

Obsérvese que, en esta aproximación, no existe influencia mutua de los circuitos sobre la parte real de su impedancia. Esta influencia se manifiesta en el hecho de que el campo magnético de la corriente variable en un conductor crea corrientes de Foucault (y con ellas una disipación adicional de energía) en otro conductor. Para conductores lineales este efecto es insignificante. Sin embargo, puede llegar a ser apreciable cuando existen cerca de ellos conductores que poseen ya un cierto volumen.

Finalmente, consideremos la cuestión de cómo están ligadas las ecuaciones obtenidas en este párrafo, relativas a las corrientes variables en circuitos lineales, con las ecuaciones generales del campo magnético variable en conductores cualesquiera. Veamos de determinar esta relación en el ejemplo más simple de la corriente que se establece en un circuito al desconectar una fuerza electromotriz constante \mathcal{E}_0 que ha actuado en él hasta el instante $t = 0$. De la ecuación (47.4) se sigue*:

$$\begin{aligned} J &= \mathcal{E}_0/R \text{ para } t < 0, \\ J &= (\mathcal{E}_0/R)e^{-c^2 R t / L} \text{ para } t > 0. \end{aligned} \quad (47.19)$$

Vemos así que, después de desconectar la f.e.m., la corriente disminuye con el tiempo siguiendo una ley exponencial, con decremento

$$\gamma = c^2 R / L. \quad (47.20)$$

Desde el punto de vista de la formulación exacta del problema, el coeficiente γ es el menor de los valores γ_m que se obtienen como resultado de resolver la ecuación exacta (45.10) para el conductor dado. Entre los valores γ_m para un conductor lineal, existe uno (el menor de todos) que, en orden de magnitud, es $\ln(l/a)$ veces menor que los restantes; éste es precisamente el valor (47.20).

§ 48. Capacidad en el circuito de una corriente cuasiestacionaria

En contraste con una corriente constante, una corriente variable puede recorrer no solamente un circuito cerrado, sino también uno abierto. Consideremos un circuito lineal cuyos extremos están unidos a las placas de un condensador que se encuentran a pequeña distancia una de otra. Al propagarse por el circuito la corriente variable, las armaduras del condensador se cargarán y descargarán periódicamente, representando así el papel de «fuentes» y «sumideros» de la corriente en el circuito abierto.

Teniendo en cuenta que la distancia entre las armaduras del condensador es pequeña, la energía magnética de la corriente se puede suponer, como antes, igual a

* Hablando estrictamente, estas fórmulas resultan inaplicables para valores muy pequeños de t , cuando en la descomposición espectral de las funciones son importantes las componentes con frecuencias altas y, por lo cual, es imposible utilizar la ecuación (47.4). Pero durante este pequeño intervalo de tiempo, la corriente J sólo consigue variar muy poco y, en consecuencia, la fórmula (47.19) posee un grado suficiente de aproximación para determinar la intensidad de la corriente en los instantes siguientes.

$LJ^2/2c^2$, donde L es la autoinductancia del circuito cerrado que se obtendría a partir del dado uniendo las armaduras mediante un corto segmento de conductor. Al aplicar la ley de conservación de la energía, sin embargo, es necesario tener en cuenta, junto con la energía magnética, también la energía del campo eléctrico en el condensador. Esta última es igual a $e^2/2C$, donde C es la capacidad del condensador, y $\pm e(t)$, las cargas que se encuentran sobre sus armaduras. Procediendo de la misma manera que en la deducción de la ecuación (47.4), obtendremos*

$$\mathcal{E}J = RJ^2 + \frac{d}{dt} \frac{LJ^2}{2c^2} + \frac{d}{dt} \frac{e^2}{2C} = RJ^2 + \frac{1}{c^2} LJ \frac{dJ}{dt} + \frac{e}{C} \frac{de}{dt}.$$

Pero la intensidad de la corriente J es igual a la disminución de la carga de una de las placas o al aumento en la otra:

$$J = de/dt.$$

Dividiendo los dos miembros de la ecuación por J y expresando en ella J en función de e , se obtendrá

$$\frac{1}{c^2} L \frac{d^2e}{dt^2} + R \frac{de}{dt} + \frac{e}{C} = \mathcal{E}. \quad (48.1)$$

Esta es precisamente la ecuación buscada para la corriente variable en un circuito con una capacidad.

Si \mathcal{E} es una función periódica del tiempo de frecuencia ω , la ecuación (48.1) se reduce a una relación algebraica entre \mathcal{E} y la carga e , o, lo que es lo mismo, entre \mathcal{E} y la corriente $J = -i\omega e$. En efecto, tenemos $JZ = \mathcal{E}$, donde la impedancia Z se define por

$$Z = R - i \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (48.2)$$

Separando la parte real en la igualdad $J = \mathcal{E}/Z$, obtendremos

$$J(t) = \frac{\mathcal{E}_0 \cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{\left[R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]}}, \quad (48.3)$$

$$\operatorname{tg} \phi = \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right) \frac{1}{R},$$

con lo que queda determinada la intensidad de la corriente en el circuito al que se ha aplicado una fuerza electromotriz exterior $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$.

Pero si $\mathcal{E} = 0$, la corriente en el circuito constituye un sistema de oscilaciones eléctricas «libres». La frecuencia (compleja) de estas oscilaciones viene determinada

* Prescindimos en este párrafo del efecto pelicular.

por la condición $Z = 0$, de donde

$$\omega = -i \frac{Rc^2}{2L} \pm \sqrt{\left[\frac{c^2}{LC} - \left(\frac{Rc^2}{2L} \right)^2 \right]}. \quad (48.4)$$

Según sea el signo del radicando, tendremos un amortiguamiento de las oscilaciones (con decremento $Rc^2/2L$) o una descarga amortiguada puramente aperiódica. En el caso límite $R \rightarrow 0$ se presentan oscilaciones no amortiguadas con una frecuencia que se expresa por la conocida *fórmula de Thomson*:

$$\omega = c/\sqrt{(LC)}.$$

La ecuación (48.1) se generaliza sin más a un sistema constituido por un cierto número de circuitos, acoplados inductivamente en los que hay condensadores. La corriente J_a en el circuito a -ésimo está ligada con las cargas $\pm e_a$ en las armaduras del correspondiente condensador por la igualdad

$$J_a = de_a/dt,$$

y en vez de (48.1) tenemos el sistema de ecuaciones

$$\sum_b \frac{1}{c^2} L_{ab} \frac{d^2 e_b}{dt^2} + R_a \frac{de_a}{dt} + \frac{e_a}{C_a} = \mathcal{E}_a. \quad (48.5)$$

Para corrientes periódicas (monocromáticas) estas ecuaciones se reducen a un sistema algebraico

$$\sum_b Z_{ab} J_b = \mathcal{E}_a, \quad (48.6)$$

en el que los elementos de matriz Z_{ab} vienen dados por las fórmulas

$$Z_{ab} = \delta_{ab} \left(R_a + \frac{i}{\omega C_a} \right) - \frac{i\omega}{c^2} L_{ab}. \quad (48.7)$$

Las frecuencias propias del sistema de corrientes resultan de la condición de compatibilidad de las ecuaciones (48.6) cuando $\mathcal{E}_a = 0$, es decir, de la condición de que el determinante sea igual a cero:

$$|Z_{ab}| = 0. \quad (48.8)$$

Si las resistencias R no son nulas, todas las «frecuencias» tienen una parte imaginaria, es decir, las oscilaciones eléctricas son amortiguadas.

Obsérvese que las ecuaciones (48.5) coinciden formalmente con las ecuaciones mecánicas del movimiento de un sistema con un cierto número de grados de libertad que ejecuta pequeñas oscilaciones amortiguadas. En este caso, el papel de coordenadas generalizadas lo desempeñan las cargas e_a y el de velocidades generalizadas,

las corrientes $J_a = \frac{de_a}{dt}$. La «función de Lagrange» del sistema es

$$\mathcal{L} = \sum_{a,b} \frac{1}{2c^2} L_{ab} \dot{e}_a \dot{e}_b - \sum_a \frac{e_a^2}{2C_a} + \sum_a e_a \mathcal{E}_a. \quad (48.9)$$

En ella, el papel de la energía cinética y potencial de un sistema mecánico lo representan las energías magnética y eléctrica del sistema de corrientes, respectivamente, y las magnitudes \mathcal{E}_a corresponden a las fuerzas impuestas que provocan las oscilaciones forzadas del sistema. En cuanto a las magnitudes R_a , éstas intervienen en la *función disipativa*

$$R = \sum_a \frac{1}{2} R_a \dot{e}_a^2. \quad (48.10)$$

Las ecuaciones (48.5) coinciden con las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{e}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_a} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{e}_a}. \quad (48.11)$$

PROBLEMAS

1. Determinar las frecuencias propias de las oscilaciones eléctricas en dos circuitos acoplados inductivamente cuyas autoinductancias son L_1 y L_2 y sus capacidades C_1 y C_2 ; se prescinde de las resistencias R_1 y R_2 .

Solución. Las frecuencias se determinan a partir de la condición

$$|Z_{ab}| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 = 0,$$

donde

$$Z_{11} = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \quad Z_{22} = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right), \quad Z_{12} = -\frac{i\omega}{c^2}L_{12}.$$

El cálculo da:

$$\omega_{1,2}^2 = c^2 \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 \mp \sqrt{[(L_1 C_1 - L_2 C_2)^2 + 4 C_1 C_2 L_{12}^2]}}{2 C_1 C_2 (L_1 L_2 - L_{12}^2)}.$$

Ambas frecuencias son puramente reales, lo qué es consecuencia de haber prescindido de R_1 y R_2 . Cuando $L_{12} \rightarrow 0$ las frecuencias ω_1 y ω_2 tienden a los valores $c/\sqrt{L_1 C_1}$ y $c/\sqrt{L_2 C_2}$ que corresponden a oscilaciones en cada uno de los circuitos por separado.

2. Lo mismo para un circuito constituido por una resistencia R , una capacidad C y una autoinducción L unidas en paralelo.

Solución. Las impedancias de las tres ramas del circuito son iguales a

$$Z_1 = R, \quad Z_2 = i/\omega C, \quad Z_3 = -i\omega L/c^2,$$

y las corrientes en ellos están ligadas por las igualdades

$$J_1 + J_2 + J_3 = 0, \quad Z_1 J_1 = Z_2 J_2 = Z_3 J_3.$$

De aquí se sigue la ecuación

$$1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3 = 0,$$

que resuelta da

$$\omega = -\frac{i}{2RC} \pm \sqrt{\left[\frac{c^2}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}\right]}.$$

3. Estudiar la propagación de oscilaciones eléctricas en un circuito constituido por una sucesión infinita de mallas idénticas que contienen las impedancias

$$Z_1 = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \quad Z_2 = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right),$$

como se representa en la figura 25. Hallar el intervalo de frecuencias de las oscilaciones que podrían propagarse a lo largo del circuito sin amortiguación*.

Solución. Designemos por i_α la corriente en la malla α como se indica en la figura 25. La ecuación de Kirchhoff da para esta malla:

$$Z_1 i_\alpha + Z_2 (2i_\alpha - i_{\alpha-1} - i_{\alpha+1}) = 0.$$

Ésta es una ecuación lineal entre diferencias (respecto de la variable entera α) con coeficientes constantes. Para su solución buscaremos una expresión de la forma

$$i_\alpha = \text{const} \times q^\alpha,$$

y para el parámetro q obtenemos la ecuación característica

$$q^2 - \left(2 + \frac{Z_1}{Z_2}\right)q + 1 = 0. \quad (1)$$

Supongamos que

$$-4 \leq Z_1/Z_2 \leq 0,$$

acotación a la que corresponden valores de ω^2 que se encuentran entre el menor y el mayor de los valores

$$c^2/L_1C_1 \quad \text{y} \quad c^2(4/C_2 + 1/C_1)/(4L_2 + L_1)$$

Entonces, la ecuación (1) tiene dos raíces conjugadas complejas de módulo unidad $|q| = 1$. Esto significa que al pasar de una malla del circuito a la siguiente, la amplitud de la corriente no disminuye, es decir, que las oscilaciones eléctricas se propagan por el mismo sin amortiguarse. Si hacemos en este caso $q = e^{ikl}$ (l es la longitud de una malla del circuito), el parámetro k representa el papel de «vector de onda» de las oscilaciones que se propagan a lo largo del circuito. En cuanto a la velocidad de propagación u , ésta puede calcularse aplicando la regla general, es decir, mediante la derivada $u = \frac{d\omega}{dk}$.

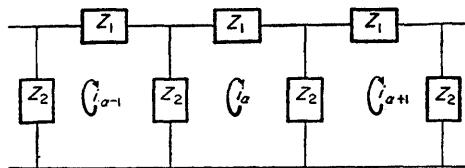


FIG. 25

Pero si ω se encuentra fuera de los límites indicados, la ecuación (1) tiene dos raíces reales q_1 y q_2 ; dado que $q_1 q_2 = 1$, una de ellas (por ejemplo, q_1) será en valor absoluto menor que la unidad, y la otra, mayor que 1. Es fácil ver que esto significa la imposibilidad de una propagación de las

* La condición de aplicabilidad de la teoría cuasiestacionaria a un circuito periódico de estas características se traduce en la de que las dimensiones de cada una de las mallas sean pequeñas comparadas con la «longitud de onda» c/ω .

oscilaciones a lo largo del circuito sin que se amortigüen. Para poner en claro las causas de esto, consideremos un circuito de longitud grande, pero finita. Un impulso oscilatorio inicial se aplica al origen del circuito, mientras que su extremo se encuentra cerrado de alguna manera. Matemáticamente, el que este extremo del circuito se encuentre cerrado se representa por una determinada condición de contorno, mediante la cual en la solución general

$$c_1 q_1^{-(\alpha_k - \alpha)} + c_2 q_2^{-(\alpha_k - \alpha)},$$

(α_k es la «coordenada» del extremo del circuito) se determina la razón de los coeficientes c_1/c_2 , que en la forma en que se ha presentado la solución será del orden de 1. Pero entonces, a medida que aumenta $\alpha_k - \alpha$, el segundo término (en el cual $|q_2| > 1$) pronto pasa a ser muy pequeño comparado con el primero. Así pues, casi en toda la longitud del circuito, con exclusión tan sólo de una pequeña parte del mismo cerca del extremo, la solución tiene la forma $i_a = c_1 q_1^{-(\alpha_k - \alpha)}$, en la que $|i_a|$ disminuye en el sentido del origen hacia el extremo del circuito.

Hay que subrayar que este amortiguamiento no tiene el carácter de una absorción disipativa (para la que no hay motivo, visto que no existen resistencias en el circuito); es posible describirlo intuitivamente como resultado de reflexiones del impulso oscilatorio por cada malla sucesiva del circuito.

§ 49. Movimiento de un conductor en un campo magnético

En todo lo dicho hasta aquí hemos supuesto implícitamente que los conductores se encuentran en reposo en el campo electromagnético (es decir, respecto del sistema de referencia K en el que se han determinado todas las magnitudes E , H , etc.). En particular, también la relación $j = \sigma E$ entre la corriente y el campo es válida, hablando en general, tan sólo cuando los conductores se hallan en reposo.

Para determinar la relación entre la corriente y el campo en un conductor en movimiento pasaremos del sistema de referencia K a otro sistema, K' , en el que el conductor (o una de sus partes) se encuentra en reposo en el instante dado. En este sistema tenemos $j = \sigma E'$, donde E' es la intensidad del campo eléctrico en K' . Pero según la conocida fórmula de transformación de los campos, E' se expresa en función del campo en el sistema K por la igualdad*

$$E' = E + v \times B/c, \quad (49.1)$$

donde v es la velocidad del sistema K' respecto del sistema K , es decir, en el presente caso, la velocidad del conductor (velocidad que, naturalmente, suponemos pequeña comparada con la velocidad de la luz). Encontramos así

$$j = \sigma(E + v \times B/c). \quad (49.2)$$

Ésta es precisamente la fórmula que determina la relación entre la corriente y el campo en los conductores en movimiento. Acerca de su deducción, hay que hacer notar todavía lo que sigue. Al efectuar el paso de un sistema de referencia a otro, hemos transformado el campo, pero se ha mantenido constante la magnitud j . La transformación de la densidad de corriente conduciría, cuando $v \ll c$, a la aparición

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, cap. 3. Los valores microscópicos de las intensidades de los campos eléctrico y magnético se han substituido por sus valores promedios $\bar{E} = E$, $\bar{B} = B$.

de términos adicionales de orden superior de pequeñez. En la fórmula (49.2), sin embargo, el segundo término, que resulta de la transformación del campo, no es, en general, pequeño comparado con el primero, aunque contiene el factor v/c . Por ejemplo, si el campo eléctrico se debe a la inducción electromagnética en un campo magnético variable, su orden de magnitud contiene un factor $1/c$ más comparado con el campo magnético.

La energía disipada en un conductor cuando por él circula una corriente dada, no puede depender, claro está, del movimiento del mismo. Por lo tanto, la densidad de calor emitida (en 1 s) por efecto Joule en el conductor en movimiento, expresada en función de la densidad de corriente, viene dada por la misma fórmula j^2/σ que en el caso de un conductor en reposo. Pero en vez del producto $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ tenemos ahora*

$$j^2/\sigma = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c).$$

Así pues, en un conductor en movimiento, la suma $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ representa el papel de intensidad «efectiva» del campo eléctrico que crea la corriente de conducción. En consecuencia, la fuerza electromotriz que actúa en un circuito lineal cerrado C viene dada por la integral

$$\mathcal{E} = \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c) \cdot d\mathbf{l}. \quad (49.3)$$

Transformémosla de la siguiente manera. Según la ecuación de Maxwell, $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, se tiene

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}$$

o bien, designando por Φ el flujo magnético a través de la superficie S que se apoya sobre el circuito de la corriente,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{v=0}.$$

La derivada respecto del tiempo con el subíndice $v=0$ significa la variación del flujo magnético determinada por el cambio en el tiempo del propio campo magnético, sin que varíe la posición del circuito C .

* Se ve por esta fórmula que el calor adicional que se emite (en un intervalo de tiempo δt) en el conductor cuando éste se mueve en un campo magnético es

$$\delta t \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} dV/c = - \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV/c,$$

donde $\mathbf{u} = v\hat{v}t$ es el desplazamiento en el intervalo δt . Esta cantidad es igual y de signo opuesto al trabajo realizado durante el mismo tiempo por las fuerzas de volumen que actúan sobre el conductor $\mathbf{f} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$; con esto se explica la aparente contradicción que mencionamos en la pág. 170.

Escribamos en el segundo término $v = du/dt$, donde du es el desplazamiento infinitesimal de un elemento de contorno. Entonces

$$\oint_C \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C du \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}/dt = - \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}/dt,$$

donde $d\mathbf{f} = du \times d\mathbf{l}$ es el elemento de área de la superficie «lateral» S entre dos posiciones infinitamente próximas C y C' del circuito de la corriente ocupadas por éste en los instantes t y $t+dt$ (fig. 26). Dado que el flujo magnético total a través de cualquier superficie cerrada es igual a cero, está claro que el flujo que atraviesa la superficie «lateral» es igual a la diferencia de los flujos a través de las superficies que se apoyan sobre C y C' . Así pues,

$$\oint_C \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -(\partial\Phi/\partial t)_{\mathbf{B}=\text{constante}},$$

donde la derivada respecto del tiempo significa la variación del flujo magnético determinada por el desplazamiento del conductor manteniendo el campo constante.

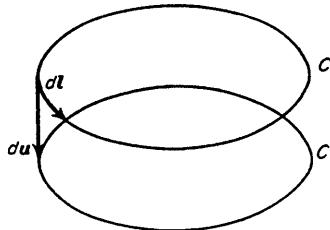


FIG. 26

Sumando los dos términos obtendremos, en definitiva,

$$\mathcal{E} = -(1/c) d\Phi/dt, \quad (49.4)$$

donde la derivada respecto del tiempo representa ahora la variación total del flujo magnético a través del circuito en movimiento. Por lo tanto, la *ley de Faraday* expresada por la fórmula (49.4) es válida cualquiera que sea la causa de la variación del flujo magnético, tanto si se debe a un cambio del propio campo (de lo que ya se habló en el § 47 en la fórmula (47.13)), como si se debe al movimiento del conductor.

En un campo magnético constante, la variación del flujo sólo puede atribuirse a un desplazamiento del circuito. Si éste se mueve de tal manera que todos sus puntos se desplazan a lo largo de líneas de fuerza del campo, sin cortarlas jamás, el flujo del campo a través del circuito no cambia. Esta circunstancia es una consecuencia evidente de que el flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada es igual a cero y de que el flujo a través de la superficie «lateral» engendrada por el circuito en movimiento es, en este caso, igual a cero idénticamente (puesto que sobre

ella se tiene $B_n = 0$). Cabe decir, en consecuencia, que para que aparezca una fuerza electromotriz de inducción el conductor debe, en cualquier caso, cortar en su movimiento líneas de fuerza magnéticas.

El campo electromagnético en conductores en movimiento viene determinado por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -(1/c)\partial\mathbf{B}/\partial t, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 4\pi\mathbf{j}/c = (4\pi\sigma/c)(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c), \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}$$

Despejando en la segunda ecuación \mathbf{E} en función de \mathbf{H} y substituyendo en la primera, obtendremos

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\frac{c^2}{4\pi} \operatorname{rot}\left(\frac{\operatorname{rot} \mathbf{H}}{\sigma}\right). \quad (49.5)$$

En un conductor homogéneo de conductibilidad σ y permeabilidad μ constantes, se tiene

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \Delta \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (49.6)$$

Estas ecuaciones generalizan las que obtuvimos en el § 45.

Hay que señalar, sin embargo, que si se tiene sólo un conductor que se mueve como un todo (sin deformarse) en un campo magnético exterior, la solución del problema se simplifica considerablemente si se utiliza un sistema de coordenadas rígidamente ligado al cuerpo. En este sistema el conductor se encuentra en reposo, mientras que el campo exterior cambia con el tiempo de acuerdo con una ley dada, de modo que volvemos al tipo de problemas de corrientes de Foucault estudiados en el § 45. La posibilidad de este paso no está ligada, sin embargo, con el principio de relatividad de Galileo (o de Einstein), puesto que el nuevo sistema de coordenadas no será, en general, inercial. La equivalencia de ambos problemas es consecuencia de que, conforme se hizo notar anteriormente, la inducción electromagnética es independiente de las causas que provocan la variación del flujo magnético. Podemos comprobar también que así es por un camino puramente matemático. Para ello desarrollemos la expresión $\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ teniendo en cuenta que $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ y que en el movimiento de un cuerpo como un todo se tiene asimismo $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ (esta igualdad expresa la «incompresibilidad» del cuerpo). Entonces, el primer miembro de la ecuación (49.5) tomará la forma

$$\partial\mathbf{B}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{v}. \quad (49.7)$$

Pero esta suma no es sino la derivada de \mathbf{B} respecto del tiempo determinada por la variación de \mathbf{B} respecto de un cuerpo que gira. En efecto, la suma de los dos primeros términos es la derivada «substancial» respecto del tiempo $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$, que

da la variación de \mathbf{B} en un punto que se mueve con velocidad \mathbf{v} . En cuanto al tercer término, éste tiene en cuenta la variación de la orientación de \mathbf{B} respecto del cuerpo: es igual a cero en el caso de un movimiento de traslación pura ($\mathbf{v} = \text{const}$) e igual a $-\Omega \times \mathbf{B}$ en una rotación del cuerpo ($\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r}$, donde Ω es la velocidad angular).

Para terminar este párrafo consideremos un singular fenómeno (la llamada *inducción unipolar*) que se produce en la rotación de un conductor imanado. Este fenómeno consiste en que si mediante dos contactos deslizantes (A y B en la figura 27) se une al imán en rotación un conductor en reposo, por éste circulará una corriente. No es difícil calcular la fuerza electromotriz que la crea. Para ello lo más fácil consiste en pasar a un sistema de coordenadas que gira junto con el imán. Si Ω es su velocidad de rotación, en el nuevo sistema el conductor girará con velocidad angular $-\Omega$ (mientras que el imán permanecerá inmóvil). Así pues, se trata ahora de un conductor que se mueve en un campo magnético constante dado \mathbf{B} que crea el imán en reposo; prescindimos de la distorsión del campo por el propio conductor. Según la fórmula (49.3) la fuerza electromotriz que actúa entre los extremos del conductor viene dada por la integral

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \int_{ACB} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \int_{ACB} \mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times \Omega) \cdot d\mathbf{l}, \quad (49.8)$$

extendida a lo largo del conductor. Esta fórmula precisamente resuelve el problema propuesto.

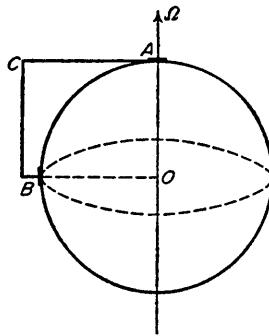


FIG. 27

PROBLEMAS

1. Determinar el momento magnético de una esfera conductora ($\mu = 1$) que gira uniformemente en un campo magnético constante homogéneo; determinar también el momento de las fuerzas que actúan sobre la esfera.

Solución. Sean \mathfrak{H}_x , 0 , \mathfrak{H}_z las componentes del campo exterior en un sistema de coordenadas en reposo (cuyo eje z está orientado en el sentido de la velocidad angular Ω). En un sistema de

coordenadas ξ, η, z , que gira junto con la esfera, las componentes del campo serán

$$\mathfrak{H}_\xi = \mathfrak{H}_x \cos \Omega t, \quad \mathfrak{H}_\eta = -\mathfrak{H}_x \sin \Omega t, \quad \mathfrak{H}_z,$$

o en forma compleja,

$$\mathfrak{H}_\xi = \mathfrak{H}_x e^{-i\Omega t}, \quad \mathfrak{H}_\eta = -i\mathfrak{H}_x e^{-i\Omega t}, \quad \mathfrak{H}_z.$$

Por lo tanto, a lo largo de los ejes ξ y η actúa un campo variable de frecuencia Ω y el momento magnético que induce vale

$$\mathcal{M}_\xi = V \operatorname{Re}(\alpha \mathfrak{H}_\xi) = V \mathfrak{H}_x (\alpha' \cos \Omega t + \alpha'' \sin \Omega t),$$

$$\mathcal{M}_\eta = V \operatorname{Re}(\alpha \mathfrak{H}_\eta) = V \mathfrak{H}_x (-\alpha' \sin \Omega t + \alpha'' \cos \Omega t),$$

donde $V\alpha$ es la polarizabilidad magnética compleja de la esfera, determinada en el problema 1 del § 45. En cambio, a lo largo del eje z el campo magnético es constante, por lo que (para $\mu = 1$) no crea ningún momento magnético. Las componentes del momento magnético respecto del sistema de coordenadas en reposo son

$$\mathcal{M}_x = V\alpha' \mathfrak{H}_x, \quad \mathcal{M}_y = V\alpha'' \mathfrak{H}_x, \quad \mathcal{M}_z = 0.$$

Por consiguiente, en este problema α' y α'' determinan, respectivamente, las componentes del momento magnético de la esfera paralela y perpendicular al plano de los vectores Ω y \mathfrak{H} .

El momento de las fuerzas que actúan sobre la esfera es $K = \mathcal{M} \times \mathfrak{H}$. Sus componentes respecto de los ejes fijos son

$$K_x = V\alpha'' \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_z, \quad K_y = -V\alpha' \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_z, \quad K_z = -V\alpha'' \mathfrak{H}_z^2.$$

2. Determinar la fuerza electromotriz debida a la inducción unipolar que aparece entre el polo y el ecuador (véase fig. 27) de una esfera imanada homogéneamente que gira con movimiento de rotación uniforme en torno de un eje que coincide con la dirección de imanación.

Solución. Cuando la esfera gira en torno de su eje de imanación, determina un campo constante y , dado que por la esfera no circulan corrientes, de (49.5) se sigue que $\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$. Por lo tanto, la integral de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ a lo largo del contorno cerrado $OACBO$ (fig. 27) es nula y, en consecuencia, la integración a lo largo de ACB en (49.8) puede substituirse por la correspondiente a AOB , camino éste interior a la esfera. La integral a lo largo del segmento AO del eje de rotación es igual a cero, puesto que Ω y r son paralelos; la integral a lo largo de OB da, ya que \mathbf{B} y Ω son paralelos dentro de la esfera,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \int_0^a B_0 \Omega r dr = B_0 \Omega a^2 / 2c,$$

donde a es el radio de la misma y B_0 la inducción magnética en ella. En una esfera uniformemente imanada (cuando no existe campo exterior) la inducción está ligada con la imanación por $B_0 + 2H = 0$ (cf. (8.1)) y $B_0 - H = 4\pi M$, de donde $B_0 = 8\pi M/3$. En función del momento magnético total de la esfera, tenemos finalmente $\mathcal{E} = \Omega \mathcal{M}/ca$.

3. Determinar la carga total que pasa por un circuito cerrado lineal al variar (por la causa que sea) el flujo magnético a través del mismo desde un valor constante (Φ_1) a otro (Φ_2).

Solución. La carga total buscada es la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} J dt$, donde $J(t)$ es la corriente de inducción que aparece en el conductor. Desde el punto de vista matemático, esta integral es la «componente de Fourier» de la función $J(t)$ para la frecuencia $\omega = 0$. Por ello, está ligada con la misma componente de la fuerza electromotriz por la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E} dt = Z(0) \int_{-\infty}^{\infty} J dt;$$

(véase (47.3). Substituyendo $Z(0) = R$ (R es la resistencia del circuito para corriente constante) y $\mathcal{E} = -(1/c) d\Phi/dt$, obtendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} J dt = \frac{1}{cR} (\Phi_1 - \Phi_2).$$

§ 50. Excitación de corrientes por aceleración

Al estudiar en el párrafo precedente el movimiento del conductor prescindimos de la posible influencia de la aceleración (si la hay). Ahora bien, el movimiento acelerado de un metal es equivalente a la aparición de fuerzas iniciales complementarias, que actúan sobre los electrones de conducción. Si $\ddot{\mathbf{v}}$ es la aceleración del conductor y m la masa del electrón, dicha fuerza es igual a $-m\ddot{\mathbf{v}}$ y determina sobre el electrón el mismo efecto que causaría un campo eléctrico de intensidad $\frac{m}{e}\ddot{\mathbf{v}}$, donde $-e$ es la carga del electrón. Por lo tanto, el campo eléctrico «efectivo» que actúa sobre los electrones de conducción en un metal que se mueve con movimiento acelerado, es

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + m\ddot{\mathbf{v}}/e. \quad (50.1)$$

De acuerdo con esto, para la densidad de corriente se tiene

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}' = \sigma(\mathbf{E} + m\ddot{\mathbf{v}}/e). \quad (50.2)$$

Despejemos en (50.1) \mathbf{E} en función de \mathbf{E}' y substituyamos el resultado en la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{E} = -(1/c) \partial \mathbf{H} / \partial t$$

(suponemos $\mu = 1$). Entonces

$$\text{rot } \mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{m}{e} \text{ rot } \ddot{\mathbf{v}}. \quad (50.3)$$

Escribiremos \mathbf{v} en forma de suma

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r},$$

donde \mathbf{u} es la velocidad del movimiento de traslación y $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad angular de rotación del cuerpo. Derivando respecto del tiempo, se halla la aceleración

$$\ddot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}.$$

Los dos primeros términos no dependen de \mathbf{r} y su contribución es nula al derivar respecto de las coordenadas. El tercer término se puede escribir en la forma

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \text{ grad } (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2,$$

y, en consecuencia, también se anula su rotacional. Finalmente, $\text{rot}(\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}) = 2\dot{\boldsymbol{\Omega}}$.

Por consiguiente, substituyendo $\dot{\mathbf{v}}$ en (50.3) se obtendrá

$$\text{rot } \mathbf{E}' = -(1/c) \partial \mathbf{H} / \partial t + 2mc\boldsymbol{\Omega}/e$$

o bien

$$\text{rot } \mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t}, \quad (50.4)$$

donde se ha introducido la notación

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} - 2mc\boldsymbol{\Omega}/e. \quad (50.5)$$

Dado que $\boldsymbol{\Omega}$ no depende de las coordenadas, la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi j/c$$

conserva su forma si expresamos en ella \mathbf{H} en función de \mathbf{H}' :

$$\text{rot } \mathbf{H}' = 4\pi\sigma\mathbf{E}'/c. \quad (50.6)$$

Eliminando \mathbf{E}' entre las ecuaciones (50.4) y (50.6), obtendremos para \mathbf{H}' la ecuación

$$\Delta \mathbf{H}' = (4\pi\sigma/c^2) \partial \mathbf{H}' / \partial t, \quad (50.7)$$

que coincide con aquella a que satisface \mathbf{H} en un conductor en reposo.

Fuera del cuerpo, el campo cumple la ecuación $\Delta \mathbf{H} = 0$ (la longitud de onda se supone grande comparada con las dimensiones del cuerpo); exactamente la misma ecuación satisfará también \mathbf{H}' .

Finalmente, sobre la superficie del conductor, junto con \mathbf{H} será también continuo \mathbf{H}' . Tan sólo es diferente la condición en el infinito: \mathbf{H} tiende a cero, mientras que \mathbf{H}' tiende al límite no nulo $-2mc\boldsymbol{\Omega}/e$.

Vemos así que el problema de determinar el campo magnético variable \mathbf{H} en torno de un cuerpo en rotación no uniforme es equivalente al de determinar el campo \mathbf{H}' alrededor de un cuerpo inmóvil que se encuentra en un campo magnético exterior homogéneo de intensidad

$$\mathfrak{H} = -2mc\boldsymbol{\Omega}/e. \quad (50.8)$$

A partir de la solución \mathbf{H}' de este problema, el campo buscado \mathbf{H}_e fuera del conductor se obtiene restando \mathfrak{H} ^{*}.

El campo magnético que así se produce, al igual que cualquier campo variable, induce en el propio conductor corrientes eléctricas. En un cuerpo simplemente conexo estas corrientes se manifiestan en la forma de un momento magnético ad-

* Aunque en la fórmula (50.8) interviene la propia velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$, y no su derivada respecto del tiempo, todo el razonamiento, y en consecuencia también el resultado, se refieren solamente a una rotación no uniforme. En particular, el campo magnético (50.8) nada tiene que ver con el efecto giro-magnético (el cual se manifiesta incluso en una rotación uniforme y es una cantidad pequeña que no tenemos en cuenta aquí).

quirido por el cuerpo. En un anillo en rotación no uniforme, el efecto se traduce en la aparición de una fuerza electromotriz (*efecto Stewart-Tolman*).

PROBLEMAS

1. Determinar el momento magnético de una esfera en rotación no uniforme (de radio a). La velocidad de rotación se supone tan pequeña que la profundidad de penetración es $\delta \gg a$.

Solución. El momento magnético que adquiere la esfera en el campo $\mathfrak{H}(t)$ (50.8) es

$$\mathcal{M} = V\alpha\mathfrak{H}$$

donde α es un operador cuya acción sobre las componentes de Fourier de la función $\mathfrak{H}(t)$ viene determinada por las fórmulas que obtuvimos en el problema 1, § 45. Para las componentes cuyas frecuencias ω son tales que $\delta \gg a$, tenemos

$$\mathcal{M} = V\alpha(\omega)\mathfrak{H} \cong -4\pi ma^5\sigma i\omega\Omega/15ce.$$

Esta fórmula, escrita en la forma

$$\mathcal{M} = (4\pi ma^5\sigma/15ce) d\Omega/dt,$$

no contiene ω explícitamente y, por lo tanto, es también válida para las funciones $\Omega(t)$, $\mathcal{M}(t)$ no desarrolladas en componentes de Fourier (admitiendo que en su desarrollo intervienen fundamentalmente tan sólo frecuencias que satisfacen la condición establecida).

2. Determinar la carga total que fluye por un anillo circular fino cuando cesa su movimiento de rotación uniforme en torno de un eje perpendicular a su plano.

Solución. En la fórmula obtenida en el problema 3, § 49, hay que interpretar Φ como flujo del campo \mathfrak{H} (50.8). La carga total que circula al variar la velocidad angular de Ω a 0, es

$$\int_{-\infty}^{\infty} J dt = \frac{2mc}{eRc} \Omega \pi b^2 = \frac{mcV}{2\pi e} \Omega,$$

(b es el radio del anillo, y V su volumen).

3. Determinar la corriente que se produce en un anillo circular superconductor cuando se interrumpe su rotación uniforme.

Solución. De la condición de que el flujo magnético total a través del anillo sea constante (véase (42.5)) se sigue

$$J = \frac{2mc^2}{eL} \Omega \pi b^2 = \frac{mc^2 b \Omega}{2e[\ln(8b/a) - 2]}.$$

(para el valor de L véase la nota en la pág. 204).

CAPÍTULO VIII

MAGNETOHIDRODINÁMICA

§ 51. Ecuaciones del movimiento de un líquido en un campo magnético

Si un líquido (o un gas) conductor se encuentra en un campo magnético, en sus movimientos hidrodinámicos se inducen en el mismo campos eléctricos y aparecen corrientes eléctricas. Pero sobre las corrientes en un campo magnético actúan fuerzas que pueden influir fundamentalmente sobre el movimiento del líquido. Por otra parte, estas corrientes cambian a su vez el propio campo magnético. De esta manera se forma un cuadro complicado de interacción de fenómenos magnéticos e hidrodinámicos que ha de considerarse tomando como base conjuntamente el sistema de ecuaciones del campo y de ecuaciones del movimiento del líquido.

Como ecuaciones del campo en un medio conductor en movimiento adoptaremos las ecuaciones (49.6). La permeabilidad de los medios, de los que cabe tratar en la magnetohidrodinámica, difiere poco de la unidad y esta diferencia carece de importancia en relación con los fenómenos estudiados aquí. En consecuencia, en todo este capítulo supondremos $\mu = 1$. Así pues, se tienen las ecuaciones

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (51.1)$$

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + (c^2/4\pi\sigma) \Delta \mathbf{H}. \quad (51.2)$$

Al utilizar estas ecuaciones admitimos que se cumplen determinadas condiciones. Concretamente, los períodos de variación del campo deben ser grandes comparados con el tiempo de recorrido libre de los electrones de conducción. Entonces la relación entre la corriente y el campo eléctrico viene determinada por la misma conductibilidad σ que en el caso de una corriente constante (véase § 45)*. Además, admitimos que σ es constante en todo el medio. Con esto se presupone, en particular, que la conductibilidad es independiente del campo magnético. Para que esto ocurra, el libre camino medio de los electrones debe ser pequeño comparado con el radio de curvatura de su trayectoria en el campo magnético. En otras palabras, el tiempo

* En la nota de la página 222 se señaló también la condición $\sigma/\omega \gg 1$, que debe cumplirse en los malos conductores y que automáticamente queda satisfecha (supuesto que se cumplen las restantes condiciones necesarias) en el caso de buenos conductores. En el presente caso, la razón V/L representa el papel de la frecuencia, donde L y V son parámetros de longitud y velocidad característicos que determinan las propiedades del movimiento dado del líquido. De esta manera se admite que se cumpla la condición $\sigma L/V \gg 1$.

de recorrido libre debe ser pequeño comparado con la frecuencia de Larmor de los electrones eH/mc . Esta condición puede quedar violada en un medio excesivamente enrarecido que se encuentre en un campo magnético intenso.

Las ecuaciones hidrodinámicas contienen, en primer lugar, la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (51.3)$$

(ρ es la densidad del líquido) y la ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} (\zeta + \frac{1}{2}\eta) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\mathbf{f}}{\rho},$$

donde η , ζ son los dos coeficientes de viscosidad del líquido, y \mathbf{f} la densidad volumétrica de fuerzas externas, en este caso las electromagnéticas. Según la fórmula (34.4) se tiene

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{H}/c = (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{H}/4\pi.$$

Así pues, la ecuación de movimiento del líquido toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} \\ = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} (\zeta + \frac{1}{2}\eta) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (51.4)$$

A esta ecuación hay que añadir todavía la ecuación de estado

$$p = p(\rho, T), \quad (51.5)$$

que liga entre sí la presión, la densidad y la temperatura del líquido, y la llamada ecuación de transmisión del calor. En la hidrodinámica ordinaria, ésta es*:

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T).$$

Aquí s es la entropía de la unidad de masa del líquido, y la expresión en el primer miembro de la igualdad representa la cantidad de calor (referida a 1 cm³) liberada en 1 s en un elemento del líquido en movimiento. En cuanto al segundo miembro de la igualdad, éste representa la energía disipada en el mismo volumen en 1 s. El primer término en él está ligado con la viscosidad; σ'_{ik} es el tensor viscosidad:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}.$$

El segundo término da la disipación ligada a la conductibilidad térmica (κ es el

* Véase vol. VI, *Hidrodinámica*, § 49.

coeficiente de conductibilidad calorífica). En un líquido conductor hay que añadir el calor liberado por efecto Joule. Referido a la unidad de volumen, éste es igual a

$$j^2/\sigma = (c^2/16\pi^2\sigma)(\text{rot } \mathbf{H})^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de transmisión del calor en magnetohidrodinámica se escribe:

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \text{div}(\kappa \text{ grad } T) + \frac{c^2}{16\pi^2\sigma} (\text{rot } \mathbf{H})^2. \quad (51.6)$$

Las ecuaciones (51.1) a (51.6) constituyen el sistema completo de ecuaciones de la magnetohidrodinámica (en las hipótesis indicadas al principio del párrafo).

Las ecuaciones (51.4) y (51.6) pueden también escribirse de una forma que expresa las leyes de conservación del impulso y de la energía, respectivamente. En efecto, la ecuación de Navier-Stokes de la hidrodinámica ordinaria se puede llevar a la forma*

$$\partial(\rho v_i)/\partial t = -\partial\Pi_{ik}/\partial x_k, \quad (51.7)$$

(aplicando al hacerlo también la ecuación de continuidad), donde Π_{ik} es el tensor densidad de flujo de impulso, igual a

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \sigma'_{ik}.$$

A la misma forma se reduce también la ecuación (51.4), con la única diferencia de que a Π_{ik} se añade un término. Tenemos

$$\mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{2} \text{grad } H^2 - (\mathbf{H} \cdot \text{grad}) \mathbf{H}.$$

Por consiguiente, se obtiene para Π_{ik} :

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \sigma'_{ik} - (H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik})/4\pi. \quad (51.8)$$

Como debe ser, a Π_{ik} se añade el tensor maxwelliano de tensiones en el campo magnético.

En cuanto a la ecuación de transmisión del calor, ésta se transforma (utilizando las demás ecuaciones hidrodinámicas) en la ecuación de conservación de la energía. En la hidrodinámica ordinaria

$$\partial(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon)/\partial t = -\text{div } \mathbf{q},$$

donde \mathbf{q} es la densidad de flujo de energía, igual a

$$\mathbf{q} = \rho \mathbf{v} (\frac{1}{2} v^2 + w) - \mathbf{v} \cdot \sigma' - \kappa \text{ grad } T;$$

mientras que ϵ y $w = \epsilon + p/\rho$ son, respectivamente, la energía interna y la entalpía correspondientes a 1 g de líquido. Cuando en el medio conductor existe un campo

* Véase vol. VI, *Hidrodinámica*, § 15.

magnético, a la densidad de energía se suma la energía magnética $H^2/8\pi$, y a la densidad de flujo de energía, el vector de Poynting $\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Expresando en este último \mathbf{E} en función de \mathbf{H} obtendremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} = & \rho \mathbf{v} (\frac{1}{2} v^2 + w) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \\ & - \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma} \mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \kappa \operatorname{grad} T, \end{aligned} \quad (51.9)$$

y la ecuación de conservación de la energía

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon + \frac{H^2}{8\pi} \right) = - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (51.10)$$

No presenta dificultad comprobar mediante un cálculo directo la equivalencia de las ecuaciones (51.6) y (51.10).

Las ecuaciones se simplifican un poco si el líquido en movimiento se puede considerar incompresible. La ecuación de continuidad (51.3) se reduce entonces a $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ y en la ecuación (51.4) desaparece el último término. Escribamos una vez más (con vistas a ulteriores referencias) el correspondiente sistema de ecuaciones (en las ecuaciones (51.2) y (51.4) conviene en este caso transformar los términos $\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H})$ y $\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}$, respectivamente, mediante conocidas fórmulas vectoriales):

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (51.11)$$

$$\partial \mathbf{H} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} + (c^2 / 4\pi\sigma) \Delta \mathbf{H}, \quad (51.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} \\ = - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{H} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{H} + \nu \Delta \mathbf{v} \end{aligned} \quad (51.13)$$

($\nu = \eta/\rho$ es la viscosidad cinemática). En lo que concierne a la ecuación (51.6), ésta no es necesaria para resolver el problema del movimiento de un líquido incompresible, a menos que nos interese especialmente la distribución de la temperatura en el mismo y su influencia sobre el movimiento.

Volvamos a la ecuación general (51.2). En el caso límite de una conductibilidad suficientemente grande, toma la forma

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}), \quad (51.14)$$

y puede dársele una importante interpretación sumamente intuitiva. Desarrollemos el rotacional que aparece en el segundo miembro de la igualdad, teniendo en cuenta que $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$:

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = (\mathbf{H} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Substituyendo aquí, de acuerdo con la ecuación de continuidad (51.3),

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho}{\rho},$$

obtendremos, después de una simple reagrupación de términos,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \right) \frac{\mathbf{H}}{\rho} = \left(\frac{\mathbf{H}}{\rho} \cdot \operatorname{grad} \right) \mathbf{v}.$$

La expresión en el primer miembro de la igualdad representa la derivada «substancial» que determina la variación de una magnitud en el desplazamiento del líquido junto con la partícula en movimiento; designando esta derivada por d/dt , tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{H}}{\rho} \right) = \left(\frac{\mathbf{H}}{\rho} \cdot \operatorname{grad} \right) \mathbf{v}. \quad (51.15)$$

Por otra parte, consideremos una «línea de fluido» cualquiera, es decir, una línea que se desplaza junto con las partículas del líquido que la constituyen. Sea δl el elemento de longitud de esta línea; determinemos cómo varía en el curso del tiempo. Si v es la velocidad del líquido en un punto que coincide con un extremo del elemento δl , su velocidad en el otro extremo será $\mathbf{v} + (\delta l \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}$. En consecuencia, en el intervalo de tiempo dt el elemento δl varía en $dt(\delta l \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}$, es decir,

$$d(\delta l)/dt = (\delta l \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}.$$

Vemos así que la variación de los vectores δl y \mathbf{H}/ρ con el tiempo viene determinada exactamente por la misma ecuación. De aquí se sigue que si en el instante inicial estos vectores coinciden en dirección y sentido, seguirán coincidiendo también en instantes posteriores y sus longitudes variarán proporcionalmente la una a la otra. En otras palabras, si dos partículas del líquido infinitamente próximas se encuentran sobre la misma línea de fuerza en un instante, se encontrarán siempre sobre ella y la magnitud H/ρ cambiará proporcionalmente a la distancia entre ellas.

Pasando de puntos infinitamente próximos a puntos que se encuentran a una distancia finita cualquiera uno de otro, llegamos, por consiguiente, a la conclusión de que cada línea de fuerza se desplaza junto con las partículas de líquido que se encuentran sobre ella. Cabe imaginar que (en el caso límite $\sigma \rightarrow \infty$) las líneas de fuerza magnéticas están como «pegadas» a la materia del líquido, moviéndose junto con él. La magnitud H/ρ , en cambio, varía en cada punto proporcionalmente a la extensión de la correspondiente «línea de fluido». Si el líquido que se mueve se puede considerar como incompresible, se tendrá $\rho = \text{const}$ y entonces la propia intensidad H varía proporcionalmente al alargamiento de las líneas de fuerza.

Estos resultados poseen también otro aspecto intuitivo. De ellos se sigue que en el desplazamiento, con el tiempo, de un circuito «líquido» cerrado cualquiera, éste no cortará líneas de fuerza, es decir, el «número» de tales líneas que lo atraviesan se conservará constante. Esto significa (cf. § 49) que el flujo del campo magnético a través de cualquier superficie que se apoya sobre un contorno «líquido»

permanece invariable en el tiempo.

La cuestión de en qué casos se puede de hecho prescindir de los procesos disipativos en un líquido, no tiene respuesta general, puesto que las correspondientes condiciones dependen fundamentalmente del carácter del movimiento y, por ejemplo, son completamente diferentes para movimientos estacionarios y no estacionarios. No nos ocuparemos aquí en estudiar de modo general esta cuestión.

PROBLEMA

Determinar la distribución de velocidades en un líquido conductor viscoso incompresible que se mueve con movimiento estacionario en el espacio entre dos planos sólidos paralelos; en la dirección perpendicular a los planos se aplica un campo magnético exterior homogéneo H_0 (J. HARTMANN, 1937).

Solución. Es natural suponer que la velocidad del líquido tiene la misma dirección en todos los puntos (dirección en la que tomaremos el eje x); dicha velocidad depende solamente de la coordenada z , perpendicular a la orientación de los planos. Lo mismo vale también para el campo longitudinal H_x que aparece como consecuencia del movimiento del líquido. La presión p , en cambio, depende también de x , ya que en la dirección del movimiento debe producirse un gradiente de presión constante que asegure el carácter estacionario de la corriente. La ecuación $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ se cumple automáticamente, y de la ecuación $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ se sigue que $H_z = \text{const} = H_0$. La componente z de la ecuación (51.13) da

$$p + \frac{H_0^2}{8\pi} = P(x), \quad (1)$$

donde $P(x)$ es función sólo de x . El gradiente de la presión a lo largo del eje $-\partial p / \partial x = -dP / dx$ es una cantidad constante.

Además, las componentes x de las ecuaciones (51.12), (51.13), dan

$$H_0 \frac{dv}{dz} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{d^2 H_x}{dz^2} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{H_0}{4\pi} \frac{dH_x}{dz} = \text{constante} \equiv \frac{dP}{dx}. \quad (3)$$

Las condiciones de contorno para la velocidad del líquido viscoso se escriben: $v = 0$ para $z = \pm a$ donde $2a$ es la distancia entre los planos rígidos, y el plano $z = 0$ coincide con el plano medio entre ellos. La misma condición, $H_x = 0$ para $z = \pm a$, debe quedar satisfecha por el campo magnético, puesto que fuera del líquido se tiene un campo exterior no variable H_0 y la componente de \mathbf{H} tangencial a la frontera es continua. La solución de las ecuaciones (2), (3) que satisface estas condiciones es

$$v = v_0 \frac{\cosh(a/\Delta) - \cosh(z/\Delta)}{\cosh(a/\Delta) - 1},$$

$$H_x = -v_0 \frac{4\pi}{c} \sqrt{(\sigma\eta)} \frac{(z/a) \operatorname{senh}(a/\Delta) - \operatorname{senh}(z/\Delta)}{\cosh(a/\Delta) - 1}, \quad (4)$$

donde $\Delta = \frac{c}{H_0} \sqrt{\frac{\eta}{\sigma}}$. La constante v_0 es la velocidad del líquido en el plano medio $z = 0$. La relación que la liga con el gradiente de la presión se puede obtener substituyendo (4) en (3). La velo-

ciudad media del líquido (relativa a su sección transversal) vale

$$\bar{v} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a v \, dz = - \frac{dP}{dx} \frac{a\Delta}{\eta} \left(\operatorname{ctgh} \frac{a}{\Delta} - \frac{\Delta}{a} \right).$$

El grado de influencia del campo magnético sobre el movimiento del líquido se caracteriza por la razón $\frac{a}{\Delta} = \frac{aH_0}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$. Cuando $a/\Delta \ll 1$ se obtiene

$$v = v_0 \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right), \quad \bar{v} = - \frac{dP}{dx} \frac{a^2}{3\eta},$$

en correspondencia con el resultado de la hidrodinámica ordinaria. Pero si $a/\Delta \gg 1$, se tendrá

$$v = v_0 (1 - e^{-(a-|z|)/\Delta}), \quad \bar{v} = - \frac{dP}{dx} \frac{ac}{H_0 \sqrt{(\sigma\eta)}}.$$

El aumento del campo magnético hace más plano el perfil de las velocidades en una gran parte de la sección transversal y disminuye la velocidad media del movimiento (para un valor dado del gradiente de presión).

§ 52. Ondas magnetohidrodinámicas

Consideremos la propagación de pequeñas perturbaciones en un medio conductor homogéneo que se encuentra en un campo magnético constante y homogéneo \mathbf{H}_0 . Admitiremos que la viscosidad, la conductibilidad calorífica y la resistencia eléctrica ($1/\sigma$) del medio son tan pequeñas que, en primera aproximación, puede prescindirse de la influencia de la disipación de energía ligada con ellas sobre la propagación de las perturbaciones*. Entonces las perturbaciones se propagarán en forma de ondas no amortiguadas**.

Prescindiendo de todos los términos disipativos, escribiremos el sistema de ecuaciones fundamentales (51.1) a (51.4) en la forma

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{52.1}$$

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}), \tag{52.2}$$

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{52.3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} = - \frac{\operatorname{grad} p}{\rho} + \frac{1}{4\pi\rho} (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{H}. \tag{52.4}$$

En lo que concierne a la ecuación (51.6), ésta se reduce a la ecuación de conservación de la entropía (condición de movimiento adiabático). Si el medio no perturbado

* Obsérvese que al hacer $1/\sigma = 0$ ampliamos el intervalo de frecuencias en que son aplicables las ecuaciones consideradas: dejan de ser necesarias las condiciones que permiten asegurar la falta de dispersión de σ y su independencia respecto del campo magnético.

** La condición que hace posible prescindir de dicha influencia se reduce a que el coeficiente de amortiguamiento de las ondas sea pequeño, coeficiente que se calculará en el problema de este párrafo.

es homogéneo, en virtud de esta ecuación será también $s = \text{const}$ en el medio perturbado, es decir, el movimiento será isentrópico.

Hagamos

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad (52.5)$$

donde el índice 0 caracteriza los valores de equilibrio constantes de las diferentes magnitudes y \mathbf{h} , ρ' , p' sus pequeñas variaciones en la onda. Pequeña y del mismo orden es también la velocidad \mathbf{v} , que es nula en el equilibrio. Teniendo en cuenta que el movimiento es isentrópico, las variaciones de presión y de densidad están ligadas entre sí por

$$p' = (\partial p / \partial \rho)_s \rho'.$$

Pero $(\partial p / \partial \rho)_s$ es el cuadrado de la velocidad ordinaria del sonido en el medio dado. Designando esta velocidad por u_0 , tenemos $p' = u_0^2 \rho'$. Prescindiendo en las ecuaciones (52.1) a (52.4) de pequeñas cantidades de orden superior al primero, obtendremos el sistema siguiente de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{h} &= 0, & \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} &= \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}), \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= - (u_0^2 / \rho) \operatorname{grad} \rho' - (\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{h}) / 4\pi\rho. \end{aligned} \right\} \quad (52.6)$$

Aquí y en lo que sigue, para abreviar la notación hemos prescindido del índice 0 en los valores de equilibrio de las diferentes cantidades. Para una perturbación periódica en el tiempo, la primera de estas ecuaciones es consecuencia de la segunda y podemos prescindir de ella.

Buscaremos soluciones de estas ecuaciones que sean de la forma $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ es decir, soluciones que representan la propagación de ondas planas con vector de onda \mathbf{k} y frecuencia ω . Para ellas el sistema (52.6) se reduce al sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} -\omega \mathbf{h} &= \mathbf{k} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}), & \omega \rho' &= \rho \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}, \\ -\omega \mathbf{v} + (u_0^2 / \rho) \rho' \mathbf{k} &= -\mathbf{H} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{h}) / 4\pi\rho. \end{aligned}$$

La primera de estas ecuaciones prueba, ante todo, que el vector \mathbf{h} es perpendicular a la dirección del vector de onda, en cuyo sentido elegiremos a continuación el eje x . El plano determinado por \mathbf{k} y \mathbf{H} se tomará como plano xy . Además, introduciremos la «velocidad de fase» de la onda

$$u = \omega/k.$$

Eliminando ρ' mediante la segunda ecuación y pasando en las demás a componentes, se obtendrá el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} uh_z &= -v_z H_x, & uv_z &= -H_x h_z / 4\pi\rho, \\ uh_y &= v_x H_y - v_y H_x, & uv_y &= -H_x h_y / 4\pi\rho, \end{aligned} \quad (52.7)$$

$$v_x \left(u - \frac{u_0^2}{u} \right) = H_y h_y / 4\pi\rho. \quad (52.8)$$

Hemos separado aquí las ecuaciones en dos grupos, el primero de los cuales contiene solamente las variables h_z , v_z , y el segundo, tan sólo h_y , v_x , v_y . De aquí se sigue que las perturbaciones de estos dos grupos de variables se propagan con independencia las unas de las otras. En lo que concierne a las perturbaciones de la densidad (y con ellas también en la presión), éstas se propagan junto con las correspondientes a h_y , v_x , v_y , puesto que están ligadas con v_x por la relación

$$\rho' = \rho v_x / u. \quad (52.9)$$

La condición de compatibilidad de las dos ecuaciones (52.7) da

$$u \equiv u_1 = H_x / \sqrt{4\pi\rho}. \quad (52.10)$$

En estas ondas la componente h_z del campo magnético perpendicular a la dirección de propagación de la onda y a la del campo constante \mathbf{H} experimenta oscilaciones. Junto con h_z , oscila la velocidad v_z , ligada con h_z por la igualdad

$$v_z = -h_z / \sqrt{4\pi\rho}. \quad (52.11)$$

La relación entre ω y k (o, como suele decirse, la *relación de dispersión*) dada por la fórmula (52.10) depende esencialmente de la dirección del vector de onda:

$$\omega = \mathbf{H} \cdot \mathbf{k} / \sqrt{4\pi\rho}.$$

La velocidad física de propagación de las ondas, en cambio, resulta ser, como es sabido, la llamada *velocidad de grupo*, dada por la derivada $\partial\omega/\partial k$. En el presente caso, esta magnitud es igual a

$$\partial\omega/\partial k = \mathbf{H} / \sqrt{4\pi\rho},$$

y no depende de la dirección de \mathbf{k} ; la dirección de propagación de la onda, entendiendo por ella la de la velocidad de grupo, coincide con la de \mathbf{H} .

