

FÍSICA TEÓRICA

TEORÍA
CUÁNTICA
RELATIVISTA

PITAEVSKIÍ y LIFSHITZ

PARTE II

VOLÚMEN 4

SEGUNDA EDICIÓN

CURSO DE FÍSICA TEÓRICA

Volumen 4

Parte II

L. D. LANDAU

E. M. LIFSHITZ

Academia de Ciencias, U.R.S.S.

E. M. LIFSHITZ L. P. PITAEVSKIĬ
Academia de Ciencias, U.R.S.S.

TEORÍA CUÁNTICA RELATIVISTA



Editorial Reverté, S. A.
Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México - Rio de Janeiro

Título de la obra original:

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Edición original en lengua rusa publicada por:

Editorial Nauka, Moscú

Copyright © by Mezhdunarodnaya Kniga

Versión española directamente del ruso por:

Prof. Dr. Ramón Ortiz Fornaguera

Jefe de la división de Física Teórica de la

Junta de Energía Nuclear - Madrid

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Loreto, 13-15, Local B

08029 Barcelona - ESPAÑA

E-mail:reverte@reverte.com

Internet: <http://www.reverte.com>

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

Edición en español

© EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1981

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN - 84 - 291 - 4079 - 4

ISBN - 84 - 291 - 4085 - 9 Tomo 4 parte 2

NOTA

La presente primera edición española es traducción de la primera edición rusa publicada en abril de 1971 (*Relativistskaiā Kvantovaia teoriā, chast' 2*, «Nauka», Moskva 1971). De acuerdo con los autores, se han hecho algunas correcciones y modificaciones a la versión original.

R. ORTIZ FORNAGUERA

PRÓLOGO

Este libro es continuación inmediata de la primera parte (que escribimos en colaboración con V. B. Berestetskii), por lo que en él los capítulos y párrafos se han numerado siguiendo a los de dicha parte.

Los tres primeros capítulos se han dedicado a la teoría de las correcciones por radiación y completan así la exposición de la electrodinámica cuántica. También aquí hemos tendido, no sólo a subrayar los fundamentos principales de los métodos aplicados, sino también a poner de manifiesto los detalles técnicos esenciales; por esta razón los cálculos concretos se exponen con un grado relativamente elevado de minuciosidad.

Ya de acuerdo con la idea primitiva de L. D. Landau, en el presente curso deben exponerse sólo aquellos resultados teóricos que, con un grado razonable de certeza, se consideran firmemente establecidos y se engarzan en un determinado sistema. En otras palabras, la exposición no debe acercarse demasiado al «límite de vanguardia» de la física teórica. La aplicación de este criterio en la actualidad resulta particularmente ardua, naturalmente, en un dominio como el de las interacciones débiles y fuertes. Además la exposición de conocimientos aislados, sin conexión entre sí, es poco probable que fuera útil para los especialmente interesados en estas materias, y que pudiera tener interés para los demás. Partiendo de estas consideraciones, decidimos limitarnos en este libro a bien poco: a la simetría dinámica de las interacciones fuertes y a la teoría «fenomenológica» de las interacciones débiles. Esperamos que, aun con tales limitaciones, la obra puede resultar útil, con todo, a un círculo suficientemente amplio de lectores.

Como en los demás volúmenes de este curso, las citas bibliográficas complementarias contenidas en el libro no pretenden en modo alguno ser completas y carecen del carácter de prioridad. Su finalidad consiste simplemente en señalar aquel material que se sale un poco de los límites de lo que se presenta en el texto, pero manteniéndose cerca de los mismos. También en relación con esto el objeto específico de la obra hace difícil e imprecisa la selección de las citas.

Las referencias a otros tomos del curso se indican con cifras: I («Mecánica», 1. Editorial Reverté, S. A.), II («Teoría clásica de los campos», 1. Editorial Reverté, S. A.), III («Mecánica cuántica», 1967).

Queremos expresar aquí nuestra gratitud a B. L. Ioffe e I. S. Shapiro, quienes revisaron el libro e hicieron toda una serie de útiles observaciones. Damos también

las gracias a Ia. I. Azimov y a A. A. Varfolomeev por algunos consejos. En la exposición de la teoría de las interacciones débiles nos ha sido de gran utilidad el conocido libro de L. B. Okun.

Agosto de 1969.

E. M. LIFSHITZ y L. P. PITAEVSKII

ÍNDICE DE MATERIAS

CAPÍTULO 11. PROPAGADORES EXACTOS Y PARTES VÉRTICE	1
99 Operadores de los campos en la representación de Heisenberg	1
100 Propagador exacto de fotón	4
101 Función energía propia de fotón	12
102 Propagador exacto de electrón	16
103 Operador vértice	21
104 Ecuaciones de Dyson	26
105 Identidad de Ward	29
106 Propagador de electrón en un campo exterior	33
107 Condiciones físicas de renormalización	39
108 Propiedades analíticas del propagador de fotón	47
109 Regularización de las integrales de Feynman	50
 CAPÍTULO 12. CORRECCIONES RADIATIVAS	56
110 Cálculo del operador polarización	57
111 Correcciones relativas a la ley de Coulomb	61
112 Cálculo de la parte imaginaria del operador polarización según la integral de Feynman	65
113 Factores de forma electromagnéticos del electrón	70
114 Cálculo de los factores de forma del electrón	74
115 Momento magnético anómalo del electrón	80
116 Cálculo del operador de masa	83
117 Emisión de fotones blandos con masa no nula	89
118 Dispersión de un electrón en un campo exterior en la segunda aproximación de Born	94
119 Correcciones radiativas a la dispersión de un electrón en un campo exterior	101
120 Desplazamiento radiativo de los niveles atómicos	106
121 Desplazamiento radiativo de los niveles de los átomos mesónicos	113
122 Ecuación relativista para los estados ligados	115
123 Doble relación de dispersión	123
124 Dispersión fotón-fotón	131
125 Dispersión coherente de un fotón en el campo de un núcleo	141
126 Correcciones radiativas a las ecuaciones del campo electromagnético	143
127 Cálculo de integrales en dominios cuadridimensionales	153

CAPÍTULO 13. FÓRMULAS ASINTÓTICAS DE LA ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA	159
128 Comportamiento asintótico del propagador de fotón para grandes impulsos..	159
129 Separación de los dos términos doblemente logarítmicos en un operador vértice	167
130 Expresión asintótica doblemente logarítmica del operador vértice	174
131 Expresión asintótica doblemente logarítmica de la amplitud de dispersión de un electrón por un muón	176
CAPÍTULO 14. SIMETRÍA DINÁMICA DE LOS HADRONES	185
132 Isomultipletes	185
133 Hipercarga	188
134 Hadrones metaestables	191
135 Paridad-G	197
136 Simetría unitaria SU (3)	199
137 Supermultipletes	205
138 Operadores superespinoriales	210
CAPÍTULO 15. ELECTRODINÁMICA DE LOS HADRONES	215
139 Factores de forma electromagnéticos de los hadrones	215
140 Dispersión de electrones por hadrones	221
141 Teorema de la radiación de frenado a baja energía	224
142 Teorema de la dispersión de un fotón por un hadrón a baja energía	229
143 Momentos multipolares de los hadrones	232
144 Propiedades isotópicas de los factores de forma electromagnéticos de los hadrones	238
CAPÍTULO 16. LA INTERACCIÓN DÉBIL	241
145 Interacción débil de los leptones	241
146 Desintegración del muón	247
147 Correcciones radiativas a la desintegración del muón	252
148 Estructura cinemática de la corriente débil hadrónica	258
149 Carácter real de los factores de forma	263
150 Propiedades isotópicas de la corriente débil hadrónica	267
151 Desintegración- β del neutrón	271
152 Corrientes de transición en un supermultiplete	275
153. Estructura cinemática de las amplitudes de las desintegraciones no leptónicas	279
154 Mesones K neutros	283
SUPLEMENTO A LA PARTE I	287
82a. Pérdidas de energía de las partículas rápidas por ionización	287
ÍNDICE ALFABÉTICO	297

CAPÍTULO 11

PROPAGADORES EXACTOS Y PARTES VÉRTICE

§ 99. Operadores de los campos en la representación de Heisenberg

Hasta aquí, al considerar los diferentes procesos electromagnéticos concretos nos hemos limitado a la primera aproximación no nula de la teoría de perturbaciones. Pasaremos ahora al estudio de los efectos que resultan de tener en cuenta las aproximaciones de orden superior. Estos efectos se llaman correcciones *radiativas o por radiación*.

Es posible conseguir una comprensión más profunda de la estructura de las aproximaciones superiores tomando como base el estudio previo de algunas propiedades generales que poseen las amplitudes de dispersión exactas (es decir, no desarrolladas en potencias de e^2). Vimos (§ 73) que los sucesivos términos de la serie a que conduce la teoría de perturbaciones se expresan en función de los operadores de los campos en la representación de interacción, esto es, de operadores cuya dependencia respecto del tiempo está determinada por el hamiltoniano del sistema de partículas libres H_0 . En cambio, las amplitudes de dispersión exactas es más conveniente expresarlas en función de los operadores del campo, no en esta representación, sino en la de Heisenberg, en la cual la dependencia con relación al tiempo viene determinada directamente por el hamiltoniano exacto del sistema de partículas en interacción $H = H_0 + V$.

De acuerdo con la regla general de formación de operadores de Heisenberg, tenemos

$$\psi(x) \equiv \psi(t, \mathbf{r}) = e^{iHt} \psi(\mathbf{r}) e^{-iHt} \quad (99.1)$$

y también para $\bar{\psi}(x)$ y $A(x)$, donde $\psi(\mathbf{r})$ son operadores que no dependen del tiempo (operadores de Schrödinger) *. Se advierte inmediatamente que los operadores de Heisenberg, tomados en un mismo instante, satisfacen las mismas reglas de commutación que los operadores en la representación de Schrödinger o en la de interacción. En efecto, tenemos, por ejemplo,

* En este capítulo los operadores con argumento temporal corresponderán a la representación de Heisenberg, mientras que los operadores en la representación de interacción se distinguirán por el subíndice adicional int.

$$\{\Psi_i(t, \mathbf{r}) \bar{\Psi}_k(t, \mathbf{r}')\}_+ = e^{iHt} \{\Psi_i(\mathbf{r}) \bar{\Psi}_k(\mathbf{r}')\}_+ e^{-iHt} = \gamma_{ik}^0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (99.2)$$

[cf. (76.6)]. Análogamente se ve que los operadores $\psi(t, \mathbf{r})$ y $A(t, \mathbf{r}')$ comutan entre sí:

$$\{\psi_i(t, \mathbf{r}) A(t, \mathbf{r}')\}_- = 0$$

(esto ya no es así en instantes diferentes, en modo alguno!).

La «ecuación del movimiento» a que satisface el operador ψ de Heisenberg se puede obtener mediante la fórmula general III (13.7):

$$-i \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = H\psi(x) - \psi(x)H. \quad (99.3)$$

Para el hamiltoniano las representaciones de Schrödinger y de Heisenberg son idénticas, expresándose aquél de igual forma en función de los operadores de los campos en una y en otra representación. En el presente caso, al calcular el segundo miembro de (99.3) se puede prescindir en el hamiltoniano de la parte que depende tan sólo del operador $A(x)$ (hamiltoniano del campo electromagnético libre), puesto que esta parte commuta con $\psi(x)$. Según (21.13) y (43.3), tenemos

$$\begin{aligned} H &= \int \psi^*(t, \mathbf{r}) (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi(t, \mathbf{r}) d^3x + \\ &\quad + e \int \bar{\psi}(t, \mathbf{r}) \hat{A}(t, \mathbf{r}) \psi(t, \mathbf{r}) d^3x = \\ &= \int \bar{\psi}(t, \mathbf{r}) \{ \gamma p + m + e \hat{A}(t, \mathbf{r}) \} \psi(t, \mathbf{r}) d^3x. \end{aligned} \quad (99.4)$$

Calculando el commutador $\{H\psi(t, \mathbf{r})\}_-$ mediante (99.2) y eliminando la función δ mediante integración respecto de d^3x , obtendremos

$$(\hat{p} - e\hat{A} - m) \psi(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (99.5)$$

Como era de esperar, el operador $\psi(t, \mathbf{r})$ satisface una ecuación que coincide formalmente con la ecuación de Dirac.

En cuanto a la ecuación correspondiente al operador del campo electromagnético $A(t, \mathbf{r})$, su forma es evidente a priori por correspondencia con el caso clásico. En las condiciones en que se da éste (valores grandes de los números de ocupación, cf. § 5), después de promediar respecto del estado del campo la ecuación a que satisface el operador debe transformarse en la ecuación clásica de Maxwell para los potenciales, II (30.2). Es claro por esto que la ecuación correspondiente al operador coincide simplemente en su forma con la ecuación de Maxwell, es decir, tenemos (para un contraste arbitrario)

$$\partial^v \partial_\mu A^\mu(x) - \partial^\mu \partial_\mu A^v(x) = -4\pi e j^v(x) \quad (99.6)$$

donde $j^v(x) = -\bar{\psi}(x) \gamma^v \psi(x)$ es el operador corriente que, satisface idénticamente la ecuación de continuidad *

$$\partial_v j^v(x) = 0. \quad (99.7)$$

El hecho de que las ecuaciones (99.6) son lineales respecto de A^μ y j^μ es esencial, puesto que gracias a ello no se plantea la cuestión de cuál sea el orden en que se suceden estos operadores.

Al igual que las ecuaciones análogas para las funciones de onda, el sistema de ecuaciones entre operadores (99.6-7) es invariante respecto de una transformación de contraste

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \chi(x), \quad \psi(x) \rightarrow \psi(x) e^{i\epsilon \chi}, \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{-i\epsilon \chi}, \quad (99.8)$$

donde $\chi(x)$ es un operador real arbitrario que commuta (en un mismo instante) con ψ **.

Establezcamos ahora la relación que existe entre los operadores en la representación de Heisenberg y en la de interacción. Para simplificar los razonamientos conviene hacer la hipótesis formal (que no influye en el resultado final) de que la interacción $V(t)$ «se conecta» adiabáticamente a partir del instante $t \rightarrow -\infty$ para alcanzar los diferentes instantes finitos. Entonces, cuando $t \rightarrow -\infty$ ambas representaciones —la de Heisenberg y la de interacción— simplemente coinciden. Coinciden también las correspondientes funciones de onda del sistema Φ y Φ_{int} :

$$\Phi_{int}(t = -\infty) = \Phi. \quad (99.9)$$

Por otra parte, la función de onda en la representación de Heisenberg es por completo independiente del tiempo (toda la dependencia temporal recae sobre los operadores), y en la representación de interacción se tiene para la dependencia de la función de onda respecto del tiempo, según (73.7),

$$\Phi_{int}(t) = S(t, -\infty) \Phi_{int}(-\infty), \quad (99.10)$$

* En cambio, los operadores $A_{int}^\mu(x)$, que corresponden al campo electromagnético libre, satisfacen esta misma ecuación, pero sin segundo miembro:

$$\partial^v \partial_\mu A_{int}^\mu(x) - \partial^\mu \partial_\mu A_{int}^v(x) = 0. \quad (99.6a)$$

** Hay que subrayar que se trata aquí precisamente de operadores- ψ en la representación de Heisenberg. En la de interacción, una transformación de contraste de los potenciales electromagnéticos no afecta en absoluto a los operadores- ψ .

donde *

$$S(t_2, t_1) = T \exp \left\{ -i \int_{t_1}^{t_2} V(t') dt' \right\}. \quad (99.11)$$

Comparando (99.10) con (99.9), se encuentra la igualdad

$$\Phi_{\text{int}}(t) = S(t, -\infty) \Phi, \quad (99.12)$$

que establece la relación entre las funciones de onda en una y en otra representación. En correspondencia con esto, la fórmula que da la transformación de los operadores es:

$$\begin{aligned} \Psi(t, \mathbf{r}) &= S^{-1}(t, -\infty) \Psi_{\text{int}}(t, \mathbf{r}) S(t, -\infty) = \\ &= S(-\infty, t) \Psi_{\text{int}}(t, \mathbf{r}) S(t, -\infty) \end{aligned} \quad (99.13)$$

(y lo mismo para $\bar{\Psi}$ y A).

Para terminar, haremos todavía una observación de carácter general. En más de una ocasión hemos ya señalado que en la teoría cuántica relativista el sentido de los operadores del campo es un concepto muy limitado debido al carácter infinito de las fluctuaciones nulas. Esto es tanto más cierto en lo que concierne a los operadores en la representación de Heisenberg, operadores que, de hecho, además contienen en sí las divergencias vinculadas con la interacción. En este capítulo los §§ 99-106 se dedican a exponer una teoría formal en la que las cuestiones de eliminación de estos infinitos no se tiene en cuenta y se opera con todas las magnitudes como si fuesen finitas. Los resultados obtenidos de esta manera tienen principalmente un valor heurístico: hacen posible una más profunda explicación del significado de los desarrollos de la teoría de perturbaciones; es también posible que dichos resultados se conserven en alguna forma en una teoría futura libre de las dificultades actuales **.

§ 100. Propagador exacto de fotón

El papel fundamental en el formalismo de la teoría exacta (es decir, no basada

* Obsérvense las propiedades evidentes de S :

$$\begin{aligned} S(t, t_1) S(t_1, t_0) &= S(t, t_0), \\ S(t, t_0) S(t_0, t) &= 1. \end{aligned} \quad (99.11a)$$

** Finalmente, el formalismo matemático que aquí se desarrolla encuentra aplicación también en la física estadística cuántica, en la que no se plantean en absoluto las divergencias características de la teoría de campos.

en desarrollos en potencias de e^2) lo representan los conceptos de propagadores exactos *.

El *propagador exacto de fotón* (que designaremos con la letra bastardilla \mathcal{D}) se define por la fórmula

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x') = i \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(x') | 0 \rangle, \quad (100.1)$$

en la cual $A_\mu(x)$ son operadores de Heisenberg, a diferencia de la definición (77.1):

$$D_{\mu\nu}(x - x') = i \langle 0 | T A_\mu^{\text{int}}(x) A_\nu^{\text{int}}(x') | 0 \rangle, \quad (100.2)$$

en la que figuraban operadores en la representación de interacción. Para distinguirla del propagador exacto (100.1), la función (100.2) puede llamarse *propagador de fotones libres*.

Debido a la imposibilidad de calcular exactamente el valor medio (100.1), no cabe obtener una expresión analítica exacta de $\mathcal{D}_{\mu\nu}$, si bien la definición (100.1) permite establecer algunas propiedades generales de esta función. A ello se dedicará el § 108, pero por el momento nos ocuparemos del cálculo de $\mathcal{D}_{\mu\nu}$, siguiendo la teoría de perturbaciones, con ayuda de la técnica de diagramas. Para poder hacerlo es necesario expresar $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ en función de los operadores en la representación de interacción.

Supongamos primero que $t > t'$. Valiéndonos de la relación entre $A(x)$ y $A_{\text{int}}(x)$ [cf. (99.13)], escribiremos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x') &= i \langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(x') | 0 \rangle = \\ &= i \langle 0 | S(-\infty, t) A_\mu^{\text{int}}(x) S(t, -\infty) S(-\infty, t') A_\nu^{\text{int}}(x') S(t', -\infty) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

De acuerdo con (99.11 a), substituyamos

$$\begin{aligned} S(t, -\infty) S(-\infty, t') &= S(t, t'), \\ S(-\infty, t) &= S(-\infty, +\infty) S(\infty, t). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x') &= \\ &= i \langle 0 | S^{-1}[S(\infty, t) A_\mu^{\text{int}}(x) S(t, t') A_\nu^{\text{int}}(x') S(t', -\infty)] | 0 \rangle, \quad (100.3) \end{aligned}$$

donde para abreviar se ha introducido la notación

* El primero en introducir estos conceptos fue F. Dyson (1949); también él fue quien construyó, en lo fundamental, todo el formalismo expuesto en este capítulo.

$$S \equiv S(+\infty, -\infty). \quad (100.4)$$

Dado que en virtud de la definición (99.11) $S(t_2, t_1)$ contiene solamente operadores relativos a instantes entre t_1 y t_2 dispuestos en orden cronológico, es evidente que todos los operadores factor que aparecen en el paréntesis recto de (100.3) están ordenados de izquierda a derecha en el sentido de valores decrecientes del tiempo. Colocando ante el paréntesis el símbolo del operador cronológico T , podemos luego reordenar arbitrariamente los factores, puesto que el operador T los coloca automáticamente en el orden necesario. Valiéndonos de esto, escribiremos el paréntesis en la forma

$$\dots = T[A_\mu^{\text{int}}(x) A_v^{\text{int}}(x') S(\infty, t) S(t, t') S(t', -\infty)] = \\ = T[A_\mu^{\text{int}}(x) A_v^{\text{int}}(x') S].$$

Así, pues,

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x') = i \langle 0 | S^{-1} T[A_\mu^{\text{int}}(x) A_v^{\text{int}}(x') S] | 0 \rangle. \quad (100.5)$$

De manera análoga es fácil comprobar que esta fórmula es también válida para $t < t'$.

Demostremos ahora que el factor S^{-1} se puede sacar fuera del símbolo del promedio respecto del vacío en forma de factor de fase. Para ello recordemos que la función de onda de Heisenberg correspondiente al vacío Φ coincide con el valor $\Phi_{\text{int}}(-\infty)$ de la función de onda de este mismo estado en la representación de interacción [cf. (99.9)]. Pero según (73.8), tenemos

$$S\Phi_{\text{int}}(-\infty) \equiv S(+\infty, -\infty)\Phi_{\text{int}}(-\infty) = \Phi_{\text{int}}(+\infty).$$

Ahora bien, el vacío es un estado rigurosamente estacionario; en él no es posible ningún proceso espontáneo de creación de partículas. En otras palabras, en el transcurso del tiempo el vacío sigue siendo el vacío; esto significa que $\Phi_{\text{int}}(+\infty)$ puede diferir de $\Phi_{\text{int}}(-\infty)$ solamente en un factor de fase $e^{i\alpha}$. Por consiguiente,

$$S\Phi_{\text{int}}(-\infty) = e^{i\alpha}\Phi_{\text{int}}(-\infty) = \langle 0 | S | 0 \rangle \Phi_{\text{int}}(-\infty). \quad (100.6)$$

o bien, tomando la expresión conjugada compleja y teniendo en cuenta el carácter unitario del operador S ,

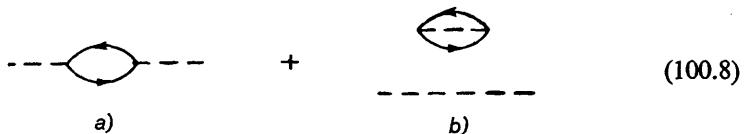
$$\Phi_{\text{int}}^*(-\infty) S^{-1} = \langle 0 | S | 0 \rangle^{-1} \Phi_{\text{int}}^*(-\infty).$$

De aquí se sigue, evidentemente, que la expresión (100.5) se puede escribir también en la forma

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x') = i \frac{\langle 0 | T A_{\mu}^{\text{int}}(x) A_{\nu}^{\text{int}}(x') S | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}. \quad (100.7)$$

Substituyendo aquí (en el numerador y en el denominador) el desarrollo de S (73.10) y efectuando el promedio con ayuda del teorema de Wick (§ 78), obtendremos el desarrollo de $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ en potencias de e^2 .

En el numerador de (100.7) las expresiones promediadas difieren de los elementos de matriz del tipo (78.1) considerado en el § 78 únicamente en que en vez de los operadores «exteriores» de creación o de aniquilación de fotones aparecen los operadores $A_{\mu}^{\text{int}}(x)$ y $A_{\nu}^{\text{int}}(x')$. Dado que todos los factores en los productos promediados están sometidos al operador cronológico, la contracción a pares de estos operadores con los operadores «interiores» $A^{\text{int}}(x_1)$, $A^{\text{int}}(x_2)$, ... darán los propagadores de fotón $D_{\mu\nu}$. De esta manera, los resultados del promedio se expresan por conjuntos de diagramas con dos terminales exteriores construidos de acuerdo con las reglas descritas en el § 78, con la única diferencia de que a las líneas tanto exteriores como interiores de fotón del diagrama corresponderán ahora los propagadores $D_{\mu\nu}$ (en vez de las amplitudes e de los fotones reales). En la aproximación de orden cero, con $S = 1$, el numerador de la expresión (100.7) coincide simplemente con $D_{\mu\nu}(x - x')$. Los siguientes términos diferentes de cero serán $\sim e^2$. Estos términos se representan por un conjunto de diagramas que contienen dos terminales exteriores y dos vértices:



El segundo de estos diagramas está constituido por dos partes no ligadas entre sí: una línea de trazos (a la que corresponde $-iD_{\mu\nu}$) y un lazo cerrado. Esta descomposición del diagrama significa la descomposición de la expresión analítica que le corresponde en dos factores independientes. Sumando a los diagramas (100.8) el diagrama (línea — — —) de la aproximación de orden cero y «sacándolo fuera del paréntesis» llegamos al resultado de que, salvo términos de orden superior al segundo, el numerador en (100.7) es igual a

$$--- \left\{ 1 + \text{Diagrama b)} \right\} + \text{Diagrama a)}$$

En cuanto a la expresión $\langle 0 | S | 0 \rangle$ en el denominador de (100.7), ésta representa la amplitud de «transición» del vacío al vacío. Su desarrollo contiene, por

ello, sólo diagramas sin terminales exteriores. En la aproximación de orden cero es $\langle 0 | S | 0 \rangle = 1$, y salvo términos de orden superior al segundo, obtenemos

$$\left\{ 1 + \text{---} \textcirclearrowleft \text{---} \right\}$$

Dividiendo con esta misma precisión el numerador por el denominador, se encuentra que el corchete se simplifica y queda

$$\text{---} \textcirclearrowleft \text{---} + \text{---}$$

Así, pues, un diagrama con un lazo aislado en nada contribuye. Este resultado tiene carácter general. Analizando detenidamente la manera de construir los diagramas que corresponden al numerador y al denominador de (100.7), no es difícil comprender que el papel del denominador $\langle 0 | S | 0 \rangle$ se reduce a que, en cualquier orden de la teoría de perturbaciones, el propagador exacto $D_{\mu\nu}$ se representará solamente por diagramas que no contienen partes separadas unas de otras.

Obsérvese que los diagramas sin terminales exteriores (lazos cerrados) carecen totalmente de sentido físico y no hay que tenerlos en cuenta, incluso con independencia del hecho de que desaparezcan al formar el propagador D . En efecto, tales lazos representan por sí mismos correcciones radiativas al elemento diagonal de la matriz S para la transición vacío-vacío. Pero según (100.6) la suma de todos estos lazos (junto con la unidad de la aproximación de orden cero) da tan sólo un factor de fase que carece de importancia, factor que no puede reflejarse en absolutamente ningún resultado físico.

El paso de la representación de coordenadas a la de impulsos se lleva a cabo de la manera ordinaria. Así, en la segunda aproximación de la teoría de perturbaciones el propagador $-iD_{\mu\nu}(k)$ (que representaremos gráficamente por una línea de trazos gruesos) viene dado por la suma

$$\text{---} \approx \text{---} + \text{---} \textcirclearrowleft \text{---} \quad (100.9)$$

k k k p k

en la que todos los diagramas se calculan siguiendo las reglas ordinarias (dadas en el § 78), con la única diferencia de que a las líneas de fotón exteriores, al igual que a las interiores, se asocian factores $-iD_{\mu\nu}(k)$. Por consiguiente, la expresión analítica de esta fórmula viene dada por *

* Al determinar los signos, no hay que olvidar el factor -1 ligado con cada lazo cerrado de electrón!

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) \approx D_{\mu\nu}(k) + ie^2 D_{\mu\lambda}(k) \int \text{Tr} \gamma^\lambda G(p+k) \gamma^\rho G(p) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} D_{\rho\nu}(k) \quad (100.10)$$

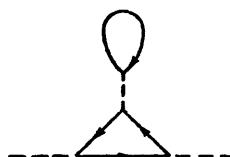
(como de costumbre, no se han escrito los índices bispinoriales en las matrices γ y G).

Los términos que corresponden a las aproximaciones siguientes se construyen de manera análoga; dichos términos están representados por conjuntos de diagramas con dos terminales exteriores de fotón y el número necesario de vértices. Así al término $\sim e^4$ corresponden los siguientes diagramas con cuatro vértices



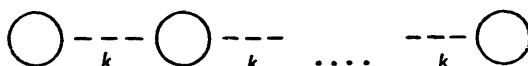
(100.11)

Cuatro vértices posee también el diagrama



la parte superior del cual es un lazo formado por una línea de electrón que «se cierra sobre sí misma» *. Un lazo de estas características corresponde a la contracción $\bar{\psi}(x)\psi(x)$, es decir, simplemente al valor medio de la corriente respecto del vacío: $\langle 0 | j(x) | 0 \rangle$. Pero ya por la propia definición de vacío esta cantidad debe anularse idénticamente y esta anulación idéntica no puede modificarse, claro está, por ninguna corrección radiativa ulterior aplicada a dicho lazo **. Por esta razón, no debe tenerse en cuenta absolutamente ningún diagrama con líneas de electrón «cerradas sobre sí», cualquiera que sea la aproximación.

La parte de un diagrama («bloque») comprendida entre dos líneas de fotón (exteriores o interiores) se llama *parte de energía propia de fotón*. En el caso general, un bloque así definido puede todavía descomponerse a su vez en partes unidas de dos en dos por una línea de fotón, es decir, tiene una estructura de la forma

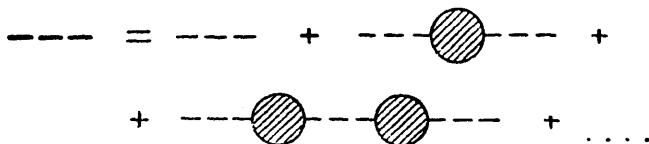


* En contraste con el lazo del diagrama (100.8 b) formado por dos líneas de electrón diferentes.

** Aunque un cálculo directo de acuerdo con los diagramas conduciría precisamente a integrales divergentes.

donde los círculos designan bloques que ya no es posible subdividir de esta manera; tales partes se califican de *compactas* [así, de las cuatro partes de energía propia en la aproximación de cuarto orden (100.11) son compactas las tres primeras].

Designemos con el símbolo $i\mathcal{P}_{\mu\nu}/4\pi$ la suma de todas las partes compactas de energía propia (en número infinito); la función $\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)$ se llama *operador de polarización*. Clasificando los diagramas de acuerdo con el número de partes compactas que contienen, es posible representar el propagador exacto $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ en forma de serie



donde a cada circulito rayado corresponde $i\mathcal{P}_{\mu\nu}/4\pi$. Analíticamente esta serie se escribe en la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= D + D \frac{\mathcal{P}}{4\pi} D + D \frac{\mathcal{P}}{4\pi} D \frac{\mathcal{P}}{4\pi} D + \dots = \\ &= D \left\{ 1 + \frac{\mathcal{P}}{4\pi} \left[D + D \frac{\mathcal{P}}{4\pi} D + \dots \right] \right\}\end{aligned}\quad (100.12)$$

(para abreviar se ha prescindido de los índices tensoriales). Pero la serie entre paréntesis rectos coincide nuevamente con la serie que da \mathcal{D} . Por lo tanto, tenemos

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}(k) + D_{\mu\lambda}(k) \frac{\mathcal{P}^{\lambda\rho}(k)}{4\pi} \mathcal{D}_{\rho\nu}(k). \quad (100.13)$$

Multiplicando esta igualdad a la izquierda por el tensor inverso $(D^{-1})^{\tau\mu}$ y a la derecha por $(\mathcal{D}^{-1})^{\nu\sigma}$ (y cambiando la notación de los índices), la obtendremos en la forma equivalente

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1} = D_{\mu\nu}^{-1} - \frac{1}{4\pi} \mathcal{P}_{\mu\nu}. \quad (100.14)$$

Hay que subrayar que la representación de \mathcal{D} en la forma (100.12) presupone que es posible separar en los diagramas los bloques más simples, los cuales se calculan según las reglas generales de la técnica de diagramas, y combinando tales bloques unos con otros obtendremos las expresiones correctas para los diagramas como un todo. Que esta subdivisión sea admisible constituye una peculiaridad importante (y en modo alguno trivial) de la técnica de diagramas. Esta peculiaridad se debe a que el coeficiente numérico común en un diagrama no depende de su orden.

Esta misma propiedad permite utilizar la función \mathcal{D} (suponiéndola conocida)

para simplificar los cálculos de las correcciones por radiación que hay que aplicar a las amplitudes de los diferentes procesos de dispersión: en vez de considerar de nuevo cada vez diagramas con diferentes correcciones a las líneas de fotón interiores, podemos substituir simplemente estas líneas por otras de trazo grueso, es decir, substituirlas por los propagadores \mathcal{D} (en vez de D) tomándolos con la aproximación exigida.

Si una línea de fotón corresponde a un fotón real (y no a uno virtual), es decir, si constituye un terminal exterior de un diagrama considerado como un todo, después de introducir en ella todas las correcciones de energía propia se obtendrá, como suele decirse, una *línea exterior efectiva*. A la misma corresponde una expresión que difiere de la (100.13) en la substitución del factor D por la amplitud de polarización de un fotón real:

$$e_\mu + \mathcal{D}_{\mu\rho}(k) \frac{\mathcal{P}^{(l)}(k)}{4\pi} e_\lambda. \quad (100.15)$$

En cambio, si se trata de una línea exterior del campo, entonces hay que escribir $A_\mu^{(e)}$ en vez de e_μ .

Todo lo dicho en el § 77 acerca de la estructura tensorial y de la no unicidad de contraste del propagador aproximado $D_{\mu\nu}$ vale también para la función exacta $\mathcal{D}_{\mu\nu}$. Manteniéndonos dentro de los límites de las representaciones relativísticamente invariantes de esta función, escribiremos su expresión general en la forma

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = \mathcal{D}(k^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \mathcal{D}^{(l)}(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}; \quad (100.16)$$

el primer término corresponde al contraste de Landau y en el segundo término $\mathcal{D}^{(l)}$ es una función arbitraria respecto del contraste. La representación análoga del propagador aproximado es *:

$$D_{\mu\nu}(k) = D(k^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + D^{(l)}(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (100.17)$$

Observemos ahora que la parte longitudinal del propagador está vinculada con la parte longitudinal del 4-potencial —parte ésta que carece de significado físico— y no participa en la interacción. Por ello, la interacción no la modifica, de modo que debe tenerse

$$\mathcal{D}^{(l)}(k^2) = D^{(l)}(k^2) \quad (100.18)$$

* La definición de $D^{(l)}$ en esta fórmula no coincide con la definición dada en (77.3).

Los tensores inversos deben, por definición, satisfacer las igualdades

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1}\mathcal{D}^{\lambda\nu} = \delta_{\mu}^{\lambda}, \quad D_{\mu\nu}^{-1}D^{\lambda\nu} = \delta_{\mu}^{\lambda}.$$

Para los tensores directos (100.16) o (100.17), los tensores inversos, teniendo en cuenta (100.18), son de la forma

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1} = \frac{1}{\mathcal{D}} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \right) + \frac{1}{D^{(l)}} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2},$$

$$D_{\mu\nu}^{-1} = \frac{1}{D} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \right) + \frac{1}{D^{(l)}} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2}$$

De estas fórmulas se sigue que el operador polarización $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ es un tensor transversal.

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = \mathcal{P}(k^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \right), \quad (100.19)$$

donde $\mathcal{P} = k^2 - 4\pi/\mathcal{D}$, o bien

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2 \left(1 - \frac{\mathcal{P}(k^2)}{k^2} \right)}. \quad (100.20)$$

Así, pues, el operador polarización posee (en contraposición con el propio propagador de fotón) la invariancia de contraste.

§ 101. Función energía propia de fotón

Para seguir estudiando las propiedades analíticas del propagador de fotón conviene introducir, junto con el operador polarización, una función auxiliar más $\Pi_{\mu\nu}(k)$ que se llama *función energía propia de fotón*. La función $i\Pi_{\mu\nu}/4\pi$ se define como suma de todas las partes de energía propia de fotón, y no solamente de las compactas. Simbolizando esta suma por un cuadrado en el diagrama, representaremos el propagador exacto por la suma

$$\overline{\text{---}}_k = \overline{\text{---}}_k + \overline{\text{---}}_k \boxed{} \overline{\text{---}}_k$$

es decir,

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} + D_{\mu\lambda} \frac{\Pi^{\lambda\rho}}{4\pi} D_{\rho\nu}. \quad (101.1)$$

Expresando a partir de esta igualdad $\Pi_{\mu\nu}$ en la forma

$$\frac{1}{4\pi} \Pi_{\mu\nu} = D_{\mu\lambda}^{-1} \mathcal{D}^{\lambda\rho} D_{\rho\nu}^{-1} - D_{\mu\nu}^{-1}$$

y substituyendo aquí (100.16-18) y luego (100.20), obtendremos

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi(k^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad \Pi = \frac{\mathcal{P}}{1 - \mathcal{P}/k^2}. \quad (101.2)$$

Vemos así que $\Pi_{\mu\nu}$ (al igual que $\mathcal{P}_{\mu\nu}$) es un tensor invariante respecto de los cambios de contraste.

La utilidad de la magnitud $\Pi_{\mu\nu}$ está ligada con su expresión en la representación de coordenadas. Ésta se puede hallar fácilmente observando que la igualdad

$$\frac{1}{4\pi} \Pi_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\lambda}^{-1} D_{\rho\nu}^{-1} \{ \mathcal{D}^{\lambda\rho}(k) - D^{\lambda\rho}(k) \},$$

teniendo en cuenta la transversalidad del tensor $\mathcal{D}^{\lambda\rho} - D^{\lambda\rho}$ que se sigue de (100.18) puede escribirse en el espacio de coordenadas en la forma

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(x - x') &= \\ &= \frac{1}{4\pi} (\partial_\mu \partial_\lambda - g_{\mu\lambda} \partial_\sigma \partial^\sigma) (\partial'_\nu \partial'_\rho - g_{\nu\rho} \partial'_\sigma \partial'^\sigma) \{ \mathcal{D}^{\lambda\rho}(x - x') - D^{\lambda\rho}(x - x') \}. \end{aligned}$$

Para efectuar la derivación hay que substituir aquí

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\lambda\rho}(x - x') - D^{\lambda\rho}(x - x') &= \\ &= i \langle 0 | T A^\lambda(x) A^\rho(x') - T A_{int}^\lambda(x) A_{int}^\rho(x') | 0 \rangle. \quad (101.3) \end{aligned}$$

Vimos en el § 76 que la derivación de un producto- T exige, en general, un cierto cuidado debido a presentar discontinuidades finitas. Pero en (101.3) la diferencia promediada es continua, al igual que sus derivadas primeras, puesto que las reglas de commutación para las componentes de los operadores $A^\lambda(x)$ y $A_{int}^\lambda(x)$ (tomados para un mismo instante) son iguales y los correspondientes saltos se reducen entre sí (cf. § 76). Por ello, la derivación de la diferencia (101.3) se puede efectuar permutándola con el operador T . Según (99.6) y (99.6 a), se obtendrá en definitiva la expresión buscada

$$\Pi_{\mu\nu}(x - x') = 4\pi ie^2 \langle 0 | T j_\mu(x) j_\nu(x') | 0 \rangle. \quad (101.4)$$

Ésta pone de manifiesto de modo explícito el carácter invariante de $\Pi_{\mu\nu}$ en las transformaciones de contraste, puesto que de esta propiedad gozan los operadores corriente.

De (101.4) puede deducirse una importante representación integral de esta función.

Teniendo en cuenta (101.2) basta considerar la función escalar $\Pi = \frac{1}{3} \Pi_{\mu}^{\mu}$. En la representación de coordenadas, se tiene

$$\begin{aligned}\Pi(x - x') &= \frac{4\pi}{3} ie^2 \langle 0 | T j_{\mu}(x) j^{\mu}(x') | 0 \rangle = \\ &= \frac{4\pi}{3} ie^2 \left\{ \begin{array}{ll} \sum_n \langle 0 | j_{\mu}(x) | n \rangle \langle n | j^{\mu}(x') | 0 \rangle & \text{para } t > t', \\ \sum_n \langle 0 | j_{\mu}(x') | n \rangle \langle n | j^{\mu}(x) | 0 \rangle & \text{para } t < t', \end{array} \right. \quad (101.5)\end{aligned}$$

donde el símbolo n numera los estados del sistema (campos electromagnético + electrón-positón) *. Dado que el operador corriente $j(x)$ depende de $x^{\mu} = (t, \mathbf{r})$, también dependen de x sus elementos de matriz. Esta dependencia puede establecerse de modo explícito si se elige como estados $|n\rangle$ aquéllos para los que el 4-impulso total tiene valores determinados.

La dependencia de los elementos de matriz de la corriente respecto del tiempo, al igual que para cualquier operador de Heisenberg, viene dada por la expresión

$$\langle n | j^{\mu}(t, \mathbf{r}) | m \rangle = \langle n | j^{\mu}(\mathbf{r}) | m \rangle e^{-i(E_m - E_n)t},$$

donde E_n , E_m son las energías de los estados $|n\rangle$ y $|m\rangle$, y $j(\mathbf{r})$ es el operador de Schrödinger.

Para determinar la dependencia de los elementos de matriz respecto de las coordenadas, consideraremos el operador $j(\mathbf{r})$ como resultado de la transformación del operador $j(0)$ mediante una translación paralela a la distancia \mathbf{r} . El operador de esta translación es $\exp(i\mathbf{r}\cdot\mathbf{P})$, donde \mathbf{P} es el operador correspondiente al impulso total del sistema (cf. III, § 15, probl. 1). Teniendo en cuenta la regla general de transformación de los elementos de matriz [cf. III (12.7)], encontramos por ello que

$$\langle n | j^{\mu}(\mathbf{r}) | m \rangle = \langle n | e^{-i\mathbf{r}\cdot\mathbf{P}} j^{\mu}(0) e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{P}} | m \rangle = \langle n | j^{\mu}(0) | m \rangle e^{i(P_m - P_n)\cdot\mathbf{r}}.$$

Junto con la fórmula anterior, esto nos da finalmente

$$\langle n | j^{\mu}(t, \mathbf{r}) | m \rangle = \langle n | j^{\mu}(0) | m \rangle e^{-i(P_m - P_n)t}. \quad (101.6)$$

* El operador corriente conserva la carga; por consiguiente, los estados $|n\rangle$ que se combinan con el vacío $|0\rangle$ pueden contener únicamente números iguales de electrones y positones.

Observemos también que la matriz $\langle n | j^\mu(0) | m \rangle$ es hermítica [al igual que la matriz (101.6) del operador $j^\mu(t, \mathbf{r})$ tomado en conjunto] y que en virtud de la ecuación de continuidad (99.7) cumple la condición de transversalidad

$$(P_n - P_m)^\mu \langle n | j_\mu(0) | m \rangle = 0. \quad (101.7)$$

Volvamos al cálculo de la función $\Pi(x - x')$. Substituyendo (101.6) en (101.5), tenemos

$$\Pi(\xi) = \frac{4\pi e^2}{3} \sum_n \langle 0 | j_\mu(0) | n \rangle \langle n | j^\mu(0) | 0 \rangle e^{\mp i P_n \xi} \quad \text{para } \tau \geq 0, \quad (101.8)$$

donde $x - x' = \xi = (\tau, \xi)$. Hagamos

$$\rho(k^2) = -\frac{4\pi e^2}{3} (2\pi)^3 \sum_n \langle 0 | j_\mu(0) | n \rangle \langle 0 | j^\mu(0) | n \rangle^* \delta^{(4)}(k - P_n). \quad (101.9)$$

La suma se extiende a todos los sistemas de pares electrón-positón y de fotones que pueden crearse por un fotón virtual de 4-impulso $k = (\omega, \mathbf{k})$ ($\omega > 0$), y para cada uno de estos sistemas, a las variables internas (polarizaciones e impulsos de las partículas en el sistema del centro de masa)*. Efectuada esta suma, la función ρ puede depender tan sólo de k , y dado que se trata de un escalar, únicamente de k^2 . En particular, ρ no depende de la dirección y sentido de \mathbf{k} . Teniendo en cuenta estas propiedades de la función ρ , escribiremos (101.8) en la forma

$$\begin{aligned} \Pi(\xi) &= -i \int_0^\infty d\omega \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \rho(k^2) e^{ik \cdot \xi - i\omega |\tau|} = \\ &= -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\omega d(\mu^2) \delta(\mu^2 - k^2) \rho(\mu^2) e^{ik \cdot \xi - i\omega |\tau|}. \end{aligned}$$

El paso a la representación de impulso se lleva a cabo substituyendo aquí la fórmula

$$e^{-i\omega |\tau|} = 2i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_0 \tau} \frac{1}{k_0^2 - \omega^2 + i0} \frac{dk_0}{2\pi} \quad (101.10)$$

(cf. § 77, pág. 329) y da

* Esta definición de los estados $|n\rangle$, evidentemente, es idéntica a su definición como estados para los que son diferentes de cero los elementos de matriz $\langle 0 | j | n \rangle$ de un operador impar respecto de la carga.

$$\Pi(k^2) = \int_0^\infty d(\mu^2) \int_0^\infty d(\omega^2) \delta(\mu^2 + k^2 - \omega^2) \frac{\rho(\mu^2)}{k_0^2 - \omega^2 + i0},$$

o finalmente

$$\Pi(k^2) = \int_0^\infty \frac{\rho(\mu^2) d\mu^2}{k^2 - \mu^2 + i0}. \quad (101.11)$$

El coeficiente ρ en esta representación integral se llama *densidad espectral* de la función $\Pi(k^2)$. Este coeficiente tiene las propiedades:

$$\begin{aligned} \rho(k^2) &= 0 \quad \text{para } k^2 < 0, \\ \rho(k^2) &> 0 \quad \text{para } k^2 > 0. \end{aligned} \quad (101.12)$$

En efecto, el 4-impulso k de un fotón virtual susceptible de crear un sistema de partículas reales, es necesariamente temporal (k^2 coincide con el cuadro de la energía total de las partículas en el sistema de su centro de masa). Ahora bien, en virtud de la condición de transversalidad (101.7), tenemos

$$P_n^\mu \langle 0 | j_\mu(0) | n \rangle = 0.$$

Pero el 4-vector $\langle 0 | j | n \rangle$, que es ortogonal al 4-vector temporal (P_n), es de tipo espacial, es decir,

$$\langle 0 | j_\mu(0) | n \rangle \langle 0 | j^\mu(0) | n \rangle^* < 0,$$

y, por consiguiente, según la definición (101.9) se tiene $\rho > 0$.

§ 102. Propagador exacto de electrón

De manera análoga al caso del fotón, el propagador exacto de electrón se define por la fórmula

$$\mathcal{G}_{ik}(x - x') = -i \langle 0 | T \psi_i(x) \bar{\psi}_k(x') | 0 \rangle \quad (102.1)$$

(i, k son subíndices bispinoriales), que difiere de la definición (76.1) del propagador de partículas libres

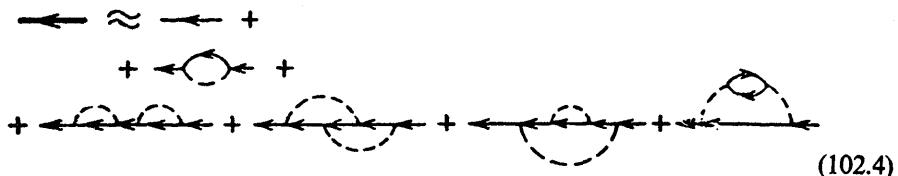
$$G_{ik}(x - x') = -i \langle 0 | T \psi_i^{\text{int}}(x) \bar{\psi}_k^{\text{int}}(x') | 0 \rangle \quad (102.2)$$

en el cambio de los operadores- ψ en la representación de interacción por los de Heisenberg.

Las mismas consideraciones que nos llevaron a la igualdad (100.7) permiten transformar \mathcal{G}_{ik} , reduciéndolo a la forma

$$\mathcal{G}_{ik}(x - x') = -i \frac{\langle 0 | T\Phi_i^{\text{int}}(x) \bar{\Psi}_k^{\text{int}}(x') S | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}. \quad (102.3)$$

El desarrollo de esta expresión en potencias de e^2 conduce a la representación de la función \mathcal{G} en forma de una familia de diagramas con dos líneas de electrón exteriores y un número diferente de vértices. En estas condiciones, el papel del numerador en (102.3) queda reducido de nuevo a la necesidad de tener en cuenta solamente los diagramas que carecen de «lazos de vacío» aislados. Así, con una precisión que alcanza los términos $\sim e^4$, la representación gráfica del operador \mathcal{G} (línea continua de trazo grueso) es del tipo *



A la función $i\mathcal{G}(p)$ (en la representación de impulsos) corresponde una línea continua gruesa, mientras que a todas las líneas continuas y de trazos en los diagramas del segundo miembro de la igualdad les corresponden los propagadores de partículas libres, iG y $-iD$, respectivamente.

Un bloque comprendido entre dos líneas de electrón se llama *parte de energía propia de electrón*. Como en el caso del fotón, dicha parte se califica de *compacta* si no se puede descomponer en otras dos partes de energía propia cortando por cada línea de electrón. La suma de todas las partes compactas la designaremos por $-i\mathcal{M}_{ik}$; la función $\mathcal{M}_{ik}(p)$ se llama *operador másico*. Así, con una precisión que incluye hasta los términos $\sim e^4$, se tiene

* Conforme se explicó en el § 100, no es necesario tener en cuenta también los diagramas con líneas que «se cierran sobre sí mismas», líneas que aparecerían aquí ya en el segundo grado:



(102.5)

Mediante una suma que se efectúa de manera exactamente análoga a la que condujo a (100.13), obtendremos

$$\mathcal{G}(p) = G(p) + G(p) \mathcal{M}(p) \mathcal{G}(p) \quad (102.6)$$

(se han omitido los índices bispinoriales), o bien para las matrices inversas

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = G^{-1}(p) - \mathcal{M}(p) = \hat{p} - m - \mathcal{M}(p). \quad (102.7)$$

En el § 99 se hizo ya notar que los operadores- ψ de Heisenberg (en contraposición con los operadores- ψ de la representación de interacción) cambian como resultado de una transformación de contraste de los potenciales electromagnéticos. Tampoco posee la invariancia de contraste el propagador exacto de electrón \mathcal{G} . Veamos cuál es su ley de transformación al cambiar de contraste (*L. D. Landau, I. M. Jalatnikov*, 1952).

Es claro desde luego que el cambio de \mathcal{G} en una transformación de contraste debe expresarse en función de la misma magnitud $D^{(l)}$ que se añade en dicha transformación al propagador de fotón. Esto resulta evidente si se tiene en cuenta que en el cálculo de \mathcal{G} de acuerdo con los diagramas de la teoría de perturbaciones cada término de la serie se expresa en función de D y que en ellos no aparece ninguna otra magnitud electromagnética. Cabe valerse de esta circunstancia para simplificar los razonamientos: es posible partir de hipótesis particulares cualesquiera acerca de las propiedades del operador arbitrario χ en la transformación (99.8), con tal que el resultado se exprese en función de $D^{(l)}$.

La transformación (99.8) aplicada a los operadores \mathcal{D} (100.1) y \mathcal{G} (102.1) tiene como consecuencia que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu} &\rightarrow i \langle 0 | T [A_\mu(x) - \partial_\mu \chi(x)] [A_\nu(x') - \partial'_\nu \chi(x')] | 0 \rangle, \\ \mathcal{G}_{ik} &\rightarrow -i \langle 0 | T \psi_i(x) e^{ie\chi(x)} e^{-ie\chi(x')} \bar{\psi}_k(x') | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (102.8)$$

Supondremos que los operadores χ satisfacen el teorema de Wick, es decir, que sus productos se promedian a pares con independencia de los demás operadores en el producto- T ; esta hipótesis es del todo natural, puesto que, en virtud de la invariancia de contraste, el «campo» χ no participa en modo alguno en la interacción. Admitiremos también que se anula el valor medio respecto del vacío del propio

operador $\chi: \langle 0 | \chi | 0 \rangle = 0$. Se separan entonces en (102.8) los términos que contienen χ y obtenemos

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} \rightarrow \mathcal{D}_{\mu\nu} + i \langle 0 | T \partial_\mu \chi(x) \cdot \partial'_\nu \chi(x') | 0 \rangle, \quad (102.9)$$

$$\mathcal{G}_{ik} \rightarrow \mathcal{G}_{ik} \langle 0 | T e^{iex(x)} e^{-iex(x')} | 0 \rangle. \quad (102.10)$$

La primera de estas transformaciones se puede escribir en la forma *

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x') \rightarrow \mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x') + \partial_\mu \partial'_\nu d^{(l)}(x - x'), \quad (102.11)$$

donde

$$d^{(l)}(x - x') = i \langle 0 | T \chi(x) \chi(x') | 0 \rangle. \quad (102.12)$$

Vemos así que $d^{(l)}$ determina el cambio de la parte longitudinal del propagador de fotón $\mathcal{D}^{(l)}$ en una transformación de contraste.

Desarrollando ahora la magnitud

$$B \equiv \langle 0 | T e^{iex(x)} e^{-iex(x')} | 0 \rangle \quad (102.13)$$

en potencias de e y efectuando el promedio según el teorema de Wick, cada término del desarrollo puede expresarse en función de $d^{(l)}$. Este cálculo se simplifica considerablemente observando que su resultado no puede depender de la no commutabilidad de los operadores $\chi(x)$ y $\chi(x')$; en efecto, su transposición conduce solamente a la transposición de los argumentos x y x' en la función $d^{(l)}(x - x')$ que, evidentemente, es par **. En la hipótesis que $\chi(x)$ y $\chi(x')$ comuten, la multiplicación de operadores exponenciales en (102.13) se reduce a la suma de sus exponentes (y el símbolo de ordenación cronológica se puede suprimir):

$$B = \langle 0 | e^{i\varphi} | 0 \rangle, \quad \varphi = e [\chi(x) - \chi(x')].$$

* El paso de (102.9) a (102.11) es posible si la función $d^{(l)}$ y su derivada respecto de t son continuas para $t = t'$; de no ser así, los segundos miembros de estas expresiones contendrían términos con funciones δ [cf. la deducción de la fórmula (76.2)]. En el espacio de impulsos esta condición equivale a suponer que $d^{(l)}(q)$ disminuye para $|q^2| \rightarrow \infty$ más rápidamente que $1/q^2$.

** Las propiedades de commutación de $\chi(x)$ y $\chi(x')$ son esenciales, naturalmente, para la forma de la propia función $d^{(l)}(x - x')$. En relación con esto hay que subrayar que al suponer para el operador $\chi(x)$ la forma (102.9) consideramos únicamente aquéllas transformaciones de contraste que no violan la homogeneidad espacio-temporal, es decir, las que conservan la dependencia de \mathcal{D} con respecto tan sólo de la diferencia $x - x'$ (en cambio, en el caso general de una transformación por completo arbitraria esta propiedad puede dejar de cumplirse).

En el desarrollo de esta expresión los términos de grado impar se anulan como resultado del promedio, con lo que queda

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \langle 0 | \varphi^{2n} | 0 \rangle.$$

Además, tenemos

$$\langle 0 | \varphi^{2n} | 0 \rangle = \frac{(2n)!}{2^n n!} \langle 0 | \varphi^2 | 0 \rangle;$$

el coeficiente del segundo miembro es el número de contracciones diferentes que es posible efectuar entre los $2n$ operadores φ tomados a pares (es decir, el número de maneras de unir dos a dos $2n$ puntos numerados)*. De aquí se sigue

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2} \langle 0 | \varphi^2 | 0 \rangle \right)^n = \exp \frac{\langle 0 | \varphi^2 | 0 \rangle}{2}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varphi^2 | 0 \rangle &= -e^2 \langle 0 | \chi^2(x) + \chi^2(x') - 2\chi(x)\chi(x') | 0 \rangle = \\ &= 2ie^2 [d^{(l)}(0) - d^{(l)}(x-x')], \end{aligned}$$

se encuentra en definitiva la siguiente fórmula de transformación de \mathcal{G} , si \mathcal{D} se transforma según (102.11):

$$\mathcal{G}(x-x') \rightarrow \mathcal{G}(x-x') \exp \{ie^2 [d^{(l)}(0) - d^{(l)}(x-x')]\}. \quad (102.14)$$

Esta fórmula se refiere a la representación de coordenadas de los propagadores. En el caso general, es imposible pasar en ella a componentes de Fourier, o sea, no cabe expresar el cambio del propagador $\mathcal{G}(p)$ en la representación de impulsos en función del cambio en el propagador $\mathcal{D}(p)$. Sin embargo, este paso es posible para una transformación de contraste infinitesimal. Designando en este caso, para mayor claridad, la cantidad pequeña $d^{(l)}$ por $\delta d^{(l)}$, de (102.14) se deduce para la variación de la función \mathcal{G}

$$\delta\mathcal{G}(x-x') = ie^2\mathcal{G}(x-x') [\delta d^{(l)}(0) - \delta d^{(l)}(x-x')]. \quad (102.15)$$

* En efecto, elijamos un método de promedio cualquiera. Si ahora se efectúan todas las permutaciones posibles de los puntos, obtendremos $(2n)!$ términos. Entre ellos, sin embargo, los hay que son redundantes. En primer lugar, no conducen a nuevos tipos de contracción las permutaciones de puntos dentro de pares; de éstos hay 2^n . En segundo lugar, nada significan las permutaciones de los propios pares; de éstos hay $n!$ Dividiendo $(2n)!$ por 2^n y $n!$ obtenemos el número indicado en el texto.

En componentes de Fourier *

$$\delta \mathcal{G}(p) = ie^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \delta d^{(l)}(q) [\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}(p-q)]. \quad (102.16)$$

En esta expresión $\delta d^{(l)}(q)$ está ligada con el cambio de la función $\mathcal{D}^{(l)}$ por la igualdad

$$\delta \mathcal{D}^{(l)}(q) = q^2 \delta d^{(l)}(q). \quad (102.17)$$

Para el propagador de electrón se podría obtener una representación integral análoga a la fórmula (101.11). Su deducción se basa en las expresiones

$$\Psi_{nm}(x) = \Psi_{nm}(0) e^{-i(P_m - P_n)x} \quad (102.18)$$

para los elementos de matriz del operador- Ψ , análogas a las expresiones (101.6) utilizadas en el § 101 para los elementos de matriz de la corriente. Sin embargo, y a diferencia del caso de la corriente, los propios operadores- Ψ no poseen la invariancia de contraste. En consecuencia, también la dependencia respecto de las coordenadas de la forma (102.18) no tiene carácter general, sino que se aplica solamente a un determinado contraste. Por esto mismo, también la representación integral del propagador basada en (102.18) es válida tan sólo para un contraste determinado. La causa física última de esta situación consiste en que el hecho de ser nula la masa del fotón conduce a la catástrofe en el infrarrojo (§ 95). Como consecuencia de ello, en el proceso de interacción el electrón emite un número infinito de cuantos blandos, lo que en grado considerable priva de su propio sentido al propagador «para una sola partícula» (102.1).

§ 103. Operador vértice

En los diagramas complicados es posible separar, junto con las partes de energía propia, bloques de otro tipo que no se reducen a las primeras. A una importante categoría de tales bloques llegamos considerando la función

* Si la función $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, sus componentes de Fourier son

$$\begin{aligned} f(p) &= \int f(x) e^{ipx} d^4 x = \int \int \int d^4 x \frac{d^4 q_1 d^4 q_2}{(2\pi)^8} e^{ix(p-q_1-q_2)} f_1(q_1) f_2(q_2) = \\ &= \int \frac{d^4 q_1 d^4 q_2}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(p-q_1-q_2) f_1(q_1) f_2(q_2) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} f_1(q) f_2(p-q). \end{aligned}$$

Al pasar de (102.15) a (102.16) se tuvo también en cuenta que

$$f(x=0) = \int f(q) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}.$$

$$K_{ik}^{\mu}(x_1, x_2, x_3) = \langle 0 | T A^{\mu}(x_1) \Psi_i(x_2) \bar{\Psi}_k(x_3) | 0 \rangle \quad (103.1)$$

con un índice 4-vectorial y dos índices bispinoriales; en virtud de la homogeneidad del espacio-tiempo, esta función depende únicamente de las diferencias de los argumentos x_1, x_2, x_3 . Expresada en función de los operadores en la representación de interacción, la función K tiene la forma:

$$K_{ik}^{\mu}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\langle 0 | T A_{\text{int}}^{\mu}(x_1) \Psi_i^{\text{int}}(x_2) \bar{\Psi}_k^{\text{int}}(x_3) S | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}. \quad (103.2)$$

El paso a la representación de impulsos se efectúa mediante la fórmula

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + k - p_2) K_{ik}^{\mu}(p_2, p_1; k) = \\ = \int \int \int K_{ik}^{\mu}(x_1, x_2, x_3) e^{-ikx_1 + ip_2 x_2 - ip_1 x_3} d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3. \end{aligned} \quad (103.3)$$

A las funciones K_{ik}^{μ} corresponden, en la técnica de diagramas, bloques (*tricabos*) de la forma



con tres terminales (uno de fotón y dos de electrón) cuyos impulsos están ligados por la ley de conservación

$$p_1 + k = p_2. \quad (103.5)$$

El término de orden cero en el desarrollo de esta función se anula y el término de primer orden, en la representación de coordenadas, es

$$K^{\mu}(x_1, x_2, x_3) = e \int G(x_2 - x) \gamma_v G(x - x_3) \cdot D^{\nu\mu}(x_1 - x) d^4 x$$

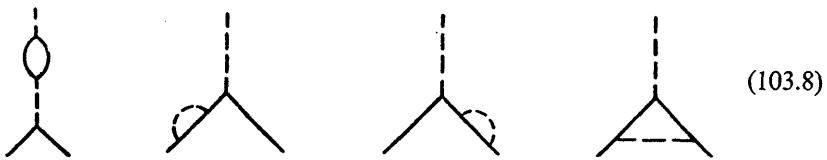
o en la representación de impulsos

$$K^{\mu}(p_2, p_1; k) = e G(p_2) \gamma_v G(p_1) \cdot D^{\nu\mu}(k) \quad (103.6)$$

(se ha prescindido de los índices bispinoriales); el correspondiente diagrama es:



Al pasar a las aproximaciones siguientes, los diagramas se complican debido a la adición de nuevos vértices. Sin embargo, no todos estos diagramas proporcionan algo esencialmente nuevo. Así, en el tercer orden aparecen los diagramas

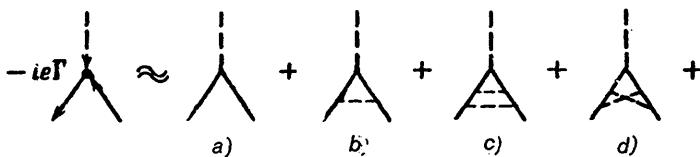


Los tres primeros se pueden descomponer (por cada línea de fotón o de electrón) en el vértice simple (103.7) y la parte de energía propia de segundo orden; para el cuarto diagrama tal descomposición es imposible. Esta situación tiene un carácter general. Las correcciones del primer tipo conducen simplemente a substituir en (103.6) los factores G y D por los propagadores exactos \mathcal{G} y \mathcal{D} . En cambio, los demás términos del desarrollo en la suma llevan a una nueva magnitud que sustituye en (103.6) al factor γ^μ . Designando esta magnitud por Γ^μ , tenemos así, por definición,

$$K^\mu(p_2, p_1; k) = \{i\mathcal{G}(p_2) [-ie\Gamma_\nu(p_2, p_1; k)] i\mathcal{G}(p_1)\} [-i\mathcal{D}^{\nu\mu}(k)]. \quad (103.9)$$

Un bloque unido con otras partes de un diagrama por una línea de fotón y dos líneas de electrón se llama *parte vértice* si es imposible descomponer este bloque en partes unidas entre sí por solamente una línea (de electrón o de fotón). La magnitud Γ^μ es la suma de todas las partes vértice (en número infinito), incluido el vértice simple γ^μ ; dicha magnitud se llama *operador vértice* (o *función vértice*).

Introduzcamos todos los diagramas del operador vértice con una precisión de quinto orden:



$$+ \text{ (e)} + \text{ (f)} + \text{ (g)} + \text{ (h)} + \text{ (i)} \quad (103.10)$$

(el operador vértice exacto — $ie\Gamma$ se representa por un punto negro).

El operador Γ (al igual que el operador γ de un vértice simple) tiene dos índices matriciales (bispinoriales) y un índice de 4-vector; este operador es función de dos impulsos de electrón (p_1, p_2) y de uno de fotón (k). Además, estos tres impulsos no pueden referirse a la vez a partículas reales: el diagrama (103.4) correspondería de suyo (no como parte de un diagrama más complejo) a la absorción de un fotón por un electrón libre, pero este proceso es incompatible con la ley de conservación del 4-impulso de partículas reales. En consecuencia, uno por lo menos de los tres terminales del diagrama debe corresponder a una partícula virtual (o bien a un campo exterior).

Las partes vértice se pueden subdividir aún en dos categorías: *irreducibles* y *reducibles*. Se califican de irreducibles aquéllas que no contienen correcciones de energía propia en las líneas interiores y en las que es imposible separar partes que representan correcciones (de orden más bajo) a vértices interiores. Así, de los diagramas en (103.10) son irreducibles sólo *b)* y *e)* (sin contar el vértice simple *a)*). Los diagramas *g), h), i)* contienen partes de energía propia; en el diagrama *c)*, la línea de trazo superior puede considerarse como corrección al vértice superior, mientras que las líneas laterales de trazo en los diagramas *e)* y *f)* representan correcciones a vértices laterales.

Substituyendo en los diagramas irreducibles las líneas interiores por líneas de trazo grueso y los vértices por puntos negros (es decir, substituyendo los propagadores aproximados D, G por los exactos \mathcal{D}, \mathcal{G} y los operadores vértice aproximados γ por los exactos Γ)*, obtendremos, evidentemente, el conjunto de todas las partes vértice. Así, pues, el desarrollo de un operador vértice se puede presentar en la forma

$$\text{ (a)} = \text{ (b)} + \text{ (c)} + \text{ (d)} + \dots \quad (103.11)$$

Esta igualdad representa para Γ una ecuación integral con un número infinito de términos en el segundo miembro.

Por lo expuesto resulta claro el principio general de formación de expresiones exactas para diagramas bloques con un número arbitrario de terminales. Tales

* Los diagramas obtenidos de esta manera se llaman *esqueletos*.

expresiones se construyen como valor medio respecto del vacío de productos- T de operadores de Heisenberg: un operador $\psi(x)$ por cada electrón inicial, uno $\bar{\psi}(x)$ por cada electrón final y uno $A(x)$ por cada fotón.

Presentamos aún otro ejemplo: los diagramas de la forma



con cuatro terminales de electrón («cuatricabo» de electrón). Se llega a tales diagramas considerando la función

$$K_{lk, lm}(x_1, x_2; x_3, x_4) = \langle 0 | T\psi_l(x_1)\psi_k(x_2)\bar{\psi}_l(x_3)\bar{\psi}_m(x_4) | 0 \rangle \quad (103.13)$$

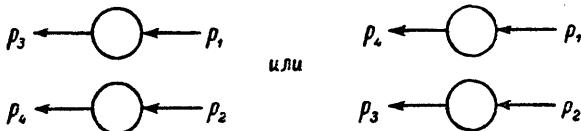
(que depende, naturalmente, tan sólo de las diferencias de los cuatro argumentos). Sus componentes de Fourier se pueden representar en la forma

$$\begin{aligned} \int K_{lk, lm}(x_1, x_2; x_3, x_4) e^{i(p_3x_1 + p_4x_2 - p_1x_3 - p_2x_4)} d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 = \\ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) K_{lk, lm}(p_3, p_4; p_1, p_2), \end{aligned} \quad (103.14)$$

donde

$$\begin{aligned} K_{lk, lm}(p_3, p_4; p_1, p_2) = \\ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_3) \mathcal{G}_{ll}(p_1) \mathcal{G}_{km}(p_2) - (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 - p_3) \mathcal{G}_{lm}(p_1) \mathcal{G}_{kl}(p_2) + \\ + \mathcal{G}_{ln}(p_3) \mathcal{G}_{kr}(p_4) [-i\Gamma_{nr, st}(p_3, p_4; p_1, p_2)] \mathcal{G}_{st}(p_1) \mathcal{G}_{tm}(p_2). \end{aligned} \quad (103.15)$$

En la última expresión, los dos primeros términos excluyen de la definición de la función $\Gamma(p_3, p_4; p_1, p_2)$ los diagramas que se descomponen en dos partes no ligadas entre sí, con dos terminales exteriores cada una:



A su vez, en el tercer término los factores \mathcal{G} excluyen de la definición de Γ aquellas partes del diagrama que representan correcciones a líneas de electrón interiores.

Haremos observar también que, en virtud de las propiedades del producto- T de operadores- ψ de fermión, las funciones $\Gamma(p_3, p_4; p_1, p_2)$ poseen propiedades de antisimetría:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ik, lm}(p_3, p_4; p_1, p_2) &= -\Gamma_{ki, lm}(p_4, p_3; p_1, p_2) = \\ &= -\Gamma_{ik, ml}(p_3, p_4; p_2, p_1).\end{aligned}\quad (103.16)$$

Si los impulsos p_1, p_2, p_3, p_4 corresponden a partículas reales, los diagramas (103.12) que no se descomponen representan un proceso de dispersión de dos electrones. Obtendremos la amplitud de este proceso substituyendo los terminales exteriores del diagrama por las amplitudes de onda de las partículas (en vez de los propagadores \mathcal{G}) *:

$$iM_{fi} = \bar{u}_i(p_3)\bar{u}_k(p_4)i\Gamma_{ik, lm}(p_3, p_4; p_1, p_2)u_l(p_1)u_m(p_2). \quad (103.17)$$

Teniendo en cuenta (103.16), se ve que esta amplitud posee automáticamente la antisimetría necesaria con relación a las permutaciones de electrones.

§ 104. Ecuaciones de Dyson

Los propagadores exactos y una parte vértice están ligados entre sí por determinadas igualdades integrales. Su origen resulta particularmente claro mediante el método de los diagramas.

El concepto de irreducibilidad o de reducibilidad introducido en el párrafo precedente se aplica no sólo a las partes vértice, sino también a cualquier otro diagrama (o a sus partes). Desde este punto de vista, consideremos los diagramas de energía propia de electrón compactos.

Es fácil comprender que de entre los infinitos diagramas de este tipo solamente uno es irreducible: el de segundo orden

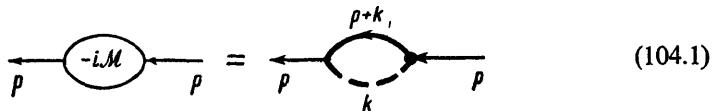


Sea como fuere la manera de complicar este diagrama, el proceso siempre puede considerarse como introducción de correcciones sucesivas a sus líneas interiores (de electrón o de fotón) o a uno de sus vértices. Para esto es esencial el hecho de que,

* Veremos más adelante (§ 107) que al formar las amplitudes de procesos reales no es necesario tener en cuenta las partes de energía propia en los terminales libres del diagrama.

en virtud de la simetría evidente del diagrama, todas las correcciones de vértice basta atribuirlas a uno sólo, cualquiera, de sus dos vértices *.

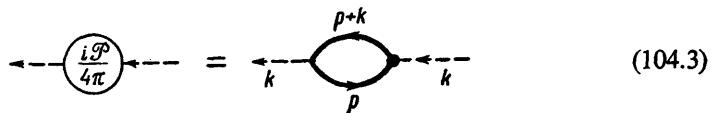
Así, pues, dado que de todas las partes de energía propia de electrón compactas solamente una es irreducible, el conjunto de dichas partes (es decir, el operador másico \mathcal{M}) se representa por un único diagrama del tipo esqueleto:



Escrita en forma analítica, esta igualdad gráfica nos da **

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(p) &= G^{-1}(p) - \mathcal{G}^{-1}(p) = \\ &= -ie^2 \int \gamma^\nu \mathcal{G}(p+k) \Gamma^\mu(p+k, p; k) \cdot \mathcal{D}_{\mu\nu}(k) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}. \end{aligned} \quad (104.2)$$

Una expresión análoga puede escribirse para el operador polarización \mathcal{P} . También en este caso, entre las partes de energía propia del fotón compactas hay sólo una que sea irreducible, con lo cual \mathcal{P} se representa asimismo por un único diagrama en esqueleto:



La correspondiente igualdad analítica se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)}{4\pi} &= D_{\mu\nu}^{-1}(k) - \mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1}(k) = \\ &= ie^2 \text{Tr} \int \gamma_\mu \mathcal{G}(p+k) \Gamma_\nu(p+k, p; k) \mathcal{G}(p) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \end{aligned} \quad (104.4)$$

[se ha prescindido de los índices bispinoriales en (104.2) y (104.4)].

* Subrayaremos, con todo, que si bien el conjunto de diagramas en cuestión se obtendrá introduciendo correcciones tan sólo a uno de los vértices, para cada diagrama determinado la estructura del bloque corrector, en general, será diferente según sea el vértice a que se atribuya. Por ejemplo:



donde para un mismo diagrama figuran bloques, limitados por cuadrados, que representan el papel de parte vértice con relación a su vértice derecho o izquierdo.

** Si en (104.1) la parte vértice exacta se atribuye al vértice de la izquierda, en la ecuación (104.2) se transponen los factores γ y Γ . Ambas formas de la ecuación, naturalmente, son en esencia equivalentes.

Las igualdades (104.2) y (104.4) se llaman *ecuaciones de Dyson*. También es posible obtenerlas mediante un cálculo analítico directo.

Así, para deducir la ecuación (104.2) consideraremos la magnitud

$$(\hat{p} - m)_{ll} \mathcal{G}_{lk}(x - x') = -i(\hat{p} - m)_{ll} \langle 0 | T\psi_l(x) \bar{\psi}_k(x') | 0 \rangle$$

($p = i\partial$ es el operador derivación respecto de x). Ésta se calcula mediante (99.5) exactamente de la misma manera como se procedió en el § 76 al deducir la ecuación (76.7) para el propagador de las partículas libres. El resultado a que se llega es

$$\begin{aligned} (\hat{p} - m)_{ll} \mathcal{G}_{lk}(x - x') &= \\ &= -ie\gamma_{ll}^v \langle 0 | TA_v(x) \psi_l(x) \bar{\psi}_k(x') | 0 \rangle + \delta_{lk} \delta^{(4)}(x - x'); \end{aligned}$$

el término en el segundo miembro de esta igualdad que contiene la función- δ es el mismo que en (76.7), puesto que las relaciones de conmutación cuando $t = t'$ son las mismas para los operadores- Ψ en la representación de Heisenberg y en la de interacción. En cuanto al primer término, éste coincide con $-ie\gamma_v K_{lk}^v(x, x, x')$, de modo que se puede escribir (prescindiendo de nuevo de los índices bispinoriales):

$$(\hat{p} - m) \mathcal{G}(x - x') = -ie\gamma^\mu K_\mu(x, x, x') + \delta^{(4)}(x - x'). \quad (104.5)$$

Para pasar a componentes de Fourier, observemos que si se integra la identidad (103.3) respecto de $d^4 k d^4 p_2 / (2\pi)^8$, obtendremos

$$\begin{aligned} \int K^\mu(p+k, p; k) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} &= \int K^\mu(0, 0, x_3) e^{-ipx_3} d^4 x_3 = \\ &= \int K^\mu(x, x, x') e^{ip(x-x')} d^4(x-x'), \end{aligned} \quad (104.6)$$

de donde resulta, evidentemente, que la integral en el primer miembro representa la componente de Fourier de la función $K^\mu(x, x, x')$. Así, pues, formando la componente de Fourier de ambos miembros de la ecuación (104.5), aplicando luego la definición (103.9) y recordando que $\hat{p} - m = G^{-1}(p)$, obtendremos

$$G^{-1}(p) \mathcal{G}(p) = 1 - ie^2 \int \gamma^v \mathcal{G}(p+k) \Gamma^\mu(p+k, p; k) \mathcal{G}(p) \cdot D_{\mu\nu}(k) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}.$$

Finalmente, multiplicando esta igualdad a la derecha por $\mathcal{G}^{-1}(p)$, volvemos de nuevo a la ecuación (104.2).

§ 105. Identidad de Ward

Otra relación aún entre el propagador de fotón y una parte vértice, más simple que la ecuación de Dyson, se obtiene como consecuencia de la invariancia de contraste.

Para deducirla aplicaremos la transformación de contraste (99.8) suponiendo que $\chi(x) \equiv \delta\chi(x)$ es una función infinitesimal (no un operador) de las 4-coordenadas x . Entonces, el propagador de electrón varía en la cantidad

$$\delta\mathcal{G}(x, x') = ie\mathcal{G}(x - x')[\delta\chi(x) - \delta\chi(x')]. \quad (105.1)$$

Hay que subrayar que una transformación de contraste de este tipo viola la homogeneidad espacio-temporal y que la función $\delta\mathcal{G}$ depende de los argumentos x y x' por separado, no solamente de su diferencia $x - x'$. Por ello, su desarrollo de Fourier hay que efectuarlo respecto de las variables x y x' , independientemente. Dicho de otra manera, en la representación de impulsos, $\delta\mathcal{G}$ es función de dos 4-impulsos:

$$\delta\mathcal{G}(p_2, p_1) = \int \int \delta\mathcal{G}(x, x') e^{ip_2 x - ip_1 x'} d^4 x d^4 x'.$$

Substituyendo aquí (105.1) y efectuando la integración respecto de $d^4 x d^4 \xi$ o de $d^4 \xi d^4 x'$ ($\xi = x - x'$), se obtendrá

$$\delta\mathcal{G}(p + q, p) = ie \delta\chi(q) [\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}(p + q)]. \quad (105.2)$$

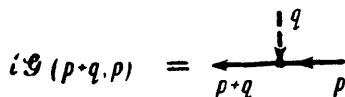
Por otra parte, en esta misma transformación de contraste al operador $A_\mu(x)$ se le añade la función

$$\delta A_\mu^{(e)}(x) = - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta\chi, \quad (105.3)$$

que hay que considerar como un campo exterior infinitamente pequeño. En la representación de impulsos se tiene:

$$\delta A_\mu^{(e)}(q) = iq_\mu \delta\chi(q). \quad (105.4)$$

La cantidad $\delta\mathcal{G}$ se puede calcular también como variación del propagador bajo la influencia de este campo. Con una precisión que alcanza a las magnitudes de primer orden respecto de $\delta\chi$, esta variación se representa, evidentemente, por un diagrama en esqueleto:



La línea de trazos gruesos es aquí la línea efectiva del campo exterior, es decir, a ella corresponde el factor [cf. (100.15)]

$$\delta A_{\mu}^{(e)}(q) + \delta A_{\lambda}^{(e)}(q) \frac{\mathcal{P}^{\lambda\nu}(q)}{4\pi} \mathcal{D}_{\nu\mu}(q).$$

Pero el 4-vector $\delta A_{\lambda}^{(e)}(q)$ es longitudinal (respecto de q), y el tensor $\mathcal{P}^{\lambda\nu}$, transversal. Por consiguiente, el segundo término se anula, de modo que queda

$$i\mathcal{G}(p+q, p) = \text{Diagram} \quad (105.5)$$

donde a la línea de trazos finos corresponde simplemente, como de ordinario, el campo $\delta A^{(e)}$. En forma analítica:

$$\delta\mathcal{G} = e\mathcal{G}(p+q)\Gamma^{\mu}(p+q, p; q)\mathcal{G}(p) \cdot \delta A_{\mu}^{(e)}. \quad (105.6)$$

Substituyendo aquí (105.4) y comparando con (105.2), se encuentra la igualdad

$$\mathcal{G}(p+q) - \mathcal{G}(p) = -\mathcal{G}(p+q)\Gamma^{\mu}(p+q, p; q)\mathcal{G}(p) \cdot q_{\mu}$$

o para las matrices inversas

$$\mathcal{G}^{-1}(p+q) - \mathcal{G}^{-1}(p) = q_{\mu}\Gamma^{\mu}(p+q, p; q) \quad (105.7)$$

(H. S. Green, 1953).

Haciendo $q \rightarrow 0$ en esta igualdad y comparando los coeficientes de ambos miembros para valores de q_{μ} infinitamente pequeños, se encuentra

$$\frac{\partial}{\partial p_{\mu}} \mathcal{G}^{-1}(p) = \Gamma^{\mu}(p, p; 0). \quad (105.8)$$

Ésta es la llamada *identidad de Ward* (J. G. Ward, 1950). Vemos así que la derivada de $\mathcal{G}^{-1}(p)$ respecto del impulso coincide con el operador vértice para una transferencia nula de impulso *. En cuanto a la derivada de la propia función $\mathcal{G}(p)$,

$$-\frac{\partial}{\partial p_{\mu}} i\mathcal{G}(p) = i\mathcal{G}(p) [-i\Gamma^{\mu}(p, p; 0)] i\mathcal{G}(p). \quad (105.9)$$

* En la aproximación de orden cero, es decir, para el propagador de partículas libres, esta identidad es evidente: $G^{-1}(p) = p - m$, por lo cual $\partial G^{-1}/\partial p_{\mu} = \gamma^{\mu}$.

De manera análoga se podrían hallar las derivadas de orden superior llevando a cabo el cálculo con una precisión que alcance a términos de orden superior respecto de $\delta\chi$. Sin embargo, no necesitaremos tales fórmulas.

Consideremos ahora la derivada $\partial\mathcal{P}(k)/\partial k_\mu$ del operador polarización. A diferencia de la función $G(p)$, la magnitud $\mathcal{P}(k)$ posee la invariancia de contraste y no cambia cuando se introduce el campo exterior ficticio (105.4). En consecuencia, es imposible calcular su derivada siguiendo el mismo procedimiento. Con todo, también para esta derivada puede obtenerse una determinada expresión en forma de diagrama.

Consideremos para ello el primero de los diagramas que intervienen en la definición de \mathcal{P} , el diagrama de segundo orden

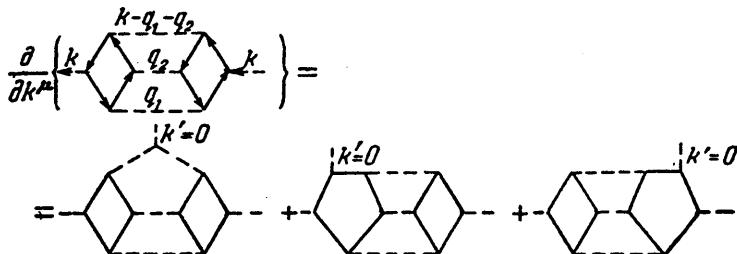
$$\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{\quad \boxed{i\mathcal{P}} \quad} \text{---} \approx \text{---} \xrightarrow{\quad \text{---} \quad} \\ \text{---} \xrightarrow{\quad \frac{i\mathcal{P}}{4\pi} \quad} \text{---} \approx \text{---} \xrightarrow{\quad \text{---} \quad} \end{array} \quad (105.10)$$

A las líneas de trazo continuo que aparecen en él corresponden los factores $iG(p)$ e $iG(p+k)$. La derivación respecto de k cambia el último de ellos en $i\partial G(p+k)/\partial k$, y de acuerdo con la identidad (105.9) esta sustitución es equivalente a añadir un vértice suplementario a una línea de electrón:

$$\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{\quad \boxed{-\frac{ie}{4\pi} \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial k}} \quad} \text{---} \approx \text{---} \xrightarrow{\quad \text{---} \quad} \\ \text{---} \xrightarrow{\quad \boxed{-\frac{ie}{4\pi} \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial k}} \quad} \text{---} \approx \text{---} \xrightarrow{\quad \text{---} \quad} \end{array} \quad (105.11)$$

Vemos así que en el primer orden de aproximación no nulo la derivada que buscamos se ha expresado por un diagrama con tres terminales de fotón («tricabo de fotón»). Pero hay que subrayar ya ahora que este diagrama no contribuye en absoluto a la amplitud de transformación de un fotón en dos. La amplitud de este proceso se expresaría por la suma del diagrama (105.11) y de otro diagrama del mismo tipo con sentido opuesto de recorrido del nudo; según el teorema de Furry esta suma se anula. Sin embargo, el diagrama (105.11) no es de suyo igual a cero.

De manera análoga es posible derivar diagramas más complejos mediante adición sucesiva de vértices con $k' = 0$ a todas las líneas de electrón que dependen de k . Sin embargo, existen diagramas en los que la dependencia respecto de k se da también en las líneas interiores de fotón, por ejemplo en el diagrama a la izquierda en la figura



La derivada del gráfico entre paréntesis se representa aquí en forma de diagrama introduciendo una nueva notación gráfica —un vértice ficticio de tres líneas de fotón, de un punto en que convergen tres líneas de trazos y al que corresponde la magnitud

$$4\pi i \frac{\partial D^{-1}}{\partial k_\mu} = 2ik_\mu \equiv v_\mu. \quad (105.12)$$

Es posible ahora derivar cualquier gráfico añadiendo a las líneas que dependen de k los vértices v_μ o γ_μ y efectuando luego el cálculo de acuerdo con las reglas ordinarias. Sumando estas correcciones de orden superior, obtendremos

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{P}_{\mu\nu}}{\partial k^\lambda} = \gamma_{\mu\lambda\nu}, \quad (105.13)$$

donde $ie\gamma_{\mu\lambda}$ es la suma de las partes interiores de todas las ternas de cabos de fotón obtenidas de la manera indicada.

Para lo que sigue necesitamos también todavía la derivada segunda del operador polarización. Derivando de manera análoga una vez más la igualdad (105.13), se obtendrá

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \mathcal{P}_{\mu\nu}}{\partial k^\rho \partial k^\sigma} = \mathcal{S}_{\mu\rho\sigma\nu} + \mathcal{S}_{\mu\sigma\rho\nu}, \quad (105.14)$$

donde $ie^2\mathcal{S}$ es la suma de las partes interiores de todos los «cuatricabos de fotón» de la forma



[incluyendo, claro está, los gráficos con vértices ficticios de tres fotones (105.12)].

§ 106. Propagador de electrón en un campo exterior

Si el sistema se encuentra en un campo exterior dado $A^{(e)}(x)$, el propagador exacto de electrón se determina por las mismas fórmulas (102.1), pero en el hamiltoniano $H = H_0 + V$, que permite el paso de los operadores a la representación de Heisenberg, figura también la interacción de los electrones con el campo exterior:

$$V = e \int A_\mu j^\mu d^3x + e \int A_\mu^{(e)} j^\mu d^3x. \quad (106.1)$$

Dado que el campo exterior destruye la homogeneidad del espacio y del tiempo, el propagador $\mathcal{G}(x, x')$ dependerá ya ahora de los dos argumentos x y x' por separado, no sólo de su diferencia $x - x'$.

Si de la manera ordinaria se pasa a la representación de interacción, se llega a la técnica corriente de diagramas en la que, junto con las líneas virtuales de fotón, aparecen también líneas correspondientes al campo exterior. Esta técnica, sin embargo, no resulta práctica en aquellos casos en que no cabe considerar el campo exterior como una pequeña perturbación, sobre todo cuando las partículas en el campo pueden encontrarse en estados ligados. Por otra parte, el propagador de electrón en un campo exterior es necesario, ante todo, precisamente para el estudio de las propiedades de los estados ligados, en particular para determinar los niveles de energía teniendo en cuenta las correcciones por radiación. Para construir este propagador hay que partir de una representación de los operadores en la cual el campo exterior se tenga en cuenta exactamente ya en la aproximación «de orden cero» respecto de la interacción electrón-fotón (*W. H. Furry, 1951*).

En lo que sigue supondremos que el campo exterior es estacionario, o sea, que no depende del tiempo.

La representación requerida de los operadores- ψ viene dada por las fórmulas (32.9) de segunda cuantificación en un campo exterior:

$$\begin{aligned} \psi^e(t, r) &= \sum_n \left\{ a_n \psi_n^{(+)}(r) e^{-ie_n^{(+)} t} + b_n^+ \psi_n^{(-)}(r) e^{ie_n^{(-)} t} \right\}, \\ \bar{\psi}^{(e)}(t, r) &= \sum_n \left\{ a_n^+ \bar{\psi}_n^{(+)}(r) e^{ie_n^{(+)} t} + b_n \bar{\psi}_n^{(-)}(r) e^{-ie_n^{(-)} t} \right\}, \end{aligned} \quad (106.2)$$

donde $\psi_n^{(\pm)}(r)$ y $e_n^{(\pm)}$ son las funciones de onda y los niveles de energía, respectivamente, del electrón y del positón que son soluciones del problema «para una partícula», es decir, de la ecuación de Dirac para una partícula en un campo. Es fácil ver que los operadores (106.2) son operadores- ψ en cierta representación (*la repre-*

sentación de Furry) que, en cierto sentido, es intermedia entre la representación de Heisenberg y la de interacción. Dichos operadores se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned}\psi^{(e)}(t, \mathbf{r}) &= e^{iH_1 t} \psi(\mathbf{r}) e^{-iH_1 t}, \\ \bar{\psi}^{(e)}(t, \mathbf{r}) &= e^{iH_1 t} \bar{\psi}(\mathbf{r}) e^{-iH_1 t},\end{aligned}\quad (106.3)$$

donde

$$H_1 = H_0 + e \int A_{\mu}^{(e)}(x) j^{\mu}(x) d^3x.$$

En cuanto al operador del campo electromagnético A_{μ} , commuta, claro está, con el segundo término en H_1 , y por ello sus representaciones de Furry y de interacción coinciden.

El propagador de electrón para la aproximación de orden cero en la nueva representación se define por

$$G_{lk}^{(e)}(x, x') = -i \langle 0 | T \psi_l^{(e)}(x) \bar{\psi}_k^{(e)}(x') | 0 \rangle. \quad (106.4)$$

El operador $\psi^{(e)}(t, \mathbf{r})$ satisface la ecuación de Dirac en un campo exterior

$$[\hat{p} - e \hat{A}^{(e)}(x) - m] \psi^{(e)}(t, \mathbf{r}) = 0, \quad (106.5)$$

y la función $G^{(e)}$, por consiguiente, a la ecuación

$$[\hat{p} - e \hat{A}^{(e)}(x) - m] G^{(e)}(x, x') = \delta^{(4)}(x - x') \quad (106.6)$$

[cf. la deducción de (104.5)].

La técnica de diagramas que da el operador exacto \mathcal{G} en forma de serie respecto de e^2 , se construye pasando de la representación de Heisenberg a la representación de Furry, exactamente de la misma manera como se procedió antes al pasar a la representación de interacción. Se obtienen diagramas que son del mismo tipo, si bien a las líneas de trazo continuo corresponderán ahora factores $iG^{(e)}$ (en vez de iG).

La única diferencia no trivial en las reglas para escribir las expresiones analíticas de los diagramas se presenta sólo en relación con el hecho de que, en la representación de coordenadas, $G^{(e)}$ es una función que no depende simplemente de la diferencia $x - x'$. Sin embargo, en un campo exterior constante se conserva la homogeneidad respecto del tiempo, por lo que los instantes t y t' intervendrán como antes tan sólo como diferencia $t - t' \equiv \tau$, y así

$$G^{(e)} = G^{(e)}(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

El paso a la representación de impulsos se efectúa mediante el desarrollo de Fourier respecto de cada uno de los argumentos de la función:

$$G^{(e)}(\tau, r, r') = \int \int \int e^{i(p_r r - p_{r'} r' - \varepsilon \tau)} G^{(e)}(\varepsilon, p_2, p_1) \frac{d\varepsilon}{2\pi} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3}. \quad (106.7)$$

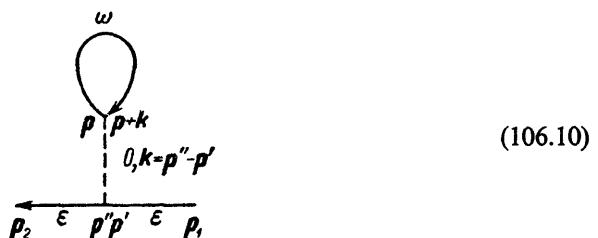
A cada línea a la que corresponde el factor $iG^{(e)}(\varepsilon, p_2, p_1)$ debe atribuirse ahora un valor de la energía virtual ε , pero dos valores del impulso —el inicial p_1 y el final p_2 :

$$iG^{(e)}(\varepsilon, p_2, p_1) = \frac{p_2 - \varepsilon - p_1}{\omega, k}. \quad (106.8)$$

Se obtiene como resultado la regla para escribir las expresiones analíticas de los diagramas, en los cuales se efectúa la integración respecto de $d\varepsilon/2\pi$ de la manera ordinaria, mientras que la integración respecto $d^3 p_1/(2\pi)^3$ y $d^3 p_2/(2\pi)^3$ se lleva a cabo independientemente y teniendo en cuenta la conservación del impulso en cada vértice. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} &= e^2 \int \int \int G^{(e)}(\varepsilon, p_2, p'') \gamma^\mu G^{(e)}(\varepsilon - \omega, p'' - k, p' - k) \times \\ &\quad \times \gamma^\nu G^{(e)}(\varepsilon, p', p_1) D_{\mu\nu}(\omega, k) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (106.9)$$

Es importante hacer notar que en la técnica que acabamos de exponer es necesario tener también en cuenta los diagramas con líneas de electrón «cerradas sobre sí», líneas de las que se prescinde en la técnica ordinaria en tanto que ligadas con la «corriente de vacío». Cuando existe un campo exterior, esta corriente no tiene por qué anularse en relación con la «polarización del vacío» provocada por el campo. Por ejemplo, en el diagrama



al lazo superior corresponde el factor

$$i \int \int G^{(e)}(\omega, \mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (106.11)$$

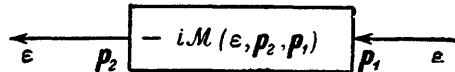
Sin embargo, es necesario todavía precisar aquí el significado que se atribuye a la integral respecto de $d\omega$. En efecto, la integración de la componente de Fourier de la función $G^{(e)}(\cdot)$ respecto de $d\omega$ conduce al valor que toma esta función para $\tau = 0$; pero la función $G^{(e)}(\cdot)$ presenta un salto en este punto, de modo que es necesario determinar cuál es precisamente el valor que debe adoptarse entre sus dos valores límite. Para poner en claro esta cuestión basta observar que la integral (106.11) procede de la contracción de los operadores ψ que aparecen precisamente en un mismo operador corriente:

$$\mathbf{j}^\mu = \bar{\Psi}^{(e)}(t, \mathbf{r}) \gamma^\mu \Psi^{(e)}(t, \mathbf{r}),$$

donde $\bar{\Psi}^{(e)}$ figura a la izquierda de $\Psi^{(e)}$. De acuerdo con la definición de propagador (106.4), la ordenación adecuada de los factores para $t = t'$ se obtiene si se interpreta t' como $t' = t + 0$, es decir, si se adopta como valor límite de la función $G^{(e)}(t - t')$ el límite para $t - t' \rightarrow -0$. Se puede decir, de otra manera, que la integral respecto de $d\omega/2\pi$ en (106.11) debe entenderse en el sentido de

$$\int \dots e^{-i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi} \quad \text{para } \tau \rightarrow -0. \quad (106.12)$$

El operador másico en un campo exterior se determina al igual que en el § 102: $-i\mathcal{M}$ es la suma de todos los bloques de energía propia compactos. Resulta ser ahora función de la energía ϵ y de los impulsos \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 en aquellos terminales de las líneas exteriores que, respectivamente, penetran y salen del bloque:



$$(106.13)$$

Con la misma precisión con que se dedujo (102.6), obtendremos la ecuación

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\epsilon, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) - G^{(e)}(\epsilon, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) &= \\ = \int \int G^{(e)}(\epsilon, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'') \mathcal{M}(\epsilon, \mathbf{p}'', \mathbf{p}') \mathcal{G}(\epsilon, \mathbf{p}', \mathbf{p}_1) \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3}. & \quad (106.14) \end{aligned}$$

Es posible dar a esta ecuación una forma más natural si se pasa de nuevo a la representación de coordenadas en el espacio-tiempo introduciendo la función

$$\mathcal{G}(\epsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \int \mathcal{G}(\epsilon, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) e^{i(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r} - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}')} \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6}, \quad (106.15)$$

y análogamente para las demás magnitudes. La transformada inversa de Fourier de (106.14) se escribe:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\epsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') - G^{(e)}(\epsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \\ &= \int \int G^{(e)}(\epsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \mathcal{M}^{(e)}(\epsilon, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \mathcal{G}(\epsilon, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}') d^3x_1 d^3x_2.\end{aligned}$$

Aplicaremos ahora a ambos miembros de la igualdad el operador

$$\gamma^0 e - \gamma p - e \gamma^\mu A_\mu^{(e)}(x)$$

(ϵ es un número, $p = -i\nabla$ es el operador derivación respecto de las coordenadas \mathbf{r}). Al hacerlo, hay que tener en cuenta que, según (106.6),

$$[\gamma^0 e - \gamma p - e \hat{A}^{(e)}(x)] G^{(e)}(\epsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (106.16)$$

El resultado que se obtiene es la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}[\gamma^0 e - \gamma p - e \hat{A}^{(e)}(x)] \mathcal{G}(\epsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') - \int \mathcal{M}^{(e)}(\epsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \mathcal{G}(\epsilon, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}') d^3x_1 &= \\ &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (106.17)\end{aligned}$$

La importancia especial de la función $\mathcal{G}(\epsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ estriba en que sus polos determinan los niveles de energía del electrón en el campo exterior.

