra para el flujo turbulento. La fuerza de arrastre es discontinua para el valor de R , cualquiera que sea éste, que marca la transición de un tipo de flujo a otro.

[†] Realmente se ha observado un flujo laminar hasta $R \approx 50\,000$, en donde $R = Ud/v$, siendo d el diámetro del tubo y U la velocidad media en la sección completa.

[‡] En el caso de un tubo de sección recta circular $R_{cr'}$ está comprendido entre 1600 y 1700. Si el flujo ocurre entre planos paralelos, se ha observado flujo turbulento desde $R = 1400$ en adelante.

§ 30. Inestabilidad de las discontinuidades tangenciales

Los flujos en los cuales dos capas de fluido incompresible se mueven relativamente entre sí, deslizándose una sobre la otra, son absolutamente inestables si el fluido es ideal; la superficie de separación entre ambas capas de fluido sería una *superficie de discontinuidad tangencial*, sobre la cual la velocidad del fluido tangencial a la superficie es discontinua. Veremos más adelante (§ 35) que la propia naturaleza real del flujo da como resultado esta inestabilidad; demostraremos a continuación esta afirmación.

Si consideramos una pequeña parte de la superficie de discontinuidad y el flujo próximo a ella, podemos considerar dicha parte como un plano y como constantes a las velocidades del fluido v_1 y v_2 a cada lado. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que una de estas velocidades es cero; esto siempre puede conseguirse mediante una selección adecuada del sistema de coordenadas. Sea $v_2 = 0$, y designemos v_1 por v simplemente; tomemos como dirección de v el eje x y el eje z a lo largo de la normal a la superficie.

Supongamos que en la superficie de la discontinuidad se produce una ligera perturbación, en la que todas las magnitudes son funciones periódicas —las coordenadas de los puntos en la superficie, la presión y la velocidad del fluido— y proporcionales a $e^{i(\omega t - \omega z)}$. Consideremos el fluido que está en el lado en donde su velocidad es v y designemos por v' la pequeña variación de la velocidad debida a la perturbación. De acuerdo con las ecuaciones (26.1) (con $v = v_0$ constante y $r = 0$), tenemos el siguiente sistema de ecuaciones para la perturbación v' :

$$\operatorname{div} v' = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial t} + (v \cdot \operatorname{grad} v)v' = -\frac{\operatorname{grad} p'}{\rho}.$$

Puesto que v está dirigido a lo largo del eje x , la segunda ecuación puede volverse a escribir como

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + v \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{\operatorname{grad} p'}{\rho}. \quad (30.1)$$

Si tomamos la divergencia de ambos miembros, entonces el primer miembro es igual a cero en virtud de que $\operatorname{div} v' = 0$, de modo que p' debe satisfacer la ecuación de Laplace:

$$\Delta p' = 0. \quad (30.2)$$

Sea $\zeta = \zeta(x, t)$ el desplazamiento en la dirección z de los puntos situados en la superficie de discontinuidad, debido a la perturbación. La derivada $\partial \zeta / \partial t$ es la variación respecto al tiempo de la coordenada superficial z para un valor dado de x . Como la componente de la velocidad del fluido normal a la superficie de discontinuidad es igual a la variación del desplazamiento res-

pecto al tiempo de la propia superficie, tenemos que hasta la aproximación precisa

$$\partial\zeta/\partial t = v'_z - v\partial\zeta/\partial x, \quad (30.3)$$

en donde, como es natural, debe considerarse el valor de v'_z en la superficie.

Busquemos un valor de p' que posea la forma $p = f(z)e^{i(kx-\omega t)}$. Sustituyendo en (30.2), tomemos para $f(z)$ la ecuación $d^2f/dz^2 - k^2f = 0$, de aquí que $f = \text{constante} \times e^{\pm kz}$. Supongamos que el espacio en la parte que estamos considerando (lado 1) corresponde a valores positivos de z . Entonces debemos tomar $f = \text{constante} \times e^{kz}$, de modo que

$$p' = \text{constante} \times e^{i(kx-\omega t)} e^{kz}. \quad (30.4)$$

Sustituyendo esta expresión en la componente z de la ecuación (30.1), tenemos[†]

$$v'_z = kp'_1/i\rho_1(kv - \omega). \quad (30.5)$$

También puede buscarse el desplazamiento ζ en una forma proporcional al mismo factor exponencial $e^{i(kx-\omega t)}$, y así obtenemos de (30.3) $v'_z = i\zeta(kv - \omega)$. Esto nos da, en lugar de (30.5),

$$p'_1 = -\zeta\rho_1(kv - \omega)^2/k. \quad (30.6)$$

La presión p'_2 en la otra cara de la superficie viene dada por una fórmula semejante, en donde ahora $v = 0$ y el signo es contrario (puesto que en esta región $z < 0$, y todas las magnitudes deben ser proporcionales a e^{kz} y no a e^{-kz}). Así pues,

$$p'_2 = \zeta\rho_2\omega^2/k. \quad (30.7)$$

Hemos escrito densidades diferentes ρ_1 y ρ_2 con objeto de incluir el caso en el que tengamos un límite de separación entre dos fluidos inmiscibles diferentes.

Finalmente, a partir de la condición de que las presiones p'_1 y p'_2 son iguales en la superficie de discontinuidad, obtenemos $\rho_1(kv - \omega)^2 = -\rho_2\omega^2$, resultando, por tanto, la relación deseada entre ω y k , que es

$$\omega = kv \frac{\rho_1 \pm i\sqrt{(\rho_1\rho_2)}}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (30.8)$$

Vemos que ω es complejo y siempre deberá tener una parte imaginaria. Así pues, las discontinuidades tangenciales son inestables, aunque sea respecto a perturbaciones infinitamente pequeñas. En esta forma el resultado es cierto para viscosidades muy pequeñas, es decir, para valores muy grandes de R . En este caso carece de significado distinguir la inestabilidad del tipo

[†] El caso $kv = \omega$, aunque posible en principio, carece ahora de interés, puesto que la inestabilidad sólo puede surgir por causa de frecuencias ω complejas y no reales.

que es «transportada por» de la verdadera inestabilidad absoluta, puesto que al aumentar k , la parte imaginaria de ω crece sin límite y, por tanto, el «coeficiente de amplificación» de la perturbación cuando ésta es transportada a lo largo de la línea de corriente puede ser tan grande como queramos.

Cuando se tiene en cuenta la viscosidad finita, la discontinuidad tangencial ya no es tan marcada; la velocidad varía de un valor a otro a través de una capa de espesor finito. El problema de la estabilidad de un flujo de este tipo es matemáticamente del todo semejante al de la estabilidad del flujo en una capa límite laminar con un punto de inflexión en el perfil de la velocidad (§ 41). Los resultados experimentales indican que esta inestabilidad se establece muy pronto.

§ 31. Turbulencia totalmente desarrollada

El flujo turbulento a números de Reynolds suficientemente grandes está caracterizado por la presencia de una variación extremadamente irregular de la velocidad con el tiempo en cada punto. Este fenómeno se denomina *turbulencia totalmente desarrollada*. La velocidad fluctúa continuamente alrededor de un determinado valor medio y debe señalarse que la amplitud de esta variación no es, en general, pequeña en comparación con la propia velocidad. Se produce una variación irregular semejante de la velocidad entre puntos del propio flujo en un instante determinado. Las trayectorias de las partículas del fluido en el flujo turbulento son extremadamente complicadas, dando como resultado una mezcla amplia del fluido.

Como ya ha sido mencionado en la sección anterior, el flujo turbulento tiene un número muy grande de grados de libertad. Los valores de las fases iniciales β_j , que corresponden a estos grados de libertad, se determinan mediante las condiciones iniciales del flujo. La especificación de las condiciones iniciales exactas que determinarían el valor de tantas magnitudes es, sin embargo, poco real, de modo que ni siquiera tiene significado físico el plantear el problema de esta forma.

La posición aquí es semejante a la que resultaría si intentásemos considerar el movimiento de todas las moléculas que forman un cuerpo macroscópico utilizando las ecuaciones de la mecánica; una vez más el problema de especificar las condiciones que determinan los valores iniciales de las coordenadas y velocidades de todas las moléculas, y luego la integración de las ecuaciones del movimiento, carece de significado físico. La analogía se puede extender aún más. Un cuerpo macroscópico, considerado como formado por moléculas individuales, tiene un número enorme de grados de libertad. Una descripción microscópica exacta del estado del cuerpo exigiría la determinación de las coordenadas y velocidades de todas las partículas

que lo componen. El modo exacto en que estas magnitudes varían con el tiempo depende de sus valores en el instante inicial. Sin embargo, debido a la extrema complejidad e irregularidad del movimiento de las moléculas, podemos suponer que en un intervalo de tiempo suficientemente largo, las velocidades y coordenadas de las moléculas adquieran todos los posibles conjuntos de valores, de modo que el efecto de las condiciones iniciales se difumina e incluso desaparece. Esto, como se sabe, hace posible el estudio estadístico de los cuerpos macroscópicos.

Un caso semejante se presenta en el caso turbulento. Para una descripción exacta de la variación respecto al tiempo de la distribución de velocidades del fluido móvil, sería necesario dar los valores de todas las fases iniciales β_i ; entonces se conocerían los valores de todas las fases $\phi_i = \omega_i t + \beta_i$, en cada instante. Hemos visto que, cualesquiera que sean las fases iniciales β_i , al transcurrir un intervalo suficientemente largo de tiempo, el fluido pasa a través de estados arbitrariamente próximos a cualquier estado dado definido por una selección posible cualquiera de valores simultáneos de las fases ϕ_i . De aquí se deduce que, al considerar el flujo turbulento, las condiciones iniciales reales carecen de cualquier efecto después de haber transcurrido un intervalo de tiempo suficientemente largo. Esto muestra que la teoría del flujo turbulento debe ser una teoría estadística. Todavía no se ha desarrollado ninguna teoría completa cuantitativa de la turbulencia. Sin embargo, se conocen varios resultados cualitativos muy importantes, los cuales serán mencionados en las secciones siguientes.

Introduzcamos el concepto de velocidad media, obtenida promediando en intervalos largos de tiempo la velocidad en cada punto. Mediante dicho proceso de promediar, la variación irregular de la velocidad se suaviza y la velocidad media varía suavemente de un punto a otro. En lo que sigue, designaremos la velocidad media por $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{v}}$. La diferencia $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ entre la velocidad verdadera y la velocidad media varía irregularmente de la manera característica propia de la turbulencia; se denominará en lo que sigue *parte fluctuante* de la velocidad.

Consideremos con más detalle la naturaleza de este movimiento regular que se superpone al flujo medio. Este movimiento puede, a su vez, considerarse cualitativamente como la superposición de *remolinos* o *torbellinos turbulentos* de diferentes tamaños o distintas escalas; entendemos por tamaño o escala de un remolino el orden de magnitud de la distancia en que la velocidad varía apreciablemente. Cuando el número de Reynolds aumenta, aparecen en primer lugar grandes remolinos; estos remolinos aparecen tanto más tarde cuanto más pequeños sean. Para números de Reynolds muy grandes, están presentes remolinos de todos los tamaños, desde los mayores hasta los menores. Los remolinos más grandes juegan una parte importante en cualquier flujo turbulento, siendo estos remolinos del orden de las dimensiones

de la región en la que tiene lugar el flujo; en lo que sigue designaremos por l este orden de magnitud para un flujo turbulento determinado cualquiera. Estos grandes remolinos o torbellinos tienen las mayores amplitudes. La velocidad en ellos es comparable con la variación de la velocidad media a lo largo de la distancia l ; designaremos mediante Δu el orden de magnitud de esta variación.[†] Las frecuencias correspondientes a estos remolinos son del orden de u/l , cociente entre la velocidad media u (y no de su variación Δu) y la dimensión l . En efecto, es la frecuencia lo que determina el período con el que se reproduce la imagen o espectro del movimiento cuando se observa en un sistema de referencia fijo. Sin embargo, relativamente a dicho sistema, la imagen o esquema completo se mueve con el fluido a una velocidad del orden de u .

Los remolinos menores, por otra parte, que corresponden a frecuencias grandes, participan en el flujo turbulento con amplitudes mucho menores. Pueden considerarse con una estructura detallada fina superpuesta sobre los remolinos turbulentos fundamentales grandes. Sólo una parte comparativamente pequeña de la energía cinética total del fluido radica en estos remolinos pequeños.

A partir de la descripción del flujo turbulento dado anteriormente, podemos obtener una conclusión respecto al modo de variación de la velocidad fluctuante desde un punto a otro en un instante dado cualquiera. En distancias grandes (comparables con l), la variación de la velocidad fluctuante viene dada por la variación de la velocidad de los remolinos grandes, y, por consiguiente, es comparable con Δu . En distancias pequeñas (en comparación con l), viene determinada por los remolinos pequeños, y, por consiguiente, es pequeña (comparada con Δu).[‡] Se obtiene el mismo tipo de descripción si observamos la variación de la velocidad con el tiempo en un punto dado cualquiera. En intervalos de tiempo cortos (en comparación con $T \sim l/u$), la velocidad no varía apreciablemente, mientras que en intervalos largos varía en una cantidad del orden de Δu .

La longitud l aparece como una dimensión característica en el número de Reynolds R , el cual determina las propiedades de un flujo dado. Además, podemos introducir el concepto cualitativo de los números de Reynolds correspondientes a remolinos turbulentos de diversos tamaños. Si λ es el orden

[†] No estamos ahora hablando del orden de magnitud, ni de la propia velocidad media, sino de su variación (en distancias del orden de l), puesto que esta variación Δu es la que caracteriza la velocidad del flujo turbulento. La velocidad media propiamente puede tener cualquier valor, dependiendo del sistema de referencia utilizado.

Puede mencionarse también que los resultados experimentales indican que el tamaño de los remolinos más grandes es realmente un poco menor que l y que su velocidad es algo menor que Δu .

[‡] Pero grande comparada con la variación de la velocidad media sobre estas distancias reducidas.

de magnitud del tamaño de un remolino dado y v_λ el orden de magnitud de su velocidad, entonces el número de Reynolds correspondiente se define como $R_\lambda \sim v_\lambda \lambda / \nu$. Este número es tanto menor cuanto más pequeño sea el tamaño del remolino.

Cuando se tienen números de Reynolds R grandes, los números de Reynolds R_λ de los remolinos grandes son también elevados. Sin embargo, números de Reynolds altos equivalen a viscosidades pequeñas. Por consiguiente, podemos sacar la conclusión de que en el caso de remolinos grandes, que son la base de cualquier flujo turbulento, la viscosidad carece de importancia y puede igualarse a cero, de modo que el movimiento de este remolino obedece a la ecuación de Euler. En particular, se deduce que no existe ninguna disipación apreciable de energía en los remolinos grandes.

La viscosidad del fluido resulta importante únicamente en el caso de los remolinos más pequeños, cuyo número de Reynolds es comparable con la unidad. Designaremos el tamaño de dichos remolinos por λ_0 , valor que determinaremos en la sección siguiente. La disipación de la energía se produce en estos remolinos pequeños, que carecen de importancia respecto al esquema o modelo general de flujo turbulento.

Llegamos así a la siguiente concepción de la disipación de energía en el flujo turbulento. La energía pasa de los remolinos grandes a otros más pequeños, prácticamente sin que se produzca ninguna disipación en este proceso. Podemos decir que existe un flujo continuo de energía desde los remolinos grandes a los pequeños, es decir, desde frecuencias pequeñas a grandes. Este flujo de energía se disipa en los remolinos más pequeños, en donde se transforma la energía cinética en calor.[†]

Puesto que la viscosidad de fluido tiene importancia únicamente en el caso de remolinos pequeños, podemos decir que ninguna de las magnitudes que pertenecen a los remolinos de tamaño $\lambda \gg \lambda_0$ pueden depender de ν (más exactamente, estas cantidades no pueden modificarse si ν varía mientras se mantienen invariables las demás condiciones del movimiento). Esta circunstancia reduce el número de magnitudes que determinan las propiedades del flujo turbulento y da como resultado el que los rozamientos de semejanza, en los que intervienen las dimensiones de las magnitudes disponibles, resultan muy importantes en la investigación de la turbulencia.

Aplicaremos estos razonamientos para determinar el orden de magnitud de la disipación de energía en el flujo turbulento. Sea ϵ la disipación media de energía por unidad de tiempo y por unidad de masa de fluido.[‡] Hemos visto que esta energía se deduce de los remolinos grandes, de donde se va

[†] Para que se mantenga un estado estacionario es necesario, naturalmente, que estén presentes fuentes externas de energía que suministren energía de modo continuo a los remolinos grandes.

[‡] En este capítulo ϵ designa la disposición media de energía y no la energía interna del fluido.

transfiriendo gradualmente a los remolinos menores hasta que se disipa en los de tamaño $\sim \lambda_0$. De aquí que, aunque la disipación se deba finalmente a la viscosidad, puede determinarse únicamente el orden de magnitud de ϵ para aquellas magnitudes que caracterizan a los remolinos grandes. Estas son la densidad del fluido ρ , la dimensión l y la velocidad Δu . A partir de estas tres magnitudes sólo podemos formar otra que posea las dimensiones de ϵ , es decir, dimensiones de erg/g s = cm²/s³. Así pues, encontramos

$$\epsilon \sim (\Delta u)^3/l, \quad (31.1)$$

y esta expresión determina el orden de magnitud de la disipación de energía del flujo turbulento.

En algunos aspectos un fluido en movimiento turbulento puede describirse cualitativamente diciendo que posee una «viscosidad turbulenta» ν_{turb} que difiere de la verdadera viscosidad cinética ν . Puesto que ν_{turb} caracteriza las propiedades del flujo turbulento, su orden de magnitud está determinado por ρ , Δu y l . La única magnitud que puede formarse con ellas con las dimensiones de la viscosidad dinámica es, por tanto,

$$\nu_{\text{turb}} \sim l \Delta u. \quad (31.2)$$

El cociente entre la viscosidad turbulenta y la viscosidad ordinaria es, en consecuencia, $\nu_{\text{turb}}/\nu \sim R$, es decir, aumenta con el número de Reynolds.[†]

La disipación de energía ϵ se expresa en función de ν_{turb} por

$$\epsilon \sim \nu_{\text{turb}}(\Delta u/l)^2 \quad (31.3)$$

de acuerdo con la definición normal de la viscosidad. Mientras que ν determina la disipación de energía en función de las derivadas espaciales de la verdadera velocidad, ν_{turb} la relaciona con el gradiente ($\sim \Delta u/l$) de la velocidad media.

También se pueden aplicar razonamientos de semejanza para determinar el orden de magnitud Δp de la variación de la presión en la región del flujo turbulento. La única magnitud que tiene la dimensión de la presión y que puede formarse con ρ , l y Δu es $\rho(\Delta u)^2$. De aquí que tengamos

$$\Delta p \sim \rho(\Delta u)^2. \quad (31.4)$$

§ 32. Turbulencia local

Consideremos ahora las propiedades de la turbulencia considerando los tamaños de remolinos λ en el caso en que sean pequeños en comparación con el tamaño fundamental de remolino l . Nos referiremos a estas propie-

[†] Sin embargo, en realidad, debe incluirse un coeficiente numérico bastante grande. Este se debe a que, como mencionamos antes, l y Δu pueden diferir considerablemente de la escala y velocidad reales del flujo turbulento. El cociente ν_{turb}/ν puede escribirse con más exactitud como $\nu_{\text{turb}}/\nu \sim R/R_{\text{cr}}$, fórmula que tiene en cuenta de que deben ser de valor comparable, en realidad no para $R \sim 1$, sino para $R \sim R_{\text{cr}}$.

dades como propiedades *locales* de la turbulencia. Consideremos el fluido que está lejos de todas las superficies sólidas (de modo más preciso que está a distancia de ellas, que son grandes en comparación con λ).

Es natural admitir que dicha turbulencia a pequeña escala, lejos de los cuerpos sólidos, es *isótropa*. Esto significa que, en regiones cuyas dimensiones son pequeñas en comparación con λ , las propiedades del flujo turbulento son independientes de la dirección; en particular, no dependen de la dirección de la velocidad media. Debe resaltarse que ahora y en lo que sigue de la sección presente, cuando hablamos de las propiedades del flujo turbulento en una pequeña región del fluido, significamos el movimiento relativo de las partículas del fluido en dicha región y no el movimiento absoluto de la región como un todo, que se debe a los remolinos mayores.

Resulta que pueden obtenerse varios resultados muy importantes relativos a las propiedades locales de la turbulencia utilizando razonamientos de semejanza. Estos resultados se deben a A. N. KOLMOGOROV y a A. M. OBUKHOV (1941). Para obtenerlos, determinaremos en primer lugar qué parámetros pueden intervenir en las propiedades del flujo turbulento en regiones pequeñas en comparación con λ , pero grandes en comparación con las distancias λ_0 , en las que la viscosidad del fluido empieza a ser importante. Estudiaremos a continuación lo que ocurre a estas distancias intermedias. Los parámetros en cuestión son las densidades del fluido ρ y otra magnitud que caracteriza cualquier flujo turbulento que es la energía ϵ disipada por unidad de tiempo y por unidad de masa del fluido. Hemos visto que ϵ es el «flujo de energía» que pasa continuamente desde los remolinos mayores a los menores. De aquí que aunque la disipación de energía se deba en último término a la viscosidad del fluido y se produzca en los remolinos más pequeños, la magnitud ϵ viene determinada por las propiedades de los remolinos grandes. Es natural suponer que (para valores de ρ y ϵ dados) las propiedades locales de la turbulencia son independientes de la dimensión λ y de la velocidad Δu del flujo como un todo. Tampoco puede aparecer la viscosidad del fluido ν en cualquiera de las magnitudes en que estamos interesados en el momento actual (recordemos que nos preocupan las distancias $\lambda \gg \lambda_0$).

Determinemos el orden de magnitud v_λ de la variación de la velocidad de turbulencia en distancias del orden de λ . Debe determinarse únicamente mediante ρ , ϵ y, como es natural, la propia distancia λ . A partir de estas tres magnitudes podemos formar solamente otra que tenga dimensiones de la velocidad, $(\epsilon \lambda)^{1/3}$. De aquí que podamos decir que debe ser válida la relación

$$v_\lambda \sim (\epsilon \lambda)^{1/3} \quad (32.1)$$

Así pues, se llega a un resultado muy importante: la variación de velocidad

a lo largo de una distancia pequeña es proporcional a la raíz cúbica de la distancia (*ley de Kolmogorov y Obukhov*). También puede considerarse la magnitud v_λ como la velocidad de los remolinos turbulentos cuyo tamaño es del orden de λ .†

Planteemos ahora el problema de modo ligeramente distinto y determinemos el orden de magnitud v_τ de la variación de velocidad en un punto determinado a lo largo de un intervalo de tiempo τ que es corto en comparación con el tiempo $T \sim l/u$ que caracteriza el flujo como un todo. Para ello, observaremos que, puesto que existe un flujo medio neto, cualquier parte del fluido se ve desplazada durante el intervalo τ a lo largo de una distancia del orden de τu , siendo u la velocidad media. De aquí que la porción del fluido que esté en un punto determinado en el instante τ habrá estado a una distancia τu de dicho punto en el instante inicial. Por consiguiente, podemos obtener la magnitud requerida v_τ sustituyendo directamente λ por τu en (32.1):

$$v_\tau \sim (\epsilon \tau u)^{\frac{1}{3}}. \quad (32.2)$$

Así pues, la variación de la velocidad en un intervalo de tiempo τ es proporcional a la raíz cúbica de dicho intervalo.

Puede distinguirse la magnitud v_τ' de la que denominaremos v_τ' , variación de la velocidad de una parte del fluido cuando se mueve en el espacio. Esta variación evidentemente puede depender únicamente de ρ y ϵ , que determinan las propiedades locales de la turbulencia y, como es natural, del propio τ . Formando la única combinación de ρ , ϵ y τ que tienen dimensiones de velocidad, se obtiene

$$v_\tau' \sim (\epsilon \tau)^{\frac{1}{2}}. \quad (32.3)$$

A diferencia de la variación de velocidad en un punto determinado, resulta proporcional a la raíz cuadrada de τ y no a su raíz cúbica. Es fácil ver que, en el caso de τ pequeño en comparación con T , v_τ' es siempre menor que v_τ .‡

† La variación v_λ de la velocidad en distancias pequeñas es fundamentalmente la variación de la parte fluctuante de la velocidad; la variación de la velocidad media en distancias reducidas es pequeña en comparación con la variación de la velocidad fluctuante en aquellas distancias.

Puede obtenerse la relación (32.1) por otro procedimiento, expresando la disipación ϵ , que es una constante en función de magnitudes que caractericen los remolinos de tamaño λ ; ϵ debe ser proporcional al gradiente al cuadrado de la velocidad v_λ y al coeficiente de viscosidad turbulenta apropiado

$$v_{\text{turb}, \lambda} \sim v_\lambda \lambda$$

[ver (31.2), (31.3)].

$$\epsilon \sim v_{\text{turb}, \lambda} (v_\lambda / \lambda)^2 \sim v_\lambda^3 / \lambda,$$

de donde se obtiene (32.1).

‡ En la deducción de (32.2) se ha supuesto en esencia la desigualdad $v_\tau' \ll v_\tau$.

Utilizando la expresión (31.1) para ϵ , podemos volver a escribir (32.1) como

$$v_\lambda \sim \Delta u(\lambda/l)^{\frac{1}{4}}. \quad (32.4)$$

Análogamente podemos escribir v_τ como

$$v_\tau \sim \Delta u(\tau/T)^{\frac{1}{4}}, \quad (32.5)$$

en donde $T \sim l/u$.

Encontremos ahora a qué distancias empieza a ser importante la viscosidad del fluido. Estas distancias λ_0 determinan también el orden de magnitud del tamaño de los remolinos más pequeños en el flujo turbulento (denominada «escala interna» de la turbulencia a diferencia de la «escala externa» l). Para determinar λ_0 , formemos el número de Reynolds $R_\lambda \sim v_\lambda \lambda/\nu$; utilizando (32.4), obtenemos

$$R_\lambda \sim \Delta u \cdot \lambda^{4/3} / \nu l^{1/3}.$$

Introduciendo el número de Reynolds $R \sim l \Delta u / \nu$ para el flujo como un todo, podemos volver a escribir esta expresión como $R_\lambda \sim R(\lambda/l)^{4/3}$. El orden de magnitud de λ_0 es aquél para el cual $R_{\lambda_0} \sim 1$. De aquí se tiene

$$\lambda_0 \sim l/R^{\frac{1}{4}}. \quad (32.6)$$

Puede obtenerse la misma expresión formando mediante ρ , ϵ y ν , la única combinación que posee las dimensiones de longitud, a saber, $\lambda_0 \sim (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$, y expresando ϵ en función de Δu y l mediante (31.1).

Así pues, la escala interna de la turbulencia es inversamente proporcional a $R^{3/4}$. Para la velocidad correspondiente tenemos

$$v_{\lambda_0} \sim \Delta u / R^{\frac{1}{4}}; \quad (32.7)$$

la cual disminuye también cuando R aumenta. Finalmente, el orden de magnitud de las frecuencias correspondiente a los remolinos de este tamaño es $\omega_0 \sim u/\lambda_0$, o sea,

$$\omega_0 \sim u R^{\frac{1}{4}} / l. \quad (32.8)$$

Esta expresión nos da el orden de magnitud del extremo superior del espectro de frecuencias de la turbulencia; el extremo inferior corresponde a frecuencias del orden de u/l . Así pues, el margen de frecuencias aumenta con el número de Reynolds proporcionalmente a $R^{3/4}$.

Razonamientos semejantes nos permiten determinar el orden de magnitud del número de grados de libertad de un flujo turbulento. Designemos por n el número de grados de libertad por unidad de volumen del fluido; n tiene dimensiones de $1/cm^3$. Este número puede únicamente depender de ρ , ϵ y también de la viscosidad ν , puesto que esta última determina el límite inferior de las dimensiones de los remolinos turbulentos. A partir de estas tres magnitudes podemos formar únicamente otra que posea las dimensio-

nes $1/\text{cm}^3$, a saber, $(\epsilon/r^3)^{3/4}$; ésta resulta ser exactamente $1/\lambda_0^3$, como era previsible. Así pues, tenemos

$$n \sim 1/\lambda_0^3 \sim R^{9/4}/l^3. \quad (32.9)$$

Se tiene el número total N de grados de libertad multiplicando n por el volumen de la región de flujo turbulento, que es del orden de l^3 :[†]

$$N \sim R^{9/4}. \quad (32.10)$$

Finalmente, consideremos las propiedades del flujo en regiones cuya dimensión l es pequeña en comparación con λ_0 . En dichas regiones el flujo es regular y su velocidad varía suavemente. De aquí que podamos desarrollar v_λ en una serie de potencias de λ y, reteniendo únicamente el primer término, se obtiene $v_\lambda = \text{constante} \times \lambda$. El orden de magnitud de la constante es v_{λ_0}/λ_0 , puesto que para $\lambda \sim \lambda_0$ debemos tener $v_\lambda \sim v_{\lambda_0}$. Sustituyendo las expresiones de (32.6) y (32.7), se obtiene finalmente

$$v_\lambda \sim \Delta u \cdot R^{1/4} \lambda / l. \quad (32.11)$$

También podía haberse obtenido directamente esta fórmula igualando dos expresiones para la disipación de energía ϵ : la expresión $(\Delta u)^3/l$ (31.1), que determina ϵ en función de las magnitudes que caracterizan los remolinos grandes, y la expresión $\nu(v_\lambda/\lambda)^2$, que determina ϵ en función del gradiente de velocidades ($\sim v_\lambda/\lambda$) para los remolinos en los que realmente se produce la disipación de la energía.

PROBLEMA

Dos partículas de fluido están a una distancia $\lambda_1 (\gg \lambda_0)$. Determinar el orden de magnitud del tiempo τ requerido para que la partícula recorra una distancia $\lambda_2 (\lambda_1 \ll \lambda_2 \ll l)$.

Solución. Si $\lambda \gg \lambda_0$, tenemos a partir de consideraciones dimensionales que $d\lambda/dt \sim (\epsilon\lambda)^{1/4}$. Integrando esta expresión y utilizando el hecho de que $\lambda_2 \gg \lambda_1$, resulta $\tau \sim (\lambda_2^2/\epsilon)^{1/4}$.

§ 33. Correlación de velocidades

La fórmula (32.1) determina cualitativamente la *correlación de velocidades* en la turbulencia local, es decir, la relación entre las velocidades que existen en dos puntos vecinos. Definiremos ahora algunas magnitudes que

[†] Las fórmulas (32.6)-(32.10) determinan la forma en que varían las magnitudes correspondientes con el número de Reynolds. Sin embargo, desde el punto de vista cuantitativo debe recordarse que puede aparecer en ellas realmente un factor numérico considerable. Por ejemplo, el número de grados de libertad debe ser del orden de la unidad, no para $R \sim 1$, sino para $R \sim R_{cr}$. De aquí que en (32.10) debámos escribir el coeficiente R/R_{cr} en lugar de R :

$$N \sim (R/R_{cr})^{9/4}.$$

van a servir para caracterizar cuantitativamente esta correlación.[†] Una de ellas puede ser, por ejemplo, el tensor cuyos componentes son

$$B_{ik} = \overline{(v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})}, \quad (33.1)$$

en donde v_2 y v_1 son las velocidades del fluido en dos puntos vecinos y la barra designa la operación de promediar respecto al tiempo.[‡] El radio vector desde el punto 1 al punto 2 se designará por \mathbf{r} ; suponemos que su módulo r es pequeño en comparación con l (pero no necesariamente grande en comparación con la escala interna de turbulencia λ_0).

Como la turbulencia local es isótropa, el tensor B_{ik} no puede depender de la dirección espacial. El único vector que puede aparecer en la expresión correspondiente a B_{ik} es el radio vector \mathbf{r} . En otras palabras, B_{ik} puede contener, aparte del módulo r de \mathbf{r} , únicamente el tensor unidad δ_{ik} y el vector unidad \mathbf{n} en la dirección de \mathbf{r} . La forma más general de un tensor de rango dos de este tipo es

$$B_{ik} = A(r)\delta_{ik} + B(r)n_i n_k. \quad (33.2)$$

Tomaremos los ejes coordenados, de modo que uno de ellos esté en la dirección de \mathbf{n} , designando la componente de velocidad a lo largo del mismo por v_r y la componente perpendicular a \mathbf{n} por v_t . La componente B_{rr} es entonces el valor medio del cuadrado de la velocidad relativa de dos partículas de fluido vecinas a lo largo de la línea que las une. Análogamente, B_{tt} es el valor medio del cuadrado de la velocidad transversal de una película respecto a la otra, mientras que B_{rt} es el valor medio del producto de ambos componentes de velocidad. Puesto que $n_r = 1$, $n_t = 0$, tenemos a partir de (33.2)

$$B_{rr} = A + B, \quad B_{tt} = A, \quad B_{rt} = 0 \quad (33.3)$$

Deduzcamos ahora una relación entre B_{rr} y B_{tt} . Para ello observaremos primero que la variación de la velocidad a lo largo de distancias pequeñas se debe principalmente a los pequeños remolinos. Las propiedades de la turbulencia local no dependen de los remolinos grandes que se superponen sobre el mismo. De aquí que para calcular el tensor B_{ik} basta tomar el caso particular de flujo turbulento completamente isótropo y homogéneo, en el

[†] Los resultados mencionados en esta sección se deben a T. VON KÁRMÁN y L. HOWARTH (1938) y a A. N. KOLMOGOROV (1941). Posteriormente se darán relaciones análogas para las fluctuaciones de temperatura en un flujo turbulento con calentamiento no uniforme (ver § 54, problemas 3 y 4).

[‡] Si no existiese correlación entre las velocidades en los puntos 1 y 2, los valores medios de los productos en (33.1) se reducirían a los productos del valor medio de cada factor separadamente y, por tanto, serían nulos.

que la velocidad media del fluido es cero.[†] Desarrollando los paréntesis en (33.1), tenemos

$$\overline{B_{ik}} = \overline{\overline{v_{1i}v_{1k}}} + \overline{\overline{v_{2i}v_{2k}}} - \overline{\overline{v_{1i}v_{2k}}} - \overline{\overline{v_{1k}v_{2i}}}.$$

Puesto que el flujo es completamente homogéneo e isótropo, tenemos $\overline{\overline{v_{1i}v_{1k}}} = \overline{\overline{v_{2i}v_{2k}}}$, y $\overline{\overline{v_{1i}v_{2k}}} = \overline{\overline{v_{1k}v_{2i}}}$. Así pues,

$$\overline{B_{ik}} = 2\overline{\overline{v_{1i}v_{1k}}} - 2\overline{\overline{v_{1i}v_{2k}}}. \quad (33.4)$$

Derivemos dicha expresión respecto a las coordenadas del punto 2:

$$\partial \overline{B_{ik}} / \partial x_{2k} = -2\overline{\overline{v_{1i}\partial v_{2k}/\partial x_{2k}}}.$$

Sin embargo, debido a la ecuación de continuidad $\partial v_{2k}/\partial x_{2k} = 0$, de modo que $\partial \overline{B_{ik}} / \partial x_{2k} = 0$. Puesto que B_{ik} es una función sólo de las componentes $x_i = x_{2i} - x_{1i}$ del vector r , la derivación respecto a x_{2k} es equivalente a derivar respecto a x_k . Sustituyendo (33.2) tenemos, después de un cálculo simple, que $A' + B' + 2B/r = 0$, designando con el símbolo prima la derivación respecto a r . Sustituyendo (33.3), podemos escribir esta expresión como $B'_{rr} + 2(B_{rr} - B_{tt})/r = 0$, de donde se obtiene, finalmente, la relación general existente entre B_{rr} y B_{tt} :

$$2rB_{tt} = d(r^2 B_{rr})/dr. \quad (33.5)$$

A distancias r grandes en comparación con λ_0 , la diferencia de velocidad es proporcional a $r^{1/3}$, de acuerdo con (32.1). Por tanto, las componentes del tensor B_{ik} para dicho valor de r son proporcionales a $r^{2/3}$. Sustituyendo en (33.5) $B_{rr} = \text{constante} \times r^{2/3}$, $B_{tt} = \text{constante} \times r^{2/3}$, obtenemos la relación simple

$$B_{tt} = \frac{4}{3}B_{rr}. \quad (33.6)$$

En el caso de distancias r pequeñas en comparación con λ_0 , la diferencia de velocidades es proporcional a r y, por tanto, B_{rr} y B_{tt} son proporcionales a r^2 . La fórmula (33.5) nos da entonces la relación

$$B_{tt} = 2B_{rr}. \quad (33.7)$$

A estas distancias ($r \ll \lambda_0$), B_{tt} y B_{rr} pueden también expresarse separadamente en función de la disipación de energía media ϵ . Escribamos $B_{rr} = ar^2$, siendo a una constante y combinando (33.2), (33.3) y (33.4), obtenemos

$$\overline{v_{1i}v_{2k}} = \overline{v_{1i}v_{1k}} - ar^2\delta_{ik} + \frac{1}{2}ar^2n_in_k.$$

[†] Podemos imaginarnos este flujo como el de un fluido sometido a una fuerte agitación y abandonado a sí mismo. Como es natural, el flujo irá disminuyendo con el transcurso del tiempo. La operación de promedio de la fórmula (33.1) debe tomarse entonces hablando estrictamente, no como promedio a lo largo del tiempo, sino extendido a todas las posiciones posibles de los puntos 1 y 2 (para una distancia r dada entre ellos) en un instante dado.

Derivando esta relación, se encuentra

$$\overline{\frac{\partial v_{1t}}{\partial x_{1l}} \frac{\partial v_{2t}}{\partial x_{2l}}} = 15a, \quad \overline{\frac{\partial v_{1t}}{\partial x_{1l}} \frac{\partial v_{2t}}{\partial x_{2t}}} = 0.$$

Puesto que estas expresiones son válidas para un valor de r arbitrariamente pequeño, podemos hacer $x_{1t} = x_{2t}$, y de aquí:

$$\overline{\left(\frac{\partial v_t}{\partial x_t} \right)^2} = 15a, \quad \overline{\frac{\partial v_t}{\partial x_t} \frac{\partial v_t}{\partial x_t}} = 0.$$

Sin embargo, de acuerdo con la fórmula general (16.3), tenemos como valor de la disipación de energía media

$$\epsilon = \frac{1}{2}\nu \left(\overline{\frac{\partial v_t}{\partial x_t}} + \overline{\frac{\partial v_t}{\partial x_t}} \right)^2 = \nu \left[\overline{\left(\frac{\partial v_t}{\partial x_t} \right)^2} + \overline{\frac{\partial v_t}{\partial x_t} \frac{\partial v_t}{\partial x_t}} \right] = 15av,$$

es decir, $a = \epsilon/15\nu$. Por tanto, se obtienen las relaciones siguientes que nos darán B_{rr} y B_{tt} en función de la disipación de energía media:[†]

$$B_t = \frac{2}{15}\epsilon r^2/\nu, \quad B_{rr} = \frac{1}{15}\epsilon r^2/\nu. \quad (33.8)$$

Podemos también estudiar la *correlación triple*

$$B_{1kl} = \overline{(v_{2l} - v_{1l})(v_{2k} - v_{1k})(v_{2l} - v_{1l})}. \quad (33.9)$$

De nuevo supondremos que el flujo es completamente homogéneo e isotrópico. Consideraremos en primer lugar el tensor auxiliar $\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}}$. Este tensor es simétrico en los sufijos i y k , y en virtud de la isotropía debe ser expresable en función de n_i y δ_{ik} , como B_{ik} . La forma más general de dicho tensor es

$$v_{1i}v_{1k}v_{2l} = C(r)\delta_{ik}n_l + D(r)(\delta_{il}n_k + \delta_{kl}n_i) + F(r)n_in_kn_l. \quad (33.10)$$

Derivando respecto a x_{2l} , tenemos, mediante la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial}{\partial x_{2l}} \overline{(v_{1i}v_{1k}v_{2l})} = \overline{v_{1i}v_{1k} \frac{\partial v_{2l}}{\partial x_{2l}}} = 0.$$

Sustituyendo la expresión correspondiente a $\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}}$, tenemos, después de un cálculo simple (que omitimos), dos ecuaciones:

$$d[r^2(3C + 2D + F)]/dr = 0,$$

$$C' + 2(C + D)/r = 0.$$

[†] Podría pensarse que, en principio, existe una posibilidad de obtener una fórmula universal, aplicable a un flujo turbulento cualquiera, que diese B_{rr} y B_{tt} para todas las distancias r que son pequeñas en comparación con t . Sin embargo, de hecho, no puede existir tal fórmula, como puede verse mediante el razonamiento siguiente. En principio, puede expresarse el valor instantáneo de $(v_{2l} - v_{1l})(v_{2k} - v_{1k})$ como una función universal de la disipación de energía ϵ en el instante considerado. Sin embargo, al promediar estas expresiones jugará un papel principal la ley de variación de ϵ en tiempos del orden de los períodos de los remolinos grandes (de tamaño $\sim t$) y esta ley es distinta para los diferentes flujos. Por tanto, el resultado del promedio no puede ser universal.

La integración de la primera nos da $3C + 2D + F = \text{constante}/r^2$. Para $r = 0$, las funciones C , D y F deben permanecer finitas. Por tanto, debemos poner la constante igual a cero, de modo que $3C + 2D + F = 0$. A partir de las dos ecuaciones así obtenidas se encuentra

$$D = -(C + \frac{1}{2}rC'), \quad F = rC' - C. \quad (33.11)$$

Desarrollemos ahora los paréntesis en (33.9). Es fácil ver que, en virtud de la isotropía del flujo, los valores medios $\overline{v_{ik}v_{ik}v_{il}}$ y $\overline{v_{2k}v_{2k}v_{2l}}$ son nulos. En efecto, en estos productos las tres velocidades se toman en un solo punto; así pues, el único tensor en función del cual puede expresarse el tensor $\overline{v_iv_kv_l}$ es δ_{ik} . Sin embargo, es imposible construir un tensor simétrico de orden tres mediante tensores unidad. Por otra parte, los valores medios de este tipo como $\overline{v_{1l}v_{1k}v_{2l}}$ y $\overline{v_{2l}v_{2k}v_{1l}}$ tienen el mismo valor pero signo opuesto, puesto que el vector n_i en (33.10) varía de signo cuando se intercambian los puntos 1 y 2. El resultado es

$$B_{ikl} = 2(\overline{v_{1l}v_{1k}v_{2l}} + \overline{v_{1l}v_{2k}v_{1l}} + \overline{v_{2l}v_{1k}v_{1l}}).$$

Sustituyendo (33.10) y (33.11), se tiene la expresión

$$B_{ikl} = 2(rC' + C)(\delta_{ik}n_l + \delta_{il}n_k + \delta_{kl}n_i) + 6(rC' - C)n_i n_k n_l. \quad (33.12)$$

Tomando de nuevo uno de los ejes coordenados paralelo a \mathbf{n} , obtenemos las componentes del tensor B_{ikl} : $B_{rrr} = -12C$, $B_{rrt} = -2(C + rC')$, $B_{rrn} = B_{ttt} = 0$. De aquí vemos que se mantiene la relación

$$6B_{rrt} = d(rB_{rrr})/dr \quad (33.13)$$

entre las componentes no nulas B_{rrt} y B_{rrr} .

Finalmente, es posible también encontrar una relación entre las componentes de los tensores B_{ik} y B_{ikl} . Para ello calculemos las derivadas $\partial(\overline{v_{1l}v_{2k}})/\partial t$, recordando que un flujo completamente homogéneo e isotropo necesariamente se amortigua con el tiempo. Expresando las derivadas $\partial v_{1l}/\partial t$ y $\partial v_{2k}/\partial t$ mediante la ecuación de Navier-Stokes, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v_{1l}v_{2k}}) &= -\frac{\partial}{\partial x_{1l}}(\overline{v_{1l}v_{1l}v_{2k}}) - \frac{\partial}{\partial x_{2l}}(\overline{v_{1l}v_{2k}v_{2l}}) - \frac{\partial}{\partial x_{1l}}\left(\frac{\overline{p_1v_{2k}}}{\rho}\right) - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_{2k}}\left(\frac{\overline{p_2v_{1l}}}{\rho}\right) + \nu \Delta_1(\overline{v_{1l}v_{2k}}) + \nu \Delta_2(\overline{v_{1l}v_{2k}}). \end{aligned}$$

Al utilizar las propiedades de homogeneidad e isotropía debe recordarse que el signo de \mathbf{r} varía cuando se intercambian los puntos 1 y 2 y, por tanto, el signo de la primera derivada espacial debe cambiarse. Los dos primeros términos son, por tanto, iguales y lo mismo ocurre con los dos últimos tér-

minos. Los términos tercero y cuarto son nulos. En efecto, en virtud de la isotropía, el valor medio $p_1 v_{2k}$ debe ser de la forma $f(r)n_k$. La divergencia $\partial(p_1 v_{2k})/\partial x_{2k} = p_1 \partial v_{2k}/\partial x_{2k}$ es cero. Pero el único vector con simetría central, cuya divergencia es en todo punto nula, es una constante multiplicada por $(1/r^2)n_k$. Dicho vector resultaría infinito para $r = 0$, lo cual es imposible. Por consiguiente, la constante debe ser cero.

Así pues,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{v_{1i} v_{2k}}) = -2 \frac{\partial}{\partial x_{1i}} (\overline{v_{1i} v_{1l} v_{2k}}) + 2\nu \Delta \overline{v_{1i} v_{2k}}. \quad (33.14)$$

Aquí debemos sustituir, de acuerdo con la fórmula deducida anteriormente,

$$\overline{v_{1i} v_{2k}} = \overline{v_{2i} v_{2k}} - \frac{1}{2} B_{ik},$$

$$\begin{aligned} \overline{v_{1i} v_{1l} v_{2k}} &= -\frac{1}{12} B_{rrr} \delta_{il} n_k + \frac{1}{12} (\frac{1}{2} r B_{rrr}' + B_{rrr}) (\delta_{ik} n_l + \delta_k n_i) - \\ &\quad - \frac{1}{12} (r B_{rrr}' - B_{rrr}) n_i n_k n_l. \end{aligned} \quad (33.15)$$

En la primera expresión sustituiremos $\overline{v_2 v_{2k}}$ por $1/3\bar{v}^2 \delta_{ik}$, utilizando la completa homogeneidad e isotropía del flujo:

$$\overline{v_{1i} v_{2k}} = \frac{1}{3} \bar{v}^2 \delta_{ik} - \frac{1}{2} B_{ik}. \quad (33.16)$$

La derivada respecto al tiempo de la energía cinética por unidad de masa $1/2\bar{v}^2$ es exactamente la disipación de energía $-\epsilon$; por tanto, $\partial(1/3\bar{v}^2)/\partial t = -2/3\epsilon$. Un cálculo sencillo, aunque largo, da la ecuación

$$-\frac{2}{3}\epsilon - \frac{1}{2} \frac{\partial B_{rr}}{\partial t} = \frac{1}{6r^4} \frac{\partial(r^4 B_{rrr})}{\partial r} - \frac{\nu}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial B_{rr}}{\partial r} \right). \quad (33.17)$$

Como se supone que r es pequeño, podemos con exactitud suficiente poner $r = 0$ el primer miembro, es decir, despreciar $\partial B_{rr}/\partial t$ en comparación con ϵ . Multiplicando la ecuación resultante por r^4 , integrando respecto a r y utilizando el hecho de que las funciones de correlación se anulan para $r = 0$, obtenemos la siguiente relación entre B_{rr} y B_{rrr} :

$$B_{rrr} = -\frac{4}{5}\epsilon r + 6\nu d B_{rr}/dr. \quad (33.18)$$

La relación (33.18), como (33.13), es válida tanto si r es mayor o menor que λ_0 . Para $r \gg \lambda_0$, el término de viscosidad es pequeño y tenemos simplemente

$$B_{rrr} = -\frac{4}{5}\epsilon r. \quad (33.19)$$

Si $r \ll \lambda_0$, podemos sustituir la expresión (33.8) para B_{rr} en (33.18), obte-

niendo $B_{rrr} = 0$; esto es así debido a que B_{rrr} , en este caso, debe ser del tercer orden en r y así los términos de primer orden deben anularse.[†]

§ 34. Región de turbulencia y el fenómeno de separación

El flujo turbulento es, en general, rotacional. Sin embargo, la distribución de la vorticidad $\omega (\equiv \text{rot } \mathbf{v})$ en el fluido tiene ciertas peculiaridades en el flujo turbulento (para R muy grande): en el flujo turbulento «estacionario» que rodea los cuerpos, puede normalmente dividirse el volumen total del fluido en dos regiones separadas. En una de ella el flujo es rotacional, mientras que en la otra la vorticidad es cero y tenemos un flujo potencial. Así pues, la vorticidad es no nula únicamente en una parte del fluido (aunque no, en general, sólo en una parte finita).

El que dicha región limitada de flujo rotacional pueda existir es una consecuencia del hecho de que puede considerarse el flujo turbulento como el movimiento de un fluido ideal que satisface las ecuaciones de Euler.[‡] Hemos visto (§ 8) que, en el caso de movimiento de un fluido ideal, es válida la ley de conservación de la circulación. En particular, si en un punto cualquiera de una línea de corriente $\omega = 0$, entonces es válida igualmente en todos los puntos de dicha línea de corriente. Inversamente, si en un punto cualquiera de una línea de corriente $\omega \neq 0$, entonces ω no se anula en ningún punto de la misma. De aquí resulta claro que la existencia de regiones limitadas de flujo rotacional e irrotacional es compatible con las ecuaciones del movimiento si la región del flujo rotacional es de tal forma que las líneas de corriente dentro de la misma no penetren en la región exterior a ella. Dicha distribución de ω será estable y la vorticidad valdrá cero más allá de la superficie de separación.

Una de las propiedades de la región del flujo turbulento rotacional es que el intercambio de fluido entre esta región y el espacio que la rodea puede producirse sólo en una dirección. El fluido puede entrar en esta región procedente de la región del flujo potencial, pero nunca puede abandonarla.

Resaltaremos que los razonamientos dados hasta ahora no pueden, como es natural, considerarse como si proporcionaran una prueba rigurosa de las afirmaciones realizadas hasta aquí. Sin embargo, parece que está confirmada experimentalmente la existencia de regiones limitadas de flujo turbulento rotacional.

[†] El cociente $|B_{rrr}/B_{rr}^{3/2}|$ debe tener valores constantes en los intervalos $\lambda \gg r \gg \lambda_0$ y $r \ll \lambda_0$. Los resultados experimentales demuestran que, de hecho, esta magnitud es aproximadamente constante para todo r , valiendo 0,4 aproximadamente.

[‡] La aplicabilidad de estas ecuaciones al flujo turbulento termina a distancias del orden de λ_0 . Por tanto, sólo dentro de estas condiciones se define el límite nítido entre flujo rotacional e irrotacional.

El flujo es turbulento tanto en el caso de la región rotacional como en el de la irrotacional. Sin embargo, la naturaleza de la turbulencia es totalmente diferente en estas dos regiones. Para aclarar la razón de esta diferencia podemos señalar la propiedad siguiente general del flujo potencial, que obedece la ecuación de Laplace $\Delta\phi = 0$. Supongamos que el flujo es periódico en el plano xy , de modo que en ϕ interviene únicamente x e y a través de un factor de la forma $e^{ik_1x+ik_2y}$. Entonces

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -(k_1^2 + k_2^2)\phi = -k^2\phi,$$

y, puesto que la suma de las derivadas de segundo orden debe ser nula, la derivada segunda de ϕ respecto a z debe ser igual a ϕ multiplicada por un coeficiente positivo: $\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = k^2\phi$. La dependencia de ϕ con z viene dada entonces por un factor de amortiguamiento de la forma e^{-kz} para $z > 0$ (evidentemente es totalmente imposible el incremento ilimitado dado por e^{kz}). Así pues, si el flujo potencial es periódico en un plano, debe amortiguarse en la dirección perpendicular a dicho plano. Además, cuanto mayor sean k_1 y k_2 (es decir, menor sea el período del flujo en el plano xy), más rápidamente se verá amortiguado el flujo a lo largo del eje z . Todos estos razonamientos permanecen cualitativamente válidos en los casos en que el movimiento no es estrictamente periódico, pero tiene ciertamente alguna cualidad periódica.