Consideremos las ondas descritas por las ecuaciones (52.8). Formando el determinante de las mismas e igualándolo a cero, tendremos la ecuación

$$(u^2 - u_0^2) \left(u^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho} \right) = \frac{u^2 H_y^2}{4\pi\rho}.$$

Esta ecuación bicuadrada (respecto de u) tiene las raíces*

$$u_{2,3} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} + \frac{H_x u_0}{\sqrt{(\pi\rho)}} \right)} \pm \sqrt{\left(u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} - \frac{H_x u_0}{\sqrt{(\pi\rho)}} \right)} \right\}. \quad (52.12)$$

* Las raíces de la ecuación bicuadrada $x^4 + px^2 + q = 0$ se pueden escribir en la forma
 $x = \pm \frac{1}{2} \{ \sqrt{(-p + 2\sqrt{q})} \pm \sqrt{(-p - 2\sqrt{q})} \}.$

Obtenemos así dos tipos más de ondas. En éstas oscilan las magnitudes h_y , v_x , v_y (y la densidad ρ'). Los vectores \mathbf{h} , \mathbf{v} se encuentran en el plano de los vectores \mathbf{H} , \mathbf{k} .

En el caso límite en que $H^2 \ll 4\pi\rho u_0^2$, tenemos $u_2 \cong u_0$ y entonces de las ecuaciones (52.8) se sigue que $v_y \ll v_x$. En otras palabras, las ondas de este tipo se convierten, en el límite, en ondas acústicas ordinarias que se propagan con la velocidad u_0 . El débil campo transversal en la onda está ligado con v_x por la relación

$$h_y \cong v_x H_y / u_0.$$

En el mismo caso límite, u_3 coincide en primera aproximación con u_1 , siendo $v_x \cong 0$, $v_y \cong -h_y / \sqrt{4\pi\rho}$, al igual que en una onda del primer tipo, pero los vectores \mathbf{v} y \mathbf{h} se encuentran en el plano \mathbf{k} , \mathbf{H} en vez de ser perpendiculares al mismo.

Vemos también que en un líquido incompresible (al que corresponde formalmente el paso al límite $u_0 \rightarrow \infty$) subsiste en definitiva un solo tipo de ondas, con dos direcciones de polarización independientes. La ley de dispersión que corresponde a estas ondas viene dada por la fórmula (52.10); los vectores \mathbf{v} y \mathbf{h} son perpendiculares al vector de onda y están ligados entre sí por

$$\mathbf{v} = -\mathbf{h}/\sqrt{(4\pi\rho)}. \quad (52.13)$$

Estas ondas fueron discutidas por vez primera por H. ALFVÉN (1942)*.

El hecho de que, cuando existe un campo magnético longitudinal, los desplazamientos transversales del líquido se propagan en el mismo en forma de ondas, tiene una interpretación intuitiva simple. Vimos al final del § 51 que las líneas de fuerza magnéticas se comportan (en un líquido con $\sigma \rightarrow \infty$) como «líneas de fluido». Por ello, el desplazamiento transversal de las partículas del líquido conduce a la curvatura de estas líneas y, por lo tanto, al alargamiento de las mismas y, en algunos puntos, a su acortamiento. Pero las fuerzas que actúan en el campo magnético (expresadas por el tensor de tensiones de Maxwell) se comportan como si las líneas de fuerza magnéticas tendieran a acortarse a la vez que se repelen unas a otras**. En consecuencia, al curvarse aparecen fuerzas «cuasielásticas» que tienden a enderezarlas de nuevo, lo que conduce a la aparición de oscilaciones.

Es interesante que en un líquido incompresible la onda plana magnetohidrodinámica representada por las fórmulas (52.10) y (52.13) resulta ser de hecho solución exacta de las ecuaciones válidas para campos transversales arbitrarios \mathbf{h} , no necesariamente pequeños. (Esto, sin embargo, no es aplicable a la superposición de un cierto número de ondas planas que se propagan en diferentes direcciones.) En efecto, volvamos a las ecuaciones exactas (52.1) a (52.4). La tercera de ellas se reduce en un líquido incompresible a $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Si se busca una solución en la cual todas las mag-

* A veces se las llama ondas *magnetohidrodinámicas* en el sentido estricto de la palabra. En el caso general de campos magnéticos no débiles, la división de las ondas en magnetohidrodinámicas y acústicas ordinarias es imposible.

** En efecto, supongamos que la línea de fuerza coincide con el eje z . Entonces la tensión longitudinal Π_{zz} (51.8) contiene un término negativo $-H^2/8\pi$, mientras que en las transversales Π_{xx} y Π_{yy} encontramos un término positivo $H^2/8\pi$.

nitudes dependen solamente de una coordenada, la x (y del tiempo t), de dicha ecuación se deduce que $v_x = \text{const}$; mediante el paso a otro sistema de coordenadas que se mueve con movimiento uniforme a lo largo del eje x , se puede siempre conseguir que sea $v_x = 0$. Pero de la ecuación $\text{div } \mathbf{H} = 0$ se sigue que $H_x = \text{const}$. Designando las componentes transversales de \mathbf{H} por \mathbf{h} , de las ecuaciones (52.2) y (52.4) se sigue (para $v_x = 0$)

$$\partial \mathbf{h} / \partial t = H_x \partial \mathbf{v} / \partial x, \quad \partial \mathbf{v} / \partial t = (H_x / 4\pi\rho) \partial \mathbf{h} / \partial x,$$

es decir, las ecuaciones exactas se reducen automáticamente a ecuaciones lineales que describen una onda plana con la velocidad de fase (52.10) y en la que los vectores \mathbf{v} y \mathbf{h} están ligados por la relación (52.13). La componente x de la ecuación (52.4) da

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} = 0,$$

de donde

$$p + h^2/8\pi = \text{constante}, \quad (52.14)$$

con lo que se determina la marcha de la variación de la presión en la onda.

Volvamos de nuevo a las fórmulas (52.8) y (52.12) y consideremos el caso límite opuesto en el que $H^2 \gg 4\pi\rho u_0^2$. Para u_2 tenemos entonces, en primera aproximación,

$$u_2 = H/\sqrt{(4\pi\rho)}.$$

Dado que esta expresión no depende en modo alguno de \mathbf{k} , la velocidad de grupo coincide en módulo con u_2 y está dirigida en el sentido de \mathbf{k} . El vector \mathbf{v} en esta onda es perpendicular a \mathbf{H} (fig. 28) y su valor absoluto está ligado con $h = h_y$ por

$$v = h/\sqrt{(4\pi\rho)}.$$

Para u_3 tenemos, en este caso,

$$u_3 = u_0 H_x / H$$

y la velocidad de grupo es

$$\partial \omega / \partial \mathbf{k} = u_0 \mathbf{H} / H.$$

El vector \mathbf{v} en esta onda es antiparalelo a \mathbf{H} , y su módulo viene dado por

$$v = h H^2 / 4\pi\rho u_0 H_y.$$

Cuando la relación entre H^2 y ρu_0^2 es arbitraria, tanto u_2 como u_3 dependen de la dirección del vector de onda. Al aumentar el ángulo formado por \mathbf{k} y \mathbf{H} , u_2 crece con monotonía, y u_3 disminuye de manera monótona. Es fácil ver que siempre se cumplen las desigualdades

$$u_3 \leq u_1 \leq u_2, \quad u_2 \geq u_0, \quad u_3 \leq u_0. \quad (52.15)$$

Si $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}$ ($H_y = 0$, $H_x = H$), u_2 y u_3 son iguales, respectivamente, a la mayor y a la menor de las cantidades u_0 y $u_1 = H/\sqrt{4\pi\rho}$. Pero si $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$ ($H_x = 0$, $H_y = H$), se tiene

$$u_2 = \sqrt{\left(u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho}\right)}, \quad (52.16)$$

y u_1 y u_3 tienden a cero, es decir, no quedan más que ondas de un solo tipo.

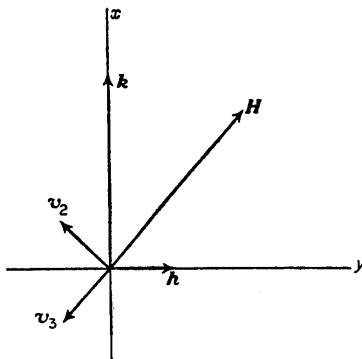


FIG. 28

En este último caso resulta posible hallar soluciones exactas de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica para una onda plana no ligadas con la hipótesis de que su amplitud sea pequeña (S. A. Kaplan y K. P. Staniukovich, 1954). Si $H_x = 0$ y $H_y = H$, la ecuación (52.1) queda satisfecha idénticamente, y las ecuaciones (52.2) a (52.4) dan

$$\partial H / \partial t + \partial(v_x H) / \partial x = 0, \quad (52.17)$$

$$\partial \rho / \partial t + \partial(v_x \rho) / \partial x = 0, \quad (52.18)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{8\pi\rho} \frac{\partial H^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (52.19)$$

De las dos primeras ecuaciones se sigue, como se ve fácilmente, que la razón $H/\rho = b$ satisface la ecuación

$$\partial b / \partial t + v_x \partial b / \partial x = 0$$

o bien $db/dt = 0$, donde la derivada total representa la variación de una magnitud en el desplazamiento de un elemento dado del líquido. De aquí se deduce que si en el instante inicial el fluido era homogéneo, de modo que en él b era constante, también se tendrá luego*

$$H/\rho = b = \text{constante}. \quad (52.20)$$

* De acuerdo con los resultados generales acerca de la relación entre H/ρ y las líneas de fuerza «fluidas» (§ 51), si se tiene en cuenta que, en el presente caso, la longitud de estas últimas no cambia con el tiempo.

Substituyendo $H = \rho b$ en la tercera ecuación, obtendremos

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{b^2}{8\pi} \rho^2 \right). \quad (52.21)$$

Así pues, el campo magnético queda eliminado de las ecuaciones y el problema se reduce a resolver las ecuaciones (52.18) y (52.21). Pero éstas difieren de las ecuaciones del movimiento unidimensional de la hidrodinámica ordinaria tan sólo en un cambio en la ecuación de estado del gas: en vez de la ecuación verdadera $p = p(\rho)$ (para una entropía dada s) hay que utilizar la ecuación

$$p^*(\rho) = p(\rho) + b^2 \rho^2 / 8\pi.$$

Esta circunstancia permite trasladar al caso considerado del movimiento magnetohidrodinámico todos los resultados de la hidrodinámica ordinaria. En particular, pueden aplicarse las fórmulas de la solución exacta para ondas unidimensionales móviles (solución de Riemann)*, representando el papel de velocidad del sonido en ellas la magnitud

$$\begin{aligned} u^* &= \sqrt{\left(\frac{\partial p^*}{\partial \rho} \right)_s} = \sqrt{\left(u_0^2 + \frac{b^2}{4\pi} \rho \right)} \\ &= \sqrt{\left(u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} \right)}, \end{aligned}$$

de acuerdo con la fórmula (52.16).

PROBLEMA

Determinar el coeficiente de absorción de una onda magnetohidrodinámica (supuesto pequeño) en un líquido incompresible.

Solución. El coeficiente de absorción de la onda se determina por

$$\gamma = \bar{Q}/2\bar{q},$$

donde \bar{Q} es el valor medio (respecto del tiempo) de la energía disipada en 1 s en 1 cm³ y \bar{q} es la densidad media de flujo de energía en la onda; la amplitud de ésta disminuye, a medida que se propaga, proporcionalmente a $e^{-\gamma x}$. Q viene dado por el segundo miembro de la ecuación (51.6); en un líquido incompresible y para una onda que se propaga a lo largo del eje x (con lo cual $v_z = 0$), se tiene

$$Q = \eta (\partial v / \partial x)^2 + (c^2 / 16\pi^2 \sigma) (\partial h / \partial x)^2.$$

En la densidad de flujo de energía (51.9), en cambio, prescindimos de los pequeños términos disipativos, con lo que resulta

$$q_x = -H_x \mathbf{h} \cdot \mathbf{v} / 4\pi.$$

Utilizando las fórmulas (52.10), (52.13), obtendremos en definitiva

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2u_1^3} \left(\frac{\eta}{\rho} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \right).$$

* Véase vol. VI, *Hidrodinámica*, § 94.

§ 53. Discontinuidades tangenciales y rotacionales

Las ecuaciones del movimiento de un medio magnetohidrodinámico «perfecto» (de un medio sin viscosidad, ni conductibilidad térmica, ni resistencia eléctrica) admiten discontinuidades de la corriente al igual que en la hidrodinámica ordinaria.

Para poner en claro las condiciones que deben quedar satisfechas sobre una superficie de discontinuidad, consideremos un elemento cualquiera de esta superficie y utilicemos un sistema de coordenadas que se mueva junto con él*.

Ante todo, sobre una superficie de discontinuidad debe ser continuo el flujo de materia: la cantidad de gas que penetra por una cara de la superficie debe ser igual a la cantidad de gas que sale por la otra. Esto significa que $\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}$, donde los índices 1 y 2 se refieren a las dos caras de la superficie de discontinuidad y el índice n designa la componente de un vector normal a la superficie. Designaremos más adelante la diferencia de valores de cualquier magnitud a uno y otro lado de la superficie de discontinuidad mediante corchetes. Así, pues,

$$[\rho v_n] = 0.$$

Además, debe ser continuo el flujo de energía. Utilizando la expresión (51.9) (y suprimiendo en ella los términos disipativos), tendremos

$$[q_n] = [\rho v_n (\frac{1}{2} v^2 + w) + v_n H^2 / 4\pi - H_n \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} / 4\pi] = 0.$$

También debe ser continuo el flujo de impulso. Esta condición significa que $[\Pi_{ik} n_k] = 0$, donde Π_{ik} es el tensor densidad de flujo de impulso, y \mathbf{n} el vector unitario normal a la superficie. Con ayuda de (51.8), obtendremos a partir de aquí las ecuaciones

$$\begin{aligned} [p + \rho v_n^2 + (\mathbf{H}_t^2 - H_n^2) / 8\pi] &= 0, \\ [\rho v_n \mathbf{v}_t - \mathbf{H}_n \mathbf{H}_t / 4\pi] &= 0, \end{aligned}$$

donde el subíndice t designa las componentes de los vectores tangentes a la superficie.

Finalmente, son continuas la componente normal del campo magnético y la componente tangencial del campo eléctrico. Si la conductibilidad del medio es infinita, el campo eléctrico inducido es

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{H} / c,$$

Por ello, la condición $[\mathbf{E}_t] = 0$ da

$$[H_n \mathbf{v}_t - \mathbf{H}_t v_n] = 0.$$

En lo que sigue resultará conveniente utilizar en vez de la densidad del gas su

* Mediante esta condición, el sistema de coordenadas queda fijado solamente en lo que concierne a su velocidad en la dirección normal a la superficie. En cambio, a su velocidad tangencial se le puede sumar todavía un vector constante arbitrario.

volumen específico $V = 1/\rho$. La densidad de flujo de masa a través de la superficie de discontinuidad la designaremos por j :

$$j = \rho v_n = v_n/V.$$

Teniendo en cuenta que j y H_n son continuas, las demás condiciones de contorno se pueden escribir de la siguiente manera:

$$j[w + \frac{1}{2}j^2V^2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_t^2 + VH_t^2/4\pi] = H_n[\mathbf{H}_t \cdot \mathbf{v}_t]/4\pi, \quad (53.1)$$

$$[p] + j^2[V] + [\mathbf{H}_t^2]/8\pi = 0, \quad (53.2)$$

$$j[\mathbf{v}_t] = H_n[\mathbf{H}_t]/4\pi, \quad (53.3)$$

$$H_n[\mathbf{v}_t] = j[V\mathbf{H}_t]. \quad (53.4)$$

Éste es precisamente el sistema fundamental de ecuaciones que describen las discontinuidades en magneto hidrodinámica.

En la hidrodinámica ordinaria son posibles, como es sabido, discontinuidades de dos tipos totalmente diferentes: ondas de choque y discontinuidades tangenciales*. La aparición de dos tipos de discontinuidades está vinculada matemáticamente con el hecho de que algunas de las ecuaciones que traducen las condiciones de contorno es posible representarlas como anulación de un producto de dos factores; igualando a cero cada uno de ellos por separado, obtenemos dos soluciones completamente independientes.

En magneto hidrodinámica, en cambio, las ecuaciones (53.1) a (53.4) no presentan esta forma, y basándose en ello cabría pensar que, en total, se tiene solamente un único tipo de discontinuidades que abarca todos los casos particulares posibles. En realidad, sin embargo, resulta que también aquí existen diferentes tipos de discontinuidad que no cabe considerar como casos particulares de uno mismo más general (*F. de Hoffmann y E. Teller, 1950*).

Consideremos en primer lugar aquellas discontinuidades en las que $j = 0$. Ello significa que $v_{1n} = v_{2n} = 0$, esto es, que el líquido se mueve paralelamente a la superficie de discontinuidad. Si, además, $H_n \neq 0$, por las ecuaciones (53.1) a (53.4) se ve que deben ser continuas la velocidad, la presión y el campo magnético. En cambio, puede experimentar un salto arbitrario la densidad (y también la entropía, la temperatura, etc.). Tal discontinuidad, que se puede llamar *de contacto*, es simplemente la frontera de separación entre dos medios en reposo con diferentes densidades y temperaturas.

Pero si además de $j = 0$ también es $H_n = 0$, de las cuatro ecuaciones (53.1) a (53.4) quedan satisfechas idénticamente tres de ellas; esto hace ver ya que se trata de un caso singular. Encontramos de esta manera un tipo de discontinuidad que se podría llamar, al igual que en la hidrodinámica ordinaria, *discontinuidad tangencial*. Sobre una tal superficie de discontinuidad la velocidad y el campo magnético son

* Véase vol. VI, *Hidrodinámica*, § 81.

tangentes y experimentan saltos arbitrarios en magnitud y en dirección:

$$j = 0, \quad H_n = 0, \quad [\mathbf{v}_t] \neq 0, \quad [\mathbf{H}_t] \neq 0. \quad (53.5)$$

También es arbitrario el salto de densidad, mientras que el salto de presión está ligado con el de \mathbf{H}_t por la ecuación (53.2):

$$[V] \neq 0, \quad \left[p + \frac{\mathbf{H}_t^2}{8\pi} \right] = 0. \quad (53.6)$$

En cuanto a los saltos de las demás magnitudes termodinámicas (la entropía, la temperatura, etc.), éstos se determinan a partir de las discontinuidades de V y p mediante la ecuación de estado.

Otro tipo de discontinuidades lo constituyen aquellas en las que la densidad no experimenta salto alguno. Teniendo en cuenta la continuidad del flujo $j = v_n/V$, del hecho de que la densidad no presente un salto se sigue inmediatamente que también será continua la componente normal de la velocidad

$$j \neq 0, \quad [V] = 0, \quad [v_n] = 0. \quad (53.7)$$

En el segundo miembro de la ecuación (53.4) saquemos ahora V fuera de los corchetes y, dividiendo término a término las ecuaciones (53.4) y (53.3), se obtiene

$$j = H_n / \sqrt{4\pi V}. \quad (53.8)$$

Con esto la ecuación (53.3) o la (53.4) da

$$[\mathbf{v}] = \sqrt{(V/4\pi)} [\mathbf{H}_t]. \quad (53.9)$$

En la ecuación (53.1) escribamos $w = \epsilon + pV$; teniendo en cuenta la continuidad de V , substituyendo H_n de acuerdo con (53.8) y reagrupando términos, escribiremos dicha ecuación en la forma

$$j[\epsilon] + jV \left[p + \frac{\mathbf{H}_t^2}{8\pi} \right] + \frac{1}{2} j \left[\left(\mathbf{v}_t - \sqrt{\frac{V}{4\pi}} \mathbf{H}_t \right)^2 \right] = 0.$$

El segundo término se anula aquí en virtud de la igualdad (53.2), y el tercero, en virtud de (53.9), de modo que queda $[\epsilon] = 0$, es decir, junto con la densidad es también continua la energía interna. Ahora bien, cualquier otra magnitud termodinámica viene unívocamente determinada si se dan las dos magnitudes ϵ y V . Por lo tanto, son también continuas las restantes magnitudes termodinámicas, en particular la presión. Pero de la ecuación (53.2) se sigue entonces que es asimismo continuo el cuadrado \mathbf{H}_t^2 , esto es, el módulo del vector \mathbf{H}_t :

$$[p] = 0, \quad [H_t] = 0. \quad (53.10)$$

Que H_t y H_n sean continuas a la vez significa que también se conserva invariable el valor absoluto del propio vector \mathbf{H} y el ángulo que forma con la normal a la superficie.

Las fórmulas (53.7) a (53.10) determinan todas las propiedades de las disconti-

nuidades consideradas. Todas las magnitudes termodinámicas son continuas, mientras que el campo magnético gira en torno de la dirección normal al pasar de una a otra cara, manteniendo constante su valor absoluto. Junto con el vector \mathbf{H}_t experimenta un salto la componente tangencial de la velocidad (según (53.9)), si bien la componente normal de la velocidad $v_n = jV$ es continua e igual a

$$v_n = H_n \sqrt{(V/4\pi)} = H_n / \sqrt{(4\pi\rho)}. \quad (53.11)$$

Llamaremos a las discontinuidades de este tipo *discontinuidades de rotación (o rotacionales)*.

Conviene hacer notar que eligiendo convenientemente el sistema de coordenadas es siempre posible conseguir que en ambas caras de una superficie de discontinuidad rotacional la velocidad del gas sea paralela al campo. Para ello basta pasar a un nuevo sistema de coordenadas (véase la nota en la pág. 266) que se mueva respecto al de partida con velocidad igual a

$$\mathbf{v}_{1t} - \mathbf{H}_{1t} \sqrt{(V/4\pi)} = \mathbf{v}_{2t} - \mathbf{H}_{2t} \sqrt{(V/4\pi)}.$$

En este nuevo sistema de coordenadas, en ambas caras de las superficies de discontinuidad las razones de las tres componentes de \mathbf{v} a las correspondientes componentes de \mathbf{H} son las mismas e iguales a $\sqrt{V/4\pi}$, es decir,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}_1 \sqrt{(V/4\pi)}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{H}_2 \sqrt{(V/4\pi)}. \quad (53.12)$$

Así, pues, en este sistema de coordenadas la velocidad gira junto con el campo magnético, manteniéndose constante su módulo y el ángulo que forma con la normal.

La velocidad v_n , tomada con signo opuesto, es al mismo tiempo la velocidad de propagación de la discontinuidad respecto del líquido. Dicha velocidad coincide con la de fase (u_1) de uno de los tres tipos de ondas magnetohidrodinámicas (§ 52). El hecho de que esta coincidencia tenga lugar para cualquier discontinuidad de rotación, es hasta cierto punto casual, mas para pequeños saltos de las magnitudes sobre la correspondiente superficie de discontinuidad esta coincidencia es del todo necesaria. En efecto, una discontinuidad de este tipo representa una débil perturbación en la cual la velocidad \mathbf{v} y el campo magnético \mathbf{H} adquieran pequeños incrementos perpendiculares al plano que pasa por \mathbf{H} y por la normal a la superficie \mathbf{n} . Esta perturbación es precisamente del tipo al que corresponde la velocidad de fase u_1 . La velocidad física de propagación del frente de una pequeña perturbación es la proyección de la velocidad de grupo sobre la normal al mismo, es decir, sobre el vector de onda \mathbf{k} . Pero teniendo en cuenta el carácter lineal de la relación entre ω y \mathbf{k} resulta

$$\mathbf{k} \cdot \partial\omega/\partial\mathbf{k} = \omega,$$

y, en consecuencia, dicha proyección coincide con la velocidad de fase $\omega/k = u_1$.

Aunque las discontinuidades tangenciales y de rotación constituyen dos tipos diferentes de discontinuidad, existen, sin embargo, discontinuidades que poseen simultáneamente las propiedades características de uno y otro. Tales son las super-

ficies de discontinuidad sobre las que \mathbf{v} y \mathbf{H} son tangenciales y meramente giran sin que cambien sus valores absolutos.

Como es sabido, en la hidrodinámica ordinaria las discontinuidades tangenciales son siempre inestables respecto de perturbaciones infinitesimales, lo que conduce a su rápida transición al régimen turbulento. En cambio, un campo magnético ejerce una influencia estabilizadora sobre el movimiento de un líquido conductor, y las discontinuidades tangenciales pueden en él resultar estables. Esta circunstancia es consecuencia natural del hecho de que los desplazamientos del líquido en una perturbación, que son transversales (respecto del campo), conducen a un alargamiento de las líneas de fuerza magnéticas «adheridas» al mismo, y con ello a la aparición de fuerzas que tienden a restablecer el movimiento no perturbado. El estudio de tales discontinuidades en un líquido incompresible (llevado a cabo por S. I. Syrovatskii, 1953) conduce a las dos desigualdades siguientes, que deben quedar satisfechas a la vez para que la discontinuidad sea estable:

$$\begin{aligned} H_1^2 + H_2^2 &> 2\pi\rho v^2, \\ (\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2)^2 &\geqslant 2\pi\rho \{(\mathbf{H}_1 \times \mathbf{v})^2 + (\mathbf{H}_2 \times \mathbf{v})^2\}, \end{aligned} \quad (53.13)$$

donde $v = v_2 - v_1$ es el salto de la velocidad sobre la superficie de discontinuidad (véase probl. 1 de este párrafo)*.

De hecho, sin embargo, gracias a la existencia en el líquido de viscosidades pequeñas, pero en todo caso no nulas, y de la resistencia eléctrica, la discontinuidad tangencial no se conservará durante un tiempo infinitamente largo, incluso si las condiciones (53.13) se cumplen. Aunque no se produce entonces turbulencia, en vez de un salto brusco se presenta, en cambio, una región de transición que se ensancha gradualmente y en la cual la velocidad y el campo magnético pasan con suavidad de un valor al otro.

Es fácil comprobar esto partiendo de las ecuaciones del movimiento (51.12) y (51.13) incluidos los términos disipativos. Elijamos como eje x la normal a la superficie de discontinuidad. Suponiendo que todas las magnitudes dependen solamente de la coordenada x (y, posiblemente, del tiempo), escribiremos las componentes transversales de estas ecuaciones en la forma:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{H}_t / \partial t &= (c^2/4\pi\sigma) \partial^2 \mathbf{H}_t / \partial x^2, \\ \partial \mathbf{v}_t / \partial t &= \nu \partial^2 \mathbf{v}_t / \partial x^2, \end{aligned} \quad (53.14)$$

(el líquido se supone incompresible). Admitiendo que el movimiento es estacionario, los primeros miembros de estas ecuaciones deben substituirse por cero. Pero entonces la única solución que se conserva finita para $x \rightarrow \pm \infty$ es, simplemente, $\mathbf{H}_t = \text{const}$, $\mathbf{v}_t = \text{const}$, lo que contradice la hipótesis de que los valores de estas cantidades experimentan un cambio. Así pues, una discontinuidad tangencial no puede tener una

* Si las densidades de los medios incompresibles a uno y otro lado de la discontinuidad son diferentes, en estas desigualdades hay que substituir ρ por $2\rho_1\rho_2/(\rho_1 + \rho_2)$.

anchura estacionaria (como tiene, por ejemplo, una onda de choque débil). Las ecuaciones (53.14) tienen la forma de la ecuación de la transmisión del calor. Como es sabido por la teoría de ésta, la discontinuidad de una magnitud descrita por dicha ecuación se difunde en el curso del tiempo ocupando una región de transición cuya anchura crece proporcionalmente a la raíz cuadrada del tiempo. Teniendo en cuenta que los coeficientes en las dos ecuaciones (53.14) son diferentes, las anchuras δ_v y δ_H de las regiones de transición de la velocidad y del campo serán distintas:

$$\delta_v \sim \sqrt{(vt)}, \quad \delta_H = \sqrt{(c^2 t / \sigma)}. \quad (53.15)$$

En lo que concierne a las discontinuidades de rotación, éstas resultan ser estables (en un líquido incompresible) respecto de las perturbaciones infinitesimales y cualesquiera que sean los valores del campo magnético (S. I. Syrovatskii, 1953). Sin embargo, al igual que las discontinuidades tangenciales, no pueden tener una anchura estacionaria y se ensanchan con el tiempo bajo la influencia de la viscosidad y de la resistencia eléctrica del medio (véase problema 2).

PROBLEMAS

1. Obtener las condiciones de estabilidad de una discontinuidad tangencial en un líquido conductor perfecto incompresible que se encuentra en un campo magnético (S. I. Syrovatskii).

*Solución**. Hagamos

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}', p = p_0 + p', \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}',$$

donde \mathbf{v}_0 , p_0 , \mathbf{H}_0 son los valores constantes de las diferentes magnitudes (sobre cada una de las dos caras de la superficie de discontinuidad) y \mathbf{v}' , p' , \mathbf{H}' sus pequeñas perturbaciones. Substituyendo en las ecuaciones (51.11)-(51.13), se obtendrá en el caso de un líquido perfecto

$$\operatorname{div} \mathbf{u}' = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \quad (1)$$

$$\partial \mathbf{u}' / \partial t = (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}' - (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u}', \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}' &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p' - \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}' \\ &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} (p' + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') + (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u}'. \end{aligned} \quad (3)$$

Para abbreviar prescindimos aquí y en lo que sigue del subíndice 0 e introducimos la notación $\mathbf{u} \equiv \mathbf{H} / \sqrt{4\pi\rho}$. Aplicando a la ecuación (3) el operador div y teniendo en cuenta (1), se obtendrá

$$\Delta(p' + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') = 0. \quad (4)$$

Supongamos que el plano de discontinuidad es el $x = 0$; los vectores \mathbf{v} y \mathbf{u} son paralelos al mismo. Busquemos para las magnitudes \mathbf{v}' , \mathbf{u}' , p' en cada uno de los semiespacios $x > 0$ y $x < 0$ expresiones proporcionales a $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} e^{i\kappa x}$, donde \mathbf{k} es un vector bidimensional en el plano y , z . De la ecuación (4) se deduce que $k^2 - \kappa^2 = 0$, con lo cual hay que hacer $\kappa = +k$ en el semiespacio $x < 0$, y $\kappa = -k$ en el semiespacio $x > 0$. Eliminemos ahora v'_x entre las componentes x de las ecuaciones (2) y (3), con lo que se obtendrá**

$$p' + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = -u'_x \frac{i\rho}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \kappa} \{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})^2\}. \quad (5)$$

* Véase vol. VI, *Hidrodinámica*, § 30.

** El caso en que la expresión entre corchetes se anula no nos interesa, ya que entonces ω es real, mientras que la inestabilidad puede estar únicamente ligada con valores complejos de ω .

Sea $\zeta = \zeta(y, z, t)$ el desplazamiento de la superficie de discontinuidad a lo largo del eje x en la perturbación. Sobre la superficie desplazada deben cumplirse las condiciones (53.5) y (53.6):

$$\left. \begin{aligned} [p + \rho(\mathbf{u} + \mathbf{u}')^2] &\cong [p' + \rho\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'] = 0, \\ u_{n1} + u'_{n1} &\cong u'_{x1} - \mathbf{u}_1 \cdot \text{grad } \zeta = 0, \\ u_{n2} + u'_{n2} &\cong u'_{x2} - \mathbf{u}_2 \cdot \text{grad } \zeta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(la condición de que no exista flujo de líquido a través de la superficie de discontinuidad se cumple con esto automáticamente).

Haciendo $\zeta = \text{const} \cdot e^{i(k \cdot r - \omega t)}$ y eliminando ζ , u_{x1} , u_{x2} entre las tres ecuaciones (6), se obtiene la ecuación que determina los valores posibles de ω :

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1)^2 + (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2)^2 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_2)^2.$$

Esta ecuación cuadrática carece de raíces complejas si

$$2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1)^2 + 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_2)^2 - \{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\}^2 > 0,$$

o bien

$$\{2u_{1i}u_{1k} + 2u_{2i}u_{2k} - (v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})\}k_ik_k > 0.$$

A su vez, esta forma cuadrática es definida positiva si son positivos la traza y el determinante del tensor de segundo orden que aparece entre corchetes; de aquí resultan precisamente las condiciones (53.13) indicadas en el texto.

2. Determinar cómo se expande con el tiempo una discontinuidad de rotación.

Solución. Suponiendo que todas las magnitudes dependen solamente de la coordenada x (y del tiempo), a partir de las ecuaciones $\text{div } \mathbf{v} = 0$ y $\text{div } \mathbf{H} = 0$ se encuentra que $v_x = \text{const}$, $H_x = \text{const}$. Elijamos el sistema de coordenadas de tal manera que los valores de \mathbf{v} y \mathbf{H} a ambos lados de la discontinuidad (es decir, lejos de la capa de transición), estén ligados por las relaciones (53.12); entonces $v_x = u_x$ (con la misma notación \mathbf{u} que en el problema 1). Para los componentes transversales \mathbf{u}_t y \mathbf{v}_t tenemos las ecuaciones, deducidas de (51.12) y (51.13),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t} + u_x \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial x} &= u_x \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial x} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial t} + u_x \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial x} &= u_x \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial x} + v \frac{\partial^2 \mathbf{v}_t}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Dado que para $x = \pm\infty$ la diferencia $\mathbf{v}_t - \mathbf{u}_t$ se anula en virtud de las relaciones (53.12), dicha diferencia es pequeña dentro de la capa de transición comparada con la suma $\mathbf{v}_t + \mathbf{u}_t$. Sumando las ecuaciones (1) podemos, por ello, prescindir del término $\mathbf{v}_t - \mathbf{u}_t$, con lo que se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_t + \mathbf{u}_t) = \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} + v \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathbf{v}_t + \mathbf{u}_t).$$

De aquí resulta que la anchura de la discontinuidad varía de acuerdo con la ley

$$\delta \sim \sqrt{\left\{ \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} + v \right) t \right\}}.$$

§ 54. Ondas de choque

Pasemos al siguiente tipo de discontinuidades, en el cual

$$j \neq 0, \quad [V] \neq 0. \quad (54.1)$$

Estas discontinuidades, al igual que en la hidrodinámica ordinaria, se llaman *ondas de choque*. Se caracterizan por la existencia de un salto de la densidad y por el hecho de que el gas las atraviesa (v_{n1} y v_{n2} diferentes de cero). En lo que concierne a la componente normal del campo magnético, ésta, en general, es diferente de cero, pero en algún caso particular puede también ser $H_n = 0$.

Comparando las ecuaciones (53.3) y (53.4), vemos que, cuando $H_n \neq 0$, los vectores $\mathbf{H}_{t2} - \mathbf{H}_{t1}$ y $V_2 \mathbf{H}_{t2} - V_1 \mathbf{H}_{t1}$ son paralelos a un mismo vector, el $\mathbf{v}_{2t} - \mathbf{v}_{1t}$, y, por consiguiente, paralelos entre sí. A su vez, de aquí se sigue que también son paralelos \mathbf{H}_{t1} y \mathbf{H}_{t2} , es decir, los vectores \mathbf{H}_1 y \mathbf{H}_2 y la normal a la superficie se encuentran en un plano, en contraste con el caso de las discontinuidades tangencial y de rotación, en las que, en general, los planos \mathbf{H}_1 , \mathbf{n} y \mathbf{H}_2 , \mathbf{n} no coinciden. Este resultado vale también en el caso en que $H_n = 0$, cuando de (53.4) se sigue que $V_1 \mathbf{H}_{t1} = V_2 \mathbf{H}_{t2}$ (este caso se considerará más adelante con mayor detenimiento).

En cuanto a la velocidad, el salto $\mathbf{v}_{t1} - \mathbf{v}_{t2}$ se encuentra en el mismo plano que \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 . Sin limitar la generalidad cabe suponer, evidentemente, que también los propios vectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 se encuentran en aquel mismo plano, de modo que el movimiento en la onda de choque resulta ser, por su propia naturaleza, un movimiento plano. Además, es fácil ver que, mediante una adecuada transformación del sistema de coordenadas, es siempre posible conseguir (cuando $H_n \neq 0$) que a ambos lados de la discontinuidad los vectores \mathbf{v} y \mathbf{H} sean paralelos entre sí. Para ello hay que pasar a un nuevo sistema de coordenadas que se mueva respecto del inicial con una velocidad

$$\mathbf{v}_t - (v_n/H_n)\mathbf{H}_t = \mathbf{v}_t - (jV/H_n)\mathbf{H}_t$$

(los valores de esta magnitud a uno y otro lado de la discontinuidad son iguales en virtud de la condición de contorno (53.4)). En las fórmulas que siguen a continuación, sin embargo, no supondremos esta especial elección del sistema de coordenadas.

Deduzcamos la relación que para las ondas de choque en magnetohidrodinámica representa el papel de las adiabáticas de Hugoniot de la hidrodinámica ordinaria. Eliminando $[\mathbf{v}_t]$ entre las dos ecuaciones (53.3) y (53.4), obtendremos la relación

$$j^2[V\mathbf{H}_t] = H_n^2[H_t]/4\pi; \quad (54.2)$$

hemos escrito aquí H_t en vez de \mathbf{H}_t teniendo ya en cuenta que \mathbf{H}_{t1} y \mathbf{H}_{t2} son paralelos. Para eliminar $[\mathbf{v}_t]$ de la ecuación (53.1), escribiremos ésta en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} [w] + \frac{1}{2}j^2[V^2] + \frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{v}_t - \frac{H_n}{4\pi j}\mathbf{H}_t\right)^2\right] + \\ + [V\mathbf{H}_t^2]/4\pi - H_n^2[H_t^2]/32\pi^2j^2 = 0. \end{aligned}$$

El tercer término se anula en virtud de la ecuación (53.3) y, de esta manera, desaparece \mathbf{v}_t . En el último término substituiremos el valor de j^2 dado por (54.2), y en el primero, el que resulta de (53.2), es decir,

$$j^2 = \{p_2 - p_1 + (H_{t2}^2 - H_{t1}^2)/8\pi\}/(V_1 - V_2). \quad (54.3)$$

Después de simples cálculos obtendremos entonces en definitiva

$$\epsilon_2 - \epsilon_1 + \frac{1}{2}(p_2 + p_1)(V_2 - V_1) + (V_2 - V_1)(H_{t2} - H_{t1})^2/16\pi = 0. \quad (54.4)$$

Ésta es precisamente la *ecuación de la adiabática de choque* en magnetohidrodinámica. Difiere de la ecuación ordinaria en el tercer término.

Escribamos también aquí una vez más la ecuación (53.3)

$$v_{t2} - v_{t1} = H_n(H_{t2} - H_{t1})/4\pi j. \quad (54.5)$$

que determina el salto de v_t en función del que experimenta H_t . Las ecuaciones (54.2) a (54.5) constituyen un sistema completo de ecuaciones que describen las ondas de choque. Cuando tienden a cero los saltos de todas las magnitudes, la velocidad de propagación de la onda de choque debe tender a la velocidad de propagación de las pequeñas perturbaciones. En la hidrodinámica ordinaria esto significa que la velocidad de las ondas de choque débiles tiende a la velocidad del sonido. En cambio, en la magnetohidrodinámica se tienen dos velocidades diferentes (u_2 y u_3), con las que pueden propagarse las ondas de choque de débil intensidad*.

Consideremos más detenidamente las ondas de choque débiles y veamos en qué sentido cambian en ellas las diferentes magnitudes. Desarrollando la ecuación (54.4) en potencias de los saltos de la presión y de la entropía, obtendremos**

$$T(s_2 - s_1) = \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3 - \frac{1}{16\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s (p_2 - p_1)(H_{t2} - H_{t1})^2. \quad (54.6)$$

Cuando el gas atraviesa la onda de choque, su entropía sólo puede aumentar: $s_2 > s_1$. Pero $\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s < 0$, de acuerdo con una de las desigualdades termodinámicas, mientras que la derivada $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s$ es de hecho positiva para todos los medios de que aquí se trata. Por ello, (54.6) nos dice que de la condición $s_2 > s_1$ se siguen las desigualdades $p_2 > p_1$ y por lo tanto $V_2 < V_1$. Así pues, como en la hidrodinámica ordinaria, una onda de choque es una onda de compresión. Este resultado, que hemos demostrado aquí para las ondas de choque débiles, es también válido, al parecer, para las ondas de choque de cualquier intensidad.

Para las ondas de choque débiles es posible formular también determinadas proposiciones acerca de la dirección en que cambia el campo magnético. Las variacio-

* Con la velocidad u_1 , en cambio, se propagan las perturbaciones que, por su carácter, corresponden a discontinuidades de rotación, conforme se indicó ya en el párrafo que precede.

** Véase vol. VI, *Hidrodinámica*, § 83.

nes de las diferentes magnitudes en una pequeña perturbación del estado del gas están ligadas entre sí por las fórmulas (52.8) y (52.9). Para las variaciones $\delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\delta(H_t^2) = H_{t2}^2 - H_{t1}^2$ se encuentra

$$\delta(H_t^2) = 8\pi(u^2 - u_0^2)\delta\rho.$$

Dado que $u_2 > u_0$, $u_3 < u_0$ (véase (52.15)) y que, según lo dicho antes, siempre es $\delta\rho > 0$, vemos que en los dos tipos diferentes de ondas de choque los sentidos de la variación de H_t^2 (y, por lo tanto, también de $H^2 = H_t^2 + H_n^2$) son diferentes. En una onda de choque que se propaga con velocidad $\sim u_2$, el campo magnético aumenta su intensidad, mientras que en una onda cuya velocidad es $\sim u_3$, la intensidad disminuye.

Consideremos ahora las ondas de choque en campos magnéticos débiles, es decir, admitamos que a uno y otro lado de la superficie de discontinuidad se tiene $H^2 \ll \rho u^2$. Por lo demás, ninguna otra limitación se impone a los saltos de las diferentes magnitudes; en particular, la discontinuidad del campo magnético puede ser comparable con su propio valor.

También aquí tenemos dos posibilidades. Suponiendo que los saltos de la densidad y de la presión no son pequeños, podemos prescindir, en primera aproximación, del último término en la ecuación (54.4), como también del campo magnético en la fórmula (54.3). Con esto volvemos a las fórmulas de la hidrodinámica ordinaria. Así pues, las relaciones entre los saltos de las diferentes magnitudes termodinámicas y la velocidad de propagación de la onda serán las mismas que en las ondas de choque ordinarias. En lo que concierne a la variación del campo magnético, su valor puede obtenerse a partir de la relación (54.2). Dado que el segundo miembro de la igualdad es una cantidad pequeña de tercer orden (respecto del campo), al mismo orden debe reducirse también el primer miembro. En primera aproximación puede hacerse $[VH_t] = V_2 H_{t2} - V_1 H_{t1} \cong 0$, de donde

$$H_{t2}/H_{t1} = V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1.$$

Dado que en una onda de choque ordinaria siempre es $V_1 > V_2$, vemos que en una onda del tipo considerado se produce un aumento de la intensidad del campo magnético.

Las ecuaciones (54.2) a (54.4) permiten también otra posibilidad. La hipótesis de que el campo es pequeño es compatible con la ecuación (54.2) también en una onda en la cual $V_1 \cong V_2$, mientras que j^2 es una pequeña magnitud de segundo orden igual a

$$j^2 = H_n^2/4\pi V, \quad (54.7)$$

donde V es el valor común a V_1 y V_2 . Ahora bien, de la ecuación (54.3) se sigue que, haciendo $V_1 = V_2$, con la misma aproximación debemos hacer

$$\rho_2 - \rho_1 = -(H_{t2}^2 - H_{t1}^2)/8\pi. \quad (54.8)$$

Que la densidad no cambie significa que es posible considerar una onda de choque de este tipo como una discontinuidad en un líquido incompresible. El vector \mathbf{H}_t

(y con el también v_t) experimenta sobre ella un salto en su valor absoluto, conservando invariable la dirección, mientras que el salto de la presión (para una densidad constante) viene determinado por la discontinuidad del campo magnético de acuerdo con la fórmula (54.8). La velocidad de propagación de esta discontinuidad es

$$v_{n2} = v_{n1} = jV = H_n \sqrt{(V/4\pi)}.$$

Este resultado es del todo natural, y la necesidad de que existan tales discontinuidades se podía haber previsto. En el § 52 vimos que en un líquido incompresible la velocidad de propagación de las pequeñas perturbaciones del campo magnético es única, e igual a $H/\sqrt{4\pi\rho}$. En consecuencia, con la velocidad $u_1 = H_n/\sqrt{4\pi\rho}$ se desplazan las superficies del frente de las pequeñas perturbaciones, tanto aquellas en las que la variación del campo es perpendicular al plano determinado por \mathbf{H} y \mathbf{n} , como aquellas en las cuales $\delta\mathbf{H}$ se encuentra en dicho plano. A las primeras corresponden discontinuidades de rotación de pequeña intensidad (de las que ya se habló en el párrafo que precede), mientras que a las segundas corresponden (para valores pequeños de los saltos) las discontinuidades que acabamos de estudiar.

Para ver en qué sentido varía el valor absoluto del campo magnético en estas discontinuidades, acudamos a la ecuación (54.4), que no hemos utilizado todavía, escribiéndola en la forma (54.6) (al deducir ésta no se supuso que el salto del campo magnético fuera pequeño comparado con su propio valor). Substituyendo la diferencia $p_2 - p_1$ dada por (54.8), encontramos que el segundo término del segundo miembro de (54.6) es una pequeña cantidad de cuarto orden respecto del campo, mientras que el primero es de sexto orden y, por lo tanto, puede suprimirse. De la condición $s_2 > s_1$ se sigue inmediatamente que

$$H_{t2} < H_{t1},$$

es decir, el módulo del campo magnético disminuye en esta discontinuidad.

Volviendo de nuevo a las ondas de choque de intensidad arbitraria en campos magnéticos con módulos cualesquiera, consideremos dos casos particulares. Supongamos que sobre la cara 1 el campo magnético es perpendicular al frente de la onda de choque, es decir, que $\mathbf{H}_{t1} = 0$. Entonces la ecuación (54.2) toma la forma

$$j^2 V_2 H_{t2} = H_n^2 H_{t2}/4\pi. \cdot$$

Vemos por ello que, o bien $H_{t2} = 0$, o bien H_{t2} tiene un valor arbitrario, mientras que

$$j^2 = H_n^2/4\pi V_2.$$

En el primer caso el campo magnético se conserva perpendicular a la superficie de discontinuidad y no influye en absoluto en las propiedades de la onda de choque, desapareciendo por completo de todas las ecuaciones. En el segundo caso, por el contrario, tenemos una onda de choque con variación de la dirección del campo, onda que se propaga respecto del gas que queda tras ella con la velocidad

$$v_{n2} = jV_2 = H_n/\sqrt{(4\pi\rho_2)}.$$

Otro caso particular es el de una onda de choque paralela a la dirección del campo a ambos lados de la discontinuidad ($H_n = 0$)*. En virtud de (54.5) tenemos entonces $v_{t2} = v_{t1}$, es decir, la componente tangencial de la velocidad se conserva continua. Mediante una adecuada elección del sistema de coordenadas es siempre posible, por consiguiente, que a uno y otro lado de la discontinuidad sea $v_t = 0$, es decir, que el gas se mueva perpendicularmente a la superficie de discontinuidad; supondremos que así se ha procedido. Por otra parte, de la ecuación (54.2) se sigue

$$V_2 H_2 = V_1 H_1.$$

Teniendo presente esta relación, es fácil ver que las ecuaciones (54.3) y (54.4) se pueden escribir en la forma

$$j^2 = (p_2^* - p_1^*)/(V_1 - V_2), \quad \epsilon_2^* - \epsilon_1^* + \frac{1}{2}(p_2^* + p_1^*)(V_2 - V_1) = 0,$$

que difiere de las ecuaciones ordinarias para las ondas de choque cuando no existe campo tan sólo en un cambio de la ecuación de estado: en vez de la ecuación verdadera $p = p(V, s)$ hay que utilizar la ecuación $p^* = p^*(V, s)$, en la cual

$$p^* = p + b^2/8\pi V^2,$$

y la letra b designa el producto constante HV . Análogamente, ϵ^* debe determinarse de forma que se cumpla la relación termodinámica $\left(\frac{\partial \epsilon^*}{\partial V}\right)_s = -p^*$, de donde

$$\epsilon^* = \epsilon + b^2/8\pi V.$$

En el párrafo precedente se señaló que existen discontinuidades que poseen, a la vez, propiedades de las discontinuidades tangenciales y de las de rotación. Estas discontinuidades se encuentran también en relación análoga con las ondas de choque. Una discontinuidad en la que no varía la densidad, y el cambio en el campo magnético queda limitado al del signo de H_t , constituye la transición entre las ondas de choque y las discontinuidades de rotación. Por otra parte, las discontinuidades en las que $v_n = 0$ y $H_n = 0$, mientras que H_t experimenta un salto arbitrario en su valor absoluto, sin que cambie su dirección, representan la transición entre las ondas de choque y las discontinuidades tangenciales.

Para terminar el análisis efectuado en los dos últimos párrafos acerca de las discontinuidades magnetohidrodinámicas, resumiremos como sigue los tipos de discontinuidad esencialmente diferentes:

1. Discontinuidades de contacto:

$$j = 0, \quad [v_t] = 0, \quad [V] \neq 0, \quad [p] = 0, \quad H_n \neq 0, \quad [H_t] = 0.$$

* Cuando $H_n = 0$ se tiene solamente un tipo de ondas de choque, de acuerdo con el hecho de que se anula la velocidad u_3 . A las perturbaciones correspondientes a u_3 van asociadas pequeñas discontinuidades tangenciales en reposo respecto del propio líquido.

2. *Discontinuidades tangenciales:*

$$j = 0, \quad [\mathbf{v}_t] \neq 0, \quad [V] \neq 0, \quad \left[p + \frac{H_t^2}{8\pi} \right] = 0, \quad H_n = 0, \quad [\mathbf{H}_t] \neq 0.$$

3. *Discontinuidades de rotación:*

$$j \neq 0, \quad [\mathbf{v}_t] \neq 0, \quad [V] = 0, \quad [p] = 0, \quad H_n \neq 0,$$

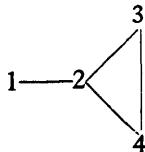
el vector \mathbf{H}_t gira sin que varíe su valor absoluto.

4. *Ondas de choque:*

$$j \neq 0, \quad [V] \neq 0;$$

los vectores $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{n}$ son coplanarios.

Entre estos cuatro tipos son posibles transiciones que se ajustan al siguiente esquema:



§ 55. Campo magnético espontáneo en el movimiento turbulento de un líquido conductor

El movimiento turbulento de un líquido conductor posee una notable propiedad: puede conducir a la aparición espontánea de campos magnéticos relativamente intensos. En un líquido conductor existen siempre pequeñas perturbaciones provocadas por factores extraños al propio movimiento del líquido* y que van acompañadas de la aparición de campos magnéticos y eléctricos muy débiles. La cuestión que se plantea es la de cuál será el comportamiento ulterior de estas perturbaciones, si se reforzarán en promedio con el tiempo como resultado del movimiento turbulento, o si se debilitarán. Los razonamientos que se exponen a continuación prueban que, según sean las propiedades del líquido, pueden cobrar realidad ambas posibilidades**.

La marcha de la variación de las perturbaciones del campo magnético con el tiempo, una vez se han producido, viene determinada por el juego de dos factores físicos. De una parte, en el sentido de disminuir el campo actúa la disipación de la

* Por ejemplo, un efecto magnetomecánico en porciones del líquido en rotación o incluso fluctuaciones térmicas.

** Los resultados que se exponen en este párrafo se deben a G. K. Batchelor (1950).

energía magnética que se libera en forma de calor de Joule por las corrientes de inducción. Por otra parte, el campo magnético tiende a aumentar gracias a un efecto específicamente magnetohidrodinámico de «alargamiento» de las líneas de fuerza. Al final del § 51 se puso de manifiesto que en el movimiento de un líquido (de conductibilidad suficientemente grande) también las líneas de fuerza magnéticas se desplazan como si fueran «líneas de fluido», variando con ello la intensidad del campo magnético proporcionalmente a la extensión relativa de la línea de fuerza en cada uno de sus puntos. Pero en el movimiento turbulento, dos partículas cualesquiera del líquido próximas entre sí tienden, en promedio, a separarse en el curso del tiempo. Como resultado de esto las líneas de fuerza se alargan y el campo magnético aumenta de intensidad.

Veamos cómo en ciertas condiciones pueden compensarse estas dos tendencias opuestas. Esto nos proporcionará, al mismo tiempo, un cierto criterio que determina en qué casos crecerán las perturbaciones del campo magnético, y en cuáles se amortiguarán.

En tanto el campo magnético que aparece cuando se mueve el líquido es suficientemente pequeño, cabe prescindir de su reacción sobre el propio movimiento. En otras palabras, se trata entonces de una turbulencia puramente hidrodinámica que crea el «fondo» sobre el cual se desarrollan las perturbaciones magnéticas. El campo turbulento de velocidades lo consideraremos estacionario en el sentido habitual de la teoría de turbulencias, es decir, en el sentido de que son constantes sus características medias*.

Matemáticamente, prescindir de los términos indicados significa que en la ecuación del movimiento (51.13) se suprime los términos de segundo grado respecto del campo, es decir, volvemos a la ecuación ordinaria de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \nabla p/\rho + \nu \Delta \mathbf{v}$$

(suponemos que el líquido es incompresible). Si se transforma el término $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ de acuerdo con la igualdad

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}$$

y se aplica luego a ambos miembros de la ecuación el operador rotacional, obtendremos

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \text{rot} (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) + \nu \Delta \boldsymbol{\Omega}, \quad (55.1)$$

donde se ha introducido para abreviar la notación $\boldsymbol{\Omega} = (\frac{1}{2}) \text{rot } \mathbf{v}$.

Comparemos esta ecuación con la ecuación (51.2):

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + (c^2/4\pi\sigma) \Delta \mathbf{H}, \quad (55.2)$$

* Consideraremos aquí promedios relativos a intervalos de tiempo que son del orden de magnitud de los períodos de las correspondientes fluctuaciones turbulentas, pero que son, naturalmente, pequeños comparados con el tiempo total durante el que se observa el sistema.

que determina (para una distribución de velocidades dada) la variación del campo magnético con el tiempo. Vemos que Ω y \mathbf{H} satisfacen ecuaciones del mismo tipo y que si $\nu = c^2/4\pi\sigma$ estas ecuaciones coinciden idénticamente. En este último caso, por consiguiente, existe una solución de la ecuación (55.2) en la que

$$\mathbf{H} = \text{constante} \times \Omega. \quad (55.3)$$

Así pues, si

$$\nu = c^2/4\pi\sigma, \quad (55.4)$$

puede existir un campo magnético estacionario (en el mismo sentido de la palabra que antes). Este campo ni disminuye ni crece en promedio, cualquiera que sea el valor del coeficiente constante en (55.3). Cabe decir que se produce un equilibrio indiferente en el cual los dos factores antes indicados, y que influyen sobre la variación del campo magnético, se compensan entre sí.

A su vez, de aquí resulta evidente que si la conductibilidad del líquido es mayor que $c^2/4\pi\nu$, las pérdidas por disipación de energía electromagnética no bastarán para compensar el efecto de crecimiento del campo magnético debido al alargamiento de las líneas de fuerza. En consecuencia, llegamos a la desigualdad

$$4\pi\sigma/c^2 > 1 \quad (55.5)$$

como condición para la formación espontánea de campos magnéticos resultado del crecimiento de pequeñas perturbaciones magnéticas*.

Cabe decir que ésta es la condición de inestabilidad del movimiento turbulento respecto de las perturbaciones magnéticas infinitesimales. Es notable que resulte posible establecer esta condición, no en orden de magnitud, sino con un coeficiente numérico preciso**.

Como criterio de crecimiento del campo, la condición (55.5) es válida en tanto lo sea la posibilidad de prescindir de la reacción del campo magnético sobre el movimiento del líquido, posibilidad que se encuentra en la base de su deducción. El crecimiento del campo seguirá hasta que se establezca un determinado estado estacionario en el que sea ya imposible prescindir de la influencia opuesta del campo. Aunque, rigurosamente hablando, las propiedades puramente hidrodinámicas de la turbulencia ya no coinciden en este estado con las fijadas *a priori*, el carácter cualitativo de la distribución y el orden de magnitud del campo magnético resultante pueden determinarse como si dichas propiedades subsistieran.

* La condición (55.5) es sumamente restrictiva. Así, para el mercurio ($\sigma \approx 10^{16} \text{ s}^{-1}$, $\nu = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$) la cantidad que aparece en el primer miembro de (55.5) es solamente del orden de $1,5 \times 10^{-7}$. Dado que σ y ν crecen al aumentar el libre camino medio de los portadores de carga y de masa, respectivamente, la condición (55.5) puede quedar satisfecha para objetos tales como la cromoesfera y la corona del Sol y en el gas ionizado interestelar.

** Hay que mencionar que los argumentos que preceden, por más convincentes que resulten, no constituyen, sin embargo, una completa demostración. Así, Ia. B. Zel'dovich demostró que resulta sin duda alguna inaplicable en un caso hipotético de turbulencia «bidimensional» (ZhETH 31, 154, 1956).