Demostremos esto en primer lugar para la función aproximada $G^{(e)}(\epsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Substituyendo los operadores (106.2) en la definición del propagador (106.4) se obtendrá [de manera del todo análoga a las fórmulas (76.12) para el propagador de partículas libres]

$$G_{ik}^{(e)}(t - t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} -i \sum_n \psi_{ni}^{(+)}(\mathbf{r}) \bar{\psi}_{nk}^{(+)}(\mathbf{r}') \exp\{-ie_n^{(+)}(t-t')\}, & t > t', \\ i \sum_n \psi_{ni}^{(-)}(\mathbf{r}) \bar{\psi}_{nk}^{(-)}(\mathbf{r}') \exp\{ie_n^{(-)}(t-t')\}, & t < t' \end{cases} \quad (106.18)$$

y después de pasar a componentes de Fourier respecto del tiempo

$$G_{ik}^{(e)}(\epsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_n \left\{ \frac{\psi_{ni}^{(+)}(\mathbf{r}) \bar{\psi}_{nk}^{(+)}(\mathbf{r}')}{\epsilon - e_n^{(+)} + i0} + \frac{\psi_{ni}^{(-)}(\mathbf{r}) \bar{\psi}_{nk}^{(-)}(\mathbf{r}')}{\epsilon + e_n^{(-)} - i0} \right\}. \quad (106.19)$$

Vemos así que $G^{(e)}(\epsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$, como función analítica de ϵ , sobre el semieje real positivo tiene polos que coinciden con los niveles de energía del electrón, y que

los polos sobre el semieje negativo coinciden con los niveles de energía del positón. Los valores $\varepsilon_n^{(\pm)} > m$ forman un espectro continuo * y los correspondientes polos se acumulan en dos cortes del plano ε : de $-\infty$ a $-m$ y de m a $+\infty$. En la banda $|\varepsilon| < m$ se encuentran polos que determinan los niveles discretos de energía.

Para el propagador exacto $\mathcal{G}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es posible obtener un desarrollo análogo expresándolo en función de los elementos de matriz de operadores de Schrödinger, con los cuales los elementos de matriz de los operadores ψ de Heisenberg están ligados por las igualdades

$$\langle m | \psi(t, \mathbf{r}) | n \rangle = \langle m | \psi(\mathbf{r}) | n \rangle e^{-i(E_n - E_m)t} \quad (106.20)$$

(e igualmente para $\bar{\psi}$). Aquí, E_n son los niveles de energía exactos (es decir, con todas las correcciones por radiación) del sistema en el campo exterior. El operador ψ aumenta en 1 (es decir, en $+|e|$) la carga del sistema, y en igual valor la disminuye el operador $\bar{\psi}$. Esto significa que en los elementos de matriz $\langle n | \psi | 0 \rangle$ y $\langle 0 | \bar{\psi} | n \rangle$ los estados $|n\rangle$ deben corresponder a una carga del sistema igual a +1, esto es, pueden contener, junto a un positón, únicamente un cierto número de pares electrón-positón y un determinado número de fotones; las energías de estos estados las designaremos por $E_n^{(-)}$. Análogamente, en los elementos de matriz $\langle 0 | \psi | n \rangle$ y $\langle n | \bar{\psi} | 0 \rangle$ los estados $|n\rangle$ contienen un electrón + un sistema de pares y de fotones (energías $E_n^{(+)}$). En vez de (106.18) obtendremos ahora

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{lk}(t-t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \\ &= \begin{cases} -i \sum_n \langle 0 | \psi_i(\mathbf{r}) | n \rangle \langle n | \bar{\psi}_k(\mathbf{r}') | 0 \rangle \exp \{-iE_n^{(+)}(t-t')\}, & t > t', \\ i \sum_n \langle 0 | \bar{\psi}_k(\mathbf{r}') | n \rangle \langle n | \psi_i(\mathbf{r}) | 0 \rangle \exp \{iE_n^{(-)}(t-t')\}, & t < t', \end{cases} \end{aligned} \quad (106.21)$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{lk}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sum_n \left\{ \frac{\langle 0 | \psi_i(\mathbf{r}) | n \rangle \langle n | \bar{\psi}_k(\mathbf{r}') | 0 \rangle}{\varepsilon - E_n^{(+)} + i0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle 0 | \bar{\psi}_k(\mathbf{r}') | n \rangle \langle n | \psi_i(\mathbf{r}) | 0 \rangle}{\varepsilon + E_n^{(-)} - i0} \right\}. \end{aligned} \quad (106.22)$$

Supongamos que ε difiere poco de uno, cualquiera, de los niveles de energía discretos $E_n^{(+)}$ (o de uno de los $-E_n^{(-)}$). Entonces, de toda la suma que aparece en (106.22) queda sólo el término correspondiente al polo en cuestión. Substituyéndolo luego en (106.17), se ve que los factores que dependen del segundo argumento \mathbf{r}'

* Se supone que el campo exterior se anula en el infinito.

(para $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$) desaparecen de la ecuación. En definitiva se obtiene una ecuación integro-diferencial para la función $\langle 0 | \psi(\mathbf{r}) | n \rangle$ [o $\langle n | \psi(\mathbf{r}) | 0 \rangle$], que designaremos para abreviar por $\Psi_n(\mathbf{r})$ *. Prescindiendo del subíndice n , tenemos

$$[\gamma^0 e + i\hbar\nabla - e\hat{A}^{(e)}(\mathbf{r})]_{ik} \Psi_k(\mathbf{r}) - \int \mathcal{M}_{ik}(e, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Psi_k(\mathbf{r}_1) d^3x_1 = 0. \quad (106.23)$$

Los niveles discretos de energía E_n aparecen ahora como valores propios de esta ecuación. Por esto precisamente la ecuación (106.23) constituye el método fundamental para la determinación de dichos niveles.

Expresemos, por ejemplo, mediante (106.23) la corrección de primer orden respecto de \mathcal{M} a un nivel de energía discreto de electrón ϵ_n obtenido como resultado de resolver la ecuación de Dirac

$$[\gamma^0 \epsilon_n + i\hbar\nabla - e\hat{A}^{(e)}(\mathbf{r})] \Psi_n(\mathbf{r}) = 0; \quad (106.24)$$

la función de onda $\Psi_n(\mathbf{r})$ se supone normalizada por la condición

$$\int \Psi_n^* \Psi_n d^3x = 1. \quad (106.25)$$

La función propia de la ecuación (106.23) se escribirá en la forma

$$\Psi_n(\mathbf{r}) = \psi_n(\mathbf{r}) + \psi_n^{(1)}(\mathbf{r}), \quad (106.26)$$

donde $\psi_n^{(1)}$ es una corrección a $\psi_n(\mathbf{r})$. Substituyendo (106.26) en la ecuación (106.23), multiplicándola a la izquierda por $\bar{\Psi}_n(\mathbf{r})$ e integrando respecto de d^3x **, obtendremos la expresión buscada

$$E_n - \epsilon_n \approx \int \int \bar{\Psi}_{ni}(\mathbf{r}) \mathcal{M}_{ik}(\epsilon_n, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Psi_{nk}(\mathbf{r}_1) d^3x d^3x_1. \quad (106.27)$$

§ 107. Condiciones físicas de renormalización

El carácter de la teoría expuesta hasta aquí en el presente capítulo es considerablemente formal. Hemos operado con todas las magnitudes como si fuesen finitas y, a sabiendas, no hemos prestado atención a las expresiones infinitas que se encuentran en la teoría. Sin embargo, en el cálculo efectivo de las funciones \mathcal{D} , \mathcal{G} , Γ

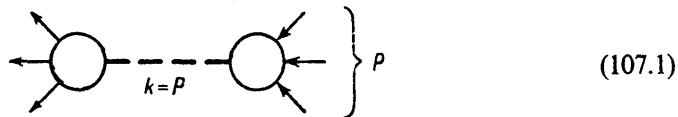
* Cuando se prescinde de las correcciones por radiación, las $\Psi_n(\mathbf{r})$ coinciden (para estados con un electrón o un positón) con las funciones de onda $\psi_n^{(+)}$ ó $\psi_n^{(-)}$, que son soluciones de la ecuación de Dirac.

** Al integrar debe utilizarse la propiedad de autoadjunto del operador diferencial que aparece en la ecuación (106.24) a fin de que, en vez de actuar sobre $\psi_n^{(1)}$, actúe sobre ψ_n .

siguiendo la teoría de perturbaciones se encuentran integrales divergentes, a las que es imposible atribuir, sin más, un determinado significado. La aparición de tales divergencias pone de manifiesto la falta de un pleno sentido lógico en la electrodinámica cuántica actual. Con todo, veremos que en esta teoría es posible establecer determinadas prescripciones que permiten efectuar de manera unívoca la «substracción de infinitos» y obtener en definitiva valores finitos para todas las magnitudes que poseen una significación física inmediata. En la base de estas prescripciones se encuentran condiciones físicas evidentes, que pueden expresarse diciendo que la masa del fotón debe ser nula y que la carga y la masa del electrón han de ser iguales a sus valores observados.

Empecemos por poner de manifiesto las condiciones que se impone así al propagador de fotón.

Consideremos un proceso de dispersión que puede tener lugar pasando por estados intermedios de una sola partícula con un fotón virtual. La amplitud de este proceso debe tener un polo cuando el cuadrado del 4-impulso total de las partículas iniciales P coincide con el cuadrado de la masa de un fotón real, es decir, $P^2 = 0$; vimos en el § 80 que esta condición se sigue de la condición general de unitariedad. El término correspondiente a un polo en la amplitud resulta de un diagrama de la forma (80.1):



además, al tener en cuenta las correcciones por radiación ambas partes del diagrama deben encontrarse unidas por una línea de trazos gruesos (propagador exacto de fotón). Esto significa que la función $\mathcal{D}(k^2)$ ha de presentar un polo para $k^2 = 0$, es decir, debe tenerse

$$\mathcal{D} \rightarrow \frac{4\pi Z}{k^2} \quad \text{cuando} \quad k^2 \rightarrow 0, \quad (107.2)$$

donde Z es una constante. En cuanto al operador polarización $\mathcal{P}(k^2)$, de aquí se sigue, de acuerdo con (100.20), la condición

$$\mathcal{P}(0) = 0. \quad (107.3)$$

En estas condiciones, el coeficiente en (107.2) es tal que

$$\frac{1}{Z} = 1 - \frac{\mathcal{P}(k^2)}{k^2} \Big|_{k^2 \rightarrow 0}$$

Las otras limitaciones impuestas a la función $\mathcal{P}(k^2)$ se pueden obtener a partir

del análisis de la definición física de carga eléctrica de una partícula. Según dicha definición, dos partículas clásicas (es decir, infinitamente pesadas) que se encuentran en reposo a gran distancia una de otra * deben interactuar entre sí de acuerdo con la ley de Coulomb: $U = e^2/r$. Por otra parte, esta interacción se expresa por el diagrama



donde las líneas superior e inferior corresponden a las partículas clásicas. Las correcciones de energía propia de fotón se tienen en cuenta en la línea de fotón virtual. En cambio, todas las demás correcciones que afectan a las líneas correspondientes a las partículas pesadas conducirían a la anulación del diagrama. En efecto, añadir cualquier línea, también interior, al diagrama (107.4) (por ejemplo, la unión de las líneas a y c o a y b por una línea de fotón) conduce a que en el diagrama aparezcan líneas de partículas pesadas virtuales acompañadas de los correspondientes operadores. Pero el propagador de una partícula contiene su masa M en el denominador y se anula para $M \rightarrow \infty$.

Por la forma del diagrama (107.4) es claro (cf. § 83) que el factor $e^2 \mathcal{D}(k^2)$ en él debe representar (salvo el signo) la imagen de Fourier del potencial de interacción de las partículas. El carácter estático de la interacción significa que las frecuencias de los fotones virtuales es $\omega = 0$, y al hecho de que la distancia sea grande corresponde el de que los vectores de onda k sean pequeños. La imagen de Fourier del potencial de Coulomb es $4\pi e^2/k^2$. Finalmente, dado que la función \mathcal{D} depende tan sólo del cuadrado $k^2 = \omega^2 - k^2$, llegamos a la condición **

$$\mathcal{D} \rightarrow \frac{4\pi}{k^2} \quad \text{cuando} \quad k^2 \rightarrow 0, \quad (107.5)$$

es decir, el coeficiente en (107.2) debe ser $Z = 1$. Para el operador polarización $\mathcal{P}(k^2)$ esto significa que debe tenerse

$$\frac{\mathcal{P}(k^2)}{k^2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad k^2 \rightarrow 0. \quad (107.6)$$

* Se trata de distancias $\gg 1/m$, donde m es la masa del electrón.

** El signo es evidente: $\mathcal{D}(k^2)$ tiende al propagador de fotones libres $D(k^2)$.

De aquí se sigue, junto con la condición que ya conocemos (107.3), que también ha de ser

$$\mathcal{P}'(0) = 0. \quad (107.7)$$

En el § 100 se hizo notar que a una línea exterior efectiva de fotón real corresponde en un diagrama el factor (100.15), o bien, teniendo en cuenta (100.16) y (100.19),

$$\left[1 + \frac{1}{4\pi} \mathcal{P}(0) \mathcal{D}(0) \right] e_\mu.$$

Vemos ahora que el término correctivo se anula aquí en virtud de (107.5-6). En otras palabras, llegamos al siguiente importante resultado: no es necesario tener en cuenta las correcciones por radiación en las líneas de fotón exteriores.

Así, pues, la imposición de condiciones físicas naturales conduce a atribuir determinados valores (iguales a cero) a las magnitudes $\mathcal{P}(0)$ y $\mathcal{P}'(0)$. En cambio, el cálculo de estas cantidades según los diagramas de la teoría de perturbaciones conduciría a integrales divergentes. El método para suprimir estos infinitos consiste, pues, en atribuir a expresiones divergentes valores dados a priori y establecidos por condiciones físicas. Este procedimiento ha recibido el nombre de *renormalización* de las correspondientes magnitudes *

El método para aplicar esta operación se puede formular también de una forma un tanto distinta. Así, para la renormalización de la carga de una partícula se introduce una carga no física «de cebo» como parámetro, carga que interviene en la expresión del operador inicial de interacción electromagnética que figura en la teoría de perturbaciones formal. Hecho esto, la condición de renormalización se formula imponiendo la condición $e_c^2 \mathcal{D}(k^2) \rightarrow 4\pi e^2/k^2$ (para $k^2 \rightarrow 0$), donde e es la carga física verdadera de la partícula. De aquí se sigue la relación $e_c^2 Z = e^2$ y mediante ésta se elimina de las fórmulas que determinan los efectos observados la cantidad no física e_c . En cambio, imponiendo ya desde el principio la condición $Z = 1$, efectuamos la renormalización, por así decirlo, sobre la marcha y nos libramos de la necesidad de introducir cantidades ficticias incluso en las contribuciones intermedias.

Pasemos a exponer las condiciones de renormalización del propagador de electrón. Para ello consideraremos ahora el proceso de dispersión que puede tener lugar pasando por un estado intermedio de una sola partícula con un electrón virtual. La amplitud de este proceso debe tener un polo cuando el cuadrado del 4-impulso total de las partículas iniciales P_i coincide con el cuadrado de la masa de un electrón real $P_i^2 = m^2$. El término correspondiente a un polo en la amplitud resulta de un diagrama de la forma

* El primero en lanzar la idea de este método fue Kramers (H. Kramers, 1947). Sin embargo, la aplicación sistemática del método de renormalización en la electrodinámica cuántica se encuentra en los trabajos de Dyson, Tomonaga, Feynman y Schwinger.

$$p_f \left\{ \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{circle} \\ \searrow \end{array} \right. \xrightarrow[p=p_i=p_f]{} \left. \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{circle} \\ \searrow \end{array} \right\} p_i \quad (107.8)$$

donde, teniendo en cuenta las correcciones por radiación, la línea de trazo grueso es el propagador exacto de electrón. Esto significa que la función $\mathcal{G}(p)$ debe tener un polo en $p^2 = m^2$, es decir, que su forma límite ha de ser

$$\mathcal{G}(p) \approx Z_1 \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i0} + g(p) \text{ cuando } p^2 \rightarrow m^2, \quad (107.9)$$

donde Z_1 es una constante escalar y $g(p)$ se mantiene finita para $p^2 \rightarrow m^2$. La estructura matricial del término correspondiente al polo en (107.9) (proporcionalidad a $\hat{p} + m$) es consecuencia de la misma condición de unitariedad a la que se debe la propia condición de existencia de un polo. Demostremos esto, poniendo a la vez de manifiesto una importante cuestión relativa a las condiciones de renormalización de las líneas exteriores de electrón.

Si $\mathcal{G}(p)$ tiene la forma límite (107.9), la matriz inversa es tal que

$$\mathcal{G}^{-1}(p) \approx \frac{1}{Z_1} (\hat{p} - m) - (\hat{p} - m) g(\hat{p} - m) \text{ cuando } p^2 \rightarrow m^2. \quad (107.10)$$

En consecuencia, el operador másico se comporta como

$$\mathcal{M} = G^{-1} - \mathcal{G}^{-1} \approx \left(1 - \frac{1}{Z_1}\right) (\hat{p} - m) + (\hat{p} - m) g(\hat{p} - m), \quad (107.11)$$

cuando $p^2 \rightarrow m^2$.

A una línea exterior de electrón efectiva (digamos, entrante) corresponde en el diagrama el factor [cf. (100.15)]

$$\mathcal{U}(p) = u(p) + \mathcal{G}(p) \mathcal{M}(p) u(p), \quad (107.12)$$

donde $u(p)$ es la amplitud ordinaria de la función de onda de electrón que cumple la ecuación de Dirac $(\hat{p} - m) u = 0$. En virtud de la condición de invariancia relativista (\mathcal{U} , como también u , es un bispinor) el valor límite de $\mathcal{U}(p)$ para $p^2 \rightarrow m^2$ sólo puede diferir de $u(p)$ en un factor escalar constante:

$$\mathcal{U}(p) = Z' u(p). \quad (107.13)$$

Este factor Z' está ligado de determinada manera con el factor Z_1 , pero es imposible establecer esta relación substituyendo simplemente (107.10-11) en (107.12) debido

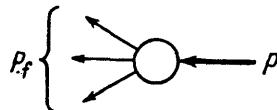
a la indeterminación a que ello da lugar: el resultado dependerá del orden en que se efectúe el paso al límite en los diferentes factores que aparecen en (107.12).

Sin embargo, cabe evitar esta dificultad sin necesidad de aclarar la cuestión relativa a la manera correcta de pasar al límite. Basta para ello acudir, en vez de a este proceso, a la condición de unitariedad en la aplicación a la reacción representada por el diagrama (107.8). La condición de unitariedad se refiere, hablando en general, no a los diagramas por separado, sino a la amplitud de los procesos como un todo. Pero cuando $p^2 \rightarrow m^2$ el diagrama polar (107.8) da la contribución fundamental a la correspondiente amplitud M_{fi} , de modo que se puede prescindir de los demás diagramas correspondientes a esta misma reacción.

En virtud de las condiciones de unitariedad, conforme se indicó en el § 80, un estado intermedio de una sola partícula conduce a que en la amplitud de reacción aparezca una parte imaginaria con un término que contiene una función- δ

$$i\pi\delta(p^2 - m^2) \sum_{\text{polar}} M_{fn} M_{in}^*, \quad (107.14)$$

donde, en el presente caso, el índice n se refiere al estado con un electrón real y la suma se extiende a sus polarizaciones (para evitar complicaciones innecesarias supondremos, como en el § 80, que se ha llevado a cabo la simetrización de ambos miembros de la relación de unitariedad respecto de las helicidades de las partículas iniciales y finales; entonces es $M_{fi} = M_{if}$). La amplitud M_{fn} corresponde al proceso representado por el diagrama



y tiene la forma

$$M_{fn} = (M'_{fn} \mathcal{U}) = Z' (M'_{fn} u),$$

donde M'_{fn} es un factor con un índice bispinorial libre *. De manera análoga, la amplitud M_{in}^* tiene una estructura de la forma

$$M_{in}^* = (\bar{\mathcal{U}} M'^*_{in}) = Z' (\bar{u} M'^*_{in}).$$

La suma respecto de las polarizaciones del electrón substituye el producto $(M'_{fn} u)$

* Aquí es necesario precisar un poco más. El electrón, en tanto que partícula estable, no puede transformarse, en realidad, en otro conjunto de partículas reales. Sin embargo, podemos considerar formalmente como a tales ciertas partículas imaginarias cuyas masas permitieran tal transformación. La relación que se obtiene hay que entenderla entonces en el sentido de prolongación analítica a los valores reales de las masas.

$(\bar{u}M'_{in}^*)$ por $M'_{fn}(\hat{p} + m) M_{in}$, de modo que el término (107.14) en la amplitud M_{fi} toma la forma

$$Z'^2 i\pi \delta(p^2 - m^2) \{M'_{fn}(\hat{p} + m) M'_{in}^*\}.$$

Debido a esto, el término en la parte imaginaria puede reducirse al término polar en la amplitud de dispersión; según (80.5) se encuentra

$$M_{fi} = -\frac{Z'^2 \{M'_{fn}(\hat{p} + m) M'_{in}^*\}}{p^2 - m^2 + i0}, \quad p^2 \rightarrow m^2.$$

Por otra parte, el cálculo de esta misma amplitud a partir directamente del diagrama (107.8) da

$$iM_{fi} = iM'_{fn} \cdot i\mathcal{G}(p) \cdot iM'_{in}^*.$$

La comparación de ambas fórmulas confirma la expresión límite escrita más arriba para $\mathcal{G}(p)$ [primer término en (107.9)], y además nos dice que *

$$Z' = \sqrt{Z_1}. \quad (107.15)$$

Demosbremos ahora que después de establecer la forma límite exigida para el propagador de electrón no hay ya necesidad de imponer ninguna otra condición al operador vértice.

Consideremos el diagrama



que representa la dispersión de un electrón en el campo exterior $A^{(e)}(k)$ (en primer orden respecto del polo) teniendo en cuenta todas las correcciones por radiación. En el límite $k \rightarrow 0$, $p_2 \rightarrow p_1 \equiv p$ las correcciones de energía propia a la línea del campo exterior se anulan (recordemos que estas correcciones se anulan siempre para cualquier $k^2 = 0$). Entonces, al diagrama corresponderá la amplitud

$$M_{fi} = -e\bar{u}(p)\Gamma(p, p; 0)\mathcal{U}(p) \cdot A^{(e)}(k \rightarrow 0), \quad (107.17)$$

* La deducción directa de la igualdad (107.15) a partir de la definición (107.12) exige un complicado estudio; éste se encuentra en el artículo: F. Dyson, Phys. Rev., 83, 608 (1951).

es decir, el producto del potencial $A^{(e)}$ por la corriente de transición de electrón $\bar{U}\Gamma\mathcal{U}$. Pero para $k \rightarrow 0$ el potencial se reduce a una constante independiente de las coordenadas y del tiempo. A un potencial de estas características no corresponde absolutamente ningún polo físico (caso particular de la invariancia de contraste), de modo que no puede dar lugar a ningún cambio de la corriente de electrón. En otras palabras, en el límite considerado la corriente de transición $\bar{U}\Gamma\mathcal{U}$ debe coincidir simplemente con la corriente libre $\bar{u}u$:

$$\bar{\mathcal{U}}(p, p; 0)\mathcal{U}(p) = Z_1\bar{u}(p)\Gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p)\gamma^\mu u(p). \quad (107.18)$$

Esta condición, en esencia, es también una expresión de la definición física de carga del electrón. Es fácil ver que se cumple automáticamente con independencia del valor de Z_1 . En efecto, substituyendo $\mathcal{G}^{-1}(p)$ dado por (107.10) en la identidad de Ward (105.8), encontramos

$$\Gamma^\mu(p, p; 0) = \frac{1}{Z_1}\gamma^\mu - \gamma^\mu g(p)(\hat{p} - m) - (\hat{p} - m)g(p)\gamma^\mu,$$

y la igualdad (107.18) queda satisfecha en virtud de las ecuaciones $(\hat{p} - m)u = 0$, $\bar{u}(\hat{p} - m) = 0$.

Vemos así que al formar la amplitud de un proceso físico la «constante de renormalización» Z_1 desaparece. Además, utilizando la indeterminación que resulta de las divergencias en el cálculo de Γ , puede imponerse simplemente la condición de que sea

$$\bar{u}(p)\Gamma^\mu(p, p; 0)u(p) = \bar{u}(p)\gamma^\mu u(p) \quad \text{cuando } p^2 = m^2, \quad (107.19)$$

es decir, hacer $Z_1 = 1$.

La ventaja de esta definición consiste en que evita la necesidad de introducir correcciones en las líneas exteriores de electrón: tenemos, simplemente,

$$\mathcal{U}(p) = u(p).$$

Cabe también probar esto directamente observando que para $Z_1 = 1$ el operador másico (107.11) se reduce a

$$\mathcal{M} = (\hat{p} - m)g(\hat{p} - m) \quad (107.20)$$

y que el segundo término en (107.12) se anula, evidentemente. Así, pues, no exigirán «renormalización» las líneas exteriores de las partículas reales, sean fotones o electrones *.

* En la renormalización del propagador de fotón la condición $Z = 1$ era consecuencia de una condición física necesaria, con lo que la anulación de las correcciones a las líneas exteriores de fotón se produce automáticamente. Desde un punto de vista formal, sin embargo, las situaciones para las líneas exteriores de fotón y de electrón son análogas: cuando $Z \neq 1$ la amplitud de onda $e\mu$ de un fotón real, teniendo en cuenta las correcciones, quedaría multiplicada por \sqrt{Z} .

§ 108. Propiedades analíticas del propagador de fotón

El estudio de las propiedades analíticas del propagador de fotón conviene iniciar con el de las propiedades de la función $\Pi(k^2)$. Ello se debe a que la utilización directa, para este fin, de la definición (100.1) se complica por la no-unicidad de contraste de los operadores $A^\mu(x)$ y de la indeterminación que de esto resulta en sus propiedades.

Partiendo de la expresión de la función energía propia del fotón, expresada mediante los elementos de matriz del operador corriente, que posee la invariancia de contraste, en el § 101 se obtuvo la representación integral (101.11) de la función $\Pi(k^2)$. Designando por t la variable k^2 *, consideremos las propiedades de la función $\Pi(t)$ en el plano complejo t .

Por la representación integral

$$\Pi(t) = \int_0^\infty \frac{\rho(t') dt'}{t - t' + i0} \quad (108.1)$$

es evidente que sobre el semieje real negativo la función $\Pi(t)$ es real y que en todo el resto del plano cumple la condición de simetría

$$\Pi(t^*) = \Pi^*(t). \quad (108.2)$$

La función $\Pi(t)$ puede presentar una singularidad tan sólo en los puntos singulares de la función $\rho(t)$. Estos últimos coinciden con los valores $t = k^2$, que resultan ser umbrales para la creación de diferentes conjuntos de partículas reales por un fotón virtual. Para estos valores «entran en juego» nuevos tipos de estados intermedios en la suma (101.9). La contribución de estos estados es nula por debajo del umbral, y diferente de cero por encima del mismo, lo que conduce precisamente a una singularidad de la función en el propio umbral. Estos valores umbral, claro está, son reales y no negativos **. Por ello, también los puntos singulares de la función $\Pi(t)$ se encuentran en el semieje real positivo de la variable t . Si se practica un corte a lo largo de este semieje, la función será analítica en todo el plano con este corte.

El término $+i0$ en el denominador del integrando en (108.1) indica que el polo $t' = t$ debe sortearse por debajo. Esto significa que por valor de la función $\Pi(t)$ para t real hay que entender su valor en el borde superior del corte. Utilizando la regla (76.18):

$$\frac{1}{x \pm i0} = P \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x), \quad (108.3)$$

* ¡No se confunda con el símbolo de la variable tiempo!

** Así, el punto $k^2 = 0$ es umbral para la creación de tres fotones reales (o de un número impar mayor), el punto $k^2 = 4m^2$ es el umbral para la creación de un par electrón-positón, y así sucesivamente.

se encuentra que para valores reales de t

$$\operatorname{Im} \Pi(t) \equiv \operatorname{Im} \Pi(t + i0) = -\pi\rho(t). \quad (108.4)$$

En cambio, sobre el borde inferior, $\operatorname{Im} \Pi$ tiene el signo opuesto, mientras que $\operatorname{Re} \Pi$ es la misma en ambos bordes. Por consiguiente, el salto de la función $\Pi(t)$ al cruzar el corte vale

$$\Pi(t + i0) - \Pi(t - i0) = -2\pi i\rho(t). \quad (108.5)$$

La propia representación integral (108.1) puede considerarse, desde este punto de vista, simplemente como la fórmula de Cauchy para la función analítica $\Pi(t)$. En efecto, apliquemos la fórmula de Cauchy

$$\Pi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}} \frac{\Pi(t') dt'}{t' - t} \quad (108.6)$$

al camino de integración



que contornea al corte. En el supuesto de que $\Pi(t)$ tiende a cero con rapidez suficiente en el infinito, la integral a lo largo de la circunferencia de radio grande se anula y las integrales a lo largo de los bordes del corte dan la fórmula siguiente (*relación de dispersión*) que determina la función $\Pi(t)$ fijada su parte imaginaria:

$$\Pi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \Pi(t' + i0)}{t' - t} dt' = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \Pi(t')}{t' - t - i0} dt'. \quad (108.8)$$

Substituyendo aquí (108.4), obtendremos (108.1) *.

Las propiedades analíticas de las funciones $\mathcal{P}(t)$ y $\mathcal{D}(t)$ coinciden con las propiedades de la función $\Pi(t)$, mediante la cual se expresan por las simples fórmulas (101.2) y (100.20). Para $\mathcal{D}(t)$ tenemos

* Las relaciones de dispersión fueron introducidas en la teoría cuántica de los campos por Gell-Mann, Goldberger y Thirring (M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, W. E. Thirring, 1954).

$$\mathcal{D}(t) = \frac{4\pi}{t} \left(1 + \frac{\Pi(t)}{t} \right). \quad (108.9)$$

Sobre el semieje real ($t > 0$), de acuerdo con lo dicho antes, hay que interpretar t como $t + i0$. La parte imaginaria de $\mathcal{D}(t)$ es posible calcularla luego a partir de (108.3) y (108.4), debiendo tener en cuenta que, según (107.6), $\Pi(t)/t \rightarrow 0$ para $t \rightarrow 0$. Se encuentra entonces

$$\text{Im } \mathcal{D}(t) = -4\pi^2 \delta(t) + \frac{4\pi}{t^2} \text{Im } \Pi(t) = -4\pi^2 \delta(t) - \frac{4\pi^2}{t^2} \rho(t). \quad (108.10)$$

Aplicando ahora a la función $\mathcal{D}(t)$ una relación de dispersión de la forma (108.8), obtendremos para ella la siguiente representación integral:

$$\mathcal{D}(t) = \frac{4\pi}{t + i0} + 4\pi \int_0^\infty \frac{\rho(t')}{t'^2} \frac{dt'}{t - t' + i0}. \quad (108.11)$$

Esta fórmula se llama *descomposición de Källen-Lehmann* (G. Källen, 1952; H. Lehmann, 1954).

Existe una estrecha relación entre la situación del corte para la función $\mathcal{D}(t)$ (y, en consecuencia, también para su parte imaginaria sobre el corte), de un lado, y la condición de unitariedad para la amplitud del proceso $a + b \rightarrow c + d$ representado por el diagrama (107.4), por otro (esta reacción, naturalmente, es puramente imaginaria; sin embargo, no contradice las leyes de conservación y para ella debe cumplirse la condición formal de unitariedad).

En el estadio inicial (i) de este proceso se tienen dos partículas «clásicas» a y b , y en el final, otras dos c y d . La condición de unitariedad (77.2) * es:

$$T_{fi} - T_{if}^* = i(2\pi)^4 \sum_n T_{fn} T_{in}^* \delta^{(4)}(P_f - P_i); \quad (108.12)$$

la suma en el segundo miembro se extiende a todos los estados físicos «intermedios» n . En el presente caso, estos estados son, evidentemente, estados de sistemas de pares reales y de fotones que pueden ser creados por un fotón virtual k , es decir, precisamente aquellos estados que figuran en los elementos de matriz en la definición de la función $\rho(k^2)$ (101.9). Las amplitudes M_{fi} y M_{if}^* contienen, respectivamente, los factores $\mathcal{D}(k^2)$ y $\mathcal{D}^*(k^2)$, y su diferencia, la parte imaginaria $\text{Im } \mathcal{D}(k^2)$. Así, pues, la relación, que ya conocemos por (108.4), entre la aparición en \mathcal{D} de una parte imaginaria y la existencia de los estados intermedios indicados, es consecuencia de condiciones necesarias de unitariedad.

* Recordaremos que las amplitudes T_{fi} difieren de las amplitudes M_{fi} tan sólo en ciertos factores, cf. (65.10).

Veremos en lo que sigue que el cálculo efectivo de la función $\mathcal{D}(t)$ [o, lo que es lo mismo, de la función $\mathcal{P}(t)$] de acuerdo con la teoría de perturbaciones, conviene iniciarla con el cálculo de la parte imaginaria de \mathcal{P} , en la cual no aparecen expresiones divergentes. Pero si después se calcula la función $\mathcal{P}(t)$ mediante una fórmula de dispersión de la forma (108.8), la integral resulta ser divergente, y es necesario efectuar operaciones suplementarias de substracción con el fin de satisfacer las condiciones $\mathcal{P}(0) = 0$ y $\mathcal{P}'(0) = 0$. Esta substracción, sin embargo, es posible llevarla a cabo sin operar explícitamente con integrales divergentes. Basta para ello aplicar la relación de dispersión (108.8), no a la propia función $\mathcal{P}(t)$, sino a la función $\mathcal{P}(t)/t^2$. Entonces $\mathcal{P}(t)$ se representa en la forma

$$\mathcal{P}(t) = \frac{i^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \mathcal{P}(t')}{t'^2(t' - t - i0)} dt'. \quad (108.13)$$

Esta integral es ya convergente y la función $\mathcal{P}(t)$ así obtenida satisface automáticamente las condiciones impuestas *.

§ 109. Regularización de las integrales de Feynman

Las condiciones de renormalización físicas consideradas en el párrafo que precede permiten, en principio, obtener de manera unívoca valores finitos para la amplitud de cualquier proceso electrodinámico en su cálculo para cualquier aproximación de la teoría de perturbaciones.

Veamos, ante todo, cuál es el carácter de las divergencias que aparecen en las integrales escritas directamente de acuerdo con los diagramas de Feynman. El cálculo de potencias de los 4-impulsos virtuales que aparecen en los correspondientes integrandos proporciona indicaciones importantes acerca de este tema.

Consideremos un diagrama de orden n -ésimo (es decir, un diagrama con n vértices) que tiene N_e líneas exteriores de electrón y N_γ de fotón. El número N_e es par y las líneas de electrón forman $N_e/2$ sucesiones ininterrumpidas, cada una de las cuales empieza y acaba en un terminal exterior. En cuanto a las líneas interiores de electrón, su número en cada una de estas sucesiones es inferior en una unidad

* Una relación de la forma (108.13) se llama relación de dispersión «con dos substracciones». El sentido del paso, que en ella se utiliza, a la función $\mathcal{P}(t)/t^2$ resulta en particular evidente si se escribe (108.13) en la forma

$$\mathcal{P}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \mathcal{P}(t') dt'}{t' - t - i0} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \mathcal{P}(t')}{t'} dt' - \frac{t}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \mathcal{P}(t')}{t'^2} dt'.$$

Designando la primera integral («no regularizada») por $\bar{\mathcal{P}}(t)$, toda la expresión que aparece en el segundo miembro será igual a

$$\bar{\mathcal{P}}(t) - \bar{\mathcal{P}}(0) - t\bar{\mathcal{P}}'(0).$$

al número de vértices en ella; en consecuencia, el número total de líneas de electrón interiores en el diagrama es igual a

$$n - \frac{N_e}{2}.$$

En cada vértice penetra una línea de fotón; en N_γ vértices la línea de fotón es exterior, y en los restantes $n - N_\gamma$ interior. Dado que cada línea de fotón interior une dos vértices, el número total de tales líneas es igual a

$$\frac{n - N_\gamma}{2}.$$

A cada línea exterior de fotón acompaña el factor $D(k)$ que contiene k elevado a la potencia — 2. En cambio, a cada línea de electrón interior corresponde el factor $G(p)$, que contiene p (para $p^2 \gg m^2$) elevado a la potencia — 1. Así, pues, el grado total de los 4-impulsos en el denominador del diagrama es igual a

$$2n - \frac{N_e}{2} - N_\gamma.$$

El número de integraciones (respecto de d^4p o de d^4k) en el diagrama es igual al número de líneas interiores, deducido el número $n - 1$ de condiciones impuestas a los impulsos virtuales adicionales (de las n leyes de conservación en los vértices, una liga los impulsos de terminales exteriores del diagrama). Multiplicando todavía por 4, obtendremos el número de integraciones respecto de todas las componentes de los 4-impulsos:

$$2(n - N_e - N_\gamma + 2).$$

Finalmente, la diferencia entre el número de integraciones y la potencia de los impulsos en el denominador del integrando (designémosla por r) es igual a

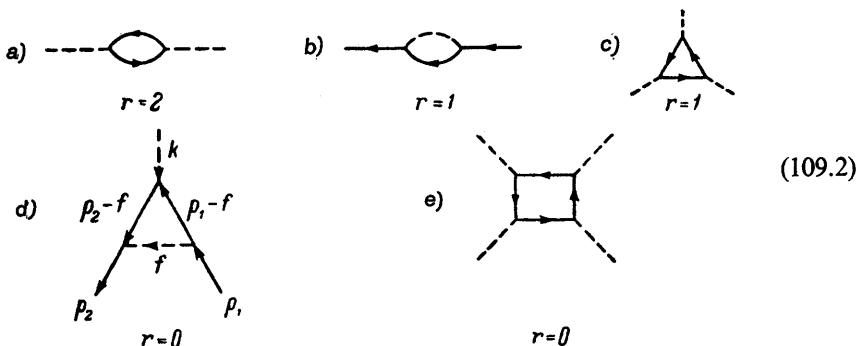
$$r = 4 - \frac{3}{2}N_e - N_\gamma. \quad (109.1)$$

Obsérvese que este número no depende del orden n del diagrama.

Las condiciones $r < 0$ para un diagrama en conjunto no bastan, en general, para la convergencia de la integral; es necesario que sean también negativos los números r' análogos para los bloques interiores que se podrían separar del diagrama. La existencia de bloques con $r' > 0$ conduciría a su divergencia, aunque las restantes integraciones en el diagrama convergieran en tal caso «sobradamente». Las condiciones $r < 0$, sin embargo, bastan para la convergencia de los diagramas más simples en los que $n = N_e + N_\gamma$ y se tiene solamente una integración respecto de d^4p .

Pero si $r \geq 0$, la integral diverge en cualquier caso. El grado de divergencia es entonces no menor que r , si el número r es par, y no menor que $r - 1$, si r es impar (la disminución del grado de divergencia en una unidad en el último caso se debe a la anulación de la integral de los productos de un número impar de 4-vectores al integrar en todo el 4-espacio). El grado de divergencia puede aumentar cuando existen bloques interiores con $r' > 0$.

Haremos observar que dado que N_e y N_Y son números enteros positivos, resulta evidente por (109.1) que existe solamente un cierto número de pares de valores de estos números para los que $r \geq 0$. Veamos cuáles son los diagramas más simples de cada uno de estos tipos, pero excluyamos ya desde un principio los casos $N_e = N_Y = 0$ (lazos de vacío) y $N_e = 0, N_Y = 1$ (valor medio de la corriente de vacío), puesto que carecen de significación física y los correspondientes diagramas deben simplemente desecharse conforme se indicó en el § 100. Los restantes casos son:



En el primero de éstos la divergencia es cuadrática, y en los restantes ($r = 0$ o $r = 1$), logarítmica.

El diagrama (109.2 d) es la primera corrección al operador vértice y debe cumplir la condición (107.19), que escribiremos aquí en la forma

$$\bar{u}(p) \Lambda^\mu(p, p; 0) u(p) = 0 \quad \text{para} \quad p^2 = m^2, \quad (109.3)$$

donde

$$\Lambda^\mu = \Gamma^\mu - \gamma^\mu. \quad (109.4)$$

Designemos la integral de Feynman, escrita tal cual resulta directamente del diagrama, por $\bar{\Lambda}^\mu(p_2, p_1; k)$. Esta integral diverge logarítmicamente y en esta forma no satisface la condición (109.3). Sin embargo, obtendremos una magnitud que cumple dicha condición introduciendo la diferencia

$$\Lambda^\mu(p_2, p_1; k) = \bar{\Lambda}^\mu(p_2, p_1; k) - \bar{\Lambda}^\mu(p_1, p_1; 0) \Big|_{p_1^2 = m^2}. \quad (109.5)$$

El término principal de divergencia en la integral $\Lambda^\mu(p_2, p_1; k)$ se obtendrá si en el integrando se considera el 4-impulso de un fotón virtual f como una cantidad arbitrariamente grande. Dicho término tiene la forma *

$$-4\pi ie^2 \int \frac{\gamma^v \hat{f} \gamma^\mu \hat{f} \gamma_v}{f^2 \cdot f^2 \cdot f^2} \frac{d^4 f}{(2\pi)^4}$$

y no depende de los valores de los 4-impulsos de las líneas exteriores. Por ello, en la diferencia (109.5) desaparece la divergencia y se obtiene una cantidad finita. Esta operación de separar una divergencia por substracción se llama *regularización* de la integral.

Hay que subrayar que la posibilidad de regularizar la integral $\Lambda^\mu(p_2, p_1; k)$ mediante una única substracción es consecuencia del hecho de que, en el presente caso, la divergencia es tan sólo logarítmica, es decir, la menos fuerte de todas las posibles. Si en la integral aparecieran divergencias de órdenes diferentes, pudiera ocurrir que la substracción de la expresión que corresponde a $k = 0$ resultara insuficiente para hacer desaparecer todos los términos divergentes.

Una vez determinada la primera corrección en Γ^μ (es decir, el primer término del desarrollo de Λ^μ), la primera corrección en el propagador de electrón [diagrama (109.2 a)] se puede calcular mediante la identidad de Ward (105.8), que puede escribirse también en la forma

$$\frac{\partial \mathcal{M}(p)}{\partial p_\mu} = \Lambda^\mu(p, p; 0), \quad (109.6)$$

introduciendo el operador másico \mathcal{M} en vez de \mathcal{G} y Λ^μ en vez de Γ^μ . Esta ecuación debe integrarse con la condición de contorno

$$\bar{u}(p) \mathcal{M}(p) u(p) = 0 \quad \text{para } p^2 = m^2, \quad (109.7)$$

que se deduce de (107.20).

Finalmente, para calcular el primer término del desarrollo del operador polarización acudiremos a la identidad (105.14); después de contraer respecto de cada par de índices, dicha identidad conduce a la ecuación

$$\frac{3}{4\pi} \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial k_\sigma \partial k^\sigma} = 2\mathcal{S},$$

que liga las funciones escalares $\mathcal{P} = 1/3 \mathcal{P}_\mu^\mu$ y $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mu\rho} \mathcal{P}^\mu$. Estas dos funciones dependen solamente de la variable k^2 , asimismo un escalar, por lo que se encuentra

* La expresión completa de la integral se da en el § 114; cf. (114.2).

$$2k^2\mathcal{P}''(k^2) + \mathcal{P}'(k^2) = \frac{4\pi}{3}\mathcal{P}(k^2), \quad (109.8)$$

donde los apóstrofos designan la derivación respecto de k^2 . Teniendo en cuenta la condición $\mathcal{P}'(0) = 0$, de esta ecuación se sigue, evidentemente, que también debe ser

$$\mathcal{P}(0) = 0. \quad (109.9)$$

En la primera aproximación de la teoría de perturbaciones $\mathcal{P}(k^2)$ se determina por el diagrama (109.2 e) (con los 4-impulsos de los terminales $k, k, 0, 0$). La correspondiente integral de Feynman [designémosla por $\bar{\mathcal{P}}(k^2)$] diverge logarítmicamente y su regularización se lleva a cabo con una sola substracción de acuerdo con la condición (109.9):

$$\mathcal{P}(k^2) = \bar{\mathcal{P}}(k^2) - \bar{\mathcal{P}}(0).$$

Hecho esto, se calcula $\mathcal{P}(k^2)$ resolviendo la ecuación (109.8) con las condiciones de contorno $\mathcal{P}(0) = 0, \mathcal{P}'(0) = 0$.

En la aproximación siguiente de la teoría de perturbaciones, la corrección al operador vértice ($\Lambda_\mu^{(2)}$) se determina por los diagramas (103.10, c-i). De entre ellos, los irreducibles (103.10, d-f) se calculan mediante la misma regularización de las integrales con una sola substracción de acuerdo con (109.5), al igual que en el cálculo de la corrección de primera aproximación $\Lambda_\mu^{(1)}$. En cuanto a los diagramas reducibles, las partes de energía propia interna y las partes vértice de orden inferior que contienen se substituyen directamente por las cantidades ya conocidas (regularizadas) de primera aproximación ($\mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{M}^{(1)}, \Lambda_\mu^{(1)}$), y, luego, las integrales que se obtienen se regularizan de nuevo de acuerdo con (109.5) *. Las correcciones $\mathcal{P}^{(2)}$ y $\mathcal{M}^{(2)}$ pueden calcularse después mediante las ecuaciones (109.6) y (109.8).

El procedimiento sistemático descrito proporciona, en principio, la posibilidad de obtener expresiones finitas para \mathcal{P}, \mathcal{M} y Λ_μ cualquiera que sea el orden de aproximación en la teoría de perturbaciones. Con ello, se hace posible asimismo el cálculo de las amplitudes de los procesos físicos de dispersión descritos por diagramas en los que intervienen, como partes componentes, los bloques $\mathcal{P}, \mathcal{M}, \Lambda_\mu$.

Vemos así que las condiciones físicas antes establecidas (§ 108) resultan ser suficientes para la regularización unívoca de todos los diagramas de Feynman que aparecen en la teoría. Esta circunstancia no es en modo alguno una propiedad trivial de la electrodinámica cuántica y ha recibido el nombre de *renormalizabilidad* **.

* En los diagramas de órdenes de aproximación todavía más elevados, puede resultar necesario, sin embargo, substituir ya antes los bloques \mathcal{P} «con cuatro cabos» por sus valores regularizados.

** La fundamentación matemáticamente rigurosa de la teoría de las renormalizaciones en la electrodinámica cuántica se encuentra en el libro: N. N. Bogoliubov y D. V. Shirkov, *Vvedenie v teoriu kvantovannyyj polei* («Introducción a la teoría de los campos cuantificados»), Gostejizdat, 1957.

Para calcular efectivamente las correcciones radiativas el procedimiento descrito más arriba puede, sin embargo, resultar no ser el camino más simple y racional. En el capítulo siguiente veremos, en particular, que un procedimiento adecuado puede partir del cálculo de la componente imaginaria de las correspondientes magnitudes; estas componentes vienen dadas por integrales no divergentes. La cantidad toda se determina luego mediante prolongación analítica con ayuda de las relaciones de dispersión. Con ello resulta posible evitar los cálculos muy pesados que exige el método directo de regularización por substracción.

CAPÍTULO 12

CORRECCIONES RADIATIVAS

§ 110. Cálculo del operador polarización

Pasando el cálculo efectivo de las correcciones radiativas, comenzaremos por el del operador polarización (*J. Schwinger, 1949; R. P. Feynman, 1949*). En la primera aproximación de la teoría de perturbaciones, dicho operador viene dado por un lazo en el diagrama



Conforme se hizo ya notar, el problema se simplifica si se empieza por calcular la parte imaginaria de la función buscada. A su vez, este cálculo se lleva a cabo de la manera más fácil posible utilizando la relación de unitariedad. Las líneas de fotón virtual se consideran para ello como correspondientes a una partícula que imaginamos como «real» —a un bosón vectorial de masa $M^2 = k^2$, que se encuentra en interacción con un electrón de acuerdo con la misma ley que el fotón. Gracias a esto (110.1) pasa a ser el diagrama de un proceso «real» y queda justificada así la aplicación al mismo de la condición de unitariedad.

En consecuencia, consideraremos (110.1) como un diagrama para la amplitud de transición del bosón en sí mismo (elemento diagonal de la matriz S) pasando por la desintegración en un par electrón positón. Las crucecitas en el diagrama (110.1) indican por qué líneas debe cortarse en dos partes el diagrama de forma que quede de manifiesto el estado intermedio que figura en la aplicación de la relación de unitariedad. Este estado contiene un electrón con 4-impulso $p_+ = p$ y un positón con $p_+ = -(p - k)$.

La relación de unitariedad con un estado intermedio de dos partículas (72.4) da

$$2 \operatorname{Im} M_{ii} = \frac{|p|}{(4\pi)^2 e} \sum_{\text{polar}} \int |M_{nl}|^2 d\sigma. \quad (110.2)$$

cuando coinciden los estados inicial y final.

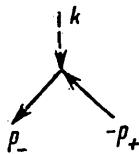
La amplitud M_{ii} que aquí aparece, formada de acuerdo con el diagrama (110.1), es

$$iM_{ii} = \sqrt{4\pi} e_\mu^* \cdot \sqrt{4\pi} e_\nu \frac{i\mathcal{P}^{\mu\nu}}{4\pi}, \quad (110.3)$$

donde e_μ es el 4-vector polarización del bosón; según (14.13), dicho 4-vector satisface la ecuación

$$e_\mu k^\mu = 0.$$

A la amplitud M_{ni} , en cambio, corresponde el diagrama de desintegración del bosón en un par:



La correspondiente expresión se escribe:

$$M_{ni} = -e \sqrt{4\pi} e_\mu j^\mu, \quad j^\mu = \bar{u}(p_-) \gamma^\mu u(-p_+). \quad (110.4)$$

Substituyendo (110.3-4) en (110.2), obtendremos

$$2e_\mu^* e_\nu \text{Im } \mathcal{P}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{|p|}{\epsilon} \sum_{\text{polar}} j^{\mu*} j^\nu e_\mu^* e_\nu. \quad (110.5)$$

Aquí $p = p_- = -p_+$ y $\epsilon = \epsilon_+ + \epsilon_- = 2\epsilon_+$ son los impulsos y la energía total del par en su sistema del centro de masa; la integración se extiende a todas las direcciones de p , y la suma, a las polarizaciones de ambas partículas.

Promediamos ahora los dos miembros de la igualdad (110.5) respecto de las polarizaciones del bosón. El cálculo del valor medio se lleva a cabo mediante la fórmula

$$\overline{e_\mu^* e_\nu} = -\frac{1}{3} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$$

[cf. más adelante (117.5)]. Teniendo en cuenta que el tensor $\mathcal{P}^{\mu\nu}$ y el vector j^μ son transversales ($\mathcal{P}^{\mu\nu} k_\nu = 0$, $j^\mu k_\mu = 0$) y substituyendo $\mathcal{P}_\mu^\mu = 3\mathcal{P}$, se obtiene el resultado

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{P} = \frac{1}{12\pi} \frac{|\mathbf{p}|}{e} \sum_{\text{polar}} \int (jj^*) d\omega. \quad (110.6)$$

La suma respecto de las polarizaciones se efectúa de la manera ordinaria, la integración respecto de $d\omega$ se reduce a multiplicar por 4π y encontramos, en definitiva,

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{P} = e^2 \frac{|\mathbf{p}|}{3e} \operatorname{Tr} \gamma_\mu (\hat{p}_- + m) \gamma^\mu (\hat{p}_+ - m) = -e^2 \frac{8|\mathbf{p}|}{3e} (p_+ p_- + 2m^2).$$

Introduzcamos la variable

$$t = k^2 = (p_+ + p_-)^2 = 2(m^2 + p_+ p_-). \quad (110.7)$$

Entonces

$$e^2 = t, \quad \mathbf{p}^2 = \frac{t}{4} - m^2,$$

y la fórmula final para $\operatorname{Im} \mathcal{P}$ toma la forma

$$\operatorname{Im} \mathcal{P}(t) = -\frac{a}{3} \sqrt{\frac{t-4m^2}{t}} (t+2m^2), \quad t \geq 4m^2. \quad (110.8)$$

El valor $t = 4m^2$ es el umbral para la creación de un par electrón-positrón por el fotón virtual (cf. la nota en la pág 47); en la aproximación considerada de la teoría de perturbaciones ($\sim e^2$), un estado con un sólo par es el único que puede figurar en calidad de estado intermedio en la condición de unitariedad (110.2). En la misma aproximación, por lo tanto, el segundo miembro de (110.2) es igual a cero cuando $t < 4m^2$, de modo que

$$\operatorname{Im} \mathcal{P}(t) = 0, \quad t < 4m^2. \quad (110.9)$$

Por esta misma razón, en la aproximación considerada el corte de ramificación para la función $\mathcal{P}(t)$ en el plano complejo t se extiende solamente a partir del punto

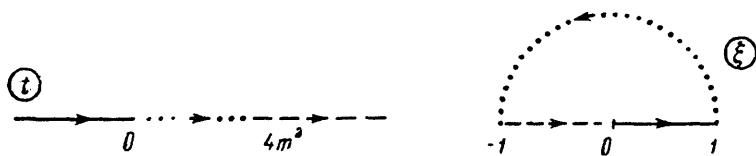


Рис. 18.

$t = 4m^2$ a lo largo del eje real y este punto debe figurar como límite inferior en la integral de dispersión (108.13). De esta manera tenemos

$$\mathcal{P}(t) = -\frac{a}{3\pi} t^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t - i0} \sqrt{\frac{t' - 4m^2}{t'}} \frac{t' + 2m^2}{t'^2}. \quad (110.10)$$

Con vistas a cálculos que seguirán conviene introducir en vez de t otra variable que definiremos por

$$\frac{t}{m^2} = -\frac{(1-\xi)^2}{\xi}. \quad (110.11)$$

Esta transformación representa el semiplano complejo t superior sobre el semicírculo de radio unidad en el semiplano superior de la variable compleja ξ , conforme se indica en la figura 18. (Los segmentos representados por el mismo tipo de trazos se corresponden entre sí en ambos planos.) A la región no física ($0 < t/m^2 \leq 4$) corresponde, en estas condiciones, el semicírculo $\xi = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. En cambio, a las regiones físicas ($t < 0$ y $t/m^2 > 4$), corresponden los radios reales a la derecha y a la izquierda.

La manera más fácil de calcular la integral (110.10) es mediante la sustitución

$$\frac{t'}{m^2} = \frac{(1+\xi')^2}{\xi'}, \quad \frac{dt'}{m^2} = -\frac{(1-\xi'^2)d\xi'}{\xi'^2},$$

considerando, en primer lugar, el caso $t < 0$ (el denominador no se anula entonces en el dominio de integración y se puede prescindir de la contribución imaginaria $i0$). Expresado en función de la variable ξ , el resultado de la integración es

$$\mathcal{P}(\xi) = \frac{am^2}{3\pi} \left\{ -\frac{22}{3} + \frac{5}{3} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right) + \left(\xi + \frac{1}{\xi} - 4 \right) \frac{1+\xi}{1-\xi} \ln \xi \right\}. \quad (110.12)$$

La prolongación analítica de esta fórmula determina la función $\mathcal{P}(t)$ también en la región $t > 4m^2$: para esto es necesario hacer en ella $\xi = |\xi| e^{i\pi}$ (con lo que el logaritmo contribuye a la parte imaginaria: $\ln \xi = \ln |\xi| + i\pi$)*. En la región no física hay que escribir $\xi = e^{i\varphi}$ y entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t) &= \frac{am^2}{3\pi} \left\{ -\frac{5}{3} \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} - 4 + \left(2 + \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} \right) \varphi \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right\}, \\ \frac{t}{4m^2} &= \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (110.13)$$

En el caso límite de valores $|t|$ pequeños (es decir, para $\xi \rightarrow 1$) estas fórmulas dan

* La prolongación analítica efectuada de esta manera es, como debe ser, la prolongación al borde superior del corte, puesto que el semicírculo en el plano ξ corresponde precisamente al semiplano superior t .

$$\mathcal{P}(t) = -\frac{\alpha}{15\pi} \frac{t^2}{m^2}, \quad |t| \ll 4m^2. \quad (110.14)$$

En cambio, en el caso opuesto de valores $|t|$ grandes (es decir, $\xi \rightarrow 0$) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(t) &= -\frac{\alpha}{3\pi} |t| \ln \frac{|t|}{m^2}, \quad -t \gg 4m^2, \\ \mathcal{P}(t) &= \frac{\alpha}{3\pi} t \left(\ln \frac{t}{m^2} - i\pi \right), \quad t \gg 4m^2.\end{aligned} \quad (110.15)$$

Por el propio sentido de la teoría de perturbaciones, las fórmulas obtenidas son válidas con tal que se tenga $\mathcal{P}/4\pi \ll D^{-1} = t/4\pi$. En consecuencia, la condición de aplicabilidad de las fórmulas (110.15) es:

$$\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|t|}{m^2} \ll 1. \quad (110.16)$$

§ 111. Correcciones radiativas a la ley de Coulomb

Aplicaremos las fórmulas obtenidas al problema de determinar las correcciones por radiación a la ley de Coulomb. Cabe describir éstas como si fuesen el resultado de una *polarización del vacío* en torno de una carga puntual.

Sin tener en cuenta dichas correcciones, el campo de un centro inmóvil (con una carga e_1) viene dado por el potencial escalar de Coulomb $\Phi \equiv A_0^{(e)} = e_1/r$. Las componentes de su desarrollo de Fourier en tres dimensiones son:

$$\Phi(\mathbf{k}) \equiv A_0^{(e)}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e_1}{k^2}.$$

Al introducir las correcciones por radiación, el campo se substituye por un «campo efectivo»:

$$A_0^{(e)} = A_0^{(e)} + \mathcal{D}_{00} \frac{\mathcal{P}\delta\lambda}{4\pi} A_\lambda^{(e)} = A_0^{(e)} + \frac{1}{4\pi} \mathcal{P}\mathcal{D} A_0^{(e)} \quad (111.1)$$

[cf. (100.15)]. El segundo término da precisamente la contribución buscada al potencial escalar. En la primera aproximación de la teoría de perturbaciones, para $\mathcal{P}(k^2)$ hay que tomar la expresión obtenida en el párrafo precedente y substituir la función $\mathcal{D}(k^2)$ por su aproximación de orden cero

$$\mathcal{D}(k^2) \approx D(k^2) = -\frac{4\pi}{k^2}.$$

De esta manera, la corrección radiativa al potencial del campo resulta ser

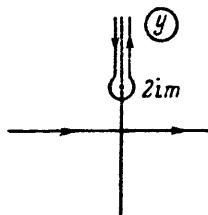


Fig. 19.

$$\delta\Phi(\mathbf{k}) = -\frac{4\pi e_1}{(\mathbf{k}^2)^2} \mathcal{P}(-\mathbf{k}^2). \quad (111.2)$$

Para determinar la forma de esta corrección en la representación de coordenadas, hay que aplicar la transformación inversa de Fourier:

$$\delta\Phi(r) = \int e^{ikr} \delta\Phi(\mathbf{k}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (111.3)$$

Por otra parte, dado que $\delta\Phi(\mathbf{k})$ es función solamente de $t = -\mathbf{k}^2$, al integrar respecto de los ángulos se obtendrá

$$\delta\Phi(r) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \delta\Phi(t) \frac{\operatorname{sen}(r\sqrt{-t})}{r} d(-t) = \frac{1}{4\pi^2 r} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty \delta\Phi(-y^2) e^{iry} y dy$$

(en la última transformación se ha tenido en cuenta la paridad del integrando considerado como función de $y = \sqrt{-t}$). Es posible ahora deformar el camino de integración llevándolo al semiplano superior de la variable compleja y de modo que coincida con el corte de la función $\mathcal{P}(-y^2)$ (fig. 19). Este corte empieza en el punto $2im$ y sigue por el semieje imaginario positivo (correspondiendo a la hoja física el borde izquierdo del corte). Introduciendo en vez de y una nueva variable definida por $y = ix$, obtendremos

$$\delta\Phi(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{2m}^\infty \operatorname{Im} \delta\Phi(x^2) e^{-rx} x dx.$$

Finalmente, volviendo a la integración respecto de $t = x^2$, tenemos en definitiva:

$$\delta\Phi(r) = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{4m^2}^\infty \operatorname{Im} \delta\Phi(t) e^{-r\sqrt{t}} dt. \quad (111.4)$$

La parte imaginaria

$$\operatorname{Im} \delta\Phi(t) = -\frac{4\pi e}{t^2} \operatorname{Im} \mathcal{P}(t)$$

la tomaremos de (110.8), y después de un cambio de variable evidente, se encuentra

$$\Phi(r) = \frac{e_1}{r} + \delta\Phi(r) = \frac{e_1}{r} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \int_1^\infty e^{-2mr\zeta} \left(1 + \frac{1}{2\zeta^2} \right) \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^2} d\zeta \right\} \quad (111.5)$$

(E. Uehling, R. Serber, 1935).

La integral que aparece en esta expresión se puede calcular en dos casos límite.

Consideremos primero el caso de valores de r pequeños ($mr \ll 1$). Descompongamos la integral del primer término entre paréntesis en dos:

$$I = \int_1^\infty e^{-2mr\zeta} \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^2} d\zeta = \int_1^{\zeta_1} \dots d\zeta + \int_{\zeta_1}^\infty \dots d\zeta \equiv I_1 + I_2,$$

ζ_1 se ha elegido aquí tal que $1/mr \gg \zeta_1 \gg 1$. En virtud de esto, cabe hacer $r = 0$ en la primera integral, de modo que

$$I_1 \approx \int_1^{\zeta_1} \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^2} d\zeta \approx \ln 2\zeta_1 - 1.$$

Por el contrario, en I_2 es posible prescindir de la unidad en el radicando:

$$I_2 \approx \int_{\zeta_1}^\infty e^{-2mr\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta} = -\ln \zeta_1 \cdot e^{-2mr\zeta_1} + 2mr \int_{\zeta_1}^\infty e^{-2mr\zeta} \ln \zeta d\zeta.$$

En el exponente y en el límite inferior de la integral se puede hacer $\zeta_1 = 0$. Aplicando luego el cambio de variable $2mr\zeta = x$, obtendremos

$$I_2 = -\ln 2\zeta_1 + \ln \frac{1}{mr} + \int_0^\infty e^{-x} \ln x dx = -\ln 2\zeta_1 + \ln \frac{1}{mr} - C,$$

donde $C = 0,577\dots$ es la constante de Euler. En la integral del segundo término de (111.5) se puede hacer sin más $r = 0$:

$$I_3 \approx \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^4} d\zeta = \frac{1}{6}.$$

Sumando estas tres integrales (con lo cual desaparece el número auxiliar ζ_1), se obtiene

$$\Phi(r) = \frac{e_1}{r} \left[1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \left(\ln \frac{1}{mr} - C - \frac{5}{6} \right) \right], \quad r \ll \frac{1}{m}. \quad (111.6)$$

Para $mr \gg 1$, el intervalo que representa un papel esencial es aquél en que $\zeta - 1 \sim 1/mr \ll 1$. Substituyendo $\zeta = 1 + \xi$ y prescindiendo de los términos que no interesan, dicha integral se reduce a la siguiente:

$$e^{-2mr} \int_0^\infty e^{-2mr\xi} \frac{3}{2} \sqrt{2\xi} d\xi = \frac{3}{8(mr)^{3/2}} \sqrt{\pi} e^{-2mr}.$$

Así, pues, en este caso *

$$\Phi(r) = \frac{e_1}{r} \left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} \right), \quad r \gg \frac{1}{m}. \quad (111.7)$$

Vemos, pues, que la polarización del vacío deforma el campo de Coulomb de una carga puntual en el dominio $r \sim 1/m (= \hbar/mc)$, donde m es la masa del electrón. Fuera de este dominio, la deformación del campo tiende a cero exponencialmente.

Hagamos todavía una observación más que tiene un carácter general. Hasta aquí hemos supuesto que las correcciones por radiación se deben a la interacción del campo fotónico con el campo electrón-positón. Así, agregando lazos cerrados interiores de electrón en los diagramas de energía propia de fotón, se tuvo en cuenta la interacción del fotón con el «vacío electrónico». Pero un fotón interactúa también con los campos de otras partículas; la interacción con los «vacíos» de estos campos se describe por diagramas de energía propia del mismo tipo en los que los lazos interiores se atribuyen a las correspondientes partículas. Las contribuciones de tales diagramas difieren en orden de magnitud de las contribuciones de los diagramas de electrón en determinadas potencias de la razón m_e/m , donde m es la masa de la partícula dada y m_e la masa del electrón.

Las partículas cuyas masas son más próximas a las del electrón son las de los muones y de los piones. Numéricamente, las razones m_e/m_μ y m_e/m_π difieren poco de α . Por ello las correcciones radiativas de estas partículas debieran tenerse en cuenta junto con las de electrón de los órdenes siguientes. Pero si para los muones el cálculo de las correcciones por radiación mediante la teoría de que hoy se dispone es en principio posible, para los piones (que son partículas que interactúan fuertemente) esto es imposible.

Esta circunstancia limita por principio la posibilidad de los cálculos exactos de

* El origen del factor e^{-2mr} en $\delta\Phi(r)$ resulta evidente ya por la propia forma de la integral de partida (111.4): para valores de r grandes, son esenciales en ella los valores t que se encuentran cerca del límite inferior. En otras palabras, el exponente del factor exponencial viene determinado por la posición de la primera singularidad de la función $\delta\Phi(t)$.

efectos concretos en la electrodinámica cuántica actual. Por otra parte, la consideración de correcciones cuya aproximación sea tan grande cuanto se quiera para solamente la interacción electrón-positón superaría con mucho la precisión que cabe admitir.

Las correcciones radiativas consideradas en este párrafo y correspondientes a la ley de Coulomb se extienden, conforme vimos, a un dominio de distancias $r \lesssim 1/m_e$. Podemos ahora añadir que las fórmulas obtenidas resultan incompletas a distancias $r < 1/m_\mu$ (o $1/m_\pi$), distancias para las que son también esenciales los efectos de polarización del vacío de otras partículas.

§ 112. Cálculo de la parte imaginaria del operador polarización según la integral de Feynman

En el cálculo directo según el correspondiente diagrama [el lazo en el diagrama (110.1)], el operador polarización vendría dado, en la primera aproximación del cálculo de perturbaciones, por la integral

$$\frac{i\mathcal{P}^{\mu\nu}}{4\pi} \rightarrow -e^2 \int \text{Tr } \gamma^\mu G(p) \gamma^\nu G(p-k) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}. \quad (112.1)$$

Sin embargo, esta integral, extendida a todo el espacio- p cuadridimensional, diverge cuadráticamente y para obtener un resultado finito sería necesario efectuar su regularización de acuerdo con las reglas descritas en el § 109.

No efectuaremos aquí por completo este cálculo, pero indicaremos de qué modo se puede obtener a partir de la integral (112.1) la parte imaginaria del operador polarización (que determinamos en el § 110 mediante la condición de unitariedad); este cálculo encierra toda una serie de fases muy instructivas.

La parte imaginaria de la integral (112.1) no diverge, por lo cual no es necesario regularizarla. Para la función escalar $\text{Im } \mathcal{P} = \frac{1}{3} \text{Im } \mathcal{P}_\mu^\mu$ tenemos

$$\text{Im } \mathcal{P} = \text{Im} \left\{ i \frac{4\pi e^2}{3(2\pi)^4} \int \frac{\text{Tr } \gamma^\mu (\beta + m) \gamma_\mu (\beta - \hat{k} + m)}{(p^2 - m^2 + i0) [(p-k)^2 - m^2 + i0]} d^4 p \right\}.$$

(A fin de simplificar la notación, en las siguientes fórmulas intermedias prescindiremos del símbolo Im , haciendo caso omiso de la divergencia de la parte real de esta integral.) Después de calcular la traza, la integral toma la forma

$$\mathcal{P}(k^2) = \int \frac{i\varphi(p) d^4 p}{(p^2 - m^2 + i0) [(p-k)^2 - m^2 + i0]}, \quad (112.2)$$

$$\varphi(p) = \frac{2e^2}{3\pi^3} (2m^2 + pk - p^2).$$

Supongamos que $k^2 > 0$. Pasando al sistema de referencia en el que $k = (k_0, 0)$, se tiene

$$(p - k)^2 = (p_0 - k_0)^2 - \mathbf{p}^2.$$

Introduciendo también la notación $\varepsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ (ε no coincide con la «energía» del electrón virtual p_0), escribiremos (112.2) como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(k^2) &= \int d^3p \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{i\varphi(p_0, \mathbf{p})}{(p_0^2 - \varepsilon^2 + i0)[(p_0 - k_0)^2 - \varepsilon^2 + i0]}, \\ \varphi(p_0, \mathbf{p}) &= \frac{2e^2}{3\pi^3} (m^2 + \varepsilon^2 + p_0 k_0 - p_0^2).\end{aligned}\quad (112.3)$$

El integrando tiene cuatro polos respecto de la variable p_0 :

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $p_0 = \varepsilon - i0,$ | $a') p_0 = -\varepsilon + i0,$ |
| b) $p_0 = k_0 - \varepsilon + i0,$ | b') $p_0 = k_0 + \varepsilon - i0.$ |

En la figura 20 se indica la situación de estos polos; para concretar supondremos que $k_0 > 0$ (el resultado final es función de k_0^2 y, por lo tanto, no depende del signo de k_0). Calculemos el salto que experimenta la función $\mathcal{P}(t)$ al atravesar el corte en el plano de la variable compleja $t = k^2 = k_0^2$ o, lo que es lo mismo, al pasar de uno al otro lado del eje real en el plano complejo k_0 . La parte real de la función $\mathcal{P}(t)$ es continua en el corte, por lo que el salto vale

$$\Delta\mathcal{P}(t) = 2i \operatorname{Im} \mathcal{P}(t). \quad (112.4)$$

Veamos ante todo como es posible mediante un examen de la integral establecer ya la posición del corte. Designemos la integral interior en (112.3) (la integral respecto de dp_0) por $I(\mathbf{p}, k_0)$. En tanto los polos superiores e inferiores en la figura 20 se encuentren a distancias no nulas el uno del otro, el camino de integración respecto de p_0 puede trazarse pasando entre ellos (línea de trazos en la figura). Es evidente, por lo tanto, que en este caso la integral no cambia en un desplazamiento infinitesimal de los polos b y b' hacia abajo o por encima del eje real, es decir, al

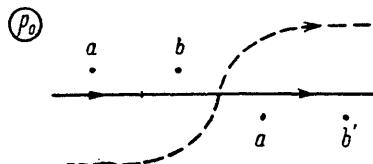


Fig. 20.

substituir $k_0 \rightarrow k_0 \pm i\delta$ con $\delta \rightarrow 0$. En otras palabras, los valores $I(\mathbf{p}, k_0)$ cuando k_0 tiende a su valor real desde arriba o desde abajo serán los mismos, de modo que $I(\mathbf{p}, k_0)$ no contribuye al salto $\Delta\mathcal{P}$. La situación cambia solamente si dos polos (para $k_0 > 0$ éstos pueden ser los polos a y b) resultan estar uno justo debajo del otro, con lo que el contorno de integración quedará «atrapado» entre ellos y no es posible desplazarlo. Así, pues, el salto $\Delta\mathcal{P} \neq 0$ sólo si en algún punto del dominio de integración respecto de d^3p puede cumplirse la condición $k_0 - \varepsilon = \varepsilon$, es decir, $k_0 = 2\varepsilon = 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Para ello, evidentemente, debe ser $k_0 \geq 2m$, esto es $t \geq 4m^2$ *.

Escribamos la integral $I(\mathbf{p}, k_0)$ en la forma

$$I(\mathbf{p}, k_0) = \int_C \frac{i\varphi(p_0, \mathbf{p}) dp_0}{(p_0^2 - \varepsilon^2)[(p_0 - k_0)^2 - \varepsilon^2]}, \quad (112.5)$$

prescindiendo del término $i0$ en el denominador y cambiando, de acuerdo con esto, el contorno C de integración conforme se indica en la figura 21. Vemos entonces que el origen del salto $\Delta\mathcal{P}(t)$ está ligado con la imposibilidad de separar el contorno del polo a (cuando el contorno se encuentre «atrapado» entre a y b). Teniendo presente esto, substituyamos el contorno C por el C' que pasa por debajo del punto a ,

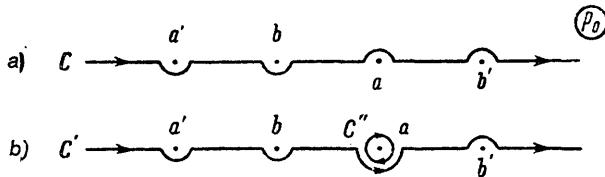


Fig. 21.

sumando a la vez la integral extendida a la pequeña circunferencia en torno del punto (fig. 21, b). El contorno C' se puede entonces siempre deformar arbitrariamente apartándolo de los polos, de modo que la integral a lo largo del mismo contribuye solamente a la parte regular de la función $\mathcal{P}(t)$. Ahora bien, para determinar el salto que buscamos basta considerar la integral a lo largo de la circunferencia C'' , lo que se reduce a calcular el residuo en el polo a . Esta operación puede realizarse efectuando en el integrando la sustitución:

$$\frac{1}{p_0^2 - \varepsilon^2} \rightarrow -2\pi i \delta(p_0^2 - \varepsilon^2) \quad (112.6)$$

* De manera análoga puede comprobarse que no existe un corte cuando $t = k^2 < 0$. Elijiendo en este caso como sistema de referencia aquél en que $k = (0, \mathbf{k})$, se encuentra para los polos del integrando los valores

$$p_0 = \pm(\varepsilon - i0), \quad p_0 = \pm(\sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + m^2} - i0).$$

Los dos polos inferiores se hallan en el semiplano p_0 a la derecha, y los dos superiores, en el semiplano a la izquierda, de modo que es imposible que ninguno de los polos puedan encontrarse el uno junto al otro.

(el signo — se debe a que la integración en torno del polo se efectúa en sentido negativo). En este caso debe tenerse en cuenta en el argumento de la función- δ tan sólo la raíz $p_0 = +\varepsilon$ (únicamente se rodea el polo a , no el a'); esa condición se tendrá en cuenta automáticamente si se conviene en efectuar la integración sólo en la mitad del 4-espacio de impulsos: $p_0 > 0$.

Después de efectuar la sustitución (112.6), el cálculo del salto de la integral $I(\mathbf{p}, k_0)$ es inmediato:

$$\begin{aligned}\Delta I &= \{I(\mathbf{p}, k_0 + i\delta) - I(\mathbf{p}, k_0 - i\delta)\}_{\delta \rightarrow +0} = \\ &= -2\pi i \int_0^\infty \delta(p_0^2 - \varepsilon^2) i\varphi(p_0, \mathbf{p}) \left[\frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 + i\delta} - \frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 - i\delta} \right] dp_0.\end{aligned}$$

Aplicando la igualdad

$$\frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 \pm i\delta} = P \frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2} \mp i\pi\delta [(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2]$$

[cf. (108.3)], obtendremos

$$\Delta I = i(2\pi i)^2 \int_0^\infty \delta(p_0^2 - \varepsilon^2) \delta[(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2] \varphi(p_0, \mathbf{p}) dp_0.$$

Los argumentos de las funciones- δ pueden escribirse en forma invariante restando y sumando a los mismos \mathbf{p}^2 :

$$p_0^2 - \varepsilon^2 = p^2 - m^2, \quad (k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 = (k - p)^2 - m^2.$$

Encontramos así en definitiva

$$\Delta \mathcal{P}(k^2) = i(2\pi i)^2 \int_{p_0 > 0} d^4 p \cdot \varphi(p) \delta(p^2 - m^2) \delta[(p - k)^2 - m^2]. \quad (112.7)$$

Teniendo en cuenta la existencia de las funciones- δ , la integración se efectúa de hecho únicamente en la intersección de las hipersuperficies

$$p^2 = m^2, \quad (p - k)^2 = m^2. \quad (112.8)$$

Dado que en este dominio todos los 4-vectores p son temporales, la condición de integrabilidad respecto de $p_0 > 0$ tiene un carácter invariante (hoja superior del como $p^2 = m^2$).

Comparemos (112.7) con la fórmula de partida (112.2). Se ve entonces que el salto de la función $\mathcal{P}(t)$ al atravesar el corte en el plano t se puede obtener si en la integral de Feynman de partida se efectúa el cambio

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i0} \rightarrow -2\pi i\delta(p^2 - m^2) \quad (112.9)$$

en los propagadores que corresponden a las líneas del lazo cortadas en el diagrama (110.1) (S. Mandelstam, 1958, R. Cutkosky, 1960).

Hay que hacer observar que las condiciones (112.8) determinan la región del espacio de impulsos en la cual las líneas de partículas virtuales en el diagrama corresponden a partículas reales (o, como suele decirse, los 4-impulsos p y $p - k$ se encuentran sobre la *superficie de masas*). Resulta aquí evidente la relación con el método basado en la condición de unitariedad, método en el que precisamente estas líneas se substituían por líneas de partículas reales de un estado intermedio.

Vemos también la razón matemática de que no diverja la parte imaginaria del diagrama: ésta se determina por integración en una región finita de la superficie de masas, en vez de por una integración extendida al 4-espacio infinito de impulsos en la integral de Feynman de partida.

Para obtener ahora apoyándonos en (112.7) la fórmula deducida en el § 110, pasemos al sistema de referencia en el cual $k = 0$ e integremos respecto de

$$d^4p = |\mathbf{p}| \epsilon d\epsilon dp_0 do.$$

Dicha integración se reduce a la supresión de funciones- δ . Se tiene

$$\delta(p^2 - m^2) dp_0 = \delta(p_0^2 - \epsilon^2) dp_0 \rightarrow \frac{1}{2\epsilon} \delta(p_0 - \epsilon) dp_0,$$

y luego, para la segunda función- δ :

$$\begin{aligned} \delta[(p - k)^2 - m^2] d\epsilon &= \delta[(p_0 - k_0)^2 - \epsilon^2] d\epsilon = \\ &= \delta(-2\epsilon k_0 + k_0^2) d\epsilon \rightarrow \frac{1}{2k_0} \delta\left(\epsilon - \frac{k_0}{2}\right) d\epsilon. \end{aligned}$$

El resultado que se obtiene es

$$\Delta\mathcal{P}(t) = -\frac{i\pi^2}{2} \int \sqrt{\frac{t-4m^2}{t}} \varphi(\epsilon, p) do, \quad (112.10)$$

donde $t = k^2 = k_0^2$ y el valor de la función φ se toma para

$$p_0 = \epsilon = \frac{k_0}{2}, \quad p^2 = \epsilon^2 - m^2 = \frac{k_0^2}{4} - m^2,$$

con lo cual

$$\varphi(e, p) = \frac{e^2}{3\pi^3} (2m^2 + t)$$

y no depende del ángulo. Por lo tanto, la integración respecto de $d\sigma$ se reduce a multiplicar por 4π y volvemos así a (110.8)

En el razonamiento expuesto es esencial únicamente el hecho de que el diagrama se descompone en dos partes por simple corte de dos líneas. En consecuencia, la regla formulada conserva su validez también para los diagramas constituidos por pares arbitrarios de bloques unidos por dos líneas (de electrón o de fotón). La integral calculada mediante la sustitución (112.9) determina, en estas condiciones, la contribución a la parte imaginaria del diagrama, que en el método basado en la condición de unitariedad está ligada con los correspondientes estados intermedios de dos partículas.

§ 113. Factores de forma electromagnéticos del electrón

Consideremos el operador vértice $\Gamma^\mu = \Gamma^\mu(p_2, p_1; k)$ en el caso en que dos líneas de electrón son exteriores, y la de fotón, interior. A las líneas exteriores de electrón corresponden los factores $u_1 = u(p_1)$ y $u_2 = u(p_2)$, de modo que Γ aparece en la expresión del diagrama en forma de producto

$$j_{fi}^\mu = \bar{u}_2 \Gamma^\mu u_1. \quad (113.1)$$

Como ya se hizo notar en el § 108, dicha expresión representa la corriente de transición de electrón teniendo en cuenta las correcciones por radiación. Las condiciones de invariancia relativista y de contraste permiten establecer la forma general de la estructura matricial de esta corriente.

El operador de interacción electromagnética $V = e(\mathbf{j} \cdot \mathbf{A})$ es un escalar en sentido estricto (y no un pseudoescalar), lo que expresa la conservación de la paridad espacial en estas interacciones. Por consiguiente, la corriente de transición j_{fi} es un 4-vector en sentido estricto (y no un pseudovector). Por lo tanto, ésta puede expresarse únicamente en función de 4-vectores que también lo sean en sentido estricto formados a partir de los dos 4-vectores de que disponemos, p_1 y p_2 (el tercero $k = p_2 - p_1$), y de los bispinores u_1 y u_2 . Bilineales respecto de u_2 y u_1 , hay solamente tres 4-vectores de este tipo independientes:

$$\bar{u}_2 \gamma u_1, \quad (\bar{u}_2 u_1) p_1, \quad (\bar{u}_2 u_1) p_2,$$

o lo que es lo mismo

$$\bar{u}_2 \gamma u_1, \quad (\bar{u}_2 u_1) P, \quad (\bar{u}_2 u_1) k, \quad (113.2)$$

donde $P = p_1 + p_2$. Pero la condición de invariancia de contraste exige que la

corriente de transición sea transversal al 4-impulso del fotón k :

$$j_{fi} k = 0.$$

Esta condición la satisfacen los dos primeros de los 4-vectores (113.2): el primero en virtud de las ecuaciones de Dirac

$$(\hat{p}_1 - m) u_1 = 0, \quad \bar{u}_2 (\hat{p}_2 - m) = 0, \quad (113.4)$$

y el segundo, debido a que $Pk = 0$. La corriente j_{fi} es combinación lineal de estos dos 4-vectores:

$$j_{fi}^\mu = f_1 (\bar{u}_2 u_1) P^\mu + f_2 (\bar{u}_2 \gamma^\mu u_1),$$

donde f_1, f_2 son funciones invariantes; se les llama *factores de forma electromagnéticos* del electrón.

Dado que los 4-impulsos p_1 y p_2 se refieren a un electrón libre, se tiene $p_1^2 = p_2^2 = m^2$ y a partir de los 4-vectores p_1, p_2, k (ligados por la igualdad $k = p_2 - p_1$) se puede formar tan sólo una variable escalar independiente, para la que elegimos k^2 . Los factores de forma son entonces funciones de k^2 .

La corriente se puede representar también de otras maneras eligiendo convenientemente los dos términos independientes. Utilizando las igualdades (113.4) y la regla de conmutación de las matrices γ , es fácil comprobar que

$$(\bar{u}_2 \sigma^{\mu\nu} u_1) k_\nu = -2m (\bar{u}_2 \gamma^\mu u_1) + (\bar{u}_2 u_1) P^\mu, \quad (113.5)$$

donde $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu \pm \gamma^\nu \gamma^\mu)$. El coeficiente que corresponde a tal término posee, conforme se verá, un importante significado físico, por lo que haremos

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu f(k^2) - \frac{1}{2m} g(k^2) \sigma^{\mu\nu} k_\nu, \quad (113.6)$$

donde f, g son otros dos factores de forma; la razón de dividir por $\frac{1}{2}m$ se pondrá de manifiesto más adelante *. Para abreviar escribimos, en vez de la corriente, el operador vértice, sobrentendiendo con ello que habrá que colocarlo luego entre $\bar{u}_2 \dots u_1$.

Para poner de manifiesto las propiedades de los factores de forma, consideremos el diagrama (107.16) correspondiente al proceso de interacción de un electrón con un campo exterior. La amplitud de dispersión asociada es

* Para evitar malentendidos recordaremos que en la definición (113.6) se supone que k es el 4-impulso de la línea de fotón que incide en el vértice; para la línea que sale del mismo, el signo del segundo término sería el opuesto.

$$M_{fi} = -e j_{fi}^{\mu} \mathcal{A}_{\mu}^{(e)}(k), \quad (113.7)$$

donde $\mathcal{A}_{\mu}^{(e)}$ es el campo exterior efectivo (teniendo en cuenta la polarización del vacío).

La amplitud (113.7) describe dos canales de reacción. En el canal de dispersión, la variable invariante es tal que

$$t = k^2 = (p_2 - p_1)^2 \leq 0.$$

En cambio, al substituir $p_2 \rightarrow p_-$, $p_1 \rightarrow -p_+$ pasamos al canal de aniquilación, que corresponde a la creación de un par con los 4-impulsos p_- y p_+ . En este canal

$$t = (p_- + p_+)^2 \geq 4m^2.$$

En cuanto al dominio de valores $0 < t < 4m^2$, este intervalo es no físico.

Pasemos a la condición de unitariedad (108.12). En el canal de dispersión ($t < 0$) no existen en el presente caso estados intermedios físicos: un electrón libre no puede cambiar su impulso o dar lugar a cualquier otra partícula. Tampoco los hay, naturalmente, en la región no física. Por lo tanto, cuando $t < 4m^2$ el segundo miembro de la igualdad (108.12) desaparece, con lo cual la matriz T_{fi} (o, lo que es lo mismo, la M_{fi}) es hermítica:

$$M_{fi} = M_{if}^*.$$

La permutación de los estados inicial y final equivale a la permutación de p_2 y p_1 y, por consiguiente, a la substitución $k \rightarrow -k$. Representando M_{fi} en la forma (113.7), tenemos así

$$j_{fi}^{\mu} \mathcal{A}_{\mu}^{(e)}(k) = j_{if}^{\mu*} \mathcal{A}_{\mu}^{(e)*}(-k).$$

Pero $\mathcal{A}^{(e)}(-k) = \mathcal{A}^{(e)*}(k)$, con lo que de aquí se sigue que la matriz de tales transiciones es también hermítica

$$j_{fi} = j_{if}^* \quad \text{para } t < 4m^2. \quad (113.8)$$

Aplicando las propiedades de las matrices γ (21.7), es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} (\bar{u}_2 \gamma^{\mu} u_1) &= (\bar{u}_1 \gamma^{\mu} u_2)^*, \\ (\bar{u}_2 \sigma^{\mu\nu} u_1) &= -(\bar{u}_1 \sigma^{\mu\nu} u_2)^*. \end{aligned}$$

Por ello j_{fi}^* difiere de j_{fi} tan sólo en la substitución de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ por sus conjugadas complejas, y de la igualdad (113.8) se sigue entonces que dichas funciones son reales. Así, pues,

$$\operatorname{Im} f(t) = \operatorname{Im} g(t) = 0 \quad \text{para } t < 4m^2. \quad (113.9)$$

En cambio, en el canal de aniquilación ($t > 4m^2$) el estado f es el de un par que puede transformarse en otro igual con diferentes impulsos (dispersión elástica) o en cualquier sistema más complicado. En consecuencia, el segundo miembro de la condición de unitariedad es diferente de cero y la matriz M_{fi} (y junto con ella la j_{fi}) no es hermítica, lo que trae consigo que los factores de forma sean complejos.

Las propiedades analíticas de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ son del todo análogas a las propiedades de la función $\mathcal{P}(t)$ que se estudiaron en el § 108 (aunque esto resulta difícil de demostrar siguiendo un método tan directo como en aquel caso). Estas funciones son analíticas en el plano complejo t cortado a lo largo del semieje real positivo $t > 4m^2$ y se tiene, además,

$$f^*(t) = f(t^*), \quad g^*(t) = g(t^*).$$

La condición de renormalización (107.19), aplicada al operador vértice (113.6), conduce a la de que sea

$$f(0) = 1. \quad (113.10)$$

Para tener en cuenta automáticamente esta condición [en el cálculo de la función $f(t)$ a partir de su parte imaginaria], hay que aplicar una relación de dispersión de la forma (108.8) no a la propia función $f(t)$, sino a la $(f - 1)/t$. Se obtiene entonces una relación de dispersión «con una substracción»:

$$f(t) - 1 = \frac{t}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(t')}{t'(t' - t - i0)} dt'. \quad (113.11)$$

En cambio, al factor de forma $g(t)$ no se impone ningún valor por motivos físicos a priori. Por ello, la relación de dispersión correspondiente se escribe «sin substracción»:

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} g(t')}{t' - t - i0} dt'. \quad (113.12)$$

El valor $g(0)$ tiene un importante significado físico: da lugar a una corrección al momento magnético del electrón. Para comprobarlo, consideremos la dispersión de un electrón no relativista en un campo magnético independiente del tiempo que cambia lentamente en el espacio.

El término en la amplitud de dispersión (113.7) correspondiente al factor de forma $g(k^2)$ puede escribirse

$$\delta M_{fi} = \frac{e}{2m} g(k^2) (\bar{u}_2 \sigma^{\mu\nu} u_1) k_\nu A_\mu^{(e)}(k). \quad (113.13)$$

Para un campo puramente magnético se tiene $A^{(e)\mu} = (0, \mathbf{A})$; que el campo sea independiente del tiempo significa que el 4-vector $k^\mu = (0, \mathbf{k})$, y a la condición de que varíe lentamente en el espacio corresponden valores pequeños de \mathbf{k} [con vistas a pasar luego al límite $\mathbf{k} \rightarrow 0$, ya desde ahora escribimos en (113.13) $A^{(e)}$ en vez del valor efectivo $\mathcal{A}^{(e)}$]. Desarrollando la expresión (113.13) y expresándola en función de magnitudes tridimensionales, se obtendrá

$$\delta M_{fi} = \frac{e}{2m} g(-\mathbf{k}^2) (\bar{u}_2 \Sigma u_1) i[\mathbf{k} \times \mathbf{A}_k],$$

donde Σ es la matriz (21.21). El producto $i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_k$ lo substituiremos por el campo magnético \mathbf{H}_k , y a continuación se puede pasar al límite $\mathbf{k} \rightarrow 0$. Por último, introduciendo las amplitudes espinoriales no relativistas w_1, w_2 de acuerdo con (23.12):

$$\bar{u}_2 = \sqrt{2m} (w_2^* 0), \quad u_1 = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se encuentra finalmente

$$\delta M_{fi} = \frac{e}{2m} g(0) \mathbf{H}_k \cdot 2m (w_2^* \sigma w_1). \quad (113.14)$$

Comparemos esta expresión con la amplitud de dispersión en un campo eléctrico constante definido por el potencial escalar Φ_k :

$$M_{fi} = -e(\bar{u}_2 \gamma^0 u_1) \Phi_k \approx -e \Phi_k \cdot 2m (w_2^* w_1).$$

Vemos entonces que a un electrón en un campo magnético se le puede atribuir una energía potencial adicional

$$-\frac{e}{2m} g(0) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H}_k.$$

Esto significa que el electrón posee un momento magnético «anómalo»

$$\mu' = \frac{e\hbar}{2mc} g(0) \quad (113.15)$$

(unidades ordinarias) además del momento magnético de Dirac «normal» $e\hbar/2mc$.

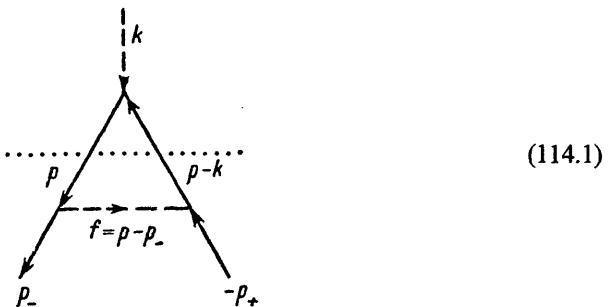
§ 114. Cálculo de los factores de forma del electrón

Pasemos ahora al cálculo de los factores de forma del electrón (*J. Schwinger, 1949*).

En la aproximación de orden cero de la teoría de perturbaciones, el operador vértice $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$, es decir, los factores de forma del electrón son entonces

$$f = 1, \quad g = 0.$$

La primera corrección por radiación a tales factores viene determinada por el diagrama vértice



(con dos terminales de electrón reales y un terminal virtual de fotón). Comencemos por calcular las partes imaginarias de los factores de forma. Conforme se demostró en el párrafo precedente, dichas partes son diferentes de cero únicamente en el canal de aniquilación ($k^2 > 4m^2$); de acuerdo con esto, los 4-impulsos de los terminales de electrón en el diagrama (114.1) corresponden a la creación de un electrón y un positón y se representan por p_- y $-p_+$. La expresión analítica del diagrama (114.1) es:

$$\begin{aligned} -ie\bar{u}(p_-)\Gamma^\mu u(-p_+) &= \\ = (-ie)^3 \bar{u}(p_-)\gamma^\nu i \int G(p)\gamma^\mu G(p-k)\gamma^\nu D_{\mu\nu}(f) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} & \end{aligned} \quad (114.2)$$

o en forma explícita,

$$\gamma^\mu f(k^2) - \frac{1}{2m} g(k^2) \sigma^{\mu\nu} k_\nu = \int \frac{i\phi^\mu(p) d^4 p}{(p^2 - m^2) [(p - k)^2 - m^2]}, \quad (114.3)$$

donde se ha hecho

$$\Phi^\mu(p) = -e^2 \frac{\gamma^\nu(\hat{p} + m)\gamma^\mu(\hat{p} - \vec{k} + m)\gamma_\nu}{4\pi^3(p_- - p)^2} \quad (114.4)$$

y, para simplificar, se ha prescindido de los factores $\bar{u}(p_-)\dots u(p_+)$; en todo lo que sigue se supone que los dos miembros de una igualdad quedan multiplicados a izquierda y derecha por dichos factores.

La línea punteada horizontal en el diagrama (114.1) lo divide en dos partes, de tal manera que quede de manifiesto el estado intermedio que figuraría al calcular la parte imaginaria de un factor de forma de acuerdo con la condición de unitariedad: este estado es el de un par electrón-positón con impulsos diferentes de p_- , p_+ . Este mismo corte muestra dónde debe efectuarse en la integral (114.2) la sustitución de los factores que contienen un polo, si se lleva a cabo el cálculo de acuerdo con la regla (112.9) [en (114.3) estos factores se han separado en el integrando].