A partir de estos razonamientos se obtiene de modo inmediato el resultado siguiente. Fuera de la región de flujo rotacional, deben amortiguarse los remolinos turbulentos y deben hacerlo tanto más rápidamente cuanto menor sea su tamaño. En otras palabras, los remolinos pequeños no llegan a penetrar muy lejos en la región del flujo potencial. En consecuencia, únicamente tienen importancia los remolinos grandes en esta región; estos se ven amortiguados a distancias del orden de la dimensión (transversal) de la región rotacional, que coincide con la escala externa de turbulencia en este caso. A distancias mayores que esta dimensión no existe prácticamente turbulencia y el flujo puede considerarse como laminar.

Hemos visto que la disipación de energía en el flujo turbulento se produce en los remolinos más pequeños; en los remolinos grandes no interviene ninguna disipación apreciable, razón por la cual es aplicable la ecuación de Euler. De lo que acabamos de decir se obtiene el resultado importante de que la disipación de energía se produce principalmente en la región del flujo turbulento rotacional y escasamente en el exterior de dicha región.

Recordando todas estas propiedades del flujo rotacional e irrotacional llamaremos, de ahora en adelante y para mayor brevedad, a la región de flujo turbulento rotacional simplemente *región de flujo turbulento* o *región turbulenta*. En las secciones siguientes estudiaremos la forma de esta región en distintos casos.

La región turbulenta debe estar limitada en alguna dirección por parte de la superficie del cuerpo, alrededor del cual tiene lugar el flujo. La línea que limita esta parte de la superficie se denomina *línea de separación*. A partir de ella empieza la superficie de separación entre el fluido turbulento y el resto del mismo. La formación de una región turbulenta en el flujo que rodea un cuerpo se denomina *fenómeno de separación*.

La forma de la región turbulenta queda determinada por las propiedades del flujo en el cuerpo principal del fluido (no en la vecindad inmediata de la superficie). Una teoría completa de la turbulencia (que no existe todavía) debería permitir, en principio, determinar la forma de esta región utilizando las ecuaciones del movimiento correspondiente a un fluido ideal, dada la posición de la línea de separación en la superficie del cuerpo. Sin embargo, la posición real de la línea de separación está determinada por las propiedades del flujo en la proximidad inmediata de la superficie (conocida como *capa límite*), en donde la viscosidad juega una parte vital (ver § 40).

§ 35. Chorro turbulento

Puede establecerse en ciertos casos y mediante los elementos simples de semejanza la forma de la región turbulenta y algunas otras propiedades básicas de la misma. Entre estos casos podemos incluir, además de otros, diversos tipos de chorros turbulentos libres en un espacio lleno de fluido (L. PRANDTL, 1925).

Como primer ejemplo, consideremos la región turbulenta formada cuando un flujo se ve «separado» en un ángulo formado por dos planos infinitos que se cortan (que puede verse en un corte en la figura 16). En el caso laminar (figura 3, § 10), el flujo a lo largo de una de las caras del ángulo (por ejemplo, en la cara *AO*) rodearía suavemente la esquina y fluiría a lo largo de la otra cara alejándose del ángulo (*OB*). En el flujo turbulento el esquema del flujo es totalmente diferente.

El flujo a lo largo de una cara del ángulo no se curva ahora al alcanzar el vértice, sino que continúa en su dirección primitiva. Aparece ahora un flujo a lo largo de la otra cara en la dirección *BO*. Los dos flujos «se mezclan» en la región turbulenta;[†] habiéndose mostrado los límites de esta región, a trazos, en el corte de la figura 16. Puede verse el origen de esta región del modo siguiente. Imaginemos un flujo en el que existe una corriente uniforme a lo largo de *AO* y continúa en la misma dirección ocupando la totalidad del espacio encima del plano *AO* y su continuación en el fluido de la derecha, mientras que el fluido por debajo de este plano está

[†] Recordemos que, fuera de la región turbulenta, existe un flujo irrotacional que gradualmente se transforma en laminar cuando nos alejamos de sus límites.

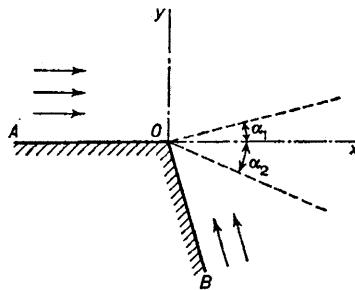


FIG. 16

en reposo. En otras palabras, tenemos una superficie de separación (el plano AO producido) entre el fluido que se mueve con velocidad constante y un fluido estacionario. Sin embargo, dicha superficie de discontinuidad es inestable y no puede existir en la práctica (ver § 30). Esta inestabilidad conduce a la mezcla y a la formación de una región turbulenta. El flujo a lo largo de BO surge debido a que cierta cantidad de fluido debe entrar en la región turbulenta procedente de abajo.

Determinemos la forma de la región turbulenta. Tomemos el eje x en la dirección indicada en la figura 16, estando el origen en O . Designaremos mediante Y_1 e Y_2 las distancias del plano xz a los límites superior e inferior de la región turbulenta, y lo que pretendemos es determinar Y_1 e Y_2 en función de x . Esto puede hacerse fácilmente mediante consideraciones de semejanza. Como los planos son infinitos en todas direcciones, no existen parámetros constantes en nuestra disposición que tengan las dimensiones de longitud. De aquí se deduce que Y_1 e Y_2 solamente pueden ser directamente proporcionales a la distancia x :

$$Y_1 = x \operatorname{tg} \alpha_1, \quad Y_2 = x \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (35.1)$$

Los coeficientes de proporcionalidad son constantes numéricas simples; les escribiremos en la forma $\operatorname{tg} \alpha_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2$, de modo que α_1 y α_2 son los ángulos formados entre los dos límites de la región turbulenta y el eje x . Así pues, la región turbulenta está limitada por dos planos que se cortan a lo largo del vértice del ángulo.

Los valores de α_1 y α_2 dependen únicamente del tamaño del ángulo y no, por ejemplo, de la vorticidad de la corriente principal. No pueden calcularse teóricamente; los resultados experimentales para el flujo que rodea un ángulo recto son $\alpha_1 = 5^\circ$, $\alpha_2 = 10^\circ$.†

† Aquí y en lo que sigue, nos referimos a los datos experimentales sobre la distribución de velocidades en una sección recta transversal del flujo turbulento, reducida mediante cálculos basados en la teoría de la longitud de mezcla (W. TOLLMIEN, 1926) (ver la nota final de esta sección). Esta teoría contiene una constante arbitraria, cuyo valor se escoge de modo que se obtenga el mejor acuerdo posible con los datos experimentales.

Las velocidades de los flujos a lo largo de las dos caras del ángulo no son iguales; su cociente es un número definido que depende nuevamente sólo del tamaño del ángulo. Cuando no está próximo a π , una de las velocidades es considerablemente mayor y coincide con la de la corriente principal que está en la misma dirección (AO) que la región turbulenta. Por ejemplo, en el flujo que rodea un ángulo recto, la velocidad a lo largo del plano AO es treinta veces mayor que la del flujo a lo largo de BO .

Podemos mencionar también que la diferencia existente entre las presiones del fluido en las dos caras de la región turbulenta es muy pequeña. Por ejemplo, se encuentra que en el flujo que rodea a un ángulo recto $p_1 - p_2 = 0,003 \rho U_1^2$, siendo U_1 la velocidad de la corriente principal (a lo largo de AO), p_1 la presión en dicha corriente y p_2 la presión en la corriente a lo largo de BO .

En el caso límite del flujo que rodea un ángulo de 2π , tenemos simplemente el borde de una placa con un fluido que se mueve en sus dos caras. En ángulo $\alpha_1 + \alpha_2$ de la región turbulenta es cero, es decir, no existe región turbulenta; resultan iguales las velocidades de los flujos a lo largo de ambas caras. Cuando aumenta el ángulo AOB , se alcanza un punto en el que el plano BO forma el límite inferior de la región turbulenta; entonces el ángulo AOB es obtuso. Cuando el ángulo aumenta más, la región turbulenta continúa estando limitada por el plano BO en una cara. Aquí tenemos simplemente una separación en la que coincide la línea de separación con el vértice del ángulo. El ángulo de la región turbulenta permanece finito.

Como segundo ejemplo consideremos el problema de un chorro turbulento de fluido que sale del extremo de un tubo estrecho y entra en un espacio infinito lleno con el mismo fluido. En § 23 resolvimos el problema del flujo laminar en dicho «chorro sumergido». A distancias grandes (las únicas que consideraremos), comparadas con las dimensiones de la boca del tubo, el chorro tiene simetría axial cualquiera que sea la forma de la abertura.

Determinemos la forma de la región turbulenta en el chorro. Tomemos el eje del chorro como eje x y llamemos R al radio de la región turbulenta; pretendemos determinar R en función de x (que se mide a partir del extremo del tubo). Como en el ejemplo anterior, esta función se determina fácilmente y de modo directo mediante consideraciones de semejanza. A distancias grandes, en comparación con las dimensiones de la boca del tubo, la forma real y el tamaño de la abertura no puede influir en la forma del chorro. De aquí que no tengamos a nuestra disposición ningún parámetro característico de las dimensiones de una longitud. Por consiguiente, se deduce como antes que R debe ser proporcional a x :

$$R = x \operatorname{tg} \alpha, \quad (35.2)$$

en donde la constante numérica $\operatorname{tg} \alpha$ es la misma para todos los chorros. Así pues, la región turbulenta es un cono; el valor experimental del ángulo 2α es de 25 a 30° (figura 17).†

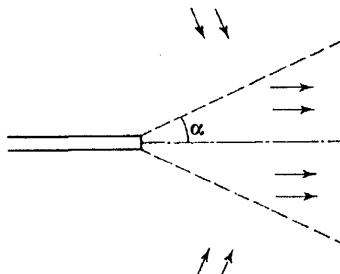


FIG. 17

La distribución de velocidades (promediada en el tiempo) en una sección recta del chorro tiene las siguientes propiedades. El flujo está dirigido principalmente a lo largo del chorro. La componente de velocidad longitudinal disminuye rápidamente cuando nos alejamos del eje del chorro; resulta ser igual a $1/2 u_0$ (siendo u_0 la velocidad en el eje) a una distancia de únicamente $0,35 R$ del eje, y en límite de la región turbulenta es del orden de $0,01 u_0$. La componente de velocidad transversal tiene un orden de magnitud aproximadamente uniforme en toda la sección recta de la región turbulenta y en el límite de esta región vale aproximadamente $-0,025 u_0$, estando dirigida hacia el chorro. Esta componente transversal produce un flujo hacia el interior de la región turbulenta. La distribución de velocidades en el exterior de la región turbulenta (para un ángulo α dado) puede determinarse teóricamente (ver problema 1).

La velocidad en el chorro también disminuye cuando nos alejamos de la boca del tubo. Se encuentra con facilidad la ley de esta disminución. Para ello utilizaremos el método siguiente. El flujo total de impulso a través de una superficie esférica situada en la boca del tubo debe ser independiente del radio de la superficie. La densidad del flujo de impulso en el chorro es del orden de ρu^2 , en donde u es del orden de cierta velocidad media del chorro; esta es la única magnitud con las dimensiones correctas que puede formarse mediante la densidad del fluido ρ , la velocidad u y la distancia x . El área de la parte de la sección recta del chorro, en donde u es apreciablemente distinto de cero, es del orden de R^2 . De aquí que el

† Se observa experimentalmente cierta dependencia de la constante α con las condiciones iniciales (perfil de velocidades) en la boca del tubo. Es razonable suponer que esta dependencia se debe al efecto de las dimensiones finitas de la abertura, efecto que desaparece a distancias mayores.

flujo de impulso total sea del orden de $\rho u^2 R^2$. Igualando esta expresión a una constante y poniendo $R = \text{constante} \times x$, obtenemos

$$u \sim \text{constante}/x, \quad (35.3)$$

es decir, la velocidad disminuye de modo inversamente proporcional a la distancia a la boca del tubo.

La cantidad Q del fluido que pasa por la unidad de tiempo a través de una sección recta de la región turbulenta del chorro es del orden del producto de su área ($\sim R^2$) por la velocidad media u . Sustituyendo, tenemos[†]

$$Q = Bx. \quad (35.4)$$

Así pues, la descarga o caudal a través de una sección recta de la región turbulenta aumenta con x , es decir, entra dentro de la región turbulenta alguna parte del fluido exterior.[‡] La constante que aparece en (35.4) puede determinarse del modo siguiente. A distancias del orden de las dimensiones de la boca del tubo, Q debe coincidir con la cantidad Q_0 de fluido emitido del tubo por unidad de tiempo, que es un valor fijo para un chorro particular concreto. De aquí que pongamos que $B \sim Q_0/a$, en donde a corresponde a la dimensión transversal de la boca del tubo (por ejemplo, el radio, si la abertura es circular). Así pues, podemos escribir

$$B = cQ_0/a, \quad (35.5)$$

en donde c es una constante numérica que depende únicamente de la forma de la abertura. Si ésta es circular, experimentalmente se encuentra que c vale aproximadamente 1,5.

El flujo en cualquier sección de la longitud del chorro está caracterizado por el número de Reynolds de dicha sección, definido como uR/ν . Sin embargo, en virtud de (35.2) y (35.3), el producto uR es constante a lo largo del chorro, de modo que el número de Reynolds es el mismo para todas estas secciones. Por ejemplo, puede tomarse como $B/\rho\nu$. La constante B que aparece aquí es el único parámetro que determina el flujo en el chorro. Cuando aumenta «la intensidad» Q_0 del chorro (permaneciendo constante el valor de a), el número de Reynolds $B/\rho\nu$, finalmente, alcanza un valor típico,

[†] Si dos cantidades que varían dentro de márgenes amplios son siempre del mismo orden de magnitud, entonces deben ser proporcionales. De aquí que, en este caso (y en otros análogos), podemos escribir $Q = \text{constante} \times x$ en lugar de $Q \sim \text{constante} \times x$.

[‡] El flujo de masa total a través de cualquier plano infinito que corta al chorro es infinito, es decir, un chorro que penetra en un espacio infinito lleva con él una cantidad infinita de fluido.

después del cual el flujo se hace simultáneamente turbulento a lo largo de la longitud total del chorro.[†]

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el flujo medio en el chorro fuera de la región turbulenta.

Solución. Tomemos coordenadas esféricas r, θ, ϕ , estando el eje polar situado a lo largo del eje del chorro y el origen en su punto de emergencia. Debido a que el chorro tiene una simetría axial, la componente u_ϕ de la velocidad media es cero, mientras que u_θ y u_r son funciones únicamente de r y θ . Si utilizamos los mismos razonamientos que en el problema del chorro laminar (§ 23), se ve que u_θ y u_r deben tener las formas $u_\theta = f(\theta)/r$, $u_r = F(\theta)/r$. Fuera de la región turbulenta tenemos un flujo potencial, es decir, $\text{rot } \mathbf{u} = 0$, de modo que $\partial u_r / \partial \theta - \partial(r u_\theta) / \partial r = 0$. Pero $r u_\theta$ es independiente de r , de modo que $\partial u_r / \partial \theta = (1/r) dF/d\theta = 0$, de aquí que $F = \text{constante} = -b$, por ejemplo, o sea

$$u_r = -b/r. \quad (1)$$

A partir de la ecuación de continuidad,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) = 0,$$

obtenemos, entonces,

$$f = \frac{\text{constante} - b \cos \theta}{\sin \theta}.$$

La constante de integración debe ser $-b$ si la velocidad no es infinita para $\theta = \pi$ (no importa que sea f infinita para $\theta = 0$, puesto que la solución en cuestión se refiere única-

[†] Con objeto de hacer cálculos más detallados para los diversos tipos de flujo, es costumbre emplear ciertas teorías «semiempíricas», basadas en hipótesis relativas a la dependencia existente entre el coeficiente de viscosidad turbulenta y el gradiente de la velocidad media. Por ejemplo, se admite en la teoría de Prandtl que (en el caso de un flujo plano)

$$\nu_{\text{turb}} = l^2 |\partial u_x / \partial y|,$$

en donde se escoge la relación entre l (denominada *longitud de mezcla*) y las coordenadas de acuerdo con los resultados de semejanza; por ejemplo, en el flujo turbulento se pone $l = cx$, siendo c una constante empírica. Normalmente estas teorías suelen estar en buen acuerdo con los resultados experimentales y, por tanto, resultan útiles para los cálculos de interpolación. Sin embargo, no es posible dar valores universales a las constantes empíricas que caracterizan cada teoría; por ejemplo, el valor del cociente entre la longitud de mezcla l y la dimensión transversal de la región turbulenta ha de escogerse de modo diferente en los distintos casos. También debe señalarse que es posible obtener una buena concordancia con los resultados experimentales a partir de diversas expresiones de la viscosidad turbulenta.

Un estudio más detallado de estas teorías puede verse en los textos de L. G. LOYTSANSKI, *Aerodynamics of Boundary Layers* (Аэродинамика пограничного слоя), Moscow, 1941; G. N. ABRAMOVICH, *Free Turbulent Jets of Liquids and Gases* (Турбулентные свободные струи жидкостей и газов), Moscow, 1948; H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, Pergamon Press, London, 1955.

mente al espacio exterior o región turbulenta, mientras que $\theta = 0$ cae dentro de dicha región). Así pues,

$$u_\theta = - \frac{b(1 + \cos \theta)}{r \sin \theta} = - \frac{b}{r} \cot \frac{1}{2}\theta. \quad (2)$$

La componente de la velocidad en la dirección del chorro (u_x) y su valor absoluto son

$$u_x = \frac{b}{r} = \frac{b \cos \theta}{x}, \quad u = \frac{b}{r \sin \frac{1}{2}\theta}. \quad (3)$$

Puede relacionarse la constante b con la constante B de (35.4). Consideremos un segmento del cono formado por la región turbulenta, limitado por dos secciones rectas infinitamente próximas del cono. La masa del fluido que entra en este segmento por unidad de tiempo es $dQ = -2\pi r \rho \sin \alpha \cdot u_\theta dr = 2\pi b \rho (1 + \cos \alpha) dr$, mientras que según la forma (35.4) tenemos $dQ = B dx = B \cos \alpha dr$. Comparando ambas expresiones, obtenemos

$$b = \frac{B \cos \alpha}{2\pi \rho (1 + \cos \alpha)}. \quad (4)$$

En el límite de la región turbulenta, la velocidad u está dirigida hacia el interior de esta región formando un ángulo $1/2(\pi - \alpha)$ con la dirección positiva del eje x .

Comparando la velocidad media \bar{u}_x dentro de la región turbulenta (definida como $\bar{u}_x = Q/\pi \rho R^2 = B/\pi \rho x \operatorname{tg}^2 \alpha$) con la velocidad (u_x)_{pot} en el límite de la región. Tomando la primera ecuación (3) con $\theta = \alpha$, tenemos

$$(u_x)_{\text{pot}}/\bar{u}_x = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha).$$

Para $\alpha = 12^\circ$, esta ecuación es 0,011, es decir, la velocidad en el límite de la región turbulenta es pequeña en comparación con la velocidad media en el interior de la misma.

Problema 2. Determinar la ley del tamaño y velocidad en un chorro turbulento sumergido que procede de una rendija delgada de longitud infinita.

Solución. Mediante el mismo razonamiento que el caso del chorro axial se obtiene la conclusión de que la región turbulenta está limitada por dos planos que se cortan sobre la rendija, es decir, la semianchura del chorro es $Y = x \operatorname{tg} \alpha$. El flujo del impulso del chorro (por unidad de longitud de la rendija) es del orden de $\rho u Y$. La dependencia de la velocidad media u con x viene dada, por tanto, por $u = \text{constante}/\sqrt{x}$. El caudal a través de una sección recta de la región turbulenta es $Q \sim \rho u Y$, de aquí que $Q = \text{constante} \times \sqrt{x}$. Los datos experimentales dan un valor de 25° a 33° para el ángulo 2α de un chorro plano paralelo (ver la tercera nota a pie de página de esta sección).

§ 36. Estela turbulenta

Cuando se tienen números de Reynolds considerablemente superiores al valor crítico en un flujo que rodea a un cuerpo sólido, se forma detrás del mismo una región muy larga de flujo turbulento. Dicha región se denomina *estela turbulenta*. A distancias grandes en comparación con la dimensión del cuerpo, algunos razonamientos sencillos nos permiten determinar la forma de esta estela y el modo en que disminuye allí la velocidad del fluido (L. PRANDTL, 1926).

Como en el caso del estudio de la estela laminar en § 21, llamaremos \mathbf{U} a la velocidad del chorro incidente y tomaremos la dirección de \mathbf{U} como eje x . La velocidad del fluido en un punto cualquiera, promediada respecto a las fluctuaciones turbulentas, se escribe en forma $\mathbf{U} + \mathbf{u}$. Designando por a cierta anchura media de la estela, obtendremos a en función de x . Si no existe sustentación, entonces a distancias grandes del cuerpo la estela tiene simetría axial y una sección recta circular; en este caso a puede ser el radio de la estela. Si está presente una fuerza de sustentación, se selecciona una dirección en el plano yz y entonces la estela carece de simetría axial a una distancia cualquiera del cuerpo.

La componente de velocidad longitudinal del fluido en una estela es del orden de U , mientras que la componente transversal es del orden de cierto valor medio u de la velocidad turbulenta. El ángulo formado por las líneas de corriente y el eje x es, por tanto, del orden de u/U . La estela termina, como sabemos, en aquellos límites más allá de los cuales las líneas de corriente del movimiento turbulento de rotación no pueden pasar. De aquí se deduce que el ángulo entre el límite de la estela y el eje x es también del orden de u/U . Esto significa que podemos escribir

$$\frac{da}{dx} \sim u/U. \quad (36.1)$$

A continuación, utilizaremos las fórmulas (21.1), (21.2), que determinan las fuerzas sobre el cuerpo en función de integrales de la velocidad del fluido en la estela (ahora se interpreta la velocidad como su valor medio). La región de integración en estas integrales es del orden de a^2 . De aquí que una estimación de la integral nos da $F \sim \rho U u a^2$, siendo F del orden del arrastre o de la sustentación. Así pues,

$$u \sim F/\rho U a^2. \quad (36.2)$$

Sustituyendo en (36.1), se encuentra la expresión $da/dx \sim F/\rho U^2 a^2$, a partir de la cual se tiene por integración

$$a \sim (Fx/\rho U^2)^{\frac{1}{3}}. \quad (36.3)$$

Así pues, la anchura de la estela aumenta proporcionalmente a la raíz cúbica de la distancia al cuerpo. Para valor de la velocidad u , a partir de (36.2) y (36.3), tenemos

$$u \sim (FU/\rho x^2)^{\frac{1}{3}}, \quad (36.4)$$

es decir, la velocidad media del fluido en la estela es inversamente proporcional a $x^{2/3}$.

El flujo en cualquier sección recta de la estela está caracterizado por el número de Reynolds $R \sim au/v$. Sustituyendo (36.2) y (36.3), se obtiene

$$R \sim F/\nu p U a \sim (F^2/\rho^2 U x v^3)^{\frac{1}{3}}.$$

Vemos que este número no es constante a lo largo de la estela, a diferencia de lo que se vio en el caso del chorro turbulento. A distancias suficientemente grandes del cuerpo, R resulta ser tan pequeño que el flujo en la estela deja de ser turbulento. Más allá de este punto tenemos una estela laminar, cuyas propiedades ya se estudiaron en § 21.

En § 21, problema 2, se obtuvieron fórmulas que describen el flujo fuera de la estela y bastante lejos del cuerpo. Estas formas son válidas para el flujo en el exterior de la estela turbulenta, lo mismo que en el exterior de la estela laminar.

Podemos mencionar ahora algunas propiedades generales de la distribución de velocidades alrededor del cuerpo. Tanto en el interior como en el exterior de la estela turbulenta, la velocidad (que ahora entendemos siempre como u) disminuye cuando nos alejamos del cuerpo. Sin embargo, la velocidad longitudinal u_x desciende más rápidamente ($\sim 1/x^2$) fuera de la estela que en su interior. Por tanto, lejos del cuerpo podemos suponer que u_x es cero en el exterior de la estela. Podemos decir que u_x disminuye desde cierto valor máximo que se obtiene en el eje de la estela hasta cero en sus límites. Las componentes transversales u_y , u_z en los límites son del mismo orden de magnitud que en el interior de la estela, disminuyendo rápidamente cuando nos alejamos de la estela a una distancia determinada del cuerpo.

§ 37. Teorema de Joukowski

La distribución de velocidades desarrollada alrededor de un cuerpo, descrita al final de la última sección, no es válida para casos excepcionales, en donde el espesor de la estela formada detrás del cuerpo es muy pequeña en comparación con su anchura. Se forma una estela de este tipo en el flujo que rodea a cuerpos cuyo espesor (en la dirección y) es pequeño en comparación con su anchura (en la dirección z); la longitud (en la dirección del flujo, dirección x) puede ser de cualquier valor. Es decir, estamos considerando un flujo que rodea a cuerpos cuya sección recta transversal al flujo es muy alargada. Entre estos cuerpos podemos incluir, en particular, las *alas*, es decir, cuerpos cuya anchura o *envergadura* es grande en comparación con sus otras dimensiones.

Evidentemente en este caso no existe ninguna razón por la cual la componente de velocidad u_y , perpendicular al plano de la estela turbulenta deba descender apreciablemente a distancias del orden del espesor de la misma. Por el contrario, esta componente será ahora del mismo orden de magnitud dentro de la estela y a distancias considerables de la misma, del orden de la envergadura. Aquí, como es natural, admitimos que la sustentación no es cero, puesto que en otro caso la velocidad transversal prácticamente se anularía.

Consideremos la fuerza de sustentación vertical F_y , que se obtiene como resultado de dicho flujo. De acuerdo con la fórmula (21.2), viene dada por la integral

$$F_y = -\rho U \iint u_y dy dz, \quad (37.1)$$

en donde, teniendo en cuenta la naturaleza de la distribución de u_y , la integración debe realizarse sobre el plano transversal completo. Además, puesto que es pequeño el espesor de la estela (dirección y), mientras que la velocidad u_y dentro de la misma no es grande en comparación con su valor fuera, podemos realizar la integración sobre y con suficiente aproximación, extendiéndola sobre la región exterior a la estela y escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_y dy \approx \int_{y_1}^{\infty} u_y dy + \int_{-\infty}^{y_1} u_y dy,$$

siendo y_1 e y_2 las coordenadas de los límites de la estela (figura 18).

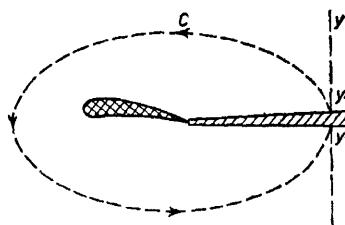


Fig. 18

Sin embargo, fuera de la estela tenemos un flujo potencial y $u_y = \partial \phi / \partial y$; recordando que $\phi = 0$ en el infinito, se obtiene, por tanto,

$$\int u_y dy = \phi_2 - \phi_1,$$

en donde ϕ_2 y ϕ_1 son los valores del potencial en ambos lados de la estela. Podemos decir que $\phi_2 - \phi_1$ es la discontinuidad del potencial en la superficie de discontinuidad que puede sustituirse por una estela delgada. Debe permanecer continua la derivada $u_y = \partial \phi / \partial y$. Una discontinuidad en la componente de velocidad normal a la superficie de la estela significaría que fluye cierta cantidad de fluido dentro de la estela; sin embargo, en la aproximación en la cual se desprecia el espesor de la misma, este flujo de entrada debe ser nulo. Así pues, sustituimos la estela por una superficie de discontinuidad tangencial. A continuación, en la misma aproximación, la presión debe ser también continua en la estela. Puesto que la variación de la presión viene dada en primera aproximación, de acuerdo con la ecuación de Bernoulli, por $\rho U u_x = U \partial \phi / \partial x$, se dice que la derivada $\partial \phi / \partial x$ debe ser

también continua. Sin embargo, la derivada $\partial\phi/\partial z$ (la velocidad a lo largo del ala) es, en general, discontinua.

Como la derivada $\partial\phi/\partial x$ es continua, la discontinuidad $\phi_2 - \phi_1$ depende sólo de z , y no de la coordenada x a lo largo de la estela. Así pues, tenemos la siguiente fórmula para la sustentación:

$$F_y = -\rho U \int (\phi_2 - \phi_1) dz. \quad (37.2)$$

La integración respecto a z puede tomarse sobre la anchura de la estela (como es natural, $\phi_2 - \phi_1 \equiv 0$ fuera de la misma).

Esta fórmula puede escribirse en una forma ligeramente distinta. Para ello, observemos que, utilizando propiedades bien conocidas de la integral del gradiente de un escalar, podemos escribir la diferencia $\phi_2 - \phi_1$ como una integral de contorno o curvilínea

$$\oint \mathbf{grad} \phi \cdot d\mathbf{l} = \oint (u_y dy + u_x dx),$$

tomada a lo largo de un contorno que parte del punto y_1 , rodea el cuerpo y termina en el punto y_2 , pasando así a través de todos los puntos de la región de flujo potencial. Puesto que la estela es delgada, podemos, sin variar la integral excepto en cantidades de orden superior, cerrar este contorno mediante el segmento corto que va desde y_2 hasta y_1 . Designando mediante Γ la circulación de la velocidad alrededor del contorno cerrado C que encierra el cuerpo (figura 18), tenemos

$$\Gamma = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \phi_2 - \phi_1, \quad (37.3)$$

y para la fuerza de sustentación se tiene la fórmula[†]

$$F_y = -\rho U \int \Gamma dz. \quad (37.4)$$

La relación entre la sustentación y la circulación dada por esta fórmula constituye el *teorema de Joukowski*, deducido en primer lugar por N. E. JOUKOWSKI en 1906.[‡]

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la ley según la cual se ensancha la estela turbulenta formada en el flujo transversal que rodea a un cilindro de longitud infinita.

[†] Siempre se escoge el signo de la circulación de la velocidad correspondiente al trayecto contrario al movimiento de las agujas de reloj.

[‡] Ver § 46 para la aplicación de este teorema a alas aerodinámicas.

Solución. El arrastre f_x por unidad de longitud del cilindro es del orden de $\rho U u Y$. Combinando este valor con la relación (36.1), se tiene que la anchura de la estela Y es

$$Y = A \sqrt{(x f_x / \rho U^2)}, \quad (1)$$

siendo A una constante. La velocidad media u en la estela disminuye de acuerdo con $u \sim \sqrt{(f_x / \rho x)}$. El número de Reynolds $R \sim Yu/v \sim f_x / \rho U v$ es independiente de x y, por tanto, no existe estela laminar.

Podemos mencionar que, de acuerdo con los resultados experimentales, el coeficiente constante en (1) es $A = 0,93$ [siendo Y la semianchura de la estela; si se toma Y como la distancia a la cual la velocidad u_x disminuye hasta la mitad de su valor máximo (en el centro de la estela), entonces $A = 0,41$].

Problema 2. Determinar el flujo en el exterior de la estela formada en el flujo transversal que rodea a un cuerpo de longitud infinita.

Solución. Fuera de la estela tenemos un flujo potencial; designaremos el potencial por Φ para distinguirlo del ángulo ϕ en el sistema de coordenadas cilíndricas que vamos a tomar, situando el eje z a lo largo de la longitud del cuerpo. Como en § 21, problema 2, se tiene la conclusión de que debemos tener

$$\oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{f} = \oint \mathbf{grad} \Phi \cdot d\mathbf{f} = f_x / \rho U,$$

en donde ahora la integración se extiende a la superficie de un cilindro de radio grande y de longitud unidad con su eje en la dirección x , siendo f_x el arrastre por unidad de longitud del mismo. La solución de la ecuación de Laplace bidimensional $\Delta \Phi = 0$ que satisface esta condición es $\Phi = (f_x / 2\pi\rho U) \log r$. A continuación, tenemos para la sustentación, mediante la fórmula (37.2), $f_y = \rho U (\Phi_1 - \Phi_2)$. La solución de la ecuación de Laplace que disminuye con menos rapidez con la distancia y que tiene una discontinuidad en el plano $\phi = 0$ es $\Phi = \text{constante} \times \phi$; puesto que $\phi_2 - \phi_1 = 2\pi$, la constante es $-f_y / 2\pi\rho U$. El flujo viene dado por la suma de estas dos soluciones, es decir,

$$\Phi = \frac{1}{2\pi\rho U} (f_x \log r - \phi f_y). \quad (1)$$

Las componentes cilíndricas de la velocidad \mathbf{u} son

$$u_r = \partial \Phi / \partial r = f_x / 2\pi\rho U r, \quad u_\phi = (1/r) \partial \Phi / \partial \phi = -f_y / 2\pi\rho U r. \quad (2)$$

La velocidad \mathbf{u} forma un ángulo constante $\arctan(f_y/f_x)$ con la dirección r .

Problema 3. Determinar la ley de cambio de forma de la estela detrás de un cuerpo de longitud infinita cuando existe una fuerza de sustentación.

Solución. Si existe una fuerza de sustentación, la estela (considerada como una superficie de discontinuidad) se curva en el plano xy . La función $y = y(x)$ que determina esta modificación viene dada por la ecuación $dx/(u_x + U) = dy/u_y$. Sustituyendo, utilizando (2) del problema 2, $u_y \approx -f_y / 2\pi\rho U x$ y despreciando u_x en comparación con U , obtenemos

$$dy/dx = -f_y / 2\pi\rho U^2 x,$$

de aquí

$$y = \text{constante} - (f_y / 2\pi\rho U^2) \log x.$$

§ 38. Turbulencia isótropa

Ya hemos mencionado en § 33 el caso particular del flujo turbulento que es completamente homogéneo e isótropo, siendo nula la velocidad media en todo el fluido. Dicho flujo puede imaginarse como el de un fluido que se agita vigorosamente y luego se abandona a sí mismo. El movimiento va disminuyendo con el tiempo, como es natural.

El estudio ulterior de la turbulencia isótropa, y en particular la determinación del modo de amortiguarse a lo largo del tiempo, se basa en una ley de conservación deducida en primer lugar por L. G. LOYTSIANSKI (1939). Esta ley, que es válida únicamente en el caso de la turbulencia isótropa, es una consecuencia de la ley general de conservación del momento cinético y puede deducirse del modo siguiente.

Aislemos dentro del fluido ilimitado una parte suficientemente grande de volumen y consideremos la cantidad total de momento cinético o angular \mathbf{M} contenido en este volumen. \mathbf{M} tiene un determinado valor aleatorio que, en general, no es cero. Teniendo en cuenta la interacción con las regiones que la rodean, \mathbf{M} no permanece estrictamente constante. Sin embargo, puesto que la interacción es un efecto superficial, es evidente que el tiempo T , durante el cual \mathbf{M} varía apreciablemente, debe aumentar con la dimensión L del volumen seleccionado. El tiempo T y la dimensión L pueden ser arbitrariamente grandes y en este sentido se conserva el momento cinético \mathbf{M} .

Por conveniencia en lo que sigue supondremos que el volumen escogido del fluido está encerrado en un recipiente con paredes fijas; es evidente que las condiciones límites en la superficie de un volumen muy grande no puede tener ningún efecto sobre las propiedades volumétricas del flujo en el que estamos interesados.

De acuerdo con la definición general, el tensor M_{ik} , que es el momento angular total, es igual a la integral

$$\rho \int (x_i v_k - x_k v_i) dV$$

tomada en todo el volumen. Transformemos esta integral del modo siguiente:

$$\int x_k v_i dV = \int \frac{\partial}{\partial x_i} (x_i x_k v_i) dV - \int x_i x_k \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV - \int x_i v_k dV.$$

La primera integral del segundo miembro, al convertirse en una integral de superficie, resulta cero, puesto que las componentes de velocidad normales en las paredes que limitan al fluido son nulas, de modo que $v_k dk_k = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df = 0$. La segunda integral es cero si el fluido es incompresible ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$). Así pues,

$$\int x_k v_i dV = - \int x_i v_k dV,$$

y podemos escribir

$$M_{ik} = 2\rho \int x_i v_k dV.$$

La suma de las componentes al cuadrado de M_{ik} es igual al doble del valor absoluto del cuadrado del vector momento cinético

$$\mathbf{M} = \rho \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV.$$

Por tanto, tenemos

$$M^2 = 2\rho^2 [\int x_i v_k dV]^2.$$

La integral al cuadrado puede escribirse como una integral doble:

$$M^2 = 2\rho^2 \iint x_i x'_i v_k v'_k dV dV'.$$

Finalmente, observemos que esta expresión puede volverse a escribir

$$M^2 = -\rho^2 \iint (x_i - x'_i)^2 v_k v'_k dV dV'; \quad (38.1)$$

las integrales que contienen los cuadrados x_i^2 y x'^2 se anulan, puesto que

$$\iint x'_i^2 v_k v'_k dV dV' = \int x'_i^2 v'_k dV' \int v_k dV, \quad y \quad \int v_k dV = 0$$

ya que el impulso total de un fluido incompresible en un recipiente fijo es cero.

El factor $v_k v'_k \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'$ en el integrando de (38.1) es el producto escalar de las velocidades en dos puntos que tienen coordenadas x_k y x'_k , estando separados a una distancia $r = \sqrt{[(x_k - x'_k)^2]}$. Promediamos este producto respecto todas las posiciones de los puntos x_k y x'_k (para un r dado) dentro del volumen que nos ocupa: esta operación de promedio es la misma que la utilizada en § 33 al definir las funciones de correlación. Puesto que el flujo es isótropo, la magnitud $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'$ es sólo una función de r . Disminuye rápidamente al aumentar r , puesto que las velocidades del flujo turbulento en dos puntos separados a una distancia grande puede suponerse que son estadísticamente independientes: el valor medio de su producto se reduce entonces al producto de los valores medios de las velocidades individuales, el cual es cero (puesto que la velocidad media es cero en cualquier punto dentro del flujo considerado).

Efectuando esta operación de promediar bajo el signo integral en (38.1), se tiene

$$M^2 = \rho^2 \int f dV, \text{ en donde } f = - \int \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'} r^2 dV'. \quad (38.2)$$

El integrando correspondiente a f disminuye rápidamente al aumentar r , de modo que la integral converge; esto significa que, cuando la dimensión L de la región tiende a infinito, f tiende a un límite finito. Puesto que el flujo es homogéneo,[†] la magnitud f es constante en todas partes del fluido

[†] En toda la región, excepto en una parte muy pequeña cerca de la superficie.

y podemos escribir simplemente $M^2 = \rho^2 f V$. Podemos señalar así que el momento angular o cinético aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada del volumen del fluido móvil y no proporcionalmente a dicho volumen. Esto se debe a que el momento angular total es la suma de un gran número de componentes estadísticamente independientes (los momentos angulares de las diversas partes pequeñas del fluido), cuyos valores medios no son nulos.

Así pues, se obtiene la conclusión de que, en el caso de turbulencia isótropa, la constante de M implica la condición de que

$$\int \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' r^2 dV'} = \text{constante.} \quad (38.3)$$

Esta es la *ley de Loytianski*.†

El integrando (38.3) es notablemente diferente de cero en una región cuyas dimensiones son del orden de la escala l de la turbulencia (el volumen de la región $\sim l^3$), y allí es del orden de $v^2 l^2$. De aquí que tengamos a partir de (38.3)

$$v^2 l^5 = \text{constante.} \quad (38.4)$$

Utilizando esta relación podemos determinar el modo en que disminuye con el tiempo la turbulencia isótropa. Para ello estimemos la derivada temporal de la energía cinética de la unidad de volumen del fluido. Por una parte, puede escribirse que es del orden de $\rho v^2 / t$. Además, debe ser igual a la energía disipada en el volumen unidad por unidad de tiempo. De acuerdo con la fórmula (31.1), $\rho \epsilon \sim \rho v^3 / l$ (siendo aquí v la velocidad característica). Si son comparables las dos expresiones, tenemos

$$l \sim vt. \quad (38.5)$$

Sustituyendo (38.5) en (38.4), vemos que

$$v = \text{constante} / t^{5/7}. \quad (38.6)$$

Así pues, la velocidad en la turbulencia isótropa disminuye con el tiempo, de modo inversamente proporcional a $t^{5/7}$. Para el valor de l tenemos

$$l = \text{constante} \times t^{2/7}, \quad (38.7)$$

es decir, la escala o dimensión externa de la turbulencia aumenta proporcionalmente a $t^{2/7}$ (A. N. KOLMOGOROV, 1941).

† Recientemente se ha expresado más de una duda respecto a la aplicabilidad de la ley de conservación (38.3), teniendo en cuenta el comportamiento de la correlación de velocidades a distancias muy grandes; por ejemplo, si esta correlación no disminuye con suficiente rapidez, la integral (38.3) puede ser divergente. Todo el tema parece estar todavía poco claro.

De acuerdo con las fórmulas (38.6) y (38.7), el número de Reynolds $R \sim v l / \nu$ disminuye proporcionalmente a $t^{-3/7}$, y después de un tiempo suficiente resulta tan pequeño que empieza a ser importante la viscosidad. Se determina entonces la disipación de energía, por una parte, mediante la forma usual (16.3), que da

$$\epsilon = \frac{1}{2} \nu \left(\frac{\partial v_t}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_t} \right)^2 \sim \frac{\nu v^2}{l^2},$$

y, por otra parte, mediante $\epsilon \sim v^2/t$. Comparando, obtenemos

$$l \sim \sqrt{(\nu t)}, \quad (38.8)$$

y luego, a partir de (38.4), tenemos

$$v = \text{constante}/t^{5/4}. \quad (38.9)$$

Estas fórmulas, que se deben a M. D. MILLIONSHCHIKOV (1939), nos dan el modo en que disminuye la turbulencia isótropa en el período final, cuando resulta predominante el efecto de la viscosidad.

Se puede conseguir un flujo turbulento haciendo pasar una corriente a través de una rejilla que posee un número grande de aberturas regularmente espaciadas. Designemos mediante U la velocidad del flujo original (tomando el eje x en la dirección de U) y la verdadera velocidad por $U + v$, de modo que v es la velocidad del flujo turbulento que nos interesa. Si introducimos un sistema de referencia móvil con velocidad U , entonces respecto a este sistema el fluido realiza un flujo turbulento con velocidad v . Cuando nos alejamos de la rejilla el flujo turbulento promediado (con velocidad $u = \bar{v}$) disminuye más rápidamente que el flujo fluctuante. Esto se debe a que el flujo promediado tiene una escala del orden de la dimensión a de las aberturas de las rejillas y éstas son pequeñas en comparación con la escala del flujo fluctuante. En consecuencia, a distancias x suficientemente grandes de la rejilla, la velocidad promediada u es casi cero y la velocidad turbulenta v coincide prácticamente con la velocidad fluctuante. A esta distancia la turbulencia puede considerarse como totalmente isótropa en regiones pequeñas en comparación con x (aunque no necesariamente pequeñas en comparación con la escala externa de la turbulencia). El tiempo de amortiguamiento de la turbulencia en el sistema móvil de referencia corresponde a un amortiguamiento al aumentar las distancias de las rejillas en el sistema estacionario original. El modo como se produce esta disminución viene dado por las fórmulas deducidas anteriormente, en las que únicamente necesitamos sustituir t por x/U . Recordando que a distancias de la rejilla del orden de a (dimensión de las aberturas), debemos tener $l \sim a$, podemos volver a escribir la fórmula (38.7) como $l \sim a(x/a)^{2/7}$. Para la velocidad tenemos, mediante (38.5), $v \sim lU/x$, de aquí que $v \sim U(a/x)^{5/7}$.

PROBLEMA

Utilizando la ecuación (33.17), obtener para la turbulencia isótropa la ley cuantitativa de amortiguamiento de las magnitudes $\overline{v_r v_r}$ en el período en el cual es importante la viscosidad (L. G. LOVTSIANSKI, M. D. MILLIONSHCHIKOV).

Solución. En este caso podemos despreciar el término B_{rrr} en (33.17), puesto que es de un orden superior en la velocidad (pequeña). Introduciendo la magnitud

$$b_{rr} \equiv \overline{v_r v_r} = \frac{1}{2} \overline{v^2} - \frac{1}{2} B_{rr}$$

[ver (33.16)], obtenemos para la misma la ecuación

$$\frac{\partial b_{rr}}{\partial t} - \frac{2\nu}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial b_{rr}}{\partial r} \right) = 0.$$

La solución de esta ecuación que tiene interés es

$$b_{rr} = \text{constante} \times e^{-r^4/8\nu t} / t^{5/2};$$

véase la solución análoga (51.6) de la ecuación de la conducción térmica. Esta expresión nos da la forma asintótica de la función b_{rr} para condiciones iniciales tales que b_{rr} es una función cualquiera que disminuye con suficiente rapidez al aumentar r [del mismo modo que (51.6) da la ley asintótica de propagación del calor que en el instante inicial se concentra en una pequeña región del espacio].

CAPÍTULO IV

C A P A S L Í M I T E S

§ 39. Capa límite laminar

Hemos mencionado ya varias veces el hecho de que números de Reynolds muy grandes son equivalentes a viscosidades muy pequeñas y, en consecuencia, un fluido puede considerarse como ideal si R es grande. Sin embargo, nunca puede utilizarse esta aproximación en el caso de que el flujo en cuestión se produzca cerca de unas paredes sólidas. Las condiciones límites, en el caso de un fluido ideal, exigen que únicamente se anule la componente de velocidad normal y, en general, sigue siendo finita la componente tangencial a la superficie. Sin embargo, en el caso de un fluido viscoso, la velocidad junto a la pared sólida debe anularse por completo.

A partir de esta consideración llegamos a la conclusión de que, en el caso de números de Reynolds grandes, la disminución de la velocidad hasta cero se produce casi exclusivamente en una capa delgada junto a la pared. Recibe el nombre de *capa límite* y está caracterizada, por tanto, por la presencia de unos gradientes de velocidad considerables. El flujo en la capa límite puede ser laminar o turbulento. En esta sección consideraremos las propiedades de la capa límite laminar. El límite de la capa no es, como es natural, nítido; la transición desde el flujo laminar en la capa a la corriente principal del fluido es continua.

La disminución rápida de la velocidad en la capa límite se debe, finalmente, a la viscosidad, que no puede despreciarse aunque R sea grande. Matemáticamente, esto se obtiene como consecuencia de que los gradientes de velocidad en la capa límite son grandes y, por tanto, los términos de viscosidad en las ecuaciones del movimiento, que contienen derivadas espaciales de la velocidad, son grandes, aunque ν sea pequeña. La teoría matemática de la capa límite se debe a L. Prandtl.

Deduzcamos las ecuaciones del movimiento del fluido en una capa límite laminar. Para mayor sencillez, consideremos un flujo bidimensional a lo largo de una porción plana de la superficie. Este plano se toma como plano xz , estando situado el eje x en la dirección del flujo. La distribución de velocidades es independiente de z y la velocidad carece de componente z .

Las ecuaciones exactas de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad son, entonces,

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \quad (39.1)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \quad (39.2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (39.3)$$

Se supone que el flujo es estacionario y, por tanto, se omiten las derivadas respecto al tiempo.

Como la capa límite es delgada, es evidente que el flujo en ella tiene lugar principalmente, de modo que resulta paralelo a la superficie, es decir, la velocidad v_y es pequeña en comparación con v_x (como se ve inmediatamente a partir de la ecuación de continuidad).

La velocidad varía rápidamente a lo largo del eje y , produciéndose una variación apreciable a distancias del orden del espesor δ de la capa límite. Por otra parte, a lo largo del eje x la velocidad varía lentamente, produciéndose una variación apreciable de la misma sólo a distancias del orden de la longitud l característica del problema (por ejemplo, la dimensión del cuerpo). De aquí que las derivadas de la velocidad respecto al eje y sean grandes en comparación con las derivadas respecto al eje x . Se deduce, pues, que en la ecuación (39.1) puede despreciarse la derivada $\partial^2 v_x / \partial x^2$ en comparación con $\partial^2 v_x / \partial y^2$; comparando (39.1) y (39.2) vemos que la derivada $\partial p / \partial y$ es pequeña en comparación con $\partial p / \partial x$ (siendo el cociente del mismo orden que v_y / v_x). En la aproximación considerada podemos poner simplemente

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (39.4)$$

es decir, se supone que no existe ningún gradiente de presión transversal en la capa límite. En otras palabras, la presión en la capa límite es igual a la presión $p(x)$ de la corriente principal y suponemos que es una función determinada de x con objeto de poder resolver el problema de la capa límite. A continuación, podemos escribir en la ecuación (39.1) la derivada total $dp(x)/dx$ en lugar de $\partial p / \partial x$; la derivada anterior puede expresarse en función de la velocidad $U(x)$ de la corriente principal. Puesto que tenemos un flujo potencial fuera de la capa límite, sigue siendo válida la ecuación de Bernoulli, $p + 1/2\rho U^2 = \text{constante}$, de aquí que $(1/\rho)dp/dx = -UdU/dx$.

Así pues, obtenemos las ecuaciones del movimiento en la capa límite laminar, en la forma

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &= - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \\ &= U \frac{dU}{dx}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (39.5)$$

Puede verse fácilmente que estas ecuaciones, aunque deducidas para el flujo a lo largo de una pared plana, permanecen siendo válidas en el caso más general de cualquier flujo bidimensional (flujo transversal que rodea un cilindro de longitud infinita y sección recta arbitraria). En este caso, x es la distancia medida a lo largo de la circunferencia de la sección recta desde un punto determinado de la misma, e y es la distancia a la superficie.

Llamemos U_0 a una velocidad característica del problema (por ejemplo, la velocidad de la corriente principal en el infinito). En lugar de las coordenadas x , y y de las velocidades v_x , v_y , introduzcamos las variables adimensionales x' , y' , v'_x , v'_y :

$$x = lx', \quad y = ly'/\sqrt{R}, \quad v_x = U_0 v'_x, \quad v_y = U_0 v'_y/\sqrt{R} \quad (39.6)$$

(y en correspondencia, $U = U_0 U'$), en donde $R = U_0 l / v$. Entonces las ecuaciones (39.5) toman la forma

$$\begin{aligned} v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} - \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} &= U' \frac{dU'}{dx'}, \\ \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} &= 0. \end{aligned} \quad (39.7)$$

En estas ecuaciones (y en las condiciones límites que hay que aplicar a las mismas) no interviene la viscosidad. Esto significa que sus soluciones son independientes del número de Reynolds. Así pues, se obtiene el importante resultado de que, cuando se varía el número de Reynolds, el esquema completo del flujo de la capa límite sufre simplemente una transformación de semejanza, permaneciendo invariable en las distancias y velocidades longitudinales, mientras que las distancias y velocidades transversales varían como $1/\sqrt{R}$.