Es fácil ver que la distribución del campo magnético debe ser análoga a la distribución turbulenta de Ω . En efecto, desde un punto de vista intuitivo, Ω es la velocidad angular de rotación del líquido en un punto dado del espacio. Pero puesto que las líneas de fuerza magnéticas se mueven junto con el líquido, con esta misma velocidad girará el vector H . Por consiguiente, si en dos puntos cualesquiera del flujo turbulento los valores instantáneos de Ω no están, en promedio, correlacionados entre sí, también los vectores H en esos dos puntos figurarán de manera no correlacionada y su orientación relativa variará con el tiempo de manera totalmente caótica.

Recordemos en relación con esto algunas propiedades hidrodinámicas de la turbulencia*. El movimiento turbulento se puede considerar como un conjunto de «pulsaciones turbulentas», o remolinos, de diferentes tamaños, desde el mayor valor l («escala exterior») hasta el menor valor λ_0 («escala interior»). El primero coincide con las longitudes características que determinan las dimensiones del dominio en que tiene lugar el movimiento turbulento. En cuanto al segundo, determina el orden de magnitud de las distancias a las que se manifiestan ya de manera apreciable la viscosidad y la disipación de energía ligada con ella. λ_0 se puede expresar en función de l y del número de Reynolds $R \sim \frac{ul}{\nu}$ del movimiento turbulento en conjunto (u es del orden de magnitud de la variación de la velocidad media para distancias l), o bien en función de la energía ϵ disipada por segundo y gramo de líquido de acuerdo con la fórmula siguiente:

$$\lambda_0 \sim (\nu^3/\epsilon)^{\frac{1}{4}} \sim l/R^{\frac{1}{4}}. \quad (55.6)$$

La correlación de velocidades v_1 y v_2 en dos puntos 1 y 2 a una distancia λ uno de otro viene determinada fundamentalmente por pulsaciones de tamaño λ . Según la ley de Kolmogorov-Obujov, para distancias $\lambda \gg \lambda_0$ se tiene

$$\overline{\Delta v_i \Delta v_k} \sim \lambda^{2/3},$$

donde $\Delta v = v_2 - v_1$. En cambio, para distancias $\lambda \ll \lambda_0$, resulta

$$\overline{\Delta v_i \Delta v_k} \sim \lambda^2.$$

Es fácil deducir de aquí la correlación entre las velocidades angulares. Dado que las componentes Ω_1 y Ω_2 se expresan, respectivamente, en función de las derivadas de v_1 y de v_2 , derivando $\overline{\Delta v_i \Delta v_k}$ una vez respecto de las coordenadas del punto 1 y otra respecto de las del punto 2, se encuentra

$$\begin{aligned} \overline{\Omega_{1i} \Omega_{2k}} &\sim \lambda^{-4/3} & \text{para } \lambda \gg \lambda_0, \\ \overline{\Omega_{1i} \Omega_{2k}} &\sim \text{constante para } \lambda \ll \lambda_0. \end{aligned} \quad (55.7)$$

Estas fórmulas prueban que la correlación angular de las velocidades es importante

* Véase vol. VI, *Hidrodinámica* §§ 31-33.

sólo hasta distancias del orden de λ_0 , mientras que disminuye rápidamente a distancias mayores.

De acuerdo con lo dicho más arriba este mismo carácter tiene la distribución del campo magnético que se establece espontáneamente. Sólo se tiene una distribución correlacionada en regiones del espacio cuyos tamaños son $\sim \lambda_0$. A distancias mayores, en cambio, la orientación mutua de los vectores \mathbf{H} es prácticamente al azar.

Es fácil ahora determinar el orden de magnitud del campo magnético estimando los términos en la ecuación del movimiento completo

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p/\rho + \nu \Delta \mathbf{v} - (1/4\pi\rho) \mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H}.$$

Dado que el vector \mathbf{H} cambia totalmente su dirección a distancias $\sim \lambda_0$, el orden de magnitud del último término del segundo miembro de la ecuación es

$$H^2/4\pi\rho\lambda_0.$$

Por otra parte, estimemos el término $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. Para pulsaciones de tamaño λ , su orden de magnitud será v_λ^2/λ , donde v_λ es la variación de la velocidad a la distancia λ . Pero según fórmulas conocidas de la teoría de la turbulencia se tiene

$$\begin{aligned} v_\lambda &\sim u(\lambda/l)^{1/4} \quad \text{para } \lambda \gg \lambda_0, \\ v_\lambda &\sim u(\lambda/l)\sqrt{R} \quad \text{para } \lambda \ll \lambda_0. \end{aligned} \tag{55.8}$$

Por ello, la razón $\frac{v_\lambda^2}{\lambda} \sim \lambda^{-1/3}$ para $\lambda \gg \lambda_0$ y $\frac{v_\lambda^2}{\lambda} \sim \lambda$ para $\lambda \ll \lambda_0$, siendo máxima, en consecuencia, cuando $\lambda \sim \lambda_0$. Así pues,

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \sim v_{\lambda_0}^2/\lambda_0.$$

Finalmente, considerando comparables las estimaciones de ambos términos, se encuentra que

$$H^2 \sim 4\pi\rho v_{\lambda_0}^2. \tag{55.9}$$

Según (55.6) y (55.8) $v_{\lambda_0} \sim uR^{-1/4} \sim (\nu\epsilon)^{1/4}$. Por lo tanto, podemos también escribir

$$H^2 \sim 4\pi\rho u^2/\sqrt{R} \sim 4\pi\rho\sqrt{(\epsilon\nu)}. \tag{55.10}$$

Estas mismas fórmulas determinan también el orden de magnitud del campo magnético espontáneo. Es útil comparar la energía de este campo con la energía cinética del movimiento turbulento del líquido. Como es sabido, esta última está concentrada fundamentalmente en las pulsaciones de mayor escala (tamaño $\sim l$) y su orden de magnitud es el de ρu^2 . En cambio, la energía magnética se concentra fundamentalmente en las «pulsaciones magnéticas» de pequeña escala ($\sim \lambda_0$). Según (55.9), esta energía es comparable con la energía cinética de las pulsaciones turbulentas de igual tamaño, pero, según (55.10), es pequeña comparada con la energía cinética total. Una formulación matemática más precisa de lo que acabamos de exponer permite afirmar que si se desarrollan las distribuciones

espaciales de la velocidad y del campo magnético en integrales de Fourier, la energía cinética se concentra fundamentalmente en las componentes espectrales con vectores de onda pequeños ($k \sim 1/l$) y la energía magnética, en las componentes con vectores de onda grandes ($k \sim 1/\lambda_0$).

En el movimiento turbulento tiene lugar, prácticamente sin disipación alguna, una continua transferencia de energía de las pulsaciones a gran escala a las pulsaciones a escala pequeña. Este «flujo de energía» se disipa solamente en las pulsaciones de tamaño λ_0 . Cuando no existe campo magnético, el mecanismo disipativo está vinculado por completo con la viscosidad del líquido conductor, la energía en las pulsaciones de escala λ_0 se disipa en parte debido a la viscosidad, pero en parte se transforma en energía del campo magnético y sólo luego se disipa pasando a calor por efecto Joule.

Estimemos ahora el tiempo necesario para que se establezca el estado estacionario, para lo cual partiremos de la ecuación (55.2). El orden de magnitud de los dos términos en su segundo miembro es, respectivamente,

$$Hv_{\lambda_0}/\lambda_0 = Hv_{\lambda_0}\lambda_0/\lambda_0^2 \sim Hv/\lambda_0^2 \quad \text{y} \quad c^2H/4\pi\sigma\lambda_0^2.$$

Dado que conocemos la condición exacta (55.4) en virtud de la cual tiene lugar el equilibrio indiferente, por ello conocemos también la relación exacta entre los coeficientes de estos dos términos y podemos escribir

$$\frac{\partial H}{\partial t} \sim \left(\nu - \frac{c^2}{4\pi\sigma}\right) \frac{H}{\lambda_0^2}.$$

Vemos así que las pequeñas perturbaciones crecerán con el tiempo según la ley exponencial:

$$\exp\left(\left(\nu - \frac{c^2}{4\pi\sigma}\right) \frac{t}{\lambda_0^2}\right). \quad (55.11)$$

Si $4\pi\sigma\nu/c^2 \gg 1$, tenemos simplemente $e^{\nu t/\lambda_0^2}$. El tiempo τ durante el cual una perturbación inicialmente pequeña $\sim H_0$ se desarrolla y transforma en el campo estacionario H (55.10) será entonces, en orden de magnitud, igual a

$$\tau \sim \frac{\lambda_0^2}{\nu} \ln \frac{H^2}{H_0^2} \sim \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{\rho(\epsilon\nu)^{\frac{1}{2}}}{H_0^2}. \quad (55.12)$$

El carácter caótico de la variación del campo magnético con el tiempo en el movimiento turbulento significa que el valor medio (respecto del tiempo) de H se anula. En otras palabras, cabe decir que en el caso considerado (es decir, en aquellas condiciones que permiten la aparición espontánea del campo) la existencia de un campo cuyo valor medio no es nulo resulta incompatible con la turbulencia. Esta propiedad ha de conducir a que, cuando se aplica un campo magnético exterior, cuya intensidad no es demasiado elevada a un líquido que se mueve en régimen turbulento (en un volumen limitado), el líquido se comportará como superconduc-

tor. Sin embargo, un campo magnético suficientemente intenso ($H^2 \gtrsim \rho u^2$) no puede dejar de penetrar en el líquido y, en consecuencia, «suprimirá» la turbulencia.

CAPÍTULO IX

LAS ECUACIONES DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 56. Ecuaciones del campo en los dieléctricos cuando no existe dispersión

En el § 45 se escribieron las ecuaciones del campo electromagnético variable en los metales:

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi\sigma\mathbf{E}/c, \quad \text{rot } \mathbf{E} = - (1/c) \partial\mathbf{B}/\partial t, \quad (56.1)$$

que son válidas cuando el campo varía con suficiente «lentitud»: las frecuencias del campo deben ser tales que conserven su validez la dependencia de \mathbf{j} respecto de \mathbf{E} y la de \mathbf{B} respecto de \mathbf{H} (si esta última interviene) relativas al caso estacionario*.

Examinaremos ahora la cuestión análoga para un campo electromagnético variable en un medio dieléctrico y formularemos las ecuaciones que son válidas para aquellas frecuencias tales que la relación entre \mathbf{D} y \mathbf{E} y entre \mathbf{B} y \mathbf{H} sigue siendo la misma que en los campos constantes. Si, como suele acontecer, esta relación se reduce a la mera proporcionalidad, la condición indicada significa que es posible hacer

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad (56.2)$$

con los valores estáticos de ϵ y μ .

Estas relaciones dejan de cumplirse (o, como suele decirse, ϵ y μ presentan *dispersión*) para aquellas frecuencias que son comparables con las frecuencias propias de las oscilaciones moleculares o electrónicas que llevan a la aparición de la polarización eléctrica o magnética de la materia. El orden de magnitud de estas frecuencias depende del tipo de substancia y varía dentro de límites muy amplios. Puede también ser completamente distinto para fenómenos eléctricos y magnéticos**.

Las ecuaciones

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (56.3)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - (1/c) \partial\mathbf{B}/\partial t \quad (56.4)$$

* En lo que concierne a la condición $l \ll \lambda$, nada tiene que ver con la aplicabilidad de las ecuaciones (56.1) como tales. El papel de esta condición para las cuestiones examinadas en el Cap. VII se limitaba a que permitía prescindir de los efectos de retardo en el campo fuera del conductor.

** Así, en el diamante, la polarización eléctrica es de origen electrónico y la dispersión de ϵ comienza solamente en la región ultravioleta del espectro. En cambio, en un líquido polar, tal como el agua, la polarización está ligada con la orientación de las moléculas con momentos dipolares permanentes y la dispersión de ϵ se manifiesta para frecuencias $\omega \sim 10^{11}$ (es decir, en el intervalo de ondas centimétricas). Antes todavía puede iniciarse la dispersión de μ en las substancias ferromagnéticas.

se obtienen inmediatamente substituyendo \mathbf{e} y \mathbf{h} en las ecuaciones microscópicas exactas de Maxwell por sus valores medios \mathbf{E} y \mathbf{B} . Por consiguiente, cualesquiera que sean las condiciones, no es necesario modificarlas. En lo que concierne a la ecuación

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad (56.5)$$

ésta se obtiene (véase § 6) promediando la ecuación microscópica exacta $\operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi\rho$, valiéndonos a la vez únicamente del hecho de que la carga total del cuerpo es igual a cero. Es evidente que esta conclusión en modo alguno depende de la hipótesis hecha en el § 6 de que el campo sea estacionario, y, por consiguiente, la ecuación (56.5)¹ conserva su forma también en los campos variables.

Una ecuación más todavía debe obtenerse promediando la ecuación exacta

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}. \quad (56.6)$$

El cálculo directo del valor promedio da

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}. \quad (56.7)$$

Sin embargo, en el caso de un campo macroscópico que depende del tiempo, establecer la relación entre el valor medio $\bar{\rho}\mathbf{v}$ y las magnitudes antes introducidas es bastante complicado. Resulta más fácil llevar a cabo el cálculo del promedio no directamente, sino siguiendo el camino más formal que se indica a continuación.

Supongamos por el momento que en el dieléctrico se han introducido cargas extrañas a su naturaleza, con una densidad volumétrica ρ_{ex} . En su movimiento, estas cargas crean una corriente «extraña» \mathbf{j}_{ex} y la conservación de estas cargas se expresa por la ecuación de continuidad

$$\partial\rho_{\text{ex}}/\partial t + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{ex}} = 0.$$

En vez de la ecuación (56.5) tendremos

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{ex}}$$

(véase (6.8)). Derivando esta igualdad respecto del tiempo y utilizando la ecuación de continuidad, obtendremos

$$\partial(\operatorname{div} \mathbf{D})/\partial t = 4\pi\partial\rho_{\text{ex}}/\partial t = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{ex}},$$

o bien

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j}_{\text{ex}} \right) = 0.$$

De aquí se sigue que el vector al que se aplica el operador div, puede representarse en forma de rotacional de un cierto vector que designaremos por $c\mathbf{H}$; entonces

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ex}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (56.8)$$

Fuera del cuerpo esta ecuación debe coincidir con la ecuación exacta de Maxwell para el campo en el vacío, por lo que el vector \mathbf{H} coincide con la intensidad del campo magnético. Pero dentro del cuerpo la corriente j_{ex} en el caso estático está ligada con el campo magnético por la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi j_{\text{ex}}/c,$$

donde \mathbf{H} es la magnitud introducida en el § 27 y ligada de determinada manera con la inducción media \mathbf{B} . De aquí se sigue que, en el caso de frecuencias que tienden a cero, el vector \mathbf{H} en la ecuación (56.8) pasa a coincidir con la magnitud estática $\mathbf{H}(\mathbf{B})$, y que la «lentitud» con que hemos supuesto que se produce la variación del campo significa que también para estos campos variables se conserva la misma dependencia $\mathbf{H}(\mathbf{B})$. Así pues, \mathbf{H} se convierte en una magnitud completamente determinada y, prescindiendo de la magnitud auxiliar j_{ex} , llegamos finalmente a la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{H} = (1/c) \partial \mathbf{D} / \partial t. \quad (56.9)$$

Esta ecuación substituye para los dieléctricos la primera de las ecuaciones (56.1) que describen el campo en los metales. Cabe pensar que también para éstos debe incluirse en dicha ecuación el término con la derivada $\partial \mathbf{E} / \partial t$, es decir, que hay que escribir

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (56.10)$$

con un coeficiente constante ϵ .

Sin embargo, para buenos conductores (metales puros) la introducción de dicho término carecería de sentido. Los dos términos en el segundo miembro de la ecuación (56.10) representan esencialmente los dos primeros términos del desarrollo en potencias de la frecuencia del campo. Dado que ésta se supone suficientemente pequeña, tener en cuenta el segundo término podría significar, en el mejor de los casos, la introducción de una pequeña corrección. En realidad, ni tan sólo puede tener este sentido el término en cuestión, puesto que, de hecho, las correcciones en los metales debidas a la influencia de la no homogeneidad espacial del campo se hacen notar considerablemente antes que la corrección debida a la frecuencia (véase la nota en la pág. 225).

Existe, sin embargo, una categoría especial de cuerpos (los malos conductores) para los que la ecuación (56.10) puede tener sentido. En virtud de causas particulares (pequeño número de electrones de conductibilidad en los semiconductores, pequeña movilidad de los iones en las disoluciones de electrólitos, etc.), la conductibilidad de estas substancias es anormalmente pequeña y, en consecuencia, el segundo término en el segundo miembro de la ecuación (56.10) puede ser comparable con el primero, e incluso superarlo, para aquellas frecuencias a las que es posible todavía considerar σ y ϵ como constantes. En un campo monocromático la razón del segundo término al primero vale

$$\epsilon \omega / 4\pi \sigma.$$

Si esta razón es pequeña, el cuerpo se comporta como un conductor ordinario cuya conductibilidad es σ . Mas para frecuencias $\omega \gg 4\pi\sigma/\epsilon$, se comporta como un dielectrónico con constante dieléctrica ϵ .

En un medio homogéneo con ϵ y μ constantes las ecuaciones (56.3-5) y (56.9) toman la forma

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (56.11)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (56.12)$$

Eliminando entre estas ecuaciones, como de ordinario, \mathbf{E} (o \mathbf{H}), obtendremos

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2},$$

y dado que $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}$, llegamos con ello a la ecuación de onda

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Puede obtenerse una ecuación semejante por eliminación de \mathbf{H} . Se ve por esto que la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en un medio dieléctrico homogéneo es

$$c/\sqrt{(\epsilon\mu)}. \quad (56.13)$$

La densidad de flujo de energía electromagnética en el medio dieléctrico viene dada por la misma fórmula

$$\mathbf{S} = c \mathbf{E} \times \mathbf{H}/4\pi \quad (56.14)$$

que en el caso de los metales. Es fácil comprobarlo sin más que calcular $\operatorname{div} \mathbf{S}$. Aplicando las ecuaciones (56.4) y (56.9), obtendremos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial U}{\partial t}, \end{aligned} \quad (56.15)$$

de acuerdo con la expresión

$$dU = (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B})/4\pi$$

de la diferencial de la energía interna de un dieléctrico para valores dados de la densidad y de la entropía.

Como es sabido, las condiciones generales de invariancia relativista conducen a que la densidad de flujo de energía coincida necesariamente (salvo el factor c^2) con la densidad espacial de impulso del campo*. En consecuencia, esta última es igual a

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H}/4\pi c. \quad (56.16)$$

* Esto es consecuencia del carácter simétrico del tensor energía-impulso cuadridimensional. Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 32.

Este hecho, en particular, debe ser tenido en cuenta al determinar las fuerzas que actúan sobre un dieléctrico que se encuentra en un campo electromagnético variable. La fuerza \mathbf{f} (referida a la unidad de volumen) se puede calcular a partir del tensor de tensiones σ_{ik} mediante la igualdad

$$f_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k.$$

Sin embargo, al hacerlo es necesario tener presente que σ_{ik} es la densidad del flujo de impulso que traduce la variación del impulso, tanto de la materia como del campo electromagnético. Si entendemos por \mathbf{f} la fuerza que actúa únicamente sobre el medio, de la expresión que acabamos de escribir hay que restar la variación del impulso de la unidad de volumen del campo:

$$f_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{(\mathbf{E} \times \mathbf{H})_i}{4\pi c}. \quad (56.17)$$

En un campo constante este último término es igual a cero, razón por la cual esta cuestión no se planteó antes.

La «identidad» de la variación del campo permite utilizar para el tensor de tensiones las expresiones anteriores obtenidas para un campo constante. Así, para un medio dieléctrico líquido, σ_{ik} viene dado por la suma de las componentes eléctrica (15.9) y magnética (34.2).

Sin embargo, al derivar estas expresiones respecto de las coordenadas es necesario tener en cuenta que en vez de las ecuaciones $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ para un campo constante (en ausencia de corrientes) tenemos ahora las ecuaciones (56.12). El cálculo conduce al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & - \text{grad } p_0 - \frac{E^2}{8\pi} \text{grad } \epsilon + \text{grad} \left[\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \frac{E^2}{8\pi} \right] - \frac{H^2}{8\pi} \text{grad } \mu + \\ & + \text{grad} \left[\rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T \frac{H^2}{8\pi} \right] + \frac{\epsilon\mu - 1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \end{aligned} \quad (56.18)$$

§ 57. Electrodinámica de los dieléctricos en movimiento

El movimiento de un medio provoca la aparición de fenómenos de influencia mutua entre los campos eléctrico y magnético. Para los conductores estos fenómenos se analizaron en el § 49, mientras que ahora pasamos al estudio de esta cuestión para el caso de los dieléctricos. Prácticamente, en este caso se trata de fenómenos que se producen en cuerpos en movimiento cuando existen campos exteriores, eléctrico o magnético. Hay que subrayar que nada tienen en común con los fenómenos de aparición de campos como resultado del propio movimiento del cuerpo (que se consideraron en los §§ 35 y 50).

El punto de partida en el § 49 lo constituyen las fórmulas de transformación del campo al pasar de un sistema de referencia a otro. Nos bastó entonces conocer las fórmulas ordinarias de transformación de la intensidad del campo eléctrico y del magnético en el vacío, cuyo promedio da directamente las fórmulas de transformación de \mathbf{E} y \mathbf{B} . En el caso de los dieléctricos la cuestión es considerablemente más complicada debido a la existencia de un mayor número de magnitudes que describen el campo electromagnético.

Para el movimiento de cuerpos macroscópicos, sólo cabe considerar de hecho velocidades que son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Sin embargo, para obtener las correspondientes fórmulas de transformación aproximadas, lo más sencillo es partir de las fórmulas relativistas exactas, que son válidas para velocidades cualesquiera.

Como es sabido, en la electrodinámica de un campo en el vacío las componentes de los vectores \mathbf{e} y \mathbf{h} de las intensidades eléctrica y magnética son, en realidad, componentes de un tensor cuadridimensional (4-tensor) antisimétrico de segundo orden*. Dado que \mathbf{E} y \mathbf{B} son los valores medios de \mathbf{e} y \mathbf{h} , lo mismo vale para estas magnitudes. Así pues, se tiene un 4-tensor F_{ik} con las siguientes componentes**:

$$F_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{bmatrix}. \quad (57.1)$$

Mediante este tensor, el primer par de ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -(1/c) \partial \mathbf{B} / \partial t, \quad (57.2)$$

puede escribirse como sigue en forma cuadridimensional:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ii}}{\partial x_k} = 0. \quad (57.3)$$

Esto pone de manifiesto la invariancia relativista de dichas ecuaciones. Hay que subrayar que la aplicabilidad de las ecuaciones (57.2) a los cuerpos en movimiento es por sí misma evidente, puesto que estas ecuaciones se obtienen directamente substituyendo en las ecuaciones microscópicas exactas de Maxwell \mathbf{e} y \mathbf{h} por sus valores medios \mathbf{E} y \mathbf{B} .

Pero también el segundo par de ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = (1/c) \partial \mathbf{D} / \partial t \quad (57.4)$$

conserva asimismo su aspecto formal en los medios en movimiento. Esto es evidente en virtud de los razonamientos desarrollados en el párrafo anterior, razonamientos

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, §§ 23 y 24.

** En el texto de este párrafo (pero no en los problemas del mismo) los índices tensoriales toman los valores 1, 2, 3, 4, que corresponden a las coordenadas cuadridimensionales $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$.

en los que únicamente se utilizaron aquellas propiedades generales de los cuerpos (por ejemplo, la anulación de la carga total) que éstos poseen en igual grado tanto si están en movimiento como si están en reposo. Sin embargo, las relaciones entre las magnitudes \mathbf{D} y \mathbf{E} y las magnitudes \mathbf{B} y \mathbf{H} en modo alguno tienen por qué coincidir con las correspondientes a medios en reposo.

Dado que las ecuaciones (57.4) son válidas tanto para cuerpos en reposo como para cuerpos en movimiento, su forma debe conservarse en las transformaciones de Lorentz. Para un campo en el vacío los vectores \mathbf{D} y \mathbf{H} coinciden con \mathbf{E} y \mathbf{B} , y la invariancia relativista del segundo par de ecuaciones de Maxwell resulta de que pueden escribirse en forma cuadridimensional utilizando el mismo tensor F_{ik} : $\partial F_{ik}/\partial x_k = 0$ *. Es evidente que para que quede asegurada la invariancia relativista de las ecuaciones (57.4) es necesario que las componentes de los vectores \mathbf{D} y \mathbf{H} se transformen efectivamente como las componentes de un 4-tensor construido de manera completamente análoga a como se obtuvo el tensor F_{ik} ; designemos este tensor por H_{ik} :

$$H_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{bmatrix}. \quad (57.5)$$

Mediante éste, las ecuaciones (57.4) se escriben en la forma

$$\partial H_{ik}/\partial x_k = 0. \quad (57.6)$$

Al haber aclarado la naturaleza tensorial en cuatro dimensiones de las magnitudes \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , se ha determinado a la vez su ley de transformación al pasar de un sistema de referencia a otro. Con todo, aquí nos interesa no tanto la ley de esta transformación, como el vínculo que une estas magnitudes en un medio en movimiento y que generalice las relaciones $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ válidas para cuerpos en reposo.

Designemos por u_i el 4-vector velocidad del medio; sus componentes están ligadas con la velocidad tridimensional \mathbf{v} por

$$u_{1,2,3} = v_{x,y,z} / c \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}, \quad u_4 = i / \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

A partir de este 4-vector y de los 4-tensores F_{ik} y H_{ik} formemos aquellas combinaciones que en un medio en reposo pasan a ser \mathbf{E} y \mathbf{D} . Tales son los 4-vectores $F_{ik}u_k$ y $H_{ik}u_k$; para $\mathbf{v} = 0$ sus componentes temporales se anulan y las espaciales se reducen a \mathbf{E} y \mathbf{D} , respectivamente. Es claro así que la generalización cuadridimensional de la igualdad $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ es**

$$H_{ik}u_k = \epsilon F_{ik}u_k. \quad (57.7)$$

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 30.

** Hay que hacer notar que al escribir relaciones como éstas que contienen solamente el valor local de la velocidad, estamos prescindiendo de débiles efectos ligados con una posible existencia de un gradiente de la velocidad (por ejemplo, efectos giromagnéticos; véase § 35).

Análogamente, vemos que la generalización de la igualdad $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ es la fórmula cuadridimensional

$$F_{ik}u_i + F_{ki}u_i + F_{ii}u_k = \mu(H_{ik}u_i + H_{ki}u_i + H_{ii}u_k). \quad (57.8)$$

Pasando de nuevo de las notaciones cuadridimensionales a magnitudes tridimensionales, a partir de estas dos ecuaciones se obtienen las relaciones vectoriales*:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}/c &= \epsilon(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c), \\ \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{v}/c &= \mu(\mathbf{H} + \mathbf{D} \times \mathbf{v}/c). \end{aligned} \quad (57.9)$$

Estas fórmulas, obtenidas por *H. Minkowski* (1908), son exactas en el sentido de que en ellas no se ha hecho todavía hipótesis alguna acerca del valor de la velocidad. Pero si consideramos valores pequeños de la razón v/c y se resuelven estas ecuaciones respecto de \mathbf{D} y \mathbf{B} con una precisión que alcanza los términos de primer orden, obtendremos

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} + (\epsilon\mu - 1)\mathbf{v} \times \mathbf{H}/c, \quad (57.10)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + (\epsilon\mu - 1)\mathbf{E} \times \mathbf{v}/c. \quad (57.11)$$

Estas ecuaciones, junto con las ecuaciones de Maxwell (57.2) y (57.4), constituyen la base de la electrodinámica de los dieléctricos en movimiento.

También las condiciones de contorno que se imponen a las ecuaciones de Maxwell experimentan ciertos cambios. De las ecuaciones $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ se siguen como antes las condiciones de continuidad de las componentes normales del desplazamiento eléctrico:

$$D_{n1} = D_{n2}, \quad B_{n1} = B_{n2}. \quad (57.12)$$

En lo que concierne a las componentes tangenciales del campo, la manera más fácil de obtener las correspondientes condiciones consiste en pasar del sistema de referencia en reposo K a un nuevo sistema K' que se mueve junto con el elemento de superficie dado del cuerpo; la velocidad de este último (dirigida a lo largo de la normal \mathbf{n}) la designaremos por v_n . En el sistema K' son correctas las condiciones ordinarias de continuidad de \mathbf{E}'_t y de \mathbf{H}'_t . Según las fórmulas de transformación relativistas**, estas condiciones son equivalentes a la de continuidad de las componentes tangenciales de los vectores

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c, \quad \mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}/c.$$

Proyectándolos sobre un plano perpendicular a \mathbf{n} y teniendo en cuenta las igualdades (57.12), obtendremos las ecuaciones de contorno buscadas:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= v_n(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)/c, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= -v_n(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)/c. \end{aligned} \quad (57.13)$$

* Si algunas de las relaciones $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ o $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ no se cumple en el medio en reposo, la correspondiente relación de las dos (57.9) se substituye por otra dependencia funcional entre las dos sumas vectoriales que aparecen en uno y otro miembro de la igualdad.

** Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 24.

Si substituimos aquí las expresiones (57.10-11) y prescindimos de los términos de orden superior respecto de v/c , se obtendrá

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= v_n(\mu_2 - \mu_1)\mathbf{H}_t/c, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= -v_n(\epsilon_2 - \epsilon_1)\mathbf{E}_t/c.\end{aligned}\quad (57.14)$$

En esta aproximación, en el segundo miembro de la igualdad cabe no distinguir entre los valores de \mathbf{H} y \mathbf{E} a uno y otro lado de la superficie de separación.

Si el cuerpo se mueve de manera que su superficie no se desplaza en dirección perpendicular a sí misma (por ejemplo, en la rotación de un cuerpo de revolución en torno de su eje), se tendrá $v_n = 0$. Sólo en este caso las condiciones de contorno (57.13) o (57.14) se reducen a las condiciones ordinarias de continuidad de \mathbf{E}_t y \mathbf{H}_t .

PROBLEMAS

1. Una esfera dieléctrica gira uniformemente (en el vacío) en un campo magnético constante y homogéneo \mathfrak{H} . Determinar el campo eléctrico que se crea en torno de la esfera.

Solución. Para calcular el campo eléctrico que se forma sólo es necesario tomar para el campo magnético el que se tendría en el caso de una esfera en reposo, puesto que tener en cuenta la influencia de la variación del campo magnético conduciría únicamente a pequeñas correcciones de orden superior. Dentro de la esfera el campo magnético es homogéneo e igual a

$$\mathbf{H}^{(t)} = 3\mathfrak{H}/(2+\mu)$$

(véase (8.2)).

Dado el carácter estacionario de la rotación, el campo eléctrico que se crea es constante y, como todo campo eléctrico constante, posee un potencial: $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$. Fuera de la esfera, éste satisface la ecuación $\Delta\phi^{(e)} = 0$, y en el interior de la misma, la ecuación

$$\Delta\phi^{(t)} = 2(\epsilon\mu-1)\Omega \cdot \mathbf{H}^{(t)}/c\epsilon, \quad (1)$$

donde Ω es la velocidad angular de rotación (esta ecuación se obtiene a partir de $\text{div } \mathbf{D} = 0$ substituyendo para \mathbf{D} la expresión (57.10) con $\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r}$). La condición de continuidad de la componente normal de \mathbf{D} sobre la superficie de la esfera se escribe:

$$-\epsilon \left[\frac{\partial \phi^{(t)}}{\partial r} \right]_{r=a} + \frac{\epsilon\mu-1}{c} a[\Omega \cdot \mathbf{H}^{(t)} - (\Omega \cdot \mathbf{n})(\mathbf{H}^{(t)} \cdot \mathbf{n})] = -\left[\frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial r} \right]_{r=a} \quad (2)$$

(a es el radio de la esfera, y \mathbf{n} el versor correspondiente al vector posición \mathbf{r}).

Dada la simetría de la esfera, el campo eléctrico buscado viene determinado por dos vectores constantes: Ω y \mathfrak{H} . A partir de sus componentes se pueden construir un escalar $\mathfrak{H} \cdot \Omega$ y un tensor

$$\mathfrak{H}_i \Omega_k + \mathfrak{H}_k \Omega_i - \frac{2}{3} \delta_{ik} \mathfrak{H} \cdot \Omega,$$

bilineales, siendo igual a cero la suma de los elementos diagonales de este último. De acuerdo con esto, buscaremos para el potencial del campo fuera de la esfera, una expresión de la forma

$$\phi^{(e)} = \frac{1}{6} D_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{2} D_{ik} \frac{\mathbf{n}_i \mathbf{n}_k}{r^3}, \quad (3)$$

donde D_{ik} es un tensor constante (tal que $D_{ii} = 0$); D_{ik} es el tensor momento cuadripolar de la esfera*. En cambio, en $\phi^{(e)}$ no puede existir un término de la forma $\frac{\text{const}}{r}$, puesto que daría lugar a un flujo total no nulo del campo eléctrico a través de una superficie que rodea la esfera

* Véase vol. II, Teoría clásica de los campos, § 41.

(cuando en realidad ésta carece de carga). Para el potencial del campo dentro de la esfera se tomará una expresión de la forma

$$\phi^{(t)} = \frac{r^2}{2a^5} D_{ik} n_i n_k + \frac{\epsilon\mu-1}{3c\epsilon} \Omega \cdot \mathbf{H}^{(t)} (r^2 - a^2). \quad (4)$$

El primer término es solución de la ecuación homogénea $\Delta\phi = 0$, y el coeficiente del mismo se ha elegido de manera que el potencial sea continuo (y con él también el propio \mathbf{E}_t) sobre la superficie de la esfera. Substituyendo (3) y (4) en (2), se encuentra

$$D_{ik} = -\frac{a^5}{c} \frac{3(\epsilon\mu-1)}{(3+2\epsilon)(2+\mu)} [\mathfrak{H}_i \Omega_k + \mathfrak{H}_k \Omega_i - \frac{2}{3} \delta_{ik} \mathfrak{H} \cdot \Omega]. \quad (5)$$

Así pues, alrededor de una esfera en rotación se forma un campo eléctrico de naturaleza cuadripolar, viiniendo determinado el momento cuadripolar de la esfera por la fórmula (5)*. En particular, si la esfera gira en torno de un eje paralelo al campo exterior (eje z), D_{ik} tiene solamente componentes diagonales

$$D_{zz} = -\frac{a^5}{c} \frac{4(\epsilon\mu-1)}{(3+2\epsilon)(2+\mu)} \mathfrak{H} \Omega, \quad D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2} D_{zz}.$$

2. Una esfera imanada uniformemente gira (en el vacío) en torno de un eje paralelo a la dirección de imanación. Determinar el campo eléctrico que se forma en torno de la esfera**.

Solución. El campo magnético dentro de la esfera es homogéneo y se expresa en función de la imanación constante \mathbf{M} de acuerdo con las ecuaciones $\mathbf{B}^{(t)} + 2\mathbf{H}^{(t)} = 0$ (véase (8.1)) y $\mathbf{B}^{(t)} - \mathbf{H}^{(t)} = 4\pi\mathbf{M}$, de donde

$$\mathbf{B}^{(t)} = 8\pi\mathbf{M}/3, \quad \mathbf{H}^{(t)} = -4\pi\mathbf{M}/3.$$

La segunda de las fórmulas (57.9) no se aplica en este caso (dado que la fórmula $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ no es válida para un imán en reposo) y de la primera se sigue que dentro de la esfera

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon\mathbf{E} + \epsilon\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c - \mathbf{v} \times \mathbf{H}/c \\ &= \epsilon\mathbf{E} + 4\pi(2\epsilon+1)\mathbf{v} \times \mathbf{M}/3c. \end{aligned}$$

El potencial del campo eléctrico que se produce fuera de la esfera satisface la ecuación $\Delta\phi^{(e)} = 0$, y dentro de la misma, la ecuación

$$\Delta\phi^{(t)} = 8\pi(2\epsilon+1)M\Omega/3c\epsilon.$$

La condición de contorno que impone la continuidad de D_n sobre la superficie de la esfera, nos da:

$$-\epsilon \left[\frac{\partial\phi^{(t)}}{\partial r} \right]_{r=a} + \frac{4\pi(2\epsilon+1)}{3c} a \Omega \mathfrak{M} \cdot \mathbf{n} \cos^2\theta = - \left[\frac{\partial\phi^{(e)}}{\partial r} \right]_{r=a},$$

donde θ es el ángulo formado por la normal y la dirección de Ω y \mathbf{M} (eje z). Tomemos para $\phi^{(e)}$ y $\phi^{(t)}$ expresiones de la forma

$$\phi^{(e)} = \frac{D_{ik} n_i n_k}{2r^3} = \frac{D_{zz}}{4r^3} (3 \cos^2\theta - 1),$$

$$\phi^{(t)} = \frac{r^2}{4a^5} D_{zz} (3 \cos^2\theta - 1) + \frac{4\pi(2\epsilon+1)}{9c\epsilon} M\Omega (r^2 - a^2).$$

* Análogamente, en torno de una esfera que gira en un campo eléctrico homogéneo se forma un campo magnético cuadripolar. El momento cuadripolar magnético de la esfera viene entonces dado por una fórmula que se obtiene a partir de (5) cambiando el signo y substituyendo ϵ , μ , \mathfrak{H} por μ , ϵ , \mathbb{E} , respectivamente.

** Si la dirección de imanación no coincide con la del eje de rotación, cambia fundamentalmente el planteo del problema, puesto que la esfera emite entonces radiación hacia el espacio que la rodea.

La condición de contorno nos permite escribir entonces la siguiente fórmula para el momento eléctrico cuadripolar que se origina en la esfera en rotación:

$$D_{zz} = -\frac{4(2\epsilon+1)}{3c(2\epsilon+3)}a^2\Omega\mathcal{M}, \quad D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz}$$

(\mathcal{M} es el momento magnético total de la esfera). Para una esfera metálica hay que hacer $\epsilon \rightarrow \infty$, con lo que

$$D_{zz} = -4\Omega\mathcal{M}a^2/3c.$$

§ 58. Dispersión de la permitividad

Pasemos ahora al estudio de la importante cuestión que plantean los campos electromagnéticos rápidamente variables, cuyas frecuencias no están limitadas por la condición de que sean pequeñas comparadas con las que caracterizan el establecimiento de una polarización eléctrica y magnética de la materia.

Un campo electromagnético variable en el tiempo es también necesariamente variable en el espacio. Para una frecuencia ω la periodicidad espacial viene determinada por la longitud de onda, cuyo orden de magnitud es $\lambda \sim c/\omega$. Si sigue aumentando el valor de la frecuencia, λ viene a ser finalmente comparable con las dimensiones atómicas a . En tales condiciones, es imposible una descripción macroscópica del campo.

En relación con esto surge la cuestión de si existe en general un dominio de valores de las frecuencias en el que, de una parte, cobran ya importancia los fenómenos de dispersión, si bien, por la otra, es todavía admisible una descripción macroscópica. Es fácil ver que dicho intervalo debe existir necesariamente. El mecanismo más rápido para que se establezca la polarización eléctrica o magnética en la materia lo ofrecen los electrones. Su tiempo de relajación es del orden de magnitud de los tiempos atómicos a/v , donde a caracteriza las dimensiones atómicas y v las velocidades de los electrones en el átomo. Pero dado que $v \ll c$, incluso la longitud de onda correspondiente a estos tiempos, $\lambda \sim ac/v$, continúa siendo grande comparada con a . En lo que sigue supondremos que se cumple la condición $\lambda \gg a$ ^{*}. Sin embargo, no hay que perder de vista que esta condición puede resultar insuficiente: para los metales a bajas temperaturas existe un intervalo de frecuencias en el cual es inaplicable la teoría macroscópica, a pesar de que se cumple la desigualdad $c/\omega \gg a$ (véase § 67).

La teoría formal que se expone a continuación vale en igual grado para los metales y para los dieléctricos. Es más, para las frecuencias que corresponden a los movimientos intraatómicos de los electrones (*frecuencias ópticas*) y mayores, desaparece de hecho incluso la diferencia cuantitativa entre las propiedades de los unos y de los otros.

* Los efectos ligados con términos del orden siguiente respecto de a/λ (la llamada *actividad óptica natural*) se considerarán en el § 83.

Ya los razonamientos presentados en el § 56 hacen ver que el aspecto formal de las ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (58.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -(1/c) \partial \mathbf{B} / \partial t, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = (1/c) \partial \mathbf{D} / \partial t \quad (58.2)$$

se conserva en campos electromagnéticos variables arbitrarios. Pero estas ecuaciones de bien poco sirven, sin embargo, hasta que no se establece una relación entre las magnitudes \mathbf{D} , \mathbf{B} y \mathbf{E} , \mathbf{H} que aparecen en ellas. En el caso de altas frecuencias, que estamos considerando ahora, esta relación nada tiene de común con la que es válida en el caso estático y que utilizamos en los campos variables cuando no existe dispersión.

Ante todo, desaparece incluso la propiedad fundamental de la relación que se tenía antes, a saber, la dependencia unívoca de \mathbf{D} y \mathbf{B} respecto de los valores de \mathbf{E} y \mathbf{H} en el mismo instante. En el caso general de un campo variable arbitrario, los valores de \mathbf{D} y \mathbf{B} en un determinado instante en modo alguno vienen determinados por solamente los valores de \mathbf{E} y \mathbf{H} en el mismo instante. Cabe afirmar, por el contrario, que los valores de \mathbf{D} y \mathbf{B} en un instante dado dependen, en general, de los valores de las funciones $\mathbf{E}(t)$ y $\mathbf{H}(t)$ en todos los instantes anteriores. Esta circunstancia traduce el hecho de que la polarización eléctrica o magnética de la materia «no logra» seguir las variaciones del campo electromagnético. Las frecuencias a las que se producen fenómenos de dispersión en las propiedades eléctricas y magnéticas de la materia pueden ser completamente distintas.

En este párrafo estudiaremos la dependencia de \mathbf{D} respecto de \mathbf{E} ; en cuanto a las características específicas propias de la dispersión de las propiedades magnéticas de la materia, éstas se analizarán en el § 60.

En el § 6 se introdujo el vector polarización dieléctrica \mathbf{P} mediante la definición $\bar{\rho} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$, donde ρ es la densidad verdadera (microscópica) de las cargas en la materia. Esta igualdad expresaba que el cuerpo en conjunto es eléctricamente neutro y bastó (junto con la condición $\mathbf{P} = 0$ fuera del mismo) para demostrar que el momento eléctrico total del cuerpo es igual a la integral $\int \mathbf{P} dV$. Evidentemente, esta conclusión es aplicable a los campos variables en igual medida que a los constantes. Así pues, en cualquier campo variable, incluso cuando existe dispersión, el vector $\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{D} - \mathbf{E})$ conserva su sentido físico de momento eléctrico por unidad de volumen de la materia.

En los campos rápidamente variables, las intensidades del campo que intervienen son siempre, en la práctica, relativamente pequeñas. Por ello, la relación de \mathbf{D} con \mathbf{E} en cualquier caso se puede considerar como lineal*. La forma más general de depen-

* Admitimos aquí que \mathbf{D} depende linealmente sólo de \mathbf{E} , pero no de \mathbf{H} . En un campo constante la dependencia de \mathbf{D} respecto de \mathbf{H} se excluye por la condición de invariancia respecto del cambio de signo del tiempo. En un campo variable esta condición no es ya aplicable, y la dependencia lineal de \mathbf{D} respecto de \mathbf{H} resulta ser posible para determinados tipos de simetría de la materia. Con todo, representa un pequeño efecto del orden de a/λ , precisamente el mismo efecto a que se aludió en la nota de la página anterior.

dencia lineal entre $\mathbf{D}(t)$ y los valores de $\mathbf{E}(t)$ en todos los instantes anteriores cabe expresarla como relación integral

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t) + \int_0^{\infty} f(\tau) \mathbf{E}(t - \tau) d\tau \quad (58.3)$$

(la separación del término $\mathbf{E}(t)$ es conveniente por razones que se explicarán más adelante). Aquí $f(\tau)$ es una función del tiempo que depende de las propiedades del medio. Por analogía con la fórmula electrostática $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ escribiremos la relación (58.3) en la forma simbólica

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E},$$

donde $\hat{\epsilon}$ es un operador integral lineal cuya acción sobre \mathbf{E} viene definida por (58.3).

Cualquier campo variable puede reducirse (mediante un desarrollo de Fourier) a un sistema de componentes monocromáticas en las que la dependencia de todas las magnitudes respecto del tiempo viene dada por el factor $e^{-i\omega t}$. Para tales campos la relación (58.3) entre \mathbf{D} y \mathbf{E} toma la forma

$$\mathbf{D} = \epsilon(\omega) \mathbf{E}, \quad (58.4)$$

donde la función $\epsilon(\omega)$ se define por

$$\epsilon(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (58.5)$$

De esta manera, es posible introducir el concepto de permitividad para campos periódicos como coeficiente de proporcionalidad entre \mathbf{D} y \mathbf{E} , si bien, con todo, este coeficiente depende no solamente de las propiedades del medio, sino también de la frecuencia del campo. La dependencia de ϵ respecto de la frecuencia se llama su *ley de dispersión*.

La función $\epsilon(\omega)$ es, en general, compleja. Sus partes real e imaginaria las designaremos por ϵ' y ϵ'' :

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega). \quad (58.6)$$

De la definición (58.5) se sigue inmediatamente que

$$\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega). \quad (58.7)$$

Separando en esta igualdad las partes real e imaginaria, obtendremos

$$\epsilon'(-\omega) = \epsilon'(\omega), \quad \epsilon''(-\omega) = -\epsilon''(\omega). \quad (58.8)$$

Así pues, ϵ' resulta ser función par de la frecuencia, y ϵ'' lo es impar.

Para frecuencias pequeñas (comparadas con la frecuencia límite a que empieza la dispersión), $\epsilon(\omega)$ se puede desarrollar en serie de potencias de ω . El desarrollo de la función par $\epsilon'(\omega)$ contiene solamente términos con potencias pares, mientras que en el de la función impar $\epsilon''(\omega)$ aparecen sólo términos de potencia impar. Cuando $\omega \rightarrow 0$, la función $\epsilon(\omega)$ tiende en los dieléctricos, naturalmente, a la constante dieléctrica electrostática (que designaremos aquí por ϵ_0). Por ello, en los die-

léctricos, el desarrollo de $\epsilon'(\omega)$ comienza con un término constante ϵ_0 ; en cambio, el desarrollo de $\epsilon''(\omega)$ empieza, en general, con un término que es proporcional a ω .

La función $\epsilon(\omega)$ para pequeñas frecuencias se puede considerar también en los metales, si se conviene en definirla de modo que en el límite $\omega \rightarrow 0$ la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{H} = (1/c) \partial \mathbf{D} / \partial t$$

se transforma en la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi\sigma \mathbf{E}/c$$

que corresponde a un campo constante en conductores. Comparando ambas ecuaciones, vemos que cuando $\omega \rightarrow 0$ la derivada $\partial \mathbf{D} / \partial t$ debe convertirse en $4\pi\sigma \mathbf{E}$. Pero para un campo periódico $\partial \mathbf{D} / \partial t = -i\omega\epsilon \mathbf{E}$, con lo que llegamos a la siguiente expresión límite de $\epsilon(\omega)$ a bajas frecuencias:

$$\epsilon(\omega) = 4\pi i\sigma/\omega. \quad (58.9)$$

Por lo tanto, en los conductores, el desarrollo de la función $\epsilon(\omega)$ comienza con un término imaginario, proporcional a $1/\omega$, que se expresa en función de la conductibilidad ordinaria σ correspondiente a corrientes constantes*. El término siguiente del desarrollo de $\epsilon(\omega)$ es una constante real. Sin embargo, esta constante no tiene en los metales el mismo sentido electrostático que posee en los dieléctricos**. Además, de nuevo es necesario indicar que este término del desarrollo puede carecer de sentido si los efectos de la no-homogeneidad espacial del campo de la onda electromagnética se manifiestan antes que los efectos de su periodicidad en el tiempo.

En los superconductores se tiene siempre una considerable heterogeneidad espacial debida a que en ellos la «profundidad de penetración» del campo magnético es pequeña. Todavía no está claro si, en relación con esto, tiene algún sentido la permitividad $\epsilon(\omega)$ en el caso de los superconductores.

§ 59. Permitividad para muy altas frecuencias

En el límite $\omega \rightarrow \infty$ la función $\epsilon(\omega)$ tiende a la unidad. Esto es ya evidente por simples consideraciones físicas: para una variación del campo suficientemente rápida, los procesos de polarización que conducen a que se establezca una diferencia entre \mathbf{E} y el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} no llegan a tener lugar.

Es posible establecer una forma límite de la función $\epsilon(\omega)$ para altas frecuencias válida para cuerpos cualesquiera (se trate de metales o de dieléctricos). En efecto,

* A veces se expresa la parte imaginaria de la función $\epsilon(\omega)$ para todas las frecuencias en la forma (58.9), lo que equivale a introducir en vez de $\epsilon''(\omega)$ una nueva función $\sigma(\omega)$; con este cambio de notación se pierde el significado físico de dicha función.

** Para evitar malentendidos, hay que señalar un cierto cambio de notación respecto de la adoptada en el § 56. En la ec. (56.10) para malos conductores, la magnitud $\epsilon(\omega)$ es la suma $\frac{4\pi i\sigma}{\omega} + \epsilon$.

la frecuencia del campo debe ser entonces grande comparada con las «frecuencias» del movimiento de todos (o, por lo menos, de la mayoría de) los electrones en los átomos de la substancia dada. Si se cumple esta condición, en el cálculo de la polarización de la materia cabe considerar los electrones como libres, prescindiendo de su interacción mutua y con los núcleos de los átomos.

Las velocidades v del movimiento de los electrones en los átomos son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Por ello, las distancias v/ω que recorren en el tiempo correspondiente a un período de la onda son pequeñas comparadas con la longitud de onda c/ω . Teniendo esto en cuenta, cabe considerar el campo de la onda electromagnética como homogéneo al determinar las velocidades que los electrones adquieren en el mismo.

La ecuación del movimiento se escribe:

$$m \frac{dv'}{dt} = eE = eE_0 e^{-i\omega t}$$

(e, m son la carga y la masa del electrón); de aquí se sigue $v' = ieE/m\omega$. Ahora bien, el desplazamiento r del electrón bajo la acción del campo está ligado con v' por $\dot{r} = v'$. En consecuencia, $r = -eE/m\omega^2$. La polarización P de la materia es el momento dipolar por unidad de volumen. Sumando respecto de todos los electrones, encontramos

$$\mathbf{P} = \Sigma er = -e^2 N \mathbf{E}/m\omega^2,$$

donde N es el número de electrones en todos los átomos de la unidad de volumen de la substancia. Por otra parte, el desplazamiento eléctrico es, por definición, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$. En consecuencia, obtenemos finalmente la siguiente fórmula:

$$\epsilon(\omega) = 1 - 4\pi Ne^2/m\omega^2. \quad (59.1)$$

El dominio efectivo de aplicabilidad de esta fórmula comienza en el ultravioleta lejano en los elementos más ligeros, y en las frecuencias de rayos X, en los elementos más pesados*.

§ 60. Dispersión de la permeabilidad

En contraste con $\epsilon(\omega)$, la permeabilidad $\mu(\omega)$ pierde relativamente pronto su significación física al aumentar la frecuencia. Tener en cuenta la diferencia entre $\mu(\omega)$ y la unidad sería entonces un refinamiento injustificado.

Para poner en claro esta cuestión, analicemos en qué medida se conserva en un campo variable el sentido físico de la magnitud $\mathbf{M} = (\mathbf{B} - \mathbf{H})/4\pi$ como imanación. Por definición, el momento magnético de un cuerpo es la integral

$$\frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \overline{\rho \mathbf{v}} dV. \quad (60.1)$$

* Para que la magnitud $\epsilon(\omega)$ conserve el sentido literal con que interviene en las ecuaciones de Maxwell, la frecuencia debe satisfacer aún la condición $\omega \ll c/a$. Sin embargo, veremos en lo que sigue (§ 97) que cabe atribuir a la expresión (59.1) un determinado sentido físico también para frecuencias más elevadas.

El valor medio de la densidad microscópica de corriente está ligado con el campo medio por la ecuación (56.7):

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \bar{\rho} \mathbf{v} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (60.2)$$

Restando de ella miembro a miembro la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{H} = (1/c) \partial \mathbf{D} / \partial t,$$

obtendremos

$$\bar{\rho} \mathbf{v} = c \text{ rot } \mathbf{M} + \partial \mathbf{P} / \partial t. \quad (60.3)$$

Conforme se probó en el § 27, la integral (60.1) se puede reducir a la forma $\int \mathbf{M} dV$ sólo si se cumple la condición $\bar{\rho} \mathbf{v} = c \text{ rot } \mathbf{M}$ (y $\mathbf{M} = 0$ fuera del cuerpo).

De esta manera, el significado físico de la magnitud \mathbf{M} (y con él también el de la susceptibilidad magnética) resulta estar ligado con la posibilidad de prescindir del término $\partial \mathbf{P} / \partial t$ en la fórmula (60.3). Veamos hasta qué punto se pueden cumplir las condiciones que permiten ignorar dicho término.

Para una frecuencia dada, las condiciones más favorables para medir la susceptibilidad exigen que las dimensiones del cuerpo sean lo más pequeñas posibles (para aumentar las derivadas espaciales en $\text{rot } \mathbf{M}$) y que el campo eléctrico sea lo más débil posible (para disminuir \mathbf{P}). El campo de una onda electromagnética no cumple esta última condición, puesto que en él $E \sim H$. Consideraremos por esto el campo magnético variable en, por ejemplo, un solenoide, colocando el cuerpo en estudio sobre su eje. El campo eléctrico aparece solamente como resultado de la inducción del campo magnético variable. El orden de magnitud de E dentro del cuerpo se puede obtener estimando los dos miembros de la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{E} = -(1/c) \partial \mathbf{B} / \partial t,$$

de la que se sigue $E/l \sim \omega H/c$ o bien $E \sim (\omega l/c)H$, donde l caracteriza el tamaño del cuerpo. Haciendo ~ 1 , tendremos

$$\partial P / \partial t \sim \omega E \sim \omega^2 l H / c.$$

En cuanto a las derivadas espaciales de la imanación, $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$, se tiene

$$|c \text{ rot } \mathbf{M}| \sim c \chi H / l.$$

Comparando ambas expresiones, encontramos que la primera es pequeña frente a la segunda si

$$l^2 \ll \chi c^2 / \omega^2. \quad (60.4)$$

Está claro que el concepto de susceptibilidad magnética únicamente puede tener sentido si esta desigualdad admite (aunque no sea con un margen muy grande) que el cuerpo tenga dimensiones macroscópicas, es decir, si es compatible con la desigualdad $l \gg a$, donde a son las dimensiones atómicas. Esta condición se viola,

evidentemente, ya en el dominio de las frecuencias ópticas. En efecto, la susceptibilidad magnética para tales frecuencias es siempre del orden de v^2/c^2 * (v caracteriza las velocidades de los electrones en el átomo); las propias frecuencias ópticas, en cambio, son tales que $\omega \sim v/a$ y, en consecuencia, el segundo miembro de la desigualdad (60.4) es $\sim a^2$.

Así pues, es evidente que carece de sentido utilizar la permeabilidad magnética no bien se alcanza el dominio de las frecuencias ópticas, y al considerar los correspondientes fenómenos es necesario hacer $\mu = 1$. Distinguir entre \mathbf{B} y \mathbf{H} en dicho dominio equivaldría a excederse en la precisión aceptable. Es más, de hecho, tener en cuenta la diferencia entre μ y la unidad equivale a un exceso de precisión para la mayoría de los fenómenos incluso para frecuencias mucho más bajas que las ópticas.

§ 61. Energía del campo en los medios dispersores

La fórmula

$$\mathbf{S} = c\mathbf{E} \times \mathbf{H}/4\pi \quad (61.1)$$

para la densidad de flujo de energía conserva su validez en campos electromagnéticos variables cualesquiera, en particular incluso cuando existe dispersión. Esto es del todo evidente en virtud de los razonamientos desarrollados al final del § 29: teniendo en cuenta la continuidad de las componentes tangenciales de \mathbf{E} y \mathbf{H} , la fórmula (61.1) se sigue únicamente de la condición de continuidad de la componente normal de \mathbf{S} sobre la frontera del cuerpo y del hecho de que dicha fórmula es válida en el vacío fuera del mismo.

La variación (por segundo) de la energía referida a la unidad de volumen del cuerpo viene dada por $\text{div } \mathbf{S}$. Mediante las ecuaciones de Maxwell esta expresión se reduce a la forma

$$-\text{div } \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (61.2)$$

(véase (56.15)). En un medio dieléctrico sin dispersión, cuando ϵ y μ son cantidades constantes reales, cabe considerar esta magnitud como variación de la energía electromagnética

$$U = (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2)/8\pi, \quad (61.3)$$

que tiene una significación termodinámica precisa: es la diferencia entre la energía interna por cm^3 de materia cuando existe el campo y la energía cuando el campo no existe, para valores fijos de la densidad y de la entropía.

Si hay dispersión, esta simple interpretación no es ya posible. Además, en el caso general de dispersión arbitraria resulta imposible cualquier definición razona-

* Los tiempos de relajación de procesos paramagnéticos o ferromagnéticos cualesquiera son ciertamente grandes comparados con los períodos ópticos.

ble de la energía electromagnética como magnitud termodinámica. Esto se debe a que la existencia de dispersión está vinculada, en general, con una disipación simultánea de energía: un medio dispersor resulta ser a la vez un absorbente.

Para determinar esta disipación, consideremos un campo electromagnético monocromático. Promediando respecto del tiempo la magnitud (61.2), encontramos la variación sistemática de la energía, que es también el valor medio de la cantidad de calor Q que se libera en 1 s y en 1 cm³ del medio.