La integral en (114.3) es exactamente de la misma forma que en (112.2). Por ello, podemos escribir sin más el resultado de la transformación de acuerdo con (112.10), saltando las etapas intermedias:

$$2\gamma^\mu \operatorname{Im} f(t) - \frac{2}{2m} \sigma^{\mu\nu} k_\nu \operatorname{Im} g(t) = -\frac{\pi^2}{2} \sqrt{\frac{t-4m^2}{t}} \int \varphi^\mu(p) d\omega_p, \quad (114.5)$$

donde $t = k^2$, la integración se efectúa en la dirección del vector \mathbf{p} y los 4-vectores $p'_- \equiv p$ y $p'_+ \equiv k - p$ en la definición de la función $\varphi^\mu(p)$ (114.4) pasan a ser los 4-impulsos de partículas reales (no ya de partículas virtuales). La expresión (114.5) corresponde al sistema de referencia en el que $\mathbf{k} = 0$; este sistema es el del centro de masa del par creado p_- , p_+ (y, por consiguiente, también del par «intermedio» p'_- , p'_+). En este sistema, por lo tanto,

$$k = (k_0, 0), \quad p_- = \left(\frac{k_0}{2}, \mathbf{p}_- \right), \quad p_+ = \left(\frac{k_0}{2}, -\mathbf{p}_- \right), \quad p = \left(\frac{k_0}{2}, \mathbf{p} \right),$$

y es fácil comprobar que

$$f^2 = (p - p_-)^2 = -2p^2(1 - \cos \theta) = -\frac{t - 4m^2}{2}(1 - \cos \theta), \quad (114.6)$$

donde θ es el ángulo formado por \mathbf{p} y \mathbf{p}_- . Substituyendo (114.4) en (114.5) y eliminando en el integrando las matrices $\gamma^v \dots \gamma_v$ mediante las fórmulas (22.6), obtendremos

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \operatorname{Im} f(t) - \frac{1}{2m} \sigma^{\mu\nu} k_\nu \operatorname{Im} g(t) &= \\ &= -\frac{e^2}{4\sqrt{t(t-4m^2)}} \int \frac{d\omega_p}{2\pi(1-\cos\theta)} \gamma^\nu (\hat{p} + m) \gamma^\mu (\hat{p} - \mathbf{k} + m) \gamma_\nu = \\ &= -\frac{e^2}{4\sqrt{t(t-4m^2)}} \int \frac{d\omega_f}{2\pi(1-\cos\theta)} [-2m^2 \gamma^\mu + 4m(P^\mu + 2f^\mu) + \\ &\quad + 2(\hat{p}_+ - \hat{f}) \gamma^\mu (\hat{p}_- + \hat{f})], \end{aligned} \quad (114.7)$$

donde se han introducido los 4-vectores

$$f = p - p_- = (0, \mathbf{f}), \quad P = p_- - p_+ = (0, 2\mathbf{p}_-). \quad (114.8)$$

La integración se reduce ahora al cálculo de las integrales

$$(I, I^\mu, I^{\mu\nu}) = \int \frac{(1, f^\mu, f^\mu f^\nu)}{1 - \cos \theta} \frac{d\sigma_f}{2\pi} \quad (114.9)$$

con cada uno de los tres numeradores indicados.

La integral I diverge logarítmicamente cuando $\theta \rightarrow 0$. Escribiéndola en la forma

$$I = \int_0^{t-4m^2} \frac{d(f^2)}{f^2} = \int_0^{-(t-4m^2)} \frac{d(f^2)}{f^2},$$

vemos que la divergencia corresponde a «masas» pequeñas del fotón virtual. Así, pues, se trata de una divergencia en el «infrarrojo». Aplazamos el análisis detallado de la misma hasta el § 119. Haremos notar aquí solamente que se trata de una divergencia ficticia, en el sentido de que si se tienen en cuenta de manera correcta todos los efectos físicos, tales divergencias se compensan entre sí y desaparecen. Podemos por esto «cortar» la integral en su límite inferior de manera arbitraria y, luego, al calcular los fenómenos físicos reales, hacer que este límite de corte tienda a cero.

Lo más fácil aquí será efectuar el corte de manera relativísticamente invariante. Para ello atribuiremos al fotón virtual f una masa λ pequeña, pero no nula ($\lambda \ll m$), es decir, en el propagador de fotón $D(f^2)$ que aparece en (114.2) se substituye

$$f^2 \rightarrow f^2 - \lambda^2. \quad (114.10)$$

Hecho esto, tendremos

$$I = \int_0^{-(t-4m^2)} \frac{d(f^2)}{f^2 - \lambda^2} = \ln \frac{t - 4m^2}{\lambda^2}. \quad (114.11)$$

La integral I^μ , en la que f^μ es un 4-vector espacial, debe expresarse en función del 4-vector P^μ , puesto que de los dos 4-vectores de que disponemos, P^μ y k^μ , es espacial (para p_+ , p_- arbitrario) solamente P^μ . En consecuencia, $I^\mu = AP^\mu$. Multiplicando esta igualdad por P_μ y calculando la integral $P_\mu I^\mu$ en el sistema del centro de masa del par [las componentes de los 4-vectores f y P vienen dadas por (114.8)], se encuentra

$$A = \frac{1}{2p^2} \int_{-1}^1 \frac{q \cdot p d \cos \theta}{1 - \cos \theta} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d \cos \theta = -1.$$

Así, pues,

$$I^\mu = - P^\mu. \quad (114.12)$$

De manera análoga se calcula la integral

$$I^{\mu\nu} = \frac{1}{4} P^2 \left(g^{\mu\nu} - \frac{P^\mu P^\nu}{P^2} \right) + \frac{1}{4} P^\mu P^\nu \quad (114.13)$$

(para determinar los coeficientes en esta expresión basta calcular las integrales I_μ^μ y $I^{\mu\nu} P_\mu P_\nu$).

El cálculo se efectúa luego de la siguiente manera. Substituyendo (114.11-13) en (114.7), aparecerá entre los factores a la izquierda y a la derecha $\bar{u}(p_-) \dots u(-p_+)$ la suma de una serie de términos. En cada uno de ellos «desplazaremos» (mediante las reglas de conmutación de las matrices γ^μ) el factor \hat{p}_+ hacia la derecha, y el \hat{p}_- , hacia la izquierda, después de lo cual se puede substituir $\hat{p}_- \rightarrow m$, $\hat{p}_+ \rightarrow -m$, puesto que

$$\bar{u}(p_-) \hat{p}_- = m \bar{u}(p_-), \quad \hat{p}_+ u(-p_+) = -m u(-p_+).$$

En la suma que se obtiene como resultado

$$- 4(p_+ p_-) I \gamma^\mu + 2m P^\mu - 3P^2 \gamma^\mu$$

puede substituirse aún P^μ por la expresión equivalente (entre los factores),

$$P^\mu \rightarrow 2m \gamma^\mu + \sigma^{\mu\nu} k_\nu$$

[cf. (113.5)]. Finalmente, expresando todas las magnitudes en función del invariante $t = k^2$ ($2p_+ p_- = t - 2m^2$, $P^2 = 4m^2 - t$) y comparando luego los dos miembros de la igualdad (114.7), obtendremos la siguiente fórmula para las partes imaginarias de los factores de forma:

$$\operatorname{Im} g(t) = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{t(t-4m^2)}}, \quad (114.14)$$

$$\operatorname{Im} f(t) = \frac{\alpha}{4\sqrt{t(t-4m^2)}} \left[-3t + 8m^2 + 2(t-2m^2) \ln \frac{t-4m^2}{\lambda^2} \right]. \quad (114.15)$$

La divergencia en el infrarrojo se presenta solamente en $\operatorname{Im} f(t)$.

En cuanto a las propias funciones $f(t)$ y $g(t)$, éstas se calculan a partir de sus partes imaginarias mediante las fórmulas (113.11-12). La integración en estas fórmulas conviene efectuarla con ayuda de las mismas sustituciones que se utilizaron en el § 110 al calcular $\mathcal{P}(t)$. Expresados en función de la variable ξ (110.11), los factores de forma se determinan mediante las fórmulas

$$g(\xi) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\xi \ln \xi}{\xi^2 - 1}, \quad (114.16)$$

$$\begin{aligned} f(\xi) - 1 = & \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ 2 \left(1 + \frac{1 + \xi^2}{1 - \xi^2} \ln \xi \right) \ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3(1 + \xi^2) + 2\xi}{2(1 - \xi^2)} \ln \xi + \right. \\ & \left. + \frac{1 + \xi^2}{1 - \xi^2} \left[\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \ln^2 \xi - 2F(\xi) + 2 \ln \xi \ln(1 + \xi) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (114.17)$$

donde $F(\xi)$ es la función de Spence definida por (127.19).

En el dominio no físico ($0 < t/m^2 < 4$) hay que hacer $\xi = e^{i\varphi}$. Las expresiones para los factores de forma pueden entonces reducirse a las siguientes:

$$f(\varphi) = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \left(1 - \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \ln \frac{m}{\lambda} + \frac{3 \cos \varphi + 1}{2 \sin \varphi} \varphi + \frac{2}{\operatorname{tg} \varphi} \int_0^{\varphi/2} \xi \operatorname{tg} \xi d\xi \right\}, \quad (114.18)$$

$$g(\varphi) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\varphi}{\sin \varphi}. \quad (114.19)$$

Finalmente, he aquí las fórmulas límite para valores de $|t|$ pequeños:

$$\left. \begin{aligned} f(t) - 1 &= \frac{\alpha t}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} \right), \quad |t| \ll 4m^2, \\ g(t) &= \frac{\alpha}{2\pi}, \end{aligned} \right\} \quad (114.20)$$

y para valores de $|t|$ grandes:

$$f(t) - 1 = -\frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \ln^2 \frac{|t|}{m^2} + 2 \ln \frac{m}{\lambda} \ln \frac{|t|}{m^2} \right) + \left\{ \begin{array}{ll} i \frac{\alpha}{2} \ln \frac{t}{\lambda^2}, & t \gg 4m^2, \\ 0 & -t \gg 4m^2, \end{array} \right. \quad (114.21)$$

$$g(t) = -\frac{\alpha m^2}{\pi t} \ln \frac{|t|}{m^2} + \left\{ \begin{array}{ll} i \frac{\alpha m^2}{t}, & t \gg 4m^2, \\ 0, & -t \gg 4m^2. \end{array} \right. \quad (114.22)$$

La fórmula (114.21) es válida (en relación con $\operatorname{Re} f$), conforme suele decirse, con precisión logarítmica doble, esto es, con una precisión que alcanza hasta los cuadros de logaritmos que son grandes *.

* La expresión para el operador vértice en el caso de un terminal virtual y de un terminal real de electrón, y de un terminal de fotón real puede verse en A. I. Ajiezer, V. B. Berestetskii, *Kvantovaya elektrodinamika*, 3.^a ed., «Nauka», 1969, § 36, pág. 505.

§ 115. Momento magnético anómalo del electrón

Conforme se indicó ya en el § 113, el valor $g(0)$ determina la corrección radiativa al momento magnético del electrón. Si se persigue únicamente como fin el cálculo de esta cantidad, el de la función $g(t)$, naturalmente, no es necesario. De (114.14) y (114.12) se deduce

$$g(0) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\ln g(t')}{t'} dt' = \frac{a}{4\pi} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2} \sqrt{x-1}} = \frac{a}{2\pi}. \quad (115.1)$$

Teniendo en cuenta esta corrección, el momento magnético del electrón es

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} \left(1 + \frac{a}{2\pi} \right). \quad (115.2)$$

El primero en obtener esta fórmula fue *Schwinger* (1949).

En la aproximación siguiente ($\sim \alpha^2$) las correcciones por radiación en los factores de forma vienen representadas por los siete diagramas (103.10, *c-i*). Incluso la mera determinación del valor de $g(0)$ en esta aproximación exige cálculos muy complicados. Remitimos al lector para los detalles del cálculo a los artículos originales y nos limitaremos a dar el valor final de la corrección de segunda aproximación *:

$$g^{(2)}(0) = \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \left(\frac{197}{144} + \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + \frac{3}{4} \zeta(3) \right) = -0,328 \frac{a^2}{\pi^2}, \quad (115.3)$$

de modo que el momento magnético del electrón se escribe

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} \left(1 + \frac{a}{2\pi} - 0,328 \frac{a^2}{\pi^2} \right). \quad (115.4)$$

Examinemos, en especial, la contribución de la polarización del vacío a la corrección $g^{(2)}(0)$. Dicha contribución viene representada por el diagrama



* Véanse C. Sommerfeld, Phys. Rev. 107, 328 (1957); Ann. Phys. 5, 26 (1958) y A. Peterman, Helv. Phys. Acta 30, 409 (1957). La realización de los cálculos siguiendo el método basado en la unitariedad puede verse en M. V. Terent'ev, ZhETF 43, 619 (1962).

que contiene una parte de energía propia de fotón. Este diagrama difiere del diagrama (114.1) de primera aproximación únicamente en que en vez del propagador de fotón $D(f^2) = 4\pi/f^2$ aparece en él el producto

$$D(f^2) \frac{\mathcal{P}(f^2)}{4\pi} D(f^2) = \frac{4\pi}{f^2} \frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2},$$

donde $\mathcal{P}(f^2)$ es el operador polarización calculado en el § 110 en primera ($\sim \alpha$) aproximación. Repitiendo en parte, con esta modificación, los cálculos efectuados en el párrafo precedente, obtendremos para la «parte de polarización» de la corrección

$$\operatorname{Im} g_{\text{polar}}^{(2)}(t) = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{t(t-4m^2)}} \int_{-1}^1 \frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2} \frac{1+3\cos\theta}{2} d\cos\theta, \quad (115.6)$$

donde

$$f^2 = -\frac{t-4m^2}{2}(1-\cos\theta) \quad (115.7)$$

[cf. (114.6)]. El cálculo de esta integral, y luego el de la integral

$$g_{\text{polar}}^{(2)}(0) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \operatorname{Im} g_{\text{polar}}^{(2)}(t') \frac{dt'}{t'} \quad (115.8)$$

conduce al valor

$$g_{\text{polar}}^{(2)}(0) = \frac{\alpha^2}{\pi^2} \left(\frac{119}{36} - \frac{\pi^2}{3} \right) = 0,016 \frac{\alpha^2}{\pi^2}; \quad (115.9)$$

esta corrección representa $\sim 5\%$ del valor total (115.3).

Hicimos ya notar (al final del § 111) que a una determinada contribución a las correcciones radiativas pueden conducir también los efectos de polarización del vacío de otras partículas. La contribución del vacío muónico al momento magnético anómalo del electrón se obtendrá mediante las mismas fórmulas (115.6-8), en las que (en particular, en la definición de la variable f^2) m es como antes la masa del electrón (m_e), mientras que para el parámetro m , que interviene en la expresión de la función $\mathcal{P}(f^2)$, debe tomarse la masa del muón (m_μ). $\mathcal{P}(f^2)/f^2$ es función solamente de la razón f^2/m_μ^2 . En la integral (115.8), por otra parte, es esencial el dominio de valores t (y, por consiguiente, de f^2) comparables con m_e^2 ; por consiguiente, la

razón $f^2/m_\mu^2 \sim (m_e/m_\mu)^2 \ll 1$ y para estimar las integrales cabe utilizar la fórmula límite (110.14), según la cual

$$\frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2} = -\frac{\alpha}{15\pi} \frac{f^2}{m_\mu^2}.$$

Se ve así que la contribución en $g^{(2)}(0)$ ligada con la polarización del vacío muónico contiene un pequeño factor más $(m_e/m_\mu)^2$.

La situación opuesta se presenta, sin embargo, en la aplicación al momento magnético del muón. Dado que en (115.3) no interviene la masa de la partícula, este valor $g^{(2)}(0)$ es también aplicable al muón, teniendo en cuenta en él la contribución de la polarización del propio vacío muónico. Pero la contribución de la polarización del vacío de otras partículas —de los electrones— resulta en este caso considerablemente mayor. Se calcula mediante las fórmulas (115.6-8), en las que hay que substituir ahora $m \rightarrow m_\mu$, mientras que para $\mathcal{P}(t)$ hay que tomar el operador de polarización del electrón. En contraste con el caso anterior, en el presente será esencial el intervalo de valores $f^2/m_e^2 \sim (m_\mu/m_e)^2 \gg 1$ y para $\mathcal{P}(f^2)$ hay que tomar la expresión límite (110.15):

$$\frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2} = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|f^2|}{m_e^2}.$$

El cálculo de las integrales conduce al valor

$$[g^{(2)}(0)]_{\substack{\text{polar} \\ \text{electr}}} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{3} \ln \frac{m_\mu}{m_e} - \frac{25}{36}\right) = 1,09 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \quad (115.10)$$

(H. Suura, E. H. Wichman, 1957; A. Peterman, 1957).

Sumando con (115.3), se obtendrá para el momento magnético del muón

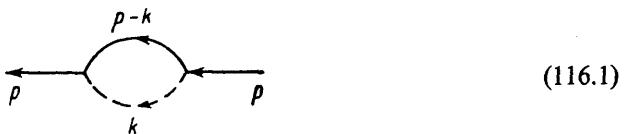
$$\mu_{\text{muón}} = \frac{e\hbar}{2m_\mu c} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + 0,76 \frac{\alpha^2}{\pi^2}\right). \quad (115.11)$$

Haremos notar que la contribución de la polarización del vacío muónico (115.9) representa aquí $\sim 2\%$ de todo el valor de $g^{(2)}(0)$. Una contribución de este mismo orden (visto que las masas son parecidas) la proporcionaría también la polarización del vacío piónico, que en modo alguno se puede calcular exactamente. Por esta razón, no tendría ya sentido calcular la corrección $\sim \alpha^3$ al momento magnético del muón *.

* Por descontado, no es evidente que sea en general admisible el cálculo de las correcciones al momento magnético del muón suponiendo la plena aplicabilidad al mismo de la electrodinámica cuántica actual.

§ 116. Cálculo del operador de masa

Tomando como ejemplo el cálculo del operador de masa, pondremos de manifiesto el método de regularización directa de las integrales de Feynman. En la primera aproximación no nula el operador másico se representa por un lazo en el diagrama



A él corresponde la integral

$$-i\bar{\mathcal{M}}(p) = (-ie)^2 \int \gamma^\mu G(p-k) \gamma^\nu D_{\mu\nu}(k) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4};$$

substituyendo los propagadores y desplazando los factores $\gamma^\mu \dots \gamma_\mu$ mediante las fórmulas (22.6), obtendremos

$$\bar{\mathcal{M}}(p) = -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4} e^2 \int \frac{2m - \hat{p} + \hat{k}}{[(p-k)^2 - m^2] (k^2 - \lambda^2)} d^4 k \quad (116.2)$$

(con el trazo sobre la letra \mathcal{M} designamos el valor no regularizado de la integral). En el propagador de fotón se ha introducido la «masa de fotón» ficticia λ para evitar (al igual que en el § 14) la divergencia en el infrarrojo.

Transformemos la integral valiéndonos de la fórmula (127.4), tomando en ella para a_1 y a_2 los dos factores en el denominador de (116.2). Después de una simple reagrupación de términos en el denominador de la nueva integral, obtendremos

$$\bar{\mathcal{M}}(p) = -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4} e^2 \int d^4 k \int_0^1 dx \frac{2m - \hat{p} + \hat{k}}{[(k - px)^2 - a^2]^2}, \quad (116.3)$$

donde

$$a^2 = m^2 x^2 - (p^2 - m^2) x (1-x) + \lambda^2 (1-x). \quad (116.4)$$

El cambio de variable $k \rightarrow k + px$ reduce la integral (116.3) a una forma en la que el denominador depende solamente del cuadrado k^2 . Sin embargo, en tal caso, y de acuerdo con (127.17-18), a la integral se añade una constante aditiva:

$$\bar{\mathcal{M}}(p) = -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4} e^2 \left\{ \int d^4 k \int_0^1 dx \frac{2m - \hat{p} (1-x)}{(k^2 - a^2)^2} - \frac{i\pi^2}{4} \hat{p} \right\} \quad (116.5)$$

[se ha prescindido del término que contiene \hat{k} en el numerador, puesto que se anula al integrar respecto de las direcciones del 4-vector k , cf. (127.8)].

La regularización de esta integral consiste en efectuar aquellas substracciones que la conducirían a una expresión de la forma (107.20). Esta última se distingue, ante todo, por el hecho de que si p es el 4-impulso de un electrón real, al multiplicar por la amplitud de onda $u(p)$ se anula. Sin introducir $u(p)$ explícitamente, cabe formular esta condición como la de imponer a $\mathcal{M}(p)$ su anulación al aplicar el cambio

$$\hat{p} \rightarrow m, \quad p^2 \rightarrow m^2. \quad (116.6)$$

La forma de la integral (116.5) resulta particularmente cómoda en este caso debido a que el 4-vector p aparece en ella solamente en las combinaciones p y p^2 (mientras que no figuran en la misma términos del tipo kp).

Substrayendo de (116.5) la misma expresión una vez aplicada la sustitución (116.6), se obtendrá

$$\begin{aligned} & \frac{-8\pi i}{(2\pi)^4} \left\{ \int d^4k \int_0^1 dx \cdot [2m - \hat{p}(1-x)] \left[\frac{1}{(k^2 - a^2)^2} - \frac{1}{(k^2 - a_0^2)^2} \right] - \right. \\ & \left. - \int d^4k \int_0^1 dx \frac{1-x}{(k^2 - a_0^2)^2} (\hat{p} - m) - \frac{i\pi^2}{4} (\hat{p} - m) \right\}, \quad (116.7) \end{aligned}$$

donde

$$a_0^2 = m^2 x^2 + \lambda^2 (1-x).$$

Con todo, para la regularización definitiva hay que llevar a cabo otra substracción más: según (107.20), en virtud de la sustitución (116.6) debe anularse no solamente $\mathcal{M}(p)$ en conjunto, sino también sin el factor $\hat{p} - m$. Con la correspondiente substracción desaparecen por completo los términos segundo y tercero entre llaves en (116.7) *. En cuanto a la primera integral, previamente la transformaremos introduciendo una integración auxiliar mediante la fórmula (127.5), haciendo en ésta $n = 2$ y substituyendo en vez de a y b , respectivamente, $k^2 - a^2$ y $k^2 - a_0^2$. La integral toma entonces la forma

* Por esto mismo, en el proceso de «renormalización sobre la marcha» (cf. pág. 42) prescindimos de las correcciones a la constante de renormalización Z_1 (§ 107). Las correspondientes integrales divergen logarítmicamente. Si se introduce un «parámetro de corte» $\Lambda^2 \gg m^2, p^2$, que limita el dominio de integración respecto de d^4k mediante la condición $k^2 \leq \Lambda^2$, esta corrección se puede calcular de manera explícita. El resultado que se obtiene es

$$Z_1 = 1 + Z_1^{(1)}, \quad Z_1^{(1)} = -\frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \ln \frac{\lambda^2}{m^2} + \frac{9}{4} \right]. \quad (116.7 \text{ a})$$

$$(\hat{p} - m) \frac{16\pi i}{(2\pi)^4} e^2 \int d^4 k \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{(\hat{p} + m) [2m - \hat{p}(1-x)] x(1-x)}{[k^2 - a_0^2 + (\rho^2 - m^2)x(1-x)z]^3}$$

[se ha utilizado aquí también la identidad $p^2 - m^2 = (\hat{p} - m)(\hat{p} + m)$]. La integración respecto de $d^4 k$ es con esto inmediata. Suponiendo que $p^2 - m^2 < 0$ y aplicando (127.14), se obtendrá

$$(\hat{p} - m) \frac{e^2}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{(\hat{p} + m) [2m - \hat{p}(1-x)] x(1-x)}{m^2 x^2 + \lambda^2 (1-x) + (m^2 - p^2)x(1-x)z}.$$

Prescindiendo por el momento del factor $(\hat{p} - m)$, hay que restar ahora la misma integral con la sustitución (116.1); después de simples transformaciones se obtiene

$$\mathcal{M}(p) = (\hat{p} - m)^2 \frac{e^2}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{m(1-x^2) - (\hat{p} + m)(1-x)^2 \left[1 - \frac{2x(1+x)z}{x^2 + (\lambda/m)^2} \right]}{m^2 x + (m^2 - p^2)(1-x)z} \quad (116.8)$$

[en el denominador común se ha prescindido del término en λ^2 , ya que esto no conduce aquí a divergencia alguna; en otro punto, $\lambda^2(1-x)$ se ha substituido por λ^2 , puesto que a la divergencia en el infrarrojo corresponderá la divergencia para $x \rightarrow 0$].

La integración en (116.8) (primero respecto de z y luego respecto de x) es bastante larga, si bien elemental, y conduce al siguiente resultado final:

$$\mathcal{M}(p) = \frac{a}{2\pi m} (\hat{p} - m)^2 \left\{ \frac{1}{2(1-\rho)} \left(1 - \frac{2-3\rho}{1-\rho} \ln \rho \right) - \right. \\ \left. - \frac{\hat{p} + m}{m\rho} \left[\frac{1}{2(1-\rho)} \left(2 - \rho + \frac{\rho^2 + 4\rho - 4}{1-\rho} \ln \rho \right) + 1 + 2 \ln \frac{\lambda}{m} \right] \right\}, \quad (116.9)$$

donde se ha hecho

$$\rho = \frac{m^2 - p^2}{m^2}$$

(R. Karplus, N. M. Kroll, 1950). La integral se calcula en el supuesto de que sea $\rho > 0$ y, además, $\rho \geq \lambda/m$. De acuerdo con la regla para eludir los polos, al efectuar la prolongación analítica de la expresión (116.9) al dominio $\rho < 0$ la fase del logaritmo se determina substituyendo $m \rightarrow m - i0$; en estas condiciones, $\rho \rightarrow \rho - i0$, de modo que, para $\rho < 0$, $\ln \rho$ debe interpretarse en el sentido de

$$\ln \rho = \ln |\rho| - i\pi, \quad \rho < 0. \quad (116.10)$$

Veamos cómo se comporta el operador de masa cuando $p^2 \gg m^2$. Tenemos entonces $\rho \approx p^2/m^2 \gg 1$, y con precisión logarítmica

$$\mathcal{M}(p) = -[\mathcal{G}^{-1}(p) - G^{-1}(p)] \approx \frac{\alpha}{4\pi} \hat{p} \ln \frac{p^2}{m^2}. \quad (116.11)$$

Al igual que en el caso del propagador de fotón [cf. las fórmulas (110.15-16) para el operador polarización], la corrección a G^{-1} resulta ser pequeña sólo para una energía no demasiado grande, a saber, para

$$\frac{\alpha}{4\pi} \ln \frac{p^2}{m^2} \ll 1.$$

En el presente caso, sin embargo, el aumento logarítmico es ficticio en el sentido ya conocido y puede suprimirse mediante una elección adecuada del contraste, es decir, de la función $D^{(l)}$ en el propagador de fotón (*L. D. Landau, A. A. Abrikosov, I. M. Jalatnikov, 1954*). Para ello hay que hacer

$$D^{(l)} = 0, \quad (116.12)$$

mientras que la fórmula (116.9) se ha obtenido con el contraste

$$D^{(l)} = D. \quad (116.13)$$

Esta propiedad del contraste (116.12) lo hace particularmente adecuado para la investigación del carácter de la teoría cuando $p^2 \gg m^2$, propiedad de la cual haremos uso más adelante en el § 128.

Para demostrar lo que acabamos de afirmar, obsérvese que si nos interesan solamente los términos $\sim e^2$, el paso del contraste (116.13) al contraste (116.12) se puede considerar como infinitamente pequeño [gracias a la presencia de e^2 en el exponente (102.14)]. De acuerdo con esto podemos aplicar directamente la fórmula (102.16), haciendo en ella

$$\delta d^{(l)}(q) = -\frac{D}{q^2} = -\frac{4\pi}{(q^2)^2},$$

y substituyendo también, dentro de la precisión exigida, la función \mathcal{G} en el integrando por G . En la integral respecto de d^4q , el dominio que contará fundamentalmente es aquél en que $q \gg p$; con esto, $G(p-q)$ en el integrando es mucho menor que $G(p)$ y podemos prescindir de él. Entonces

$$\delta \mathcal{G}^{-1} = -G^{-2}(p) \delta \mathcal{G}(p) = -ie^2 G^{-1}(p) \int \delta d^{(l)}(q) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}.$$

Finalmente, aplicando la transformación (127.11-12), se obtendrá

$$\delta\mathcal{G}^{-1}(p) = -\frac{e^2}{4\pi} G^{-1}(p) \int \frac{d(-q^2)}{-q^2} \approx -\frac{e^2}{4\pi} \hat{p} \ln \frac{\Lambda^2}{p^2},$$

donde Λ es un límite superior auxiliar, la divergencia en el cual se suprime mediante renormalización. Esta última consiste en restar la misma expresión para $p^2 \approx m^2$, de modo que en definitiva tenemos

$$\delta\mathcal{G}^{-1} = \frac{e^2}{4\pi} \hat{p} \ln \frac{p^2}{m^2}.$$

Esta expresión reduce precisamente la diferencia $\mathcal{G}^{-1} - G^{-1}$ que aparece en (116.11).

Para terminar, examinemos la cuestión de cuáles son las causas que conducen a que sea necesario introducir una «masa de fotón» no nula λ al regularizar la integral (116.2), necesidad íntimamente ligada con el comportamiento de ésta para $p^2 \rightarrow m^2$.

Observemos ante todo que la propia integral con $\lambda = 0$ es finita cuando $p^2 = m^2$ (para evitar la divergencia, no esencial en ese aspecto, que se presenta para valores k grandes, supondremos que la integral se extiende a una región grande, pero finita, del espacio- k). Ahora bien, la necesidad de introducir λ surge al restar la integral de renormalización, la cual, sin el término en λ , divergiría para $p^2 = m^2$. Veamos, por ello, cómo se comportaría el operador másico no regularizado cuando $p^2 \rightarrow m^2$. Dado que este comportamiento depende esencialmente del contraste que se adopte, consideraremos el caso general de un contraste arbitrario [mientras que la integral (116.2) corresponde ya a una determinada elección del mismo, a saber, la (116.13)].

Utilicemos de nuevo la transformación (102.16). Representando $\delta d^{(1)}$ en la forma

$$\delta d^{(1)}(q) = \frac{\delta D^{(1)}}{q^2} = \frac{4\pi}{(q^2)^2} \delta a(q^2), \quad (116.14)$$

tomaremos para δa la variación de la función $a(q^2)$, función que varía de modo esencial tan sólo en intervalos $q^2 \sim m^2$ y que no es nula para $q^2 \approx m^2$. En el integrando del segundo miembro de (102.16), los dos términos de la diferencia $\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}(p-q)$ son próximos entre sí para valores q pequeños y la integral converge. Observando que, cuando q es pequeño, se tiene

$$\mathcal{G}(p-q) \sim \frac{1}{p^2 - m^2 - 2pq},$$

vemos que cabe prescindir de $\mathcal{G}(p-q)$ frente a $\mathcal{G}(p)$ si $q \gg (p^2 - m^2)/m$. Pero la integral

$$\delta\mathcal{G}(p) = ie^2\mathcal{G}(p) \int \delta d^{(1)}(q) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} = -\frac{e^2}{4\pi} \mathcal{G}(p) \int \delta a(q^2) \frac{d(-q^2)}{-q^2}$$

diverge logarítmicamente en el dominio

$$\frac{(p^2 - m^2)^2}{m^2} \ll q^2 \ll m^2.$$

Por ello, con precisión logarítmica tenemos

$$\frac{\delta \mathcal{G}}{\mathcal{G}} = -\frac{e^2}{2\pi} \delta a(m^2) \ln \frac{m^2}{p^2 - m^2}.$$

Esta igualdad se puede integrar. Teniendo en cuenta que cuando $\alpha \equiv e^2 \rightarrow 0$ el propagador exacto \mathcal{G} debe coincidir con el propagador de las partículas libres G , se obtendrá

$$\mathcal{G}(p) = \frac{1}{\hat{p} - m} \left(\frac{m^2}{p^2 - m^2} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi} (C - a_0)}, \quad (116.15)$$

donde $a_0 = a(m^2)$ y C es una cierta constante. Para determinar esta última comparamos la expresión

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = (\hat{p} - m) \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} (C - a_0) \ln \rho \right], \quad (116.16)$$

que se obtiene a partir de (116.15) en la primera aproximación respecto de α , con la expresión análoga que resulta de la integral (116.2) cuando $\lambda = 0$ *:

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = (\hat{p} - m) \left[1 + \frac{\alpha}{\pi} \ln \rho \right]. \quad (116.17)$$

De acuerdo con la definición (116.14), la función $a(q^2)$ coincide con la razón $D^{(l)}/D$. Por consiguiente, el contraste (116.13), al que se refiere (116.17), corresponde a $a = a_0 = 1$. Imponiendo la condición de que coincidan (116.16) y (116.17) para este valor de a_0 , se obtiene $C = 3$.

De esta manera encontramos finalmente la siguiente expresión límite (la expresión asintótica en el infrarrojo) del propagador de electrón no renormalizado cuando $p^2 \rightarrow m^2$:

$$\mathcal{G}(p) = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2} \left(\frac{m^2}{p^2 - m^2} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi} (3 - a_0)} \quad (116.18)$$

(A. A. Abrikosov, 1955) **.

* Para obtener (116.17), no hay necesidad de efectuar de nuevo el cálculo. El término $\sim \ln \rho$ en (116.9) se ha obtenido precisamente suponiendo $\rho \gg \lambda$, lo que permite el paso al límite $\lambda \rightarrow 0$. En cuanto al término $\sim \ln(\lambda/m)$, éste resulta de restar la integral de renormalización y no aparece en la integral de partida (116.2). Esta substracción no afecta, como es fácil ver, a los términos $\sim \ln \rho$.

** La validez de esta fórmula depende solamente de que se cumplan las desigualdades $\alpha \ll 1$, $|\ln \rho| \gg 1$, mientras que las fórmulas de la teoría de perturbaciones exigirían que, además, fuese $\frac{\alpha}{2\pi} |\ln \rho| \ll 1$.

Haremos notar también que el signo de la diferencia $p^2 - m^2$ carece aquí de importancia, puesto que considerar la parte imaginaria de la expresión (116.18) supondría en cualquier caso una precisión mayor que la que dicha expresión ofrece.

El propagador renormalizado debe presentar un polo simple en $p^2 = m^2$. Ahora bien, es claro que (117.18) satisface esta condición solamente en el contraste para el que

$$D^{(l)} = 3D \quad (116.19)$$

(de modo que $a_0 = 3$). En este caso, la regularización de la integral de Feynman (que tiene por objeto suprimir la divergencia de la misma en los límites superiores) no obligará a introducir una «masa de fotón no nula». En cambio, para los otros contrastes, la anulación de la masa del fotón conducirá a que en el punto $p^2 = m^2$ aparezca un punto de ramificación en vez de un polo simple, y evitar este «defecto» exige la introducción de un parámetro λ diferente de cero.

§ 117. Emisión de fotones blandos con masa no nula

Al calcular los factores de forma de electrón en el § 114 nos encontramos con la divergencia de integrales para frecuencias pequeñas de los fotones virtuales. Esta divergencia está íntimamente ligada con la catástrofe en el infrarrojo ya analizada en el § 95. Se indicó allí que la sección eficaz de cualquier proceso en el que participen partículas cargadas [entre ellos la dispersión de un electrón por un campo exterior, representada por un diagrama de la forma (114.1)] por sí misma carece de sentido, y que únicamente lo cobra cuando se tiene en cuenta al mismo tiempo la radiación de un número arbitrario de fotones blandos. Como se explicará detenidamente más adelante (§ 119), en la sección eficaz total que tiene en cuenta la radiación de cuantos blandos se compensan entre sí todas las divergencias. Naturalmente, para obtener en este caso el resultado correcto es necesario efectuar de la misma manera el «corte» previo de las integrales divergentes en todas las secciones eficaces parciales.

En el § 114 este corte se llevó a cabo mediante la introducción de una masa ficticia no nula λ del fotón virtual. Por lo tanto, debemos ahora modificar también las fórmulas del § 95 de modo que describan la radiación de «fotones» blandos con masa no nula.

Desde el punto de vista formal, un fotón de estas características corresponde a las partículas «vectoriales» de spin 1 cuyo campo libre se estudió en el § 14. Dichas partículas se describen por el 4-vector ψ_μ , que en la representación de segunda cuantificación tiene la forma

$$\psi_\mu = \sqrt{4\pi} \sum_{ka} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (c_{ka} e_\mu^{(a)} e^{-ikx} + c_{ka}^+ e_\mu^{(a)*} e^{ikx}), \quad a = 1, 2, 3 \quad (117.1)$$

[hemos cambiado aquí la notación respecto de la empleada en (14.14) a fin de ponerla de acuerdo con el caso de los fotones].

La interacción de los «fotones» (117.1) con los electrones debe representarse

por un lagrangiano del mismo tipo que en el caso de fotones reales:

$$-e j^\mu \psi_\mu \quad (117.2)$$

(con la substitución del potencial A_μ por ψ_μ). Las amplitudes de los procesos de emisión de fotones de masa no nula vendrán entonces dadas por las reglas ordinarias de la técnica de diagramas, con la única diferencia de que

$$k^2 = \lambda^2, \quad (117.3)$$

y de que la suma respecto de las polarizaciones del fotón emitido debe extenderse a las tres polarizaciones independientes (dos transversales y una longitudinal) en vez de las dos que corresponden a un fotón ordinario.

Es fácil hallar la matriz densidad de una partícula vectorial no polarizada utilizando las condiciones

$$ke = 0, \quad ee^* = -1 \quad (117.4)$$

[cf. (14.12-13)]. Escribiendo la matriz que buscamos en la forma

$$\rho_{\mu\nu} = \overline{e_\mu e_\nu^*} = ag_{\mu\nu} + bk_\mu k_\nu$$

y determinando a y b a partir de las condiciones (117.4), obtendremos

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{3} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\lambda^2} \right). \quad (117.5)$$

Exactamente la misma estructura presenta el numerador del propagador de partículas vectoriales:

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2 - \lambda^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\lambda^2} \right).$$

Sin embargo, en virtud de la invariancia de contraste, las amplitudes de los procesos reales de dispersión no dependen de la parte longitudinal del propagador de fotón y esta propiedad no está ligada con la forma concreta de su parte transversal. En consecuencia, el segundo término entre paréntesis desaparece de hecho y queda una expresión del mismo tipo que en el caso de los fotones ordinarios:

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2 - \lambda^2} g_{\mu\nu}$$

(que utilizamos también en los §§ 114-116).

Pasemos ahora a la radiación de fotones blandos (en el sentido explicado en el § 95).

El proceso de deducción de las fórmulas (95.5-6) que se llevó a cabo en el § 95 se extiende al caso considerado aquí con la única diferencia de que al desarrollar los cuadrados $(p \pm k)^2$, en los denominadores de los propagadores de electrón se añade el término $k^2 = \lambda^2$. En consecuencia, en vez de (95.6) obtendremos

$$d\sigma = d\sigma_{el} \cdot e^2 \left| \frac{p'e}{p'k + \lambda^2/2} - \frac{pe}{pk - \lambda^2/2} \right|^2 \frac{d^3k}{4\pi^2\omega},$$

donde $d\sigma_{el}$ es la sección eficaz del mismo proceso sin emisión de cuantos blandos (que, como es costumbre, llamamos proceso «elástico»)*. En lo que sigue, en las integraciones respecto de d^3k contarán esencialmente los valores $|k| \sim \lambda$. Además, $p'k \sim pk \gg \lambda^2$, de modo que se puede prescindir de los términos λ^2 en los denominadores. La suma respecto de las polarizaciones del fotón se efectúa mediante (117.5) (el promedio seguido de la multiplicación por 3). Una vez se haya prescindido de los términos indicados, el segundo término en (117.5) no contribuye a la sección eficaz, con lo que queda **

$$d\sigma = -d\sigma_{el} \cdot e^2 \left(\frac{p'}{(p'k)} - \frac{p}{(pk)} \right)^2 \frac{d^3k}{4\pi^2\omega}. \quad (117.6)$$

Encontramos así de nuevo la fórmula (95.7), en la cual, sin embargo, hay que entender por ω el valor

$$\omega = \sqrt{k^2 + \lambda^2}. \quad (117.7)$$

La fórmula (117.6) tiene un carácter completamente general. Es aplicable tanto a la dispersión elástica como a la inelástica, e incluso lo es cuando cambia la especie de las partículas (nos encontraremos con este caso en el § 147). En cambio, el resultado de la integración siguiente respecto de d^3k depende de los 4-vectores p y p' ; en otras palabras, depende del carácter del proceso de dispersión fundamental.

Consideremos la dispersión elástica, en la que

$$|p| = |p'|, \quad \epsilon = \epsilon',$$

y determinemos la probabilidad total de emisión de fotones con una frecuencia menor que un cierto ω_{max} tal que

* En el § 65 la sección eficaz $d\sigma_{el}$ se había representado por $d\sigma_0$.

** A primera vista podría surgir la duda acerca de si es o no válido prescindir de λ^2 antes de promediar, teniendo en cuenta la presencia de λ^2 en el denominador del segundo término en (117.5). Sin embargo, es fácil cerciorarse inmediatamente de que este término contribuye al promedio con una expresión $\sim \lambda^4 \cdot \frac{1}{\lambda^2}$, expresión que cabe no tener en cuenta.

$$\lambda \ll \omega_{\max} \ll m. \quad (117.8)$$

Calculemos primero la integral respecto de d^3k en el límite no relativista. Cuando $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| \ll m$, se tiene

$$\left(\frac{\mathbf{p}'}{(\mathbf{p}'\mathbf{k})} - \frac{\mathbf{p}}{(\mathbf{p}\mathbf{k})} \right)^2 \approx \frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})^2}{m^2\omega^4} - \frac{\mathbf{q}^2}{m^2\omega^2}$$

($\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$). La integración de esta expresión respecto de las direcciones de \mathbf{k} da

$$\frac{4\pi q^2}{m^2\omega^2} \left(\frac{\mathbf{k}^2}{3\omega^2} - 1 \right).$$

Hecho esto, en virtud de (117.6) tenemos

$$d\sigma = d\sigma_{\text{el}} \cdot \frac{e^2 q^2}{\pi m^2} \int_0^{\omega=\omega_{\max}} \left[1 - \frac{\mathbf{k}^2}{3(\mathbf{k}^2 + \lambda^2)} \right] \frac{\mathbf{k}^2 d|\mathbf{k}|}{(\mathbf{k}^2 + \lambda^2)^{3/2}}$$

o bien, efectuando la integración suponiendo que $\omega_{\max}/\lambda \gg 1$,

$$d\sigma = d\sigma_{\text{el}} \cdot \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{2\omega_{\max}}{\lambda} - \frac{5}{6} \right), \quad q^2 \ll m^2. \quad (117.9)$$

En el caso general relativista, para el cálculo de la integral utilizaremos la fórmula (127.4). Mediante ella, la integración respecto de los ángulos conduce a

$$I = \int \frac{d\mathbf{o}_k}{(\mathbf{p}\mathbf{k})(\mathbf{p}'\mathbf{k})} = \int_0^1 dx \int \frac{d\mathbf{o}_k}{[(\mathbf{p}\mathbf{k})x + (\mathbf{p}'\mathbf{k})(1-x)]^2}$$

o bien, desarrollando los productos escalares con $\mathbf{p} = (\epsilon, \mathbf{p})$, $\mathbf{p}' = (\epsilon, \mathbf{p}')$

$$I = \int_0^1 dx \int \frac{d\mathbf{o}_k}{[\epsilon\omega - \mathbf{k} \cdot [\mathbf{p}x + \mathbf{p}'(1-x)]]^2}.$$

Es fácil ahora calcular la integral interior en coordenadas esféricas, con el eje polar dirigido en el sentido del vector $\mathbf{p}x + \mathbf{p}'(1-x)$, y queda así

$$I = \int_0^1 \frac{4\pi dx}{(\epsilon\omega)^2 - [\mathbf{p}x + \mathbf{p}'(1-x)]^2 \mathbf{k}^2} = \int_0^1 \frac{4\pi dx}{[m^2 + \mathbf{q}^2 x(1-x)] \mathbf{k}^2 + \epsilon^2 \lambda^2}.$$

Las otras dos integrales [con $(pk)^2$ y $(p'k)^2$ en los denominadores] se obtienen a partir de aquí haciendo $q = 0$. Observando también que

$$pp' = \epsilon^2 - p \cdot p' = m^2 + \frac{1}{2} q^2,$$

resulta

$$d\sigma = \frac{2e^2}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^{\omega_{\max}} \frac{k^2 d|k|}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \left\{ \frac{m^2 + \frac{1}{2} q^2}{[m^2 + q^2 x(1-x)] k^2 + e^2 \lambda^2} - \frac{m^2}{m^2 k^2 + e^2 \lambda^2} \right\}. \quad (117.20)$$

La integración respecto de $d|k|$ se reduce al cálculo de integrales del tipo

$$\begin{aligned} & \int_0^{\omega_{\max}} \frac{k^2 d|k|}{(ak^2 + \lambda^2) \sqrt{k^2 + \lambda^2}} = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{d|k|}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} - \frac{\lambda^2}{a} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{d|k|}{(ak^2 + \lambda^2) \sqrt{k^2 + \lambda^2}} \approx \\ & \approx \frac{1}{a} \ln \frac{2\omega_{\max}}{\lambda} - \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(az^2 + 1) \sqrt{z^2 + 1}}. \end{aligned}$$

En la segunda integral se ha hecho $|k| \rightarrow \lambda z$ y el límite superior (ω_{\max}/λ) se substituye por ∞ , lo que es admisible dada la convergencia de la integral.

Las integrales respecto de dx que luego resultan en (117.10) no se pueden expresar totalmente como combinación de funciones elementales. Escribiremos el resultado en la forma

$$d\sigma = a \left[K \left(\frac{|q|}{2m} \right) \ln \frac{2\omega_{\max}}{\lambda} + K_1 \right] d\sigma_{el}, \quad (117.11)$$

donde *,

* Encontramos ya la función $K(\xi)$ en los problemas del § 95. Esto no debe sorprender, puesto que, con precisión logarítmica, (117.11) se puede obtener integrando la sección eficaz de emisión de fotones de masa nula (95.8) respecto de $d\omega$ entre los límites λ y ω_{\max} .

Si se introduce en vez de ξ la variable θ de acuerdo con $\xi = \operatorname{senh} \frac{\theta}{2}$, se tiene

$$K(\theta) = \frac{2}{\pi} (\theta \operatorname{ctgh} \theta - 1). \quad (117.12 a)$$

$$K(\xi) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{2\xi^2 + 1}{\xi \sqrt{\xi^2 + 1}} \ln (\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) - 1 \right], \quad (117.12)$$

$$K_1 = \frac{2e}{\pi |p|} \ln \frac{e + |p|}{m} - \frac{2m^2 + q^2}{\pi e^2} \int_0^1 \frac{dx}{a \sqrt{1-a}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-a}}{\sqrt{a}}, \quad (117.13)$$

$$a = \frac{1}{e^2} [m^2 + q^2 x (1-x)].$$

Hallemos la expresión asintótica de la sección eficaz en el caso ultrarrelativista. Suponemos entonces que no sólo se tiene $e \gg m$, sino también que $|q| \gg m$, es decir, que el ángulo de dispersión no es demasiado pequeño. En estas condiciones, en la integral (117.13) el intervalo que importa es el de los valores de x en el que $a \ll 1$; después de prescindir de los correspondientes términos, resulta

$$K_1 \approx \frac{q^2}{2\pi e^2} \int_0^1 \frac{\ln a}{a} dx \approx \frac{1}{2\pi} \int \frac{\ln \frac{q^2}{e^2} + \ln x + \ln(1-x)}{x(1-x)} dx.$$

Es necesario cortar la integral por abajo para $a \sim 1$, esto es, para $x \sim m^2/q^2$, y por arriba, para $1-x \sim m^2/q^2$. Entonces

$$K_1 \approx \frac{1}{2\pi} \left[2 \ln \frac{q^2}{e^2} \ln \frac{q^2}{m^2} - \ln^2 \frac{q^2}{m^2} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\ln^2 \frac{q^2}{m^2} - 4 \ln \frac{e}{m} \ln \frac{q^2}{m^2} \right].$$

Esta fórmula es válida con una precisión que incluye los cuadrados de logaritmos, o, como suele decirse, con una precisión doblemente logarítmica. Con esta misma precisión, en el primer término de (117.11) basta hacer

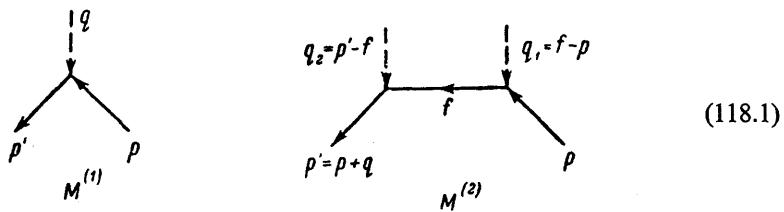
$$K(\xi) \approx \frac{4}{\pi} \ln \xi \quad (\xi \gg 1).$$

Finalmente,

$$d\sigma = \frac{2a}{\pi} \left[\ln \frac{q^2}{m^2} \ln \frac{\omega_{\max}}{\lambda} - \ln \frac{e}{m} \ln \frac{q^2}{m^2} + \frac{1}{4} \ln^2 \frac{q^2}{m^2} \right] d\sigma_{\text{el}}, \quad q^2 \gg m^2. \quad (117.14)$$

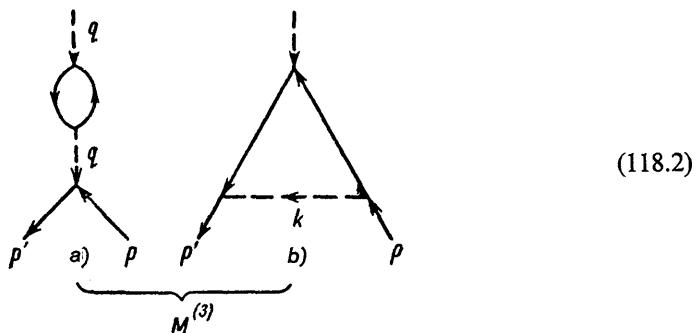
§ 118. Dispersión de un electrón en un campo exterior en la segunda aproximación de Born

En las dos primeras aproximaciones respecto del campo exterior, la dispersión de un electrón se representa por los diagramas



Al primero de ellos corresponderá la amplitud $M^{(1)} \sim Ze^2$, estudiada en el § 81. En cambio, la amplitud de segunda aproximación es $M^{(2)} \sim (Ze^2)^2$.

Es fácil ver que términos de este mismo orden de magnitud aparecen también en las correcciones por radiación. En el tercer orden de la teoría de perturbaciones, las correcciones radiativas a la amplitud de dispersión se representan por los diagramas



En este caso $M^{(3)} \sim Ze^2 \cdot e^2$, y si $Z \sim 1$, es $M^{(3)} \sim M^{(2)}$.

Según (65.26) la sección eficaz de dispersión vale

$$d\sigma = |M_{fi}^{(1)} + M_{fi}^{(2)} + M_{fi}^{(3)}|^2 \frac{do'}{16\pi^2}. \quad (118.3)$$

En el cuadrado de la amplitud que aquí aparece podemos conservar también, junto con $|M_{fi}^{(1)}|^2$, los términos de interferencia entre $M_{fi}^{(1)}$ y $M_{fi}^{(2)}$ y entre $M_{fi}^{(1)}$ y $M_{fi}^{(3)}$. De esta manera, con una precisión que alcanza a términos $\sim e^6$, la sección eficaz se representará por la suma

$$d\sigma = d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)} + d\sigma_{rad}, \quad (118.4)$$

donde $d\sigma^{(1)}$ es la sección eficaz en la primera aproximación de Born (§ 81) y las correcciones a la misma son

$$d\sigma^{(2)} = 2 \operatorname{Re} M_{fi}^{(1)} M_{fi}^{(2)*} \frac{d\omega'}{16\pi^2},$$

$$d\sigma_{\text{pad}} = 2 \operatorname{Re} M_{fi}^{(1)} M_{fi}^{(3)*} \frac{d\omega'}{16\pi^2}.$$
(118.5)

Recordaremos (§ 81) que

$$M_{fi}^{(1)} = |e| (\bar{u}' \gamma^0 u) \Phi(q),$$
(118.6)

donde $\Phi(q)$ es la componente de Fourier del potencial escalar del campo exterior constante ($\Phi \equiv A_0^{(e)}$) y se ha tenido en cuenta que la carga del electrón es $e = -|e|$.

Las dos expresiones (118.5) pueden calcularse, evidentemente, con independencia la una de la otra. La primera se estudiará en este párrafo, y la segunda, en el siguiente.

La amplitud de segunda aproximación, construida de acuerdo con el diagrama (118.1), viene dada por la integral *

$$M_{fi}^{(2)} = -e^2 \int \left\{ \bar{u}(p') \gamma^0 \frac{\hat{f} + m}{f^2 - m^2 + i0} \gamma^0 u(p) \right\} \Phi(p' - f) \Phi(f - p) \frac{d^3 f}{(2\pi)^3}.$$
(118.7)

Los «4-impulsos» del campo exterior constante $q_1 = f - p$ y $q_2 = p' - f$ carecen de componentes temporales. Por ello,

$$f_0 = \epsilon = \epsilon',$$
(118.8)

donde ϵ y ϵ' son las energías inicial y final del electrón, energías que coinciden en el caso de la dispersión elástica.

En el campo puramente coulombiano de una carga en reposo $Z|e|$ es:

$$\Phi(q) = \frac{4\pi Z|e|}{q^2}.$$

Para este potencial, la integral (118.7) diverge logarítmicamente (cuando $f \approx p$ y cuando $\hat{f} \approx p'$). Esta divergencia es específica del campo de Coulomb y está vinculada con el hecho de que dicho campo decrece lentamente a grandes distancias. La manera más fácil de poner de manifiesto su origen la proporciona el ejemplo del caso no relativista. Según III (133.8), el coeficiente en la onda esférica $e^{i|\mathbf{p}|r}/r$

* La regla 8 de la técnica de diagramas formulada en el § 78 debe precisarse algo más en el caso de un campo exterior constante (en el tiempo). En efecto, a la línea entrante del campo exterior corresponde la componente tridimensional de Fourier del 4-potencial

$$A^{(e)}(q) = \int A^{(e)}(r) e^{-iq \cdot r} d^3 r.$$

Las reglas de conservación en un vértice deben escribirse teniendo en cuenta que $q^\mu = (0, \mathbf{q})$, y para aquellos \mathbf{q} que queden indeterminados hay que efectuar la integración respecto de $d^3 q/(2\pi)^3$. La amplitud M_{fi} calculada según estas reglas determina la sección eficaz de dispersión de acuerdo con (65.b5).

para la expresión asintótica de la función de onda del electrón en un campo coulombiano tiene la forma

$$f(\theta) \exp\left(-i \frac{Zam}{|\mathbf{p}|} \ln |\mathbf{p}| r\right).$$

Pero este coeficiente resulta ser también la amplitud de dispersión del electrón en el campo y, por consiguiente, su fase contiene un término divergente (para $r \rightarrow \infty$). Al desarrollar la amplitud de dispersión en potencias de $Z\alpha$, este término conduce a la divergencia de todos los términos del desarrollo a partir del segundo [dado que la propia función $f(\theta)$ es proporcional a $Z\alpha$]. La situación en el caso relativista tiene, claro está, un carácter análogo.

Estos razonamientos muestran, al mismo tiempo, que los términos divergentes deben reducirse entre sí al calcular la sección eficaz de dispersión, para la cual la fase de la amplitud carece de importancia. El camino más simple para llevar a cabo correctamente los cálculos consiste en considerar primero la dispersión en un campo de Coulomb apantallado, es decir, hacer

$$\Phi(q) = \frac{4\pi Z |e|}{q^2 + \delta^2} \quad (118.9)$$

con una pequeña constante de apantallamiento δ ($\delta \ll |\mathbf{p}|$). Se evita así la divergencia de la amplitud de dispersión, y en el resultado final para la sección eficaz se puede ya hacer $\delta = 0$.

Substituyendo (118.9) en (118.7), obtendremos

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{2}{\pi} Z^2 \alpha^2 \bar{u}(\mathbf{p}') [(\gamma^0 e + m) J_1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{J}] u(\mathbf{p}),$$

donde se han introducido las notaciones:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int \frac{d^3 f}{[(p' - f)^2 + \delta^2] [(f - p)^2 + \delta^2] [p^2 - f^2 + i0]}, \\ \mathbf{J} &= \int \frac{f d^3 f}{[(p' - f)^2 + \delta^2] [(f - p)^2 + \delta^2] [p^2 - f^2 + i0]} \equiv \frac{\mathbf{p} + \mathbf{p}'}{2} J_2. \end{aligned} \quad (118.10)$$

Aquí $\mathbf{p}^2 = \epsilon^2 - m^2 = \mathbf{p}'^2$ y la integral \mathbf{J} es simétrica respecto de \mathbf{p} y \mathbf{p}' ; por razones de simetría vectorial, es evidente a priori que el vector \mathbf{J} debe estar dirigido en el sentido de $\mathbf{p} + \mathbf{p}'$. Eliminando ahora las matrices \mathbf{v} mediante las igualdades

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} u &= (\gamma^0 e - m) u, \\ \bar{u}' \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}' &= \bar{u}' (\gamma^0 e - m), \end{aligned}$$

se obtiene

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{2}{\pi} Z^2 \alpha^2 \bar{u}(p') [\gamma^0 \epsilon (J_1 + J_2) + m (J_1 - J_2)] u(p). \quad (118.11)$$

Para llevar a cabo los cálculos siguientes pasemos (como en el § 81) de las amplitudes bispinoriales u y u' a los correspondientes espinores en tres dimensiones w y w' [de acuerdo con (23.9) y (23.11)]. Multiplicando sin más, se encuentra

$$\begin{aligned}\bar{u}' u &= w'^* \{(\epsilon + m) - (\epsilon - m) \cos \theta + i \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} (\epsilon - m) \sin \theta\} w, \\ \bar{u}' \gamma^0 u &= w'^* \{(\epsilon + m) + (\epsilon - m) \cos \theta - i \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} (\epsilon - m) \sin \theta\} w,\end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{v} = \frac{[\mathbf{n} \times \mathbf{n}']}{\sin \theta}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \mathbf{n}' = \frac{\mathbf{p}'}{|\mathbf{p}'|}, \quad \cos \theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'.$$

Con esto la amplitud (118.11) toma la forma *

$$\begin{aligned}M_{fi}^{(2)} &= 4\pi w'^* (A^{(2)} + B^{(2)} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) w, \\ A^{(2)} &= -\frac{1}{2\pi^2} Z^2 \alpha^2 \{[(\epsilon + m) + (\epsilon - m) \cos \theta] \epsilon (J_1 + J_2) + \\ &\quad + [(\epsilon + m) - (\epsilon - m) \cos \theta] m (J_1 - J_2)\}, \\ B^{(2)} &= -\frac{i}{2\pi^2} Z^2 \alpha^2 (\epsilon - m) \sin \theta [\epsilon (J_1 + J_2) - m (J_1 - J_2)].\end{aligned}$$

En cuanto a la amplitud de dispersión de primera aproximación, de acuerdo con las notaciones análogas su forma es

$$\begin{aligned}M_{fi}^{(1)} &= 4\pi w'^* (A^{(1)} + B^{(1)} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) w, \\ A^{(1)} &= \frac{Z\alpha}{q^2} [(\epsilon + m) + (\epsilon - m) \cos \theta], \\ B^{(1)} &= -i \frac{Z\alpha}{q^2} (\epsilon - m) \sin \theta,\end{aligned} \quad (118.13)$$

donde $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$.

La sección eficaz de dispersión y los efectos de polarización se expresan en función de las magnitudes $A = A^{(1)} + A^{(2)}$ y $B = B^{(1)} + B^{(2)}$ por las fórmulas obtenidas en III, § 138. Así, la sección eficaz de dispersión de electrones no polarizados vale:

* La definición de las magnitudes A y B corresponde aquí a la definición en el § 37 y en III, § 138 y difiere en un factor de la definición dada en el § 81.

$$d\sigma = (|A|^2 + |B|^2) d\sigma' \approx d\sigma^{(1)} + 2(A^{(1)} \operatorname{Re} A^{(2)} - iB^{(1)} \operatorname{Im} B^{(2)}) d\sigma'.$$

Después de substituir (118.12-13), un simple cálculo da

$$d\sigma^{(2)} = -d\sigma' \frac{Z^3 a^3 e^3}{\pi^2 p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left[\left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \operatorname{Re} (J_1 + J_2) + \frac{m^2}{e^2} \operatorname{Re} (J_1 - J_2) \right], \quad (118.14)$$

donde $v = |\mathbf{p}|/\epsilon$ es la velocidad del electrón, y θ , el ángulo de dispersión. Los electrones se polarizan como resultado de la dispersión y el vector de polarización de los electrones finales es

$$\xi' = \frac{2 \operatorname{Re}(AB^*)}{|A|^2 + |B|^2} \mathbf{v} \approx \frac{2(A^{(1)} \operatorname{Re} B^{(2)} - iB^{(1)} \operatorname{Im} A^{(2)})}{|A^{(1)}|^2 + |B^{(1)}|^2} \mathbf{v}$$

o bien, después de substituir (118.12-13),

$$\xi' = \frac{4Zam p^4}{\pi^2 \epsilon^2} \frac{\sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \operatorname{Im} (J_1 - J_2) \mathbf{v}. \quad (118.15)$$

Pasemos al cálculo de las integrales J_1 y J_2 . Éste se simplifica aplicando el método de parametrización según la fórmula (127.2). La integral J_1 toma la forma

$$J_1 = -2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int \frac{d^3 f \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3 \cdot \delta(1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3)}{\{(p' - f)^2 + \delta^2\} \xi_1 + \{(p - f)^2 + \delta^2\} \xi_2 + \{f^2 - p^2 - i0\} \xi_3}.$$

La integración respecto de $d\xi_3$ hace desaparecer la función- δ ; reduciendo los términos en el denominador, se obtiene

$$J_1 = -2 \int_0^1 \int_0^1 \int \frac{d^3 f \, d\xi_1 \, d\xi_2}{\{\delta^2 (\xi_1 + \xi_2) + p^2 (2\xi_1 + 2\xi_2 - 1) - 2f(\xi_1 p' + \xi_2 p) + f^2 - i0\}^3}.$$

Si en vez de f introducimos la nueva variable $k = f - \xi_1 p' - \xi_2 p$, la integración respecto de $d^3 f$ se reduce a una integral del tipo

$$\int \frac{d^3 k}{(k^2 - a^2 - i0)^3} = i \frac{\pi^2}{4a^3},$$

de modo que

$$J_1 = -\frac{i\pi^2}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\xi_1 \, d\xi_2}{\{p^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1 - 2\xi_2 + 1) + 2\xi_1 \xi_2 p \cdot p' - \delta^2 (\xi_1 + \xi_2) - i0\}^{3/2}}.$$

En vez de ξ_1 y ξ_2 introduzcamos las combinaciones simétricas: $x = \xi_1 + \xi_2$, $y = \xi_1 - \xi_2$. La integración respecto de y (entre los límites 0 y x) es elemental y da

$$J_1 = -\frac{i\pi^2}{2|\mathbf{p}|^3} \int_0^1 \frac{x \, dx}{\left[bx^2 - 2x + 1 - \frac{\delta^2}{\mathbf{p}^2} x - i0 \right] \left[(1-x)^2 - \frac{\delta^2}{\mathbf{p}^2} x - i0 \right]^{1/2}},$$

donde

$$b = \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'}{2\mathbf{p}^2} = \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

Para calcular la integral con relación a x cuando $\delta \rightarrow 0$ descompondremos el intervalo de integración en dos partes:

$$\int_0^1 \dots dx = \int_0^{1-\delta_1} \dots dx + \int_{1-\delta_1}^1 \dots dx, \quad 1 \gg \delta_1 \gg \frac{\delta}{|\mathbf{p}|}.$$

En la primera integral se puede hacer $\delta = 0$; entonces *

$$\int_0^{1-\delta_1} \dots dx = \frac{1}{2(1-b)} \ln \frac{(1-x)^2}{(bx^2 - 2x + 1 - i0)} \Big|_0^{1-\delta_1} = \frac{1}{2(1-b)} \left[\ln \frac{\delta_1^2}{1-b} + i\pi \right].$$

En la segunda integral, en cambio, se puede hacer $x = 1$, salvo en el término $(1-x)^2$, y también $\delta = 0$ en el primer paréntesis del denominador. Entonces **

$$\begin{aligned} \int_{1-\delta_1}^1 \dots dx &= -\frac{1}{1-b} \int_0^{\delta_1} \frac{dx'}{\left(x'^2 - \frac{\delta^2}{\mathbf{p}^2} - i0 \right)^{1/2}} = \\ &= -\frac{1}{1-b} \left[\int_{\delta/|\mathbf{p}|}^{\delta_1} \frac{dx'}{\left(x'^2 - \frac{\delta^2}{\mathbf{p}^2} \right)^{1/2}} + i \int_0^{\delta/|\mathbf{p}|} \frac{dx'}{\left(\frac{\delta^2}{\mathbf{p}^2} - x'^2 \right)^{1/2}} \right] = \\ &= -\frac{1}{1-b} \left[\ln \frac{2|\mathbf{p}|\delta_1}{\delta} + i\frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Al sumar ambas integrales la cantidad δ_1 , como debía ser, desaparece y se obtiene

* La regla de evitar singularidades (el término $i0$) permite determinar la variación del argumento de la expresión que sigue al símbolo de logaritmo al pasar de 0 a $1 - \delta_1$; al rodear el punto de ramificación por abajo, el argumento varía de 0 a $-\pi$.

** También aquí la regla de evitar singularidades determina el signo de la raíz al pasar de valores positivos a negativos en el radicando.

$$J_1 = \frac{i\pi^2}{2|p|^3 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \ln \left(\frac{2|p|}{\delta} \sin \frac{\theta}{2} \right). \quad (118.16)$$

La integral J_2 se calcula de manera análoga y resulta igual a

$$J_2 = J_1 - \frac{\pi^3 \left(1 - \sin \frac{\theta}{2}\right)}{4|p|^3 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}} - \frac{i\pi^2}{2|p|^3 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \ln \sin \frac{\theta}{2}. \quad (118.17)$$

Falta sólo substituir estas expresiones en (118.14-15), hecho lo cual obtendremos los resultados finales *:

$$d\sigma^{(2)} = \frac{\pi (Z\alpha)^3 e}{4|p|^3 \sin^3 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2}\right) d\sigma', \quad (118.18)$$

$$\xi' = \frac{2Zam|p|}{e^2} \frac{\sin^3 \frac{\theta}{2} \ln \sin \frac{\theta}{2}}{\left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2}} v. \quad (118.19)$$

En la primera aproximación de Born las secciones eficaces de dispersión de un electrón y un positón (en el mismo campo exterior) son las mismas. En la segunda aproximación, desaparece esta simetría. Para la dispersión de un positón (carga $+|e|$) la amplitud de primera aproximación (118.6) es de signo opuesto, mientras que el de $M_{fi}^{(2)}$ no cambia. Por ello, la sección eficaz $d\sigma^{(2)}$, que es el término de interferencia entre $M_{fi}^{(1)}$ y $M_{fi}^{(2)}$, cambia de signo. Lo mismo ocurre con la expresión (118.19) del vector polarización. De manera general, el paso de las fórmulas para la dispersión de un electrón a las fórmulas para la dispersión de un positón puede efectuarse mediante la sustitución formal $Z \rightarrow -Z$.

§ 119 Correcciones radiativas a la dispersión de un electrón en un campo exterior

Pasemos al cálculo de las correcciones radiativas a la dispersión de un electrón en un campo exterior (*J. Schwinger, 1949*).

La correspondiente parte de la amplitud de dispersión se representa por los dos diagramas (118.2). El primero de ellos da una contribución a la amplitud

$$- (\bar{u}' \gamma^0 u) \frac{\mathcal{P}(-q^2)}{4\pi} D(-q^2) \cdot e \Phi(q),$$

donde $\mathcal{P}(-q^2)$ es el operador polarización que corresponde al lazo en el diagrama. La contribución del segundo diagrama se escribe

* Los resultados correctos fueron obtenidos por *McKinley y Feshbach* (W. A. McKinley, H. Feshbach, 1948) partiendo de las expresiones exactas de las fases parciales de dispersión. El cálculo siguiendo la teoría de perturbaciones lo efectuó *Dalitz* (R. H. Dalitz, 1950).

$$-(\bar{u}' \Lambda^0 u) e \Phi(\mathbf{q}),$$

donde Λ^0 es el término correctivo en el operador vértice ($\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Lambda^\mu$); según (113.6)

$$\Lambda^0 = \gamma^0 [f(-\mathbf{q}^2) - 1] - \frac{1}{2m} \sigma^{0v} q_v g(-\mathbf{q}^2).$$

Sumando ambas contribuciones, obtendremos *

$$\begin{aligned} M_{fi}^{(3)} &= -(\bar{u}' \gamma^0 Q_{\text{rad}} u) e \Phi(\mathbf{q}), \\ Q_{\text{rad}}(\mathbf{q}) &= f(-\mathbf{q}^2) - 1 - \frac{1}{\mathbf{q}^2} \mathcal{P}(-\mathbf{q}^2) + \frac{1}{2m} g(-\mathbf{q}^2) \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (119.1)$$

Analicemos en primer lugar el problema de la divergencia en el infrarrojo contenida en el factor de forma $f(-\mathbf{q}^2)$ y, por lo mismo, también en la amplitud de dispersión (119.1).

Hemos señalado ya (§ 95) que la amplitud exacta correspondiente a la dispersión puramente elástica es de suyo igual a cero, es decir, carece de sentido. Sólo posee una significación física la amplitud de dispersión determinada como proceso en el que se puede emitir un número arbitrario de fotones blandos, cada uno de ellos con una energía menor que un cierto valor dado ω_{\max} , siendo

$$\omega_{\max} \ll m.$$

En otras palabras, sólo tiene sentido la suma

$$d\sigma = d\sigma_{\text{el}} + d\sigma_{\text{el}} \int_0^{\omega_{\max}} dw_\omega + d\sigma_{\text{el}} \frac{1}{2!} \int_0^{\omega_{\max}} dw_{\omega_1} \int_0^{\omega_{\max}} dw_{\omega_2} + \dots, \quad (119.2)$$

donde $d\sigma_{\text{el}}$ es la sección eficaz de dispersión sin emisión de fotones, y dw_ω , la probabilidad diferencial de que un electrón emita un fotón de frecuencia ω . En todo esto se supone que el propio valor de $d\sigma_{\text{el}}$ se calcula en forma de serie de acuerdo con la teoría de perturbaciones, esto es, en forma de desarrollo según las potencias de α **. Entonces, después de reunir los términos de igual orden respecto de α en todos los sumandos de (119.2), obtendremos $d\sigma$ como desarrollo en serie de potencias de α , desarrollo en el cual cada uno de los términos será finito.

* Al efectuar la transformación hay que recordar que si $q^\mu = (0, \mathbf{q})$, se tiene $q_\mu = (0, -\mathbf{q})$! Por ello $\sigma^{0v} = q_v = -\gamma^0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}$.

** En lo que concierne a la probabilidad dw_ω , la necesidad de tener en cuenta las correcciones radiativas en ella depende del valor de ω_{\max} ; el límite $\omega \rightarrow 0$ corresponde al caso clásico, en el cual las correcciones radiativas desaparecen; precisamente por esto, eligiendo el valor de ω_{\max} suficientemente pequeño, se puede siempre conseguir que aquéllas sean pequeñas.

En la primera aproximación de Born $d\sigma_{el} \sim \alpha^2$. Este término, naturalmente, tiene sentido de suyo. Pero si queremos tener en cuenta la corrección siguiente en $d\sigma_{el}$ (término $\sim \alpha^3$), junto con aquél hay que tomar también el segundo término en la suma (119.2): dado que $dw_\omega \sim \alpha$, al multiplicar por $d\sigma_{el} \sim \alpha^2$ resulta también una cantidad $\sim \alpha^3$. Veamos cómo al sumar estas dos cantidades desaparece la divergencia en el infrarrojo.

El término divergente en el factor de forma f se escribe, según (114.17)*,

$$-\frac{\alpha}{2} K \left(\frac{|\mathbf{q}|}{2m} \right) \ln \frac{m}{\lambda}.$$

El término correspondiente en la amplitud (119.1) es:

$$\frac{\alpha}{2} K \ln \frac{m}{\lambda} \cdot (\bar{u}' \gamma^0 u) e\Phi(\mathbf{q}),$$

y en la sección eficaz de dispersión (118.5):

$$d\sigma^{infra} = -\alpha K \ln \frac{m}{\lambda} \cdot |\bar{u}' \gamma^0 u|^2 |e\Phi(\mathbf{q})|^2 \frac{do'}{16\pi^2}.$$

Comparando este resultado con la sección eficaz de Born

$$d\sigma^{(1)} = |\bar{u}' \gamma^0 u|^2 |e\Phi(\mathbf{q})|^2 \frac{do'}{16\pi^2},$$

encontramos que

$$d\sigma^{infra} = -\alpha K \ln \frac{m}{\lambda} \cdot d\sigma^{(1)}. \quad (119.3)$$

Por otra parte, el segundo término de (119.2), que contiene $\int dw_\omega$, en virtud de (117.11) da

$$d\sigma_{el} \int_0^{\omega_{max}} dw_\omega = \alpha K \ln \frac{2\omega_{max}}{\lambda} \cdot d\sigma^{(1)}. \quad (119.4)$$

Finalmente, sumando (119.3) y (119.4) se obtendrá

* Se ve fácilmente que así es sin más que utilizar la igualdad

$$\frac{|\mathbf{q}|}{m} = \frac{1-\xi}{V\xi}$$

que liga $|\mathbf{q}|$ con la variable ξ en función de la cual se ha expresado (114.17).

$$- d\sigma^{(1)} \cdot a K \left(\frac{|\mathbf{q}|}{2m} \right) \ln \frac{m}{2\omega_{\max}}. \quad (119.5)$$

Vemos así que la contribución divergente debida a los fotones virtuales blandos ($|\mathbf{k}| \sim \lambda$) se reduce, en realidad, con la contribución debida a la radiación de los fotones reales de igual naturaleza. La misma situación encontramos en cualquier otro proceso de dispersión.

Al mismo tiempo queda de manifiesto cómo depende de ω_{\max} la sección eficaz de dispersión. Esta dependencia es el resultado de que la cantidad ω_{\max} aparezca en la propia definición de la dispersión como proceso en el que se puede emitir un número arbitrario de fotones blandos. Naturalmente, la sección eficaz de tal proceso será tanto menor cuanto menor sea el límite ω_{\max} de las frecuencias de los fotones cuya emisión atribuimos al proceso dado de dispersión.

Hallaremos ahora la expresión completa de la corrección radiativa a la sección eficaz de dispersión. Siguiendo las reglas típicas [cf. (66.7)], para la sección eficaz, promediada respecto de las polarizaciones del electrón inicial y sumada respecto de las polarizaciones del electrón final, se encuentra la expresión

$$\begin{aligned} d\sigma = d\sigma^{(1)} + d\sigma_{\text{rad}} = \\ = |e\Phi(\mathbf{q})|^2 \text{Tr} \{ (\hat{p}' + m)(\gamma^0 + \gamma^0 Q_{\text{rad}})(\hat{p} + m)(\gamma^0 + \gamma^0 \bar{Q}_{\text{rad}}) \} \frac{d\sigma'}{32\pi^2}. \end{aligned} \quad (119.6)$$

Según (119.1)

$$\begin{aligned} Q_{\text{rad}} &= a + b \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}, & \bar{Q}_{\text{rad}} &= \gamma^0 Q_{\text{rad}}^+ \gamma^0 = a - b \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}, \\ a &= f(-\mathbf{q}^2) - 1 - \frac{1}{\mathbf{q}^2} \mathcal{P}(-\mathbf{q}^2), & b &= \frac{1}{2m} g(-\mathbf{q}^2). \end{aligned}$$

Con una precisión que alcanza los términos lineales respecto de a y b , la traza en (119.6) es igual a

$$\frac{1}{4} \text{Tr} \{ \dots \} = 2 \left(e^2 - \frac{\mathbf{q}^2}{4} \right) (1 + 2a) - 2bm\mathbf{q}^2.$$

Por consiguiente,

$$d\sigma_{\text{rad}} = 2 \left\{ f_\lambda(-\mathbf{q}^2) - 1 - \frac{1}{\mathbf{q}^2} \mathcal{P}(-\mathbf{q}^2) - \frac{\mathbf{q}^2}{4e^2 - \mathbf{q}^2} g(-\mathbf{q}^2) \right\} d\sigma^{(1)}, \quad (119.7)$$

donde $d\sigma^{(1)}$ es la sección eficaz de dispersión de Born de electrones no polarizados (81.5); al factor de forma f se le ha asignado el subíndice λ para recordar que ha sido «cortado según la masa de un fotón λ ».

A (119.7) hemos de sumar la sección eficaz de emisión de fotones blandos. Si f_λ se representa en la forma

$$f_\lambda(-q^2) = 1 - \frac{a}{2} K \left(\frac{|q|}{2m} \right) \ln \frac{m}{\lambda} + aK_2, \quad (119.8)$$

de acuerdo con (117.11) añadir dicho término equivale a substituir en (119.7) f_λ por

$$f_{\omega_{\max}} = 1 - \frac{a}{2} K \left(\frac{|q|}{2m} \right) \ln \frac{m}{2\omega_{\max}} + \frac{a}{2} K_1 + aK_2. \quad (119.9)$$

Con este cambio, (119.7) da la respuesta definitiva.

Obsérvese que en el límite no relativista *

$$f_{\omega_{\max}} = 1 - \frac{aq^2}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2\omega_{\max}} + \frac{11}{24} \right), \quad q^2 \ll m^2. \quad (119.10)$$

Hay que hacer notar que los caracteres específicos del campo exterior intervienen en la corrección radiativa a la sección eficaz únicamente a través del término $d\sigma^{(1)}$; por el contrario, el factor entre llaves en (119.7) posee un carácter universal. En la aproximación no relativista,

$$d\sigma_{\text{rad}} = - d\sigma^{(1)} \cdot \frac{2a}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{2\omega_{\max}} + \frac{19}{30} \right), \quad q^2 \ll m^2 \quad (119.11)$$

[se incluyen aquí las contribuciones de todos los términos en (119.7)]. En el caso opuesto ultrarrelativista, en cambio, la contribución fundamental es la correspondiente al término $f_{\omega_{\max}} - 1$ y se obtiene

$$d\sigma_{\text{rad}} = - d\sigma^{(1)} \cdot \frac{2a}{\pi} \ln \frac{q^2}{m^2} \ln \frac{e}{\omega_{\max}}, \quad q^2 \gg m^2. \quad (119.12)$$

Haremos notar finalmente que las correcciones por radiación que hemos considerado aquí no conducen a la aparición de efectos de polarización no contenidos en la primera aproximación de Born (en contraste con las correcciones de la segunda aproximación de Born consideradas en el § 118). Ello se debe a que las características específicas de la primera aproximación de Born están ligadas, en último término, con el carácter hermítico de la matriz- S . Esta propiedad, sin embargo, se conserva también al tener en cuenta las correcciones radiativas consideradas, puesto que en esta aproximación no existen estados intermedios reales en el canal de dispersión (de modo que el segundo término de la relación de unitariedad se anula)**.

* Esta expresión difiere de la expresión no relativista (114.20) en el cambio
 $\ln \lambda \rightarrow \ln 2\omega_{\max} - 5/6$.

** El cálculo de las correcciones por radiación a los procesos que sólo aparecen en la segunda aproximación de la teoría de perturbaciones, es considerablemente más pesado y no se efectuará en este libro. Nos limitaremos a dar algunas citas bibliográficas: las correcciones por radiación a la dispersión de un fotón por un electrón pueden verse en L. M. Brown, R. Feynman, Phys. Rev. 85, 231 (1952); a la aniquilación de un par en dos fotones, en J. Harris, L. M. Brown, Phys. Rev. 105, 1656 (1957); a la dispersión de un electrón por un electrón y un positón, en M. Redhead, Proc. Roy. Soc. A220, 210 (1953); P. V. Polovin, ZhETF 31, 449 (1956); a la radiación de frenado, en P. I. Fomin, ZhETF 35, 707 (1958).

§ 120. Desplazamiento radiativo de los niveles atómicos

Las correcciones por radiación conducen a un desplazamiento de los niveles de energía de los estados de enlace de un electrón en un campo exterior (*desplazamiento Lamb*). El caso más interesante de esta especie es el desplazamiento de los niveles del átomo de hidrógeno (o de un ion hidrogenoide)*.

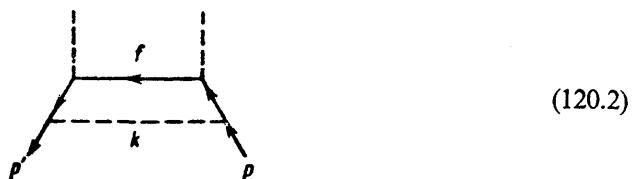
El método consecuente de cálculo de las correcciones a los niveles de energía se basa en la utilización del propagador de electrón exacto en un campo exterior (§ 106). Pero si

$$Z\alpha \ll 1, \quad (120.1)$$

es preferible valerse de un método más simple en el cual el campo exterior se considera como una perturbación.

En la primera aproximación respecto del campo exterior, la corrección radiativa en la interacción del electrón con un campo eléctrico constante se representa por los mismos dos diagramas (118.2) que ya examinamos en relación con el problema de la dispersión del electrón en un campo de aquellas características; el paso de un problema al otro exige solamente una sencilla reformulación (véase más adelante).

Sin embargo, es fácil comprender que de esta manera sólo se puede hallar aquella parte del corrimiento del nivel que viene determinada por la interacción con fotones virtuales de frecuencias suficientemente grandes. En efecto, consideremos, por ejemplo, la corrección radiativa siguiente (respecto del campo exterior) a la amplitud de dispersión del electrón:



[a diferencia de (118.2 b) este diagrama contiene dos vértices del campo exterior]. En el dominio de integración respecto de d^4k en el que k_0 es suficientemente grande, esta corrección contiene una potencia más de $Z\alpha$ y, por ello, carece de importancia. Pero la introducción en el diagrama de un segundo vértice para el campo exterior trae consigo que en aquél aparezca también un propagador más de electrón $G(f)$. Para valores de k pequeños (y terminales exteriores no relativistas p y p') pasan a ser importantes los impulsos de los electrones virtuales f próximos al polo del pro-

* El primero en efectuar el cálculo del corrimiento de los niveles de hidrógeno fue *Bethe* (H. A. Bethe, 1947), con precisión logarítmica y basándose en un modelo no relativista. Este cálculo sirvió de punto de partida para todo el desarrollo ulterior de la electrodinámica cuántica. La diferencia entre los niveles $2s_{1/2}$ y $2p_{1/2}$ (en la primera aproximación no nula de la teoría de perturbaciones) fue calculada exactamente por *Kroll* y *Lamb* (N. M. Kroll, W. E. Lamb, 1949), y la fórmula completa para el corrimiento de los niveles la hallaron *Weisskopf* y *French* (V. Weisskopf, J. B. French, 1949).

pagador $G(f)$. El pequeño denominador que así aparece compensa el factor pequeño adicional $Z\alpha$. Lo mismo vale, evidentemente, para las correcciones de cualquier orden respecto del campo exterior. En otras palabras, en el dominio de frecuencias bajas de los fotones virtuales el campo exterior debe tenerse en cuenta exactamente.

Descompongamos el corrimiento buscado del nivel δE_s * en dos partes

$$\delta E_s = \delta E_s^{(I)} + \delta E_s^{(II)}, \quad (120.3)$$

que proceden, respectivamente, de la interacción con los fotones virtuales cuyas frecuencias se encuentran en las regiones I) $k_0 > \kappa$, II) $k_0 < \kappa$. Elegimos el valor de κ de modo que se tenga

$$(Z\alpha)^2 m \ll \kappa \ll m \quad (120.4)$$

($Z^2\alpha^2m$ es del orden de magnitud de la energía de enlace del electrón en el átomo). En la región I) bastará entonces tener en cuenta el campo del núcleo tan sólo en primera aproximación. En cambio, en la región II) es necesario considerarlo exactamente, pero para ello (en virtud de la condición $\kappa \ll m$) cabe resolver el problema en la aproximación no relativista —no sólo respecto del propio electrón, sino también con relación a todos los estados intermedios. Cuando se cumple la condición (120.4) los dominios de aplicabilidad de los dos métodos de cálculo se solapan, lo que precisamente permite llevar a cabo un riguroso «empalme» de ambas partes de la corrección al nivel.

Componente de alta frecuencia del corrimiento

Consideremos primero la región I. En ella se puede utilizar la corrección a la amplitud de dispersión (119.1) de la que, sin embargo, es necesario excluir previamente la contribución de los fotones virtuales que corresponden a la región II). La contribución de estos fotones al factor de forma g es pequeña, por lo que éste no requiere modificación. En cambio, la contribución de los fotones virtuales de baja frecuencia a la función f es grande debido a la divergencia en el infrarrojo. Por esto, en (119.1) hay que substituir f por la función f_κ de la que se ha excluido ya la región $k_0 < \kappa$.

La exclusión de dicho dominio podría efectuarse directamente restando de f la integral en la región $k_0 < \kappa$. Con todo, el resultado que perseguimos puede obtenerse sin acudir a nuevos cálculos utilizando los del § 119.

Observemos para ello que cabe considerar la exclusión de las frecuencias como uno de los posibles métodos de corte en el infrarrojo. Ahora bien, el resultado para la corrección a la sección eficaz de dispersión no puede depender, evidentemente, de

* En este párrafo E_s designa la energía del electrón en el átomo, sin incluir su energía en reposo. El subíndice s representa el conjunto de los números cuánticos que determinan el estado del átomo.

cómo se haya efectuado el corte, con tal que de acuerdo con el mismo criterio se corte también la probabilidad de emisión de fotones blandos reales, es decir, que en el concepto de dispersión «elástica» se incluya solamente la emisión de fotones cuyas frecuencias están comprendidas entre ω y el valor dado a priori ω_{\max} . Si se elige $\omega_{\max} = \infty$, es innecesario tener en cuenta explícitamente la emisión de fotones. Es claro por ello que f_ω se obtiene a partir de la función $f_{\omega_{\max}}$ definida en el § 119 mediante la simple substitución de ω_{\max} por ∞ . En particular, en el caso no relativista

$$f_\omega - 1 = - \frac{\alpha q^2}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2\omega} + \frac{11}{24} \right). \quad (120.5)$$

Transformemos ahora la corrección (119.1) a la amplitud de dispersión de modo que aparezca como resultado de la corrección correspondiente a la energía potencial efectiva del electrón en el campo. Comparando la amplitud (119.1)

$$- e(u''Q_{\text{rad}}\Phi_u)$$

con la amplitud de dispersión de Born (118.6)

$$- e(u''\Phi_u),$$

vemos que el papel de dicha corrección lo desempeña (en la representación de impulsos) la función

$$e\delta\Phi(q) = eQ_{\text{rad}}(q)\Phi(q). \quad (120.6)$$

En el caso no relativista, tomando para \mathcal{P} y g las expresiones (110.14) y (114.20) y substituyendo en lugar de f la f_ω dada por (120.5), obtendremos

$$\delta\Phi(q) = \left\{ -\frac{\alpha q^2}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2\omega} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right) + \frac{\alpha}{4\pi m} q v \right\} \Phi(q). \quad (120.7)$$

La correspondiente función $\delta\Phi(r)$ en la representación de coordenadas es *:

$$\delta\Phi(r) = \frac{\alpha}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2\omega} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right) \Delta\Phi(r) - i \frac{\alpha}{4\pi m} \gamma \nabla \cdot \Phi(r). \quad (120.8)$$

El desplazamiento del nivel $\delta E_s^{(1)}$ se obtiene promediando $e\delta\Phi(r)$ respecto de

* Hay que subrayar la diferencia entre esta corrección al potencial y la considerada en el § 111. Esta última incluía solamente el efecto de polarización del vacío [diagrama (118.2 a)] sobre el campo de Coulomb como a tal. En cambio, la corrección (120.8) se refiere ya a la interacción del campo con el electrón e incluye también el efecto de cambio en el movimiento de este último [diagrama (118.2 b)].

la función de onda del estado no perturbado del electrón en el átomo, es decir, formando el elemento diagonal de matriz correspondiente*:

$$\delta E_s^{(I)} = \frac{ea}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2\chi} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right) \langle s | \Delta\Phi | s \rangle - i \frac{ea}{4\pi m} \langle s | \nabla\Phi | s \rangle. \quad (120.9)$$

En el primer término basta utilizar la función de electrón no relativista cuando se calcula el promedio. Por el contrario, en el segundo término esta aproximación es insuficiente: la aproximación de orden cero respecto de las funciones no relativistas se anula debido a que las matrices γ carecen de elementos diagonales. En consecuencia, hay que emplear aquí la función relativista aproximada $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$, que hallamos en el § 33, conservando en ella las componentes χ que son pequeñas en la representación típica. Tenemos

$$\psi^* \gamma \psi = \varphi^* \sigma \chi - \chi^* \sigma \varphi$$

y substituyendo la expresión de χ dada por (33.4)

$$\chi = \frac{1}{2m} \sigma \cdot p \varphi = - \frac{i}{2m} \sigma \cdot \nabla \varphi,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \langle s | \gamma \cdot \nabla \Phi | s \rangle &= - \frac{i}{2m} \int \{ \varphi^* (\sigma \cdot \nabla \Phi) (\sigma \cdot \nabla \varphi) + (\nabla \varphi^* \cdot \sigma) (\sigma \cdot \nabla \Phi) \varphi \} d^3x = \\ &= \frac{i}{2m} \int \{ \varphi^* \Delta \Phi \cdot \varphi - 2i \sigma \varphi^* \cdot [\nabla \Phi \times \nabla \varphi] \} d^3x \end{aligned}$$

[al transformar la integral se ha tenido en cuenta la identidad (33.5) y se ha integrado por partes]. Dado que $\Phi = \Phi(r)$, es

$$\nabla \Phi = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d\Phi}{dr},$$

y, en consecuencia,

$$-i\sigma \cdot [\nabla \Phi \times \nabla] = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \sigma \cdot \mathbf{l},$$

donde $\mathbf{l} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ es el operador momento cinético orbital. Finalmente, reuniendo las expresiones obtenidas y substituyendo en (120.9), obtendremos

* Rigurosamente hablando, los factores de forma determinados en el § 114 correspondían al operador vértice con dos terminales de electrón libres ($p^2 = p'^2 = m^2$). Pero para un electrón en un átomo la energía E_s es la de un nivel que en modo alguno está vinculado con p . Sin embargo, en la región I cabe prescindir de esta diferencia.

$$\delta E_s^{(1)} = \frac{e^3}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2\kappa} + \frac{19}{30} \right) \langle s | \nabla \Phi | s \rangle + \frac{e^3}{4\pi m^2} \left\langle s \left| \sigma \cdot \mathbf{l} \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right| s \right\rangle, \quad (120.10)$$

donde ahora en ambos términos el promedio se efectúa ya respecto de la función de onda no relativista.

Componente de baja frecuencia del corrimiento

Para calcular la segunda componente del corrimiento de los niveles, nos valdremos de un procedimiento basado, en último término, en la condición de unitariedad.

En virtud de la posibilidad de emitir un fotón, un estado excitado del átomo es cuasiestacionario (y no rigurosamente estacionario). A un estado de esta naturaleza cabe atribuir un valor complejo de la energía, con una parte imaginaria igual a $-w/2$, donde w es la probabilidad de decaimiento del estado, es decir, en el presente caso, la probabilidad total de emisión de un fotón (véase III, § 132). En la aproximación no relativista la radiación es dipolar y, de acuerdo con (45.7), tenemos

$$\text{Im } \delta E_s = -\frac{1}{2} w_s = -\frac{2}{3} \sum_{s'} |\mathbf{d}_{ss'}|^2 (E_s - E_{s'})^3$$

(donde la suma se extiende a todos los niveles que se encuentran por debajo del considerado, $E_{s'} < E_s$), o bien, en forma equivalente:

$$\text{Im } \delta E_s = -\frac{2}{3} \int_0^\infty d\omega \cdot \sum_{s'} |\mathbf{d}_{ss'}|^2 (E_s - E_{s'})^3 \delta(E_s - E_{s'} - \omega). \quad (120.11)$$

Para hallar ahora la parte real de δE_s , hay que considerar E_s como una variable compleja y efectuar la prolongación analítica. Esto puede hacerse considerando las funciones- δ como debidas a los polos. La regla para rodearlos viene dada, como de ordinario, añadiendo una parte imaginaria negativa a las masas de las partículas virtuales, en el presente caso a las masas m_s' del electrón en los estados intermedios del átomo. El papel de estas masas viene representado por $m_s' = m + E_{s'}$, de modo que hay que hacer

$$E_{s'} \rightarrow E_{s'} - i0,$$

de donde se sigue la sustitución

$$\delta(E_s - E_{s'} - \omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{E_s - E_{s'} - \omega + i0} \quad (120.12)$$

[cf. (108.3)].

Substituyendo (120.12) en (120.11) se encuentra así

$$\text{Im } \delta E_s = \text{Im} \frac{2}{3\pi} \int_0^\infty d\omega \cdot \sum_{s'} |\mathbf{d}_{ss'}|^2 \frac{(E_s - E_{s'})^3}{E_s - E_{s'} - \omega + i0}.$$

La prolongación analítica buscada se obtiene ahora simplemente prescindiendo del símbolo Im. Sin embargo, lo único que necesitamos es separar de δE_s la parte que está ligada con la contribución de frecuencias pertenecientes a la región II: $\omega < \kappa$. Basta para ello substituir el límite superior de la integral por κ . Efectuando la integración, se obtiene el resultado

$$\delta E_s^{(II)} = \frac{2}{3\pi} \sum_{s'} |\mathbf{d}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 \ln \frac{\kappa}{E_{s'} - E_s + i0} \quad (120.13)$$

[en virtud de la desigualdad (120.4) hemos prescindido de la diferencia $E_s - E_{s'}$ frente a κ en el límite superior]. Para lo que sigue sólo nos interesa la parte real del nivel; ésta se obtiene substituyendo en (120.13) el argumento del logaritmo por $\kappa/|E_{s'} - E_s|$.