A continuación, podemos decir que las velocidades adimensionales v'_x , v'_y obtenidas al resolver las ecuaciones (39.7) deben ser del orden de la unidad, puesto que no dependen de R . Lo mismo es cierto cuando se trata del espe-

sor δ de la capa límite en función de las coordenadas x' , y' . A partir de la forma (39.6) podemos, por tanto, obtener la conclusión de que

$$v_y \sim U_0/\sqrt{R}, \quad (39.8)$$

es decir, el cociente entre las velocidades transversales y longitudinales es inversamente proporcional a \sqrt{R} , y que

$$\delta \sim l/\sqrt{R}, \quad (39.9)$$

es decir, el espesor de la capa límite disminuye al aumentar el número de Reynolds en la proporción $1/\sqrt{R}$.

Aplicaremos las ecuaciones correspondientes a la capa límite al caso del flujo plano paralelo a lo largo de una lámina plana. Supongamos que el plano de la placa coincide con el semiplano xz correspondiente a los valores de x positivos (de manera que $x = 0$ sea el borde de ataque de la placa). Supongamos también que la placa se extiende indefinidamente en el sentido de los valores de x positivos. La velocidad de la corriente principal en este caso es evidentemente constante ($U = \text{constante}$). Las ecuaciones (39.5) adquieren ahora la forma

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (39.10)$$

Las condiciones límites en la superficie de la placa exigen que se anulen ambas componentes de la velocidad: $v_x = v_y = 0$ para $y = 0$, $x \geq 0$. Cuando nos alejamos de la placa, la velocidad debe tender asintóticamente a la velocidad U del flujo incidente, es decir, $v_x = U$ para $y \rightarrow +\infty$. En la solución de las ecuaciones de la capa límite, como hemos visto, v_x/U y $v_y/\sqrt{l/U\nu}$ pueden ser funciones únicamente de $x' = x/l$ e $y' = y\sqrt{(U/l\nu)}$. Sin embargo, en el problema considerado, la placa tiene una extensión infinita y no existe, por tanto, ninguna longitud característica l . De aquí que v_x/U puede depender únicamente de una combinación de x' e y' en la que no intervenga l , por ejemplo, $y'/\sqrt{x'} = y\sqrt{(U/\nu x)}$. Análogamente, el producto $v_y/\sqrt{x'}$ debe ser una función de $y'/\sqrt{x'}$. Así pues, podemos buscar una solución de la forma

$$v_x = U f[y\sqrt{(U/\nu x)}], \quad v_y = \sqrt{(U\nu/x)} f_1[y\sqrt{(U/\nu x)}], \quad (39.11)$$

en donde f y f_1 son funciones adimensionales. Utilizando la segunda ecuación (39.10) podemos expresar f_1 en función de f . El problema se reduce así a la determinación de una sola función f de una única variable $\xi = y\sqrt{(U/\nu x)}$.[†]

En lo que sigue nos preocupará únicamente la distribución de la velocidad longitudinal v_x (puesto que v_y es pequeña). Podemos obtener una conclusión importante de la fórmula (39.11) sin determinar siquiera la función f .

[†] Se demuestra fácilmente que, si la función $\phi(\xi)$ cumple que $f(\xi) = \phi'(\xi)$, entonces $f_1(\xi) = (\xi\phi' - \phi)/2$, mientras que ϕ satisface la ecuación $\phi\phi'' + 2\phi''' = 0$, con las condiciones límites $\phi = \phi' = 0$ para $\xi = 0$, $\phi' = 1$ para $\xi = \infty$.

La velocidad v_x aumenta desde cero en la superficie de la placa hasta una fracción definida de U para un valor determinado del argumento de f , es decir, $y\sqrt{U/vx} = \text{una constante dada cualquiera}$. Aquí podemos obtener la conclusión de que el espesor de la capa límite en el flujo a lo largo de una placa viene dado en orden de magnitud por

$$\delta \sim \sqrt{vx/U}. \quad (39.12)$$

Así pues, cuando nos alejamos del borde de la placa, δ aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada de la distancia al borde.

Puede determinarse la función f mediante integración numérica. En la figura 19 se muestra un gráfico de dicha función. Vemos que f tiende muy rápidamente a su valor límite, que es la unidad.[†]

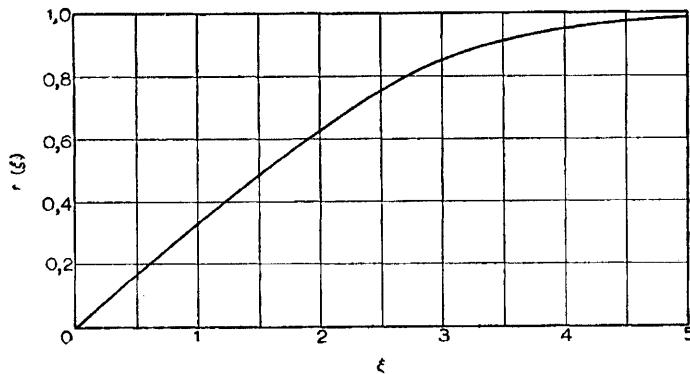


FIG. 19

La fuerza de rozamiento por unidad de área de la superficie de la placa es

$$\sigma_{xy} = \eta(\partial v_x / \partial y)_{y=0}.$$

Un cálculo numérico nos da

$$\sigma_{xy} = 0,332\sqrt{(\eta\rho U^3/x)}. \quad (39.13)$$

Si la placa tiene una longitud l (en la dirección x), entonces la fuerza de rozamiento total sobre ella por unidad de longitud en la dirección z es

$$F = 2 \int_0^l \sigma_{xy} dx.$$

[†] Se define el «espesor del desplazamiento» δ^* , utilizado, a veces, para caracterizar el espesor de la capa límite, como

$$\int_0^{\infty} (U - v_x) dy = U\delta^*.$$

Es igual a $1,72 \sqrt{vx/U}$.

El factor 2 se debe al hecho de que la placa tiene dos caras expuestas al fluido. Sustituyendo (39.13), tenemos

$$F = 1,328 \sqrt{(\eta \rho l U^3)} \quad (39.14)$$

(H. BLASIUS, 1908). Podemos señalar que la fuerza de rozamiento es proporcional a la potencia 3/2 de la velocidad de la corriente principal. La fórmula (39.14) solamente puede aplicarse a placas bastante largas, en las que el número de Reynolds Ul/ν es suficientemente grande. Suele expresarse la fuerza en función del *coeficiente de arrastre*, definido como el cociente adimensional

$$C = F / \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot 2l. \quad (39.15)$$

Según (39.14), esta magnitud, en el caso de un flujo laminar a lo largo de una placa, es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de Reynolds:

$$C = 1,328 / \sqrt{R}. \quad (39.16)$$

Las fórmulas cuantitativas obtenidas anteriormente son válidas únicamente, como es natural, para el flujo a lo largo de una placa plana. Sin embargo, los resultados cualitativos, tales como (39.8) y (39.9), son válidos para el flujo que rodea a un cuerpo de una forma cualquiera. En dichos casos l es la dimensión del cuerpo en la dirección del flujo.

Podemos hacer una mención especial de dos casos de la capa límite. Si tenemos un disco plano de radio grande, girando en el fluido alrededor de un eje perpendicular a su plano, entonces para estimar el espesor de la capa límite debemos sustituir U en (39.12) por Ωx , siendo Ω la velocidad angular de rotación. Así se tiene

$$\delta \sim \sqrt{(\nu / \Omega)}. \quad (39.17)$$

Vemos que el espesor de la capa límite puede considerarse como una constante en toda la superficie del disco, de acuerdo con la solución exacta de este problema que se obtuvo en § 23. El valor de las fuerzas de rozamiento que actúan sobre el disco, obtenidas a partir de las ecuaciones de la capa límite, coinciden, como es natural, con (23.4), puesto que esta fórmula es exacta y, por tanto, es válida para el flujo laminar con cualquier valor de R .

Finalmente, consideremos la capa límite laminar formada en las paredes de una tubería cerca del punto de entrada del fluido. El fluido normalmente entra en un tubo con una distribución de velocidades que es casi constante en toda su sección recta y la velocidad disminuye hacia cero totalmente dentro de la capa límite. Cuando nos alejamos de la entrada a la tubería, las capas de fluido más próximas al eje se ven retardadas. Puesto que la masa del fluido que pasa por cada sección recta es la misma, la parte interna de la corriente en donde la velocidad es todavía uniforme, debe acelerarse cuando su diámetro se reduce. Esto continúa así hasta que se alcanza asintótica-

mente una distribución de velocidades de Poiseuille; esta distribución se encuentra así sólo a cierta distancia de la entrada de la tubería. Es fácil de determinar el orden de magnitud de la longitud l de la «sección de entrada». Viene dada por el hecho de que, a una distancia l de la entrada, el espesor de la capa límite es del mismo orden de magnitud que el radio de la tubería, de modo que la capa límite rellena casi por completo la sección recta de la misma. Haciendo en (39.12) $x \sim l$ y $\delta \sim a$, obtenemos

$$l \sim a^2 U / \nu \sim aR. \quad (39.18)$$

Así pues, la longitud de la sección de entrada es proporcional al número de Reynolds.[†]

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el espesor de la capa límite cerca de un punto de estancamiento (ver § 10).

Solución. Cerca del punto de estancamiento la velocidad del fluido (fuera de la capa límite) es proporcional a la distancia x a dicho punto, de modo que podemos poner $U = cx$. Estimando los valores de los términos de las ecuaciones (39.5) se encuentra que $\delta \sim \sqrt{(\nu/c)}$. Así pues, el espesor de la capa límite cerca del punto de estancamiento es finito (y en particular no se anula en el propio punto de estancamiento).

Problema 2. Determinar el flujo en la capa límite de un canal convergente entre dos planos no paralelos (K. POHLHAUSEN, 1921).

Solución. Considerando la capa límite a lo largo de uno de los planos, midamos la coordenada x a lo largo del mismo desde el punto O (figura 8, § 23). En el caso de un fluido ideal deberíamos tener la velocidad $U = Q/\alpha x \rho$; el gradiente de presiones correspondiente viene dado, según la ecuación de Bernoulli, por

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} U^2 \right) = \frac{Q^2}{\alpha^2 x^3 \rho^2}.$$

Es fácil ver que v_x y v_y deben tener la forma

$$v_x = (Q/\rho \alpha x) f(y/x), \quad v_y = (Q/\rho \alpha x) f_1(y/x).$$

A partir de la ecuación de continuidad obtenemos $f_1 = (y/x)f$, y la primera ecuación (39.5) da entonces para la función f

$$(\rho v \alpha / Q) f'' = 1 - f^2,$$

[†] No estudiaremos aquí la teoría de la capa límite en el caso de un fluido compresible, que resulta, naturalmente, mucho más complicada que la correspondiente a un fluido incompresible. Dicha teoría puede hallarse en N. E. KOCHIN, I. A. KIBEL' y N. V. ROZE, *Theoretical Hydromechanics* (*Teoreticheskaya gidromekhanika*), parte 2, 3.^a ed., capítulo II, §§ 35, 36, Moscow, 1948; H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, Pergamon Press, London, 1955; L. HOWARTH, ed., *Modern Developments in Fluid Dynamics: High Speed Flow*, vol. 1, Oxford, 1953.

en donde el signo prima designa la derivación de f respecto a su argumento $\xi = y/x$. Las condiciones límites son $f(0) = 0$, $f(\infty) = 1$ [puesto que debemos tener $(v_x)_{y=0} = 0$, $(v_x)_{y=\infty} = Q/\rho\alpha x$]. Una primera integral de la ecuación es

$$(\nu\alpha\rho/2Q)f'^2 = f - \frac{1}{2}f^3 + \text{constante}$$

Puesto que f tiende hacia la unidad cuando $y \rightarrow \infty$, vemos que f' tiende hacia un límite definido que únicamente puede ser cero. Determinando así la constante, se tiene

$$(\nu\alpha\rho/2Q)f'^2 = -\frac{1}{2}(f-1)^2(f+2).$$

Como el segundo miembro es siempre negativo para $0 \leq f \leq 1$, debemos tener $Q < 0$. Es decir, se forma una capa límite del tipo en cuestión únicamente mediante un flujo en un canal convergente (y sólo para números de Reynolds grandes $R = |Q|/\nu\rho$), y no en el caso de un flujo en un canal divergente de acuerdo con los resultados del § 23. Integrando una vez más, tenemos finalmente

$$f = 3 \operatorname{tg} h^2 [\log(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \xi \sqrt{(R/2\alpha)}] - 2.$$

§ 40. Flujo cerca de la línea de separación

Al describir la línea de separación (§ 34) ya hemos mencionado que la posición real de esta línea en la superficie del cuerpo está determinada por las propiedades del flujo en la capa límite. Veremos a continuación que, desde un punto de vista matemático, la línea de separación es aquélla cuyos puntos son puntos singulares de las soluciones de las ecuaciones del movimiento (de Prandtl) de las capas límites. El problema consiste en determinar las propiedades de estas soluciones cerca de dicha línea de singularidades.[†]

Ya sabemos que, desde la línea de separación, empieza una superficie que se extiende dentro del fluido y que marca la región de flujo turbulento. El flujo es rotacional en toda la región turbulenta, mientras que en ausencia de separación sería rotacional únicamente en la capa límite en donde es importante la viscosidad; la vorticidad debe ser cero en la corriente principal. De aquí que podamos decir que la separación hace que la vorticidad «penetre» desde la capa límite hacia el fluido. Sin embargo, por la conservación de la circulación, esta «penetración» puede producirse sólo mediante la mezcla directa del fluido que se mueve cerca de la superficie (en la capa límite) con la corriente principal. En otras palabras, el flujo en la capa límite debe separarse de la superficie del cuerpo, y, en consecuencia, las líneas de corriente abandonan la capa superficial y entran en el interior del fluido. Por ello, este fenómeno se denomina *separación*, o bien *separación de la capa límite*.

Las ecuaciones del movimiento en la capa límite conducen, como hemos visto, al resultado de que la componente de velocidad tangencial (v_x) en la capa límite es grande en comparación con la componente (v_y) normal a la

[†] El enfoque dado aquí al problema se debe a L. D. LANDAU, y es algo diferente al que se encuentra normalmente.

superficie del cuerpo. Esta relación entre v_x y v_y se deduce de nuestras hipótesis básicas que consideran la naturaleza del flujo en la capa límite y deben aparecer necesariamente siempre que las ecuaciones de Prandtl tengan soluciones con significado físico. Matemáticamente esta relación se verifica ciertamente en todos los puntos no situados en la proximidad inmediata de los puntos singulares. Pero si $v_y \ll v_x$ se deduce que el fluido se mueve a lo largo de la superficie del cuerpo y se aleja de dicha superficie sólo muy ligeramente, de modo que no puede existir separación. Por tanto, se llega a la conclusión de que la separación solamente puede producirse en una línea cuyos puntos sean singularidades de la solución de las ecuaciones de Prandtl.

También se deduce inmediatamente la naturaleza de estas singularidades. En efecto, cuando nos acercamos a la línea de separación, el flujo se desvía de la capa límite hacia el interior del fluido. En otras palabras, la componente de velocidad normal deja de ser pequeña en comparación con la componente tangencial y es ahora del mismo orden de magnitud como mínimo. Hemos visto [ver (39.8)] que el cociente v_y/v_x es del orden de $1/\sqrt{R}$, de modo que un aumento de v_y hasta el punto en donde $v_y \sim v_x$ significa un aumento en un factor de \sqrt{R} . De aquí que, en el caso de números de Reynolds suficientemente grandes (que son los que estamos considerando, como es natural), podemos suponer que v_y aumenta en un factor infinito. Si utilizamos la ecuación de Prandtl en forma adimensional [ver (39.7)], la situación que acabamos de describir es formalmente equivalente a un valor infinito de la velocidad adimensional v'_y sobre la línea de separación.

Con objeto de simplificar un poco el estudio siguiente, consideraremos el problema bidimensional del flujo transversal que rodea un cuerpo de longitud infinita. Como es normal, x es la coordenada a lo largo de la superficie en la dirección del flujo, mientras que y es la distancia desde la superficie del cuerpo. En lugar de una línea de separación, tenemos ahora un punto de separación, a saber, la intersección de la línea de separación con el plano xy ; en las coordenadas utilizadas, este es el punto $x = \text{constante} \equiv x_0$; $y = 0$. Supongamos que es $x < x_0$ la región anterior al punto de separación.

De acuerdo con los resultados anteriores, tenemos que para todo[†] valor de y

$$v_y(x_0, y) = \infty. \quad (40.1)$$

Sin embargo, en las ecuaciones de Prandtl, v_y es un cierto tipo de parámetro que carece normalmente de interés (teniendo en cuenta su pequeñez) al estudiar el flujo en la capa límite. De aquí que sea necesario discernir las propiedades de la función v_y cerca de la línea de separación.

[†] Excepto $y = 0$, donde debemos tener siempre $v_y = 0$ de acuerdo con las condiciones límites en la superficie del cuerpo.

Es evidente, según (40.1), que para $x = x_0$, la derivada $\partial v_y / \partial y$ también resulte infinita. A partir de la ecuación de continuidad, $\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y = 0$, se deduce entonces que $(\partial v_x / \partial x)_{x=x_0}$ es infinita, o sea, $\partial x / \partial v_x = 0$, considerándose a x como una función de v_x e y . Designemos por $v_0(y)$ el valor de la función $v_x(x, y)$ para $x = x_0$: $v_0(y) = v_x(x_0, y)$. Cerca del punto de separación, las diferencias $v_x - v_0$ y $x_0 - x$ son pequeñas y podemos desarrollar $x_0 - x$ en potencias de $v_x - v_0$ (para un valor de y dado). Puesto que $(\partial x / \partial v_x)_{v=v_0} = 0$, deben anularse idénticamente los términos de primer orden de este desarrollo, y tenemos (limitándonos a los términos de segundo orden) $x_0 - x = f(y)(v_x - v_0)^2$, o sea,

$$v_x = v_0(y) + \alpha(y)\sqrt{(x_0 - x)}, \quad (40.2)$$

en donde $\alpha = 1/\sqrt{f}$ es una función determinada de y únicamente. Poniendo ahora

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = - \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\alpha(y)}{2\sqrt{(x_0 - x)}}$$

e integrando, tenemos para v_y

$$v_y = \beta(y)/\sqrt{(x_0 - x)}, \quad (40.3)$$

en donde

$$\beta(y) = \frac{1}{2} \int \alpha(y) dy$$

es otra función de y .

A continuación, utilicemos la primera ecuación (39.5):

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}. \quad (40.4)$$

La derivada $\partial^2 v_x / \partial y^2$ no se hace infinito para $x = x_0$, como se ve en (40.2). Lo mismo es cierto para dp/dx , que queda determinada por el flujo fuera de la capa límite. Sin embargo, los dos términos en el primer miembro de la ecuación (40.4) resultan infinitos. Por tanto, podemos escribir en primera aproximación para la región próxima al punto de separación $v_x \partial v_x / \partial x + v_y \partial v_x / \partial y = 0$. Sustituyendo $\partial v_x / \partial x = -\partial v_y / \partial y$, podemos volver a escribir esta expresión en la forma

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_x^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) = 0.$$

Como, en general, la velocidad v_x no se anula para $x = x_0$, se deduce que $\partial(v_y/v_x)/\partial y = 0$, es decir, el cociente v_y/v_x es independiente de y . A partir de (40.2) y (40.3), tenemos, deteniéndonos en los términos de orden superior,

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{\beta(y)}{v_0(y)\sqrt{(x_0 - x)}}.$$

Si esta expresión es una función exclusiva de x debemos tener $\beta(y) = Av_0(y)/2$, siendo A una constante numérica. Así pues,

$$v_y = \frac{Av_0(y)}{2\sqrt{(x_0-x)}}. \quad (40.5)$$

Finalmente, observando que α y β obedecen tanto en (40.2) como en (40.3) la relación $\alpha = 2\beta'$, se obtiene $\alpha = A dv_0/dy$, de modo que

$$v_x = v_0(y) + A(dv_0/dy)\sqrt{(x_0-x)}. \quad (40.6)$$

Las fórmulas (40.5) y (40.6) determinan v_x y v_y como funciones de x cerca del punto de separación. Vemos que cada una de ellas puede desarrollarse en esta región en potencias de $\sqrt{(x_0-x)}$, empezando el desarrollo de v_y con la potencia -1 , de modo que v_y resulta infinito, del mismo modo que lo es $(x_0-x)^{-1/2}$ para $x \rightarrow x_0$. Para $x > x_0$, es decir, más allá del punto de separación, carecen de significado los desarrollos (40.5) y (40.6), puesto que las raíces cuadradas resultan imaginarias; esto significa que las soluciones de las ecuaciones de Prandtl, que dan el flujo hasta el punto de separación, no pueden continuarse más allá de dicho punto.

A partir de las condiciones límites en la superficie del cuerpo, debemos siempre tener $v_x = v_y = 0$ para $y = 0$. Por tanto, de (40.5) y (40.6) se obtiene la conclusión

$$v_0(0) = 0, \quad (dv_0/dy)_{y=0} = 0. \quad (40.7)$$

Así pues, se obtiene el resultado importante (debido a Prandtl) de que, en el propio punto de separación ($x = x_0$, $y = 0$), no sólo la velocidad v_x , sino también su primera derivada respecto a y son nulas.

Debe resaltarse que la ecuación $\partial v_x / \partial y = 0$ en la línea de separación es válida sólo cuando v_y se hace infinita para dicho valor de x . Si resulta que es cero la constante A en (40.5), de modo que $v_y(x_0, y) \neq \infty$, entonces el punto $x = x_0$, $y = 0$ en el cual se anula la derivada $\partial v_x / \partial y$ no tiene ninguna propiedad particular y no sería un punto de separación. Sin embargo, el que A llegue a anularse es una cuestión puramente fortuita y dicho suceso es totalmente improbable. En la práctica un punto en la superficie del cuerpo en el cual $\partial v_x / \partial y = 0$ es siempre un punto de separación.

Si no existe separación en el punto $x = x_0$ (es decir, si $A = 0$), entonces para $x > x_0$ tenemos $(\partial v_x / \partial y)_{y=0} < 0$, es decir, v_x resulta negativa (con módulo creciente) cuando nos alejamos de la superficie, siendo todavía pequeño y . Es decir, el fluido más allá del punto $x = x_0$ se mueve, en las partes inferiores de la capa límite, en sentido opuesto al de la corriente principal; existe «flujo de retorno» del fluido en este punto. Debe observarse que a partir de estos razonamientos no podemos obtener la conclusión de que exista necesariamente un punto de separación en donde $\partial v_x / \partial y = 0$; todo el esquema del flujo completo con el «flujo de retorno» puede estar comprendido

dido (como sucede para $A = 0$) dentro de la capa límite y no entrar en la corriente principal, mientras que la característica de la separación es que el flujo entra en la corriente principal del fluido.

En la sección anterior se ha visto que el esquema de flujo en la capa límite es semejante para números de Reynolds diferentes y, en particular, permanece sin variar la escala en la dirección x . Se deduce de ello que el valor x_0 de la coordenada x para la cual es cero, la derivada $(\partial v_x / \partial y)_{y=0}$ es la misma para todo R . Así pues, tenemos el resultado importante de que la posición del punto de separación en la superficie del cuerpo es independiente del número de Reynolds (en tanto que la capa límite permanece laminar, como es natural; ver § 45).

Expongamos ahora también las propiedades de la distribución de presiones $p(x)$ cerca del punto de separación. Para $y = 0$ el primer miembro de la ecuación (40.4) es nulo junto con v_x y v_y , quedando

$$\nu(\partial^2 v_x / \partial y^2)_{y=0} = (1/\rho) dp/dx. \quad (40.8)$$

Resulta claro a partir de esta expresión que el signo de dp/dx es el mismo que el de $(\partial^2 v_x / \partial y^2)_{y=0}$. Cuando $(\partial v_x / \partial y)_{y=0} > 0$, no podemos decir nada respecto al signo de la segunda derivada. Sin embargo, puesto que v_x es positiva y aumenta alejándose de la pared (por delante del punto de separación), podemos tener siempre $(\partial^2 v_x / \partial y^2)_{y=0} > 0$ para el propio punto $x = x_0$, en donde $\partial v_x / \partial y = 0$. De aquí, se llega a la conclusión de que

$$(dp/dx)_{x=x_0} > 0, \quad (40.9)$$

es decir, el fluido cerca del punto de separación se mueve desde la región de presión menor hacia la región de presión mayor. El gradiente de presiones está relacionado con el gradiente de velocidades $U(x)$ fuera de la capa límite por la expresión $(1/\rho)dp/dx = -U dU/dx$. Como el sentido positivo del eje es el mismo que el de la corriente principal, $U > 0$, y, por tanto,

$$(dU/dx)_{x=x_0} < 0, \quad (40.10)$$

es decir, la velocidad U disminuye en el sentido del flujo cerca del punto de separación.

A partir de los resultados obtenidos anteriormente podemos deducir que debe existir una separación en alguna parte de la superficie del cuerpo. En efecto, existe tanto en la parte delantera como en la trasera del cuerpo un punto (punto de estancamiento) en el cual la velocidad del fluido es cero para el caso de un flujo potencial de fluido ideal. En consecuencia, para un cierto valor de x , la velocidad $U(x)$ debe empezar a disminuir y, finalmente, resulta cero. Sin embargo, es claro que el fluido que se mueve sobre la superficie del cuerpo se retarda más fuertemente cuanto más próximo está de la superficie (es decir, cuanto más pequeño sea y). De aquí que, antes de que la velocidad $U(x)$ sea cero en el límite exterior de la capa límite, la velo-

cidad en la proximidad inmediata de la superficie debe ser nula. Matemáticamente, esto significa evidentemente que la derivada $\partial v_x / \partial y$ debe siempre anularse (y, por tanto, debe existir la separación) para un valor x menor que el valor para el cual $U(x) = 0$.

Puede llevarse a cabo el cálculo correspondiente al flujo que rodea al cuerpo de una forma cualquiera de un modo totalmente semejante, y así se llega al resultado de que las derivadas $\partial v_x / \partial y$, $\partial v_z / \partial y$ de las dos componentes de velocidad v_x y v_z tangenciales a la superficie del cuerpo se anulan en la línea de separación (el eje y , como antes, está dirigido a lo largo de la normal a la parte de superficie considerada).

Podemos dar un razonamiento sencillo que demuestra la necesidad de separación en los casos en que el fluido tendría en otro caso un aumento rápido de presión (y, por tanto, una disminución rápida de la velocidad U) en el sentido de su flujo alrededor del cuerpo. En una distancia pequeña $\Delta x = x_2 - x_1$, supongamos que la presión p aumenta rápidamente desde p_1 hasta p_2 ($p_2 \gg p_1$). En la misma distancia Δx , la velocidad del fluido U fuera de la capa límite disminuye desde su valor inicial U_1 hasta un valor considerablemente más pequeño U_2 determinado por la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{1}{2}(U_1^2 - U_2^2) = (p_2 - p_1)/\rho.$$

Como p es independiente de y , el incremento de presión $p_2 - p_1$ es el mismo a cualquier distancia de la superficie. Si el gradiente de presión $dp/dx \sim \sim (p_2 - p_1)/\Delta x$ es suficientemente elevado, el término $\nu \partial^2 v_x / \partial y^2$, en el que interviene la viscosidad, puede omitirse de la ecuación del movimiento (40.4) (si, como es natural, y no es pequeño). Entonces, para estimar la variación de la velocidad v en la capa límite podemos utilizar la ecuación de Bernoulli, poniendo $(v_2^2 - v_1^2)/2 = -(p_2 - p_1)/\rho$, o bien, a partir de la ecuación previamente obtenida, $v_2^2 = v_1^2 - (U_1^2 - U_2^2)$. La velocidad v_1 en la capa límite es menor que la correspondiente a la corriente principal y podemos seleccionar un valor de y para el cual $v_1^2 < U_1^2 - U_2^2$. La velocidad v_2 es entonces imaginaria, demostrando que las ecuaciones de Prandtl carecen de soluciones con significado físico. De hecho, debe existir separación a la distancia Δx , como resultado de la cual se reduce el gradiente de presiones.

Un caso interesante de aparición de la separación viene dado por el flujo en un ángulo formado por dos superficies que se cortan. En el caso de un flujo potencial laminar exterior a un ángulo (figura 3), la velocidad del fluido en el vértice del ángulo resultaría infinita (ver § 10, problema 6), aumentando cuando la corriente se aproxima al vértice y disminuyendo en la corriente que sale del vértice. En realidad, la disminución rápida de velocidad (y el aumento correspondiente de presión) más allá del vértice conduciría a la separación, siendo la línea de separación aquélla en la cual se cortan las superficies. El esquema del flujo resultante es el estudiado en § 35.

En el flujo laminar en el interior de un ángulo (figura 4) la velocidad del fluido es cero en el vértice. En este caso la velocidad disminuye (y la presión aumenta) en el flujo cuando se acerca al vértice. El resultado es que, en general, aparece una separación, estando la línea de separación corriente arriba respecto al vértice del ángulo.

PROBLEMA

Determinar el mínimo aumento posible Δp de presión que puede producirse (en la corriente principal) en una distancia Δx y producir separación.

Solución. Sea y la distancia desde la superficie del cuerpo en la cual en primer lugar puede aplicarse la ecuación de Bernoulli y en segundo lugar es menor la velocidad al cuadrado $v^2(y)$ en la capa límite que la variación $|\Delta U^2|$ de la velocidad al cuadrado fuera de dicha capa. Para $v(y)$ podemos escribir, en órdenes de magnitud, $v(y) \approx y dv/dy \sim Uy/\delta$, en donde $\delta \sim \sqrt{vU/l}$ es la anchura de la capa límite y l la dimensión del cuerpo. Igualando, en orden de magnitud, los dos términos en el segundo miembro de la ecuación (40.4), tenemos

$$(1/\rho)\Delta p/\Delta x \sim vv(y)/y^2 \sim vU/\delta y.$$

A partir de la condición

$$v^2 = |\Delta U^2| = (2/\rho)\Delta p \text{ tenemos } U^2y^2/\delta^2 \sim \Delta p/\rho.$$

Eliminando y , finalmente obtenemos

$$\Delta p \sim \rho U^2(\Delta x/l)^{\frac{1}{2}}.$$

§ 41. Estabilidad del flujo en una capa límite laminar

El flujo laminar en la capa límite, como cualquier otro flujo laminar, se hace inestable en cierta extensión para valores de los números de Reynolds suficientemente grandes. El modo de perderse la estabilidad en la capa límite es semejante a lo que ocurre cuando estudiamos el flujo en una tubería (§ 29).

El número de Reynolds en el caso del flujo en la capa laminar varía a lo largo de la superficie del cuerpo. Por ejemplo, en el flujo sobre una placa podemos definir el número de Reynolds como $R_x = Ux/v$, siendo x la distancia desde el borde de ataque de la placa y U la velocidad del fluido fuera de la capa límite. Una definición más adecuada para la capa límite es, sin embargo, aquélla en la que el parámetro de longitud caracteriza directamente el espesor de la capa; por ejemplo, tal es el «espesor de desplazamiento» δ^* (ver la segunda nota a pie de página en § 39). Entonces tenemos $R_{\delta^*} = U\delta^*/v$. Puesto que la relación entre el espesor de la capa límite y la distancia x viene dada por la fórmula (39.12), es claro que $R_{\delta^*} \sim \sqrt{R_x}$.[†]

[†] Por ejemplo, en una capa límite laminar sobre una placa plana $R_{\delta^*} = 1,72 \sqrt{R_x}$.

Como la variación del espesor de la capa con la distancia es comparativamente lenta, podemos despreciarla al estudiar la estabilidad del flujo en una parte pequeña de la capa y considerar un flujo bidimensional rectilíneo con un perfil de velocidades que no varíe a lo largo del eje x .[†] Entonces, desde un punto de vista matemático, el problema es totalmente análogo al de la estabilidad del flujo entre dos planos paralelos estudiado en § 29. La única diferencia radica en la forma del perfil de velocidades; en lugar de un perfil simétrico con $v = 0$ en ambas caras, tenemos ahora un perfil asimétrico en el que la velocidad varía desde cero en la superficie del cuerpo hasta un valor determinado U , que es la velocidad del flujo fuera de la capa límite. El estudio realizado conduce a los resultados siguientes (LIN, 1945; ver C. C. LIN, *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge, 1955).

La forma de la curva límite de la estabilidad en el plano ωR (ver § 29) depende de la forma del perfil de velocidades en la capa límite. Si el perfil de velocidades no tiene ningún punto de inflexión y la velocidad v_x aumenta monótonamente con la curva $v_x = v_x(y)$ en todas las partes en que sea convexa hacia arriba (figura 20a), entonces el límite de la región estable es completamente semejante en cuanto a su forma al que se obtiene en el caso de un flujo en una tubería: existe un valor mínimo $R = R_{cr}$, en el cual aparecerán primero perturbaciones amplificadas, y para $R \rightarrow \infty$, ambas ramas de la curva son asintóticas al eje de abscisas (figura 21a). En el caso del perfil de velocidades que se produce en la capa límite de una placa plana, el número de Reynolds crítico se encuentra mediante el cálculo y resulta ser $R_{\delta^*, cr} \approx 420$.[‡]

No puede presentarse un perfil de velocidades del tipo indicado en la figura 20a si la velocidad del fluido, fuera de la capa límite, disminuye corriente abajo. En este caso, el perfil de velocidades debe tener un punto de inflexión. En efecto, consideremos una pequeña parte de la superficie que consideraremos plana, y supongamos de nuevo que x es la coordenada en el sentido del flujo e y la distancia a la pared. A partir de (40.8) tenemos

$$\nu(\partial^2 v_x / \partial y^2)_{y=0} = (1/\rho) dp/dx = -U \partial U / \partial x.$$

Aquí vemos que, si U disminuye aguas abajo ($\partial U / \partial x < 0$), debemos tener $\partial^2 v_x / \partial y^2 > 0$ cerca de la superficie, es decir, la curva $v_x = v_x(y)$ es cóncava hacia arriba. Cuando y aumenta, la velocidad v_x debe tender asintóticamente hacia el límite finito U . Resulta entonces evidente, a partir de consideraciones geométricas, que la curva debe hacerse convexa hacia arriba y, por tanto,

[†] Al considerarlo así, soslayamos, como es natural, la cuestión de la influencia que pueda tener la curvatura de la superficie sobre la estabilidad de la capa límite.

[‡] Cuando $R_{\delta^*} \rightarrow \infty$, ω tiende a cero sobre las dos ramas I y II de la curva límite, como $R_{\delta^*}^{-1/2}$ y $R_{\delta^*}^{-1/3}$, respectivamente.

debe tener un punto de inflexión (figura 20b). En este caso la forma de la curva que define la región estable se modifica ligeramente: las dos ramas tienen asíntotas diferentes para $R \rightarrow \infty$, una tiendiendo hacia el eje de las abscisas y la otra hacia un valor finito no nulo de ω (figura 21b). La presencia de un punto de inflexión reduce también considerablemente el valor de R_{cr} .

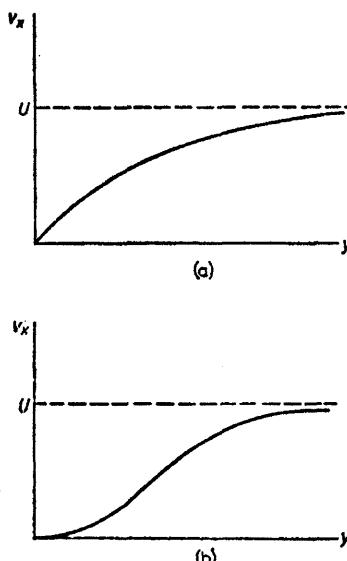


FIG. 20

El hecho de que el número de Reynolds aumente a lo largo de la capa límite, hace que sea poco usual el comportamiento de las perturbaciones cuando se ven trasladadas corriente abajo. Consideremos el flujo a lo largo de una placa plana y supongamos que se produce una perturbación con una frecuencia dada ω en un punto determinado de la capa límite. Su propagación corriente abajo corresponde a un movimiento de la figura 21a hacia la derecha a lo largo de una línea horizontal de $\omega = \text{constante}$. La perturbación al principio está amortiguada: luego, al alcanzar la rama I de la curva de estabilidad, empieza a amplificarse. Esta amplificación continúa hasta que se alcanza la rama II, en donde la perturbación se amortigua de nuevo. El «coeficiente de amplificación» total para la perturbación durante su paso a través de la región de inestabilidad aumenta muy rápidamente cuando esta región se mueve hacia los valores grandes de R (es decir, cuando el segmento horizontal correspondiente entre las ramas I y II se mueve hacia abajo).

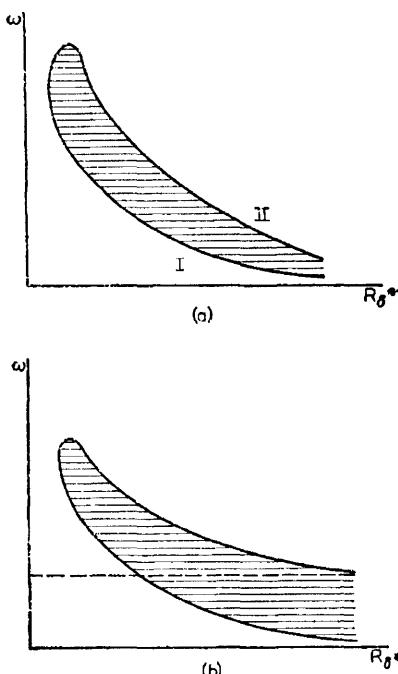


FIG. 21

Sin embargo, estos resultados no contestan a la pregunta de si es cierto que se produce la inestabilidad absoluta en la capa límite laminar para valores de R suficientemente grandes —es decir, aquella inestabilidad debida a la amplificación en el tiempo de las perturbaciones en un punto dado (ver § 29). Lo mismo que sucede en el flujo en una tubería, dicho estudio todavía no se ha realizado.

Los resultados experimentales correspondientes al flujo a lo largo de una placa plana muestran que el punto en donde aparece la turbulencia en la capa límite[†] depende, en una considerable extensión, de la intensidad de las perturbaciones que existen en la corriente principal. En el caso de perturbaciones notables, se observó que la capa límite se hacía turbulenta para $R_{\delta^*} \approx 560$. Cuando disminuye la intensidad de las perturbaciones, se pospone el inicio de la turbulencia a valores más elevados de R_{δ^*} que parecen tender hacia un límite finito de 3000 aproximadamente.

[†] Como el número de Reynolds varía a lo largo de la placa, no se transforma en turbulenta inmediatamente toda la capa límite, sino sólo aquella parte en que R_{δ^*} supera un determinado valor. Para una velocidad incidente determinada, esto significa que la turbulencia empieza a una distancia definida del borde de ataque; cuando la velocidad aumenta, esta distancia tiende a cero.

Es posible que la existencia de este límite indique la presencia de una inestabilidad absoluta verdadera para valores suficientemente elevados de R . Por otra parte, puede ser que, debido al aumento extremadamente rápido del «coeficiente de amplificación» respecto a R , la inestabilidad «del desplazamiento» del tipo descrito anteriormente puede tener la apariencia de una inestabilidad verdadera.

§ 42. Perfil logarítmico de velocidades

Consideremos el flujo turbulento plano paralelo a lo largo de una superficie plana ilimitada; se aplica, como es natural, el término «plano paralelo» al promedio temporal del flujo.[†] Tomemos el sentido del flujo como eje x y el plano de la superficie como plano xz , de modo que y sea la distancia a la superficie. Las componentes y y z de la velocidad media son cero: $u_x = u$, $u_y = u_z = 0$. No existe ningún gradiente de presiones y todas las magnitudes dependen únicamente de y .

Designemos mediante σ la fuerza de rozamiento por unidad de área de la superficie; esta fuerza está claramente en la dirección del eje x . La magnitud σ coincide con el impulso transmitido por el fluido a la superficie por unidad de tiempo; es el flujo constante de la componente x del impulso que tiene el sentido negativo del eje de las y y da la cantidad de impulso transmitido desde las capas de fluido más alejadas de la superficie a aquéllas que están más próximas a la misma.

Se debe la existencia de este flujo del impulso, como es natural, a la presencia de un gradiente en la dirección y de la velocidad media u . Si el fluido se moviese con la misma velocidad en todos los puntos no habría ningún flujo del impulso. También puede enunciarse el problema inverso: dado un valor definido determinado de σ , ¿cuál debe ser el movimiento de un fluido de densidad dada ρ para que dé origen a un flujo del impulso σ ? En el caso de números de Reynolds grandes, la viscosidad ν carece de importancia, como es normal; resulta importante únicamente para distancias y pequeñas (ver a continuación). Así pues, el valor del gradiente de velocidades du/dy en todos los puntos debe estar determinado por los parámetros constantes ρ , σ y, como es lógico, la propia distancia y . Las dimensiones de estas magnitudes son, respectivamente, g/cm^3 , $g/cm\ s^2$ y cm . Las dimensiones de la derivada du/dy son $1/s$. La única combinación de ρ , σ e y que tiene las dimensiones correctas es $\sqrt{(\sigma/\rho y^2)}$. De aquí resulta

$$du/dy = \sqrt{(\sigma/\rho)/by}, \quad (42.1)$$

[†] Los resultados que se citan en §§ 42-44 se deben a T. von Kármán y L. Prandtl.

siendo b una constante numérica; b no puede calcularse teóricamente, sino que debe determinarse experimentalmente. Resulta valer [†]

$$b = 0,417. \quad (42.2)$$

Introduzcamos la notación más conveniente $v_* = \sqrt{(\sigma/\rho)}$, de modo que

$$\sigma = \rho v_*^2. \quad (42.3)$$

La magnitud v_* tiene las dimensiones cm/s y actúa como una velocidad característica para el flujo turbulento que se considera; entonces (42.1) se transforma en $du/dy = v_*/by$, de donde

$$u = (v_*/b)(\log y + c), \quad (42.4)$$

en donde c es una constante de integración. Para determinar esta constante no podemos utilizar las condiciones límites ordinarias en la superficie, puesto que para $y = 0$ el primer término de (42.4) se hace infinito. La razón de ello es que la expresión anterior es realmente inaplicable a distancias muy pequeñas de la superficie, puesto que el efecto de la viscosidad resulta entonces importante y no puede despreciarse. Tampoco existen condiciones en el infinito, puesto que para $y = \infty$ la expresión (42.4) se hace otra vez infinita. Esto se debe a que en las condiciones ideales que hemos impuesto la superficie resulta sin límite y su influencia se extiende, por tanto, a distancias infinitamente grandes.

Antes de determinar la constante c , podemos en primer lugar señalar la propiedad importante siguiente del flujo considerado: contrariamente a lo que suele suceder, no existe ningún parámetro constante característico de longitud que pueda dar la escala externa de turbulencia. Por consiguiente, esta escala se determina mediante la propia distancia y : la escala del flujo turbulento a una distancia y de la superficie es del orden de y . La velocidad fluctuante de la turbulencia es del orden de v_* . Esto también se deduce a partir de razonamientos dimensionales, puesto que v_* es la única magnitud que tiene las dimensiones de la velocidad y que puede formarse a partir de las magnitudes σ , ρ e y a nuestra disposición. Debe resaltarse que, mientras la velocidad media disminuye con y , la velocidad fluctuante permanece con el mismo orden de magnitud a toda distancia de la superficie. Este resultado está de acuerdo con la regla general de que el orden de magnitud de la velocidad fluctuante está determinado por la variación Δu de la velocidad media (§ 31). En el caso presente no existe ninguna longitud característica respecto a la cual pueda tomarse la variación de la velocidad media; Δu debe definirse ahora razonablemente como la variación de u cuando se modifica apreciablemente la distancia y . De acuerdo con (42.4) tal variación de y produce un cambio de la velocidad u que es precisamente del orden de v_* .

[†] El valor de esta constante y el de la fórmula (42.8) se obtienen a partir de mediciones de la distribución de velocidades cerca de las paredes de una tubería en la que existe un flujo turbulento.

A distancias suficientemente pequeñas de la superficie, la viscosidad del fluido empieza a ser importante; designemos el orden de magnitud de estas distancias por y_0 , que puede determinarse del modo siguiente. La escala de turbulencia a esta distancia es del orden de y_0 y la velocidad es del orden de v_* . De aquí que el número de Reynolds que caracteriza el flujo a distancias del orden de y_0 sea $R \sim v_* y_0 / \nu$. La viscosidad empieza a ser importante cuando R se hace del orden de la unidad. De aquí encontramos que

$$y_0 \sim \nu/v_*, \quad (42.5)$$

y esto determina y_0 .

A distancias de la superficie que sean pequeñas en comparación con y_0 , el flujo está determinado por el rozamiento viscoso ordinario. Ahora puede obtenerse directamente la distribución de velocidades a partir de la forma usual correspondiente al rozamiento viscoso: $\sigma = \rho\nu du/dy$, de donde

$$u = \sigma y / \rho\nu = v_*^2 y / \nu. \quad (42.6)$$

Así pues, inmediatamente junto a la pared existe una capa delgada de fluido donde la velocidad media varía linealmente con y ; la velocidad es pequeña en toda esta capa, variando desde cero en la propia superficie hasta valores del orden de v_* para $y \sim y_0$. Denominaremos a esta capa la *subcapa viscosa*.

Debe resaltarse que el flujo considerado es turbulento y en este contexto el nombre acostumbrado «subcapa laminar» es inadecuado. El parecido con el flujo laminar reside únicamente en el hecho de que la velocidad media se distribuye de acuerdo con la misma ley que la velocidad verdadera en el caso de flujo laminar bajo las mismas condiciones. Como es natural, no existe ningún límite nítido entre la subcapa viscosa y el resto del flujo y, por tanto, el concepto de subcapa viscosa es, en cierta extensión, sólo cualitativo.

La componente longitudinal v'_x de la velocidad fluctuante en la subcapa viscosa es del mismo orden de magnitud que la velocidad media, y en particular es proporcional a y ($\sim v_* y / y_0$). Por consiguiente, se deduce de la ecuación de continuidad que la derivada $\partial v'_y / \partial y = -\partial v'_x / \partial x$ es proporcional a y , y por la misma razón la componente transversal v'_y de la velocidad fluctuante varía como y^2 ($\sim v_* y^2 / y_0^2$). A continuación, se deduce a partir de la linealidad de las ecuaciones del movimiento en la subcapa viscosa (siendo pequeños los términos no lineales en comparación con los términos de viscosidad) que los períodos de los remolinos turbulentos son los mismos a través de todo el espesor de la subcapa. Multiplicando estos períodos por la velocidad fluctuante, encontramos que las distancias longitudinales recorridas por las partículas del fluido en su movimiento fluctuante son proporcionales a y en orden de magnitud y que las distancias transversales son proporcionales a y^2 ($\sim y^2 / y_0$).

En lo que sigue prescindiremos del estudio del flujo dentro de la subcapa viscosa. Su presencia ha de tenerse en cuenta únicamente al hacer la selección apropiada de la constante de integración en (42.4). Debe escogerse esta constante de modo que la velocidad resulte del orden de v_* a distancias del orden de y_0 . Para que sea así debemos hacer $c = -\log y_0$, de modo que $u = (v_*/b) \log(y/y_0)$, o sea,

$$u = (v_*/b) \log(yv_*/v). \quad (42.7)$$

Esta fórmula determina (para un cierto margen de valores de y) la distribución de velocidades en la corriente turbulenta que fluye a lo largo de la superficie. Esta distribución se conoce como *perfil logarítmico de velocidades*.

El argumento del logaritmo de la fórmula (42.7) debe incluir un coeficiente numérico. Sin embargo, en las fórmulas que deduciremos solamente se necesita una exactitud «logarítmica». Esto significa que el argumento del logaritmo se supone grande y despreciaremos no sólo los términos proporcionales a las potencias inferiores del argumento, sino también aquellos en los que aparece el logaritmo elevado a potencias inferiores que en el término principal. Introducir un coeficiente numérico pequeño en el argumento del logaritmo en (42.7) es equivalente a adicionar un término de la forma constante $\times v_*$, en donde la constante es del orden de la unidad; este término no contiene el logaritmo y puede, por tanto, despreciarse. Sin embargo, debe recordarse que el argumento de logaritmo en las fórmulas deducidas aquí no es tan grande como para que su logaritmo sea también muy grande y de esta forma la exactitud de las fórmulas no es muy alta.

Pueden hacerse más exactas estas fórmulas introduciendo un coeficiente numérico en el argumento de logaritmo o, lo que es lo mismo, sumando una constante al logaritmo. Sin embargo, no pueden calcularse estas constantes teóricamente y hemos de determinarlas a partir de resultados experimentales. Por ejemplo, una fórmula más exacta para la distribución de velocidades puede escribirse en la forma

$$u = v_* [2.40 \log(yv_*/v) + 5.84]. \quad (42.8)$$

No es difícil determinar la disipación de energía ϵ por unidad de masa del fluido. σ es el valor medio de la componente Π_{xy} del tensor densidad de flujo del impulso $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \eta(\partial v_i / \partial x_k + \partial v_k / \partial x_i)$. Fuera de la subcapa viscosa el término de viscosidad puede omitirse, de modo que $\sigma = \rho \overline{v_x v_y}$. Introduciendo la velocidad fluctuante v' , podemos escribir $v_x = u + v'_x$; la propia velocidad v_y es la velocidad fluctuante v'_y , puesto que su valor medio es cero. El resultado es

$$\sigma = \rho \overline{v_x v_y} = \rho \overline{v'_x v'_y} + \rho \overline{u v'_y} = \rho \overline{v'_x v'_y}.$$

A continuación, podemos escribir la densidad de flujo de energía en la direc-

ción y en la forma $(p + 1/2\rho v^2)v_y$, habiéndose omitido de nuevo el término de la viscosidad. Poniendo en el segundo término

$$v^2 = (u + v'_x)^2 + v'_y^2 + v'_z^2$$

y promediando, se obtiene

$$\overline{pv'_y} + \frac{1}{2}\rho(\overline{v'_x^2v'_y} + \overline{v'_y^3} + \overline{v'_z^2v'_y}) + \rho\overline{uv'_xv'_y}.$$

En esta última expresión sólo necesita retenerse el último término. La razón es que la velocidad fluctuante es del orden de v_* y, por tanto, dentro de la exactitud logarítmica, es pequeña en comparación con u . Las fluctuaciones turbulentas de la presión p son del orden de ρv_*^2 [(ver (31.4))], y así podemos, con la misma exactitud, despreciar el término correspondiente en el flujo de energía. Así pues, tenemos para la densidad de flujo de energía media $\rho\overline{uv'_xv'_y} = u\sigma$. Cuando nos acercamos a la superficie, este flujo disminuye debido a que la energía se disipa. La disminución de la densidad de flujo de energía al aproximarse a la superficie en una distancia dy es $\sigma(du/dy)dy$. Esta es la cantidad de energía convertida en calor en una capa de fluido de espesor dy y de área unidad. Por tanto, se llega a la conclusión de que la disipación de energía por unidad de masa es $(\sigma/\rho)du/dy$, o sea,

$$\epsilon = v_*^3/by = (\sigma/\rho)^{1/2}/by. \quad (42.9)$$

§ 43. Flujo turbulento en tuberías

Aplicaremos ahora los resultados anteriores al flujo turbulento en un tubo. Cerca de las paredes del tubo (a distancias pequeñas en comparación con su radio a), la superficie puede considerarse aproximadamente como un plano y la distribución de velocidades debe venir dada por la fórmula (42.7) o (42.8). Como la función $\log y$ varía sólo lentamente, podemos utilizar la fórmula (42.7) dentro de una exactitud logarítmica para dar la velocidad media U del flujo en la tubería si sustituimos y en dicha fórmula por a :

$$U = (v_*/b) \log(av_*/\nu). \quad (43.1)$$

Por U entendemos el volumen del fluido que pasa a través de una sección recta de la tubería por unidad de tiempo, dividida por el área de la sección recta: $U = Q/\rho\pi a^2$.