Dado que la expresión (61.2) es cuadrática respecto del campo, al calcularla todas las magnitudes deben expresarse en forma real. Pero si se entiende por \mathbf{E} y \mathbf{H} , como resulta conveniente en el caso de un campo monocromático, las representaciones complejas de tales magnitudes, en (61.2) hay que substituir en vez de \mathbf{E} y $\partial\mathbf{D}/\partial t$ las expresiones

$$\frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}(-i\omega\epsilon\mathbf{E} + i\omega\epsilon^*\mathbf{E}^*),$$

respectivamente, y análogamente para \mathbf{H} y $\partial\mathbf{B}/\partial t$. Al promediar respecto del tiempo, los productos $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ y $\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}^*$, que contienen los factores $e^{\mp 2i\omega t}$, se anulan; queda así:

$$Q = \frac{i\omega}{16\pi} [(\epsilon^* - \epsilon)\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + (\mu^* - \mu)\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*] = \frac{\omega}{8\pi} (\epsilon''|\mathbf{E}|^2 + \mu''|\mathbf{H}|^2).$$

Esta expresión se puede escribir también en la forma

$$Q = \omega(\epsilon''\overline{\mathbf{E}^2} + \mu''\overline{\mathbf{H}^2})/4\pi, \quad (61.4)$$

donde \mathbf{E} y \mathbf{H} son las intensidades reales del campo y el trazo significa el promedio respecto del tiempo.

Esta importante fórmula muestra que la absorción (dissipación) de energía viene determinada por las partes imaginarias de ϵ y μ ; los dos términos que aparecen en (61.4) se llaman, respectivamente, *pérdidas eléctricas* y *magnéticas*. En virtud de la ley de crecimiento de la entropía, estas pérdidas tienen un signo bien determinado: la disipación de energía va acompañada de liberación de calor, es decir, siempre es $Q > 0$. De la fórmula (61.4) se sigue, por esto, que las partes imaginarias de ϵ y μ son siempre positivas:

$$\epsilon'' > 0, \quad \mu'' > 0 \quad (61.5)$$

para todas las substancias y cualesquiera que sean las frecuencias*. En cambio, el signo de las partes reales de ϵ y μ (cuando $\omega \neq 0$) no viene limitado por ninguna condición física, de modo que ϵ' y μ' pueden ser tanto positivas como negativas.

* Estrictamente hablando, esta afirmación se refiere a cuerpos que se encuentran en estado de equilibrio termodinámico (en ausencia de campo variable), lo que aquí damos por supuesto. Si el cuerpo no se encuentra ya de suyo en equilibrio térmico, Q podría, en principio, ser negativo. La segunda ley de la termodinámica exige solamente el crecimiento total de la entropía, tanto bajo la influencia del campo electromagnético variable, como del desequilibrio termodinámico, que nada tiene que ver con la existencia de dicho campo. Un ejemplo en principio posible de un tal cuerpo puede ser una substancia en la que todos los átomos se han llevado artificialmente a estados excitados (es decir, no bajo la influencia de la excitación térmica espontánea).

Cualquier proceso no estacionario en la materia real es siempre, en mayor o menor grado, termodinámico irreversible. Por ello, las pérdidas eléctricas y magnéticas en un campo electromagnético variable existen siempre, aunque pueden ser muy pequeñas. En otras palabras, las funciones $\epsilon''(\omega)$ y $\mu''(\omega)$ no se anulan rigurosamente para ningún valor de la frecuencia diferente de cero. Veremos en el párrafo siguiente que esta afirmación es de fundamental importancia, aunque en cierta medida no se excluye la posibilidad de que existan intervalos de frecuencia tales en los que aquellas pérdidas pasan a ser relativamente muy pequeñas.

Las regiones de frecuencias en las que ϵ'' y μ'' son muy pequeñas (comparadas con ϵ' y μ') se llaman *regiones de transparencia* de la substancia. Prescindiendo de la absorción, en estas regiones es posible introducir el concepto de energía interna del cuerpo en un campo electromagnético con el mismo sentido que posee en el caso de un campo constante.

Para definir esta magnitud no basta considerar un campo puramente monocromático, puesto que, debido a su rigurosa periodicidad, en él no se produce ninguna acumulación sistemática de energía electromagnética. Por esto consideraremos un campo representado por un conjunto de componentes monocromáticas con frecuencias contenidas en un estrecho intervalo en torno de un cierto valor medio ω_0 . Las intensidades de este campo se pueden escribir en la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad (61.6)$$

donde $\mathbf{E}_0(t)$, $\mathbf{H}_0(t)$ son funciones del tiempo que varían lentamente (comparadas con el factor $e^{-i\omega_0 t}$). Las partes reales de estas expresiones deben substituirse en el segundo miembro de (61.2), hecho lo cual se efectúa el cálculo del valor medio respecto del tiempo correspondiente al período $2\pi/\omega_0$, que es pequeño frente al tiempo de variación de los factores \mathbf{E}_0 y \mathbf{H}_0 .

El primer término en (61.2), después de pasar a la representación compleja de \mathbf{E} , toma la forma

$$\frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \cdot \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{D}} + \dot{\mathbf{D}}^*)/4\pi,$$

(y análogamente para el segundo término). Los productos $\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}}$ y $\mathbf{E}^* \cdot \dot{\mathbf{D}}^*$ desaparecen al efectuar el promedio indicado respecto del tiempo y, en consecuencia, no tenemos por qué considerarlos. De esta manera queda solamente

$$\frac{1}{16\pi} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right). \quad (61.7)$$

Escribamos la derivada $\partial \mathbf{D} / \partial t$ en la forma $\hat{f}\mathbf{E}$, donde \hat{f} designa el operador

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \hat{\epsilon}$$

y veamos a qué resultado lleva la aplicación del mismo a una función del tipo (61.6). Si \mathbf{E}_0 fuese constante, tendríamos simplemente

$$\hat{f}\mathbf{E} = f(\omega)\mathbf{E},$$

donde

$$f(\omega) = -i\omega\epsilon(\omega).$$

Efectuemos en nuestro caso el desarrollo de Fourier de la función $\mathbf{E}_0(t)$, representándola como superposición de componentes de la forma $\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i\alpha t}$ con valores $\mathbf{E}_{0\alpha}$ constantes. Que la variación de $\mathbf{E}_0(t)$ sea lenta significa que en este desarrollo intervienen solamente las componentes con $\alpha \ll \omega_0$. Teniendo esto en cuenta, escribiremos

$$\begin{aligned}\hat{f}\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0 + \alpha)t} &= f(\alpha + \omega_0)\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0 + \alpha)t} \\ &\cong f(\omega_0)\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0 + \alpha)t} + \alpha \frac{df(\omega_0)}{d\omega_0} \mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0 + \alpha)t}.\end{aligned}$$

Sumando ahora las componentes de Fourier, obtendremos

$$\hat{f}\mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t} = f(\omega_0)\mathbf{E}_0e^{-i\omega_0 t} + i \frac{df(\omega_0)}{d\omega_0} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} e^{-i\omega_0 t}.$$

Prescindiendo en lo que sigue del subíndice 0 en ω_0 , se tendrá así

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -i\omega\epsilon(\omega)\mathbf{E} + \frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} e^{-i\omega t}. \quad (61.8)$$

Substituyendo esta expresión en (61.7) y recordando que prescindimos de la parte imaginaria de la función $\epsilon(\omega)$, quedará

$$\frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} \left(\mathbf{E}_0^* \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} + \mathbf{E}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_0^*}{\partial t} \right) = \frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} \frac{d}{dt} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*)$$

(el producto $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*$ coincide con $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$). Sumando la expresión análoga correspondiente al campo magnético, llegamos a la conclusión de que la velocidad de la variación sistemática de la energía de 1 cm³ del medio viene dada por la derivada $d\bar{U}/dt$, donde

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi} \left[\frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \right]. \quad (61.9)$$

Mediante las expresiones reales de \mathbf{E} y \mathbf{H} , esta igualdad se escribe en la forma

$$\bar{U} = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} \bar{E}^2 + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} \bar{H}^2 \right]. \quad (61.10)$$

Éste es precisamente el resultado buscado: \bar{U} es el valor medio de la parte electromagnética de la energía interna de la unidad de volumen del medio transparente. Cuando no existe dispersión, ϵ y μ son constantes y (61.10) se transforma, como debía ser, en el valor medio de la expresión (61.3).

Si cesa la aportación de energía electromagnética al cuerpo desde el exterior, la absorción que de hecho existe siempre, aunque sea muy pequeña, lleva en defi-

nitiva a la transformación de toda la energía \tilde{U} en calor. Dado que, según la ley de crecimiento de la entropía, este calor debe ser liberado, y no absorbido, ha de tenerse $\tilde{U} > 0$. Según la fórmula (61.9) para ello deben cumplirse las desigualdades

$$d(\omega\epsilon)/d\omega > 0, \quad d(\omega\mu)/d\omega > 0$$

En realidad, estas condiciones se cumplen automáticamente como consecuencia de desigualdades todavía más restrictivas a las que siempre satisfacen las funciones $\epsilon(\omega)$ y $\mu(\omega)$ en las regiones de transparencia. (Véase § 64)*.

Tiene considerable interés la determinación del valor medio (respecto del tiempo) del tensor de tensiones, que da las fuerzas que actúan sobre la materia en un campo electromagnético variable. Este problema tiene sentido tanto para un medio no absorbente como para un medio absorbente, en contraste con el problema de la energía interna, que sólo se puede formular cuando se prescinde de la absorción. Sin embargo, no se han hallado todavía las correspondientes fórmulas.

§ 62. Relación entre las partes real e imaginaria de $\epsilon(\omega)$

La función $f(\tau)$ en (58.3) es finita para valores cualesquiera de su argumento, en particular también para $\tau = 0$ **. En los dieléctricos esta función tiende a cero cuando $\tau \rightarrow \infty$. Esta circunstancia expresa simplemente el hecho de que sobre el valor de $D(t)$ en un instante dado no pueden influir de modo apreciable los valores de $E(t)$ en instantes remotos. El mecanismo físico que se encuentra en la base de una dependencia integral de la forma (58.3) consiste en los procesos que dan lugar al establecimiento de la polarización eléctrica. Por ello, el intervalo de valores en el cual la función $f(\tau)$ difiere sensiblemente de cero es del orden de magnitud de los tiempos de relajación que caracterizan la velocidad de dichos procesos.

Lo que acabamos de decir vale también para los metales, con la única diferencia de que no es la propia función $f(\tau)$ la que tiende a cero para $\tau \rightarrow \infty$, sino la función $f(\tau) - 4\pi\sigma$. Este distinto comportamiento se debe a que el mero paso de una corriente estacionaria de conducción, si bien no lleva a ninguna variación real del estado físico del metal, con todo, en nuestras ecuaciones equivale formalmente a la aparición del desplazamiento eléctrico de acuerdo con $\frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma E}{c}$ o bien

$$D(t) = \int_{-\infty}^t 4\pi\sigma E(\tau) d\tau = 4\pi\sigma \int_0^\infty E(t-\tau) d\tau.$$

* Tomando la semisuma de las desigualdades (64.1) y (64.2) se encuentra que la derivada $d(\omega\epsilon)/d\omega$ no sólo es positiva, sino incluso mayor que la unidad.

** Precisamente con este fin, en la dependencia integral (58.3) se ha separado el término $E(t)$; de no haberlo hecho, la función $f(\tau)$ tendría para $\tau = 0$ una singularidad del tipo de la función- δ .

Hemos definido la función $\epsilon(\omega)$ por

$$\epsilon(\omega) = 1 + \int_0^\infty e^{i\omega\tau} f(\tau) d\tau. \quad (62.1)$$

Para esta función resulta posible obtener algunas relaciones generales muy importantes utilizando el formalismo matemático de la teoría de funciones de variable compleja. Para esto consideraremos ω como una variable compleja ($\omega = \omega' + i\omega''$) y determinaremos las propiedades de la función $\epsilon(\omega)$ en el semiplano superior de esta variable. De la definición (62.1) y de las propiedades de la función $f(\tau)$ indicadas más arriba se sigue que, en todo el semiplano superior, $\epsilon(\omega)$ es una función uniforme que en dicho semiplano carece de puntos singulares. En efecto, para $\omega'' > 0$, en el integrando de la fórmula (62.1) se tiene un factor que decrece exponencialmente $e^{-\omega''\tau}$ y dado que también la función $f(\tau)$ es finita en todo el intervalo de integración, la integral converge. La función $\epsilon(\omega)$ tampoco tiene singularidades sobre el propio eje real ($\omega'' = 0$) con excepción, quizás, del origen de coordenadas (en los metales $\epsilon(\omega)$ presenta en este punto un polo simple)*.

Es útil hacer notar el hecho de que la conclusión de que no existen puntos singulares de la función $\epsilon(\omega)$ en el semiplano superior es consecuencia, desde el punto de vista físico, del principio de causalidad. Este último se manifiesta en que la integración en (58.3) se lleva a cabo solamente para tiempos anteriores al instante dado t , como resultado de lo cual en la fórmula (62.1) el intervalo de integración se extiende precisamente desde 0 a ∞ (y no desde $-\infty$ a $+\infty$).

De la definición (62.1) resulta además, evidentemente, que

$$\epsilon(-\omega^*) = \epsilon^*(\omega). \quad (62.2)$$

Ésta es la generalización de la igualdad (58.7) que se refería a valores reales de ω . En particular, para valores puramente imaginarios de ω tenemos $\epsilon(i\omega'') = \epsilon^*(i\omega'')$, es decir, sobre el eje imaginario la función $\epsilon(\omega)$ es real:

$$\operatorname{Im} \epsilon = 0 \text{ para } \omega = i\omega''. \quad (62.3)$$

Hay que subrayar que la propiedad (62.2) expresa simplemente el hecho de que la relación $D = \hat{E}E$ debe hacer que D sea real cuando E lo es. Si la función $E(t)$ viene dada por la expresión real

$$E = E_0 e^{-i\omega t} + E_0^* e^{i\omega^* t}, \quad (62.4)$$

* En cambio, en el semiplano inferior la definición (62.1) no es aplicable, puesto que la integral diverge. Por ello, la función $\epsilon(\omega)$ en el semiplano inferior puede definirse solamente como prolongación analítica de la fórmula (62.1) a partir del semiplano superior. En este dominio la función $\epsilon(\omega)$ posee, en general, puntos singulares.

La función $\epsilon(\omega)$ en el semiplano superior no sólo tiene un sentido matemático formal, sino también físico: permite determinar la relación entre D y E para campos de amplitud creciente (como $e^{\omega''t}$). Por el contrario, en el semiplano inferior esta interpretación física resulta imposible, si más no por el hecho de que la existencia de un campo amortiguado (como $e^{-|\omega''|t}$) presupone un valor infinito para $t \rightarrow -\infty$.

aplicando el operador \hat{e} a cada uno de los dos términos, obtendremos:

$$\mathbf{D} = \epsilon(\omega)\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \epsilon(-\omega^*)\mathbf{E}_0^* e^{i\omega^* t},$$

y la condición de que esta magnitud sea real coincide con (62.2).

Según los resultados del § 61, la parte imaginaria de $\epsilon(\omega)$ es positiva para valores $\omega = \omega'$ reales y positivos, es decir, sobre el semieje real positivo. Dado que, de acuerdo con (62.2), $\text{Im } \epsilon(-\omega') = -\text{Im } \epsilon(\omega')$, sobre el semieje real negativo la parte imaginaria de $\epsilon(\omega)$ es negativa. De esta manera,

$$\text{Im } \epsilon \geq 0 \text{ para } \omega = \omega' \geq 0. \quad (62.5)$$

En el punto $\omega = 0$ la función $\text{Im } \epsilon$ cambia de signo, bien sea anulándose (en los dieléctricos), bien sea pasando por el infinito (en los metales). Éste es el único punto sobre el eje real en que $\text{Im } \epsilon(\omega)$ puede anularse.

Cuando ω tiende a infinito siguiendo un camino arbitrario (en el semiplano superior), la función $\epsilon(\omega)$ tiende a la unidad. Señalamos ya esta circunstancia en el § 59 para el caso en que $\omega \rightarrow \infty$ a lo largo del eje real. En el caso general esto puede verse en la propia fórmula (62.1): si $\omega \rightarrow \infty$ de modo que $\omega'' \rightarrow \infty$, la integral en (62.1) tiende a cero gracias a la presencia en el integrando del factor $e^{-\omega''\tau}$; pero si ω'' se conserva finito, mientras que $|\omega'| \rightarrow \infty$, la tendencia de la integral a cero tiene lugar debido a la presencia del factor oscilante $e^{i\omega'\tau}$.

Las propiedades enumeradas de la función $\epsilon(\omega)$ bastan para demostrar el siguiente teorema: la función $\epsilon(\omega)$ no toma valores reales en ningún punto del semiplano superior a distancia finita, con la única excepción de los puntos del eje imaginario; sobre éste, $\epsilon(\omega)$ decrece con monotonía desde el valor $\epsilon_0 > 1$ (en los dieléctricos) o desde $+\infty$ (en los metales) para $\omega = i0$ hasta 1 para $\omega = i\infty$. De aquí se sigue, en particular, que la función $\epsilon(\omega)$ carece de ceros en el semiplano superior.

No nos detendremos aquí a probar este teorema porque coincide con un teorema general relativo a la «susceptibilidad generalizada» (y las propiedades de $\epsilon(\omega)$ que acabamos de citar presentan una analogía similar)*. Por la misma razón, la función $\epsilon(\omega)$ satisface las relaciones generales entre las partes real e imaginaria de la susceptibilidad generalizada. Repetiremos aquí la deducción de estas relaciones a fin de poner de relieve ciertas diferencias entre los dieléctricos y los metales.

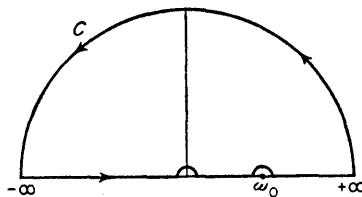


FIG. 29

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 125. La susceptibilidad generalizada $a(\omega)$ que allí se introduce corresponde a $\epsilon(\omega) - 1$, que se anula cuando $\omega \rightarrow \infty$.

Para ello elegimos un valor real cualquiera $\omega = \omega_0$ e integremos la expresión $(\epsilon - 1)/(\omega - \omega_0)$ a lo largo del contorno representado en la figura 29. Este contorno sigue el eje real, rodeando por arriba el punto $\omega = \omega_0 > 0$ y también el punto $\omega = 0$, si este último es (como en los metales) un polo de la función $\epsilon(\omega)$. El contorno se cierra por una semicircunferencia infinitamente alejada. En el infinito $\epsilon \rightarrow 1$, por lo que la función $(\epsilon - 1)/(\omega - \omega_0)$ tiende a cero más rápidamente que $1/\omega$. En consecuencia, la integral

$$\int_C \frac{\epsilon - 1}{\omega - \omega_0} d\omega \quad (62.6)$$

es convergente; pero dado que $\epsilon(\omega)$ carece de puntos singulares en el semiplano superior, mientras que el punto $\omega = \omega_0$ ha sido excluido del dominio de integración, la función $(\epsilon - 1)/(\omega - \omega_0)$ es analítica en toda la región interior al contorno C y aquella integral es igual a cero.

La integral a lo largo de la semicircunferencia infinitamente alejada se anula sin más. En cuanto al punto ω_0 , éste se evita siguiendo una semicircunferencia infinitesimal de radio $\rho \rightarrow 0$. El rodeo se efectúa en el sentido de las agujas de un reloj y proporciona una contribución a la integral igual a $-i\pi[\epsilon(\omega_0) - 1]$. Si se trata de la función $\epsilon(\omega)$ correspondiente a un dieléctrico, el desvío cerca del origen de coordenadas es innecesario y la integración a lo largo de todo el eje real da, de esta manera,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\rho + \omega_0} \frac{\epsilon - 1}{\omega - \omega_0} d\omega + \int_{\rho + \omega_0}^{\infty} \frac{\epsilon - 1}{\omega - \omega_0} d\omega \right\} - i\pi[\epsilon(\omega_0) - 1] = 0.$$

El primer término es la integral desde $-\infty$ a $+\infty$ entendida en el sentido de valor principal. Poniendo de manifiesto esta circunstancia, como se suele hacer, anteponiendo la letra P al símbolo de integral, tenemos

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon - 1}{\omega - \omega_0} d\omega - i\pi[\epsilon(\omega_0) - 1] = 0. \quad (62.7)$$

La variable de integración ω toma aquí solamente valores reales. Designémosla por la letra x , mientras que designamos por ω el valor real dado ω_0 ; escribamos también la función $\epsilon(\omega)$ de la variable real ω , al igual que en el § 58, en la forma $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$. Separando en (62.7) las partes real e imaginaria, encontramos finalmente las dos fórmulas siguientes:

$$\epsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon''(x)}{x - \omega} dx, \quad (62.8)$$

$$\epsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon'(x) - 1}{x - \omega} dx. \quad (62.9)$$

Los primeros en hallarlas fueron H. A. Kramers y R. de L. Kronig (1927). Hay que recalcar que la única propiedad esencial de la función $\epsilon(\omega)$ utilizada en la deducción de estas fórmulas es la ausencia de puntos singulares en el semiplano superior*. Cabe decir por esto que las fórmulas de Kramers-Kronig (como también la propiedad indicada de $\epsilon(\omega)$) son consecuencia directa del principio físico de causalidad.

Valiéndonos de que $\epsilon''(x)$ es una función impar, (62.8) puede también escribirse en la forma

$$\begin{aligned}\epsilon'(\omega) - 1 &= \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\epsilon''(x)}{x - \omega} dx + \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\epsilon''(x)}{x + \omega} dx \\ &= \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{x\epsilon''(x)}{x^2 - \omega^2} dx.\end{aligned}\quad (62.10)$$

Si se trata de un metal, la función $\epsilon(\omega)$ presenta un polo en el punto $\omega = 0$, cerca del cual $\epsilon = 4\pi\sigma i/\omega$ (58.9). Rodear este polo a lo largo de una semicircunferencia da en la integral un término real complementario $-(4\pi\sigma/\omega_0)\pi$ que debe añadirse al segundo miembro de la igualdad (62.7). En consecuencia, este mismo término aparece también en la fórmula (62.9):

$$\epsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^\infty \frac{\epsilon'(x) - 1}{x - \omega} dx + \frac{4\pi\sigma}{\omega}; \quad (62.11)$$

las fórmulas (62.8) y (62.10), en cambio, no varían. Además, acerca del caso de los metales hay que hacer aún la siguiente observación. Al final del § 58 se señaló que en los metales pueden existir intervalos de frecuencias en los que la función $\epsilon(\omega)$ pierde su significado físico debido a los efectos de heterogeneidad espacial del campo. En las fórmulas consideradas aquí, en cambio, la integración debe extenderse a todas las frecuencias. En tales casos hay que entender por $\epsilon(\omega)$, en los correspondientes dominios de frecuencia, la función que se obtiene como resultado de resolver formalmente el problema del comportamiento del cuerpo en un campo eléctrico ficticio periódico y espacialmente homogéneo (y no en el campo, necesariamente no homogéneo, de la onda electromagnética).

La fórmula (62.10) es particularmente importante. Nos ofrece la posibilidad de calcular la función $\epsilon'(\omega)$ si se conoce, aunque sólo sea aproximadamente (por ejemplo, por vía experimental), la función $\epsilon''(\omega)$ para el cuerpo dado. Es esencial para ello que, cualquiera que sea la función $\epsilon''(\omega)$ que satisfaga la condición físicamente necesaria $\epsilon'' > 0$ para $\omega > 0$, la fórmula (62.10) dé una función $\epsilon'(\omega)$ que no contradiga ninguna de las condiciones físicas necesarias, es decir, una función que

* En lo que concierne a la propiedad $\epsilon \rightarrow 1$ para $\omega \rightarrow \infty$, ésta carece de importancia: si el límite $\epsilon(\infty)$ fuese diferente de 1, sería necesario simplemente considerar $\epsilon - \epsilon(\infty)$ en vez de la diferencia $\epsilon - 1$, con la correspondiente modificación evidente de las fórmulas (62.8) y (62.9).

sea en principio posible (el signo de ϵ' no viene limitado por ninguna condición física general). Esta circunstancia permite también utilizar la fórmula (62.10) incluso para una función $\epsilon''(\omega)$ aproximada. Por el contrario, la fórmula (62.9) no da (en el caso general de una función $\epsilon'(\omega)$ arbitraria) una función $\epsilon''(\omega)$ físicamente posible, ya que no permite asegurar de manera automática el que esta última sea positiva.

En la teoría de la dispersión se suele escribir la expresión de $\epsilon'(\omega)$ en la forma

$$\epsilon'(\omega) - 1 = - \frac{4\pi e^2}{m} P \int_0^\infty \frac{f(x)}{\omega^2 - x^2} dx, \quad (62.12)$$

donde e, m son la carga y la masa del electrón y $f(\omega) d\omega$ recibe el nombre de *fuerza de los osciladores* (o «número de electrones de dispersión») en el intervalo de frecuencia $d\omega$. Según (62.10) esta magnitud está ligada con $\epsilon''(\omega)$ por

$$f(\omega) = \frac{m}{2\pi^2 e^2} \omega \epsilon''(\omega). \quad (62.13)$$

En los metales $f(\omega)$ tiende a un límite finito cuando $\omega \rightarrow 0$.

Para valores suficientemente grandes de ω , en el integrando de (62.10) puede prescindirse de x^2 frente a ω^2 . Entonces

$$\epsilon'(\omega) - 1 = - \frac{2}{\pi \omega^2} \int_0^\infty x \epsilon''(x) dx.$$

Por otra parte, para la constante dieléctrica correspondiente a altas frecuencias tenemos la fórmula (59.1). La comparación de ambas expresiones conduce a la fórmula

$$\frac{m}{2\pi^2 e^2} \int_0^\infty \omega \epsilon''(\omega) d\omega = \int_0^\infty f(\omega) d\omega = N, \quad (62.14)$$

donde N es el número total de electrones por unidad de volumen de materia.

Si $\epsilon''(\omega)$ no es singular en $\omega = 0$, es posible pasar al límite $\omega \rightarrow 0$ en la fórmula (62.10), con lo que se obtiene

$$\epsilon'(0) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\epsilon''(x)}{x} dx. \quad (62.15)$$

Pero si el punto $\omega = 0$ es singular para la función $\epsilon''(\omega)$ (como en los metales), el límite a que tiende la integral (62.10) cuando $\omega \rightarrow 0$ no coincide con el valor que se obtiene suprimiendo simplemente ω en ella. Para calcular dicho límite es necesario substituir previamente en el integrando la expresión $\epsilon''(x)$ por

$$\epsilon''(x) - 4\pi\sigma/x;$$

esta sustitución no altera el valor de la integral, ya que se tiene idénticamente

$$P \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - \omega^2} \equiv 0.$$

Para los dieléctricos, la fórmula (62.15) puede escribirse también en la forma

$$\epsilon_0 - 1 = \frac{4\pi e^2 N}{m} \overline{\omega^{-2}}, \quad (62.16)$$

donde el trazo horizontal indica el promedio según el «número de osciladores»:

$$\overline{\omega^{-2}} = \frac{1}{N} \int_0^\infty \frac{f(\omega)}{\omega^2} d\omega.$$

Esta expresión puede ser útil para diversas estimaciones de las cantidades ϵ_0 .

La fórmula que sigue* expresa los valores de $\epsilon(\omega)$ sobre el semieje imaginario positivo en función de los valores de $\epsilon''(\omega)$ sobre el eje real:

$$\epsilon(i\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x\epsilon''(x)}{x^2 + \omega^2} dx. \quad (62.17)$$

Si se integran ambos miembros de esta igualdad respecto de $d\omega$, se obtiene

$$\int_0^\infty [\epsilon(i\omega) - 1] d\omega = \int_0^\infty \epsilon''(\omega) d\omega. \quad (62.18)$$

Todos los resultados que acabamos de presentar (con sólo pequeños cambios de forma) son también aplicables a la permeabilidad $\mu(\omega)$. La diferencia se debe ante todo a que, al aumentar la frecuencia, la función $\mu(\omega)$ pierde su significado físico relativamente pronto. En consecuencia, para aplicar, por ejemplo, las fórmulas de Kramers-Kronig a $\mu(\omega)$ hay que proceder como sigue. En vez de un intervalo infinito de valores de ω , consideramos un intervalo finito (de 0 a ω_1) que se extiende hasta aquellas frecuencias para las que μ tiene todavía sentido, a pesar de que ya deja de ser variable, de modo que su parte imaginaria puede considerarse como igual a cero; el correspondiente valor real $\mu(\omega_1)$ lo designaremos por μ_1 . Entonces la fórmula (62.10) puede escribirse en la forma

$$\mu'(\omega) - \mu_1 = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\omega_1} \frac{x\mu''(x)}{x^2 - \omega^2} dx. \quad (62.19)$$

En contraste con ϵ_0 , el valor $\mu_0 = \mu(0)$ lo mismo puede ser mayor que menor que 1.

* Véase vol. V, *Física estadística*, ec. (125.19).

En cuanto a la variación de $\mu(\omega)$, a lo largo del eje imaginario, ésta es monótona decreciente como antes, si bien ahora de μ_0 a $\mu_1 < \mu_0$.

§ 63. Onda monocromática plana

Las ecuaciones (58.2) para un campo monocromático se escriben:

$$i\omega\mu(\omega)\mathbf{H} = c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad i\omega\epsilon(\omega)\mathbf{E} = -c \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (63.1)$$

Estas ecuaciones constituyen por sí solas un sistema completo, puesto que las ecuaciones (58.1) se siguen de ellas automáticamente y, por consiguiente, no es necesario considerarlas separadamente. Suponiendo que el medio es homogéneo y eliminando de estas ecuaciones \mathbf{H} (o \mathbf{E}) obtendremos la ecuación de segundo orden

$$\Delta\mathbf{E} + \epsilon\mu(\omega^2/c^2)\mathbf{E} = 0 \quad (63.2)$$

(y la misma ecuación para \mathbf{H}).

Consideremos una onda electromagnética plana que se propaga en un medio homogéneo ilimitado. En una onda plana en el vacío la dependencia del campo respecto de las coordenadas viene dada por un factor de la forma $e^{ik \cdot r}$ con un vector de onda \mathbf{k} real. Ahora bien, al considerar la propagación de las ondas en los medios materiales en general, resulta necesario introducir también valores complejos:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}'',$$

donde $\mathbf{k}', \mathbf{k}''$ son vectores reales.

Suponiendo \mathbf{E} y \mathbf{H} proporcionales a $e^{ik \cdot r}$ y efectuando en las ecuaciones (63.1) la derivación respecto de las coordenadas, obtendremos

$$\omega\mu\mathbf{H} = ck \times \mathbf{E}, \quad \omega\epsilon\mathbf{E} = -ck \times \mathbf{H}. \quad (63.3)$$

Eliminando entre estas dos relaciones \mathbf{E} o \mathbf{H} , se encuentra la siguiente expresión para el cuadrado del «vector de onda»:

$$k^2 \equiv k'^2 - k''^2 + 2ik' \cdot \mathbf{k}'' = \epsilon\mu\omega^2/c^2. \quad (63.4)$$

Vemos que \mathbf{k} puede ser real sólo si ϵ y μ son reales y positivos. Pero incluso en este caso cabe que, a pesar de todo, \mathbf{k} sea complejo, con tal que $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' = 0$ (encontraremos este caso al estudiar la reflexión total; véase § 66).

No hay que perder de vista que, en el caso general de \mathbf{k} complejo, la onda puede llamarse «plana» sólo en un sentido convencional. Escribiendo

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} e^{-\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}},$$

se advierte que los planos perpendiculares al vector \mathbf{k}' son planos de fase constante. En cambio, los planos de amplitud constante son planos perpendiculares al vector \mathbf{k}'' en cuya dirección se produce el amortiguamiento de la onda. En lo que con-

cierne a las superficies de valor constante del propio campo, éstas no serán en general planas. Tales ondas se llaman *ondas planas no-homogéneas* para distinguirlas de las ondas planas «homogéneas».

La relación entre las componentes de los campos eléctrico y magnético viene dada en el caso general por las fórmulas (63.3). En particular, multiplicando estas fórmulas escalarmente por \mathbf{k} , obtendremos

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (63.5)$$

y elevando al cuadrado cualquiera de ellas y utilizando (63.4), se encuentra

$$\mathbf{E}^2 = \mu \mathbf{H}^2 / \epsilon. \quad (63.6)$$

Hay que recordar, sin embargo, que dado el carácter complejo de los tres vectores \mathbf{k} , \mathbf{E} y \mathbf{H} estas relaciones no tienen, en general, el mismo sentido intuitivo que poseían en el caso en que eran reales.

Sin detenernos a considerar las engorrosas relaciones que se obtienen en el caso general, examinemos los más importantes casos particulares.

Resultados especialmente simples se obtienen para una onda que se propaga sin amortiguarse en un medio homogéneo no absorbente (transparente). El vector de onda es real en este caso y su módulo vale

$$k = \sqrt{(\epsilon\mu)}\omega/c = n\omega/c, \quad (63.7)$$

donde $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ es el llamado *índice de refracción* del medio. Tanto el campo eléctrico como el magnético se encuentran en un plano perpendicular al vector \mathbf{k} (onda transversal pura), siendo perpendiculares entre sí y están ligados por la relación

$$\mathbf{H} = \sqrt{(\epsilon/\mu)}\mathbf{l} \times \mathbf{E} \quad (63.8)$$

(\mathbf{l} es el versor del vector \mathbf{k}). Se sigue de aquí que $\epsilon E^2 = \mu H^2$; esto, sin embargo, no significa que sean iguales las energías eléctrica y magnética en la onda (como en ausencia de dispersión), puesto que estas últimas vienen dadas por otras expresiones (los dos términos en la fórmula (61.10)).

La velocidad u de propagación de la onda en el medio viene determinada por la conocida expresión de la velocidad de grupo*:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{d(n\omega)/d\omega}. \quad (63.9)$$

Es fácil comprobar que la velocidad

$$u = \bar{S}/\bar{U}, \quad (63.10)$$

de acuerdo con su significado de velocidad de transporte de energía en un paquete

* Cuando existe absorción apreciable, es del todo imposible introducir el concepto de velocidad de grupo, puesto que en un medio absorbente los paquetes de onda no se propagan, sino que experimentan una rápida «difuminación».

de ondas; \bar{U} es aquí la densidad de energía dada por (61.9), y

$$\bar{S} = \frac{c}{8\pi\mu} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \quad (63.11)$$

es el valor medio del vector de Poynting. En ausencia de dispersión, cuando el índice de refracción no depende de la frecuencia, las expresiones (63.9) se reducen simplemente a c/n (cf. (56.13)).

Consideremos ahora el caso, más general, de propagación de una onda electromagnética en un medio absorbente en la que el vector de onda tiene una dirección determinada, es decir \mathbf{k}' y \mathbf{k}'' son paralelos entre sí. Dicha onda es plana en el sentido literal de la palabra, ya que las superficies en que los valores del campo son constantes resultan ser planos perpendiculares a la dirección de propagación (*onda plana homogénea*).

En este caso puede introducirse la «longitud» k del vector de onda definida por $\mathbf{k} = k\mathbf{l}$ (donde \mathbf{l} es el versor de los vectores \mathbf{k}' y \mathbf{k}'') y de (63.4) se sigue $k = \sqrt{\epsilon\mu}\omega/c$. La cantidad compleja $\sqrt{\epsilon\mu}$ se escribe a menudo en la forma $n + ik$, con n y k reales, de modo que

$$k = \sqrt{(\epsilon\mu)\omega/c} = (n + ik)\omega/c. \quad (63.12)$$

La magnitud n se llama *índice de refracción*, y k , *coeficiente de absorción* del medio; este último coeficiente determina la rapidez de amortiguamiento de la onda a medida que se propaga. Subrayaremos, sin embargo, que el amortiguamiento de la onda no está necesariamente ligado con la existencia de una verdadera absorción; la disipación de energía tiene lugar solamente cuando ϵ y μ son complejos, mientras que el coeficiente k es diferente de cero para ϵ y μ reales y de signos opuestos.

Expresemos la magnitudes n y k en función de las partes real e imaginaria de la constante dieléctrica, suponiendo que $\mu = 1$. De la igualdad $n^2 - k^2 + 2ik\kappa = \epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ se deduce $n^2 - k^2 = \epsilon'$, $2ik\kappa = \epsilon''$. Resolviendo estas ecuaciones respecto de n y k , obtendremos*

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{\left\{\frac{1}{2}[\epsilon' + \sqrt{(\epsilon'^2 + \epsilon''^2)}]\right\}}, \\ \kappa &= \sqrt{\left\{\frac{1}{2}[-\epsilon' + \sqrt{(\epsilon'^2 + \epsilon''^2)}]\right\}}. \end{aligned} \quad (63.13)$$

En particular, para los metales y en la región de frecuencias en la que es válida la fórmula (58.9), la parte imaginaria de ϵ es grande comparada con la parte real y está ligada con la conductibilidad por $\epsilon'' = 4\pi\sigma/\omega$; prescindiendo de ϵ' frente a ϵ'' , se encuentra que n y κ coinciden y son iguales a:

$$n = \kappa = \sqrt{(2\pi\sigma/\omega)}. \quad (63.14)$$

* Dado que $\epsilon'' > 0$, los signos de n y κ deben ser idénticos, de acuerdo con el hecho de que la onda se amortigua en el sentido en que se propaga. La elección en (63.13) de signos positivos corresponde a una onda que se propaga en el sentido del eje x .

Para la relación entre los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} en la onda plana homogénea considerada se obtiene de nuevo la fórmula (63.8), pero sólo con ϵ y μ complejos. Una vez más, dicha fórmula muestra que ambos campos son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación de la onda. Si $\mu = 1$, escribiendo $\sqrt{\epsilon}$ en la forma

$$\sqrt{\epsilon} = \sqrt{(n^2 + \kappa^2)} \exp[i \operatorname{arctg}(\kappa/n)],$$

vemos que el campo magnético supera en módulo al campo eléctrico en el factor $\sqrt{n^2 + \kappa^2}$, mientras que la fase viene retrasada respecto de la de éste en el ángulo $\operatorname{arctg}(\kappa/n)$; en particular, el desplazamiento de fase en el caso (63.14) es igual a $\pi/4$.

PROBLEMA

En un instante dado ($t = 0$) en cierta región del espacio se tiene una perturbación electromagnética. No siendo mantenida por fuentes, esta perturbación se amortiguará con el tiempo. Hallar las condiciones que determinan el correspondiente decremento.

Solución. Desarrollemos la perturbación inicial en integral de Fourier respecto de las coordenadas y consideremos una componente cualquiera con vector de onda \mathbf{k} (vector real!). Su dependencia respecto del tiempo viene dada (para un valor de t suficientemente grande) por el factor $e^{-t\omega}$ con una «frecuencia» compleja ω que hay que determinar; el coeficiente de amortiguamiento es $-\operatorname{Im} \omega$.

De las ecuaciones

$$-\dot{\mathbf{H}}/c = \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad \dot{\mathbf{D}}/c = \operatorname{rot} \mathbf{H} = i\mathbf{k} \times \mathbf{H}$$

se tiene, eliminando \mathbf{H} ,

$$\dot{\mathbf{D}}/c^2 = \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}).$$

Tomemos como eje x el determinado por \mathbf{k} . Para la parte «longitudinal» de la perturbación se sigue de aquí que $\ddot{D}_x = 0$ y también, por lo tanto, $D_x = 0$.

Por otra parte, la relación entre D_x y E_x se establece mediante un operador integral de la forma

$$E_x(t) = \epsilon^{-1} D_x = \int_{-\infty}^t F(t-\tau) D_x(\tau) d\tau \quad (2)$$

(véase § 58). Dado que en el presente caso $D_x(\tau) = 0$ cuando $\tau > 0$, se tendrá

$$E_x(t) = \int_0^t F(t-\tau) D_x(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Está claro por esto que para valores de t grandes la dependencia temporal de E_x viene determinada fundamentalmente por la dependencia de la función $F(t)$ respecto del tiempo.

Si se trata de un campo monocromático, se tiene, en virtud de (2),

$$\frac{1}{\epsilon(\omega)} = \int_0^\infty F(x) e^{i\omega x} dx,$$

y, reciprocamente,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\epsilon(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega.$$

Para estimar esta integral, supuesto que los valores de t sean grandes, desplazaremos el camino de integración hacia el semiplano inferior de ω , donde el integrando disminuye rápidamente. Al hacerlo hay que evitar todos los puntos singulares de la función $1/\epsilon(\omega)$, es decir, los ceros de la función

$\epsilon(\omega)$ y sus puntos de ramificación. En definitiva, la integral será esencialmente proporcional a $e^{-i\omega_0 t}$, donde ω_0 es, de los puntos singulares indicados, el más próximo al eje real. Con esto queda resuelta la cuestión planteada acerca de la parte longitudinal de la perturbación.

Para las componentes transversales, de (1) se deduce

$$\partial_{y,z}/c^2 + k^2 E_{y,z} = 0.$$

Un análisis análogo conduce a la conclusión de que la «frecuencia» buscada ω_0 es en este caso el cero o el punto de ramificación de la función $\omega^2 \epsilon(\omega) - c^2 k^2$ más próximo al eje real.

§ 64. Medios transparentes

Aplicaremos las fórmulas generales obtenidas en el § 62 a medios débilmente absorbentes (en el intervalo de frecuencias dado), es decir, supondremos que para estas frecuencias se puede prescindir de la parte imaginaria de la permitividad.

En tal caso sobra el signo de valor principal que aparece en la fórmula (62.10), puesto que el punto $x = \omega$ desaparece de hecho del dominio de integración. En estas condiciones, la integral se puede derivar respecto del parámetro ω como una integral ordinaria que carece de singularidades en el integrando. Efectuando dicha derivación, obtendremos

$$\frac{d\epsilon}{d\omega} = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{x\epsilon''(x)}{(\omega^2 - x^2)^2} dx.$$

Dado que el integrando es positivo a lo largo de todo el intervalo de integración, llegamos a la conclusión de que

$$d\epsilon(\omega)/d\omega > 0, \quad (64.1)$$

es decir, en un dominio en que no existe absorción, la permitividad es función monótona creciente de la frecuencia.

De manera análoga, en el mismo intervalo de frecuencias se obtiene todavía una desigualdad más:

$$\frac{d}{d\omega} [\omega^2(\epsilon - 1)] = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^3 \epsilon''(x)}{(x^2 - \omega^2)^2} dx > 0,$$

o bien

$$d\epsilon/d\omega > 2(1 - \epsilon)/\omega. \quad (64.2)$$

Si $\epsilon < 1$, esta desigualdad es más restrictiva que la (64.1).

Obsérvese que las desigualdades (64.1) y (64.2) (y las análogas para $\mu(\omega)$) garantizan automáticamente que se cumpla la desigualdad $u < c$ para la velocidad de propagación de las ondas. Así, cuando $\mu = 1$ se tiene $n = \sqrt{\epsilon}$ e introduciendo n en vez de ϵ en (64.1) y (64.2), se obtendrá

$$d(n\omega)/d\omega > n, \quad d(n\omega)/d\omega > 1/n. \quad (64.3)$$

En consecuencia, para la velocidad u (63.9) se obtienen dos desigualdades: $u < c/n$ y $u < cn$, de donde se sigue evidentemente que $u < c$ tanto para $n > 1$ como para $n < 1$. Estas desigualdades demuestran también que $u > 0$, es decir, la velocidad de grupo está dirigida en el mismo sentido que el vector de onda. Esta propiedad es completamente natural, aunque desde un punto de vista puramente lógico no tendría por qué darse necesariamente.

Supongamos que el dominio de absorción débil se extiende a lo largo de un amplio intervalo de frecuencias, desde ω_1 a ω_2 (siendo $\omega_2 \gg \omega_1$), y consideremos aquellas frecuencias ω tales que $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$. El dominio de integración en (62.10) se descompone en dos partes: $x < \omega_1$ y $x > \omega_2$. En la primera de ellas se puede prescindir en el denominador del integrando de x frente a ω , y en el segundo, de ω frente a x :

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_2}^{\infty} \epsilon''(x) \frac{dx}{x} - \frac{2}{\pi \omega^2} \int_0^{\omega_1} x \epsilon''(x) dx, \quad (64.4)$$

es decir, en el intervalo considerado la función $\epsilon(\omega)$ tiene la forma $a - b/\omega^2$, donde a y b son constantes positivas. La segunda de ellas se puede expresar en función del «número de electrones de dispersión» N_1 , que son los responsables de la absorción en el intervalo desde 0 hasta ω_1 (véase (62.14)) y entonces

$$\epsilon(\omega) = a - 4\pi N_1 e^2 / m\omega^2. \quad (64.5)$$

De esta expresión se sigue, en particular, que en un intervalo suficientemente amplio de absorción débil, la permitividad, en general, pasa por el valor cero. Recorremos en relación con esto que, en el sentido literal de la palabra, es transparente un medio en el que $\epsilon(\omega)$ no sólo es real, sino también positivo; para un valor negativo de ϵ la onda se amortigua al penetrar en el medio, aunque en él no tiene lugar una verdadera disipación de energía.

Para una frecuencia en la que $\epsilon = 0$, el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} se anula idénticamente y las ecuaciones de Maxwell admiten como solución un campo eléctrico variable que satisface únicamente la condición $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, con un campo magnético igual a cero. En otras palabras, en este caso es posible que existan ondas eléctricas longitudinales. Para determinar la velocidad de su propagación es necesario tener en cuenta la dispersión de la permitividad no sólo respecto de la frecuencia, sino también respecto del vector de onda. Función de este último pasa a serlo también el valor de ω para el cual $\epsilon = 0$. Si el medio es isótropo, el primer término no nulo del desarrollo de la función escalar $\omega(\mathbf{k})$ es proporcional a k^2 :

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{2} \alpha k^2.$$

Por consiguiente, la velocidad de propagación

$$\mathbf{u} = \partial \omega / \partial \mathbf{k} = \alpha \mathbf{k},$$

es proporcional a la primera potencia del vector de onda.

PROBLEMA

Sobre la frontera del semiespacio $x > 0$ ocupado por un medio transparente (con $\mu = 1$), incide normalmente una onda electromagnética plana con un frente perfectamente definido. Determinar la estructura del frente de onda que penetra en el interior del medio (*A. Sommerfeld y L. Brillouin*, 1914).

Solución. Supongamos que la onda incide sobre el medio en el instante $t = 0$, de modo que para $x = 0$ el campo de la onda incidente (E o H) es

$$E = 0 \text{ para } t < 0, E \sim e^{-i\omega_0 t} \text{ para } t > 0.$$

Desarrollando este campo en integral de Fourier respecto del tiempo, el problema se reduce al de la incidencia de ondas de extensión infinita, cuyas frecuencias son diferentes, sobre la superficie de separación. La amplitud de la componente de Fourier de frecuencia ω es proporcional a

$$\int_0^\infty e^{i(\omega-\omega_0)\tau} d\tau.$$

Para una onda incidente de frecuencia ω , la onda que penetra en el medio tiene la forma

$$a(\omega) e^{-i\omega t + i\omega nx/c},$$

donde la amplitud $a(\omega)$ es una función lentamente variable de la frecuencia. Por ello, en este caso el campo de la onda en el medio es

$$E \sim \int_{-\infty}^{\infty} d\omega a(\omega) e^{-i\omega t + i\omega nx/c} \int_0^\infty e^{i(\omega-\omega_0)\tau} d\tau.$$

En una región cercana al frente de onda, los valores de ω que representan un cierto papel en este intervalo son los próximos a ω_0 . Tomando como nueva variable $\xi = \omega - \omega_0$, substituyamos $a(\omega)$ por $a(\omega_0)$ y desarrollemos el exponente en potencias de ξ . Prescindiendo de todas las constantes y factores de fase que no son esenciales, se obtendrá

$$E \sim \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\left(i\xi\left(\tau - t + \frac{x}{u}\right) - \frac{1}{2}i\xi^2 x \frac{u'}{u^2}\right) d\xi d\tau,$$

donde $u = u(\omega_0)$ es la velocidad de propagación (63.9) y $u' = [du/d\omega]_{\omega=\omega_0}$. Efectuando la integración respecto de ξ , es fácil reducir E a la forma siguiente:

$$E \sim \int_w^\infty e^{\mp i\eta^2} d\eta, \quad w = (x - ut)/\sqrt{(2x|u'|)}$$

(el signo del exponente depende del de u'). En cuanto a la intensidad de la onda cerca de su frente, su distribución se ajusta a la ley

$$I \sim \left| \int_w^\infty e^{i\eta^2} d\eta \right|^2.$$

Esta fórmula coincide formalmente con la que determina la distribución de intensidad cerca del límite de sombra en la difracción de Fresnel*. Cuando $w > 0$, la intensidad disminuye con monotonía al aumentar w , pero si $w < 0$, se producen oscilaciones, con disminución de la amplitud, en torno de un valor constante al que tiende para $w \rightarrow -\infty$ **.

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 60.

** A grandes distancias por delante del frente considerado, se producen los llamados «premonitarios» que se propagan con la velocidad c . Éstos corresponden a las componentes de Fourier con altas frecuencias, para las que $\epsilon \rightarrow 1$.

CAPÍTULO X

PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 65. Óptica geométrica

La condición de aplicabilidad de la óptica geométrica* supone, como es sabido, que la longitud de onda λ sea pequeña comparada con las dimensiones características del problema, l . El enlace entre la óptica geométrica y la ondulatoria se establece por el hecho de que, para $\lambda \ll l$, cualquier magnitud ϕ que describe el campo de la onda (cualquiera de las componentes de \mathbf{E} o de \mathbf{H}) se expresa por una fórmula del tipo

$$\phi = ae^{i\psi},$$

donde la amplitud a es una función lentamente variable de las coordenadas y del tiempo y la fase ψ es una cantidad grande que resulta ser función «casi lineal» de las coordenadas y del tiempo. Esta función se llama en óptica geométrica *iconal* y representa en ella un papel de gran importancia. Su derivada respecto del tiempo determina la frecuencia de la onda:

$$\partial\psi/\partial t = -\omega, \quad (65.1)$$

y las derivadas respecto de las coordenadas, el vector de onda:

$$\text{grad } \psi = \mathbf{k}, \quad (65.2)$$

y con ello la dirección de los rayos en cada punto del espacio.

Para una onda monocromática en condiciones estacionarias la frecuencia es una cantidad constante y la dependencia del iconal respecto del tiempo viene dada por un término $-\omega t$. Introduzcamos entonces en vez de ψ otra función ψ_1 (que llamaremos también iconal) mediante la igualdad

$$\psi = -\omega t + (\omega/c)\psi_1(x, y, z). \quad (65.3)$$

ψ_1 es función solamente de las coordenadas, y su gradiente es tal que

$$\text{grad } \psi_1 = \mathbf{n}, \quad (65.4)$$

donde \mathbf{n} es un vector ligado con \mathbf{k} por

$$\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c. \quad (65.5)$$

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 53.

El módulo del vector \mathbf{n} es igual al índice de refracción n del medio*. En consecuencia, la ecuación del ícono para la propagación de los rayos en un medio con índice de refracción $n(x, y, z)$, que es función dada de las coordenadas, es

$$\text{grad } \psi_1|^2 \equiv \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right)^2 = n^2. \quad (65.6)$$

La ecuación de propagación de los rayos (en condiciones estacionarias) puede obtenerse también a partir del *principio de Fermat*, según el cual para la trayectoria de un rayo entre dos puntos dados del espacio A y B , es mínima la integral $\int_A^B \mathbf{k} \cdot d\mathbf{l}$, o bien, lo que es lo mismo, la integral

$$\psi_1 = \int \mathbf{n} \cdot d\mathbf{l} = \int n dl.$$

Igualando a cero la variación de esta integral, tenemos

$$\delta\psi_1 = \int_A^B (\delta n dl + n \delta dl) = 0.$$

Sea $\delta\mathbf{r}$ el desplazamiento de la trayectoria del rayo en la variación. Se tiene entonces

$$\delta n = \delta\mathbf{r} \cdot \text{grad } n, \quad \delta dl = \mathbf{l} \cdot d\delta\mathbf{r},$$

donde \mathbf{l} es el vector unitario tangente al rayo. Substituyendo en $\delta\psi_1$ e integrando por partes el segundo término (teniendo en cuenta que en los puntos A y B es $\delta\mathbf{r} = 0$), obtendremos

$$\begin{aligned} \delta\psi_1 &= \int_A^B \delta\mathbf{r} \cdot \text{grad } n dl + \int_A^B \mathbf{l} \cdot d\delta\mathbf{r} \\ &= \int_A^B \left(\text{grad } n - \frac{d(n\mathbf{l})}{dl} \right) \cdot \delta\mathbf{r} dl = 0. \end{aligned}$$

De aquí se sigue

$$\frac{d(n\mathbf{l})}{dl} = \text{grad } n. \quad (65.7)$$

Efectuando la derivación y haciendo $dn/dl = \mathbf{l} \cdot \nabla n$, escribiremos esta ecuación en la forma

$$\frac{d\mathbf{l}}{dl} = \frac{1}{n} [\text{grad } n - \mathbf{l}(\mathbf{l} \cdot \text{grad } n)]. \quad (65.8)$$

Ésta es precisamente la ecuación que determina la forma de los rayos.

Como es sabido por geometría diferencial, la derivada $d\mathbf{l}/dl$ a lo largo de un rayo es igual a \mathbf{N}/R , donde \mathbf{N} es el versor de la normal principal y R el radio de

* En la óptica geométrica se estudian solamente medios transparentes.

curvatura del rayo. Multiplicando los dos miembros de la ecuación (65.8) por \mathbf{N} y teniendo en cuenta que \mathbf{N} y \mathbf{l} son perpendiculares entre sí, se obtendrá

$$\frac{1}{R} = \mathbf{N} \cdot \frac{\text{grad } n}{n}; \quad (65.9)$$

el rayo se curva hacia donde aumenta el índice de refracción.

La velocidad de propagación de los rayos en la óptica geométrica está dirigida a lo largo de \mathbf{l} y viene dada por la derivada

$$\mathbf{u} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}. \quad (65.10)$$

Esta velocidad se llama también *velocidad de grupo*, y la razón ω/k , *velocidad de fase*. Sin embargo, no hay que perder de vista que esta última no corresponde a la velocidad de la propagación física real de magnitud alguna.

Es fácil escribir también la ecuación que determina el cambio de intensidad de la luz a lo largo de un rayo. La intensidad I representa el valor absoluto del valor medio del vector de Poynting respecto del tiempo. Dicho vector está dirigido, junto con la velocidad de grupo, a lo largo de \mathbf{l} :

$$\bar{\mathbf{S}} = \Pi.$$

En condiciones estacionarias, la densidad media de energía del campo en cada punto del espacio no cambia con el tiempo. Por consiguiente, la ecuación de conservación de la energía nos dice que $\text{div } \bar{\mathbf{S}} = 0$, o bien

$$\text{div}(\Pi) = 0. \quad (65.11)$$

Ésta es la ecuación buscada.

Finalmente consideremos la cuestión de cómo varía a lo largo de un rayo la dirección de polarización de la luz polarizada linealmente (*S. M. Rytov*, 1938).

Como es sabido por geometría diferencial, una curva en el espacio (en este caso, un rayo) se caracteriza en cada uno de sus puntos por tres vectores unitarios perpendiculares dos a dos, a saber, el tangente \mathbf{l} , el normal principal \mathbf{N} y el binormal \mathbf{b} (que constituyen el llamado *triedro natural*). En virtud del carácter transversal de las ondas electromagnéticas, el vector \mathbf{E} (o el \mathbf{H}) se encuentra siempre en el plano normal, o sea, el determinado por \mathbf{N} , \mathbf{b} .

Supongamos que en un cierto punto del rayo la dirección de \mathbf{E} coincide con la de \mathbf{N} , es decir, que \mathbf{E} se encuentra en el plano tangente (plano \mathbf{N} , \mathbf{l}). Como es sabido, la separación de la curva respecto del plano tangente asociada con una longitud dl es un infinitésimo de orden superior (de tercer orden). Por ello es posible afirmar que, en un desplazamiento dl a lo largo del rayo, el vector \mathbf{E} se mantiene en el plano tangente inicial. Por otra parte, el plano tangente gira respecto del antiguo un ángulo $d\phi = dl/T$, donde T es el radio de torsión de la curva. A este mismo será igual, por consiguiente, el ángulo que habrá girado el vector \mathbf{E} respecto del vector \mathbf{N} en el plano normal. Así pues, en un desplazamiento a lo largo del rayo, la dirección de polarización gira en el plano normal de modo que el ángulo que forma con la

normal principal varía de acuerdo con la ecuación

$$\frac{d\phi}{dl} = 1/T. \quad (65.12)$$

En particular, si no existe torsión, es decir, cuando el rayo es una curva plana, la dirección del vector \mathbf{E} en el plano normal se mantiene constante, lo que era evidente a priori por consideraciones de simetría.

PROBLEMA

Determinar la velocidad de propagación de la luz en un medio en movimiento (respecto del observador).

Solución. Sean ω y \mathbf{k} la frecuencia y el vector de onda de la onda luminosa en el sistema de referencia en reposo K , ω' , \mathbf{k}' estas mismas cantidades en el sistema K' que se mueve respecto de K junto con el medio material (por ejemplo, un líquido) con velocidad v . En la aproximación de primer orden respecto de v/c que consideramos a continuación, el movimiento en una dirección perpendicular a \mathbf{k} no se refleja en la propagación de la luz; por ello, sin limitar la generalidad, podemos suponer que las direcciones de v y \mathbf{k} coinciden.