En la expresión (120.13) transformaremos el término que contiene $\ln \kappa$ reemplazando los elementos de matriz del momento dipolar $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ por los elementos de matriz del impulso $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ y de su derivada $\dot{\mathbf{p}}$:

$$\begin{aligned} \sum_{s'} |\mathbf{d}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 &= -\frac{e^2}{m^2} \sum_{s'} |\mathbf{p}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s) = \\ &= \frac{ie^2}{2m^2} \sum_{s'} \{(\dot{\mathbf{p}})_{ss'} \mathbf{p}_{s's} - \mathbf{p}_{ss'} (\dot{\mathbf{p}})_{s's}\}. \end{aligned}$$

Substituyendo ahora la expresión de $\dot{\mathbf{p}}$ que resulta de la ecuación del movimiento del electrón $\dot{\mathbf{p}} = -e\nabla\Phi$, se obtendrá

$$\begin{aligned} \sum_{s'} |\mathbf{d}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 &= -\frac{ie^3}{2m^2} \sum_{s'} \{(\nabla\Phi)_{ss'} \mathbf{p}_{s's} - \mathbf{p}_{ss'} (\nabla\Phi)_{s's}\} = \\ &= \frac{ie^3}{2m^2} \langle s | \mathbf{p} \nabla\Phi - \nabla\Phi \cdot \mathbf{p} | s \rangle = \frac{e^3}{2m^2} \langle s | \Delta\Phi | s \rangle. \end{aligned} \quad (120.14)$$

Es posible así escribir (120.13) en la forma

$$\delta E_s^{(II)} = \frac{e^3}{3\pi m^2} \langle s | \Delta\Phi | s \rangle \ln \frac{2\kappa}{m} + \frac{2e^2}{3\pi} \sum_{s'} |\mathbf{r}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 \ln \frac{m}{2|E_s - E_{s'}|}. \quad (120.15)$$

Corrimiento total

Finalmente, sumando ambas componentes, se encuentra la siguiente fórmula definitiva para el corrimiento de un nivel:

$$\begin{aligned}\delta E_s = & \frac{2e^2}{3\pi} \sum_{s'} |\mathbf{r}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 \ln \frac{m}{2|E_s - E_{s'}|} + \\ & + \frac{e^3}{3\pi m^2} \frac{19}{30} \langle s | \Delta\Phi | s \rangle + \frac{e^3}{4\pi m^2} \left\langle s \left| \sigma \cdot \mathbf{l} \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right| s \right\rangle \quad (120.16)\end{aligned}$$

(como debía ser, ha desaparecido en ella la cantidad auxiliar \propto) *.

Todos los elementos de matriz en (120.16) se toman con relación a las funciones de onda no relativistas del electrón en el átomo. Para el átomo de hidrógeno (o para un ion hidrogenoide) estas funciones dependen solamente de tres números cuánticos: el número cuántico principal n , el momento cinético orbital l , y su proyección m (pero no del momento cinético total j); los correspondientes niveles de energía, por el contrario, dependen sólo de n . Introduzcamos la notación **

$$L_{nl} = \frac{n^3}{2m(Ze^2)^4} \sum_{n'l'm'} |\langle n'l'm' | \mathbf{r} | nlm \rangle|^2 (E_{n'} - E_n)^3 \ln \frac{m(Ze^2)^2}{2|E_{n'} - E_n|}. \quad (120.17)$$

Los niveles de energía son proporcionales a $(Ze^2)^2$, y la dimensión característica del átomo, a Ze^2 ; por consiguiente, las cantidades L_{nl} definidas por (120.17) no dependen de Z ***. Estas cantidades pueden calcularse numéricamente.

Consideremos ahora por separado los casos $l = 0$ y $l \neq 0$. Cuando $l = 0$ el último término en (120.16) se anula. En el segundo término, utilizaremos la ecuación

$$e \Delta\Phi = 4\pi Ze^2 \delta(\mathbf{r}),$$

a la que satisface el potencial del campo de Coulomb del núcleo. De aquí se sigue

$$\langle nlm | \Delta\Phi | nlm \rangle = 4\pi Ze^2 |\psi_{nlm}(0)|^2 = \begin{cases} 4m^3 (Ze^2)^4 n^{-3}, & l = 0, \\ 0, & l \neq 0 \end{cases}$$

[véase (34.3)]. En cuanto al primer término, introduciremos la notación (120.17) y aplicaremos una vez más la igualdad (120.14):

$$\sum_{n'l'm'} |\langle n'l'm' | \mathbf{r} | n00 \rangle|^2 (E_{n'} - E_n)^3 = \frac{e}{2m^2} \langle n00 | \Delta\Phi | n00 \rangle = \frac{2m(Ze^2)^4}{n^3}.$$

* La determinación de las correcciones que corresponden al orden siguiente en el desplazamiento de los niveles exige cálculos muy complicados. Un resumen sumamente completo y la deducción sistemática de tales correcciones (junto con la correspondiente bibliografía) puede encontrarse en los artículos: G. W. Erickson, D. R. Yennie, Ann. of Physics 35, 271, 447 (1965).

** Los elementos de matriz de \mathbf{r} son diagonales respecto del número j ; por consiguiente, la suma respecto de s en (120.16) se reduce a la suma respecto de n, l, m .

*** En virtud de la isotropía del espacio la suma (120.17) tampoco depende, naturalmente, del número cuántico m .

El resultado que se obtiene es la siguiente expresión para el corrimiento de los términos- s :

$$\delta E_{n0} = \frac{4mc^2Z^4\alpha^5}{3\pi n^3} \left[\ln \frac{1}{(Z\alpha)^2} + L_{n0} + \frac{19}{30} \right] \quad (120.18)$$

(unidades ordinarias). He aquí los valores numéricos de algunas cantidades L_{n0} :

$$\begin{array}{cccccc} n = & 1 & 2 & 3 & 4 & \infty \\ L_{n0} = & -2,984 & -2,812 & -2,768 & -2,750 & -2,721 \end{array}$$

Los niveles no excitados son $E_n = -mc^2(Z\alpha)^2/2n^2$; en consecuencia, el valor relativo del corrimiento por radiación será

$$\left| \frac{\delta E_{n0}}{E_{n0}} \right| \sim Z^2\alpha^3 \ln \frac{1}{Z\alpha}. \quad (120.19)$$

En el caso $l \neq 0$, se anula en (120.16) el segundo término. En cuanto al tercero, éste puede calcularse mediante las fórmulas deducidas en el § 34; con él aparece la dependencia del desplazamiento de los niveles respecto del número j . Se obtiene finalmente

$$\delta E_{nlj} = \frac{4mc^2Z^4\alpha^5}{3\pi n^3} \left[L_{nl} + \frac{3}{8} \frac{j(j+1) - l(l+1) - 3/4}{l(l+1)(2l+1)} \right], \quad l \neq 0. \quad (120.20)$$

Así, pues el desplazamiento radiativo suprime la última degeneración que quedaba después de tener en cuenta la interacción spin-órbita, es decir, la degeneración de los niveles con iguales valores de n y j , pero valores diferentes de $l = j \pm 1/2$. Así, el valor numérico de L_{21} es $L_{21} = +0,030$ y de (120.18-20) se deduce la siguiente expresión para la diferencia de los niveles $2s_{1/2}$ y $2p_{1/2}$ del átomo de hidrógeno:

$$E_{20\frac{1}{2}} - E_{21\frac{1}{2}} = 0,41mc^2\alpha^5$$

(a esta diferencia corresponde una frecuencia de 1050 MHz).

§ 121. Desplazamiento radiativo de los niveles de los átomos mesónicos

Al final del § 115 se puso de relieve el importantísimo papel que representa el efecto de la polarización del vacío electrónico en las correcciones radiativas (de segunda aproximación) al momento magnético del muón. En mayor grado todavía, una situación análoga se produce (ya en primera aproximación) para el corrimiento radiativo de los niveles del hidrógeno muónico, es decir, del sistema hidrogenoide constituido por un protón y un mesón- μ (*A. D. Galanin, I. Ia. Pomeranchuk, 1952*).

Los cálculos efectuados en el párrafo que precede relativos al corrimiento de los niveles en un átomo ordinario tienen en cuenta, en particular, el efecto de polarización del vacío electrónico [lazo de electrón en el diagrama (118.2 a)]. Si para un átomo mesónico se introduce de manera análoga el efecto de polarización del vacío muónico, todo el cálculo precedente se aplica también a este caso, con sólo substituir en vez de la masa del electrón $m = m_e$ la masa del muón m_μ . Sin embargo, dado que el valor relativo del corrimiento de los niveles resultó ser independiente de la masa del electrón [véase (120.19)], para el hidrógeno muónico se obtendría exactamente el mismo resultado.

Es fácil ver, sin embargo, que la contribución del efecto de polarización del vacío electrónico al corrimiento de los niveles de un átomo mesónico es considerablemente mayor. En efecto, reemplazar en el diagrama el lazo de electrón por uno de muón significa substituir el operador polarización electrónico por el muónico. Pero el operador polarización $\mathcal{P}(q^2)$ es inversamente proporcional al cuadrado de la masa de la partícula (para valores no relativistas de q^2). Es claro por ello que dicho cambio conducirá a que el efecto aumente en un factor $(m_\mu/m)^2$. El orden de magnitud del desplazamiento de los niveles, determinado precisamente por dicha contribución, será, por lo tanto, igual a

$$\frac{\delta E}{|E|} \sim \alpha^3 \left(\frac{m_\mu}{m_e} \right)^2,$$

es decir, de un orden cuatro veces mayor que en el caso del hidrógeno ordinario *. El origen de este efecto puede identificarse de manera más intuitiva recordando que la deformación del potencial de Coulomb por la polarización del vacío electrónico alcanza distancias $\sim 1/m_e$ (§ 111). En el átomo de hidrógeno ordinario, el electrón se encuentra a distancias del núcleo que son del orden de magnitud de $1/m_e$, es decir, fuera de la región fundamental de deformación del campo; por el contrario, en el hidrógeno mesónico, el muón se halla a distancias $\sim 1/m_\mu \alpha$, que caen justo dentro de tal región.

En el cálculo exacto del corrimiento de los niveles de un átomo mesónico es imposible, sin embargo, emplear expresiones no relativistas aproximadas del operador polarización, como se hizo en la fórmula (120.7) utilizada al calcular el desplazamiento de los niveles del átomo ordinario. Ocurre, en efecto, que los impulsos característicos del muón en un átomo de hidrógeno mesónico son tales que $|\mathbf{p}_\mu| \sim \sim \alpha m_\mu$. Para un muón estos impulsos resultan ser no relativistas, pero respecto del electrón son ya relativistas.

Por consiguiente, debemos emplear la expresión relativista completa (111.5)

* Por análoga razón la contribución de la polarización del vacío muónico al corrimiento de los niveles del átomo de hidrógeno ordinario será, por el contrario, del todo insignificante.

para el potencial efectivo del campo del núcleo deformado por la polarización del vacío electrónico. El corrimiento de un nivel se determina promediando respecto de la función de onda del muón en el átomo:

$$\delta E_{nl} = -|e| \int_0^\infty |\psi_{nl}|^2 \delta\Phi(r) d^3x = -|e| \int_0^\infty R_{nl}^2(r) \delta\Phi(r) r^2 dr, \quad (121.1)$$

donde R_{nl} es la parte radial de la función de onda de Coulomb (no relativista). Para un ión hidrogenoide cuya carga nuclear es $Z|e|$, las funciones $R_{nl}(r)$ dependen de r tan sólo a través de la combinación sin dimensiones $\rho = Z\alpha m_\mu r$ (que es la distancia medida en unidades coulombianas). Teniendo esto en cuenta y substituyendo en vez de $\delta\Phi(r)$ el valor que se deduce de (111.5) (con la carga $Z|e|$ en lugar de e_1), la integral (121.1) adopta la forma

$$\delta E_{nl} = -\frac{2}{3\pi} Z\alpha^3 m_\mu Q_{nl}\left(\frac{m_e}{Z\alpha m_\mu}\right), \quad (121.2)$$

donde

$$Q_{nl}(x) = \int_0^\infty \rho d\rho \int_1^\infty R_{nl}^2(\rho) e^{-2x\rho\xi} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} d\xi.$$

Así, para algunos de los primeros niveles del hidrógeno mesónico el cálculo numérico da las siguientes estimaciones del corrimiento relativo

$$\frac{\delta E_{10}}{|E_{10}|} = -6,4 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{\delta E_{20}}{|E_{20}|} = -2,8 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{\delta E_{21}}{|E_{21}|} = -2,0 \cdot 10^{-5}.$$

§ 122. Ecuación relativista para los estados ligados

El método que se aplicó al cálculo del corrimiento radiativo de los niveles atómicos en los párrafos que preceden, no es aplicable a la resolución del problema de determinar las correcciones a los niveles del positonio, es decir, de un sistema constituido por dos partículas equiparables, de las que ninguna se puede considerar como fuente de un campo exterior respecto de la otra.

El método sistemático para resolver este problema se basa en que los niveles de energía de los estados ligados son polos de la amplitud exacta de dispersión mutua de estas dos partículas (como función de su energía total en el sistema del centro de masa). En efecto, el positonio, en cada uno de sus estados discretos, se puede considerar como «partícula intermedia» de determinada masa, mediante cuya formación puede tener lugar el proceso de dispersión electrón-positón; ahora bien, a cada

estado intermedio «de una partícula» corresponde un polo de la amplitud de dispersión (claro está, estos polos se encuentran en la región no física de los 4-impulsos de las partículas que se dispersan).

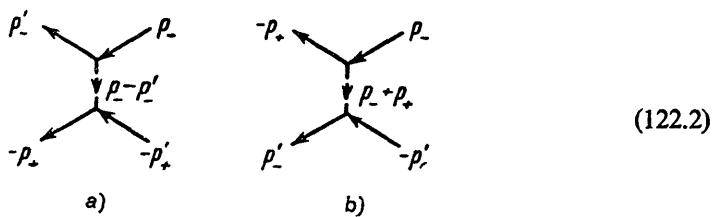
Según (103.17) la amplitud de dispersión exacta se construye a partir de la parte vértice de «cuatro cabos» $\Gamma_{ik, lm}$ y de las amplitudes de polarización u de las partículas. Estas amplitudes, evidentemente, no tienen relación alguna con las singularidades polares y, por ello, es preferible ignorarlas del todo y limitarnos a los polos de la propia parte vértice, es decir, de la función

$$\Gamma_{ik, lm}(p'_-, -p_+; p_-, -p'_+), \quad (122.1)$$

donde las notaciones correspondientes a los 4-impulsos de los terminales exteriores del diagrama (103.12) corresponden a la dispersión del positón por el electrón.

Hay que subrayar que la afirmación acerca de la existencia de los polos se refiere precisamente a la amplitud exacta de dispersión o a la parte vértice exacta; en cambio, ninguno de los términos de la serie a que conduce la teoría de perturbaciones presenta, por separado, polo alguno. Esto último es evidente sin más que considerar que en los diagramas de Feynman de cada aproximación figuran solamente líneas de electrón (y de fotón), pero no líneas de «una partícula compuesta» — el positonio como un todo. De aquí se sigue a su vez que el cálculo de la amplitud de dispersión cerca de sus polos exige sumar los términos de una sucesión infinita de diagramas. Veamos cuáles son precisamente los que aparecen en esta sucesión.

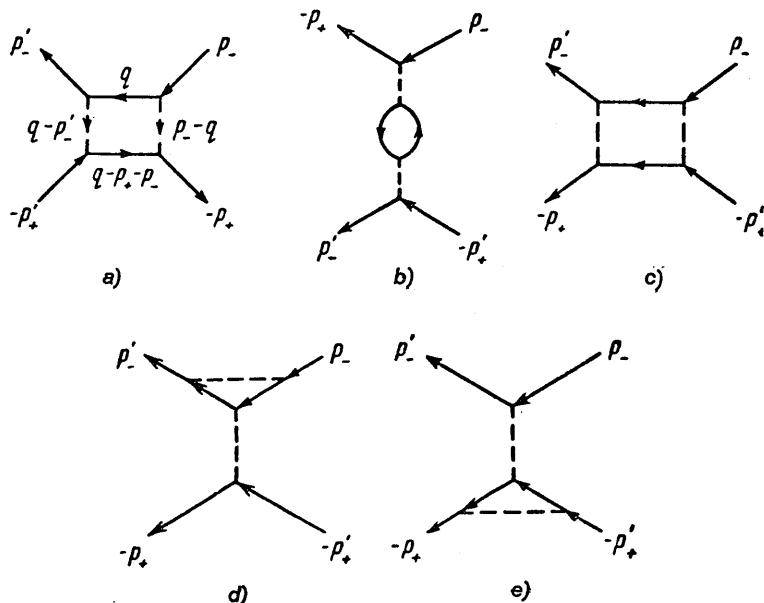
En la primera aproximación no nula (primera respecto de α) de la teoría de perturbaciones, a la parte vértice (122.1) corresponden dos diagramas de segundo orden:



o en forma analítica:

$$\Gamma_{ik, lm} = -e^2 \gamma_{il}^\mu \gamma_{km}^\nu D_{\mu\nu}(p_- - p'_-) + e^2 \gamma_{im}^\mu \gamma_{kl}^\nu D_{\mu\nu}(p_- + p_+). \quad (122.3)$$

En la siguiente aproximación (segunda respecto de α), se tienen ya diez diagramas de cuarto orden:



y cinco diagramas más que se distinguen por la permutación $p_- \leftrightarrow -p'_+$. Todos estos diagramas contienen, en comparación con los diagramas (122.2), una potencia más $e^2 = \alpha$. Demostraremos, sin embargo, que en el diagrama a) esta potencia más de reducción queda compensada por un pequeño denominador (para impulsos pequeños del electrón y del positón).

Consideraremos todas las magnitudes en el sistema del «centro de masa». Sin embargo, dado que no se supone que los 4-impulsos de los terminales exteriores de los diagramas sean físicos (es decir, $p^2 \neq m^2$), a pesar de que en este sistema sea $p_+ = -p_-$ se tendrá, con todo, $\epsilon_+ \neq \epsilon_-$. Así, pues, los 4-impulsos de los terminales son

$$\begin{aligned} p_- &= (\epsilon_-, \mathbf{p}), & p_+ &= (\epsilon_+, -\mathbf{p}), \\ p'_- &= (\epsilon'_-, \mathbf{p}'), & p'_+ &= (\epsilon'_+, -\mathbf{p}'), \\ \epsilon_- + \epsilon_+ &= \epsilon'_- + \epsilon'_+. \end{aligned} \quad (122.5)$$

La energía de enlace del electrón y del positón en el positonio es $\sim ma^2$. Por consiguiente, en la proximidad de los polos de la amplitud de dispersión, que es la región que nos interesa, valdrán las relaciones

$$\begin{aligned} |p| &\sim |p'| \sim ma \ll m, \\ |\epsilon_- - m| &\sim |\epsilon_+ - m| \sim \frac{p^2}{m} \sim ma^2, \dots \end{aligned} \quad (122.6)$$

La contribución a la parte vértice debida al diagrama (122.4 a) es

$$\Gamma_{ik, lm}^{(4a)} = -ie^4 \int (\gamma^\lambda G(q)\gamma^\mu)_{il} (\gamma^\nu G(q-p_- - p_+) \gamma^\rho)_{km} \times \quad (122.7)$$

$$\times D_{\lambda\rho}(q-p'_-) D_{\mu\nu}(p_- - q) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}.$$

En la integral (122.7), la región de valores $q^\mu = (q_0, \mathbf{q})$, próximos a la vez a los polos de ambas funciones G , es la que más cuenta. En esta región $|\mathbf{q}|$ y $|q_0 - m|$ son pequeños y los propagadores de electrón se escriben

$$G(q) = \frac{\gamma^0 q_0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{q} + m}{(q_0 + m)(q_0 - m) - \mathbf{q}^2 + i0} \approx \frac{\gamma^0 + 1}{2} \frac{1}{q_0 - m - \frac{\mathbf{q}^2}{2m} + i0},$$

$$G(q - p_- - p_+) \approx \frac{\gamma^0 - 1}{2} \frac{1}{q_0 - \epsilon_- - \epsilon_+ + m + \frac{\mathbf{q}^2}{2m} - i0}. \quad (122.8)$$

Los polos de los denominadores de estas dos expresiones se encuentran a lados distintos del eje real en el plano de la variable compleja q_0 ; cerrando el camino de integración a lo largo de este eje, digamos en el semiplano superior, calcularemos la integral respecto de dq_0 mediante el residuo en el correspondiente polo*. Se encuentra así que

$$\Gamma^{(4a)} \sim e^4 \int \frac{d^3 q}{(q - p'_-)^2 (p_- - q)^2 \left(2m - \epsilon_- - \epsilon_+ + \frac{\mathbf{q}^2}{m} \right)},$$

y de aquí se sigue, teniendo en cuenta (122.6), la estimación

$$\Gamma^{(4a)} \sim \alpha^2 \frac{(ma)^3}{(ma)^4 ma^2} = \frac{1}{m^2 a}.$$

Este mismo orden de magnitud tiene también la contribución en Γ debida al diagrama de segundo orden (122.2 a) [primer término en (122.3)], con lo que queda demostrada la afirmación formulada al principio. Una situación análoga se presenta también en todas las demás aproximaciones de la teoría de perturbaciones.

Por lo tanto, el cálculo que nos interesa de la parte vértice cerca de sus polos exige sumar los elementos de una sucesión infinita de diagramas «anormalmente grandes» con estados intermedios del mismo tipo que el de las líneas interiores del

* En cambio, para el diagrama (122.4 c), que difiere del (122.4 a) en que los sentidos de las líneas de electrón son los opuestos, ambos polos se encontrarían a un mismo lado del eje real, de modo que con las simplificaciones indicadas la integral se anularía.

diagrama (122.4 a). Es característico de estos diagramas el que se pueden dividir entre los terminales p_- , $-p_+$ y p'_- , $-p'_+$ en partes unidas solamente por dos líneas de electrón*. Al conjunto de todos los diagramas que no satisfacen esta condición lo llamaremos parte vértice «compacta» y se designará por $\tilde{\Gamma}_{ik, lm}$; dado que en ella no aparecen diagramas anormalmente grandes, estas cantidades se pueden calcular de acuerdo con la teoría ordinaria de perturbaciones. Así, en primera aproximación $\tilde{\Gamma}$ viene determinada por los dos diagramas de segundo orden (122.2), y en la cuarta, por ocho diagramas de cuarto orden [es decir, por todos los diagramas excluidos los (122.4, a-b)].

Clasificando las partes vértice no compactas según el número de los «enlaces dobles» contenidos en ellas, se puede representar Γ en forma de serie con infinitos términos:

$$\begin{array}{c} p' \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} p_- \\ \diagup \quad \diagdown \\ -p_+ \end{array} = \begin{array}{c} i\tilde{\Gamma} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} i\tilde{\Gamma} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} i\tilde{\Gamma} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} + \dots \quad (122.9)$$

donde todas las líneas continuas de trazo grueso interiores son propagadores exactos \mathcal{G} (una serie de este tipo se suele calificar de «en escalera»). Para sumar esta serie, «multipliquemosla» a la izquierda por un $\tilde{\Gamma}^{**}$:

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} + \dots$$

Comparando ahora esta serie con la (122.9) de partida, vemos que

$$\begin{array}{c} p' \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} q \\ \diagup \quad \diagdown \\ -p'_+ - p'_- \end{array} = \begin{array}{c} p' \\ \diagup \quad \diagdown \\ -p'_+ - p'_+ \end{array} - \begin{array}{c} p' \\ \diagup \quad \diagdown \\ -p'_+ - p'_+ \end{array} \quad (122.10)$$

Esta igualdad gráfica equivale a la siguiente ecuación integral:

$$\begin{aligned} i\tilde{\Gamma}_{ik, lm}(p'_-, -p_+; p_-, -p'_+) &= i\tilde{\Gamma}_{ik, lm}(p'_-, -p_+; p_-, -p'_+) + \\ &+ \int \tilde{\Gamma}_{ir, sm}(p'_-, q - p'_+ - p'_-; q, -p'_+) \mathcal{G}_{st}(q) \mathcal{G}_{nr}(q - p'_+ - p'_-) \times \\ &\times \Gamma_{tk, ln}(q, -p_+; p_-, q - p'_+ - p'_-) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}. \end{aligned} \quad (122.11)$$

* Esta definición incluye todos los diagramas anormalmente grandes, pero comprende también, junto con ellos, otros que son «normales», por ejemplo, el diagrama (122.4 b).

** Esto es, multiplicamos todos los términos de la serie por $\tilde{\Gamma}$ y dos \mathcal{G} y efectuamos la correspondiente integración respecto de los 4-impulsos de los nuevos enlaces interiores.

Las funciones $\tilde{\Gamma}$ y \mathcal{G} se calculan mediante la teoría de perturbaciones, y luego la ecuación (122.11) ofrece, en principio, la posibilidad de calcular Γ con toda la precisión que se quiera.

Con todo, para determinar los niveles de energía basta conocer la posición de los polos de la función Γ . Cerca de los mismos se tiene $\Gamma \gg \tilde{\Gamma}$, de modo que cabe prescindir del primer término del segundo miembro en (122.11) [segundo diagrama a la derecha en (122.10)] y la ecuación pasa a ser homogénea respecto de Γ . En ella las variables p_+ , p_- , como también los índices k , l , se comportan como parámetros, la dependencia respecto de los cuales sigue siendo arbitraria (no viene determinada por la propia ecuación)*. Prescindiendo de estos parámetros (y , junto con ellos, también de los apóstrofos en las variables que subsisten p'_+ , p'_-), obtendremos la ecuación

$$\begin{aligned} i\Gamma_{i,m}(p_-; -p_+) = & \int \tilde{\Gamma}_{ir,sm}(p_-, q-p_+-p_-; q, -p_+)\mathcal{G}_{st}(q) \times \\ & \times \mathcal{G}_{nr}(q-p_+-p_-)\Gamma_{t,n}(q; q-p_+-p_-) \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \end{aligned} \quad (122.12)$$

(E. E. Salpeter, H. A. Bethe, 1951).

Escrita en el sistema del centro de masa ($p_+ + p_- = 0$), la ecuación (122.12) tiene solución únicamente para determinados valores $\epsilon_+ + \epsilon_-$, que dan precisamente los niveles de energía del positonio. La función $\Gamma_{i,m}$ representa en todo esto tan sólo un papel auxiliar. En la práctica, es preferible introducir en su lugar otra función:

$$\chi_{sr}(p_1, p_2) = \mathcal{G}_{st}(p_1)\Gamma_{t,n}(p_1; p_2)\mathcal{G}_{nr}(p_2). \quad (122.13)$$

Entonces la ecuación (122.12) toma la forma

$$\begin{aligned} i[\mathcal{G}^{-1}(p_-)\chi(p_-, -p_+)\mathcal{G}^{-1}(-p_+)]_{im} = & \\ = & \int \tilde{\Gamma}_{ir,sm}(p_-, q-p_+-p_-; q, -p_+)\chi_{sr}(q, q-p_+-p_-) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \quad (122.14)$$

en la cual $\tilde{\Gamma}$ actúa como núcleo de un operador integral. Conforme se recordó ya, es posible calcular $\tilde{\Gamma}$ mediante la teoría de perturbaciones; lo mismo vale también, naturalmente, para la función \mathcal{G}^{-1} .

Demostremos que en la primera aproximación (respecto de α) de la teoría de perturbaciones la igualdad (122.14) se reduce, como era de esperar, a la ecuación relativista de Schrödinger para el positonio.

En la primera aproximación no relativista, $\tilde{\Gamma}$ viene determinado por un único

* Cf. la situación análoga que se presentó al final del § 106, en la que al pasar a la ecuación integral homogénea (106.23) desapareció la dependencia respecto de la variable r' .

diagrama, el (122.2, a) [el diagrama de aniquilación del tipo (122.2, b) se anula en esta aproximación] *. Como en el caso análogo del § 83, conviene elegir el propagador de fotón en el contraste coulombiano (77.12-13), bastando introducir en él la componente D_{00} . Entonces

$$\tilde{\Gamma}_{tr, sm}(p_-, q - p_+ - p_-; q, -p_+) = -e^2 \gamma_{is}^0 \gamma_{rm}^0 D_{00}(q - p_-) = \\ = -U(q - p_-) \gamma_{is}^0 \gamma_{rm}^0,$$

donde

$$U(q) = -\frac{4\pi e^2}{q^2}$$

es la componente de Fourier de la energía potencial de interacción de Coulomb entre el positón y el electrón. La ecuación (122.14) toma la forma

$$i\chi_{im}(p_-, -p_+) = \\ = \left[G(p_-) \gamma^0 \int U(q - p_-) \chi(q, q - p_+ - p_-) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \cdot \gamma^0 G(-p_+) \right]_{im}, \quad (122.15)$$

donde se han substituido también los propagadores exactos \mathcal{G} por los propagadores de los electrones libres G . Para estos se tienen las expresiones aproximadas [cf. (122.8)]

$$G(p_-) \approx \frac{1 + \gamma^0}{2} g(p_-), \quad G(-p_+) = \frac{1 - \gamma^0}{2} g(p_+),$$

donde se han separado los factores matriciales y $g(p)$ es la función escalar

$$g(p) = \frac{1}{\epsilon - m - \frac{p^2}{2m} + i0}. \quad (122.16)$$

Substituyendo estas expresiones en (122.15), se observa que todos los elementos de matriz diferentes de cero

$$\left[\frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^0 \chi \gamma^0 \frac{1 - \gamma^0}{2} \right]_{im} = \left[\frac{\gamma^0 + 1}{2} \chi \frac{\gamma^0 - 1}{2} \right]_{im}$$

coinciden con los elementos $-\chi_{im}$. Por consiguiente, la ecuación matricial (122.15) equivale a la ecuación para la función escalar

$$i\chi(p_-, -p_+) = -g(p_-) g(p_+) \int U(q - p_-) \chi(q, q - p_+ - p_-) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}. \quad (122.17)$$

* Recordaremos que las velocidades de las partículas en el positonio son tales que $v/c \sim \alpha$. En este sentido, el desarrollo respecto de α y de $1/c$ están ligados entre sí.

Introduzcamos ahora en vez de p_+, p_- las variables

$$p = (\epsilon, \mathbf{p}) = \frac{p_- - p_+}{2}, \quad P = p_- + p_+$$

(los 4-impulsos correspondientes al movimiento de las partículas y al del positonio como un todo). En el sistema del centro de masa

$$P = (E + 2m, 0),$$

donde se ha designado por $E + 2m$ la energía total, es decir, E es el nivel de energía contado a partir de la masa en reposo. Expresándola en función de estas variables, escribiremos (122.17) en la forma

$$\begin{aligned} i\chi(p, P) &= -g\left(p + \frac{P}{2}\right)g\left(-p + \frac{P}{2}\right) \int U(\mathbf{q} - \mathbf{p})\chi\left(\mathbf{q} - \frac{P}{2}, P\right) \frac{d^4q}{(2\pi)^4} = \\ &= -g\left(p + \frac{P}{2}\right)g\left(-p + \frac{P}{2}\right) \int U(\mathbf{q}' - \mathbf{p})\chi(\mathbf{q}', P) \frac{d^4q'}{(2\pi)^4}. \end{aligned}$$

En esta ecuación P interviene ya tan sólo como parámetro y la función χ aparece en el segundo miembro de la igualdad únicamente como integrando

$$\psi(\mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(q, P) dq_0.$$

Una vez integrados ambos miembros de la igualdad respecto de $d\epsilon$, obtendremos la siguiente ecuación en la que sólo aparece ψ como incógnita:

$$\psi(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g\left(p + \frac{P}{2}\right)g\left(-p + \frac{P}{2}\right) d\epsilon \int U(\mathbf{q} - \mathbf{p})\psi(\mathbf{p}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}$$

En ella,

$$g\left(\pm p + \frac{P}{2}\right) = \frac{1}{\pm \epsilon + \frac{E}{2} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i0}.$$

Cerrando el camino de integración respecto de $d\epsilon$, por ejemplo, en el semiplano superior de la variable compleja ϵ , la integral se calcula a partir del residuo en el correspondiente polo y finalmente se obtiene

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m} - E\right)\psi(\mathbf{p}) + \int U(\mathbf{p} - \mathbf{q})\psi(\mathbf{q}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = 0. \quad (122.18)$$

Ésta es precisamente la ecuación de Schrödinger para el positonio en la representación de impulsos.

Si para $\tilde{\Gamma}$ nos limitásemos a los diagramas (122.2), pero en ellos tuviéramos en cuenta (como también en \mathcal{G}) los términos siguientes del desarrollo respecto de $1/c$, obtendríamos la ecuación de Breit (§ 83). Por otra parte, la introducción de los diagramas (122.4) (junto con los términos siguientes del desarrollo respecto de $1/c$) da las correcciones de radiación a los niveles del positonio; sin embargo, el cálculo pasa a ser muy complicado.

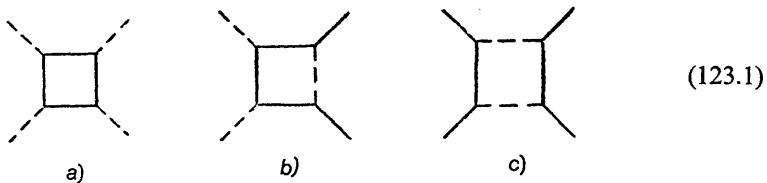
Únicamente con carácter informativo, daremos la diferencia de los niveles fundamentales del orto- y del parapositonio calculada con estas correcciones *:

$$E(^3S_1) - E(^1S_0) = \alpha^2 \frac{me^4}{2\hbar^2} \left\{ \frac{7}{6} - \left(\frac{16}{9} + \ln 2 \right) \frac{\alpha}{\pi} \right\} \quad (122.19)$$

(el primer término entre corchetes es el desdoblamiento de estructura fina, véase el problema 2, § 84). Conviene hacer notar que la corrección radiativa al nivel tiene el mismo orden de magnitud que la probabilidad de aniquilación del parapositonio [véase (89.4)]. Esto significa que, en la aproximación considerada, el nivel 1S_0 pasa a ser complejo [$E(^1S_0)$ en (122.19) es su parte real]. Claro está, la naturaleza compleja de los niveles resulta automáticamente de la ecuación (122.14) en la correspondiente aproximación.

§ 123. Doble relación de dispersión

El bloque que sigue en complejidad a la parte vértice con tres líneas exteriores es un bloque con cuatro terminales. En la electrodinámica cuántica son posibles tres diagramas simples de este tipo:



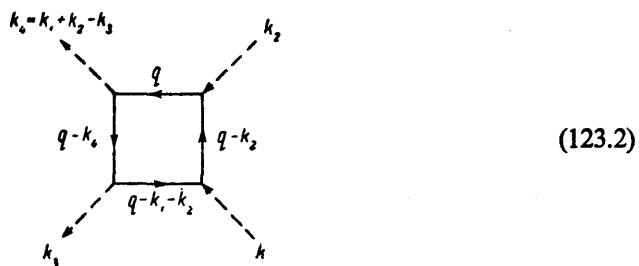
El primero de ellos describe la dispersión de un fotón por un fotón. Los otros representan términos individuales de las correcciones radiativas: a la dispersión del fotón por un electrón (diagrama *b*) y a la dispersión de un electrón por un electrón (diagrama *c*).

Dedicamos este párrafo al estudio de algunas propiedades generales de los dia-

* R. Karplus, A. Klein, Phys. Rev. 87, 848 (1952).

gramas de esta especie. Pero para simplificar y concretar, nos referiremos en la exposición a un diagrama determinado, el (123.1, a).

Designaremos las líneas de impulsos de este diagrama como sigue:



Los 4-impulsos k_1, k_2, k_3, k_4 corresponden a fotones reales, con lo cual sus cuadrados serán iguales a cero.

Separando la dependencia respecto de las polarizaciones de los fotones, cabe expresar la amplitud M_{fi} que corresponde al diagrama (123.2) mediante algunas funciones escalares de los 4-impulsos de los fotones. Éstas son las amplitudes invariantes de las que se habló en el § 71, y su determinación concreta para la dispersión fotón-fotón se llevará a cabo en el párrafo que sigue. Dado que son escalares, dependen solamente de variables asimismo escalares, para las que podemos elegir, por ejemplo, dos cualesquiera de las magnitudes

$$s = (k_1 + k_2)^2, \quad t = (k_1 - k_3)^2, \quad u = (k_1 - k_4)^2, \quad s + t + u = 0; \quad (123.3)$$

en lo que sigue tomaremos como independientes s y t .

Cada una de las amplitudes invariantes (que designaremos aquí con la misma letra M) se puede representar por una integral de la forma

$$M = \int \frac{iB d^4q}{[q^2 - m^2] [(q - k_4)^2 - m^2] [(q - k_1 - k_2)^2 - m^2] [(q - k_2)^2 - m^2]}, \quad (123.4)$$

$$m^2 \rightarrow m^2 - i0,$$

donde B es una cierta función de todos los 4-impulsos; los factores en el denominador proceden de los propagadores de los cuatro electrones virtuales.

Para valores de s y t suficientemente pequeños, las amplitudes M son reales (más precisamente, se puede conseguir que lo sean mediante una elección adecuada del factor de fase). En efecto, que s sea pequeño impide la creación de partículas reales por fotones (pares electrón-positrón) en el canal- s , y el que lo sea t , el que tal

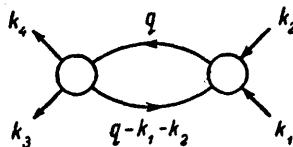
creación se produzca en el canal- t *. En otras palabras, en ambos canales no hay estados intermedios reales que podrían conducir, de acuerdo con la condición de unitariedad, a la aparición de una parte imaginaria en la amplitud.

Hagamos crecer ahora s manteniendo constante (y pequeño) el valor de t . Para $s > 4m^2$, en la amplitud M aparece una componente imaginaria ligada con la posibilidad de creación de un par por dos fotones en el canal- s . Por ello, cabe escribir para M la relación de dispersión «respecto de la variable s »:

$$M(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_{1s}(s', t)}{s' - s - i0} ds', \quad (123.5)$$

donde $A_{1s}(s, t)$ representa la parte imaginaria de $M(s, t)$.

Al igual que para cualquier diagrama del tipo

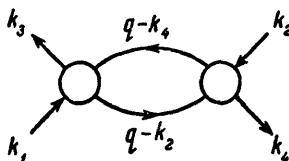


$A_{1s}(s, t)$ se calcula siguiendo la regla (112.9) de substituir en la integral (123.4) los correspondientes factores polares por funciones- δ :

$$2iA_{1s}(s, t) = (2\pi i)^2 \int \frac{iB \delta(q^2 - m^2) \delta[(q - k_1 - k_2)^2 - m^2]}{[(q - k_4)^2 - m^2][(q - k_2)^2 - m^2]} d^4q, \quad (123.6)$$

efectuándose la integración en el semiespacio- q en el que $q^0 > 0$.

Podemos dar un importante paso adelante, observando que la integral (123.6) tiene una estructura (en lo que concierne a sus singularidades polares) del mismo tipo que la amplitud de reacción representada por un diagrama de la forma



* Las líneas exteriores se han representado en el diagrama (123.2) de modo que sus direcciones (orientadas) corresponden al canal- s . En el canal- t , deben ser entrantes las líneas 1 y 3, de modo que los 4-impu-los de los fotones iniciales serían k_1 y $-k_2$. Las regiones físicas para la dispersión fotón-fotón respecto de las variables s, t, u son los sectores rayados en la figura 10. Así, al canal- s corresponde el dominio en el que $s > 0, t < 0, u < 0$.

En consecuencia, también las propiedades analíticas de $A_{1s}(s, t)$ como funciones de t serán análogas a las propiedades analíticas de esta amplitud. En particular, en la función $A_{1s}(s, t)$ puede aparecer (al aumentar t) una parte imaginaria únicamente cuando los dos factores del denominador tiendan a cero simultáneamente. Sin embargo, esto no tendrá lugar inmediatamente después de alcanzar el valor $t = -4m^2$, es decir, el umbral de creación de un par en el canal t . En efecto, la existencia de funciones- δ en el integrando limita un dominio de integración en el espacio- q que puede resultar incompatible con el valor $t = -4m^2$. La extensión del dominio de integración depende del valor de s (los argumentos de las funciones- δ contienen k_1 y k_2). Como consecuencia, también depende de s el valor límite $t = t_0(s)$ a partir del cual la función $A_{1s}(s, t)$ pasa a ser compleja.

De manera análoga a como la función $M(s, t)$ se expresa en función de su parte imaginaria $A_{1s}(s, t)$ por la fórmula (123.5), también la función $A_{1s}(s, t)$ puede expresarse, a su vez, a partir de $A_2(s, t) = \text{Im } A_{1s}(s, t)$ mediante una relación de dispersión «respecto de la variable t »:

$$A_{1s}(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{t_c(s)}^{\infty} \frac{A_2(s, t')}{t' - t - i0} dt'. \quad (123.7)$$

Substituyendo ahora (123.7) en (123.5), obtendremos una *doble relación de dispersión, o representación de Mandelstam para la amplitud $M(s, t)$* :

$$M(s, t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{4m^2}^{\infty} \int_{t_c(s)}^{\infty} \frac{A_2(s', t')}{(s' - s - i0)(t' - t - i0)} dt' ds' \quad (123.8)$$

(S. Mandelstam, 1958).

La función $A_2(s, t)$ ha recibido el nombre de *densidad espectral doble* correspondiente a la función $M(s, t)$. Es posible obtenerla a partir de la integral (123.6) aplicando a ésta dos veces la regla de sustitución (112.9). Haciendo para abreviar

$$l_1 = q, \quad l_2 = q - k_4, \quad l_3 = q - k_2, \quad l_4 = q - k_1 - k_2, \quad (123.9)$$

se obtendrá

$$\begin{aligned} (2i)^2 A_2(s, t) &= \\ &= (2\pi i)^4 \int iB\delta(l_1^2 - m^2)\delta(l_2^2 - m^2)\delta(l_3^2 - m^2)\delta(l_4^2 - m^2)d^4q, \end{aligned} \quad (123.10)$$

donde la integración se extiende al dominio $q^0 > 0$.

No hay que perder de vista, sin embargo, que la fórmula (123.10) posee solamente

un sentido simbólico. En efecto, la región $s > 0, t > 0$ es no física. Por este motivo, las magnitudes l_1, l_2, \dots resultan ser complejas, hablando en general, en dicho dominio para los valores de q reales: ahora bien, el concepto de función- δ para valores complejos del argumento no está por completo definido. Mas riguroso sería hablar directamente de tomar los residuos en los correspondientes polos de la integral de partida (123.4). En nuestro caso, sin embargo, esto carece de importancia. La condición de que se anulen los cuatro denominadores en (123.4) o los cuatro argumentos de las funciones- δ determina completamente las componentes del 4-vector q . Poniendo a la integración respecto de l_1^2, l_2^2, \dots (véase más adelante) y operando de modo formal con (123.10) según las reglas ordinarias, encontramos la expresión de A_2 (salvo el signo).

Para proseguir los cálculos, elegimos como sistema de referencia el del centro de masa (en el canal- s). Entonces

$$k_1 = (\omega, \mathbf{k}), \quad k_2 = (\omega, -\mathbf{k}), \quad k_3 = (\omega, \mathbf{k}'), \quad k_4 = (\omega, -\mathbf{k}'), \quad (123.11)$$

$$\begin{aligned} s &= 4\omega^2, \quad t = -(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 = -4\omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ u &= -(\mathbf{k} + \mathbf{k}')^2 = -4\omega^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (123.12)$$

donde θ es el ángulo formado por \mathbf{k} y \mathbf{k}' (ángulo de dispersión). El eje x del sistema de coordenadas cartesianas espaciales lo orientaremos en el sentido del vector $\mathbf{k} + \mathbf{k}'$, y el eje y , en el del vector $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ *.

Transformaremos ahora la integral (123.10) eligiendo los cuadrados l_1^2, l_2^2, \dots como nuevas variables de integración (en vez de las cuatro componentes de q). Tenemos

$$\frac{\partial(l_1^2)}{\partial q^\mu} = 2l_{1\mu}, \dots$$

Por lo tanto, el jacobiano de la transformación vale

$$\frac{\partial(l_1^2, l_2^2, l_3^2, l_4^2)}{\partial(q^0, q_x, q_y, q_z)} = 16D,$$

donde D es el determinante formado a partir de las dieciseis componentes de los cuatro 4-vectores l_1, l_2, \dots . La integración en (123.10) se reduce simplemente a la sustitución de las funciones B y D en el integrando por sus valores para **

* Para $t > 0$: $(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 < 0$, es decir, el vector $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ es imaginario. Sin embargo, es fácil evitar esta complicación escribiendo todas las expresiones vectoriales para el caso en que $t < 0$ y efectuando luego la prolongación analítica para $t > 0$.

** Este procedimiento de integración tiene en cuenta automáticamente sólo un cero para cada uno de los argumentos de las funciones- δ .

$$l_1^2 = l_2^2 = l_3^2 = l_4^2 = m^2. \quad (123.13)$$

De las condiciones $l_1^2 = l_4^2 = m^2$ se sigue, como en el § 112,

$$q^0 = \omega, \quad q^2 = \omega^2 - m^2. \quad (123.14)$$

Las otras dos condiciones dan

$$(q - k_4)^2 - m^2 = -2qk_4 = -2\omega^2 - 2q \cdot \mathbf{k}' = 0,$$

$$(q - k_2)^2 - m^2 = -2qk_2 = -2\omega^2 - 2q \cdot \mathbf{k} = 0,$$

de modo que

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{k}' = -\frac{s}{4},$$

o en componentes:

$$q^0 = \omega, \quad q_x = -\frac{s}{2(s+t)}, \quad q_y = 0,$$

$$q_z = \pm \sqrt{\omega^2 - m^2 - q_x^2} = \pm \left[\frac{st - 4m^2(s+t)}{4(s+t)} \right]^{1/2}. \quad (123.15)$$

Así, pues, la integral (123.10) es igual a

$$A_2(s, t) = \frac{\pi^4}{4D} \sum (-iB), \quad (123.16)$$

donde la suma se extiende a cada uno de los dos valores de \mathbf{q} dados por (123.15).

El determinante D se puede escribir en función del tensor antisimétrico unidad en la forma:

$$D = e_{\mu\nu\rho\sigma} l_1^\mu l_2^\nu l_3^\rho l_4^\sigma = -e_{\mu\nu\rho\sigma} q^\mu k_4^\nu k_2^\rho k_1^\sigma =$$

$$= -e_{\mu\nu\rho\sigma} (q - k_1)^\mu (k_4 - k_1)^\nu (k_2 - k_1)^\rho k_1^\sigma$$

(en las transformaciones se ha utilizado la antisimetría de $e_{\mu\nu\rho\sigma}$). Observando que de los cuatro factores tan sólo k_1 tiene componente temporal, se encuentra

$$D = -\omega q \cdot [(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \times (\mathbf{k} - \mathbf{k}')].$$

Desarrollando esta expresión para $t < 0$ y prolongándola luego al semiplano $t > 0$, obtenemos

$$D = -\omega q_z \sqrt{s+t} \sqrt{-t} \rightarrow \pm \frac{i}{4} \{st [st - 4m^2(s+t)]\}^{1/2}. \quad (123.17)$$

El signo que hay que elegir en esta expresión puede establecerse en virtud de las siguientes consideraciones. Hagamos, para simplificar, $B = 1$. Es claro entonces que en el dominio físico ($s > 0, t < 0$) se tiene $A_{1s}(s, t) < 0$. En efecto, los dos denominadores en el integrando de (123.6) tienen el mismo signo (negativo):

$$(q - k_4)^2 - m^2 = -2\omega^2 - 2q \cdot k' < -2\omega(\omega - |q|) < 0,$$

$$(q - k_2)^2 - m^2 = -2\omega^2 - 2q \cdot k < -2\omega(\omega - |q|) < 0$$

[se tuvo aquí en cuenta el hecho de que, debido a la presencia de las dos funciones δ en el numerador, se cumple (123.14), por lo cual $|q| < \omega$]*. De (123.7) se sigue entonces que también debe ser negativa la función $A_2(s, t)$ cuando $s > 0, t > 0$ [puesto que, en virtud de (123.16), esta función tiene signo constante]. Esto significa que en (123.17) hay que elegir el signo superior, con lo que obtenemos en definitiva

$$A_2 = -\pi^4 \frac{\sum B}{\{st[st - 4m^2(s+t)]\}^{1/2}}. \quad (123.18)$$

Dado que, por su propio sentido, la función $A_2(s, t)$ debe ser real, además de la condición de que s y t sean positivos se tiene aún la de que lo sea la expresión entre paréntesis rectangulares que aparece en el denominador:

$$\begin{aligned} st - 4m^2(s+t) &\geq 0, \\ s > 0, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (123.19)$$

Estas desigualdades determinan un dominio al que debe extenderse la integración en la doble integral de dispersión (123.8) (dominio que aparece rayado en la fig. 22). Su frontera es la curva

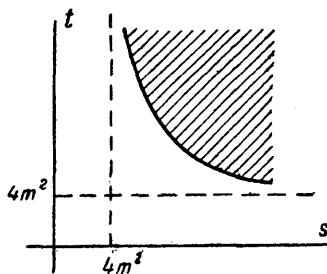


Fig. 22.

* No se trata, claro está, de algo casual. El carácter negativo de A_{1s} se sigue, efectivamente, de la condición de unitariedad, lo que resulta en particular patente para $t = 0$, caso en que A_{1s} determina la sección eficaz total.

$$st - 4m^2(s+t) = 0$$

con las asíntotas $s = 4m^2$ y $t = 4m^2$.

Las relaciones de dispersión de la forma (123.5) y (123.8) no tienen todavía en cuenta las condiciones de renormalización, y de aplicarlas literalmente, las integrales resultarían divergentes y exigirían la regularización. La condición de renormalización para las amplitudes $M(s, t)$ consiste en exigir que

$$M(0, 0) = 0. \quad (123.20)$$

En efecto, la amplitud de dispersión fotón-fotón ha de anularse cuando $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ (y, por ello, también $s = t = 0$), puesto que $k = 0$ caracteriza un potencial constante en el tiempo y en el espacio, al que no corresponde ningún campo físico (volveremos a considerar esta condición más detenidamente en el párrafo que sigue).

Para tener en cuenta esta condición automáticamente, es necesario escribir la relación de dispersión «con una substracción» [análogamente al paso de (108.8) a (108.13)]. Llegamos a esta relación de manera natural efectuando, en primer lugar, la transformación idéntica de la relación (123.8) mediante la identidad

$$\frac{1}{(s'-s)(t'-t)} = \frac{st}{(s'-s)(t'-t)s't'} + \frac{s}{(s'-s)s't'} + \frac{t}{(t'-t)s't'} + \frac{1}{s't'}.$$

Substituyéndola en el integrando de (123.8), obtendremos

$$\begin{aligned} M(s, t) &= \frac{st}{\pi^2} \int \int \frac{A_2(s', t') ds' dt'}{(s'-s)(t'-t)s't'} + \\ &\quad + \frac{s}{\pi} \int \frac{f(s') ds'}{(s'-s)s'} + \frac{t}{\pi} \int \frac{g(t') dt'}{(t'-t)t'} + C, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{\pi} \int \frac{A_2(s, t')}{t'} dt', \quad g(t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{A_2(s', t)}{s'} ds', \\ C &= \frac{1}{\pi^2} \int \int \frac{A_2(s', t')}{s't'} ds' dt'. \end{aligned}$$

Las últimas igualdades, con todo, tendrían sentido sólo si todas las integrales fueran convergentes. En caso contrario, a las funciones $f(s)$, $g(t)$ y a la constante C hay que atribuirles valores a priori y correspondientes a la condición de renormalización. Concretamente, hay que hacer

$$C = 0, \quad f(s) = A_{1s}(s, 0), \quad g(t) = A_{1t}(0, t)$$

[donde A_{1t} es la parte imaginaria de $M(s, t)$ que aparece al crecer t para un valor

dado pequeño de s , de manera análoga a como A_{1s} es la parte imaginaria que resulta de aumentar s para un valor pequeño dado de t]. La primera de estas dos igualdades es evidente: $C = M(0, 0) = 0$. La segunda (y de manera análoga la tercera) se sigue de la comparación de la igualdad

$$M(s, 0) = \frac{s}{\pi} \int \frac{f(s') ds'}{(s' - s) s'}$$

con la relación de dispersión simple (123.5), escrita «con la substracción» que corresponde a la condición (123.20):

$$M(s, t) = \frac{s}{\pi} \int \frac{A_{1s}(s', t)}{(s' - s) s'} ds'. \quad (123.21)$$

De esta manera, la doble relación de dispersión final «con substracción» se escribe:

$$\begin{aligned} M(s, t) &= \frac{st}{\pi^2} \int \int \frac{A_2(s', t')}{(s' - s)(t' - t)s't'} ds' dt' + \\ &\quad + \frac{s}{\pi} \int \frac{A_{1s}(s', 0)}{(s' - s)s'} ds' + \frac{t}{\pi} \int \frac{A_{1t}(0, t')}{(t' - t)t'} dt'. \end{aligned} \quad (123.22)$$

Si los propios valores s, t se encuentran en el dominio de integración, las integrales (123.21-22), como siempre, hay que interpretarlas en el sentido de límite para

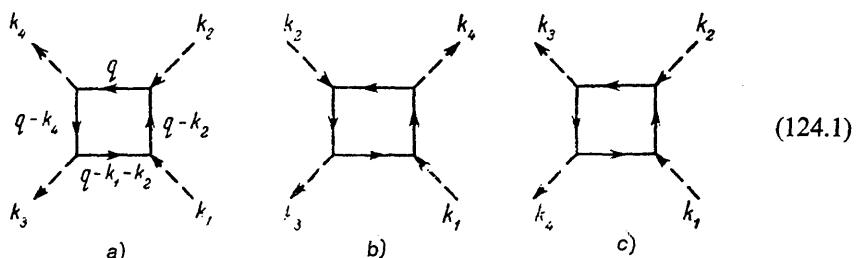
$$s \rightarrow s + i0, \quad t \rightarrow t + i0. \quad (123.23)$$

§ 124. Dispersión fotón-fotón

La dispersión de la luz por la luz (en el vacío) es un proceso típico de la electrodinámica cuántica; en la electrodinámica clásica no se produce debido al carácter lineal de las ecuaciones de Maxwell *.

En la electrodinámica cuántica la dispersión de un fotón por un fotón se describe como resultado de la creación de un par virtual electrón-positón por dos fotones iniciales, y la subsiguiente aniquilación de dicho par formando los cuantos finales. La amplitud de este proceso (en la primera aproximación no nula) se representa por seis diagramas «cuadrados» con todas las disposiciones relativas posibles de sus cuatro terminales. A esta categoría pertenecen los diagramas

* En el caso límite de frecuencias pequeñas, este proceso fue estudiado por vez primera por Euler (H. Euler, 1936), y en el caso ultrarrelativista, por A. I. Ajiezer (1937). La solución completa del problema se debe a Karplus y Neumann (R. Karplus, M. Neumann, 1951).



y otros tres más que difieren de éstos en el mero cambio del sentido de recorrido del lazo interior de electrón. La contribución de estos últimos coincide con la de los diagramas (124.1), por lo que la amplitud total de dispersión será

$$M_{fi} = 2(M^{(a)} + M^{(b)} + M^{(c)}), \quad (124.2)$$

donde $M^{(a)}$, $M^{(b)}$, $M^{(c)}$ son las contribuciones de los diagramas a , b , c .

Según (65.19), la sección eficaz de dispersión vale

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} |M_{fi}|^2 \frac{d\Omega'}{(2\omega)^2}, \quad (124.3)$$

donde $d\Omega'$ es el elemento de ángulo sólido para la dirección \mathbf{k}' en el sistema del centro de masa.

Amplitudes invariantes

Poniendo de manifiesto los factores polarización de los cuatro fotones, representaremos M_{fi} en la forma

$$M_{fi} = e_1^\lambda e_2^\mu e_3^{\nu*} e_4^{\rho*} M_{\lambda\mu\nu\rho}; \quad (124.4)$$

el 4-tensor $M_{\lambda\mu\nu\rho}$ (que se llama tensor dispersión de un fotón por un fotón) es función de los 4-impulsos de todos los fotones. Si se escriben los argumentos de las funciones con los signos que corresponden a terminales exteriores del diagrama orientados de la misma manera, en virtud de la simetría del conjunto de diagramas (124.1) es evidente que el tensor

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1, k_2, -k_3, -k_4)$$

será simétrico respecto de cualquier permutación de los cuatro argumentos acompañada de la misma permutación de sus cuatro índices efectuada simultáneamente. La invariancia de contraste permite afirmar que la amplitud (124.4) no debe variar en la substitución $e \rightarrow e + \text{const } k$. En otras palabras, ha de tenerse

$$k_1^\lambda M_{\lambda\mu\nu\rho} = k_2^\mu M_{\lambda\mu\nu\rho} = \dots = 0. \quad (124.5)$$

Como es fácil comprender, de aquí se sigue, en particular, que el desarrollo del tensor dispersión en potencias de los 4-impulsos k_1, k_2, \dots ha de empezar con términos que contienen productos cuádruples de sus componentes. Por esto mismo, en cualquier caso

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}(0, 0, 0, 0) = 0. \quad (124.6)$$

Para una determinación concreta de las amplitudes invariantes, sin embargo, está justificado elegir, ya desde el principio, un contraste de los 4-vectores de polarización e determinado, contraste en el cual

$$e_1^\mu = (0, e_1), \quad e_2^\mu = (0, e_2), \dots \quad (124.7)$$

Entonces

$$M_{fi} = M_{iklm} e_{1l} e_{2k} e_{3l}^* e_{4m}^*, \quad (124.8)$$

donde M_{iklm} es un tensor tridimensional.

Como direcciones de polarización independientes, para cada uno de los fotones se introducirán versores de polarización tridimensionales $e^{(1)}, e^{(2)}$ eligiéndolos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} e_1^{(1)} &= e_2^{(1)} = e_3^{(1)} = e_4^{(1)} = \frac{[k \times k']}{|[k \times k']|}, & e_1^{(2)} &= \frac{1}{\omega} k \times e_1^{(1)} = -e_2^{(2)}, \\ e_3^{(2)} &= \frac{1}{\omega} k' \times e_3^{(1)} = -e_4^{(2)}. \end{aligned} \quad (124.9)$$

Hecho esto, el tensor M_{iklm} puede representarse en la forma

$$M_{iklm} = \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} e_{1l}^{(\lambda_1)} e_{2k}^{(\lambda_2)} e_{3l}^{(\lambda_3)} e_{4m}^{(\lambda_4)}; \quad (124.10)$$

las 16 cantidades $M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}$ son funciones de s, t, u y representan el papel de amplitudes invariantes. No todas ellas, sin embargo, son independientes.

Observemos, ante todo, que los $e^{(1)}$ son vectores axiles, y los $e^{(2)}$ polares. Dado que M_{iklm} es un tensor tridimensional en sentido estricto, y los $M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}$ son escalares, de la condición de invariancia- P se sigue que en cada uno de los conjuntos $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ debe haber un número par de índices 1 y 2; en cuanto a las restantes cantidades $M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}$, éstas se anulan. Además, la amplitud M_{fi} ha de ser invariante respecto de la permutación de los dos fotones iniciales o de los dos finales. Si se efectúan sin más ambas permutaciones ($k_1 \leftrightarrow k_2, k_3 \leftrightarrow k_4$), las variables s, t, u no cambian, mientras que la permutación en los índices de polarización conduce a las relaciones $M_{1212} = M_{2121}, M_{1221} = M_{2112}$.

Finalmente, la inversión del tiempo equivale a la sustitución

$$k \leftrightarrow -k'; \quad e_1, e_2 \leftrightarrow -e_3^*, -e_4^*$$

[cf. (71.14-15)]; los versores (124.9) se transforman entonces de acuerdo con

$$\mathbf{e}_1^{(1)}, \mathbf{e}_2^{(1)} \leftrightarrow -\mathbf{e}_3^{(1)}, -\mathbf{e}_4^{(1)}; \quad \mathbf{e}_1^{(2)}, \mathbf{e}_2^{(2)} \leftrightarrow \mathbf{e}_3^{(2)}, \mathbf{e}_4^{(2)}.$$

La condición de invariancia- T de la amplitud de dispersión M_{fi} conduce, en consecuencia, precisamente a la igualdad $M_{1122} = M_{2211}$.

Así, pues, se tienen en total 8 amplitudes invariantes no nulas; de ellas 5 son independientes:

$$M_{1111}, \quad M_{2222}, \quad M_{1122} = M_{2211}, \quad M_{1212} = M_{2121}, \quad M_{1221} = M_{2112}. \quad (124.11)$$

Si en (124.3) se substituye en vez de M_{fi} una de las amplitudes $M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$, obtendremos la sección eficaz de dispersión con polarizaciones dadas de los fotones iniciales y finales. En cuanto a la sección eficaz, sumada respecto de las polarizaciones finales y promediada respecto de las iniciales, su valor se obtiene mediante la sustitución

$$|M_{fi}|^2 \rightarrow \frac{1}{4} \{ |M_{1111}|^2 + |M_{2222}|^2 + 2|M_{1212}|^2 + 2|M_{1221}|^2 + 2|M_{1122}|^2 \}. \quad (124.12)$$

Las relaciones de simetría (124.11) ligan entre sí las diferentes amplitudes invariantes como funciones de las mismas variables precisamente. Otras relaciones funcionales resultan como consecuencia de la simetría de cruce (§ 79) si se tiene en cuenta que la amplitud M_{fi} en todos los canales describe una y la misma reacción (la dispersión mutua de dos fotones) y, por ello, no puede variar al pasar de un canal al otro.

El paso del canal s [al que corresponde la dirección orientada de las flechas en los diagramas (124.1)] al canal t se efectúa permutando entre sí los índices 2 y 3 en todas las variables (impulsos y polarizaciones), es decir, mediante el cambio $s \leftrightarrow t$ y la permutación de los índices λ_2 y λ_3 en el tensor de dispersión. El paso del canal s al u se realiza mediante una permutación análoga de los índices 2 y 4 (con $s \leftrightarrow u$). Así se deducen las siguientes igualdades *:

$$\begin{aligned} M_{1111}(s, t, u) &= M_{1111}(t, s, u) = M_{1111}(u, t, s), \\ M_{2222}(s, t, u) &= M_{2222}(t, s, u) = M_{2222}(u, t, s), \\ M_{1122}(s, t, u) &= M_{1221}(u, t, s) = M_{1212}(t, s, u), \\ M_{1221}(s, t, u) &= M_{1221}(t, s, u), \\ M_{1212}(s, t, u) &= M_{1212}(u, t, s), \\ M_{1122}(s, t, u) &= M_{1122}(s, u, t). \end{aligned} \quad (124.13)$$

* Dado que las tres variables s, t, u no son independientes, bastaría escribir en todas las funciones dos argumentos (por ejemplo, los dos primeros); conservamos aquí las tres variables solamente con el fin de que resulte más clara la simetría de sus permutaciones.

De esta manera, basta de hecho calcular tan sólo tres amplitudes invariantes, por ejemplo M_{1111} , M_{2222} y M_{1122} .

Las relaciones (124.13) se refieren a las amplitudes totales, esto es, a las sumas de las contribuciones de los tres diagramas (124.1). Pero estas mismas contribuciones están vinculadas entre sí por relaciones que resultan evidentes si se comparan los diagramas. Por ejemplo, se pasa del diagrama *a*) al diagrama *b*) y recíprocamente mediante la transformación $k_2 \leftrightarrow -k_4$, $e_2 \leftrightarrow e_4^*$ y, por ello, sus respectivas contribuciones en las amplitudes invariantes se obtienen la una a partir de la otra aplicando el cambio de variables $s \leftrightarrow u$ y de índices $\lambda_2 \leftrightarrow \lambda_4$; análogamente, la contribución del diagrama *c*) se obtendrá a partir de *a*) substituyendo $t \leftrightarrow u$, $\lambda_3 \leftrightarrow \lambda_4$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_{1111}(s, t, u) &= M_{1111}^{(a)}(s, t, u) + M_{1111}^{(a)}(u, t, s) + M_{1111}^{(a)}(s, u, t), \\ \frac{1}{2} M_{2222}(s, t, u) &= M_{2222}^{(a)}(s, t, u) + M_{2222}^{(a)}(u, t, s) + M_{2222}^{(a)}(s, u, t), \\ \frac{1}{2} M_{1122}(s, t, u) &= M_{1122}^{(a)}(s, t, u) + M_{1221}^{(a)}(u, t, s) + M_{1122}^{(a)}(s, u, t). \end{aligned} \quad (124.14)$$

En consecuencia, basta calcular únicamente las contribuciones de un diagrama a las cuatro amplitudes: $M_{1111}^{(a)}$, $M_{2222}^{(a)}$, $M_{1221}^{(a)}$, $M_{1122}^{(a)}$; de estas funciones las tres primeras son ya simétricas respecto de s y t , como es evidente por la forma del diagrama *a*) (simétrico respecto de la permutación de los terminales k_2 y k_3).

Cálculo de las amplitudes

La integral $M_{fi}^{(a)}$, que corresponde al diagrama (124.1, *a*), tiene la forma (123.4), con

$$B^{(a)} = \frac{e^4}{\pi^2} \text{Tr} \left\{ \hat{e}_1(\hat{q} - \hat{k}_2 + m) \hat{e}_2(\hat{q} + m) \hat{e}_4^*(\hat{q} - \hat{k}_4 + m) \hat{e}_3^*(\hat{q} - \hat{k}_1 - \hat{k}_2 + m) \right\}. \quad (124.15)$$

El valor de esta expresión, en la que en cada uno de los $e = (0, e)$ se ha elegido para e uno de los versores $e^{(\lambda)}$ (124.9), lo designaremos por $B_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{(a)}$; la integral (123.4) con un tal B es $M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{(a)}$.

Las integrales (123.4) divergen logarítmicamente. En correspondencia con la condición (124.6), su regularización se efectúa restando el valor para $k_1 = k_2 = \dots = 0^*$. El cálculo de las integrales regularizadas, sin embargo, es sumamente pesado.

* Obsérvese que, al sumar las contribuciones de todos los diagramas, las partes divergentes de las integrales se reducen entre sí. Es fácil comprobar que así ocurre visto que, asintóticamente (para $q \rightarrow \infty$), la forma de la integral es:

$$M_{\lambda \mu \nu \rho}^{(a)} \sim \int \text{Tr} (\gamma_\nu \hat{q} \gamma_\rho \hat{q} \gamma_\mu \hat{q} \gamma_\lambda \hat{q}) \frac{d^4 q}{(q^2)^4}.$$

El camino más natural para el cálculo de las amplitudes de dispersión fotón-fotón se apoya en la utilización de una doble relación de dispersión (*B. de Tollis*, 1964). Este método tiene en cuenta de la manera más completa posible la simetría de los diagramas y elimina casi por completo las dificultades de las integraciones. Ilustraremos la marcha de los cálculos tomando como ejemplo la amplitud M_{1111} .

La función $A_{1s}^{(a)}(s, t)$ se calcula de acuerdo con (123.6). Dada la presencia en el integrando de las dos funciones- δ , sólo necesitamos el valor de B para

$$l_1^2 = q^2 = m^2, \quad l_4^2 = (q - k_1 - k_2)^2 = m^2. \quad (124.16)$$

El cálculo siguiendo las reglas típicas conduce entonces al resultado

$$B_{1111}^{(a)} = \frac{4e^4}{\pi^2} \left\{ 8(e^{(1)}q)^4 - \left[4(e^{(1)}q)^2 + \frac{s}{2} \right] (k_2q + k_4q) + 2(k_2q)(k_4q) - \frac{st}{4} \right\}. \quad (124.17)$$

Lo único que nos hace falta [para substituir en (123.22)] es el valor de A_{1s} para $t = 0$. Esta igualdad significa que $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ y $k_2 = k_4$. Entonces la integral (123.6) toma la forma

$$[A_{1s}^{(a)}(s, 0)]_{1111} = -\frac{\pi^2}{4} \sqrt{\frac{s-4m^2}{s}} \int \frac{B_{1111}^{(a)} d\omega_q}{[(q-k_2)^2 - m^2]^2} \quad (124.18)$$

[cf. la deducción de (112.10)]. Introduciendo el ángulo ϑ formado por \mathbf{q} y \mathbf{k} y el ángulo φ que determinan $e^{(1)}$ y la proyección de \mathbf{q} sobre el plano perpendicular al vector \mathbf{k} , tenemos (para $t = 0$)

$$\begin{aligned} qk_2 = qk_4 &= \omega(\omega - |\mathbf{q}| \cos \theta), \quad qe^{(1)} = -|\mathbf{q}| \sin \theta \sin \varphi, \\ (q - k_2)^2 - m^2 &= -2\omega(\omega - |\mathbf{q}| \cos \theta). \end{aligned}$$

Después de substituir en (124.17-18), la integral respecto de $d\omega_q = \sin \vartheta d\varphi$ resulta elemental y da en definitiva

$$\begin{aligned} [A_{1s}^{(a)}(s, 0)]_{1111} &= -4\pi e^4 \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{16m^2}{s} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{8m^2}{s} \right) \operatorname{arcosh} \frac{\sqrt{s}}{2m} \right]. \quad (124.19) \end{aligned}$$

Después de promediar respecto de las direcciones de \mathbf{q} [cf. (127.10)], es fácil calcular la traza, lo que da

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}^{(a)} \sim (g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho} + g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} - 2g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}) \int \frac{d^4q}{(q^2)^2}.$$

La suma respecto de los diagramas equivale a simetrizar esta expresión respecto de los índices λ, μ, ν, ρ , como resultado de lo cual se anula. Hay que subrayar, sin embargo, que esta simplificación tiene carácter casual, en cierto sentido, y no evita la necesidad de regularizar, si bien tal regularización se reduce en el presente caso a la substracción de una cantidad finita.

En virtud de la simetría de $M_{1111}^{(a)}$, la función $[A_{1t}^{(a)}(0, t)]_{1111}$ difiere de (124.19) tan sólo en la substitución $s \rightarrow t$,

Para calcular la función $A_2^{(a)}(s, t)$ de acuerdo con (123.18) se requiere el valor de $B^{(a)}$ para los valores (123.15) que satisfacen, junto con (124.16), también las condiciones $(q - k_2)^2 = m^2$, $(q - k_4)^2 = m^2$; con esto

$$k_2 q = k_4 q = 0, \quad (e^{(1)} q)^2 = q_z^2 = \frac{st - 4m^2(s+t)}{s+t}.$$

La substitución en (124.17) y luego la de (124.17) en (124.18) nos da

$$[A_2^{(a)}(s, t)]_{1111} = 8\pi^2 e^4 \frac{\frac{st}{4} - 8 \left[\frac{st - 4m^2(s+t)}{4(s+t)} \right]^2}{\{st [st - 4m^2(s+t)]\}^{1/2}}. \quad (124.20)$$

Después de calcular las funciones A_{1s} , A_{1t} , A_2 , la relación de dispersión (123.22) conduce inmediatamente a la amplitud M en forma de determinadas integrales simples y dobles. Como referencia, daremos aquí los resultados para las cuatro amplitudes $M^{(a)}$ que bastan, según (124.14), para el cálculo completo de las amplitudes de dispersión *:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4a^2} M_{1111}^{(a)}(s, t) &= \frac{1}{3} + \frac{s-t}{s+t} [B(s) - B(t)] - \\ &- \left\{ 1 - 4 \frac{t-2s}{s(s+t)} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} T(s) - \left\{ 1 - 4 \frac{s-2t}{t(s+t)} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} T(t) + \\ &\quad + \left\{ 1 - \frac{2}{st} \left(4 - \frac{st}{s+t} \right)^2 \right\} I(s, t), \\ \frac{1}{4a^2} M_{2222}^{(a)}(s, t) &= -1 + \frac{s-t}{s+t} [B(s) - B(t)] - \\ &- \left\{ 1 + \frac{4t}{s(s+t)} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} T(s) - \left\{ 1 + \frac{4s}{t(s+t)} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} T(t) + \\ &\quad + \left\{ 1 - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} I(s, t), \end{aligned} \quad (124.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4a^2} M_{1122}^{(a)}(s, t) &= -\frac{5}{9} + \frac{s-t}{s+t} B(s) + \left\{ \frac{5}{3} + \frac{16}{3t} - \frac{2s}{s+t} \right\} B(t) - \\ &- \left\{ 1 + \frac{4}{s+t} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} [T(s) + T(t)] + \\ &\quad + \left\{ 1 - \frac{4}{t} + \frac{8}{s+t} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} I(s, t), \end{aligned}$$

* Algunos detalles de las transformaciones de las integrales, diferentes representaciones de las funciones transcendentales B , T , I y expresiones en casos límite, pueden verse en B. de Tollis, Nuovo Cimento 32, 757 (1964); 35, 1182 (1965).

$$\begin{aligned} \frac{1}{4a^2} M_{1221}^{(a)}(s, t) = & \frac{1}{9} - \left\{ \frac{5}{3} + \frac{16}{3s} - \frac{2t}{s+t} \right\} B(s) - \left\{ \frac{5}{3} + \frac{16}{3t} - \frac{2s}{s+t} \right\} B(t) + \\ & + \left\{ 1 + \frac{4}{s+t} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} [T(s) + T(t)] - \\ & - \left\{ 1 - \frac{4}{s} - \frac{4}{t} + \frac{8}{s+t} - \frac{2st}{(s+t)^2} \right\} I(s, t). \end{aligned}$$

$B(s)$, $T(s)$, $I(s, t)$ designan aquí las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} B(s) = & \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{4}{s}} \operatorname{arsenh} \frac{\sqrt{-s}}{2} - 1, & s < 0, \\ \sqrt{\frac{4}{s} - 1} \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{s}}{2} - 1, & 0 < s < 4, \\ \sqrt{1 - \frac{4}{s}} \operatorname{arcosh} \frac{\sqrt{s}}{2} - 1 - \frac{i\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{s}}, & 4 < s; \end{cases} \\ T(s) = & \begin{cases} \left(\operatorname{arsenh} \frac{\sqrt{-s}}{2} \right)^2, & s < 0, \\ - \left(\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{s}}{2} \right)^2, & 0 < s < 4, \\ \left(\operatorname{arcosh} \frac{\sqrt{s}}{2} \right)^2 - \frac{\pi^2}{4} - i\pi \operatorname{arcosh} \frac{\sqrt{s}}{2}, & 4 < s; \end{cases} \quad (124.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(s, t) = I(t, s) = & \\ = & \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dy}{y(1-y) - \frac{s+t}{st}} \{ \ln [1 - i0 - sy(1-y)] + \ln [1 - i0 - ty(1-y)] \}. \end{aligned}$$

[Para simplificar la notación, en las fórmulas (124.21-22), y solamente en ellas, las letras s y t representan las razones s/m^2 , t/m^2 .]

Sección eficaz de dispersión

Al caso límite de bajas frecuencias ($\omega \ll m$) corresponden pequeños valores de las variables s , t , u . Los primeros términos del desarrollo de las amplitudes invariantes respecto de estas variables son:

$$\begin{aligned} M_{1111} = M_{2222} &= \frac{4e^4}{45m^4} (s^2 + t^2 + u^2), \\ M_{1122} &= \frac{e^4}{45m^4} (-4s^2 + 7t^2 + 7u^2). \end{aligned} \quad (124.23)$$

La sección eficaz diferencial de los fotones no polarizados, calculada según estas amplitudes, vale (unidades ordinarias)

$$d\sigma = \frac{139}{4\pi^2 (90)^2} \alpha^2 r_e^2 \left(\frac{\omega}{mc^2} \right)^6 (3 + \cos^2 \theta)^2 d\Omega' \quad (124.24)$$

y la sección eficaz total *

$$\sigma = \frac{973}{10125\pi} \alpha^2 r_e^2 \left(\frac{\omega}{mc^2} \right)^6 = 0,030 \alpha^2 r_e^2 \left(\frac{\omega}{mc^2} \right)^6, \quad \hbar\omega \ll mc^2. \quad (124.25)$$

En el caso opuesto, el ultrarrelativista, la sección eficaz total de dispersión de los fotones no polarizados es

$$\sigma = 4,7 \alpha^4 \left(\frac{c}{\omega} \right)^2, \quad \hbar\omega \gg mc^2. \quad (124.26)$$

La dependencia de esta sección eficaz respecto de la frecuencia se puede prever por razones de dimensionalidad: cuando $\hbar\omega \gg mc^2$, la sección eficaz total no puede depender de m y entonces $\alpha^4 c^2 / \omega^2$ es la única expresión con las dimensiones adecuadas que es proporcional a a^8 ; el coeficiente en (124.26), sin embargo, es el resultado de un cálculo numérico.

Finalmente, he aquí la sección eficaz diferencial de dispersión para ángulos pequeños en el caso ultrarrelativista:

$$d\sigma = \frac{\alpha^4}{\pi^2 \omega^2} \ln^4 \frac{1}{\theta} d\Omega, \quad \frac{m}{\omega} \ll \theta \ll 1. \quad (124.27)$$

Esta expresión es correcta con precisión logarítmica —el término siguiente del desarrollo contiene una potencia inferior en una unidad de un logaritmo que es grande. Para pasar al límite $\theta = 0$ (dispersión hacia adelante) la fórmula (124.27) no es adecuada. En vez de ella tenemos aquí

$$d\sigma = \frac{\alpha^4}{\pi^2 \omega^2} \ln^4 \frac{\omega}{m} d\Omega, \quad \theta \ll \frac{m}{\omega}. \quad (124.28)$$

Es fácil obtener esta expresión mediante las fórmulas generales (124.21) haciendo en ellas $t = 0$ y observando que para $s \gg 1$ la única función que contiene la mayor potencia (la segunda) de un logaritmo grande es la

$$T \left(\frac{s}{m^2} \right) \approx \frac{1}{4} \ln^2 \frac{s}{m^2} \approx \ln^2 \frac{\omega}{m}.$$

Con esta precisión, son diferentes de cero solamente las amplitudes

* Al pasar de $d\sigma$ a σ hay que introducir el factor $1/2$ que tiene en cuenta la identidad de los dos fotones finales.

$$M_{1111} = M_{2222} = \\ = M_{1212} = -16e^4 \ln^2 \frac{\omega}{m}.$$

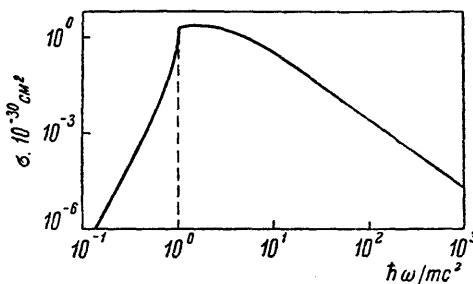


Fig. 23.

Esto significa, en particular, que en este caso la polarización del fotón no cambia en la dispersión.

En la figura 23 se representa gráficamente la sección eficaz total en función de la frecuencia (escala logarítmica para ambos ejes). La sección eficaz disminuye tanto para bajas como para altas frecuencias y alcanza un máximo cuando $\omega \approx 1,5 m$. El punto anguloso de la curva que se observa para $\omega = m$ traduce el cambio en el carácter del proceso debido a que la formación de un par real electrón-positón pasa a ser posible.

El caso de bajas frecuencias

En el caso de frecuencias bajas ($\omega \ll m$) la amplitud de dispersión del fotón por un fotón puede obtenerse también, de manera completamente distinta, partiendo de términos correctivos en la función de Lagrange de un campo electromagnético débil (véase más adelante, § 126).

Una pequeña corrección al hamiltoniano de la interacción V' difiere tan sólo en el signo de una pequeña corrección al lagrangiano. De acuerdo con (126.19) tenemos

$$V' = -\frac{e^4}{45 \cdot 8\pi^2 m^4} \int \{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2\} d^3x. \quad (124.29)$$

Dado que este operador es de cuarto orden respecto del campo, posee elementos de matriz no nulos para la transición que nos interesa ya en la primera aproximación.

Para efectuar los cálculos hay que substituir en (124.29)

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \\ \mathbf{A} = \sqrt{4\pi} \sum_{k\lambda} (c_{k\lambda} e_{k\lambda} e^{-ikx} + c_{k\lambda}^+ e_{k\lambda}^* e^{ikx}) \quad (124.30)$$

(λ es el número que caracteriza la polarización), hecho lo cual el elemento de la matriz S se calcula mediante la fórmula

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i \langle f | \int V' dt | i \rangle = \\ &= -i \langle 0 | c_{k_3 \lambda_3} c_{k_4 \lambda_4} \int V' dt c_{k_1 \lambda_1}^+ c_{k_2 \lambda_2}^+ | 0 \rangle \quad (124.31) \end{aligned}$$

(cf. §§ 73, 78). En la normalización (124.30) de A , la amplitud de dispersión M_{fi} se determina inmediatamente partiendo de S_{fi} en virtud de

$$S_{fi} = i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_3 + k_4 - k_1 - k_2) M_{fi} \quad (124.32)$$

(cf. § 65). El valor medio en (124.31) se calcula aplicando el teorema de Wick según (78.3), debiéndose contraer, naturalmente, tan sólo los operadores «exteriores» $c_{k\lambda}$, $c_{k\lambda}^+$ con los A interiores.

Como referencia, damos a continuación la amplitud de dispersión expresada explícitamente en función de la polarización y de la dirección de los fotones:

$$M_{fi} = \frac{4}{45} \frac{\alpha^2 \omega^4}{m^4} (7R - 10S), \quad (124.33)$$

$$R = P(1234) + P(1324) + P(1432),$$

$$S = Q(1234) + Q(1324) + Q(1432),$$

$$\begin{aligned} P(1234) &= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}_1) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}_2) (\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{n}_3) + (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_3) (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}_1) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{n}_2) - \\ &- (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \{ (1 - \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_4) [(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}_2) (\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{n}_1) + (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}_1) (\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{n}_2)] - (1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}_2) (\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{n}_3) - \\ &- (1 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{n}_1) - (1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{n}_2) - (1 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}_1) (\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{n}_3) \} - \\ &- (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4) \{ (1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) [(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}_3) + (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_3) (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}_4)] - (1 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3) (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}_1) - \\ &- (1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_2) (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}_3) - (1 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_3) (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}_1) - (1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3) (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_2) (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}_4) \} + \\ &+ (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4) [(1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_4) (1 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3) + (1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3) (1 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_4)], \\ Q(1234) &= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_2) (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}_1) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{n}_3) + (1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{n}_3) + \\ &+ (1 - \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_4) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4) (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_2) (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}_1) + (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4) (1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) (1 - \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_4), \end{aligned}$$

donde $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$, $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_4 = \mathbf{n}'$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$, $\mathbf{n}' = \mathbf{k}'/\omega$.

§ 125. Dispersión coherente de un fotón en el campo de un núcleo

Otro efecto no lineal (junto con la dispersión fotón-fotón) es la dispersión coherente (elástica) de un fotón en el campo eléctrico constante creado por un núcleo en reposo. Este proceso se describe exactamente por los mismos diagramas cuadrados (124.1), en los que, sin embargo, dos líneas de fotón se substituyen por líneas

del campo exterior *. No existe por ahora una investigación exhaustiva de este proceso. Nos limitaremos, en consecuencia, tan sólo a algunas estimaciones cualitativas.

En virtud de las condiciones de invariancia de contraste, cuando $\omega \rightarrow 0$ la amplitud de dispersión debe contener productos de componentes de los 4-impulsos de los fotones inicial (k) y final (k') (de modo análogo a como el desarrollo de la amplitud de dispersión fotón-fotón comienza con productos cuádruples de componentes de los 4-impulsos de todos los fotones). En otras palabras, la amplitud de dispersión de un fotón de baja frecuencia es proporcional a ω^2 . Teniendo también en cuenta que esta amplitud contiene el campo exterior (campo de un núcleo con carga Ze) en el segundo orden, llegamos a la conclusión de que la sección eficaz de dispersión es

$$d\sigma \sim Z^4 \alpha^4 r_e^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^4 d\omega \quad (\omega \ll m). \quad (125.1)$$

La dependencia respecto de la frecuencia se encuentra de acuerdo, naturalmente, con las conclusiones generales a que se llegó en el § 60 **.

Para estimar la sección eficaz en el caso de altas frecuencias aplicaremos el teorema óptico (§ 72). El estado intermedio, que figura en el segundo miembro de la relación de unitariedad, es en el presente caso un estado de un par electrón-positrón (al mismo corresponde el corte de los diagramas por dos líneas interiores de electrón entre terminales de fotón). En consecuencia, el teorema óptico liga la amplitud de la dispersión elástica del fotón a ángulo nulo con la sección eficaz total de formación de un par de fotones en el campo del núcleo σ_{par} . Determinando la amplitud de dispersión a ángulo θ , $f(\omega, \theta)$, de modo que la sección eficaz de dispersión sea $d\sigma = |f|^2 d\omega$ [cf. (72.5)], tendremos

$$\text{Im } f(\omega, 0) = \frac{\omega}{4\pi} \sigma_{\text{par}}.$$

La sección eficaz σ_{par} difiere de cero, claro está, únicamente cuando $\omega > 2m$. En el caso ultrarrelativista, tomando para σ_{par} la expresión (92.8) y limitándonos a la precisión logarítmica, se obtendrá

$$\text{Im } f(\omega, 0) = \frac{7}{9\pi} (Z\alpha)^2 r_e \frac{\omega}{m} \ln \frac{\omega}{m} \quad (\omega \gg m). \quad (125.2)$$

La parte real de la amplitud de dispersión se determina a partir de la compo-

* En cambio, los diagramas con una línea exterior virtual y tres líneas exteriores reales, todas ellas de fotón, corresponden a procesos de desintegración de un fotón en dos fotones en el campo exterior (y al proceso inverso de « fusión » de dos fotones en uno).

** Haremos notar que el coeficiente en (125.1) no se puede calcular mediante la función de Lagrange de un campo electromagnético homogéneo que hallamos en el § 126 (lo que si fue posible en el caso de la dispersión de la luz por la luz). La razón de ello estriba en que, en el proceso de que ahora se trata, representan un papel esencial las distancias al núcleo tales que $r \sim 1/m$, y a estas distancias es imposible considerar el campo del núcleo como homogéneo.

nente imaginaria mediante la relación de dispersión. Al aplicarla, en la integral de dispersión respecto de las frecuencias es esencial el intervalo de frecuencias tales que $\omega \sim m$, intervalo en el cual $\text{Im } f(\omega, 0)$ no contiene un logaritmo grande. Por lo tanto, con esta misma precisión logarítmica puede prescindirse de la parte real de la amplitud (cuando $\omega \gg m$) frente a la imaginaria, y para la sección eficaz de dispersión a ángulo cero tenemos

$$d\sigma|_{\theta=0} = \frac{49}{81\pi^2} (Z\alpha)^4 r_e^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^2 \ln^2 \frac{\omega}{m} d\omega \quad (\omega \gg m) \quad (125.3)$$

(F. Rohrlich, R. L. Gluckstern, 1952).

El término logarítmico que hemos utilizado aquí en la sección eficaz de formación de pares por un fotón procede de la región de ángulos muy pequeños (§ 92). Sólo en este mismo dominio [$\theta \lesssim (m/\omega)^2$] se puede aplicar la fórmula (125.3): esta región proporciona, por lo tanto, una contribución muy pequeña a la sección eficaz total de dispersión. En cambio, el intervalo de ángulos $\theta \lesssim m/\omega$ constituye la contribución fundamental a la sección eficaz total (como también al proceso de formación de pares); esto es fácil de entender partiendo de la relación general de unitariedad (no para ángulo nulo) que liga entre sí las amplitudes de dispersión de un fotón y la formación de pares por un fotón. En este dominio, sin embargo el término logarítmico no existe, de modo que la sección eficaz total de dispersión será

$$\sigma \sim (Z\alpha)^4 r_e^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^2 \theta^2 \sim (Z\alpha)^4 r_e^2 \quad (125.4)$$

(H. A. Bethe, F. Rohrlich, 1952).

§ 126. Correcciones radiativas a las ecuaciones del campo electromagnético

Al cuantificar el campo electrón-positón (§ 25) vimos que en la expresión para la energía del vacío aparece una constante infinita que se puede escribir en la forma *

$$\mathcal{E}_0 = - \sum_{p\sigma} \varepsilon_{p\sigma}^{(-)}, \quad (126.1)$$

donde $-\varepsilon_{p\sigma}^{(-)}$ son las frecuencias negativas de las soluciones de la ecuación de Dirac. Esta constante carece de sentido físico, puesto que la energía del vacío es igual a cero, por definición. Por otra parte, cuando existe un campo electromagnético los niveles de energía $\varepsilon_{p\sigma}^{(-)}$ cambiarán. Estas variaciones son finitas y poseen un

* Escribimos aquí la letra \mathcal{E} en vez de E para evitar que se confunda con la intensidad del campo eléctrico.

determinado sentido físico. Dichas variaciones describen la dependencia de las propiedades del espacio respecto del campo y modifican las ecuaciones del campo electromagnético en el vacío.

El cambio en las ecuaciones del campo se traduce en una variación de su función de Lagrange. La densidad L de función de Lagrange es un invariante relativista, por lo que sólo puede depender de los invariantes $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ y $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$. La expresión habitual

$$L_0 = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) \quad (126.2)$$

es el primer término del desarrollo de la expresión general en potencia de los invariantes.

Determinemos la función de Lagrange para el caso en que los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} varíen tan lentamente en el espacio y en el tiempo que es posible considerarlos homogéneos y constantes. Para esto es necesario que la frecuencia ω y el vector de onda \mathbf{k} característicos de la variación del campo satisfagan las desigualdades

$$\omega \ll m, \quad |\mathbf{k}| \ll m. \quad (126.3)$$

Cabe entonces considerar que L no contiene las derivadas de los campos.

Sin embargo, para que el problema planteadó tenga sentido es necesario, además, suponer que el campo eléctrico es suficientemente débil. Ello se debe a que un campo eléctrico homogéneo puede crear pares partiendo del vacío. Considerar el campo en sí como un sistema cerrado es admisible solamente si la probabilidad de formación de pares es suficientemente pequeña. Concretando, debe ser

$$|\mathbf{E}| \ll \frac{m^2}{e} \left(= \frac{m^2 c^3}{e \hbar} \right) \quad (126.4)$$

(la variación de energía de la carga e al recorrer la distancia \hbar/mc debe ser pequeña comparada con m^2). Veremos más adelante (véase también el problema 2) que, en tal caso, la probabilidad de formación de pares es exponencialmente pequeña.

Si junto con el campo eléctrico se tiene también uno magnético, en general será posible elegir el sistema de referencia en el que \mathbf{E} y \mathbf{H} son paralelos. En tal caso el campo magnético no influye sobre el movimiento de la carga en la dirección de \mathbf{E} . Precisamente en este sistema (cuya previa elección se supondrá en los cálculos que siguen) debe cumplirse la condición (126.4).

El cálculo de la función de Lagrange se iniciará con la determinación de la variación W' de la energía del vacío. La cantidad W' viene dada por el cambio de la «energía nula» (126.1) a expensas del campo. Sin embargo, de esta cantidad hay que restar aún el valor medio de la energía potencial de los electrones en los «esta-

dos» con energía negativa. Esta última substracción significa simplemente que la carga total del vacío es, por definición, igual a cero.

La energía nula cuando existe un campo vale:

$$\mathcal{E}_0 = - \sum_{p\sigma} e_{p\sigma}^{(-)} = \sum_{p\sigma} \int \psi_{p\sigma}^{(-)} * i \frac{\partial}{\partial t} \psi_{p\sigma}^{(-)} d^3x,$$

donde $\psi_{p\sigma}^{(-)}$ son soluciones de frecuencia negativa de la ecuación de Dirac en el campo dado. Supondremos que la integración se extiende al volumen unidad y que las funciones de onda se han normalizado a 1 en este volumen; entonces \mathcal{E}_0 es la energía por unidad de volumen. De acuerdo con lo dicho más arriba, de \mathcal{E}_0 hay que restar la cantidad

$$U_0 = \sum_{p\sigma} \int \psi_{p\sigma}^{(-)} * e\varphi \psi_{p\sigma}^{(-)} d^3x,$$

donde $\varphi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$ es el potencial del campo homogéneo. Pero según un teorema de derivación de operadores respecto de un parámetro (véase III, problema en el § 11)

$$U_0 \equiv E \sum_{p\sigma} \psi_{p\sigma}^{(-)} * \frac{\partial H}{\partial E} \psi_{p\sigma}^{(-)} d^3x = -E \cdot \sum_{p\sigma} \frac{\partial e_{p\sigma}^{(-)}}{\partial E} = E \cdot \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial E}.$$

Así, pues, la variación total de densidad de energía en el vacío es, en definitiva,

$$W' = \left(\mathcal{E}_0 - E \cdot \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial E} \right) - \left(\mathcal{E}_0 - E \cdot \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial E} \right)_{E=H=0}. \quad (126.5)$$

Establezcamos ahora la relación entre W' y la variación de densidad de lagrangiano L' ($L = L_0 + L'$). Para esto nos valdremos de la fórmula general

$$W = \sum \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L,$$

en la que q son las «coordenadas generalizadas» del campo (véase II, § 32). Para el campo electromagnético el papel de cantidades q lo representan los potenciales \mathbf{A} y φ . Dado que

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla\varphi, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (126.6)$$

de entre las «velocidades» \dot{q} interviene en L tan sólo $\dot{\mathbf{A}}$, y la derivación respecto de \mathbf{A} equivale a la derivación respecto de \mathbf{E} . Por consiguiente,

$$W' = E \cdot \frac{\partial L'}{\partial E} - L' \quad (126.7)$$

Comparando (126.5) y (126.7) se encuentra

$$L' = - [\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_0|_{E=H=0}]. \quad (126.8)$$

Con esto el cálculo de L' queda reducido a calcular la suma (126.1).

Consideremos en primer lugar el caso en que existe sólo campo magnético. Los niveles «negativos» de energía del electrón (carga $e = -|e|$) en un campo homogéneo constante $H_z = H$ son

$$-\epsilon_p^{(-)} = -\sqrt{m^2 + |e|H(2n-1+\sigma) + p_z^2}, \quad (126.9)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad \sigma = \pm 1$$

(véase el problema del § 32). Para calcular la suma tendremos en cuenta que el número de estados en el intervalo dp_z es

$$\frac{|e|H}{2\pi} \frac{dp_z}{2\pi}$$

(véase III, § 111); el primer factor da el número de estados con diferentes valores p_z , de los cuales no depende la energía. Además, todos los niveles, con la única excepción del nivel $n = 0$, $\sigma = -1$, son doblemente degenerados: los niveles con n , $\sigma = +1$ y con $n+1$, $\sigma = -1$ coinciden. Por consiguiente,

$$-\mathcal{E}_0 = \frac{|e|H}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sqrt{m^2 + p_z^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{m^2 + 2|e|Hn + p_z^2} \right\} dp_z. \quad (126.10)$$

La divergencia de las integrales en (126.10) se evita en el cálculo de L' (126.8) restando el valor de la suma correspondiente a $H = 0$. Para llevar a cabo esta «renormalización» conviene calcular primero la expresión convergente

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv - \frac{\partial^2 \mathcal{E}_0}{(\partial m^2)^2} = \\ &= - \frac{|e|H}{2(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \left\{ (m^2 + p_z^2)^{-\frac{3}{2}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (m^2 + 2|e|Hn + p_z^2)^{-\frac{3}{2}} \right\} dp_z = \\ &= - \frac{|e|H}{8\pi^2} \left\{ \frac{1}{m^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + 2|e|Hn} \right\}. \end{aligned}$$

La suma entre llaves se puede reducir a la suma de una progresión geométrica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Phi &= -\frac{|e|H}{8\pi^2} \int_0^\infty e^{-m^2\eta} \left[2 \sum_{n=0}^\infty e^{-2|e|Hn\eta} - 1 \right] d\eta = \\ &= -\frac{|e|H}{8\pi^2} \int_0^\infty e^{-m^2\eta} \left[\frac{2}{1-e^{-2|e|H\eta}} - 1 \right] d\eta = \\ &= -\frac{|e|H}{8\pi^2} \int_0^\infty e^{-m^2\eta} \operatorname{ctgh}(|e|H\eta) d\eta. \quad (126.11)\end{aligned}$$

Para hallar L' es necesario ahora integrar Φ dos veces respecto de m^2 y, luego, restar el valor que toma para $H = 0$ la cantidad que se obtenga. Se encuentra así

$$L' = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-m^2\eta}}{\eta^3} \{ \eta |e|H \operatorname{ctgh}(\eta |e|H) - 1 \} d\eta + c_1 + c_2 m^2, \quad (126.12)$$

donde c_1 y c_2 dependen de H , pero no de m^2 .