Con objeto de relacionar la velocidad U al gradiente de presiones $\Delta p/l$ que mantiene el flujo (siendo Δp la diferencia de presiones en los extremos de la tubería y l su longitud), observamos que la fuerza ejercida sobre una sección recta del flujo es $\pi a^2 \Delta p$. Esta fuerza ha de compensar el rozamiento de las paredes. Puesto que la fuerza de rozamiento por unidad de área de la pared es $\sigma = \rho v_*^2$, la fuerza de rozamiento total es $2\pi a l \rho v_*^2$. Igualando ambas fuerzas, tenemos

$$\Delta p/l = 2\rho v_*^2/a. \quad (43.2)$$

Las ecuaciones (43.1) y (43.2) determinan, por intermedio del parámetro v_* , la relación existente entre la velocidad de flujo en las tuberías y el gradiente de presiones. Esta relación se denomina *ley de resistencia* de la tubería. Expresando v_* en función de $\Delta p/l$ por (43.2) y sustituyendo en (43.1), obtenemos la ley de resistencia en la forma

$$U = \sqrt{(a\Delta p/2b\rho l)} \log[(a/v)\sqrt{(a\Delta p/2\rho l)}]. \quad (43.3)$$

En esta fórmula es costumbre introducir lo que se denomina el *coeficiente de resistencia* de la tubería, magnitud adicional definida como

$$\lambda = \frac{2a\Delta p/l}{\frac{1}{2}\rho U^2}. \quad (43.4)$$

La relación existente entre λ y el número de Reynolds adimensional $R = 2aU/\nu$ viene dada en forma implícita por la ecuación

$$1/\sqrt{\lambda} = 0,85 \log(R\sqrt{\lambda}) - 0,55. \quad (43.5)$$

En esta expresión hemos sustituido b por el valor (42.2) y sumado al logaritmo una constante determinada empíricamente.[†] El coeficiente de resistencia determinado por esta fórmula es una función lentamente decreciente del número de Reynolds. Para posterior comparación, daremos la ley de resistencia correspondiente al flujo laminar en una tubería. Introduciendo el coeficiente de resistencia en la fórmula (17.10), se obtiene

$$\lambda = 64/R. \quad (43.6)$$

En el flujo laminar el coeficiente de resistencia disminuye al aumentar el número de Reynolds de modo más rápido que en el caso del flujo turbulento.

La figura 22 muestra un gráfico logarítmico de λ en función de R . La línea recta de mayor pendiente corresponde al flujo laminar [fórmula (43.6)], y la curva de menor pendiente (que coincide también casi con una recta) al flujo turbulento. La transición de la primera línea a la segunda se produce, al aumentar el número de Reynolds, en el punto en donde el flujo se hace turbulento; esto puede ocurrir para diversos números de Reynolds, dependiendo de las condiciones reales (la intensidad de las perturbaciones; ver § 29). El coeficiente de la resistencia aumenta abruptamente en el punto de transición.

Hasta ahora hemos admitido que la superficie de la pared es fundamentalmente lisa. Si es rugosa, las fórmulas obtenidas anteriormente deben

[†] El coeficiente del logaritmo en esta fórmula se ajusta para que se corresponda con el de la fórmula (42.8) correspondiente al perfil logarítmico de velocidades. Sólo en este caso, la fórmula (43.5) tiene el significado teórico de ser una fórmula límite para el flujo turbulento a valores suficientemente grandes del número de Reynolds. Si se escogen arbitrariamente los valores de las dos constantes que aparecen en la fórmula (43.5), entonces sólo vale como fórmula empírica para describir la relación entre λ y R . Sin embargo, en este caso no hay ninguna razón para preferirla a cualquier otra fórmula empírica más sencilla que represente adecuadamente los resultados experimentales.

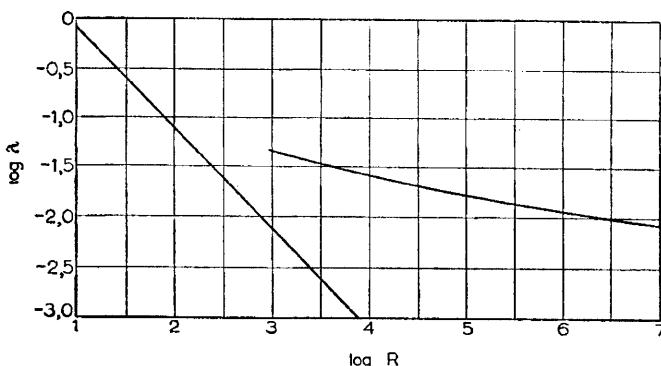


FIG. 22

cambiarse un poco. Como medida de la rugosidad de la pared podemos tomar el orden de magnitud de las irregularidades que designaremos por d . Los valores relativos de d y el espesor y_0 de la subcapa tienen importancia. Si y_0 es grande en comparación con d , la rugosidad carece de importancia; esto es lo que entendemos al decir que la superficie es bastante lisa. Si y_0 y d son del mismo orden de magnitud, no puede obtenerse ninguna fórmula general.

En el caso límite opuesto de rugosidad extrema ($d \gg y_0$), pueden establecerse de nuevo algunas relaciones generales. En este caso no podemos claramente hablar de una subcapa viscosa. El flujo turbulento se produce alrededor de las irregularidades de la superficie y este flujo está caracterizado por las magnitudes ρ , σ , d ; como es normal, la viscosidad ν no puede aparecer directamente. La velocidad de este flujo es del orden de magnitud de v_* , que es la única magnitud a nuestra disposición que tiene las dimensiones de la velocidad. Así pues, vemos que, en el flujo a lo largo de una superficie rugosa, la velocidad se hace pequeña ($\sim v_*$) a distancias $y \sim d$, en lugar de $y \sim y_0$, como sucedía en el caso del flujo a lo largo de una superficie lisa. Aquí resulta claro que la distribución de velocidades viene dada por una fórmula que se obtiene a partir de (42.7) sustituyendo d por ν/v_* . Así pues,

$$u = (v_*/b) \log(y/d). \quad (43.7)$$

Las fórmulas correspondientes al flujo en una tubería deben variarse de modo semejante. Es suficiente sustituir simplemente ν/v_* en ellas por d . En el caso de la ley de resistencia tenemos, en lugar de (43.3), la fórmula

$$U = \sqrt{(a\Delta p/2b^2\rho l) \log(a/d)}. \quad (43.8)$$

Ahora el argumento del logaritmo no es constante y no interviene el gradiente de presiones como sucedía en (43.3). Vemos que la velocidad media es simplemente proporcional a la raíz cuadrada del gradiente de presiones en la tubería. Si introducimos el coeficiente de resistencia, (43.8) se transforma en

$$\lambda = 8b^2/\log^2(a/d) = 1,4/\log^2(a/d), \quad (43.9)$$

es decir, λ es una constante y no depende del número de Reynolds.

§ 44. Capa límite turbulenta

El hecho de que hayamos obtenido una distribución logarítmica de velocidades, que formalmente es válida en todo el espacio en el caso del flujo turbulento plano paralelo, se debe a que hemos estado considerando un flujo a lo largo de una superficie de área infinita. En el caso del flujo a lo largo de una superficie correspondiente a un cuerpo finito, únicamente tiene un perfil logarítmico[†] el movimiento a distancias cortas de la superficie — en la capa límite. Podemos mencionar también que una capa límite turbulenta puede existir tanto en el caso de un fluido que se mueve turbulentemente dentro de la corriente principal como en el caso de un flujo laminar.

La disminución de la velocidad media, tanto en la capa límite turbulenta como en la laminar, se debe en último término a la viscosidad del fluido. Sin embargo, el efecto de la viscosidad aparece en la capa límite turbulenta de un modo poco usual. La manera en que se produce la variación de la velocidad media en la capa no depende por sí misma directamente de la viscosidad; la viscosidad aparece en la expresión correspondiente al gradiente de velocidades sólo en la subcapa viscosa. Sin embargo, el espesor total de la capa límite está determinado por la viscosidad y se anula cuando ésta es cero (ver a continuación). Si la viscosidad fuese exactamente nula, no existiría capa límite.

Apliquemos el resultado del § 43 a una capa límite turbulenta formada en el flujo a lo largo de una placa plana delgada, tal como la estudiada en § 39 cuando analizábamos el flujo laminar. En el límite de la capa turbulenta,

[†] El espesor de la capa límite aumenta a lo largo de la superficie del cuerpo en el sentido del flujo, de acuerdo con una ley que determinaremos posteriormente. Esto explica por qué, en el caso del flujo en una tubería, el perfil logarítmico es válido para toda la sección recta de la misma. El espesor de la capa límite en la pared de la tubería aumenta al alejarnos del punto de entrada del fluido. A cierta distancia finita de este punto, la capa límite llena la casi totalidad de la sección recta de la tubería. Por ello, si suponemos la tubería suficientemente larga y no tenemos en cuenta la parte correspondiente a la entrada, el flujo en toda la tubería será de la misma clase que en la capa límite turbulenta. Recordemos que se produce una situación análoga en el flujo laminar dentro de una tubería. Dicho flujo obedece a la fórmula de Poiseuille para todos los números de Reynolds. En el flujo de Poiseuille la viscosidad es importante a todas las distancias de la pared y su efecto nunca se limita a una capa delgada junto a ella.

la velocidad del fluido es casi igual a la velocidad de la corriente principal que designaremos por U . Sin embargo, para determinar esta velocidad en el límite podemos utilizar la fórmula (42.7) con exactitud logarítmica, poniendo el espesor δ de la capa límite en lugar de y . Igualando ambas expresiones, obtenemos

$$U = (v_*/b) \log(v_*\delta/\nu). \quad (44.1)$$

Aquí U es un parámetro constante para un flujo dado; sin embargo, el espesor δ varía a lo largo de la placa y , y por tanto, v_* es también una función con variación lenta de x . La fórmula (44.1) es inadecuada para determinar estas funciones; necesitamos alguna otra ecuación que relacione v_* y δ con x .

Para obtenerla, utilizaremos los mismos razonamientos que empleábamos al deducir la fórmula (36.3) para la anchura de la estela turbulenta. Como allí, la derivada $d\delta/dx$ debe ser del orden del cociente de la velocidad a lo largo del eje y , y la velocidad a lo largo del eje x en el límite de la capa. Esta última velocidad es del orden de U , mientras que la primera se debe a la velocidad fluctuante y , por tanto, es del orden de v_* . Así pues, $d\delta/dx \sim v_*/U$, de aquí que

$$\delta \sim v_*x/U. \quad (44.2)$$

Las fórmulas (44.1) y (44.2) determinan, en conjunto, v_* y δ como funciones de la distancia x .[†] Sin embargo, estas funciones no pueden escribirse explícitamente. Expresaremos δ en función de una magnitud auxiliar. Puesto que v_* es una función lentamente variable de x , se ve, a partir de (44.2), que el espesor de la capa varía esencialmente de la misma forma que x . Podemos recordar que el espesor de la capa límite laminar aumenta con \sqrt{x} , es decir, más lentamente que en la capa límite turbulenta.

Determinemos la dependencia respecto a x de la fuerza de rozamiento σ que actúa sobre la unidad de área de la placa. Esta relación viene dada por dos fórmulas:

$$\sigma = \rho v_*^2, \quad U = (v_*/b) \log(v_*^2x/U\nu).$$

La última se obtiene sustituyendo (44.2) en (44.1) y es válida hasta la exactitud logarítmica. Introduzcamos un coeficiente de arrastre c (referido al área unidad de la placa), definido como el cociente adimensional

$$c = 2\sigma/\rho U^2 = 2(v_*/U)^2. \quad (44.3)$$

Entonces, eliminando v_* entre ambas ecuaciones, obtenemos la siguiente expresión que nos da (hasta la exactitud logarítmica) c en forma de función implícita de x :

$$\sqrt{(2b^2/c)} = \log(cR_x), \quad R_x = Ux/\nu. \quad (44.4)$$

[†] Si existe sobre la placa una capa límite laminar de extensión considerable, hablando estrictamente, debe estimarse x aproximadamente como la distancia a partir del punto en que la capa laminar se convierte en turbulenta.

Para aumentar la exactitud de esta fórmula podemos añadir una constante numérica empírica al logaritmo. La fórmula queda entonces como

$$1/\sqrt{c} = 1,7 \log(cR_x) + 3,0. \quad (44.5)$$

El coeficiente de arrastre c , dado por esta fórmula, es una solución lentamente decreciente de la distancia x .

Finalmente, expresemos el espesor de la capa límite en función de $c(x)$. Tenemos que $v_* = \sqrt{(\sigma/\rho)} = U\sqrt{(c/2)}$. Sustituyendo en (44.2), hallamos

$$\delta = \text{constante} \times x\sqrt{c}. \quad (44.6)$$

Esta fórmula puede escribirse con el signo de igualdad solamente en los casos de una capa límite turbulenta bajo un flujo laminar, como es natural, que es cuando δ tiene un significado exacto (como siempre, la región turbulenta se distingue nítidamente de la región laminar). El factor constante en (44.6) debe determinarse a partir de los resultados experimentales.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar a partir de la fórmula (44.5) la fuerza total que actúa sobre ambas caras de la placa.

Solución. La fuerza necesaria por unidad de longitud del borde de la placa es

$$F = 2 \int_0^l \sigma dx,$$

siendo l la longitud de la placa. Introduciendo en lugar de F el coeficiente de arrastre

$$C = F/(2\rho U^2 \cdot l),$$

obtenemos

$$C = \frac{1}{l} \int_0^l c dx.$$

Si tomamos únicamente los términos que contienen el logaritmo en su potencia más elevada (primera), entonces la integral anterior es simplemente $c(l)$, que corresponde al valor de c para $x = l$. Con objeto de tener un valor más exacto para C , correspondiente a la fórmula (44.5), debemos efectuar la integración teniendo en cuenta los términos del orden siguiente que contienen el logaritmo elevado a la potencia cero. Para esto, escribamos

$$\int_0^l c dx = [xc]_0^l - \int_0^l x \frac{dc}{dx} dx.$$

Se calcula la derivada dc/dx mediante la fórmula (44.5), que escribiremos en la forma $c = A^2 \log^2 B x c$, obteniendo con la precisión necesaria

$$C = c(l) + \frac{2}{A^2 \log^3 B l c} = c(l) \left[1 + \frac{2}{\log B l c} \right],$$

y así

$$\frac{1}{\sqrt{C}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \left(1 - \frac{1}{\log Blc} \right) = A(\log Blc - 1) = A \log(Blc/e) \\ \approx A \log(BlC/e).$$

Sustituyendo los valores de A y B a partir de (44.5), obtenemos la fórmula siguiente que da el coeficiente de arrastre total C en función del número de Reynolds $R = Ul/v$:

$$1/\sqrt{C} = 1,7 \log(CR) + 1,3.$$

En el caso de R grande, el coeficiente de arrastre dado por esta fórmula disminuye proporcionalmente a $1/\log^2 R$. En el caso de capa límite laminar, C disminuye proporcionalmente a $1/\sqrt{R}$ [ver (39.16)], es decir, con mayor rapidez. Así pues, podemos decir que en el caso de números de Reynolds grandes, la fuerza de rozamiento en una capa límite turbulenta es mayor que en otra laminar.

Problema 2. Determinar el coeficiente de arrastre de una placa rugosa en función del número de Reynolds en el caso de una capa límite turbulenta.

Solución. Sustituyendo en lugar del espesor y_0 ($\sim v/v_*$) de la subcapa laminar la dimensión d de los salientes, obtenemos a partir de (44.1) y (44.2) $U = (v_*/b) \log(xv_*/Ud)$. Introduciendo el coeficiente de arrastre c , tenemos a partir de aquí $0,59/\sqrt{c} = \log(x\sqrt{c}/d)$. Análogamente, el coeficiente de arrastre total para la placa es (de nuevo con exactitud logarítmica) $0,59/\sqrt{C} = \log(l\sqrt{C}/d)$. Podemos señalar que el coeficiente de arrastre para una placa rugosa es independiente del número de Reynolds.

§ 45. Crisis de arrastre o resistencia

A partir de los resultados obtenidos en las secciones anteriores, podemos deducir conclusiones importantes respecto a la ley de arrastre para números de Reynolds grandes, es decir, la relación entre la fuerza de arrastre o de resistencia que actúa sobre el cuerpo y el valor de R cuando este último es grande.

Ya hemos descrito el esquema de flujo correspondiente a valores grandes de R (único caso que estudiaremos) y es como sigue. Puede considerarse como ideal todo el cuerpo principal del fluido, con un flujo potencial en todas partes, excepto en la estela turbulenta (es decir, en todas partes, excepto en la capa límite que ahora nos interesa). La anchura de la estela depende de la posición de la línea de separación en la superficie del cuerpo. Es importante señalar que, aunque esta posición está determinada por las propiedades de la capa límite, resulta ser independiente del número de Reynolds, como hemos visto en § 40. Así pues, podemos decir que el esquema de flujo completo para números de Reynolds grandes es casi independiente de la viscosidad, es decir, de R (en tanto que la capa límite siga siendo laminar; ver a continuación).

De aquí se deduce que el arrastre también debe ser independiente de la viscosidad. Permanecen a nuestra disposición sólo tres magnitudes: la velo-

ciudad U de la corriente principal, la densidad del fluido ρ y la dimensión l del cuerpo. A partir de éstas podemos construir solamente una magnitud que posea las dimensiones de fuerza, a saber, $\rho U^2 l^2$. En lugar de la dimensión lineal al cuadrado del cuerpo, l^2 , introduciremos, como es costumbre, la magnitud proporcional a la misma S , que es el área de la sección recta transversal a la dirección del flujo, poniendo

$$F = \text{constante} \times \rho U^2 S, \quad (45.1)$$

en donde la constante es un número que depende sólo de la forma del cuerpo. Así pues, el arrastre debe ser (para R grande) proporcional al área de la sección recta del cuerpo y al cuadrado de la velocidad de la corriente principal. Podemos recordar, para comparación, que para valores muy pequeños de R ($\ll 1$), el arrastre es proporcional a la dimensión lineal del cuerpo y a la propia velocidad ($F \sim \nu \rho l U$; ver § 20).†

Como hemos dicho, es costumbre introducir, en lugar de la fuerza de arrastre F , el coeficiente de arrastre C definido por $C = F/1/2\rho U^2 S$. Esta magnitud es adimensional y puede depender únicamente de R . La fórmula (45.1) se transforma entonces en

$$C = \text{constante}, \quad (45.2)$$

es decir, el coeficiente de arrastre depende solamente de la forma del cuerpo.

El comportamiento anterior de la fuerza de arrastre no puede continuar hasta números de Reynolds arbitrariamente grandes. La razón es que, en el caso de R suficientemente grande, la capa límite laminar (en la superficie del cuerpo hasta por lo menos la línea de separación) resulta inestable y, por lo tanto, turbulenta. Sin embargo, la capa límite completa no se hace turbulenta, sino sólo una parte de la misma. Por consiguiente, la superficie del cuerpo puede dividirse en tres partes: en la parte delantera existe una capa límite laminar, luego una capa turbulenta y, finalmente, la región más allá de la línea de separación.

La iniciación de la turbulencia en la capa límite tiene un efecto importante sobre el esquema completo del flujo en la corriente principal. Produce un desplazamiento considerable de la línea de separación hacia la parte posterior del cuerpo (es decir, corriente abajo), de modo que se contrae la estela turbulenta más allá del cuerpo, como se ve en la figura 23, en donde está sombreada la región de la estela.‡ La contracción de la estela turbulenta conduce a una reducción de la fuerza de arrastre. Así pues, el origen de la

† El flujo junto a una burbuja de gas es un caso especial; el arrastre permanece proporcional a U incluso para R grande; ver problema.

‡ Por ejemplo, en el flujo transversal alrededor de un cilindro largo, el establecimiento de la turbulencia en la capa límite traslada el punto de separación de 95° a 60° (midiendo el ángulo azimutal sobre el cilindro en el sentido del flujo).

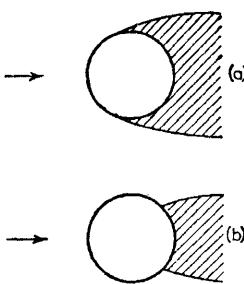


FIG. 23

turbulencia de la capa límite a números de Reynolds grandes se ve acompañado por una disminución del coeficiente de arrastre, que disminuye en un factor considerable en un margen relativamente estrecho del número de Reynolds cerca de 10^5 . Denominaremos este fenómeno *crisis de la fuerza de arrastre*. La disminución del coeficiente de arrastre es tan grande, que el propio arrastre, que en el caso de C constante es proporcional al cuadrado de la velocidad, disminuye realmente al aumentar la velocidad dentro de este margen de los números de Reynolds.

Conviene mencionar que el grado de turbulencia en la corriente principal influye sobre la crisis de arrastre; cuanto mayor es la turbulencia incidente, más pronto se hará turbulenta la capa límite (es decir, será menor el número R cuando esto suceda). Por tanto, la disminución del coeficiente de arrastre empieza a un número más pequeño de Reynolds y se extiende en un margen más amplio de valores de R .

Las figuras 24 y 25 dan gráficos obtenidos experimentalmente, en los que se muestra el coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds $R = Ud/\nu$ en el caso de una esfera; la figura 24 es una representación doble logarítmica. En el caso de valores muy pequeños de R ($\ll 1$), el coeficiente de arrastre disminuye de acuerdo con $C = 24/R$ (fórmula de Stokes). El descenso de C continúa más lentamente hasta que $R \approx 5 \times 10^3$, en donde C alcanza un mínimo más allá del cual empieza a crecer un poco. En el margen de números de Reynolds comprendidos entre 2×10^4 y 2×10^5 , es válida la ley (45.2), es decir, C es casi constante. La crisis de arrastre se produce para R comprendido entre 2×10^5 y 3×10^5 , y entonces el coeficiente de arrastre disminuye en un factor de 4 ó 5.

Por comparación, podemos dar un ejemplo de flujo en el que no existe un número de Reynolds crítico. Consideremos el flujo que rodea a un disco plano en dirección perpendicular al mismo. En este caso, la posición de la separación es evidente a partir de consideraciones puramente geométricas: es claro que la separación se produce en el borde del disco y no se mueve

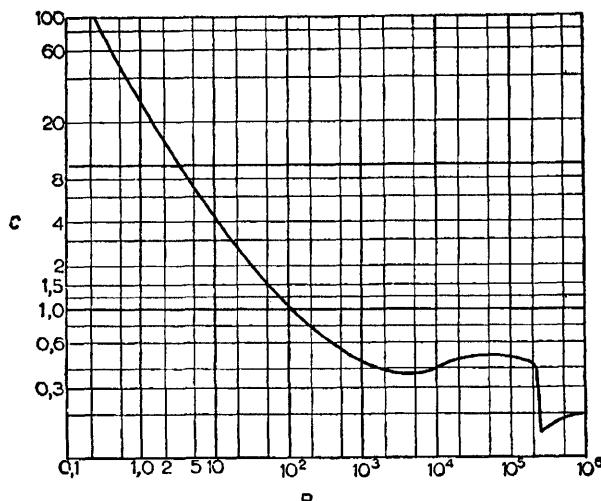


FIG. 24

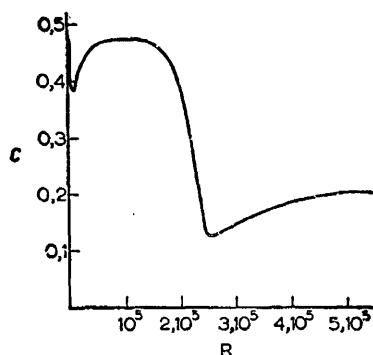


FIG. 25

de allí. De aquí que, cuando R aumenta, el coeficiente de arrastre del disco permanece constante y no existe crisis de arrastre.

Debe recordarse que, en el caso de velocidades elevadas en las que se produce la crisis de arrastre, la compresibilidad del fluido puede empezar a tener un efecto notable. El parámetro que caracteriza la extensión de este efecto es el *número de Mach* $M = U/c$, siendo c la velocidad del sonido; si $M \ll 1$, el fluido puede considerarse como incompresible (§ 10). Puesto que de los dos números M y R solamente uno contiene la dimensión del cuerpo, estos números pueden variar independientemente.

Los datos experimentales indican que la compresibilidad tiene, en general, un efecto estabilizador sobre el flujo en la capa límite laminar. Cuando

aumenta M crece el valor crítico de R . Por ejemplo, cuando en el caso de una esfera M varía desde 0,3 a 0,7, se pospone la crisis del arrastre desde $R \approx 4 \times 10^5$ a $R \approx 8 \times 10^5$.

Podemos también señalar que, al aumentar M , la posición del punto de separación de la capa límite laminar se mueve aguas arriba hacia el frente del cuerpo y esto origina cierto crecimiento de la fuerza de arrastre.

PROBLEMA

Determinar la fuerza de arrastre sobre una burbuja de gas que se mueve en un líquido a números de Reynolds grandes (V. G. LEVICH, 1949).

Solución. En el límite entre el líquido y el gas la componente tangencial de la velocidad del fluido no se anula, pero sí lo hace su derivada normal (despreciamos la viscosidad del gas). De aquí que el gradiente de velocidades cerca del límite no sea particularmente elevado y, por tanto, no exista capa límite en el sentido del § 39; por tanto, no existirá ninguna separación prácticamente en la superficie completa de la burbuja. Al calcular la disipación de energía a partir de la integral de volumen (16.3) podemos, por consiguiente, utilizar en todo el espacio la distribución de velocidades correspondiente al flujo potencial que rodea a una esfera (§ 10, problema 2), despreciando la capa superficial de líquido y la estela turbulenta muy estrecha. Utilizando la fórmula obtenida en § 16, problema, se encuentra

$$E_k = -\eta \int \left(\frac{\partial v^2}{\partial r} \right)_{r=R} 2\pi R^2 \sin\theta d\theta = -12\pi\eta RU^2.$$

De aquí vemos que la fuerza de arrastre disipativa requerida es $F = 12\pi\eta RU$.

§ 46. Flujo que rodea a cuerpos con forma aerodinámica

Puede preguntarse cuál sería la forma de un cuerpo (de un área de sección recta determinada, por ejemplo) para que resulte tan pequeño como sea posible el arrastre sobre el mismo como resultado de su movimiento en el interior de un fluido. A partir de lo anterior, para que esto sea así, es evidente que la separación debe estar tan lejos y hacia atrás como sea posible: la separación debe entonces producirse cerca del extremo final del cuerpo, de modo que la estela turbulenta sea lo más estrecha posible. Ya sabemos que la aparición de la separación se facilita por la presencia de un incremento rápido de la presión corriente abajo a lo largo del cuerpo. De aquí que el cuerpo deba tener una forma tal que la variación de presión a lo largo del mismo, donde la presión esté creciendo, tenga lugar tan lenta y suavemente como sea posible. Esto puede conseguirse dando al cuerpo una forma alargada en la dirección del flujo, de modo que tienda suavemente

† El margen de aplicabilidad de esta fórmula no es realmente grande, puesto que la burbuja deja de ser esférica cuando la velocidad aumenta suficientemente.

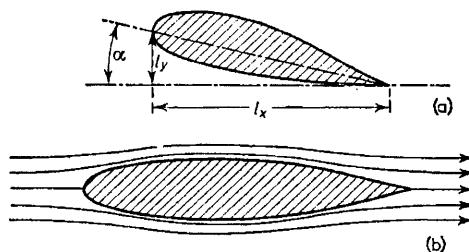


FIG. 26

a coincidir en un solo punto corriente abajo, de modo que el flujo a lo largo de ambas partes del cuerpo llegue a encontrarse sin brusquedades y sin tener que rodear ninguna esquina o girar un ángulo considerable respecto a la dirección de la corriente principal. El frente delantero del cuerpo debe estar redondeado; si allí existiese un ángulo, la velocidad del fluido en su vértice sería infinita (ver § 10, problema 6), y, en consecuencia, la presión aumentaría rápidamente corriente abajo, resultando inevitablemente la separación.

Todos estos requisitos se satisfacen cumplidamente con las formas del tipo indicado en la figura 26. El perfil indicado en la figura 26b puede ser, por ejemplo, la sección recta de un sólido de revolución alargado o la sección recta de un cuerpo con una «envergadura» grande (convencionalmente denominaremos a los cuerpos de este tipo *alas*). El perfil de la sección recta de un ala puede ser asimétrico como en la figura 26a. En el flujo que rodea un cuerpo de esta forma la separación se produce únicamente en la proximidad inmediata del extremo puntiagudo y, en consecuencia, el coeficiente de arrastre es relativamente pequeño. Dichos cuerpos se dicen que son *aerodinámicos*.

El rozamiento directo del fluido en la superficie de la capa límite es importante en el arrastre realizado sobre cuerpos aerodinámicos. Este efecto en el caso de cuerpos que no tienen esta propiedad (los cuales se consideraron en la sección anterior) es relativamente pequeño y, por tanto, carece de significado en la práctica. En el caso límite opuesto de flujo paralelo a un disco plano, este efecto resulta ser la única fuente de arrastre (§ 39).

En el caso de un flujo que rodea a un ala aerodinámica inclinada respecto a la corriente principal un ángulo pequeño α , denominado *ángulo de ataque* (figura 26), se desarrolla una fuerza de sustentación grande F_y , mientras que la fuerza de arrastre F_x permanece pequeña y, por tanto, el cociente F_y/F_x puede alcanzar valores grandes ($\sim 10 - 100$). Sin embargo, ésto es así sólo mientras el ángulo de ataque es pequeño ($\lesssim 10^\circ$). En el caso de ángulos mayores, el arrastre aumenta muy rápidamente y disminuye la sustentación. Esto se explica por el hecho de que, para valores grandes del

ángulo de ataque, el cuerpo deja de ser aerodinámico: el punto de separación se mueve considerablemente hacia la parte delantera del cuerpo y entonces la estela resulta más ancha. Debe recordarse que el caso límite de un cuerpo muy delgado, por ejemplo, una placa plana, es aerodinámico únicamente en el caso de un ángulo muy pequeño de ataque; se produce separación en el borde delantero de la placa cuando está inclinada incluso un pequeño ángulo respecto a la corriente principal.

Por definición, el ángulo de ataque α se mide desde la posición del ala para el cual la fuerza de sustentación es cero. En el caso de ángulos de ataque pequeños, podemos desarrollar la sustentación en una serie de potencias de α . Tomando únicamente el primer término, podemos suponer que la fuerza F_y es proporcional a α . A continuación, por los mismos razonamientos dimensionales que en el caso de la fuerza del arrastre, la sustentación debe ser proporcional a ρU^2 . Introduciendo también la envergadura l_z del ala, podemos escribir

$$F_y = \text{constante} \times \rho U^2 a l_x l_z, \quad (46.1)$$

en donde la constante numérica depende únicamente de la forma del ala y en particular del ángulo de ataque. Cuando las alas son muy largas, la sustentación puede suponerse que es proporcional a la envergadura, en cuyo caso la constante depende únicamente de la forma de la sección recta del ala.

En lugar de la sustentación en el ala, se utiliza frecuentemente el *coeficiente de sustentación*; se define como

$$C_y = F_y / \frac{1}{2} \rho U^2 l_x l_z. \quad (46.2)$$

En el caso de alas muy largas y de acuerdo con lo que hemos dicho anteriormente, el coeficiente de sustentación es proporcional al ángulo de ataque y no depende de la velocidad ni de la envergadura:

$$C_y = \text{constante} \times \alpha. \quad (46.3)$$

Para calcular la sustentación en el caso de un ala aerodinámica, mediante la fórmula de Zhukovskii, es necesario determinar la circulación de la velocidad Γ . Esto se hace del modo siguiente. Recordemos que tenemos un flujo potencial en todas partes fuera de la estela. En el caso presente, la estela es muy delgada y ocupa en la superficie del ala sólo un área muy pequeña cerca de su borde trasero apuntado. De aquí que, para determinar la distribución de velocidades (y por tanto la circulación Γ), podemos resolver el problema del flujo potencial de un fluido ideal alrededor de un ala. Se tiene en cuenta entonces la existencia de la estela mediante la presencia de una discontinuidad tangencial que se extiende dentro del fluido desde el borde agudo nítido trasero del ala en donde el potencial tiene una discontinuidad $\phi_2 - \phi_1 = \Gamma$. Como se ha visto en § 37, la derivada $\partial\phi/\partial z$ tiene también una

discontinuidad en esta superficie, mientras que las derivadas $\partial\phi/\partial x$ y $\partial\phi/\partial y$ son continuas. Cuando se trata de un ala de envergadura finita el problema planteado en esta forma tiene una solución única. Sin embargo, hallar la solución exacta es muy complicado. El problema ha sido resuelto por N. E. KOCHIN[†] para un ala en forma de disco circular inclinado un ángulo de ataque pequeño.

Si el ala es muy larga (y tiene una sección recta uniforme), entonces, considerándola como infinita en la dirección z , podemos tratar el flujo como bidimensional (en el plano xy). Es evidente, a partir de la simetría del problema, que la velocidad $v_z = \partial\phi/\partial z$ debe ser cero a lo largo del ala. Por consiguiente, en este caso debemos buscar una solución en la cual únicamente tenga una discontinuidad el potencial, siendo continua su derivada; en otras palabras, no existe superficie de discontinuidad tangencial y tenemos simplemente una función multiforme $\phi(x, y)$, que recibe un incremento finito Γ cuando rodeamos un contorno cerrado que encierra el perfil del ala. Sin embargo, en esta forma el problema del flujo bidimensional no tiene una solución única, puesto que admite soluciones para cualquier discontinuidad dada del potencial. Para obtener un resultado único debemos exigir que se cumpla otra condición que fue formulada en primer lugar por S. A. CHAPLYGIN en 1909.

Esta condición, denominada de *Chaplygin-Zhukovskii*, se basa en exigir que la velocidad del fluido no se haga infinita en el borde nítido de salida del ala; a este respecto debemos recordar que la velocidad del fluido en general se hace infinita en el vértice de un ángulo cuando un fluido ideal lo rodea, de acuerdo con una ley de potencias (§ 10, problema 6). Podemos decir que la condición enunciada implica que los chorros que proceden de las dos caras del ala deben encontrarse suavemente sin girar ningún ángulo. Cuando se cumple este condición, como es natural, la solución del problema del flujo potencial da un esquema muy parecido al verdadero, en donde la velocidad es en todos puntos finita y se produce únicamente la separación en el borde de salida. La solución resulta ahora única y, en particular, la circulación Γ que es necesaria para calcular la fuerza de sustentación tiene un valor definido.

§ 47. Arrastre inducido

Una parte importante del arrastre en el caso de un ala aerodinámica (de envergadura finita) está formada por el arrastre debido a la disipación de energía en la estela turbulenta delgada. Esta fuerza de resistencia se denuncia *arrastre inducido*.

[†] *Prikladnaya matematika i mehanika*, 4, 3, 1940; 9, 13, 1945.

Se ha visto en § 21 como podemos calcular la fuerza de arrastre debida a la estela, mediante la consideración del flujo bastante lejos del cuerpo. Sin embargo, la fórmula (21.1) no es aplicable al caso presente. De acuerdo con dicha fórmula, el arrastre viene dado por la integral de v_x , extendida a la sección recta de la estela, es decir, la descarga o caudal a través de la misma. Sin embargo, teniendo en cuenta que la estela es muy delgada detrás de un ala aerodinámica, resulta que el caudal es pequeño en el caso presente y puede despreciarse en la aproximación que utilizaremos a continuación.

Como en § 21, escribiremos la fuerza F_x como la diferencia existente entre los flujos totales de la componente x del impulso a través de los planos $x = x_1$ y $x = x_2$ que se encuentran, respectivamente, bastante detrás y bastante delante del cuerpo. Escribiendo las tres componentes de la velocidad como $U + v_x, v_y, v_z$, tenemos para la componente Π_{∞} de la densidad de flujo del impulso la expresión $\Pi_{\infty} = p + \rho(U + v_x)^2$, de modo que la fuerza de arrastre es

$$F_x = \left(\iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) [p + \rho(U + v_x)^2] dy dz. \quad (47.1)$$

Para tener en cuenta el espesor de la estela podemos despreciar en la integral extendida al plano $x = x_1$ la integral respecto a la sección recta de la estela y así integrar únicamente respecto a la región exterior a la misma. Sin embargo, en dicha región tenemos un flujo potencial y es válida la ecuación de Bernoulli $p + 1/2\rho(U + v)^2 = p_0 + 1/2\rho U^2$; de aquí que,

$$p = p_0 - \rho U v_x - \frac{1}{2}\rho(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad (47.2)$$

Ahora no podemos despreciar los términos cuadráticos como hicimos en § 21, puesto que estos términos son los que determinan la fuerza de arrastre requerida en el caso que estamos considerando. Sustituyendo (47.2) en (47.1), obtenemos

$$F_x = \left(\iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) [p_0 + \rho U^2 + \rho U v_x + \frac{1}{2}\rho(v_x^2 - v_y^2 - v_z^2)] dy dz.$$

La diferencia de las integrales de la constante $p_0 + \rho U^2$ es cero; la diferencia de las integrales de $\rho U v_x$ es igualmente cero, puesto que los flujos de masa

$$\iint \rho v_x dy dz$$

a través de los planos delantero y trasero deben ser iguales (despreciamos el caudal o descarga a través de la estela en la aproximación que estamos considerando). A continuación, si tomamos el plano $x = x_2$ suficientemente lejos por delante del cuerpo, la velocidad v en este plano es muy pequeña,

de modo que la integral de $1/2\rho(v_x^2 - v_y^2 - v_z^2)$ respecto a este plano puede despreciarse. Finalmente, en el flujo que rodea a un ala aerodinámica, la velocidad v_x fuera de la estela es pequeña en comparación con v_y y v_z . De aquí que podamos despreciar v_x^2 en comparación con $v_y^2 + v_z^2$ en la integral extendida al plano $x = x_1$. Así obtenemos,

$$F_x = \frac{1}{2}\rho \iint (v_y^2 + v_z^2) dy dz, \quad (47.3)$$

en donde la integración debe realizarse en todo el plano $x = \text{constante}$, que está a una distancia grande detrás del cuerpo, excluyéndose la sección recta de la estela de la región de integración.[†]

El arrastre sobre un ala aerodinámica calculada de este modo puede expresarse en función de la circulación de la velocidad que determina también la sustentación. Para ello, observemos, en primer lugar, que, a distancia suficientemente grande del cuerpo, la velocidad depende sólo ligeramente de la coordenada x y así podemos considerar $v_y(y, z)$ y $v_z(y, z)$ como la velocidad de un flujo bidimensional, que se supone es independiente de x . Es conveniente utilizar como magnitud auxiliar la función de corriente (§ 10), de modo que $v_z = \partial\psi/\partial y$, $v_y = -\partial\psi/\partial z$. Entonces,

$$F_x = \frac{1}{2}\rho \iint \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \right)^2 \right] dy dz,$$

en donde la integración respecto a la coordenada vertical y se extiende desde $+\infty$ hasta y_1 y desde y_2 hasta $-\infty$, siendo y_1 e y_2 las coordenadas de los límites superior e inferior de la estela (ver figura 18, § 37). Como tenemos fuera de la estela un flujo potencial ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$), $\partial^2\psi/\partial y^2 + \partial^2\psi/\partial z^2 = 0$. Utilizando la fórmula de Green bidimensional, se encuentra así

$$F_x = -\frac{1}{2}\rho \oint \psi (\partial\psi/\partial n) dl,$$

en donde la integral se toma a lo largo de un contorno que limita la región de integración de la integral original y $\partial/\partial n$ designa la derivación en la dirección de la normal al contorno hacia fuera. En el infinito $\psi = 0$, y, por tanto, la integral se toma a lo largo del contorno de la sección recta de la estela originada por el plano yz , lo que da

$$F_x = \frac{1}{2}\rho \int \psi \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)_2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)_1 \right] dz.$$

[†] Para evitar malas interpretaciones, resaltamos lo siguiente. La fórmula (47.3) puede dar la impresión de que el orden de magnitud de las velocidades v_y , v_z , no disminuyen al aumentar x . Esto es cierto en tanto que el espesor de la estela sea pequeño en comparación con su anchura, como hemos visto al deducir la fórmula (47.3). A distancias muy grandes del ala, la estela se hace finalmente tan gruesa que resulta de sección aproximadamente circular. En este punto, la fórmula (47.3) deja de ser válida, y v_y , v_z , disminuyen rápidamente al aumentar x .

En este caso la integración se extenderá a la anchura de la estela y la diferencia que está entre corchetes es la discontinuidad de la derivada $\partial\psi/\partial y$ a través de la estela. Puesto que $\partial\psi/\partial y = v_z = \partial\phi/\partial z$, tenemos

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_1 = \frac{d\Gamma}{dz},$$

de modo que

$$F_x = \frac{1}{2}\rho \int \psi(d\Gamma/dz)dz.$$

Finalmente, utilizando una fórmula obtenida en la teoría del potencial,

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} \int \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_1 \right] \log r dl,$$

en donde la integración se realiza a lo largo de un contorno plano, r es la distancia desde dl hasta el punto en donde ha de calcularse ψ y la expresión entre corchetes es la discontinuidad dada de la derivada de ψ en la dirección normal al contorno.[†] En nuestro caso, el contorno de integración es un segmento del eje z , de modo que podemos escribir el valor de la función $\psi(y, z)$ sobre el eje z en la forma:

$$\begin{aligned} \psi(0, z) &= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_2 \right] \log |z - z'| dz' \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\Gamma(z')}{dz'} \log |z - z'| dz'. \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en F_x , obtenemos la fórmula siguiente para la fuerza de arrastre inducida:

$$F_x = -\frac{\rho}{4\pi} \int_0^l \int_0^l \frac{d\Gamma(z)}{dz} \frac{d\Gamma(z')}{dz'} \log |z - z'| dz dz' \quad (47.4)$$

(L. PRANDTL, 1918). Se designa ahora la envergadura del ala por $l_z = l$, y se toma el origen de z en un extremo de la misma.

Si todas las dimensiones en la dirección z se aumentan por un factor determinado (permaneciendo Γ constante), la integral (47.4) sigue siendo

[†] En la teoría del potencial bidimensional, esta fórmula da el potencial debido a un contorno plano cargado con una densidad de carga

$$[(\partial\psi/\partial n)_2 - (\partial\psi/\partial n)_1]/2\pi.$$

constante.[†] Esto demuestra que el arrastre inducido total sobre el ala permanece en el mismo orden de magnitud cuando aumenta su envergadura. En otras palabras, el arrastre inducido por unidad de longitud del ala disminuye al aumentar la longitud.[‡] A diferencia del arrastre, la fuerza de sustentación total

$$F_y = -\rho U \int \Gamma dz \quad (47.5)$$

aumenta casi linealmente con la envergadura del ala y es constante la fuerza de sustentación por unidad de longitud.

Para el cálculo real de las integrales (47.4) y (47.5) es conveniente utilizar el siguiente método. En lugar de la coordenada z , introduzcamos una nueva variable θ , definida por

$$z = \frac{1}{2}l(1 - \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi). \quad (47.6)$$

La distribución de la circulación de la velocidad se escribe en forma de una serie de Fourier:

$$\Gamma = -2Ul \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senn} n\theta. \quad (47.7)$$

La condición de que $\Gamma = 0$ en los extremos del ala ($z = 0$ y l , o bien, $\theta = 0$ y π) se ve entonces cumplida.

Sustituyendo la expresión (47.7) en (47.5) y efectuando la integración (utilizando la propiedad de ortogonalidad de las funciones $\operatorname{senn} \theta$ y $\operatorname{senn} n\theta$ para $n \neq 1$), obtenemos $F_y = \frac{1}{2}\rho U^2 l^2 A_1$. Así pues, la fuerza de sustentación depende sólo del primer coeficiente del desarrollo (47.7). Como valor del coeficiente de sustentación (46.2) tenemos

$$C_y = \pi \lambda A_1, \quad (47.8)$$

en donde hemos introducido el cociente $\lambda = l/l_s$ de la envergadura frente a la anchura del ala.

[†] Para evitar una interpretación incorrecta, debemos mencionar que no importa que el logaritmo dentro del integrando se vea aumentado en una constante al modificarse la unidad de longitud. En efecto, la integral que difiere de la que aparece en (47.4) porque tiene una constante en lugar de $\log |z - z'|$ es nula, ya que

$$\int (d\Gamma/dz) dz = \Gamma,$$

y la integral definida es nula debido a que Γ se anula en los bordes de la estela.

[‡] En el límite de envergadura infinita, el arrastre inducido por unidad de longitud es cero. En realidad persiste una pequeña cantidad de arrastre, determinado por la descarga o caudal de la estela (es decir, la integral $\iint f v_x dy dz$), que hemos despreciado al deducir la fórmula (47.3). En este arrastre se incluye tanto el de rozamiento como la parte restante debida a la disipación en la estela.

Para calcular el arrastre volvamos a escribir la fórmula (47.4) integrando una vez por partes:

$$F_x = \frac{\rho}{4\pi} \int_0^l \int_0^l \Gamma(z) \frac{d\Gamma(z')}{dz'} \frac{dz' dz}{z - z'}. \quad (47.9)$$

Se ve fácilmente que la integral respecto a z' debe tomarse como un valor principal. Un cálculo elemental, con la sustitución (47.7),[†] conduce a la fórmula siguiente para el coeficiente de arrastre inducido:

$$C_x = \pi\lambda \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2. \quad (47.10)$$

El coeficiente de arrastre en el caso de un ala se define como

$$C_x = F_x / \frac{1}{2} \rho U^2 l_x l_z, \quad (47.11)$$

refiriéndose, como en el caso del coeficiente de sustentación, al área unidad en el plano xz .

PROBLEMA

Determinar el valor mínimo de la fuerza de arrastre inducida para una sustentación dada y una envergadura $l_x = l$ también dada.

Solución. A partir de las fórmulas (47.8) y (47.10) se ve que el valor mínimo de C_x para un valor dado de C_y (es decir, para un valor dado de A_1) se obtiene si todos los A_n correspondientes a $n \neq 1$ son cero. Entonces,

$$C_{x,\min} = C_y^2 / \pi\lambda. \quad (1)$$

La distribución de la circulación de velocidades a lo largo de la envergadura viene dada por la fórmula

$$\Gamma = - \frac{4}{\pi l} U l_x C_y \sqrt{[z(l-z)]}. \quad (2)$$

Si la envergadura es suficientemente grande, entonces el flujo a lo largo de cualquier sección recta del ala es, aproximadamente, un flujo bidimensional a lo largo de un ala

[†] Al integrar respecto a z' necesitamos la integral

$$P \int_0^\pi \frac{\cos n\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta' = \frac{\pi \operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen} \theta}.$$

Al integrar respecto a z se hace uso del hecho de que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta d\theta &= \frac{1}{2}\pi \quad (m = n), \\ &= 0 \quad (m \neq n). \end{aligned}$$

de longitud infinita, pero de la misma sección recta. En este caso podemos decir que la distribución de la circulación (2) se obtiene para un ala cuya forma en el plano xz es un ellipse con semieje $l_x/2$ y $l/2$.

§ 48. La sustentación de un ala delgada

El problema de calcular la fuerza de sustentación en el caso de un ala equivale, según el teorema de Zhukovskii, al de hallar la circulación de la velocidad Γ . Una solución general de este último problema puede darse en el caso de un ala aerodinámica delgada de envergadura infinita, siendo la sección recta constante en todo punto.[†] El elegante método de resolución que damos a continuación se debe a M. V. KELDYSH y L. I. SEDOV (1939).

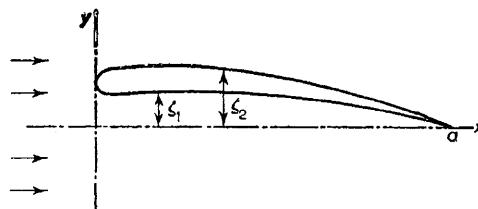


FIG. 27

Sean $y = \zeta_1(x)$ e $y = \zeta_2(x)$ las ecuaciones de las partes inferior y superior del perfil de la sección recta (figura 27). Supongamos que este perfil es delgado y curvado ligeramente, al mismo tiempo que está inclinado formando un pequeño ángulo de ataque respecto a la corriente principal (eje x); es decir, tanto las magnitudes ζ_1 , ζ_2 como sus derivadas ζ'_1 , ζ'_2 son pequeñas, lo que equivale a decir que la normal al contorno del perfil es, en todos los puntos, casi paralela al eje y . En estas condiciones podemos suponer que la perturbación v introducida en la velocidad del fluido y producida por la presencia del ala serán en todos los puntos[‡] pequeña en comparación con la velocidad de la corriente principal U . La condición límite en la superficie del ala es $v_y/U = \zeta'$ para $y = \zeta$. En virtud de las hipótesis realizadas podemos suponer que esta condición es válida para $y = 0$ y no para $y = \zeta$. Entonces debemos tener en el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = l_x \equiv a$,

$$v_y = U\zeta'_2(x) \text{ para } y \rightarrow 0+, \quad v_y = U\zeta'_1(x) \text{ para } y \rightarrow 0-. \quad (48.1)$$

[†] Una descripción más detallada de la teoría del flujo incompresible bidimensional junto a un ala viene dada por N. E. KOCHIN, I. A. KIBEL' y N. V. ROZE, *Theoretical Hydromechanics* (*Teoreticheskaya gidromekhanika*), parte 1, 4.^a ed., Moscow, 1948; L. I. SEDOV, *Two-dimensional Problems of Hydrodynamics and Aerodynamics* (*Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki*), Moscow, 1950.

[‡] Excepto en una región pequeña cerca del borde de ataque redondeado del ala.

Con objeto de aplicar los métodos de la teoría de funciones de variable compleja introduzcamos la velocidad compleja $dw/dz = v_x - iv_y$ (ver § 10), que es una función analítica de la variable $z = x + iy$. En el caso presente esta función debe satisfacer las condiciones

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(dw/dz) &= -U\zeta_2'(x) \quad \text{para } y \rightarrow 0+, \\ \operatorname{im}(dw/dz) &= -U\zeta_1'(x) \quad \text{para } y \rightarrow 0-, \end{aligned} \quad (48.2)$$

sobre el segmento $(0, a)$ del eje de abscisas.

Para resolver el problema anterior, representaremos, en primer lugar, la distribución de velocidades requerida $\mathbf{v}(x, y)$ como una suma $\mathbf{v} = \mathbf{v}^- + \mathbf{v}^+$ de dos distribuciones que poseen las siguientes propiedades de simetría:

$$\begin{aligned} v^-_x(x, -y) &= v^-_x(x, y), & v^-_y(x, -y) &= -v^-_y(x, y), \\ v^+_x(x, -y) &= -v^+_x(x, y), & v^+_y(x, -y) &= v^+_y(x, y). \end{aligned} \quad (48.3)$$

Estas propiedades de las distribuciones separadas \mathbf{v}^- y \mathbf{v}^+ no violan la ecuación de continuidad ni la del flujo potencial y, puesto que el problema es lineal, pueden buscarse separadamente ambas distribuciones.