En el sistema K' el líquido se encuentra en reposo, por lo que ω' y \mathbf{k}' están ligados por la igualdad

$$ck' = \omega'n(\omega'). \quad (1)$$

Según las conocidas fórmulas de transformación relativistas*, tenemos, con una precisión que alcanza el primer orden respecto de v/c ,

$$\omega' = \omega - kv, \quad k' = k - \omega v/c^2.$$

Substituyendo estas expresiones en (1) y desarrollando la función $n(\omega')$, obtendremos con la misma precisión

$$k = n \frac{\omega}{c} + \frac{v\omega}{c^2} \left(1 - n \frac{d(n\omega)}{d\omega} \right), \quad (2)$$

donde $n = n(\omega)$. Para la velocidad de propagación (velocidad de grupo) se sigue de aquí

$$u = u_0 + v \left(1 - \frac{u_0^2}{c^2} \right) - \frac{vn\omega}{c} \frac{du_0}{d\omega}, \quad (3)$$

donde $u_0 = c[d(n\omega)/d\omega]^{-1}$ es la velocidad de propagación en el medio en reposo. En cuanto a la velocidad de fase, se tiene

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} \right).$$

Los dos primeros términos en (3) pueden obtenerse simplemente mediante aplicación de la fórmula relativista de composición de velocidades, mientras que el tercero representa un efecto de dispersión (estudiado por H. A. Lorentz).

§ 66. Reflexión y refracción de las ondas electromagnéticas

Consideremos la reflexión y la refracción de una onda electromagnética plana monocromática sobre la superficie plana de separación entre dos medios homogéneos**. La incidencia se produce a partir de un medio transparente (medio 1);

* Véase Teoría clásica de los campos, § 48.

** Admitimos que en ambos medios se tiene $\mu = 1$.

en cuanto al segundo medio, no supondremos por el momento que sea transparente. Designaremos las magnitudes relativas a las ondas incidente y reflejada por los índices 0 y 1, y las relativas a la onda refractada por el índice 2 (fig. 30). Como sentido positivo de la normal al plano de separación se elige el que lleva del medio 1 al medio 2 y con él haremos coincidir el del eje z .

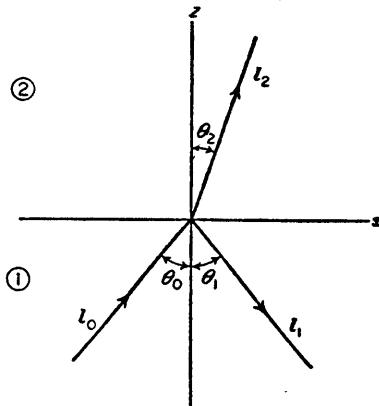


FIG. 30

Teniendo en cuenta la completa homogeneidad en el plano xy , la dependencia de la solución de las ecuaciones del campo respecto de estas coordenadas debe ser la misma en todo el espacio. Esto significa que las componentes k_x , k_y del vector de onda son las mismas para las tres ondas. De aquí se sigue, ante todo, que las direcciones de propagación de las tres ondas se encuentran en el mismo plano; elijámoslo como plano xz .

De las igualdades

$$k_{0x} = k_{1x} = k_{2x} \quad (66.1)$$

se sigue para la componente z de estos vectores:

$$\begin{aligned} k_{1z} &= -k_{0z} = -(\omega/c)\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0, \\ k_{2z} &= \sqrt{[(\omega/c)^2 \epsilon_2 - k_{0x}^2]} = (\omega/c)\sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0)}. \end{aligned} \quad (66.2)$$

El vector \mathbf{k}_0 , por definición, es real. Con él lo es también \mathbf{k}_1 . En cambio, la magnitud k_{2z} en el medio absorbente es compleja, debiéndose elegir el signo de la raíz de tal manera que sea $\text{Im } k_{2z} > 0$, de acuerdo con el hecho de que la onda refractada se amortigua a medida que penetra en el medio 2.

Si ambos medios son transparentes, de las igualdades (66.1) se siguen las conocidas leyes de la reflexión y de la refracción

$$\theta_1 = \theta_0, \quad \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (66.3)$$

Para determinar la amplitud de las ondas reflejada y refractada hay que acudir a las condiciones de contorno sobre la superficie de separación ($z = 0$). Al hacerlo consideraremos por separado dos casos: cuando el campo eléctrico \mathbf{E}_0 se encuentra en el plano de incidencia y cuando es perpendicular al mismo; de esta manera consideremos también el caso general, en el que \mathbf{E}_0 puede descomponerse en dos vectores componentes de uno y otro tipo.

Supondremos primero que \mathbf{E}_0 es perpendicular al plano de incidencia; por razones de simetría es evidente que igual ocurrirá para los campos \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 de las ondas reflejada y refractada. El vector \mathbf{H} , en cambio, se encuentra en el plano x, z . Las condiciones de contorno exigen la continuidad de $E_y = E$ y H_x *; según (63.3) $H_x = -\frac{c}{\omega} k_z E_y$.

El campo en el medio 1 es suma de los campos de las ondas incidente y reflejada, de modo que obtenemos dos ecuaciones:

$$\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2, k_{0z}(E_0 - E_1) = k_{2z}E_2.$$

Los factores exponenciales E se reducen entre sí en ambos miembros de la igualdad, puesto que k_x es el mismo (y también la frecuencia ω) en las tres ondas; a continuación entenderemos por \mathbf{E} siempre las amplitudes complejas de las ondas. La solución de estas ecuaciones conduce a las llamadas *fórmulas de Fresnel*:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{k_{0z} - k_{2z}}{k_{0z} + k_{2z}} \mathbf{E}_0 = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 - \sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0)}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 + \sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0)}} \mathbf{E}_0, \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{2k_{0z}}{k_{0z} + k_{2z}} \mathbf{E}_0 = \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 + \sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0)}} \mathbf{E}_0. \end{aligned} \quad (66.4)$$

Si ambos medios son transparentes, estas fórmulas pueden representarse mediante las relaciones (66.3) en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} \mathbf{E}_0, \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{2 \cos \theta_0 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} \mathbf{E}_0. \end{aligned} \quad (66.5)$$

De manera análoga se puede estudiar el caso en que \mathbf{E} se encuentra en el plano de incidencia; entonces conviene efectuar el cálculo para el campo magnético, que es perpendicular al plano de incidencia. Se obtienen como resultado dos fórmulas de Fresnel más:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \frac{\epsilon_2 k_{0z} - \epsilon_1 k_{2z}}{\epsilon_2 k_{0z} + \epsilon_1 k_{2z}} \mathbf{H}_0 = \frac{\epsilon_2 \cos \theta_0 - \sqrt{(\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1^2 \sin^2 \theta_0)}}{\epsilon_2 \cos \theta_0 + \sqrt{(\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1^2 \sin^2 \theta_0)}} \mathbf{H}_0, \\ \mathbf{H}_2 &= \frac{2\epsilon_2 k_{0z}}{\epsilon_2 k_{0z} + \epsilon_1 k_{2z}} \mathbf{H}_0 = \frac{2\epsilon_2 \cos \theta_0}{\epsilon_2 \cos \theta_0 + \sqrt{(\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1^2 \sin^2 \theta_0)}} \mathbf{H}_0. \end{aligned} \quad (66.6)$$

* Las condiciones de contorno para las componentes normales de \mathbf{B} y \mathbf{D} no proporcionan nada nuevo en este caso, debido a que las ecuaciones $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ resultan ser consecuencia de las ecuaciones (63.1).

Si los dos medios son transparentes, estas fórmulas se convierten en las

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)} H_0, \\ H_2 &= \frac{\operatorname{sen} 2\theta_0}{\operatorname{sen}(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} H_0. \end{aligned} \quad (66.7)$$

El *coeficiente de reflexión R* se define como razón del flujo de energía medio (respecto del tiempo) reflejado por la superficie al flujo incidente. Cada uno de estos flujos viene dado por el valor medio de la componente z del vector de Poynting (63.11) de la correspondiente onda:

$$R = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1 |\mathbf{E}_1|^2}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 |\mathbf{E}_0|^2} = \frac{|\mathbf{E}_1|^2}{|\mathbf{E}_0|^2}.$$

Para incidencia normal ($\theta_0 = 0$) los dos casos de polarización son equivalentes y el coeficiente de reflexión se obtiene por la fórmula

$$R = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \right|^2. \quad (66.8)$$

Ésta es válida tanto para un medio reflector transparente como para un medio absorbente. Si se introducen n_2 y κ_2 de acuerdo con $\sqrt{\epsilon_2} = n_2 + ik_2$, se obtendrá, por ejemplo, para luz que incide desde el vacío ($\epsilon_1 = 1$)

$$R = \frac{(n_2 - 1)^2 + \kappa_2^2}{(n_2 + 1)^2 + \kappa_2^2}. \quad (66.9)$$

Las consideraciones que siguen acerca de las fórmulas obtenidas se referirán al caso en que ambos medios son transparentes. Antes haremos la siguiente observación general. La frontera de separación entre dos medios diferentes es, en realidad, no una superficie geométrica, sino una delgada capa de transición. La validez de las fórmulas (66.1) no está ligada con ninguna hipótesis acerca del carácter de esta capa. Sin embargo, las fórmulas de Fresnel se han deducido basándose en la aplicación de las condiciones de contorno sobre la superficie de separación y suponen que la capa de transición tiene un grosor δ que es pequeño comparado con la longitud de onda λ . De ordinario el grosor δ es comparable con las distancias interatómicas, en cualquier caso pequeñas comparadas con λ (de lo contrario, sería del todo imposible la descripción macroscópica del campo); por ello, también la condición $\lambda \gg \delta$ se cumple ordinariamente. Ahora bien, en el caso límite opuesto, el fenómeno de la refracción tendría un carácter por completo diferente. Cuando $\delta \gg \lambda$ se cumplen las condiciones de aplicabilidad de la óptica geométrica (λ pequeña comparada con

las dimensiones de las heterogeneidades del medio). Por consiguiente, en el presente caso sería posible considerar la propagación de la onda como la propagación de rayos que experimentan refracción en la capa de transición, pero que la atraviesan sin ser reflejados. En otras palabras, el coeficiente de reflexión sería igual a cero.

Volvamos a las fórmulas de Fresnel. En la reflexión por un medio transparente, los coeficientes de proporcionalidad entre E_1 , E_2 y E_0 en dichas fórmulas son reales*. Esto significa que la fase de la onda o bien no varía, o bien experimenta un salto igual a π , según sea el signo de estos coeficientes. En particular, la fase de la onda refractada coincide siempre con la de la onda incidente. La reflexión, en cambio, puede ir acompañada de un cambio de fase**. Así, en la incidencia normal, la fase de la onda no varía si $\epsilon_1 > \epsilon_2$. Pero si $\epsilon_2 > \epsilon_1$, los vectores E_1 y E_0 tienen signos opuestos, es decir, se produce un cambio de la fase de la onda igual a π .

Los coeficientes de reflexión para incidencia oblicua vienen dados, según (66.5) y (66.7), por las fórmulas

$$R_{\perp} = \frac{\operatorname{sen}^2(\theta_2 - \theta_0)}{\operatorname{sen}^2(\theta_2 + \theta_0)}, \quad R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_2 - \theta_0)}{\operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_0)}. \quad (66.10)$$

Aquí y en lo que sigue, los índices \perp y \parallel designan los casos en que el campo E es, respectivamente, perpendicular o paralelo al plano de incidencia. Haremos notar la siguiente simetría: las expresiones (66.10) no cambian si se permutan entre sí θ_2 y θ_0 (en cambio, las fases de las ondas reflejadas, de acuerdo con las fórmulas (66.5) y (66.7), varían en π). En otras palabras, el coeficiente de reflexión de una onda que incide desde el medio 1 formando un ángulo θ_0 , es igual al coeficiente de reflexión de una onda que incide desde el medio 2 formando el ángulo θ_2 .

La luz reflejada que incide formando un ángulo θ_0 tal que $\theta_0 + \theta_2 = \pi/2$ (con lo que los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí) posee una notable propiedad. Designemos este valor por θ_p ; haciendo $\operatorname{sen} \theta_p = \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = \cos \theta_2$ y utilizando la ley de refracción (66.3), obtendremos:

$$\operatorname{tg} \theta_p = \sqrt{(\epsilon_2/\epsilon_1)}. \quad (66.11)$$

Cuando $\theta_0 = \theta_p$, tenemos $\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2) = \infty$ y R_{\parallel} se anula. En consecuencia, para una dirección arbitraria de polarización de la luz que incide formando este ángulo, la luz reflejada estará polarizada de tal modo que el campo eléctrico en ella es perpendicular al plano de incidencia. Esta misma polarización poseerá también la luz reflejada cuando la incidente es luz natural; ninguna componente cuya polarización no sea precisamente ésta será reflejada. El ángulo θ_p se llama *ángulo de polarización total* o *ángulo de Brewster*. Hay que hacer notar que mientras la reflexión puede

* Dejamos a un lado por el momento el caso de la llamada reflexión total (véase más adelante).

** La reflexión por un medio absorbente conduce, en general, a que se produzca la polarización elíptica. Las expresiones explícitas para las relaciones de las amplitudes y de las fases entre las tres ondas son en tal caso muy complicadas. Se pueden encontrar en el libro de J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, capítulo IX.

conducir a la polarización total de la luz natural, en la luz refractada no se consigue la polarización total, cualquiera que sea el ángulo de incidencia.

La reflexión y refracción de la luz polarizada conduce siempre de nuevo a luz polarizada linealmente, pero con una dirección de polarización que, en general, no coincide con la de la luz incidente. Sea γ_0 el ángulo formado por E_0 y el plano de incidencia, y γ_1 y γ_2 los ángulos análogos para las ondas reflejadas y refractada. Mediante las fórmulas (66.5) y (66.7) es fácil obtener las relaciones

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma_1 &= - \frac{\cos(\theta_0 - \theta_2)}{\cos(\theta_0 + \theta_2)} \operatorname{tg} \gamma_0, \\ \operatorname{tg} \gamma_2 &= \cos(\theta_0 - \theta_2) \operatorname{tg} \gamma_0. \end{aligned} \quad (66.12)$$

Los ángulos γ_0 , γ_1 , γ_2 coinciden para todos los ángulos de incidencia tan sólo en los casos evidentes en que $\gamma_0 = 0$ y $\gamma_0 = \pi/2$; coinciden también para las incidencias normal ($\theta_0 = \theta_2 = 0$) y tangencial ($\theta_0 = \pi/2$), si bien en el último caso no existe onda refractada. En todos los demás casos, de (66.12) se siguen (teniendo en cuenta que $0 < \theta_0, \theta_2 < \pi/2$ y suponiendo que $0 < \gamma_0 < \pi/2$, $0 < \gamma_1, \gamma_2 < \pi$) las desigualdades

$$\gamma_1 > \gamma_0, \quad \gamma_2 < \gamma_0.$$

Así pues, en la reflexión, la dirección de E se aparta del plano de incidencia, y en la refracción se acerca a él.

La comparación de las dos fórmulas (66.10) pone de manifiesto que, cualquiera que sea el ángulo de incidencia (con las únicas excepciones de $\theta_0 = 0$ y $\theta_0 = \pi/2$), se tendrá

$$R_{\parallel} < R_{\perp}.$$

En consecuencia, por ejemplo, cuando incide luz natural la luz reflejada está polarizada parcialmente, predominando la dirección del campo eléctrico que es perpendicular al plano de incidencia. También la luz refractada estará polarizada en parte, si bien en este caso prepondera la dirección de E en el plano de incidencia.

El carácter de la dependencia de R_{\parallel} y R_{\perp} respecto del ángulo de incidencia es esencialmente distinto. El coeficiente R_{\perp} crece con monotonía al crecer θ_0 , partiendo del valor (66.8) para $\theta_0 = 0$. En cuanto al coeficiente R_{\parallel} , que toma el mismo valor (66.8) para $\theta_0 = 0$, al aumentar θ_0 decrece al principio, se anula para $\theta_0 = \theta_p$ y tan sólo a partir de este punto empieza a crecer con monotonía.

En todo esto hay que distinguir dos casos esencialmente distintos. Si la reflexión se produce, como suele decirse, sobre el medio «ópticamente más denso», es decir, si $\epsilon_2 > \epsilon_1$, el crecimiento de R_{\parallel} y R_{\perp} se mantiene hasta el valor $\theta_0 = \pi/2$ («incidencia tangencial»), cuando ambos alcanzan el valor 1. Pero si el medio reflector es el «ópticamente menos denso», $\epsilon_2 < \epsilon_1$, ambos coeficientes toman el valor 1 ya para el ángulo de incidencia $\theta_0 = \theta_r$, donde θ_r se determina por la igualdad

$$\operatorname{sen} \theta_r = \sqrt{(\epsilon_2/\epsilon_1)} = n_2/n_1 \quad (66.13)$$

y se llama *ángulo de reflexión total*. Cuando $\theta_0 = \theta_r$, el ángulo de reflexión $\theta_2 = \pi/2$, la onda refractada se propaga paralelamente a la superficie de separación.

La reflexión para ángulos $\theta_0 > \theta_r$ sobre el medio ópticamente menos denso exige un análisis particular. En este caso k_{2z} (véase (66.2)) es puramente imaginario, es decir, el campo en el medio refractor se amortigua. El amortiguamiento de la onda a medida que penetra en el medio, cuando no existe en él una verdadera absorción (es decir, una disipación de energía), significa que el flujo de energía del primer medio al segundo es nulo en promedio (por un simple cálculo es fácil comprobar que el vector \mathbf{S} del flujo promedio de energía en el segundo medio tiene, en efecto, tan sólo la componente x). En otras palabras, toda la energía que incide sobre la superficie de separación se refleja de nuevo hacia el primer medio, es decir, los coeficientes de reflexión son

$$R_{\perp} = R_{\parallel} = 1.$$

Este fenómeno se llama *reflexión total**. Esta última igualdad para R_{\perp} y R_{\parallel} puede obtenerse también directamente, claro está, mediante las fórmulas de Fresnel (66.4) y (66.6).

Cuando $\theta_0 > \theta_r$, los coeficientes de proporcionalidad entre \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_0 pasan a ser cantidades complejas de la forma $(a - ib)/(a + ib)$. Las magnitudes R_{\perp} y R_{\parallel} , en cambio, vienen dadas por los cuadrados de los módulos de estos coeficientes, que son iguales a la unidad. Estas fórmulas, sin embargo, permiten determinar no sólo la razón de los valores absolutos del campo en las ondas reflejada e incidente, sino también la diferencia entre sus fases. Para ello hay que representar dichos campos en la forma

$$E_{1\perp} = e^{-i\delta_{\perp}} E_{0\perp}, \quad E_{1\parallel} = e^{-i\delta_{\parallel}} E_{0\parallel}.$$

Tenemos**

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta_{\perp} &= \sqrt{(\epsilon_1 \operatorname{sen}^2 \theta_0 - \epsilon_2)}/\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta_{\parallel} &= \sqrt{(\epsilon_1^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0 - \epsilon_1 \epsilon_2)}/\epsilon_2 \cos \theta_0. \end{aligned} \quad (66.14)$$

Así pues, la reflexión total va acompañada de un cambio de fase de la onda que es diferente, en general, para componentes del campo paralela y perpendicular al plano de incidencia. Por ello, en la reflexión de una onda polarizada en un plano que no coincide con el plano de incidencia, la onda reflejada estará polarizada elípticamente. Para la diferencia de fases $\delta = \delta_{\perp} - \delta_{\parallel}$ se obtiene fácilmente la expresión

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{\cos \theta_0 \sqrt{(\epsilon_1 \operatorname{sen}^2 \theta_0 - \epsilon_2)}}{\sqrt{\epsilon_1} \operatorname{sen}^2 \theta_0}. \quad (66.15)$$

* Recordaremos que el coeficiente de reflexión es siempre igual a la unidad en la reflexión por un medio con valor de ϵ real, pero negativo. Tampoco en un tal medio se produce verdadera absorción, pero la onda no puede penetrar en él.

** Si $(a - ib)/(a + ib) = e^{-i\delta}$, se tendrá $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = b/a$.

Esta diferencia se anula solamente cuando $\theta_0 = \theta_r$ o cuando $\theta_0 = \pi/2$.

PROBLEMAS

1. Hallar la ley según la cual el coeficiente de reflexión tiende a 1 cerca del ángulo de reflexión total.

Solución. Supongamos $\theta_0 = \theta_r - \delta$, donde δ es una cantidad pequeña, y desarrollemos en las fórmulas (66.10) $\sin \theta_0$ y $\cos \theta_0$ en potencias de δ . El resultado que se obtiene es:

$$R_{\perp} = 1 - 4\sqrt{(2\delta)(n^2 - 1)^{-1}},$$

$$R_{\parallel} = 1 - 4\sqrt{(2\delta)n^2(n^2 - 1)^{-1}},$$

donde $n^2 = \epsilon_1/\epsilon_2 > 1$. Las derivadas $dR/d\delta$ tienden a infinito como $\delta \rightarrow 0$.

2. Hallar el coeficiente de reflexión para la luz que incide casi tangencialmente desde el vacío sobre la superficie de un cuerpo con un valor de ϵ próximo a 1.

Solución. Las fórmulas (66.10) dan el mismo coeficiente de reflexión:

$$R_{\perp} \cong R_{\parallel} \cong [\phi_0 - \sqrt{(\phi_0^2 + \epsilon - 1)}]^{1/2}/(\epsilon - 1)^2,$$

donde $\phi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$.

3. Determinar el coeficiente de reflexión para una onda que incide desde el vacío sobre la frontera de un medio cuyos valores de ϵ y μ son diferentes de la unidad.

Solución. Cálculos por completo análogos a los efectuados en el texto conducen al resultado

$$R_{\perp} = \left| \frac{\mu \cos \theta_0 - \sqrt{(\epsilon \mu - \sin^2 \theta_0)}}{\mu \cos \theta_0 + \sqrt{(\epsilon \mu - \sin^2 \theta_0)}} \right|^2,$$

$$R_{\parallel} = \left| \frac{\epsilon \cos \theta_0 + \sqrt{(\epsilon \mu - \sin^2 \theta_0)}}{\epsilon \cos \theta_0 - \sqrt{(\epsilon \mu - \sin^2 \theta_0)}} \right|^2.$$

4. Una capa planoparalela de substancia 2 se encuentra entre el vacío (medio 1) y un medio arbitrario 3. Desde el vacío incide sobre dicha capa luz polarizada en el plano de incidencia (o perpendicularmente al mismo). Expresar el coeficiente de reflexión R de la capa en función del coeficiente de reflexión correspondiente a incidencia de la luz sobre el medio semiinfinito 2 o 3.

Solución. Designemos por A_0 y A_1 las amplitudes del campo (E o H según cuál de estos dos vectores sea paralelo al plano de la capa) en las ondas incidente y reflejada. El campo en la capa se compone de una onda refractada (amplitud A_2) y de una onda reflejada en la superficie de separación 2-3 (amplitud A'_2). La condición de contorno sobre la superficie 1-2 da una igualdad de la forma

$$A'_2 = a(A_1 - r_{12}A_0) \quad (1)$$

donde a y r_{12} son constantes. En la reflexión por el medio semiinfinito 2 no existe la onda A'_2 , de modo que (1) da $r_{12} = A_1/A_0$, es decir, r_{12} es la amplitud de reflexión para este caso. Una ecuación más puede obtenerse a partir de (1) permutando entre si A_1 y A_0 y substituyendo A'_2 por A_2 , lo que corresponde simplemente a cambiar el signo de la componente z del vector de onda:

$$A = a(A_0 - r_{12}A_1). \quad (2)$$

En el medio 3 se tiene tan sólo la onda transmitida. Para su amplitud se tienen las condiciones

$$A_2 e^{i\psi} = aA_3, \quad A_2' e^{-i\psi} = -a r_{32} A_3 \quad (3)$$

(análogas a las condiciones (1), (2) con $A_1 = 0$); los factores exponenciales tienen en cuenta el cambio de fase de la onda al atravesar el espesor h de la capa, siendo

$$\psi = (\omega h/c) \sqrt{(\epsilon_2 - \sin^2 \theta_0)}. \quad (4)$$

Eliminando en (3) A_3 , tenemos

$$A_2'e^{-i\psi} = r_{23}A_2e^{i\psi}, \quad (5)$$

$$(r_{23} = -r_{32}).$$

A partir de las ecuaciones (1), (2), (5) se encuentra la amplitud reflejada por la capa:

$$r = \frac{A_1}{A_0} = \frac{r_{12}e^{-2i\psi} + r_{23}}{e^{-2i\psi} + r_{12}r_{23}}, \quad (6)$$

(el coeficiente de reflexión es $R = |r|^2$). El sentido de la constante r_{23} se sigue del hecho de que, para $h = 0$, r debe coincidir con la amplitud de reflexión r_{13} determinada por el medio semiinfinito (3); de aquí se deduce

$$r_{23} = (r_{12} - r_{13})/(r_{12}r_{13} - 1). \quad (7)$$

Las fórmulas (6), (7) resuelven el problema planteado. Subrayaremos que al deducirlas no hemos hecho hipótesis alguna acerca de las propiedades de los medios 2 y 3, que pueden ser transparentes o absorbentes.

Si los medios 2 y 3 son transparentes, todas las magnitudes ψ , r_{12} , r_{13} son reales y r_{23} representa la amplitud de reflexión sobre la superficie de separación entre los medios semiinfinitos 2 y 3. De (6) se sigue entonces

$$R = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \operatorname{sen}^2 \psi}{(r_{12}r_{23} + 1)^2 - 4r_{12}r_{23} \operatorname{sen}^2 \psi}. \quad (8)$$

Al variar ψ , esta magnitud varía entre los límites

$$[(r_{12} + r_{23})/(r_{12}r_{23} + 1)]^2 \text{ y } [(r_{12} - r_{23})/(r_{12}r_{23} - 1)]^2.$$

En el caso en que la luz incide normalmente es $r_{12} = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$, y relaciones análogas se tienen entre r_{13} y r_{23} . Si $n_2^2 = n_1 n_3$, será $r_{12} = r_{23}$ y mediante una elección adecuada del grosor de la capa puede anularse R .

Si el medio 3 es el vacío, se tendrá $r_{13} = 0$, $r_{23} = -r_{12}$ y de (6) se sigue

$$r = \frac{r_{12}(e^{-2i\psi} - 1)}{e^{-2i\psi} - r_{12}^2} = -\frac{\operatorname{senh} i\psi}{\operatorname{senh} [i\psi + \ln (-r_{12})]}. \quad (9)$$

Si también el medio 2 es transparente,

$$R = \frac{4R_{12} \operatorname{sen}^2 \psi}{(1 - R_{12})^2 + 4R_{12} \operatorname{sen}^2 \psi}.$$

El coeficiente de transmisión D a través de la capa (desde el vacío hasta el vacío) coincide con $1 - R$ tan sólo si el medio 2 es transparente. En caso contrario, para calcular D hay que partir de las ecuaciones (1)-(3), haciendo en ellas $r_{32} = r_{12}$. La «amplitud de transmisión» d es igual a:

$$d = \frac{A_3}{A_0} = \frac{1 - r_{12}^2}{e^{-i\psi} - r_{12}e^{i\psi}}, \quad (10)$$

y el coeficiente de transmisión $D = |d|^2$.

5. Determinar los coeficientes de reflexión y transmisión para luz que incide normalmente sobre una placa con una permitividad compleja ϵ muy grande.

Solución. En este caso

$$r_{12} = (1 - \sqrt{\epsilon})/(1 + \sqrt{\epsilon}) \approx -(1 - 2/\sqrt{\epsilon}),$$

y según la fórmula (9) del problema anterior

$$r = -[1 - (2/\sqrt{\epsilon}) \operatorname{ctgh} i\psi]^{-1}, \quad \psi = \omega h \sqrt{\epsilon}/c.$$

Si la placa es tan delgada que $\omega h/c \ll 1/|\epsilon|$, se puede escribir

$$r = -[1 + 2ic/\epsilon \omega h]^{-1}.$$

Entonces cabe todavía distinguir dos casos:

$$\text{para } 1/|\epsilon| \ll \omega h/c \ll 1/\sqrt{|\epsilon|}, \quad R = 1 - 4c\epsilon''/\omega h|\epsilon|^2,$$

$$\text{para } \omega h/c \ll 1/|\epsilon|, \quad R = \omega^2 h^2 |\epsilon|^2 / 4c^2.$$

Para el coeficiente de transmisión tenemos, según la fórmula (10),

$$\begin{aligned} \text{para } \omega h/c \sim 1/\sqrt{|\epsilon|}, & \quad d = -2/\sqrt{\epsilon} \operatorname{senh} i\psi, \\ \text{para } \omega h/c \ll 1/\sqrt{|\epsilon|}, & \quad d = (1 - i\epsilon\omega h/2c)^{-1}. \end{aligned}$$

En el último caso, cabe de nuevo distinguir

$$\begin{aligned} \text{y para } 1/|\epsilon| \ll \omega h/c \ll 1/\sqrt{|\epsilon|}, & \quad D = 4c^2/\omega^2 h^2 |\epsilon|^2, \\ \text{para } \omega h/c \ll 1/|\epsilon|, & \quad D = 1 - \epsilon'' \omega h/c. \end{aligned}$$

§ 67. Impedancia superficial de los metales

La permitividad de los metales es, en valor absoluto, grande comparada con 1 para frecuencias no demasiado elevadas (cuando $\omega \rightarrow 0$ tiende a infinito como $1/\omega$). En estas condiciones, la «longitud de onda» $\delta \sim c/\omega\sqrt{|\epsilon|}$ en un metal* es pequeña comparada con la longitud de onda $\lambda \sim c/\omega$ en el vacío. Si además δ (pero no necesariamente λ) es también pequeña comparada con los radios de curvatura de la superficie del metal, cabe valerse de esta circunstancia para simplificar considerablemente el problema de la reflexión de ondas electromagnéticas arbitrarias por un metal.

Que δ sea pequeña significa que las derivadas de las componentes del campo en el interior del metal en la dirección de la normal a la superficie son grandes comparadas con las derivadas relativas a las direcciones tangenciales. El campo dentro del metal cerca de la superficie se puede considerar, por lo tanto, como el campo de una onda plana y, en consecuencia, los campos E_t y H_t están ligados entre sí por la relación

$$E_t = \sqrt{(\mu/\epsilon)} H_t \times n, \quad (67.1)$$

donde n es la normal a la superficie orientada hacia el interior del metal. Dado que, por otra parte, E_t y H_t son continuos, esa misma relación debe ligar los valores del campo fuera del metal sobre su superficie. La igualdad (67.1) puede utilizarse (según probó M. A. Leontovich, 1948) como condición de contorno para determinar el campo fuera del conductor. De esta manera el problema electromagnético exterior puede resolverse sin necesidad alguna de considerar el campo dentro del metal.

La magnitud $\sqrt{\mu/\epsilon}$ se llama *impedancia superficial* del metal; la designaremos por $\zeta = \zeta' + i\zeta''$ **.

$$\zeta = \sqrt{(\mu/\epsilon)}. \quad (67.2)$$

* Los valores de $\sqrt{\epsilon(\omega)}$ grandes casi siempre resultan ser complejos. En estas condiciones, el campo electromagnético se amortigua al penetrar en el cuerpo, de modo que la «longitud de onda» en él es a la vez la «profundidad de penetración» del campo. Si $\epsilon(\omega)$ se expresa en función de la conductibilidad σ (según (58.9)), δ coincide con la profundidad de penetración introducida en el § 45.

** De ordinario se llama impedancia superficial a una magnitud que difiere de ζ en el factor $4\pi/c$; sin embargo, consideramos inconveniente esta designación.

En el dominio de frecuencias para las que ϵ se expresa en función de la conductibilidad del metal ordinaria, tenemos

$$\zeta = (1 - i)\sqrt{(\omega\mu/8\pi\sigma)}. \quad (67.3)$$

El valor medio (respecto del tiempo) del flujo de energía a través de la superficie del metal es

$$\bar{\mathbf{S}} = (c/8\pi)\text{Re}(\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*) = c\zeta'|\mathbf{H}_t|^2\mathbf{n}/8\pi. \quad (67.4)$$

Este flujo representa la energía que penetra en el interior del mismo y se disipa en él. Se ve por esto, en particular, que debe tenerse

$$\zeta' > 0. \quad (67.5)$$

Esta desigualdad fija el signo de la raíz en (67.2).

Al aumentar la frecuencia, la profundidad de penetración δ es comparable en orden de magnitud con la longitud del libre camino medio l de los electrones de conductibilidad*. En tal caso la heterogeneidad espacial del campo hace imposible su descripción macroscópica mediante la permitividad ϵ (la existencia de fenómenos debidos a este hecho fue indicada ya por *H. London*, 1940). Es curioso que no se viola con esto todavía la condición $v/l \gg \omega$ (v es la velocidad de los electrones de conductibilidad) que garantiza la ausencia de dispersión de la conductibilidad, la cual conserva su valor σ correspondiente a campo constante.

Es muy importante notar que una condición de contorno de la forma

$$\mathbf{E}_t = \zeta\mathbf{H}_t \times \mathbf{n} \quad (67.6)$$

es también válida para tales frecuencias. Además, el campo dentro del metal y cerca de su superficie se puede considerar de nuevo como una onda plana, si bien no cabe describirlo ahora por las ecuaciones macroscópicas de Maxwell ordinarias. En dicha onda los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} deben estar ligados entre sí por una relación lineal, y la única forma posible de relación de este tipo entre el vector axial \mathbf{H} y el vector polar \mathbf{E} es la (67.6). El coeficiente ζ en esta relación es la única cantidad, característica de las propiedades del metal, que hay que conocer para obtener la solución del problema electromagnético exterior.

Si la frecuencia sigue aumentando (de ordinario en la región del infrarrojo), nuevamente pasa a ser posible una descripción macroscópica del campo y cobra otra vez sentido el concepto de ϵ . La causa de este fenómeno consiste en que al absorber un cuanto $\hbar\omega$ grande, un electrón de conductibilidad adquiere una gran energía, con lo cual disminuye la longitud de su libre camino medio, de forma que de nuevo se cumpla la desigualdad $l \ll \delta$. La impedancia ζ vuelve a ser una mag-

* El libre camino medio depende fundamentalmente de la temperatura del metal. De hecho se trata casi siempre de temperaturas muy bajas, en el dominio del helio, mientras que los fenómenos considerados se manifiestan en el intervalo de las ondas de radio ultracortas.

nitud inversamente proporcional a $\sqrt{\epsilon}$ *. En esta región de frecuencias, $\epsilon(\omega)$ tiene una parte real y negativa grande y una parte imaginaria pequeña. La desigualdad $l \ll \delta$ es la condición para que tengan sentido macroscópico las dos magnitudes ϵ' y ϵ'' . Sin embargo, para que tuviera un sentido macroscópico únicamente la cantidad grande ϵ' , basta que se cumpla la condición más débil $v/\omega \ll \delta$, donde v es la velocidad de los electrones de conductibilidad en el metal (el hecho de que se cumpla permite prescindir de la heterogeneidad espacial del campo al considerar el movimiento de los electrones).

La desigualdad $\zeta' > 0$ es válida para la parte real de la impedancia en cualquier caso. Pero si se cumple la fórmula (67.2), es posible llegar a alguna conclusión acerca del signo de la parte imaginaria ζ'' . Así, si la dispersión de ϵ es más importante que la de μ (es decir, si μ se puede considerar como una magnitud real), de $\epsilon'' > 0$ se sigue que $\zeta'\zeta'' < 0$, y dado que siempre se tiene $\zeta' > 0$, necesariamente será

$$\zeta'' < 0.$$

Éste es el caso más general. Pero si la dispersión de ζ viene determinada por la dispersión de μ , siguiendo el mismo camino se halla que $\zeta'' > 0$.

El concepto de impedancia puede aplicarse también a los superconductores. Característica fundamental de estos últimos es la existencia en ellos de una profundidad de penetración δ pequeña incluso en el caso estático ($\omega = 0$). Cuando las frecuencias no son muy elevadas, cabe admitir que la distribución del campo magnético coincide con la del campo estático. Para determinar el campo eléctrico escribiremos la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mathbf{H}/c,$$

Dirijamos el eje z en el sentido de la normal exterior a la superficie del superconductor. Prescindiendo de las derivadas en las direcciones tangenciales frente a las derivadas respecto de z , que son grandes, tenemos

$$\partial E_x / \partial z = i\omega H_y / c,$$

(y análogamente para E_y). Integrando esta igualdad con relación a z en el interior del cuerpo, resulta

$$E_x(0) = \frac{i\omega}{c} \int_{-\infty}^0 H_y dz.$$

* Sin embargo, hay que recordar que solamente es posible valerse de la igualdad (67.6) como condición de contorno en tanto $|\epsilon|$ sea grande (es decir, ζ pequeño); esta condición, en cualquier caso, deja de cumplirse ya para las frecuencias ópticas. Suponemos que es $\mu \sim 1$; entonces a valores $|\epsilon|$ grandes corresponden valores ζ pequeños. Si $\mu \gg 1$, la desigualdad $\delta \ll \lambda$ necesaria para la aplicabilidad de la condición de contorno (67.6) significa que debe ser $\sqrt{\mu\epsilon} \gg 1$; entonces puede muy bien ocurrir que $\zeta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ no sea pequeño.

$E_x(0)$ es el valor de E_x para $z = 0$, es decir, sobre la superficie del cuerpo. Definiremos cuantitativamente la profundidad de penetración de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^0 H_y dz = \delta H_y(0). \quad (67.7)$$

Entonces

$$E_x(0) = i\omega \delta H_y(0)/c.$$

Comparando con la condición de contorno (67.6), se encuentra que la impedancia de un superconductor (en el intervalo considerado de frecuencias no demasiado elevadas*) viene dada por la fórmula

$$\zeta = -i\omega \delta/c. \quad (67.8)$$

Esta expresión representa el primer término del desarrollo de $\zeta(\omega)$ en serie de potencias de la frecuencia, desarrollo que, por consiguiente, comienza en los superconductores con un término proporcional a ω . El término siguiente del desarrollo es proporcional a ω^2 y real; éste es precisamente el primer término del desarrollo de ζ' .

La impedancia $\zeta(\omega)$, considerada como función de la variable compleja ω , posee propiedades en buena medida análogas a las de la función $\epsilon(\omega)$ (*V. L. Ginzburg*, 1954). La condición de contorno que para una onda monocromática tiene la forma (67.6), en el caso general hay que interpretarla como relación funcional

$$\mathbf{E}_t = \zeta \mathbf{H}_t \times \mathbf{n}, \quad (67.9)$$

que expresa el valor de \mathbf{E}_t en determinado instante en función de los valores de \mathbf{H}_t en todos los instantes anteriores (véase § 58). Al igual que en el § 62, de aquí se sigue que la función $\zeta(\omega)$ carece de puntos singulares en el semiplano superior de ω , incluido el eje real (salvo únicamente el punto $\omega = 0$). Además, la condición de que \mathbf{E}_t sea real cuando lo es \mathbf{H}_t conduce a la relación

$$\zeta(-\omega^*) = \zeta^*(\omega).$$

Finalmente, dado que la disipación de la energía viene determinada por la parte real de la función $\zeta(\omega)$ (y no por la imaginaria, como en el caso de $\epsilon(\omega)$), $\zeta'(\omega)$ será positiva y no se anula para ningún valor real de ω , con la única excepción del valor $\omega = 0$. Argumentos análogos a los presentados en el § 62, permiten así llegar a la conclusión de que

$$\operatorname{Re} \zeta(\omega) > 0$$

también en todo el semiplano superior. De esto se sigue, en particular, que $\zeta(\omega)$ carece de ceros en el semiplano superior.

El hecho de que $\zeta(\omega)$ carezca de puntos singulares en el semiplano superior conduce de nuevo a las fórmulas de Kramers-Kronig. Una fórmula particularmente

* Se trata en la práctica de frecuencias que llegan hasta la región de las ondas de radio centimétricas.

importante en este caso es

$$\zeta''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta'(x) - 1}{x - \omega} dx.$$

Utilizando la propiedad de que la función $\zeta'(x)$ es par, esta fórmula puede escribirse también en la forma

$$\zeta''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\zeta'(x) - 1}{x - \omega} dx + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\zeta'(x) - 1}{x + \omega} dx$$

o bien

$$\zeta''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\zeta'(x)}{x^2 - \omega^2} dx \quad (67.10)$$

(se puede prescindir de la unidad en el numerador del integrando, dado que el valor principal de la integral de $1/(x^2 - \omega^2)$ es en cualquier caso igual a cero).

Todo lo dicho acerca de la función $\zeta(\omega)$ vale también, claro está, para la función recíproca $1/\zeta(\omega)$; el operador ζ^{-1} expresa $\mathbf{H}_t \times \mathbf{n}$ en función de \mathbf{E}_t . En particular, en vez de (67.10) tendremos

$$[\zeta^{-1}(\omega)]'' = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{[\zeta^{-1}(x)]'}{x^2 - \omega^2} dx. \quad (67.11)$$

Para valores de ζ pequeños esta fórmula puede resultar de manejo más cómodo que la (67.10). Tal como la hemos escrito, sin embargo, no es aplicable a los superconductores, en los que ζ^{-1} tiene, según (67.8), un polo en $\omega = 0$. Un simple cambio formal del razonamiento (véase el paso de (62.9) a (62.11)) conduce en tal caso a la fórmula

$$[\zeta^{-1}(\omega)]'' = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{[\zeta^{-1}(x)]'}{x^2 - \omega^2} dx + \frac{c}{\omega\delta}. \quad (67.12)$$

Para terminar este párrafo, y como ejemplo de aplicación del concepto de impedancia, consideraremos la reflexión de una onda electromagnética plana que incide desde el vacío sobre la superficie plana de un metal cuya impedancia superficial es ζ . Si el vector \mathbf{E} está polarizado perpendicularmente al plano de incidencia, la condición de contorno (67.6) da

$$\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 = \zeta(\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_1) \cos \theta_0 = \zeta(\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1) \cos \theta_0$$

(los símbolos son los mismos que en el § 66). De aquí se deduce, teniendo en cuenta que ζ es pequeño,

$$\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0 = -(1 - 2\zeta \cos \theta_0),$$

como también el coeficiente de reflexión

$$R_{\perp} = 1 - 4\zeta' \cos \theta_0. \quad (67.13)$$

Pero si \mathbf{E}_0 se encuentra en el plano de incidencia, la condición de contorno la escribiremos en la forma $\zeta \mathbf{H}_t = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_t$, es decir,

$$\zeta(H_0 + H_1) = (E_0 - E_1) \cos \theta_0 = (H_0 - H_1) \cos \theta_0,$$

de donde se deduce el coeficiente de reflexión

$$R_{\parallel} = \left| \frac{\cos \theta_0 - \zeta}{\cos \theta_0 + \zeta} \right|^2. \quad (67.14)$$

Para ángulos de incidencia no demasiado próximos al valor $\pi/2$, es

$$R_{\parallel} = 1 - 4\zeta' \sec \theta_0. \quad (67.15)$$

En cambio, si el ángulo $\phi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0 \ll 1$, entonces

$$R_{\parallel} = \left| \frac{\phi_0 - \zeta}{\phi_0 + \zeta} \right|^2. \quad (67.16)$$

Esta expresión presenta para $\phi_0 = |\zeta|$ un mínimo igual a

$$(|\zeta| - \zeta')/(|\zeta| + \zeta').$$

Salvo el caso particular (67.16), el coeficiente de reflexión por una superficie con un valor de ζ pequeño es próximo a la unidad. Una superficie para la que $\zeta \rightarrow 0$ (o, como suele decirse, una superficie «conductora perfecta») es a la vez un «reflector perfecto». La condición de contorno sobre una tal superficie se escribe simplemente $\mathbf{E}_t = 0$, análoga a la condición para el campo electrostático sobre la superficie de un conductor. Pero a diferencia del caso de un campo constante, en un campo variable esta condición trae consigo automáticamente el que el campo magnético cumpla también una determinada condición. A saber, en virtud de la ecuación $(i\omega/c)\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{E}$, de la ecuación $\mathbf{E}_t = 0$ sobre la superficie se sigue la igualdad $H_n = 0$. Así pues, sobre una superficie «conductora perfecta» en un campo electromagnético variable se anula la componente normal del campo magnético. En este sentido dicha superficie es similar a la superficie de un superconductor en un campo magnético constante.

PROBLEMA

Determinar la intensidad de la radiación térmica (de frecuencia dada) emitida por una superficie plana de pequeña impedancia.

Solución. Según la ley de Kirchhoff, la intensidad dI de radiación térmica emitida (en el elemento de ángulo sólido $d\Omega$) por una superficie arbitraria, está ligada con la intensidad de la radiación emitida por la superficie de un cuerpo absolutamente negro dI_0 por la relación $dI = (1 - R) dI_0$, donde R es el

coeficiente de reflexión de la superficie dada correspondiente a la luz natural. Calculando $R = \frac{1}{2}(R_{\perp} + R_{\parallel})$ mediante las fórmulas (67.13) y (67.14) y teniendo en cuenta la isotropía de la radiación que emite la superficie de un cuerpo negro ($dI_0 = I_0 d\sigma / 2\pi$), obtendremos

$$I = 2I_0 \zeta' \int_0^{i\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{\cos^2 \theta + 2\zeta' \cos \theta + \zeta'^2 + \zeta''^2} \right\} \cos \theta \sin \theta d\theta.$$

Efectuando la integración y prescindiendo de los términos de orden superior respecto de ζ , se encuentra

$$\frac{I}{I_0} = \zeta' \left[\ln \frac{1}{\zeta'^2 + \zeta''^2} + 1 - \frac{2\zeta'}{\zeta''} \operatorname{arctg} \frac{\zeta''}{\zeta'} \right]$$

En particular, para un metal con una impedancia determinada por la fórmula (67.3), se tiene ($\mu = 1$)

$$\frac{I}{I_0} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \left[\ln \frac{4\pi\sigma}{\omega} + 1 - \frac{1}{2}\pi \right].$$

§ 68. Propagación de las ondas en un medio no homogéneo

Consideremos la propagación de las ondas electromagnéticas en un medio eléctricamente no homogéneo (pero isótropo). En las ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mathbf{H}/c, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\epsilon\omega \mathbf{E}/c$$

(suponemos en todo lo que sigue $\mu = 1$), ϵ es una función de las coordenadas del punto. Substituyendo \mathbf{H} dado por la primera ecuación en la segunda, obtendremos para \mathbf{E} la ecuación

$$\Delta \mathbf{E} + (\epsilon\omega^2/c^2)\mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (68.1)$$

En cambio, eliminando \mathbf{E} , se obtiene para \mathbf{H} la ecuación

$$\Delta \mathbf{H} + (\epsilon\omega^2/c^2)\mathbf{H} + (1/\epsilon) \operatorname{grad} \epsilon \times \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (68.2)$$

Estas ecuaciones se simplifican notablemente en el caso «unidimensional», en el que ϵ cambia solamente en una dirección en el espacio. Elijamos el eje z de modo que coincida con ésta y consideremos una onda cuya dirección de propagación se encuentra en el plano xz . En un campo de estas características, ninguna magnitud depende de la coordenada y , mientras que, dada la homogeneidad del espacio a lo largo del eje x , se puede considerar que la dependencia respecto de x viene dada por el factor e^{ikx} , en el que k es una constante. Para $k = 0$ el campo depende solamente de z , es decir, se trata de una onda que pasa *normalmente* a través de una capa de materia en la que $\epsilon = \epsilon(z)$. Pero si $k \neq 0$, se dice que la onda pasa *oblicuamente*.

Además, hay que distinguir (cuando $k \neq 0$) dos casos de polarización independientes. En uno de ellos el vector \mathbf{E} es perpendicular al plano de propagación de la onda (es decir, está dirigido a lo largo del eje y), mientras que el campo magnético

se encuentra, por consiguiente, en este plano. La ecuación (68.1) toma la forma

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \left(\frac{\epsilon \omega^2}{c^2} - \kappa^2 \right) E = 0. \quad (68.3)$$

En el otro caso, el campo \mathbf{H} está dirigido en el sentido del eje y , y \mathbf{E} se encuentra en el plano de propagación. Conviene más entonces partir de la ecuación (68.2), que da

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\kappa^2}{\epsilon} \right) H = 0. \quad (68.4)$$

Convendremos en llamar a estos dos tipos de ondas *ondas-E* y *ondas-H*, respectivamente.

Las ecuaciones pueden resolverse de forma general en el importante caso en que las condiciones de propagación difieren poco de las correspondientes a la óptica geométrica; en lo que sigue supondremos que la función $\epsilon(z)$ es real*. En la ecuación (68.3) la magnitud $2\pi/\sqrt{f}$, en la cual

$$f(z) = \epsilon k^2 - \kappa^2,$$

representa el papel de «longitud de onda» en la dirección del eje z . La aproximación de la óptica geométrica corresponde a la desigualdad

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{f}} \ll 1, \quad (68.5)$$

y la ecuación (68.3) admite dos soluciones independientes que son de la forma

$$\frac{\text{constante}}{f^{\frac{1}{4}}} e^{\pm i \int \sqrt{f} dz}. \quad (68.6)$$

La condición (68.5) deja de cumplirse, evidentemente, cerca del punto en el que $f = 0$, si éste existe. Supongamos que se trata del punto $z = 0$, con $f > 0$ para $z < 0$ y $f < 0$ para $z > 0$. A distancias suficientemente grandes a uno y otro lado del punto $z = 0$ la solución de la ecuación (68.3) tiene la forma (68.6), mas para establecer la correspondencia entre los coeficientes de esta solución en los dominios $z > 0$ y $z < 0$, hay que investigar la solución exacta de la ecuación (68.3) cerca de $z = 0$. En la vecindad de este punto cabe desarrollar la función $f(z)$ en potencias de z y representarla en la forma $f = -az$. La solución de la ecuación

$$d^2 E / dz^2 - \alpha z E = 0$$

que es finita para todo z , es

$$E = (A/\alpha^{1/6}) \Phi(\alpha^{\frac{1}{3}} z), \quad (68.7)$$

* La ecuación (68.3) muestra un parecido formal con la ecuación de Schrödinger para el movimiento unidimensional de una partícula en mecánica cuántica, y a la aproximación de la óptica geométrica corresponde el caso cuasiclásico. Más adelante se dan los resultados finales, remitiendo para su deducción al curso de mecánica cuántica (véase vol. III, *Mecánica cuántica*, cap. 7).

donde

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(\tfrac{1}{3}u^3 + u\xi) du$$

es la llamada *función de Airy* (en E se ha prescindido del factor $e^{-i\omega t + ikz}$). En cuanto a la solución asintótica de la ecuación (68.3) para valores de $|z|$ grandes, se tiene

$$E = \frac{A}{f^{1/4}} \cos \left(\int_0^z \sqrt{f} dz + \frac{1}{4}\pi \right) \text{ para } z < 0, \quad (68.8)$$

$$E = \frac{A}{2|f|^{1/4}} \exp \left(- \int_0^z \sqrt{|f|} dz \right) \text{ para } z > 0,$$

con el mismo coeficiente A que en (68.7). La primera de estas expresiones representa una onda estacionaria que se obtiene como resultado de superponer la onda incidente (en el sentido positivo del eje z) y la reflejada por el plano $z = 0$. Las amplitudes de estas ondas son las mismas (e iguales a $A/2f^{1/4}$), es decir, el coeficiente de reflexión es igual a la unidad. En el dominio $z > 0$ penetra sólo un campo amortiguado exponencialmente.

Al acercarse al punto de reflexión, la amplitud de la onda crece, como muestra ya la presencia de $f^{1/4}$ en el denominador de (68.8). Para determinar la intensidad del campo en la inmediata vecindad de este punto es necesario, sin embargo, utilizar la expresión (68.7). Esta función decrece con monotonía al penetrar en el dominio $z > 0$, mientras posee un carácter oscilatorio en el dominio $z < 0$, disminuyendo progresivamente el valor de los máximos de $|E|$. El primero, el mayor de ellos, se alcanza para $a^{1/3}z = -1,02$ y es igual a

$$E = 0,949A\alpha^{-1/6}.$$

Hasta aquí hemos escrito las soluciones para las ondas- E . Es fácil ver que en la aproximación de la óptica geométrica se pueden escribir fórmulas completamente análogas también para las ondas- H . Si en la ecuación (68.4) se substituye $H = u/\sqrt{\epsilon}$, las derivadas de ϵ aparecen multiplicadas solamente por u (pero no por u'); prescindiendo por ello de los términos que contienen estas derivadas (que son pequeños en virtud de la condición (68.5)), se obtendrá para la función $u(z)$ la ecuación

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\frac{\epsilon\omega^2}{c^2} - \kappa^2 \right) u = 0,$$

que coincide con la ecuación (68.3). En consecuencia, todas las fórmulas correspondientes a H difieren de las fórmulas (68.6) a (68.8) tan sólo en el factor $\sqrt{\epsilon}$.

Una curiosa diferencia en el comportamiento de los dos tipos de ondas se manifiesta en la reflexión de una onda que incide oblicuamente ($\kappa \neq 0$) sobre una capa de materia en la que $\epsilon(z)$ pasa por el valor cero. La reflexión se produce en tal caso

sobre un plano en el que $f(z) = \epsilon k^2 - \kappa^2 = 0$, es decir, «sin alcanzar» la onda el plano en que $\epsilon = 0$. La onda- E penetra más allá de aquel plano tan sólo en forma de campo que se amortigua exponencialmente. En cambio, en la reflexión de una onda- H , sobre este campo amortiguado como fondo se superpone un intenso campo local cerca del plano en que $\epsilon = 0$ (véase problema 1 de este párrafo)*

PROBLEMAS

1. Determinar el campo eléctrico cerca de un punto en el que $\epsilon = 0$ para la reflexión de una onda- H que incide oblicuamente ($\kappa \neq 0$).

Solución. Supongamos que $\epsilon = 0$ en el punto $z = 0$. Cerca de este punto se tiene $\epsilon = az$ y la ecuación (68.4) toma la forma

$$\frac{d^2H}{dz^2} - \frac{1}{z} \frac{dH}{dz} + (ak^2z - \kappa^2)H = 0.$$

Según la teoría general de las ecuaciones diferenciales lineales, una de las soluciones de esta ecuación (llamémosla $H_1(z)$) carece de singularidades en $z = 0$ y su desarrollo en potencias de z comienza con el término z^2 :

$$H_1(z) = z^2 + \frac{1}{8}\kappa^2z^4 - \frac{1}{15}ak^2z^5 + \dots$$

Una segunda solución independiente posee una singularidad logarítmica, y su desarrollo es de la forma:

$$H_2(z) = H_1(z) \ln \kappa z + \frac{2}{\kappa^2} - \frac{2k^2a}{3\kappa^2}z^3 + \dots$$

El campo $H(z)$ es el resultante de estas dos soluciones y, por consiguiente, tiende a una constante (llamémosla H_0) cuando $z \rightarrow 0$. En cambio, los términos principales en las componentes del campo eléctrico son

$$E_x = -\frac{i}{\epsilon k} \frac{\partial H}{\partial z} \cong -\frac{i\kappa^2 H_0}{ak} \ln \kappa z,$$

$$E_z = \frac{i}{\epsilon k} \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\kappa}{\epsilon k} H \cong -\frac{\kappa H_0}{akz},$$

es decir, tienden a infinito cuando $z \rightarrow 0$. En realidad, claro está, debido a la inevitable presencia de una absorción en el medio, por pequeña que sea (es decir, de una parte imaginaria de ϵ que no se anula), el campo alcanza solamente valores relativamente altos (comparados con el fondo débil de las regiones vecinas), pero con todo finitos.

2. Por la «superficie» de separación entre dos medios con permitividades positiva y negativa (ϵ_1 y $-|\epsilon_2|$), respectivamente, puede propagarse una onda- H «superficial» que se amortigua al penetrar en uno y otro medio. Determinar la relación entre su frecuencia y el vector de onda.

Solución. Elijamos la frontera como plano xy y supongamos que la onda se propaga a lo largo del eje x , mientras el campo \mathbf{H} es paralelo al eje y . Sea $z > 0$ el semiespacio ocupado por el medio

* Hay que hacer notar que este punto es una singularidad de la ecuación (68.4), y, por lo tanto, cerca de él deja de ser aplicable la aproximación de la óptica geométrica a pesar de que $f(z)$ no se anula y de que la condición (68.5) acaso se cumpla.

con permitividad positiva (ϵ_1) y $z < 0$ el semiespacio en el que es negativa (ϵ_2). Busquemos para el campo en la onda que se amortigua, cuando $z \rightarrow \pm\infty$, expresiones de la forma

$$\begin{aligned} H_1 &= H_0 e^{ikx - \kappa_1 z}, & \kappa_1 &= \sqrt{(k^2 - \omega^2 \epsilon_1 / c^2)} & \text{para } z > 0, \\ H_2 &= H_0 e^{ikx + \kappa_2 z}, & \kappa_2 &= \sqrt{(k^2 + \omega^2 |\epsilon_2| / c^2)} & \text{para } z < 0, \end{aligned}$$

donde k , κ_1 , κ_2 son reales. La condición de contorno que impone la continuidad de $H_y = H$ queda satisfecha, y la de la continuidad de E_z da

$$(1/\epsilon_1) \partial H_1 / \partial z = (1/\epsilon_2) \partial H_2 / \partial z \text{ para } z = 0,$$

o bien $\kappa_1 / \epsilon_1 = \kappa_2 / |\epsilon_2|$. Esta igualdad puede cumplirse solamente si queda satisfecha la condición $\epsilon_1 < |\epsilon_2|$

(y si $\epsilon_1 \epsilon_2 < 0$, como hemos supuesto). La relación entre k y ω es

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_1 |\epsilon_2| / c^2 (|\epsilon_2| - \epsilon_1).$$

En cuanto a la propagación de las ondas-E «superficiales», es fácil ver que resulta totalmente imposible.