Por consideraciones de dimensión y de pariedad respecto de H es evidente que L' , como función de H y m , debe tener la forma

$$L' = m^4 f\left(\frac{H^2}{m^4}\right).$$

En consecuencia, no pueden existir en L' términos impares respecto de m^2 , de modo que $c_2 = 0$. En cuanto al coeficiente c_1 , éste se determina a partir de la condición de que el desarrollo de L' en potencias de H^2 empiece con un término $\sim H^4$. En efecto, un término $\sim H^2$ en L' significaría simplemente un cambio en el coeficiente del lagrangiano de partida $L_0 = -H^2/8\pi$. Pero ello equivaldría, en esencia, a una variación de la definición de intensidad del campo y, con ello, también de la carga. En consecuencia, suprimir términos $\sim H^2$ significa renormalizar la carga. Es fácil comprobar que para ello hay que hacer

$$c_1 = \frac{H^2 e^2}{3 \cdot 8\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta} d\eta.$$

Finalmente, efectuando en (126.12) el cambio de variables $m^2\eta \rightarrow \eta$, obtendremos en definitiva

$$L'(H; E=0) = \frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \left\{ -\eta b \operatorname{ctgh} b\eta + 1 + \frac{b^2\eta^2}{3} \right\} e^{-\eta} \frac{d\eta}{\eta^3}, \quad (126.13)$$

donde $b = |e| H/m^2$.

Volvamos al caso general en el que, junto con el campo magnético, se tiene también un campo eléctrico paralelo al primero que cumple la condición (126.4).

Para calcular L' en este caso, no hay necesidad, sin embargo, de resolver de nuevo el problema de determinar los niveles de energía ($\epsilon_p^{(-)}$) del electrón en el campo. Basta observar que si se busca la función de onda, solución de la ecuación de segundo orden (32.7), en forma de producto

$$\psi = \psi_E(z) e^{ip_x x} \chi_{n\sigma}(y)$$

[donde $\chi_{n\sigma}(y)$ es la función de onda en el campo magnético cuando $E = 0$ y $p_z = 0$], la masa m y el campo H intervendrán en la ecuación para $\psi_E(z)$ tan sólo en la combinación

$$m^2 + |e| H (2n + 1 + \sigma).$$

Si ahora se tiene en cuenta que la suma respecto de p_x (del cual no dependen los niveles de energía) da como antes el factor $|e| H/2\pi$, es claro por razones de dimensionalidad que la magnitud

$$\Phi(H, E) \equiv \frac{\partial^2 L'}{\partial m^2}$$

puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \Phi(H, E) &= -\frac{|e| H}{8\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{F\left(\frac{m^2 + |e| H (2n+1+\sigma)}{|e| H}\right)}{m^2 + |e| H (2n+1+\sigma)} = \\ &= -\frac{b}{8\pi^2} \left\{ F\left(\frac{1}{a}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F\left(\frac{1+2bn}{a}\right)}{1+2bn} \right\}, \quad a = \frac{|e| E}{m^2} \quad (126.14) \end{aligned}$$

(cada término de esta suma es $-d^2\epsilon_p^{(-)}/(dm^2)^2$, sumada respecto de todos los números cuánticos, salvo n). F es aquí una función, de momento incógnita, que hallaremos por consideraciones de invariancia relativista

En efecto, Φ ha de ser función de los escalares $H^2 - E^2$ y $(E \cdot H)^2 = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2$:

$$\Phi(H, E) = f(H^2 - E^2, (EH)^2).$$

Por ello,

$$\Phi(0, E) = f(-E^2, 0) = \Phi(iE, 0).$$

Pero la función $\Phi(iE, 0)$ se obtiene a partir de (126.11) mediante la sustitución $H \rightarrow iE$; después de cambiar el símbolo de variable de integración, se encuentra

$$\Phi(iE, 0) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty e^{-\eta/a} \operatorname{ctg} \eta \, d\eta. \quad (126.15)$$

Comparando esta expresión con el límite $\Phi(H \rightarrow 0, E)$, calculado mediante (126.14), podremos hallar la función F .

El paso al límite $H \rightarrow 0$ en (125.14) se efectúa substituyendo la sumación respecto de n por la integración respecto de $dn = dx/2b$:

$$\Phi(0, E) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty F\left(\frac{1+x}{a}\right) \frac{dx}{1+x} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{1/a}^\infty \frac{F(y)}{y} dy. \quad (126.16)$$

Igualando las expresiones (126.15) y (126.16) y derivando esta igualdad con relación a $1/a \equiv z$, obtendremos

$$\frac{F(z)}{z} = - \int_0^\infty e^{-\eta z} \eta \operatorname{ctg} \eta \, d\eta.$$

Hecho esto, de nuevo la sumación en (126.14) se reduce a sumar una progresión geométrica y los cálculos que siguen luego son análogos a los que se llevaron a cabo más arriba: expresamos Φ en función de m^2 , E y H , integramos dos veces respecto de m^2 , restamos el valor correspondiente a $E = H = 0$ y determinamos las constantes de integración como en la deducción de (126.13). El resultado final es *:

$$\begin{aligned} L' &= \frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \left\{ -(\eta a \operatorname{ctg} \eta a) (\eta b \operatorname{ctgh} \eta b) + \right. \\ &\quad \left. + 1 - \frac{\eta^2}{3} (a^2 - b^2) \right\} d\eta, \quad (126.17) \\ a &= \frac{|e| E}{m^2} \left(= \frac{|e| \hbar E}{m^2 c^3} \right), \quad b = \frac{|e| H}{m^2} \left(= \frac{|e| \hbar H}{m^2 c^3} \right). \end{aligned}$$

* Heisenberg y Euler (W. Heisenberg, H. Euler, 1935) fueron los primeros en obtener este resultado. En los cálculos expuestos se han utilizado también las ideas contenidas en el razonamiento propuesto por Weisskopf (V. Weisskopf, 1936).

Se advierte desde luego un cierto carácter convencional en la manera de escribir esta fórmula. Ésta es adecuada tan sólo si se cumple la condición de que el campo eléctrico sea pequeño: $a \ll 1$ (126.4) [que no se tiene en cuenta de manera explícita en (126.17)]. Esto se traduce en que el integrando en (126.17) tiene polos en los puntos $\eta = n\pi/a$ ($n = 1, 2, \dots$), de modo que, tal como se ha escrito, la integral carece de sentido rigurosamente hablando. En consecuencia, (126.17) puede, esencialmente, servir tan sólo para obtener términos de la serie asintótica (véase más adelante) en potencias de a mediante un desarrollo formal en $\text{ctg } a$.

Desde el punto de vista matemático, puede atribuirse un sentido a la integral (126.17) rodeando los polos en el plano de la variable compleja. Aparece entonces en L' y, por consiguiente, también en la densidad de energía W' , una parte imaginaria. Una energía compleja significa, como de ordinario, que el estado tiene un carácter cuasiestacionario *. En el presente caso la estacionariedad queda violada por la creación de pares, y $-2\text{Im } W'$ es la probabilidad w de creación de un par por unidad de volumen y unidad de tiempo; dado que pequeños incrementos a W y L difieren sólo en el signo, la probabilidad w , expresada en función de E y H , es igual simplemente a

$$w = 2 \text{Im } L'. \quad (126.18)$$

Claro está, resulta proporcional a $e^{-\pi/a}$ [véase más adelante (126.20)]. Precisamente gracias a que $\text{Im } W'$ es exponencialmente pequeña cuando $a \ll 1$, tiene sentido la serie asintótica en potencias de a conservando en ella un número finito arbitrario de términos.

Consideremos los casos límite de la fórmula (126.17). En campos débiles ($a \ll 1$, $b \ll 1$) los primeros términos del desarrollo son:

$$L' = \frac{m^4}{8\pi^2} \frac{(a^2 - b^2)^2 + 7(ab)^2}{45} = \frac{e^4}{45 \cdot 8\pi^2 m^4} [(E^2 - H^2)^2 + 7(EH)^2]. \quad (126.19)$$

En particular, para $b = 0$ la corrección relativa vale

$$\frac{L'}{L_0} = a \frac{a^2}{45\pi}.$$

Obsérvese también que una vez L se ha expresado [como en (126.19)] en función de los invariantes $E^2 - H^2$ y $E \cdot H$, la fórmula pasa a ser por ello mismo aplicable en un sistema de referencia arbitrario (y no solamente en aquél en que $E \parallel H$).

La parte imaginaria de L' cuando $a \ll 1$ se obtiene a partir de la integral (126.17) restando la mitad del residuo en el polo de la cotangente más próximo a cero es decir, en $\eta a = \pi - i0$. De acuerdo con (126.18), esto nos da la probabilidad de

* Los polos en la integral deben rodearse de forma que se tenga $\text{Im } W' < 0$. A esta condición corresponde la regla ordinaria de sustitución de la masa $m^2 \rightarrow m^2 - i0$ (es decir, en el presente caso, $a \rightarrow a + i0$).

creación de un par por un campo eléctrico débil:

$$w = \frac{m^4}{4\pi^3} a^2 e^{-\pi/a} = \frac{1}{4\pi^3} \left(\frac{eE\hbar}{m^2 c^3} \right)^2 \frac{mc^2}{\hbar} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \exp \left(-\frac{\pi m^2 c^3}{|e|\hbar E} \right). \quad (126.20)$$

En un campo magnético fuerte ($a = 0, b \gg 1$) partiremos de la fórmula (126.13), escrita (después de substituir $b\eta \rightarrow \eta$) en la forma

$$L' = \frac{m^4 b^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\eta/b}}{\eta} \left[\frac{1}{3} - \frac{\eta \operatorname{ctgh} \eta - 1}{\eta^2} \right] d\eta.$$

Cuando $b \gg 1$, en esta integral cuenta esencialmente la región $1 \ll \eta \ll b$. En ella $e^{-\eta/b} \approx 1$ y cabe prescindir del segundo término entre paréntesis, cortando la integral (con precisión logarítmica) en los límites $\eta \approx 1$ y $\eta \approx b$. Se tiene entonces

$$L' = \frac{m^4 b^2}{24\pi^2} \ln b \quad (126.21)$$

(un cálculo más aproximado substituye $\ln b$ por $\ln b - 2,29$). En este caso, la razón L'/L_0 vale aproximadamente

$$\frac{L'}{L_0} \approx \frac{a}{3\pi} \ln b.$$

Vemos así, que las correcciones radiativas a las ecuaciones del campo podrían alcanzar un valor relativo del orden de la unidad únicamente en campos exponencialmente grandes:

$$H \sim \frac{m^2}{|e|} e^{3\pi/a}. \quad (126.22)$$

Con todo, las correcciones calculadas tienen sentido: violan el carácter lineal de las ecuaciones de Maxwell y conducen así a efectos en principio observables (por ejemplo, a la dispersión de la luz por la luz o en un campo exterior).

La relación entre las intensidades E y H y los potenciales A y ϕ sigue siendo, por definición, la misma que antes, es decir, la (126.6). Por lo tanto, tampoco cambia el primer par de ecuaciones de Maxwell:

$$\operatorname{div} H = 0, \quad \operatorname{rot} E = - \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Por el contrario, el segundo par de ecuaciones se obtiene variando la acción

$$S = \int (L_0 + L') d^4x$$

respecto de \mathbf{A} y φ . Dichas ecuaciones pueden escribirse en la forma

$$\text{rot} (\mathbf{H} - 4\pi\mathbf{M}) = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}), \quad (126.23)$$

$$\text{div} (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 0, \quad (126.24)$$

donde se han introducido las notaciones:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{M} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{H}}. \quad (126.25)$$

Por su forma las ecuaciones (126.23-24) coinciden con las ecuaciones macroscópicas de Maxwell correspondientes al campo en un medio material *. Esto hace ver que las magnitudes \mathbf{P} y \mathbf{M} tienen el significado de vectores de polarización, eléctrica y magnética, del vacío.

Haremos observar, finalmente, que \mathbf{P} y \mathbf{M} se anulan para el campo de una onda plana en la que, como es sabido, los dos invariantes $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ y $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$ son iguales a cero. Dicho de otro modo, para una onda plana no existen correcciones no lineales en el vacío.

PROBLEMAS

1. Determinar la corrección al campo de una pequeña carga en reposo e_1 debida al carácter no lineal de las ecuaciones de Maxwell.

Solución. De (126.19) se sigue para $\mathbf{H} = 0$

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\alpha^2}{90\pi^2 m^4} \mathbf{E} \mathbf{E}^2. \quad (1)$$

En el caso de simetría esférica, (126.24) nos da

$$(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) r^2 = \text{const} = e_1 \quad (2)$$

(la constante se determina a partir de la condición de que cuando $r \rightarrow \infty$ el campo coincide con el campo de Coulomb de la carga e_1). Resolviendo aproximadamente (2) obtenemos

$$\mathbf{E} = \frac{e_1}{r^2} \left(1 - \frac{2\alpha^2 e_1^2}{45\pi m^4 r^4} \right),$$

o bien

* Al efectuar la comparación hay que recordar que en la electrodinámica macroscópica el valor medio del campo magnético se representa por \mathbf{B} , y no por \mathbf{H} , como aquí.

$$\Phi = \frac{e_1}{r} \left(1 - \frac{2\alpha^2 e_1^2}{225\pi m^4 r^4} \right). \quad (3)$$

La corrección no lineal respecto de e_1 en (3) hay que distinguirla de la corrección lineal en (111.6) ligada, en último término, con la no homogeneidad del campo de Coulomb. La corrección (3) es de orden más elevado respecto α , pero decrece más lentamente al aumentar la distancia y crece más rápidamente al crecer e_1 .

2. Estimar directamente la probabilidad de creación de un par en un campo eléctrico débil constante y homogéneo en la aproximación cuasiclásica y con precisión exponencial (*F. Sauter, 1931*).

Solución. El movimiento en un campo débil E (potencial $\varphi = -E \cdot r = -Ez$ lentamente variable) es cuasi clásico. Dado que en la amplitud de reacción la función de onda del positón final interviene en la forma de una función inicial «de frecuencia negativa», la creación del par puede considerarse como transición del electrón desde un estado de frecuencia negativa a uno de frecuencia positiva. En el primero de ellos, cuando existe un campo, el impulso cuasiclásico $p(z)$ se determina por la igualdad

$$\varepsilon = -\sqrt{p^2(z) + m^2} + |e|Ez, \quad (1)$$

y en el segundo, por

$$\varepsilon = +\sqrt{p^2(z) + m^2} + |e|Ez. \quad (2)$$

La transición del primer estado al segundo es el paso a través de una barrera de potencial [región en la que $p(z)$ es imaginario] que separa los dominios de dependencia (1) y (2) con valores reales de $p(z)$ para un ε dado. Las fronteras de esta barrera z_1 y z_2 son las raíces de $p(z) = 0$, es decir,

$$\varepsilon = -m + |e|Ez_1, \quad \varepsilon = +m + |e|Ez_2.$$

La probabilidad de atravesar la barrera cuasiclásica es

$$w \sim \exp \left(-2 \int_{z_2}^{z_1} |p(z)| dz \right) = \exp \left(-4 \frac{m^2}{eE} \int_0^1 \sqrt{1 - \xi^2} d\xi \right),$$

de donde

$$w \sim \exp \left(-\frac{\pi m^2}{|e|E} \right)$$

de acuerdo con (126.20).

§ 127. Cálculo de integrales en dominios cuadridimensionales

Recogeremos aquí algunas reglas y fórmulas que son útiles para el cálculo de integrales que aparecen en la teoría de las correcciones radiativas.

La forma típica de una integral correspondiente a un diagrama de Feynman es:

$$\int \frac{f(k) d^4 k}{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad (127.1)$$

donde a_1, a_2, \dots son polinomios de segundo grado respecto del 4-vector k , $f(k)$

es un polinomio de grado cualquiera n' , y la integración se extiende a todo el espacio- k cuadridimensional.

Es cómodo el método de cálculo de tales integrales (debido a Feynman, 1949) basado en la transformación previa (parametrización) del integrando mediante la introducción de integraciones complementarias con variables auxiliares ξ_1, ξ_2, \dots según la fórmula

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)! \int_0^1 d\xi_1 \dots \int_0^1 d\xi_n \frac{\delta(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - 1)}{(a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n)^n}. \quad (127.2)$$

Como resultado de tal transformación, en vez de n polinomios cuadráticos diferentes en el denominador, aparece la potencia n -ésima de un único polinomio de segundo grado.

Eliminando la función- δ mediante integración respecto de $d\xi_n$ e introduciendo nuevas variables definidas por

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_{n-1}, & \xi_2 &= x_{n-2} - x_{n-1}, & \dots, & \xi_{n-1} &= x_1 - x_2, \\ \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n-1} &= x_1, \end{aligned}$$

obtendremos la fórmula (127.2) en la forma equivalente

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} &= (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \\ &\dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{1}{[a_1 x_{n-1} + a_2 (x_{n-2} - x_{n-1}) + \dots + a_n (1 - x_1)]^n}. \end{aligned} \quad (127.3)$$

Para $n = 2$ esta fórmula se escribe

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 \frac{dx}{[a_1 x + a_2 (1-x)]^2} \quad (127.4)$$

y se comprueba por un cálculo directo. Ahora bien, para un valor arbitrario de n la fórmula se puede demostrar por inducción de $n-1$ a n . En efecto, efectuando en (127.3) la integración respecto de dx_{n-1} , se obtendrá en el segundo miembro de la igualdad la diferencia de dos integrales $(n-2)$ -uples de la misma forma. Suponiendo que para ellas sea válida la fórmula, resulta

$$\frac{1}{a_1 - a_2} \left[\frac{1}{a_2 a_3 \dots a_n} - \frac{1}{a_1 a_3 \dots a_n} \right],$$

que coincide con la expresión en el primer miembro de la igualdad (127.3).

Derivando (127.3) respecto de $a_1, a_2 \dots$ es posible obtener fórmulas análogas que sirven para parametrizar integrales que contienen en el denominador un número cualquiera de polinomios elevados a potencias superiores a la primera.

La regularización de integrales divergentes se lleva a cabo por substracción de integrales de tipo análogo. Para calcular tal diferencia puede resultar conveniente la transformación previa de la diferencia de los integrandos [cada uno de los cuales se transformó ya mediante (127.2)] recurriendo a la fórmula

$$\frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n} = - \int_0^1 \frac{n(a-b) dz}{[(a-b)z+b]^{n+1}}. \quad (127.5)$$

Después de aplicar la transformación (127.3), la integral cuadridimensional en (127.1) se reduce a la forma

$$\int \frac{f(k) d^4 k}{[(k-l)^2 - \alpha^2]^n}, \quad (127.6)$$

donde l es un 4-vector y α^2 un escalar que dependen, ambos, de los parámetros x_1, \dots, x_{n-1} ; el escalar α^2 se considerará positivo.

Si la integral (127.6) converge, en ella puede efectuarse el cambio de variables $k - l \rightarrow k$ (desplazamiento del origen de coordenadas), hecho lo cual toma la forma

$$\int \frac{f(k) d^4 k}{(k^2 - \alpha^2)^n} \quad (127.7)$$

[con otra función $f(k)$], de modo que el denominador contiene únicamente el cuadrado k^2 . En cuanto al numerador, basta que nos limitemos a considerar funciones escalares $f = F(k^2)$. En efecto, para integrales con numeradores de otro tipo tenemos

$$\int \frac{k^\mu F(k^2) d^4 k}{(k^2 - \alpha^2)^n} = 0, \quad (127.8)$$

$$\int \frac{k^\mu k^\nu F(k^2) d^4 k}{(k^2 - \alpha^2)^n} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \int \frac{k^2 F(k^2) d^4 k}{(k^2 - \alpha^2)^n}, \quad (127.9)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma F(k^2) d^4 k}{(k^2 - \alpha^2)^n} &= \\ &= \frac{1}{24} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \int \frac{(k^2)^2 F(k^2) d^4 k}{(k^2 - \alpha^2)^n} \end{aligned} \quad (127.10)$$

etcétera, como es ya evidente por meras consideraciones de simetría (en la integración respecto de todas las direcciones de k).

En la integral de partida (127.1) cada uno de los factores a_1, a_2, \dots en el denominador tiene (como función de k_0) dos polos, que se rodean al integrar respecto de dk_0 de acuerdo con la regla ordinaria (§ 76). Después de efectuar la transformación a la forma (127.7), en vez de $2n$ polos simples el integrando tiene únicamente dos polos de n -ésimo orden, polos que se rodean de acuerdo con aquella misma regla (camino C en la fig. 24). Desplazando el contorno de integración como indican las

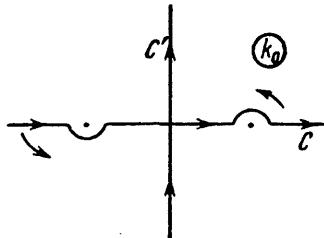


Fig. 24.

flechas, dicho camino puede reducirse al eje imaginario en el plano k_0 (C' en la figura 24). En otras palabras, la variable k_0 se substituye por $k_0 = ik'_0$ con la variable real k'_0 . Cambiando también la notación k en la k' , tendremos

$$k^2 = k_0^2 - k^2 \rightarrow - (k_0'^2 + k'^2) = - k'^2, \quad (127.11)$$

donde k' es un 4-vector en la métrica euclidiana. Con todo ésto, d^4k pasa a ser

$$d^4k \rightarrow id^4k' = ik'^2 d \frac{k'^2}{2} d\Omega,$$

donde $d\Omega$ es el elemento de ángulo sólido cuadridimensional. La integración respecto de $d\Omega$ da $2\pi^2$ (véase II, § 107), con lo cual

$$d^4k \rightarrow i\pi^2 k'^2 d(k'^2). \quad (127.12)$$

Haciendo $k'^2 = z$, obtendremos finalmente

$$\int \frac{F(k^2) d^4k}{(k^2 - \alpha^2)^n} = (-1)^n i\pi^2 \int_0^\infty \frac{F(-z) z dz}{(z + \alpha^2)^n}. \quad (127.13)$$

En particular,

$$\int \frac{d^4k}{(k^2 - \alpha^2)^n} = \frac{(-1)^n i\pi^2}{\alpha^{2(n-2)} (n-1)(n-2)}. \quad (127.14)$$

La parte que diverge logarítmicamente en las integrales (127.7) puede separarse en la forma

$$\int \frac{d^4 k}{[(k-l)^2 - \alpha^2]^2}. \quad (127.15)$$

Es fácil ver que también en esa integral es admisible la transformación $k \rightarrow k + l$. En efecto, la diferencia entre la integral inicial y la transformada

$$\int \left\{ \frac{1}{[(k-l)^2 - \alpha^2]^2} - \frac{1}{(k^2 - \alpha^2)^2} \right\} d^4 k$$

es una integral convergente y, por lo tanto, es lícito, en cualquier caso, substituir en ella $k \rightarrow k + l$. Efectuando esta sustitución y cambiando además $k \rightarrow -k$, obtendremos la misma cantidad con signo contrario, de donde se sigue que ésta debe ser igual a cero.

La integral que diverge linealmente ha de tener la forma

$$\int \frac{k^\mu d^4 k}{[(k-l)^2 - \alpha^2]^2}, \quad (127.16)$$

pero de hecho esta integral diverge tan sólo logarítmicamente: el integrando es igual asintóticamente (para $k \rightarrow \infty$) a $k^\mu/(k^2)^2$ y se anula al promediar respecto de las direcciones. El desplazamiento del origen de coordenadas, sin embargo, no deja invariante la integral (127.16), sino que le añade una constante. Demostremos esto para el caso de un desplazamiento infinitesimal $k \rightarrow k + \delta l$, calculando la diferencia

$$\Delta^\mu = \int \left\{ \frac{k^\mu}{[(k-\delta l)^2 - \alpha^2]^2} - \frac{k^\mu + \delta l^\mu}{(k^2 - \alpha^2)^2} \right\} d^4 k. \quad (127.17)$$

Limitándonos a los términos de primer orden respecto de δl , es,

$$\Delta^\mu = \int \left\{ \frac{4k^\mu (k \cdot \delta l)}{(k^2 - \alpha^2)^3} - \frac{\delta l^\mu}{(k^2 - \alpha^2)^2} \right\} d^4 k.$$

En el primer término el promedio respecto de las direcciones cambia el numerador en $k^2 \delta l^\mu$ [cf. (127.9)], con lo que se encuentra *

$$\Delta^\mu = \alpha^2 \delta l^\mu \int \frac{d^4 k}{(k^2 - \alpha^2)^3} = -\frac{i\pi^2}{2} \delta l^\mu. \quad (127.18)$$

* Un cálculo más prolífico conduce también al mismo resultado cuando l es finito.

En las expresiones finales de las correcciones radiativas aparece a menudo una función transcendente definida por la integral

$$F(\xi) = \int_0^\xi \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (127.19)$$

(llamada a veces *función de Spence*). Indicaremos aquí como referencia algunas de sus propiedades:

$$F(\xi) + F\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln^2 \xi, \quad (127.20)$$

$$F(-\xi) + F(-1+\xi) = -\frac{\pi^2}{6} + \ln \xi \ln(1-\xi), \quad (127.21)$$

$$F(1) = \frac{\pi^2}{12}, \quad F(-1) = -\frac{\pi^2}{6}. \quad (127.22)$$

Para valores pequeños de ξ , vale el desarrollo

$$F(\xi) = \xi - \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^3}{9} - \frac{\xi^4}{16} + \dots \quad (127.23)$$

CAPÍTULO 13

FÓRMULAS ASINTÓTICAS DE LA ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA

§ 128. Comportamiento asintótico del propagador de fotón para grandes impulsos

En el § 110 se calculó el primer término (respecto de α) del desarrollo del operador polarización $\mathcal{P}(k^2)$ y se encontró que, cuando $|k^2| \gg m^2$, con precisión logarítmica tiene la forma

$$\mathcal{P}(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} k^2 \ln \frac{|k^2|}{m^2}. \quad (128.1)$$

También allí se indicó que por el propio sentido de la deducción de esta fórmula (como corrección de primera aproximación al propagador $4\pi D^{-1} = k^2$) se suponía que quedaba satisfecha la condición

$$\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2} \ll 1, \quad (128.2)$$

lo que limita la aplicabilidad de la fórmula para valores grandes de $|k^2|$. Demostaremos ahora que, en realidad, la expresión (128.1) también conserva su validez bajo la condición mucho menos restrictiva

$$\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2} \leq 1. \quad (128.3)$$

La demostración es como sigue*. En primer lugar observemos que si bien cuando se cumple la condición (128.3) la contribución a $\mathcal{P}(k^2)$ puede proceder, en principio, de términos de todos los órdenes (respecto de α) en la serie de la teoría de perturbaciones, sin embargo en cada orden (el n -ésimo) hay que tener en cuenta tan sólo los términos $\sim \alpha \ln^n(|k^2|/m^2)$ que contienen el logaritmo grande elevado

* El planteo del problema tal como se expone aquí y los resultados se deben a L. D. Landau, A. A. Abrikosov, e I. M. Salatnikov (1954).

al mismo grado que α ; los términos con potencias inferiores del logaritmo, evidentemente, son pequeños en virtud de la desigualdad $\alpha \ll 1$.

Además, el estudio de la serie de la teoría de perturbaciones correspondiente a \mathcal{P} se puede reducir al de las series para \mathcal{G} y Γ^μ mediante la ecuación de Dyson

$$\mathcal{P}(k^2) = i \frac{4\pi\alpha}{3} \operatorname{Tr} \int \gamma_\mu \mathcal{G}(p+k) \Gamma^\mu(p+k, p; k) \mathcal{G}(p) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \quad (128.4)$$

[véase (104.4)]. Dado que la función $\mathcal{P}(k^2)$ posee la invariancia de contraste, al calcularla cabe adoptar cualquier contraste para las magnitudes \mathcal{G} y Γ . El más conveniente para este fin es el de Landau, en el cual el propagador de los fotones libres tiene la forma (77.11):

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{4\pi}{k^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (128.5)$$

[$D^{(1)} = 0$ en (100.17)]. El hecho es que, en este contraste, las series de la teoría de perturbaciones para \mathcal{G} y Γ^μ no contienen términos cuyas potencias del logaritmo sean las adecuadas. Por ello, en (128.4) basta substituir \mathcal{G} y Γ^μ por sus aproximaciones de orden cero: $\mathcal{G} = G$, $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$. Entonces la expresión (128.4) se reduce a la integral

$$\mathcal{P}(k^2) = i \frac{4\pi\alpha}{3} \operatorname{Tr} \int \gamma_\mu G(p+k) \gamma^\mu G(p) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}. \quad (128.6)$$

Ésta es precisamente la integral de Feynman que corresponde al diagrama (110.1) de primera aproximación (respecto de α), la cual nos lleva, en efecto (después de la correspondiente renormalización) a la fórmula (128.1).

Pasando a la demostración de lo que acabamos de afirmar, veamos ante todo cuál es el origen del logaritmo en la integral (128.6). Es fácil cerciorarse de que el término logarítmico procede del dominio de integración

$$p^2 \gg |k^2| \text{ cuando } |k^2| \gg m^2. \quad (128.7)$$

En efecto, desarrollando formalmente G en potencias de $1/\hat{p}$, tenemos

$$G(p) \approx \frac{1}{\hat{p}} = \frac{\hat{p}}{p^2},$$

$$G(p-k) \approx \frac{1}{\hat{p}-\hat{k}} \approx \frac{1}{\hat{p}} + \frac{1}{\hat{p}} \hat{k} \frac{1}{\hat{p}} + \frac{1}{\hat{p}} \hat{k} \frac{1}{\hat{p}} \hat{k} \frac{1}{\hat{p}} = \frac{\hat{p}}{p^2} + \frac{\hat{p}\hat{k}\hat{p}}{(p^2)^2} + \frac{\hat{p}\hat{k}\hat{p}\hat{k}\hat{p}}{(p^2)^3}.$$

Al substituir en (128.6), el primer término, que no depende de k , desaparece como resultado de la regularización (en virtud de la condición $\mathcal{P}/k^2 \rightarrow 0$ para $k^2 \rightarrow 0$).

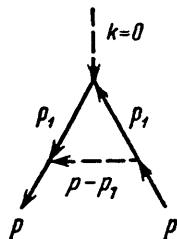
El segundo término se anula al integrar respecto de las direcciones de p . En cuanto a la tercera integral, ésta diverge logarítmicamente respecto de p^2 ; extendiéndola entre los límites $p^2 \sim |k^2|$ [límite inferior de la región (128.7)] hasta un cierto «parámetro de corte» auxiliar Λ^2 , obtendremos

$$-\frac{\alpha}{3\pi} k^2 \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|}. \quad (128.8)$$

Para la regularización es necesario restar de \mathcal{P}/k^2 su valor para $k^2 = 0$. Pero puesto que la aproximación logarítmica supone la condición $|k^2| \gg m^2$, al efectuar el cálculo con dicha precisión se consigue la regularización substrayendo el valor para $|k^2| \sim m^2$, con lo cual en el argumento del logaritmo se substituye Λ^2 por m^2 y obtenemos así (128.1).

Dado que las correcciones que nos interesan a \mathcal{G} y Γ^μ tienen carácter logarítmico, al tenerlas en cuenta \mathcal{G} y Γ^μ diferirán de G y γ^μ en factores logarítmicos lentamente variables. Por lo tanto, también en la integral exacta (128.4) será fundamental el mismo dominio (128.7) que en la integral aproximada (128.6). Con todo, es imposible hacer simplemente $k = 0$ en $\Gamma^\mu(p + k, p; k)$: dada la divergencia cuadrática de la integral, su regularización exige tener en cuenta también los dos términos siguientes del desarrollo de $\Gamma^\mu(p + k, p; k)$ en potencias de k . Sin embargo, nosotros nos limitaremos aquí a considerar las correcciones a $\Gamma^\mu(p, p, 0)$, lo que pone de manifiesto de manera suficientemente clara el papel que representa la elección del contraste y el diverso carácter de las integrales que resultan de los diagramas de los distintos tipos. Nótese también que en el estudio análogo correspondiente a \mathcal{G} ello no es necesario, puesto que las correcciones en Γ y \mathcal{G} están ligadas entre sí por la integral de Ward (105.8).

A la primera corrección (respecto de α) en $\Gamma(p, p; 0)$ corresponde el diagrama



y la integral asociada *

$$\Gamma^\mu^{(1)} = -i\alpha \int \gamma^\lambda G(p_1) \gamma^\mu G(p_1) \gamma^\nu D_{\lambda\nu}(p - p_1) \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4}. \quad (128.9)$$

* Para evitar interpretaciones erróneas al comparar con los resultados del § 114, recordaremos que en dicho párrafo los dos terminales de electrón del diagrama se supusieron físicos, mientras que aquí, por hipótesis, $p^2 \gg |k^2| \gg m^2$, es decir, ambas líneas son evidentemente no físicas.

En el contraste ordinario tenemos

$$D_{\lambda\nu}(p - p_1) = g_{\lambda\nu} \frac{4\pi}{(p - p_1)^2},$$

y en la integral la región que importa es aquella en la cual $p_1^2 \gg p^2$, región en la que diverge logarítmicamente. Calculando la integral

$$\Gamma^{\mu(1)} \approx -4\pi\alpha i \int \frac{\gamma^\lambda \hat{p}_1 \gamma^\mu \hat{p}_1 \gamma_\lambda}{(p_1^2)^3} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \quad (128.10)$$

y regularizando el logaritmo, obtendremos

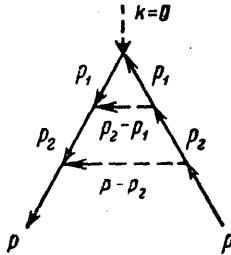
$$\Gamma^{\mu(1)} \approx -\frac{\alpha}{4\pi} \gamma^\mu \ln \frac{p^2}{m^2}.$$

En cambio, en el contraste de Landau en vez de (128.10) se obtendrá la integral

$$\Gamma^{\mu(1)} \approx -4\pi\alpha i \int \{ \gamma^\lambda \hat{p}_1 \gamma^\mu \hat{p}_1 \gamma_\lambda - p_1^2 \gamma^\mu \} \frac{d^4 p_1}{(p_1^2)^3 (2\pi)^4}.$$

Efectuando el promedio respecto de las direcciones de p_1 e introduciendo las matrices γ , se encuentra que esta integral se anula, con lo que desaparece el término logarítmico en $\Gamma^{\mu(1)}$ *.

En las correcciones de segundo orden (respecto de α) consideraremos el diagrama



La correspondiente integral es:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu(2)} = & -\alpha^2 \int \gamma^\lambda G(p_2) \gamma^\nu G(p_1) \gamma^\mu G(p_1) \gamma^\sigma G(p_2) \gamma^\sigma \times \\ & \times D_{\nu\rho}(p_2 - p_1) D_{\lambda\sigma}(p - p_2) \frac{d^4 p_1 d^4 p_2}{(2\pi)^8}. \end{aligned}$$

* Las correcciones a G^{-1} en ambos contrastes, obtenidas a partir de la corrección $\Gamma^{(1)}$ mediante la identidad (105.8), se encuentran de acuerdo con los resultados del § 116, como debe ser.

En el contraste ordinario de las funciones- D , esta integral contiene un término con el cuadrado de un logaritmo, término que procede del dominio de integración

$$p_1^2 \gg p_2^2 \gg p^2. \quad (128.11)$$

En efecto, después de prescindir de p_2 en el argumento de la función $D_{vp}(p_2 - p_1)$, la integración respecto de $d^4 p_1$ pasa a ser la misma que en (128.9) y da $\ln p_2^2$; en cuanto a la integración siguiente respecto de $d^4 p_2$, posee de nuevo carácter logarítmico y conduce al cuadrado $\ln^2(p_2^2/m^2)$. En cambio, si para las funciones- D se adopta el contraste de Landau, los términos logarítmicos desaparecen en ambas integraciones.

La misma situación se repite para todos los demás diagramas que forman parte del diagrama en esqueleto



Por el contrario, los diagramas de otros tipos, con líneas de fotón que se cortan entre sí, por ejemplo, los que aparecen en el diagrama en esqueleto



[cf. (103.11)], en general no contienen términos correspondientes a la potencia de logaritmo adecuada en ningún contraste (es imposible separar en ellos una región de valores de las variables en la que la integral se reduzca a un cierto número de integraciones logarítmicas sucesivas).

Estas consideraciones (y las análogas para los términos siguientes del desarrollo de Γ en potencias de k), confirman que en el contraste de Landau no aparecen correcciones a \mathcal{G} y Γ con las potencias necesarias del logaritmo, de modo que la expresión (128.1), en efecto, también es correcta cuando se cumple la condición (128.3).

La función $\mathcal{D}(k^2)$, que corresponde al operador polarización (128.1), tiene la forma

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2}}. \quad (128.14)$$

En virtud de la condición (128.3) no hay necesidad de desarrollar esta expresión en potencias de α *.

Conviene prestar atención al hecho de que \mathcal{D} crece cuando $\ln(|k^2|/m^2)$ se acerca al valor $3\pi/\alpha$. Con este crecimiento está ligado el límite de aplicabilidad de la fórmula (128.14) para grandes valores de $|k^2|$. En efecto, esta fórmula se dedujo partiendo de la base de que se podía prescindir del diagrama (128.13) (y de otros con un número todavía mayor de líneas de fotón de trazo grueso) en comparación con el diagrama (128.12). Pero cada vez que se añade una de tales líneas, se introduce en el diagrama un factor $e^2\mathcal{D}$ con el propagador exacto \mathcal{D} . En estas condiciones, el papel de parámetro pequeño lo representa, en vez de $\alpha = e^2$, la cantidad

$$\frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2}},$$

y, por lo tanto, el que se pueda prescindir de los términos indicados supone que se cumpla la condición

$$1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2} \gg \alpha. \quad (128.15)$$

Cuando, a medida que crece $|k^2|$, el primer miembro de esta desigualdad llega a ser comparable en orden de magnitud con α , deja de existir en la teoría un parámetro pequeño. De esta manera, llegamos a la importante conclusión acerca del carácter lógicamente incompleto de la electrodinámica cuántica como teoría con interacción débil. Por otra parte, todo el formalismo de la teoría actual se basa precisamente en la posibilidad de considerar la interacción electromagnética como una pequeña perturbación.

Cabría pensar que una tal teoría debe completarse en el dominio de energías muy altas mediante la teoría del «enlace fuerte». Sin embargo, hay serias razones para suponer que, dentro del marco de las ideas presentes, también esto es imposible, dado que la electrodinámica cuántica no sólo resulta incompleta como teoría del «enlace débil», sino que, además, no es en modo alguno una teoría física lógicamente cerrada.

* Esta fórmula se puede deducir también a partir de las propiedades funcionales de los propagadores y de las partes vértice que expresan la posibilidad de renormalización de la electrodinámica cuántica: véase L. D. Landau, O kvantovoï teorii polia (Acerca de la teoría cuántica de los campos) (artículo en la colección «Niels Bohr y el desarrollo de la física», 1955; Colección de trabajos, vol. II, «Nauka», 1969); N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, ZhETF 30, 77 (1956). El desarrollo sistemático del método fundado en la utilización de estas propiedades (que es el llamado método del grupo de renormalización) se encuentra en el libro: N. N. Bogoliubov y D. V. Shirkov, Vvedenie v teoriu kvantovannyj polej (Introducción a la teoría de los campos cuantificados), Gostejzdat, 1957.

A estas conclusiones conduce el análisis de las dificultades que surgen en relación con la fórmula (128.14) si al deducirla se efectúa la renormalización, no «sobre la marcha», sino mediante la introducción previa de una carga del electrón «cebadora» e_c que luego se elige de tal manera que conduzca al valor correcto observado de la carga física e (§ 107). Si la integral se «corta», conforme se hizo más arriba, en el límite superior auxiliar Λ^2 , la carga cebadora será función del mismo, $e_c = e_c(\Lambda)$ y al final deberá efectuarse el paso al límite $\Lambda \rightarrow \infty$.

En esta manera de abordar el problema, el operador polarización será

$$\mathcal{P}(k^2) = -\frac{e_c^2}{3\pi} k^2 \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|}$$

[la expresión (128.8) con e_c en vez de e] y, análogamente,

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{1 + \frac{e_c^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|}}. \quad (128.16)$$

Determinando ahora la carga física e de acuerdo con la condición

$$e_c^2 \mathcal{D}(k^2) \rightarrow \frac{4\pi}{k^2} e^2 \quad \text{cuando} \quad k^2 \rightarrow \sim m^2,$$

obtendremos

$$e^2 = \frac{e_c^2}{1 + \frac{e_c^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}, \quad (128.17)$$

o bien

$$e_c^2 = \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}. \quad (128.18)$$

Estas fórmulas, sin embargo, no proporcionan todavía por sí solas la posibilidad de pasar al límite $\Lambda \rightarrow \infty$. Por (128.18) se ve que a medida que aumenta Λ (para un valor dado de e^2) crece e_c^2 ; pero ya para $e_c^2 \sim 1$ las fórmulas pierden su aplicabilidad, puesto que se dedujeron partiendo de la base de que

$$e_c^2 \ll 1$$

como condición de aplicabilidad de la teoría de perturbaciones a la interacción «de cebado».

Esta dificultad se puede sortear, con todo, mediante las siguientes consideraciones (*L. D. Landau, I. Ia. Pomeranchuk, 1955*).

Supongamos Λ^2/k^2 tan grande que

$$\frac{e_c^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{k^2} \gg 1,$$

pero que, a la vez, todavía se tiene $e_c^2 \ll 1$. Entonces en (128.16) cabe prescindir de la unidad en el denominador:

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{12\pi^2}{k^2 e_c^2 \ln^2 \frac{\Lambda^2}{|k^2|}}, \quad (128.19)$$

y, análogamente,

$$e^2 = \frac{3\pi}{\ln^2 \frac{\Lambda^2}{m^2}}. \quad (128.20)$$

Introduzcamos el 4-vector $\mathbf{k}^\mu = e_c \mathbf{A}^\mu$ en vez del operador 4-potencial del campo electromagnético \mathbf{A}^μ . Entonces, el hamiltoniano de la interacción H_{int} no contendrá la carga cebadora e_c , mientras que el operador hamiltoniano del campo libre H_0 (cuadrático respecto de A^μ) contendrá e_c^2 en el denominador. En cuanto a la función $\mathcal{D}(k^2)$, determinada a partir de \mathbf{k}^μ como $\mathcal{D}(k^2)$ se determina en función de A^μ , se tendrá para ella

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{1}{e_c^2} \mathcal{D}(k^2) = \frac{12\pi^2}{k^2 \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|}}.$$

Esta expresión no contiene e_c . Esto significa que corresponde a haber prescindido del término H_0 , en el hamiltoniano $H = H_0 + H_{\text{int}}$, que depende de e_c . Pero si es posible prescindir de H_0 comparado con H_{int} (para valores de Λ grandes) cuando se tiene $e_c^2 \ll 1$, es natural pensar que esta aproximación es tanto más lícita cuando se trate de valores no pequeños de e_c^2 .

Así, pues, la fórmula (128.19), y con ella también la (128.20), dejan de estar ligadas con la condición $e_c^2 \ll 1$ y el paso al límite $\Lambda \rightarrow \infty$ es ya posible. Pero entonces $e^2 \rightarrow 0$ con independencia de la forma de la función $e_c(\Lambda)$. Una tal «anulación» de la carga física significa la imposibilidad de llevar a cabo rigurosamente la renormalización.

Las consideraciones expuestas no pueden, claro está, considerarse como una

demostración rigurosa de este resultado. Sin embargo, son indicaciones serias de la posible inconsecuencia interna de la electrodinámica cuántica actual. Al mismo tiempo hay que subrayar que, en la electrodinámica cuántica, las dificultades descritas pueden tener tan sólo un carácter puramente teórico. Aparecen a energías fantásticamente enormes $\sim me^{3\pi/2\alpha}$ que no presentan ningún interés real. Cabe esperar que, en realidad, las interacciones electromagnéticas «se entretejerán» con las interacciones fuertes ya muchísimo antes, de forma que la electrodinámica pura pierde entonces su sentido.

§ 129. Separación de los términos doblemente logarítmicos en un operador vértice

Correcciones de la forma $(\alpha L)^n$ (donde L es un logaritmo grande) pueden llegar a ser esenciales, conforme ya se hizo notar al final del párrafo anterior, sólo para energías enormes y, por ello, poseen solamente un valor teórico. Pero en las amplitudes de los procesos reales de dispersión aparecen también correcciones considerablemente grandes, de la forma $(\alpha L^2)^n$. Tales términos, que contienen un cuadrado del logaritmo por cada potencia de α , se llaman *doblemente logarítmicos*.

Así, según (114.21) la primera corrección al factor de forma de un electrón, es decir, a la amplitud de dispersión del electrón en un campo exterior, para grandes valores del cuadrado del impulso cedido $t = q^2$ contiene un término del orden de

$$\frac{\alpha}{4\pi} \ln^2 \frac{|t|}{m^2}. \quad (129.1)$$

La condición de aplicabilidad de la teoría de perturbaciones exige que esta cantidad sea pequeña, condición que queda violada para energías

$$\varepsilon \sim \sqrt{|t|} \sim me^{V\pi/\alpha}, \quad (129.2)$$

que, si bien son muy grandes, sin embargo son considerablemente menores que las dadas por la condición (128.3). Veamos cómo librarnos de esta limitación y obtener fórmulas adecuadas cuando se cumple la condición

$$\alpha \ln^2 \frac{e}{m} \leqslant 1. \quad (129.3)$$

Observemos ante todo que, cuando se cumple esta condición, las correcciones con un solo logaritmo son

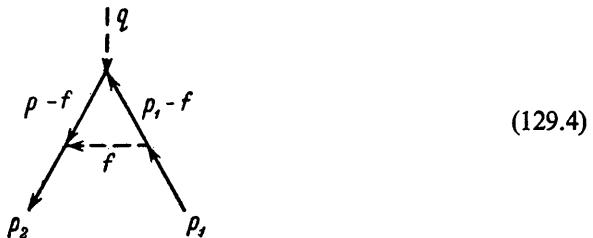
$$\sim \alpha \ln \frac{e}{m} \leqslant \sqrt{\alpha} \ll 1$$

y, en consecuencia, puede prescindirse de ellas. Dado que, por otro lado, ni en \mathcal{G}

ni en \mathcal{D} aparecen correcciones doblemente logarítmicas, esto significa que estas funciones se pueden suponer ahora iguales, simplemente, a sus valores no perturbados G y D .

En cambio, el cálculo del operador vértice Γ exige la suma de términos logarítmicos dobles que resultan de la serie infinita de diagramas. A este problema se dedica el párrafo siguiente. Sin embargo, expondremos primero un método que permite separar términos doblemente logarítmicos en las diferentes integrales de Feynman antes de efectuar realmente en ellas las integraciones respecto de todas las variables (V. V. Sudakov, 1956).

Consideremos la corrección de primer orden (respecto de α) al operador vértice representado por el diagrama (114.1), que nos conviene representar aquí (cambiando la notación de las variables) en la forma



o bien, analíticamente,

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu(1)}(p_2, p_1; q) &= \\ &= -\frac{ie^2}{4\pi^3} \int \frac{\gamma^\nu (\hat{p}_2 - \hat{f} + m) \gamma^\mu (\hat{p}_1 - \hat{f} + m) \gamma_\nu d^4 f}{[(p_2 - f)^2 - m^2 + i0] [(p_1 - f)^2 - m^2 + i0] [f^2 + i0]}. \end{aligned} \quad (129.5)$$

Supondremos que

$$|q^2| \gg p_1^2, p_2^2, m^2, \quad (129.6)$$

donde los terminales p_1, p_2 pueden ser tanto físicos como virtuales. De (129.6) se sigue que

$$|p_1 p_2| \approx \frac{1}{2} |q^2| \gg p_1^2, p_2^2, m^2, \quad (129.7)$$

es decir, los 4-vectores p_1, p_2 tienen componentes que son grandes, mientras que sus cuadrados son pequeños —situación ésta que es posible en virtud del carácter pseudoeuclideo de la métrica cuadridimensional. Los términos logarítmicos dobles aparecen precisamente cuando se cumplen las condiciones (129.6).

Veremos en lo que sigue que al integrar respecto de $d^4 f$ tendrán importancia

los valores relativamente pequeños de f . Por ello, se puede prescindir de f en el numerador del integrando, con lo cual $\Gamma^{(1)}$ toma la forma

$$\Gamma^{\mu(1)} = -\frac{ie^2}{4\pi^3} \gamma^\nu (\hat{p}_2 + m) \gamma^\mu (\hat{p}_1 + m) \gamma_\nu I_1, \quad (129.8)$$

donde

$$I_1 = \int \frac{d^4f}{[(p_2 - f)^2 - m^2 + i0] [(p_1 - f)^2 - m^2 + i0] [f^2 + i0]}. \quad (129.9)$$

El factor matricial en (129.8) se puede simplificar si se tiene en cuenta que, en realidad, Γ siempre aparece en un diagrama multiplicado por las matrices $(\hat{p}_2 + m)$ y $(\hat{p}_1 + m)$:

$$(\hat{p}_2 + m) \Gamma (\hat{p}_1 + m). \quad (129.10)$$

Efectivamente, si las líneas p_1 y p_2 son virtuales, estos factores proceden de $G(p_1)$ y $G(p_2)$; pero si las líneas corresponden a electrones reales, Γ viene multiplicado por u_2 y u_1 , mientras que, en virtud de la ecuación de Dirac, tenemos

$$\bar{u}_2 = \bar{u}_2 \frac{\hat{p}_2 + m}{2m}, \quad u_1 = \frac{\hat{p}_1 + m}{2m} u_1.$$

Reordenando los factores matriciales y prescindiendo cada vez, de acuerdo con la ecuación (129.7), de los cuadrados que aparecen p_1^2, p_2^2, m^2 frente a $p_1 p_2$, obtendremos

$$(\hat{p}_2 + m) \Gamma^{\mu(1)} (\hat{p}_1 + m) \approx -\frac{ie^2}{\pi^3} (p_1 p_2) (\hat{p}_2 + m) \gamma^\mu (\hat{p}_1 + m) I_1.$$

Así, pues, podemos representar finalmente $\Gamma^{(1)}$ en la forma

$$\Gamma^{\mu(1)} = \frac{ie^2}{2\pi^3} \gamma^\mu t I_1, \quad (129.11)$$

donde

$$t = q^2 \approx -2(p_1 p_2). \quad (129.12)$$

Obsérvese que la integral I_1 converge para valores grandes de f y que, por ello, no requiere ya regularización.

El punto fundamental en los cálculos que siguen es la introducción de nuevas variables de integración más convenientes.

Descompongamos f en sus componentes tangenciales y normales respecto del plano p_1, p_2 :

$$\mathbf{f} = u \mathbf{p}_1 + v \mathbf{p}_2 + \mathbf{f}_{\perp} \equiv \mathbf{f}_{\parallel} + \mathbf{f}_{\perp}, \quad (129.13)$$

$$\mathbf{f}_{\perp} \mathbf{p}_1 = \mathbf{f}_{\perp} \mathbf{p}_2 = 0. \quad (129.14)$$

Por otra parte, elijamos como nuevas variables los coeficientes u , v y el cuadrado

$$p = -\mathbf{f}_{\perp}^2. \quad (129.15)$$

De las condiciones (129.7) resulta, evidentemente, que la métrica en el plano p_1 , p_2 es pseudoeuclídea. En consecuencia, el eje temporal puede elegirse en este plano, de modo que \mathbf{f}_{\perp} es un 4-vector espacial y $\rho > 0$.

Designemos por el momento con los índices $0, x$ las componentes de los 4-vectores en el plano p_1 , p_2 , y con los índices y, z , las componentes en el plano normal. Para transformar el elemento de 4-volumen

$$d^4\mathbf{f} = d^2\mathbf{f}_{\perp} d^2\mathbf{f}_{\parallel}$$

expresándolo en función de las nuevas variables, escribiremos:

$$d^2\mathbf{f}_{\perp} = |\mathbf{f}_{\perp}| d|\mathbf{f}_{\perp}| d\varphi = \frac{1}{2} d\rho d\varphi \rightarrow \pi d\rho$$

[visto que el integrando en (129.9) no depende del ángulo φ]. Además,

$$d^2\mathbf{f}_{\parallel} = \left| \frac{\partial (\mathbf{f}_a, \mathbf{f}_x)}{\partial (u, v)} \right| du dv = |p_{10}p_{2x} - p_{20}p_{1x}| du dv \approx \frac{1}{2} |q^2| du dv.$$

En efecto, dado que el cuadrado p_2^2 es pequeño, tenemos $p_{2x}^2 \approx p_{20}^2$ y, por lo tanto,

$$(p_{10}p_{2x} - p_{20}p_{1x})^2 \approx (p_{10}p_{20} - p_{2x}p_{1x})^2 = (p_1 p_2)^2 = \left(\frac{q^2}{2}\right)^2.$$

De esta manera

$$d^4\mathbf{f} = \frac{1}{2} |t| du dv d^2\mathbf{f}_{\perp} \rightarrow \frac{\pi}{2} |t| du dv d\rho. \quad (129.16)$$

Los cálculos siguientes dependen de la relación entre las cantidades p_2^1 , p_2^2 , m^2 . Consideraremos dos casos.

Caso de líneas de electrón virtuales

Supongamos que los impulsos p_1 , p_2 corresponden a electrones virtuales, siendo

$$|p_1^2|, |p_2^2| \gg m^2. \quad (129.17)$$

Veremos que la región fundamental para la integración, que conduce a una expresión doblemente logarítmica, es en este caso la región determinada por las desigualdades

$$0 < \rho \ll |tu|, |tv|, \\ \left| \frac{p_1^2}{t} \right| \ll |v| \ll 1, \quad \left| \frac{p_2^2}{t} \right| \ll |u| \ll 1. \quad (129.18)$$

De acuerdo con esto, en el denominador del integrando de (129.9) se puede prescindir de m^2 , p_1^2 , p_2^2 , f^2 en comparación con $(p_1 f)$ o $(p_2 f)$, de modo que

$$I_1 = \int \frac{d^4 f}{2(p_2 f) 2(p_1 f) (f^2 + i0)}. \quad (129.19)$$

En cuanto a las cantidades $p_1 f$, $p_2 f$, f^2 , tenemos

$$f^2 = (up_1 + vp_2)^2 - \rho \approx -tuv - \rho, \\ 2(p_1 f) = 2p_1 (up_1 + vp_2) \approx -tv, \\ 2(p_2 f) \approx -tu.$$

Entonces

$$I_1 = -\frac{\pi}{2|t|} \int \frac{d\rho}{\rho + tuv - i0} \frac{du}{u} \frac{dv}{v}. \quad (129.20)$$

En virtud de las condiciones (129.18), la integración respecto de $d\rho$ se extiende entre los límites 0 y el menor de los números $|tv|$ o $|tu|$ y da

$$\int_0^{\min\{|tu|, |tv|\}} \frac{d\rho}{\rho + tuv - i0} = \\ = \ln \min \left\{ \frac{1}{|u|}, \frac{1}{|v|} \right\} + \begin{cases} i\pi & \text{cuando } tuv < 0, \\ 0 & \text{cuando } tuv > 0. \end{cases} \quad (129.21)$$

La integración logarítmica respecto de dv se efectúa entre los límites desde -1 a $-|p_1^2/t|$ y desde $|p_1^2/t|$ a 1 (y análogamente para du). Al substituir (129.21) en (129.20), la integral respecto de $du dv$ del primer término se anula por el carácter impar del integrando. En cambio, la integración del segundo término se extiende a intervalos de valores u y v que son o del mismo signo (para $t < 0$) o de signo contrario (para $t > 0$). En ambos casos la contribución de las regiones $v > 0$ y

$v < 0$ (después de integrar respecto de du) es la misma y encontramos en definitiva

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{2t} 2 \int_{\left| \frac{p_1^2}{t} \right|}^1 \frac{du}{u} \int_{\left| \frac{p_2^2}{t} \right|}^1 \frac{dv}{v} = \frac{i\pi^2}{t} \ln \left| \frac{t}{p_1^2} \right| \ln \left| \frac{t}{p_2^2} \right| \quad (129.22)$$

(el signo coincide con el de t).

Finalmente, substituyendo en (129.11), se halla

$$\Gamma^{\mu(1)}(p_2, p_1; q) = -\frac{\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \ln \left| \frac{q^2}{p_1^2} \right| \ln \left| \frac{q^2}{p_2^2} \right|, \quad (129.23)$$

$$|q^2| \gg |p_1^2|, |p_2^2| \gg m^2.$$

Caso de terminales físicos de electrón

Supongamos ahora que los impulsos p_1, p_2 corresponden a electrones reales, de modo que

$$p_1^2 = p_2^2 = m^2. \quad (129.24)$$

En este caso es esencial el dominio de integración

$$\begin{aligned} 0 &< \rho \ll |tu|, |tv|, \\ 0 &< |v|, |u| \ll 1. \end{aligned} \quad (129.25)$$

Dado que $p_1^2 - m^2 = p_2^2 - m^2 = 0$, prescindiendo de p_1^2 y p_2^2 frente a $p_1 f$ o $p_2 f$, reducimos de nuevo la integral (129.9) a la forma (129.19). Para evitar la divergencia en el infrarrojo que aparece en este caso es necesario, sin embargo, introducir aún en el propagador de fotón una masa no nula del fotón $\lambda \ll m$ (cf. § 114):

$$I_1 = \int \frac{d^4 f}{2(p_1 f) 2(p_2 f) (f^2 - \lambda^2 + i0)}. \quad (129.26)$$

Además, tenemos ahora

$$\begin{aligned} f^2 &\approx -tuv - \rho, \\ 2p_1 f &\approx -tv + 2m^2 u, \\ 2p_2 f &\approx -tu + 2m^2 v, \end{aligned}$$

de modo que

$$I_1 = -\frac{\pi}{2|t|} \int \frac{d\rho}{\rho + t u v + \lambda^2 - i0} \frac{du}{u - \tau v} \frac{dv}{v - \tau u}, \quad (129.27)$$

donde $\tau = 2m^2/t \ll 1$.

Después de una integración respecto de $d\rho$ [análoga a la de (129.21)] se encuentra

$$I_1 = -\frac{i\pi^2}{2|t|} \int \int \frac{du}{u - \tau v} \frac{dv}{v - \tau u},$$

efectuándose la integración de modo que se cumpla la condición $tuv + \lambda^2 < 0$. La contribución de las regiones $v > 0$ y $v < 0$ es de nuevo la misma, y una vez efectuada la integración respecto de du se llega a

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{i\pi^2}{t} \int_0^1 dv \int_{\delta/v}^1 \frac{du}{(u - \tau v)(v - \tau u)} = \\ &= \frac{i\pi^2}{t} \int_0^1 \ln \frac{\tau\delta - v^2}{(\delta - \tau v^2)(\tau - v)} \frac{dv}{v}, \end{aligned} \quad (129.28)$$

donde $\delta = \lambda^2/t \ll \tau$ y se ha tenido en cuenta que $\tau \ll 1$.

En la integral (129.28) dos regiones de valores de v conducen a expresiones doblemente logarítmicas:

$$\text{I}) \qquad \tau \ll v \ll 1,$$

$$\text{II}) \qquad \sqrt{\tau\delta} \ll v \ll \sqrt{\delta/\tau}.$$

Prescindiendo en cada una de ellas de los correspondientes términos, obtendremos

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{2t} \left(\ln^2 \frac{|t|}{m^2} + 4 \ln \frac{|t|}{m^2} \ln \frac{m}{\lambda} \right), \quad (129.29)$$

donde el primer término procede de la región I, y el segundo, de la región II.

Finalmente, substituyendo en (129.11) se encuentra

$$\Gamma^{\mu}{}^{(1)}(p_2, p_1; q) = -\frac{\alpha}{4\pi} \gamma^{\mu} \left(\ln^2 \frac{|q^2|}{m^2} + 4 \ln \frac{|q^2|}{m^2} \ln \frac{m}{\lambda} \right), \quad (129.30)$$

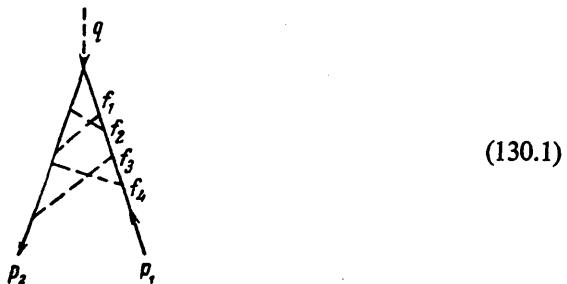
$$|q^2| \gg p_1^2 = p_2^2 = m^2,$$

que coincide con (114.21).

§ 130. Expresión asintótica doblemente logarítmica del operador vértice

Cuando las correcciones $\Gamma^{(1)}$ calculadas en el párrafo que precede alcanzan el orden de magnitud 1, el cálculo del operador vértice exige sumar una sucesión infinita de términos doblemente logarítmicos de todas las potencias respecto de α . La solución de este problema resulta posible gracias a que tales términos aparecen solamente en diagramas de determinado tipo y a que las contribuciones de los diagramas de órdenes diferentes están ligadas entre sí por relaciones simples.

En efecto, los términos doblemente logarítmicos proceden, como comprobaremos más adelante, de todos los diagramas de la forma



y de otros análogos, en los cuales cada una de las líneas de fotón unen las líneas de electrón a la derecha y a la izquierda; además, dichas líneas pueden cortarse entre sí de manera arbitraria.

Numeremos los impulsos de fotón f_1, f_2, \dots en un cierto orden, por ejemplo según los terminales de sus líneas a la derecha. Entonces los diferentes diagramas de igual orden diferirán entre sí por la permutación de los terminales de las líneas de fotón a la izquierda. En cada integral de Feynman prescindiremos en el numerador y en el denominador de términos análogos a aquéllos de los que se prescindió en la integral (129.5); transformaremos luego el numerador de la misma manera como se hizo al deducir (129.11). El resultado a que se llega para la suma de todos los diagramas con n líneas de fotón, que componen el término $\sim \alpha^n$ en Γ , tiene la forma

$$\Gamma^{\mu(n)} = \gamma^\mu \left(\frac{ia}{2\pi^3} t \right)^n I_n, \quad (130.2)$$

$$I_n = - \sum_{\text{per } 2} \int \frac{d^4 f_1 \dots d^4 f_n}{2(p_1 f_1)^2 (p_1 f_1 + p_1 f_2) \dots 2(p_1 f_1 + \dots + p_1 f_n)^2 (p_2 f_1) \dots 2(p_2 f_1 + \dots + p_2 f_n) f_1^2 f_2^2 \dots f_n^2}, \quad (130.3)$$

donde la suma se extiende a todas las permutaciones de índices en los impulsos f_k

que aparecen en los productos $p_2 f_k$ (para abreviar, no se han escrito los términos $i0$ y λ^2 en los denominadores).

Es evidente que si en la suma (130.3) se permutan los índices de los factores f_k en los productos $p_1 f_k$, cualquiera que sea esta permutación conducirá solamente a un cambio en la notación de los impulsos y, por lo tanto, no modifica el valor I_n . En consecuencia, se puede extender la sumación en (130.3) a todas las permutaciones de los factores f_k , tanto en los productos $p_2 f_k$, como en los $p_1 f_k$, dividiendo luego este resultado por $n!$:

$$\sum_{\text{per } 2} \rightarrow \frac{1}{n!} \sum_{\text{per } 1} \sum_{\text{per } 2} .$$

Aplicemos ahora la importante fórmula

$$\sum_{\text{per}} \frac{1}{a_1 (a_1 + a_2) \dots (a_1 + a_2 + \dots + a_n)} = \frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2} \dots \frac{1}{a_n}, \quad (130.4)$$

donde la suma se extiende a las permutaciones de los índices $1, 2, \dots, n$ ^{*}. La aplicación de esta fórmula dos veces reduce la suma de integrales a un producto de n integrales iguales del tipo (129.19) [o (129.26)], de modo que

$$I_n = \frac{1}{n!} I_1^n. \quad (130.5)$$

Substituyendo este resultado en (130.2) y sumando $\Gamma^{(n)}$ para todos los valores $n = 0, 1, 2, \dots$, obtendremos, en definitiva,

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1; q) = \gamma^\mu \exp \left(\frac{ie^2}{2\pi^3} t I_1 \right). \quad (130.6)$$

En particular, substituyendo aquí I_1 por su valor (129.22), se tendrá la expresión asintótica doblemente logarítmica del operador vértice con terminales de electrón virtuales

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu(p_2, p_1; q) &= \gamma^\mu \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2\pi} \ln \left| \frac{q^2}{p_1^2} \right| \ln \left| \frac{q^2}{p_2^2} \right| \right\}, \\ |q^2| &\gg |p_1^2|, |p_2^2| \gg m^2 \end{aligned} \quad (130.7)$$

(V. V. Sudakov, 1956).

* Esta fórmula es evidente para $n = 2$ y es fácil generalizarla por inducción de n a $n + 1$.

Observemos que, esencialmente, utilizamos ya la factorización de acuerdo con esta fórmula al deducir (95.14) para la probabilidad de emisión de fotones blandos.

En cambio, si en vez de I_1 se substituye el valor (129.29), se encuentra una expresión asintótica para el operador vértice en el caso de terminales de electrón reales:

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1; q) = \gamma^\mu \exp \left\{ -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\ln^2 \frac{|q^2|}{m^2} + 4 \ln \frac{|q^2|}{m^2} \ln \frac{m}{\lambda} \right) \right\}, \quad (130.8)$$

$$|q^2| \gg p_1^2 = p_2^2 = m^2.$$

El factor en que difiere esta expresión de Γ^μ respecto de su valor no perturbado γ^μ , determina también la diferencia de la amplitud de dispersión del electrón en un campo exterior respecto de su valor en la aproximación de Born. Por ello, la sección eficaz de dispersión resulta ser

$$d\sigma = d\sigma_B \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2\pi} \left(\ln^2 \frac{|q^2|}{m^2} + 4 \ln \frac{|q^2|}{m^2} \ln \frac{m}{\lambda} \right) \right\}. \quad (130.9)$$

Para eliminar la divergencia en el infrarrojo es necesario, sin embargo, multiplicar además esta expresión por la suma de las probabilidades de emisión de un número diferente de fotones blandos con una energía no superior a un cierto valor pequeño ω_{\max} , es decir, por la cantidad [véase (119.2)]

$$1 + \int_0^{\omega_{\max}} dw_\omega + \frac{1}{2!} \int_0^{\omega_{\max}} dw_{\omega_1} \int_0^{\omega_{\max}} dw_{\omega_2} + \dots = \exp \left\{ \int_0^{\omega_{\max}} dw_\omega \right\}. \quad (130.10)$$

La integral en el exponente la tomaremos de (117.14) (la expresión que aparece como factor en $d\sigma_{el}$) y se encuentra así finalmente la siguiente fórmula asintótica para la sección eficaz de dispersión de un electrón de energía e cuando el impulso transferido es grande:

$$d\sigma = d\sigma_B \exp \left\{ -\frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{|q^2|}{m^2} \ln \frac{e}{\omega_{\max}} \right\}, \quad (130.11)$$

$$|q^2| \gg m^2, \quad -\frac{\alpha}{2\pi} \ln^2 \frac{e}{m} \sim 1$$

(A. A. Abrikosov, 1956). El primer término (respecto de α) del desarrollo de esta expresión coincide, naturalmente, con la fórmula (119.12).

§ 131. Expresión asintótica doblemente logarítmica de la amplitud de dispersión de un electrón por un muón

Los términos doblemente logarítmicos en las expresiones asintóticas de las am-

plitudes aparecen, no solamente en la dispersión de un electrón en un campo exterior, sino también en los procesos de dispersión entre dos partículas.

Como ejemplo de esta situación consideraremos la dispersión de un electrón por un muón negativo, limitándonos al caso de dispersión hacia atrás, es decir, para un ángulo $\theta = \pi$ (V. G. Gorshkov, V. N. Gribov, L. N. Lipatov, G. V. Frolov, 1967). Este proceso resulta ser el más simple desde dos puntos de vista. En primer lugar, teniendo en cuenta la no identidad de ambas partículas, no existen diagramas de intercambio. En segundo lugar, en la dispersión hacia atrás queda fuertemente disminuida la radiación de fotones blandos, con lo cual no se plantea la divergencia en el infrarrojo. En efecto, según (95.8) la sección eficaz de emisión de fotones blandos es

$$d\sigma = \alpha \left[\left(\frac{v'_e}{1 - v'_e \cdot n} + \frac{v'_\mu}{1 - v'_\mu \cdot n} - \frac{v_e}{1 - v_e \cdot n} - \frac{v_\mu}{1 - v_\mu \cdot n} \right) \times n \right]^2 \frac{d\omega}{4\pi^2 \omega} d\sigma_{el}, \quad (131.1)$$

donde v_e , v_μ y v'_e , v'_μ son las velocidades de las partículas antes y después de la colisión. Pero en el caso ultrarrelativista la igualdad de impulsos equivale a la igualdad de velocidades, y con esta aproximación para la dispersión hacia atrás, en el sistema del centro de masa, tenemos

$$v_e = -v_\mu = -v'_e = v'_\mu.$$

Como consecuencia, la expresión (131.1) se anula.

Si el proceso considerado de dispersión corresponde al canal-s de reacción, en el canal-t se convierte en el proceso de transformación del par electrón-positón en el par $\mu^+\mu^-$. En este canal la condición $\theta = \pi$ significa que coinciden las direcciones del movimiento de e^- y μ^- (y de e^+ y μ^+). La supresión de la radiación de frenado en este canal tiene un origen particularmente intuitivo, puesto que aparece como consecuencia de que la dirección del movimiento de la carga de cada signo no cambia en absoluto.

La reducción entre sí de los términos principales en la sección eficaz de radiación conduce a que, en su expresión asintótica, no aparezcan correcciones doblemente logarítmicas. Por eso no se plantea (con la misma precisión doblemente logarítmica) la divergencia en el infrarrojo en la integración respecto de los impulsos de los fotones virtuales al calcular la amplitud de dispersión.

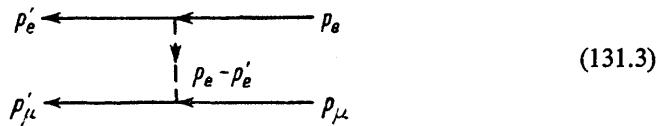
Si se describe el proceso mediante las variables invariantes

$$s = (p_e + p_\mu)^2, \quad t = (p_e - p'_e)^2, \quad u = (p_e - p'_\mu)^2,$$

a la dispersión hacia atrás en el caso ultrarrelativista corresponderán los valores

$$s = -t \gg m_\mu^2, \quad u = 0. \quad (131.2)$$

En la primera aproximación (respecto de α) de la teoría de perturbaciones, la dispersión del electrón por un muón se representa por el diagrama



La correspondiente amplitud es:

$$M_{fi}^{(1)} = \frac{4\pi\alpha}{\ell} (\bar{u}^{(\mu)\prime} \gamma^v u^{(\mu)}) (\bar{u}^{(e)\prime} \gamma_v u^{(e)}). \quad (131.4)$$

El paso al límite (131.2) se efectúa aquí substituyendo el 4-vector matricial γ^v por su «proyección» γ_\parallel^v sobre el plano normal al plano p_e , p'_e (o, lo que es lo mismo, al plano p_μ , p'_μ , puesto que en la dispersión ultrarrelativista hacia atrás se tiene $p_e \approx p'_\mu$, $p'_e \approx p_\mu$). En efecto, las componentes paralelas al plano p_e , p'_e son las matrices

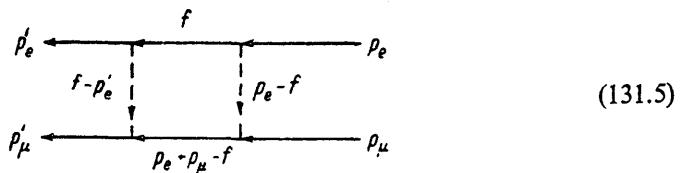
$$\frac{1}{\sqrt{s}} (\hat{p}_e + \hat{p}'_e), \quad \frac{1}{\sqrt{s}} (\hat{p}_e - \hat{p}'_e)$$

(la primera coincide con γ^0 , y la segunda es igual a $n_e \gamma$ donde n_e es el versor de p_e). Aplicando la ecuación de Dirac para los bispinores $u^{(e)}$ y $u^{(\mu)}$, encontramos que

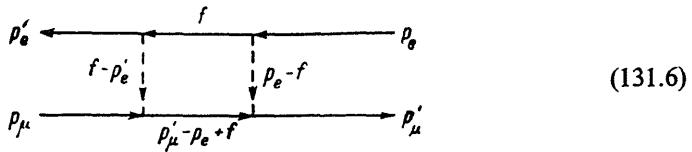
$$(\bar{u}^{(\mu)\prime} \gamma_\parallel^v u^{(\mu)}) (\bar{u}^{(e)\prime} \gamma_v u^{(e)}) \sim \frac{1}{s},$$

y, por consiguiente, se puede prescindir de estos términos.

En la siguiente aproximación se añade el diagrama



y un diagrama con líneas de fotón «cruzadas» que conviene representar en una forma que difiere de (131.5) tan sólo en la dirección de una de las líneas de trazo continuo:



El estudio de las correspondientes integrales muestra que en ambos diagramas aparecen contribuciones doblemente logarítmicas que proceden de las regiones de fotones virtuales «blandos»:

$$|(f - p_e')^2| \ll m_e^2 \quad \text{o} \quad |(f - p_e')^2| \ll m_e^2.$$

Estas contribuciones están ligadas con las divergencias de las integrales en el infrarrojo y, de acuerdo con lo dicho antes, en el presente caso deben reducirse entre sí, evidentemente. En el diagrama (131.6) se tiene, sin embargo, una contribución más doblemente logarítmica debida a la región de impulsos grandes: $|f^2| \gg m_\mu^2$. Es precisamente esta contribución la que debemos calcular.

Al diagrama (131.6) corresponde la integral

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{ia^2}{\pi^2} \int \frac{(\bar{u}^{(e)\nu} \gamma^\lambda (\hat{f} + m_e) \gamma_\lambda u^{(e)}) (\bar{u}^{(\mu)\nu} \gamma^\lambda (\hat{f} + m_\mu) \gamma_\nu u^{(\mu)})}{(p_e' - f)^2 (f^2 - m_e^2) (f^2 - m_\mu^2) (p_e - f)^2} d^4f \quad (131.7)$$

(donde se ha tenido en cuenta que $p_e \approx p'_\mu$). Hagamos de nuevo

$$f = up_e + vp'_e + f_\perp \quad (131.8)$$

[cf. (129.13)]. La contribución doblemente logarítmica se debe a la región determinada por las desigualdades

$$\begin{aligned} |su|, |sv| &\gg \rho \gg m_\mu^2, \\ \frac{m_\mu^2}{s} &\ll |u|, |v| \ll 1, \end{aligned} \quad (131.9)$$

donde $\rho = -f_\perp^2$. El 4-vector f_\perp está determinado de manera que $f_\perp p_e = f_\perp p'_e = 0$; en el presente caso (dispersión hacia atrás) se sigue de aquí que, en el sistema del centro de masa, es $f_\perp^0 = 0$, de modo que $\rho = f_\perp^2$.

En el numerador de la integral (131.7) podemos prescindir de m_e y m_μ y también de todos los términos que contienen u o v ; los factores u o v en el numerador reducirían los correspondientes polos en el denominador (véase más adelante), como resultado de lo cual no aparecerían los cuadrados de logaritmos que buscamos. Observando que

$$(p'_e - f)^2 \approx tu \approx -su, \quad (p_e - f)^2 \approx -sv, \quad f^2 \approx suv - \rho,$$

y transformando el elemento de integración d^4f de acuerdo con (129.16), escribiremos la integral (131.7) en la forma

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{i\alpha^2}{2\pi^2} \int \frac{(\bar{u}^{(e)\gamma}\gamma^\nu \hat{f}_\perp \gamma_\lambda u^{(e)}) (\bar{u}^{(\mu)\gamma}\gamma^\lambda \hat{f}_\perp \gamma_\nu u^{(\mu)})}{su \cdot sv (suv - \rho + i0)^2} s du dv d^2\hat{f}_\perp.$$

El numerador del integrando se transforma luego promediando respecto de las direcciones de \hat{f}_\perp y substituyendo [por las mismas razones que en (131.4)] γ^ν , γ^λ por γ_\perp^ν , γ_\perp^λ . Después de simples transformaciones obtendremos

$$M_{fi}^{(2)} = M_{fi}^{(1)} J^{(1)}, \quad (131.10)$$

donde

$$J^{(1)} = -i \frac{\alpha}{4\pi^2} \int \frac{\rho du dv d\rho}{uv (suv - \rho + i0)^2}.$$

Finalmente, substituyendo en el numerador idénticamente $\rho = (\rho - suv) + suv$, se puede prescindir del segundo término que contendría polos simples y, por ello, no proporcionaría una contribución doblemente logarítmica. Así, pues,

$$J^{(1)} = -\frac{i\alpha}{4\pi^2} \int \frac{du dv d\rho}{uv (\rho - suv - i0)}. \quad (131.11)$$

Esta integral coincide formalmente con (129.20), por lo que la integración respecto de $d\rho$ se efectúa de la misma manera. Sin embargo, dado que ahora se tiene $\rho \gg m_\mu^2$, aparece la condición $suv \gg m_\mu^2$ (en vez de la $suv > 0$). En definitiva se encuentra

$$J^{(1)} = \frac{\alpha}{2\pi} \int \frac{du dv}{uv}, \quad (131.12)$$

donde el dominio de integración está limitado por las desigualdades

$$\frac{m_\mu^2}{s} < u, v < 1, \quad suv > m_\mu^2$$

(al efectuar el cálculo con precisión logarítmica, las desigualdades fuertes \gg se substituyen por las desigualdades simples $>$). Un cálculo directo da

$$J^{(1)} = \frac{\alpha}{4\pi} \ln^2 \frac{s}{m_\mu^2}. \quad (131.13)$$

En las aproximaciones más avanzadas de la teoría de perturbaciones, nos interesan las contribuciones $\sim \alpha^n \ln^{2n} s$ que se obtienen a partir de los diagramas análogos al (131.6) de tipo «escalera», con un número grande de «travesaños». Por ello, la expresión doblemente logarítmica completa de la amplitud de dispersión viene dada por la suma infinita *

$$i M_{fi} = \text{Diagrama 1} + \text{Diagrama 2} + \text{Diagrama 3} + \dots \quad (131.14)$$

Para establecer la forma general de los términos de esta suma, consideremos el diagrama de tercera aproximación [tercer término de la serie (131.14)]. La integral que le corresponde puede reducirse a la forma

$$M_{fi}^{(3)} = M_{fi}^{(1)} J^{(2)}, \quad J^2 = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int \frac{du_1 dv_1 du_2 dv_2}{u_1 v_1 (u_1 + u_2) (v_1 + v_2)} \quad (131.15)$$

con el dominio de integración

$$\frac{m_\mu^2}{s} < u_{1,2}, v_{1,2} < 1, \quad su_1 v_1, su_2 v_2 > m_\mu^2.$$

La parte doblemente logarítmica de esta integral puede separarse imponiendo a la integración temporal una condición más **

$$v_2 \gg v_1, \quad u_2 \gg u_1. \quad (131.16)$$

Entonces

$$J^{(2)} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int \frac{du_1 dv_1 du_2 dv_2}{u_1 u_2 v_1 v_2} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2,$$

donde

$$\xi_i = \ln \frac{su_i}{m_\mu^2}, \quad \eta_i = -\ln v_i,$$

y el dominio de integración está determinado por las desigualdades

* Esta serie se suma a la ecuación de Bethe-Salpeter (§ 122), resuelta la cual se puede hallar M_{fi} . Sin embargo, es más conveniente el método de cálculo que se expone a continuación, en el que se efectúa la simplificación de cada término antes de sumar.

** Este método podría aplicarse también al cálculo de la integral (130.3).

$$\xi_1 > \eta_1, \quad \xi_2 > \eta_2, \quad \sigma > \xi_2, \quad \eta_2 > 0, \quad \sigma = \ln \frac{s}{m_\mu^2}.$$

De manera análoga el n -ésimo término de la serie puede representarse en la forma $M_{fi}^{(n)} = M_{fi}^{(1)} J^{(n)}$, donde

$$J^{(n)}(\sigma) = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^n \int d\xi_1 d\eta_1 \dots d\xi_n d\eta_n, \quad (131.17)$$

con dominio de integración

$$\xi_i > \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \sigma > \xi_n, \quad \eta_n > 0. \quad (131.18)$$

La amplitud de dispersión total es

$$M_{fi} = M_{fi}^{(1)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} J^{(n)}(\sigma) \right]. \quad (131.19)$$

Para calcular esta suma introduciremos ahora las funciones auxiliares $A^{(n)}(\xi, \eta)$, que vienen dadas por las mismas integrales (131.17), pero con dominios de integración

$$\xi_i > \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \xi > \xi_n > 0, \quad \eta > \eta_n > 0 \quad (131.20)$$

[diferentes límites de integración respecto de ξ_n y de η_n , en vez de límites iguales como en (131.18)]. Es evidente que $M_{fi} = M_{fi}^{(1)} A(\sigma, \sigma)$, donde

$$A(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}(\xi, \eta), \quad A^{(0)} = 1. \quad (131.21)$$

Por la propia definición de las funciones $A^{(n)}(\xi, \eta)$, es obvio que éstas satisfacen las relaciones de recurrencia

$$A^{(n)}(\xi, \eta) = \frac{a}{2\pi} \int d\xi_1 d\eta_1 A^{(n-1)}(\xi_1, \eta_1),$$

y sumando respecto de n (desde 1 a ∞) las igualdades que así resultan, encontramos la ecuación integral que determina a la función $A(\xi, \eta)$:

$$A(\xi, \eta) = 1 + \frac{a}{2\pi} \int A(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1, \quad (131.22)$$

$$\xi_1 > \eta_1, \quad \xi > \xi_1 > 0, \quad \eta > \eta_1 > 0.$$

Para lo que sigue bastará considerar la función $A(\xi, \eta)$ en la región $\xi > \eta$. Entonces la ecuación (131.22) se puede escribir en la forma

$$A(\xi, \eta) = 1 + \frac{a}{2\pi} \int_0^\eta \int_{\eta_1}^\xi A(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1. \quad (131.23)$$

Derivando esta igualdad respecto de η , tenemos

$$\frac{\partial A(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{a}{2\pi} \int_\eta^\xi A(\xi_1, \eta) d\xi_1, \quad (131.24)$$

y derivando una vez más, ahora respecto de ξ , encontramos para $A(\xi, \eta)$ la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{a}{2\pi} A = 0. \quad (131.25)$$

Esta ecuación ha de resolverse con las condiciones de contorno

$$A(\xi, 0) = 1, \quad \left. \frac{\partial A}{\partial \eta} \right|_{\xi=\eta} = 0, \quad (131.26)$$

que se siguen desde luego de (131.23-24).

La solución puede obtenerse pasando a la transformada de Laplace respecto de la variable ξ :

$$A(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{p\xi} Q(p, \eta) dp, \quad (131.27)$$

donde el contorno C en el plano complejo p es una curva cerrada que rodea al punto $p = 0$. Substituyendo (131.27) en la ecuación (131.25) e igualando a cero el integrando, obtenemos

$$p \frac{\partial Q}{\partial \eta} = \frac{a}{2\pi} Q, \quad Q = \varphi(p) e^{\frac{a\eta}{2\pi p}},$$

donde $\varphi(p)$ es una función arbitraria. La primera de las ecuaciones de contorno (131.26) nos da ahora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{p\xi} \varphi(p) dp = 1,$$

de donde se sigue que

$$\varphi(p) = \frac{1}{p} + \psi(p),$$

donde $\psi(p)$ es una función analítica que carece de singularidades dentro del contorno C . En cuanto a la condición (131.26), ésta puede quedar satisfecha haciendo $\psi(p) = -2\pi p/\alpha$; en efecto, entonces

$$\left. \frac{\partial A}{\partial \eta} \right|_{\xi=\eta} = -\frac{1}{\xi} \int_C \frac{d}{dp} e^{\xi(p+\frac{\alpha}{2\pi p})} dp = 0.$$

Reuniendo las expresiones obtenidas y haciendo $\xi = \eta = \sigma$, se encuentra

$$A(\sigma, \sigma) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{2\pi}{\alpha \sigma} \int_C p \frac{d}{dp} e^{\sigma(p+\frac{\alpha}{2\pi p})} dp.$$

Finalmente, integrando por partes y utilizando la conocida fórmula

$$I_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{z}{2}(p+\frac{1}{p})} dp$$

[$I_1(z) = -iJ_1(iz)$ es una función de Bessel de argumento imaginario], se obtendrá en definitiva para la amplitud de dispersión

$$M_{fi} = M_{fi}^{(1)} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha \sigma^2}} I_1 \left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \sigma \right). \quad (131.28)$$

En cuando a la sección eficaz de dispersión (para el ángulo $\theta = \pi$), según esto es igual a

$$d\sigma = d\sigma^{(1)} \frac{2\pi}{\alpha \ln^2(s/m_\mu^2)} I_1^2 \left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \ln \frac{s}{m_\mu^2} \right), \quad (131.29)$$

donde

$$d\sigma^{(1)} = \frac{2\pi \alpha^2}{s^2} dt$$

es la sección eficaz en la aproximación de Born para el caso ultrarrelativista (véase el problema 6, § 82) *.

* Daremos algunas referencias complementarias acerca de las expresiones asintóticas doblemente logarítmicas para los procesos de dispersión entre dos partículas: V. G. Gorshkov, V. N. Gribov, G. V. Frolov, ZhETF 51, 1093 (1966) (dispersión hacia atrás de un fotón por un electrón); V. G. Gorshkov, V. N. Gribov, L. N. Lipatov, G. V. Frolov, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Fiz. 6, 361 (1967) (dispersión hacia atrás electrón-positón); V. G. Gorshkov, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Fiz. 6, 579 (1967) (procesos de dispersión a ángulos arbitrarios).

CAPÍTULO 14

SIMETRÍA DINÁMICA DE LOS HADRONES

§ 132. Isomultipletes

Si las partículas se describen por un campo- ψ real (hermítico), el impulso p y la proyección del spin σ forman un conjunto completo de números cuánticos que determinan el estado de una partícula libre. Cada nivel de energía es, en estas condiciones, degenerado respecto de las direcciones de p y degenerado de orden $(2s + 1)$ respecto de los valores de σ .

El carácter complejo de un campo puede interpretarse como consecuencia de una degeneración complementaria: una misma energía (para un p dado) la poseen dos estados del campo que difieren entre sí en los valores del número cuántico $Q = \pm 1$ (partícula y antipartícula).

Sin embargo, la experiencia muestra que existe aún otro tipo de degeneración que no está ligado de manera inmediata (en contraste con las degeneraciones antes indicadas) con las propiedades de simetría del espacio y del tiempo: las masas de ciertas partículas que poseen cargas eléctricas diferentes, y que no se comportan las unas respecto de las otras como partículas y antipartículas, resultan casi iguales. Tales partículas constituyen, como suele decirse, un *multiplete isotópico* o *isomultiplete* *.

La naturaleza física de esta degeneración se desconoce en la actualidad. Sólo está claro que la propiedad de simetría que se encuentra en su base se refiere a una determinada categoría de interacción —a las interacciones fuertes (en este sentido, cabe hablar de *simetría dinámica*). Sólo poseen el carácter de isomultiplete las partículas que son susceptibles de intervenir en las interacciones fuertes, esto es, los llamados *hadrones* **, y ello constituye una de las manifestaciones de la llamada *invariancia isotópica* de estas interacciones (una formulación más precisa de esta propiedad se dará más adelante).

* El término «isotópico» adoptado en la literatura no es del todo afortunado en el presente caso, dado que de lo que se trata es de propiedades de partículas con iguales masas («isóbaras»), y no con iguales cargas.

** De la palabra griega «hadros» que significa «que ha crecido o se ha desarrollado fuertemente, grande, fuerte».

Aunque las propiedades de las componentes de un isomultiplete respecto de las interacciones fuertes son idénticas, sus propiedades electromagnéticas, naturalmente, son distintas. Como consecuencia de esto, la degeneración en un isomultiplete no es del todo rigurosa: las masas de las partículas que pertenecen al mismo coinciden sólo aproximadamente; esto hace pensar que las pequeñas diferencias entre estas masas son de origen electromagnético.

Consideremos dos partículas que componen un doblete isotópico; tales son, por ejemplo, los dos nucleones —protón y neutrón—, a los que nos referiremos para concretar *. Si se prescinde de la interacción electromagnética (si ésta «se desconecta»), $|p\rangle$ y $|n\rangle$ son dos estados «de carga» de un nucleón libre que difieren únicamente en el valor de un número cuántico (la carga eléctrica $Z = 1, 0$), que no representa ningún papel en las interacciones fuertes. Las mismas propiedades en relación con las interacciones fuertes poseerá también cualquier superposición de estados

$$\psi^1 |p\rangle + \psi^2 |n\rangle. \quad (132.1)$$

El conjunto de las dos magnitudes $\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$ se llama *isospinor*. Al protón y al neutrón corresponden los isospinores

$$p: \psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n: \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El que diferentes superposiciones sean equiparables significa que el isospinor puede ser objeto de la transformación $\psi \rightarrow V\psi$, donde V es una matriz 2×2 . Las transformaciones deben conservar la normalización y la ortogonalidad de dos estados linealmente independientes. Esto significa que la matriz V ha de ser unitaria.

Del carácter unitario de V se sigue que el determinante de la matriz es, en módulo, igual a la unidad, es decir,

$$|V| = e^{2ia}.$$

Por ello, es posible representar cada matriz V en la forma $V = Ue^{ia}$, donde U es una matriz unitaria con determinante igual a la unidad. La multiplicación de ψ por un factor de fase nada tiene que ver, evidentemente, con la propiedad de invariancia isotópica. En consecuencia, esta última viene caracterizada solamente por la transformación

$$\psi \rightarrow U\psi,$$

donde

$$UU^\dagger = 1, \quad |U| = 1. \quad (132.2)$$

* Ya se habló de este isodoblete en III, § 115. Aquí consideraremos la cuestión que plantean los isomultipletes desde un punto de vista algo más general.

Ahora bien, desde un punto de vista puramente matemático estas transformaciones coinciden con las transformaciones binarias según las cuales se transforman las componentes contravariantes de un espinor ordinario (tridimensional) en las rotaciones del sistema de coordenadas *. Por lo tanto, el álgebra de los isospinores coincide formalmente con el álgebra espinorial ordinaria. En este sentido, a un doblete isotópico se puede atribuir un *spin isotópico*, o *isospin*, $T=1/2$, y considerar formalmente las transformaciones en (132.2) como rotaciones en un «isoespacio» ficticio. Sin embargo, es necesario subrayar que esto supone solamente una manera de hablar que es cómoda gracias a que nos hemos acostumbrado a los conceptos del álgebra espinorial ordinaria. El concepto primario es, naturalmente, no el de las rotaciones en el isoespacio imaginado, sino el de las transformaciones unitarias (132.1) que expresan la degeneración de los estados del nucleón.

Los operadores componentes del isospin $T = 1/2$, como los del spin ordinario, se expresan en función de las matrices de Pauli, que en este caso designaremos por τ_1 , τ_2 , τ_3 (en vez de σ_x , σ_y , σ_z):

$$T_1 = \frac{1}{2} \tau_1, \quad T_2 = \frac{1}{2} \tau_2, \quad T_3 = \frac{1}{2} \tau_3. \quad (132.3)$$

Esta elección de ejes en el isoespacio significa que hemos convenido en considerar el protón y el neutrón como estados propios del operador T_3 , correspondientes, respectivamente a los valores propios $T_3 = +1/2$ y $T_3 = -1/2$. Se trata de un número cuántico (*proyección del isospin*) que diferencia el protón del neutrón. Cumple, por ello, la misma función que la carga eléctrica Z , pero de una manera más simétrica. Se tiene, evidentemente,

$$Z = \frac{1}{2} + T. \quad (132.4)$$

Introduzcamos también los operadores

$$T_+ = T_1 + iT_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_- = T_1 - iT_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (132.5)$$

Es evidente que

$$\begin{aligned} T_+ |n\rangle &= |p\rangle, & T_+ |p\rangle &= 0, \\ T_- |n\rangle &= 0, & T_- |p\rangle &= |n\rangle. \end{aligned} \quad (132.6)$$

Junto con el par p , n , forman un isodoblete los antinucleones \bar{p} y \bar{n} . La función de onda de una antipartícula es una magnitud conjugada compleja de la función de

* El grupo de las transformaciones binarias se llama también $SU(2)$; es el formado por el conjunto de las transformaciones unitarias unimodulares ($|U| = 1$) del espacio lineal complejo bidimensional.

onda de la partícula. En consecuencia, si se representa el estado de un antinucleón en forma de superposición

$$\varphi_1 |\bar{p}\rangle + \varphi_2 |\bar{n}\rangle, \quad (132.7)$$

las magnitudes φ_1 , φ_2 se transformarán como conjugado-complejas de los coeficientes ψ^1 , ψ^2 en la superposición (132.1); en otras palabras, forman un isospinor covariante. Escribiendo (132.7) en función de las componentes contravariantes del isospinor, obtendremos

$$\varphi^1 |\bar{n}\rangle - \varphi^2 |\bar{p}\rangle. \quad (132.8)$$

Al antiproton y antineutrón corresponden los isospinores

$$\bar{p}: \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{n}: \varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al antiproton corresponde el valor propio $T_3 = -\frac{1}{2}$, y al antineutrón, el $T_3 = +\frac{1}{2}$. En otras palabras, la carga de un antinucleón es

$$Z = -\frac{1}{2} + T_3. \quad (132.9)$$

Los isomultipletes de multiplicidad más elevada se describen por isospinores simétricos de orden superior: a un isospinor de orden $n = 2T$ corresponde un isomultiplete formado por $2T + 1$ partículas, al que se atribuye el isospin T . Dentro de cada isomultiplete las partículas se distinguen por los valores de un número cuántico aditivo T_3 . Estos valores se encuentran en determinada relación con las cargas eléctricas de la partícula (véase § 133). La composición de isospines de las partículas que constituyen un sistema complejo se efectúa siguiendo la regla ordinaria de composición de los momentos cinéticos.

La invariancia de isospin de las interacciones fuertes se puede formular como invariancia respecto de las rotaciones arbitrarias en el isoespacio. Dicho de otro modo, las interacciones en un sistema de hadrones con valor dado del isospin total T no dependen del valor de la suma de proyecciones T_3 . En términos de las amplitudes de dispersión esto significa que el operador- S es un isoescalar, de modo que sus elementos de matriz son

$$\langle T'T'_3 | S | TT'_3 \rangle = S_T \delta_{TT'} \delta_{T_3 T'_3}, \quad (132.10)$$

donde S_T no depende de T_3 .

§ 133. Hipercarga

Dado que no existe una teoría consecuente de las partículas elementales, su

clasificación sólo puede basarse, y ello en grado considerable, en datos experimentales. El análisis del material experimental con que se cuenta permite establecer toda una serie de leyes de conservación que determinan ciertas reglas de selección, reglas que permiten o prohíben reacciones imaginables entre partículas. Estas leyes de conservación se formulan introduciendo características numéricas especiales (números cuánticos) atribuidas a los diferentes tipos de partículas.

A este tipo de leyes pertenece, ante todo, la ley de conservación de la carga eléctrica, que para cada partícula se expresa por un número entero Q de cargas elementales e . Esta ley, la más universal, es exacta: se observa sean cuales sean las interacciones entre partículas.