La velocidad compleja se representa en correspondencia como una suma

$$w' = w'_+ + w'_-,$$

y las condiciones límites en el segmento $(0, a)$ para los dos términos de la suma son

$$\begin{aligned} [\operatorname{im} w'_+]_{y \rightarrow 0+} &= [\operatorname{im} w'_+]_{y \rightarrow 0-} = -\frac{1}{2}U(\zeta_1' + \zeta_2'), \\ [\operatorname{im} w'_-]_{y \rightarrow 0+} &= -[\operatorname{im} w'_-]_{y \rightarrow 0-} = \frac{1}{2}U(\zeta_1' - \zeta_2'). \end{aligned} \quad (48.4)$$

La función w'_- puede determinarse de una vez por la fórmula de Cauchy:

$$w'_-(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{w'_-(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

en donde la integración en el plano de la variable compleja ξ se toma a lo largo de una circunferencia L de radio pequeño centrada en el punto $\xi = z$ (figura 28). El contorno L puede sustituirse por una circunferencia C' de radio infinito y un contorno C que se recorre en el sentido de las agujas del reloj; este último puede deformarse o reducirse al segmento $(0, a)$ dos veces. La integral a lo largo de C' es cero, puesto que $w'(z)$ se anula en el infinito. La integral a lo largo de C da

$$w'_- = -\frac{U}{2\pi} \int_0^a \frac{\zeta_2'(\xi) - \zeta_1'(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (48.5)$$

Aquí hemos utilizado los valores límites (48.4) de la parte imaginaria de w'_- sobre el segmento $(0, a)$, y el hecho de que, por las condiciones de simetría (48.3), la parte real de w'_- es continua a lo largo de este segmento.

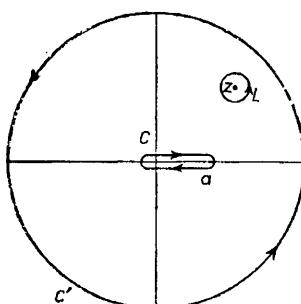


FIG. 28

Para hallar ahora la función w'_+ , hemos de aplicar la fórmula de Cauchy, no a la propia función, sino al producto $w'_+(z)g(z)$, siendo $g(z) = \sqrt{[z/(z-a)]}$, y se toma la raíz cuadrada con el signo más para $z = x > a$. Sobre el segmento $(0, a)$ del eje real, la función $g(z)$ es puramente imaginaria y discontinua: $g(x+i0) = -g(x-i0) = -i\sqrt{[x/(a-x)]}$. Es evidente, a partir de estas propiedades de la función $g(z)$, que la parte imaginaria del producto gw'_+ es discontinua sobre el segmento $(0, a)$, mientras que la parte real es continua, lo mismo que sucede en el caso de la función w'_- . Así tenemos, exactamente como en la deducción de la fórmula (48.5),

$$w'_+(z)g(z) = -\frac{U}{2\pi} \int_0^a \frac{\zeta_1'(\xi) + \zeta_2'(\xi)}{\xi - z} g(\xi + i0) d\xi.$$

Reuniendo las expresiones anteriores tenemos la fórmula siguiente para la distribución de velocidades en el flujo que rodea a un ala delgada:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} = & -\frac{U}{2\pi i} \sqrt{\frac{z-a}{z}} \int_0^a \frac{\zeta_1'(\xi) + \zeta_2'(\xi)}{\xi - z} \sqrt{\frac{\xi}{a-\xi}} d\xi - \\ & - \frac{U}{2\pi} \int_0^a \frac{\zeta_2'(\xi) - \zeta_1'(\xi)}{\xi - z} d\xi. \end{aligned} \quad (48.6)$$

Cerca del extremo delantero redondeado (es decir, para $z \rightarrow 0$), esta expresión se hace en general infinita, no siendo válida en esta región la aproximación utilizada anteriormente. Cerca del extremo de salida puntiagudo (es decir, para $z \rightarrow a$), el primer término de (48.6) es finito, pero el segundo término se hace infinito aunque sólo logarítmicamente.[†] Esta singularidad

[†] Esta divergencia desaparece si ζ_1 y ζ_2 se anulan de la forma $(a-x)^k$, $k > 1$, cerca del borde de salida, es decir, si el punto correspondiente a dicho borde es un punto anguloso.

logarítmica se debe a la aproximación utilizada y desaparece cuando se realiza un estudio más exacto; no existe entonces ninguna divergencia en ley de potencias en el extremo de salida de acuerdo con la condición de Zhukovskii-Chaplygin. Se obtiene el cumplimiento de esta condición mediante una selección apropiada de la función $g(z)$ utilizada anteriormente.

La fórmula (48.6) nos permite determinar inmediatamente la circulación de la velocidad Γ alrededor del perfil del ala. De acuerdo con la regla general (ver § 10), Γ viene dado por el residuo de la función $w'(z)$ en su polo simple $z = 0$. El residuo buscado se encuentra fácilmente como el coeficiente de $1/z$ en un desarrollo de $w'(z)$ en potencias de $1/z$ alrededor del punto en el infinito: $dw/dz = \Gamma/2\pi iz + \dots$, y Γ viene dado por la fórmula sencilla

$$\Gamma = U \int_0^a (\zeta_1' + \zeta_2') \sqrt{\frac{\xi}{a-\xi}} d\xi. \quad (48.7)$$

Podemos señalar que únicamente las sumas de las funciones ζ_1 y ζ_2 aparecen aquí. La fuerza de sustentación no se modifica si el ala delgada se sustituye por una placa doblada cuya forma venga dada por la función $(\zeta_1 + \zeta_2)/2$.

Por ejemplo, en el caso de un ala en forma de una placa delgada de longitud infinita, inclinada formando un pequeño ángulo de ataque α , tenemos $\zeta_1 = \zeta_2 = \alpha(a - x)$, y la fórmula (48.7) da $\Gamma = -\pi\alpha a U$. El coeficiente de sustentación para un ala de este tipo es $C_s = -\rho U T / \frac{1}{2} \rho U^2 a = 2\pi\alpha$.

CAPÍTULO V

CONDUCCIÓN TÉRMICA EN LOS FLUIDOS

§ 49. Ecuación general de la transferencia de calor

Se ha mencionado al final del § 2 que un sistema completo de ecuaciones de la dinámica de fluidos debe contener cinco ecuaciones. En el caso de un fluido en el que se produzcan procesos de conducción térmica y rozamiento interno, una de estas ecuaciones es, como antes, la ecuación de continuidad y ahora se sustituyen las ecuaciones de Euler por las ecuaciones de Navier-Stokes. La quinta ecuación correspondiente a un fluido ideal es la ecuación de la conservación de entropía (2.6). Como es natural en un fluido viscoso esta ecuación deja de ser válida, puesto que se producen en su interior procesos irreversibles de disipación de energía.

En un fluido ideal la ley de conservación de la energía se expresa por la ecuación (6.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \epsilon) = -\operatorname{div}[\rho \mathbf{v}(\frac{1}{2}v^2 + w)].$$

La expresión del primer miembro es la variación respecto al tiempo de la energía contenida en la unidad de volumen del fluido, mientras que el segundo miembro es la divergencia de la densidad de flujo de energía. En un fluido viscoso la ley de conservación de la energía, como es natural, sigue siendo válida: la variación por unidad de tiempo de la energía total del fluido en cualquier volumen debe seguir siendo igual al flujo total de energía a través de la superficie que limita dicho volumen. Sin embargo, la densidad de flujo de energía ahora tiene una forma diferente. Además del flujo $\rho \mathbf{v}(v^2/2 + w)$ debido a la transferencia simple de masa por el movimiento de fluido, existe también un flujo debido a los procesos de rozamiento interno. Este último flujo viene dado por el vector $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}'_{ik}$, con componentes $v_i \sigma'_{ik}$ (ver § 16). Además, existe otro término que debe incluirse en el flujo de energía. Si no es constante la temperatura del fluido en todo su volumen, éste será, además de las dos medias de transferencia de energía indicadas anteriormente, una transferencia de calor por un mecanismo que se denomina *conducción térmica*. Esto significa la transferencia molecular desde

aquellos puntos en donde la temperatura es alta a los otros en donde es menor. En ella no interviene un movimiento macroscópico y se produce incluso en el caso de un fluido en reposo.

Designemos por \mathbf{q} la densidad de flujo térmico debida a la conducción térmica. El flujo \mathbf{q} está relacionado con la variación de temperatura a través del fluido. Esta relación puede escribirse de un modo simple en aquellos casos en que el gradiente de temperatura en el fluido no es grande; en los fenómenos de conducción térmica casi siempre estaremos dentro de estos casos. Podemos entonces desarrollar \mathbf{q} como una serie de potencias del gradiente de temperatura, y tomar únicamente el primer término del desarrollo. El término constante es evidentemente cero, puesto que \mathbf{q} debe anularse cuando $\text{grad } T$ se anule. Así pues, tenemos

$$\mathbf{q} = -\kappa \text{grad } T. \quad (49.1)$$

La constante κ se denomina *conductividad térmica*. Es siempre positiva, como puede verse considerando que el flujo de energía debe transcurrir desde los puntos de temperatura más alta a aquellos en donde la temperatura es menor. Es decir, \mathbf{q} y $\text{grad } T$ deben tener sentidos opuestos. El coeficiente κ es, en general, una función de la temperatura y de la presión.

Así pues, el flujo de energía total en un fluido cuando existe viscosidad y conducción térmica es $\rho v(v^2/2 + w) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \kappa \text{grad } T$. De acuerdo con esto, la ley general de la conservación de energía viene dada por la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \epsilon) = -\text{div}[\rho \mathbf{v}(\frac{1}{2}v^2 + w) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \kappa \text{grad } T]. \quad (49.2)$$

Podremos tomar esta ecuación para completar el sistema de ecuaciones fluido-mecánicas de un fluido viscoso. Sin embargo, es conveniente ponerla en otra forma transformándola con ayuda de las ecuaciones del movimiento. Para ello, calculemos la derivada temporal de la energía contenida en el volumen unidad de fluido a partir de las ecuaciones del movimiento. Tenemos así

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \epsilon) = \frac{1}{2}v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Sustituyendo $\partial \rho / \partial t$ despejada de la ecuación de continuidad y $\partial \mathbf{v} / \partial t$ de la ecuación de Navier-Stokes, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \epsilon) &= -\frac{1}{2}v^2 \text{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \text{grad} \frac{1}{2}v^2 - \mathbf{v} \cdot \text{grad} \rho + \\ &\quad + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} - \epsilon \text{div}(\rho \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Utilizando ahora la relación termodinámica $d\epsilon = T ds - p dV = T ds + (p/\rho^2)d\rho$, se tiene

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}).$$

Sustituyendo esta expresión e introduciendo la función entalpía $w = \epsilon + p/\rho$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) &= - \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \frac{1}{2} v^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p + \\ &\quad + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

A continuación, y a partir de la relación termodinámica $dw = T ds + dp/\rho$, tenemos $\mathbf{grad} p = \rho \mathbf{grad} w - \rho T \mathbf{grad} s$. El último término del segundo miembro de la ecuación anterior puede escribirse

$$v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (v_i \sigma'_{ik}) - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \equiv \operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}') - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Sustituyendo estas expresiones y sumando y restando $\operatorname{div}(\kappa \mathbf{grad} T)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) &= - \operatorname{div} [\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \kappa \mathbf{grad} T] + \\ &\quad + \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s \right) - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \operatorname{div} (\kappa \mathbf{grad} T). \end{aligned} \quad (49.3)$$

Comparando esta expresión para la derivada temporal de la energía contenida en el volumen unidad con (49.2), tenemos

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div} (\kappa \mathbf{grad} T). \quad (49.4)$$

Esta ecuación se denomina *ecuación general de transferencia térmica*. Si no existe viscosidad ni conducción térmica el segundo miembro es cero y se obtiene la ecuación de la conservación de entropía (2.6) correspondiente a un fluido ideal.

Debe señalarse también la interpretación siguiente de la ecuación (49.4). La expresión del primer miembro coincide exactamente con la derivada temporal total ds/dt de la entropía, multiplicada por ρT . La magnitud ds/dt da la variación respecto al tiempo de la entropía de una masa unidad de fluido cuando se mueve a lo largo del espacio y, por tanto, $T ds/dt$ es la cantidad de calor que gana dicha unidad de masa en el tiempo unidad, de modo que $\rho T ds/dt$ es la cantidad de calor que gana por unidad de volumen. Vemos,

a partir de (49.4), que la cantidad de calor adquirido por unidad de volumen del fluido es, por tanto,

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T).$$

El primer término de esta expresión es la energía disipada en calor por la viscosidad, y el segundo es el calor conducido hacia el interior del volumen considerado.

Desarrollemos el término $\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ en (49.4) sustituyendo σ'_{ik} por la expresión (15.3). Tenemos

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}.$$

Es fácil comprobar que el primer término puede escribirse como

$$\frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2,$$

y el segundo es

$$\zeta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \zeta \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \equiv \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2.$$

Así pues, la ecuación (49.4) se convierte en

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} s \right) = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) + \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2. \quad (49.5)$$

La entropía del fluido aumenta como resultado de los procesos irreversibles de conducción térmica y de rozamiento interno. Aquí, como es natural, no estudiamos la entropía de cada elemento de volumen de fluido por separado, sino la entropía total del fluido completo, que es igual a la integral

$$\int \rho s dV.$$

La variación de entropía por unidad de tiempo viene dada por la derivada

$$d[\int \rho s dV]/dt = \int [\partial(\rho s)/\partial t] dV.$$

Utilizando la ecuación de continuidad y la ecuación (49.5) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} &= \rho \frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial \rho}{\partial t} = -s \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} s + \frac{1}{T} \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) + \\ &+ \frac{\eta}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \frac{\zeta}{T} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2. \end{aligned}$$

Los dos primeros términos del segundo miembro dan juntos $-\operatorname{div}(\rho s v)$. La integral de volumen de esta expresión se transforma en la integral del flujo de la entropía $\rho s v$ sobre la superficie. Si consideramos un volumen no limitado del fluido en reposo y en el infinito, la superficie del límite puede trasladarse hacia el infinito; el integrando en la integral de superficie es entonces cero y por la misma razón se anula la propia integral. La integral del tercer término del segundo miembro se transforma del modo siguiente:

$$\int \frac{1}{T} \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) dV = \int \operatorname{div}\left(\frac{\kappa \operatorname{grad} T}{T}\right) dV + \int \frac{\kappa(\operatorname{grad} T)^2}{T^2} dV.$$

Suponiendo que la temperatura del fluido tiende con suficiente rapidez a un valor constante en el infinito, podemos transformar la primera integral en otra extendida a una superficie infinitamente remota, sobre la cual $\operatorname{grad} T = 0$ y, por tanto, se anula la integral.

El resultado es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \rho s dV &= \int \frac{\kappa(\operatorname{grad} T)^2}{T^2} dV + \int \frac{\eta}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 dV + \\ &\quad + \int \frac{\zeta}{T} (\operatorname{div} v)^2 dV. \end{aligned} \quad (49.6)$$

El primer término del segundo miembro es la variación respecto al tiempo del aumento de entropía debido a la conducción térmica, y los otros dos términos dan la variación respecto al tiempo del aumento debido al rozamiento interno. La entropía solamente puede aumentar; es decir, la suma en el segundo miembro de (49.6) debe ser positiva. En cada término el integrando puede ser no nulo aunque se anulen las otras dos integrales. De aquí se deduce que el segundo coeficiente de viscosidad ζ es positivo, lo mismo que κ y η , que ya sabíamos que eran positivos.

En la deducción de la fórmula (49.1) se ha supuesto tácitamente que el flujo térmico dependía únicamente del gradiente de temperaturas y no del gradiente de presiones. Esta hipótesis, que no es evidente *a priori*, puede justificarse ahora del modo siguiente. Si q contuviese un término proporcional a $\operatorname{grad} p$, la expresión (49.6) para la variación respecto al tiempo de la entropía debería incluir otro término que incluyera el producto $\operatorname{grad} p$ por $\operatorname{grad} T$ en el integrando. Puesto que este último puede ser positivo o negativo, la derivada respecto al tiempo de la entropía no sería necesariamente positiva, lo cual es imposible.

Finalmente, los razonamientos anteriores deben también refinarse en el aspecto siguiente. Estrictamente, en un sistema que no esté en equilibrio termodinámico, como un fluido con gradientes de velocidad y de temperatura, las definiciones normales de las magnitudes termodinámicas dejan de tener significado y deben modificarse. Las definiciones necesarias son, en

primer lugar, que ρ , ϵ y \mathbf{v} se definen como antes: ρ y $\rho\epsilon$ son la masa y la energía interna por unidad de volumen y \mathbf{v} es el impulso de la unidad de masa de fluido. Las restantes magnitudes termodinámicas se definen entonces como si fuesen las mismas funciones de ρ y ϵ correspondientes al equilibrio térmico. Sin embargo, la entropía $s = s(p, \epsilon)$ deja de ser la verdadera entropía termodinámica: la integral

$$\int \rho s dV$$

no es estrictamente hablando la magnitud que debe aumentar con el tiempo. No obstante, es fácil de ver que, en el caso de gradientes de velocidad y de temperatura pequeños, s es la misma que la entropía verdadera en la aproximación que hemos utilizado. Porque, si existen gradientes, se originan en general términos adicionales [además de $s(\rho, \epsilon)$] en la entropía. Sin embargo, los resultados dados anteriormente pueden alterarse únicamente mediante términos que sean lineales en los gradientes (por ejemplo, un término proporcional a la magnitud escalar $\operatorname{div} \mathbf{v}$). Dichos términos necesariamente deberían tomar tanto valores positivos como negativos. Pero, por otra parte, han de ser definidos negativos, puesto que el valor de equilibrio $s = s(\rho, \epsilon)$ es el valor máximo posible. De aquí que el desarrollo de la entropía en potencias de gradientes pequeños puede contener (a parte del término de orden cero) solamente términos de segundo orden y órdenes superiores.

También deben hacerse advertencias semejantes en § 15 (ver la primera nota a pie de página de dicha sección), puesto que la presencia de sólo un gradiente de velocidades implica la ausencia de equilibrio termodinámico. La presión p que aparece en la expresión correspondiente al tensor de densidad de flujo del impulso en un fluido viscoso, debe considerarse como la misma función $p = p(\rho, \epsilon)$ que en el equilibrio térmico. En este caso p no será, estrictamente hablando, la presión en el sentido normal, es decir, la fuerza normal sobre un elemento de superficie. A diferencia de lo que ocurre en el caso de la entropía (ver anteriormente), existe ahora una diferencia resultante de la comparación entre el gradiente pequeño y el desarrollo en primer orden; hemos visto que el componente normal de la fuerza incluye, además de p , un término proporcional a $\operatorname{div} \mathbf{v}$ (en un fluido incompresible, este término es cero y la diferencia es entonces de orden superior).

Así pues, los tres coeficientes η , ζ , κ que aparecen en las ecuaciones del movimiento de un fluido conductor viscoso determinan completamente las propiedades fluido-mecánicas del fluido en la aproximación considerada (es decir, cuando se desprecian las derivadas espaciales de orden superior de la velocidad, de la temperatura, etc). La introducción de unos términos adicionales cualesquiera (por ejemplo, la inclusión en la densidad de flujo de masa de términos proporcionales al gradiente de densidad o de temperaturas) carece de significado físico y significaría, como mínimo, una variación en la

definición de las magnitudes básicas: en particular, la velocidad dejaría de ser el impulso de la unidad de masa del fluido.[†]

§ 50. Conducción térmica en un fluido incompresible

La ecuación general de la conducción térmica (49.4) o (49.5) puede simplificarse de modo considerable en ciertos casos. Si la velocidad del fluido es pequeña en comparación con la velocidad del sonido, las variaciones de presión que se producen como resultado del movimiento son tan pequeñas que la variación en la densidad (y en las demás magnitudes termodinámicas) producidas por ellas pueden despreciarse. Sin embargo, un fluido que esté calentado de modo no uniforme ya no es completamente incompresible en el sentido utilizado anteriormente. La razón es que la densidad varía con la temperatura; esta variación ya no puede despreciarse en general y, por lo tanto, incluso a velocidades pequeñas, la densidad de un fluido que está caliente de modo no uniforme no puede considerarse constante. Al determinar las derivadas de las magnitudes termodinámicas en este caso, es necesario, por tanto, suponer que la presión y no la densidad es constante. Así pues, tenemos

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{grad}s = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \mathbf{grad}T,$$

y, puesto que $T(\partial s/\partial T)_p$ es el calor específico a presión constante c_p , obtenemos $T\partial s/\partial t = c_p \partial T/\partial t$, $T \mathbf{grad}s = c_p \mathbf{grad}T$. La ecuación (49.4) se transforma en

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}T \right) = \text{div}(\kappa \mathbf{grad}T) + \sigma' \iota_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (50.1)$$

Si ha de suponerse la densidad constante en las ecuaciones del movimiento en el caso de un fluido caliente de modo no uniforme, es necesario que la velocidad del fluido sea pequeña en comparación con la del sonido y también que sean pequeñas las diferencias de temperaturas en el interior del fluido. Resaltemos que queremos decir valores reales de la diferencia de

[†] Y lo que es peor, la inclusión de dichos términos podría violar las leyes de conservación necesarias. Debe recordarse que, independientemente de las definiciones utilizadas, la densidad de flujo de masa \mathbf{j} debe ser siempre igual al impulso por unidad de volumen del fluido. En efecto, \mathbf{j} se define mediante la ecuación de continuidad,

$$\partial\rho/\partial t + \text{div}\mathbf{j} = 0;$$

multiplicándola por \mathbf{r} e integrando respecto a la totalidad del volumen, se tiene

$$d(\int \rho \mathbf{r} dV)/dt = \int \mathbf{j} dV,$$

y resulta claro que la integral $\int \mathbf{j} dV$ es el impulso, puesto que la integral $\int \rho \mathbf{r} dV$ determina la posición del centro de masas.

temperatura y no el gradiente de temperaturas. Entonces el fluido puede suponerse incompresible en el sentido normal, y, en particular, la ecuación de continuidad es simplemente $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Suponiendo que las diferencias de temperaturas son pequeñas, podemos despreciar también la variación con la temperatura de η , κ y c_p , suponiéndolas constantes. Escribiendo el término $\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ como en (49.5), obtenemos la ecuación de la transferencia térmica en un fluido incompresible de la forma comparativamente sencilla siguiente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2, \quad (50.2)$$

en donde $\nu = \eta/\rho$ es la viscosidad cinemática, y en donde hemos escrito κ en función de la *conductividad termométrica*, definida como

$$\chi = \kappa/\rho c_p. \quad (50.3)$$

La ecuación de transferencia térmica es particularmente sencilla en el caso de un fluido incompresible en reposo, en el cual la transferencia de energía se debe totalmente a la conducción térmica. Omitiendo en (50.2) aquellos términos en los que interviene la velocidad, tenemos simplemente

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T. \quad (50.4)$$

Esta ecuación se denomina en física matemática *ecuación de la conducción térmica* o *ecuación de Fourier*. Como es natural, puede obtenerse de modo mucho más sencillo sin utilizar la ecuación general de transferencia térmica en el fluido móvil. De acuerdo con la ley de la conservación de la energía, la cantidad de calor absorbida en un volumen determinado en la unidad de tiempo debe ser igual al flujo térmico total que entra en dicho volumen a través de la superficie que lo limita. Como sabemos, dicha ley de conservación puede expresarse como una «ecuación de continuidad» para la cantidad de calor. Esta ecuación se obtiene igualando la cantidad de calor absorbida en la unidad de volumen por unidad de tiempo a la divergencia de la densidad del flujo térmico con signo menos. La primera vale $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$; debemos tomar ahora el calor específico c_p , puesto que la presión es naturalmente constante en todo el fluido en reposo. Igualando esta expresión a $-\operatorname{div} \mathbf{q} = \kappa \Delta T$, obtenemos la ecuación (50.4).

Debe mencionarse que la aplicabilidad de la ecuación de la conducción térmica (50.4) a los fluidos es realmente muy limitada. La razón es que en el caso de fluidos en el interior de un campo gravitatorio, incluso un gradiente de temperaturas muy pequeño da como resultado normalmente un movimiento considerable (*convección*, ver § 56). De aquí que podemos tener realmente un fluido en reposo con una distribución de temperaturas no uniforme únicamente si el sentido del gradiente de temperaturas es opuesto al de las fuerzas gravitatorias o si el fluido es muy viscoso. Sin embargo, es muy importante un estudio de la ecuación de la conducción térmica en

la forma (50.4), puesto que se describen los procesos de conducción en los sólidos mediante una ecuación de la misma forma. Por tanto, consideraremos esta expresión con más detalle en §§ 51 y 52.

Si la distribución de temperaturas en un medio caliente de modo no uniforme en reposo se mantiene constante en el tiempo (mediante alguna fuente externa de calor), la ecuación de la conducción térmica se transforma en

$$\Delta T = 0. \quad (50.5)$$

Así pues, una distribución de temperaturas estacionarias en un medio en reposo satisface la ecuación de Laplace. En el caso más general en que κ no puede considerarse como constante, tenemos en lugar de (50.5) la ecuación

$$\operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) = 0. \quad (50.6)$$

Si el fluido contiene fuentes o focos externos de calor (por ejemplo, la calefacción mediante una corriente eléctrica), la ecuación de la conducción térmica debe contener de modo correspondiente otro término. Sea Q la cantidad de calor generada por estas fuentes en la unidad de volumen del fluido y por unidad de tiempo; Q es, en general, una función de las coordenadas y del tiempo. Entonces la ecuación de balance térmico, es decir, la ecuación de la conducción térmica es

$$\rho c_p \partial T / \partial t = \kappa \Delta T + Q. \quad (50.7)$$

Describamos a continuación las condiciones límites de la ecuación de la conducción térmica que son válidas entre dos medios. Ante todo, las temperaturas de ambos medios deben ser iguales en su frontera:

$$T_1 = T_2. \quad (50.8)$$

Además, el flujo térmico que sale de un medio debe ser igual al flujo térmico que entra en el otro. Tomando un sistema de coordenadas, en el que la parte de la frontera o límite considerado esté en reposo, podemos escribir esta condición como $\kappa_1 \operatorname{grad} T_1 \cdot df = \kappa_2 \operatorname{grad} T_2 \cdot df$ para cada elemento de superficie df . Poniendo $\operatorname{grad} T \cdot df = (\partial T / \partial n)df$, siendo $\partial T / \partial n$ la derivada de T a lo largo de la normal a la superficie, obtenemos la condición límite en la forma

$$\kappa_1 \partial T_1 / \partial n = \kappa_2 \partial T_2 / \partial n. \quad (50.9)$$

Si existen en la superficie de separación focos externos de calor que generen una cantidad de calor $Q^{(s)}$ en la unidad de área y por unidad de tiempo, entonces (50.9) debe sustituirse por

$$\kappa_1 \partial T_1 / \partial n - \kappa_2 \partial T_2 / \partial n = Q^{(s)}. \quad (50.10)$$

En los problemas físicos en donde intervenga la distribución de temperaturas en presencia de focos térmicos, la intensidad de estos últimos viene dada normalmente como una función de la temperatura. Si la función $Q(T)$

aumenta con rapidez suficiente con T , puede ser imposible establecer una distribución de temperaturas estacionarias en un cuerpo cuyas fronteras se mantienen en condiciones fijas (por ejemplo, a una temperatura dada). La pérdida de calor a través de la superficie externa del cuerpo es proporcional a cierto valor medio de la diferencia de temperaturas $T - T_0$ entre el cuerpo y el medio externo, independientemente de la ley de generación térmica dentro del cuerpo; es evidente que, si la generación de calor aumenta de modo suficientemente rápido con la temperatura, la pérdida de calor puede ser inadecuada para obtener un estado de equilibrio.

La imposibilidad de establecer un estado térmico estacionario forma la base de la *teoría térmica de las explosiones* desarrollada por N. N. SEMENOV (1928): «Si la velocidad de una reacción de combustión isotérmica aumenta con suficiente rapidez con la temperatura, la imposibilidad de una distribución estacionaria conduce a una ignición rápidamente no estacionaria de la sustancia y a una aceleración de la reacción hacia una explosión térmica». D. A. FRANK-KAMENETSKI ha dado una teoría cuantitativa para el caso en que la generación térmica sea una función exponencial de la temperatura (ver problema 1).†

PROBLEMAS

Problema 1. Focos térmicos de magnitud $Q = Q_0 e^{\alpha(T-T_0)}$ están distribuidos por unidad de volumen en una capa de material limitado por dos planos paralelos infinitos que se mantienen a temperatura constante T_0 . Hallar la condición para que sea posible una distribución estacionaria de temperaturas.

Solución. La ecuación correspondiente a la conducción térmica estacionaria es ahora

$$\kappa d^2T/dx^2 = -Q_0 e^{\alpha(T-T_0)},$$

con las condiciones límites $T = T_0$ para $x = 0$ y $x = 2l$ (siendo $2l$ el espesor de la capa). Introduzcamos las variables adimensionales $\tau = \alpha(T - T_0)$ y $\xi = x/l$. Entonces,

$$\tau'' + \lambda e^\tau = 0, \quad \lambda = Q_0 \alpha l^2 / \kappa.$$

Integramos esta ecuación una vez (después de multiplicar por $2\tau'$) y encontramos

$$\tau'^2 = 2\lambda(e^{\tau_0} - e^\tau),$$

siendo τ_0 una constante, que evidentemente es el valor máximo de τ ; por simetría, este

† La velocidad de las reacciones explosivas de combustión y, por tanto, la velocidad de generación de calor, depende de la temperatura, aproximadamente como $e^{-U/RT}$, siendo grande la constante U . FRANK-KAMENETSKI ha demostrado que, para investigar las condiciones necesarias para que se produzca una explosión térmica, debemos considerar el curso de la reacción cuando la ignición de la sustancia es comparativamente lenta y, por consiguiente, sustituir $e^{-U/RT}$ por e^{-U/RT_0} , $e^{U(T-T_0)/RT_0^2}$, siendo T_0 la temperatura externa. Puede verse un estudio más detallado en el texto de D. A. FRANK-KAMENETSKI, *Difusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics*, Princeton, 1955.

valor debe alcanzarse en el punto medio de la capa, es decir, para $\xi = 1$. De aquí que una segunda integración, con la condición $\tau = 0$ para $\xi = 0$, dé

$$\frac{1}{\sqrt{(2\lambda)}} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\sqrt{(e^{\tau_0} - e^\tau)}} = \int_0^1 d\xi = 1.$$

Efectuando la integración, tenemos

$$e^{-\frac{1}{2}\tau_0} \operatorname{arcosh} e^{\frac{1}{2}\tau_0} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\lambda\right)}. \quad (1)$$

La función $\lambda(\tau_0)$ determinada por esta ecuación tiene un máximo $\lambda = \lambda_{\text{cr}}$ para un valor definido $\tau_0 = \tau_{0,\text{cr}}$; si $\lambda > \lambda_{\text{cr}}$, no existe ninguna solución que satisfaga las condiciones límites.[†] Los valores numéricos son $\lambda_{\text{cr}} = 0,88$, $\tau_{0,\text{cr}} = 1,2$.[‡]

Problema 2. Una esfera está sumergida en un fluido en reposo, en el cual se mantiene un gradiente de temperaturas constante. Determinar la distribución de temperaturas estacionarias resultante en el fluido y en la esfera.

Solución. La distribución de temperaturas satisface la ecuación $\Delta T = 0$ en todo el espacio, con las condiciones límites

$$T_1 = T_2, \quad \kappa_1 \partial T_1 / \partial r = \kappa_2 \partial T_2 / \partial r$$

para $r = R$ (siendo R el radio de la esfera; las magnitudes con sufijos 1 y 2 se refieren, respectivamente, a la esfera y al fluido), y $\operatorname{grad} T = \mathbf{A}$ en el infinito, en donde \mathbf{A} es el gradiente de temperaturas dado. Por la simetría del problema, \mathbf{A} es el único vector que puede determinar la solución requerida. Dichas soluciones de la ecuación de Laplace son el producto de una constante $\times \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ y constante $\times \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}(1/r)$. Observando también que la solución debe permanecer finita en el centro de la esfera, buscaremos las temperaturas T_1 y T_2 en las formas

$$T_1 = c_1 \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}, \quad T_2 = c_2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} / r^3 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}.$$

Las constantes c_1 y c_2 se determinan a partir de las condiciones para $r = R$, siendo el resultado

$$T_1 = \frac{3\kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}, \quad T_2 = \left[1 + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1 + 2\kappa_2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}.$$

§ 51. Conducción térmica en un medio infinito

Consideremos la conducción térmica en un medio infinito en reposo. El problema más general de este tipo es el siguiente. La distribución de temperaturas viene dada en todo el espacio en el instante inicial $t = 0$:

$$T = T_0(x, y, z) \text{ para } t = 0,$$

[†] Únicamente corresponde a una distribución estable de temperaturas la menor de las dos raíces de la ecuación (1) para $\lambda < \lambda_{\text{cr}}$.

[‡] Los valores correspondientes a una región esférica (de radio l) son $\lambda_{\text{cr}} = 3,32$, $\tau_{0,\text{cr}} = 1,47$, y a un cilindro infinito $\lambda_{\text{cr}} = 2,00$, $\tau_{0,\text{cr}} = 1,36$.

en donde T_0 es una función determinada de las coordenadas. Se necesita determinar la distribución de temperaturas en todos los instantes siguientes.

Desarrollemos la función T requerida como una integral de Fourier respecto a las coordenadas:

$$T = \int T_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3k, \quad d^3k = dk_x dk_y dk_z, \quad (51.1)$$

en donde los coeficientes del desarrollo vienen dados por

$$T_{\mathbf{k}}(t) = (2\pi)^{-3} \int T(x', y', z', t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') dV', \quad dV' = dx' dy' dz'.$$

Sustituyendo la expresión (51.1) en la ecuación (50.4), obtenemos

$$\int \left(\frac{dT_{\mathbf{k}}}{dt} + k^2 \chi T_{\mathbf{k}} \right) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3k = 0,$$

de aquí que

$$dT_{\mathbf{k}}/dt + k^2 \chi T_{\mathbf{k}} = 0.$$

Esta ecuación da $T_{\mathbf{k}}$ como función del tiempo:

$$T_{\mathbf{k}} = \exp(-k^2 \chi t) T_{0\mathbf{k}}.$$

Sustituyendo esta expresión en (51.1), tendremos

$$T = \int T_{0\mathbf{k}} \exp(-k^2 \chi t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3k. \quad (51.2)$$

Como debemos tener $T = T_0(x, y, z)$ para $t = 0$, es evidente que los coeficientes $T_{0\mathbf{k}}$ son los coeficientes del desarrollo de la función $T_0(x, y, z)$ como una integral de Fourier:

$$T_{0\mathbf{k}} = (2\pi)^{-3} \int T_0(x', y', z') \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') dV'.$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en (51.2), obtenemos

$$T = (2\pi)^{-3} \iint T_0(x', y', z') \exp(-k^2 \chi t) \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] dV' d^3k.$$

La integral extendida a \mathbf{k} es el producto de tres integrales simples, cada una de ellas de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-k_x^2 \chi t) \exp[ik_x(x - x')] dk_x = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-k_x^2 \chi t) \cos k_x(x - x') dk_x;$$

la integral análoga sustituyendo el coseno por el seno es cero, puesto que la función seno es impar. Utilizando la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) \cos \beta x dx = \sqrt{(\pi/\alpha)} \exp(-\beta^2/4\alpha) \quad (\alpha > 0),$$

tenemos, finalmente,

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{8(\pi \chi t)^{1/2}} \int T_0(x', y', z') \times \\ \exp\{-[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]/4\chi t\} dV'. \quad (51.3)$$

Esta fórmula nos da la solución completa del problema; determina la distribución de temperaturas en un instante cualquiera en función de la distribución inicial dada.

Si la distribución de temperaturas inicial es una función de una sola coordenada, x , entonces podemos integrar respecto a y' y z' en (51.3) y obtener

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{(\pi\chi t)}} \int_{-\infty}^{\infty} T_0(x') \exp[-(x-x')^2/4\chi t] dx'. \quad (51.4)$$

En el instante $t = 0$, supongamos que la temperatura es cero en todo el espacio, excepto en una capa infinitamente delgada situada en el plano $x = 0$, en donde es infinita de un modo tal que la cantidad de calor total [proporcional a $\int T_0(x)dx$] es finita. Dicha distribución puede representarse mediante una función delta: $T_0(x) = \text{constante} \times \delta(x)$. La integración de la fórmula (51.4) equivale entonces a sustituir x' por cero, cuyo resultado es

$$T(x, t) = \text{constante} \times \frac{1}{2\sqrt{(\pi\chi t)}} \exp(-x^2/4\chi t). \quad (51.5)$$

Análogamente, si en el instante inicial se concentra una cantidad finita de calor en un punto (el origen), la distribución de temperaturas en instantes siguientes viene dada por la fórmula

$$T(r, t) = \text{constante} \times \frac{1}{8(\pi\chi t)^{1/2}} \exp(-r^2/4\chi t), \quad (51.6)$$

en donde r es la distancia desde el origen. En el transcurso del tiempo, la temperatura en el punto $r = 0$ decrece proporcionalmente a $t^{-3/2}$. La temperatura en el espacio que lo rodea se eleva de modo correspondiente y la región en donde la temperatura es apreciablemente distinta de cero se expande (figura 29). El modo de esta expansión viene determinado, principalmente, por el factor exponencial en (51.6). Vemos que el orden de magnitud l del tamaño de esta región viene dado por $l^2/\chi t \sim 1$, de aquí

$$l \sim \sqrt{(\chi t)}, \quad (51.7)$$

es decir, l aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada del tiempo.

También puede interpretarse la fórmula (51.7) de un modo ligeramente distinto. Sea l el orden de magnitud de las dimensiones de un cuerpo. Entonces podemos decir que, si el cuerpo se calienta de modo no uniforme, el orden de magnitud τ del tiempo requerido para que la temperatura sea más o menos la misma en todo el cuerpo es

$$\tau \sim l^2/\chi. \quad (51.8)$$

El tiempo τ , que puede denominarse *tiempo de relajación* para la conducción térmica, es proporcional al cuadrado de la dimensión del cuerpo e inversamente proporcional a la conductividad termométrica.

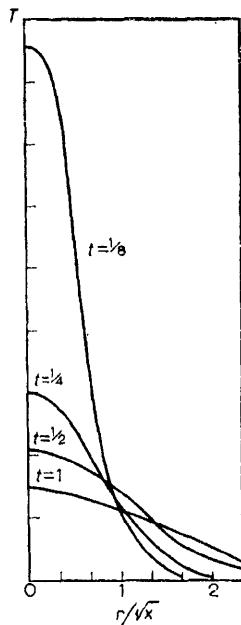


FIG. 29

El proceso de conducción térmica descrito por las fórmulas obtenidas anteriormente tiene la propiedad de que el efecto que produce una perturbación cualquiera se propaga instantáneamente a través de todo el espacio. Se ve en la fórmula (51.5) que el calor procedente de una fuente puntual se propaga de tal manera que, incluso en el instante siguiente, la temperatura del medio es cero únicamente en el infinito. Esta propiedad es válida también para un medio en el que la conductividad termométrica χ depende de la temperatura, con tal que χ no se anule en algún punto. Sin embargo, si χ es una función de la temperatura que se anula cuando $T = 0$, se retarda la propagación del calor y en cada instante el efecto de una perturbación determinada se extiende sólo a una región finita del espacio (supondremos que la temperatura fuera de esta región puede tomarse también como cero). Este resultado, lo mismo que la solución de los problemas siguientes, se debe a YA. B. ZEL'DOVICH y A. S. KOMPANEETS (1950).

PROBLEMAS

Problema 1. El calor específico y la conductividad térmica de un medio varían proporcionalmente a ciertas potencias de la temperatura, mientras que su densidad es constante. Determinar el modo en que la temperatura tiende hacia cero cerca del límite de

la región que, en un instante dado, ha recibido un calor que se propaga a partir de una fuente arbitraria (siendo cero la temperatura del exterior de dicha región).

Solución. Si κ y c_p varían proporcionalmente a potencias de la temperatura, lo mismo es cierto en el caso de la conductividad termométrica χ y en el caso de la entalpía

$$w = \int c_p dT$$

(omitimos una constante en w). Por tanto, podemos escribir $\chi = aW^n$, en donde designamos por $W = \rho w$ la entropía por unidad de volumen. Entonces, la ecuación de conducción térmica

$$\rho c_p \partial T / \partial t = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T)$$

se transforma en

$$\partial W / \partial t = a \operatorname{div}(W^n \operatorname{grad} W). \quad (1)$$

Durante un intervalo breve de tiempo, puede considerarse como plana una pequeña porción del límite de la región y su velocidad de desplazamiento en el espacio, v , puede suponerse constante. De acuerdo con ello, busquemos una solución de la ecuación (1) en la forma $W = W(x - vt)$, siendo x la coordenada en la dirección perpendicular a la frontera. Tenemos así

$$-v dW/dx = ad(W^n dW/dx)/dx, \quad (2)$$

de aquí que, encontraremos después de dos integraciones, que W se anula de una forma como

$$W \sim |x|^{1/n}, \quad (3)$$

en donde $|x|$ es la distancia respecto a los límites o fronteras de la región caliente. Esto confirma también nuestra conclusión de que si $n > 0$, la región calentada tiene un límite exterior, en el cual W y T son cero. Si $n < 0$, entonces la ecuación (2) no tiene ninguna solución que se anule a una distancia finita, es decir, el calor se distribuye por todo el espacio en todo instante.

Problema 2. Un medio semejante al descrito en el problema 1 tiene en el instante inicial una cantidad de calor Q por unidad de área concentrada sobre el plano $x = 0$, mientras que $T = 0$ en todos los demás puntos. Determinar la distribución de temperaturas en los instantes subsiguientes.

Solución. En el caso monodimensional, la ecuación (1) del problema 1 es

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(W^n \frac{\partial W}{\partial x} \right). \quad (1)$$

A partir de los parámetros Q y a y de las variables x y t que tenemos a nuestra disposición, solamente podemos formar una combinación adimensional,

$$\xi = x/(Q^n at)^{1/(2+n)}; \quad (2)$$

Q y a tienen las dimensiones erg/cm^2 y $(\text{cm}^2/\text{s})(\text{cm}^3/\text{erg})^n$. De aquí que la función requerida $W(x, t)$ deba ser de la forma

$$W = (Q^2/at)^{1/(2+n)} f(\xi), \quad (3)$$

en donde la función adimensional $f(\xi)$ se multiplica por una magnitud que tiene las dimensiones erg/cm³. Con esta sustitución la ecuación (1) da

$$(2+n)\frac{d}{d\xi} \left(f^n \frac{df}{d\xi} \right) + \xi \frac{df}{d\xi} + f = 0.$$

Esta ecuación diferencial ordinaria tiene una solución simple que satisface las condiciones del problema, a saber

$$f(\xi) = [\tfrac{1}{2}n(\xi_0^2 - \xi^2)/(2+n)]^{1/n}, \quad (4)$$

siendo ξ_0 una constante de integración.

Para $n > 0$, esta fórmula da la distribución de temperaturas en la región comprendida entre los planos $x = \pm x_0$ correspondientes a la ecuación $\xi = \pm \xi_0$; fuera de esta región, $W = 0$. De aquí se deduce que la región caliente se extiende o expansiona con el tiempo de un modo dado por $x_0 = \text{constante} \times t^{1/(2+n)}$. La constante ξ_0 se determina por la condición de que la cantidad de calor total es constante:

$$Q = \int_{-x_0}^{x_0} W dx = Q \int_{-\xi_0}^{\xi_0} f(\xi) d\xi, \quad (5)$$

de aquí tenemos

$$\xi_0^{2+n} = \frac{(2+n)^{1+n} 2^{1-n}}{n\pi^{n/2}} \frac{\Gamma^n (\tfrac{1}{2} + 1/n)}{\Gamma^n (1/n)} \quad (6)$$

para $n = -v < 0$, escribamos la solución en la forma

$$f(\xi) = \left[\frac{v}{2(2-v)} (\xi_0^2 + \xi^2) \right]^{-1/v} \quad (7)$$

Aquí el calor se distribuye a través de todo el espacio y a distancias grandes, W disminuye proporcionalmente a $x^{-2/v}$. Esta solución es válida sólo para $v < 2$; para $v \geq 2$, la integral de normalización (5) (que ahora se extiende hasta $\pm \infty$) diverge, lo cual significa físicamente que el calor se conduce de modo instantáneo hasta el infinito. Para $v < 2$, la constante ξ_0 en (7) viene dada por

$$\xi_0^{2-v} = \frac{2(2-v)\pi^{v/2}}{v} \frac{\Gamma^v (1/v - \tfrac{1}{2})}{\Gamma^v (1/v)}. \quad (8)$$

Finalmente, para $n \rightarrow 0$, tenemos $\xi_0 \rightarrow 2/\sqrt{n}$, y la solución dada por la fórmula (3) del problema 1, (1) y (4) es

$$W = \lim_{n \rightarrow 0} \left\{ \frac{Q}{2\sqrt{(\pi at)}} \left(1 - n \frac{x^2}{4at} \right)^{1/n} \right\} = \frac{Q}{2\sqrt{(\pi at)}} \exp(-x^2/4at),$$

de acuerdo con la fórmula (5.5).

§ 52. Conducción térmica en un medio finito

En los problemas de conducción térmica en un medio infinito, la distribución inicial de temperaturas no basta para determinar una solución única y deben darse también las condiciones límites en la superficie del medio.

Consideremos la conducción térmica en un semiespacio ($x > 0$), empezando con el caso en el que se mantiene una temperatura constante dada en el plano límite $x = 0$. Podemos tomar arbitrariamente esta temperatura como cero. En el instante inicial, la distribución de temperatura a través de todo el medio viene dada como antes. Por tanto, las condiciones límites e iniciales son

$$T = 0 \text{ para } x = 0; T = T_0(x, y, z) \text{ para } t = 0 \quad y \quad x > 0. \quad (52.1)$$

La solución de la ecuación de conducción térmica con estas condiciones puede reducirse mediante el siguiente artificio a la resolución correspondiente al caso de un medio infinito en todas direcciones. Imaginemos que el medio se extiende a ambos lados del plano $x = 0$, viiniendo dada la distribución de temperaturas para $t = 0$ y $x < 0$ por $-T_0$. Es decir, la distribución de temperaturas en el instante inicial viene dada en todo el espacio por una función impar de x :

$$T_0(-x, y, z) = -T_0(x, y, z). \quad (52.2)$$

Se deduce a partir de la ecuación (52.2) que $T_0(0, y, z) = -T_0(0, y, z) = 0$, es decir, se satisface automáticamente la condición límite necesaria (52.1) para $t = 0$, y es evidente a partir también de la simetría que continuará satisfaciéndose para todo valor de t .

Así pues, el problema se deduce a la resolución de la ecuación (50.4) en medio infinito con una función inicial $T_0(x, y, z)$ que satisface (52.2) y sin condiciones límites. De aquí que podemos utilizar la fórmula general (51.3). Dividamos el intervalo de integración respecto a x' en (51.3) en dos partes, desde $-\infty$ hasta 0 y desde 0 hasta ∞ . Utilizando la relación (52.2), tendremos entonces

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) = & \frac{1}{8(\pi\chi t)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} T_0(x', y', z') \times \\ & \left\{ \exp[-(x-x')^2/4\chi t] - \exp[-(x+x')^2/4\chi t] \right\} \times \\ & \exp\{-[(y-y')^2 + (z-z')^2]/4\chi t\} dx' dy' dz'. \end{aligned} \quad (52.3)$$

Esta fórmula da la solución del problema, puesto que determina la temperatura en todo el medio, es decir, para todo $x > 0$.

Si la distribución inicial de temperaturas es una función únicamente de x , la fórmula (52.3) se transforma en

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{(\pi\chi t)}} \int_0^{\infty} T_0(x') \left\{ \exp[-(x-x')^2/4\chi t] - \exp[-(x+x')^2/4\chi t] \right\} dx'. \quad (52.4)$$

Como ejemplo, consideremos el caso en el que la temperatura inicial es una constante determinada en todas partes, excepto en $x = 0$. Sin pérdida de generalidad, esta constante puede considerarse como -1 . La temperatura en el plano $x = 0$ es siempre cero. Se obtiene la solución apropiada sustituyendo $T_0(x) = -1$ en (52.4). La integral en (52.4) es la suma de dos integrales, en cada una de las cuales se hace un cambio de variable de la forma $\xi = (x' - x)/2\sqrt{(\chi t)}$. Entonces se obtiene para $T(x, t)$ la expresión

$$T(x, t) = \frac{1}{2}\{\operatorname{erf}[-x/2\sqrt{(\chi t)}] - \operatorname{erf}[x/2\sqrt{(\chi t)}]\},$$

en donde la función $\operatorname{erf} x$ se define como

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi, \quad (52.5)$$

y se denomina *función error* (obsérvese que $\operatorname{erf} \infty = 1$). Puesto que $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf} x$, tenemos, finalmente,

$$T(x, t) = -\operatorname{erf}[x/2\sqrt{(\chi t)}]. \quad (52.6)$$

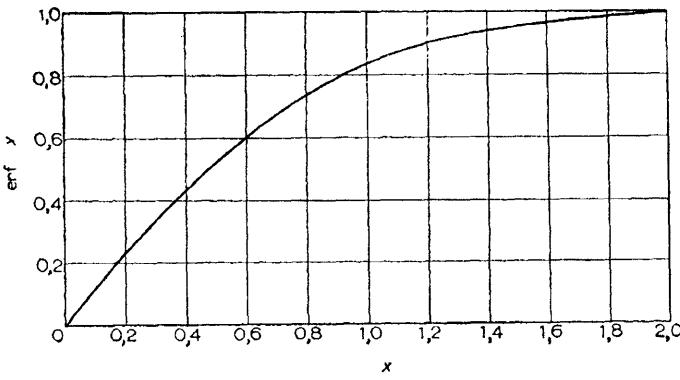


FIG. 30

La figura 30 muestra un gráfico de la función $\operatorname{erf} x$. La distribución de temperaturas resulta más uniforme en el espacio a lo largo del transcurso del tiempo. Esto ocurre de tal modo que cualquier valor dado de la temperatura se «mueve» proporcionalmente a \sqrt{t} . Este último resultado es evidentemente cierto. En efecto, el problema en consideración se caracteriza por tener un solo parámetro, la diferencia inicial de temperaturas T_0 entre el plano límite y el resto del espacio; en el estudio anterior esta diferencia se tomó arbitrariamente como una unidad. A partir de los parámetros T_0 y χ y las variables x y t a nuestra disposición, podemos formar sólo una combinación adimensional, $x/\sqrt{(\chi t)}$; de aquí que resulta evidente que la distribución de tempera-

turas requerida debe venir dada por una función de la forma $T = T_0[x/\sqrt(\chi t)]$.

Consideremos ahora el caso en el que la superficie que limita el medio es un aislante térmico. Es decir, no existe flujo térmico en el plano $x = 0$, de modo que debemos tener $\partial T/\partial x = 0$. Así tenemos las siguientes condiciones, tanto límites como iniciales:

$$\partial T/\partial x = 0 \text{ para } x = 0; \quad T = T_0(x, y, z) \text{ para } t = 0, \quad x > 0. \quad (52.7)$$

Para hallar la solución procederemos como en el problema anterior. Es decir, imaginaremos de nuevo que el medio se extienda a ambos lados del plano $x = 0$, y que la distribución de temperatura inicial esta vez es simétrica respecto al plano. En otras palabras, suponemos ahora que $T_0(x, y, z)$ es una función par de x :

$$T_0(-x, y, z) = T_0(x, y, z). \quad (52.8)$$

Entonces, $\partial T_0(x, y, z)/\partial x = -\partial T_0(-x, y, z)/\partial x$, y $\partial T_0/\partial x = 0$ para $x = 0$. Es evidente a partir de la simetría que esta condición se continuará satisfaciendo para todo valor de t .