§ 69. Principio de reciprocidad

La radiación de ondas electromagnéticas monocromáticas por una fuente constituida por un alambre delgado situado en un medio arbitrario, se describe por las ecuaciones

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}/c, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D}/c + 4\pi \mathbf{j}_{\text{ex}}/c, \quad (69.1)$$

donde \mathbf{j}_{ex} es la densidad de las corrientes periódicas «extrañas» (respecto del medio) que circulan por el conductor.

Supongamos que en el medio se encuentran dos fuentes diferentes (de igual frecuencia); designaremos por los índices 1 y 2 los campos que crean estas dos fuentes separadamente. El medio puede ser no homogéneo y anisótropo, de manera arbitraria. Lo único que se supone en lo que sigue acerca de sus propiedades son las relaciones lineales $D_i = \epsilon_{ik} E_k$, $B_i = \mu_{ik} H_k$, con tensores simétricos ϵ_{ik} y μ_{ik} . En estas condiciones, es posible obtener una determinada relación que liga entre sí los campos de ambas fuentes y las corrientes extrañas que circulan por ellas.

Multipliquemos las dos ecuaciones

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = ik \mathbf{B}_1, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = -ik \mathbf{D}_1 + 4\pi \mathbf{j}_{\text{ex},1}/c$$

por \mathbf{H}_2 y \mathbf{E}_2 , respectivamente, y las mismas ecuaciones para los campos \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_2 , por $-\mathbf{H}_1$ y $-\mathbf{E}_1$. Sumando miembro a miembro todas estas ecuaciones, se obtendrá:

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_2 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}_2) + (\mathbf{E}_2 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_1 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}_2) \\ = (i\omega/c)(\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{B}_2) + (i\omega/c)(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2) + \\ + (4\pi/c)(\mathbf{j}_{\text{ex},1} \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_{\text{ex},2} \cdot \mathbf{E}_1). \end{aligned}$$

Pero $\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{H}_2 = \mu_{ik} H_{1k} H_{2i} = \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{B}_2$, $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2$, de modo que los dos primeros términos en el segundo miembro de la igualdad se anulan. En cuanto al primer

miembro, lo transformaremos aplicando una conocida fórmula de análisis vectorial, y se encuentra así

$$\operatorname{div} [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1] = (4\pi/c)(\mathbf{j}_{ex,1} \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_{ex,2} \cdot \mathbf{E}_1).$$

Integremos esta igualdad en todo el espacio; la integral del primer miembro se convierte en una integral extendida a una superficie infinitamente alejada y se anula. Obtendremos por ello

$$\int \mathbf{j}_{ex,1} \cdot \mathbf{E}_2 dV_1 = \int \mathbf{j}_{ex,2} \cdot \mathbf{E}_1 dV_2. \quad (69.2)$$

Las integrales en uno y otro miembro se extienden, respectivamente, tan sólo a los volúmenes de la primera y de la segunda fuente, dado que solamente en ellas son diferentes de cero las corrientes $\mathbf{j}_{ex}^{(1)}$ y $\mathbf{j}_{ex}^{(2)}$. Visto que los conductores son hilos delgados, cabe prescindir de la influencia de cada uno de ellos sobre el campo del otro y, por consiguiente, \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 en la fórmula (69.2) representan el campo de radiación de la primera y de la segunda fuente creada, cada uno de ellos, en el lugar en que se encuentra la otra como si ésta no existiera. La fórmula (69.2) es también la relación buscada y se conoce con el nombre de *teorema de reciprocidad*.

Si las dimensiones de las fuentes son pequeñas comparadas con la longitud de onda, al igual que con la distancia que las separa, la expresión del teorema de reciprocidad se puede simplificar. El campo de cada fuente varía poco para distancias que coinciden con las dimensiones de la otra fuente y en (69.2) se puede sacar \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 fuera del signo integral, escribiéndolos simplemente en la forma $\mathbf{E}_1(2)$ y $\mathbf{E}_2(1)$, donde 1 y 2 designan las posiciones en que se encuentran las fuentes:

$$\mathbf{E}_2(1) \cdot \int \mathbf{j}_{ex,1} dV_1 = \mathbf{E}_1(2) \cdot \int \mathbf{j}_{ex,2} dV_2.$$

La integral $\int \mathbf{j}_{ex} dV$ no es sino la derivada respecto del tiempo del momento dipolar total de la fuente, \mathcal{P} . Puesto que $\dot{\mathcal{P}} = -i\omega\mathcal{P}$, tenemos en definitiva

$$\mathbf{E}_2(1) \cdot \mathcal{P}_1 = \mathbf{E}_1(2) \cdot \mathcal{P}_2. \quad (69.3)$$

Esta forma del teorema de reciprocidad es aplicable, naturalmente, tan sólo a la radiación dipolar. Pero si el momento dipolar de una fuente es igual a cero (o es excepcionalmente pequeño), la aproximación que se hizo al pasar de la fórmula general (69.2) a la (69.3) es insuficiente (véase el problema 1 de este párrafo).

PROBLEMAS

1. Deducir el teorema de reciprocidad para las radiaciones cuadripolar y dipolar magnética.

Solución. Si $\int \mathbf{j}_{ex} dV = 0$, en las integrales (69.2) hay que tomar los términos siguientes del desarrollo:

$$\int \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dV_1 \cong \frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k} \int x_k j_{1i} dV_1$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i} \right) \int (x_k j_{1i} + x_i j_{1k}) dV_1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k} - \frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i} \right) \int (x_k j_{1i} - x_i j_{1k}) dV_1;$$

(para abreviar prescindimos del subíndice «ex» en \mathbf{j}). Introduciremos el tensor momento cuadripolar y el vector momento magnético de acuerdo con

$$\begin{aligned} D_{ik} &= -i\omega D_{ik} = \int [3(x_{ij}k_j + x_{kj}i_j) - 2\delta_{ik}\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}] dV, \\ \mathcal{M} &= \frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j} dV. \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación $\text{rot } \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}$ y teniendo en cuenta que cerca de las fuentes es $\epsilon = \text{const}$ (en virtud de lo cual $\text{div } \mathbf{E} = 0$), se obtendrá

$$\int \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dV = -\frac{i\omega}{12} \left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i} \right) D_{1,ik} + i\omega \mathbf{B}_2(1) \cdot \mathcal{M}_1.$$

Queda claro así que para los emisores cuadripolares el teorema de reciprocidad se escribe:

$$\left(\frac{\partial E_{2i}(1)}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{2k}(1)}{\partial x_i} \right) D_{1,ik} = \left(\frac{\partial E_{1i}(2)}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{1k}(2)}{\partial x_i} \right) D_{2,ik},$$

y para los dipolares magnéticos,

$$\mathbf{B}_2(1) \cdot \mathcal{M}_1 = \mathbf{B}_1(2) \cdot \mathcal{M}_2.$$

2. Determinar la intensidad de la radiación de una fuente dipolar situada en un medio homogéneo isotropo en función de la permitividad ϵ y la permeabilidad μ del mismo.

Solución. Como resultado de las sustituciones

$$\mathbf{E} = \sqrt{(\mu/\epsilon)} \mathbf{E}', \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}', \quad \omega = \omega' / \sqrt{(\epsilon\mu)},$$

las ecuaciones (69.1) toman la forma

$$\text{rot } \mathbf{E}' = i\omega \mathbf{H}'/c, \quad \text{rot } \mathbf{H}' = -i\omega \mathbf{E}'/c + 4\pi j_{\text{ex}}/c,$$

que no contienen ni ϵ ni μ . La solución de estas ecuaciones para la radiación dipolar conduce a un potencial vector del campo en la zona de ondas*

$$\mathbf{A}' = (1/cR_0) \int j_{\text{ex}} dV$$

(R_0 es la distancia a partir de la fuente; aquí y en lo que sigue prescindimos de los factores de fase, carentes de importancia para el cálculo de la intensidad). De aquí se sigue, evidentemente, que para un j_{ex} dado se puede escribir $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_0$, donde el subíndice 0 designa el campo de la fuente en el vacío. Para las magnitudes \mathbf{H}' , \mathbf{E}' tenemos:

$$\mathbf{H}' = i\mathbf{k}' \times \mathbf{A}' = i\sqrt{(\epsilon\mu)} \mathbf{k} \times \mathbf{A}_0 = \sqrt{(\epsilon\mu)} \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{H}'.$$

En consecuencia

$$\mathbf{H} = \sqrt{(\epsilon\mu)} \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{E} = \mu \mathbf{E}_0$$

y para la intensidad se obtiene $I = I_0 \mu^{3/2} \epsilon^{1/2}$ con lo que queda resuelto el problema planteado.

§ 70. Oscilaciones electromagnéticas en resonadores huecos

Consideremos el campo eléctrico en un espacio vacío limitado por paredes de un conductor perfecto. Las ecuaciones de un campo monocromático en el vacío se escriben:

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mathbf{H}/c, \quad \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{E}/c. \quad (70.1)$$

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 67.

Por otra parte, las condiciones de contorno sobre la superficie de un cuerpo conductor perfecto (es decir, un cuerpo con impedancia $\zeta = 0$) nos dan:

$$\mathbf{E}_t = 0, \quad H_n = 0. \quad (70.2)$$

Para resolver el problema basta considerar una de las magnitudes \mathbf{E} o \mathbf{H} . Eliminando, por ejemplo, \mathbf{H} entre las ecuaciones (70.1), obtenemos para \mathbf{E} la ecuación de onda

$$\Delta \mathbf{E} + (\omega^2/c^2)\mathbf{E} = 0, \quad (70.3)$$

a la que hay que añadir también la ecuación

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (70.4)$$

que no es consecuencia de (70.3). Resolviendo estas ecuaciones con la condición de contorno $\mathbf{E}_t = 0$, determinaremos el campo \mathbf{E} , hecho lo cual se calcula \mathbf{H} inmediatamente a partir de la primera de las ecuaciones (70.1), quedando además automáticamente satisfecha la condición de contorno $H_n = 0$.

Para una forma y dimensiones dadas de la cavidad, las ecuaciones (70.3) y (70.4) poseen solución tan sólo para un determinado conjunto de valores de ω . Estos valores se llaman *frecuencias propias* de las oscilaciones electromagnéticas del resonador en cuestión*. Cuando $\zeta = 0$ el campo electromagnético no penetra en el metal y en él no se producen pérdidas. Por ello, todas las oscilaciones propias son no amortiguadas, es decir, todas las frecuencias propias son reales. El número de frecuencias propias del resonador diferentes es infinito. El orden de magnitud de la menor de ellas, ω_1 , es c/l donde l son las dimensiones lineales de la cavidad. Esto resulta ya evidente por consideraciones de dimensionalidad, puesto que l es el único parámetro con dimensiones que caracteriza las condiciones del problema (para una forma del resonador dada). Por otra parte, las frecuencias propias altas ($\omega \gg c/l$) son muy próximas entre sí y el número de ellas por unidad de intervalo de valores de ω es igual a

$$V\omega^2/2\pi^2c^3;$$

este número depende solamente del volumen del resonador V , pero no de su forma**.

Los valores medios (respecto del tiempo) de la energía eléctrica y magnética del campo en el resonador vienen dados, respectivamente, por las integrales

$$\frac{1}{2} \int (|\mathbf{E}|^2/8\pi) dV \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \int (|\mathbf{H}|^2/8\pi) dV.$$

* Todas las fórmulas para un resonador cuya cavidad está ocupada por un medio dieléctrico no absorbente con valores de ϵ y μ diferentes de 1, se obtienen a partir de las fórmulas correspondientes a un resonador vacío substituyendo en éstas las magnitudes ω , \mathbf{E} , \mathbf{H} por $\omega/\sqrt{\epsilon\mu}$, $\sqrt{\epsilon}\mathbf{E}$, $\sqrt{\mu}\mathbf{H}$, respectivamente. Está claro que es así en virtud de que, con esta transformación, las ecuaciones (70.1) se convierten en las ecuaciones de Maxwell correctas en un tal medio:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}/c, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}/c.$$

En particular, la existencia de un medio material disminuye todas las frecuencias propias, dividiéndolas por $\sqrt{\epsilon\mu}$.

** Véase vol. II, Teoría clásica de los campos, § 52.

Estas dos cantidades son iguales entre sí. En efecto, la primera de las ecuaciones (70.1) permite escribir

$$\int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dV = (c^2/\omega^2) \int \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}^* dV.$$

La segunda integral la transformaremos por partes:

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}^* dV = \oint \operatorname{rot} \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{f} \times \mathbf{E} + \int \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}^* dV.$$

Dado que sobre la frontera del volumen es $\mathbf{E}_t = 0$, la integral de superficie se anula y queda

$$\begin{aligned} \int |\mathbf{H}|^2 dV &= \frac{c^2}{\omega^2} \int \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}^* dV \\ &= - (c^2/\omega^2) \int \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{E}^* dV \end{aligned}$$

o bien, teniendo en cuenta (70.3),

$$\int |\mathbf{H}|^2 dV = \int |\mathbf{E}|^2 dV \quad (70.5)$$

que es lo que se trataba de demostrar*.

Las oscilaciones no amortiguadas en un resonador se obtienen partiendo de la hipótesis de que la impedancia de sus paredes es igual a cero. Veamos ahora cómo influye sobre las frecuencias propias el hecho de que las paredes posean una impedancia pequeña, pero en todo caso no nula.

Se puede calcular la energía media (respecto del tiempo) disipada en 1 s en las paredes del resonador como flujo de energía que incide sobre las paredes procedente del campo electromagnético en la cavidad. Teniendo en cuenta la condición de contorno (67.6) sobre la superficie de un cuerpo cuya impedancia es ζ , escribiremos la componente normal de la densidad de flujo de energía en la forma:

$$S_n = (c/8\pi) \operatorname{Re}(\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*) = c\zeta' |\mathbf{H}_t|^2 / 8\pi$$

(ζ' es la parte real de ζ). En esta expresión, que contiene ya el pequeño factor ζ' , en primera aproximación cabe interpretar \mathbf{H} como el campo que se obtiene al resolver el problema con $\zeta = 0$. La energía total que se disipa viene dada por la integral

$$\frac{c}{8\pi} \oint \zeta' |\mathbf{H}|^2 df, \quad (70.6)$$

extendida a toda la superficie interior del resonador. El coeficiente de amortiguamiento de la amplitud del campo con el tiempo se obtiene dividiendo esta cantidad por el doble de la energía total del campo, que es igual a

$$\frac{1}{2} \int (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2) dV / 8\pi = \int |\mathbf{H}|^2 dV / 8\pi.$$

* En todo esto entendemos por \mathbf{E} y \mathbf{H} las intensidades que corresponden a una determinada frecuencia propia. No resulta tampoco difícil demostrar que los campos correspondientes a dos frecuencias propias diferentes ω_a y ω_b satisfacen la relación de ortogonalidad:

$$\int \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b^* dV = \int \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{H}_b^* dV = 0.$$

El coeficiente de amortiguamiento se determina por la parte imaginaria $|\omega''|$ de la frecuencia compleja $\omega = \omega' + i\omega''$ *. Escribiendo la fórmula en forma compleja:

$$\omega - \omega_0 = -\frac{1}{2}ic \frac{\oint \zeta |\mathbf{H}|^2 d\mathbf{f}}{\int |\mathbf{H}|^2 dV} \quad (70.7)$$

(ω y ω_0 son los valores de la frecuencia cuando se tiene en cuenta ζ y cuando ésta se supone igual a cero), podemos determinar no sólo el coeficiente de amortiguamiento, sino también los desplazamientos de las frecuencias propias. Éstos, como vemos, vienen determinados por la parte imaginaria de ζ . En el § 67 se demostró que, de ordinario, se tiene $\zeta'' < 0$; en consecuencia, el desplazamiento de las frecuencias propias se produce en el sentido de su disminución.

En la práctica puede ser más conveniente al efectuar los cálculos transformar la integral de volumen que aparece en el denominador de (70.7) en una integral de superficie. El resultado de la transformación es**:

$$\int |\mathbf{H}|^2 dV = \frac{1}{2} \oint (|\mathbf{H}|^2 - |\mathbf{E}|^2) \mathbf{r} \cdot d\mathbf{f}. \quad (70.8)$$

PROBLEMAS

1. Determinar las frecuencias propias de las oscilaciones en un resonador cuyas paredes constituyen un conductor perfecto y que tiene la forma de un paralelepípedo rectangular.

Solución. Elijamos los ejes x, y, z de modo que coincidan con tres aristas del paralelepípedo, cuyas longitudes son a_1, a_2, a_3 . Las soluciones de las ecuaciones (70.3) y (70.4) que satisfacen la condición de contorno $\mathbf{E}_t = 0$ son:

$$E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \cdot e^{-i\omega t} \quad (1)$$

y análogamente para E_y, E_z , donde

$$k_x = n_1 \pi / a_1, \quad k_y = n_2 \pi / a_2, \quad k_z = n_3 \pi / a_3 \quad (2)$$

(n_1, n_2, n_3 son números enteros), las constantes A_1, A_2, A_3 están ligadas por la relación

$$A_1 k_x + A_2 k_y + A_3 k_z = 0, \quad (3)$$

* En radiotécnica se suele introducir, en vez del coeficiente de amortiguamiento $|\omega''|$, la llamada *calidad* del resonador, definida por la razón $\omega'/2|\omega''|$.

** Dado que el vector \mathbf{H} es tangente a la superficie, puede escribirse

$$\oint (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{f}) = \oint (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{f}) - \oint (\mathbf{H} \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{f}) - \oint (\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{f}).$$

Las integrales que aparecen en el segundo miembro se transforman en integrales de volumen mediante el cambio $d\mathbf{f} \rightarrow dV \cdot \nabla$; utilizando además las ecuaciones (70.1), se obtendrá

$$\oint (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{f}) = ik \int \mathbf{r} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{E}^* - \mathbf{H}^* \times \mathbf{E}) dV + \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dV.$$

Análogamente, teniendo en cuenta la identidad $\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times d\mathbf{f}) = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{f}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) d\mathbf{f} = 0$ (que es consecuencia de la condición de contorno $\mathbf{E}_t = 0$), tenemos

$$\begin{aligned} \oint (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{f}) &= -\oint (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{f}) + \oint (\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{f}) + \oint (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}) \\ &= ik \int \mathbf{r} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{E}^* - \mathbf{H}^* \times \mathbf{E}) dV - \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV. \end{aligned}$$

Restando miembro a miembro las dos igualdades obtenidas y teniendo en cuenta (70.5), resulta la fórmula (70.8).

y las frecuencias propias vienen dadas por

$$\omega^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2).$$

El campo magnético se calcula a partir de (1):

$$H_x = -(ic/\omega)(A_3 k_y - A_2 k_z) \operatorname{sen} k_x x \cos k_y y \cos k_z z \cdot e^{-i\omega t},$$

y análogamente para H_y , H_z .

Si los tres números n_1 , n_2 , n_3 , o dos de ellos, son iguales a cero, se tiene $\mathbf{E} \equiv 0$. Por consiguiente, a la primera frecuencia (la menor) corresponde una oscilación en la que uno de estos números es igual a cero, y los otros dos, iguales a la unidad.

Dada la existencia de la relación (3), la solución (1) (con valores dados de n_1 , n_2 , n_3 diferentes de cero) contiene tan sólo dos constantes arbitrarias independientes, es decir, cada frecuencia propia es doblemente degenerada. En cambio, las frecuencias para las que uno de los números n_1 , n_2 , n_3 es igual a cero no son degeneradas.

2. Determinar las frecuencias de las oscilaciones dipolar-eléctricas y dipolar-magnéticas en un resonador esférico (de radio a).

Solución. En una onda esférica estacionaria del tipo dipolar-eléctrico los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} tienen la forma*

$$\mathbf{E} = e^{-i\omega t} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\frac{\operatorname{sen} kr}{r} \mathbf{b} \right), \quad \mathbf{H} = -ik e^{-i\omega t} \operatorname{rot} \left(\frac{\operatorname{sen} kr}{r} \mathbf{b} \right),$$

donde \mathbf{b} es un vector constante y $k = \omega/c$. La condición de contorno $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ para $r = a$ conduce a la ecuación

$$\operatorname{ctg} ka = (ka)^{-1} - ka.$$

Su raíz mínima es $ka = 2,74$. La frecuencia $\omega = 2,74 c/a$ es la menor de todas las frecuencias propias del resonador esférico.

En una onda esférica estacionaria del tipo dipolar-magnético,

$$\mathbf{E} = ik e^{-i\omega t} \operatorname{rot} \left(\frac{\operatorname{sen} kr}{r} \mathbf{b} \right), \quad \mathbf{H} = e^{-i\omega t} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\frac{\operatorname{sen} kr}{r} \mathbf{b} \right).$$

La condición de contorno para \mathbf{E} conduce a la ecuación

$$\operatorname{tg} ka = ka.$$

Su primera raíz es $ka = 4,49$.

§ 71. Propagación de las ondas electromagnéticas en las guías de onda

En contraste con los resonadores que hemos estudiado en el párrafo que precede, cuyos volúmenes son finitos, las *guías de onda* constituyen una cavidad de longitud infinita, es decir, un tubo vacío infinitamente largo**. Mientras que las oscilaciones propias en un resonador son ondas estacionarias, en una guía de onda ésta es «estacionaria» tan sólo en las direcciones transversales, mientras que en la dirección a lo largo de la longitud del tubo es posible la propagación de ondas móviles.

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 72.

** En lo que sigue escribimos todas las fórmulas para una guía de onda vacía. El paso a las fórmulas para una guía de onda que contiene en su interior un dieléctrico no absorbente, se lleva a cabo mediante la transformación indicada en la nota de la pág. 344.

Consideremos una guía de onda recta cuya sección transversal tiene una forma arbitraria (pero simplemente conexa) que no varía a lo largo de su longitud. Supondremos primero que las paredes de la guía constituyen un conductor perfecto. Tomaremos el eje z en la misma dirección que las generatrices de la guía de onda. En una onda que se propaga a lo largo del eje z , la dependencia de todas las magnitudes respecto de z viene dada por un factor de la forma $e^{(ik_z z)}$ con k_z constante.

Todas las ondas electromagnéticas posibles en una tal guía de onda se pueden clasificar en dos tipos: en uno de ellos es $H_z = 0$, mientras que en el otro se tiene $E_z = 0$ (Rayleigh, 1897). Las ondas del primer tipo, con un campo magnético puramente transversal, se llaman *ondas de tipo eléctrico* u *ondas-E*. En cambio, las ondas con un campo eléctrico puramente transversal, reciben el nombre de *ondas de tipo magnético* u *ondas-H**.

Consideremos en primer lugar las ondas-*E*; las componentes x e y de las ecuaciones (70.1) dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - ik_z E_y &= i \frac{\omega}{c} H_x, & - \frac{\partial E_z}{\partial x} + ik_z E_x &= i \frac{\omega}{c} H_y, \\ ik_z H_y &= i \frac{\omega}{c} E_x & ik_z H_x &= -i \frac{\omega}{c} E_y. \end{aligned}$$

De aquí se sigue

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial E}{\partial x}, & E_y &= \frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ H_x &= -\frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, & H_y &= \frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \end{aligned} \tag{71.1}$$

donde se ha introducido la notación

$$\kappa^2 = (\omega^2/c^2) - k_z^2.$$

De esta manera, en una onda-*E* todas las componentes transversales de \mathbf{E} y \mathbf{H} se pueden expresar en función de la componente longitudinal del campo eléctrico. Ésta, sin embargo, debe determinarse resolviendo una ecuación de onda que se reduce a la ecuación en dos dimensiones

$$\Delta_2 E_z + \kappa^2 E_z = 0 \tag{71.2}$$

(Δ_2 es el operador bidimensional de Laplace). Las condiciones de contorno que se asocian a esta ecuación suponen la anulación de las componentes tangenciales de \mathbf{E} sobre la pared de la guía. Para ello basta exigir que

$$E_z = 0 \text{ sobre el contorno de la sección transversal.} \tag{71.3}$$

* Las ondas-*E* y las ondas-*H* se llaman también, respectivamente, ondas *TM* y *TE* (transversales magnéticas y transversales eléctricas).

Según las fórmulas (71.1), el vector bidimensional de componentes E_x , E_y es proporcional al gradiente en dos dimensiones de la magnitud E_z . Por ello, cuando se cumple la condición (71.3) se anula automáticamente también la componente tangencial de \mathbf{E} en el plano xy .

De manera análoga, en una onda- H las componentes transversales de \mathbf{E} y \mathbf{H} pueden expresarse en función de la componente longitudinal del campo magnético de acuerdo con las fórmulas:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, & H_y &= \frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \\ E_x &= \frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, & E_y &= -\frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (71.4)$$

En cuanto al campo longitudinal H_z , éste viene dado por las soluciones de la ecuación

$$\Delta_2 H_z + \kappa^2 H_z = 0 \quad (71.5)$$

con la condición de contorno

$$\partial H_z / \partial n = 0 \text{ sobre el contorno de la sección transversal.} \quad (71.6)$$

Esta condición permite asegurar, según las fórmulas (71.4), la anulación de la componente normal de \mathbf{H} .

Así pues, el problema de determinar el campo electromagnético en una guía de ondas se reduce a hallar las soluciones de una ecuación de onda bidimensional de la forma $\Delta_2 f + \kappa^2 f = 0$ con la condición en los límites $f = 0$ o $\partial f / \partial n = 0$ sobre el contorno de la sección. Para un contorno dado, tales soluciones existen tan sólo para valores «propios» completamente determinados del parámetro κ^2 .

A cada valor propio κ^2 corresponde la dependencia

$$\omega^2 = c^2(k_z^2 + \kappa^2) \quad (71.7)$$

entre la frecuencia ω y el «vector de onda» k_z de la onda. La velocidad de propagación en el sentido longitudinal de la guía viene dada por la derivada

$$u_z = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{ck_z}{\sqrt{(k_z^2 + \kappa^2)}} = \frac{c^2 k_z}{\omega}. \quad (71.8)$$

Para un κ dado, u_z toma valores entre 0 y c cuando k_z varía entre 0 y ∞ .

La densidad media (respecto del tiempo) del flujo de energía a lo largo de la guía coincide con la componente z del vector de Poynting. Un cálculo simple, utilizando las fórmulas (71.1), da para una onda- E

$$S_z = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)_z = \frac{\omega k_z}{8\pi\kappa^4} |\operatorname{grad}_2 E_z|^2.$$

El flujo total de energía q se obtiene integrando \bar{S}_z sobre la superficie sección de la guía de onda. Se tiene

$$\int |\operatorname{grad}_2 E_z|^2 df = \oint E_z^* \frac{\partial E_z}{\partial n} dl - \int E_z^* \Delta_2 E_z df.$$

La primera integral se extiende al contorno de la sección, y resulta igual a cero en virtud de la condición de contorno $E_z = 0$. En la segunda integral substituiremos $\Delta_2 E_z$ por $-\kappa^2 E_z$ y obtenemos en definitiva

$$q = \frac{\omega k_z}{8\pi\kappa^2} \int |E_z|^2 df. \quad (71.9)$$

Para una onda- H se obtiene esta misma expresión con H_z en vez de E_z .

De manera análoga se puede calcular la densidad de energía electromagnética W (por unidad de longitud de la guía de onda). Sin embargo, es más fácil obtener W directamente a partir de q , puesto que debe tenerse $q = W u_z$. Así, de (71.8) y (71.9) resulta

$$W = \frac{\omega^2}{8\pi\kappa^2 c^2} \int |E_z|^2 df. \quad (71.10)$$

De (71.7) se sigue que para cada tipo de ondas (que corresponden a un determinado valor de κ^2) existe un valor de la frecuencia, el mínimo posible, igual a $c\kappa$. Para frecuencias menores resulta imposible la propagación del tipo dado de ondas. Pero entre todos los valores propios κ hay uno, el κ_{\min} , que es el menor de todos y a la vez diferente de cero (véase más adelante). Por ello, llegamos a la conclusión de que existe un límite inferior para las frecuencias, $\omega_{\min} = c\kappa_{\min}$, por debajo del cual es totalmente imposible la propagación de las ondas, cualesquiera que sean, a lo largo de la guía. En orden de magnitud, es $\omega_{\min} \sim c/a$, donde a caracteriza las dimensiones transversales del tubo.

Lo que acabamos de afirmar, sin embargo, vale solamente para las guías de onda cuya sección transversal es simplemente conexa, las únicas que hemos considerado hasta ahora. La situación cambia totalmente cuando la sección transversal define un dominio múltiplemente conexo*. En tales guías, junto con las ondas- E y ondas- H descritas más arriba, resulta posible la propagación de un tipo más de ondas cuyas frecuencias no están limitadas por ninguna condición.

Este tipo de ondas, llamadas *ondas principales*, se caracteriza por la condición $k_z = k$ (es decir, $\kappa = 0$); su velocidad de propagación coincide con la velocidad de la luz c . Determinemos cuáles son las propiedades fundamentales de estas ondas; veremos al mismo tiempo por qué este tipo de ondas es imposible cuando la sección de la guía es simplemente conexa.

Todas las componentes del campo en una onda principal satisfacen la ecuación

* Puede tratarse tanto del espacio entre dos tubos, como del espacio exterior a dos conductores paralelos.

de Laplace en dos dimensiones $\Delta_2 f = 0$. Con la condición de contorno $f = 0$, la única solución de esta ecuación que es regular en todo el dominio (simplemente o múltiplemente conexo) es la $f \equiv 0$. Por consiguiente, en una onda principal se tiene $E_z = 0$.

En cambio, para la condición de contorno $\partial f / \partial n = 0$, la solución regular es la $f = \text{const}$. Sin embargo, es fácil ver que para $f = H_z$ esta constante sólo puede ser igual a cero (recordemos que const designa una cantidad que no depende ni de x ni de y ; la dependencia respecto de z y t viene dada, en cambio, por factor $e^{i(k_z z - \omega t)}$). En efecto, integrando la ecuación

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{i\omega}{c} H_z = 0$$

en el dominio de la sección, obtenemos

$$\oint H_n \, dl + (i\omega/c) \int H_z \, df = 0;$$

en virtud de la igualdad $H_n = 0$ sobre el contorno y de que H_z es constante en todo el dominio, se sigue que $H_z = 0$.

Así pues, una onda principal es puramente transversal. Cuando $E_z = H_z = 0$, las componentes x e y de las ecuaciones (70.1) dan

$$H_x = -E_y, \quad H_y = E_x, \quad (71.11)$$

es decir, los campo \mathbf{E} y \mathbf{H} son perpendiculares entre sí e iguales en módulo. Para determinar estos campos tenemos las ecuaciones

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad (\operatorname{rot} \mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0,$$

con la condición de contorno $\mathbf{E}_t = 0$.

Vemos así que la dependencia de \mathbf{E} (y con él, también de \mathbf{H}) respecto de x , y , viene dada por la solución de un problema electrostático bidimensional: $\mathbf{E} = -\nabla_2 \phi$, donde el potencial ϕ satisface la ecuación $\Delta_2 \phi = 0$ con la condición de contorno $\phi = \text{const}$. En un dominio simplemente conexo esta condición de contorno conduce a $\phi = \text{const}$ (y por lo tanto $\mathbf{E} = 0$) como única solución regular en todo el dominio. Esto mismo prueba la imposibilidad de la propagación de este tipo de ondas por guías cuya sección transversal sea simplemente conexa. En un dominio múltiplemente conexo, en cambio, el valor const en la condición de contorno no tiene por qué ser necesariamente el mismo sobre los diferentes contornos y entonces la ecuación de Laplace posee soluciones no triviales. En tal caso la distribución del campo eléctrico en la sección transversal de la guía de onda coincide con la de un campo electrostático plano entre las armaduras de un condensador que se encuentran sometidas a una diferencia de potenciales dada.

Hasta aquí hemos supuesto que las paredes de la guía están constituidas por un conductor perfecto*. Ahora bien, que la pared presente una impedancia que es

* Obsérvese, en particular, que sólo en estas condiciones es posible una diferenciación rigurosa entre ondas con $E_z = 0$ y ondas con $H_z = 0$.

pequeña, pero con todo no nula, conduce a la aparición de pérdidas y, con ello, al amortiguamiento de la onda en su propagación a lo largo de la guía. El coeficiente de amortiguamiento puede calcularse de manera análoga a como se calculó en el párrafo precedente el amortiguamiento de las ondas electromagnéticas, con el tiempo, en un resonador.

La cantidad de energía disipada en 1 s en las paredes de la guía (por unidad de longitud de la misma) viene dada por la integral

$$(c/8\pi)\zeta' \oint |\mathbf{H}|^2 dl,$$

extendida a lo largo del contorno de la sección; \mathbf{H} es el campo magnético calculado en la hipótesis de que sea $\zeta = 0$. Dividiendo esta cantidad por el doble del flujo de energía q a lo largo de la guía, obtendremos el coeficiente de amortiguamiento buscado α . De acuerdo con esta definición, α da la rapidez de amortiguamiento de la onda, cuya amplitud disminuye a lo largo de la guía como $e^{-\alpha z}$.

Expresando todas las magnitudes en función de E_z o de H_z de acuerdo con las fórmulas (71.1) o (71.4), obtendremos las fórmulas siguientes para el coeficiente de absorción de una onda- E

$$\alpha = \frac{\omega \zeta'}{2k_z^2 \kappa c} \frac{\oint |\operatorname{grad}_2 E_z|^2 dl}{\int |E_z|^2 df} \quad (71.12)$$

y de una onda- H

$$\alpha = \frac{ck^2 \zeta'}{2k_z \omega} \frac{\oint \{ |H_z|^2 + (k_z^2/\kappa^4) |\operatorname{grad}_2 H_z|^2 \} dl}{\int |H_z|^2 df}. \quad (71.13)$$

En la práctica, para efectuar el cálculo puede resultar conveniente transformar las integrales de superficie que aparecen en el denominador en integrales curvilíneas. A continuación damos las fórmulas que se obtienen de esta manera y que se deducen de modo análogo a como se obtuvo la fórmula (70.8):

$$\begin{aligned} \int |E_z|^2 df &= \frac{1}{2\kappa^2} \oint (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) |\operatorname{grad}_2 E_z|^2 dl, \\ \int |H_z|^2 df &= \frac{1}{2\kappa^2} \oint (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \{ \kappa^2 |H_z|^2 - |\operatorname{grad}_2 H_z|^2 \} dl. \end{aligned} \quad (71.14)$$

Cuando $k_z \rightarrow 0$ (es decir, cuando la frecuencia $\omega \rightarrow ck$), las expresiones (71.12) y (71.13) tienden a infinito. Sin embargo, estas fórmulas dejan entonces de ser aplicables, ya que al deducirlas se supuso que κ es pequeño comparado con k_z .

Las fórmulas (71.12) y (71.13) no valen para una onda principal (en una guía de onda cuya sección transversal es múltiplamente conexa), en la cual son iguales a cero todas las cantidades E_z , H_z y κ . En este caso, todas las componentes del campo pueden expresarse en función de un potencial escalar ϕ . Teniendo en cuenta que, en una onda principal, los campos \mathbf{H} y $\mathbf{E} = -\nabla_2 \phi$ son perpendiculares entre sí

y de igual módulo, obtendremos para su coeficiente de absorción la expresión que sigue:

$$\alpha = \frac{\zeta' \oint |\operatorname{grad}_2 \phi|^2 d\ell}{2 \oint |\operatorname{grad}_2 \phi|^2 df}. \quad (71.15)$$

La propagación de una onda principal a lo largo de la guía de onda puede estudiarse de manera relativamente simple también en aquellos casos en que su coeficiente de absorción no es pequeño (de modo que la fórmula (71.15) resulta inaplicable), con tal de que la longitud de onda c/ω sea grande comparada con las dimensiones transversales de la guía.

Como se indicó más arriba, el campo eléctrico transversal en una onda principal corresponde (en cada instante) al campo electrostático en el condensador formado por las paredes de la guía cargadas con cargas iguales y de signos contrarios. Designaremos estas cargas, referidas a la unidad de longitud de la guía, por $\pm e(z)$. Están ligadas con las corrientes $\pm J(z)$ que recorren las paredes de la guía por la «ecuación de continuidad»

$$\partial e / \partial t = - \partial J / \partial z,$$

o bien, para un campo monocromático,

$$i\omega e = \partial J / \partial z.$$

Sea, además, C la capacidad de la guía por unidad de longitud. La «diferencia de potenciales» entre sus paredes es $\phi_2 - \phi_1 = e/C$; derivándola respecto de z , obtendremos la f.e.m. que mantiene el paso de la corriente por las paredes (recordemos que cuando existe absorción el campo no es puramente transversal). Igualando la f.e.m. a ZJ (Z es la impedancia por unidad de longitud de la guía), tendremos

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e}{C} \right) = ZJ$$

o bien

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{C} \frac{\partial J}{\partial z} \right) + i\omega ZJ = 0. \quad (71.16)$$

Substituyendo aquí $Z = R - i\omega L/c^2$ (donde R y L son la resistencia y la autoinducción de la guía por unidad de longitud), podemos pasar de componentes monocromáticas de la corriente a una función arbitraria del tiempo. Admitiendo también que la capacidad C es constante a lo largo de la guía, se obtendrá la llamada *ecuación de los telegrafistas*:

$$\frac{1}{C} \frac{\partial^2 J}{\partial z^2} - R \frac{\partial J}{\partial t} - \frac{L}{c^2} \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = 0. \quad (71.17)$$

Cuando no existe absorción ($R = 0$) esta ecuación, como debía ser, se reduce a la ecuación de onda correspondiente a una velocidad de propagación igual a $\sqrt{c^2/LC} = c^*$.

PROBLEMAS

1. Hallar los valores de κ para ondas que se propagan por una guía de sección rectangular (longitudes de los lados a, b). Hallar los coeficientes de amortiguamiento de estas ondas.

Solución. En las ondas- E^{**} es

$$E_z = \text{const} \times \sin k_x x \sin k_y y,$$

donde

$$k_x = n_1 \pi / a, \quad k_y = n_2 \pi / b,$$

y n_1, n_2 son números enteros positivos. En las ondas- H ,

$$H_z = \text{const} \times \cos k_x x \cos k_y y,$$

pudiendo ser uno de los números n_1, n_2 igual a cero. En ambos tipos de ondas

$$\kappa^2 = k_x^2 + k_y^2 = \pi^2(n_1^2/a^2 + n_2^2/b^2).$$

El menor valor de κ corresponde a la onda H_{10} (los subíndices indican los valores de n_1, n_2) y es igual a $\kappa_{\min} = \pi/a$ (supuesto que $a > b$).

Los coeficientes de amortiguamiento se calculan según las fórmulas (71.12) y (71.13); para las ondas- E son iguales a

$$\alpha = 2\zeta' \omega (k_x^2 b + k_y^2 a) / c \kappa^2 k_z ab,$$

para la onda $H_{n_1 0}$

$$\alpha = \frac{\zeta' \omega}{c k_z ab} \left(a + \frac{2\kappa^2}{k^2} b \right),$$

y para las ondas $H_{n_1 n_2}$ ($n_1, n_2 \neq 0$)

$$\alpha = \frac{2c\kappa^2\zeta'}{\omega k_z ab} \left[a + b + \frac{k_z^2}{\kappa^4} (k_x^2 a + k_y^2 b) \right].$$

2. Lo mismo para una guía de sección circular (de radio a).

Solución. Resolviendo la ecuación de onda en coordenadas polares r, ϕ , obtendremos en las ondas- E

$$E_z = \text{const} \times J_n(\kappa r) \frac{\sin n\phi}{\cos n\phi}$$

con la condición $J_n(\kappa a) = 0$, que determina los valores de κ . En las ondas- H , esta misma fórmula da H_z , pero los valores de κ se determinan por la condición $J'_n(\kappa a) = 0$. El menor valor κ lo posee la primera de las ondas H_1 ; es igual a $\kappa_{\min} = 1,84/a$.

El coeficiente de amortiguamiento se calcula mediante las fórmulas (71.12)-(71.14); para las ondas- E es igual a

$$\alpha = \omega \zeta' / c a k_z,$$

y para las H ,

$$\alpha = \frac{c \zeta' \kappa^2}{\omega k_z a} \left[1 + \frac{n^2 \omega^2}{c^2 \kappa^2 (a^2 \kappa^2 - n^2)} \right].$$

* La igualdad $LC = 1$ se sigue de la equivalencia matemática del problema de determinar $1/C$ y L para una forma dada de la sección transversal. El campo eléctrico y magnético entre las superficies de conductores perfectos son perpendiculares en dirección e iguales en módulo (véase (71.11)) y el valor de éste sobre las propias superficies determina, en el primer caso, la densidad de carga, y en el segundo, la densidad de corriente. Por ello, coinciden también los coeficientes de proporcionalidad ($1/C$ y L) entre la energía del campo y los cuadrados de las cargas o corrientes, respectivamente.

** Prescindimos en todas las fórmulas del factor $\exp(ik_z z - i\omega t)$.

§ 72. Dispersión de las ondas electromagnéticas por pequeñas partículas

Consideremos la dispersión de las ondas electromagnéticas por partículas macroscópicas cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con la longitud de la onda dispersada $\lambda \sim c/\omega$ (Rayleigh, 1871). Cuando se cumple esta condición, el campo electromagnético cerca de la partícula se puede considerar homogéneo. Al encontrarse en un campo periódico homogéneo, una partícula adquiere determinados momentos eléctrico y magnético \mathcal{P} y \mathcal{M} , cuya dependencia respecto del tiempo viene dada por factores $e^{-i\omega t}$. La onda dispersada puede describirse como radiación emitida por estos momentos variables. A grandes distancias R de la partícula (grandes comparadas con λ), en la zona de ondas, el campo de la onda dispersada viene dado por las fórmulas*

$$\begin{aligned}\mathbf{H}' &= \frac{\omega}{c^2 R} \{ \mathbf{n} \times \mathcal{P} + \mathbf{n} \times (\mathcal{M} \times \mathbf{n}) \}, \\ \mathbf{E}' &= \mathbf{H}' \times \mathbf{n},\end{aligned}\tag{72.1}$$

donde el vector unitario \mathbf{n} define la dirección de dispersión y para los valores de \mathcal{P} y \mathcal{M} deben tomarse los correspondientes al instante $t = R/c$ (el campo de la onda dispersada lo designaremos por letras con apóstrofo, mientras que el de la onda incidente se representará por letras sin él). El valor medio (respecto del tiempo) de la intensidad de la radiación dispersada en el ángulo sólido $d\sigma$, es igual a

$$dI = \frac{1}{2} c |\mathbf{H}'|^2 R^2 d\sigma / 4\pi;$$

dividiendo por la densidad de flujo de energía en la onda incidente

$$c |\mathbf{H}|^2 / 8\pi = c |\mathbf{E}|^2 / 8\pi,$$

obtendremos la sección eficaz de dispersión.

El cálculo de \mathcal{P} y \mathcal{M} es particularmente simple si el tamaño de las partículas es pequeño no solamente comparado con λ , sino también respecto de la «longitud de onda» δ que corresponde a la frecuencia ω en el material de la partícula. En este caso, se puede calcular la polarizabilidad de la partícula mediante las fórmulas válidas para un campo estático homogéneo exterior, con la diferencia, claro está, de que para ϵ y μ hay que tomar no los valores estáticos, sino los valores correspondientes a la frecuencia dada ω . Si, como ocurre a menudo, μ difiere poco de la unidad, en la fórmula (72.1) cabe prescindir del término dipolar-magnético.

Así, para una partícula esférica de radio a tenemos (véase (8.9))

$$\mathcal{P} = V \alpha \mathbf{E}, \quad \alpha = 3(\epsilon - 1)/4\pi(\epsilon + 2),\tag{72.2}$$

y la sección eficaz de dispersión vale

$$d\sigma = (\omega/c)^4 |a|^2 V^2 \sin^2 \theta d\Omega,\tag{72.3}$$

* Véase vol. II, Teoría clásica de los campos, § 79.

donde θ es el ángulo formado por la dirección de dispersión \mathbf{n} y la del campo eléctrico \mathbf{E} de la onda incidente polarizada linealmente. La sección eficaz total es

$$\sigma = 8\pi|\alpha|^2\omega^4V^2/3c^4. \quad (72.4)$$

La dependencia de la sección eficaz respecto de la frecuencia se encuentra implícita tanto en el factor ω^4 , como en la polarizabilidad. Si las frecuencias son tan pequeñas que la dispersión de α no se manifiesta, dicha sección eficaz es proporcional a ω^4 . Obsérvese también que la sección eficaz es proporcional al cuadrado del volumen de la partícula.

Si la onda incidente no está polarizada (luz natural), para obtener la sección eficaz diferencial hay que promediar (72.3) respecto de todas las direcciones del vector \mathbf{E} en un plano perpendicular a la dirección de propagación de la onda incidente (es decir, a su vector de onda \mathbf{k}). Designando por ϑ y ϕ el ángulo polar y el acimut de \mathbf{n} respecto de \mathbf{k} (contando ϕ a partir del plano \mathbf{k}, \mathbf{E}), tenemos $\cos\theta = \sin\vartheta \cos\phi$ (fig. 31), de modo que

$$d\sigma = (\omega/c)^4|\alpha|^2V^2(1 - \sin^2\vartheta \cos^2\phi)d\Omega. \quad (72.5)$$

Promediando respecto de ϕ obtendremos la siguiente fórmula para la sección eficaz de dispersión de una onda no polarizada*:

$$d\sigma = \frac{1}{2}(\omega/c)^4|\alpha|^2V^2(1 + \cos^2\vartheta)d\Omega, \quad (72.6)$$

donde ϑ es el ángulo entre la dirección de incidencia y la de dispersión.

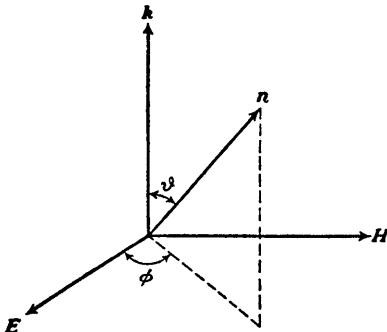


FIG. 31

De la fórmula (72.5) es fácil deducir también el grado de despolarización de la luz dispersada. Observemos, en efecto, que para una dirección dada de \mathbf{E} la dirección \mathbf{E}' se encuentra en el plano \mathbf{E}, \mathbf{n} . Por ello, la dirección del campo eléctrico \mathbf{E}' en la onda dispersada se encontrará en el plano \mathbf{k}, \mathbf{n} (*plano de dispersión*) o será perpendicular a él en los casos en que el acimut ϕ del vector \mathbf{E} respecto del plano \mathbf{k}, \mathbf{n} es igual a 0 o a $\pi/2$, respectivamente. Sean $I_{||}$ e I_{\perp} las intensidades de la radia-

* Para futuras referencias haremos notar la fórmula $\overline{\sin^2\theta} = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\vartheta)$.

ción dispersada con estas dos polarizaciones; el grado de despolarización se determina como razón de la menor de estas cantidades a la mayor. Según (72.5) obtenremos

$$I_{\parallel}/I_{\perp} = \cos^2 \vartheta. \quad (72.7)$$

Si la partícula dispersora posee una permitividad grande, se tendrá $\delta \sim c/\omega\sqrt{|\epsilon|} \ll \lambda$. El tamaño de la partícula puede entonces ser pequeño comparado con λ y a la vez no pequeño en relación con δ . En primera aproximación respecto de $1/\epsilon$, el momento eléctrico de la partícula se puede calcular en tal caso simplemente como momento de un conductor ($\epsilon \rightarrow \infty$) en un campo exterior constante homogéneo. En cambio, al calcular el momento magnético en estas condiciones, es esencial tener en cuenta las corrientes de inducción que aparecen en la partícula y el problema no queda reducido a un problema de estática; en vez de esto hay que buscar la solución de la ecuación (63.2)

$$\Delta \mathbf{H} + \epsilon \omega^2 \mathbf{H}/c^2 = 0 \quad (72.8)$$

(suponemos $\mu = 1$) que lejos de la partícula se reduce al campo de la onda incidente. Los momentos magnético y eléctrico resultan ser de igual orden de magnitud y en la fórmula (72.1) hay que conservar ambos términos. La distribución angular y el valor de la dispersión cambian en este caso fundamentalmente en comparación con el considerado más arriba (véase problema 2).

PROBLEMAS

1. Luz polarizada linealmente es dispersada por pequeñas partículas orientadas al azar cuyo tensor de polarizabilidad eléctrica posee tres valores principales distintos. Determinar el coeficiente de despolarización de la luz dispersada.

Solución. Prescindiendo, como en el texto, del momento magnético, de (72.1) se sigue

$$\mathbf{E}' = (\omega^2/c^2 R)(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\mathcal{P}}) \times \mathbf{n}.$$

El coeficiente de despolarización buscado se obtiene como razón de los valores principales del tensor bidimensional

$$I_{\alpha\beta} = \overline{E'_{\alpha} E'^{*}_{\beta}},$$

donde el trazo horizontal designa el promedio respecto de las orientaciones de las partículas dispersoras para una dirección de dispersión dada \mathbf{n} , y los índices α y β toman dos valores en un plano perpendicular a \mathbf{n}^* . Sin embargo, es más conveniente promediar el tensor tridimensional $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_k^*$, y una vez hecho esto proyectarlo sobre un plano perpendicular a \mathbf{n} ; estas componentes del tensor

$\overline{\mathcal{P}_i \mathcal{P}_k^*}$ son proporcionales a las correspondientes componentes $I_{\alpha\beta}$.

Substituyendo $\mathcal{P}_i = \alpha_{ik} E_k$, tenemos

$$\overline{\mathcal{P}_i \mathcal{P}_k^*} = \overline{\alpha_{il} \alpha_{km}^*} E_l E_m^*.$$

Para efectuar el promedio nos valdremos de la fórmula

$$\overline{\alpha_{ik} \alpha_{lm}^*} = A \delta_{ik} \delta_{lm} + B(\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}).$$

* Véase vol. II, Teoría clásica de los campos, § 50.*

Ésta es la forma más general de un tensor de cuarto orden simétrico respecto de los pares de índices i, k y l, m y que contiene solamente constantes escalares. Estas últimas se determinan a partir de dos igualdades obtenidas contrayendo el tensor, una vez respecto del par $i = k, l = m$, y la otra vez respecto de $i = l, k = m$; dichas constantes son iguales a

$$A = \frac{2|\alpha_{ii}|^2 - |\alpha_{ik}|^2}{15} = \frac{1}{15}\{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + 4\operatorname{Re}(\alpha_1\alpha_2^* + \alpha_1\alpha_3^* + \alpha_2\alpha_3^*)\},$$

$$B = \frac{3|\alpha_{ik}|^2 - |\alpha_{ii}|^2}{30} = \frac{1}{15}\{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 - \operatorname{Re}(\alpha_1\alpha_2^* + \alpha_1\alpha_3^* + \alpha_2\alpha_3^*)\},$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son los valores principales del tensor α_{ik} .

En una onda polarizada linealmente, la amplitud del campo $E^{(i)}$ (supondremos que se ha prescindido del factor temporal $e^{-i\omega t}$) puede siempre definirse como cantidad real. Se obtiene entonces

$$\mathcal{P}_i \mathcal{P}_k^* = (A+B)E_k E_k + B\delta_{ik}E^2. \quad (1)$$

Supongamos que las direcciones de n y del eje z coinciden y que el plano xz pasa por los vectores n y E ; estos ejes son ejes principales del tensor I_{ab} . Tomando las componentes adecuadas del tensor (1), obtendremos el coeficiente de despolarización

$$I_y/I_x = B/[(A+B)\sin^2\theta + B]$$

(θ es el ángulo formado por E y n).

2. Determinar la sección eficaz de dispersión por una bolita (de radio a) que posee un valor de ϵ grande; se supone que $\lambda \gg a \sim \delta$.

Solución. El problema de calcular el momento magnético que adquiere una esferita con valor dado de ϵ ($\mu = 1$) colocada en un campo magnético variable H , coincide con el resuelto en el § 45 (problema 1), con la única diferencia de que en las fórmulas que allí se obtuvieron hay que hacer $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon}$. Tenemos, por ello,

$$\mathcal{M} = -a^3\gamma H,$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{ka} \operatorname{ctg} ka - \frac{3}{(ka)^2}\right).$$

El momento eléctrico, en cambio, se calcula en primera aproximación respecto de $1/\epsilon$ simplemente como momento de una esfera conductora ($\epsilon \rightarrow \infty$) en un campo eléctrico homogéneo constante:

$$\mathcal{P} = a^3 E.$$

Teniendo en cuenta que E y H son perpendiculares entre sí, obtendremos después de un cálculo sencillo en el que se utiliza (72.1) la siguiente fórmula para la sección eficaz de dispersión:

$$d\sigma = (a^6\omega^4/c^4)\{|\gamma|^2 \cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi - (\gamma + \gamma^*) \cos\vartheta + \cos^2\vartheta(\cos^2\phi + |\gamma|^2 \operatorname{sen}^2\phi)\} d\Omega,$$

donde ϕ y ϑ son los ángulos indicados en la figura 31. En la dispersión de luz no polarizada,

$$d\sigma = (a^6\omega^4/c^4)\{[\frac{1}{4}(1+|\gamma|^2)[1+\cos^2\vartheta] - (\gamma + \gamma^*) \cos\vartheta]\} d\Omega,$$

y el grado de despolarización de la luz dispersada vale

$$I_y/I_{\perp} = |(\gamma - \cos\vartheta)/(1 - \gamma \cos\vartheta)|^2.$$

La sección eficaz total de dispersión es

$$\sigma = 8\pi a^6 \omega^4 (1 + |\gamma|^2)/3c^4.$$

En el límite $ka \rightarrow \infty$ (es decir, cuando $\lambda \gg a \gg \delta$) tenemos $\gamma = 1/2$; este límite corresponde a la dispersión por una bolita perfectamente reflectora, en cuyo interior no penetran, en absoluto, ni el campo eléctrico ni el magnético.

§ 73. Absorción de las ondas electromagnéticas por pequeñas partículas

La dispersión de las ondas electromagnéticas va acompañada de su absorción simultánea por las partículas. La sección eficaz de este proceso viene dada por la razón de la energía media Q disipada en la partícula (por segundo) a la densidad de flujo de energía incidente. Para calcular Q puede utilizarse la fórmula

$$Q = -\mathcal{P} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \mathcal{M} \cdot \dot{\mathbf{H}}, \quad (73.1)$$

donde \mathcal{P} y \mathcal{M} son los momentos totales eléctrico y magnético de la partícula, y el papel de campos externos $\dot{\mathbf{E}}$ y $\dot{\mathbf{H}}$ lo representan el campo eléctrico \mathbf{E} y el campo magnético \mathbf{H} de la onda dispersada (véase (45.21)).

Utilizando la representación compleja de las diferentes magnitudes, escribiremos (véase la nota de la pág. 227)

$$Q = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}(\mathcal{P} \cdot \dot{\mathbf{E}}^* + \mathcal{M} \cdot \dot{\mathbf{H}}^*) = \frac{1}{2}\omega V(\alpha_e'' + \alpha_m'')|\mathbf{E}|^2,$$

donde α_e , α_m son las polarizabilidades eléctrica y magnética de la partícula. Dividiendo por el flujo incidente de energía, se obtiene

$$\sigma = 4\pi\omega V(\alpha_e'' + \alpha_m'')/c. \quad (73.2)$$

Apliquemos esta fórmula a la absorción por una bolita de radio a ($a \ll \lambda$), suponiéndola de un material no magnético ($\mu = 1$). El carácter de la absorción depende fundamentalmente del valor de la permitividad.

Si ϵ no es grande, junto con $a \ll \lambda$ tenemos también $a \ll \delta$. En este caso se puede prescindir de la polarizabilidad magnética comparada con la eléctrica. Tomando para ésta el valor que se deduce de (72.2), se obtendrá

$$\sigma = 12\pi\omega a^3\epsilon''/c[(\epsilon' + 2)^2 + (\epsilon'')^2]. \quad (73.3)$$

Pero si $|\epsilon| \gg 1$, la parte eléctrica de la absorción pasa a ser pequeña y la absorción magnética puede cobrar importancia, incluso conservándose todavía $\delta \gg a$. Cuando $\delta \gg a$ (es decir, cuando $|ka| \ll 1$) la polarizabilidad magnética

$$\alpha_m = (ka)^2/40\pi = a^2\omega^2\epsilon/40\pi c^2$$

y la sección eficaz de absorción vale

$$\sigma = \frac{12\pi\omega a^3\epsilon''}{c} \left(\frac{1}{|\epsilon|^2} + \frac{\omega^2 a^2}{90c^2} \right). \quad (73.4)$$

Si ϵ sigue aumentando, la parte eléctrica de la absorción llega a ser pequeña comparada con la magnética. En el caso límite $\delta \ll a$ (es decir, $|ka| \gg 1$, $\operatorname{ctg} ka \rightarrow -i$) tenemos

$$\alpha_m = 9i/8\pi ka = 9ic\zeta/8\pi\omega a,$$

donde $\zeta = 1/\sqrt{\epsilon}$ es la impedancia superficial de la bolita. De aquí se sigue

$$\sigma = 6\pi a^2\zeta''. \quad (73.5)$$

Obsérvese que se podría obtener esta fórmula más directamente sin utilizar la expresión general de la polarizabilidad magnética de la esfera $\alpha_m(\omega)$. Cuando ζ es pequeño, la disipación de energía Q puede calcularse «por integración» del vector de Poynting promedio (67.4) sobre la superficie de la esfera, viniendo dada la distribución del campo magnético en dicha superficie por la solución (42.3) del problema correspondiente a una esfera superconductora ($\zeta = 0$) en un campo magnético homogéneo.