Esta ley permite ya explicar la estabilidad del electrón: dado que, entre todas las partículas cargadas, es la que posee menor masa, no puede desintegrarse espontáneamente dando lugar a cualesquiera otras partículas. Pero la conservación de la carga no prohíbe la transformación del protón en un positrón con emisión de un fotón. El protón posee estabilidad si se le atribuye, además de la carga, otra magnitud que se conserva y que no existe en las partículas más ligeras. Esta magnitud se llama *número bariónico* y lo designaremos por B . Se ha convenido en hacer $B = 1$ para el protón, con lo cual hay que atribuir al antiproton el valor $B = -1$ de acuerdo con la posibilidad de aniquilación mutua del protón y el antiproton.

Todos los hadrones se dividen en dos grupos, según sea o no igual a cero su número bariónico *. Los hadrones con $B \neq 0$ se llaman *bariones*, y los hadrones con $B = 0$, *mesones*.

La ley de conservación del número bariónico (es decir, de la suma de los números bariónicos de las partículas que constituyen un sistema cerrado) es también exacta y no se viola por ninguna interacción. Una clasificación más fina de los hadrones únicamente es posible tomando como base aproximaciones ligadas con la clasificación de las interacciones en fuertes, electromagnéticas y débiles.

Si se consideran los procesos en los que cabe prescindir de las interacciones débiles, se cumplen en ellos las leyes de conservación de la paridad espacial y de la paridad de carga. Además, los hadrones estarán sujetos a otras dos leyes de conservación. En primer lugar, únicamente las interacciones débiles son capaces de alterar la carga eléctrica de un sistema de hadrones cediéndola a leptones. Por ello, después de «desconectar» la interacción débil, se conserva no sólo la carga total de un sistema cerrado Q , sino también las cargas de los leptones y de los hadrones por separado; designaremos esta última por Z .

En segundo lugar, existen ciertos hadrones (partículas *extrañas*) que se convierten en estables cuando se desconecta la interacción débil, aunque ninguna de las demás leyes de conservación prohíbe su desintegración. Esta estabilidad se describe mediante la introducción de otro número cuántico aditivo que se conserva; se le

* El número bariónico es también igual a cero para todas las partículas no susceptibles de interacciones fuertes (leptones).

llama *hipercarga* y lo designaremos por Y (la diferencia $Y - B = S$ ha recibido el nombre de *extrañeza*, y las partículas con $S \neq 0$, el de partículas extrañas). A cada uno de los hadrones que conocemos actualmente cabe atribuir un determinado valor de Y tal que la conservación de la hipercarga total junto con las demás leyes de conservación explicarían el que sea permitida o prohibida una reacción causada por las interacciones fuertes o electromagnéticas. Todas las componentes de un mismo isomultiplete tienen igual Y . A una partícula y a la correspondiente antipartícula hay que atribuir, evidentemente, hipercargas de signos opuestos.

Entre la hipercarga de una partícula y su isospin existe una relación.

Consideremos primero isomultipletes de partículas no extrañas. Tales son, en primer lugar, los isodobletes de nucleones y antinucleones. Atribuyendo a los nucleones el número bariónico $B = 1$, y a los antinucleones el $B = -1$, podemos escribir la relación entre su carga y la proyección del isospin T_3 en la forma

$$Z = \frac{B}{2} + T_3$$

[cf. (132.4) y (132.9)] o bien, dado que $B = Y$,

$$Z = \frac{Y}{2} + T_3. \quad (133.1)$$

Visto el carácter aditivo de todos los números Z , Y , T_3 , esta relación vale también para cualquier sistema de nucleones y antinucleones. Además, dado que en ella no aparece ninguna otra característica de las partículas, será por lo mismo aplicable a cualquier isomultiplete de partículas no extrañas.

Por sus propiedades isotópicas y de carga, una partícula extraña con valores dados Z , T , B , Y ($B \neq Y$) equivale a un sistema formado por un hadrón no extraño con Z , T , Y y $|B - Y|$ hadrones isoescalares ($T = 0$) con $Z = Y = 0$, $B = \pm 1$ (tales partículas existen realmente: el hiperón Λ o su antipartícula $\bar{\Lambda}$, véase § 134). Dado que cuando se forma uno de estos sistemas los valores Z , Y , T_3 no varían, la condición (133.1) no deja de cumplirse. Vale, por consiguiente, para todos los isomultipletes en general *.

Promediamos la igualdad (133.1) en un multiplete. Dado que $\bar{T}_3 = 0$ (el trazo es signo de valor medio), se tiene

$$\bar{Z} = \frac{Y}{2}. \quad (133.2)$$

De (133.1) se sigue también una determinada relación entre Y y T . Dado que Z

* El esquema de los isomultipletes basado en el concepto de hipercarga (o el de extrañeza) fue formulado por vez primera por *Gell-Mann* (M. Gell-Mann, 1953) y por *Nishijima* (K. Nishijima, 1953). El procedimiento seguido aquí para deducir (133.1) se debe a *Sakata* (S. Sakata, 1956).

es un número entero y que $2T_3$ es un número de igual paridad que $2T$, los valores Y y $2T$ son números enteros de paridad igual:

$$Y - 2T = \text{número par} \quad (133.3)$$

Hay que hacer notar que el concepto de hipercarga es ajeno al de simetría isotópica. Por ello, las relaciones (133.1-3) no son, en modo alguno, consecuencia sólo de las propiedades de los isospinores. Subrayaremos también que al deducir (133.1) recurrimos a la idea de partículas «compuestas», construidas simplemente a partir de partículas que existen en la realidad (n, p, Λ), y no de cualesquiera otras partículas que cabe lógicamente concebir.

En virtud de la relación (133.1), la conservación de la hipercarga equivale a la de T_3 . La proyección total del isospin de un sistema se conserva, por consiguiente, ya cuando se desconectan las interacciones débiles. En cambio, la conservación del valor absoluto del isospin total de un sistema exige que se prescinda también de las interacciones electromagnéticas.

§ 134. Hadrones metaestables

Con exclusión del fotón, no existen en la naturaleza partículas «elementales» estables (es decir, que no se desintegran espontáneamente) cuyo spin sea entero. Existe, sin embargo, una clase de bosones *metaestables*; a ella pertenecen los mesones.

Entendemos aquí por metaestabilidad la estabilidad respecto de las interacciones fuertes; la desintegración de estas partículas está ligada solamente con las interacciones electromagnéticas o débiles; su vida media es, por ello, relativamente larga, de 10^{-8} a 10^{-19} s, mientras que la interacción fuerte conduciría a una desintegración al cabo de un tiempo 10^{-21} - 10^{-23} s.

Existen ocho mesones metaestables. Todos ellos poseen spin 0 y paridad negativa (partículas pseudoescalares). En la tabla 1 se indican sus masas y sus vidas medias *.

TABLA 1. Mesones

Partícula	Masa (MeV)	Vida media (s)
π^+, π^-	139,6	$2,6 \cdot 10^{-8}$
π^0	135,0	$0,8 \cdot 10^{-16}$
K^+, K^-	493,8	$1,24 \cdot 10^{-8}$
K^0, \bar{K}^0	497,8	$\left\{ \begin{array}{l} 0,86 \cdot 10^{-10} (K_S^0) \\ 5,4 \cdot 10^{-8} (K_L^0) \end{array} \right.$
η	548,8	$\sim 10^{-19}$

* Las dos vidas medias en el caso de los mesones K^0 es un fenómeno especial que se estudiará en el § 154.

Los pares (π^+, π^-) , (K^+, K^-) , (K^0, \bar{K}^0) constituyen parejas partícula-antipartícula. Por ello, sus masas y vidas medias son exactamente iguales.

Los valores de la carga y de la hipercarga de esas partículas se dan en la tabla siguiente:

$Y \backslash Z$	-1	0	1	
Y				
-1	K^-	\bar{K}^0	-	
0	π^-	π^0, η	π^+	
1	-	K^0	K^+	

(134.1)

Dado que para todos los mesones es $B = 0$, entre ellos son partículas extrañas los mesones K .

Los mesones se distribuyen en isomultipletes: el isosinglete η , los isodobletes $K = (K^0, K^+)$ y $\bar{K} = (\bar{K}^0, K^-)$, y el isotriplete $\pi = (\pi^+, \pi^0, \pi^-)$. Comparando los valores de Y y T , puede construirse una tabla de estos isomultipletes en la forma

$Y \backslash T$	0	$1/2$	1	
Y				
-1	-	\bar{K}	-	
0	η	-	π	
1	-	K	-	

(134.2)

Las componentes de los isomultipletes difieren en los valores de T_3 de acuerdo con

$$T_3 = 1 \quad \overbrace{\pi^+ \quad \pi^0 \quad \pi^-}^{\text{}} \quad \overbrace{K_0 \quad K^+}^{-1/2 \quad 1/2} \quad \overbrace{\bar{K}_0 \quad K^-}^{1/2 \quad -1/2}$$

El carácter metaestable de los mesones- π se explica por el hecho de que son los más ligeros de entre todos los hadrones. La estabilidad de los mesones- K respecto de la desintegración en mesones- π es consecuencia de la conservación de la hipercarga. La desintegración $\eta \rightarrow 2\pi$ está prohibida por la paridad: dado que ninguna de estas partículas tiene spin, el momento cinético orbital en el sistema de dos π sería $l = 0$, de modo que su paridad valdría $-1 \cdot -1 = +1$, mientras que la paridad del η es -1 . La metaestabilidad del mesón- η respecto de la desintegración

$\eta \rightarrow 3\pi$ puede explicarse por la aplicación simultánea de la simetría isotópica y de la simetría partícula-antipartícula, como se pondrá de manifiesto en el párrafo siguiente.

Las desintegraciones reales de los mesones π^+ , π^- y K se deben a las interacciones débiles; las correspondientes vidas medias son del orden de 10^{-8} - 10^{-10} s. En cambio, las desintegraciones del π^0 y del η ($\pi^0 \rightarrow 2\gamma$; del η , en fotones y muones) son de origen electromagnético; sus tiempos característicos son del orden de 10^{-16} - 10^{-19} s.

El mesón π^0 es una partícula realmente neutra. Como a tal tiene una determinada paridad de carga, C , y su desintegración en dos fotones prueba que $C = +1$.

La única partícula estable entre los bariones es el más ligero de ellos, el protón. Además, existe toda una serie de bariones metaestables cuyas desintegraciones vienen condicionadas por las interacciones débiles. A ella pertenecen las partículas indicadas en la tabla 2. Todas estas partículas tienen antipartículas, que llamaremos *antibariones*; las masas y las vidas medias de los bariones y antibariones son, claro está, iguales *.

TABLA 2. *Bariones*

Partícula	Masa (MeV)	Vida media (s)
p	938,26	∞
n	939,55	$0,93 \cdot 10^{-3}$
Λ	1115,6	$2,5 \cdot 10^{-10}$
Σ^+	1189,4	$0,80 \cdot 10^{-10}$
Σ^0	1192,5	$< 1 \cdot 10^{-14}$
Σ^-	1197,3	$1,5 \cdot 10^{-10}$
Ξ^0	1314,7	$3,0 \cdot 10^{-10}$
Ξ^-	1321,2	$1,7 \cdot 10^{-10}$
Ω^-	1672	$1,3 \cdot 10^{-10}$

A todos los bariones se les atribuye el número bariónico $B = 1$, y a todos los antibariones, el $B = -1$. El barión Ω^- es un isosinglete, su hipercarga vale $Y = -2$ y su spin (probablemente) es igual a $3/2$. Todos los demás bariones en la tabla tienen spin $1/2$ y la misma paridad (recordaremos que para los fermiones tiene sentido hablar solamente de su paridad relativa, no de su paridad absoluta, véase § 27). Según los valores de la carga y la hipercarga tenemos:

* Los antibariones, al igual que las demás antipartículas, se designan mediante un trazo sobre una letra. ¡Hay que subrayar que Σ^- y Σ^+ en modo alguno coinciden con Σ^+ y Σ^- !

$\begin{array}{c} Z \\ \diagdown \\ Y \end{array}$	-1	0	1	
$\begin{array}{c} -1 \\ \diagup \\ Y \end{array}$	Ξ^-	Ξ^0	-	(134.3)
$\begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ Y \end{array}$	Σ^-	Σ^0, Λ	Σ^+	
$\begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ Y \end{array}$	-	n	p	

Los bariones Λ , Σ , Ξ (y también el Ω) tienen extrañeza diferente de cero; se les llama también *hiperones*. Por sus propiedades isotópicas los bariones forman: un isosinglete Λ , el isodobleto nucleónico $N = (p, n)$, el isodobleto hiperónico $\Xi = (\Xi^0, \Xi^-)$ y el isotriplete hiperónico $\Sigma = (\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-)$. Comparando los valores de Y y T , cabe distribuir estos isomultipletes en forma de tabla:

$\begin{array}{c} T \\ \diagdown \\ Y \end{array}$	0	$1/2$	1	
$\begin{array}{c} -1 \\ \diagup \\ Y \end{array}$	-	Ξ	-	(134.4)
$\begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ Y \end{array}$	Λ	-	Σ	
$\begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ Y \end{array}$	-	N	-	

En tablas análogas se distribuyen los antibariones, que poseen los mismos isospines T y valores de Z e Y de signos opuestos.

Junto con las partículas metaestables que acabamos de enumerar en este párrafo, se conoce un número considerable de hadrones que se desintegran debido a las interacciones fuertes. Dado que sus vidas medias son extraordinariamente cortas (10^{-21} - 20^{-23} s), se manifiestan experimentalmente tan sólo en forma de resonancias en las reacciones a altas energías. Por ello, estas «partículas» a menudo se llaman simplemente *resonancias*.

Hay que subrayar, sin embargo, que desde el punto de vista de las propiedades que permiten clasificarlas, el tipo de desintegración de una partícula, que se determina por su posición en el «espectro de masas» y por las reglas de selección, carece de significado fundamental. Limitándonos aquí a enumerar las partículas metaestables, perseguimos solamente fines ilustrativos.

PROBLEMAS

- Aplicando la invariancia isotópica de las interacciones fuertes, hallar la razón entre las secciones eficaces diferenciales de las reacciones $p + p \rightarrow d + \pi^+$ (1) y $p + n \rightarrow d + \pi^0$ (2).

Solución. Para el deuterón $T = T_3 = 0$ (véase III, § 116); por consiguiente, el estado isotópico $|TT_3\rangle$ del sistema de productos de reacción coincide con el estado del pión: $|11\rangle$ y $|10\rangle$.

respectivamente, para la primera y la segunda reacción. En cuanto a los estados iniciales de dichas reacciones, éstos vienen dados por los productos $| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle$ y $| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle | \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle$. De acuerdo con las reglas de composición de funciones de onda en la suma de momentos cinéticos, se encuentra

$$| pp \rangle = | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = | 11 \rangle,$$

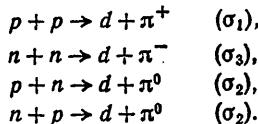
$$| pn \rangle = | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle | \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} | 00 \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} | 10 \rangle.$$

Así, pues, para la reacción (1) los estados isotópicos inicial y final coinciden, de forma que la conservación del isospin se cumple exactamente. Para la reacción (2), en cambio, el estado final $| 10 \rangle$ está representado en el inicial tan sólo con una probabilidad $(1/\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}$. Dado que, por lo demás (en lo que concierne a los grados de libertad de coordenadas y de spin), ambas reacciones son iguales, se tendrá

$$\sigma_1 = 2\sigma_2,$$

donde σ_1, σ_2 son las secciones eficaces diferenciales de las reacciones (1) y (2) referidas a los mismos intervalos de energía y de ángulos de dispersión para las mismas orientaciones mutuas de los spins de las partículas.

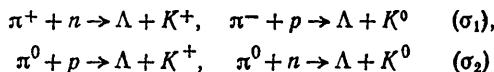
Otra manera de resolver problemas análogos (que no exige el empleo de los coeficientes de la suma vectorial) consiste en lo siguiente (*I. M. Shmushkevich*, 1955). Supongamos que las partículas iniciales no están polarizadas respecto del isospin. Esto significa que el sistema de dos nucleones NN puede encontrarse con probabilidades iguales en los estados pp, nn, pn, np , a partir de los cuales se producen las reacciones



En virtud de la invariancia isotópica de la interacción que determina la reacción, han de resultar también no polarizadas las partículas finales. Esto significa, en el presente caso, que π^+, π^0, π^- deben aparecer con probabilidades iguales, es decir, que ha de tenerse $\sigma_1 = \sigma_3 = 2\sigma_2$. Observemos también que la igualdad $\sigma_1 = \sigma_3$ es desde luego evidente por el hecho de que ambas reacciones difieren únicamente en el cambio simultáneo de signo de T_3 en todas las partículas *.

2. Lo mismo para la reacción $\pi + N \rightarrow \Lambda + K$.

Solución. Teniendo en cuenta la conservación de la hipercarga, son posibles las reacciones



(las reacciones que forman pareja difieren en el signo de todos los T_3). La condición de no polarizabilidad isotópica del K cuando π y N no están polarizados, se cumple idénticamente. Pero si se consideran las reacciones inversas y se impone la condición de que el π no está polarizado cuando no lo está el K , obtendremos

$$\sigma_1 = 2\sigma_2.$$

* La invariancia con respecto a esta transformación se llama a veces *simetría isotópica*, para distinguirla del concepto más general de invariancia isotópica que la incluye como caso particular.

3. Lo mismo para la reacción de dispersión πN .

Solución. En el choque de un pión y un nucleón no polarizados respecto del isospin se producen las reacciones

$$\begin{aligned} \pi^+ + p &\rightarrow \pi^+ + p, & \pi^- + n &\rightarrow \pi^- + n & (\sigma_1), \\ \pi^- + p &\rightarrow \pi^- + p, & \pi^+ + n &\rightarrow \pi^+ + n & (\sigma_2), \\ \pi^- + p &\rightarrow \pi^0 + n, & \pi^+ + n &\rightarrow \pi^0 + p & (\sigma_3), \\ \pi^0 + p &\rightarrow \pi^0 + p, & \pi^0 + n &\rightarrow \pi^0 + n & (\sigma_4), \\ \pi^0 + p &\rightarrow \pi^+ + n, & \pi^0 + n &\rightarrow \pi^- + p & (\sigma_5) \end{aligned}$$

(de nuevo se han apareado las reacciones que difieren en el signo de todos los T_3). De la condición de que los piones finales no estén polarizados se sigue

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_5 = 2(\sigma_3 + \sigma_4).$$

Además, $\sigma_3 = \sigma_5$ en tanto que secciones eficaces de reacciones directa e inversa. Por ello,

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3 + 2\sigma_4.$$

4. Hallar la relación entre las secciones eficaces de reacción

$$\begin{aligned} \pi^+ + p &\rightarrow \pi^+ + p & (\sigma_1), \\ \pi^- + p &\rightarrow \pi^- + p & (\sigma_2), \\ \pi^- + p &\rightarrow \pi^+ + n & (\sigma_3), \end{aligned}$$

si el estado final puede tener sólo el isospin $T = \frac{3}{2}^+$.

Solución. Aplicando las reglas de composición del momento cinético, se encuentra

$$\begin{aligned} |\pi^+ p\rangle &= |11\rangle |1/2 \ 1/2\rangle = |\frac{3}{2} \ \frac{3}{2}\rangle, \\ |\pi^- p\rangle &= |1-1\rangle |1/2 \ -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |\frac{3}{2} \ -1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{1}{2} \ -1/2\rangle, \\ |\pi^0 n\rangle &= |10\rangle |1/2 \ -1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{3}{2} \ -1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\frac{1}{2} \ -1/2\rangle. \end{aligned}$$

Supongamos $S_{1/2} = 0$, $S_{3/2} = A$ [la notación para S_T es la de (132.10)]. Entonces

$$\langle \pi^+ p | S | \pi^+ p \rangle = A, \quad \langle \pi^- p | S | \pi^- p \rangle = \frac{1}{3} A, \quad \langle \pi^0 n | S | \pi^- p \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} A.$$

De aquí se sigue

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 9 : 1 : 2.$$

5. Teniendo en cuenta la invariancia isotópica, separar las amplitudes invariantes en la amplitud de dispersión elástica $\pi\pi$.

Solución. La forma general de la amplitud de dispersión es:

$$M_{fi} = f_1 (\chi_1 \cdot \chi_2) (\chi_3 \cdot \chi_4) + f_2 (\chi_1 \cdot \chi_3) (\chi_2 \cdot \chi_4) + f_3 (\chi_1 \cdot \chi_4) (\chi_2 \cdot \chi_3),$$

* De este tipo es la resonancia para una energía cinética de los piones de 190 MeV.

donde χ_1, χ_2, \dots son las amplitudes de onda isotópicas (isovectores) de los dos piones iniciales y de los dos finales, f_1, f_2, f_3 son las amplitudes invariantes, función de los invariantes cinemáticos s, t, u (su número —tres— coincide con el número de valores posibles del spin total del sistema de dos partículas con isospin 1). Las funciones f_1, f_2, f_3 poseen determinada simetría que corresponde a la identidad de los cuatro piones. Así, al permutar los dos piones iniciales: $\chi_1 \leftrightarrow \chi_2, s \rightarrow s, t \leftrightarrow u$, de donde

$$f_1(s, u, t) = f_1(s, t, u), \quad f_2(s, u, t) = f_3(s, t, u).$$

6. Lo mismo para la dispersión elástica πN .

Solución. La composición de los isospins $1/2$ y 1 da dos valores posibles para el isospin total, a los que corresponden dos amplitudes isotópicas de dispersión. La forma general de M_{fi} es:

$$\begin{aligned} M_{fi} &= M_1 + M_2 (\nu' \tau v) \cdot [\chi' \chi] \\ M_1 &= f_1(\bar{u}' u) + g_1(\bar{u}' \hat{P} u), \quad M_2 = f_2(\bar{u}' u) + g_2(\bar{u}' \hat{P} u). \end{aligned}$$

Aquí, f_1, f_2, g_1, g_2 son amplitudes invariantes; u, u' , las amplitudes bispinoriales de los nucleones inicial y final, y $P = p + p'$, donde p, p' son los 4-impulsos de los piones [cf. (71.3)]; χ, χ' son las amplitudes de onda isotópica de los piones (isovectores), y v, v' las isoamplitudes de los nucleones (isospinores); τ son las matrices de Pauli que actúan sobre los índices isospinoriales.

7. Lo mismo para la dispersión elástica NN .

Solución. La forma general de la amplitud de dispersión es:

$$M_{fi} = M_1 + M_2 (\nu'_1 \tau v_1) (\nu'_2 \tau v_2), \quad M_1 = \sum_{i=1}^4 f_i F_i, \quad M_2 = \sum_{i=1}^4 g_i F_i.$$

Aquí f_i, g_i son amplitudes invariantes; v_1, v'_1, \dots , las amplitudes isospinoriales de los cuatro nucleones; F_i , los invariantes construidos a partir de las amplitudes bispinoriales de los nucleones [véase (71.4)].

§ 135. Paridad-G

Ya hemos recordado que las interacciones fuertes conservan la paridad de carga y el isospin de un sistema de hadrones. La aplicación simultánea de estas dos leyes de conservación conduce a nuevas reglas de selección que no resultarían de ninguna de ellas por separado (*T. D. Lee, C. N. Yang, 1956*).

La invariancia isotópica de las interacciones fuertes puede formularse como invariancia respecto de las «rotaciones en el isoespacio». Consideremos una rotación de ángulo π en torno del eje x^2 de este espacio. El isospinor $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ se transforma de acuerdo con

$$\psi \rightarrow e^{i\pi T_2} = e^{i\frac{\pi}{2}\tau_2} = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i\tau_2 \sin \frac{\pi}{2} \right) \psi = i\tau_2 \psi. \quad (135.1)$$

En particular, para los isospinores que corresponden a las dos componentes de un isodoblete (nos referiremos al par protón-neutrón), se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o bien

$$p \rightarrow -n, \quad n \rightarrow p,$$

donde p y n designan, para abreviar, los estados de carga $|p\rangle$ y $|n\rangle$. De manera análoga se encuentra la misma transformación para los antinucleones:

$$\bar{p} \rightarrow -\bar{n}, \quad \bar{n} \rightarrow \bar{p}.$$

Completemos ahora la rotación considerada con la operación de conservación de carga C ; el producto de ambos operadores lo designaremos por G :

$$G = Ce^{i\pi T_3}. \quad (135.2)$$

Dado que la conjugación de carga consiste en la transformación $p \leftrightarrow \bar{p}$, $n \leftrightarrow \bar{n}$, al aplicar el operador (135.2) se obtiene

$$G: \quad p \rightarrow -\bar{n}, \quad n \rightarrow \bar{p}, \quad \bar{p} \rightarrow -n, \quad \bar{n} \rightarrow p. \quad (135.3)$$

El operador G commuta con los operadores de las tres componentes del isospin T_1 , T_2 , T_3 . La manera más fácil de ver que es así consiste en escribir directamente las expresiones explícitas de los operadores en forma de matrices 4×4 que transforman los estados de nucleón y antinucleón. Distribuyendo estos estados en columna

$$\begin{pmatrix} p \\ n \\ \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix},$$

obtendremos

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -i\tau_2 \\ i\tau_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(aquí 0 y 1 son matrices de dos filas y dos columnas).

Si la operación G transforma una partícula (o un sistema de partículas) en sí misma, entra en juego el concepto de su paridad- G : el estado puede conservarse invariable o cambiar de signo. Para esto es necesario que el número bariónico y la hipercarga de la partícula sean iguales a cero. En efecto, la conjugación de carga (paso de una partícula a la antipartícula) cambia el signo tanto de la carga eléctrica Z

como de los números Y, B . A su vez, una rotación en el isospace cambia Z , pero no modifica ni Y ni B . Por ello, la aplicación simultánea de ambas transformaciones cambia en cualquier caso los números Y, B , si éstos son diferentes de cero.

La paridad- G tiene la importante propiedad de ser la misma para todas las componentes de un mismo isomultiplete. Esto se sigue del hecho de que el operador G commuta con todas las componentes de T y, en consecuencia, con todas las rotaciones en el isospace.

Para $Y = 0$ tenemos $Z = T_3$, por lo que es claro que T_3 , y también el propio T , en un número entero. Un isomultiplete con T entero se representa por un isospinor simétrico de orden par $2T$, equivalente a un isotensor irreducible $\psi_{ik\dots}$ de orden T . Entre las componentes de un tal isomultiplete figura una partícula neutra ($T_3 = 0$). A ella corresponde el isotensor $\psi_{ik\dots}$ cuya única componente no nula es la $\psi_{33\dots}$. Una rotación de ángulo π en torno del eje x^2 multiplica este isotensor por $(-1)^T$. Si C es la paridad de carga de la partícula neutra, su paridad- G será

$$G = C(-1)^Y. \quad (135.4)$$

De acuerdo con lo que dijimos antes, queda determinada así la paridad- G de todas las componentes del isomultiplete.

Consideremos, por ejemplo, el isotriplete de piones ($T = 1$). La paridad de carga del mesón π^0 es $C = +1$ (lo que se sigue de que el π^0 se desintegra en un número par —dos— de partículas impares respecto de la carga —dos fotones). En consecuencia, la paridad- G de los piones será $G = -1$. De aquí cabe concluir, en particular, que bajo la acción de las interacciones fuertes un sistema de piones puede convertirse en otro sistema de piones solamente si no varía la paridad del número de partículas.

El mesón- η es un isosinglete ($T = 0$) y su paridad de carga vale $C = +1$ (el mesón- η , al igual que el π^0 , se desintegra en dos fotones). Por lo tanto, $G = +1$. De aquí se sigue que las interacciones fuertes no pueden conducir a la desintegración $\eta \rightarrow 3\pi$.

§ 136. SIMETRÍA UNITARIA SU (3)

Los datos experimentales con que se cuenta dan pie a la hipótesis de que la simetría isotópica es solamente una de las manifestaciones de una simetría más elevada que poseen las interacciones fuertes *. En esta simetría la carga eléctrica y la hiper-carga son equiparables: al lado de la relación

$$Z = \frac{Y}{2} + T_3 \quad (136.1)$$

* El grado en que se cumplen las condiciones de esta simetría resulta de hecho no muy elevado. Esta situación puede interpretarse intuitivamente en el sentido de que las interacciones fuertes se compondrían de interacciones «propriamente fuertes» y de otras «moderadas», manifestándose la simetría total tan sólo después de «desconectar» estas últimas. El correspondiente parámetro en los desarrollos se estima que es del orden de 1/10.

cabe escribir también la igualdad

$$Y = \frac{Z}{2} + U_3, \quad (136.2)$$

donde U_3 es la proyección de un «spin» más que se conserva (lo llamaremos isospin- u para distinguirlo del isospin T , el cual designaremos, en relación con esto, como isospin- t).

Se plantea así la cuestión de estudiar las propiedades de una simetría en la que figuran simultáneamente dos números cuánticos aditivos *.

Vimos en el § 132 que en la base del concepto de simetría isotópica se encuentra el de simetría del isodoblete de dos partículas «fundamentales» que se distinguen por los valores del número cuántico $T_3 = \pm 1/2$. Las componentes de los isomultipletes de orden más elevado pueden simularse (en lo que respecta a sus propiedades isotópicas) mediante partículas «compuestas» construidas a partir de determinados conjuntos de partículas fundamentales. Es natural que de esta manera se alcance una simetría que está ligada solamente con el número cuántico aditivo T_3 .

Es claro, por ello, que llegaremos a una simetría con dos números cuánticos si se parte de la simetría que expresa la equivalencia de tres partículas «fundamentales» diferentes que se distinguen entre sí por los valores de dos números cuánticos independientes. Estas partículas hipotéticas se llaman quarks; las designaremos por los símbolos Q_p , Q_n , Q_Λ . Sin embargo, hay que subrayar ya desde ahora que si bien la simetría considerada puede describirse intuitivamente con la ayuda de estas partículas, su existencia real en la naturaleza no se convierte todavía en necesaria por este hecho. En principio, es posible una situación en la que solamente resulten existir las partículas «compuestas».

Consideremos la superposición

$$\psi^1 |Q_p\rangle + \psi^2 |Q_n\rangle + \psi^3 |Q_\Lambda\rangle. \quad (136.3)$$

El conjunto de las tres magnitudes

$$\psi^a = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix} \quad (136.4)$$

lo llamaremos *superespinor*. Que las diferentes superposiciones sean equivalentes significa que ψ puede someterse a una transformación unitaria unimodular cualquiera U ; el conjunto de estas transformaciones constituye el grupo $SU(3)$ (cf. la nota en la página 187).

La matriz U , que realiza una transformación del grupo $SU(3)$, al igual que cual-

* La clasificación de las partículas basada en esta simetría fue introducida originalmente por Gell-Mann y Ne'eman (M. Gell-Mann y Y. Ne'eman, 1961), independientemente.

quier matriz unitaria, puede representarse en la forma

$$U = e^{iR}, \quad (136.5)$$

donde R es una matriz hermítica. Dado que $|U| = 1$, se tiene $\text{Tr } R = 0$. En las transformaciones infinitesimales, es $U = 1 + i\delta R$. La forma general de una matriz δR es:

$$\delta R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \delta \alpha_i \cdot \lambda_i, \quad (136.6)$$

donde los $\delta \alpha_i$ son parámetros reales, y las λ_i , matrices hermíticas de tercer orden linealmente independientes y de traza nula; es claro que de tales matrices existen sólo ocho ($3 \cdot 3 - 1 = 8$). Así, pues, una transformación infinitesimal de un superspinor se representa por: $\psi^a \rightarrow \psi^a + \delta \psi^a$, donde

$$\delta \psi^a = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^8 \delta \alpha_i (\lambda_i)_b^a \psi^b \quad (136.7)$$

$(\lambda_i)_b^a$ es un elemento de la matriz λ_i en el que el superíndice indica la fila, y el subíndice, la columna].

El conjunto de las ocho matrices λ_i puede llamarse operador de *superespín* *. Se obtiene fácilmente su forma explícita observando que, en los casos particulares en los que la superposición (136.3) contiene sólo dos componentes, λ_i debe reducirse a las matrices de Pauli. Partiendo de aquí, llegamos a diez matrices del tipo de las matrices de Pauli en las que en una de las filas y una de las columnas hay ceros:

$$\begin{aligned} t_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ u_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & u_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & u_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ v_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & v_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & v_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (136.8)$$

De estas matrices solo ocho son independientes: $t_3 + u_3 = v_3$. Para las λ_i elegiremos

* Recordaremos que para los espinores ordinarios (tridimensionales) $\delta R = (1/2)\delta\theta \cdot \sigma$, donde $\delta\theta$ es el ángulo de rotación del sistema de coordenadas.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= t_1, & \lambda_2 &= t_2, & \lambda_3 &= t_3, \\ \lambda_4 &= v_1, & \lambda_5 &= v_2, & \lambda_6 &= u_1, & \lambda_7 &= u_2, \\ \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(u_3 + v_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (136.9)$$

Todas estas matrices están normalizadas de modo que

$$\text{Tr } \lambda_i \lambda_k = 2\delta_{ik}, \quad (136.10)$$

y la suma de sus cuadrados es proporcional a la matriz unidad:

$$\sum_{i=1}^8 \lambda_i^2 = \frac{16}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (136.11)$$

Las reglas de commutación de las matrices λ_i son del tipo

$$[\lambda_i, \lambda_k]_- = 2i \sum_{l=1}^8 f_{ikl} \lambda_l, \quad (136.12)$$

donde, en virtud de (136.10),

$$f_{ikl} = \frac{1}{4i} \text{Tr} ([\lambda_i, \lambda_k]_- \lambda_l). \quad (136.13)$$

De aquí se sigue que los coeficientes f_{ikl} son antisimétricos respecto de sus tres índices. Diferentes de cero son

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2},$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

y los demás que se obtienen a partir de éstos por permutaciones de los índices con los correspondientes cambios de signo *.

La simetría mutua de los tres quarks se puede ilustrar intuitivamente de manera gráfica representándolos por tres puntos colocados en los vértices de un triángulo equilátero (fig. 25). Ésta es la única distribución en la que tres puntos son equivalentes.

* En la teoría matemática de los grupos irreducibles, las matrices que determinan las transformaciones infinitesimales del grupo se llaman generadores del mismo y el álgebra de estas matrices recibe el nombre de álgebra de Lie. La base del álgebra de Lie la constituyen las reglas de commutación de los generadores; mediante ellas se determina la estructura del grupo.

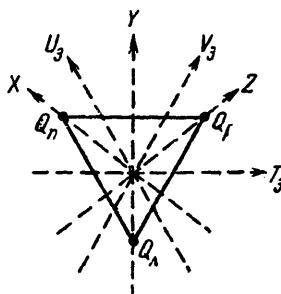


Fig. 25.

tes. La posición de cada uno de ellos en el plano se determina por dos coordenadas, a las que corresponden dos números cuánticos independientes que caracterizan las partículas. El origen natural de coordenadas para este diagrama es el centro del triángulo, y los ejes naturales, los tres ejes que pasan por los vértices del mismo (X , Y , Z en la fig. 25) y los tres ejes paralelos a sus lados (T_3 , U_3 , V_3), siendo las unidades de longitud naturales a lo largo de estos ejes las alturas y los lados del triángulo, respectivamente. Las coordenadas de los puntos (números cuánticos de los quarks) pueden darse referidas a cualquier par de estos ejes y cabe expresar los valores de los restantes números en función de aquellas dos. Las notaciones para designar los ejes en la fig. 25 se han elegido de manera que se cumplan las condiciones (136.1-2), como es fácil convencerse, por ejemplo, escribiendo las coordenadas de los puntos respecto de los ejes Y , T_3 o Z , U_3 :

$$\begin{array}{lll} Q_p & Q_n & Q_\Delta \\ (Y, T_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{2}{3}, 0\right) \\ (Z, U_3) = \left(\frac{2}{3}, 0\right) & \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) \end{array} \quad (136.14)$$

Hay que hacer observar que la carga y la hipercarga de los quarks con esto resultan ser números fraccionarios *.

A dos números cuánticos de los quarks independientes deben asociarse operadores que son matrices diagonales. Entre las matrices λ_i , son diagonales λ_3 y λ_8 . Comparándolas con los números cuánticos (136.14), se encuentra que

* La construcción geométrica de la figura 25, claro está, no puede por sí sola constituir una base suficiente para la identificación de las coordenadas de los puntos con los números cuánticos físicos de los quarks. Estos fundamentos los proporciona, en realidad, únicamente la concordancia con las propiedades de las partículas que realmente existen (§ 137).

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8, \quad T_3 = \frac{1}{2} \lambda_3, \quad Z = \frac{1}{2} \left(\lambda_3 + \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}} \right). \quad (136.15)$$

Entre las transformaciones del grupo $SU(3)$ se tiene el subgrupo $SU(2)$ de las transformaciones que afectan solamente a dos componentes del superespino, ψ^1 y ψ^2 . Respecto de este subgrupo (que se puede llamar isogrupo- t), los quarks Q_p , Q_n constituyen un isodoblete ($T = 1/2$), y Q_Λ , un isosinglete. En cambio, respecto del subgrupo de transformaciones que afectan solamente a ψ^2 y ψ^3 (isogrupo- u) forman un isodoblete ($U = 1/2$) el par Q_n , Q_Λ , y Q_p , un isosinglete. Junto con estos dos, aparece automáticamente un tercer subgrupo análogo (el isogrupo- v), en el cual Q_p y Q_Λ forman un par isodoblete. La terna de matrices (t_1, t_2, t_3) , (u_1, u_2, u_3) y (v_1, v_2, v_3) constituyen los operadores de los isospins t , u y v , respectivamente.

Las funciones de onda conjugado-complejas de las funciones (136.3) deben considerarse como superposiciones de estados de antiquarks. Si dicha superposición se escribe en la forma

$$\psi_1 |\bar{Q}_p\rangle + \psi_2 |\bar{Q}_n\rangle + \psi_3 |\bar{Q}_\Lambda\rangle, \quad (136.16)$$

las magnitudes ψ_a se transforman, en consecuencia, como ψ^{a*} . Las tres magnitudes (ψ_1, ψ_2, ψ_3) forman un superespino covariante [en contraposición con el superespino contravariante (136.4)]. Teniendo en cuenta el carácter hermítico de las matrices λ_i , a partir de (136.7) se encuentra que, en una transformación infinitesimal,

$$\delta\psi_a = -\frac{i}{2} \sum_{i=1}^8 \delta\alpha_i (\lambda_i)_a^b \psi_b. \quad (136.17)$$

El hecho de que con las componentes ψ_a es imposible construir combinaciones lineales que se transformen como ψ^a es esencial. Por ello, en el grupo $SU(3)$ los superespinores contra- y covariantes son dos magnitudes de tipos diferentes. En esto precisamente se distinguen de los espinores ordinarios, para los que las componentes contra- y covariantes están ligadas entre sí por relaciones lineales $\psi_\alpha = e_{\alpha\beta} \psi^\beta$ (donde $e_{\alpha\beta}$ es el símbolo antisimétrico unidad, $e_{12} = 1$).

El origen de esta diferencia estriba en lo que sigue. En el grupo $SU(2)$ la forma cuadrática $\psi^\alpha \varphi^{\alpha*}$ (ψ , φ son dos espinores) es invariante en virtud del carácter unitario de las transformaciones del grupo, y la forma cuadrática $\psi^\alpha \varphi^\beta e_{\alpha\beta}$ lo es en virtud, de su naturaleza unimodular. La comparación de ambos invariantes prueba precisamente que los $\varphi^{\alpha*}$ se transforman como los $e_{\alpha\beta} \varphi^\beta$. En cambio, en el grupo $SU(3)$ la unitariedad se expresa por la invariancia de la forma cuadrática $\psi^\alpha \varphi^{\alpha*}$ (ψ , φ son dos superespinores), y el carácter unimodular, por la invariancia de la forma cúbica $e_{abc} \psi^a \varphi^b \chi^c$ ($e_{abc} = e^{abc}$ es el símbolo antisimétrico unidad, $e_{123} = 1$). Vemos, por ello, que los $\varphi^{\alpha*}$ se transforman como combinaciones $e_{abc} \varphi^b \chi^c$ cuadráticas (y no como lineales).

§ 137. Supermultipletes

La función de onda de un sistema constituido por p quarks y q antiquarks es un superespinor de orden superior con p superíndices y q subíndices:

$$\psi_{b_1 b_2 \dots b_q}^{a_1 a_2 \dots a_p}.$$

Se trata de magnitudes que se transforman como productos de p componentes de un superespinor contravariante y q componentes de un superespinor covariante de primer orden. Dada la no equivalencia de los superíndices y subíndices, carece de sentido sumar su número, de modo que el orden de un superespinor debe expresarse por el par de números p, q .

El orden de un superespinor puede disminuirse mediante dos procedimientos no equivalentes: por contracción de un superíndice y un subíndice (es decir, multiplicándolo por el símbolo simétrico unidad δ_a^b) y por antisimetrización respecto de un par de superíndices (es decir, multiplicando por $e_{a_1 a_2 b}$ o por $e^{b_1 b_2 a}$). Así,

$$\begin{aligned}\psi_{b_1}^{a_1 a_2} \delta_{a_1}^{b_1} &= \psi^{a_2}, \\ \psi^{a_1 a_2 a_3} e_{a_1 a_2 b} &= \psi_b^{a_3}, \quad \psi_{b_1 b_2 b_3} e^{b_1 b_2 a} = \psi_a^{b_3}.\end{aligned}$$

El orden de un superespinor no se puede disminuir, por lo tanto, si es simétrico respecto de todos sus superíndices y de todos sus subíndices (por separado) y si son iguales a cero sus trazas respecto de un par cualquiera formado por un superíndice y un subíndice. Tales superespinores se llaman *irreducibles*; sus componentes proporcionan una realización de las representaciones irreducibles del grupo $SU(3)$. El número de componentes independientes de un superespinor irreducible de orden $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ es igual a *

$$N_{pq} = \frac{1}{2} (p+1)(q+1)(p+q+2). \quad (137.1)$$

* Designemos por p_1, p_2, p_3 (o por q_1, q_2, q_3) el número de unos, doses y treses entre los p superíndices (o los q subíndices). Dado que $p_1 + p_2 + p_3 = p$, para p_2 dado el número p_1 puede tomar $p - p_2 + 1$ valores entre 0 y $p - p_2$. Por lo tanto,

$$N_{p0} = \sum_{p_1=0}^p (p - p_2 + 1) = \frac{1}{2} (p+1)(p+2).$$

Si no se exigiera que las trazas de un superespinor sean iguales a cero, N_{pq} vendría dado por el producto $N_{p0} N_{0q}$. La condición de que la traza sea nula equivale a la igualdad a cero de un superespinor de orden $(p-1, q-1)$. En consecuencia,

$$N_{pq} = N_{p0} N_{0q} - N_{p-1, 0} N_{0, q-1};$$

de donde resulta (137.1).

Si el estado de la partícula se representa por un superespinor de orden $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ existen N_{pq} estados mutuamente degenerados que constituyen un *supermultiplete* de partículas. Dentro de los límites de la simetría considerada, todos estos estados son equivalentes y no hay fundamento alguno para destacar uno determinado, cualquiera, del conjunto. Sin embargo, al «conectar» las interacciones que violan la simetría, pasa a ser esencial la clasificación de las componentes del supermultiplete de acuerdo con los valores de los números cuánticos que caracterizan a estas interacciones. En este sentido, un supermultiplete puede descomponerse en un cierto número de isomultipletes cuyas componentes poseen determinados valores de los números cuánticos Y, T, T_3 .

Según (136.14), a las componentes de un superespinor contravariante de primer orden corresponden los siguientes valores de los números Y y T_3 :

$$(Y, T_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) \quad \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \right) \quad \left(-\frac{2}{3}, 0 \right)$$

Los números cuánticos de los antiquarks son opuestos a los números cuánticos de los quarks, de modo que para las componentes de un superespinor covariante se tiene

$$(Y, T_3) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \right) \quad \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) \quad \left(\frac{2}{3}, 0 \right)$$

De aquí se sigue que a las componentes de un superespinor de orden $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ corresponden los valores

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{p_1 - p_2}{2} - \frac{q_1 - q_2}{2}, \\ Y &= \frac{p_1 + p_2 - 2p_3}{3} - \frac{q_1 + q_2 - 2q_3}{3} = \frac{p - q}{3} - (p_3 - q_3), \end{aligned} \tag{137.2}$$

y con ellos también

$$Z = \frac{Y}{2} + T_3 = -\frac{p - q}{3} + p_1 - q_1. \tag{137.3}$$

Todas las partículas que hoy conocemos tienen valores enteros de las cargas Y y Z . Pueden formar parte solamente de supermultipletes para los que

$$p - q = 3n, \tag{137.4}$$

donde n es un número entero. Los correspondientes superespinores se llaman *supertensores*, en contraposición a los superespinores propiamente dichos, para los cuales $p - q \neq 3n$ *.

Las magnitudes $\psi_b^a (\psi_a^a = 0)$ forman el supertensor de orden más bajo. Tiene ocho componentes independientes, y en el álgebra de los superespinores representa el papel de un vector [el número de componentes coincide con el de parámetros que determinan las transformaciones del grupo $SU(3)$]. Las ocho componentes del supervector A_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) están ligadas con las componentes ψ_b^a ($a, b = 1, 2, 3$) por las igualdades **

$$\psi_b^a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 A_i (\lambda_i)_b^a, \quad A_i = \text{Tr} (\psi \lambda_i) \equiv \psi_b^a (\lambda_i)_a^b. \quad (137.5)$$

En forma explícita, esto da

$$\psi_b^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b \rightarrow \\ \downarrow \\ A_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_8 & A_1 - iA_2 & A_4 - iA_5 \\ A_1 + iA_2 & -A_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_8 & A_6 - iA_7 \\ A_4 + iA_5 & A_6 + iA_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}} A_8 \end{pmatrix}. \quad (137.6)$$

Examinemos más detalladamente la estructura de los dos primeros supermultipletes: ψ_b^a (8 componentes, *superoctete*) y ψ^{abc} (10 componentes, *superdecuplete*).

Atribuyendo a las componentes ψ_b^a los valores Y, T_3 según (137.2) y representando estos pares de valores por puntos en un plano, obtendremos el diagrama de octete representado en la figura 26 a; el doble circulito en el origen de coordenadas significa que este par de valores Y, T_3 se encuentra dos veces.

Los pares Y, T_3 se distribuyen en grupos que forman isomultipletes con valores determinados de Y y T ; en definitiva se obtiene el diagrama de la figura 26 b, en el que cada punto representa un isomultiple. De esta forma el superoctete contiene

* Esta terminología es análoga a la adoptada en el álgebra espinorial ordinaria y tiene el siguiente sentido matemático. Entre las transformaciones del grupo $SU(2)$ figuran las multiplicaciones por $U = \sqrt[3]{1} = \pm 1$. Los espinores de orden impar cambian de signo en la transformación $U = -1$, mientras que los tensores (espinores de orden par) se conservan invariables. Análogamente, en el grupo $SU(3)$ figuran las transformaciones $U = \sqrt[3]{1} = 1, e^{\pm 2\pi i/3}$. Los supertensores, en contraste con los superespinores propiamente dichos, no cambian en las transformaciones $U = e^{\pm 2\pi i/3}$.

** Esta definición es análoga a la que establece la relación entre las componentes de un espinor ordinario de segundo orden ψ y un vector tridimensional A , relación que se puede representar en la forma

$$\psi_\beta^\alpha = \frac{1}{2} A \cdot \sigma_\beta^\alpha, \quad A = \psi_\beta^\alpha \cdot \sigma_\alpha^\beta.$$

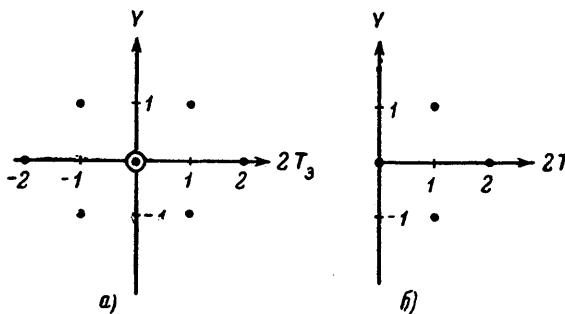


Fig. 26.

un isosinglete, un isotriplete y dos isodobletes. A ellos corresponden las siguientes componentes ψ_a^b :

	Y	T	
$\psi_1^1, \psi_2^2, \psi_1^2, \psi_2^1$	0	0 y 1	
ψ_3^1, ψ_3^2	1	$1/2$	
ψ_1^3, ψ_2^3	-1	$1/2$	

(137.7)

En la primera fila se pueden separar las combinaciones que corresponden a valores determinados de T . La componente $-\psi_3^3 = \psi_1^1 + \psi_2^2$ es un isoescalar, por lo que le corresponde $T = 0$. A la combinación ortogonal a ésta $\psi_1^1 - \psi_2^2$, corresponde el estado con $T = 1$, $T_3 = 0$. Así, pues, al isotriplete y al isosinglete corresponden las componentes

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1^1 - \psi_2^2), \quad \psi_1^2, \quad \psi_2^1 \quad (T = 1),$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}(\psi_1^1 + \psi_2^2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\psi_1^1 + \psi_2^2 - 2\psi_3^3) \quad (T = 0). \quad (137.8)$$

Constituyen superoctetes, al parecer, los mesones indicados en (134.2) y los bariones que encontramos en (134.4). El octete bariónico se representa por su superespino (el superíndice indica la fila, el subíndice, la columna)

$$\psi_b^a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda \end{pmatrix}. \quad (137.9)$$

Hay que entender esta tabla en el sentido de que para conseguir el ψ_b^a , normalizado, para una partícula cualquiera hay que substituir su símbolo por la unidad, y todos los demás, por ceros [cf. más adelante (138.7)].

El octete de antibariones se representa por el superespino ψ_b^a , conjugado-complejo del superespino (137.9):

$$\bar{\psi}_b^a = \psi_a^{b*}. \quad (137.10)$$

Para el octete mesónico,

$$\psi_b^a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \eta \end{pmatrix}. \quad (137.11)$$

Este superespino es hermítico ($\psi_a^{b*} = \psi_b^a$): las partículas figuran en él junto con sus antipartículas *.

Finalmente, consideremos el supermultiplete que se representa por los superespinores irreducibles ψ^{abc} ; contiene diez componentes (decuplete). En la figura 27 hemos representado sus diagramas tomando como antes Y, T_3 y Y, T . La correspondencia entre las componentes ψ^{abc} y los valores de los números cuánticos es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} | YTT_3 \rangle & | YTT_3 \rangle \\ \Psi^{333}(1) | -200 \rangle & \left| \begin{array}{l} \Psi^{111}(1) | 1^3/2 \ -^3/2 \rangle \\ \Psi^{112}(3) | 1^3/2 \ -^1/2 \rangle \\ \Psi^{122}(3) | 1^3/2 \ ^1/2 \rangle \\ \Psi^{222}(1) | 1^3/2 \ ^3/2 \rangle \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \Psi^{331}(3) | -1^{1/2} \ -^{1/2} \rangle \\ \Psi^{332}(3) | -1^{1/2} \ ^{1/2} \rangle \\ \Psi^{311}(3) | 01 -1 \rangle \\ \Psi^{312}(6) | 010 \rangle \\ \Psi^{322}(3) | 011 \rangle \end{array} \right. & \end{array} \quad (137.12)$$

* Los bariones se distinguen de los mesones por el valor del número bariónico B . Este número cuántico es extraño al grupo considerado de simetría, y debe tenerse aquí en cuenta atribuyendo a los quarks el valor determinado $B = 1/3$ como característica complementaria (para el antiquark es $B = -1/3$). Los mesones están «constituidos» por un quark y un antiquark (un superíndice y un subíndice en ψ_b^a). En cuanto a los bariones, hay que considerarlos como «constituidos» por tres quarks, a lo que corresponde un superespino $\epsilon^{abc}\psi_b^a$ con tres superíndices.

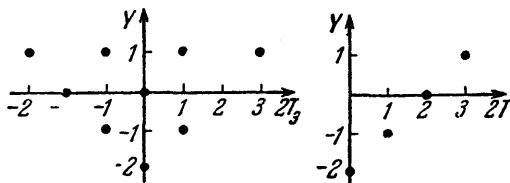


Fig. 27.

(entre paréntesis, a continuación del símbolo ψ^{abc} , se indica el número de componentes idénticas que se obtienen por permutación de los índices a, b, c). Los símbolos $|YTT_3\rangle$ deben entenderse como componentes correspondientes de los isospinores *.

PROBLEMA

Descomponer en partes irreducibles los productos de dos superespinores irreducibles $\psi_a^b\varphi_c^d$, $\psi_{abc}\varphi_{def}$.

Solución. Simetrizando el producto $\psi_a^b\varphi_c^d$ respecto de los pares de índices ac y bd e igualando a cero su traza, obtendremos un superespino irreducible de orden $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ (el símbolo inferior en la expresión del orden se interpreta como símbolo del superespino irreducible). Subiendo el par inferior de índices o bajando el par superior, es decir, formando $e^{abc}\psi_a^b\varphi_c^d$ y $e_{ade}\psi_b^d\varphi_e^c$ y simetrizando respecto de abc , obtendremos los superespinores $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Contrayendo respecto de un par de índices de las dos maneras posibles ($\psi_a^b\varphi_b^d$ y $\psi_a^b\varphi_c^a$), simetrizando respecto del segundo par e igualando a cero la traza, obtendremos dos superespinores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Finalmente, contrayendo respecto de los dos pares de índices, resulta el superescalar $\psi_a^b\varphi_b^a$. Estos resultados se pueden escribir en la forma

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De manera análoga se obtiene

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

§ 138. Operadores superespinoriales

La aplicación de la simetría unitaria para establecer las relaciones entre las características físicas de las partículas y entre las probabilidades de las diferentes reacciones, se reduce al cálculo de los elementos de matriz de operadores que poseen un determinado carácter superespinorial.

* Se conoce un decuplete de bariones con spin 3/2. De él forman parte nueve partículas no estables (resonancias) y también el barión metaestable $\bar{\Omega}^-$ (isosinglete).

Consideremos los operadores F_i ($i = 1, 2, \dots, 8$), que por sus propiedades de transformación se comportan como las componentes de un supervector. Su acción sobre los índices superespinoriales de la función de onda se reduce a multiplicar por la correspondiente componente del superespín — por la matriz λ_i ^{*}. En consecuencia, la forma general de un operador vectorial que actúa sobre la función de onda superespinorial ψ de orden $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$, es

$$F_i = c_1 \Lambda_i + c_2 \bar{\Lambda}_i, \quad \Lambda_i = \sum_{r=1}^p \lambda_i^{(r)}, \quad \bar{\Lambda}_i = \sum_{r=1}^q \bar{\lambda}_i^{(r)}, \quad (138.1)$$

donde por λ_i y $\bar{\lambda}_i$ se han designado exactamente las mismas matrices, pero en tanto actúan, respectivamente, sobre los superíndices y los subíndices de la función ψ :

$$(\lambda_i \psi)^a = (\lambda_i)_b^a \psi^b, \quad (\bar{\lambda}_i \psi)_a = (\bar{\lambda}_i)_a^b \psi_b. \quad (138.2)$$

El índice r indica el número del índice sobre el que actúa la matriz en cuestión. Recordemos que los superíndices y subíndices superespinoriales corresponden a propiedades de transformación esencialmente distintas; por esto precisamente los sumandos Λ_i y $\bar{\Lambda}_i$ deben figurar en (138.1), por lo general, con distintos coeficientes independientes.

A las componentes del supervector cabe asociar, según (137.6), las componentes de un superespín mixto de segundo orden. De acuerdo con esto, en vez de los operadores F_i es posible introducir los operadores F_b^a ($a, b = 1, 2, 3$; $F_a^a = 0$). Su expresión general (138.1) toma la forma

$$F_b^a = c_1 \Lambda_b^a + c_2 \bar{\Lambda}_b^a, \quad (138.3)$$

$$\Lambda_b^a = \sum_{r=1}^p \lambda_b^{a(r)}, \quad \bar{\Lambda}_b^a = \sum_{r=1}^q \bar{\lambda}_b^{a(r)}, \quad (138.4)$$

donde las matrices λ_b^a vienen dadas en función de λ_i de acuerdo con (137.6). En forma explícita se tiene:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_1^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_2^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

* De manera análoga a como los operadores vectoriales ordinarios en su acción sobre los índices espinoriales de la función de onda se expresan mediante las matrices de Pauli σ .

$$\lambda_1^1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2^2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3^3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (138.5)$$

Obsérvese que estas matrices son reales y que λ_a^b es la transpuesta de λ_b^a *:

$$(\lambda_a^b)_{a'}^{b'} = (\lambda_b^a)_{b'}^{a'}.$$

Como ejemplo, consideremos el desdoblamiento de las masas en un supermultiplete provocado por la parte «moderada» de las interacciones fuertes que viola la simetría unitaria (*M. Gell-Mann*, 1961; *S. Okubo*, 1962).

Aunque no posee la simetría completa $SU(3)$, esta interacción, sin embargo, admite la simetría isotópica, de la que gozan absolutamente todas las interacciones fuertes. Por consiguiente, el operador que determina el desdoblamiento de masas debe ser un isoescalar. El isoescalar más simple que, a la vez, no es un escalar respecto de todo el grupo $SU(3)$ resulta ser la componente³ de un superespínor. Es natural admitir que precisamente éste será el carácter del operador de desdoblamiento de masas (lo designaremos por m_3^3). Los isomultipletes entonces no se desdoblan; su desdoblamiento ulterior debe atribuirse ya a las interacciones electromagnéticas.

Las correcciones buscadas a las masas de las componentes del superoctete (valores medios del operador m_3^3) en su forma más general vienen dadas por expresiones del tipo

$$\Delta m = c_1 \bar{\Psi}_b^c (\lambda_3^3)_a^b \Psi_c^a + c_2 \bar{\Psi}_c^b (\lambda_3^3)_b^a \Psi_a^c \quad (138.6)$$

($\psi_c^b = \psi_b^{c*}$). Al utilizar esta fórmula en los cálculos, hay que considerar en (137.9) (octete bariónico) o en (137.11) (octete mesónico) sucesivamente como diferentes de cero tan sólo aquellas componentes de ψ_a^b que corresponden a una de las partículas. Así, por ejemplo,

$$(\psi_b^a)_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\psi_b^a)_\Lambda = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (\psi_b^a)_{\Sigma^-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (138.7)$$

De esta manera obtendremos para las masas de las partículas en el octete bariónico

* ¡No se confundan los índices a, b que enumeran las matrices con los índices a', b' que designan los elementos de las mismas!

$$\begin{aligned} m(\Xi) &= m_0 + \frac{2c_1 - c_2}{3}, & m(N) &= m_0 + \frac{2c_2 - c_1}{3}, \\ m(\Sigma) &= m_0 - \frac{c_1 + c_2}{3}, & m(\Lambda) &= m_0 + \frac{c_1 + c_2}{2} \end{aligned}$$

(m_0 es la masa del octete no perturbado). Eliminando las constantes m_0 , c_1 , c_2 , obtendremos la relación

$$\frac{1}{2}[m(\Xi) + m(N)] = \frac{1}{4}[m(\Sigma) + 3m(\Lambda)]. \quad (138.8)$$

Para el octete mesónico $\psi_b^a = \psi_a^b$ y los productos en los dos términos de (138.6) coinciden. Haciendo $c_1 = c_2 = c$, resulta

$$m(K) = m_0 + \frac{c}{3}, \quad m(\pi) = m_0 - \frac{2c}{3}, \quad m(\eta) = m_0 + \frac{2c}{3}.$$

Eliminando c y m_0 , obtendremos *

$$m(K) = \frac{1}{4}[m(\pi) + 3m(\eta)]. \quad (138.9)$$

Para el decuplete, las funciones de onda ψ^{abc} constituyen un superespinor simétrico con únicamente superíndices. Por lo tanto, en (138.3) subsiste sólo un término y la corrección a la masa viene dada por la expresión

$$\Delta m = 3c\bar{\Psi}_{abd}(\lambda_3^3)_c^d \psi^{abc}$$

(donde $\bar{\Psi}_{abc} = \psi^{abc*}$). Mediante (137.12), de aquí se sigue para las masas $m(T)$ de los isomultipletes que forman parte del decuplete:

$$\begin{aligned} m(0) &= m_0 + 2c, & m(1/2) &= m_0 + c, \\ m(1) &= m_0, & m(3/2) &= m_0 - c. \end{aligned}$$

Eliminando m_0 y c , se obtiene

$$m(0) - m(1/2) = m(1/2) - m(1) = m(1) - m(3/2). \quad (138.10)$$

* La mejor concordancia con los datos experimentales para el octete mesónico se obtiene si en esta fórmula se substituye m por m^2 , es decir, si se considera que los valores medios del operador m^2 determinan las variaciones de los cuadrados de las masas. Como posible causa de ello cabe indicar que las magnitudes físicas (amplitudes de dispersión) son funciones del invariante $p^2 = m^2$; en consecuencia, la magnitud más natural resulta ser m^2 y no m . Para el octete bariónico se tiene $\Delta m \ll m_0$ y la diferencia entre ambas interpretaciones carece de importancia.

CAPÍTULO 15

ELECTRODINÁMICA DE LOS HADRONES

§ 139. Factores de forma electromagnéticos de los hadrones

La construcción de una teoría electrodinámica exhaustiva de los hadrones es imposible dentro del marco de la teoría actual. Es claro que no cabe establecer las ecuaciones que determinan las interacciones electromagnéticas de los hadrones sin tener en cuenta las interacciones fuertes, considerablemente más intensas. Ahora bien, el hecho de que no exista una teoría de estas últimas no permite establecer la forma explícita de la corriente hadrónica mediante la cual deben describirse las interacciones en la electrodinámica cuántica. En estas condiciones, hay que limitarse a introducir la corriente hadrónica como magnitud fenomenológica, cuya estructura se establece partiendo solamente de condiciones cinemáticas generales que no están ligadas con ningún tipo particular de hipótesis acerca de la dinámica de las interacciones. En cuanto al operador de interacción electromagnética, su forma será la misma que antes

$$-e(JA), \quad (139.1)$$

donde ahora la corriente se ha designado con la mayúscula J (para diferenciarla de la corriente electrónica j). Puesto que el orden de magnitud de esta interacción viene dado por la misma carga elemental e , es posible seguir aplicando los métodos de la teoría de perturbaciones.

Establezcamos la forma de la corriente de transición entre dos estados del movimiento libre de un hadrón (no acompañada de transmutación del propio hadrón). Esta corriente forma parte del gráfico de «tres cabos»



que a su vez puede formar parte de cualquier otro diagrama más complicado (por ejemplo, del correspondiente a la dispersión elástica de un electrón por un hadrón). La línea de trazos en el diagrama (139.2) representa un fotón virtual; esta línea no puede corresponder a un fotón real, puesto que una partícula libre es incapaz de absorber (o emitir) un fotón de tal naturaleza. Además,

$$q^2 = (p_2 - p_1)^2 < 0.$$

Consideremos primero un hadrón de spin 0. Sean u_1 y u_2 las amplitudes de onda de los estados inicial y final del hadrón, en los que posee 4-impulsos p_1 y p_2 ; para una partícula de spin 0 estas amplitudes son escalares (o pseudoescalares) *. La corriente hadrónica de transición J_{fi} entre estos dos estados debe ser bilineal respecto de u_1 y u_2^* . La escribiremos en la forma

$$J_{fi} = u_2^* \Gamma u_1, \quad (139.3)$$

donde el 4-vector Γ es un operador vértice desconocido [el circulito en el diagrama (139.2)]. Si se hace $u_1 = u_2 = 1$, se tendrá simplemente $J_{fi} = \Gamma$.

La propiedad general de la corriente en electrodinámica, vinculada con la invariancia de contraste de la teoría, es su conservación. En la representación de impulsos, ésta se expresa por la ortogonalidad de la corriente de transición respecto del 4-impulso del fotón $q = p_2 - p_1$:

$$q J_{fi} = 0. \quad (139.4)$$

Esto significa en el presente caso que Γ debe ser de la forma

$$\Gamma = P F(q^2), \quad (139.5)$$

donde $P = p_1 + p_2$ y $F(q^2)$ es una función escalar de la única variable independiente invariante, el cuadrado q^2 . Dado que el hadrón no cambia de especie en la transición, se tendrá $p_1^2 = p_2^2 = M^2$ (M es la masa del hadrón) y, por consiguiente, $Pq = 0$.

Los elementos de matriz (139.3) con Γ dado por (139.5) (y con ellos el propio operador J) son 4-vectores en sentido estricto. Por ello, el operador de interacción (139.1) es un escalar. Así, pues, la interacción electromagnética de los hadrones de spin 0 resulta ser invariante- P automáticamente. Además, es también invariante- T . En efecto, la inversión del sentido del tiempo, en primer lugar, permuta los 4-impulsos inicial y final; con ello no varía la suma $P = p_1 + p_2$. En segundo lugar, la inversión del tiempo cambia el signo de las componentes espaciales de los 4-impulsos sin modificar sus componentes temporales; pero precisamente de la misma manera

* Recordaremos que una onda plana se escribe en la forma $\psi = \frac{u}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-ipx}$. A la normalización relativa a una partícula por unidad de volumen corresponde (para partículas de spin 0) la normalización del escalar de acuerdo con $u^*u = 1$; además, se puede hacer en este caso simplemente $u = 1$ (§ 10). Más adelante definiremos la corriente de transición respecto de las amplitudes u_1 , u_2 de acuerdo con las notaciones adoptadas en el § 65.

se transforman las componentes del 4-potencial A , de modo que el producto JA no varía.

La función invariante $F(q^2)$ se llama *factor de forma electromagnético* del hadrón. Dentro de los límites de la teoría fenomenológica, no es posible determinarlo, claro está. Sin embargo, cabe afirmar que esta función es real (en la región considerada $q^2 < 0$). A esta conclusión se llega por las mismas consideraciones que se aplicaron en el § 113 a los factores de forma del electrón: cuando $q^2 < 0$, no existen nunca estados intermedios que podrían figurar en el segundo miembro de la relación de unitariedad; por lo tanto, la matriz M_{fi} y con ella también J_{fi} son hermíticas.

Cuando $q = 0$ los estados inicial y final coinciden, con lo cual J_{fi} pasa a ser elemento de matriz diagonal. En particular, $e(J^0)_{ii}/2\varepsilon_i = eF(0)$ es la densidad de carga, que coincide con la carga total de la partícula (la normalización corresponde a una partícula por unidad de volumen!).

Para una partícula eléctricamente neutra es $F(0) = 0$. Sin embargo, hay que subrayar que esto en modo alguno significa, sin más, que la partícula sea realmente neutra. Si la partícula lo es y posee una determinada paridad de carga, se tendrá $F(q^2) \equiv 0$ para todos los q^2 : dado que el operador corriente es impar respecto de la carga (§ 13), sus elementos de matriz entre dos estados de un mismo hadrón son iguales a cero *.

Pasemos a los hadrones cuyo spin es $1/2$. En este caso las amplitudes de onda u_1, u_2 son bispinores y la corriente hadrónica tiene la forma

$$J_{fi} = \bar{u}_2 \Gamma u_1. \quad (139.6)$$

A partir de combinaciones bilineales de \bar{u}_2 y u_1 y de los 4-vectores p_1, p_2 es posible construir tanto 4-vectores en sentido estricto, como magnitudes pseudovectoriales [que satisfacen la condición (139.4)]. Por ello, la condición de que la interacción posea la invariancia- P no queda satisfecha automáticamente y debe ser establecida con carácter complementario**. Como se demostró en el § 113, en estas condiciones el operador vértice contiene dos factores de forma reales (para $q^2 < 0$) independientes. Lo escribiremos ahora así:

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= 2M(F_e - F_m) \frac{P^\mu}{P^2} + F_m \gamma^\mu = 2M \left(F_e - \frac{q^2}{4M^2} F_m \right) \frac{P^\mu}{P^2} - \frac{F_m}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu = \\ &= (4M^2 F_e - q^2 F_m) \frac{\gamma^\mu}{P^2} + \frac{2M}{P^2} (F_e - F_m) \sigma^{\mu\nu} q_\nu, \end{aligned} \quad (139.7)$$

* Esto no significa, naturalmente, que un tal hadrón no interactúe en absoluto con el campo electromagnético. El producto de dos operadores corriente, $J(x) J(x')$, tiene ya paridad de carga par y sus elementos de matriz son diferentes de cero para las transiciones entre estados cuya paridad de carga es la misma. En consecuencia, un hadrón realmente neutro puede dispersar un fotón y también emitir al mismo tiempo dos fotones, es decir, participar en procesos de orden superior respecto de α .

** Los datos experimentales existentes no revelan violaciones de la conservación de la paridad espacial en las interacciones electromagnéticas de los hadrones.

donde $F_e(q^2)$ y $F_m(q^2)$ son factores de forma invariantes (M es la masa del hadrón); es fácil comprobar la equivalencia de las tres expresiones escritas sin más que tener en cuenta las igualdades $P^2 + q^2 = 4M^2$ y (113.5) *

Los factores de forma electromagnéticos pertenecen a la categoría de las amplitudes invariantes, concepto éste que se introdujo en el § 71. Cabe considerarlos como amplitudes «de reacción» que representan (en su canal de aniquilación) la desintegración de un fotón virtual en un hadrón y un antihadrón. Un fotón virtual es una «partícula» de spin 1. Es fácil llegar a la conclusión de que su desintegración en dos partículas de spin $1/2$ debe describirse por dos amplitudes independientes, teniendo en cuenta sus correspondientes amplitudes helicoidales $\langle \lambda_b \lambda_c | S^J | \lambda_a \rangle$ (véase § 70). En efecto, en virtud de la invariancia- P , los cuatro elementos de la matriz- S distintos de cero son iguales entre sí dos a dos:

$$\begin{aligned}\langle 1/2 \ 1/2 | S^1 | 1 \rangle &= \langle -1/2 \ -1/2 | S^1 | -1 \rangle, \\ \langle 1/2 \ -1/2 | S^1 | 0 \rangle &= \langle -1/2 \ 1/2 | S^1 | 0 \rangle.\end{aligned}$$

El hecho de imponer la condición de invariancia- T (o de invariancia- C en el canal de aniquilación) no añade nuevos vínculos entre estos elementos. Con esta circunstancia está ligado el hecho de que la interacción descrita por el operador vértice (139.7) resulta ser también invariante- T automáticamente (esta situación, sin embargo, no se da ya para partículas de spin más elevado).

Cuando $q \rightarrow 0$ los términos de orden cero y primero (respecto de q) en (139.7) son:

$$\Gamma^\mu = F_e(0) \gamma^\mu - \frac{1}{2M} [F_m(0) - F_e(0)] \sigma^{\mu\nu} q_\nu. \quad (139.8)$$

Está claro, por esto (véase § 113), que $F_e(0)$ es la carga eléctrica de la partícula (tomando e como unidad) y que $F_m(0) - F_e(0)$ es su momento magnético anómalo (tomando como unidad $e/2M$) **.

Hasta aquí hemos utilizado solamente los factores de forma en el espacio de impulsos. Esto, naturalmente, basta para describir los fenómenos observados. Sin embargo, con fines puramente ilustrativos cabe dar a los factores de forma una

* Que la definición de los factores de forma según (139.7) (R. Sachs, 1962) es adecuada, se pone de manifiesto más adelante. En la literatura se utilizan también los factores de forma F_1, F_2 , definidos por analogía con f y g en (113.6), es decir, de acuerdo con

$$\Gamma^\mu = F_1 \gamma^\mu - \frac{F_2}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu.$$

Éstos están ligados con F_e, F_m por las relaciones

$$F_e = F_1 + F_2 \frac{q^2}{4M^2}, \quad F_m = F_1 + F_2.$$

** Así, para el protón $F_e = 1$, $F_m(0) - F_e(0) = 1,793$. Para el neutrón $F_e(0) = 0$, $F_m(0) = -1^{013}$ (el momento magnético es «anómalo» en su totalidad).

interpretación algo más intuitiva considerándolos como transformadas de Fourier de ciertas funciones de las coordenadas.

Para ello conviene elegir un sistema de referencia en el que $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ (el llamado *sistema de Breit*); esto es siempre posible, puesto que $P^2 > 4M^2 > 0$. En dicho sistema se tiene $\epsilon_1 = \epsilon_2 \equiv \epsilon$, de modo que $P^0 = 2\epsilon$ y las componentes del 4-vector q son $q^0 = 0$, $\mathbf{q} = 2\mathbf{p}_2 = -2\mathbf{p}_1$.

Para un hadrón de spin cero, la corriente de transición adopta en el sistema de Breit una forma particularmente simple:

$$\frac{j_{fi}^0}{2\epsilon} = F(-\mathbf{q}^2), \quad \mathbf{J} = 0.$$

De aquí resulta, evidentemente, que $F(-\mathbf{q}^2)$ puede interpretarse como transformada de Fourier de una distribución de cargas estadística, con densidad

$$\rho(\mathbf{r}) = e^{-\frac{1}{(2\pi)^3}} \int F(-\mathbf{q}^2) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3 q. \quad (139.9)$$

En este sentido se habla de una estructura electromagnética espacial de la partícula: si $F = \text{const} = 1$, sería $\rho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r})$; ahora bien, el que el factor de forma dependa de \mathbf{q} se interpreta como desviación de la distribución de carga respecto de la puntual. Con todo, es necesario subrayar que a esta interpretación no hay que atribuirle un sentido literal. La función $\rho(\mathbf{r})$ no se refiere en absoluto a ningún sistema de coordenadas determinado, ya que a cada valor de \mathbf{q} corresponde su propio sistema.

Únicamente en el límite no relativista de valores pequeños $\mathbf{q}^2 \ll M^2$, cuando puede prescindirse de la variación de la energía de la partícula en la dispersión, el sistema de Breit coincide con el sistema propio de la partícula y es independiente de \mathbf{q} . Los estados inicial y final de la partícula son idénticos en esta aproximación, con lo cual la corriente de transición pasa a ser un elemento de matriz diagonal y la función $\rho(\mathbf{r})$ cobra la significación real de distribución espacial de carga. Para las partículas elementales, sin embargo, los valores de $|\mathbf{q}|$ característicos para los que cambian esencialmente los factores de forma son tan sólo un poco menores que M . Por ello, en el límite no relativista, para tales valores es posible substituir sin más $F(-\mathbf{q}^2)$ por $F(0)$, es decir, considerar la partícula como puntual. Otra es la situación en el caso de los núcleos. La masa de un núcleo M es proporcional al número A de nucleones que lo constituyen, y para el valor característico se tiene $|\mathbf{q}| \sim 1/R$, es decir es proporcional a $A^{-1/3}$ (R = radio del núcleo). Por consiguiente, para los núcleos suficientemente pesados, son característicos los valores $\mathbf{q}^2 \ll M^2$ y, por lo tanto, la aproximación no relativista es admisible en todo el intervalo que realmente cuenta; de esta manera, el concepto de estructura electromagnética del núcleo cobra un sentido totalmente determinado.

Para una partícula de spin $1/2$, de (139.7) se sigue en el sistema de Breit

$$J_{fi}^0 = (F_e - F_m) \frac{M}{e} (\bar{u}_2 u_1) + F_m (\bar{u}_2 \gamma^0 u_1) = F_e (\bar{u}_2 \gamma^0 u_1), \quad (139.10)$$

$$\mathbf{J}_{fi} = \frac{1}{2M} F_m [i\mathbf{q} \times (\bar{u}_2 \boldsymbol{\Sigma} u_1)], \quad (139.11)$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es el operador tridimensional (la matriz) de spin (21.21), y en (139.10) se ha aplicado la igualdad

$$e(\bar{u}_2 \gamma^0 u_1) = M(\bar{u}_2 u_1),$$

que es fácil verificar mediante las ecuaciones de Dirac correspondientes a u_1 y \bar{u}_2 para $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$.

La componente temporal de la corriente de transición (139.10) difiere de la expresión que corresponde a una «partícula puntual», el electrón, en el factor $F_e(-\mathbf{q}^2)$. Cabe decir, por lo tanto, que el factor de forma F_e (llamado factor de forma de carga) describe la «distribución espacial de la carga» de acuerdo con (139.9).

De manera análoga el vector tridimensional (139.11) puede hacerse corresponder a una «distribución espacial» de densidad de corriente $e\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \text{rot } \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r})$, donde

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) = \frac{e}{2M} \boldsymbol{\Sigma} \int F_m(-\mathbf{q}^2) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3q$$

representa la «densidad de momento magnético». De esta manera, el factor de forma F_m (calificado de *magnético*) se puede interpretar como densidad de distribución espacial de momento magnético, con las mismas reservas, claro está, que se hicieron antes en relación con la distribución de carga. El factor F_m incluye tanto el momento magnético «normal» de Dirac, como el momento «anómalo» específico del hadrón; a la «densidad» de este último momento corresponde la diferencia $F_m - F_e$.

Es natural suponer que los puntos singulares de los factores de forma electromagnéticos de los hadrones, al igual que los electrónicos, se encuentran para valores reales positivos del argumento $t = q^2 = -\mathbf{q}^2$. Esto permite llegar a determinadas conclusiones acerca del comportamiento asintótico de la distribución $\rho(r)$ [y $\boldsymbol{\mu}(r)$] para $r \rightarrow \infty$. Concretamente, la misma transformación de la integral (139.9) que se aplicó en el § 111 para pasar de (111.3) a (111.4), conduce al resultado de que para grandes valores de r será

$$\rho(r) \sim e^{-x_0 r},$$

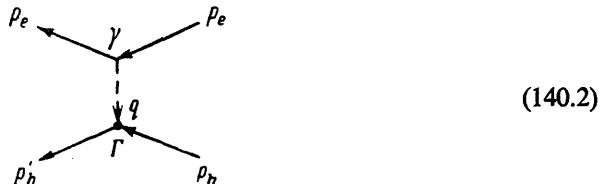
donde x_0^2 es la abscisa del primer punto singular del factor de forma $F(q^2)$ (cf. también la nota en la pág. 64). Sí, como sucede a menudo, la singularidad más próxima viene dada por el umbral de formación de un par de hadrones (cada uno de ellos de masa M_0) por un fotón virtual, se tendrá $x_0 = 2M_0$.

§ 140. Dispersión de electrones por hadrones

Aplicemos las fórmulas obtenidas en el párrafo que precede a la dispersión elástica de un electrón por un hadrón. Designaremos los 4-impulsos inicial y final del hadrón por p_h y p'_h , y los 4-impulsos del electrón, por p_e y p'_e ; en estas condiciones,

$$p_e + p_h = p'_e + p'_h. \quad (140.1)$$

El proceso considerado se representa por el diagrama



A la emisión del fotón virtual por el electrón corresponde el operador vértice ordinario γ ; a su absorción por el hadrón, el operador Γ .

Consideremos el caso más interesante, el de un hadrón con spin $1/2$ (por ejemplo, la dispersión de un electrón por un protón o por un neutrón).

Al diagrama (140.2) corresponde la amplitud de dispersión

$$M_{fi} = 4\pi e^2 \frac{1}{q^2} (\bar{u}'_e \gamma^\mu u_e) (\bar{u}'_h \Gamma_\mu u_h). \quad (140.3)$$

El cálculo de la sección eficaz a partir de esta amplitud no presenta diferencias fundamentales respecto de los llevados a cabo en el § 82; al efectuarlo, conviene escribir el operador Γ en la forma que corresponde a la primera de las expresiones (139.7).

Para la dispersión de partículas no polarizadas se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} d\sigma = & \frac{\pi \alpha^2 dt}{[s - (M+m)^2][s - (M-m)^2] t^2 \left(1 - \frac{t}{4M^2}\right)} \times \\ & \times \left\{ F_e^2 [(s-u)^2 + (4M^2-t)t] - \frac{t}{4M^2} F_m^2 [(s-u)^2 - (4M^2-t)(4m^2+t)] \right\}. \end{aligned} \quad (140.4)$$

M es aquí la masa del hadrón, m la masa del electrón,

$$\begin{aligned} s &= (p_e + p_h)^2, \quad t = q^2 = (p_e - p'_e)^2, \quad u = (p_e - p'_h)^2, \\ s + t + u &= 2m^2 + 2M^2. \end{aligned}$$

Consideremos algunos casos límite.

En la dispersión de electrones por un núcleo pesado tiene interés el caso en el que el impulso cedido por el electrón al núcleo $|q|$ es pequeño comparado con la masa del mismo, pero no es pequeño comparado con $1/R$ (R = radio del núcleo), de modo que es imposible considerar el núcleo como un punto. En este caso, el sistema del centro de masa coincide aproximadamente con el sistema propio del núcleo, cabe prescindir del retroceso de éste y no cambia la energía del electrón. Además,

$$-t = q^2 \ll M^2, \quad \pi |dt| = p_e^2 d\sigma'_e, \\ s - M^2 \approx M^2 - u \approx 2M\varepsilon_e$$

y la fórmula (140.4) toma la forma

$$d\sigma = \frac{\alpha^2 d\sigma'_e}{q^4} (4\varepsilon_e^2 - q^2) F_e^2(-q^2). \quad (140.5)$$

En esta aproximación, en la sección eficaz se conserva solamente el término que contiene el factor de forma eléctrica y (140.5) corresponde a la fórmula (81.5), que es válida para la dispersión del electrón por una distribución estática de cargas.

En la dispersión de un electrón por un neutrón en reposo, precisamente en el mismo caso límite $\varepsilon_e \ll M$ (M es la masa del neutrón), los factores de forma se pueden substituir por sus valores para $q = 0$, puesto que, conforme ya se hizo notar, para un nucleón aislado al «radio» característico de la distribución de cargas es comparable con $1/M$ ^{*}. En virtud del carácter eléctricamente neutro del neutrón, es $F_e(0) = 0$ y la sección eficaz toma la forma

$$d\sigma = \alpha \mu^2 \left[\frac{4(\varepsilon_e^2 - m^2)}{q^2} + 1 \right] d\sigma'_e = \alpha \mu^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} + 1 \right) d\sigma'_e, \quad (140.6)$$

donde $\mu = \frac{e}{2M} F_m(0)$ es el momento magnético del neutrón y θ el ángulo de dispersión. Esta fórmula corresponde a la dispersión de un electrón por un momento magnético puntual en reposo.

Finalmente, escribamos la fórmula para la sección eficaz de dispersión de un electrón ultrarrelativista por un nucleón en el caso en que $|q| \gg m$. Como antes, q^2 es el cuadrado de la transferencia de impulso en el sistema del centro de masa, de modo que el invariante $t = -q^2$. En cambio, en el sistema de referencia propio del nucleón inicial (sistema del laboratorio) tenemos

* El valor experimental del «radio» cuadrático medio del nucleón es $\approx 3,5/M \approx 1/2m_\pi$ (m_π = masa del pión).

$$-t \approx 2(p_e p'_e) = 2\epsilon_e \epsilon'_e (1 - \cos \vartheta),$$

donde ϵ_e , ϵ'_e son las energías inicial y final del electrón y ϑ el ángulo de dispersión en este sistema. En el caso ultrarrelativista, ϵ'_e está ligado con ϑ por la misma fórmula que en la dispersión de un fotón [cf. (86.8)]:

$$\frac{1}{\epsilon'_e} - \frac{1}{\epsilon_e} = \frac{1}{M} (1 - \cos \vartheta).$$

Tenemos, por consiguiente,

$$-t = \frac{4\epsilon_e^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{1 + \frac{2\epsilon_e}{M} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}, \quad (140.7)$$

$$\pi d|t| = \frac{\epsilon_e^2 d\Omega'_e}{\left(1 + \frac{2\epsilon_e}{M} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)^2} = \epsilon_e^2 \left(1 - \frac{q^2}{2\epsilon_e M}\right)^2 d\Omega'_e, \quad (140.8)$$

donde $d\Omega'_e = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$. En la fórmula (140.4) se puede omitir la masa del electrón m ; expresando todas las cantidades en función de t y $s - M^2 = 2M\epsilon_e$, obtendremos

$$d\sigma = \frac{\pi \alpha^2 d|t|}{\epsilon_e^2 t^2} \left\{ F_e^2(t) \left[\frac{(4M\epsilon_e + t)^2}{4M^2 - t} + t \right] - \frac{t}{4M^2} F_m^2(t) \left[\frac{(4M\epsilon_e + t)^2}{4M^2 - t} - t \right] \right\}, \quad (140.9)$$

o bien, aplicando (140.7-8),

$$d\sigma = d\Omega'_e \frac{\alpha^2}{4\epsilon_e^2} \frac{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \frac{1}{1 + \frac{2\epsilon_e}{M} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \left\{ \frac{F_e^2 - \frac{t}{4M^2} F_m^2}{1 - \frac{t}{4M^2}} - \frac{t}{2M^2} F_m^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right\} \quad (140.10)$$

(M. Rosenbluth, 1950).

Obsérvese que los factores de forma F_e y F_m proporcionan contribuciones independientes a la sección eficaz, de modo que no existen términos de interferencia entre ellos. Con esto se justifica la idoneidad de la elección que se hizo de los factores de forma.

PROBLEMA

Hallar la sección eficaz de dispersión de un electrón por un hadrón de spin 0.

Solución. Aplicando (139.5), tenemos, en vez de (140.3),

$$M_{fi} = \frac{4\pi e^2}{q^2} (\bar{u}_e' \hat{P}_h u_c) F(q^2).$$

Para la sección eficaz se obtiene

$$d\sigma = \frac{\pi a^2 dt [(s-u)^2 + (4M^2-t)t]}{[s-(M+m)^2][s-(M-m)^2]t^2} F^2(t)$$

[la notación es la misma que en (140.4)]. Cuando $|t| \gg m^2$

$$d\sigma = d\sigma'_e \frac{\alpha^2}{4s_e^2} \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{F^2(t)}{1 + \frac{2e_e}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

[la notación es la misma que en (140.10)].

§ 141. Teorema de la radiación de frenado a baja energía

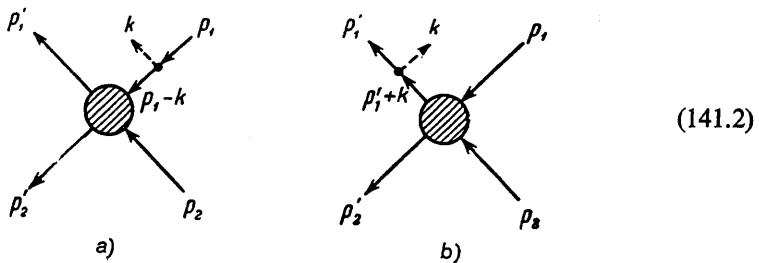
En el § 95 se estudió el proceso de emisión de un fotón como consecuencia del choque de partículas en el caso límite en que la frecuencia del fotón tiende a cero. El resultado a que se llegó fue que la amplitud del proceso es inversamente proporcional a ω y que se expresa de un modo sencillo por la amplitud de la misma colisión sin que se emita el fotón blando [como es costumbre, llamaremos a esta última, en lo que sigue, amplitud de dispersión «elástica» y la designaremos por $M_{fi}^{(el)}$].*

En la aproximación siguiente respecto de ω se tendrá

$$M_{fi} = M_{fi}^{(-1)} + M_{fi}^{(0)}, \quad (141.1)$$

donde al término principal ($\propto \omega^{-1}$) se añade un término correctivo ($\propto \omega^0$) que no depende de ω . Veremos que también este término correctivo (al igual que el principal) puede expresarse en función de $M_{fi}^{(el)}$, incluso con independencia de los detalles (que desconocemos) de la estructura electromagnética del hadrón. Esta proposición se llama teorema para la radición de frenado a baja energía (F. E. Low, 1958).

Vimos en el § 95 que la contribución fundamental a la amplitud de emisión de un fotón blando [que corresponde al primer término (141.1)] resulta de diagramas en los que el fotón es emitido directamente por la partícula inicial o la final. Estos diagramas son de la forma



* En el § 95 se representó por $M_{fi}^{(0)}$.

en contraste con los diagramas del tipo



en los cuales la línea de fotón sale de partes internas del diagrama. Es característica de los gráficos (141.2) la posibilidad de descomponerlos en dos partes cortando una línea de hadrón virtual (inicial o final). En otras palabras, dichos gráficos ilustran una propiedad esencial en cierto aspecto: la existencia de un estado intermedio de una sola partícula ocupado por un hadrón. Vimos en el § 80 que, en virtud de la condición de unitariedad, esta propiedad basta por sí sola para que aparezca un polo en la amplitud.

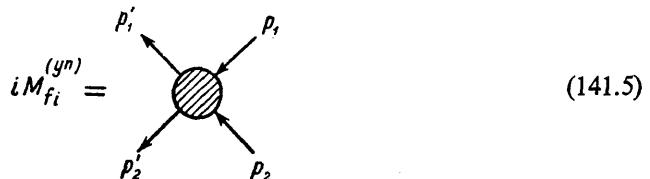
Hadrones con spin 0

Supondremos para simplificar que de los dos hadrones que chocan solamente uno (el primero) tiene carga eléctrica (y, por ello, puede emitir radiación) y que ambos hadrones carecen de spin. Las amplitudes de onda u de tales hadrones son escalares, que tomaremos iguales a 1.

Entonces la contribución, en la amplitud, de la parte polar del diagrama (141.2 *a*) tiene la forma

$$iM_{fi}^{(a)} = \sqrt{4\pi} e_\mu^\ast (2p_1^\mu - k^\mu) Z_1 e F \frac{1}{(p_1 - k)^2 - M^2} i\Gamma. \quad (141.4)$$

El primer factor corresponde a un fotón k (e_μ es su 4-vector polarización). El segundo factor corresponde al vértice hadrónico electromagnético (punto grueso en el diagrama); éste se escribe en la forma (139.5), siendo $Z_1 e$ la carga del hadrón y F su factor de forma. El tercer factor es el propagador del hadrón virtual $p_1 - k$ (M es su masa). Finalmente, el factor $i\Gamma$ designa todo el bloque restante. Éste difiere de la amplitud del proceso «elástico»



por la substitución del hadrón real p_1 por el virtual $p_1 - k$.

Entre los primeros términos del desarrollo de la expresión (141.4) en potencias de ω , habrá términos: 1) inversamente proporcionales a ω , 2) independientes de ω , pero dependientes de la dirección de \mathbf{k} , 3) independientes de ω y de \mathbf{k} . Términos del tercer tipo (y únicamente de éste) resultarán también de diagramas «no singulares», es decir, de diagramas del tipo (141.3) que no contienen una singularidad polar, y de partes sin polos de los diagramas (141.2). Veremos que todos estos términos juntos quedan unívocamente determinados a partir de los términos de los dos primeros tipos en virtud de la condición de invariancia de contraste y, por lo tanto, no exigen un cálculo especial.

La amplitud del proceso «elástico» (141.5) depende solamente de dos variables invariantes:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2, \\ t &= (p'_2 - p_2)^2. \end{aligned} \quad (141.6)$$

La substitución de p_1 por $p_1 - k$, no sólo transforma s en $(p_1 - k + p_2)^2$, sino que introduce además la dependencia respecto de una nueva variable

$$(p_1 - k)^2 - M^2 = -2p_1k,$$

que caracteriza la naturaleza «no física» del impulso $p_1 - k$. Pero ya el primer término del desarrollo respecto de esta nueva variable (que es pequeña) hace desaparecer la singularidad en la amplitud (141.4) y, por ello, sólo puede introducir en la misma términos que no dependen de k , los cuales, por lo dicho antes, no nos interesan de momento. De esta manera llegamos a la importante conclusión de que, en vez de la magnitud Γ , en (141.4) se puede substituir la amplitud física $M_{fi}^{(el)}(s, t)$, con sólo hacer en ella

$$s \rightarrow (p_1 + p_2 - k)^2 = s - 2k(p_1 + p_2). \quad (141.7)$$

Los primeros términos de su desarrollo son:

$$\Gamma \rightarrow M_{fi}^{(el)}(s, t) - 2(kp_1 + kp_2) \left(\frac{\partial M_{fi}^{(el)}}{\partial s} \right)_t.$$

Por esta misma razón carece de importancia el hecho de que el factor de forma electromagnético F corresponde aquí a un vértice en el cual, de los dos terminales hadrónicos (p_1 y $p_1 - k$), sólo uno es físico. Cabe así substituirlo por el factor de forma considerado en el § 139 de un vértice con dos terminales físicos, y dado que el fotón k en este caso es real, se tendrá $F(k^2) = F(0) = 1$.

Así, pues, de (140.4) se deduce

$$\begin{aligned} M_{fi}^{(a)} &= Z_1 e \sqrt{4\pi} \frac{2(e^* p_1)}{-2(kp_1)} - \\ &- Z_1 e \sqrt{4\pi} 2(e^* p_1) \frac{1}{-2(kp_1)} 2(p_2 k) \frac{\partial M_{fi}^{(el)}}{\partial s} + \dots, \end{aligned} \quad (141.8)$$

donde los puntos suspensivos designan términos por completo independientes de k [mientras que el segundo término en (141.8) depende de la dirección de k]. De manera análoga se encuentra que la contribución a M_{fi} debida al diagrama (141.2 b) difiere de (141.8) en la sustitución de p_1, p_2, k por $p'_1, p'_2, -k$. Para el término principal del desarrollo obtendremos finalmente la expresión que ya conocemos

$$M_{fi}^{(-1)} = Z_1 e \sqrt{4\pi} \left(\frac{p'_1 e^*}{p'_1 k} - \frac{p_1 e^*}{p_1 k} \right) M_{fi}^{(el)} \quad (141.9)$$

[cf. (95.5)].

Ahora bien, los términos que no dependen de k se pueden determinar a partir de la condición de que la amplitud en conjunto posea la invariancia de contraste. Concretamente, dicha amplitud no debe variar en la sustitución $e^* \rightarrow e^* + \text{cons} \cdot k$, es decir, ha de ser de la forma $M_{fi} = e_\mu^* J^\mu$, con $k_\mu J^\mu = 0$. Es fácil ver que para ello es necesario añadir a (141.8) el término que no depende de k

$$- 2Z_1 e \sqrt{4\pi} (p_2 e^*),$$

y análogamente para el diagrama (141.2 b). Finalmente obtendremos

$$M_{fi}^{(0)} = 2Z_1 e \sqrt{4\pi} e_\mu^* \left[p_1^\mu \frac{(p_2 k)}{(p_1 k)} - p_2^\mu + p'_1{}^\mu \frac{(p'_2 k)}{(p'_1 k)} - p'_2{}^\mu \right] \frac{\partial M_{fi}^{(el)}}{\partial s}. \quad (141.10)$$

Esta fórmula resuelve el problema planteado. Es posible presentarla en forma más compacta aplicando la identidad

$$2p_{2v} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)_t = \left(\frac{\partial}{\partial p_1^v} \right)_{p'_1, p_2, p'_2}$$

(y análogamente para $\partial/\partial p'_1$) e introduciendo los operadores diferenciales

$$d_{1\mu} = \frac{p_{1\mu}}{(p_1 k)} k^v \frac{\partial}{\partial p_1^v} - \frac{\partial}{\partial p_1^\mu} \quad (141.11)$$

(y análogamente $d'_{1\mu}$). Entonces *

$$M_{fi}^{(0)} = Z_1 e \sqrt{4\pi} e_\mu^* (d_1^\mu + d'_1{}^\mu) M_{fi}^{(el)}. \quad (141.12)$$

La sección eficaz viene determinada por el cuadrado $|M_{fi}|^2$; con la precisión exigida, se tiene

* La generalización de esta fórmula al caso de una colisión en la que interviene un número arbitrario de partículas cargadas, se consigue substituyendo $Z_1 (d_1 + d'_1)$ por la suma análoga extendida a todas las partículas iniciales y finales.

$$|M_{fi}|^2 = |M_{fi}^{(-1)}|^2 + 2 \operatorname{Re}(M_{fi}^{(-1)} M_{fi}^{(0)*}). \quad (141.13)$$

El segundo término da la corrección buscada a la sección eficaz de radiación. Sumando respecto de las polarizaciones del fotón, se obtendrá para esta corrección la expresión siguiente:

$$-4\pi(Z_1e)^2 \left(\frac{p'}{(p'k)} - \frac{p}{(pk)} \right)^\mu (d'_1 + d_1)_\mu |M_{fi}^{(\text{el})}|^2. \quad (141.14)$$

Así, pues, la corrección a la sección eficaz de radiación se expresa en función de la sección eficaz del proceso «elástico» y de su derivada respecto de s .