Repetiendo los cálculos anteriores, pero utilizando (52.8) en lugar de (52.2), tenemos la solución general del problema en la forma

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{8(\pi\chi t)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} T_0(x', y', z') \times \\ \{ \exp[-(x' - x)^2/4\chi t] + \exp[-(x' + x)^2/4\chi t] \} \times \\ \exp\{-[(y' - y)^2 + (z' - z)^2]/4\chi t\} dx' dy' dz'. \quad (52.9)$$

Si T_0 es una función únicamente de x , entonces,

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{(\pi\chi t)}} \int_0^{\infty} T_0(x') \{ \exp[-(x' - x)^2/4\chi t] + \exp[-(x' + x)^2/4\chi t] \} dx'. \quad (52.10)$$

Consideremos ahora aquellos problemas con condiciones límites de un tipo diferente y que a la vez nos permita resolver de un modo general la ecuación de la conducción térmica. Supongamos que un flujo térmico (que es una función determinada del tiempo) entra en un medio a través de su plano frontera $x = 0$. Las condiciones límites e iniciales son

$$-\kappa \partial T/\partial x = q(t) \text{ para } x = 0; \quad T = 0 \text{ para } t = -\infty, \quad x > 0, \quad (52.11)$$

siendo $q(t)$ una función determinada.

Primero resolveremos un problema auxiliar, en el cual $q(t) = \delta(t)$. Es fácil ver que este problema es equivalente físicamente al de propagación del calor en un medio infinito desde una fuente puntual que genera una cantidad dada de calor. La condición límite $-\kappa \partial T/\partial x = \delta(t)$ para $x = 0$ significa

físicamente que por cada unidad de área del plano $x = 0$ entra una unidad de calor en el instante $t = 0$. En un problema con la condición $T = 2\delta(x)/\rho c_p$ para $t = 0$, se concentra una cantidad de calor

$$\int \rho c_p T dx = 2$$

en esta área en el tiempo $t = 0$; la mitad de la misma se propaga entonces en el sentido positivo del eje de las x y la otra mitad en el sentido negativo. De aquí resulta claro que las soluciones de los dos problemas son idénticas y así hallamos a partir de (51.5) que $\kappa T(x, t) = \sqrt{(\chi/\pi t)} \exp(-x^2/4\chi t)$.

Como las ecuaciones son lineales, los efectos que producen las entradas de calor en momentos distintos son simplemente aditivos y, por tanto, la solución general que se busca de la ecuación de conducción térmica con las condiciones (52.11) es

$$\kappa T(x, t) = \int_{-\infty}^t \sqrt{\frac{\chi}{\pi(t-\tau)}} q(\tau) \exp[-x^2/4\chi(t-\tau)] d\tau. \quad (52.12)$$

En particular, la temperatura en el plano $x = 0$ varía de acuerdo con

$$\kappa T(0, t) = \int_{-\infty}^t \sqrt{\frac{\chi}{\pi(t-\tau)}} q(\tau) d\tau. \quad (52.13)$$

Utilizando estos resultados, podemos obtener de una vez la solución de otro problema, aquél en el cual la temperatura T en el plano $x = 0$ es una función determinada del tiempo:

$$T = T_0(t) \text{ para } x = 0; \quad T = 0 \text{ para } t = -\infty, \quad x > 0. \quad (52.14)$$

Para ello, observemos que si una determinada función $T(x, t)$ satisface la ecuación de la conducción térmica, entonces también la satisface su derivada $\partial T / \partial x$. Derivando (52.12) respecto a x , obtenemos

$$-\kappa \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \int_{-\infty}^t \frac{xq(\tau)}{2\sqrt{[\pi\chi(t-\tau)^3]}} \exp[-x^2/4\chi(t-\tau)] d\tau.$$

Esta función satisface la ecuación de la conducción térmica y [por (52.11)] su valor para $x = 0$ es $q(t)$; por tanto, da la solución buscada del problema, cuyas condiciones son (52.14). Escribiendo $T(x, t)$ en lugar de $-\kappa \partial T / \partial x$ y $T_0(t)$ en lugar de $q(t)$, tenemos así

$$T(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{(\pi\chi)}} \int_{-\infty}^t \frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}} \exp[-x^2/4\chi(t-\tau)] d\tau. \quad (52.15)$$

El flujo térmico $q = -\kappa \partial T / \partial x$ a través del plano límite $x = 0$ se encuentra mediante un cálculo sencillo que vale

$$q(t) = \frac{\kappa}{\sqrt{(\pi\chi)}} \int_{-\infty}^t \frac{dT_0(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}}. \quad (52.16)$$

Esta fórmula es la inversa de (52.13).

Se obtiene fácilmente la solución al importante problema en el que la temperatura en el plano frontera $x = 0$ es una función periódica determinada del tiempo $T = T_0 e^{-i\omega t}$ para $x = 0$. Resulta claro que la distribución de temperaturas en todo el espacio dependerá también del tiempo a través de un factor $e^{-i\omega t}$. Puesto que la ecuación monodimensional de la conducción térmica es formalmente idéntica a la ecuación (24.3) que determina el movimiento de un fluido viscoso alrededor de un plano oscilante, podemos describir inmediatamente la distribución de temperaturas buscadas por analogía con (24.4):

$$T = T_0 \exp[-x\sqrt{(\omega/2\chi)}] \exp\{i[x\sqrt{(\omega/2\chi)} - \omega t]\}. \quad (52.17)$$

Vemos que las oscilaciones de la temperatura en la superficie límite se propagan como *ondas térmicas* que se ven rápidamente amortiguadas desde el interior del medio.

Otro tipo de problema de conducción térmica comprende aquellos que se refieren a la velocidad a la cual se iguala la temperatura en un cuerpo finito que no tiene una temperatura uniforme y cuya superficie se mantiene en condiciones fijas. Para resolver estos problemas mediante métodos generales, busquemos una solución de la ecuación de la conducción térmica en la forma $T = T_n(x, y, z)e^{-\lambda_n t}$, siendo λ_n una constante. Para la función T_n tenemos la ecuación

$$\chi \Delta T_n = -\lambda_n T_n. \quad (52.18)$$

Esta ecuación, con las condiciones límites dadas, tiene soluciones no nulas únicamente para determinados valores λ_n , sus *valores propios o autovalores (eigenvalues)*. Todos los valores propios son reales y positivos y las funciones correspondientes $T_n(x, y, z)$ forman un conjunto completo de funciones ortogonales. Supongamos que la distribución de temperaturas en el instante inicial viene dada por la función $T_0(x, y, z)$. Desarrollándola en serie de funciones T_n ,

$$T_0(x, y, z) = \sum c_n T_n(x, y, z),$$

obtenemos la solución buscada en la forma

$$T(x, y, z, t) = \sum c_n T_n(x, y, z) \exp(-\lambda_n t). \quad (52.19)$$

La velocidad de igualación de temperaturas viene determinada evidentemente por el término correspondiente al menor valor de λ_n , que denominaremos λ_1 . El «tiempo de igualación» puede definirse como $\tau = 1/\lambda_1$.

PROBLEMAS

Problema 1. Determina la distribución de temperaturas alrededor de una superficie esférica (de radio R) cuya temperatura es una función determinada $T_0(t)$ del tiempo.

Solución. La ecuación de conducción térmica para una distribución de temperaturas con simetría central es, en coordenadas esféricas, $\partial T / \partial t = (\chi/r) \partial^2(rT) / \partial r^2$. La sustitución $rT(r, t) = F(r, t)$ la reduce a $\partial F / \partial t = \chi \partial^2 F / \partial r^2$, que es la ecuación de conducción térmica monodimensional ordinaria. De aquí que la solución buscada pueda encontrarse a partir de (52.15) y vale

$$T(r, t) = \frac{R(r-R)}{2r\sqrt{(\pi\chi)}} \int_{-\infty}^t \frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \exp[-(r-R)^2/4\chi(t-\tau)] d\tau.$$

Problema 2. El mismo que el problema 1, pero en el caso en que la temperatura de la superficie esférica es $T_0 e^{-i\omega t}$.

Solución. Análogamente a (52.17), obtenemos

$$T = T_0 \exp(-i\omega t) (R/r) \exp[-(1-i)(r-R)\sqrt{(\omega/2\chi)}].$$

Problema 3. Determinar el tiempo de igualación de temperaturas para un cubo de lado a cuya superficie (a) se mantiene a una temperatura $T = 0$, (b) es un aislante.

Solución. En el caso (a) el valor más pequeño de λ viene dado por la siguiente solución de la ecuación (52.18):

$$T_1 = \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/a) \sin(\pi z/a)$$

(estando el origen en una esquina del cubo), cuando $\tau = 1/\lambda_1 = a^2/3\pi^2\chi$. En el caso (b) tenemos $T_1 = \cos(\pi x/a)$ (o la misma función de y o z), cuando $\tau = a^2/\pi^2\chi$.

Problema 4. El mismo que el problema 3, pero en el caso de una esfera de radio R .

Solución. El menor valor de λ viene dado por la solución con simetría central de (52.18) $T_1 = (1/r) \sin kr$; en el caso (a), $k = \pi/R$ y $\tau = 1/\chi k^2 = R^2/\chi\pi^2$. En el caso (b), k es la raíz más pequeña no nula de la ecuación $kR = \operatorname{tg} kr$, de aquí que encontremos que $kR = 4,493$ y $\tau = 0,050 R^2/\chi$.

§ 53. Ley de semejanza para la transferencia térmica

Los procesos de transferencia térmica en un fluido son más complejos que los correspondientes a los sólidos, debido a que el fluido puede estar en movimiento. Un cuerpo caliente sumergido en un fluido móvil se enfriará con una rapidez mucho mayor que si el fluido estuviese en reposo, en donde la transferencia térmica se realizaría únicamente por conducción. El movimiento de un fluido que se calienta de forma no uniforme se denomina *convección*.

Supondremos que las diferencias de temperaturas en el fluido son tan pequeñas que pueden suponerse independientes de la temperatura, aunque al mismo tiempo sean tan grandes que podamos despreciar en comparación con ellas las variaciones de temperatura producidas por el calor procedente de la disipación de energía debida al rozamiento interno (ver § 55). Entonces puede omitirse el término de viscosidad en la ecuación (50.2), dejando

$$\partial T / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T, \quad (53.1)$$

en donde $\chi = \kappa / pc$, es la conductividad termométrica. Esta ecuación, junto con la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad, determina completamente la convección en las condiciones consideradas.

En lo que sigue estaremos interesados únicamente en el flujo convectivo estacionario.[†] Entonces todas las derivadas temporales son nulas y tenemos las siguientes ecuaciones fundamentales:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T, \quad (53.2)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla(p/\rho) + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (53.3)$$

Este sistema de ecuaciones, en el cual las funciones incógnitas son \mathbf{v} , T y p/ρ , contiene sólo dos parámetros constantes, ν y χ . Además, la solución de estas ecuaciones depende también, a través de las condiciones límites, de una cierta longitud característica l , de la velocidad U y de la diferencia de temperaturas $T_1 - T_0$. Los dos primeros términos vienen dados por las dimensiones de los cuerpos sólidos que aparecen en el problema y por la velocidad de la corriente principal, mientras que el tercero viene dado por la diferencia de temperaturas entre el fluido y dichos cuerpos.

Al formar magnitudes adimensionales a partir de los parámetros a nuestra disposición, se plantea la cuestión de las dimensiones que han de adscribirse a la temperatura. Para resolver esto, observemos que la temperatura viene determinada por la ecuación (53.2), que es lineal y homogénea en T . De aquí que la temperatura pueda multiplicarse por cualquier constante y seguirá satisfaciendo las ecuaciones. En otras palabras, la unidad de medida de temperaturas puede escogerse arbitrariamente. La posibilidad de esta transformación de la temperatura puede tenerse en cuenta formalmente, dando una dimensión propia sin relacionarla con las de las demás magnitudes. Esta dimensión puede medirse en grados, que es la unidad normal de temperatura.

Así pues, la convección en las condiciones mencionadas anteriormente está caracterizada por cinco parámetros, cuyas dimensiones son $\nu = \chi = \text{cm}^2/\text{s}$, $U = \text{cm/s}$, $l = \text{cm}$, $T_1 - T_0 = \text{grados}$. A partir de éstos podemos formar dos

[†] Con objeto de que la convección sea estable, es necesario, estrictamente hablando, que los cuerpos sólidos en contacto con el fluido contengan fuentes de calor que los mantengan a temperatura constante.

combinaciones adimensionales independientes. Éstas pueden ser el número de Reynolds, $R = Ul/\nu$, y el *número de Prandtl*, definido como

$$P = \nu/\chi. \quad (53.4)$$

Cualquier otra combinación adimensional puede expresarse en función de R y P .^t

El número de Prandtl es exactamente una constante del material y no depende de las propiedades del flujo. En el caso de los gases es siempre del orden de la unidad. El valor de P , en el caso de los líquidos, varía más ampliamente. Si son líquidos muy viscosos puede ser muy grande. Citamos a continuación algunos valores de P a 20°C para diversas sustancias:

Aire	0,733
Agua	6,75
Alcohol	16,6
Glicerina	7250
Mercurio	0,044

Como en § 19, podemos ahora obtener la conclusión de que en el caso de convección estacionaria (del tipo descrito), las distribuciones de temperatura y velocidades son de la forma:

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = f\left(\frac{r}{l}, R, P\right), \quad \frac{\mathbf{v}}{U} = \mathbf{f}\left(\frac{r}{l}, R\right). \quad (53.5)$$

La función adimensional que da la distribución de temperaturas depende de los parámetros R y P , pero la distribución de velocidades depende únicamente de R , puesto que está determinada por las ecuaciones (53.3), en las que no interviene la conductividad. Dos flujos convectivos son semejantes si son iguales sus números de Reynolds y de Prandtl.

La transferencia térmica entre cuerpos sólidos y el fluido está normalmente caracterizada por el *coeficiente de transferencia térmica* α , definido por

$$\alpha = q/(T_1 - T_0), \quad (53.6)$$

en donde q es la densidad de flujo térmico a través de la superficie y $T_1 - T_0$ es una diferencia de temperaturas característica entre el cuerpo sólido y el fluido. Si se conoce la distribución de temperaturas en el fluido, el coeficiente de transferencia térmica se encuentra fácilmente calculando la densidad de flujo térmico $q = -\kappa \partial T / \partial n$ en el límite de fluido (tomándose la derivada a lo largo de la normal a la superficie).

El coeficiente de transferencia térmica no es una magnitud adimensional.

^t A veces se utiliza el *número de Péclét*, se define como $Ul/\chi = RP$.

Una magnitud adimensional que caracteriza la transferencia térmica es la que se denomina *número de Nusselt*:[†]

$$N = \alpha l / \kappa. \quad (53.7)$$

A partir de razonamientos de semejanza se deduce que, en el caso de un tipo determinado del flujo convectivo, el número de Nusselt es una función definida de los números de Reynolds y de Prandtl únicamente:

$$N = f(R, P). \quad (53.8)$$

Esta función es muy simple en el caso de la convección para números de Reynolds suficientemente pequeños. Estos corresponden a velocidades también reducidas. De aquí que, en primera aproximación, podemos despreciar el término de velocidad en la ecuación (53.2), de modo que la distribución de temperaturas está determinada por la ecuación $\Delta T = 0$, es decir, la ecuación ordinaria de conducción térmica estacionaria en un medio en reposo. El coeficiente de transferencia térmica no puede depender entonces de la velocidad ni de la viscosidad y así debemos tener simplemente

$$N = \text{constante}, \quad (53.9)$$

y al calcular la constante del fluido puede suponerse que está en reposo.

PROBLEMA

Determinar la distribución de temperaturas en un fluido móvil con flujo de Poiseuille a lo largo de una tubería de sección recta circular cuando la temperatura de las paredes varía linealmente a lo largo del tubo.

Solución. Las condiciones del flujo son las mismas en todas las secciones rectas de la tubería y podemos buscar una distribución de temperaturas que tengan la forma $T = Az + f(r)$, en donde Az es la temperatura de la pared; utilizaremos coordenadas cilíndricas con el eje z situado a lo largo del eje de la tubería. Para la velocidad tenemos, por (17.9), $v_z = v = 2v_m(1 - r^2/R^2)$, siendo v_m la velocidad media. Sustituyendo en (53.2) encontramos

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) = \frac{2v_m A}{\chi} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right].$$

La solución de esta ecuación que es finita para $r = 0$ y cero para $r = R$ es

$$f(r) = - \frac{v_m A r^2}{2\chi} \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right].$$

La densidad de flujo térmico es

$$q = \kappa [\partial T / \partial r]_R = \frac{1}{2} \rho c_p v_m R A.$$

Y es independiente de la conductividad térmica.

[†] También se utiliza el «número de transferencia de calor» adimensional, definido como $K_h = \alpha / \rho c_p U = N/RP$.

§ 54. Transferencia térmica en una capa límite

La distribución de temperaturas en un fluido con números de Reynolds muy elevados presenta propiedades semejantes a las de la distribución de velocidades. Valores muy grandes de R son equivalentes a viscosidades muy pequeñas. Pero puesto que el número $P = \nu/\chi$ no es pequeño, la conductividad termométrica χ debe suponerse pequeña, lo mismo que ν . Esto corresponde al hecho de que, en caso de velocidades suficientemente elevadas, el fluido puede considerarse aproximadamente como un fluido ideal y en un fluido de este tipo están ausentes tanto el rozamiento interno como la conducción térmica.

Sin embargo, este punto de vista debe abandonarse de nuevo en el caso de una capa límite, puesto que ni la condición extrema de ausencia de deslizamiento ni las temperaturas iguales se verán satisfechas. Por tanto, en la capa límite se produce tanto una rápida disminución de la velocidad como una variación rápida de la temperatura del fluido hasta un valor igual al de la temperatura de la superficie sólida. La capa límite está caracterizada por la presencia de gradientes grandes, tanto de la velocidad como de la temperatura.

Es fácil ver que, en el flujo que rodea un cuerpo aislante (con R grande), el calentamiento del fluido se produce casi exclusivamente en la estela, mientras que fuera de la misma la temperatura del fluido no varía. Por ello, cuando R es grande, los procesos de conducción térmica en la corriente principal carecen de importancia. De aquí que la temperatura varíe únicamente en la región alcanzada por el fluido que ha sido calentado en la capa límite. Sabemos (ver § 34) que las líneas de corrientes procedentes de la capa límite entran en la corriente principal únicamente más allá de la línea de separación, en donde pasan a la región de la estela turbulenta. Sin embargo, de la estela no emergen en absoluto líneas de corriente. Así pues, el fluido que rodea la superficie del cuerpo caliente, pero que está dentro de la capa límite, pasa enteramente a la estela y permanece allí. Vemos que el calor resulta distribuido a través de las regiones en donde la vorticidad no es nula.

En la propia región turbulenta, se produce un intercambio de calor muy considerable que se debe a la mezcla intensiva del fluido característico de cualquier flujo turbulento. Este mecanismo de transferencia térmica puede denominarse *conducción turbulenta* y está caracterizado por un coeficiente κ_{turb} , del mismo modo que introdujimos la viscosidad turbulenta ν_{turb} en § 31. La conductividad termométrica turbulenta se define, en órdenes de magnitud, por la misma fórmula que ν_{turb} (31.2): $\chi_{turb} \sim l\Delta u$.

Así pues, los procesos de transferencia térmica en flujo laminar y turbulento son fundamentalmente distintos. En el caso límite de viscosidad y conductividad térmica muy pequeñas, en el flujo laminar, los procesos de transferencia térmica están ausentes y la temperatura del fluido es constante en

todos los puntos del espacio. Sin embargo, en el flujo turbulento, incluso en el mismo caso límite, se produce transmisión de calor y rápidamente se iguala la temperatura en las diversas partes de la corriente.

Debe mencionarse que, cuando hablamos de la temperatura de un fluido en movimiento turbulento, debemos entender el promedio temporal de la temperatura del fluido. La temperatura real en un punto cualquiera del espacio sufre variaciones muy irregulares respecto al tiempo, de modo semejante a las de la velocidad.

Empecemos considerando la transferencia térmica en una capa límite laminar. Las ecuaciones del movimiento (39.10) se ven inalteradas. Debe ahora realizarse una simplificación semejante en el caso de la ecuación (53.2). Escrita explícitamente esta ecuación, es (puesto que todas las magnitudes son independientes de la coordenada z)

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

En el segundo miembro podemos despreciar la derivada $\partial^2 T / \partial x^2$ en comparación con $\partial^2 T / \partial y^2$, quedando así

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (54.1)$$

Comparando esta ecuación con la primera de (39.10), vemos que si el número de Prandtl es del orden de la unidad, entonces el orden de magnitud δ del espesor de la capa en el que la velocidad v_z disminuye y la temperatura T varía, vendrá dado nuevamente por las fórmulas obtenidas en § 39, es decir, será inversamente proporcional a \sqrt{R} . El flujo térmico $q = -\kappa \partial T / \partial n$ es igual en orden de magnitud a $\kappa(T_1 - T_0)/\delta$. De aquí obtenemos la conclusión de que q , y, por tanto, el número de Nusselt, es proporcional a \sqrt{R} . La dependencia de N con P no está determinada. Así pues, tenemos

$$N = \sqrt{R} f(P). \quad (54.2)$$

A partir de esta expresión se deduce, en particular, que el coeficiente de transferencia térmica α es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la dimensión l del cuerpo.

Consideremos ahora la transferencia térmica en una capa límite turbulenta. Aquí es conveniente, como en § 42, considerar una corriente turbulenta infinita plano-paralela que fluye a lo largo de una superficie plana infinita. El gradiente trasversal de temperaturas dT/dy en dicho flujo puede determinarse a partir del mismo tipo de razonamiento dimensional que el que hemos utilizado para hallar el gradiente de velocidades du/dy . Designaremos por q la densidad de flujo térmico a lo largo del eje y producida por el gradiente de temperaturas. Este flujo es una constante (independiente

de y), como el flujo del impulso σ , y puede considerarse de modo semejante como un parámetro dado que determina las propiedades del flujo. Además, tenemos como parámetros también la densidad ρ y el calor específico c_p , por unidad de masa. En lugar de σ utilizaremos como parámetro v_* ; q y c_p tienen las dimensiones de $\text{erg}/\text{cm}^2 \text{s} = \text{g}/\text{s}^3$ y $\text{erg}/\text{g grado} = \text{cm}^2/\text{s}^2 \text{grado}$. La viscosidad y la conductividad térmica no pueden aparecer explícitamente en dT/dy cuando R es suficientemente grande.

Debido a la homogeneidad de las ecuaciones respecto a la temperatura, ya mencionada en § 53, esta última puede variarse por cualquier factor sin violar dichas ecuaciones. Cuando la temperatura se modifica de este modo, el flujo térmico debe cambiar, sin embargo, en el mismo factor. De aquí que q y T deban ser proporcionales. A partir de q , v_* , ρ , c_p e y podemos formar solamente la magnitud proporcional a q que tenga las dimensiones grado/cm , a saber $q/\rho c_p v_* y$. Así pues, tendremos $dT/dy = \beta q/\rho c_p v_* y$, siendo β una constante numérica que debe determinarse experimentalmente.[†] De aquí

$$T = (\beta q/b\rho c_p v_*)(\log y + c). \quad (54.3)$$

Así pues, la temperatura, como la velocidad, varía logarítmicamente. La constante de integración c que aparece aquí debe determinarse a partir de las condiciones de la subcapa viscosa, como en el caso de la deducción de (42.7). La diferencia de temperaturas entre el fluido de un punto determinado y la pared (que tomaremos arbitrariamente como temperatura cero) se compone de la variación de temperatura a través de la capa turbulenta y la variación correspondiente a través de la subcapa viscosa. La ley logarítmica (54.3) está determinada únicamente por la primera de ellas. De aquí, que si escribimos (54.3) en la forma $T = (\beta q/b\rho c_p v_*)[\log(yv_*/\nu) + \text{constante}]$, incluyendo en el argumento del logaritmo un factor igual al espesor y_0 , entonces la constante (multiplicada por el coeficiente) debe ser la variación de temperatura a través de la subcapa viscosa. Como es natural, esta variación depende también de los coeficientes ν y χ . Puesto que la constante es adimensional, debe ser una cierta función de P , que es la única combinación adimensional de las magnitudes ν , χ , ρ , v_* y c_p (q no puede aparecer, puesto que T debe ser proporcional a q , que ya aparece en el coeficiente). Así pues, encontramos que la distribución de temperaturas es

$$T = (\beta q/b\rho c_p v_*)[\log(vv_*/\nu) + f(P)]. \quad (54.4)$$

[†] Aquí b es la constante que aparece en el perfil logarítmico de velocidades (42.4). Con esta definición, β es el coeficiente v_{turb}/X_{turb} , siendo v_{turb} y X_{turb} los coeficientes en $q = \rho c_p X_{turb} dT/dy$, $\sigma = \rho v_{turb} du/dy$. Mediante determinaciones simultáneas de los perfiles y temperatura en tubos y en el flujo a lo largo de placas planas, β resulta valer 0,7 aproximadamente. Mencionemos también que medidas semejantes en la estela turbulenta detrás de un cuerpo caliente dan un valor para el cociente v_{turb}/X_{turb} de 0,5 aproximadamente en un flujo turbulento libre.

Utilizando esta fórmula, podemos calcular la transferencia térmica en el caso de flujo turbulento en una tubería, a lo largo de una placa plana, etc. Sin embargo, dejaremos este tema para más adelante.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la forma límite de la dependencia del número de Nusselt con el número de Prandtl dentro de una capa límite laminar cuando P y R son grandes.

Solución. En el caso de P grande, la distancia δ' sobre la cual la temperatura varía es pequeña en comparación con el espesor δ de la capa en la que la velocidad v_x disminuye. δ' puede denominarse el espesor de la capa límite de la temperatura. El orden de magnitud de δ' puede obtenerse a partir de una estimación de los términos contenidos en la ecuación (54.1). A lo largo de la distancia desde $y = 0$ hasta $y \sim \delta'$, la temperatura varía en una cantidad del orden de la diferencia de temperaturas total $T_1 - T_0$ entre el fluido y el cuerpo sólido, mientras que la velocidad v_x varía a lo largo de esta distancia en una cantidad del orden de $U\delta'/\delta$ (puesto que la variación total, del orden de U , se produce en una distancia δ). De aquí que, para $y \sim \delta'$, los términos en la ecuación (54.1) son, en orden de magnitud,

$$\chi \partial^2 T / \partial y^2 \sim \chi(T_1 - T_0)/\delta'^2 \quad y \quad v_x \partial T / \partial x \sim U\delta'(T_1 - T_0)/l\delta.$$

Si son comparables ambas expresiones, tenemos $\delta'^3 \sim \chi l \delta / U$. Sustituyendo $\delta \sim l/\sqrt{R}$, obtenemos $\delta' \sim l/R^{1/2}P^{1/3} \sim \delta/P^{1/3}$. Así pues, para P grande, el espesor de la capa límite de temperaturas disminuye respecto a la capa límite de velocidades, de modo inverso a la raíz cúbica de P .

El flujo térmico $q = -\kappa \partial T / \partial y \sim \kappa(T_1 - T_0)/\delta'$, y la ley límite requerida de la transferencia térmica resulta ser†

$$N = \text{constante} \times R^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{3}}.$$

Problema 2. Determinar la forma límite de la función $f(P)$, en la distribución logarítmica de temperaturas (54.4), para valores grandes de P .

Solución. De acuerdo a lo que dijimos en § 42, la velocidad transversal en la subcapa viscosa es del orden de $v_*(y/y_0)^2$, mientras que la escala de la turbulencia es del orden de y^2/y_0 . La conductividad termométrica turbulenta χ_{turb} es, por tanto, del orden de

$$v_* y_0 (y/y_0)^4 \sim v(y/y_0)^4$$

[en donde hemos utilizado la relación (42.5)]; χ_{turb} tiene un valor comparable con el del coeficiente ordinario χ a distancias del orden de $y \sim y_0 P^{-1/4}$. Puesto que χ_{turb} aumenta muy rápidamente con y , es evidente que la mayor parte de la variación de temperatura en la subcapa viscosa se produce en distancias de la pared del orden de y_0 y puede suponerse proporcional a y_0 , siendo en orden de magnitud $q y_0 / \kappa \sim q y_0 / \kappa P^{1/4} \sim q P^{1/4} / \rho c_p v_*$. Com-

† En el caso de los valores de la conductividad térmica que realmente se encuentran, el número de Prandtl no alcanza los valores precisos para que sea válida esta ley límite. Sin embargo, pueden aplicarse estas leyes a la difusión convectiva; ésta obedece a las mismas ecuaciones que la transmisión de calor convectivo, pero sustituyendo la temperatura por las concentraciones del soluto y el flujo térmico por el flujo del soluto, y definiéndose «el número de Prandtl de difusión» como $P_d = v/D$, siendo D el coeficiente de difusión. Por ejemplo, en el caso de disoluciones en agua y líquidos análogos, P_d alcanza valores del orden de 10^3 , mientras que si se trata de solventes muy viscosos es del orden de 10^6 o más.

parando esta fórmula con la (54.4), vemos que la función $f(P)$ es una constante numérica multiplicada por $P^{1/4}$.†

Problema 3. Determinar las diferencias de temperatura T_λ en un fluido turbulento caliente de modo no uniforme en distancias λ que son pequeñas en comparación con la escala externa de la turbulencia (A. M. OBUKHOV, 1949).

Solución. La igualación de temperaturas en un fluido turbulento con calentamiento no uniforme se produce de modo semejante al de la disipación de la energía mecánica. Los remolinos turbulentos de tamaño $\lambda \gg \lambda_0$ (en donde λ_0 es la escala interna de la turbulencia) conducen a una igualización de temperatura por una mezcla puramente mecánica de partículas de fluido que están a temperaturas diferentes. Por otra parte, se igualan mediante una conducción térmica disipativa gradientes de temperaturas verdaderamente considerables en regiones de tamaño $\lambda \sim \lambda_0$.

La disipación debida a la conducción térmica (aumento de entropía) está determinada por la magnitud $\chi(\text{grad } T)^2/T^2$ [ver (49.6)]; suponiendo que las fluctuaciones turbulentas de temperatura son relativamente pequeñas, podemos sustituir T^2 en el denominador por una constante, que es el cuadrado de la temperatura media. De acuerdo con el método descrito en § 32 (ver la primera nota a pie de página de dicha sección), escribiremos $\chi_{\text{turb}}(T_\lambda/\lambda)^2 = \text{constante}$. Sustituyendo $\chi_{\text{turb},\lambda} \sim v_{\text{turb},\lambda} \sim \lambda v_\lambda$, $v_\lambda \sim (\epsilon \lambda)^{1/3}$ [ver (32.1)], hallamos la relación requerida que resulta ser $T_\lambda \sim \lambda^{1/3}$. Así pues, para $\lambda \gg \lambda_0$ las fluctuaciones de temperatura, como las fluctuaciones de velocidad, son proporcionales a la raíz cúbica de la distancia. Sin embargo, a distancias $\lambda \ll \lambda_0$, y mediante los mismos razonamientos que en el caso de la velocidad, las diferencias T_λ son simplemente proporcionales a λ .

Problema 4. Deducir una relación entre las funciones de correlación locales

$$B_{TT} = \overline{(T_2 - T_1)^2}, \quad B_{iT\bar{T}} = \overline{(v_{2i} - v_{1i})(T_2 - T_1)^2}$$

en un flujo turbulento con calentamiento no uniforme (A. M. YAGLOM, 1949).

Solución. Los cálculos son semejantes a los utilizados al deducir la fórmula (33.18). A partir de las ecuaciones

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \chi \Delta T, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{(T_1 T_2)} = -2 \frac{\partial}{\partial x_{1i}} \overline{(v_{1i} T_1 T_2)} + 2\chi \Delta_1 \overline{(T_1 T_2)}.$$

En el primer miembro podemos poner $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, y en el segundo expresar los valores medios en función de las funciones de correlación, utilizando la homogeneidad e isotropía del flujo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{T^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_{1i}} B_{iT\bar{T}} - \chi \Delta_1 B_{TT}.$$

† El cálculo de la constante en esta fórmula para varios casos particulares se facilita por el hecho de que, en virtud de la desigualdad $\delta' \ll \delta$, sólo necesitamos tomar los primeros términos del desarrollo, en potencias de y , de las componentes de la velocidad del fluido al integrar la ecuación (54.1) a través de la capa límite de temperatura. Los cálculos para la difusión convectiva, con diversos casos particulares, puede verse en el libro de V. G. LEVICH, *Physico-chemical Hydrodynamics* (*Fiziko-khimicheskaya gidrodinamika*), Moscow, 1952.

Escribiendo $B_{TT} = n_i B_{rrr}$ y cambiando las derivadas respecto a r , obtenemos una ecuación que, al integrar respecto a r , da la relación buscada

$$B_{TT} - 2\chi dB_{TT}/dr = -\frac{4}{9}r\phi,$$

en donde

$$\phi \equiv -\partial(\overline{T^2})/\partial t = -\overline{\partial(T - T)^2}/\partial t.$$

Utilizando los resultados del problema 3, encontramos entonces que para $r \gg \lambda_0$, $B_{TT} \cong -4r\phi/9$; mientras que para $r \ll \lambda_0$, tenemos $B_{TT} \cong r^2\phi/9\chi$.

§ 55. Calentamiento de un cuerpo en un fluido móvil

Un termómetro sumergido en un fluido en reposo indica una temperatura igual a la del fluido. Sin embargo, si el fluido está en movimiento, el termómetro indica una temperatura ligeramente más alta. Esto se debe a que el fluido queda en reposo en la superficie del termómetro y se ve calentado por rozamiento interno.

El problema general puede formularse del modo siguiente. Un cuerpo de forma arbitraria está sumergido en un fluido móvil. Se establece el equilibrio térmico después de un tiempo suficientemente largo y se desea determinar la diferencia de temperaturas $T_1 - T_0$ que existe entonces entre el cuerpo y el fluido.

La solución de este problema viene dada por la ecuación (50.2), en la que, sin embargo, no podemos despreciar ahora el término que contiene la viscosidad, como hicimos en (53.1); este término es el responsable del efecto en consideración. Así pues, tenemos para el caso de un estado estacionario

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_t}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_t} \right)^2 \quad (55.1)$$

Esta ecuación debe complementarse con las ecuaciones del movimiento (53.3) del propio fluido y también, estrictamente hablando, con la ecuación de la conducción térmica en el cuerpo. En el caso límite en el que el cuerpo tiene una conductividad térmica suficientemente pequeña, podemos despreciar esta última y suponer que la temperatura en un punto cualquiera de la superficie del mismo es simplemente igual a la temperatura del fluido en dicho punto, obtenida al resolver la ecuación (55.1) con la condición límite $\partial T / \partial n = 0$, es decir, la condición de que no existe flujo térmico a través de la superficie del cuerpo. En el caso límite opuesto, en donde el cuerpo tiene una conductividad suficientemente grande, podemos utilizar la condición aproximada de que la temperatura podrá ser la misma en todo punto de su superficie; la derivada $\partial T / \partial n$ no se anulará, en general, en toda la superficie y debemos exigir únicamente que el flujo térmico total a través de la super-

ficie del cuerpo (es decir, la integral de $\partial T / \partial n$ en la superficie) sea nula. En ambos casos límites, la conductividad térmica del cuerpo no aparece explícitamente en la solución del problema y supondremos en lo que sigue que es válido uno de estos casos.[†]

Las ecuaciones (55.1) y (53.3) contienen los parámetros constantes χ , ν y c_p , y en sus soluciones intervienen también la dimensión l del cuerpo y la velocidad U de la corriente principal. (La diferencia de temperaturas $T_1 - T_0$ no es ahora un parámetro arbitrario, sino que debe ella misma determinarse al resolver las ecuaciones.) A partir de estos parámetros podemos construir dos magnitudes adimensionales independientes que hacemos coincidir con R y P . Entonces, podemos decir que la diferencia de temperaturas requerida $T_1 - T_0$ es igual a una determinada magnitud que tiene las dimensiones de la temperatura (que consideraremos que es U^2/c_p), multiplicada por una función de R y P :

$$T_1 - T_0 = (U^2/c_p)f(R, P). \quad (55.2)$$

Es fácil determinar la forma de esta función para números de Reynolds muy pequeños, es decir, para velocidades U suficientemente pequeñas. En este caso, el término $\mathbf{v} \cdot \nabla T$ en (55.1) es pequeño en comparación con $\chi \Delta T$, de modo que esta ecuación se transforma en

$$\chi \Delta T = -\frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2. \quad (55.3)$$

La temperatura y la velocidad varían considerablemente en distancias del orden de l . De aquí que una estimación de ambos miembros de la ecuación (55.3) dé $\chi(T_1 - T_0)/l^2 \sim \nu U^2/c_p l^2$, o sea, $T_1 - T_0 \sim \nu U^2/\chi c_p$. Así pues, obtenemos la conclusión de que, para R pequeño,

$$T_1 - T_0 = \text{constante} \times P U^2/c_p, \quad (55.4)$$

en donde la constante numérica depende de la forma del cuerpo. Debe señalarse que la diferencia de temperaturas es proporcional al cuadrado de la velocidad U .

Pueden obtenerse algunas conclusiones generales respecto a la forma de la función $f(P, R)$ en (55.2) en el caso límite opuesto de valores grandes de R , cuando la velocidad y la temperatura varían únicamente en una capa límite estrecha. Sean δ y δ' las distancias respecto a las cuales varían, respectivamente, la velocidad y la temperatura; δ y δ' difieren en un factor que depende de P . La cantidad de calor desarrollada en la unidad de área de la capa límite en la unidad de tiempo debida a la viscosidad del fluido es la

[†] I. A. KIBEL' ha obtenido una solución exacta para la rotación de un disco caliente dentro de un fluido viscoso, análoga a la dada en § 23 para una temperatura constante; ver *Prikladnaya matematika i mehanika*, 11, 611, 1947.

integral de $1/2\nu\rho(\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i)^2$ en el espesor de la capa [ver (16.3)]. Esta integral es del orden de $\nu\rho(U^2/\delta^2)\delta = \nu\rho U^2/\delta$. La misma cantidad de calor debe perderse en el cuerpo y es, por tanto, igual al flujo térmico $q = -\kappa\partial T/\partial n \sim \chi c_p(T_1 - T_0)/\delta'$. Comparando ambas expresiones, encontramos

$$T_1 - T_0 = (U^2/c_p)f(P). \quad (55.5)$$

Así pues, en este caso, la función f es independiente de R , pero su dependencia respecto a P sigue siendo indeterminada.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la distribución de temperaturas en un fluido con flujo de Poiseuille en una tubería de sección recta circular, cuyas paredes se mantienen a una temperatura constante T_0 .

Solución. En coordenadas cilíndricas, con el eje z situado a lo largo del eje de la tubería, tenemos $v_z = v = 2v_m[1 - (r/R)^2]$, siendo v_m la velocidad media del flujo. La sustitución en (55.3) nos da la ecuación

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = - \frac{16v_m^2}{R^4} \frac{\nu}{\chi c_p} r^2.$$

La solución que debe ser finita para $r = 0$ e igual a T_0 para $r = R$ es

$$T - T_0 = v_m^2 \frac{P}{c_p} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right) \right]^4.$$

Problema 2. Determinar la diferencia de temperaturas entre una esfera sólida y un fluido que pasa a su alrededor cuando los números de Reynolds son pequeños. La conductividad térmica de la esfera se supone grande.

Solución. Tomaremos coordenadas esféricas r, θ, ϕ , con el origen en el centro de la esfera y el eje polar en la dirección de la velocidad de la corriente principal. Calculando los componentes del tensor $\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i$ mediante las fórmulas (15.17) y (20.9), obtenemos la ecuación (55.3) en la forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \\ &= -A(R/r)^4 [\cos^2 \theta \{3 - 6(R/r)^2 + 2(R/r)^4\} + (R/r)^4], \end{aligned}$$

en donde $A = 9u^2P/4c_p$. Buscamos una expresión para $T(r, \theta)$ en forma $T = f(r) \cos^2 \theta + g(r)$, y, separando la parte que depende de θ , encontramos dos ecuaciones para f y g :

$$\begin{aligned} r^2 f'' + 2rf' - 6f &= -A[3(R/r)^2 - 6(R/r)^4 + 2(R/r)^6], \\ r^2 g'' + 2rg' + 2f &= -A(R/r)^6. \end{aligned}$$

A partir de la primera se obtiene

$$f = A[\frac{3}{2}(R/r)^2 + (R/r)^4 - \frac{1}{12}(R/r)^6] + c_1(R/r)^3;$$

el término de la forma constante $\times r^2$ se omite, puesto que no se anula en el infinito. La segunda ecuación nos da, entonces,

$$g = -\frac{1}{2}A[\frac{3}{2}(R/r)^2 + \frac{1}{3}(R/r)^4 + \frac{1}{18}(R/r)^6] - \frac{1}{3}c_1(R/r)^3 + c_2 R/r + c_3.$$

Se determinan las constantes c_1 , c_2 , c_3 a partir de las condiciones

$$T = \text{constante} \text{ y } \int (\partial T / \partial r) r^2 \sin \theta d\theta = 0$$

para $r = R$, que son equivalentes a $f(R) = 0$ y $g'(R) + f'(R)/3 = 0$; además, $T = T_0$ en el infinito. Así pues, $c_1 = -5A/3$, $c_2 = 2A/3$, $c_3 = T_0$. La diferencia de temperaturas entre $T_1 = T(R)$ y T_0 resulta ser $T_1 - T_0 = 5r^2 P / 8c_p$. Puede señalarse que la distribución de temperaturas obtenida satisface realmente la condición $\partial T / \partial r = 0$ para $r = R$, es decir, $f'(R) = g'(R) = 0$. De aquí que sea también la solución del mismo problema en el caso de una esfera de pequeña conductividad térmica.

§ 56. Convección libre

Hemos visto en § 3 que, si existe un equilibrio mecánico dentro de un fluido que está en un campo gravitatorio, la distribución de temperaturas sólo puede depender de la altitud z : $T = T(z)$. Si la distribución de temperaturas no satisface esta condición, sino que también es una función de las demás coordenadas, entonces no es posible el equilibrio mecánico. Además, incluso en el caso de que $T = T(z)$, puede seguir siendo imposible el equilibrio mecánico si el gradiente vertical de temperaturas está dirigido hacia abajo y su valor excede un cierto valor (§ 4).

La ausencia del equilibrio mecánico da como resultado la aparición de corrientes internas en el fluido, que tienden a mezclarlo y a hacer que adquiera una temperatura constante. Dicho movimiento, en el caso de un campo gravitatorio, se denomina *convección libre*.

Deduzcamos las ecuaciones que describen esta convección. Supondremos que el fluido es incompresible. Esto significa que la presión se supone que varía sólo ligeramente a través del fluido, de modo que puedan despreciarse las variaciones de densidad debidas a los cambios de presión. Por ejemplo, en la atmósfera, en donde la presión varía con la altura, esta hipótesis significa que no consideraremos columnas de aire de gran altura, en las cuales la densidad varía considerablemente a lo largo de dicha altura. La variación de densidad debida al calentamiento no uniforme del fluido no puede despreciarse, como es natural; da como resultado las fuerzas que originan la convección.

Escribamos la temperatura variable $T(x, y, z, t)$ en la forma $T = T_0 + T'$, siendo T_0 una temperatura media constante a partir de la cual se deduce la variación T' . Supondremos que T' es pequeña en comparación con T_0 .

Escribamos la densidad del fluido también en la forma $\rho = \rho_0 + \rho'$, siendo ρ_0 una constante. Puesto que la variación de temperatura T' es pequeña, la variación de densidad resultante ρ' es también pequeña y podemos escribir

$$\rho' = (\partial \rho_0 / \partial T)_p T' = -\rho_0 \beta T'. \quad (56.1)$$

En este caso $\beta = -(1/\rho)\partial\rho/\partial T$ es el coeficiente de dilatación térmica del fluido.

En la presión $p = p_0 + p'$, p_0 no es constante. Es la presión que corresponde al equilibrio mecánico cuando la temperatura y la densidad son constantes e iguales a T_0 y ρ_0 , respectivamente. Varía con la altura de acuerdo con la ecuación hidrostática

$$p_0 = \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \text{constante.} \quad (56.2)$$

Empezaremos transformando la ecuación de Navier-Stokes, que en presencia de un campo gravitatorio tiene la forma

$$\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} = -(1/\rho)\mathbf{grad}p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g};$$

esta expresión se obtiene sumando la fuerza \mathbf{g} por unidad de masa al segundo miembro de la ecuación (15.7). Sustituimos ahora $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$; dentro del primer orden de magnitud, tenemos

$$\frac{\mathbf{grad}p}{\rho} = \frac{\mathbf{grad}p_0}{\rho_0} + \frac{\mathbf{grad}p'}{\rho_0} - \frac{\mathbf{grad}p_0}{\rho_0^2}\rho',$$

o sea, sustituyendo (56.1) y (56.2),

$$\frac{\mathbf{grad}p}{\rho} = \mathbf{g} + \frac{\mathbf{grad}p'}{\rho_0} + \mathbf{g}T'\beta.$$

Con esta expresión, la ecuación de Navier-Stokes resulta

$$\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} = -(1/\rho)\mathbf{grad}p' + \nu \Delta \mathbf{v} - \beta T' \mathbf{g}, \quad (56.3)$$

en donde se ha eliminado el sufijo de ρ_0 . En la ecuación de conducción térmica (50.2), el término de viscosidad puede demostrarse que es pequeño en la convección libre en comparación con los otros términos y, por tanto, puede omitirse. Así se obtiene

$$\partial T'/\partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} T' = \chi \Delta T'. \quad (56.4)$$

Las ecuaciones (56.3) y (56.4), junto con la ecuación de continuidad $\text{div } \mathbf{v} = 0$, forman un sistema completo de ecuaciones que rigen la convección libre.

En el caso de un flujo estacionario, las ecuaciones de convección se transforman en

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} = -(1/\rho)\mathbf{grad}p' - \beta T' \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (56.5)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} T' = \chi \Delta T', \quad (56.6)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (56.7)$$

Este sistema de cinco ecuaciones para las funciones incógnitas \mathbf{v} , p'/ρ y T' contiene tres parámetros, ν , χ y βg . Además, en la solución intervendrá una longitud característica l y la diferencia de temperaturas $T_1 - T_0$ entre el cuerpo sólido y el fluido a gran distancia. Aquí no existe ninguna velocidad ca-

racterística, puesto que no existe tampoco flujo debido a fuerzas externas y el movimiento completo del fluido se debe a una calefacción no uniforme.

Así pues, la convección libre estacionaria en un campo gravitatorio está caracterizada por cinco parámetros que tienen las dimensiones siguientes: $\chi = \nu = \text{cm}^2/\text{s}$, $T_1 - T_0 = \text{grados}$, $l = \text{cm}$, $\beta g = \text{cm}/\text{s}^2$ grado. A partir de ellos podemos formar dos magnitudes adimensionales independientes que resultan ser el número de Prandtl, $P = \nu/\chi$, y el *número de Grashof*,

$$G = \beta g l^3 (T_1 - T_0) / \nu^2. \quad (56.8)$$

Por consiguiente, la ley de semejanza para la convección libre es

$$\mathbf{v} = (\nu/l)\mathbf{f}(\mathbf{r}/l, G), \quad T = (T_1 - T_0)f(\mathbf{r}/l, P, G). \quad (56.9)$$

Dos flujos son semejantes si son iguales sus números de Prandtl y de Grashof.

La transferencia de calor convectiva producida por la gravedad está caracterizada de nuevo por el número de Nusselt, que es ahora una función de P y de G únicamente:

$$N = f(P, G). \quad (56.10)$$

El valor del número de Grashof es una característica importante del flujo convectivo. Cuando G es suficientemente pequeño, la convección libre carece de importancia en la transferencia térmica del fluido, que se debe entonces principalmente a la conducción ordinaria.

El flujo convectivo puede ser laminar o turbulento. No existe número de Reynolds para la convección libre (puesto que no existe ningún parámetro de velocidad característica), y la iniciación de la turbulencia se determina por el número de Grashof: la convección resulta turbulenta cuando G es muy grande.

Se produce un caso muy curioso de convección en el flujo de un fluido entre dos planos infinitos horizontales a diferentes temperaturas en el caso de que el plano inferior (T_2) tenga una temperatura mayor que el plano superior (T_1). Si la diferencia de temperaturas $T_2 - T_1$ es pequeña, el fluido permanece en reposo y existe una conducción térmica pura, siendo la temperatura y densidad del fluido funciones únicamente de la coordenada vertical z ; la densidad aumenta hacia arriba. Sin embargo, si la diferencia $T_2 - T_1$ supera un determinado valor crítico, que depende de la distancia l entre los planos, dicho estado se hace inestable y se presenta una convección estacionaria. La iniciación de la inestabilidad puede determinarse teóricamente (ver problema 5). El valor crítico de la diferencia $T_2 - T_1$ aparece como un factor en el producto

$$GP = \beta g l^3 (T_2 - T_1) / \nu \chi. \quad (56.11)$$

En una capa de fluido situada entre dos planos sólidos a temperaturas constantes, debe producirse la convección si $GP > 1710$. Si la superficie superior

es libre, pero todavía tiene una temperatura constante, entonces la convección se produce para $GP > 1100$.[†]

El flujo convectivo que se produce es realmente poco corriente. Puesto que el fluido no está limitado en el plano horizontal, es evidente que el flujo debe ser periódico en dicho plano. En otras palabras, el espacio situado entre los planos que limitan al fluido debe dividirse en prismas rectos semejantes, en cada uno de los cuales se mueve el fluido de un modo semejante. Las secciones rectas horizontales de estos prismas forman una red en el plano horizontal. La determinación teórica de la naturaleza de esta red es muy difícil, pero los resultados experimentales parecen indicar que existe un esquema exagonal con células en forma de prismas exagonales, moviéndose el fluido hacia arriba en la parte media del prisma y hacia abajo en sus partes laterales o viceversa.

En el caso de valores muy grandes de G , la convección estacionaria se vuelve a su vez inestable; entonces, se establece la turbulencia para $G \sim 50\,000$.

Otro caso semejante de inestabilidad es el de la convección en el caso de una tubería cilíndrica vertical, a lo largo de la cual se mantiene una gradiiente de temperaturas constante. De nuevo tenemos aquí un valor crítico del producto GP , más allá del cual el fluido en reposo resulta inestable; ver problema 6.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el número de Nusselt para la convección libre en el caso de una placa plana vertical. Se supone que la velocidad y la diferencia de temperaturas $T' = T - T_0$ (siendo T_0 la temperatura de fluido en el infinito) son apreciablemente distintas de cero únicamente en una capa límite delgada junto a la superficie de la placa (K. POHLHAUSEN).

Solución. Tomemos el origen en el borde inferior de la placa, el eje x vertical y el eje y perpendicular a la placa. La presión en la capa límite no varía a lo largo del eje y (ver § 39), y, por lo tanto, en todos los puntos es igual a la presión hidrostática $p_0(x)$, es decir, $p' = 0$. Con la exactitud normal considerada en la teoría de la capa límite, las ecuaciones (56.5)-(56.7) se transforman en

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \beta g(T - T_0), \quad (1)$$

[†] Estas condiciones (para una diferencia $T_2 - T_1$ dada) se cumplen siempre si l es suficientemente grande. Para evitar malas interpretaciones, señalaremos que estamos hablando ahora de valores l para los cuales carece de importancia la variación de la densidad del fluido bajo la acción de la gravedad. De aquí que no pueden aplicarse los criterios anteriores a una columna gaseosa de gran altura. En este caso, hemos de utilizar el criterio deducido en § 4, a partir del cual vemos que no es preciso que se produzca convección en una columna de altura cualquiera, si el gradiente es suficientemente pequeño.