Conociendo la sección eficaz de absorción de la bolita, puede determinarse inmediatamente la intensidad de la radiación térmica emitida por la misma. Según la ley de Kirchhoff*, la intensidad dI (en el intervalo de frecuencia $d\omega$) se expresa mediante $\sigma(\omega)$ por la fórmula

$$dI = 4\pi c \sigma(\omega) e_0(\omega) d\omega,$$

donde

$$e_0(\omega) = \hbar \omega^3 / 4\pi^3 c^3 [\exp(\hbar\omega/T) - 1]$$

es la densidad espectral de radiación negra referida a la unidad de volumen y a la unidad de ángulo sólido.

§ 74. Difracción por una cuña

La aproximación ordinaria de la teoría de la difracción** se basa en la hipótesis de que las desviaciones respecto de la óptica geométrica son pequeñas. Con esto se supone, en primer lugar, que todas las dimensiones son grandes comparadas con la longitud de onda; esto vale tanto para el tamaño de los cuerpos (de las pantallas) o de las aberturas practicadas en ellos, como para las distancias de los cuerpos a los puntos de emisión y observación de la luz. En segundo lugar, se consideran solamente ángulos de difracción pequeños, es decir, la distribución de la luz se estudia para direcciones próximas a la dirección del límite geométrico de sombra. En estas condiciones, las propiedades ópticas concretas de la materia que forma los cuerpos carecen totalmente de importancia; sólo importa el propio hecho de la opacidad de las pantallas.

Ahora bien, si las condiciones indicadas no se cumplen, la resolución del problema de la difracción exige resolver exactamente la ecuación de onda teniendo en cuenta las adecuadas condiciones de contorno sobre las superficies de los cuerpos, condiciones que dependen de sus propiedades concretas. Hallar tales soluciones presenta dificultades matemáticas excepcionales y sólo es posible encontrarlas para un número relativamente pequeño de problemas. En tal caso, se suele introducir una hipótesis simplificadora relativa a las propiedades del cuerpo en el que se produce la difracción: se supone que se trata de un conductor perfecto (y que, por lo

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 60.

** Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, §§ 59-61.

tanto, desde el punto de vista óptico es un reflector perfecto).

En relación con esto haremos notar la siguiente circunstancia. Podría parecer natural resolver el problema de la difracción suponiendo que la superficie del cuerpo es «negra», es decir, que absorbe por completo la luz que incide sobre ella. En realidad, sin embargo, en el planteo del problema exacto de la difracción, tal hipótesis acerca de las propiedades del cuerpo resultaría intrínsecamente contradictoria. En efecto, si la propia substancia del cuerpo es fuertemente absorbente, el coeficiente de reflexión de su superficie no es pequeño, sino que, por el contrario, es próximo a la unidad (véase § 67). Por ello, el que el coeficiente de reflexión resulte realmente próximo a cero exige que la materia sea débilmente absorbente y que el grosor del cuerpo sea suficientemente grande (comparado con la longitud de onda). Ahora bien, en la teoría exacta de la difracción, inevitablemente representan un papel importante partes de la superficie del cuerpo que son próximas a su borde (distancias del orden de la longitud de onda); pero el grosor del cuerpo cerca del borde es siempre pequeño, de modo que la hipótesis de que sea «negro» no será correcta en esta región, evidentemente.

Un importante interés teórico lo presenta la solución exacta del problema de la difracción de la luz por la arista de una cuña conductora perfecta limitada por dos semiplanos que se cortan en la misma (A. Sommerfeld, 1894, fue el primero en hallar esta solución). La exposición completa de esta teoría matemática muy complicada, que exige la aplicación de métodos matemáticos especiales, se sale de los límites del presente libro. Aquí presentaremos solamente como referencia los resultados finales*.

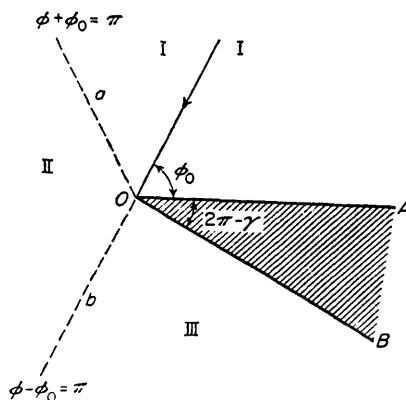


FIG. 32

* El cálculo detallado puede encontrarse en los libros de A. Sommerfeld «Optics», Academic Press, New York, 1954; P. Frank y R. von Mises, «Differential- und Integralgleichungen der Physik» parte 2, capítulo XX, 2.^a ed., Vieweg, Brunswick, 1935. Otro método de resolución, debido a M. I. Kontorovich y a N. N. Lebedev, se expone en el libro de G. A. Grinberg, «Izbrannye voprosy matematicheskoi teorii elektricheskij i magnitnyj iavlenij», cap. XXII, Izd. AN SSSR, 1948 («Problemas seleccionados de la teoría matemática de los fenómenos eléctricos y magnéticos»).

Una solución modificada para la difracción de una onda cilíndrica (emitida por una fuente lineal paralela a la arista de la cuña) la dio H. S. Carslaw (Proc. Lond. Math. Soc. 30, 121, 1899).

Elijamos la arista de la cuña como eje z de un sistema de coordenadas cilíndricas r, ϕ, z . A la superficie anterior de la cuña (OA en la fig. 32) corresponde $\phi = 0$, y a la posterior (OB), $\phi = \gamma$, donde $2\pi - \gamma$ es el ángulo de la cuña; al dominio exterior a ella corresponden los ángulos $0 < \phi < \gamma$. Supongamos que una onda monocromática plana cuya amplitud es igual a la unidad incide en el plano $r\phi$ sobre la superficie anterior de la cuña formando con ella el ángulo ϕ_0 (dada la simetría de la cuña, basta considerar los valores $\phi_0 < \gamma/2$). Distinguiremos dos casos de polarización independientes de la onda incidente (y , con ello, también de la onda difractada): cuando la arista de la cuña (z) es paralela al vector \mathbf{E} y cuando lo es al vector \mathbf{H} . Con la letra u se designa en estos casos E_z o H_z , respectivamente.

El campo electromagnético en todo el espacio viene dado entonces por la fórmula (prescindiendo del factor temporal $e^{-i\omega t}$)

$$u(r, \phi) = v(r, \phi - \phi_0) \mp v(r, \phi + \phi_0), \quad (74.1)$$

donde los signos superior e inferior corresponden, respectivamente, a las polarizaciones con \mathbf{E} y \mathbf{H} a lo largo del eje z y la función $v(r, \psi)$ se determina por la integral compleja

$$v(r, \psi) = \frac{1}{2\gamma} \int_C e^{-ikr \cos \zeta} \frac{d\zeta}{1 - e^{-i\pi(\zeta + \psi)/\gamma}}, \quad (74.2)$$

($k = \omega/c$). El camino de integración $C = C_1 + C_2$ en el plano ζ se compone de dos lazos, representados en la figura 33. Los extremos de estos lazos se encuentran en el infinito de aquellas partes del plano ζ (rayadas en la fig. 33) en las que $\text{Im}(\cos \zeta) < 0$, y, en consecuencia, el factor $e^{-ikr \cos \zeta}$ tiende a cero en el infinito. El integrando

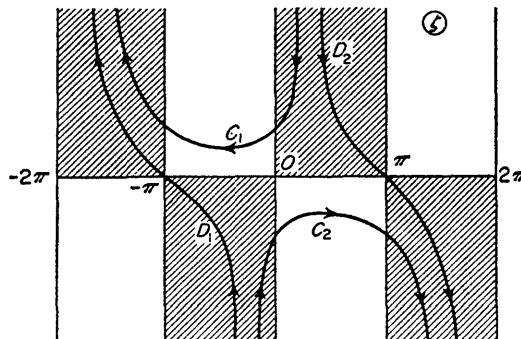


FIG. 33

en (74.2) tiene polos situados sobre el eje real ζ en los puntos $\zeta = -\psi + 2n\gamma$, donde n es un número entero. En vez del camino C se puede utilizar como camino de integración el $D = D_1 + D_2$ (fig. 33), añadiendo a la integral los residuos del integrando

en los polos situados sobre el segmento $-\pi \leq \zeta \leq \pi$, supuesto que existan. Representemos v en la forma

$$v(r, \psi) = v_0(r, \psi) + v_d(r, \psi), \quad (74.3)$$

donde v_d es la integral (74.2) calculada a lo largo del camino D y v_0 la contribución debida a los residuos en los polos antes indicados. Cada polo contribuye a v_0 con un término igual a

$$\exp [-ikr \cos (\psi - 2ny)]$$

que representa bien la onda incidente, bien una cualquiera de las ondas reflejadas por la superficie de la cuña de acuerdo con las leyes de la óptica geométrica. La función v_d , en cambio, describe la distorsión de las ondas debida propiamente a la difracción. El campo a grandes distancias de la arista de la cuña (grandes en comparación con la longitud de onda) es del mayor interés. Para $kr \gg 1$ es válida la fórmula asintótica*

$$v_d(r, \psi) = \frac{\pi}{\gamma \sqrt{2\pi kr}} e^{ikr + i\pi} \frac{\sin(\pi^2/\gamma)}{\cos(\pi^2/\gamma) - \cos(\pi\psi/\gamma)} \quad (74.4)$$

con tal que el ángulo ψ satisface la condición

$$[\cos(\pi^2/\gamma) - \cos(\pi\psi/\gamma)]^2 \gg 1/kr. \quad (74.5)$$

La dependencia de la función v_d , y con ella también la del campo

$$u_d(r, \phi) = v_d(r, \phi - \phi_0) \mp v_d(r, \phi + \phi_0)$$

respecto de r viene dada por el factor e^{ikr}/\sqrt{r} , es decir, este campo se comporta como una onda cilíndrica emitida por la arista de la cuña.

Tal como las hemos escrito, las fórmulas (74.1) a (74.5) son válidas para valores cualesquiera de los ángulos γ y ϕ_0 . Un estudio más detenido de las mismas lo llevaremos a cabo, para concretar, suponiendo que entre los ángulos γ y ϕ_0 ($\gamma > \pi + \phi_0$) existe una relación tal que, en la aproximación de la óptica geométrica, se forman dos límites de sombra: el límite Ob de sombra total (región III en la fig. 32) y el límite Oa de «sombra» de la onda reflejada por la superficie OA **.

En las regiones I, II, III la función

$$u_0(r, \phi) = v_0(r, \phi - \phi_0) \mp v_0(r, \phi + \phi_0)$$

tiene la forma siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Región I: } u_0 = e^{-ikr \cos(\phi - \phi_0)} \mp e^{-ikr \cos(\phi + \phi_0)}, \\ \text{Región II: } u_0 = e^{-ikr \cos(\phi - \phi_0)}, \\ \text{Región III: } u_0 = 0. \end{array} \right\} \quad (74.6)$$

* Los términos siguientes de este desarrollo asintótico fueron calculados por W. Pauli (Phys. Rev., 54, 924, 1938).

** En la figura 32 es $\phi_0 < \pi/2$; pero si se tiene $\phi_0 > \pi/2$, el límite Oa se encuentra a la derecha de la dirección de la onda incidente.

Cuando $\gamma < \pi + \phi_0$, la región de sombra total no existe, en general, y la reflexión (simple o incluso múltiple) se produce en ambas caras de la cuña.

Estas expresiones, que no tienden a cero cuando $kr \rightarrow \infty$, describen la onda incidente (en la región II) o la incidente y la reflejada (en la región I) no deformadas por la difracción. La deformación del campo por difracción, en cambio, viene dada por la fórmula (74.4), pero la condición (74.5) deja de cumplirse para valores ψ demasiado próximas al valor π (cuando la diferencia $|\psi - \pi|$ deja de ser grande comparada con $1/\sqrt{kr}$).

Los valores $\psi = \pi$ corresponden a los límites de la sombra geométrica; cuando $\psi = \phi - \phi_0$ este límite es el de la sombra total, y para $\psi = \phi + \phi_0$, el de sombra de la onda reflejada. En la inmediata vecindad de estos valores hay que aplicar otra expresión asintótica, cuya validez exige solamente que se cumpla la desigualdad $|\psi - \pi| \ll 1$. Esta condición, junto con la condición $kr \gg 1$, garantiza precisamente la aplicabilidad de la aproximación ordinaria de la teoría de la difracción de Fresnel*. De acuerdo con ésta, cerca del límite *Ob* de sombra total se obtiene la siguiente expresión asintótica:

$$u(r, \phi) = e^{-ikr \cos(\phi - \phi_0)} \frac{1 - i}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^w e^{i\eta^2} d\eta, \quad (74.7)$$

$$w = -(\phi - \phi_0 - \pi)\sqrt{\left(\frac{1}{2}kr\right)}.$$

Análogamente, cerca del límite *Oa* de «sombra» de la onda reflejada,

$$u(r, \phi) = e^{-ikr \cos(\phi - \phi_0)} + e^{-ikr \cos(\phi + \phi_0)} \frac{1 - i}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^w e^{i\eta^2} d\eta, \quad (74.8)$$

$$w = -(\phi + \phi_0 - \pi)\sqrt{\left(\frac{1}{2}kr\right)}.$$

En esta aproximación la figura de difracción no depende de la dirección de polarización de la onda ni del ángulo de la cuña.

Los dominios de aplicabilidad de las fórmulas (74.4), (74.7) y (74.8) en parte se solapan. Así, cerca del límite de sombra total la región de aplicabilidad común viene dada por las desigualdades

$$1 \gg |\phi - \phi_0 - \pi| \gg 1/\sqrt{(kr)}$$

y en ella se tiene

$$u(r, \phi) = u_0(r, \phi) + \frac{1}{\sqrt{(2\pi kr)}} e^{i(kr + \frac{1}{2}\pi)} \frac{1}{\phi - \phi_0 - \pi}, \quad (74.9)$$

(con u_0 dado por (74.6)). Esta expresión se obtiene a partir de (74.7) mediante las

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 60.

conocidas fórmulas asintóticas válidas para la integral de Fresnel cuando $|w|$ es grande:

$$\int_{-\infty}^w e^{i\eta^2} d\eta = (1+i)\sqrt{\frac{1}{2}\pi} + e^{iw^2}/2iw \text{ para } w > 0,$$

$$\int_{-\infty}^w e^{i\eta^2} d\eta = e^{iw^2}/2iw \quad \text{para } w < 0.$$

§ 75. Difracción por una pantalla plana

La fórmula exacta (74.2) para la difracción por una cuña puede llevarse a una forma relativamente simple en el caso particular de la difracción por un semiplano (al que corresponde $\gamma = 2\pi$) *. En efecto, la integral compleja en (74.2) puede reducirse a una integral de Fresnel:

$$v(r, \psi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i(kr \cos\psi + \frac{1}{2}\pi)} \int_{-\infty}^w e^{i\eta^2} d\eta, \\ w = \sqrt{(2kr)} \cos \frac{1}{2}\psi. \quad (75.1)$$

Esta fórmula es válida para valores cualesquiera de r y ψ . Cuando $kr \gg 1$ y para ángulos $|\psi - \pi| \gg 1/\sqrt{kr}$ resulta útil la expresión asintótica

$$v_d(r, \psi) = -e^{i(kr + \frac{1}{2}\pi)} \frac{1}{2\sqrt{(2\pi kr)} \cos \frac{1}{2}\psi} \quad (75.2)$$

(la fórmula (74.4) con $\gamma = 2\pi$) **.

La fórmula (75.2) permite obtener, en forma finita, la solución del problema de la difracción por una pantalla conductora perfecta, plana y de forma arbitraria. Además, basta suponer que las dimensiones de la pantalla y las distancias a ella son grandes comparadas con la longitud de onda y que los ángulos de difracción no son demasiado pequeños (este dominio se solapa con el de ángulos pequeños en el que son aplicables las fórmulas ordinarias de la difracción de Fresnel). El resultado se expresa en forma de integral a lo largo del contorno de la pantalla de manera análoga a como el campo difractado se expresa, en la teoría aproximada ordinaria, en forma de integral extendida a una superficie que cierra la abertura en la pantalla. No nos detendremos aquí a desarrollar estos cálculos.

* Véase la bibliografía en la nota de la pág. 361.

** Iu. V. Vandakurov (ZhETF 26, 3, 1954), obtuvo la solución exacta del problema tridimensional de la difracción, por un semiplano, de las ondas electromagnéticas emitidas por un dipolo eléctrico o magnético, orientado arbitrariamente, que se encuentra a distancia finita del borde del semiplano.

En la teoría exacta de la difracción por pantallas planas constituidas por conductores perfectos cabe enunciar un teorema (debido a *L. I. Mandel'shtam y M. A. Leontovich*) que, en cierto sentido, es análogo al teorema de Babinet en la teoría aproximada de la difracción.

Consideremos una pantalla plana con una abertura de forma arbitraria; elijamos el plano de la pantalla como plano $z = 0$ y supongamos que la onda electromagnética incide desde el semiespacio $z < 0$. Sea \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 el campo total de la onda incidente y de la onda reflejada por la pantalla (como si no existiera la abertura); imaginemos que este campo se prolonga al otro lado de la pantalla ($z > 0$). Dado que $H_z = 0$, $\mathbf{E}_t = 0$ cuando $z = 0$ (en virtud de las condiciones de contorno sobre una superficie conductora perfecta), los valores \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 para $z > 0$ y $z < 0$ estarán ligados por las relaciones

$$\begin{aligned} E_{0x}(x, y, z) &= E_{0x}(x, y, -z), & \mathbf{E}_{0t}(x, y, z) &= -\mathbf{E}_{0t}(x, y, -z), \\ H_{0x}(x, y, z) &= -H_{0x}(x, y, -z), & \mathbf{H}_{0t}(x, y, z) &= \mathbf{H}_{0t}(x, y, -z). \end{aligned} \quad (75.3)$$

Sea, además, \mathbf{E}' y \mathbf{H}' el campo que se obtendría colocando en el campo \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 una placa plana cuya forma, tamaño y posición coinciden con la abertura en la pantalla y que posee una permeabilidad $\mu = \infty$. Entonces la solución del problema de difracción por la abertura en la pantalla viene dada por las expresiones

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'), & \mathbf{H} &= \frac{1}{2}(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}') \text{ para } z < 0, \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}'), & \mathbf{H} &= \frac{1}{2}(\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}') \text{ para } z > 0. \end{aligned} \quad (75.4)$$

Para demostrarlo, obsérvese que el campo \mathbf{E}' , \mathbf{H}' posee la misma simetría (expresada por las fórmulas (75.3)) que el campo \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 . Por ello, sobre el plano $z = 0$ satisface las condiciones

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_t &= 0, & H'_z &= 0 && \text{fuera de la abertura,} \\ \mathbf{E}'_{t1} &= -\mathbf{E}'_{t2}, & H'_{z1} &= -H'_{z2} && \text{sobre la abertura} \end{aligned}$$

(los índices 1 y 2 corresponden a $z \rightarrow \pm 0$). Además, satisface las condiciones

$$E'_z = 0, \quad \mathbf{H}'_t = 0 \quad \text{sobre la abertura,}$$

ya que las condiciones de contorno sobre la superficie de un cuerpo con $\mu = \infty$ son recíprocas (en el sentido de la sustitución de \mathbf{E} , \mathbf{H} por \mathbf{H} , \mathbf{E}) de las condiciones correspondientes a una superficie perfectamente conductora ($\epsilon = \infty$). Está claro pues, que el campo (75.4) satisface las condiciones necesarias $\mathbf{E}_t = 0$, $H_z = 0$ sobre la superficie de la pantalla ($z \rightarrow -0$) fuera de la abertura y es continuo sobre la misma. Finalmente, dado que el campo \mathbf{E}' , \mathbf{H}' tiende en el infinito a \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 , el campo (75.4) tiende a \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 cuando $z \rightarrow -\infty$, y a cero cuando $z \rightarrow +\infty$. Satisface, por lo tanto, todas las condiciones del problema de difracción planteado, lo que demuestra el teorema.

Así pues, el problema de la difracción por una abertura en una pantalla con $\epsilon = \infty$ equivale al problema de la difracción por la pantalla complementaria con $\mu = \infty$.

PROBLEMAS

1. Una onda monocromática plana incide normalmente sobre una rendija, practicada en una pantalla plana de material conductor perfecto, cuya anchura $2a$ es grande comparada con la longitud de onda. Determinar la distribución de la intensidad luminosa al otro lado de la rendija y a grandes distancias de la misma para valores grandes del ángulo de difracción.

Solución. Cuando $a \gg \lambda$, el campo difractado al otro lado de la rendija se puede considerar como superposición de campos debidos a la difracción independiente por cada uno de los dos bordes de la rendija, campos que se determinan mediante la fórmula asintótica (75.2). Si las distancias $AP = r_1$ y $BP = r_2$ a los bordes de la rendija desde el punto de observación (fig. 34) son grandes comparadas con a , en los factores e^{ikr_1} y e^{ikr_2} escribirímos:

$$r_1 = r - a \operatorname{sen} \chi, \quad r_2 = r + a \operatorname{sen} \chi$$

en todos los demás términos, en cambio, supondremos que $r_1 \approx r_2 \approx r$ y que todos los ángulos formados por AP , OP , BP y el eje z son iguales a un mismo ángulo de difracción χ .

En definitiva se obtiene

$$u = \frac{e^{i(kr + \frac{1}{2}\pi)}}{\sqrt{(2\pi kr)}} \left\{ \frac{\operatorname{sen}(ka \operatorname{sen} \chi)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\chi} \pm i \frac{\cos(ka \operatorname{sen} \chi)}{\cos \frac{1}{2}\chi} \right\}.$$

De aquí se sigue para la intensidad de la luz difractada en el intervalo angular $d\chi$ (referida a la intensidad total de la luz que incide sobre la rendija):

$$\begin{aligned} dI &= \frac{1}{4\pi ka} \left\{ \left[\frac{\operatorname{sen}(ka \operatorname{sen} \chi)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\chi} \right]^2 + \left[\frac{\cos(ka \operatorname{sen} \chi)}{\cos \frac{1}{2}\chi} \right]^2 \right\} d\chi \\ &= \frac{ka}{\pi} \left\{ \left[\frac{\operatorname{sen}(ka \operatorname{sen} \chi)}{ka \operatorname{sen} \chi} \right]^2 \cos \chi + \frac{1}{[2ka \cos \frac{1}{2}\chi]^2} \right\} d\chi. \end{aligned}$$

Cuando los valores de χ son pequeños, esta expresión se convierte en la fórmula para la difracción de Fraunhofer por una rendija:

$$dI = \frac{1}{\pi ka} \frac{\operatorname{sen}^2 kax}{x^2} dx.$$

2. Una onda plana incide sobre un plano conductor perfecto en el que se ha practicado una abertura de radio a que es pequeño comparado con la longitud de onda. Determinar la intensidad de la luz difractada que pasa por la abertura (Rayleigh, 1897).

Solución. De acuerdo con lo que se expuso en el texto, este problema se reduce al de la difracción por una placa circular con $\mu = \infty$ y, dado que $a \ll \lambda$, se trata de la dispersión por una pequeña partícula. Según el § 72, para resolver este problema de dispersión hay que determinar las polarizabilidades eléctrica y magnética estáticas del disco. El campo E_0 es perpendicular al plano del disco y la condición de contorno $E'_z = 0$ coincide formalmente con la condición que se tendría en electros-tática sobre la superficie de un cuerpo con $\epsilon = 0$. En cambio, el campo H_0 es paralelo al disco y la condición de contorno $H'_t = 0$ corresponde al problema de magnetostática con $\mu = \infty$. Por ello, los momentos eléctrico y magnético del disco son (véase problema 4, § 4 y el problema del § 42):

$$\mathcal{P} = -2a^3 E_0 / 3\pi, \quad \mathcal{M} = 4a^3 H_0 / 3\pi.$$

Al pasar al problema de la difracción por una abertura, estas expresiones hay que multiplicarlas, de acuerdo con las fórmulas (75.4), por $1/2$ y substituirlas luego en la fórmula de dispersión (72.1).

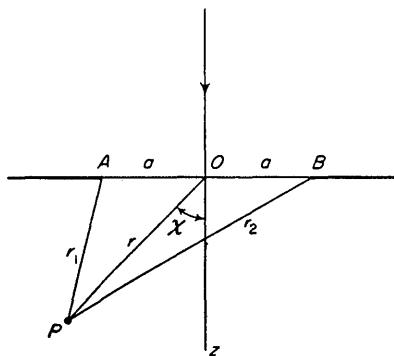


FIG. 34

Así pues, la intensidad de la radiación difractada en el ángulo sólido do^* es

$$\begin{aligned} dI &= \frac{c}{4\pi} \frac{\omega^4 a^6}{9\pi^2 c^4} \{ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 - 2\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{n}) \} \, do \\ &= \frac{c}{4\pi} \frac{\omega^4 a^6}{9\pi^2 c^4} \{ (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0)^2 + 4(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_0)^2 + 4\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_0 \times \mathbf{E}_0 \} \, do. \end{aligned}$$

La intensidad total difractada se obtiene integrando sobre un hemisferio y resulta igual a

$$I = \frac{c}{4\pi} \frac{4\omega^4 a^6}{27\pi c^4} (E_0^2 + 4H_0^2).$$

La «sección eficaz de difracción» se determinará como razón de la intensidad de la radiación difractada al flujo total de energía en la onda incidente $cE^2/4\pi$ (las letras sin subíndice se refieren al campo de la onda incidente). Distinguiremos dos casos de polarización de la onda incidente:

a) el vector \mathbf{E} en la onda incidente es perpendicular al plano de incidencia (plano xz), es decir, paralelo al plano de la pantalla (plano xy). La suma de los campos de las ondas incidente y reflejada en la superficie de la pantalla vale

$$E_0 = 0, \quad H_{0x} = 2H \cos \alpha = 2E \cos \alpha$$

(α es el ángulo de incidencia). De aquí se deduce

$$d\sigma = \frac{16a^6 \omega^4}{9\pi^2 c^4} \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \, do;$$

θ es el ángulo formado por la dirección de difracción \mathbf{n} y la normal a la pantalla (eje z), y ϕ , el acimut del vector \mathbf{n} respecto del plano de incidencia. La sección eficaz total vale

$$\sigma = (64\omega^4 a^6 / 27\pi c^4) \cos^2 \alpha.$$

b) el vector \mathbf{E} se encuentra en el plano de incidencia. Entonces

$$E_0 = E_{0z} = -2E \sin \alpha, \quad H_{0y} = 2H = 2E.$$

La sección eficaz diferencial es

$$d\sigma = \frac{16a^6 \omega^4}{9\pi^2 c^4} \{ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha) - \sin \theta \sin \alpha \cos \phi \} \, do,$$

y la total

$$\sigma = (64\omega^4 a^6 / 27\pi c^4) (1 + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha).$$

Para luz incidente natural se tiene $\sigma = (64\omega^4 a^6 / 27\pi c^4) (1 - \frac{3}{8} \sin^2 \alpha)$.

* Suponemos que se han omitido los factores $e^{-i\omega t}$, de modo que \mathbf{E} y \mathbf{H} son reales.

CAPÍTULO XI

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN MEDIOS ANISÓTROPOS

§ 76. La permitividad de los cristales

Las propiedades de un medio anisótropo relativas a las ondas electromagnéticas se determinan por los tensores $\epsilon_{ik}(\omega)$ y $\mu_{ik}(\omega)$ que establecen el ligamen entre el desplazamiento eléctrico y la inducción magnética, de un lado, y las intensidades de los campo eléctrico y magnético, de otro, de acuerdo con las fórmulas*

$$D_i = \epsilon_{ik}(\omega)E_k, B_i = \mu_{ik}(\omega)H_k.$$

En lo que sigue, nos referiremos, para concretar, al campo eléctrico y al tensor ϵ_{ik} ; todos los resultados obtenidos son por completo válidos también para el tensor μ_{ik} .

Cuando $\omega \rightarrow 0$, las magnitudes ϵ_{ik} toman sus valores estáticos, cuya simetría respecto de los índices i, k se demostró en el § 13. Esta demostración tenía un carácter puramente termodinámico y, por lo tanto, se refería solamente a los estados de equilibrio termodinámico. En cambio, el estado de la materia en un campo variable no es, naturalmente, un estado de equilibrio y, en consecuencia, dicha demostración resulta inaplicable. Para poner de manifiesto las propiedades del tensor ϵ_{ik} hay que acudir ahora al principio generalizado de simetría de los coeficientes cinéticos.

Es fácil ver que las componentes del tensor ϵ_{ik} quedan comprendidas en la definición general de las magnitudes a_{ik} **. Observemos que, en efecto, la variación de la energía (por segundo) en un campo eléctrico variable viene dada por la integral

$$\int \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV. \quad (76.1)$$

Comparando con la fórmula (V. 127.7), vemos que si se eligen como magnitudes x_i los valores de las componentes del vector \mathbf{E} en cada punto del cuerpo, las correspondientes magnitudes f_i serán las componentes de \mathbf{D} (el subíndice i recorre toda una sucesión continua de valores, numerando tanto las componentes de los vectores, como los puntos del cuerpo). El papel de coeficientes a_{ik} lo representan las compo-

* Hay que recordar que todas las magnitudes se refieren al campo variable en una onda; la existencia de un posible desplazamiento o de una inducción constantes (en los cristales piroeléctricos o ferromagnéticos) nada tiene que ver con las cuestiones consideradas aquí.

** Véase vol. V, *Física estadística*, § 127. Las fórmulas de este libro se indicarán por V.

nentes del tensor ϵ_{ik}^{-1} . Pero todas las propiedades de simetría de los tensores inverso (ϵ_{ik}) y directo coinciden, naturalmente.

Obsérvese que aquella misma definición incluye también las componentes del tensor de polarizabilidad del cuerpo en conjunto, es decir, los coeficientes en las igualdades

$$\mathcal{P}_i = V\alpha_{ik}\mathbf{E}_k.$$

En efecto, la variación de energía de un cuerpo sometido a un campo variable exterior \mathbf{E} viene dada por la fórmula

$$-\mathcal{P} \cdot \mathbf{d}\mathbf{E}/dt. \quad (76.2)$$

Está claro pues que si las tres componentes del vector \mathcal{P} son magnitudes x_i , las correspondientes magnitudes f_i serán las componentes del vector \mathbf{E} , de forma que los coeficientes α_{ik} coinciden con $V\alpha_{ik}$.

Por consiguiente, podemos aplicar el principio generalizado de simetría de los coeficientes cinéticos (V. 127.13), con lo cual llegamos a la conclusión de que el tensor ϵ_{ik} es simétrico:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}. \quad (76.3)$$

Se ha supuesto aquí que el cuerpo no se encuentra en un campo magnético exterior*.

Repetiendo para el caso anisótropo el razonamiento desarrollado en el § 61 que condujo a la fórmula (61.4), se encuentra que las pérdidas eléctricas vienen dadas por la expresión

$$\frac{i\omega}{16\pi}(\epsilon_{ik}^* - \epsilon_{ki})E_i E_k^*. \quad (76.4)$$

En cuanto a la condición de que no exista absorción, ésta se traduce en la igualdad $\epsilon_{ik}^* = \epsilon_{ki} = \epsilon_{ik}$, es decir, queda reducida, como en un medio isótropo, a la de que todos los ϵ_{ik} sean reales.

Cuando no hay absorción, la energía interna electromagnética de la unidad de volumen del cuerpo se puede definir como vimos en el § 61. Repitiendo para un medio anisótropo el razonamiento que llevó a (61.9), obtendremos la fórmula análoga

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi} \frac{d}{d\omega} (\omega\epsilon_{ik}) E_i^* E_k. \quad (76.5)$$

En el § 67 se introdujo el concepto de impedancia superficial ζ , que permite formular las condiciones de contorno sobre la superficie de un metal incluso en aquellos casos en que deja de tener sentido el concepto de permitividad. Sobre la superficie de un cuerpo anisótropo, la condición de contorno, análoga a la (67.6), debe escribirse en la forma

$$E_\alpha = \zeta_{\alpha\beta}(\mathbf{H} \times \mathbf{n})_\beta, \quad (76.6)$$

* Las propiedades del tensor ϵ_{ik} cuando existe un campo magnético exterior se estudiarán en el § 82.

donde $\zeta_{\alpha\beta}(\omega)$ es un tensor bidimensional definido sobre dicha superficie. No hay que perder de vista que los valores de este tensor, en general, dependen también de la orientación cristalográfica de la cara del cristal.

El flujo de energía que penetra en el cuerpo es

$$(c/4\pi)\mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = (c/4\pi)\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \times \mathbf{n} = (c/4\pi)E_\alpha(\mathbf{H} \times \mathbf{n})_\alpha.$$

(aquí \mathbf{E} y \mathbf{H} son reales). Resulta así evidente que si al aplicar el principio de simetría se elige como magnitudes x_α las componentes E_α , las correspondientes f_α serán $-(\mathbf{H} \times \mathbf{n})_\alpha$, es decir (volviendo a la representación compleja), las magnitudes f_α serán las $-(i/\omega)(\mathbf{H} \times \mathbf{n})_\alpha$. En consecuencia, los coeficientes α_{ab} coinciden, salvo un factor, con las componentes $\zeta_{\alpha\beta}$, y llegamos a la conclusión de que

$$\zeta_{\alpha\beta} = \zeta_{\beta\alpha} \quad (76.7)$$

(en ausencia de campo magnético exterior).

PROBLEMA

Expresar las componentes del tensor $\zeta_{\alpha\beta}$ en función de las componentes del tensor $\eta_{\alpha\beta} \equiv \epsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ (supuesto que éste exista); el cuerpo es no magnético ($\mu_{ik} = \delta_{ik}$).

Solución. En el caso anisótropo, la igualdad (67.2) $\xi^2 = 1/\epsilon$ se substituye por la siguiente:

$$\zeta_{\alpha\gamma}\zeta_{\gamma\beta} = \eta_{\alpha\beta}.$$

En componentes*

$$\begin{aligned} \zeta_{11}^2 + \zeta_{12}\zeta_{21} &= \eta_{11}, & \zeta_{22}^2 + \zeta_{12}\zeta_{21} &= \eta_{22}, \\ \zeta_{12}(\zeta_{11} + \zeta_{22}) &= \eta_{12}, & \zeta_{21}(\zeta_{11} + \zeta_{22}) &= \eta_{21}. \end{aligned}$$

La solución de estas ecuaciones es:

$$\begin{aligned} \zeta_{12} &= \eta_{12}/\xi, & \zeta_{21} &= \eta_{21}/\xi, \\ \zeta_{11} &= [\eta_{11} \pm \sqrt{(\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21})}]/\xi, & \zeta_{22} &= [\eta_{22} \pm \sqrt{(\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21})}]/\xi, \\ \xi^2 &= \eta_{11} + \eta_{22} \pm 2\sqrt{(\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21})}. \end{aligned}$$

Los signos se eligen de acuerdo con la condición de que la energía absorbida es positiva.

§ 77. Onda plana en un medio anisótropo

Al estudiar la óptica de los cuerpos anisótropos, es decir, de los cristales, nos limitaremos al caso más importante en que el medio se puede considerar (en el intervalo dado de frecuencias) no magnético y transparente. De acuerdo con esto, la relación entre las intensidades de los campos eléctrico y magnético, por un lado, y el desplazamiento eléctrico y la inducción magnética, por el otro, viene dada por las igualdades

$$D_i = \epsilon_{ik}E_k, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad (77.1)$$

siendo reales todas las componentes del tensor permitividad ϵ_{ik} , y positivos sus valores principales.

* No suponemos que se tenga $\zeta_{12} = \zeta_{21}$, admitiendo así también el caso en que existe un campo magnético exterior.

Las ecuaciones de Maxwell para el campo de una onda monocromática se escriben:

$$i\omega \mathbf{H} = c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad i\omega \mathbf{D} = -c \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (77.2)$$

En una onda plana que se propaga por un medio transparente todas las magnitudes son proporcionales a $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, con un vector de onda \mathbf{k} real. Efectuando la derivación respecto de las coordenadas, obtendremos

$$\omega \mathbf{H}/c = \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad \omega \mathbf{D}/c = -\mathbf{k} \times \mathbf{H}. \quad (77.3)$$

Está claro pues, en primer lugar, que los tres vectores \mathbf{k} , \mathbf{D} , \mathbf{H} son perpendiculares entre sí. Además, el vector \mathbf{H} es perpendicular a \mathbf{E} . Dado que el vector \mathbf{H} es perpendicular a la vez a los tres vectores \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{k} , éstos deben estar situados en un mismo plano. La figura 35 ilustra la posición mutua de todos estos vectores. Respecto de la dirección del vector de onda, son transversales \mathbf{D} y \mathbf{H} , pero no \mathbf{E} . En la figura se indica también la dirección del flujo de energía \mathbf{S} en la onda. Éste viene determinado por el producto vectorial $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, es decir, es perpendicular a \mathbf{E} y a \mathbf{H} . En contraste con el caso de una onda en un medio isótropo, la dirección del flujo de energía no coincide aquí con la del vector de onda. Es evidente que el vector \mathbf{S} es coplanario con los vectores \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{k} y forma con el vector \mathbf{k} un ángulo que es igual al formado por \mathbf{E} y \mathbf{D} entre sí.

En el módulo del vector \mathbf{k} sepáremos el factor ω/c , escribiendo

$$\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}/c. \quad (77.4)$$

El módulo del vector \mathbf{n} definido así en un medio anisótropo depende de su dirección, en contraste con lo que ocurre en un medio isótropo, en el cual $n = \sqrt{\epsilon}$ depende solamente de la frecuencia*. De acuerdo con la notación (77.4), las fórmulas fundamentales (77.3) se escribirán en la forma

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = -\mathbf{n} \times \mathbf{H}. \quad (77.5)$$

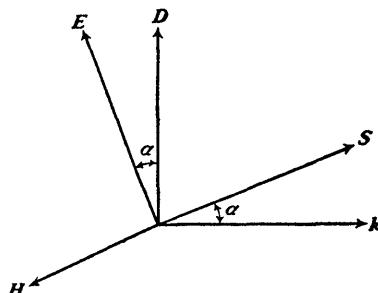


FIG. 35

* También aquí se suele llamar a la magnitud n , *índice de refracción*, aunque ahora no tiene una relación tan simple con la ley de refracción como en el caso de los cuerpos isótropos.

Escribamos también la expresión correspondiente al vector flujo de energía en una onda plana:

$$\mathbf{S} = c\mathbf{E} \times \mathbf{H}/4\pi = (c/4\pi)\{\mathbf{E}^2\mathbf{n} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})\mathbf{E}\} \quad (77.6)$$

(en esta fórmula \mathbf{E} y \mathbf{H} son reales).

Hasta aquí no hemos utilizado aún la relación (77.1) que contiene las constantes materiales ϵ_{ik} . El empleo simultáneo de esta relación y de las ecuaciones (77.5) permite determinar la función $\omega(\mathbf{k})$.

Substituyendo la primera de las fórmulas (77.5) en la segunda, obtendremos

$$\mathbf{D} = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) = n^2\mathbf{E} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n}. \quad (77.7)$$

Si se igualan las componentes de este vector a las expresiones $\epsilon_{ik}E_k$ de acuerdo con (77.1), se obtendrán tres ecuaciones lineales homogéneas para las tres componentes del vector \mathbf{E} :

$$n^2E_i - n_i n_k E_k = \epsilon_{ik}E_k$$

o bien

$$(n^2\delta_{ik} - n_i n_k - \epsilon_{ik})E_k = 0. \quad (77.8)$$

La condición de compatibilidad de estas ecuaciones exige que se anule el determinante formado por sus coeficientes:

$$|n^2\delta_{ik} - n_i n_k - \epsilon_{ik}| = 0. \quad (77.9)$$

En la práctica, es conveniente efectuar el cálculo de este determinante utilizando como ejes de coordenadas cartesianas x , y , z los ejes principales del tensor ϵ_{ik} (que en este caso se llaman *ejes dieléctricos principales*). Los valores principales del tensor los designaremos por $\epsilon^{(x)}$, $\epsilon^{(y)}$, $\epsilon^{(z)}$. Un cálculo simple conduce a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} n^2(\epsilon^{(x)}n_x^2 + \epsilon^{(y)}n_y^2 + \epsilon^{(z)}n_z^2) - [n_x^2\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(y)} + \epsilon^{(z)}) + \\ + n_y^2\epsilon^{(y)}(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(z)}) + n_z^2\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(y)})] + \epsilon^{(x)}\epsilon^{(y)}\epsilon^{(z)} = 0. \end{aligned} \quad (77.10)$$

Obsérvese que los términos de mayor grado (de grado sexto respecto de n_i) se reducen entre sí al desarrollar el determinante; esta circunstancia, naturalmente, no es casual y está ligada, en último término, con el hecho de que la onda tiene en total dos direcciones de polarización independientes, no tres.

La ecuación (77.10), que es la llamada *ecuación de Fresnel*, es una de las ecuaciones fundamentales de la óptica cristalina. Esta ecuación determina de forma implícita la ley de dispersión, es decir, la dependencia entre la frecuencia y el vector de onda (hay que recordar que los valores principales $\epsilon^{(i)}$ son funciones de la frecuencia y, en algunos casos (véase § 79), también lo son las direcciones de los ejes principales del tensor ϵ_{ik}). Sin embargo, al considerar ondas monocromáticas, la frecuencia ω , y con ella también todos los $\epsilon^{(i)}$, son de ordinario cantidades constantes dadas y entonces la ecuación (77.10) determina el módulo del vector de onda en

función de su dirección. Para una dirección dada de \mathbf{n} , (77.10) es una ecuación cuadrática respecto de n^2 con coeficientes reales. Por ello, a cada dirección de \mathbf{n} corresponden, en general, dos módulos diferentes del vector de onda.

La ecuación (77.10) (con coeficientes $\epsilon^{(i)}$ constantes) determina en el espacio de las coordenadas n_x, n_y, n_z una cierta superficie, que es la llamada *superficie de los vectores de onda**. En el caso general, esta superficie es de cuarto grado; su estudio detallado se llevará a cabo en los párrafos que siguen. Aquí indicaremos solamente algunas propiedades importantes de la misma.

Introduzcamos antes una magnitud más que caracteriza la luz que se propaga en un medio anisótropo. La dirección de los rayos luminosos (en la óptica geométrica) se determina por el vector velocidad de grupo $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$. En un medio isotrópico su dirección coincide siempre con la del vector de onda; sin embargo, en un medio anisótropo no sucede así, en general. Como característica de los rayos introduzcamos el vector \mathbf{s} , que en dirección coincide con la velocidad de grupo y cuyo módulo viene determinado por la igualdad

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 1. \quad (77.11)$$

Llamaremos a \mathbf{s} *vector rayo*. El significado de esta magnitud se explica como sigue.

Consideremos un haz de rayos (de igual frecuencia) que se propaga en todos los sentidos a partir de un cierto centro. El valor del iconal ψ (que coincide, salvo el factor ω/c , con la fase de la onda; véase § 65) en cada punto de un rayo viene dado por la integral $\int \mathbf{n} \cdot d\mathbf{l}$ tomada a lo largo del mismo. Introduciendo el vector \mathbf{s} , que determina la dirección del rayo, escribiremos

$$\psi = \int \mathbf{n} \cdot d\mathbf{l} = \int (\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}/s) dl = \int dl/s.$$

En un medio homogéneo s es constante a lo largo de un rayo, de modo que $\psi = L/s$, donde L es la longitud del segmento dado de rayo. Está claro pues que si a lo largo de cada rayo que parte del centro del haz se traza un segmento igual (o proporcional) a s , obtendremos una superficie tal que sobre ella todos los rayos tienen la misma fase. Esta superficie se llama *superficie de los rayos*.

Entre la superficie de los vectores de onda y la superficie de los rayos así introducidas existe una relación mutua «dual» en cierto sentido. Convengamos en escribir la ecuación de la superficie de los vectores de onda en la forma $f(k_x, k_y, k_z, \omega) = 0$. Entonces las componentes del vector velocidad de grupo son

$$\frac{\partial\omega}{\partial k_i} = - \frac{\partial f / \partial k_i}{\partial f / \partial \omega}, \quad (77.12)$$

es decir, resultan proporcionales a las derivadas $\partial f / \partial k_i$, o bien, lo que es lo mismo (puesto que estas derivadas se toman para ω constante), proporcionales a $\partial f / \partial n_i$.

* En la literatura se utiliza a menudo una figura mucho menos conveniente, la «superficie de las normales» (o «superficie de los índices»), que se obtiene tomando sobre cada dirección un segmento igual, no a n , sino al valor recíproco $1/n$.

A éstas también, por consiguiente, son proporcionales las componentes del vector rayo*. Pero el vector $\partial f / \partial \mathbf{n}$ está dirigido según la normal a la superficie $f = 0$. Así pues, llegamos al resultado de que la dirección del vector rayo de una onda con valor dado de \mathbf{n} viene determinada por la normal a la superficie de los vectores de onda en el punto correspondiente.

Es fácil ver que también es cierto el recíproco: las normales a la superficie de los rayos determinan las direcciones de los correspondientes vectores de onda. En efecto, el hecho de que \mathbf{s} sea perpendicular a la superficie de los vectores de onda se expresa por la relación

$$\mathbf{s} \cdot \delta \mathbf{n} = 0,$$

donde $\delta \mathbf{n}$ es una variación infinitesimal arbitraria de \mathbf{n} (para ω dado), es decir, es el vector de un desplazamiento infinitesimal sobre la superficie. Pero derivando (asimismo para ω dado) la igualdad $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 1$, obtendremos $\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{s} + \mathbf{s} \cdot \delta \mathbf{n} = 0$ de donde resulta, evidentemente, que también

$$\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{s} = 0,$$

lo que demuestra lo afirmado al principio.

Esta relación entre las superficies de \mathbf{n} y \mathbf{s} puede precisarse algo más. Sea \mathbf{n}_0 el radio vector de un punto cualquiera de la superficie de los vectores de onda y \mathbf{s}_0 el vector rayo que le corresponde; escribamos la ecuación (en las coordenadas n_x , n_y , n_z) del plano tangente en este punto. Dicha ecuación es

$$\mathbf{s}_0 \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{n}_0) = 0$$

y expresa la ortogonalidad de \mathbf{s}_0 a cualquier vector $\mathbf{n} - \mathbf{n}_0$ que se encuentra en el plano dado. Puesto que \mathbf{s}_0 y \mathbf{n}_0 están ligados por la relación $\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = 1$, esta ecuación puede escribirse en la forma

$$\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (77.13)$$

Vemos así que $1/s_0$ es la longitud de la perpendicular trazada desde el origen de coordenadas al plano tangente a la superficie de los vectores de onda en el punto \mathbf{n}_0 .

Recíprocamente: si en un punto \mathbf{s}_0 de la superficie de los rayos se traza el plano tangente, la longitud de la perpendicular a este plano trazada desde el origen de coordenadas es igual a $1/n_0$.

Veamos cuál es la posición del vector rayo respecto de los vectores campo en la onda. Para ello observemos que la dirección de la velocidad de grupo coincide

* Derivando el segundo miembro de la ecuación (77.10) respecto de n_i y determinando el coeficiente de proporcionalidad entre s_i y $\partial f / \partial n_i$ a partir de la condición $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 1$, obtendremos la siguiente fórmula que liga los vectores \mathbf{s} y \mathbf{n} :

$$s_x = n_x \frac{\epsilon(x)(\epsilon(y) + \epsilon(z)) - 2\epsilon(x)n_x^2 - (\epsilon(x) + \epsilon(y))n_y^2 - (\epsilon(x) + \epsilon(z))n_z^2}{2\epsilon(x)\epsilon(y)\epsilon(z) - n_x^2\epsilon(x)(\epsilon(y) + \epsilon(z)) - n_y^2\epsilon(y)(\epsilon(x) + \epsilon(z)) - n_z^2\epsilon(z)(\epsilon(x) + \epsilon(y))}, \quad (77.12a)$$

y análogamente para s_y , s_z .

siempre con la dirección del vector promedio (respecto del tiempo) de flujo de energía. En efecto, consideremos un paquete de ondas limitado a una pequeña porción del espacio. Es evidente que, al desplazarse el paquete, la energía concentrada en él debe desplazarse junto con el mismo y esto significa precisamente que la dirección de su flujo coincide con la dirección de la velocidad del paquete, es decir, con la velocidad de grupo*.

Dado que el vector de Poynting es perpendicular a \mathbf{H} y \mathbf{E} , llegamos ahora a la conclusión de que lo mismo cabe decir del vector \mathbf{s} :

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (77.14)$$

Un cálculo directo con ayuda de las fórmulas (77.5), (77.11) y (77.14) conduce a las relaciones

$$\mathbf{H} = \mathbf{s} \times \mathbf{D}, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{s} \times \mathbf{H}. \quad (77.15)$$

Así pues,

$$\mathbf{s} \times \mathbf{H} = \mathbf{s} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = \mathbf{n}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}) = -\mathbf{E}.$$

Si se comparan las fórmulas (77.15) con las (77.5), veremos que las unas se obtienen a partir de las otras intercambiando

$$\mathbf{E} \text{ y } \mathbf{D}, \quad \mathbf{n} \text{ y } \mathbf{s}, \quad \epsilon_{ik} \text{ y } \epsilon^{-1}_{ik} \quad (77.16)$$

(con lo cual, naturalmente, tampoco se viola la relación $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 1$). La última de estas cuatro sustituciones debe introducirse a fin de que se conserve también la relación (77.1) entre \mathbf{D} y \mathbf{E} . De esta manera cabe enunciar la siguiente regla, útil en diferentes cálculos: si una cierta ecuación es válida para un conjunto de magnitudes, la sustitución (77.16) conduce a una ecuación análoga que es válida para el otro sistema de magnitudes.

En particular, aplicando esta regla a la ecuación (77.10), obtenemos inmediatamente la ecuación análoga para el vector \mathbf{s} :

$$s^2(\epsilon^{(y)}\epsilon^{(z)}s_x^2 + \epsilon^{(x)}\epsilon^{(z)}s_y^2 + \epsilon^{(x)}\epsilon^{(y)}s_z^2) - \\ - [s_x^2(\epsilon^{(y)} + \epsilon^{(z)}) + s_y^2(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(z)}) + s_z^2(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(y)})] + 1 = 0. \quad (77.17)$$

* Es fácil demostrar también matemáticamente que las direcciones de la velocidad de grupo y del vector de Poynting coinciden. Derivando las fórmulas (77.5) (para ω dado), tendremos

$$\delta\mathbf{D} = \delta\mathbf{H} \times \mathbf{n} + \mathbf{H} \times \delta\mathbf{n}, \quad \delta\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \delta\mathbf{E} + \delta\mathbf{n} \times \mathbf{E}.$$

Multiplicando la primera igualdad escalarmente por \mathbf{E} y la segunda por \mathbf{H} , queda:

$$\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} = \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{n}, \quad \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{H} = \mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{E} + \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{n}.$$

Pero $\mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{E} = \epsilon_{ik}E_k\delta E_i = \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}$; por ello, sumando ambas igualdades, se obtendrá

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{n} = 0,$$

es decir, el vector $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ es normal a la superficie de los vectores de onda, como se quería demostrar.

El resultado así obtenido se refiere al valor instantáneo del flujo de energía (y no solamente al valor medio). Sin embargo, en esta demostración es fundamental el carácter simétrico del vector ϵ_{ik} . Por consiguiente, en esa forma el resultado no será válido para los medios en los que ϵ_{ik} no es simétrico (medios *girotrópicos*; véase § 82). Sin embargo, lo que hemos afirmado acerca del valor medio del vector de Poynting vale también en este caso.

Esta ecuación determina la forma de la superficie de los rayos. Al igual que la superficie de los vectores de onda, esta superficie es una superficie de cuarto grado. Para una dirección dada de \mathbf{s} , (77.17) da una ecuación cuadrática respecto de s^2 que tiene, en general, dos raíces reales distintas. Así pues, a lo largo de cada dirección en un cristal pueden propagarse dos rayos con diferentes vectores de onda.

Pasemos a la cuestión relativa al carácter de la polarización de las ondas que se propagan en un medio anisótropo. Las ecuaciones (77.8), a partir de las cuales se obtuvo la ecuación de Fresnel, no son convenientes para determinar dicho carácter, puesto que en ellas interviene la intensidad \mathbf{E} , mientras que es el vector desplazamiento eléctrico \mathbf{D} el que resulta transversal en la onda (respecto del \mathbf{n} dado). Para tener en cuenta, ya desde el principio, la transversalidad del vector \mathbf{D} , elegiremos por el momento un nuevo sistema de coordenadas uno de cuyos ejes tiene la misma dirección que el vector de onda. En cuanto a los otros dos ejes transversales, los designaremos por subíndices griegos que toman los valores 1, 2. Las componentes transversales de la igualdad (77.7) nos dan $D_\alpha = n^2 E_\alpha$; substituyendo aquí $E_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}^{-1} D_\beta$ (donde $\epsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ son componentes del tensor inverso del tensor ϵ_{ik}), obtendremos $D_\alpha - n^2 \epsilon_{\alpha\beta}^{-1} D_\beta = 0$, o bien

$$\left(\frac{1}{n^2} \delta_{\alpha\beta} - \epsilon_{\alpha\beta}^{-1} \right) D_\beta = 0. \quad (77.18)$$

La condición de compatibilidad de estas dos ecuaciones ($\alpha = 1, 2$) con dos incógnitas D_1, D_2 es la de que su determinante sea igual a cero. Esta condición coincide, claro está, con la ecuación de Fresnel escrita en el sistema primitivo de coordenadas x, y, z . Vemos ahora, sin embargo, que los vectores \mathbf{D} que corresponden a los dos valores de n están dirigidos a lo largo de los ejes principales de un tensor simétrico bidimensional de segundo orden ϵ_{ab}^{-1} . Según un teorema general, se deduce de aquí que estos vectores son entre sí perpendiculares. Por lo tanto, en las dos ondas con igual dirección del vector de onda, los vectores desplazamiento eléctrico están polarizados linealmente en dos planos perpendiculares.

Las ecuaciones (77.18) tienen una simple interpretación geométrica. En el sistema de coordenadas x, y, z (volvemos de nuevo a los ejes dieléctricos principales) construyamos el elipsoide tensorial que corresponde al tensor ϵ_{ik}^{-1} , es decir, la superficie

$$\epsilon_{ik}^{-1} x_i x_k = \frac{x^2}{\epsilon(x)} + \frac{y^2}{\epsilon(y)} + \frac{z^2}{\epsilon(z)} = 1 \quad (77.19)$$

(figura 36). Cortemos el elipsoide por un plano que pasa por su centro y es perpendicular a la dirección de \mathbf{n} dada. La figura de la sección será, en general, una elipse; las longitudes de sus dos ejes principales determinan los valores n , y sus direcciones, las correspondientes a direcciones de oscilación (vectores \mathbf{D}).

En particular, por esta construcción resulta evidente sin más (en el caso general de valores $\epsilon^{(x)}, \epsilon^{(y)}, \epsilon^{(z)}$ diferentes) que si el vector de onda está dirigido, por ejemplo, a lo largo del eje x , las direcciones de las polarizaciones de \mathbf{D} serán los ejes y y z .

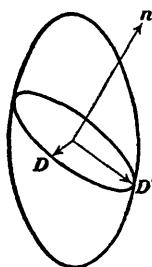


FIG. 36

Pero si el vector \mathbf{n} se encuentra en uno de los planos de coordenadas, por ejemplo, en el plano xy , una de las direcciones de polarización se encuentra también en el plano xy , mientras que la otra es perpendicular a él.

Propiedades completamente análogas las poseen las polarizaciones de las dos ondas con igual dirección del vector rayo. En vez de las direcciones del desplazamiento \mathbf{D} , hay que considerar aquí las direcciones del vector \mathbf{E} , que es perpendicular a \mathbf{s} , con lo cual en vez de las ecuaciones (77.18), tendremos las ecuaciones análogas

$$\left(\frac{1}{s^2} \delta_{\alpha\beta} - \epsilon_{\alpha\beta} \right) E_\beta = 0. \quad (77.20)$$

La construcción geométrica se basa en este caso en el elipsoide tensorial

$$\epsilon_{ik} x_i x_k = \epsilon^{(x)} x^2 + \epsilon^{(y)} y^2 + \epsilon^{(z)} z^2 = 1, \quad (77.21)$$

correspondiente al propio tensor ϵ_{ik} (éste es el llamado *elipsoide de Fresnel*).

Hay que subrayar el hecho de que las ondas planas que se propagan en un medio anisótropo están por completo polarizadas linealmente en determinados planos. En relación con esto, las propiedades ópticas de los medios anisótropos difieren fundamentalmente de las propiedades de los medios isótropos. Una onda plana que se propaga en un medio isótropo está, en general, polarizada elípticamente, y sólo en casos particulares la polarización elíptica se reduce a la lineal. Esta diferencia fundamental se debe a que el caso de un medio totalmente isótropo es, en cierto sentido, un caso degenerado: a las dos direcciones de polarización corresponde aquí un mismo vector de onda, en vez de dos diferentes (con igual dirección) en el caso general de un medio anisótropo; ahora bien, al propagarse dos ondas polarizadas linealmente con un mismo valor de \mathbf{n} , se componen dando lugar a una onda polarizada elípticamente.

§ 78. Propiedades ópticas de los cristales uniáxicos

Las propiedades ópticas de un cristal dependen, en primer lugar, de la simetría de su tensor permitividad ϵ_{ik} . En relación con esto todos los cristales se dividen

en tres categorías: cúbicos, uniáxicos y biáxicos (véase § 13).

En un cristal del sistema cúbico es $\epsilon_{ik} = \epsilon\delta_{ik}$, es decir, los tres valores principales del tensor coinciden, mientras que las direcciones de los ejes principales son arbitrarias. Por ello, en lo que concierne a sus propiedades ópticas, los cristales cúbicos en nada se distinguen de los cuerpos isótropos.