Hadrones de spin $1/2$

Supongamos ahora que el hadrón cargado tiene spin $1/2$. Toda la parte principal de los cálculos sigue siendo la de antes. Cambia solamente el aspecto concreto de los vértices y de los propagadores.

Como operador vértice electromagnético hay que adoptar la expresión (139.7), la cual para $k^2 \rightarrow 0$, y en el caso de una línea de fotón saliente, se reduce a

$$Z_1 e v^\mu + \mu_{\text{an}} \sigma^{\mu\nu} k_\nu, \quad (141.15)$$

donde μ_{an} es la parte anómala del momento magnético del hadrón [cf. (139.8)]. En cuanto al operador vértice Γ , ligado a la amplitud del proceso «elástico», se determina de acuerdo con

$$iM_{fi}^{(\text{el})} = \bar{u}'_1 i\Gamma u_1, \quad (141.16)$$

donde $u_1 = u(p_1)$, $u'_1 = u(p'_1)$ son las amplitudes bispinoriales de los hadrones inicial y final. Su dependencia respecto de los 4-impulsos de las partículas puede representarse mediante la fórmula

$$\Gamma = f_1(s, t) + (\hat{p}_2 + \hat{p}'_2) f_2(s, t), \quad (141.17)$$

en la que f_1, f_2 son amplitudes invariantes [cf. (71.3)].

Entonces, la contribución, por ejemplo, del diagrama (141.2 a) a la amplitud del proceso será

$$M_{fi}^{(a)} = \bar{u}'_1 \Gamma \frac{\hat{p}_1 - \hat{k} + M}{-2(p_1 k)} \sqrt{4\pi} (Z_1 e \hat{e}^* + \mu_{\text{an}} \sigma^{\mu\nu} e_\mu^* k_\nu) u_1,$$

donde en Γ el argumento s debe ser substituido de acuerdo con (141.7).

Dejando a un lado cálculos sencillos, he aquí el resultado final:

$$\begin{aligned}
 M_{fi}^{(0)} = & \sqrt{4\pi} Z_1 e \bar{u}'_1 \left[(d'_1 + d_1) \Gamma + \frac{\bar{e}^* k}{2(p'_1 k)} \Gamma + \Gamma \frac{k \bar{e}^*}{2(p_1 k)} \right] u_1 - \\
 & - \sqrt{4\pi} \mu_{an} \bar{u}'_1 \left[\frac{\sigma^{uv} \bar{e}_\mu^* k_v M - \bar{k}(p'_1 \bar{e}^*) + \bar{e}^*(p'_1 \bar{k})}{(p'_1 k)} \Gamma - \right. \\
 & \left. - \Gamma \frac{\sigma^{uv} \bar{e}_\mu^* k_v M + \bar{k}(p_1 \bar{e}^*) - \bar{e}^*(p_1 \bar{k})}{(p_1 k)} \right] u_1. \quad (141.18)
 \end{aligned}$$

En la corrección a la sección eficaz, $M_{fi}^{(0)}$ interviene según (141.13) linealmente. Es evidente que el momento magnético μ_{an} puede intervenir en el resultado solamente en la forma $\mu_{an} \zeta_1$ o $\mu_{an} \zeta'$, donde ζ es el vector polarización de los hadrones. Precisamente por esto, al promediar respecto de las polarizaciones de los mismos toda esta parte de la corrección desaparece. Pero si se efectúa también el promedio respecto de las polarizaciones del fotón, después de simples transformaciones resulta que, como antes, es válida la fórmula (141.14), que expresa la corrección a la sección eficaz de radiación en función de la sección eficaz de dispersión «elástica» (T. N. Burnett, N. M. Kroll, 1968).

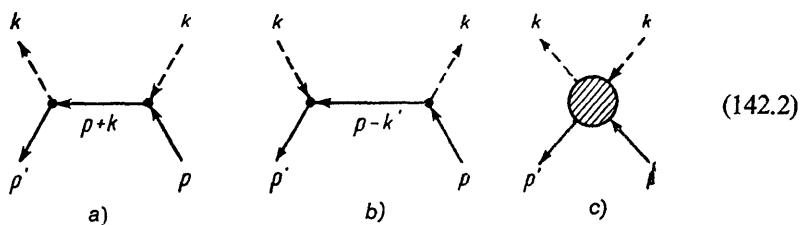
§ 142. Teorema de la dispersión de un fotón por un hadrón a baja energía

En el límite de bajas frecuencias, la sección eficaz de dispersión de un fotón por cualquier partícula en reposo cargada tiende a su valor clásico, que viene dado por la fórmula de Thomson. A este límite corresponde una amplitud que no depende de la frecuencia del fotón ω , amplitud que designaremos por $M_{fi}^{(0)}$. Resulta, sin embargo, que también para la dispersión de un fotón (al igual que para la radiación de frenado considerada en el párrafo que precede) no sólo este primer término es independiente del detalle de la estructura electromagnética del hadrón, sino también el término que sigue en el desarrollo de la amplitud en potencias de ω :

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} + M_{fi}^{(1)}, \quad (142.1)$$

donde $M^{(1)} \sim \omega$ (F. F. Low, 1954; M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, 1954).

El proceso considerado se representa por diagramas de tres tipos:



de los cuales los dos primeros se caracterizan de nuevo por la existencia de un estado intermedio de una partícula y, por lo tanto, poseen una singularidad polar.

Todo el argumento y la parte principal de los cálculos siguen siendo los mismos que en el § 141. De hecho, basta calcular solamente la contribución de las partes polares de los diagramas (142.2 a-b), expresando en ellos los vértices electromagnéticos en función de los factores de forma estáticos (carga Ze y momento magnético anómalo μ_{an}) de acuerdo con (141.15).

Sin embargo, en contraste con el caso de la radiación de frenado, las correcciones a la sección eficaz del efecto Compton que ahora nos interesan, existen solamente para partículas con spin. La situación es la siguiente: en el caso de la radiación de frenado, además de las correcciones vinculadas con el spin, se tienen también otras debidas a la dependencia energética de la amplitud del proceso «elástico». Pero en el presente caso el papel que representan estas últimas lo desempeñan los factores de forma, que para los «terminales físicos» se reducen a constantes y no dependen de la energía. En consecuencia, para la dispersión de un fotón las correcciones aparecen solamente a causa del momento magnético, momento que no existe para partículas sin spin. A continuación estudiaremos la dispersión de un fotón por un hadrón de spin $1/2$.

Designando por M_{fi} la contribución a la amplitud de dispersión debida a los diagramas polares, tenemos [cf. 86.3-4)]

$$M_{fi} = -4\pi (Ze)^2 e_{\mu}'^* e_v (\bar{u}' Q^{\mu\nu} u), \quad (142.3)$$

donde

$$\begin{aligned} Q^{\mu\nu} &= (\gamma^\mu + S'^\mu) \frac{\hat{p} + \vec{k} + M}{s - M^2} (\gamma^\nu - S^\nu) + \\ &\quad + (\gamma^\nu - S^\nu) \frac{\hat{p} - \vec{k}' + M}{u - M^2} (\gamma^\mu + S'^\mu), \\ s &= (p + k)^2 = (p' + k')^2, \quad u = (p - k')^2 = (p' - k)^2 \end{aligned} \quad (142.4)$$

habiéndose introducido para abreviar las notaciones

$$\mu_{\text{an}} \sigma^{\mu\lambda} k_\lambda = Ze S^\mu, \quad \mu_{\text{an}} \sigma^{\mu\lambda} k'_\lambda = Ze S'^\mu. \quad (142.5)$$

Permutando los operadores $\hat{p} + M$ y teniendo en cuenta las ecuaciones $\bar{u}' (\hat{p}' - M) = (\hat{p}' - M) u = 0$, esta expresión puede transformarse en la siguiente:

$$\begin{aligned} Q^{\mu\nu} &= \left[(\gamma^\mu + S'^\mu) \frac{\vec{k}\gamma^\nu + 2p^\nu}{2pk} + \frac{\gamma^\nu \vec{k} - 2p'^\nu}{2p'k'} (\gamma^\mu + S'^\mu) \right] - \\ &\quad - \left[\frac{\gamma^\mu \vec{k}' + 2p'^\mu}{2p'k'} S^\nu + S^\nu \frac{\gamma^\mu \vec{k}' - 2p^\mu}{2pk'} \right] - \\ &\quad - \left[S'^\mu \frac{\hat{p} + \vec{k} + M}{2pk} S^\nu - S^\nu \frac{\hat{p} - \vec{k}' + M}{2p'k'} S'^\mu \right]. \end{aligned} \quad (142.6)$$

Esta forma de escribirla (y la análoga con k y k' permutados) hace evidente la invariancia de contraste de la expresión (142.3), condición que se traduce por las igualdades

$$k'_\mu (\bar{u}' Q^{\mu\nu} u) = (\bar{u}' Q^{\mu\nu} u) k_\nu = 0 \quad (142.7)$$

(al comprobarlo hay que recordar que $\hat{k}\hat{k} = 0$, $kS = k'S' = 0$).

Dado que la parte polar de la amplitud de dispersión resulta poseer así de suyo la invariancia de contraste, también deberá tener tal propiedad la parte regular de la amplitud [que incluye la contribución del diagrama (142.2 b)]. A su vez se sigue de aquí que el desarrollo de esta parte en potencias de k y k' debe comenzar con términos cuadráticos [cf. la observación análoga hecha en relación con la condición (124.5)]. En otras palabras, la parte regular de la amplitud contiene solamente términos que empiezan con los proporcionales a $\omega\omega' \sim \omega^2$, es decir, no contribuye a los términos que nos interesan, que son proporcionales a ω^0 y ω^1 . Todos estos, por consiguiente, están contenidos en la expresión (142.3).

Para calcularlos realmente, elegiremos como sistema de referencia el del laboratorio, en el que se encuentra en reposo el electrón inicial. En cuanto a los fotones, para ellos adoptaremos el contraste transversal en tres dimensiones, en el cual $e_0 = e'_0 = 0$. Entonces $pe = 0$, $p'e'^* \sim |\mathbf{p}'| \sim \omega$ y (142.6) permite ver inmediatamente que los primeros términos del desarrollo de M_{fi} serán proporcionales a ω^0 y que los términos que contienen μ_{an} solamente contribuirán a términos proporcionales a ω^1 .

Las amplitudes de onda de los electrones inicial y final en el sistema de referencia del laboratorio, dentro de la precisión necesaria, tienen la forma

$$u = \sqrt{2M} \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}' = \sqrt{2M} \left(w'^*, -\frac{\omega'^*}{2M} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \boldsymbol{\sigma} \right),$$

donde w, w' son espinores tridimensionales.

Un cálculo que no ofrece dificultad lleva al resultado siguiente:

$$M_{fi}^{(0)} = -8\pi(Ze)^2 (\mathbf{e}'^* \cdot \mathbf{e}) (w'^* w), \quad (142.8)$$

$$\begin{aligned} M_{fi}^{(1)} = & -16\pi i M \mu_{an}^2 \omega (w'^* \boldsymbol{\sigma} w) \cdot [[n' \times e'^*] \times [n \times e]] - \\ & - 4\pi i Ze \mu_{an} \omega (w'^* \boldsymbol{\sigma} w) \cdot \{ n ([n \times e] \cdot e'^*) + [n \times e] (n \cdot e'^*) - \\ & - n' ([n' \times e'^*] \cdot e) - [n' \times e'^*] (n \cdot e) - 2 [e'^* \times e] \} \end{aligned} \quad (142.9)$$

(donde $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$, $n' = \mathbf{k}'/\omega'$).

La sección eficaz de dispersión es

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} |M_{fi}|^2 \frac{\omega'^2}{M^2 \omega^2} d\Omega' \quad (142.10)$$

[véase (65.19)]. Para la dispersión por una partícula cargada son diferentes de cero

tanto $M_{fi}^{(1)}$ como $M_{fi}^{(0)}$. La precisión adoptada permite con esto conservar en el cuadrado $|M_{fi}|^2$ los términos $M_{fi}^{(0)}$ y $\text{Re}(M_{fi}^{(0)} M_{fi}^{(1)*})$. El primero da la sección eficaz de Thomson. En cuanto al segundo, se anula al promediar respecto de las polarizaciones de los fotones y de los electrones. Por lo tanto, en la dispersión por un hadrón cargado las correcciones consideradas se manifiestan solamente en los efectos de polarización.

En cambio, para la dispersión por un hadrón eléctricamente neutro es $M_{fi}^{(0)} = 0$ y la sección eficaz viene determinada por el cuadrado $|M_{fi}^{(1)}|^2$. Después de promediar respecto de las polarizaciones de las partículas finales y de sumar respecto de las polarizaciones de las iniciales, dicha sección eficaz resulta ser igual (en unidades ordinarias) a

$$d\sigma = \frac{2\mu^4\omega^2}{\hbar^2 c^4} (2 + \operatorname{sen}^2 \vartheta) d\sigma', \quad (142.11)$$

donde ϑ es el ángulo de dispersión del fotón, y el momento magnético anómalo coincide con el momento total μ . Obsérvese que, por su dependencia angular, esta sección eficaz corresponde al caso de dispersión antisimétrica (véase problema 2, § 61).

§ 143. Momentos multipolares de los hadrones

Consideremos ahora la corriente de transición que corresponde a un diagrama como el (139.2)



en el que, sin embargo, las líneas p_1 y p_2 corresponden ahora a partículas diferentes (masas M_1 y M_2); convendrá representar aquí la línea de fotón $k = p_1 - p_2$ como línea que parte del vértice. Además, el fotón puede ser ahora tanto virtual como real: sólo debe ser $k^2 < (M_1 - M_2)^2$, de modo que el valor $k^2 = 0$ es admisible. De esta manera, las aplicaciones del diagrama considerado incluyen, en particular, los procesos de emisión de un fotón en las transmutaciones de partículas, entre ellas las de los núcleos (en este último caso, las partículas inicial y final son el mismo núcleo en diferentes estados).

En relación con la cuestión planteada, el caso más interesante es aquél en que la longitud de onda del fotón es grande comparada con las «dimensiones» características de la partícula (es decir, con las dimensiones que intervienen en sus factores

de forma; para un núcleo, coinciden, naturalmente, con su «radio»). Entonces la corriente de transición se puede desarrollar en potencia de k^* .

Observemos ante todo que ha de tenerse

$$J_{fi} = 0 \quad \text{para} \quad k = 0. \quad (143.2)$$

En efecto, al límite $k \rightarrow 0$ corresponde un potencial constante en el espacio y en el tiempo. Pero tal potencial carece de significado físico y no puede ser causa de ningún proceso real. A esta misma conclusión se puede llegar también partiendo de un punto de vista más formal: las corrientes estudiadas en el § 139 eran diferentes de cero para $k = 0$ debido a términos proporcionales al 4-vector $P = p_1 + p_2$; pero para $M_1 \neq M_2$ el producto $Pk \neq 0$, de modo que tales términos están prohibidos por la condición de transversalidad de la corriente.

Escribamos esta última condición para la corriente $J_{fi} = (\rho_{fi}, \mathbf{J}_{fi})$ en forma tridimensional:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{J}_{fi} = \omega \rho_{fi}. \quad (143.3)$$

Es posible satisfacer esta condición de dos maneras:

$$\mathbf{J}_{fi} = \omega \mathbf{v}(\mathbf{k}, \omega), \quad \rho_{fi} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k}, \omega) \quad (143.4)$$

o bien

$$\mathbf{J}_{fi} = [\mathbf{k} \times \mathbf{a}(\mathbf{k}, \omega)], \quad \rho_{fi} = 0. \quad (143.5)$$

Aquí \mathbf{v} es un cierto vector polar, y \mathbf{a} uno axil. En el primer caso se habla de una corriente de tipo eléctrico, y en el segundo, de tipo magnético. Según (143.2) \mathbf{v} y \mathbf{a} se conservan finitos o tienden a cero para $\mathbf{k}, \omega \rightarrow 0$.

Sea $\omega \ll M_1$ la energía del fotón. Cabe entonces prescindir del efecto de retroceso y considerar que también la partícula final M_2 se encuentra en reposo (en el sistema propio de la partícula M_1); ω pasa a ser una cantidad dada: $\omega = M_1 - M_2$. Los estados de las partículas en reposo M_1 y M_2 se caracterizan por espinores tridimensionales w_1 y w_2 de órdenes $2s_1$ y $2s_2$, donde s_1 y s_2 son los spins de las partículas. La corriente de transición debe ser una combinación bilineal de w_1 y w_2^* . A partir de los productos de componentes de estos dos espinores se pueden construir tensores irreducibles de órdenes $l = s_1 + s_2, \dots, |s_1 - s_2|$ (para l dado, el tensor será un tensor en sentido estricto o un pseudotensor según sean las paridades intrínsecas de las partículas M_1 y M_2). Además de estos tensores, disponemos solamente de un vector, el \mathbf{k} . Dado que se trata de construir el primer término del desarrollo de la corriente en potencias de \mathbf{k} , es necesario formar mediante estas magnitudes un vector cuyo grado respecto de \mathbf{k} sea el menor posible. Conseguiremos esto for-

* A continuación seguimos un método debido a V. B. Berestetskii (1948).

mando un tensor de orden mínimo y multiplicándolo escalarmente $l - 1$ veces por el vector \mathbf{k} . El vector que así se obtiene será el vector polar \mathbf{v} o el vector axil \mathbf{a} .

Sean Q_{lm} las componentes esféricas del tensor construido a partir de las amplitudes de onda de las partículas. Las componentes esféricas del tensor de orden $l - 1$ formado con las componentes de \mathbf{k} son iguales a $|\mathbf{k}|^{l-1} Y_{l-1, m}(\mathbf{n})$ (donde $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$). Según la regla general de composición de tensores esféricos [véase III (107.3)], las componentes esféricas del vector \mathbf{v} se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned} v_\lambda = (-1)^{\lambda+1} i^l \frac{\sqrt{4\pi}}{(2l-1)!!} \sqrt{\frac{2l+1}{l}} |\mathbf{k}|^{l-1} \times \\ \times \sum_m \begin{pmatrix} l-1 & 1 & l \\ \lambda+m & -\lambda & -m \end{pmatrix} Q_{l, -m} Y_{l-1, \lambda+m}(\mathbf{n}), \end{aligned}$$

donde λ toma los valores 0, ± 1 (acerca de la elección del factor común, véase más adelante). Aplicando la fórmula (7.16), se puede expresar \mathbf{v} en función de vectores esféricos:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = i^l \frac{\sqrt{4\pi} |\mathbf{k}|^{l-1}}{(2l-1)!! \sqrt{l(2l+1)}} \sum_m (-1)^{l-m} Q_{l, -m} \times \\ \times [\sqrt{l+1} \mathbf{Y}_{lm}^{(E)}(\mathbf{n}) + \sqrt{l} \mathbf{Y}_{lm}^{(P)}(\mathbf{n})]. \quad (143.6) \end{aligned}$$

Substituyendo en (143.4) se encuentra la corriente- Ei de transición:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{fi} = i^l \frac{\sqrt{4\pi} \omega |\mathbf{k}|^{l-1}}{(2l-1)!! \sqrt{l(2l+1)}} \sum_m (-1)^{l-m} Q_{l, -m}^{(E)} \times \\ \times [\sqrt{l+1} \mathbf{Y}_{lm}^{(E)}(\mathbf{n}) + \sqrt{l} \mathbf{Y}_{lm}^{(P)}(\mathbf{n})], \quad (143.7) \end{aligned}$$

$$\rho_{fi} = i^l \frac{\sqrt{4\pi} |\mathbf{k}|^l}{(2l-1)!! \sqrt{2l+1}} \sum_m (-1)^{l-m} Q_{l, -m}^{(E)} Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (143.8)$$

(en todas estas fórmulas hemos distinguido $|\mathbf{k}|$ y ω teniendo en cuenta las posibles aplicaciones tanto a fotones reales como a fotones virtuales, para los cuales dichas cantidades no coinciden).

En (143.7-8) se supone que el tensor esférico Q_{lm} [designado aquí por $Q_{lm}^{(E)}$] es un tensor en sentido estricto. Pero si éste es un pseudotensor [en cuyo caso lo designaremos por $Q_{lm}^{(M)}$], la fórmula (143.6) determinará el pseudovector \mathbf{a} . La substitución en (143.5) da entonces la corriente- Mi de transición:

$$\mathbf{J}_{fi} = i^l \frac{\sqrt{4\pi}}{(2l-1)!!} \sqrt{\frac{l+1}{l(2l+1)}} |\mathbf{k}|^l \sum_m (-1)^{l-m} Q_{l, -m}^{(M)} \mathbf{Y}_{lm}^{(M)}(\mathbf{n}), \quad (143.9)$$

$$\rho_{fi} = 0.$$

Las cantidades $Q_{lm}^{(E)}$ y $Q_{lm}^{(M)}$ son los momentos multipolares eléctricos y magnéticos de transición hadrónicos. Su papel en la electrodinámica de los hadrones es por completo análogo al de las correspondientes magnitudes en la electrodinámica de los electrones. Sin embargo, así como para los sistemas electrónicos estos momentos se pueden calcular, en principio, a partir de las funciones de onda (como elementos de matriz de los correspondientes operadores), en la electrodinámica de los hadrones aparecen como magnitudes fenomenológicas cuyos valores se determinan experimentalmente.

La normalización de estas cantidades en (143.7-9) se ha elegido de manera que corresponda a sus definiciones en el § 46. Cabe cerciorarse de ello considerando las corrientes en (143.7-9) como componentes de Fourier de la corriente de transición en la representación de coordenadas. Así, desarrollando el factor $e^{-ik \cdot r}$ en forma de integral

$$\rho_{fi}(\mathbf{k}) = \int \rho_{fi}(r) e^{-ik \cdot r} d^3x \quad (143.10)$$

obtendremos, con ayuda de la fórmula (46.3),

$$\rho_{fi}(\mathbf{k}) = 4\pi i^l \sum_{l,m} Y_{lm}(n) \int \rho_{fi}(r) Y_{lm}^*(\frac{r}{r}) g_l(|\mathbf{k}|r) d^3x.$$

Conservando aquí el término con el menor valor de l para el que la integral es diferente de cero y substituyendo la función $g_l(|\mathbf{k}|r)$ cuando $|\mathbf{k}|r \ll 1$ por el primer término de su desarrollo (46.5), volvemos a la fórmula (143.9), en la que

$$Q_{lm}^{(E)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int r^l \rho_{fi}(r) Y_{lm}^*(\frac{r}{r}) d^3x \quad (143.11)$$

de acuerdo con la definición (46.7).

Demostremos también que, al aplicar a la emisión de un fotón real las fórmulas obtenidas, se llega a resultados que ya conocemos.

La amplitud de transición con emisión de un fotón de impulso $\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}$ y polarización $e = (0, \mathbf{e})$ es:

$$M_{fi} = -e \sqrt{4\pi} \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{J}_{fi}. \quad (143.12)$$

Si en los estados inicial y final el núcleo posee un determinado valor de la proyección del momento cinético (M_i y M_f), en cada una de las sumas respecto de m (143.7-9) queda sólo un término: $m = M_i - M_f$. Dado que según (16.23) los productos $\mathbf{Y}_{lm}^{(E)} \cdot \mathbf{e}^{(\lambda)*}$ o $\mathbf{Y}_{lm}^{(M)} \cdot \mathbf{e}^{(\lambda)*}$ (donde $\lambda = \pm 1$ es la helicidad del fotón, $\mathbf{e}^{(\lambda)} \perp \mathbf{n}$) son proporcionales a $D_{\lambda m}^k$, volvemos de nuevo a las fórmulas consideradas en el § 48.

La probabilidad diferencial de radiación es *

$$dw = 2\pi\delta[\omega - (E_i - E_f)] |M_{fi}|^2 \frac{d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \quad (143.13)$$

(E_i, E_f son las energías inicial y final del núcleo). La probabilidad total se obtendrá sumando respecto de las polarizaciones e integrando con relación d^3k . Substituyendo (143.7) o (143.9) en (143.12) y luego en (143.13) y efectuando las operaciones indicadas, obtenemos nuevamente la fórmula (46.9) [o la (47.2)].

Las fórmulas (143.7-9) comprenden todos los casos que pueden tener lugar en la emisión de un fotón real. En cambio, para los fotones virtuales es aún posible un caso más, no comprendido en estas fórmulas (R. H. Fowler, 1930).

Si los spins y las paridades de los estados inicial y final del núcleo son los mismos, a partir de sus amplitudes de onda es posible formar un escalar Q_0 y, mediante el mismo, una corriente de transición de la forma

$$\rho_{fi} = Q_0 \mathbf{k}^2, \quad J_{fi} = Q_0 \omega \mathbf{k}. \quad (143.14)$$

La cantidad Q_0 se llama momento *monopolar* (*E0*) de la transición. Para la emisión de un fotón real, la correspondiente amplitud de transición se anula (puesto que $e^* \cdot \mathbf{k} = 0$). Con todo, la corriente monopolar puede ser origen de transiciones vinculadas con la emisión de un fotón virtual. Además, resulta ser la única fuente posible si $s_1 = s_2 = 0$, caso en que todos los momentos multipolares son iguales a cero.

Por su dependencia respecto de ω y \mathbf{k} , la corriente monopolar (143.14) es análoga a la cuadripolar eléctrica. Por esto precisamente el momento Q_0 es una cantidad del mismo orden de magnitud que el momento cuadripolar. Es también posible llegar a esta conclusión interpretando (143.14) como componentes de Fourier de la corriente en la representación de coordenadas. Desarrollando en (143.10)

$$e^{-ikr} = 1 - ik \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})^2 + \dots$$

y admitiendo que las integrales de los dos primeros términos se anulan, obtendremos

$$\rho_{fi}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2} \int \rho_{fi}(\mathbf{r}) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})^2 d^3x$$

o bien, suponiendo que la función $\rho(\mathbf{r})$ presenta simetría esférica,

$$\rho_{fi}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{6} \mathbf{k}^2 \int \rho_{fi}(r) r^2 d^3x.$$

* El factor $2\pi\delta$ en esta fórmula, en vez del $(2\pi)^4 \delta^{(4)}$ en (65.11), se debe a que al prescindir del retroceso del núcleo el impulso no se conserva, con lo cual sólo subsiste la conservación de la energía.

Comparando con (143.14), se encuentra

$$Q_0 = -\frac{1}{6} \int \rho_{fi}(r) r^2 d^3x. \quad (143.15)$$

El parecido de esta magnitud con el momento cuadripolar es evidente.

PROBLEMAS

1. Hallar la probabilidad de ionización de un átomo en su capa-*K* debida a la energía de excitación del núcleo ω (este fenómeno es la llamada conversión interna de rayos- γ) en una transición-*Ml* nuclear, prescindiendo de la energía de enlace del electrón en el átomo y de la influencia del campo del núcleo sobre sus funciones de onda *.

Solución. El proceso se representa por el diagrama



donde p_1 y p_2 corresponden al núcleo inmóvil en diferentes estados, mientras que $p = (m, 0)$ y $p' = (m + \omega, \mathbf{p}')$ son los 4-impulsos de los electrones inicial y final. La amplitud asociada a este diagrama es

$$M_{fi} = e^2 \frac{4\pi}{q^2} \bar{u}(p') \hat{J}_{fi} u(p),$$

donde J_{fi} es la corriente de transición del núcleo. Después de sumar respecto de las polarizaciones finales del electrón y de promediar respecto de las iniciales, queda

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = e^4 \frac{16\pi^2}{(q^2)^2} \{ q^2 (J_{fi} J_{fi}^*) + 4 (J_{fi} p) (J_{fi}^* p) \}$$

(se ha tenido en cuenta que $J_{fi} q = 0$ y que, por lo tanto, $J_{fi} p = J_{fi} p'$). La probabilidad de conversión se calcula mediante la fórmula

$$dw_{\text{conv}} = 2 |\psi_i(0)|^2 \left(\frac{|\mathbf{p}|}{m} d\sigma \right)_{\mathbf{p} \rightarrow 0},$$

en la que $d\sigma$ es la sección eficaz de la dispersión representada por el diagrama (1) con $p = (\epsilon, \mathbf{p})$, y ψ_i es la función de onda del electrón atómico [para un electrón-*K* resulta $|\psi_i(0)|^2 = (Z\alpha m)^3/\pi$]. El factor 2 tiene en cuenta los dos electrones que se encuentran en la capa-*K* del átomo. La sección eficaz $d\sigma$ se calcula mediante

* Esta aproximación exige que la carga del núcleo sea pequeña y que las energías de excitación ω sean suficientemente grandes (a la vez que $1/\omega$ se supone grande comparado con las dimensiones del núcleo). De hecho esta aproximación es poco satisfactoria y un cálculo más preciso exige tener en cuenta el campo de Coulomb del núcleo.

$$d\sigma = 2\pi\delta(\epsilon + \omega - \epsilon') |M_{fi}|^2 \frac{d^3 p'}{2|\mathbf{p}| 2\epsilon' (2\pi)^3}$$

(cf. la nota en la pág. 237).

Para las transiciones-*M* la corriente J_{fi} debe calcularse a partir de (143.9). La integración de dw_{conv} respecto de $d\epsilon'$ elimina la función- δ , y la integración respecto de $d\omega'$ reduce el cuadrado $|Y_{lm}^{(M)}|^2$ a 1. En definitiva, la probabilidad de conversión interna se expresa en función del cuadrado $|Q_{l,-m}^{(M)}|^2$. Pero, según (46.9), también la probabilidad w_γ de emisión espontánea del fotón en la misma transición nuclear se expresa en función de dicha cantidad. Finalmente se obtiene

$$\frac{w_{\text{conv}}}{w_\gamma} = 2\alpha (Z\alpha)^3 \frac{m}{\omega} \left(1 + \frac{2m}{\omega}\right)^{l+1/2}$$

(esta razón se llama coeficiente de conversión).

2. El mismo problema para la transición-*E*/ nuclear.

Solución. Procediendo de la misma manera, con la corriente de transición dada por (143.7-8) se obtiene

$$\frac{w_{\text{conv}}}{w_\gamma} = 2\alpha (Z\alpha)^3 \left(1 + \frac{l}{l+1} \frac{m^2}{\omega^2}\right) \left(1 + \frac{2m}{\omega}\right)^{l-1/2}$$

3. El mismo problema para la transición monopolar de un núcleo.

Solución. Con la corriente de transición dada por (143.14), resulta

$$w_{\text{conv}} = 16\alpha^2 (Z\alpha)^3 m^3 \omega^2 \left(1 + \frac{2m}{\omega}\right)^{3/2} |Q_0|^2.$$

Dado que la emisión monopolar de un fotón es imposible, no cabe excluir aquí $|Q_0|^2$.

§ 144. Propiedades isotópicas de los factores de forma electromagnéticos de los hadrones

El operador vértice electromagnético $\Gamma(q)$ (un 4-vector) introducido en el § 139 actúa sobre las funciones de los 4-impulsos y de las variables espinoriales. Pero si se consideran también las propiedades isotópicas de las partículas, el operador vértice actuará asimismo sobre sus variables de isospin. En estas condiciones, los dos terminales hadrónicos del diagrama «de tres cabos» (139.2) no corresponderán ya necesariamente a una misma partícula: pueden ser dos términos cualesquiera de un isomultiplete. El elemento de matriz $\langle h | \Gamma | h \rangle$ (donde h designa la especie de hadrón), diagonal respecto de la variable de isospin, será, en cambio, el operador vértice sin variación de la especie de hadrón.

La interacción electromagnética viola la invariancia isotópica que poseen las interacciones fuertes. Esto significa que el operador vértice electromagnético Γ no es un isoscalar. Sus propiedades isotópicas se pueden establecer del siguiente modo.

Para $q = 0$ el elemento de matriz $\langle h | \Gamma(q) | h \rangle$ se reduce, como vimos en el § 139, a la carga eléctrica del hadrón Z . Pero $Z = Y/2 + T_3$, es decir, es suma de un isoscalar y del valor propio de la tercera componente de un isovector. Es natural suponer que el carácter isotensorial del operador Γ no depende de q . Entonces

$$\Gamma(q) = \Gamma_s(q) + \Gamma_3(q), \quad (144.1)$$

donde Γ_s es un operador isoscalar, y Γ_3 , la tercera componente de un operador isovectorial.

De (144.1) se sigue que para valores arbitrarios de q se tendrá

$$\langle h | \Gamma(q) | h \rangle = c_1(q) + c_2(q) T_3, \quad (144.2)$$

donde $c_1(q)$ y $c_2(q)$ son exactamente las mismas funciones (4-vectores) para todos los términos de un isomultiplete. Igual estructura poseerán los factores de forma electromagnéticos, en función de los cuales (según el § 139) se expresa el operador vértice sin cambio de especie del hadrón. La fórmula (144.2) da relaciones reales (es decir, permite eliminar c_1 y c_2) cuando el isomultiplete posee más de dos componentes, esto es, si $T > 1/2$. Por ejemplo, para el triplete de hiperones- Σ obtendremos

$$\langle \Sigma^+ | \Gamma | \Sigma^+ \rangle + \langle \Sigma^- | \Gamma | \Sigma^- \rangle = 2 \langle \Sigma^0 | \Gamma | \Sigma^0 \rangle.$$

En particular, tal debe ser la relación entre los momentos magnéticos de estas partículas:

$$\mu(\Sigma^+) + \mu(\Sigma^-) = 2\mu(\Sigma^0) \quad (144.3)$$

(R. E. Marshak, S. Okubo, E. Sudarshan, 1958.)

Admitiendo para las interacciones fuertes la simetría unitaria más amplia $SU(3)$, hay que atribuir también al operador Γ un determinado carácter superespinorial.

Para ello observemos que la matriz diagonal λ_1^1 es el operador de carga de un quark [cf. (136.14) y la definición (138.5)]. En cambio, la matriz $-\bar{\lambda}_1^1$, que actúa sobre un subíndice, es el operador de carga de un antiquark. Por consiguiente, el operador de carga en un supermultiplete cualquiera es $Z = \Lambda_1^1 - \bar{\Lambda}_1^1$ [con Λ definido en (138.4)]. De manera análoga a como se procedió al deducir (144.1), es natural admitir que en el caso general $q \neq 0$ la estructura superespinorial del operador Γ será

$$\Gamma = c_1 \Lambda_1^1 + c_2 \bar{\Lambda}_1^1 \quad (144.4)$$

(N. Cabibbo, R. Gatto, S. Coleman, S. L. Geshow, 1961.)

PROBLEMA

Hallar las relaciones entre los momentos magnéticos de las componentes del superoctete bariónico.

Solución. La forma general del elemento de matriz $\langle h | \Gamma | h \rangle$, y con él también del momento magnético $\mu(h)$, es:

$$\mu(h) = c_1 \bar{\Psi}_b^c (\lambda_1^1)_a^b \Psi_a^c + c_2 \bar{\Psi}_c^b (\lambda_1^1)_b^a \Psi_a^c$$

[cf. (138.6)]. Calculando esta cantidad para las diferentes componentes del octete bariónico, obtendremos [además de la igualdad (144.3) que ha resultado ya de la invariancia isotópica] las siguientes relaciones:

$$\mu(n) = \mu(\Xi^0) = 2\mu(\Lambda) = -2\mu(\Sigma^0),$$

$$\mu(p) = \mu(\Sigma^+), \quad \mu(\Sigma^-) = \mu(\Xi^-).$$

CAPÍTULO 16

LA INTERACCIÓN DÉBIL

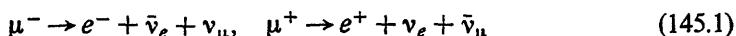
§ 145. Interacción débil de los leptones

Los *leptones** constituyen un grupo especial de partículas no susceptibles de experimentar las interacciones fuertes. A él pertenecen los electrones e^- , los muones μ^- y los dos tipos de neutrinos: el llamado neutrino electrónico ν_e y el muónico ν_μ , como también sus antipartículas: e^+ , μ^+ , $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$. Todos los leptones tienen spin $1/2$. Recordaremos (véase § 30) que el neutrino difiere del antineutrino en el signo de la helicidad, llamándose neutrino a la partícula con helicidad $\lambda = -1/2$, y antineutrino aquélla para la cual $\lambda = +1/2$.

La masa del muón vale

$$m_\mu = 105,66 \text{ MeV}$$

Los muones son partículas inestables que se desintegran según las reacciones



con una vida media de $2,20 \times 10^{-6}$ s.

Las únicas interacciones entre leptones son las débiles (aparte las electromagnéticas). Además, se cumplen dos leyes específicas de conservación; los datos con que se cuenta quedan resumidos en la formulación de dichas leyes que atribuyen a los leptones determinados valores de los números leptónicos electrónico (L_e) y muónico (L_μ):

$$L_e = \begin{matrix} e^- & \nu_e & e^+ & \bar{\nu}_e \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{matrix} \quad L_\mu = \begin{matrix} \mu^- & \nu_\mu & \mu^+ & \bar{\nu}_\mu \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{matrix}. \quad (145.2)$$

Las leyes de conservación de estos números significan, en otras palabras, que en las reacciones se conservan por separado las sumas

* De la palabra griega «leptos», que significa «menudo», «ligero».

$$N_{e^-} + N_{\nu_e} - N_{e^+} - N_{\bar{\nu}_e} \quad \text{y} \quad N_{\mu^-} + N_{\nu_\mu} - N_{\mu^+} - N_{\bar{\nu}_\mu},$$

donde los N son los correspondientes números de partículas.

Al mismo tiempo, las interacciones débiles violan algunas de las leyes de conservación observadas por las interacciones electromagnéticas y fuertes: no se conservan ni la paridad espacial ni la de carga *. En las reacciones en que participan hadrones, se violan también la conservación del spin isotópico y de la hipercarga.

No existe en la actualidad una teoría física consecuente de las interacciones débiles. Incluso se ignora si de algún modo es posible formularla por separado, con independencia de una teoría de las interacciones fuertes. La teoría con que contamos tiene en esencia el carácter de una mera teoría fenomenológica. Se basa en la utilización de diversas consideraciones de simetría y de invariancia relativista, y también en algunas hipótesis especiales. Cualquiera que sea su grado de verosimilitud, estas hipótesis no constituyen un sistema lógicamente estructurado y la creencia en ellas sólo puede fundarse en los resultados que proporciona la confirmación experimental directa, que en la actualidad es todavía, con mucho, insuficiente.

Consideremos primero las «reacciones débiles» (es decir, las reacciones determinadas por las interacciones débiles) en las que participan únicamente leptones. El ejemplo más importante de tales reacciones es la desintegración del muón (145.1).

La forma más general de la amplitud de este proceso, establecida a partir solamente de la condición de invariancia relativista, es:

$$M_{fi} = \sum_{n=1}^4 f_n I_n, \quad (145.3)$$

donde los f_n son amplitudes invariantes (funciones de los 4-impulsos de las partículas, véase § 71) y los I_n combinaciones invariantes «cuatrilineales» formadas a partir de las amplitudes de onda de las cuatro partículas que intervienen en la reacción. El número de términos en esta suma, es decir, el número de amplitudes invariantes independientes, es igual a cuatro; esto resulta evidente sin más que contar los posibles conjuntos de valores de las helicidades de las partículas (teniendo en cuenta que las helicidades del neutrino son cantidades dadas).

Subrayaremos que al hablar de invariancia de los términos de la suma (145.3) estamos pensando solamente en la invariancia respecto de las transformaciones de Lorentz, pero no en relación con la inversión espacial. En este mismo sentido hablamos en lo que sigue de 4-vectores. La cuestión del comportamiento respecto de la inversión en general pierde aquí su sentido, puesto que, cambiando el signo de la helicidad, la inversión transformaría el neutrino en una partícula que no existe en la naturaleza.

* Los primeros en lanzar la idea de la posible no conservación de la paridad espacial en las interacciones débiles fueron Lee y Yang (1956).

Para concretar, consideraremos la desintegración del μ^- . Hay que recordar que, al formar las amplitudes de reacción, la antipartícula en el estado final (con 4-impulso p) figura como partícula en el estado inicial (con 4-impulso $-p$).

En la representación espinorial las amplitudes de onda de las partículas se escriben:

$$u_e = \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \end{pmatrix}, \quad u_\mu = \begin{pmatrix} \xi_\mu \\ \eta_\mu \end{pmatrix}, \quad u_\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_\nu \end{pmatrix}, \quad (145.4)$$

donde ξ y η son, respectivamente, espinores no puntados y puntados. Mediante las componentes u_{ν_e} y $u_{\nu_\mu}^*$ se pueden formar cuatro magnitudes bilineales:

$$\xi_{rs}^{(v_e v_\mu)} = \eta_{\nu_e r} \eta_{\nu_\mu s}^*$$

($r, s = 1, 2$) equivalentes a las componentes de un 4-vector (véase § 18; recordemos que η^* es un espinor no puntado). Por otro lado, a partir de las componentes u_μ y u_e^* cabe construir de manera análoga dos 4-vectores:

$$\xi_{rs}^{(e\mu)} = \eta_{\mu r} \eta_{es}^*, \quad \chi_{rs}^{(e\mu)} = \xi_{\mu r}^* \xi_{es}.$$

Mediante estas cantidades se forman dos invariantes:

$$I_1 = \xi_{rs}^{(v_e v_\mu)} \xi^{(e\mu) rs}, \quad I_2 = \xi_{rs}^{(v_e v_\mu)} \chi^{(e\mu) rs}$$

Para obtener todavía dos invariantes más hay que introducir, junto con las amplitudes de onda (145.4), otras magnitudes —uno cualquiera de los 4-impulsos característicos de la reacción.

Para interpretar los datos experimentales de que se dispone acerca de la desintegración del muón resulta suficiente admitir que, de las cuatro amplitudes invariantes que aparecen en (145.3), de hecho sólo hay una diferente de cero; la que corresponde al invariante I_1 , el cual contiene únicamente componentes (η) iguales de las funciones de onda de las partículas en interacción. De manera simétrica, con independencia de la representación elegida para las funciones de onda, este invariante se escribe *

$$I_1 = \frac{1}{2} (\bar{u}_e O_\alpha u_\mu) (\bar{u}_\nu O^\alpha u_\nu),$$

donde

$$O^\alpha = \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) = (1 - \gamma^5) \gamma^\alpha = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \gamma^\alpha (1 + \gamma^5). \quad (145.5)$$

* En este capítulo designaremos los índices tensoriales en cuatro dimensiones por las primeras letras del alfabeto griego α, β, \dots para evitar que se confundan con los índices μ, ν , que hemos de utilizar para representar las partículas.

Los factores $(1 \pm \gamma^5)$ en las matrices O^α eliminan de los productos $(\bar{u}Ou)$ las componentes- ξ de los bispinores (cf. § 30). Designando por $-G/\sqrt{2}$ la correspondiente amplitud invariante, escribiremos la amplitud de reacción de desintegración del muón en la forma

$$M_{fi} = -\frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{u}_e O_\alpha u_\mu) (\bar{u}_{v_\mu} O^\alpha u_{v_e}) \quad (145.6)$$

o bien, en la equivalente

$$M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{u}_e O_\alpha u_{v_e}) (\bar{u}_{v_\mu} O^\alpha u_\mu) \quad (145.7)$$

(véase problema 2, § 28).

La magnitud G podría ser una cierta función (invariante) de los 4-impulsos de las partículas. Pero los datos experimentales acerca de la desintegración del muón con que contamos permiten prescindir de esta posible dependencia y considerar que G es una magnitud constante, la constante de la interacción débil.

La constancia de G permite representar la amplitud (145.7) como elemento de la matriz S calculada en primer orden respecto del hamiltoniano

$$-\frac{G}{\sqrt{2}} \int (\bar{\Psi}_e O_\alpha \Psi_{v_e}) (\bar{\Psi}_{v_\mu} O^\alpha \Psi_\mu) d^3x, \quad (145.8)$$

que se puede considerar como parte del hamiltoniano de interacción responsable de este proceso. En el hamiltoniano total esta parte debe aparecer junto con la expresión conjugado-hermítica. En la conjugación hermítica se tiene

$$(\bar{\Psi}_{v_e} O^\alpha \Psi_e)^+ = (\bar{\Psi}_e \bar{O}^\alpha \Psi_{v_e}), \quad \bar{O}^\alpha = \gamma^0 O^{\alpha+} \gamma^0. \quad (145.9)$$

Observando que $\gamma^{5+} = \gamma^5$ y que $\gamma^{\alpha+} = \gamma^0 \gamma^\alpha \gamma^0$, se encuentra $\bar{O}^\alpha = O^\alpha$. Por consiguiente, la expresión conjugado-hermítica de (145.8) tiene la forma

$$-\frac{G^*}{\sqrt{2}} \int (\bar{\Psi}_{v_e} O_\alpha \Psi_e) (\bar{\Psi}_\mu O^\alpha \Psi_{v_\mu}) d^3x. \quad (145.10)$$

Si el operador (145.8) es responsable de la desintegración del μ^- , el operador (145.10) lo será de la desintegración del μ^+ .

Sin limitar la generalidad, la constante G puede suponerse real. En efecto, el operador- ψ de cualquier campo complejo está determinado solamente salvo un factor de fase arbitrario [cf. (12.10)]. Por ello, mediante la correspondiente transformación de cualquiera de los operadores- ψ se puede eliminar cualquier factor de fase en G .

El paso natural consecutivo hacia la generalización consiste en postular la siguiente forma del hamiltoniano de la interacción débil de los leptones:

$$H_w = -\frac{G}{\sqrt{2}} \int (j_w^+ j_w) d^3x, \quad (145.11)$$

donde el 4-vector j_w — el operador de *corriente débil* — se determina de acuerdo con *

$$\begin{aligned} j_w^\alpha &= \bar{\psi}_e O^\alpha \psi_{v_e} + \bar{\psi}_\mu O^\alpha \psi_{v_\mu}, \\ j_w^{\alpha+} &= \bar{\psi}_{v_e} O^\alpha \psi_e + \bar{\psi}_{v_\mu} O^\alpha \psi_\mu. \end{aligned} \quad (145.12)$$

El operador j_w disminuye la carga eléctrica del sistema en 1 (creación de un e^- o de un μ^- o aniquilación de un e^+ o de un μ^+), mientras que el operador j_w^+ aumenta la carga en 1; en cambio, el producto $j_w^+ j_w$ no la modifica. El método de construcción de los operadores (145.12) tiene también en cuenta, naturalmente, la conservación de ambos números leptónicos. Junto con los términos (145.8), (145.10), en la expresión (145.11) aparecen también términos que llevan a nuevos procesos, a la dispersión elástica del neutrino por los electrones.

Hay que hacer notar el carácter simétrico de la corriente (145.12) respecto de los pares de partículas $e v_e$ y μv_μ . Esto significa que la diferencia en las propiedades de los procesos débiles con participación de un electrón o de un muón puede estar vinculada tan sólo con la diferencia de sus masas. Recordemos que esta misma situación se produce también en relación con las interacciones electromagnéticas del electrón y del muón.

Las dimensiones de la densidad de corriente (en unidades ordinarias) son: $[j] = \text{cm}^{-3}$. En consecuencia, las dimensiones de la constante de interacción son $[G] = \text{erg} \cdot \text{cm}^3$. En unidades relativistas esto significa que G tiene las dimensiones del recíproco del cuadrado de una masa. Su valor numérico en estas unidades resulta ser

$$G = 1,0 \cdot 10^{-5} m_p^{-2}, \quad (145.13)$$

donde m_p es la masa del nucleón. En unidades ordinarias, en cambio,

$$G = 1,0 \cdot 10^{-5} \frac{\hbar^3}{m_p^2 c} = 1,43 \cdot 10^{-49} \text{ erg} \cdot \text{cm}^3 \quad (145.14)$$

El número sin dimensiones 10^{-5} caracteriza el orden de pequeñez de la interacción.

Una propiedad característica del hamiltoniano (145.11) ligada con la hipótesis de que G sea constante, consiste en su naturaleza «local»: los cuatro operadores- ψ

* El primero en representar la interacción débil como producto de dos corrientes bilineales respecto de operadores- ψ fue Fermi en 1934 con su teoría de la desintegración- β . Gell-Mann y Feynman (1958), de una parte, y Marshak y Sudarshan (1958), de otra, han propuesto una variante de la teoría basada en una corriente de la forma (145.12).

se toman, todos, para exactamente los mismos valores de las 4-coordenadas x . Cabe decir que todas las partículas se crean o aniquilan en un mismo punto. En otras palabras, dicha hipótesis significa que el «radio de acción» de las fuerzas débiles se supone igual a cero.

Es necesario subrayar que el sentido de la introducción del hamiltoniano (145.11) no va más allá del de ser un procedimiento para construir las amplitudes de reacción en la primera aproximación de la teoría de perturbaciones. La aplicación de este operador a aproximaciones de orden superior conduciría a la aparición de divergencias inevitables. En este sentido, (145.11) es simplemente un hamiltoniano fenomenológico, efectivo.

A la no conservación de la paridad en las interacciones débiles corresponde la no invariancia del hamiltoniano (145.11) respecto de la inversión espacial. A esta no invariancia nos referimos ya anteriormente al construir las amplitudes de reacción. Resulta también evidente en virtud de la propia manera de escribir las corrientes mediante las matrices O^α : una expresión de la forma $\bar{\psi}_a \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) \psi_b$ es suma de dos 4-vectores, de los cuales uno es un vector en sentido estricto (V), y el otro, un pseudovector (A), por lo que uno y otro se transforman de manera distinta en la inversión *.

El hamiltoniano (145.11) tampoco es invariante respecto de la conjugación de carga. Sin embargo, sí lo es en la aplicación simultánea de ambas transformaciones (*inversión combinada*). Recordaremos que, en virtud de la invariancia universal-*CPT*, la inversión-*CP* equivale a invertir el sentido del tiempo.

Las reglas de transformación de los operadores 4-vectoriales

$$V^\alpha = \bar{\psi}_a \gamma^\alpha \psi_b, \quad A^\alpha = \bar{\psi}_a \gamma^\alpha \gamma^5 \psi_b$$

en la conjugación de carga y en la inversión se establecieron en el § 28. Combinando (28.4) y (28.7), se encuentra que el operador CP transforma estos 4-vectores de la misma manera:

$$CP: (V_{ab}^0, V_{ab}) \rightarrow (-V_{ba}^0, V_{ba}), \quad (A_{ab}^0, A_{ab}) \rightarrow (-A_{ba}^0, A_{ba}).$$

Para el operador corriente esto significa la sustitución

$$CP: (j_w^0, j_w) \rightarrow (-j_w^{0+}, j_w^+). \quad (145.15)$$

En cuanto a los productos de corrientes, se tiene $j_w^+ j_w \rightarrow j_w j_w^+ = j_w^+ j_w$ (la permutación de j_w y j_w^+ está ligada con el número par de transposiciones de operadores- ψ diferentes y, por ello, no obliga a cambiar el signo).

* Por esta razón, la interacción de las corrientes (145.12) se llama a menudo interacción ($V - A$).

Así, pues, la interacción débil representada por el hamiltoniano (145.11) conserva la paridad combinada *.

§ 146. Desintegración del muón

Según (65.11) la probabilidad diferencial, por unidad de tiempo, de la desintegración en tres partículas (en el sistema propio del muón) se expresa en función de la amplitud $|M_{fi}|^2$ por la fórmula

$$d\omega = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_e + k_e + k_\mu - p_\mu) \frac{|M_{fi}|^2}{2m_\mu} \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3 2\varepsilon_e} \frac{d^3 k_e}{(2\pi)^3 2\omega_e} \frac{d^3 k_\mu}{(2\pi)^3 2\omega_\mu}. \quad (146.1)$$

Aquí $p_\mu = (m_\mu, 0)$ y $p_e = (\varepsilon_e, \mathbf{p}_e)$ son los 4-impulsos del muón y del electrón, y $k_\mu = (\omega_\mu, \mathbf{k}_\mu)$ y $k_e = (\omega_e, \mathbf{k}_e)$, los 4-impulsos de los dos neutrinos (o antineutrinos).

El cuadrado $|M_{fi}|^2$ se calcula mediante las reglas expuestas en el § 66. Tenemos

$$|M_{fi}|^2 = \frac{G^2}{2} (\bar{u}_e O_\alpha u_{\nu_e})(\bar{u}_{\nu_e} O_\beta u_e)(\bar{u}_{\nu_\mu} O^\alpha u_\mu)(\bar{u}_\mu O^\beta u_{\nu_\mu})$$

[M_{fi} se toma en la forma (145.7)]. Introduciendo las matrices densidad de polarización de todas las partículas, escribiremos esta expresión en la forma

$$|M_{fi}|^2 = \frac{G^2}{2} \text{Tr}(\rho_e O_\alpha \rho_{\nu_e} O_\beta) \text{Tr}(\rho_\mu O^\beta \rho_{\nu_\mu} O^\alpha) \equiv \frac{G^2}{2} A_{\alpha\beta}^{(e)} A^{(\mu)\beta\alpha} \quad (146.2)$$

Según (29.13) y (29.16) las matrices densidad del electrón y del muón son

$$\rho = \frac{1}{2} (\hat{p} \pm m)(1 - \gamma^5 a), \quad a\rho = 0$$

(con los índices e o μ); aquí y en lo que sigue los signos superiores o inferiores corresponden a la desintegración del μ^- o del μ^+ , respectivamente. En cuanto a las matrices ρ_ν , hay que hacer

$$\rho_\nu = \tilde{k},$$

lo que corresponde a la matriz densidad, sumada respecto de las polarizaciones, de una partícula «de cuatro componentes» y masa nula (que el neutrino posee dos

* El principio de conservación de la paridad- CP fue introducido por L. D. Landau (1957) para «salvar» la simetría espectral del espacio después del descubrimiento de la no conservación de la paridad. La observancia universal de este principio (es decir, la simetría total de la naturaleza respecto de la inversión acompañada simultáneamente de la sustitución de partículas por antipartículas) hacia recaer la asimetría sobre las partículas en vez de hacerlo sobre el espacio. La no invariancia respecto de C y P por separado, en cambio, no afectaría a la simetría del espacio, en el mismo sentido en que no la afecta la existencia de moléculas esteroisoméricas. Actualmente, sin embargo, se conocen también procesos de interacción débil en los que la paridad combinada no se conserva (§ 154).

componentes se ha tenido ya en cuenta mediante la introducción en las matrices O^α del factor $1 + \gamma^5$.

Juntando los factores $1 + \gamma^5$ y γ^5 y prescindiendo de todos los términos que se anulan idénticamente (según el número de matrices γ que aparecen en ellos), obtendremos

$$A^{\alpha\beta} = \text{Tr } \hat{P} \gamma^\alpha k_\gamma^\beta (1 + \gamma^5), \quad P = p - ma,$$

hecho lo cual el cálculo, con ayuda de (22.13) y (22.20), da

$$A^{\alpha\beta} = 4 [P^\alpha k^\beta + P^\beta k^\alpha - (Pk) g^{\alpha\beta} - ie^{\alpha\beta\gamma\delta} P_\gamma k_\delta]. \quad (146.3)$$

Substituyendo en (146.2) y efectuando el producto, se encuentra *

$$|M_{fi}|^2 = 32G^2 [(p_e k_\mu) - m_e (a_e k_\mu)] [(p_\mu k_e) - m_\mu (a_\mu k_e)]. \quad (146.4)$$

La integración de la probabilidad (146.1) respecto del impulso del neutrino se reduce al cálculo de la integral

$$\begin{aligned} I^{\alpha\beta} &= \int \frac{k_e^\alpha k_\mu^\beta}{\omega_e \omega_\mu} \delta^{(4)} (k_e + k_\mu - q) d^3 k_e d^3 k_\mu, \\ q &= p_\mu - p_e \equiv (\omega, q). \end{aligned} \quad (146.5)$$

Es evidente que esta integral debe tener la forma

$$I^{\alpha\beta} = A q^2 g^{\alpha\beta} + B k^\alpha k^\beta.$$

Para determinar A y B , escribamos

$$I_a^\alpha = (4A + B) q^2 = \frac{1}{2} I q^2, \quad I^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = (A + B) (q^2)^2 = \frac{1}{4} I (q^2)^2,$$

donde hemos utilizado las igualdades $q = k_e + k_\mu$, $k_e^2 = k_\mu^2 = 0$ y se ha designado por I la integral escalar

$$I = \int \frac{d^3 k_e d^3 k_\mu}{\omega_e \omega_\mu} \delta^{(4)} (k_e + k_\mu - q).$$

La integración respecto de $d^3 k_\mu$ desaparece debido al factor $\delta(k_e + k_\mu - q)$, con lo cual

* Recordemos que $e_{\alpha\beta\rho\sigma} e^{\gamma\delta\rho\sigma} = -2(\delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\delta - \delta_\alpha^\delta \delta_\beta^\gamma)$.

$$I = \int \frac{d^3 k_e}{\omega_e \omega_\mu} \delta(\omega_e + \omega_\mu - \omega).$$

Calculando este escalar en el sistema del centro de masa de los dos neutrinos ($\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_\mu = 0$, $\omega_e = \omega_\mu$), obtendremos

$$I = \int \frac{4\pi \omega_e^2 d\omega_e}{\omega_e^2} \delta(2\omega_e - \omega) = 2\pi.$$

Finalmente, para $I^{\alpha\beta}$:

$$I^{\alpha\beta} = \frac{\pi}{6} (q^2 g^{\alpha\beta} + 2q^\alpha q^\beta). \quad (146.6)$$

Reuniendo las expresiones obtenidas se encuentra para la probabilidad diferencial (respecto del impulso del electrón) de desintegración por unidad de tiempo

$$dw = \frac{G^2}{6(2\pi)^4 m_\mu} (p_e \mp m_e a_e)_\alpha (p_\mu \mp m_\mu a_\mu)_\beta (q^2 g^{\alpha\beta} + 2q^\alpha q^\beta) \frac{d^3 p_e}{\epsilon_e}. \quad (146.7)$$

La energía liberada en la desintegración del muón es grande comparada con la masa del electrón. Por ello, casi en la totalidad de su espectro los electrones de desintegración se pueden considerar ultrarrelativistas, y al escribir en forma explícita las expresiones cuadridimensionales en (146.7) cabe prescindir de las cantidades $\sim m_e/\epsilon_e$ (al igual que de las $\sim m_e/m_\mu$). En el sistema en que el muón se encuentra en reposo, tendremos

$$q^2 = m_\mu^2 - 2m_\mu \epsilon_e, \quad (p_e q) = (p_e p_\mu) = \epsilon_e m_\mu, \quad (q p_\mu) = m_\mu^2 - \epsilon_e m_\mu$$

(se han omitido aquí los términos $\sim m_e^2/\epsilon_e^2$). En este mismo sistema, las componentes de los 4-vectores a_μ y a_e son

$$a_\mu = (0, \zeta_\mu), \quad a_e = (1, \mathbf{n}_e) \frac{\epsilon_e}{m_e} \mathbf{n}_e \cdot \zeta_e^{(d)},$$

donde $\mathbf{n}_e = \mathbf{p}_e/\epsilon_e$ es la dirección del electrón, y $\zeta_e^{(d)}$ y ζ_μ son los vectores polarización del electrón y del muón [el superíndice (d) en ζ_e recuerda que ésta es la polarización dada de la partícula final y registrada por el detector]. Despues de simples transformaciones obtendremos finalmente la siguiente expresión para la distribución de los electrones en energías y direcciones para la desintegración de un muón polarizado:

$$dw = \frac{G^2 m_\mu^5}{3 \cdot 2^8 \pi^4} (1 \mp \zeta_e^{(d)} \cdot \mathbf{n}_e) \left[\left(3 - 2 \frac{\epsilon_e}{\epsilon_{\max}} \right) \pm \zeta_\mu \cdot \mathbf{n}_e \left(1 - 2 \frac{\epsilon_e}{\epsilon_{\max}} \right) \right] \frac{\epsilon_e^2 d\epsilon_e d\Omega_n}{\epsilon_{\max}^3}. \quad (146.8)$$

Aquí $\epsilon_{\max} \approx m_\mu/2$ es el valor máximo que puede tomar la energía del electrón (valor que se alcanza cuando ambos neutrinos se emiten hacia un lado, y el electrón, hacia el opuesto). Conviene observar que los términos (146.8) que son proporcionales a $\zeta_e \cdot \mathbf{n}_e$ o a $\zeta_\mu \cdot \mathbf{n}_e$ son resultado de la no conservación de la paridad espacial; estos términos cambian de signo en la inversión espacial y, por lo tanto, estarían prohibidos por la condición de invariancia respecto de esta transformación.

Después de sumar en (146.8) respecto de las polarizaciones del electrón y de integrar con relación a sus direcciones, se obtendrá *

$$dw_e = w \cdot 2 \left(3 - 2 \frac{\epsilon_e}{\epsilon_{\max}} \right) \frac{\epsilon_e^2 d\epsilon_e}{\epsilon_{\max}^3}, \quad (146.9)$$

donde w es la probabilidad total de desintegración:

$$w = \frac{G^2 m_\mu^5}{192 \pi^3}. \quad (146.10)$$

El hecho de que la dependencia de la probabilidad de desintegración respecto de $\zeta_e^{(a)}$ venga dada por el factor $(1 \mp \zeta_e^{(a)} \cdot \mathbf{n}_e)$, significa que el vector polarización de la partícula como a tal (sin referencia alguna al detector) es igual a $\zeta_e = \mp \mathbf{n}_e$, es decir, el electrón (o el positón) está por completo polarizado en el sentido opuesto (o en el propio sentido) de su movimiento. Este resultado se podía prever: en el elemento de matriz (145.8) figuran solamente componentes γ de la amplitud u_e (en su representación espinorial). Para un electrón ultrarrelativista estas componentes corresponden a la helicidad $\lambda = -1/2$ (y para el positón, a la helicidad $\lambda = +1/2$).

La correspondencia unívoca de las componentes espinoriales de la función de onda del electrón con valores determinados λ , sin embargo, tiene lugar solamente en el caso límite en que se prescinde por completo de su masa (cuando se separan las ecuaciones para los espinores γ y ξ). En las aproximaciones siguientes, al tener en cuenta que la masa del electrón no es nula, junto con la variación de su grado de polarización longitudinal (a lo largo de \mathbf{n}_e), aparece también la componente transversal del vector ζ_e . Claro está, dicha componente existe únicamente en la desintegración de un muón polarizado y se encuentra en el plano determinado

* Esta distribución no es aplicable cuando $\epsilon_e \sim m_e$. Sin embargo, tener en cuenta términos de orden superior con relación a m_e/ϵ_e en los cálculos que acabamos de exponer carecería de sentido, puesto que en la región inicial del espectro de los electrones, pasan a ser esenciales las correcciones por radiación (§ 147).

Obsérvese que cuando $\epsilon_e \gg m_e$ el error que se comete al promediar (146.9) respecto de las polarizaciones es $\sim m_e^2/\epsilon_e^2$.

por los vectores \mathbf{n}_e y ζ_μ . La polarización del electrón en la dirección perpendicular a este plano está prohibida por la condición de invariancia- T . En efecto, a ella correspondería un término de la forma $\zeta_e^{(d)} \cdot [\mathbf{n}_e \times \zeta_\mu]$ en la expresión de la probabilidad de desintegración. Pero un término de este tipo no es invariante (cambia de signo) en la transformación

$$\mathbf{n}_e \rightarrow -\mathbf{n}_e, \quad \zeta_e^{(d)} \rightarrow -\zeta_e^{(d)}, \quad \zeta_\mu \rightarrow -\zeta_\mu, \quad (146.11)$$

que expresa la inversión del tiempo junto con la condición de hermiticidad de la matriz S en la primera aproximación de la teoría de perturbaciones [cf. (87.26)].

PROBLEMAS

- Calcular la sección eficaz de dispersión elástica del neutrino por un electrón.

Solución. La amplitud de dispersión es

$$M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{u}(p') O^\alpha u(p)] [\bar{u}(k') O_\alpha u(k)],$$

donde $p = (\epsilon, \mathbf{p})$, $k = (\omega, \mathbf{k})$ y p' , k' son los 4-impulsos iniciales y finales del electrón y del neutrino. El cuadrado $|M_{fi}|^2$ sumado respecto de las polarizaciones del electrón final y promediado respecto de las del inicial vale:

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = 2 \cdot 32 G^2 (pk) (p'k') = 64 G^2 (pk)^2$$

[cf. (146.4)]. Segundo (65.19), para la sección eficaz total encontramos:

$$\sigma = \frac{G^2}{\pi^2} \frac{(pk)^2}{(p+k)^2} 4\pi.$$

En el sistema del centro de masa:

$$pk = \epsilon\omega + \omega^2, \quad (p+k)^2 = (\epsilon + \omega)^2, \quad \epsilon = \sqrt{m_e^2 + \omega^2},$$

de modo que *

$$\sigma = \frac{4G}{\pi} \omega^2.$$

Expresando σ en función de la energía Ω del neutrino en el sistema del laboratorio [$kp = m_e\Omega$, $(k+p)^2 = m_e^2 + 2m_e\Omega$], obtendremos

$$\sigma = \frac{4G^2 m_e^2}{\pi} \frac{(\Omega/m_e)^2}{1 + 2\Omega/m_e}.$$

* Dado el carácter local de la interacción débil, en la dispersión interviene solamente la onda-s. Según la condición de unitariedad, su sección eficaz no puede ser mayor que $\sim \omega^{-2}$ [cf. III (122.12)]. En cambio, la expresión obtenida crece sin límites al aumentar ω y alcanza el límite superior indicado ya para $\omega \sim G^{-1/2}$. De aquí cabe concluir que la teoría expuesta deja de ser aplicable, en cualquier caso, para tales energías.

2. Lo mismo para la dispersión de un antineutrino por un electrón.
Solución. La amplitud de dispersión es:

$$M_{fi} = \frac{G}{V^2} [\bar{u}(p') O^\alpha u(p)] [\bar{u}(-k) O_\alpha u(-k')],$$

y luego

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = 64G^2 (pk')(p'k) = 64G^2 (pk')^2.$$

La sección eficaz en el sistema del centro de masa vale:

$$d\sigma = \frac{G^2}{\pi^2} \frac{\omega^2 (\epsilon + \omega \cos \theta)^2}{(\epsilon + \omega)^2} d\Omega'$$

(θ es el ángulo de dispersión). Para la sección eficaz total se tiene:

$$\sigma = \frac{4G^2}{3\pi} \frac{\omega^2 (3\epsilon^2 + \omega^2)}{(\epsilon + \omega)^2}.$$

En el sistema del laboratorio:

$$\sigma = \frac{2G^2 m_e \Omega}{3\pi} \left[1 - \left(1 + 2 \frac{\Omega}{m_e} \right)^{-3} \right].$$

3. Lo mismo para la reacción $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$.

Solución. A diferencia del problema 1, los 4-impulsos p y p' se refieren ahora a partículas de masa distinta (e y μ). Por consiguiente, en el sistema del centro de masa los módulos de los impulsos $|p| = |k| = \omega$ y $|p'| = |k'| = \omega'$ son a su vez distintos. Mediante (65.19), se obtiene para la sección eficaz total

$$\sigma = \frac{4G^2}{\pi} \omega'^2,$$

donde ω' es la energía del neutrino final.

§ 147. Correcciones radiativas a la desintegración del muón

Hemos recordado ya que el hamiltoniano de la interacción débil (145.11) tiene sólo sentido en la primera aproximación de la teoría de perturbaciones; carece de significado el considerar correcciones de orden superior respecto de G en la teoría actual. Sin embargo, los leptones cargados —electrones y muones— pueden experimentar, además de las interacciones débiles, también interacciones electromagnéticas, las cuales es posible considerar junto con las débiles. Tener en cuenta esta interacción conduce, en primer lugar, a procesos reales —a la emisión de fotones y a la creación de pares electrón-positón en la desintegración de un muón. En segundo lugar, aparecen correcciones radiativas a la probabilidad de desintegración asociadas con la emisión y absorción de fotones virtuales por un muón y un electrón.

Tener en cuenta a la vez ambas interacciones equivale a adoptar el hamiltoniano

$$H_{\text{int}} = H_w + V, \quad (147.1)$$

donde H_w viene dado por la expresión (145.11) y V es el operador de interacción electromagnética del muón y el electrón:

$$V = e \int (\bar{\Psi}_e \hat{A} \Psi_e + \bar{\Psi}_\mu \hat{A} \Psi_\mu) d^3x, \quad (147.2)$$

pudiéndose considerar únicamente los términos de primer orden respecto de H_w , pero —en general— de orden arbitrario respecto de V . El operador dispersión-S, de acuerdo con esto, tiene la forma [cf. (73.9)]

$$\begin{aligned} S &= T \exp \left\{ -i \int [H_w(t) + V(t)] dt \right\} \approx \\ &\approx S_{el} - iT \left\{ \int H_w(t) dt e^{-i \int V(t) dt} \right\}, \end{aligned} \quad (147.3)$$

donde S_{el} se refiere a transiciones puramente electromagnéticas. Procediendo con esta expresión de la manera indicada en el § 78, es fácil construir una técnica de diagramas para el cálculo de la amplitud de un proceso en cualquier aproximación respecto de la interacción electromagnética.

En la aproximación de orden cero respecto de V obtendremos, como era de esperar, el resultado (145.6) para la amplitud de desintegración del muón representada por el diagrama de un vértice con cuatro fermiones:

$$= iM_{fi} = -\frac{iG}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{v_\mu} O^\alpha u_{v_e}) (\bar{u}_e O_\alpha u_\mu) \quad (147.4)$$

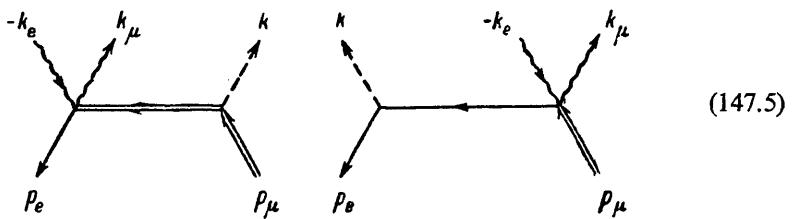
(la línea de muón se ha representado, para diferenciarla de la línea de electrón, como línea doble; las líneas onduladas corresponden al neutrino)*.

A partir de (147.4) se obtienen diagramas más complicados, que corresponden a aproximaciones siguientes respecto de la interacción electromagnética, añadiendo líneas de fotones virtuales y reales, lazos cerrados de electrón y de muón de acuerdo con las reglas ordinarias. Claro está, las líneas de fotón pueden ramificarse solamente a partir de líneas de partículas cargadas, es decir, de electrón y de muón. Las líneas

* Para concretar, consideramos aquí procesos con desintegración del muón que se describen por un término de la forma (145.8) en el hamiltoniano H_w . Diagramas del todo análogos se obtienen para procesos de dispersión del neutrino por un electrón y otros parecidos.

de neutrino forman siempre un par de terminales exteriores, al que corresponde en la amplitud del proceso el factor $-\frac{iG}{\sqrt{2}}(\bar{u}_{v_\mu} O^\alpha u_{v_e})$. Respecto de las líneas de muón y de electrón, el papel de operador vértice asociado con un vértice de cuatro fermiones lo representa la matriz O^α (con el mismo índice 4-vectorial α).

En primer orden respecto de la interacción electromagnética tenemos dos diagramas:



que describen el proceso de emisión de un fotón k en la desintegración de un muón (*radiación de frenado interna*). Escribamos como ejemplo de aplicación de los diagramas la amplitud de este proceso:

$$M_{fi} = -\sqrt{4\pi} e \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{v_\mu} O_\alpha u_{v_e}) (\bar{u}_e Q^{\alpha\beta} u_\mu) e_\beta^*,$$

$$Q^{\alpha\beta} = \frac{O^\alpha (\beta_\mu - k + m_\mu) \gamma^\beta}{(p_\mu - k)^2 - m_\mu^2} + \frac{\gamma^\beta (\beta_\mu - k_e - k_\mu + m_e) O^\alpha}{(p_\mu - k_e - k_\mu)^2 - m_e^2}.$$

En cuanto a la probabilidad del mismo, ésta se expresa en función de la amplitud mediante la fórmula (65.11). Con carácter informativo, daremos aquí la fórmula final para la probabilidad de desintegración del muón (μ^+ o μ^-) con emisión simultánea de un fotón $k = (\omega, \mathbf{k})$ sumada respecto de las polarizaciones de todas las partículas e integrada respecto de los impulsos de ambos neutrinos:

$$d\omega_{p_e k} = -\frac{\alpha G^2}{6(2\pi)^6} \frac{d^3 p_e}{\epsilon_e m_\mu} \frac{d^3 k}{\omega} \left\{ \left[\frac{m_\mu^4}{2} - q^2 \left(q^2 - \frac{m_\mu^2}{2} \right) \right] \left(\frac{p_\mu}{(p_\mu k)} - \frac{p_e}{(p_e k)} \right)^2 - 4q^2 - \frac{(kq)^2}{(p_e k) m_\mu \omega} (2q^2 + m_\mu^2) \right\}, \quad (147.6)$$

donde $q = p_\mu - p_e - k$ (A. Lenard, 1953). Esta fórmula se ha escrito en el sistema propio del muón y en ella se ha prescindido de m_e^2 frente a m_μ^2 .

En el caso límite de energías suficientemente pequeñas del fotón, en (147.6) se pueden suprimir los últimos dos términos y hacer en el primero $q = p_\mu - q_e$.

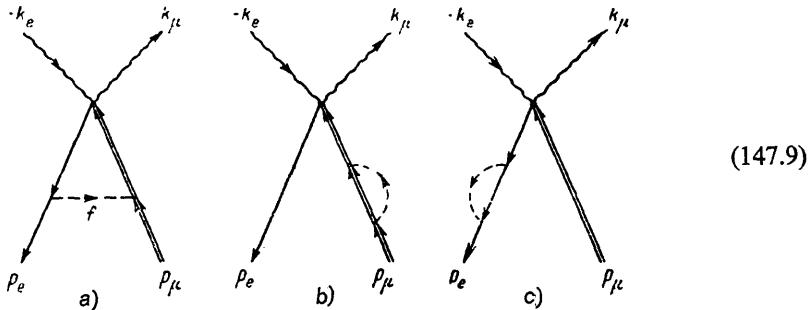
De acuerdo con los resultados del § 95, la expresión (147.6) se descompone entonces en el producto $d\omega_{pek} = d\omega_p d\omega_k$ de la probabilidad del proceso «elástico» (probabilidad de desintegración del muón sin emisión del fotón) por el factor

$$d\omega_k = -\alpha \left[\frac{p_e}{(p_e k)} - \frac{p_\mu}{(p_\mu k)} \right]^2 \frac{d^3 k}{4\pi^2 \omega}. \quad (147.7)$$

Este último coincide con la intensidad de radiación clásica, dividida por ω , en la creación de una partícula cargada (véase II, problema en el § 69). Tomando de allí el resultado de la integración respecto de los ángulos de emisión del fotón, obtendremos (para $\epsilon_e \gg m_e$)

$$d\omega_\omega = \frac{2\alpha}{\pi} \left(\ln \frac{2\epsilon_e}{m} - 1 \right) \frac{d\omega}{\omega}. \quad (147.8)$$

En el segundo orden respecto de la interacción electromagnética, al proceso real corresponden diagramas que describen la emisión simultánea de dos fotones en la desintegración del muón. Los restantes diagramas de este orden dan correcciones radiativas a la probabilidad de la desintegración. Los diagramas correspondientes son de la forma



El primero de ellos (corrección a un vértice de cuatro fermiones) da una contribución a la amplitud del proceso igual a

$$M_{fi}^{(a)} = \frac{ie^2 G}{\sqrt{2}} (\bar{u}_v \gamma_\mu O_a u_v) (\bar{u}_e Q^\alpha u_\mu),$$

donde

$$Q^\alpha = \int \frac{\gamma^\beta (\not{p}_e + \not{f} + m_e) O^\alpha (\not{p}_\mu + \not{f} + m_\mu) \gamma_\beta}{[(\not{p}_e + \not{f})^2 - m_e^2] [(\not{p}_\mu + \not{f})^2 - m_\mu^2] (\not{f}^2 - \lambda^2)} \frac{d^4 f}{4\pi^3}; \quad (147.10)$$

«la masa del fotón» λ se ha introducido para evitar la divergencia en el infrarrojo. La integral (147.10) diverge logarítmicamente para valores grandes de f . Por ello, al calcularla directamente de acuerdo con las reglas del § 127 hay que introducir de modo explícito un corte para valores grandes del impulso del fotón virtual, es decir, limitar el dominio de integración respecto de d^4f por la condición *

$$|f^2| \leq \Lambda^2, \quad \Lambda^2 \gg m_\mu^2.$$

Entonces $M_{fi}^{(a)}$ dependerá de $\ln \Lambda$. Esta dependencia se elimina renormalizando los terminales exteriores del diagrama, esto es, teniendo en cuenta los diagramas (147.9 b-c). De acuerdo con el § 107 [véase (107.15)] esta renormalización se reduce a substituir la amplitud en la aproximación de orden cero $M_{fi}^{(0)}$ por

$$M_{fi}^{(0)} \sqrt{Z_{1e} Z_{1\mu}} \approx M_{fi}^{(0)} \left(1 + \frac{1}{2} Z_{1e}^{(1)} + \frac{1}{2} Z_{1\mu}^{(1)} \right),$$

donde $Z_{1e} = 1 + Z_{1e}^{(1)}$, $Z_{1\mu} = 1 + Z_{1\mu}^{(1)}$ son las constantes de renormalización (residuos en los polos de los propagadores de electrón y de muón). En otras palabras, la contribución de los diagramas (147.3 b) y (147.9 c) a la amplitud es igual a

$$M_{fi}^{(6)} + M_{fi}^{(e)} = M_{fi}^{(0)} \frac{1}{2} (Z_{1e}^{(1)} + Z_{1\mu}^{(1)}). \quad (147.11)$$

Según (116.7 a), la constante

$$Z_{1e}^{(1)} = -\frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{m_e^2} + \frac{9}{4} + \ln \frac{\lambda^2}{m_e^2} \right],$$

y análogamente para $Z_{1\mu}^{(1)}$, con la substitución de m_e por m_μ .

De esta manera la corrección regularizada a la amplitud de desintegración del muón es

$$\delta M_{fi} = M_{fi}^{(a)} + M_{fi}^{(b)} + M_{fi}^{(c)}.$$

Esta cantidad ya no contiene Λ y, por lo tanto, es finita**. Obsérvese que su estructura matricial difiere de la estructura de la amplitud $M_{fi}^{(0)}$, no perturbada por la interacción electromagnética. En este sentido cabe decir que las correcciones radiativas violan el carácter «universal» de la interacción débil ($V - A$).

La amplitud $M_{fi} = M_{fi}^{(0)} + \delta M_{fi}$ depende de la «masa del fotón» λ . Para elimi-

* La integral análoga (114.3) (corrección al factor de forma de electrón) se calculó en el § 114 siguiendo el método de las relaciones de dispersión.

** Se puede demostrar que esta reducción se produce también en las aproximaciones de orden superior respecto de la interacción electromagnética.

nar esta dependencia es necesario, como siempre, sumar a la probabilidad de desintegración la probabilidad de desintegración con emisión simultánea de un fotón de masa λ ; en la probabilidad total se puede pasar al límite $\lambda \rightarrow 0$. En casos análogos, aplicamos antes (§§ 119, 130) este procedimiento teniendo en cuenta fotones blandos con una energía menor que un cierto ω_{\max} pequeño. En el presente caso, sin embargo, desde el punto de vista del planteo real del experimento, la cantidad que más interesa es el valor de la probabilidad total de desintegración teniendo en cuenta la posible emisión de fotones de cualesquiera energías (no sólo de energías pequeñas). Esta probabilidad viene dada por la suma de la expresión (146.1), en la cual en vez del cuadrado de la amplitud hay que substituir

$$|M_{fi}|^2 \approx |M_{fi}^{(0)}|^2 + (M_{fi}^{(0)} \delta M_{fi}^* + M_{fi}^{(0)*} \delta M_{fi}),$$

y la expresión (147.6); esta última debe integrarse respecto de d^3k suponiendo $k^2 = \lambda^2$. Esta integración es muy complicada, tanto como el cálculo de la integral (147.10).

Daremos solamente el resultado final para la distribución energética de los electrones en la desintegración de un muón no polarizado (μ^+ o μ^-) sumada respecto de las polarizaciones del electrón:

$$dw_e = \left[1 + \frac{a}{2\pi} h(x) \right] dw_e^{(0)}, \quad (147.12)$$

donde $dw_e^{(0)}$ es la distribución (146.9) y la función $h(x)$ es igual a

$$\begin{aligned} h(x) = & -4F(-x) - \frac{2\pi^2}{3} + \\ & + 3L - 4 + 2 \ln x [3 \ln(1-x) - 2 \ln x - 2L + 1] + \\ & + 2 \left(2L - 1 - \frac{1}{x} \right) \ln(1-x) + \frac{6(1-x)}{3-2x} \ln x + \\ & + \frac{(1-x)}{3x^2(3-2x)} [(5 + 17x - 34x^2)(L + \ln x) - 22x + 34x^2], \end{aligned}$$

en la cual $x = \epsilon_e/\epsilon_{\max}$, $L = \ln(m_\mu/m_e)$ y $F(x)$ es la función de Spence (127.19) (*S. M. Berman, 1958*). Las fórmulas se han escrito a partir de la hipótesis de que $m_e/\epsilon_e \ll 1$ y prescindiendo de todos los términos que tienden a cero cuando $m_e \rightarrow 0$. Algunos valores numéricos de la función $h(x)$ se dan en la tabla. Para $x \rightarrow 0$ y para $x \rightarrow 1$ la función $h(x)$ crece sin límites [como $x^{-2} \ln x$ y como $\ln(1-x)$, respectivamente]; con esto dejan de ser aplicables las fórmulas de la teoría de perturbaciones. Sin embargo, la probabilidad integral (respecto de todas las energías) de la desintegración se conserva finita; la corrección radiativa a la vida media del muón resulta ser igual a $\delta\tau = +4,4 \cdot 10^{-3}\tau_0$, donde τ_0 es la vida media calculada sin tener en cuenta las correcciones.

TABLA 3.

x	$100 \frac{\alpha}{2\pi} h(x)$	x	$100 \frac{\alpha}{2\pi} h(x)$
0,2	9,69	0,7	-0,23
0,3	5,54	0,8	-1,42
0,4	3,43	0,9	-3,06
0,5	2,01	0,94	-4,16
0,6	0,85	0,98	-6,45

§ 148. Estructura cinemática de la corriente débil hadrónica

La amplitud de un proceso en el que, junto con los leptones, participan también hadrones se puede representar en la forma

$$M_{fi} = \frac{G}{V^2} \langle l_f | j_w | l_i \rangle \langle h_f | J_w | h_i \rangle, \quad (148.1)$$

donde el primer factor es la corriente leptónica de transición, y el segundo, la corriente débil hadrónica (l_i , h_i y l_f , h_f son, respectivamente, el lepton y el hadrón iniciales y finales). Estos factores se suponen independientes uno de otro en el sentido de que cada uno de ellos, en tanto que función de sus variables independientes (4-impulsos y helicidades), no depende de la especie de las partículas entre las que tiene lugar la transición en el segundo factor*. Es natural suponer en tal caso que el elemento de matriz de lepton tiene la misma forma que en las reacciones puramente leptónicas. En lo que concierne a la corriente débil de hadrón, para ella vale todo lo dicho al principio del § 139 al hablar de corriente electromagnética hadrónica: es inseparable de la contribución debida a las interacciones fuertes virtuales.

Veamos qué se puede decir acerca de las propiedades de la corriente de transición hadrónica partiendo sólo de consideraciones fenomenológicas. Junto con las condiciones puramente cinemáticas, nos apoyaremos también en el hecho de que la amplitud de reacción únicamente puede depender del 4-impulso total de los leptones que se forman (y no de los 4-impulsos de cada uno de ellos por separado). Esta condición expresa (en la representación de impulsos) la propiedad ya mencionada en el § 145 de «localidad» del hamiltoniano de la interacción débil de los leptones.

Consideraremos sucesivamente diferentes tipos de reacciones.

1) Desintegración de un mesón en leptones:

$$\pi^\pm \rightarrow l^\pm + v_l (\bar{v}_l), \quad K^\pm \rightarrow l^\pm + v_l (\bar{v}_l)$$

* Con esto se presupone, en particular, que es posible prescindir de la influencia de la interacción electromagnética entre las partículas sobre el proceso considerado (supuesto que exista tal influencia).

(donde $l = e$ o μ). Para concretar, nos referiremos a la desintegración

$$\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e. \quad (148.2)$$

Para construir la corriente hadrónica se dispone solamente del pseudoescalar u_π —que es la amplitud de la función de onda del mesón— y del 4-vector $q = p_\mu + p_\nu$, 4-impulso total de los leptones *. El 4-vector corriente de transición construido a partir de ellos es:

$$\langle 0 | J_w^\alpha | \pi \rangle = f u_\pi q^\alpha, \quad (148.3)$$

donde f es un coeficiente invariante (factor de forma) que, en el presente caso, se reduce a una constante, porque constante es el único invariante de que puede depender: $q^2 = p_\pi^2 = m_\pi^2$. Obsérvese también que los valores q^2 y $f(q^2)$ no dependen de la masa del leptón que resulta l y, en consecuencia, son los mismos para las desintegraciones $\pi \rightarrow e + \nu$ y $\pi \rightarrow \mu + \nu$ **.

Multiplicando (148.3) por la corriente leptónica de transición

$$\langle e | j_w^\alpha | \nu \rangle = \bar{u}_e \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) u_\nu,$$

obtendremos la amplitud de desintegración

$$M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}} f u_\pi (\bar{u}_e \hat{q} (1 + \gamma^5) u_\nu).$$

Finalmente, haciendo $q = p_e + p_\nu$ y utilizando las ecuaciones de Dirac para el electrón y el neutrino

$$\bar{u}_e \hat{p}_e = m_e \bar{u}_e, \quad \hat{p}_\nu u_\nu = 0,$$

se encuentra

$$M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}} f u_\pi m_e (\bar{u}_e (1 + \gamma^5) u_\nu). \quad (148.4)$$

El electrón que resulta en la desintegración (148.2), está por completo polarizado longitudinalmente, de modo que el signo de su helicidad coincide con el de la helicidad del ν_e . En efecto, en la desintegración en dos partículas las helicidades de éstas están ligadas entre sí por la relación $\lambda_\pi = \lambda_e - \lambda_\nu$ [véase (70.12)]; dado que en el presente caso $\lambda_\pi = 0$, se tendrá $\lambda_e = \lambda_\nu = 1/2$ (análogamente para el positón emitido):

* Las amplitudes de onda de las partículas de spin 0 se suponen normalizadas por las condiciones $u_\pi u_\pi = 1$ (§ 10). En los cálculos concretos de probabilidades de desintegración, se puede hacer simplemente $u_\pi = 1$.

** El factor de forma f tiene las dimensiones de una masa. Los valores experimentales son: $|f_\pi| = 0,94 m_\pi$, $|f_K| = 0,072 m_K$, $|f_\pi|/|f_K| = 3,7$.

$\lambda_e = \lambda_\nu = -\frac{1}{2}$). De esta manera, la polarización del electrón tiene el carácter de «forzada», viniendo determinada unívocamente por la conservación del momento cinético. Obsérvese la relación entre esta circunstancia y la existencia del factor m_e en (148.4). Al final del § 146 se indicó que la estructura de la corriente débil leptónica es tal que, en el límite $m_e \rightarrow 0$, el electrón que resulta tiene helicidad $\lambda_e = -\frac{1}{2}$; por ello, la probabilidad de una desintegración en la que debe ser $\lambda_e = \frac{1}{2}$, ha de anularse en el límite $m_e \rightarrow 0$.

2) Desintegración de un mesón en otro mesón y leptones:

$$\pi^\pm \rightarrow \pi^0 + l^\pm + \nu_l (\bar{\nu}_l), \quad (148.5)$$

donde de nuevo $l = e$ o μ (he aquí otro ejemplo: $K^\pm \rightarrow \pi^0 + l^\pm + \nu_l (\bar{\nu}_l)$). La corriente hadrónica de transición debe formarse a partir de los pseudoescalares \bar{u}_{π^0} y $[\bar{u}_{\pi^\pm}]$ —que son las amplitudes de onda de los mesones— y de los 4-impulsos de que disponemos. Entre éstos figuran los 4-impulsos de los mesones inicial (p_1) y final (p_2) y también el 4-impulso total de los leptones q ; en virtud de la ley de conservación $p_1 = p_2 + q$, sólo dos de ellos son independientes. La forma general del elemento de matriz es:

$$\langle \pi^0 | J_w^\alpha | \pi^\pm \rangle = u_{\pi^0}^* u_{\pi^\pm} (f_1 P^\alpha + f_2 q^\alpha) \quad (148.6)$$

donde $P = p_1 + p_2$ y f_1, f_2 son funciones invariantes de los 4-impulsos (factores de forma). Con p_1 y p_2 es únicamente posible construir un invariante independiente (que no se reduzca a una constante), por ejemplo q^2 . Por consiguiente, f_1, f_2 son funciones de una única variable independiente.

Hay que hacer notar que la corriente (148.6) [y lo mismo vale para (148.3)] tiene un carácter espacio-temporal bien determinado; para paridades intrínsecas iguales de los mesones, la corriente (148.6) es un 4-vector en sentido estricto. Este hecho está vinculado con el de que dichos mesones carecen de spin.

En la desintegración (148.5) la polarización del lepton l (e o μ) no tiene carácter «forzoso», como ocurría en la desintegración (148.2). Si $l = e$, y prescindiendo de la masa del electrón, e^- tendrá de nuevo (al igual que en la desintegración del muón § 146), automáticamente, la helicidad $-\frac{1}{2}$, y e^+ , la helicidad $+\frac{1}{2}$. Constituyen excepción únicamente los casos en los que el π^0 no transporta energía y e y ν son emitidos en sentidos opuestos; en la aproximación $m_e \rightarrow 0$, la probabilidad de tales desintegraciones, por consiguiente, debe reducirse a cero.

3) Desintegración de un barión en otro barión y leptones, por ejemplo la desintegración- β del neutrón *

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (148.7)$$

* Pertenecen también a este caso las desintegraciones de los hiperones $\Lambda \rightarrow p + l^- + \bar{\nu}_l$, $\Sigma^+ \rightarrow \Lambda^+ + l^\pm + \nu_l (\bar{\nu}_l)$, etc.

La cuestión acerca de cuál sea la forma de la corriente de transición hadrónica para partículas de spin $1/2$, se estudió ya en el § 139 para el caso electromagnético. El hecho de que allí la transición fuera acompañada de la emisión de una partícula (un fotón), mientras que aquí lo es por la de dos partículas (e y ν), carece de importancia, puesto que en la corriente sólo pueden figurar el 4-impulso total de los leptones q y, en este sentido, éstos equivalen a una partícula única. Sin embargo, la corriente de transición no tiene por qué satisfacer ahora la condición de transversalidad. En el caso electromagnético esta condición estaba ligada con la conservación de la carga eléctrica, mientras que en el caso de las interacciones débiles no existe, en general, una regla de conservación análoga (volveremos a tratar esta cuestión en el § 150). Además, la corriente débil puede contener tanto partes puramente vectoriales como pseudovectoriales.

Vimos en el § 113 que con las magnitudes de que disponemos se pueden construir tres vectores (en sentido estricto) independientes, por ejemplo:

$$\bar{u}_p \gamma^\alpha u_n, \quad (\bar{u}_p \sigma^{\alpha\beta} u_n) q_\beta, \quad (\bar{u}_p u_n) q^\alpha,$$

donde u_n , u_p son las amplitudes de onda del barión inicial (n) y del final (p), y $q = p_p - p_n$. De manera análoga se forman 4-pseudovectores, que contienen, además, la matriz γ^5 . Eligiremos como terna de pseudovectores independientes

$$\bar{u}_p \gamma^\alpha \gamma^5 u_n, \quad (\bar{u}_p \gamma^5 u_n) P^\alpha, \quad (\bar{u}_p \gamma^5 u_n) q^\alpha,$$

donde $P = p_p + p_n$. De esta manera, la forma general de la corriente de transición débil bariónica es

$$\langle p | J_w^\alpha | n \rangle = \bar{u}_p (f_1 \gamma^\alpha + f_2 \sigma^{\alpha\beta} q_\beta + f_3 q^\alpha) u_n + \bar{u}_p (g_1 \gamma^\alpha + g_2 P^\alpha + g_3 q^\alpha) \gamma^5 u_n. \quad (148.8)$$

Los factores de forma $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ son funciones del invariante q^2 .

PROBLEMAS

1. Hallar las probabilidades de las desintegraciones $\pi \rightarrow \mu + \nu$ y $\pi \rightarrow e + \nu$.

Solución. La probabilidad de desintegración (en el sistema propio del pión) es

$$w = (2\pi)^4 \int \int \delta^{(4)}(p_\pi - p_l - p_\nu) \frac{|M_{fi}|^2}{2m_\pi} \frac{d^3 p_l}{(2\pi)^3 2e_l} \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3 2e_\nu}.$$

El cuadrado $|M_{fi}|^2$ [con M_{fi} tomado de (148.3)], sumado respecto de las polarizaciones del lepton l , da:

$$\sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = \frac{G^2}{2} |f|^2 m_l^2 \text{Sp } \hat{p}_\nu (1 + \gamma^5) (\hat{p}_l + m_l) (1 + \gamma^5) = 4G^2 m_l^2 (p_l p_\nu).$$

Esta expresión se reduce a una constante, puesto que de $(p_l + p_\nu)^2 = p_\pi^2 = m_\pi^2$ se sigue que

$$p_l p_v = \frac{1}{2} (m_\pi^2 - m_l^2).$$

Queda la integral

$$I = \int \int \frac{d^3 p_l d^3 p_v}{e_l e_v} \delta^{(4)} (p_\pi - p_l - p_v) = \int \frac{d^3 p_v}{e_l e_v} \delta (m_\pi - e_l - e_v).$$

Observando que $|p_l| = |p_v| = e_v$, tenemos

$$I = \int \frac{4\pi e_v^2 de_v}{e_v e_l} \delta (m_\pi - e_v - e_l) = \frac{4\pi e_v}{e_l \frac{d}{de_v} (e_v + e_l)} = \frac{4\pi e_v}{e_v + e_l} = 2\pi \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{m_\pi^2}.$$

Finalmente:

$$w = \frac{G^2 |\mathbf{f}|^2}{8\pi} m_\pi m_l^2 \left(1 - \frac{m_l^2}{m_\pi^2} \right)^2.$$

La razón de probabilidades de las dos desintegraciones vale:

$$\frac{w(\pi \rightarrow e + v)}{w(\pi \rightarrow \mu + v)} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2} \right)^2 \approx 1,3 \cdot 10^{-4}.$$

Viene determinada por sólo la razón m_e/m_μ .

2. Hallar la probabilidad diferencial (respecto de la energía e_π) de la desintegración $K^\pm \rightarrow \pi^0 + e^\pm + v_e (\bar{v}_e)$.