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

con las condiciones límites $v_x = v_y = 0$ y $T = T_1$ para $y = 0$ (siendo T_1 la temperatura de la placa), $v_x = 0$ y $T = T_0$ para $y = \infty$. Estas ecuaciones pueden convertirse en ecuaciones diferenciales ordinarias introduciendo como variables independientes

$$\xi = Cy/x^{1/4}, \quad C = [\beta g(T_1 - T_0)/4\nu^2]^{1/4}. \quad (4)$$

Pongamos

$$v_x = 4\nu C^2 \sqrt{x}\phi'(\xi), \quad T - T_0 = (T_1 - T_0)\theta(\xi). \quad (5)$$

Entonces (3) da $v_y = \nu C x^{-1/4} (\xi \phi' - 3\phi)$, y (1) y (2) nos dan ecuaciones para ϕ y θ :

$$\phi''' + 3\phi\phi'' - 2\phi'^2 + \theta = 0, \quad \theta'' + 3P\phi\theta' = 0, \quad (6)$$

con las condiciones límites $\phi(0) = \phi'(0) = 0$, $\theta(0) = 1$, $\phi'(\infty) = 0$, $\theta(\infty) = 0$. Se deduce de (4) y (5) que el espesor de la capa límite es del orden de $\delta \sim x^{1/4}/C$. La condición para que sea válida la solución es, por tanto, $\delta \ll l$ (siendo l la altura de la placa), o sea, $G^{1/4} \gg 1$. El flujo térmico total por unidad de área de la placa es

$$q = -\frac{1}{l} \int_0^l \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} dx = -\frac{4}{3} \kappa \theta'(0, P) C (T_1 - T_0) l^{-1/4}.$$

El número de Nusselt es $N = f(P)G^{1/4}$, estando determinada la función $f(P)$ mediante la resolución de las ecuaciones (6).

Problema 2. Un chorro de gas sumergido turbulento y caliente se desvía por la acción de un campo gravitatorio; hallar su forma (G. N. ABRAMOVICH, 1938).

Solución. Sea T' cierto valor medio (respecto a la sección recta del chorro) de la diferencia de temperaturas entre el chorro y el gas que lo rodea, u una determinada velocidad media del gas en el chorro y l la distancia a lo largo del mismo desde su punto de entrada; se supone que l es grande en comparación con las dimensiones de la abertura por la cual entra el chorro. La condición de flujo térmico constante Q a lo largo del chorro es $Q \sim \rho c_p T' u R^2 = \text{constante}$ y, puesto que el radio de un chorro turbulento es proporcional a l (ver § 35), tenemos

$$T' u l^2 = \text{constante} \sim Q/\rho c_p; \quad (1)$$

observemos que, en ausencia del campo gravitatorio, $u \sim 1/l$ [ver (35.3)] y se deduce entonces de (1) que $T' \sim 1/l$.

El vector de flujo del impulso que atraviesa la sección recta del chorro es proporcional a $\rho u^2 R^2 \mathbf{n} \sim g u^2 l^2 \mathbf{n}$, en donde \mathbf{n} es un vector unidad a lo largo del chorro. Su componente horizontal es constante a lo largo del mismo:

$$u^2 l^2 \cos \theta = \text{constante}, \quad (2)$$

siendo θ el ángulo entre \mathbf{n} y la horizontal, mientras que la variación en la componente vertical se debe a la «fuerza de sustentación» que actúa sobre el chorro. Esta fuerza es proporcional a

$$\rho \beta g T' R^2 \sim \rho \beta g T' l^2 \sim \beta g Q / c_p u.$$

De aquí que tengamos

$$\frac{d(l^2 u^2 \operatorname{sen} \theta)}{dl} \sim \beta g Q / \rho c_p u. \quad (3)$$

Se deduce entonces de (2) que $d(\operatorname{tg} \theta)dl = \text{constante} \times l \cos^{1/2} \theta$, de aquí que se obtenga finalmente

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^{5/2}\theta} = \text{constante} \times l^2, \quad (4)$$

dando θ_0 la dirección del chorro emergente.

En particular, si θ no varía apreciablemente a lo largo del chorro, (4) da $\theta - \theta_0 = \text{constante} \times l^2$. Esto significa que el chorro es una parábola cónica, en la cual la desviación d de una línea recta es $d = \text{constante} \times l^3$.

Problema 3. Un chorro turbulento de gas caliente (es decir, con un número de Grashof grande) procede de un cuerpo muy caliente fijo. Determinar la variación de la velocidad y de la temperatura en el chorro con la altura (YA. B. ZEL'DOVICH, 1937).

Solución. Como en el caso anterior, el radio del chorro es proporcional a la distancia a su fuente y tenemos, análogamente a (1) del problema 2, $T'uz^2 = \text{constante}$, y en lugar de (3), $d(z^2 u^2)/dz = \text{constante}/u$, siendo z la altura por encima del cuerpo, supuesto este valor grande en comparación con la dimensión del mismo. Integrando, se encuentra $u \sim z^{-1/3}$, y para la temperatura $T' \sim z^{-5/3}$.

Problema 4. El mismo que el problema 3, pero en el caso de un chorro convectivo laminar que surge libremente (YA. B. ZEL'DOVICH, 1937).

Solución. Junto con la relación $T'uR^2 = \text{constante}$, que expresa la constancia del flujo térmico, tenemos $u^2/z \sim vu/R^2 \sim \beta g T'$, que se deduce de la ecuación (56.5). A partir de estas relaciones encontramos la siguiente variación del radio, de la velocidad y de la temperatura con la altura: $R \sim \sqrt{z}$, $u = \text{constante}$, $T' \sim 1/z$. Puede observarse que el número $G \sim T'R^3 \sim \sqrt{z}$, es decir, aumenta con la altura z , y, por tanto, el chorro debe convertirse en turbulento a una determinada altitud.

Problema 5. Deducir las ecuaciones que rigen la iniciación de la convección estacionaria entre dos planos horizontales mantenidos a temperaturas dadas (RAYLEIGH, 1916).

Solución. Se aplica una perturbación proporcional a $e^{-i\omega t}$ a un fluido en reposo con un gradiente vertical de temperaturas $\partial T/\partial z = -A < 0$. El estado de reposo es inestable si existe un valor posible cualquiera de ω , cuya parte imaginaria sea positiva. De aquí que la iniciación de la inestabilidad está determinada por la aparición de una solución en la cual sea nula la parte imaginaria de ω . En este caso nos enfrentamos con la aparición de una convección estacionaria como resultado de la inestabilidad; de aquí que busquemos soluciones para las cuales la parte real de ω sea también cero, es decir, soluciones independientes del tiempo.

En las ecuaciones (56.5)-(56.7) la velocidad v del movimiento perturbativo y la variación de presión resultante p' son magnitudes pequeñas. Escribamos la temperatura como $T' = -Az + \tau$, en donde la perturbación τ es pequeña; supongamos que la variación de

presión que se obtiene como resultado del gradiente de temperaturas constante ha de incluirse en p_0 . Entonces, se encuentra, omitiendo los términos de segundo orden,

$$\begin{aligned} v \Delta \mathbf{v} &= \mathbf{grad}(p'/\rho) + \beta \tau \mathbf{g}, \\ \chi \Delta \tau &= -Av_z, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Eliminando \mathbf{v} y p'/ρ , obtenemos una ecuación para τ :

$$\Delta^3 \tau = \frac{\gamma}{l^4} \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

en donde $\gamma = l^6 \beta g A / \nu \chi = GP$, y l es la distancia entre los planos.

Las condiciones límites en las ecuaciones (1) en una superficie sólida son $\tau = 0$, $v_z = 0$, $\partial v_z / \partial z = 0$. La última de ellas se deduce a partir de la ecuación de la continuidad, puesto que debemos tener $v_x = v_y = 0$ para todo valor de x e y . Por la segunda ecuación (1), pueden sustituirse las condiciones sobre v_z por las condiciones respecto a derivadas superiores de τ , sustituyendo v_z por $\partial^2 \tau / \partial z^2$.

Busquemos una expresión para τ en la forma $e^{ik \cdot r} f(z)$, en donde \mathbf{k} es un vector en el plano xy , y obtendremos para $f(z)$ la ecuación

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^3 f + \frac{\gamma k^2}{l^4} f = 0.$$

La solución general de esta ecuación es una combinación lineal de la función $\cosh(\mu z/l)$ y $\operatorname{senh}(\mu z/l)$, en donde $\mu^2 = k^2 l^2 - \gamma^{1/3} (kl)^{2/3} \sqrt[3]{1}$ con los tres valores diferentes posibles de la raíz cúbica de 1. Se determinan los coeficientes mediante las condiciones límites que conducen a un sistema de ecuaciones algebraicas; la condición de compatibilidad determina entonces la función $k l(\gamma)$. La función inversa $\gamma = \gamma(kl)$ tiene un mínimo para un determinado valor de kl ; el valor correspondiente $\gamma = GP$ determina el criterio buscado para la aparición de la inestabilidad y el valor de k determina la periodicidad en el plano xy del movimiento resultante, pero no su simetría.[†]

Problema 6. Determinar la iniciación de la convección estacionaria en un fluido en reposo dentro de una tubería cilíndrica vertical en la cual se mantiene un gradiente constante de temperaturas (G. A. OSTROUMOV, 1946).

Solución. Busquemos una solución de la ecuación (1) del problema 5, en la cual la velocidad convectiva \mathbf{v} sea en todo punto paralela al eje de la tubería (eje z) y en donde el esquema del flujo no varíe a lo largo de este eje, es decir, $v_z = v$, τ y $\partial p' / \partial z$ dependen únicamente de las coordenadas x y y . Entonces, las ecuaciones se transforman en $\partial p' / \partial x = 0$, $\partial p' / \partial y = 0$, $v \Delta_2 v = -\beta g \tau + (1/\rho) \partial p' / \partial z$, $\chi \Delta_2 \tau = -Av$, en donde $\Delta_2 \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$. Las dos primeras ecuaciones muestran que $\partial p' / \partial z = \text{constante}$, y, eliminando τ de las demás ecuaciones, tenemos

$$\Delta_2^2 v = \gamma v / R^4, \quad (1)$$

en donde hemos puesto de nuevo $\gamma = AR^4 \beta g / \chi \nu = GP$, siendo R el radio de la tubería. En la superficie de la misma debemos tener $v = 0$ y el flujo térmico debe ser continuo. Además, el flujo de masa total a través de una sección recta de la tubería debe ser nulo.

[†] Una descripción detallada de los cálculos ha sido dada por A. PELLEW y R. V. SOUTHWELL, *Proceedings of the Royal Society, A176*, 312, 1940.

La ecuación (1) tiene soluciones de la forma $J_n(kr) \cos n\phi$ e $I_n(kr) \cos n\phi$, en donde J_n e I_n son las funciones de Bessel de argumento real e imaginario, respectivamente, r y ϕ son las coordenadas polares en la sección recta y $kR = \gamma^{1/4}$. La iniciación de la convección corresponde a la solución para la cual γ es mínima. Se encuentra que ésta es la solución con $n = 1$:

$$v = v_0 \cos \phi [J_1(kr)I_1(kR) - I_1(kr)J_1(kR)],$$

$$\tau = v_0(\nu k^2/\beta g) \cos \phi [J_1(kr)I_1(kR) + I_1(kr)J_1(kR)].$$

No aparece el gradiente de presiones $\partial p'/\partial z$. La condición $v = 0$ para $r = R$ se satisface idénticamente y el flujo de masa total a través de la sección recta de la tubería es cero. En el caso límite de paredes térmicamente aislantes debemos tener también $\partial \tau / \partial r = 0$ para $r = R$, o sea,

$$\frac{J_0(kR)}{J_1(kR)} + \frac{I_0(kR)}{I_1(kR)} = \frac{2}{kR}.$$

La menor raíz de esta ecuación da el valor crítico requerido de $\gamma = (kR)^4 = 67.4$. En el caso límite opuesto de paredes de conductividad térmica infinita debemos tener $\tau = 0$ para $r = R$; entonces, $J_1(kR) = 0$, de aquí que el valor crítico sea $\gamma = 215.8$.†

† Para un estudio más detallado ver G. A. OSTROUMOV, *Free Convection in a Confined Medium (Svobodnaya konvektsiya v usloviyakh vnutrennei zadachi)*, Moscow, 1952.

CAPÍTULO VI

D I F U S I Ó N

§ 57. Ecuaciones de la dinámica de fluidos para una mezcla

En todo el estudio anterior se ha admitido que el fluido es totalmente homogéneo. Sin embargo, si se trata de una mezcla de fluidos, cuya composición sea diferente en distintos puntos, entonces las ecuaciones de la dinámica de fluidos se ven modificadas considerablemente.

Analizaremos ahora sólo mezclas con dos componentes. La composición de la mezcla se describe mediante la concentración c , definida como el cociente de la masa de un componente a la masa total del fluido en un elemento de volumen determinado.

En el transcurso del tiempo, la distribución de la concentración a través del fluido variará en general. Esta modificación se produce de dos modos. En primer lugar, cuando existe un movimiento macroscópico del fluido, cualquier porción pequeña del mismo se mueve como un todo, permaneciendo invariable en su composición. Esto da como resultado una mezcla puramente mecánica del fluido; aunque la composición de cada parte móvil del mismo no se modifique, la concentración del fluido en un punto cualquiera del espacio varía con el tiempo. Si ignoramos cualquier proceso de conducción térmica y de rozamiento interno que puede también tener lugar, esta variación de concentración es un proceso termodinámico reversible y no da como resultado ninguna disipación de energía.

En segundo lugar, puede producirse una variación de composición por la transferencia molecular de los componentes de una parte del fluido a otra. La igualación de la concentración por este intercambio directo de composición de cada parte pequeña del fluido se denomina *difusión*. La difusión es un proceso irreversible y como la conducción térmica y la viscosidad es una de las fuentes de disipación de energía en una mezcla de fluidos.

Designemos mediante ρ la densidad total del fluido. La ecuación de continuidad para la masa total del fluido es, como antes,

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \quad (57.1)$$

Esto significa que la masa total del fluido en un volumen cualquiera puede

variar únicamente por el movimiento del fluido que entra o sale de dicho volumen. Debe resaltarse que, hablando estrictamente, el propio concepto de velocidad debe volverse a definir para una mezcla de fluidos. Escribiendo la ecuación de continuidad en la forma (57.1), hemos definido la velocidad del mismo modo que antes, como el impulso total de la unidad de masa de fluido.

También resulta sin variación la ecuación de Navier-Stokes (15.5). Deduciremos ahora las ecuaciones restantes de la dinámica de fluidos para una mezcla de ellos.

En ausencia de difusión, la composición de un elemento de fluido dado cualquiera permanecerá sin variación durante su movimiento. Esto significa que la derivada total dc/dt deberá ser cero, es decir, debe ser válida la ecuación $dc/dt = \partial c/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla c = 0$. Esta ecuación puede escribirse, utilizando (57.1), como

$$\partial(\rho c)/\partial t + \operatorname{div}(\rho c \mathbf{v}) = 0,$$

es decir, como una ecuación de continuidad para uno de los componentes de la mezcla (siendo ρc la masa de dicho componente en la unidad de volumen). En forma integral

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho c \, dV = - \oint \rho c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

se ve que la variación respecto al tiempo de la cantidad de este componente en un volumen cualquiera es igual a la cantidad del componente que se transporta a través de la superficie de dicho volumen debido al movimiento del fluido.

Cuando se produce la difusión, además del flujo $\rho c \mathbf{v}$ del componente en cuestión que se mueve junto con el fluido, existe otro flujo que es el resultado de la transferencia de los componentes, aunque el fluido como un todo esté en reposo. Sea \mathbf{i} la densidad de este flujo de difusión, es decir, la cantidad del componente transportado por difusión a través del área unidad por unidad de tiempo.[†] Entonces tenemos para la variación respecto al tiempo de la cantidad del componente en un volumen cualquiera

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho c \, dV = - \oint \rho c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} - \oint \mathbf{i} \cdot d\mathbf{f},$$

o bien, en forma diferencial,

$$\partial(\rho c)/\partial t = - \operatorname{div}(\rho c \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{i}. \quad (57.2)$$

[†] La suma de las densidades de flujo para los dos componentes debe ser $\rho \mathbf{v}$. Si la densidad de flujo para un componente es $\rho c \mathbf{v} + \mathbf{i}$, el del otro componente es, por tanto, $\rho(1 - c)\mathbf{v} - \mathbf{i}$.

Utilizando (57.1), podemos volver a escribir esta «ecuación de continuidad» para un componente en la forma

$$\rho(\partial c/\partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} c) = -\operatorname{div} \mathbf{i}. \quad (57.3)$$

Para deducir otra ecuación, repetiremos los argumentos dados en § 49, recordando que las magnitudes termodinámicas correspondientes al fluido son ahora también funciones de la concentración. Al calcular la derivada $\partial(1/2\rho v^2 + \rho\epsilon)/\partial t$ (en § 49) mediante las ecuaciones del movimiento, tuvimos que transformar los términos $\rho\partial\epsilon/\partial t$ y $-\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p$. Esta transformación debe ahora modificarse debido a que las identidades termodinámicas correspondientes a la energía y a la entalpía contienen ahora un término adicional en el que interviene la diferencial de la concentración:

$$d\epsilon = T ds + (p/\rho^2)d\rho + \mu dc,$$

$$dw = T ds + (1/\rho)dp + \mu dc,$$

en donde μ es un potencial químico de la mezcla adecuadamente definido.[†] De acuerdo con ello, aparece un término adicional $\rho\mu\partial c/\partial t$ en la derivada $\rho\partial\epsilon/\partial t$. Escribiendo la segunda relación termodinámica en la forma

$$dp = \rho dw - \rho T ds - \rho\mu dc,$$

vemos que el término $-\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p$ contendrá un término adicional $\rho\mu\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} c$.

Así pues, debemos sumar $\rho\mu(\partial c/\partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} c)$ a la expresión (49.3). Mediante la ecuación (57.3), esta última puede escribirse como $-\mu \operatorname{div} \mathbf{i}$. El resultado es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon \right) &= -\operatorname{div} [\rho\mathbf{v}(\frac{1}{2}v^2 + w) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{q}] + \\ &+ \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s \right) - \boldsymbol{\sigma}'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div} \mathbf{q} - \mu \operatorname{div} \mathbf{i}. \end{aligned} \quad (57.4)$$

[†] La termodinámica enseña que, en el caso de una mezcla de dos sustancias, la ecuación fundamental es

$$de = T ds - p dV + \mu_1 dn_1 + \mu_2 dn_2,$$

siendo n_1 , n_2 los números de partículas de las dos sustancias contenidas en 1 g de la mezcla y μ_1 , μ_2 los potenciales químicos de ambas. Los números n_1 , n_2 satisfacen la relación $n_1 m_1 + n_2 m_2 = 1$, en donde m_1 y m_2 son las masas de los dos tipos de moléculas. Si introducimos como variable la concentración $c = n_1 m_1$, tenemos

$$de = T ds - p dV + \left(\frac{\mu_1}{m_1} - \frac{\mu_2}{m_2} \right) dc.$$

Comparando esta expresión con la dada en el texto, vemos que el potencial químico μ está relacionado con μ_1 y μ_2 por

$$\mu = \frac{\mu_1}{m_1} - \frac{\mu_2}{m_2}.$$

Hemos sustituido $-\kappa \operatorname{grad} T$ por un flujo térmico \mathbf{q} , que puede depender no sólo del gradiente de temperaturas, sino también del gradiente de concentraciones (ver la sección siguiente). La suma de los dos últimos términos del segundo miembro puede escribirse

$$\operatorname{div} \mathbf{q} - \mu \operatorname{div} \mathbf{i} = \operatorname{div}(\mathbf{q} - \mu \mathbf{i}) + \mathbf{i} \cdot \operatorname{grad} \mu.$$

La expresión $\rho \mathbf{v}(1/2 v^2 + w) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{q}$, que es el operando del operador divergencia en (57.4), es, por definición de \mathbf{q} , el flujo de energía total del fluido. El primer término es el flujo de energía reversible debido simplemente al movimiento del fluido como un todo, mientras que la suma $-\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{q}$ es el flujo irreversible. Cuando no existe ningún movimiento macroscópico, el flujo de viscosidad $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}'$ es cero, y el flujo térmico es simplemente \mathbf{q} .

La ecuación de conservación de la energía es

$$\frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e) = -\operatorname{div}[\rho \mathbf{v}(\frac{1}{2} v^2 + w) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{q}]. \quad (57.5)$$

Restando de (57.4), obtenemos la ecuación requerida

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} s \right) = \boldsymbol{\sigma}'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \operatorname{div}(\mathbf{q} - \mu \mathbf{i}) - \mathbf{i} \cdot \operatorname{grad} \mu, \quad (57.6)$$

que es una generalización de (49.4).

Hemos obtenido así un sistema completo de ecuaciones de la mecánica de fluidos para una mezcla de estos. El número de ecuaciones en este sistema es una más que en el caso de un fluido simple, puesto que existe otra función incógnita, a saber, la concentración. Las ecuaciones son: la ecuación de continuidad (57.1), las ecuaciones de Navier-Stokes, la «ecuación de continuidad» (57.2) para un componente y la ecuación (57.6), que determina la variación de entropía. Debe señalarse que las ecuaciones (57.2) y (57.6), tal y como están expresadas, determinan únicamente la forma de las ecuaciones correspondientes de la dinámica de fluido, puesto que en ellas intervienen los flujos indeterminados \mathbf{i} y \mathbf{q} . Estas ecuaciones se hacen determinadas únicamente cuando se sustituyen \mathbf{i} y \mathbf{q} por expresiones en función de los gradientes de la concentración y de la temperatura. Las expresiones correspondientes se obtendrán en § 58.

En el caso de la variación respecto al tiempo de la entropía total del fluido, un cálculo totalmente semejante al del § 49, pero sustituyendo (57.6) en lugar de (49.4), da el resultado

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho s dV = - \int \frac{(\mathbf{q} - \mu \mathbf{i}) \cdot \operatorname{grad} T}{T^2} dV - \int \frac{\mathbf{i} \cdot \operatorname{grad} \mu}{T} dV + \dots, \quad (57.7)$$

en donde hemos omitido, por brevedad, los términos de viscosidad.

§ 58. Coeficientes de transferencia de masa y de difusión térmica

El flujo de difusión \mathbf{i} y el flujo térmico \mathbf{q} se deben a la presencia de gradientes de concentración y de temperatura en el fluido. Sin embargo, no debe pensarse que \mathbf{i} depende únicamente del gradiente de concentraciones y que \mathbf{q} lo hace solamente del gradiente de temperaturas. Por el contrario, cada uno de estos flujos depende, en general, de ambos gradientes.

Si los gradientes de concentración y de temperatura son pequeños, podemos suponer que \mathbf{i} y \mathbf{q} son funciones lineales de $\mathbf{grad} \mu$ y $\mathbf{grad} T$.[†] De acuerdo con ello, escribiremos \mathbf{i} y \mathbf{q} como

$$\mathbf{i} = -\alpha \mathbf{grad} \mu - \beta \mathbf{grad} T, \quad \mathbf{q} = -\delta \mathbf{grad} \mu - \gamma \mathbf{grad} T + \mu \mathbf{i}.$$

Existe una relación simple entre los coeficientes β y δ que es una consecuencia de un *principio de simetría para los coeficientes cinéticos*. Este principio de simetría tiene la forma siguiente.[‡]

Consideremos un sistema cerrado cualquiera, y sean x_1, x_2, \dots , algunas magnitudes que caracterizan el estado del mismo. Sus valores de equilibrio se determinan por el hecho de que, en el equilibrio estadístico, la entropía S del sistema completo debe ser un máximo, es decir, debemos tener $X_a = 0$ para todo a , en donde X_a designa la derivada

$$X_a = -\partial S / \partial x_a. \quad (58.1)$$

Supongamos que el sistema está en un estado próximo al equilibrio. Esto significa que todos los valores x_a difieren muy poco de sus valores de equilibrio y que las derivadas X_a son pequeñas. Se producirán procesos en el sistema que tenderán a llevarlos hacia el equilibrio. Las magnitudes x_a son funciones del tiempo y su variación respecto al mismo viene dada por las derivadas temporales \dot{x}_a ; expresaremos estas últimas como funciones de X_a , y desarrollaremos estas funciones en serie. Deteniéndonos en los términos de primer orden, tenemos

$$\dot{x}_a = -\sum_b \gamma_{ab} X_b. \quad (58.2)$$

El principio de simetría para los coeficientes cinéticos establece que los γ_{ab} (denominados *coeficientes cinéticos*) son simétricos respecto al sufijo a y b :

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba}. \quad (58.3)$$

La variación respecto al tiempo de la entropía S es

$$\dot{S} = -\sum_a X_a \dot{x}_a. \quad (58.4)$$

[†] Los flujos \mathbf{q} e \mathbf{i} son independientes del gradiente de presiones (para unas magnitudes $\mathbf{grad} \mu$ y $\mathbf{grad} T$ dadas), por la misma razón que la dada respecto a \mathbf{q} en § 49.

[‡] Ver *Física Estadística*, § 119, Editorial Reverté, Barcelona.

Ahora supongamos que los valores propios x_a son diferentes en distintos puntos del sistema, es decir, que cada elemento de volumen tiene sus propios valores de x_a . Esto es, supongamos que las magnitudes x_a son funciones de las coordenadas. Entonces, en la expresión dada para \dot{S} , además de sumar respecto a a , debemos integrar respecto al volumen del sistema:

$$\dot{S} = - \int \sum_a X_a \dot{x}_a dV. \quad (58.4a)$$

Normalmente es cierto que los valores de \dot{x}_a en un punto determinado cualquiera dependen únicamente de los valores de X_a en dicho punto. En este caso podemos escribir la relación existente entre \dot{x}_a y X_a para cada punto del sistema y obtendremos las mismas fórmulas que antes.[†]

En el problema que estamos considerando, tomaremos como valores de las \dot{x}_a los componentes de los vectores \mathbf{i} y $\mathbf{q} - \mu\mathbf{i}$. Entonces, vemos en comparación con (57.7) y (58.4a) que los valores de X_a son, respectivamente, los componentes de los vectores $(1/T) \mathbf{grad} \mu$ y $(1/T^2) \mathbf{grad} T$. Los coeficientes cinéticos γ_{ab} son los coeficientes de estos vectores en las ecuaciones

$$\mathbf{i} = -\alpha T \left(\frac{\mathbf{grad} \mu}{T} \right) - \beta T^2 \left(\frac{\mathbf{grad} T}{T^2} \right),$$

$$\mathbf{q} - \mu\mathbf{i} = -\delta T \left(\frac{\mathbf{grad} \mu}{T} \right) - \gamma T^2 \left(\frac{\mathbf{grad} T}{T^2} \right).$$

Mediante la simetría de los coeficientes cinéticos debemos tener $\beta T^2 = \delta T$, o sea, $\delta = \beta T$. Esta es la relación requerida.

Por lo tanto, podemos escribir los flujos \mathbf{i} y \mathbf{q} como

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= -\alpha \mathbf{grad} \mu - \beta \mathbf{grad} T, \\ \mathbf{q} &= -\beta T \mathbf{grad} \mu - \gamma \mathbf{grad} T + \mu \mathbf{i}, \end{aligned} \quad (58.5)$$

con sólo tres coeficientes independientes, α , β y γ . Es conveniente eliminar $\mathbf{grad} \mu$ de la expresión correspondiente al flujo térmico, sustituyéndole por \mathbf{i} y $\mathbf{grad} T$. Entonces, tenemos

$$\mathbf{i} = -\alpha \mathbf{grad} \mu - \beta \mathbf{grad} T, \quad (58.6)$$

$$\mathbf{q} = (\mu + \beta T/\alpha) \mathbf{i} - \kappa \mathbf{grad} T, \quad (58.7)$$

en donde

$$\kappa = \gamma - \beta^2 T/\alpha. \quad (58.8)$$

[†] Con objeto de aplicar las relaciones obtenidas para un conjunto discreto de magnitudes a una distribución continua, y hablando estrictamente, deberíamos escribir la integral (58.4a) como una suma extendida a regiones pequeñas pero finitas ΔV del cuerpo (ver § 132); entonces en la definición de los coeficientes γ_{ab} también interviene ΔV . Sin embargo, en el caso presente, este procedimiento es innecesario, puesto que únicamente hacemos uso de la simetría de los coeficientes cinéticos y no de sus valores reales.

Si el flujo de difusión \mathbf{i} es cero, tenemos una *conducción térmica pura*. Para que esto sea así, T y μ deben satisfacer la ecuación $\alpha \mathbf{grad} \mu + \beta \mathbf{grad} T = 0$, o sea, $\alpha d\mu + \beta dT = 0$. La integración de esta ecuación da una relación de la forma $f(c, T) = 0$ que no contiene las coordenadas explícitamente. (El potencial químico es una función de la presión, lo mismo que de c y T , pero en el equilibrio la presión es constante.) Esta relación determina la dependencia de la concentración con la temperatura que debe ser válida si no existe flujo de difusión. Además, para $\mathbf{i} = 0$, tenemos a partir de (58.7)

$$\mathbf{q} = -\kappa \mathbf{grad} T,$$

de modo que κ es precisamente la conductividad térmica.

Pasamos ahora a las variables normales p , T y c . Tenemos

$$\mathbf{grad} \mu = (\partial \mu / \partial c)_{p,T} \mathbf{grad} c + (\partial \mu / \partial T)_{c,p} \mathbf{grad} T + (\partial \mu / \partial p)_{c,T} \mathbf{grad} p.$$

En el último término podemos sustituir la derivada $(\partial \mu / \partial p)_{c,T}$ por $(\partial V / \partial c)_{p,T}$, siendo V el volumen específico.[†] Sustituyendo en (58.6) y (58.7), y poniendo

$$D = \frac{\alpha}{\rho} \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{T,p}, \quad (58.9)$$

$$\rho k_T D / T = \alpha (\partial \mu / \partial T)_{c,p} + \beta,$$

$$k_p = p (\partial V / \partial c)_{p,T} / (\partial \mu / \partial c)_{p,T}, \quad (58.10)$$

obtenemos

$$\mathbf{i} = -\rho D [\mathbf{grad} c + (k_T / T) \mathbf{grad} T + (k_p / p) \mathbf{grad} p], \quad (58.11)$$

$$\mathbf{q} = [k_T (\partial \mu / \partial c)_{p,T} - T (\partial \mu / \partial T)_{p,c} + \mu] \mathbf{i} - \kappa \mathbf{grad} T. \quad (58.12)$$

El coeficiente D se denomina *coeficiente de difusión* o *coeficiente de transferencia de masas*; da el flujo de difusión cuando está presente un solo gradiente de concentración. El flujo de difusión debido al gradiente de temperaturas viene dado por el *coeficiente de difusión térmica* $k_T D$; la magnitud adimensional k_T es el *cociente de difusión térmica*.

El último término en (58.11) únicamente es necesario tenerlo en cuenta cuando existe un gradiente de presiones considerable en el fluido (producido por un campo externo, por ejemplo). El coeficiente $k_p D$ puede denominarse *coeficiente de barodifusión* o *coeficiente de difusión barométrica*. Debe señalarse que, según la fórmula (58.10), la magnitud adimensional k_p queda totalmente determinada por las propiedades termodinámicas únicamente.

[†] La igualdad de ambas derivadas se deduce de la identidad termodinámica:

$$d\phi = -s dT + V dp + \mu dc,$$

siendo ϕ el potencial termodinámico por unidad de masa:

$$(\partial \mu / \partial p)_{c,T} = \partial^2 \phi / \partial p \partial c = (\partial V / \partial c)_{p,T}.$$

En un fluido simple no existe, como es natural, flujo de difusión. De aquí que resulte claro que k_T y k_p deben anularse en cada uno de los dos casos límites $c = 0$ y $c = 1$.

La condición del crecimiento de la entropía determina ciertas restricciones en los coeficientes de las fórmulas (58.6) y (58.7). Sustituyendo estas fórmulas en la expresión (57.7) para la variación respecto al tiempo de la entropía, se encuentra

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho s dV = \int \frac{\kappa(\text{grad } T)^2}{T^2} dV + \int \frac{\mathbf{i}^2}{\alpha T} dV + \dots \quad (58.13)$$

Es evidente a partir de esta expresión, que, además de la condición $\kappa > 0$ que ya conocemos, debemos tener también $\alpha > 0$. Recordando que la derivada $(\partial\mu/\partial c)_{p,T}$ es siempre positiva,[†] encontramos, por tanto, que el coeficiente de difusión debe ser positivo: $D > 0$. Sin embargo, las magnitudes k_T y k_p pueden ser positivas o negativas.

No nos entretendremos ahora en escribir las ecuaciones generales, que son muy largas, obtenidas mediante la sustitución de las expresiones anteriores correspondientes a \mathbf{i} y a \mathbf{q} en (57.3) y (57.6). Consideraremos únicamente el caso en que no existe un gradiente de presiones significativo, mientras que la concentración y temperatura del fluido varía tan poco que los coeficientes en las expresiones (58.11) y (58.12) pueden suponerse constantes, aunque sean, en general, funciones de c y T . Además, supondremos que no existe ningún movimiento macroscópico en el fluido, excepto aquél que pueda originarse por los gradientes de temperatura y de concentración. La velocidad de este movimiento es proporcional a los gradientes y los términos (57.3) y (57.6) en los que interviene la velocidad son, por tanto, magnitudes de segundo orden, pudiendo despreciarse. El término $-\mathbf{i} \cdot \text{grad } \mu$ en (57.6) es también de segundo orden. Así pues, tenemos $\rho \partial c / \partial t + \text{div } \mathbf{i} = 0$, $\rho T \partial s / \partial t + \text{div}(\mathbf{q} - \mu \mathbf{i}) = 0$.

Sustituyendo los valores de \mathbf{i} y \mathbf{q} tomados de las expresiones (58.11) y (58.12) (sin el término en $\text{grad } p$), y transformando la derivada $\partial s / \partial t$ del modo siguiente:[‡]

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{c,p} \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial s}{\partial c} \right)_{T,p} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c_p}{T} \frac{\partial T}{\partial t} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{p,c} \frac{\partial c}{\partial t},$$

obtenemos después de un cálculo sencillo

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D[\Delta c + (k_T/T)\Delta T], \quad (58.14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - (k_T/c_p)(\partial \mu / \partial c)_{p,T} \frac{\partial c}{\partial t} = \chi \Delta T. \quad (58.15)$$

[†] Ver *Física Estadística*, § 95, Editorial Reverté, Barcelona.

[‡] Para

$$(\partial s / \partial c)_{p,T} = -\partial^2 \phi / \partial c \partial T = -(\partial \mu / \partial T)_{p,c}.$$

Este sistema de ecuaciones lineales determina las distribuciones de temperatura y de concentración dentro del fluido.

Existe el caso particularmente importante en el que la concentración es pequeña. Cuando la concentración tiende hacia cero, el coeficiente de difusión tiende hacia una constante finita, pero el coeficiente de difusión térmica tiende hacia cero. De aquí que k_T sea pequeño en el caso de concentraciones pequeñas y podamos despreciar el término $k_T \Delta T$ en (58.14), que se transforma entonces en la ecuación de difusión

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c. \quad (58.16)$$

Las condiciones límites correspondientes a la solución de (58.16) son diferentes en los distintos casos. En la superficie de un cuerpo insoluble en el fluido la componente normal del flujo de difusión $\mathbf{i} = -\rho D \mathbf{grad} c$ debe anularse, es decir, podemos tener $\partial c / \partial n = 0$. Sin embargo, si existe difusión desde un cuerpo que se disuelve en el fluido, se establece rápidamente el equilibrio cerca de su superficie y la concentración en el fluido junto al cuerpo es la concentración de saturación c_0 ; la difusión hacia fuera de esta capa tiene lugar más lentamente que el proceso de disolución. La condición límite en dicha superficie es, por lo tanto, $c = c_0$. Finalmente, si una superficie sólida absorbe la sustancia que se difunde y que incide sobre ella, la condición límite es $c = 0$; tenemos un ejemplo de este caso en el estudio de las reacciones químicas que se producen en la superficie de un sólido.

Como la ecuación de la difusión pura (58.16) y la conducción térmica (50.4) tienen exactamente la misma forma, podemos aplicar inmediatamente todas las fórmulas deducidas en §§ 51 y 52, sustituyendo simplemente T por c y χ por D . La condición límite para una superficie térmicamente aislada corresponde a la de una superficie insoluble, mientras que una superficie mantenida a una temperatura constante corresponde a una superficie soluble a partir de la cual tiene lugar la difusión.

En particular, podemos escribir, por analogía con (51.6), la solución siguiente de la ecuación de difusión:

$$c(r) = \frac{M}{8\rho(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}} \exp(-r^2/4Dt). \quad (58.17)$$

Esta expresión nos da la distribución del soluto en un instante cualquiera, si en el instante $t = 0$ está todo concentrado en el origen (siendo M la cantidad total de soluto).

PROBLEMA

Determinar el coeficiente de difusión barométrica correspondiente a una mezcla de dos gases perfectos.

Solución. Tenemos para el volumen específico $V = kT(n_1 + n_2)/p$ (la notación es la que utilizábamos en la segunda nota a pie de página del § 57), y los potenciales químicos son†

$$\begin{aligned}\mu_1 &= f_1(p, T) + kT \log[n_1/(n_1 + n_2)], \\ \mu_2 &= f_2(p, T) + kT \log[n_2/(n_1 + n_2)].\end{aligned}$$

Los números n_1 y n_2 se expresan en función de la concentración del primer componente mediante las relaciones $n_1m_1 = c$, $n_2m_2 = 1 - c$. Un cálculo utilizando las fórmulas (58.10) da

$$k_p = (m_2 - m_1)c(1 - c) \left[\frac{1 - c}{m_2} + \frac{c}{m_1} \right].$$

§ 59. Difusión de partículas suspendidas en un fluido

Bajo la influencia del movimiento molecular en un fluido, las partículas suspendidas en el mismo se mueven de un modo irregular (denominado *movimiento browniano*). Supongamos que una de dichas partículas está situada en el origen en el instante inicial. El movimiento siguiente puede considerarse como una difusión en la cual la concentración se representa por la probabilidad de hallar la partícula en un elemento de volumen particular determinado. Por tanto, para determinar esta probabilidad podemos utilizar la solución (58.17) de la ecuación de difusión. La posibilidad de emplear este procedimiento se debe al hecho de que, en el caso de difusión en disoluciones débiles [es decir, cuando $c \ll 1$, que es cuando puede utilizarse la ecuación de difusión en la forma (58.16)], las partículas del soluto difícilmente se influyen entre sí y, por lo tanto, el movimiento de cada partícula puede considerarse independientemente.

Sea $w(r, t)dr$ la probabilidad de hallar la partícula a una distancia comprendida entre r y $r + dr$ a partir del origen en el instante t . Poniendo en (58.17) $M/\rho = 1$ y multiplicando por el volumen $4\pi r^2 dr$ de la capa esférica, tenemos

$$w(r, t)dr = \frac{1}{2\sqrt{\pi D^3 t^3}} \exp(-r^2/4Dt) r^2 dr. \quad (59.1)$$

Determinemos la distancia cuadrática media respecto al origen en el instante t . Tenemos

$$\bar{r^2} = \int_0^\infty r^2 w(r, t)dr. \quad (59.2)$$

El resultado, utilizando (59.1), es

$$\bar{r^2} = 6Dt. \quad (59.3)$$

† Ver *Física Estadística*, § 92, Editorial Reverté, Barcelona.

Así pues, la distancia media recorrida por la partícula durante un tiempo cualquiera es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo.

El coeficiente de difusión para las partículas suspendidas en un fluido puede calcularse a partir de lo que se denomina su *movilidad*. Supongamos que actúa sobre las partículas una cierta fuerza externa constante \mathbf{f} (la fuerza de la gravedad, por ejemplo). En un estado estacionario, la fuerza que actúa sobre cada partícula debe estar equilibrada por la fuerza de arrastre o de rozamiento ejercida por el fluido sobre la partícula móvil. Cuando la velocidad es pequeña, la fuerza de rozamiento es proporcional a ella y vale v/b , por ejemplo, siendo b una constante. Igualando esta expresión a la fuerza externa \mathbf{f} , tenemos

$$\mathbf{v} = b\mathbf{f}, \quad (59.4)$$

es decir, la velocidad adquirida por la partícula bajo la acción de la fuerza externa es proporcional a esta fuerza. La constante b se denomina *movilidad* y puede calcularse, en principio, a partir de las ecuaciones de la dinámica de fluidos. Por ejemplo, en el caso de partículas esféricas de radio R , la fuerza de arrastre es $6\pi\eta Rv$ [ver (20.14)], y, por tanto, la movilidad es

$$b = 1/(6\pi\eta R). \quad (59.5)$$

En el caso de partículas no esféricas, el arrastre depende de la dirección del movimiento; puede escribirse en forma $a_{ik}v_k$, siendo a_{ik} un tensor simétrico [ver (20.15)]. Para calcular la movilidad hemos de promediar respecto a todas las orientaciones de la partícula; si a_1, a_2, a_3 son los valores principales del tensor simétrico a_{ik} , tendremos entonces

$$b = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right). \quad (59.6)$$

La movilidad b está relacionada de modo simple con el coeficiente de difusión D . Para deducir esta relación escribamos ahora el flujo de difusión \mathbf{i} , que contiene el término normal $-\rho D \mathbf{grad} c$ debido al gradiente de concentración (suponemos que la temperatura es constante), y también un término en el que interviene la velocidad adquirida por la partícula debida a las fuerzas externas. Este último término es evidente $\rho c \mathbf{v}$. Así pues,

$$\mathbf{i} = -\rho D \mathbf{grad} c + \rho c b \mathbf{f}, \quad (59.7)$$

en donde hemos hecho uso de la expresión (59.4). En un estado de equilibrio termodinámico no existe difusión y el flujo \mathbf{i} debe ser nulo. La distribución de equilibrio de la concentración de partículas suspendidas en un fluido, en un campo externo, está determinada por la fórmula de Boltzmann, de acuerdo con la cual, $c = \text{constante} \times e^{-U/kT}$, siendo U la energía potencial de la partícula en el campo externo. Como $\mathbf{f} = -\mathbf{grad} U$, encontramos que

el gradiente de concentraciones de equilibrio debe ser $\text{grad } c = cf/kT$. Sustituyendo esta expresión en (59.7) e igualando 1 a cero, tenemos

$$D = kTb. \quad (59.8)$$

Esta expresión es la *relación de Einstein* entre el coeficiente de difusión y la movilidad.

Sustituyendo (59.5) en (59.8), encontramos la expresión siguiente para el coeficiente de difusión en el caso de partículas esféricas:

$$D = kT/6\pi\eta R. \quad (59.9)$$

Además del movimiento de traslación browniano y la difusión de partículas suspendidas, podemos considerar también su difusión y movimiento browniano de rotación. Así como el coeficiente de difusión de traslación se calcula en función de la fuerza de arrastre de rozamiento, del mismo modo el coeficiente de difusión por rotación puede expresarse en función de las fuerzas que actúan sobre una partícula que realiza un movimiento de rotación en el fluido.[†]

PROBLEMAS

Problema 1. Ciertas partículas ejecutan un movimiento browniano en un fluido limitado por una cara por una pared plana; las partículas que inciden sobre la pared «se adhieren» a ella. Determinar la probabilidad de que una partícula que está a una distancia x_0 de la pared en el tiempo $t = 0$ «se adhiera» a ella después de un tiempo t .

Solución. La distribución de probabilidades $w(x, t)$ (en donde x es la distancia desde la pared) está determinada por la ecuación de difusión, con la condición límite $w = 0$ para $x = 0$ y la condición inicial $w = \delta(x - x_0)$ para $t = 0$. Dicha solución viene dada por la fórmula (52.4) cuando se sustituye T por w , x por D y $T_0(x')$ en el integrando por $\delta(x' - x_0)$. Obtenemos, entonces,

$$w(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \{ \exp[-(x - x_0)^2/4Dt] - \exp[-(x + x_0)^2/4Dt] \}.$$

La probabilidad de «adherirse» a la pared por unidad de tiempo viene dada por el flujo de difusión $D\partial w/\partial x$ para $x = 0$, y la probabilidad buscada $W(t)$ respecto al tiempo t es

$$W(t) = D \int_0^t [\partial w / \partial x]_{x=0} dt.$$

† Si se suspenden partículas (no esféricas) en una corriente plano-paralela con un gradiente de velocidades transversal, se establece una distribución definida de las partículas en cuanto a su orientación en el espacio como resultado de la acción simultánea de las fuerzas orientadoras de la dinámica del fluido y el movimiento browniano desorientador. Para la solución de este problema en el caso de partículas elipsoidales, ver A. PETERLIN y H. A. STUART, *Zeitschrift für Physik*, 112, 1, 1939.

Sustituyendo el valor de w , se encuentra

$$W(t) = 1 - \operatorname{erf}[x_0/2\sqrt{Dt}].$$

Problema 2. Determinar el orden de magnitud del tiempo τ durante el cual una partícula suspendida en un fluido gira un ángulo grande alrededor de su eje.

Solución. El tiempo buscado τ es aquél durante el cual una partícula con movimiento browniano se mueve a lo largo de una distancia del orden de su dimensión lineal a . De acuerdo con (59.3), tenemos $\tau \sim a^2/D$, y según (59.9), $D \sim kT/\eta a$. Así pues, $\tau \sim \eta a^3/kT$.

CAPÍTULO VII

FENÓMENOS SUPERFICIALES

§ 60. Fórmula de Laplace

En este capítulo estudiaremos los fenómenos que se producen cerca de la superficie que separa dos medios continuos (en realidad los medios están separados por una capa de transición fina, pero esta capa es tan delgada que puede considerarse como una superficie). Si la superficie de separación es curva, las presiones cerca de la misma en ambos medios son diferentes. Para determinar la diferencia de presiones (denominada *presión superficial*) escribiremos a continuación la condición de que los medios estén en equilibrio termodinámico conjuntamente, teniendo en cuenta las propiedades de la superficie de separación.

Supongamos que la superficie de separación sufre un desplazamiento infinitesimal. En cada punto de la superficie no desplazada dibujemos la normal. La longitud del segmento de la normal, comprendida entre los puntos en que corta a la superficie desplazada y no desplazada, se designa por $\delta\zeta$. Entonces un elemento de volumen comprendido entre ambas superficies es $\delta\zeta df$, siendo df un elemento de superficie. Sean p_1 y p_2 las presiones en ambos medios y admitamos que $\delta\zeta$ es positivo si el desplazamiento de la superficie es hacia el medio 2 (por ejemplo). Entonces el trabajo necesario para realizar la variación de volumen anterior es

$$\int (-p_1 + p_2) \delta\zeta df.$$

El trabajo total δR realizado en el desplazamiento de la superficie se obtiene sumando a este trabajo el conectado con la variación de área de la superficie. Esta parte del trabajo es proporcional a la variación δf del área de la superficie y puede ponerse como $\alpha\delta f$, en donde α se denomina el *coeficiente de tensión superficial*.[†] Así pues, el trabajo total es

$$\delta R = - \int (p_1 - p_2) \delta\zeta df + \alpha\delta f. \quad (60.1)$$

[†] En el caso de la interfase aire-agua, $\alpha = 72,5$ erg/cm² a 20°C; aire y parafina, $\alpha = 24$ a 20°C. La tensión superficial de los metales líquidos es muy grande; por ejemplo, en una interfase aire-mercurio, $\alpha = 547$ a 175°C; para el aire y el platino líquido, $\alpha = 1820$ a 2000°C. La tensión superficial entre el helio líquido y su vapor es muy pequeña, $\alpha = 0,24$ a —270°C.

Como es natural, la condición de equilibrio termodinámico exige que $\delta R = 0$.

A continuación, supongamos que R_1 y R_2 son los radios principales de curvatura en un punto determinado de la superficie; consideraremos R_1 y R_2 como positivos si se trazan en el medio 1. Entonces los elementos de longitud dl_1 y dl_2 sobre la superficie en sus secciones principales reciben incrementos $(\delta\xi/R_1)dl_1$ y $(\delta\xi/R_2)dl_2$, respectivamente, cuando la superficie sufre un desplazamiento infinitesimal; aquí dl_1 y dl_2 se consideran como elementos de las circunferencias de radios R_1 y R_2 . De aquí que el elemento superficial $df = dl_1dl_2$, resulte, después del desplazamiento,

$$dl_1(1 + \delta\xi/R_1)dl_2(1 + \delta\xi/R_2) \approx dl_1dl_2(1 + \delta\xi/R_1 + \delta\xi/R_2),$$

es decir, varía en la cantidad $\delta\xi df/(1/R_1 + 1/R_2)$. A partir de aquí, vemos que la variación total del área de la superficie de separación es

$$\delta f = \int \delta\xi \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) df. \quad (60.2)$$

Sustituyendo estas expresiones en (60.1) e igualando a cero, obtenemos la ecuación de equilibrio en la forma

$$\int \delta\xi \left((p_1 - p_2) - \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right) df = 0.$$

Esta condición debe ser válida para cualquier desplazamiento infinitesimal de la superficie, es decir, para todo $\delta\xi$. De aquí que la expresión entre llaves deba ser idénticamente igual a cero:

$$p_1 - p_2 = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (60.3)$$

Esta es la *fórmula de Laplace* que da la presión superficial. Vemos que, si R_1 y R_2 son positivos, $p_1 - p_2 > 0$. Esto significa que la presión es mayor en el medio cuya superficie es convexa. Si $R_1 = R_2 = \infty$, es decir, la superficie de separación es plana, la presión es la misma en cualquier medio, como era de esperar.

Aplicemos la fórmula (60.3) para investigar el equilibrio mecánico de dos medios en contacto. Admitamos que no existen fuerzas externas que actúan entre ellos en la superficie de separación o en los propios medios. Utilizando la fórmula (60.3) podemos escribir entonces la ecuación de equilibrio como

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{constante}. \quad (60.4)$$

Así pues, la suma de las curvaturas debe ser una constante en cualquier superficie libre de separación. Si la superficie completa es libre, la condi-

ción (60.4) significa que debe ser esférica (por ejemplo, la superficie de una pequeña gota, en la cual puede despreciarse el efecto de la gravedad). Sin embargo, si la superficie está apoyada a lo largo de una curva determinada (por ejemplo, una película de líquido establecida sobre un marco sólido), su forma es menos simple.

Cuando se aplica la condición (60.4) al equilibrio de películas delgadas apoyadas en marcos rígidos, debe ser cero la constante del segundo miembro. En este caso, la suma $1/R_1 + 1/R_2$ debe ser la misma en todos los puntos de la superficie libre de la película, mientras que en caras opuestas de la misma debe tener signos opuestos, puesto que si un lado es convexo el otro será cóncavo y los radios de curvatura son los mismos pero con signos opuestos. De aquí se deduce que la condición de equilibrio para una película delgada es

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0. \quad (60.5)$$

Consideremos ahora la condición de equilibrio en la superficie de un medio dentro de un campo gravitatorio. Admitiremos por sencillez que el medio 2 es simplemente la atmósfera, cuya presión puede considerarse como constante en toda la superficie y que el medio 1 es un fluido incompresible. Entonces tenemos $p_2 = \text{constante}$, mientras que p_1 , la presión del fluido, es según (3.2) $p_1 = \text{constante} - \rho g z$, midiéndose la coordenada z verticalmente hacia arriba. Así pues, la condición de equilibrio se transforma en

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{\rho g z}{\alpha} = \text{constante}. \quad (60.6)$$

Debe mencionarse que, para determinar la forma de equilibrio de la superficie del fluido en casos particulares, es normalmente conveniente utilizar la condición de equilibrio, no en la forma (60.6), sino la obtenida directamente resolviendo el problema variacional de minimizar la energía libre total. La energía libre interna de un fluido incompresible depende únicamente del volumen del mismo y no de la forma de su superficie. De esta última depende, en primer lugar, la energía libre de la superficie $\int z \, df$, y, en segundo lugar, la energía en el campo exterior (gravedad), que es $\rho \int z \, dV$. Así pues, la condición de equilibrio puede escribirse como

$$\alpha \int df + \rho \int z \, dV = \text{mínimo}. \quad (60.7)$$

El mínimo habrá de determinarse sometido a la condición

$$\int dV = \text{constante}, \quad (60.8)$$

que expresa el hecho de que el volumen del fluido es constante.