Solución. Las corrientes de transición hadrónica y leptónica son:

$$\langle \pi^0 | J_w | K^- \rangle = f_1 p_K + f_2 p_\pi = (f_1 + f_2) p_K - f_2 (p_e + p_v),$$

$$(e | j_w | v) = \bar{u}_e \gamma (1 + \gamma^5) u_v.$$

Multiplicando una por otra, utilizando la ecuación de Dirac para u_e y u_v , y prescindiendo de la masa del electrón frente a las masas m_π y m_K , se encuentra para la amplitud de desintegración *

$$M_{fi} = \sqrt{2} G f \bar{u}_e \beta_K (1 + \gamma^5) u_v \quad f = \frac{1}{2} (f_1 + f_2).$$

La probabilidad de desintegración (en el sistema propio del K) vale:

$$dw = (2\pi)^{-5} \frac{|M_{fi}|^2}{2m_K} \frac{d^3 p_e}{2e_e} \frac{d^3 p_v}{2e_v} \frac{d^3 p_\pi}{2e_\pi} \delta^{(4)} (p_K - p_\pi - p_e - p_v). \quad (1)$$

Después de sumar respecto de las polarizaciones, se encuentra

$$\sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = 2G^2 |\mathbf{f}|^2 \text{Tr} \beta_v \beta_K (1 + \gamma^5) \bar{\rho}_e \beta_K (1 + \gamma^5) =$$

$$= 4G^2 |\mathbf{f}|^2 \text{Tr} \beta_v \beta_K \bar{\rho}_e \beta_K = 16G^2 |\mathbf{f}|^2 \{2(p_e p_K) (p_v p_K) - p_K^2 (p_e p_v)\}. \quad (2)$$

* Para la desintegración $K \rightarrow \pi + \mu + v$ no basta prescindir de las cantidades análogas y en la amplitud subsisten ambos factores de forma independientes.

La integración respecto de $d^3p_e d^3p_\nu$ se efectúa teniendo en cuenta (146.5-6) y da en definitiva

$$dw = \frac{G^2 m_K}{12\pi^3} |\mathbf{f}|^2 (e_\pi^2 - m_\pi^2)^{1/2} de_\pi.$$

La energía e_π varía en el intervalo

$$m_K \leq e_\pi \leq \frac{m_K^2 + m_\pi^2}{2m_K}.$$

El límite superior corresponde al caso en que e y ν se emiten hacia un mismo lado (prescindimos en todas partes de la masa del electrón!). Recordemos que f es función de $q^2 = (p_e + p_\nu)^2$, o bien, lo que es lo mismo, función de e_π [puesto que $q^2 = (p_K - p_\pi)^2 = m_K^2 + m_\pi^2 - 2m_K e_\pi$]. Si se prescinde de esta dependencia, la probabilidad total de desintegración valdrá

$$w \approx \frac{G^2 |\mathbf{f}|^2 m_K^2}{768\pi^3} \left(1 - 8 \frac{m_\pi^2}{m_K^2} \right).$$

3. Para la misma desintegración, hallar el espectro de los electrones correspondiente a una energía dada e_π .

Solución. Escribiendo explícitamente en (2) los productos de 4-impulsos, substituyendo en (1) e integrando respecto de d^3p , obtendremos

$$dw = \frac{G^2 |\mathbf{f}|^2}{(2\pi)^5} m_K (e_e e_\nu + p_e p_\nu) \delta(e_e + e_\nu + e_\pi - m_K) \frac{d^3p_e d^3p_\nu}{e_e e_\pi e_\nu}.$$

De la igualdad $p_e + p_\nu = -p_\pi$ se sigue

$$p_e p_\nu = \frac{1}{2} \{ p_\pi^2 - e_e^2 - (m_K - e_\pi - e_e)^2 \},$$

$$e_e e_\nu + p_e p_\nu = \frac{1}{2} \{ p_\pi^2 - (m_K - e_\pi - 2e_e)^2 \}.$$

La integración respecto de las direcciones de p_e y p_π se reduce al cálculo de la integral

$$\int \delta(e_e + e_\pi + \sqrt{p_e^2 + p_\pi^2 + 2|p_e||p_\pi|\cos\theta} - m_K) d\cos\theta = \frac{e_\nu}{e_e |p_\pi|}$$

(θ es el ángulo determinado por p_e y p_π). Finalmente:

$$dw = \frac{G^2 |\mathbf{f}|^2 m_K}{8\pi^3} [p_\pi^2 - (m_K - e_\pi - 2e_e)^2] de_\pi de_e.$$

La energía e_e , para e_π dada, varía entre los límites

$$\frac{1}{2} (m_K - e_\pi - |p_\pi|) \leq e_e \leq \frac{1}{2} (m_K - e_\pi + |p_\pi|).$$

§ 149. Carácter real de los factores de forma

El elemento de matriz de transición M_{fi} (148.1) corresponde a la primera apro-

ximación de la teoría de perturbaciones (respecto de la interacción débil). Por ello, la matriz M_{fi} es hermítica: $M_{if}^* = M_{if}$. Esto significa que también para las corrientes de transición que aparecen en (148.1) el paso a la expresión conjugada compleja las transforma en las corrientes de las transiciones inversas.

Así, para la desintegración- β del neutrón (148.7)

$$\langle e | j_w | v \rangle^* = \langle v | j_w | e \rangle, \quad \langle p | J_w | n \rangle^* = \langle n | J_w | p \rangle. \quad (149.1)$$

Para las corrientes leptónicas de transición, que vienen dadas por las expresiones

$$\langle e | j_w | v \rangle = \bar{u}_e O u_v, \quad \langle v | j_w | e \rangle = \bar{u}_v O u_e,$$

la relación (149.1) se cumple automáticamente. En cuanto a la corriente de transición hadrónica, escrita en la forma $\langle p | J | n \rangle = (u_p \Gamma u_n)$, se obtiene para ella

$$\langle n | J_w | p \rangle = (\bar{u}_p \Gamma u_n)^* = \bar{u}_n \bar{\Gamma} u_p, \quad \bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^+ \gamma^0.$$

Con la matriz Γ dada por (148.8), tenemos

$$\begin{aligned} \langle n | J_w^\alpha | p \rangle &= \bar{u}_n (f_1^* \gamma^\alpha - f_2^* \sigma^{\alpha\beta} q_\beta + f_3^* q^\alpha) u_p + \\ &\quad + \bar{u}_n (g_1^* \gamma^\alpha - g_2^* P^\alpha - g_3^* q^\alpha) \gamma^5 u_p. \end{aligned} \quad (149.2)$$

Así, pues, la corriente de la transición inversa ($p \rightarrow n$) se expresa mediante los factores de forma conjugado-complejos f^* , g^* . Sin embargo, dado que los procesos directo e inverso son diferentes ($n \rightarrow p$ y $p \rightarrow n$), no es posible deducir de aquí todavía conclusión alguna acerca de las propiedades de los propios factores de forma *.

Ahora bien, cabe llegar a tales conclusiones si se impone, además, la invariancia- CP (o, lo que es lo mismo, la invariancia- T) de la interacción **. Formularemos esta condición (junto con la de hermiticidad de M) en términos de operadores- ψ .

El hecho de que se trate del primer orden en la teoría de perturbaciones significa que las amplitudes de las transiciones M_{fi} y M_{if} deben ser elementos de matriz de un mismo operador hermítico, a saber, del hamiltoniano efectivo de interacción. Si la corriente de transición $\langle e | j_w | v \rangle$ es el elemento de matriz del operador $j_w = \bar{\Psi}_e O \psi_v$ y $\langle p | J_w | n \rangle$ lo es de un cierto operador J_w^+ , las corrientes de las transiciones inversas serán elementos de matriz de los operadores j_w^+ y J_w , y el hamiltoniano debe contener los productos de uno y otro:

* Para la corriente de transición electromagnética, ya el mero carácter hermítico de M_{fi} permitía deducir que los factores de forma son reales (§§ 113, 139). Esto se debía a que se trataba de una transición (con emisión de un fotón) en la que no cambiaba la partícula como a tal y, en consecuencia, sus estados inicial y final diferían solamente en los valores de los 4-impulsos.

** Para evitar malentendidos, recordaremos que para las amplitudes de transición la invariancia- T significa, no la igualdad de los procesos directo e inverso, sino del directo y del «inverso en el tiempo». Este último proceso difiere del «inverso» en que, junto con la permutación de los estados inicial y final, se cambian también los 4-impulsos $p = (\epsilon, \mathbf{p})$ por los valores «inversos en el tiempo» $p^T = (\epsilon, -\mathbf{p})$.

$$H_w = \frac{G}{V^2} (j_w J_w^+ + j_w^+ J_w). \quad (149.3)$$

En la transformación CP , el operador de corriente leptónica se convierte en el

$$(j_w^0, j_w)_{CP} = (-j_w^{0+}, j_w^+)$$

[véase (145.15)]. El hamiltoniano (149.3) será invariante- CP si también para la corriente hadrónica es

$$(J_w^0, J_w)_{CP} = (-J_w^{0+}, J_w^+). \quad (149.4)$$

Demostremos que para que así ocurra todos los factores de forma deben ser reales.

A la corriente de transición (148.8) puede asociarse el operador *

$$\begin{aligned} J_w^{a+} = & f_1 (\bar{\Psi}_p \gamma^a \Psi_n) + f_2 (p_p^* - p_n)_\beta (\bar{\Psi}_p \sigma^{ab} \Psi_n) + f_3 (p_p^* - p_n)^a (\bar{\Psi}_p \Psi_n) + \\ & + g_1 (\bar{\Psi}_p \gamma^a \gamma^5 \Psi_n) + g_2 (p_p^* + p_n)^a (\bar{\Psi}_p \gamma^5 \Psi_n) + g_3 (p_p^* - p_n)^a (\bar{\Psi}_p \gamma^5 \Psi_n). \end{aligned} \quad (149.5)$$

Aquí es $p = i\partial$, $p^* = -i\partial$; los índices n y p en estos operadores indican que la derivación se efectúa respecto de los argumentos x en $\psi_n(x)$ y en $\psi_p(x)$, respectivamente. En la conjugación de carga las formas bilineales de operadores- ψ se transforman según (28.4). En cambio, esta transformación no afecta a los operadores p_n y p_p ; sin embargo, substituiremos idénticamente $p_p^* - p_n = -(p_p - p_n^*)$. Entonces

$$\begin{aligned} (J^{a+})^C = & -f_1 (\bar{\Psi}_n \gamma^a \Psi_p) - f_2 (p_n^* - p_p)_\beta (\bar{\Psi}_n \sigma^{ab} \Psi_p) + f_3 (p_n^* - p_p)^a (\bar{\Psi}_n \Psi_p) + \\ & + g_1 (\bar{\Psi}_n \gamma^a \gamma^5 \Psi_p) - g_2 (p_n^* + p_p)^a (\bar{\Psi}_n \gamma^5 \Psi_p) + g_3 (p_n^* - p_p)^a (\bar{\Psi}_n \gamma^5 \Psi_p). \end{aligned} \quad (149.6)$$

En la inversión (P) los primeros tres términos se transforman como un 4-vector en sentido estricto (V^0 , $V \rightarrow V^0$, $-V$), y los otros tres, como un pseudovector (A^0 , $A \rightarrow -A^0$, A). El resultado debe compararse con la expresión conjugado-hermítica del operador (149.5):

$$\begin{aligned} J^a = & f_1^* (\bar{\Psi}_n \gamma^a \Psi_p) + f_2^* (p_n^* - p_p)_\beta (\bar{\Psi}_n \sigma^{ab} \Psi_p) - f_3^* (p_n^* - p_p)^a (\bar{\Psi}_n \Psi_p) + \\ & + g_1^* (\bar{\Psi}_n \gamma^a \gamma^5 \Psi_p) - g_2^* (p_n^* + p_p)^a (\bar{\Psi}_n \gamma^5 \Psi_p) + g_3^* (p_n^* - p_p)^a (\bar{\Psi}_n \gamma^5 \Psi_p). \end{aligned} \quad (149.7)$$

* Es evidente que las leyes de transformación de la corriente deben ser independientes de la expresión funcional de la dependencia de los factores de forma respecto de la variable invariante q^2 . Para hallar estas leyes cabe considerar, por consiguiente, todas las f y g como constantes, lo que hace posible escribir las expresiones explícitas de los correspondientes operadores; naturalmente, estos no poseen ningún otro sentido de mayor trascendencia.

Es evidente que la igualdad (149.4) que hemos impuesto se cumplirá si todos los f y g son reales.

De manera análoga cabe demostrar que los dos factores de forma f_1 y f_2 en (148.6) son reales. Haremos notar, sin embargo, el carácter un tanto formal de estas afirmaciones. La naturaleza espacio-temporal de la corriente (148.6) depende de la paridad relativa de los mesones: un 4-vector en sentido estricto para paridad positiva, y un pseudovector, para paridad negativa. Según sea el caso, la condición de invariancia- CP llevará a que f y g sean reales o imaginarios. Esta diferencia, sin embargo, no se refleja en los resultados físicos, puesto que un factor de fase común en la corriente desaparece al formar $|M_{fi}|^2$. Así, pues, sería más correcto hablar de carácter real relativo de los factores de forma.

Recordaremos de nuevo que los resultados expuestos se basan en la aplicación de la igualdad $M_{fi}^* = M_{if}$, igualdad que es correcta sólo en la primera aproximación de la teoría de perturbaciones. En lo que concierne a la interacción débil, esta condición se cumple siempre: todas las desintegraciones consideradas son efectos de primer orden respecto de dicha interacción. Con todo, la condición puede quedar violada debido a otras interacciones entre los productos de la desintegración. En las desintegraciones que hemos considerado hasta aquí, la interacción en el estado final sólo puede ser electromagnética. Aunque ésta es grande comparada con la interacción débil, en sí es también pequeña; por ello, al tenerla en cuenta podrían manifestarse solamente partes imaginarias de los factores de forma relativamente pequeñas *.

La invariancia- CP conduce, naturalmente, a que sean iguales las probabilidades de desintegración de las partículas y de las antipartículas (con cambio de los signos de todos los impulsos p y de las helicidades λ). Vimos en el § 72 que las vidas medias de una partícula y de una antipartícula (es decir, las probabilidades totales de sus desintegraciones en todos los canales posibles) deben coincidir rigurosamente en virtud de la condición de invariancia- CPT . Para las desintegraciones débiles y los M_{fi} hermíticos, se puede afirmar que también dicha condición conduce a la igualdad de las probabilidades de desintegración de la partícula y de la antipartícula en cada uno de los canales por separado.

Supongamos que la partícula a de impulso p y helicidad λ se desintegra en un conjunto de partículas a' con impulsos p' y helicidades λ' . En virtud de la invariancia- CPT será

$$\langle a', p', \lambda' | M | a, p, \lambda \rangle = \langle \bar{a}, p, -\lambda | M | \bar{a}', p', -\lambda \rangle,$$

donde \bar{a} , \bar{a}' son las antipartículas. Si, además, también $M_{fi}^* = M_{if}$, esta igualdad podrá escribirse en una forma que liga las amplitudes de desintegración de las partículas a y \bar{a} :

* Este efecto se acentúa, sin embargo, en las desintegraciones- β de los núcleos cuya carga es grande. La situación cambia también en las desintegraciones no leptónicas de los hadrones, cuando en el estado final aparecen dos o más partículas que interactúan fuertemente, véase § 153.

$$\langle a', p', \lambda' | M | a, p, \lambda \rangle = \langle \bar{a}', p', -\lambda' | M | \bar{a}, p, -\lambda \rangle^*. \quad (149.8)$$

De aquí se sigue la igualdad de las probabilidades de desintegración diferenciales (en el sistema de reposo de a o de a'):

$$dw(a, \lambda \rightarrow a', p', \lambda') = dw(\bar{a}, -\lambda \rightarrow \bar{a}', p', -\lambda'), \quad (149.9)$$

y después de promediar respecto de las direcciones de emisión y de las polarizaciones, la misma igualdad para las probabilidades integrales. Quedan también de manifiesto determinadas relaciones entre las polarizaciones de las partículas.

Como ilustración consideremos las desintegraciones

$$K^- \rightarrow \pi^0 + \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad K^+ \rightarrow \pi^0 + \mu^+ + \nu_\mu.$$

Junto con la igualdad de sus probabilidades totales, la invariancia-*CPT* conduce a la igualdad $\zeta_{\mu+} = -\zeta_{\mu-}$ entre las polarizaciones de los muones en ambos casos. Si, además, se impone la condición de invariancia-*T*, queda prohibida la polarización del muón en la dirección $p_\pi \times p_\mu$.

§ 150. Propiedades isotópicas de la corriente débil hadrónica

La hipótesis de la *universalidad* de las interacciones débiles consiste en afirmar que las corrientes de transición débiles tendrían la misma forma para todas las partículas si se «desconectara» la interacción fuerte. Aunque faltando, como falta, una teoría consecuente es difícil formular de modo exacto el sentido de esta afirmación, de ella cabe deducir algunas conclusiones concretas.

Toda una serie de resultados se pueden obtener, en relación con esto, aplicando la simetría isotópica de las interacciones fuertes (y prescindiendo de los efectos electromagnéticos que violan esta simetría) (S. Weinberg, 1958; T. D. Lee, C. N. Yang, 1962). Así, en las desintegraciones $\Sigma^\pm \rightarrow \Lambda + e^\pm + \bar{\nu}_e$ los hiperones Σ^+ y Σ^- pertenecen a un isotriplete ($T_3 = 1$ y $T_3 = -1$), y el Λ es un isosinglete. Una rotación de 180° en torno del eje x^2 en el isospace cambia los signos de todos los T_3 , de modo que $\Sigma^+ \rightarrow \Sigma^-$, $\Lambda \rightarrow \Lambda$. Dado que las corrientes débiles «de cebado» correspondientes a las transiciones $\Sigma^+ \rightarrow \Lambda$ y $\Sigma^- \rightarrow \Lambda$ son universales, en virtud de la simetría isotópica debe ser

$$\langle \Lambda | J_w | \Sigma^+ \rangle = \langle \Lambda | J_w | \Sigma^- \rangle. \quad (150.1)$$

El mismo giro, aplicado al isodoblete nucleónico, permuta entre sí el neutrón y el protón. En consecuencia, la corriente de transición $\langle n | J_w | p \rangle$ puede obtenerse a partir de la corriente $\langle p | J_w | n \rangle$ permutando entre sí los índices n y p en todas las magnitudes (en las amplitudes de onda u y en los 4-impulsos p). Efectuando esta substitución en (148.8), encontraremos

$$\langle n | J_w^\alpha | p \rangle = \bar{u}_n (f_1 \gamma^\alpha - f_2 \sigma^{\alpha\beta} q_\beta - f_3 q^\alpha) u_p + \bar{u}_n (g_1 \gamma^\alpha + g_2 p^\alpha - g_3 q^\alpha) \gamma^5 u_p,$$

donde q , como antes, se define por $q = p_p - p_n$. Esta expresión coincide con (149.2) si f_1, f_2, g_1, g_3 son reales, y f_3, g_2 , imaginarios. Pero vimos que en virtud de la invariancia- CP , todos los factores de forma deben ser reales. Así, pues, la simetría isotópica conduce al resultado de que

$$f_3 = g_2 = 0. \quad (150.2)$$

Considerando el neutrón y el protón como dos estados isotópicos de una misma partícula, el nucleón, hay que escribir la corriente de transición (148.8) en la forma

$$\begin{aligned} \langle p | J_\nu^a | n \rangle &= \chi_2^* \bar{u}_2 (f_1 \gamma^a + f_2 \sigma^{ab} q_\beta + f_3 q^a) T_- u_1 \chi_1 + \\ &\quad + \chi_2^* \bar{u}_2 (g_1 \gamma^a + g_2 P^a + g_3 k^a) \gamma^5 T_- u_1 \chi_1. \end{aligned} \quad (150.3)$$

En ella se ha introducido el operador $T_- = T_1 - iT_2$ (132.5) que transforma el neutrón en protón; este operador actúa sobre el isospinor χ que determina el estado isotópico del nucleón (para la corriente del proceso inverso $p \rightarrow n$ debiera figurar T_+ en vez de T_-). En consecuencia, por sus propiedades isotópicas la corriente débil nucleónica es una componente de un isovector.

Visto que las masas del neutrón y del protón son muy próximas entre sí, la energía que se libera en la desintegración- β del neutrón es relativamente muy pequeña. Junto con ella, es pequeña también la cantidad q^2 . Prescindiendo de los términos $\sim q^2$, podemos substituir todos los coeficientes f, g en (150.3) (que son funciones de q^2) por sus valores para $q^2 = 0$.

Con la misma precisión, las corrientes electromagnéticas de transición del protón y del neutrón tienen, según (139.8), la forma

$$\langle p | J^a | p \rangle = \bar{u}_2 \left[\gamma^a - \frac{1,79}{2m_p} \sigma^{ab} q_\beta \right] u_1, \quad \langle n | J^a | n \rangle = \bar{u}_2 \frac{1,91}{2m_p} \sigma^{ab} q_\beta u_1, \quad (150.4)$$

donde $u_1 = u(p_1)$, $u_2 = u(p_2)$, $q = p_2 - p_1$ y m_p es la masa del protón. Recor-dando que en el isodoblete nucleónico el protón tiene como proyección del isospin $T_3 = \frac{1}{2}$, y el neutrón $T_3 = -\frac{1}{2}$, ambas expresiones se pueden escribir juntas en la forma

$$\begin{aligned} \langle N | J_a | N \rangle &= \frac{1}{2} \chi_2^* \bar{u}_2 \left[\gamma^a + \frac{0,12}{2m_p} \sigma^{ab} q_\beta \right] u_1 \chi_1 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \chi_2^* \bar{u}_2 \left[\gamma^a - \frac{3,70}{2m_p} \sigma^{ab} q_\beta \right] T_3 u_1 \chi_1, \end{aligned} \quad (150.5)$$

donde $T_3 = (\frac{1}{2})\tau_3$. El primer término en (150.5) es un isoscalar, y el segundo, una componente de isovector.

Comparemos este último con la parte vectorial (V) de la corriente débil de las

transiciones $n \rightarrow p$ y $p \rightarrow n$ [primera línea de la expresión (150.3)]:

$$\begin{aligned}\langle p | J_w^a | n \rangle^V &= \chi_2^* \bar{u}_2 (f_1 \gamma^a + f_2 \sigma^{ab} q_b + f_3 q^a) T_- u_1 \chi_1, \\ \langle n | J_w^a | p \rangle^V &= \chi_2^* \bar{u}_2 (f_1 \gamma^a + f_2 \sigma^{ab} q_b + f_3 q^a) T_+ u_1 \chi_1.\end{aligned}\quad (150.6)$$

Estas tres corrientes son iguales en lo que concierne a sus propiedades espaciotemporales, y por sus propiedades isotópicas son componentes diferentes de un isovector. Todas ellas proceden de la misma corriente «de cebado»

$$\chi_2^* \bar{u}_2 \gamma^a T u_1 \chi_1.$$

Parece natural (y lo confirma la experiencia) la hipótesis de que se trata de las tres componentes de un mismo isovector y que, por ello, *

$$f_1 = 1, \quad f_2 = -\frac{3,70}{2m_p}, \quad f_3 = 0. \quad (150.7)$$

La igualdad $f_3 = 0$ se obtuvo ya anteriormente como consecuencia de la condición de simetría isotópica. Haremos notar que, en virtud de esta igualdad, la parte vectorial de la corriente débil resulta ser (junto con la corriente electromagnética) transversal respecto del 4-vector q , es decir, una magnitud que se conserva.

De esta manera, la parte propiamente vectorial de la corriente débil de la transición neutrón-protón es igual a

$$\langle p | J_w^a | n \rangle^V = \bar{u}_p \left(\gamma^a - \frac{3,70}{2m_p} \sigma^{ab} q_b \right) u_n. \quad (150.8)$$

Conclusiones análogas se pueden deducir respecto de las corrientes de transición de los mesones en las desintegraciones

$$\pi^\pm \rightarrow \pi^0 + e^\pm + \nu_e (\bar{\nu}_e). \quad (150.9)$$

Los mesones π^+ , π^0 , π^- son términos de un mismo isotriplete que corresponden a las proyecciones del isospin $T_3 = +1, 0, -1$. Los correspondientes estados isotópicos se describen por isovectores χ con componentes

$$\chi^+ = -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^0 = i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi^- = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (150.10)$$

* Esta hipótesis fue propuesta por S. S. Gershtein y Ia. B. Zel'dovich (1955) y por Feynman y Gell-Mann (1957).

[cf. (16.21)]. La acción del operador de isospin ($T = 1$) sobre un isovector se define por la fórmula

$$(T_i \chi)_k = -ie_{ikl} \chi_l$$

[cf. (16.19)]. Partiendo de esta relación es fácil hallar que

$$T_+ |\pi^-\rangle = -\sqrt{2} |\pi^0\rangle, \quad T_- |\pi^+\rangle = -\sqrt{2} |\pi^0\rangle,$$

donde $T_\pm = T_1 \pm iT_2$. Por lo tanto, las corrientes débiles de las transiciones $\pi^\pm \rightarrow \pi^0$ (148.6) se pueden escribir juntas en la forma

$$\langle \pi^0 | J_w^a | \pi^\pm \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (f_1 P^a + f_2 q^a) \chi_2^* \cdot T_\mp \chi_1 \quad (150.11)$$

[las amplitudes de onda de los mesones en (148.6) se han tomado iguales a la unidad].

En cuanto a las corrientes electromagnéticas de las transiciones $\pi^\pm \rightarrow \pi^\pm$, es posible escribirlas en función del operador diagonal T_3 en la forma

$$\langle \pi | J^a | \pi \rangle = F(q^2) P^a \chi^* \cdot T_3 \chi \quad (150.12)$$

[cf. (139.5)]; para el π^0 , realmente neutro, esta corriente, claro está, se anula. Siguiendo en la misma hipótesis, supongamos que las corrientes (150.11), (150.12) son componentes de un mismo isovector. La comparación de los coeficientes en ellas da entonces

$$f_1(q^2) = \sqrt{2} F(q^2), \quad f_2(q^2) = 0. \quad (150.13)$$

También aquí, el hecho de que la energía que se libera en la desintegración (150.9) sea pequeña permite substituir $F(q^2)$ por $F(0) = 1$. Entonces, la corriente débil de la transición es igual simplemente a

$$\langle \pi^0 | J_w^a | \pi^\pm \rangle = \sqrt{2} (p_1^a + p_2^a). \quad (150.14)$$

PROBLEMA

Determinar la probabilidad integral de la desintegración $\pi^\pm \rightarrow \pi^0 + e^\pm + \nu_e (\bar{\nu}_e)$.

Solución. La energía liberada en la desintegración es $\Delta = m_{\pi^+} - m_{\pi^0} = 4.6$ Mev $\ll m_\pi$. Por ello, en el sistema propio del π^+ se puede considerar que también el π^0 se encuentra en reposo. La amplitud de desintegración [con la corriente mesónica de transición dada por (150.14)] es

$$M_{fi} = G \bar{u}_e (\beta_1 + \beta_2) (1 + \gamma^5) u_\nu = 2m_\pi G \bar{u}_\nu \gamma^0 (1 + \gamma^5) u_e.$$

Sumando respecto de las polarizaciones del electrón, se obtiene

$$\sum_{\text{polar}} |M_{fi}|^2 = 32m_n^2 G^2 (\epsilon_e \epsilon_v + p_e \cdot p_v).$$

El término con $p_e \cdot p_v$ desaparece al integrar respecto de las direcciones. En consecuencia, la probabilidad integral de desintegración vale

$$w = \frac{1}{(2\pi)^5 \cdot 16} \int \frac{|M_{fi}|^2}{\epsilon_v \epsilon_e m_\pi^2} \delta^{(4)}(p_1 - p_2 - p_v - p_e) d^3 p_v d^3 p_e d^3 p_\pi = \\ = \frac{2G^2}{(2\pi)^5} \int \delta(\epsilon_v + \epsilon_e - \Delta) d^3 p_e d^3 p_v.$$

Considerando que $m_e \ll \Delta$, en la integración prescindiremos de la masa del electrón, es decir, se substituirá $d^3 p_e \rightarrow 4\pi \epsilon_e^2 d\epsilon_e$ (como también $d^3 p_v \rightarrow 4\pi \epsilon_v^2 d\epsilon_v$). Se obtiene en definitiva

$$w = \frac{G^2 \Delta^5}{30\pi^3}.$$

§ 151. Desintegración- β del neutrón

Al calcular la probabilidad de desintegración del neutrón, con precisión suficiente cabe prescindir en la corriente nucleónica, no sólo de las cantidades $\sim q^2$ [como ya se hizo en (150.8)], sino también de las cantidades $\sim q$. Para la corriente débil total de la transición (suma de las partes vectorial y pseudovectorial) tendremos

$$\langle p | J_w^\alpha | n \rangle = \bar{u}_p \gamma^\alpha (1 + \alpha \gamma^5) u_n, \quad (151.1)$$

donde se ha hecho $\alpha = g_1(0)$ (el valor experimental es $\alpha = 1,2$); recordaremos que $g_2 = 0$ en virtud de (150.2) *.

Teniendo en cuenta que la energía liberada en la desintegración de un neutrón en reposo ($\Delta = m_n - m_p \approx 1,3$ MeV) es pequeña, puede admitirse que también se encuentra en reposo el protón resultante. Sus amplitudes de onda tendrán entonces la forma (en la representación típica)

$$u_p = \sqrt{2m_p} \begin{pmatrix} w_p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_n = \sqrt{2m_n} \begin{pmatrix} w_n \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde w son espines no relativistas (de dos componentes) normalizados a la unidad. Sin más que multiplicar por las matrices γ de (21.20) y (22.18), se encuentra para la corriente nucleónica de transición

* Esta aproximación para la corriente nucleónica es insuficiente, sin embargo, en el cálculo de la probabilidad de la reacción de captura del muón ($\mu^- + p \rightarrow n + v_\mu$). Si se trata de la captura del μ^- prácticamente en reposo en un átomo mesónico (sistema hidrogenoide $p\mu^-$), se tendrá $q^2 = (p_n - p_p)^2 \approx -m_\mu^2$. Aunque las correcciones $\sim q^2$ en los factores de forma son, con todo, pequeñas, sin embargo los términos $\sim q$ en la corriente llegan a cobrar importancia. Por consiguiente, deben conservarse los dos términos en (150.8) y los dos términos en la parte pseudovectorial de la corriente.

$$\langle p | J_w | n \rangle = 2 \sqrt{m_p m_n} (w_p^* w_n - \alpha w_p^* \sigma w_n). \quad (151.2)$$

Su producto por la corriente leptónica de transición da la amplitud de desintegración *

$$M_{fi} = \sqrt{2m_p m_n} G \{ (w_p^* w_n) (\bar{u}_e \gamma^0 (1 + \gamma^5) u_\nu) + \alpha (w_p^* \sigma w_n) \cdot (\bar{u}_e \gamma (1 + \gamma^5) u_\nu) \}.$$

El cuadrado de la amplitud vale:

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 = & 2m_p m_n G^2 \cdot 2 \{ \text{Tr} (\rho_n \rho_p) \text{Tr} [\rho_e \gamma^0 \rho_\nu \gamma^0 (1 + \gamma^5)] + \\ & + \alpha^2 \text{Tr} (\rho_n \sigma_k \rho_p \sigma_i) \text{Tr} [\rho_e \gamma^i \rho_\nu \gamma^k (1 + \gamma^5)] + \\ & + \alpha \text{Tr} (\rho_n \sigma \rho_p) \cdot \text{Tr} [\rho_e \gamma^0 \rho_\nu \gamma (1 + \gamma^5)] + \\ & + \alpha \text{Tr} (\rho_n \rho_p \sigma) \cdot \text{Tr} [\rho_e \gamma \rho_\nu \gamma^0 (1 + \gamma^5)] \} \end{aligned} \quad (151.3)$$

($i, k = x, y, z$ son índices vectoriales en tres dimensiones).

Para las matrices densidad ρ_e y ρ_ν hay que hacer

$$\rho_e = \frac{1}{2} (\hat{\rho}_e + m_e) (1 + \hat{\sigma}_e \gamma^5), \quad \rho_\nu = \hat{\rho}_\nu,$$

y para las ρ_n , ρ_p , las matrices densidad de polarización no relativistas

$$\rho_n = \frac{1}{2} (1 + \sigma \cdot \xi_n), \quad \rho_p = \frac{1}{2} (1 + \sigma \cdot \xi_p^{(d)}).$$

No interesándonos por el momento las polarizaciones del electrón y del protón, sumemos respecto de ellas. Entonces en (151.3) quedan los siguientes términos *:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\text{polar} \\ e, p}} |M_{fi}|^2 = & 4G^2 m_p m_n \{ \text{Tr} \hat{\rho}_e \gamma^0 \hat{\rho}_\nu \gamma^0 + \alpha^2 \text{Tr} \hat{\rho}_e \gamma \cdot \hat{\rho}_\nu \gamma + \\ & + i\alpha^2 (e_{ikl} \xi_p^{(d)}) \text{Tr} \hat{\rho}_e \gamma^i \hat{\rho}_\nu \gamma^k \gamma^5 + 2\alpha \text{Tr} \hat{\rho}_e \gamma^0 \hat{\rho}_\nu (\xi_n \gamma) \}. \end{aligned}$$

Un cálculo simple de las trazas conduce al resultado

* La constante G , determinada a partir de los datos relativos a la desintegración- β vale: $G = 1,41 \cdot 10^{-49}$ erg · cm³, es decir es algo menor que el valor (145.14) que se obtiene de los datos relativos a la desintegración del muón. Teniendo en cuenta la indeterminación en las correcciones radiativas para los hadrones, es difícil decir a qué debe atribuirse esta diferencia.

* Recordemos las fórmulas que dan las trazas de los productos de matrices de Pauli:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \sigma_i = 0, \quad & \frac{1}{2} \text{Tr} \sigma_i \sigma_k = \delta_{ik}, \quad \frac{1}{2} \text{Tr} \sigma_i \sigma_k \sigma_l = ie_{ikl}, \\ \frac{1}{2} \text{Tr} \sigma_i \sigma_k \sigma_l \sigma_m = & \delta_{ik} \delta_{lm} - \delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl} \end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{\text{polar} \\ \mathbf{e}, \mathbf{p}}} |M_{fi}|^2 = 16m_p^2 G^2 \epsilon_e \epsilon_v \{ 1 + 3\alpha^2 - (\alpha^2 - 1) \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}_v - \\ - 2\alpha(\alpha - 1) \mathbf{v}_e \cdot \boldsymbol{\xi}_n + 2\alpha(\alpha + 1) \mathbf{v}_v \cdot \boldsymbol{\xi}_n \}, \quad (151.4)$$

donde $\mathbf{v}_e = \mathbf{p}_e/\epsilon_e$, $\mathbf{v}_v = \mathbf{p}_v/\epsilon_v$ son las velocidades de e y v ($|\mathbf{v}_v| = 1$), y $m_p \approx m_n$ es la masa del nucleón.

La expresión entre corchetes determina las distribuciones angulares del neutrón y del neutrino. En la desintegración de un neutrón no polarizado la correlación entre las direcciones e y v viene dada por el factor

$$1 - \frac{\alpha^2 - 1}{1 + 3\alpha^2} \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}_v.$$

La distribución angular de los electrones en la desintegración de un neutrón polarizado (para una dirección arbitraria del neutrino) es proporcional a

$$1 - \frac{2\alpha(\alpha - 1)}{1 + 3\alpha^2} \mathbf{v}_e \cdot \boldsymbol{\xi}_n,$$

y la distribución análoga para el neutrino lo es a

$$1 + \frac{2\alpha(\alpha + 1)}{1 + 3\alpha^2} \mathbf{v}_v \cdot \boldsymbol{\xi}_n.$$

De nuevo advertiremos (al igual que en el § 146) que los términos en (151.4) que contienen $\mathbf{v}_e \cdot \boldsymbol{\xi}_n$ o $\mathbf{v}_v \cdot \boldsymbol{\xi}_n$ cambian de signo en la inversión ($v \rightarrow -v$, $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \boldsymbol{\xi}$) y su presencia es resultado de la no conservación de la paridad. Señalemos también que el hecho de que en (151.4) no exista un término de la forma $\boldsymbol{\xi}_n \cdot (\boldsymbol{\zeta}_e \times \mathbf{v}_v)$ es consecuencia de la invariancia- T : dicho término cambiaría de signo en la sustitución

$$\boldsymbol{\xi}_n \rightarrow -\boldsymbol{\xi}_n, \quad \mathbf{v}_e \rightarrow -\mathbf{v}_e, \quad \mathbf{v}_v \rightarrow -\mathbf{v}_v$$

[cf. (146.11)].

Después de promediar respecto de las direcciones de \mathbf{v}_e y \mathbf{v}_v , la expresión (151.4) se convierte en

$$16m^2 G^2 (1 + 3\alpha^2) \epsilon_e \epsilon_v. \quad (151.5)$$

La probabilidad diferencial de desintegración es

$$dw = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{|M_{fi}|^2}{2m} \delta^{(4)}(p_n - p_p - p_v - p_e) \frac{d^2 p_p}{2m} \frac{d^3 p_e}{2\epsilon_e} \frac{d^3 p_v}{2\epsilon_v}.$$

Integrándola respecto de $d^3p_p d^3p_\nu$ y de las direcciones de \mathbf{p}_e , se obtiene la distribución energética de los electrones *:

$$dw = \frac{G^2}{2\pi^3} (1 + 3\alpha^2) \sqrt{\varepsilon_e^2 - m_e^2} (\Delta - \varepsilon_e)^2 \varepsilon_e d\varepsilon_e. \quad (151.6)$$

La integración en el intervalo $m_e < \varepsilon_e < \Delta$ da la probabilidad total de desintegración

$$w = C \frac{G^2 \Delta^5}{60\pi^3} (1 + 3\alpha^2). \quad (151.7)$$

donde

$$C = \frac{1}{60} \left(2 \frac{\Delta^4}{m_e^4} - 9 \frac{\Delta^2}{m_e^2} - 8 \right) + \frac{\Delta}{4m_e} \operatorname{arcosh} \frac{\Delta}{m_e} = 0,47.$$

Para calcular la polarización del electrón emitido en la desintegración no es necesario repetir de nuevo todo el cálculo. Basta observar, que, en el caso de un electrón polarizado, las trazas leptónicas en (151.3) contienen los 4-vectores p_e y a_e sólo en la combinación $p_e - m_e a_e$ (cf. § 146 donde se calcularon trazas de este mismo tipo). Por ello, obtendremos la probabilidad de desintegración correspondiente a una polarización dada del electrón $\zeta_e^{(d)}$ substituyendo en (151.4)

$$\begin{aligned} \varepsilon_e \rightarrow \varepsilon_e - m_e a_e^0 &= \varepsilon_e - p_e \cdot \zeta_e^{(d)} = \varepsilon_e (1 - \mathbf{v}_e \cdot \zeta_e^{(d)}), \\ p_e \rightarrow p_e - m_e \zeta_e^{(d)} - \frac{p_e(p_e \cdot \zeta_e^{(d)})}{m_e + \varepsilon_e}. \end{aligned} \quad (151.8)$$

En el caso de la desintegración de un neutrón no polarizado y después de promediar respecto de las direcciones ν_ν , (151.4) se reduce a (151.5) y contiene solamente ε_e . Aplicando la sustitución indicada, se encuentra que la probabilidad de desintegración es proporcional a

$$1 - \mathbf{v}_e \cdot \zeta_e^{(d)}.$$

Esto significa que la polarización del electrón es

$$\zeta_e = -\mathbf{v}_e \quad (151.9)$$

(L. D. Landau, 1957.)

PROBLEMAS

- Determinar la polarización del electrón en la desintegración de un neutrón no polarizado y para una dirección dada de ν_ν .

Solución. Efectuando en (151.4) (con $\zeta_n = 0$) la sustitución (151.8), obtendremos

* Fermi (1934) fue el primero en obtener una distribución de este tipo para los electrones- β .

$$\left[1 - \frac{\alpha^2 - 1}{1 + 3\alpha^2} v_e (n_e \cdot n_\nu) \right] \xi_e = \\ = \left[-v_e + \frac{\alpha^2 - 1}{1 + 3\alpha^2} (n_e \cdot n_\nu) \right] n_e + \frac{\alpha^2 - 1}{1 + 3\alpha^2} \frac{m_e}{e_e} (n_\nu - n_e (n_e \cdot n_\nu)),$$

donde $n_\nu = v_\nu$, $n_e = v_e/v_e$.

2. Determinar la polarización del electrón en la desintegración de un neutrón polarizado y para una dirección arbitraria de v_ν .

Solución. De la misma manera, se obtiene

$$\left[1 - \frac{2\alpha(\alpha - 1)}{1 + 3\alpha^2} v_e (n_e \cdot \xi_n) \right] \xi_e = \\ = \left[-v_e + \frac{2\alpha(\alpha - 1)}{1 + 3\alpha^2} (n_e \cdot \xi_n) \right] n_e + \frac{2\alpha(\alpha - 1)}{1 + 3\alpha^2} \frac{m_e}{e_e} (\xi_n - n_e (n_e \cdot \xi_n)).$$

3. Determinar la polarización del protón de retroceso en la desintegración de un neutrón no polarizado y para una dirección arbitraria de v_ν .

Solución. Para una polarización dada del protón $\xi_p^{(d)}$, después de sumar respecto de las polarizaciones del electrón y del neutrón y de promediar respecto de la dirección de v_ν , en vez del corchete en (151.4) obtendremos

$$\{1 + 3\alpha^2 + 2\alpha(\alpha + 1) v_e \cdot \xi_p^{(d)}\}.$$

De aquí se sigue

$$\xi_p = \frac{2\alpha(\alpha + 1)}{1 + 3\alpha^2} v_e.$$

§ 152. Corrientes de transición en un supermultiplete

Cabe llegar a más conclusiones acerca de las propiedades de las corrientes débiles hadrónicas si se admite la simetría de las interacciones fuertes respecto del grupo unitario más amplio $SU(3)$ (*N. Cabibbo*, 1963).

Consideremos las corrientes de transición entre dos estados hadrónicos pertenecientes a un mismo supermultiplete. El supermultiplete más simple es el formado por las partículas fundamentales hipotéticas llamadas quarks. Es evidente que a las interacciones débiles entre ellas deben corresponder las transiciones

$$Q_n \rightarrow Q_p, \quad Q_\Lambda \rightarrow Q_p \quad (152.1)$$

(y las inversas), en las cuales cambia la carga eléctrica de la partícula. En efecto, la corriente hadrónica de transición determina (junto con el correspondiente factor leptónico) la amplitud de probabilidad de la desintegración leptónica del hadrón, es decir, de su desintegración en otro hadrón y leptones. En este proceso los leptones llevan consigo una determinada carga eléctrica (± 1) y, en consecuencia, debe cambiar también la carga del hadrón.

A los tres quarks Q_p , Q_n , Q_Λ corresponden los superespinores ψ^α de componentes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Las transiciones (152.1) se consiguen por aplicación de operadores cuya acción sobre los índices superespinoriales consiste en la sustitución $2 \rightarrow 1$ ó $3 \rightarrow 1$, es decir, viene dada por las matrices λ_1^2 o λ_1^3 definidas en el § 138, respectivamente. En cambio, a las transiciones inversas corresponden las matrices transpuestas — λ_2^1 o λ_3^1 . Recordemos que todas estas matrices son componentes de un superespinor matricial de segundo orden λ_b^α .

Es natural admitir que, de manera general, las corrientes de transición dentro de un supermultiplete cualquiera son asimismo componentes de un cierto superespinor, es decir, tienen la forma

$$(J_w)_{fi} = \langle h_f | J_w | h_i \rangle = \alpha (O_1^2)_{fi} \quad \text{o} \quad (J_w)_{fi} = \beta (O_1^3)_{fi}.$$

Las expresiones conjugado-complejas dan las corrientes de las transiciones inversas (o de las directas con sustitución de las partículas por las correspondientes antipartículas); tales expresiones constituyen las componentes $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ de un superespinor.

Si se impone la invariancia-*CP* de la interacción, la razón α/β debe ser real (cf. § 149). Dado que la normalización general hasta aquí es arbitraria, haremos $\alpha = 1$ y escribiremos β en la forma $\beta = \operatorname{tg} \vartheta$, donde ϑ es un parámetro real (*ángulo de Cabibbo*). Para manejar expresiones más compactas escribiremos la corriente de transición en forma de suma

$$(J_w)_{fi} = (O_1^2)_{fi} + \operatorname{tg} \vartheta (O_1^3)_{fi} \quad (152.2)$$

(aunque de hecho, para cada transición en particular, será diferente de cero uno u otro de los dos términos).

En la transición $Q_n \rightarrow Q_p$ la carga eléctrica Z varía en 1, la carga Y no cambia y la proyección del isospin T_3 varía en 1. De análoga propiedad gozarán todas las transiciones descritas por el primer término de (152.2), dado que un operador de la forma O_1^2 determina en la función de onda superespinorial de la partícula el cambio $2 \rightarrow 1$ de uno de sus índices; el cambio del isospin puede ser 0 o ± 1 .

En cambio, en la transición $Q_\Lambda \rightarrow Q_p$, junto con la carga Z experimenta la misma variación la hipercarga, mientras que el isospin varía en $1/2$. Así, pues, el segundo término en (152.2) corresponde a transiciones con variación de la hipercarga (o lo que es lo mismo, con variación de la extrañeza $S = Y - B$, puesto que el número bariónico B no varía). Llegamos con esto a las siguientes reglas de selección para

las transiciones débiles con variación de la hipercarga *:

$$\Delta Y = \Delta Z = \pm 1, \quad (152.3)$$

$$|\Delta T| = 1/2. \quad (152.4)$$

Dado que la hipercarga se conserva tanto en las interacciones fuertes como en las electromagnéticas, cabe esperar que la regla (152.3) se violará solamente en las aproximaciones de orden superior al primero respecto de la interacción débil. El isospin se conserva en las interacciones fuertes, pero no en las electromagnéticas. Por lo tanto, es de esperar que la regla (152.4) quedará ya violada por los efectos electromagnéticos.

El ejemplo más simple de desintegraciones leptónicas de hadrones lo ofrecen las reacciones

$$K^\pm \rightarrow l^\pm + v_l (\bar{v}_l), \quad \pi^\pm \rightarrow l^\pm + v_l (\bar{v}_l)$$

($l = e$ o μ) en las cuales desaparece un mesón. La primera de ellas, es una transición con cambio de hipercarga, mientras que en la segunda la hipercarga se conserva. Ambos mesones pertenecen a un mismo octete, difiriendo solamente en el valor de un índice (igual a 2 ó 3) en su función de onda superespinorial [véase (137.11)]. Por ello,

$$\langle 0 | O_1^3 | K^- \rangle = \langle 0 | O_1^2 | \pi^- \rangle$$

(para K^+ y π^+ habría que escribir O_3^1 , O_2^1 en vez de O_1^3 , O_1^2). De aquí se sigue

$$\langle 0 | J_w | K^\pm \rangle = \operatorname{tg} \theta \langle 0 | J_w | \pi^\pm \rangle. \quad (152.5)$$

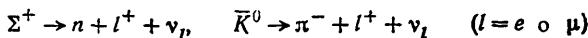
Escribamos en forma explícita las expresiones que corresponden a las corrientes de transición entre las componentes de un supermultiplete. Según (138.3), la forma general de los operadores O_1^2 y O_1^3 en lo que concierne a su acción sobre las funciones de onda superespinoriales de las partículas es:

$$(O_1^2)^a = f^a \Lambda_1^2 + g^a \bar{\Lambda}_1^2, \quad (O_1^3)^a = f^a \Lambda_1^3 + g^a \bar{\Lambda}_1^3; \quad (152.6)$$

* Así, por ejemplo, está prohibida la desintegración $\Xi^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e$ en la que $\Delta Y = 2$, $\Delta Z = 1$. Están permitidas las desintegraciones



pero prohibidas las



$$(\Delta Z = -1, \Delta Y = 1).$$

el índice 4-vectorial α nos recuerda que, por sus propiedades espacio-temporales, la corriente de transición es un 4-vector. Esta corriente (y con ella también los 4-vectores f^α y g^α) puede contener tanto una parte propiamente vectorial, como una pseudovectorial.

Teniendo en cuenta que las masas de las componentes de un supermultiplete difieren poco entre sí, en las corrientes de transición entre ellas se puede hacer, en primera aproximación, $q = 0$ para el 4-impulso transferido a los leptones, como ya hicimos en el caso de transiciones en un isomultiplete.

Consideremos primero la parte propiamente vectorial de la corriente. Cuando $q = 0$, el 4-vector en sentido estricto sólo puede tener (en el sistema propio de la partícula que se desintegra) la componente temporal (escalar tridimensional), simplemente por el hecho de que cuando $q = 0$ no disponemos de ningún vector tridimensional polar que caracterice la transición. Los coeficientes f^0 y g^0 (para $q = 0$) que aparecen en la componente temporal de los operadores (152.6) se pueden determinar admitiendo la hipótesis de que existe una relación entre las corrientes débil y electromagnética que generaliza la hipótesis formulada en el § 150 acerca de la simetría isotópica.

En el § 144 se indicó que, respecto del grupo de simetría $SU(3)$, la corriente electromagnética de transición es la componente $\frac{1}{3}$ de un superespínor. Cuando $q \rightarrow 0$, la única componente diferente de cero de esta corriente, la temporal, se reduce a la carga de la partícula, cuyo operador es

$$O_1^1 = Z = \Lambda_1^1 - \bar{\Lambda}_1^1. \quad (152.7)$$

Si se admite que O_1^1, O_2^1, O_3^1 son componentes de un mismo operador superespínorial, la comparación de los coeficientes en (152.7) y (152.6) nos dará $f^0 = -g^0 = 1$. Así, pues, la componente temporal de la corriente débil de las transiciones será

$$(J_w^0)_{fi} = \{(\Lambda_1^2 - \bar{\Lambda}_1^2)_{fi} + \operatorname{tg} \vartheta (\Lambda_1^3 - \bar{\Lambda}_1^3)_{fi}\} (u_f^* u_i). \quad (152.8)$$

Aquí se ha puesto de manifiesto el producto de las amplitudes de onda de las partículas inicial y final. Para los mesones (spin 0) se puede hacer $u_i = u_f = 1$. En el caso de bariones en reposo (spin $1/2$), u_i y u_f se reducen a espines tridimensionales w_i y w_f : $u \rightarrow \sqrt{2m} w$.

Consideremos ahora la parte pseudoscalar de la corriente. En el límite $q \rightarrow 0$ sólo tiene componentes espaciales, que constituyen un vector tridimensional axil (J_w)_{fi}; éste únicamente puede existir para partículas cuyo spin no es nulo (supongamos, por ejemplo, que es igual a $1/2$). En efecto, para una transición entre dos partículas de spin $1/2$ en reposo es posible construir el vector axil tridimensional característico

$$\sigma_{fi} = w_f^* \sigma w_i. \quad (152.9)$$

Ahora bien, la componente temporal de un 4-pseudovector es un pseudoescalar tridimensional; pero dado que $q = 0$, no disponemos de ningún vector polar a partir del cual, junto con el vector axil (152.9), se pudiera construir un pseudoescalar.

Por consiguiente, la componente espacial de la corriente será

$$(J_w)_{fi} = \sigma_{fi} \{ [f(\Lambda_1^2)_{fi} + g(\bar{\Lambda}_1^2)_{fi}] + \operatorname{tg} \theta [f(\Lambda_1^3)_{fi} + g(\bar{\Lambda}_1^3)_{fi}] \},$$

donde hemos hecho $f_{fi} = f\sigma_{fi}$, $g_{fi} = g\sigma_{fi}$. Los coeficientes f y g , junto con θ , quedan como parámetros fenomenológicos.

PROBLEMA

Hallar las corrientes débiles de las transiciones en el superoctete mesónico.

Solución. La corriente de transición entre dos mesones es un 4-vector en sentido estricto y, por consiguiente, para $q = 0$ tiene sólo componente temporal. Los elementos de matriz no diagonales de los operadores superespinoriales se calculan igual que en el § 138 se calcularon los elementos diagonales. De (152.8) se sigue:

$$(J_w^0)_{fi} = \left\{ (\bar{\Psi}_f)_b^c (\lambda_1^2)_a^b (\Psi_i)_c^a - (\bar{\Psi}_f)_c^b (\lambda_1^2)_b^a (\Psi_i)_a^c \right\} + \\ + \operatorname{tg} \theta \left\{ (\bar{\Psi}_f)_b^c (\lambda_1^3)_a^b (\Psi_i)_c^a - (\bar{\Psi}_f)_c^b (\lambda_1^3)_b^a (\Psi_i)_a^c \right\}.$$

Según esta fórmula se encuentra

$$\langle \pi^0 | J_w^0 | \pi^- \rangle = \sqrt{2}, \quad \langle \pi^0 | J_w^0 | K^- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \theta.$$

§ 153. Estructura cinemática de las amplitudes de las desintegraciones no leptónicas

Para los procesos de interacción débil que ocurren sin participación de leptones, simples consideraciones cinemáticas permiten llegar tan sólo a conclusiones muy generales acerca de la amplitud de reacción. En estos casos, la amplitud no se descompone en el producto de dos corrientes de transición, con lo cual de lo que se trata es de formar el escalar (M_{fi}) directamente a partir de las magnitudes de que disponemos *.

Consideraremos las desintegraciones de los hiperones en dos partículas, un barión y un mesón: $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$, $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$, $\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$, etcétera. Para concretar, nos referiremos a la desintegración

$$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^- . \quad (153.1)$$

* Recordemos que cuando aquí se hable simplemente de escalares no consideraremos comportamiento alguno determinado respecto de la inversión.

La amplitud de onda del mesón- π es un escalar u_π , y las amplitudes de Ξ y Λ , bispinores, que designaremos por u_1 y u_2 . A partir de estas magnitudes y de un 4-impulso independiente (por ejemplo, $p_\pi = p_1 - p_2$) se pueden formar cuatro escalares:

$$\bar{u}_2 u_1, \quad \bar{u}_2 \gamma^5 u_1, \quad \bar{u}_2 \hat{p}_\pi u_1, \quad \bar{u}_2 \hat{p}_\pi \gamma^5 u_1.$$

Sin embargo, si se tienen en cuenta las ecuaciones de Dirac ($u_1 p_1 = m_1 u_1$, $p_2 u_2 = m_2 u_2$), se ve que el segundo par se reduce al primero. Por lo tanto, la forma general de la amplitud de desintegración será

$$M_{fi} = G (\bar{u}_2 (f + g \gamma^5) u_1) u_\pi \quad (153.2)$$

(el factor G se ha introducido como coeficiente que determina el orden de magnitud de la interacción). En la desintegración en dos partículas todos los productos escalares de 4-impulsos se reducen a constantes (que se expresan en función de las masas de las partículas). Por ello, también resultan constantes los coeficientes f , g .

El número de coeficientes independientes (dos) en (153.2) corresponde al número de amplitudes de helicidad de la desintegración independientes (para un valor del momento cinético total del sistema $J = 1/2$, que viene fijado por el spin de la partícula que se desintegra). Elijamos como eje de cuantificación de los spins la dirección orientada n del hiperón Λ emitido. Dado que el spin de π es igual a cero, la helicidad (proyección del spin sobre n) de Λ coincide con la de Ξ . En otras palabras, sólo son diferentes de cero dos amplitudes de helicidad:

$$\langle ^{1/2} 0 | S | ^{1/2} \rangle \equiv (a + b) / \sqrt{2}, \quad \langle ^{-1/2} 0 | S | ^{-1/2} \rangle \equiv (a - b) / \sqrt{2}. \quad (153.3)$$

Si se conservase la paridad espacial, estas dos amplitudes podrían diferir sólo en el signo; según (70.13) se tendría

$$\langle ^{1/2} 0 | S | ^{1/2} \rangle = \eta \langle ^{-1/2} 0 | S | ^{-1/2} \rangle,$$

donde $\eta = \eta_2 \eta_\pi / \eta_1 = \pm 1$, y η_1 , η_2 , η_π son las paridades intrínsecas de las partículas. (Así, admitiendo que la paridad intrínseca relativa de Ξ y Λ es positiva, y la paridad intrínseca de π negativa, tendremos $\eta = -1$.) De acuerdo con esto, una de las dos cantidades

$$\begin{aligned} \langle \Lambda \pi, s | S | \Xi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \langle ^{1/2} 0 | S | ^{1/2} \rangle + \langle ^{-1/2} 0 | S | ^{-1/2} \rangle \} \equiv a, \\ \langle \Lambda \pi, p | S | \Xi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \langle ^{1/2} 0 | S | ^{1/2} \rangle - \langle ^{-1/2} 0 | S | ^{-1/2} \rangle \} \equiv b \end{aligned} \quad (153.4)$$

representa la amplitud de desintegración con conservación de la paridad (b , si $\eta =$

$= -1$), y la otra, con violación de la misma (a , si $\eta = -1$). Es fácil comprender que cualquiera que sea la dependencia respecto del valor de η , las amplitudes a y b corresponden a la desintegración en la que se forma el sistema $\Lambda + \pi$ en un estado con paridad orbital positiva (onda- s ; $l = J - 1/2 = 0$) y negativa (onda- p ; $l = J + 1/2 = 1$), respectivamente.

La característica peculiar de las desintegraciones consideradas consiste en que en el estado final se tienen dos partículas que interactúan fuertemente. Esta circunstancia es fundamental para explicar las condiciones impuestas a la amplitud de desintegración cuando se exige que se cumpla la invariancia- CP (o T)*. En el § 149 se hizo ya notar que, en tal caso, la matriz M_{fi} no tiene por qué ser hermítica. Sólo podemos valernos ahora de la propiedad general de unitariedad de la matriz S . En relación con esto, hay que tener en cuenta no sólo las reacciones directa e inversa, sino también otras reacciones (la dispersión elástica) que pueden tener lugar entre las dos partículas finales **.

Designemos por el índice 0 el estado $|\Xi\rangle$, y por los índices 1 y 2, los estados $|\Lambda\pi, s\rangle$ y $|\Lambda\pi, p\rangle$. Dado que la interacción fuerte conserva la paridad espacial, sólo puede conducir a la dispersión $\Lambda\pi$ elástica sin variación de la paridad. En cambio, la dispersión en la que la paridad cambia, como también la desintegración $\Xi \rightarrow \Lambda + \pi$, son efectos de la interacción débil. Por ello, todos los elementos no diagonales de la matriz S son pequeños comparados con los diagonales (la razón es $\sim G$).

Escribamos las condiciones de unitariedad de la matriz- S :

$$\sum S_{ac} S_{bc}^* = \delta_{ab}.$$

Con precisión de hasta el primer orden respecto de G , se tiene

$$S_{aa} S_{aa}^* = 1, \quad (153.5)$$

$$S_{aa} S_{ba}^* + S_{ab} S_{bb}^* = 0 \quad (a \neq b). \quad (153.6)$$

De acuerdo con (153.5), representaremos las amplitudes S_{aa} en la forma

$$S_{aa} = e^{2i\delta_a}, \quad (153.7)$$

donde $\delta_0 = 0$, y $\delta_1 = \delta_s$, $\delta_2 = \delta_p$ son las fases de las dispersiones elásticas s y p . Tengamos ahora en cuenta la condición de invariancia- T : $S_{ab} = S_{ba}$. Entonces, a partir de (153.6) se obtiene

$$S_{ab} = \pm |S_{ab}| i e^{i(\delta_a - \delta_b)}$$

* Para las desintegraciones del tipo (153.1), no se ha descubierto hasta ahora ningún fenómeno que viole la conservación- CP .

** Abordamos aquí el problema siguiendo un método debido a Fermi (1953).

con el mismo signo común para todos los S_{ab} (o el superior o el inferior). Sentido físico lo tienen sólo las fases relativas de las diferentes amplitudes S_{ab} . Por consiguiente, el factor común $\pm i$ carece de importancia y podemos escribir, en particular,

$$S_{10} \equiv a = |a| e^{i\delta_s}, \quad S_{20} \equiv b = |b| e^{i\delta_p}. \quad (153.8)$$

Así, pues, las fases de las amplitudes de desintegración están ligadas con las fases de la dispersión elástica.

En la reacción (153.1), el sistema $\Lambda + \pi$ resultante posee un spin isotópico determinado, $T = 1$, que coincide con el isospin de π . En otras reacciones de este tipo (por ejemplo, $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$) el sistema $N + \pi$ puede encontrarse en estados isotópicos con $T = 1/2$ y $T = 3/2$. Dado que las interacciones fuertes conservan el isospin, el resultado (153.1) conserva también su validez en estos casos, en los que el índice $a = 1, 2$ numera los estados del sistema $N + \pi$ con paridades espaciales determinadas y determinados isospins.

Finalmente, consideremos las correlaciones de polarización y angulares en la desintegración de hiperones (*T. D. Lee, C. N. Yang, 1957*). Con las notaciones a y b de (153.8), la parte de la matriz S correspondiente a desintegración (matriz respecto de los índices de helicidad de los bariones inicial y final) se puede representar como matriz de segundo orden $a \cdot 1 + b \cdot \sigma_z$ o bien

$$S = a \cdot 1 + b \cdot \sigma \cdot n. \quad (153.9)$$

La probabilidad de desintegración se obtiene promediando los productos de los elementos de la matriz S respecto de los estados de polarización de ambas partículas:

$$w \propto \text{Tr} (S \rho_1 S^\dagger \rho_2), \quad (153.10)$$

donde ρ_1, ρ_2 son las matrices densidad de polarización de los bariones inicial y final (cf. § 48, nota en la pág. 183). Recordaremos que se están considerando estados del sistema con energía y momentos cinéticos determinados, pero sin que en ellos lo esté el impulso. Por consiguiente, el único vector de que disponemos es el vector polarización del barión ζ . La matriz de segundo orden que cabe construir a partir de él sólo puede tener la forma

$$\rho \propto 1 + \sigma \cdot \zeta \quad (153.11)$$

(el coeficiente —igual a la unidad— en $\sigma \cdot \zeta$ viene fijado por la condición de que para el valor medio se tenga $\bar{\sigma} = \zeta$). Substituyendo (153.11) en (153.10), se obtendrá

* ¡Hay que subrayar que la matriz densidad (153.11) no presupone, en este caso, la aproximación no relativista respecto de la partícula!

$$w \approx \text{Tr} (a + b\sigma \cdot n)(1 + \xi_1 \cdot n)(a^* + b^*\sigma \cdot n)(1 + \xi_2^{(d)} \cdot n).$$

El cálculo de la traza (mediante las fórmulas indicadas en la nota de la pág. 272) conduce al resultado

$$\begin{aligned} w \approx & aa^*(1 + \xi_1 \cdot \xi_2^{(d)}) + bb^*[1 + 2(\xi_1 \cdot n)(\xi_2^{(d)} \cdot n) - \xi_1 \cdot \xi_2^{(d)}] + \\ & + (a^*b + ab^*)(\xi_1 \cdot n + \xi_2^{(d)} \cdot n) - i(ab^* - a^*b)(n \cdot [\xi_1 \times \xi_2^{(d)}]). \end{aligned} \quad (153.12)$$

Aquí ζ_1 es la polarización del barión inicial, $\zeta_2^{(d)}$ la polarización que el detector atribuye al barión final y n es la dirección (orientada) del movimiento de este último. La fórmula (153.12) contiene todos los efectos de polarización. Obsérvese que, al conservarse la paridad- CP , el último término en (153.12) es mero resultado de las diferentes fases de las amplitudes a y b (153.8), es decir, se debe únicamente a la interacción en el estado final.

§ 154. Mesones K neutros

Para ser distintas, una partícula y la correspondiente antipartícula deben diferir una de otra en algunas de sus características cuánticas. En todos los casos conocidos, salvo uno, entre estas características se cuentan magnitudes aditivas que se conservan rigurosamente —carga eléctrica o número bariónico. Esto significa, en otras palabras, que no existen interacciones en las que la partícula y la antipartícula puedan transformarse entre sí, y que una y otra conservan su individualidad en todos los procesos. Más precisamente: ningún otro conjunto de superposiciones de estados de partícula y antipartícula puede diagonalizar una interacción, cualquiera que sea.

La única excepción conocida son los mesones K neutros: K^0 y \bar{K}^0 . Estas partícula y antipartícula, que carecen de carga eléctrica y bariónica, difieren solamente en la hipercarga ($Y = 1$ y $Y = -1$). Pero la hipercarga no es una magnitud que se conserve rigurosamente: se conserva en las interacciones fuertes y electromagnéticas, pero no en las débiles. En consecuencia, son posibles en principio las transiciones entre K^0 y \bar{K}^0 .

Determinemos los estados $|K^0\rangle$ y $|\bar{K}^0\rangle$ eligiendo las fases de modo que se pase de uno a otro en la transformación- CP :

$$CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \quad CP|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle. \quad (154.1)$$

Naturalmente, estos estados no poseen paridades- CP determinadas, puesto que se transforman uno en otro. Sin embargo, tal paridad la poseen las superposiciones

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle\}, \quad |K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle\}. \quad (154.2)$$

Si la paridad-*CP* se conservara rigurosamente, las transiciones entre los estados (154.2) estarían prohibidas. Dicho de otra manera, estos estados reducirían a la forma diagonal el hamiltoniano total, es decir, las partículas K_1^0 y K_2^0 poseerían masas y períodos determinados (y diferentes) (*M. Gell-Mann, A. Pais*, 1955).

En particular, los mesones K^0 aparecerían en la forma de K_1^0 y K_2^0 en aquellas desintegraciones que conducen a la formación de un sistema de partículas con determinada paridad-*CP*. Tales son, por ejemplo, las desintegraciones *

$$K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-, \quad K_1^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0, \quad K_2^0 = \pi^0 + \pi^0 + \pi^0.$$

En realidad, sin embargo, en las desintegraciones de los mesones K^0 se observan violaciones de la conservación de la paridad-*CP*, si bien el grado de las mismas es pequeño **. La no conservación de la paridad-*CP* conduce a la posibilidad de transiciones entre estados con $CP = +1$ y -1 . En definitiva, pues, los estados con masas y períodos determinados (que se designan por K_S^0 y K_L^0) ya no coincidirán con los estados (154.2) que poseen paridades-*CP* determinadas ***.

Representemos un estado arbitrario del mesón K^0 como superposición

$$a_1 |K^0\rangle + a_2 |\bar{K}^0\rangle. \quad (154.3)$$

La forma general de las ecuaciones que describen el cambio de este estado con el tiempo, teniendo en cuenta las transiciones recíprocas entre K^0 y \bar{K}^0 , es:

$$i \frac{da_i}{dt} = \Lambda_{ik} a_k \quad (i, k = 1, 2). \quad (154.4)$$

Los coeficientes Λ_{ik} forman una matriz de segundo orden, que en el caso general

* Para los sistemas $\pi^+ + \pi^-$ y $\pi^0 + \pi^0$ tenemos siempre $CP = +1$. En el primer caso, esto es una propiedad general de un par partícula-antipartícula con spin 0 (véase el problema en el § 13). En el segundo caso, tenemos $C = (+1)^2 = +1$, y $P = +1$, puesto que para un sistema de dos partículas idénticas de spin 0 la inversión es equivalente a la permutación de las partículas, lo que no cambia el signo de la función de onda.

Para un sistema de tres partículas pseudoescalares π^0 , sus paridades internas introducen en P el factor $(-1)^3 = -1$. Por otra parte, la paridad orbital se puede determinar formando el momento cinético total del sistema (que coincide con el spin del K^0 que se desintegra, es decir, es igual a cero) a partir del momento cinético relativo l_{12} del par $\pi^0 + \pi^0$ y del momento l_3 de la tercera partícula referido a este par. Dado que la paridad orbital del par es igual a $(-1)^{l_{12}} = +1$, l_{12} es un número par; en cuanto al momento cinético l_3 , éste debe coincidir con l_{12} para que en la suma pueda obtenerse un momento cinético total nulo. De aquí se sigue que la paridad orbital del sistema es igual a $+1$, y, por consiguiente, $P = (-1)(+1) = -1$. Para la paridad de carga se tiene $C = (+1)^3 = +1$, con lo cual $CP = -1$.

** Así, se ha observado la desintegración $K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, pero la razón de su amplitud a la amplitud de la desintegración $K_S^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0$ es del orden de $\sim 2 \cdot 10^{-3}$. Esta cantidad, al parecer, caracteriza de modo general el grado de no conservación de la paridad-*CP* en las interacciones débiles.

*** Los períodos τ de los mesones K^0 de «vida corta» (K_S^0) y de «vida larga» (K_L^0) se dan en la tabla de la página §191. Para su diferencia de masas resulta

$$m(K_L^0) - m(K_S^0) = 3,6 \cdot 10^{-6} \text{ eV} = 0,47 \frac{\hbar}{\tau(K_S^0)}.$$

se puede descomponer en una parte hermítica y otra antihermítica o, lo que es lo mismo, se puede representar en la forma

$$\Lambda_{ik} = M_{ik} - i\Gamma_{ik}, \quad (154.5)$$

donde ambas matrices, M_{ik} y Γ_{ik} , son hermíticas:

$$M_{ik} = M_{ki}^*, \quad \Gamma_{ik} = \Gamma_{ki}^*. \quad (154.6)$$

Según la condición (154.1) la transformación-*CP* substituye en estas matrices los índices $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$. En cambio, la inversión del tiempo permuta los índices matriciales de los estados inicial y final. Por ello, imponer el carácter universal de la invariancia-*CPT* conduce a las igualdades

$$\text{CPT: } M_{11} = M_{22}, \quad \Gamma_{11} = \Gamma_{22}. \quad (154.7)$$

Por otra parte, el que se cumpla la invariancia-*CP* conduciría a las igualdades adicionales

$$\text{CP: } M_{12} = M_{21}, \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21}, \quad (154.8)$$

es decir, teniendo en cuenta (154.6), M_{12} y Γ_{12} serían cantidades reales.

Para los estados estacionarios, de (154.4) se deducen las ecuaciones $a_i \delta E = \Lambda_{ik} a_k$ y de aquí se sigue la ecuación secular para los valores propios:

$$|\delta E \cdot \delta_{ik} - \Lambda_{ik}| = 0. \quad (154.9)$$

Esta ecuación tiene dos raíces complejas cuyas partes reales determinan las correcciones a las masas, y las imaginarias, los coeficientes de extinción (recíprocos de los períodos) de las partículas K_S^0 y K_L^0 :

$$\begin{aligned} \delta E_S &= \delta m_S - \frac{i}{2} \gamma_S = \Lambda_{11} + \sqrt{\Lambda_{12}\Lambda_{21}}, \\ \delta E_L &= \delta m_L - \frac{i}{2} \gamma_L = \Lambda_{11} - \sqrt{\Lambda_{12}\Lambda_{21}}. \end{aligned} \quad (154.10)$$

Los correspondientes estados (salvo un coeficiente de normalización) se representan por las superposiciones

$$|K_S^0\rangle = |K^0\rangle + \sqrt{\frac{\Lambda_{21}}{\Lambda_{12}}} |\bar{K}^0\rangle, \quad |K_L^0\rangle = |K^0\rangle - \sqrt{\frac{\Lambda_{21}}{\Lambda_{12}}} |\bar{K}^0\rangle. \quad (154.11)$$

Para un pequeño grado de violación de la paridad-*CP* (valor pequeño de la diferencia $\Lambda_{12} - \Lambda_{21}$) estos estados difieren poco de $|K_1^0\rangle$ y $|K_2^0\rangle$, respectivamente.

La existencia de dos períodos diferentes conduce al fenómeno de oscilación de los números de partículas y antipartículas en un haz de mesones- K^0 .

Supongamos que en el instante $t = 0$ el mesón se encuentra en el estado $|K^0\rangle$. Haciendo

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |K_S^0\rangle + |K_L^0\rangle \}$$

(prescindimos aquí de la pequeña diferencia entre K_S^0 y K_L^0 respecto de K_1^0 y K_2^0) se encuentra que en el instante t el estado será

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \{ & |K_S^0\rangle e^{-im_S t - \frac{1}{2}\gamma_S t} + |K_L^0\rangle e^{-im_L t - \frac{1}{2}\gamma_L t} \} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |K^0\rangle \left(e^{-im_S t - \frac{1}{2}\gamma_S t} + e^{-im_L t - \frac{1}{2}\gamma_L t} \right) + \right. \\ &\quad \left. + |\bar{K}^0\rangle \left(e^{-im_S t - \frac{1}{2}\gamma_S t} - e^{-im_L t - \frac{1}{2}\gamma_L t} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Los cuadrados de los módulos de los coeficientes $|K^0\rangle$ y $|\bar{K}^0\rangle$ dan las probabilidades w de encontrar las partículas en estos estados. De esta manera resulta que

$$\frac{w(K^0) - w(\bar{K}^0)}{w(K^0) + w(\bar{K}^0)} = \frac{2e^{-(\gamma_S + \gamma_L)t/2} \cos [(m_L - m_S)t]}{e^{-\gamma_S t} + e^{-\gamma_L t}}. \quad (154.12)$$

Si se trata de un haz de mesones- K^0 , en vez de hablar de las probabilidades w cabe hacerlo de las densidades de números de partículas y antipartículas en el mismo. En este caso hay que entender por t el tipo medido en el sistema propio del mesón K .

SUPLEMENTO A LA PARTE I

§ 82a. Pérdidas de energía de las partículas rápidas por ionización

Consideremos los choques de una partícula rápida relativista con un átomo acompañados de excitación o ionización de este último. En el caso no relativista estas colisiones inelásticas se estudiaron en III, §§ 145, 146; generalizaremos aquí las fórmulas allí obtenidas (*H. A. Bethe*, 1933).

La velocidad de la partícula que incide sobre el átomo se supone que es grande comparada con las velocidades de los electrones atómicos (por lo que, en cualquier caso, se supone que $Z\alpha \ll 1$, es decir, que el número atómico no es demasiado grande). Esta condición asegura la aplicabilidad de la aproximación de Born al proceso considerado. La solución del problema es un tanto diferente según se trate de una partícula rápida ligera (electrón, positón) o pesada (mesón, protón, partícula- α , etc.). Estudiaremos aquí el último caso, que es más simple.

Sean $p = (\epsilon, \mathbf{p})$ y $p' = (\epsilon', \mathbf{p}')$ los impulsos inicial y final de la partícula rápida en el sistema de referencia del laboratorio, sistema respecto del cual el átomo se encontraba en reposo antes del choque; la diferencia $q = p' - p$ da la energía y el impulso transferidos por la partícula al átomo. Descompongamos el intervalo de valores posibles del impulso cedido en dos regiones:

$$\text{I)} \frac{q^2}{m} \ll m, \quad \text{II)} \frac{q^2}{m} \gg I, \quad (82a.1)$$

donde m es la masa del electrón, e I , una cierta energía atómica media (potencial de ionización del átomo). Estas dos regiones se solapan cuando $I \ll q^2/m \ll m$; esta circunstancia permite llevar a cabo un empalme exacto de los resultados que se obtienen para cada una de ellas. Llamaremos a los valores q de la primera región y de la segunda, respectivamente, transferencias de impulso pequeñas y grandes.

Pequeñas transferencias de impulso

En esta región se pueden considerar los electrones atómicos como no relativistas, tanto en el estado inicial del átomo como en el final.

La amplitud del proceso viene dada por la expresión

$$M_{fi}^{(n)} = e^2 J_{n0}^\mu (-q) J_{p'p}^\nu (q) D_{\mu\nu}(q), \quad (82a.2)$$

donde J_{n0} es la 4-corriente de transición del átomo desde el estado inicial (0) al final (n), y $J_{p'p}$ es la 4-corriente de transición de la partícula rápida; estas corrientes substituyen aquí las expresiones $(u' \gamma u)$ que aparecerían, por ejemplo, en la amplitud de dispersión de dos partículas «elementales», el electrón y el muón (74.17) [cf. también (140.3)]. Las corrientes de transición se toman en la representación de impulsos [véase (43.11)]. La sección eficaz del proceso en el sistema de referencia del laboratorio se escribe:

$$d\sigma_n = 2\pi\delta(\epsilon - \epsilon' - \omega_{n0}) |M_{fi}^{(n)}|^2 \frac{d^3 p'}{2 |\mathbf{p}| 2\epsilon' (2\pi)^3}, \quad (82a.3)$$

donde $\omega_{n0} = E_n - E_0$ es la frecuencia de transición entre estados del átomo.

El estado final puede pertenecer tanto al espectro discreto como al continuo; el primer caso corresponde a la excitación del átomo, el segundo, a su ionización. En la ley de conservación de la energía [que se tiene en cuenta mediante la función δ en (82a.3)] se prescinde de la energía de retroceso del átomo, lo que evidentemente es admisible para pequeñas transferencias de impulso.

Conviene elegir el propagador de fotón en este caso adoptando el contraste (77.14), en el cual son diferentes de cero sólo sus componentes espaciales

$$D_{ik}(q) = - \frac{4\pi}{\omega^2 - q^2} \left(\delta_{ik} - \frac{q_i q_k}{\omega^2} \right). \quad (82a.4)$$

Entonces, también para las 4-corrientes de transición en (88a.2) son necesarias solamente sus componentes espaciales.

La corriente atómica de transición $\mathbf{J}_{n0}(q)$ es en el presente caso la componente de Fourier de la expresión no relativista ordinaria:

$$\mathbf{J}_{n0}(q) = \frac{i}{2m} \int e^{-iq\cdot r} (\psi_0 \nabla \psi_n^* - \psi_n^* \nabla \psi_0) d^3x, \quad (82a.5)$$

donde ψ_0 , ψ_n son las funciones de onda atómicas (además, para simplificar la notación, hemos suprimido aquí y en lo que sigue el signo de suma respecto de los electrones del átomo, es decir, hemos escrito la fórmula como si en él hubiera tan sólo un electrón). Integrando el primer término por partes, esta expresión puede escribirse en forma de elemento de matriz:

$$\mathbf{J}_{n0}(q) = \frac{1}{2} (\mathbf{v} e^{-iq\cdot r} + e^{-iq\cdot r} \mathbf{v})_{n0}, \quad (82a.6)$$

donde $\mathbf{v} = -\frac{i}{m} \nabla$ — es el operador velocidad del electrón.

En cuanto a la corriente de transición de la partícula dispersada, teniendo en cuenta que el impulso que pierde es relativamente pequeño ($|q| \ll |\mathbf{p}|$), cabe substituirla simplemente por el elemento diagonal

$$\mathbf{J}_{pp}(0) = 2\mathbf{p}z, \quad (82a.7)$$

que corresponde al movimiento rectilíneo clásico [cf. (96.5)]; aquí se ha introducido también el factor z , que tiene en cuenta la posible diferencia de la carga de la partícula (ze) respecto de la carga del electrón.

Que q sea pequeño significa que también lo será el ángulo de desviación de la partícula ϑ . En estas condiciones, las componentes de q longitudinal y transversal (respecto de \mathbf{p}) son iguales a

$$-q_{\parallel} \approx \frac{dp}{de} \omega_{n0} = \frac{\omega_{n0}}{v}, \quad q_{\perp} \approx |\mathbf{p}| \vartheta, \quad (82a.8)$$

de modo que $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \approx -e\omega_{n0}$.

La substitución de (82a.4-8) en (82a.2) da

$$M_{fi}^{(n)} = -\frac{4\pi ze^2}{q^2} \langle n | \frac{e}{\omega_{n0}} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v} e^{-iq \cdot r} + e^{-iq \cdot r} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} e^{-iq \cdot r} + e^{-iq \cdot r} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}) | 0 \rangle.$$

Observemos que en el primer término

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{v} f + f \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} = 2if,$$

donde $f \equiv e^{-iq \cdot r}$ (véase III, pág. 671); por ello, el elemento de matriz de este operador coincide con el elemento de matriz $2i(f)_{n0} = 2\omega_{n0}f_{n0}$. En cuanto al segundo término, basta substituir, al ser q pequeño, $e^{-iq \cdot r}$ por la unidad. Entonces

$$M_{fi}^{(n)} = -\frac{8\pi ze^2}{q^2} \{e (e^{-iq \cdot r})_{n0} - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_{n0} \omega_{n0}\}.$$

El cuadrado del módulo de esta expresión vale:

$$|M_{fi}^{(n)}|^2 = \frac{64\pi^2 (ze^2)^2}{(q^2)^2} \{e^2 |(e^{-iq \cdot r})_{n0}|^2 + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_{n0})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_{n0}) e \omega_{n0} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_{n0})^2 \omega_{n0}^2\} \quad (82a.9)$$

(en el segundo término se ha hecho aquí $e^{-iq \cdot r} \cong 1 - iq \cdot r$; no es posible hacer esto en el primero por la razón que se verá más adelante — véase la nota en la pág. 292).

La pérdida de energía de la partícula rápida como resultado de sus colisiones inelásticas con los átomos * viene determinada por la cantidad

* Estas pérdidas se llaman a menudo pérdidas por ionización, a pesar de que están ligadas no solamente con la ionización, sino también con la excitación de los átomos.

$$\kappa = \sum_n \int \omega_{n0} d\sigma_n = \frac{1}{16\pi^2} \sum_n \int \omega_{n0} |M_{fi}^{(n)}|^2 d\Omega', \quad (82a.10)$$

donde la suma se extiende a todos los estados finales posibles del átomo, y la integración, a las direcciones de la partícula dispersada; llamaremos a esta cantidad *frenado efectivo* (se le llama también *sección eficaz de pérdida de energía*).

La integración en (82a.10) puede efectuarse en dos etapas: primero como promedio respecto del acimut de la dirección de \mathbf{p}' respecto de \mathbf{p} y, luego, como integración respecto de $d\Omega' \cong 2\pi d\vartheta$, donde ϑ es el ángulo de dispersión, que es pequeño. La primera operación substituye $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_{n0}$ por

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_{n0} \rightarrow q_{\parallel} x_{n0} = -\frac{\omega_{n0}}{v} x_{n0},$$

donde x_{n0} es el elemento de matriz de una de las coordenadas cartesianas de los electrones atómicos *. A su vez, la integración respecto de $d\vartheta$ se puede substituir por una integración respecto de q^2 , observando que

$$-q^2 = -\omega_{n0}^2 + q^2 \approx -\omega_{n0}^2 + \frac{\omega_{n0}^2}{v^2} + p^2 \theta^2 = \frac{\omega_{n0}^2 M^2}{p^2} + p^2 \theta^2 \quad (82a.11)$$

y, por esto, $2\vartheta d\vartheta = d|q^2|/p^2$ (M es la masa de la partícula rápida). Obtenemos en definitiva

$$\kappa = 4\pi (ze^2)^2 \sum_n \int \left\{ |(e^{-iq \cdot r})_{n0}|^2 \frac{\omega_{n0}}{v^2} - \omega_{n0}^3 |x_{n0}|^2 \left(\frac{M^2}{p^2} + \frac{1}{v^2}\right)\right\} \frac{d|q^2|}{|q^2|^2}. \quad (82a.12)$$

El límite inferior de integración respecto de q^2 es

$$|q^2|_{\min} = \frac{M^2}{p^2} \omega_{n0}^2. \quad (82a.13)$$

En cuanto al límite superior, para él elegiremos un cierto valor $|q^2|_1$ tal que

$$I \ll \frac{|q^2|_1}{m} \ll m, \quad (82a.14)$$

es decir, un valor que se encuentra en la región en que se solapan los dominios I y II (82a.1).

La integración y la suma en (82a.12) se lleva a cabo de manera análoga a como

* No importa cuál: después de la suma respecto de las direcciones del momento cinético del átomo, que se introduce más adelante, en el estado final, el elemento de matriz x_{n0} no depende ya de la dirección del eje x .

se procedió en III, § 146 para el caso no relativista. Se descompone el intervalo de integración en dos partes: a) de $|q^2|_{\min}$ a $|q^2|_0$ y b) de $|q^2|_0$ a $|q^2|_1$, donde el valor $|q^2|_0$ se elige de modo que

$$\frac{IM}{|p|} \ll \sqrt{|q^2|_0} \ll ma \quad (82a.15)$$

(la cantidad ma , que aparece a la derecha es del orden de magnitud de los impulsos de los electrones atómicos). En la región a) se puede hacer $e^{-iq \cdot r} \approx 1 - iq \cdot r$ y la contribución de la misma a \propto toma la forma

$$\begin{aligned} 4\pi(ze^2)^2 \sum_n \int_{|q^2|_{\min}}^{|q^2|_0} & \left\{ \frac{1}{v^2} \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \frac{1}{|q^2|} - \frac{M^2}{p^2} \omega_{n0}^3 |x_{n0}|^2 \frac{1}{|q^2|^2} \right\} d|q^2| \approx \\ & \approx \frac{4\pi(ze^2)^2}{v^2} \sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \left[\ln \frac{|q^2|_0 p^2}{M^2 \omega_{n0}^2} - v^2 \right]. \end{aligned}$$

(La integral en el segundo término se puede extender hasta el infinito.) La suma se efectúa aplicando la fórmula

$$\sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 = \frac{1}{2m} Z, \quad (82a.16)$$

donde Z es el número de electrones en el átomo [véase III, (146.10)]. El resultado lo escribiremos en la forma

$$\frac{2\pi(ze^2)^2 Z}{mv^2} \left[\ln \frac{|q^2|_0 p^2}{M^2 I^2} - v^2 \right], \quad (82a.17)$$

donde I es una cierta energía media determinada por la fórmula

$$\ln I = \frac{\sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \ln \omega_{n0}}{\sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2} = \frac{2m}{Z} \sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \ln \omega_{n0}. \quad (82a.18)$$

En el dominio b), en cambio, tenemos según (82a.11) $|q^2| \approx p^2 \approx v^2$, es decir, $|q^2|$ no depende del número n del estado final del átomo; tampoco dependen de n los límites de integración. En consecuencia, la suma respecto de n en (82a.12) puede efectuarse bajo el signo de integral. En el primer término, se calcula mediante la fórmula

$$\sum_n |(e^{-iq\cdot r})_{n0}|^2 \omega_{n0} = \frac{Z}{2m} q^2 \quad (82a.19)$$

[véase III, (146.5)] y su integral es igual a *

$$\frac{2\pi Z (ze^2)^2}{mv^2} \ln \frac{|q^2|_1}{|q^2|_0}.$$

La integral del segundo término en (82a.12), en cambio, da en este dominio una contribución insignificante a α .

Sumando la última fórmula con (82a.17) se encuentra para la contribución a α debida a todo el dominio de transferencias pequeñas:

$$\frac{2\pi Z (ze^2)^2}{mv^2} \left[\ln \frac{|q^2|_1 p^2}{M^2 l^2} - v^2 \right]. \quad (82a.20)$$

Grandes transferencias de impulso

Pasemos a considerar las colisiones en las que el impulso transferido es grande comparado con el impulso de los electrones atómicos ($q^2 \gg mI$). En esta región, evidentemente, se puede prescindir del hecho de que los electrones estén ligados al átomo, es decir, cabe considerarlos como libres. De acuerdo con esto, el choque de la partícula rápida con el átomo equivaldrá a la dispersión elástica por cada uno de los Z electrones atómicos. Además, dado que la velocidad de la partícula es grande, podemos suponer que los electrones atómicos se encuentran inicialmente en reposo.

Designemos por $m\Delta$ la energía que la partícula rápida cede a un electrón atómico y sea $d\sigma_\Delta$ la sección eficaz de dispersión elástica correspondiente a la misma. El frenado efectivo diferencial para todo el átomo será entonces

$$d\alpha = Zm\Delta d\sigma_\Delta. \quad (82a.21)$$

La energía máxima que se puede transferir a un electrón en reposo por la partícula de masa $M \gg m$ que choca con él es igual a

$$m\Delta_{\max} = \frac{2mp^2}{m^2 + M^2 + 2m\varepsilon} \approx \frac{2mp^2}{M^2 + 2m\varepsilon},$$

donde ε y p son la energía y el impulso de la partícula incidente [véase II, (13.13)].

* La divergencia logarítmica de la integral en el límite superior es precisamente la causa por la que, en el primer término de (82a.12), fue imposible desarrollar $e^{-iq\cdot r}$ en potencias de q .

Admitiremos, además, que aunque la energía ϵ puede ser ultrarrelativista ($\epsilon \gg M$), se tiene a la vez, sin embargo,

$$\epsilon \ll \frac{M^2}{m}. \quad (82a.22)$$

Entonces, incluso la energía máxima transferida

$$m\Delta_{\max} \approx \frac{2mp^2}{M^2} = 2mv^2\gamma^2 \quad (\gamma = \epsilon/M = 1/\sqrt{1-v^2}) \quad (82a.23)$$

se mantiene aún pequeña comparada con la energía cinética inicial de la partícula incidente ($m\Delta_{\max} \ll \epsilon - M$). Según esto, también el impulso cedido q será siempre pequeño en comparación con el impulso inicial de la partícula, p . Esta circunstancia permite considerar que el movimiento de esta última no varía en el choque, es decir, suponer que la partícula incidente es infinitamente pesada. Entonces la sección eficaz de dispersión se obtiene, simplemente, refiriendo la sección eficaz de dispersión del electrón por un centro inmóvil (81.7) al sistema de referencia del laboratorio, sistema en el que el electrón se encontraba inicialmente en reposo. Esto se hace fácilmente, observando que, dentro de la aproximación indicada,

$$-q^2 \approx q^2 = 4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad d\Omega' = \frac{\pi d|q^2|}{p^2},$$

y que la velocidad relativa en ambos sistemas es la misma, v . La fórmula (81.7) toma la forma

$$d\sigma = \frac{4\pi (ze^2)^2}{v^2} \left(1 - \frac{|q^2|}{4m^2\gamma^2}\right) \frac{d|q^2|}{|q^2|}.$$

La energía cedida Δ se expresa en función del mismo invariante q^2 de acuerdo con $-q^2 = 2m^2\Delta$. Tenemos así *

$$d\sigma_\Delta = \frac{2\pi (ze^2)^2}{m^2 v^2} \left(1 - v^2 \frac{\Delta^2}{\Delta_{\max}^2}\right) \frac{d\Delta}{\Delta^2}. \quad (82a.24)$$

La contribución al frenado efectivo debida a la región de transferencias de impulso que estamos considerando, se obtendrá integrando (82a.21) entre el límite antes introducido $|q^2|_1$ y $|q^2|_{\max} = 2m^2\Delta_{\max}$. Dicha contribución es igual a

* En esta fórmula no se tienen en cuenta, naturalmente, los efectos específicos de las interacciones fuertes, si la partícula pesada es un hadrón. Estos efectos (factor de forma hadrónico), sin embargo, sólo cobran importancia cuando $|q^2| \propto 1/M^2$, y en las condiciones (82a.22) tales transferencias de impulso quedan excluidas.

$$\frac{2\pi(ze^2)^2 Z}{mv^2} \left(\ln^2 \frac{2\Delta_{\max}m^2}{|q^2|_1} - v^2 \right). \quad (82a.25)$$

Finalmente, sumando las contribuciones (82a.20) y (82a.25), obtendremos el siguiente resultado para la pérdida total de energía de una partícula pesada rápida por ionización:

$$\kappa = \frac{4\pi Z(ze^2)^2}{mv^2} \left(\ln \frac{2mv^2}{I \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (82a.26)$$

(en unidades ordinarias). En el caso no relativista se sigue de aquí la fórmula ya conocida III, (147.10):

$$\kappa = \frac{4\pi Z(ze^2)}{mv^2} \ln \frac{2mv^2}{I}, \quad (82a.27)$$

y en el caso ultrarrelativista

$$\kappa = \frac{4\pi Z(ze^2)}{mc^2} \left(\ln \frac{2mc^2}{I \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} - 1 \right). \quad (82a.28)$$

El frenado depende tan sólo de la velocidad de la partícula rápida (pero no de su masa). La disminución del frenado al aumentar la velocidad, tal como se sigue de (82a.27), se transforma en la región ultrarrelativista en un crecimiento lento (logarítmico).

PROBLEMAS

1. Determinar el frenado eficaz de un electrón relativista.

Solución. La contribución debida a la región de pequeñas transferencias de impulso viene dada, como antes, por (82a.20). En la región de transferencias de impulso grandes, en vez de (82a.24) hay que aplicar la fórmula (82.14) que tiene en cuenta los efectos de intercambio. Integrando $\Delta d\sigma_\Delta$ respecto de $d\Delta$ desde $|q^2|_1/2m^2$ a $(\gamma - 1)/2$ y sumando con (82a.20), resulta

$$\kappa = \frac{2\pi Ze^4}{mv^2} \left[\ln \frac{m^2(\gamma^2 - 1)(\gamma - 1)c^4}{2I^2} - \left(\frac{2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \ln 2 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{(\gamma - 1)^2}{8\gamma^2} \right], \quad (1)$$

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

En el caso no relativista obtenemos la fórmula del problema III, § 146, y en el ultrarrelativista ($\gamma \gg 1$)

$$\kappa = \frac{2\pi Ze^4}{mc^2} \left(\ln \frac{m^2 c^4 \gamma^3}{2I^2} + \frac{1}{8} \right). \quad (2)$$

2. El mismo problema para el positón.

Solución. Para $d\sigma_\Delta$ hay que utilizar, en la región de transferencias grandes, la fórmula (82.23), tomando como límite superior respecto de $d\Delta$ el valor $\gamma - 1$. La solución en el caso ultrarrelativista es:

$$\kappa = \frac{2\pi Ze^4}{mc^2} \left(\ln \frac{2m^2 c^4 \gamma^3}{I^2} - \frac{23}{12} \right).$$

ÍNDICE ALFABÉTICO

B

Bariones, 189, 193
Bethe-Salpeter, ecuación de, 120, 181
Breit, sistema de, 219

C

Cabibbo, ángulo de, 276
Carga, anulación de la, 166
Cebado, carga de, 42, 165
Contraste de Landau, 11, 160, 162
Conversión interna de rayos γ , 294
Creación de pares por un campo eléctrico,
150, 153

D

Densidad espectral, 16
doble, 126
Descomposición de Källen-Lehmann, 49
Desdoblamiento de las masas, 212
Desintegración de mesones, 261, 270, 277
Diagramas en escalera, 119, 181
en esqueleto, 24
polares, 42, 225, 229
Dispersión neutrino-electrón, 251-252
relaciones de, 48, 73
con sustracción, 50, 73, 130

E

Extrañeza, 190

F

Factor de forma de carga, 220
magnético, 220
Furry, representación de, 33-34

H

Hadrones, 185
Hiperones, 194, 239, 279

I

Infrarrojo, divergencia en el, 77, 83, 102,
176, 256
expresión asintótica de un propagador en
el, 88
Interacciones débiles, carácter local de las,
245, 251, 258
universal de las, 267
Isospinor, 186

K

Källen-Lehmann, descomposición de, 49

L

Lamb, desplazamiento, 106
en el positonio, 123
Landau, contraste de, 11, 160, 162
Leptones, 241
Línea exterior efectiva, 11, 43

M

Mandelstam, representación de, 126
Masas, superficie de, 69
Másico, operador, 17, 36
Mesones, 189, 191
Monopolar, momento, 236, 238

P

Parametrización de integrales, 99, 154

- Parte de energía propia compacta, 9, 17,
 del electrón, 17
 del fotón, 9
vértice, 23
 irreducible, 24
Partículas extrañas, 189
Pérdida de energía, sección eficaz de, 292
Polarización del vacío, 35, 61
 mesónico, 64, 81, 114
operador de, 10
- Q**
- Quarks, 200-203, 239, 275
- R**
- Radiación de frenado interna, 254
- Regularización de integrales, 53, 83, 135
Renormalizabilidad, 54, 164
Representación de Furry, 33-34
 de Mandelstam, 126
Resonancias, 194
- S**
- Spence, función de, 79, 158, 257
Superespin, 201
Superespinores, 200
 irreducibles, 205, 209
- V**
- Vértice de cuatro fermiones, 253, 255