Las constantes α , ρ y g aparecen en las condiciones de equilibrio (60.6) y (60.7) únicamente en la forma $\alpha/g\rho$. Este cociente tiene las dimensiones de cm^2 . La longitud

$$a = \sqrt{(2\alpha/g\rho)} \quad (60.9)$$

se denomina *constante de capilaridad* para la sustancia de que se trata.[†] La forma de la superficie del fluido está determinada únicamente por esta magnitud. Si la constante capilar es grande en comparación con la dimensión del medio, podemos despreciar la gravedad en la determinación de la forma de la superficie.

Con objeto de hallar la forma de la superficie a partir de la condición (60.4) o (60.6), necesitamos fórmulas que determinen los radios de curvatura, dada la forma de la superficie. Estas fórmulas se obtienen en geometría diferencial, pero en el caso general son un poco complicadas. Se simplifican considerablemente cuando las superficies se desvían de un plano sólo ligeramente. Deduciremos directamente las fórmulas apropiadas sin utilizar los resultados generales de la geometría diferencial.

Sea $z = \zeta(x, y)$ la ecuación de la superficie; supongamos que ζ es pequeña en todos los puntos, es decir, que la superficie se desvía sólo ligeramente del plano $z = 0$. Como sabemos bien, el área f de la superficie viene dada por la integral

$$f = \int \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right]} dx dy,$$

o sea, para valores pequeños de ζ , aproximadamente por

$$f = \int \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right] dx dy. \quad (60.10)$$

La variación δf es

$$\delta f = \int \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \right\} dx dy.$$

Integrando por partes, tenemos

$$\delta f = - \int \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \delta \zeta dx dy.$$

Comparando este resultado con (60.2), se obtiene

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right). \quad (60.11)$$

[†] En el caso del agua (por ejemplo), $\alpha = 0,122 \text{ cm a } 20^\circ\text{C}$.

Esta es la fórmula buscada; determina la suma de las curvaturas de una superficie ligeramente curvada.

Cuando están en equilibrio tres medios en contacto, las superficies de separación son tales que la resultante de las fuerzas superficie-tensión es nula en la línea común de intersección. Esta condición implica que las superficies de separación deben cortarse en ángulos (denominados *ángulos de contacto*) determinados por los valores de los coeficientes de tensión superficial.[†]

Finalmente, consideraremos la cuestión de las condiciones límites que deben satisfacerse en la frontera entre dos fluidos en movimiento, cuando se tienen en cuenta las fuerzas de tensión superficial. Si se desprecian estas últimas fuerzas, tendremos que en la frontera entre los fluidos $n_k(\sigma_{2,ik} - \sigma_{1,ik}) = 0$, lo cual expresa la igualdad de las fuerzas de rozamiento viscoso en la superficie de cada fluido. Cuando se incluye la tensión superficial, hemos de sumar en el segundo miembro una fuerza determinada en su módulo por la fórmula de Laplace y dirigida a lo largo de la normal:

$$n_k \sigma_{2,ik} - n_k \sigma_{1,ik} = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n_i. \quad (60.12)$$

Esta ecuación puede escribirse también en la forma

$$(p_1 - p_2)n_i = (\sigma'_{1,ik} - \sigma'_{2,ik})n_k + \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n_i. \quad (60.13)$$

Si ambos fluidos son ideales, las tensiones viscosas σ'_{ik} son cero, y nos encontramos de nuevo con la ecuación sencilla (60.3).

Sin embargo, la condición (60.13) no es todavía completamente general. La razón consiste en que el coeficiente de tensión superficial α puede no ser constante en toda la superficie (por ejemplo, teniendo en cuenta una variación de temperatura). Entonces, además de la fuerza normal (que es cero en el caso de una superficie plana), existe otra fuerza tangencial a la superficie. Del mismo modo que existe una fuerza volumétrica — $\text{grad } p$ por unidad de volumen (ver § 2) en aquellos casos en que la presión es no uniforme, así tenemos aquí una fuerza tangencial $f_i = \text{grad } \alpha$ por unidad de área de la superficie de separación. En este caso tomaremos el gradiente como positivo, debido a que las fuerzas de tensión superficial tienden a reducir el área de la superficie, mientras que la fuerza de presión tiende a aumentar el volumen. Sumando esta fuerza al segundo miembro de la ecuación (60.13), obtenemos la condición límite

$$\left[p_1 - p_2 - \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] n_i = (\sigma'_{1,ik} - \sigma'_{2,ik})n_k + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}; \quad (60.14)$$

[†] Ver, por ejemplo, *Física Estadística*, § 145, Editorial Reverté, Barcelona.

el vector unidad normal \mathbf{n} está dirigido hacia el medio 1. Obsérvese que esta condición puede satisfacerse únicamente en el caso de un fluido viscoso: en un fluido ideal, $\sigma'_{ik} = 0$ y el primer miembro de la ecuación (60.14) es un vector dirigido a lo largo de la normal, mientras que el segundo miembro es, en este caso, un vector tangencial. Esta igualdad no puede ser válida excepto, como es natural, en el caso trivial en que ambos miembros son cero.

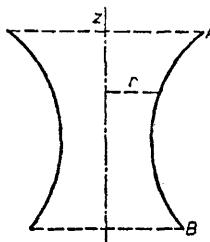


FIG. 31

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la forma de una película de líquido apoyada en dos marcos circulares con sus centros situados en una línea perpendicular a sus planos, que a su vez son paralelos; la figura 31 muestra una sección recta de la película.

Solución. El problema equivale al de hallar la superficie que tenga la menor área de las que pueden formarse mediante la revolución alrededor de la línea $r = 0$ de una curva $r = r(z)$ que pasa por dos puntos dados A y B . El área de una superficie de rotación es

$$f = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} r \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]} dz.$$

Es bien conocido que el mínimo de una integral de la forma

$$\int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) dt$$

viene dado por la ecuación $L - \dot{x} \partial L / \partial \dot{x} = \text{constante}$. En el caso presente esto conduce a

$$r = c_1 \sqrt{[1 + (dr/dz)^2]},$$

de aquí tenemos por integración que $r = c_1 \cosh [(z - c_2)/c_1]$. Así pues, la superficie buscada (denominada una *catenoide*) es la formada por la revolución de una catenaria. Las constantes c_1 y c_2 deben escogerse de modo que la curva $r(z)$ pase a través de los puntos dados A y B . El valor de c_2 depende únicamente de la selección del origen de z . Sin embargo, para la constante c_1 se obtienen dos valores, de los cuales debe escogerse el mayor (el menor no da un mínimo de la integral).

Cuando aumenta la distancia h entre los marcos se alcanza un valor para el cual la ecuación correspondiente a la constante c_1 deja de tener una raíz real. Para un valor mayor de h , solamente la forma compuesta por una película sobre cada marco es esta-

ble. Por ejemplo, en el caso de dos marcos de radios iguales R la forma catenoide es imposible para una distancia h entre los marcos que sea mayor de $1,33 R$.

Problema 2. Determinar la forma de la superficie de un fluido en un campo gravitatorio y limitado por un lado por una pared plana vertical. El ángulo de contacto entre el fluido y la pared es θ (figura 32).

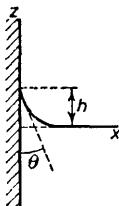


FIG. 32

Solución. Tomemos los ejes coordenados indicados en la figura 32. El plano $x = 0$ es el plano de la pared y $z = 0$ es el plano de la superficie del fluido lejos de la pared. Los radios de curvatura de la superficie $z = z(x)$ son $R_1 = \infty$, $R_2 = -(1+z'^2)^{3/2}/z''$, de modo que la ecuación (60.6) se transforma en

$$\frac{2z}{a^2} - \frac{z''}{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}} = \text{constante}, \quad (1)$$

siendo a la constante de capilaridad. Para $x = \infty$ debemos tener $z = 0$, $1/R_2 = 0$, y, por tanto, la constante es cero. Una primera integral de la ecuación resultante es

$$\frac{1}{\sqrt{(1+z'^2)}} = A - \frac{z^2}{a^2}. \quad (2)$$

A partir de la condición en el infinito ($z = z' = 0$ para $x = \infty$) tenemos $A = 1$. Una segunda integración da

$$x = -\frac{a}{\sqrt{2}} \cosh^{-1} \frac{\sqrt{2a}}{z} + a \sqrt{\left(2 - \frac{z^2}{a^2}\right)} + x_0.$$

Debe escogerse la constante x_0 , de modo que en la superficie de la pared ($x = 0$) tengamos $z' = -\cotg \theta$, o sea, según (2), $z = h$, en donde $h = a\sqrt{1 - \sin \theta}$ es la altura a la cual se eleva el fluido en la propia pared.

Problema 3. Determinar la forma de la superficie de un fluido que se eleva entre dos placas planas verticales (figura 33).

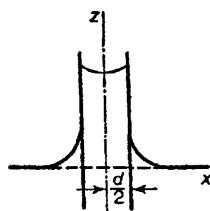


FIG. 33

Solución. Tomemos el plano yz como el intermedio entre ambas placas y supongamos que el plano xy coincide con la superficie del fluido lejos de las placas. En la ecuación (1) del problema 2, que da la condición de equilibrio y , por tanto, es válida en todos los puntos de la superficie del fluido (tanto entre las placas como fuera), las condiciones en $x = \infty$ nos dicen de nuevo que la constante es cero. En la integral (2), la constante A es ahora diferente de acuerdo con que $|x| > d/2$ o $|x| < d/2$ [teniendo una discontinuidad la función $z(x)$ para $|x| = d/2$]. Para el espacio situado entre las placas, las condiciones son $z' = 0$ para $x = 0$ y $z' = \cot \theta$ para $x = d/2$, siendo θ el ángulo de contacto. De acuerdo con (2) tenemos para las alturas $z_0 = z(0)$ y $z_1 = z(d/2)$: $z_0 = a\sqrt{(A - 1)}$, $z_1 = a\sqrt{(A - \sin \theta)}$. Integrando (2), se obtiene

$$x = \int_{z_0}^z \frac{(A - z^2/a^2)dz}{\sqrt{[1 - (A - z^2/a^2)^2]}} = \frac{1}{2}a \int_0^{a\sqrt{(A - \cos \xi)}=z} \frac{\cos \xi d\xi}{\sqrt{(A - \cos \xi)}},$$

en donde ξ es una nueva variable relacionada con z por $z = a\sqrt{(A - \cos \xi)}$. Esta integral es elíptica y no puede expresarse como un desarrollo de funciones elementales. La constante A se obtiene a partir de la condición de que $z = z_1$ para $x = d/2$, o sea,

$$d = a \int_0^{\frac{1}{2}\pi-\theta} \frac{\cos \xi d\xi}{\sqrt{(A - \cos \xi)}}.$$

Las fórmulas obtenidas anteriormente dan la forma de la superficie del fluido en el espacio situado entre las placas. Cuando $d \rightarrow 0$, A tiende a infinito. De aquí que tengamos para $d \ll a$

$$d \approx \frac{a}{\sqrt{A}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi-\theta} \cos \xi d\xi = \frac{a}{\sqrt{A}} \cos \theta,$$

o sea, $A = (a^2/d^2) \cos^2 \theta$. La altura a la cual se eleva el fluido es $z_0 \approx z_1 \approx (a^2/d) \cos \theta$; como es natural, también puede obtenerse directamente esta fórmula.

Problema 4. Una capa de fluido no uniformemente calentada y delgada descansa sobre una superficie sólida plana horizontal; su temperatura es una función determinada de la coordenada x en el plano, y podemos suponer (debido a que la capa es delgada) que es independiente de la coordenada z perpendicular a la capa. El calentamiento no uniforme da como resultado la aparición de un flujo estacionario y, en consecuencia, su espesor ζ varía en la dirección x . Determinar la función $\zeta(x)$.

Solución. La densidad del fluido ρ y la tensión superficial α son, junto con la temperatura, funciones conocidas de x . La presión del fluido es $p = p_0 + \rho g(\zeta - z)$, en donde p_0 es la presión atmosférica (la presión en la superficie libre); puede despreciarse la variación de la presión debida a la curvatura de la superficie. También puede suponerse que la velocidad en todos los puntos de la capa es paralela al eje x . La ecuación del movimiento es

$$\eta \partial^2 v / \partial z^2 = \partial p / \partial x = g[d(\rho \zeta)/dx - z dp/dx]. \quad (1)$$

En la superficie sólida ($z = 0$) tenemos $v = 0$, mientras que en la superficie libre ($z = \zeta$) debe cumplirse la condición límite (60.14); en este caso es $\eta(dv/dz)|_{z=\zeta} = d\alpha/dx$. Integrando

la ecuación (1) con estas condiciones, obtenemos

$$\eta v = gz(\zeta - \frac{1}{2}z)d(\rho\zeta)/dx - \frac{1}{6}gz(3\zeta^2 - z^2)d\rho/dx - z d\alpha/dx. \quad (2)$$

Puesto que el flujo es estacionario, el flujo de masa total a través de una sección recta de la capa debe ser cero:

$$\int_0^\zeta v dz = 0.$$

Sustituyendo (2), se tiene

$$\frac{1}{6}\rho \frac{d\zeta^2}{dx} + \frac{1}{2}\zeta^2 \frac{d\rho}{dx} = -\frac{1}{g} \frac{d\alpha}{dx},$$

que determina la función $\zeta(x)$. Integrando, obtenemos

$$g\zeta^2 = 3\rho^{-\frac{1}{2}} [\int \rho^{-\frac{1}{2}} d\alpha + \text{constante}]. \quad (3)$$

Si la temperatura (y por tanto ρ y α) varía sólo ligeramente, entonces puede escribirse (3) como

$$\zeta^2 = \zeta_0^2 (\rho_0/\rho)^{\frac{1}{2}} + 3(\alpha - \alpha_0)/\rho g,$$

en donde ζ_0 es el valor de ζ en un punto en donde $\rho = \rho_0$ y $\alpha = \alpha_0$.

§ 61. Ondas de capilaridad

Las superficies de los fluidos tienden a adquirir una forma de equilibrio, tanto bajo la acción de la fuerza de la gravedad como bajo la acción de las fuerzas de tensión superficial. Al estudiar las ondas en la superficie de un fluido en §§ 12 y 13, no tuvimos en cuenta estas últimas fuerzas. Veremos a continuación que la capilaridad tiene una influencia importante sobre las ondas de gravedad de pequeña longitud de onda.

Como en § 12, supondremos que la amplitud de las oscilaciones es pequeña en comparación con la longitud de onda. Para valor del potencial de velocidad tenemos como antes la ecuación $\Delta\phi = 0$. Sin embargo, la condición en la superficie del fluido es ahora diferente: la diferencia de presiones entre las dos caras de la superficie no es cero, como se supuso en § 12, sino que viene dada por la fórmula de Laplace (60.3).

Designemos por ζ la coordenada z de un punto de la superficie. Como ζ es pequeña, podemos utilizar la expresión (60.11), y escribir la fórmula de Laplace en la forma

$$p - p_0 = -\alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right).$$

Aquí p es la presión en el fluido cerca de la superficie y p_0 es la presión externa constante. Para p podemos sustituir, de acuerdo con (12.2), por

$$p = -\rho g \zeta - \rho \partial \phi / \partial t,$$

obteniéndose

$$\rho g \zeta + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0;$$

por las mismas razones que en § 12 podemos omitir la constante p_0 si volvemos a definir ϕ . Derivando esta relación respecto a t y sustituyendo $\partial \zeta / \partial t$ por $\partial \phi / \partial z$, obtenemos la condición límite sobre el potencial ϕ :

$$\rho g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0 \text{ para } z = 0. \quad (61.1)$$

Consideremos una onda plana que se propaga en la dirección del eje x . Como en § 12, obtenemos una solución de la forma $\phi = Ae^{kx} \cos(kx - \omega t)$. Se obtiene ahora la relación entre k y ω a partir de la condición límite (61.1), y resulta ser

$$\omega^2 = gk + \alpha k^3 / \rho. \quad (61.2)$$

Vemos que, en el caso de longitudes de onda largas, tales que $k \ll \sqrt{(g\rho/\alpha)}$, o sea, $k \ll 1/a$ (en donde a es la constante de capilaridad), puede despreciarse el efecto de la capilaridad y tenemos una onda de gravedad pura. En el caso opuesto de longitudes de onda cortas, puede despreciarse el efecto de la gravedad. Entonces,

$$\omega^2 = \alpha k^3 / \rho. \quad (61.3)$$

Estas ondas se denominan *ondas de capilaridad*. Los casos intermedios se denominan *ondas de gravedad y capilaridad*.

Determinemos también la naturaleza de las oscilaciones de una gota esférica de fluido incompresible bajo la acción de fuerzas capilares. Las oscilaciones hacen que la superficie de la gota se desvíe de su forma esférica. Como es normal, supondremos que la amplitud de las oscilaciones es pequeña.

Empezaremos por determinar el valor de la suma $1/R_1 + 1/R_2$ para una superficie ligeramente distinta de la de una esfera. A continuación, procederemos como en la deducción de la fórmula (60.11). El área de una superficie dada en coordenadas esféricas r, θ, ϕ^\dagger , mediante una función $r = r(\theta, \phi)$, es

$$f = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial r}{\partial \phi} \right)^2 \right]} r \sin \theta d\theta d\phi. \quad (61.4)$$

Una superficie esférica viene dada por $r = \text{constante} \equiv R$ (siendo R el radio de la esfera), y una superficie próxima viene dado su radio por $r = R + \zeta$,

[†] En el resto de esta sección, ϕ designa el ángulo azimutal, mientras que designaremos el potencial de velocidad por ψ .

en donde ζ es pequeño. Sustituyendo en (61.4), obtenemos

$$f = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left\{ (R + \zeta)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \phi} \right)^2 \right] \right\} \sin \theta d\theta d\phi.$$

Encontremos la variación δf del área cuando varía ζ . Tenemos

$$\delta f = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left\{ 2(R + \zeta) \delta \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial \phi} \right\} \sin \theta d\theta d\phi.$$

Integrando el segundo término por partes respecto a θ , y el tercero por partes respecto a ϕ , obtenemos

$$\delta f = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left\{ 2(R + \zeta) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \phi^2} \right\} \delta \zeta \sin \theta d\theta d\phi$$

Si dividimos la expresión entre llaves por $R(R + 2\zeta)$, el coeficiente resultante de $\delta \zeta \delta f \approx \delta \zeta R(R + 2\zeta) \sin \theta d\theta d\phi$ en el integrando es, según la fórmula (60.2), precisamente la suma requerida de las curvaturas, corregidas hasta los términos del primer orden en ζ . Así pues, obtenemos

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) \right\}. \quad (61.5)$$

El primer término corresponde a una superficie esférica, en la cual $R_1 = R_2 = R$.

El potencial de velocidades ψ satisface la ecuación de Laplace $\Delta \psi = 0$, con una condición límite en $r = R$ semejante a la de una superficie plana:

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \alpha \left\{ \frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \phi^2} \right] \right\} + p_0 = 0.$$

La constante $p_0 + 2\zeta/R$ puede omitirse de nuevo; derivando respecto al tiempo y poniendo $\partial \zeta / \partial t = v_r = \partial \psi / \partial r$, tenemos, finalmente, la condición límite sobre ψ :

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\alpha}{R^2} \left\{ 2 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] \right\} = 0$$

para $r = R$. (61.6)

Buscaremos una solución en forma de una onda estacionaria: $\psi = e^{-i\omega t} f(r, \theta, \phi)$, en donde la función f satisface la ecuación de Laplace, $\Delta f = 0$. Como es bien conocido, cualquier solución de la ecuación de Laplace puede representarse como una combinación lineal de lo que se denominan *funciones armónicas esféricas volumétricas* $r^l Y_{lm}(\theta, \phi)$, en donde $Y_{lm}(\theta, \phi)$ son los armónicos esféricos

ricos de Laplace: $Y_{lm}(\theta, \phi) = P_l^m(\cos \theta)e^{im\phi}$. Aquí $P_l^m(\cos \theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta}\right)$ es lo que se denomina una *función de Legendre asociada*, siendo $P_l(\cos \theta)$ el polinomio de Legendre de orden l . Como se sabe, l adquiere todos los valores enteros desde cero en adelante, mientras que m toma los valores $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$.

De acuerdo con ello buscaremos una solución particular del problema en la forma

$$\psi = Ae^{-i\omega t} r^l P_l^m(\cos \theta)e^{im\phi}. \quad (61.7)$$

La frecuencia ω debe ser de tal tipo que satisfaga la condición límite (61.6). Sustituyendo la expresión (61.7) y utilizando el hecho de que el armónico esférico Y_{jm} satisface

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \phi^2} + l(l+1)Y_{lm} = 0,$$

se halla (eliminando ψ)

$$\rho\omega + l\alpha[2 - l(l+1)]/R^3 = 0,$$

o sea,

$$\omega^2 = \alpha l(l-1)(l+2)/\rho R^3. \quad (61.8)$$

Esta fórmula da las frecuencias propias de las oscilaciones por capilaridad de una gota esférica. Vemos que depende únicamente de l y no de m . Sin embargo, para un valor dado de l , existen $2l+1$ funciones diferentes en correspondencia (61.7). Así pues, a cada una de las frecuencias (61.8) le corresponden $2l+1$ oscilaciones distintas. Las oscilaciones independientes que poseen la misma frecuencia se dice que son *degeneradas*; en este caso, tenemos una degeneración de orden $2l+1$.

La expresión (61.8) se anula para $l=0$ y $l=1$. El valor $l=0$ corresponderá a oscilaciones radiales, es decir, a pulsaciones con simetría esférica de la gota; en el caso de un fluido incompresible, dichas oscilaciones son evidentemente imposibles. Para $l=1$ el movimiento es simplemente un movimiento de traslación de la gota como un todo. La frecuencia de oscilación más pequeña posible de la gota corresponde a $l=2$ y es

$$\omega_{\min} = \sqrt{(8\alpha/\rho R^3)}. \quad (61.9)$$

Se observa un movimiento ondulatorio peculiar debido a la tensión superficial cuando una capa delgada de fluido viscoso desciende fluyendo por una pared vertical. P. L. KAPITZA ha demostrado que estas ondas se deben a una inestabilidad del flujo original que se establece cuando existen unos números de Reynolds comparativamente pequeños.[†]

[†] Ver P. L. KAPITZA, *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, 18, 3, 1948.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la frecuencia en función del número de onda en el caso de ondas de gravedad y capilaridad en la superficie de un fluido de profundidad h .

Solución. Sustituyendo en la condición (61.1) $\phi = A \cos(kx - \omega t) \cosh kh(z + h)$ (ver § 12, problema 1), obtenemos $\omega^2 = (gk + \alpha k^4/\rho) \tanh kh$. Para $kh \gg 1$ volvemos a encontrarnos con la fórmula (61.2), mientras que para ondas largas ($kh \ll 1$) tenemos $\omega^2 = ghk^2 + \alpha hk^4/\rho$.

Problema 2. Determinar el coeficiente de amortiguamiento en el caso de ondas capilares.

Solución. Sustituyendo (61.3) en 25.5), tenemos $\gamma = 2\eta k^2/\rho = 2\eta\omega^{4/3}/\rho^{1/3}\alpha^{2/3}$.

Problema 3. Hallar la condición para la estabilidad de una discontinuidad tangencial horizontal en un campo gravitatorio, teniendo en cuenta la tensión superficial (se suponen que son diferentes los fluidos que están situados en ambos lados de la superficie de discontinuidad).

Solución. Sea U la velocidad del fluido superior respecto al inferior. En el flujo original superpongamos una perturbación periódica en dirección horizontal y busquemos el potencial de velocidades en la forma

$$\phi = Ae^{kz} \cos(kx - \omega t) \text{ en el fluido inferior,}$$

$$\phi' = A'e^{-kz} \cos(kx - \omega t) + Ux \text{ en el fluido superior.}$$

En el caso del fluido inferior tenemos en la superficie de discontinuidad $v_z = \partial\phi/\partial z = \partial\zeta/\partial t$, siendo ζ una coordenada vertical en la superficie de discontinuidad, y en el caso del fluido superior

$$v'_z = \partial\phi'/\partial z = U\partial\zeta/\partial x + \partial\zeta/\partial t.$$

La condición de presiones iguales en ambos fluidos en la superficie de discontinuidad es

$$\rho \partial\phi/\partial t + \rho g\zeta - \alpha \partial^2\zeta/\partial x^2 = \rho' \partial\phi'/\partial t + \rho' g\zeta + \frac{1}{2}\rho'(v'^2 - U^2);$$

únicamente necesitan mantenerse los términos de primer orden en A' al desarrollar la expresión $v'^2 - U^2$. Buscaremos el desplazamiento ζ en la forma $\zeta = a \operatorname{sen}(kx - \omega t)$. Sustituyendo ϕ , ϕ' y ζ en las tres condiciones anteriores para $z = 0$, obtenemos tres ecuaciones, de las cuales pueden eliminarse a , A y A' , llegando a

$$\omega = \frac{k\rho' U}{\rho + \rho'} \pm \sqrt{\left[\frac{k\rho(\rho - \rho')}{\rho + \rho'} - \frac{k^2 \rho \rho' U^2}{(\rho + \rho')^2} + \frac{\alpha k^3}{\rho + \rho'} \right]}.$$

Con objeto de que esta expresión sea real para todo valor de k , es necesario que

$$U^4 \leq 4\alpha g(\rho - \rho')(\rho + \rho')^2/\rho^2 \rho'^2.$$

Si no se cumple esta condición, existen valores complejos de ω con una parte imaginaria positiva y el movimiento es inestable.

§ 62. Influencia de películas absorbidas sobre el movimiento de un líquido

La presencia en la superficie de un líquido de una película de material adsorbido puede tener una influencia considerable sobre las propiedades hidrodinámicas de la superficie. La razón es que, cuando la forma de las superficies varía con el movimiento del líquido, la película se estira o se comprime, es decir, se modifica la concentración superficial de la sustancia adsorbida. Estas variaciones dan como resultado la aparición de fuerzas adicionales que han de tenerse en cuenta en las condiciones límites de la superficie libre.

Aquí consideraremos únicamente películas adsorbidas de sustancias que pueden considerarse como insolubles en el líquido. Esto significa que la sustancia está totalmente sobre la superficie y no penetra dentro del líquido. Si la sustancia adsorbida es apreciablemente soluble es necesario tener en cuenta la difusión de la misma entre la película superficial y el volumen del líquido cuando varía la concentración de la película.

Cuando está presente el material adsorbido, el coeficiente de tensión superficial α es una función de la concentración en la superficie del material (que es la cantidad del mismo por unidad de área de superficie), valor que designaremos por γ . Si γ varía a lo largo de la superficie, entonces el coeficiente α es también una función de las coordenadas de la superficie. La condición límite en la superficie del líquido incluye, por tanto, una fuerza tangencial que ya hemos estudiado al final del § 60 (ecuación 60.14). En el caso presente, el gradiente de α puede expresarse en función del gradiente de concentraciones superficiales, de modo que la fuerza tangencial sobre la superficie es

$$\mathbf{f}_t = (\partial\alpha/\partial\gamma)\mathbf{grad}\gamma. \quad (62.1)$$

Ya se ha mencionado en § 60 que la condición límite (60.14), en la cual se tiene en cuenta esta fuerza, puede satisfacerse únicamente en el caso de un fluido viscoso. De aquí se deduce que, en casos en que la viscosidad del líquido es pequeña y, por tanto, tiene poca importancia respecto al fenómeno en consideración, puede ignorarse la presencia de la película.

Para determinar el movimiento de un líquido cubierto por una película, debemos sumar a las ecuaciones del movimiento, con la condición límite (60.14), una ecuación adicional, puesto que ahora tenemos otra magnitud desconocida, la concentración superficial γ . Esta ecuación adicional es una «ecuación de continuidad» que expresa el hecho de que la cantidad total de material adsorbido en la película no ha variado. La forma real de la ecuación depende de las características y forma de la superficie. Si esta última es plana, entonces la ecuación es evidentemente

$$\partial\gamma/\partial t + \partial(\gamma v_x)/\partial x + \partial(\gamma v_y)/\partial y = 0, \quad (62.2)$$

en donde todas las magnitudes tienen sus valores correspondientes en la superficie (tomada como plano xy).

La solución de los problemas del movimiento de un líquido cubierto por una película adsorbida se simplifica considerablemente en aquellos casos en que la película puede suponerse incompresible, es decir, en los que podemos admitir que el área de un elemento de superficie cualquiera de la película permanece constante durante el movimiento.

Un ejemplo de los efectos hidrodinámicos importantes que produce una película adsorbida viene dado por el movimiento de una burbuja de gas dentro de un líquido viscoso. Si no existiese ninguna película en la superficie de la burbuja, el gas en su interior se movería también y la fuerza de arrastre ejercida sobre la burbuja por el líquido no es la misma que el arrastre sobre una esfera sólida del mismo radio (ver § 20, problema 2). Sin embargo, si la burbuja está cubierta por una película de material adsorbido, es evidente, a partir de la simetría del problema, que la película permanece en reposo cuando la burbuja se mueve. Así un movimiento de la película sólo puede producirse a lo largo de líneas meridianas de la superficie de la burbuja y el resultado sería que el material se acumularía continuamente en uno de los polos (puesto que el material adsorbido no penetra dentro del líquido ni del gas); esto es imposible. Además de la velocidad de la película, la velocidad del gas en la superficie de la burbuja debe ser también nula y con esta condición límite el gas dentro de la burbuja debe estar totalmente en reposo. Así pues, una burbuja cubierta por una película se mueve como una esfera sólida y, en particular, la fuerza de arrastre o de rozamiento sobre la misma (para números de Reynolds pequeños) viene dada por la fórmula de Stokes. Este resultado se debe a V. G. LEVICH, el cual dio también las soluciones a los problemas siguientes.[†]

PROBLEMAS

Problema 1. Dos recipientes están unidos por un canal largo y profundo de anchura a y longitud l con paredes plano-paralelas. La superficie del líquido en el sistema está cubierta por una película adsorbida y las concentraciones superficiales γ_1 y γ_2 de la película en ambos recipientes son diferentes. Como resultado se produce un movimiento cerca de la superficie del líquido en el canal. Determinar la cantidad de material de la película que se transporta mediante este movimiento.

Solución. Tomemos el plano de una pared del canal como plano xz y la superficie del líquido como plano xy , de modo que el eje x esté dirigido a lo largo del canal; el líquido

[†] Para una descripción más detallada, ver V. G. LEVICH, *Physico-chemical Hydrodynamics* (*Fiziko-khimicheskaya gidrodinamika*), Moscow, 1952.

está en la región $z < 0$. No existe ningún gradiente de presiones, de modo que la ecuación del flujo estacionario es (ver § 17)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

siendo v la velocidad del líquido que evidentemente tiene la dirección x . Existe un gradiente de concentraciones dy/dx a lo largo del canal. En la superficie del líquido en el canal tenemos la condición límite

$$\eta \frac{\partial v}{\partial z} = d\alpha/dx \quad \text{para } z = 0. \quad (2)$$

En las paredes del canal el líquido debe estar en reposo, es decir,

$$v = 0 \quad \text{para } y = 0 \quad \text{e} \quad y = a. \quad (3)$$

La profundidad del canal se supone infinita y, por tanto,

$$v = 0 \quad \text{para } z \rightarrow -\infty. \quad (4)$$

Las soluciones particulares de la ecuación (1) que satisfacen las condiciones (3) y (4) son

$$v_n = \text{constante} \times \exp[(2n+1)\pi z/a] \sin(2n+1)\pi y/a,$$

siendo n un número entero. La condición (2) se ve satisfecha por la suma

$$v = \frac{4a}{\eta\pi^2} \frac{d\alpha}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[(2n+1)\pi z/a] \sin(2n+1)\pi y/a}{(2n+1)^2}.$$

La cantidad de material de la película transferida por unidad de tiempo es

$$Q = \int_0^a \gamma[v]_{z=0} dy = \frac{8a^2}{\eta\pi^3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \right) \gamma \frac{d\alpha}{dx},$$

y el movimiento está en el sentido de α creciente. El valor de Q debe, evidentemente, ser constante a lo largo del canal. De aquí que podamos escribir

$$\gamma \frac{d\alpha}{dx} = \text{constante} \equiv \frac{1}{l} \int_0^l \gamma \frac{d\alpha}{dx} dx = \frac{1}{l} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \gamma d\alpha,$$

en donde $\alpha_1 = \alpha(\gamma_1)$, $\alpha_2 = \alpha(\gamma_2)$, y admitiremos que $\alpha_1 > \alpha_2$. Así pues, tenemos, finalmente,

$$Q = \frac{8a^2}{\eta l \pi^3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \right) \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \gamma d\alpha = 0,27 \frac{a^2}{\eta l} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \gamma d\alpha.$$

Problema 2. Determinar el coeficiente de amortiguamiento para las ondas de capilaridad en la superficie de un líquido cubierto por una película adsorbida.

Solución. Si la viscosidad del líquido no es demasiado grande, las fuerzas de tensión

(tangenciales) ejercidas sobre la película por el líquido son pequeñas y la película puede considerarse, por tanto, como incompresible. De acuerdo con ello podemos calcular la disipación de energía como si tuviese lugar en una pared sólida, es decir, según la fórmula (24.14). Escribiendo el potencial de velocidades en la forma

$$\phi = \phi_0 e^{ikx-i\omega t} e^{-kz},$$

obtenemos para la disipación por unidad de área de la superficie

$$\bar{E}_{\text{kin}} = -\sqrt{\left(\frac{1}{2}\rho\eta\omega\right)}|k\phi_0|^2.$$

La energía total (también por unidad de área) es

$$\bar{E} = \rho \int v^2 dz = \frac{1}{2}\rho|k\phi_0|^2/k.$$

El coeficiente de amortiguamiento es [utilizando (61.3)]

$$\gamma = \frac{\omega^{7/6}\eta^{1/2}}{2\sqrt{2}\alpha^{1/3}\rho^{1/6}} = \frac{k^{7/4}\eta^{1/2}\alpha^{1/4}}{2\sqrt{2}\rho^{3/4}}.$$

El cociente entre esta magnitud y el coeficiente de amortiguamiento en el caso de ondas de capilaridad sobre una superficie limpia (§ 61, problema 2) es $(\alpha\rho/k\eta^2)^{1/4}/4\sqrt{2}$, y es grande en comparación con la unidad a no ser que sea muy pequeña la longitud de onda. Así pues, la presencia de una película adsorbida sobre la superficie de un líquido conduce a un incremento notable del coeficiente de amortiguamiento.

CAPÍTULO VIII

S O N I D O

§ 63. Ondas sonoras

Pasaremos ahora al estudio del flujo de fluidos compresibles y empezaremos investigando las oscilaciones pequeñas; un movimiento oscilatorio de pequeña amplitud en un fluido compresible se denomina *onda sonora*. En todo punto del fluido una onda sonora produce alternativamente compresiones y expansiones o rarefacciones.

Puesto que las oscilaciones son pequeñas, la velocidad \mathbf{v} también es pequeña, de modo que el término $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ en la ecuación de Euler puede despreciarse. Por la misma razón, las variaciones relativas de la densidad de fluido y de la presión son pequeñas. Podemos escribir las variables p y ρ en la forma

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad (63.1)$$

en donde p_0 y ρ_0 son la presión y densidad de equilibrio constantes y p' y ρ' son sus variaciones en la onda sonora ($\rho' \ll \rho_0$, $p' \ll p_0$). La ecuación de continuidad $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$, al sustituir en (63.1) y despreciar las pequeñas cantidades de segundo orden (siendo ρ' , p' y \mathbf{v} de primer orden), se transforma en

$$\partial\rho'/\partial t + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (63.2)$$

La ecuación de Euler

$$\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} = -(1/\rho)\mathbf{grad}p$$

se reduce, en la misma aproximación, a

$$\partial\mathbf{v}/\partial t + (1/\rho_0)\mathbf{grad}p' = 0. \quad (63.3)$$

La condición de que las ecuaciones linealizadas del movimiento (63.2) y (63.3) sean aplicables a la propagación de ondas sonoras se basa en que la velocidad de las partículas del fluido en la onda deberá ser pequeña en comparación con la velocidad del sonido: $v \ll c$. Puede obtenerse esta condición, por ejemplo, a partir de la exigencia de que $\rho' \ll \rho_0$ [ver fórmula (63.12) a continuación].

Las ecuaciones (63.2) y (63.3) contienen las funciones incógnitas \mathbf{v} , p' y ρ' . Para eliminar una de ellas, observemos que una onda sonora en un fluido ideal es adiabática, como cualquier otro movimiento en un fluido ideal. De aquí que la variación pequeña p' de la presión está relacionada con la pequeña modificación ρ' de la densidad a través de

$$p' = (\partial p / \partial \rho_0)_s \rho'. \quad (63.4)$$

Sustituyendo ρ' de acuerdo con esta ecuación en (63.2), encontramos

$$\partial p' / \partial t + \rho_0 (\partial p / \partial \rho_0)_s \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (63.5)$$

Las dos ecuaciones (63.3) y (63.5), con las incógnitas \mathbf{v} y p' , dan una descripción completa de la onda sonora.

Con objeto de expresar todas las incógnitas en función de una de ellas, es conveniente introducir el potencial de velocidades poniendo $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi$. Tenemos a partir de la ecuación (63.3)

$$p' = -\rho \partial \phi / \partial t, \quad (63.6)$$

que relaciona p' y ϕ (en esta expresión, y de ahora en adelante, omitiremos por brevedad los sufijos en p_0 y ρ_0). Se obtiene entonces a partir de (63.5) la ecuación

$$\partial^2 \phi / \partial t^2 - c^2 \Delta \phi = 0, \quad (63.7)$$

que debe satisfacer el potencial ϕ ; ahora hemos introducido la notación

$$c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s}. \quad (63.8)$$

Una ecuación de la forma (63.7) se denomina *ecuación de onda*. Aplicando el operador gradiente a (63.7), encontramos que cada uno de los tres componentes de la velocidad \mathbf{v} satisface una ecuación de la misma forma y al derivar (63.7) respecto al tiempo vemos que la presión p' (y por tanto ρ') también satisface la ecuación de onda.

Consideremos una onda sonora en la que todas sus magnitudes dependen únicamente de una coordenada (por ejemplo, x). Es decir, el flujo es completamente homogéneo en el plano yz . Dicha onda se denomina *onda plana*. La ecuación de onda (63.7) se transforma en

$$\partial^2 \phi / \partial x^2 - (1/c^2) \partial^2 \phi / \partial t^2 = 0. \quad (63.9)$$

Para resolver esta ecuación, sustituimos x y t por las nuevas variables $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$. Es fácil ver que con estas variables (63.9) se reduce a $\partial^2 \phi / \partial \eta \partial \xi = 0$. Integrando esta ecuación respecto a ξ , encontramos $\partial \phi / \partial \eta = F(\eta)$, en donde $F(\eta)$ es una función arbitraria de η . Integrando de nuevo, obtenemos $\phi = f_1(\xi) + f_2(\xi)$, en donde f_1 y f_2 son funciones arbitrarias de sus argumentos. Así pues,

$$\phi = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \quad (63.10)$$

La distribución de las demás magnitudes (p' , ρ' , \mathbf{v}) en una onda plana viene dada por funciones de la misma forma.

Para concretar, estudiaremos la densidad, $\rho' = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$. Por ejemplo, sea $f_2 = 0$, de modo que $\rho' = f_1(x - ct)$. El significado de esta solución es evidente: en un plano cualquiera $x = \text{constante}$ la densidad varía con el tiempo, y en un tiempo determinado cualquiera, la densidad es diferente para valores distintos de x , pero es la misma para las coordenadas x y los tiempos t en los que se cumple que $x - ct = \text{constante}$, o sea, $x = \text{constante} + ct$. Esto significa que si en un instante determinado $t = 0$ y en un punto concreto del fluido la densidad tiene un valor determinado, entonces después de un t se encuentra el mismo valor de la densidad a una distancia ct del punto original a lo largo del eje x . Lo mismo es cierto para todas las demás magnitudes de la onda. Así pues, el esquema del movimiento se propaga a través del medio en la dirección x con una velocidad c ; c se denomina *velocidad del sonido*.

Así pues, $f_1(x - ct)$ representa lo que se denomina una *onda plana móvil*, que se propaga en el sentido positivo del eje x . Es evidente que $f_1(x + ct)$ representa una onda que se propaga en sentido opuesto.

De los tres componentes de la velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi$ en una onda plana, solamente $v_x = \partial\phi/\partial x$ es no nula. Así pues, la velocidad del fluido en una onda sonora tiene la dirección de la propagación. Por esta razón las ondas sonoras en un fluido se dice que son *longitudinales*.

En una onda plana móvil, la velocidad $v_x = v$ está relacionada con la presión p' y la densidad ρ' de un modo simple. Poniendo $\phi = f(x - ct)$, encontramos $v = \partial\phi/\partial x = f'(x - ct)$ y $p' = -\rho\partial\phi/\partial t = \rho c f'(x - ct)$. Comparando ambas expresiones, se encuentra

$$v = p'/\rho c. \quad (63.11)$$

Sustituyendo aquí de (63.4) $p' = c^2\rho'$, encontramos la relación existente entre la velocidad y la variación de la densidad:

$$v = c\rho'/\rho. \quad (63.12)$$

Podemos mencionar también la relación existente entre la velocidad y las oscilaciones de temperatura en una onda sonora. Tenemos $T' = (\partial T/\partial p)_s p'$, y utilizando la fórmula termodinámica bien conocida $(\partial T/\partial p)_s = (T/c_p)(\partial V/\partial T)$ y la fórmula (63.11), obtenemos

$$T' = c\beta T v / c_p, \quad (63.13)$$

en donde $\beta = (1/V)(\partial V/\partial T)_p$ es el coeficiente de dilatación térmica.

La fórmula (63.8) da la velocidad del sonido en función de la compresibilidad adiabática del fluido. Está relacionada con la compresibilidad isotérmica a través de la fórmula termodinámica

$$(\partial p/\partial \rho)_s = (c_p/c_v)(\partial p/\partial \rho)_T. \quad (63.14)$$

Calculemos la velocidad del sonido en un gas perfecto. La ecuación de estado es $pV = p/\rho = RT/\mu$, en donde R es la constante de los gases y μ el peso molecular. Se obtiene para la velocidad del sonido la expresión

$$c = \sqrt{(\gamma RT/\mu)}, \quad (63.15)$$

en donde γ designa el cociente c_p/c_v .[†] Como γ depende normalmente sólo ligeramente de la temperatura, la velocidad del sonido en el gas puede suponerse que es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura. Para una temperatura determinada no depende de la presión.

Existe un caso muy importante, que es lo que se denominan *ondas monocromáticas*. En este caso todas las magnitudes son exactamente funciones periódicas del tiempo (*armónicos*). Normalmente, es conveniente escribir dichas funciones como la parte real de una magnitud compleja (ver el principio del § 24). Por ejemplo, podemos poner para el potencial de velocidad

$$\phi = \operatorname{re}[\phi_0(x, y, z)e^{-i\omega t}], \quad (63.16)$$

en donde ω es la frecuencia de la onda. La función ϕ_0 satisface la ecuación

$$\Delta\phi_0 + (\omega^2/c^2)\phi_0 = 0, \quad (63.17)$$

que se obtiene sustituyendo (63.16) en (63.7).

Consideremos una onda plana móvil monocromática que se propaga en el sentido positivo del eje x . En dicha onda, todas las magnitudes son funciones solamente de $x - ct$ y así el potencial tiene la forma

$$\phi = \operatorname{re}\{A \exp[-i\omega(t-x/c)]\}, \quad (63.18)$$

en donde A es una constante denominada *amplitud compleja*. Escribiendo esta constante como $A = ae^{i\alpha}$ con las constantes reales a y α , tenemos

$$\phi = a \cos(\omega x/c - \omega t + \alpha). \quad (63.19)$$

La constante a se denomina *amplitud* de la onda y el argumento del coseno se denomina *fase*. Designemos por \mathbf{n} un vector unidad en la dirección de propagación. El vector

$$\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{n} = (2\pi/\lambda)\mathbf{n} \quad (63.20)$$

se denomina *vector de onda*. En función de este vector (63.18) puede escribirse

$$\phi = \operatorname{re}\{A \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]\}. \quad (63.21)$$

Las ondas monocromáticas son muy importantes, debido a que cualquier onda puede representarse con una suma de ondas planas monocromáticas superpuestas con diversos vectores de onda y distintas frecuencias. Esta

[†] Es útil señalar que la velocidad del sonido en un gas es del mismo orden de magnitud que la velocidad térmica media de las moléculas.

descomposición de una onda en ondas monocromáticas es simplemente un desarrollo en serie de Fourier o en integrales de Fourier (lo que se denomina también *resolución espectral*). Los términos de este desarrollo se denominan *componentes monocromáticos* o *componentes de Fourier* de la onda.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la velocidad del sonido en un sistema bifásico casi homogéneo compuesto de un vapor con pequeñas gotitas de líquido suspendidas en él («vapor húmedo») o bien un líquido con pequeñas burbujas en su interior. Se supone que la longitud de onda es grande en comparación con el tamaño de las inhomogeneidades del sistema.

Solución. En un sistema bifásico, p y T no son variables independientes, sino que están relacionadas por la ecuación de las fases. Una compresión o expansión del sistema está acompañada por una variación de una fase a la otra. Sea x la fracción (en masa) de la fase 2 en el sistema. Tenemos

$$\begin{aligned} s &= (1-x)s_1 + xs_2, \\ V &= (1-x)V_1 + xV_2, \end{aligned} \quad (1)$$

en donde los sufijos 1 y 2 distinguen las magnitudes que pertenecen a las fases puras 1 y 2. Para calcular la derivada $(\partial V/\partial p)_s$, la transformaremos de las variables p , s a p , x , obteniendo $(\partial V/\partial p)_s = (\partial V/\partial p)_x - (\partial V/\partial x)_p (\partial s/\partial p)_x / (\partial s/\partial x)_p$. La sustitución (1) da entonces

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s = x \left[\frac{dV_2}{dp} - \frac{V_2 - V_1}{s_2 - s_1} \frac{ds_2}{dp} \right] + (1-x) \left[\frac{dV_1}{dp} - \frac{V_2 - V_1}{s_2 - s_1} \frac{ds_1}{dp} \right]. \quad (2)$$

Se obtiene la velocidad del sonido a partir de (1) y (2), utilizando la fórmula (63.8).

Desarrollando las derivadas totales respecto a la presión, introduciendo el calor latente de la transición de la fase 1 a la fase 2 [$q = T(s_2 - s_1)$] y utilizando la ecuación de Clapeyron-Clausius para la derivada dp/dT a lo largo de la curva de equilibrio [$dp/dT = p/T(V_2 - V_1)$], obtenemos la expresión dentro del primer corchete de (2) en la forma

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial p} \right)_T + \frac{2T}{q} \left(\frac{\partial V_2}{\partial T} \right)_p (V_2 - V_1) - \frac{Tc_p^2}{q^2} (V_2 - V_1)^2.$$

El segundo corchete se transforma de modo semejante.

Supongamos que el líquido es la fase 1 y el vapor la fase 2; supongamos, además, que el último es un gas perfecto y despreciamos el volumen específico V_1 en comparación con V_2 . Si $x \ll 1$ (líquido que contiene algunas burbujas de vapor), se encuentra que la velocidad del sonido resulta ser

$$c = q\mu p V_1 / RT \sqrt{(c_p T)}, \quad (3)$$

en donde R es la constante de los gases y μ el peso molecular. Esta velocidad es, en general, muy pequeña; así pues, cuando se forman burbujas de vapor en un líquido (*cavitación*), la velocidad del sonido sufre una disminución neta repentina.

Si $1-x \ll 1$ (un vapor que contiene algunas gotitas de líquido), obtenemos

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{RT} - \frac{2}{q} + \frac{c_p T}{q^2}. \quad (4)$$

Comparando esta expresión con la velocidad del sonido en el gas puro (63.15), vemos que aquí también la adición de una segunda fase reduce el valor de c , aunque en este caso no tan notablemente.

Cuando x aumenta de 0 a 1, la velocidad del sonido crece monótonamente desde el valor (3) al valor (4). Para $x = 0$ y $x = 1$ varía discontinuamente cuando pasamos de un sistema monofásico a otro sistema bifásico. Esto origina el resultado de que, para valores de x muy próximos a cero o a la unidad, la teoría lineal usual del sonido deja de ser aplicable incluso aunque la amplitud de la onda sonora sea pequeña; las compresiones y dilataciones o rarefacciones producidas por la onda están acompañadas en este caso por una variación entre un sistema de una fase y un sistema a dos fases y la hipótesis esencial de una velocidad constante del sonido ya no es suficientemente satisfactoria.

Problema 2. Determinar la velocidad del sonido en un gas calentado a una temperatura tan alta que la presión de equilibrio de la radiación del cuerpo negro resulta comparable con la presión del gas.

Solución. La presión es $p = nkT + akT^4/4$ y la entropía es

$$s = (k/m)\log(T^4/n) + akT^3/n.$$

En estas expresiones el primer término se relaciona con las partículas y el segundo con la radiación; n es la densidad numérica de partículas, m su masa, k la constante de Boltzmann y $a = 4\pi^2 k^3 / 45 \hbar^3 c^5$.[†] La densidad de la materia no se ve afectada por la radiación del cuerpo negro, de modo que $\rho = mn$. La velocidad del sonido designada aquí por u para distinguirla de la luz es

$$u^2 = \frac{\partial(p, s)}{\partial(\rho, s)} = \frac{\partial(p, s)}{\partial(n, T)} \Big/ \frac{\partial(\rho, s)}{\partial(n, T)},$$

en donde las derivadas se han escrito en forma jacobiana. Calculando los jacobianos, tenemos

$$u^2 = \frac{5kT}{3m} \left[1 + \frac{2a^2 T^6}{5n(n+2aT^3)} \right].$$

§ 64. La energía y el impulso de las ondas sonoras

Deduzcamos una expresión para la energía de una onda sonora. De acuerdo con la fórmula general, la energía de la unidad de volumen del fluido es $\rho\epsilon + \rho v^2/2$. Sustituymos ahora $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon'$, en donde las letras señaladas con prima designan las desviaciones de las magnitudes respectivas de sus valores cuando el fluido está en reposo. El término $\rho'v^2/2$ es una magnitud de tercer orden. De aquí que, si tomamos únicamente términos hasta el segundo orden, tengamos

$$\rho_0\epsilon_0 + \rho \frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial\rho_0} + \frac{1}{2}\rho'^2 \frac{\partial^2(\rho\epsilon)}{\partial\rho_0^2} + \frac{1}{2}\rho_0v^2.$$

[†] Ver, por ejemplo, *Física Estadística*, § 60, Editorial Reverté, Barcelona.