A los cristales uniáxicos pertenecen los sistemas romboédrico, tetragonal y hexagonal. Uno de los ejes principales del tensor ϵ_{ik} coincide aquí con el eje de simetría de tercero, cuarto o sexto orden, respectivamente. Este eje se llama en óptica *eje óptico* del cristal (en lo que sigue elegiremos el eje z de forma que coincida con el mismo y designaremos el correspondiente valor principal de ϵ_{ik} por $\epsilon_{||}$). En cuanto a las direcciones de los otros dos ejes principales (situados en un plano perpendicular al eje óptico), éstas son arbitrarias y los correspondientes valores principales del tensor dieléctrico coinciden (a continuación se designan por ϵ_{\perp}).

Si en la ecuación de Fresnel (77.10) se hace $\epsilon^{(x)} = \epsilon^{(y)} = \epsilon_{\perp}$, $\epsilon^{(z)} = \epsilon_{||}$, la expresión en el primer miembro se descompone en dos factores cuadráticos:

$$(n^2 - \epsilon_{\perp})[\epsilon_{||} n_z^2 + \epsilon_{\perp}(n_x^2 + n_y^2) - \epsilon_{\perp}\epsilon_{||}] = 0.$$

En otras palabras, la ecuación de cuarto grado se descompone en dos ecuaciones de segundo

$$n^2 = \epsilon_{\perp}, \quad (78.1)$$

$$\frac{n_z^2}{\epsilon_{\perp}} + \frac{n_x^2 + n_y^2}{\epsilon_{||}} = 1. \quad (78.2)$$

Geométricamente, esto significa que la superficie de los vectores de onda (que en el caso general es una superficie de cuarto grado) se descompone en dos superficies separadas, a saber, una esfera y un elipsoide. En la figura 37 se representa un corte longitudinal (eje z) de estas superficies. Son posibles aquí dos casos: si $\epsilon_{\perp} > \epsilon_{||}$, la esfera se encuentra fuera del elipsoide, mientras que si se tiene $\epsilon_{\perp} < \epsilon_{||}$, es interior al mismo (en el primer caso el cristal uniaxial se califica de *negativo*, y en el segundo, de *positivo*). Ambas superficies son tangentes entre sí en dos puntos, que son los polos opuestos situados sobre el eje n_z . Dicho de otra manera, a la dirección del eje óptico corresponde un solo valor del vector de onda.

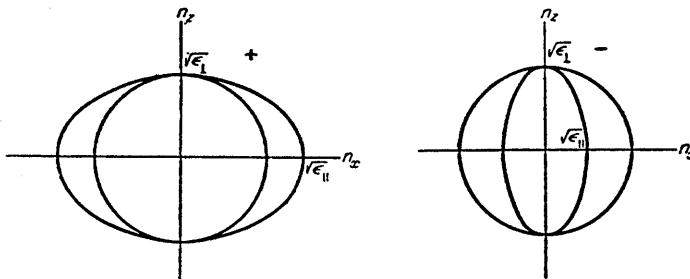


FIG. 37

Una forma totalmente análoga la posee la superficie de los rayos. Según la regla (77.16), su ecuación se obtiene a partir de (78.1) y (78.2) substituyendo \mathbf{n} por \mathbf{s} y ϵ por $1/\epsilon$:

$$s^2 = 1/\epsilon_{\perp}, \quad (78.3)$$

$$\epsilon_{\perp} s_z^2 + \epsilon_{\parallel}(s_x^2 + s_y^2) = 1. \quad (78.4)$$

En un cristal positivo el elipsoide se encuentra dentro de la esfera, y en uno negativo, al revés.

Vemos de esta manera que en un cristal uniaxico pueden propagarse ondas de dos tipos. En relación con uno de ellos (las llamadas *ondas ordinarias*) el cristal se comporta como un cuerpo isotrópico, con un índice de refracción $n = \sqrt{\epsilon_{\perp}}$. El módulo del vector de onda es igual a wn/c , sin depender de su dirección, mientras que el vector rayo coincide con la dirección de \mathbf{n} .

En cambio, en las ondas del segundo tipo (las llamadas *ondas extraordinarias*) el módulo del vector de onda depende del ángulo θ que forma con el eje óptico. Según (78.2), se tiene

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_{\perp}}. \quad (78.5)$$

En lo que concierne al vector rayo de la onda extraordinaria, su dirección no coincide con la del correspondiente vector de onda, pero ambos se encuentran en un mismo plano que pasa por el eje óptico (plano que se llama *sección principal* correspondiente al \mathbf{n} dado). Supongamos que dicho plano coincide con el plano zx . Derivando el primer miembro de la igualdad (78.2) respecto de n_z y de n_x y formando el cociente de estas derivadas, se encuentra la dirección del vector rayo:

$$s_x/s_z = \epsilon_{\perp} n_x / \epsilon_{\parallel} n_z.$$

En otras palabras, el ángulo θ' entre el vector rayo y el eje óptico está ligado con el ángulo θ por la simple relación:

$$\tan \theta' = (\epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel}) \tan \theta. \quad (78.6)$$

Las direcciones de \mathbf{n} y \mathbf{l} coinciden solamente para las ondas que se propagan a lo largo del eje óptico o perpendicularmente al mismo.

La cuestión de cuál sea la polarización de las ondas ordinaria y extraordinaria se resuelve de manera muy sencilla. Para ello basta observar que los cuatro vectores \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{s} , \mathbf{n} son coplanarios en cualquier onda. En la onda extraordinaria las direcciones de \mathbf{s} y \mathbf{n} no coinciden, pero se encuentran en la misma sección principal. Por ello, esta onda está polarizada de manera que los vectores \mathbf{E} y \mathbf{D} se encuentran en dicha sección. Por otra parte, los vectores \mathbf{D} en las ondas ordinaria y extraordinaria con igual dirección de \mathbf{n} (o los vectores \mathbf{E} para igual dirección de \mathbf{s}) son perpendiculares entre sí. En consecuencia, la polarización de la onda ordinaria es tal que \mathbf{E} y \mathbf{D} se hallan en un plano perpendicular a la sección principal.

Sólo constituyen excepción las ondas que se propagan en la dirección del eje

óptico. En esta dirección desaparece la diferencia entre las ondas ordinaria y extraordinaria, sus polarizaciones se componen y dan lugar, en general, a una onda polarizada elípticamente.

El fenómeno de la refracción de una onda plana que incide sobre la superficie de un cristal difiere fundamentalmente de la refracción en la superficie de separación entre dos medios isótropos. La ley de refracción (y la de reflexión) también aquí se obtiene a partir de la condición de que sea continua la componente n_t del vector de onda tangente a la superficie de separación. Por ello, el vector de onda de la refractada (como también el de la reflejada) se encuentra en el plano de incidencia. Sin embargo, aparecen entonces simultáneamente en el cristal dos ondas refractadas diferentes (*doble refracción*) en correspondencia con los dos valores posibles de la componente normal que resultan de la ecuación de Fresnel para un n_t dado. Además, es necesario recordar que la dirección observada de propagación de los rayos se determina no por el vector de onda, sino por el vector rayo s ; dicha dirección difiere de la de n y, en el caso general, se encuentra fuera del plano de incidencia.

En un cristal uniaxico, se forman en la refracción ondas refractadas ordinaria y extraordinaria. La primera es por completo análoga a las ondas refractadas ordinarias en los medios isótropos; en particular, su vector rayo (que coincide en dirección con el vector de onda) se encuentra en el plano de incidencia. En cambio, la dirección del vector rayo de la onda extraordinaria no se halla, en general, en dicho plano.

PROBLEMAS

1. Hallar la dirección del rayo extraordinario en la refracción de la luz (que incide desde el vacío) por la superficie de un cristal uniaxico perpendicular a su eje óptico.

Solución. En este caso, el rayo refractado permanece en el plano de incidencia (que elegiremos como plano xz , con el eje z dirigido según la normal a la superficie). En la refracción se conserva la componente x del vector de onda $n_x = \sin \vartheta$ (ϑ es el ángulo de incidencia); la componente n_z de la onda refractada se encuentra según (78.2):

$$n_z = \sqrt{\left(\epsilon_{\perp} - \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_i} \sin^2 \vartheta\right)}.$$

La dirección del rayo refractado (ϑ' es el ángulo de refracción) se encuentra a partir de (78.6):

$$\tan \vartheta' = \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_i} \frac{n_x}{n_z} = \frac{\sqrt{\epsilon_{\perp}} \sin \vartheta}{\sqrt{[\epsilon_i(\epsilon_{\perp} - \sin^2 \vartheta)]}}.$$

2. Hallar la dirección del rayo extraordinario para incidencia normal de la luz sobre la superficie de un cristal uniaxico y una dirección arbitraria del eje óptico.

Solución. El rayo refractado se encuentra en el plano xz que pasa por la normal a la superficie (eje z) y el eje óptico; sea α el ángulo formado por dicha normal y este eje. El vector rayo (cuyas componentes son proporcionales a las derivadas del primer miembro de la ecuación (78.2) respecto de las correspondientes componentes de n) es proporcional a

$$\frac{n}{\epsilon_i} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}) \mathbf{l} \left(\frac{1}{\epsilon_{\perp}} - \frac{1}{\epsilon_i} \right),$$

donde \mathbf{l} es el vector unitario en la dirección del eje óptico. En el presente caso, el vector de onda \mathbf{n} está dirigido según el eje z , de modo que

$$s_x \sim \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{1}{\epsilon_{\perp}} - \frac{1}{\epsilon_i} \right), \quad s_z \sim \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\epsilon_i} + \frac{\cos^2 \alpha}{\epsilon_{\perp}}.$$

A partir de aquí se encuentra para el ángulo de refracción ϑ' :

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{s_x}{s_z} = \frac{(\epsilon_i - \epsilon_{\perp}) \operatorname{sen} 2\alpha}{\epsilon_i + \epsilon_{\perp} + (\epsilon_i - \epsilon_{\perp}) \cos 2\alpha}.$$

§ 79. Cristales biáxicos

En los cristales biáxicos, los tres valores principales del tensor ϵ_{ik} son diferentes. A este tipo de cristales pertenecen los sistemas triclinico, monoclinico y rómbico. En los cristales del sistema triclinico la posición de los ejes dieléctricos principales no está vinculada absolutamente con ninguna dirección cristalográfica determinada; en particular, dicha posición cambia al variar la frecuencia, de la que dependen todas las componentes ϵ_{ik} . En los cristales del sistema monoclinico, está fijado cristalográficamente uno de los ejes dieléctricos principales (que coincide con el eje de simetría de segundo orden o es perpendicular al plano de simetría); en cambio, la posición de los otros dos ejes principales depende de la frecuencia. Finalmente, en los cristales del sistema rómbico está fijada la posición de los tres ejes principales, los cuales deben coincidir con los tres ejes de simetría de segundo orden perpendiculares entre sí.

El estudio de las propiedades ópticas de los cristales biáxicos supone el de la ecuación de Fresnel (77.10) en su forma general.

Admitamos en lo que sigue, para concretar, que

$$\epsilon^{(x)} < \epsilon^{(y)} < \epsilon^{(z)}. \quad (79.1)$$

A fin de determinar la forma de la superficie de cuarto orden definida por la ecuación (77.10), hallemos ante todo la forma de sus secciones por los planos de coordenadas. Haciendo en la ecuación (77.10) $n_z = 0$, se encuentra que su primer miembro se descompone en dos factores:

$$(n^2 - \epsilon^{(z)}) (\epsilon^{(x)} n_x^2 + \epsilon^{(y)} n_y^2 - \epsilon^{(x)} \epsilon^{(y)}) = 0.$$

Es por esto evidente que el contorno de la sección en el plano xy está formado por la circunferencia

$$n^2 = \epsilon^{(z)} \quad (79.2)$$

y la elipse

$$\frac{n_x^2}{\epsilon^{(y)}} + \frac{n_y^2}{\epsilon^{(x)}} = 1, \quad (79.3)$$

encontrándose la elipse dentro de la circunferencia de acuerdo con la hipótesis (79.1). De manera análoga se encuentra que la sección con los planos yz y xz también se descompone en una elipse y una circunferencia, pero en el plano yz la elipse se encuentra fuera de la circunferencia, mientras que en el plano xz se cortan. Así pues, la superficie de los vectores de onda es una superficie que se corta a sí misma, del tipo representado en la figura 38 (en la figura se ha dibujado la superficie en un octante).

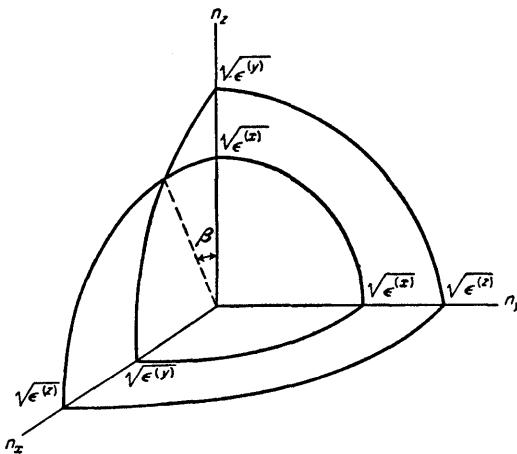


FIG. 38

Esta superficie tiene cuatro puntos singulares, los cuatro puntos de intersección consigo misma que se encuentran en cada uno de los cuadrantes situados en el plano xz . Los puntos singulares de una superficie dada por una ecuación del tipo $f(n_x, n_y, n_z) = 0$, se determinan, como es sabido, igualando a cero las tres derivadas primeras de la función f . Derivando la expresión que aparece en el primer miembro de la ecuación (77.10), obtendremos las siguientes ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} n_x [\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(y)} + \epsilon^{(z)}) - \epsilon^{(x)}n^2 - (\epsilon^{(x)}n_x^2 + \epsilon^{(y)}n_y^2 + \epsilon^{(z)}n_z^2)] &= 0, \\ n_y [\epsilon^{(y)}(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(z)}) - \epsilon^{(y)}n^2 - (\epsilon^{(x)}n_x^2 + \epsilon^{(y)}n_y^2 + \epsilon^{(z)}n_z^2)] &= 0, \\ n_z [\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(y)}) - \epsilon^{(z)}n^2 - (\epsilon^{(x)}n_x^2 + \epsilon^{(y)}n_y^2 + \epsilon^{(z)}n_z^2)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (79.4)$$

(debiendo cumplirse además, naturalmente, la propia ecuación (77.10)). Dado que sabemos a priori que las direcciones buscadas de \mathbf{n} se encuentran en el plano xz , hagamos $n_y = 0$, con lo cual de las otras dos ecuaciones se deduce, después de un simple cálculo*:

$$n_x^2 = \frac{\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)})}{\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(x)}}, \quad n_z^2 = \frac{\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)})}{\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(x)}}. \quad (79.5)$$

* Es fácil comprobar directamente que la solución así obtenida es la única solución real de las ecuaciones (79.4). Si las tres componentes n_x, n_y, n_z son diferentes de cero, las tres ecuaciones (79.4) son incompatibles (en ellas intervienen solamente dos incógnitas, esencialmente: n^2 y $\epsilon^{(x)}n_x^2 + \epsilon^{(y)}n_y^2 + \epsilon^{(z)}n_z^2$). Pero si $n_x = 0$ o $n_z = 0$, las ecuaciones tienen soluciones imaginarias.

Las direcciones de estos vectores \mathbf{n} forman con el eje z un ángulo para el cual

$$\frac{n_x}{n_z} = \pm \operatorname{tg} \beta = \pm \sqrt{\frac{\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)})}{\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)})}}. \quad (79.6)$$

Esta fórmula determina dos ejes (dos direcciones) en el plano xz , cada uno de los cuales pasa por dos puntos singulares opuestos y forma con el eje z el ángulo β . Estos ejes se llaman *ejes ópticos* (o *binormales*) del cristal; en la figura 38 se indica por una recta de puntos uno de ellos. Las direcciones de los ejes ópticos son, evidentemente, las únicas direcciones en las que el vector de onda tiene un único valor*.

Propiedades completamente análogas tiene la superficie de los rayos. Para obtener las correspondientes fórmulas basta substituir \mathbf{n} por \mathbf{s} y ϵ por $1/\epsilon$. En particular, se tienen dos *ejes ópticos de rayos* (o *birradiales*), que se encuentran también en el plano xz y que forman con el eje z un ángulo γ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{\frac{\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)}}{\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)}}} = \sqrt{\frac{\epsilon^{(x)}}{\epsilon^{(z)}}} \operatorname{tg} \beta. \quad (79.7)$$

Dado que $\epsilon^{(x)} < \epsilon^{(z)}$, se tendrá $\gamma < \beta$.

Las direcciones de los vectores \mathbf{n} y \mathbf{s} que se corresponden entre sí vienen determinadas por las fórmulas generales (77.12a). Estas direcciones coinciden solamente para las ondas que se propagan a lo largo de uno de los ejes de coordenadas (es decir, de uno de los ejes dieléctricos principales). Si \mathbf{n} se encuentra en uno de los planos de coordenadas, el vector \mathbf{s} se encuentra también en dicho plano. Esta regla, sin embargo, tiene una notable excepción: la de los vectores de onda dirigidos en el sentido de los ejes ópticos.

Al substituir los valores de \mathbf{n} dados por (79.5), las fórmulas (77.12a) dan para las componentes de \mathbf{s} una expresión indeterminada de la forma $0/0$. La causa y el significado de esta indeterminación es del todo comprensible en virtud de las siguientes consideraciones geométricas. Cerca de un punto singular las hojas exterior e interior de la superficie de los vectores de onda representan conos que tienen un vértice común. En este vértice (que es el punto singular) la dirección de la normal a la superficie resulta indeterminada; ahora bien, las fórmulas (77.12a) determinan la dirección de \mathbf{s} precisamente como dirección de la normal. En realidad, a un vector de onda dirigido a lo largo de un eje óptico (de una binormal) corresponde un conjunto infinito de vectores rayo cuyas direcciones forman una determinada superficie cónica (que es el llamado *cono de refracción cónica interna*).

Para hallar este cono de rayos cabría estudiar las direcciones de las normales en la vecindad del punto singular. Sin embargo, un camino más intuitivo se basa en la construcción geométrica mediante la superficie de los rayos.

* En el elipsoide tensorial (77.19) las binormales se determinan como direcciones para las que las secciones del elipsoide por planos perpendiculares a las mismas son circunferencias. Como es sabido, un elipsoide de tres ejes posee dos de tales secciones.

En la figura 39 se ha representado en un cuadrante (por líneas continuas) la sección de la superficie de los rayos por el plano xz . Referida a estos mismos ejes de coordenadas se ha representado (cambiando arbitrariamente la escala) la sección de la superficie de los vectores de onda. La recta OS es la birradial, y la ON , la binormal; el vector de onda que corresponde al punto N se designará por \mathbf{n}_N . Es fácil ver que al punto singular N de la superficie de vectores de onda corresponde, sobre la superficie de los rayos, un plano tangente singular, que es perpendicular a la dirección ON y tangente a la superficie no en un solo punto, sino según una curva completa (que resulta ser una circunferencia). En la figura 39 la traza de este plano se ha representado por el segmento ab . Esto se sigue inmediatamente de la correspondencia geométrica indicada en el § 77 entre la superficie de los vectores de onda y la superficie de los rayos: si en un punto cualquiera s de la superficie de los rayos se traza el plano tangente, la perpendicular trazada desde el origen de coordenadas a este plano coincide en dirección con \mathbf{n} y su longitud es igual a $1/n$, donde \mathbf{n} es el vector de onda que corresponde al s dado. En nuestro caso debe tenerse un conjunto infinito de vectores s que corresponden a un mismo $\mathbf{n} = \mathbf{n}_N$; por ello, los puntos correspondientes de la superficie de los rayos deben encontrarse en un mismo plano tangente, debiendo ser éste perpendicular a \mathbf{n}_N . Así pues, en la figura 39 el triángulo Oab es la traza de la sección del cono de refracción cónica interna por el plano xz .

El cálculo cuantitativo correspondiente a la construcción geométrica que precede no ofrece dificultades particulares, pero no lo expondremos aquí, limitándonos a dar las fórmulas finales. La ecuación de la circunferencia, que es intersección del cono de refracción y la superficie de los rayos, viene definida por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} & (\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(x)}) s_y^2 + \\ & + \{s_x \sqrt{[\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)})]} - s_z \sqrt{[\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)})]}\} \times \\ & \times \left(s_x \sqrt{\frac{\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)}}{\epsilon^{(x)}}} - s_z \sqrt{\frac{\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)}}{\epsilon^{(z)}}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (79.8)$$

$$s_x \sqrt{[\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)})]} + s_z \sqrt{[\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)})]} = \sqrt{[\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(x)}]}. \quad (79.9)$$

La primera de estas ecuaciones, si en ella se interpreta s_x , s_y , s_z como tres variables independientes, es la ecuación del propio cono de refracción. En cuanto a la segunda, ésta da la ecuación del plano tangente a la superficie de los rayos. En particular, para $s_y = 0$ la ecuación (79.8) se descompone en dos ecuaciones

$$\frac{s_x}{s_z} = \sqrt{\frac{\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)})}{\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)})}}, \quad \frac{s_x}{s_z} = \sqrt{\frac{\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)})}{\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)})}},$$

que determinan las direcciones de los rayos límite (los Oa y Ob , respectivamente, en la figura 39) en el plano de la sección por xz . La primera de ellas coincide con la dirección de la binormal (cf. (79.6)), que, al mismo tiempo, es perpendicular a la tangente ab .

Una situación por completo análoga se presenta para los vectores de onda que

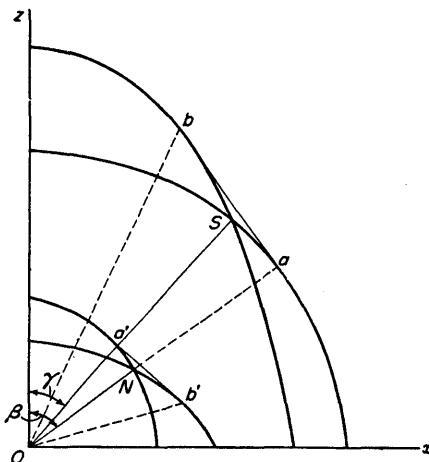


FIG. 39

corresponden a un vector rayo dado. Al vector s , dirigido según la birradial, corresponde un conjunto infinito de vectores de onda cuyas direcciones forman el llamado *cono de refracción cónica externa* (en la figura 39 el triángulo Oab es la sección del cono por el plano xz). Las correspondientes fórmulas se obtienen, como siempre, mediante las sustituciones $s \rightarrow n$, $\epsilon \rightarrow 1/\epsilon$ en las fórmulas (79.8), (79.9), y se escriben:

$$\begin{aligned} \epsilon^{(y)}(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(x)})n_y^2 + [n_x\sqrt{(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)})} - n_z\sqrt{(\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)})}] \times \\ \times [n_x\epsilon^{(x)}\sqrt{(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)})} - n_z\epsilon^{(z)}\sqrt{(\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)})}] = 0, \\ n_x\sqrt{(\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)})} + n_z\sqrt{(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)})} = \sqrt{[\epsilon^{(y)}(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(x)})]}. \end{aligned}$$

Para observar de hecho la refracción cónica interna* cabe valerse de una placa planoparalela cortada en un cristal perpendicular a una binormal (fig. 40). La superficie de la placa está cubierta por un diafragma de pequeña abertura que separa de la onda que incide perpendicularmente sobre la placa (onda con una determinada dirección del vector de onda) un haz estrecho. El vector de onda en la luz que penetra en la placa tiene esta misma dirección, que coincide con la binormal, y por ello los rayos se distribuyen según la superficie del cono de refracción interna. La luz que sale por la otra superficie de la placa, que tiene el mismo vector de onda que la luz incidente, se distribuye así sobre la superficie de un cilindro circular.

Para observar la refracción cónica exterior, en cambio, la placa debe cortarse perpendicularmente a una birradial, mientras que sus dos superficies se cubren por diafragmas con pequeñas aberturas y dispuestos exactamente el uno frente al otro. Al iluminar la placa con un haz de luz convergente (es decir, con un haz que contiene

* La descripción que sigue es muy esquemática.

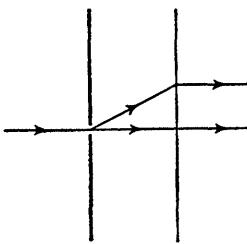


FIG. 40

rayos en todas las direcciones posibles de \mathbf{n}) los diafragmas permiten la penetración en la placa de los rayos cuya dirección s coincide con la de la birradial y , por lo tanto, con direcciones \mathbf{n} que forman la superficie del cono de refracción cónica externa. La luz que sale de la segunda abertura se distribuye también, en consecuencia, sobre una superficie cónica (la cual, sin embargo, debido a la refracción a la salida, no coincide exactamente con el cono de refracción externa).

Las leyes de la refracción sobre la superficie de un cristal biáxico para una dirección de incidencia arbitraria son extraordinariamente complicadas y no nos paramos a considerarlas*. Indicaremos solamente que, en contraste con el caso de un cristal uniáxico, las dos ondas refractadas son «extraordinarias» y, en particular, sus rayos no se encuentran en el plano de incidencia.

§ 80. Doble refracción en un campo eléctrico

Un cuerpo isótropo colocado en un campo eléctrico constante se convierte en ópticamente anisótropo. La aparición de esta anisotropía puede considerarse como resultado del cambio de la permitividad bajo la influencia del campo constante. Aunque el cambio es relativamente débil, sin embargo, es fundamental en este caso, ya que conduce a una variación cualitativa de las propiedades ópticas del cuerpo.

En este párrafo designaremos por E la intensidad del campo eléctrico constante en el cuerpo** y efectuaremos el desarrollo del tensor permitividad ϵ_{ik} en potencias de esta cantidad. En un cuerpo isótropo, en la aproximación de orden cero es $\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)}\delta_{ik}$. No pueden existir términos de primer orden respecto del campo en ϵ_{ik} , puesto que en un cuerpo isótropo no existe ningún vector constante que permitiera construir un tensor de segundo orden lineal en E . Por lo tanto, los términos siguientes del desarrollo de ϵ_{ik} serán cuadráticos respecto del campo. A partir de las componentes de un vector se pueden construir dos tensores simétricos de segundo orden: $E^2\delta_{ik}$ y E_iE_k . De ellos, el primero no altera la simetría del tensor $\epsilon^{(0)}\delta_{ik}$ y la suma

* Una exposición detallada de los correspondientes cálculos se puede encontrar en *Handbuch d. Physik*, Bd. XX, Berlín, 1928.

** ¡No se confunda con la intensidad, de ordinario muy pequeña, del campo eléctrico variable en la onda!

a éste de un término de la forma constante $E^2\delta_{ik}$ se reduce simplemente a una pequeña corrección a la constante escalar $\epsilon^{(0)}$; esta corrección no lleva, evidentemente, a la aparición de ninguna anisotropía óptica y, en consecuencia, carece de interés. De esta manera llegamos a la siguiente forma del tensor permitividad como función del campo:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)}\delta_{ik} + \alpha E_i E_k, \quad (80.1)$$

donde α es una constante escalar.

Uno de los ejes principales de este tensor coincide con la dirección del campo eléctrico y el correspondiente valor principal es igual a

$$\epsilon_{\parallel} = \epsilon^{(0)} + \alpha E^2. \quad (80.2)$$

Los otros dos valores principales son iguales entre sí,

$$\epsilon_{\perp} = \epsilon^{(0)}, \quad (80.3)$$

y la posición de los correspondientes ejes principales en un plano perpendicular al campo es arbitraria. Así pues, un cuerpo isótropo en un campo eléctrico se comporta desde el punto de vista óptico, como un cristal uniáxico (*efecto Kerr*).

El cambio de la simetría óptica en un campo eléctrico puede también tener lugar en un cristal (así, un cristal ópticamente uniáxico puede transformarse en biáxico, un cristal cúbico ópticamente isótropo puede convertirse en ópticamente anisótropo). En contraste con el fenómeno correspondiente en el caso de los cuerpos isótropos, el efecto puede aquí ser también de primer orden respecto del campo. A este efecto lineal corresponde un tensor dieléctrico de la forma

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik}^{(0)} + \alpha_{ikl} E_l,$$

donde el conjunto de los coeficientes α_{ikl} constituyen un tensor de tercer orden simétrico respecto de los índices i y k ($\alpha_{ikl} = \alpha_{kli}$). La simetría de este tensor coincide con la simetría del tensor piezoelectrónico. Por ello, el efecto considerado existe en los cristales de aquellas mismas 20 clases en los que puede darse la piezoelectricidad.

§ 81. Fenómenos dinamo-ópticos

Junto con el efecto Kerr considerado en el párrafo precedente, existen también otros casos de alteración de la simetría óptica de un medio bajo la influencia de agentes exteriores.

Entre ellos encontramos, en primer lugar, el efecto de las deformaciones eléctricas sobre las propiedades ópticas de los sólidos. En particular, como resultado de la deformación, un cuerpo sólido isótropo puede pasar a ser ópticamente anisótropo. Estos fenómenos se describen mediante la introducción en $\epsilon_{ik}(\omega)$ de términos complementarios proporcionales a las componentes del tensor deformación. Las correspondientes expresiones tienen una forma que coincide exactamente con

la de las fórmulas (16.1) y (16.6) que escribimos para la permitividad estática, con la única diferencia de que los coeficientes que en ellos aparecen son ahora funciones de la frecuencia. Así, en la deformación de un cuerpo isótropo

$$\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)}\delta_{ik} + a_1 u_{ik} + a_2 u_{il}\delta_{ik}. \quad (81.1)$$

Los coeficientes $a_1(\omega)$ y $a_2(\omega)$ se llaman *constantes opticoelásticas*.

Otro caso es la aparición de anisotropía óptica en un líquido que se mueve. Claro está, un movimiento de traslación del líquido como un todo no puede conducir a ninguna anisotropía; por ello, es necesario que existan en el mismo gradientes de velocidad. La correspondiente expresión general para el tensor dieléctrico

$$\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)}\delta_{ik} + \lambda_1 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad (81.2)$$

representa los primeros términos del desarrollo de ϵ_{ik} en potencias de las derivadas de la velocidad. En un líquido incompresible se tiene $\partial v_l / \partial x_l \equiv \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ y los dos últimos términos en (81.2) se anulan al contraer (i, k). Además, $\epsilon^{(0)}$ coincide con la permitividad del líquido en reposo*.

El segundo y tercer términos en (81.2) son, respectivamente, simétrico y antisimétrico respecto de los índices i, k . En una rotación uniforme del líquido como un todo, se tiene $\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r}$ (Ω es la velocidad angular de rotación) y el término simétrico se anula**.

De hecho, los fenómenos considerados adquieren un valor apreciable tan sólo en aquellos sistemas como las suspensiones y las disoluciones coloidales con partículas de forma anisótropa. En este caso, el efecto, llamado *efecto Maxwell*, está ligado fundamentalmente con la acción orientadora de los gradientes de velocidad sobre las partículas en suspensión en el líquido. Puesto que una rotación uniforme no puede orientar las partículas, se tendrá $\lambda_2 \ll \lambda_1$, de modo que

$$\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)}\delta_{ik} + \lambda_1 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \quad (81.3)$$

§ 82. Efectos magneto-ópticos

Cuando existe un campo magnético constante \mathbf{H}^{***} , el tensor ϵ_{ik} deja de ser

* Para evitar posibles malentendidos, subrayaremos que a la expresión (81.2) no son aplicables las relaciones de simetría que se estudiaron en V, § 127 (principio generalizado de simetría de los coeficientes cinéticos). Al deducir dichas relaciones se supuso que los procesos descritos por los coeficientes considerados son las únicas fuentes de disipación de energía en el sistema. Pero, en el presente caso, junto con la disipación en el campo electromagnético variable de la onda, se tiene todavía una fuente más de disipación que nada tiene que ver con el campo, a saber, el rozamiento interno en la corriente no homogénea de líquido.

** Las propiedades ópticas que resultan de la parte antisimétrica de ϵ_{ik} se estudian en el § 82.

*** ¡No se confunda con el campo débil periódico de la onda electromagnética!

simétrico. El principio generalizado de simetría de los coeficientes cinéticos, expresado por la fórmula (V. 127.16), exige que:

$$\epsilon_{ik}(\mathbf{H}) = \epsilon_{ki}(-\mathbf{H}). \quad (82.1)$$

La condición de que no exista absorción implica únicamente el carácter hermítico de este tensor:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}^*, \quad (82.2)$$

(como puede verse a partir de (76.4)), pero no el que sea real. De (82.2) se sigue sólo que las partes real e imaginaria de ϵ_{ik} han de ser, respectivamente, simétrica y antisimétrica:

$$\epsilon_{ik}' = \epsilon_{ki}', \quad \epsilon_{ik}'' = -\epsilon_{ki}''. \quad (82.3)$$

Teniendo en cuenta (82.1), resulta

$$\begin{aligned} \epsilon_{ik}'(\mathbf{H}) &= \epsilon_{ki}'(\mathbf{H}) = \epsilon_{ik}'(-\mathbf{H}), \\ \epsilon_{ik}''(\mathbf{H}) &= -\epsilon_{ki}''(\mathbf{H}) = -\epsilon_{ik}''(-\mathbf{H}), \end{aligned} \quad (82.4)$$

es decir, en un medio no absorbente las magnitudes ϵ'_{ik} son funciones pares de \mathbf{H} , y las ϵ''_{ik} , funciones impares.

Estas mismas propiedades de simetría, posee, evidentemente, también el tensor inverso ϵ_{ik}^{-1} . En los cálculos que seguirán resultará más conveniente utilizar precisamente este tensor. Para simplificar la notación, escribiremos*

$$\epsilon^{-1}{}_{ik} = \eta_{ik} = \eta_{ik}' + i\eta_{ik}''. \quad (82.5)$$

Como es sabido, cualquier tensor antisimétrico de segundo orden es equivalente a un cierto vector axil (su dual); para el tensor η''_{ik} designaremos este vector por \mathbf{G} . Mediante el tensor unidad totalmente antisimétrico e_{ikl} , la relación entre las componentes del tensor η''_{ik} y del vector \mathbf{G} se escribe en la forma

$$\eta_{ik}'' = e_{ikl}G_l, \quad (82.6)$$

o, en componentes:

$$\eta_{xy}'' = G_z, \quad \eta_{zx}'' = G_y, \quad \eta_{yz}'' = G_x.$$

La relación $E_i = \eta_{ik}D_k$ entre el desplazamiento eléctrico y la intensidad del campo toma entonces la forma siguiente:

$$E_i = (\eta_{ik}' + ie_{ikl}G_l)D_k = \eta_{ik}'D_k + i(\mathbf{D} \times \mathbf{G})_i. \quad (82.7)$$

Un medio en el que la dependencia entre \mathbf{E} y \mathbf{D} posea esta forma se califica de *girotrópico***.

* Claro está, η'_{ik} y η''_{ik} no son los tensores inversos de los ϵ'_{ik} y ϵ''_{ik} .

** Se suele llamar *vector giro* al vector \mathbf{g} en la relación directa $D_i = \epsilon_{ik}'E_k + i(\mathbf{E} \times \mathbf{g})_i$. (82.7a) Entre los coeficientes en (82.7) y (82.7a) existen las relaciones dadas por las siguientes fórmulas (véase el problema 1 del § 21):

$\eta_{ik}' = \{|\epsilon'| \epsilon'^{-1}{}_{ik} - g_ig_k\} / |\epsilon|, \quad G_i = -\epsilon_{ik}g_k / |\epsilon|,$ donde $|\epsilon|$ y $|\epsilon'|$ son los determinantes de los tensores ϵ_{ik} y ϵ'_{ik} . (82.7b)

Estudiemos de manera general el carácter de las ondas que se propagan en un medio girotrópico arbitrario, suponiendo que éste es anisótropo y sin hacer hipótesis alguna acerca del valor del campo magnético*.

Elijamos el eje z de modo que sea paralelo a la dirección del vector de onda y escribamos la ecuación (77.18) en la forma:

$$\left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{n^2} \delta_{\alpha\beta} \right) D_\beta = \left(\eta_{\alpha\beta}' + i\eta_{\alpha\beta}'' - \frac{1}{n^2} \delta_{\alpha\beta} \right) D_\beta = 0, \quad (82.8)$$

donde los subíndices α, β toman los valores x, y . Los ejes x e y los tomaremos paralelos a los ejes principales del tensor bidimensional $\eta'_{\alpha\beta}$ y designaremos los correspondientes valores principales de este tensor por n_{01}^{-2} y n_{02}^{-2} ; entonces las ecuaciones adoptan la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n_{01}^{-2}} - \frac{1}{n^2} \right) D_x + iG_z D_y &= 0, \\ -iG_z D_x + \left(\frac{1}{n_{02}^{-2}} - \frac{1}{n^2} \right) D_y &= 0. \end{aligned} \quad (82.9)$$

La condición de que el determinante de este sistema sea igual a cero da la ecuación cuadrática respecto de n :

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_{01}^{-2}} \right) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_{02}^{-2}} \right) = G_z^2, \quad (82.10)$$

cuyas raíces determinan los dos valores de n asociados con la dirección dada de \mathbf{n} :**

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_{01}^{-2}} + \frac{1}{n_{02}^{-2}} \right) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{n_{01}^{-2}} - \frac{1}{n_{02}^{-2}} \right)^2 + G_z^2 \right]}. \quad (82.11)$$

Substituyendo estos valores en la ecuación (82.9), se encuentran las correspondientes razones:

$$\frac{D_y}{D_x} = \frac{i}{G_z} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_{01}^{-2}} - \frac{1}{n_{02}^{-2}} \right) \mp \sqrt{\left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{n_{01}^{-2}} - \frac{1}{n_{02}^{-2}} \right)^2 + G_z^2 \right]} \right\}. \quad (82.12)$$

Que la razón D_y/D_x sea imaginaria pura significa que las ondas están polarizadas elípticamente y que los ejes principales de las elipses de polarización coinciden con los ejes x, y . El producto de los dos valores de esta razón es igual a la unidad,

* Como antes, admitiremos que el medio es no magnético respecto al campo variable de la onda electromagnética (es decir, suponemos $\mu_{ik}(\omega) = \delta_{ik}$). Con esto, sin embargo, no se excluye la posibilidad de imanación del medio por un campo constante (es decir, la permeabilidad estática puede ser diferente de 1).

Todas las propiedades de $\epsilon_{ik}(\omega)$ que hemos expuesto valen en igual grado para el tensor $\mu_{ik}(\omega)$ cuando en el intervalo de frecuencias en cuestión cobra importancia la dispersión de la permeabilidad.

** Cuando no existe campo, $\mathbf{G} = 0$ y $n = n_{01}$ o n_{02} . Sin embargo, no hay que perder de vista que cuando el campo no es nulo las magnitudes n_{01} y n_{02} en la ecuación (82.10) no tienen, en general, el sentido de valores de n para $\mathbf{H} = 0$, puesto que no sólo el vector \mathbf{G} depende del campo, sino también las componentes del tensor η'_{ik} .

como es fácil ver. En otras palabras, si en una onda es

$$D_y = i\rho D_x,$$

(donde el número real ρ representa la razón de las longitudes de los ejes de la elipse de polarización), en la otra onda se tendrá

$$D_y = -iD_x/\rho.$$

Esto significa que para las elipses de polarización de las dos ondas la razón de los ejes es la misma, pero que dichas elipses están giradas 90° una respecto de otra; los sentidos de la rotación en ellas son opuestos (fig. 41)*.

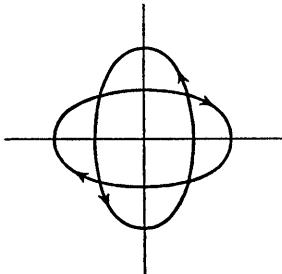


FIG. 41

Las componentes del vector \mathbf{G} y del tensor η'_{ik} son funciones de la intensidad del campo magnético. Si (como ocurre con frecuencia) el campo magnético es relativamente débil, puede efectuarse el desarrollo en potencias del mismo. El vector \mathbf{G} es igual a cero cuando no hay campo; por ello, en un campo magnético podemos hacer

$$G_i = f_{ik} H_k, \quad (82.13)$$

donde f_{ik} es un tensor de segundo orden, en general no simétrico. Este tipo de dependencia está de acuerdo con la regla general (82.4) según la cual en un medio transparente las componentes del tensor antisimétrico η''_{ik} (al igual que las del tensor ϵ''_{ik}) deben ser funciones impares de \mathbf{H} . Por lo que se refiere al tensor simétrico η'_{ik} , sus componentes son funciones pares del campo magnético. En consecuencia, los primeros términos correctivos (respecto de los valores cuando no existe la onda) de η'_{ik} son de segundo orden respecto del campo**.

* Si se designan los vectores \mathbf{D} en ambas ondas por \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 , las relaciones obtenidas pueden escribirse en la forma

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2^* = D_{1x} D_{2x}^* + D_{1y} D_{2y}^* = 0.$$

Ésta es una propiedad general de los vectores propios que se obtienen al reducir a sus ejes un tensor hermítico (en este caso, el tensor $\eta'_{\alpha\beta}$).

** Al prescindir de cantidades de segundo orden, las fórmulas (82.7b) se reducen a las relaciones siguientes más sencillas:

$$\eta_{ik}' = \epsilon'^{-1}_{ik}, \quad G_i = -\epsilon'_{ik} g_k / |\epsilon'|. \quad (82.13a)$$

En el caso general en que el vector de onda tiene una dirección arbitraria, el campo magnético influye relativamente poco sobre la propagación de la luz en el cristal, provocando solamente la aparición de una débil polarización elíptica de las oscilaciones con una pequeña razón (de primer orden respecto del campo) de las longitudes de los ejes de la elipse correspondiente.

Una excepción en el carácter del efecto magneto-óptico la constituyen solamente las direcciones de los ejes ópticos (y las próximas a los mismos), a lo largo de los cuales ambos valores de n coinciden cuando no existe el campo. Las raíces de la ecuación (82.10) difieren entonces de estos valores en cantidades que son de primer orden* y se presentan efectos análogos a los que se producen en los cuerpos isótropos que pasamos a considerar a continuación.

El efecto magneto-óptico en los cuerpos isótropos (y también en los cristales del sistema cúbico) presenta particular interés debido a su carácter peculiar y a su intensidad relativamente grande.

Prescindiendo de las cantidades de segundo orden, tenemos $\eta'_{ik} = \epsilon^{-1}\delta_{ik}$, donde ϵ es la permitividad del medio isótropo en ausencia de campo magnético. La dependencia entre \mathbf{D} y \mathbf{E} viene dada por la fórmula

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} + i\mathbf{D} \times \mathbf{G}, \quad (82.14)$$

o bien

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + i\mathbf{E} \times \mathbf{g}, \quad (82.15)$$

estando ligados los vectores \mathbf{g} y \mathbf{G} , en esta misma aproximación, por la relación

$$\mathbf{G} = -\mathbf{g}/\epsilon^2. \quad (82.16)$$

La dependencia de \mathbf{g} (o de \mathbf{G}) respecto del campo en un medio isótropo se reduce a la simple proporcionalidad:

$$\mathbf{g} = f\mathbf{H}; \quad (82.17)$$

la constante escalar lo mismo puede ser positiva que negativa.

En la ecuación (82.10) tenemos ahora $n_{01} = n_{02} \equiv n_0 = \sqrt{\epsilon}$; éste es el coeficiente de refracción cuando no existe la onda. Por consiguiente,

$$1/n^2 = \mp G_z + 1/n_0^2$$

o bien, con la misma precisión,

$$n_{\mp}^2 = n_0^2 \pm n_0^4 G_z = n_0^2 \mp g_z. \quad (82.18)$$

* Hay que hacer notar que las dos raíces de la ecuación (82.10) difieren entonces un poco entre sí. Esto significa geométricamente que las dos hojas (la interior y la exterior) de la superficie de vectores de onda están separadas.

Recordando que el eje z se ha elegido paralelo al vector \mathbf{n} , puede escribirse esta fórmula con igual precisión en la forma vectorial siguiente:

$$\left(\mathbf{n} \pm \frac{1}{2n_0} \mathbf{g} \right)^2 = n^2. \quad (82.19)$$

Se ve por esto que la superficie de los vectores de onda está constituida, en el presente caso, por un sistema de dos esferas de radio n_0 cuyos centros están desplazados en la dirección del vector \mathbf{G} a distancias $\pm g/2n_0$ del origen de coordenadas.

A cada uno de los dos valores de n se asocia su polarización de la onda, a saber,

$$D_x = \mp i D_y, \quad (82.20)$$

donde los signos corresponden a los de (82.18). La igualdad de los valores absolutos de D_x y D_y , junto con un corrimiento de fases entre ellos de $\mp\pi/2$, significa que las ondas están polarizadas circularmente, con un sentido de rotación del vector \mathbf{D} contrario al de las agujas de un reloj y en el mismo sentido, respectivamente, si se mira en el sentido en que está orientado el vector de onda (o bien, como se suele decir, ondas polarizadas *a la derecha* (dextrógira) y *a la izquierda* (levógira), respectivamente).

La diferencia entre los índices de refracción de las ondas polarizadas a la izquierda y a la derecha conduce a que, en la refracción por la superficie de un cuerpo girotrópico, aparecen dos ondas refractadas polarizadas circularmente (fenómeno que se llama *doble refracción circular*).

Supongamos que una onda plana polarizada linealmente incide en el sentido de la normal a una lámina planoparalela de cierta substancia (de grosor l). Elegiremos el eje z de modo que sea paralelo a la dirección de incidencia, y el eje x en el sentido de vector $\mathbf{E} (= \mathbf{D})$ de la onda incidente. Una oscilación lineal se puede representar como suma de dos oscilaciones circulares con sentidos de rotación opuestos, las cuales se propagarán luego en la lámina con vectores de onda diferentes $k_{\pm} = (\omega/c)n_{\pm}$. Tomando por convenio igual a la unidad la amplitud de la onda, tenemos

$$D_x = \frac{1}{2} [\exp(ik_+ z) + \exp(ik_- z)], \quad D_y = \frac{1}{2} i [-\exp(ik_+ z) + \exp(ik_- z)],$$

o bien, introduciendo $k = (\frac{1}{2})(k_+ + k_-)$ y $\kappa = (\frac{1}{2})(k_+ - k_-)$,

$$D_x = \frac{1}{2} e^{ikz} (e^{i\kappa z} + e^{-i\kappa z}) = e^{ikz} \cos \kappa z,$$

$$D_y = \frac{1}{2} i e^{ikz} (-e^{i\kappa z} + e^{-i\kappa z}) = e^{ikz} \sin \kappa z.$$

A la salida de la lámina,

$$D_y/D_x = \tan \kappa l = \tan (l\omega g / 2cn_0).$$

El carácter real de esta razón significa que la onda se conserva polarizada linealmente, pero con una dirección de polarización girada respecto de la inicial (*efecto*

Faraday). El ángulo de giro del plano de polarización es proporcional al camino recorrido por la onda; por unidad de longitud en el sentido del vector de onda, dicho giro es igual a

$$(\omega g/2cn_0) \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo formado por \mathbf{n} y \mathbf{g} .

Hay que hacer notar que, para una dirección dada del campo magnético, el sentido de rotación del plano de polarización (respecto del sentido de \mathbf{n}) se transforma en el opuesto al cambiar el signo de \mathbf{n} : la rotación a la derecha se transforma en rotación a la izquierda, y reciprocamente. Por ello, si un rayo recorre un mismo camino dos veces (uno de ida y otro de vuelta), la rotación total del plano de polarización será el doble de la correspondiente a un solo paso.

Cuando $\theta = \pi/2$ (vector de onda perpendicular al campo magnético), el efecto lineal respecto del campo descrito por las fórmulas (82.18) desaparece (de acuerdo con la regla general antes indicada, según la cual, de todas las componentes del vector \mathbf{g} , sólo influye en la propagación de la luz su proyección sobre la dirección de \mathbf{n}). Por lo tanto, para ángulos θ próximos a $\pi/2$ hay que tener también en cuenta los términos que son proporcionales al cuadrado del campo. En particular, deben incluirse los términos de segundo orden en el tensor η'_{ik} . En virtud de la simetría axial en torno de la dirección del campo, los dos valores principales del tensor simétrico η'_{ik} serán iguales (como en un cristal uniaxial). En lo que sigue tomaremos el eje x paralelo a la dirección del campo y designaremos los valores principales de η'_{ik} en las direcciones paralela y perpendicular al campo magnético por η_{\parallel} y η_{\perp} ; la diferencia $\eta_{\parallel} - \eta_{\perp}$ es proporcional a H^2 .

Consideremos el efecto puramente cuadrático que se produce cuando \mathbf{n} y \mathbf{g} son perpendiculares entre sí (*efecto Cotton-Mouton*). En las ecuaciones (82.9) y (82.10) tenemos, en este caso, $G_z = 0$, mientras que n_{01}^{-2} y n_{02}^{-2} son iguales, respectivamente, a η_{\parallel} y η_{\perp} . De esta manera, en una de las ondas es

$$1/n^2 = \eta_{\parallel}, D_y = 0;$$

esta onda está polarizada linealmente, con el vector \mathbf{D} paralelo al eje x . En cambio, en la otra onda

$$1/n^2 = \eta_{\perp}, D_x = 0,$$

es decir, en ella \mathbf{D} está dirigido a lo largo del eje y . Supongamos que luz polarizada linealmente incide según la normal a una lámina planoparalela que se encuentra en un campo magnético paralelo a la superficie de la misma. Las dos componentes de la luz que penetra en la materia (con vectores \mathbf{D} en los planos xz e yz) se propagan con valores distintos de n . Como resultado de esto la luz que sale por la cara opuesta de la lámina está polarizada elípticamente.

PROBLEMAS

1. Determinar las direcciones de los rayos en la refracción de un rayo que incide desde el vacío sobre la superficie de un cuerpo isótropo en un campo magnético.

Solución. La dirección del vector rayo s se determina por la normal a la superficie de los vectores de onda; derivando el primer miembro de la ecuación (82.19) respecto de las componentes del vector n , se encuentra que el vector s es proporcional a $n \pm g/2n_0$. El cuadrado del valor absoluto de esta expresión es igual a n_0^2 ; por ello, el vector unitario en el sentido del rayo viene dado por la fórmula

$$\frac{\mathbf{s}}{s} = \frac{1}{n_0} \left(\mathbf{n} \pm \frac{1}{2n_0} \mathbf{g} \right). \quad (1)$$

Sea θ el ángulo de incidencia. Los rayos refractados no se encuentran, en general, en el plano de incidencia y su dirección viene determinada por el ángulo θ' con la normal a la superficie y el acimut ϕ' referido al plano de incidencia. Tomemos éste como plano zx , con el eje z perpendicular a la superficie refractante. En la refracción se conservan constantes las componentes n_x , n_y del vector de onda. En el rayo incidente éstas son iguales a $n_x = \sin \theta$, $n_y = 0$. Substituyendo estos valores en (1), se encuentran las componentes x e y del vector unitario s/s que proporcionan sin más la dirección de los rayos refractados:

$$\sin \theta' \cos \phi' = \frac{1}{n_0} \sin \theta \pm \frac{1}{2n_0^2} g_z,$$

$$\sin \theta' \sin \phi' = \pm \frac{1}{2n_0^2} g_y.$$

Para ángulos de incidencia no demasiado pequeños, el acimut ϕ' es pequeño y puede escribirse

$$\phi' = \pm g_y / 2n_0 \sin \theta,$$

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta}{n_0} \pm \frac{g_z}{2n_0^2}.$$

En el caso de incidencia normal ($\theta = 0$) elegiremos el plano zx de modo que pase por el vector G ; entonces $\phi' = 0$ y para θ' tenemos

$$\theta' \cong \sin \theta' = \pm g_z / 2n_0^2.$$

Aunque en esta fórmula no aparece g_z , sin embargo deja de ser aplicable cuando $g_z = 0$, puesto que cuando los vectores n y g son perpendiculares entre sí no basta la aproximación lineal respecto del campo.

2. Determinar la polarización de la luz reflejada cuando una onda polarizada linealmente que procede del vacío incide según la normal sobre la superficie de un cuerpo que se ha convertido en anisótropo por encontrarse en un campo magnético.

Solución. Para incidencia normal, la dirección del vector de onda se conserva al pasar al segundo medio. Por ello, en todas las ondas (la incidente, la reflejada y la refractada) los vectores H son paralelos a la superficie de separación (plano xy). En lo que concierne al vector eléctrico E , éste es también paralelo al plano xy en las ondas incidente y reflejada, mientras que en la onda refractada, aunque en ella es $E_z \neq 0$, la relación entre las componentes x e y de E y H es la misma que en un cuerpo isótropo ($H_x = -nE_y$, $H_y = nE_x$). Si la polarización de la onda incidente coincide con la polarización de uno de los dos tipos de onda que pueden propagarse en el medio anisótropo (refractante) para la dirección dada de n , aparece sólo una onda refractada con esta misma polarización. En tales condiciones, el problema no difiere formalmente del de la refracción por un cuerpo isótropo y los campos E_1 y E_0 en las ondas reflejada e incidente están ligados entre sí por

$$E_1 = (1-n)E_0/(1+n), \quad (1)$$

donde n es el coeficiente de refracción que corresponde a la polarización dada.

La polarización lineal puede considerarse como resultado de la composición de dos polarizaciones circulares con sentidos de rotación opuestos; si en la onda incidente E_0 es paralelo al eje x , escribiremos $E_0 = E_0^+ + E_0^-$, donde

$$E_0^{+x} = iE_0^{+y} = \frac{1}{2}E_0, \quad E_0^{-x} = -iE_0^{-y} = \frac{1}{2}E_0.$$

Utilizando para cada una de las ondas E_0^\pm la fórmula (1) con los correspondientes valores de n_\pm dados por la fórmula (82.18), obtendremos:

$$E_{1x} = \frac{1}{2}E_0 \left[\frac{1-n_+}{1+n_+} + \frac{1-n_-}{1+n_-} \right] \cong E_0 \frac{1-n_0}{1+n_0},$$

$$E_{1y} = \frac{1}{2}iE_0 \left[\frac{1-n_-}{1+n_-} - \frac{1-n_+}{1+n_+} \right] \cong iE_0 \frac{g \cos \theta}{n_0(1+n_0)^2}$$

(θ es el ángulo formado por la dirección de incidencia y el vector g). Vemos así que la onda reflejada se encuentra polarizada elípticamente, que el eje mayor de la elipse es paralelo al eje x y que la razón del eje menor al mayor es igual a

$$(g \cos \theta)/n_0(n_0^2 - 1).$$

3. Determinar la ley límite según la cual depende de la frecuencia el vector giro para grandes valores de la misma.

Solución. Los cálculos son análogos a los desarrollados en el § 59, con la diferencia de que la ecuación del movimiento del electrón debe incluir la fuerza de Lorentz que ejerce el campo magnético exterior constante \mathbf{H} :

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + e\mathbf{v}' \times \mathbf{H}/c.$$

Si se cumple la condición $\omega \gg eH/mc$, esta ecuación se puede resolver por aproximaciones sucesivas. Con una precisión que alcanza los términos de primer orden respecto de \mathbf{H} , obtendremos

$$\mathbf{v}' = \frac{ie}{m\omega} \mathbf{E} - \frac{e^2}{m^2\omega^2 c} \mathbf{E} \times \mathbf{H},$$

a partir de lo cual se encuentra el desplazamiento eléctrico en la forma

$$\mathbf{D} = \epsilon(\omega)\mathbf{E} + if(\omega)\mathbf{E} \times \mathbf{H},$$

donde $\epsilon(\omega)$ coincide con (59.1) y

$$f(\omega) = -4\pi Ne^3/cm^2\omega^3.$$

§ 83. Actividad óptica natural

La dispersión de la permitividad (y de la permeabilidad) respecto de la frecuencia expresa la dependencia de las propiedades macroscópicas de la materia respecto de la variación temporal del campo electromagnético. En cambio, en toda la teoría que precede no se tuvo en cuenta la dependencia respecto de la heterogeneidad espacial. La condición que hace posible prescindir de esta última estriba en que las dimensiones atómicas a son pequeñas comparadas con la longitud de onda λ (véase § 58).

La desigualdad $a \ll \lambda$ es condición necesaria para que sea aplicable la teoría macroscópica. Pero si se prescinde por completo de las cantidades que contienen la razón a/λ , que es pequeña, desaparecen ciertos fenómenos cualitativamente nue-

vos que se manifiestan cuando se tienen en cuenta los términos del desarrollo en a/λ que siguen al de orden cero. Pasamos ahora precisamente a estudiar estos fenómenos.

Al desarrollo respecto de las potencias de a/λ corresponde en la teoría macroscópica el desarrollo del desplazamiento eléctrico \mathbf{D} en potencias, no sólo del propio campo \mathbf{E} , sino también de sus derivadas espaciales. Limitándonos a los términos de primer orden, hemos de tener en cuenta en este desarrollo los términos que son proporcionales a las potencias primeras de las derivadas de primer orden. Para un campo monocromático (de frecuencia ω), escribiremos el desarrollo en la forma

$$\mathbf{D}_i = \epsilon_{ik}^{(0)} \mathbf{E}_k + \gamma_{ikl} \partial \mathbf{E}_k / \partial x_l, \quad (83.1)$$

donde las magnitudes $\epsilon_{ik}^{(0)}$ y γ_{ikl} son funciones de la frecuencia.

Antes de pasar al estudio de esta aproximación, es necesario hacer la siguiente observación. En el grado de aproximación que ahora nos interesa pierde su significado físico la descomposición del valor medio de la densidad microscópica de corriente $\bar{\rho}\mathbf{v}$ en dos partes $\partial\mathbf{P}/\partial t$ y $c \operatorname{rot} \mathbf{M}$. Por ello, en la teoría que exponemos resulta razonable escribir la ecuación de Maxwell en la forma

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (83.2)$$

sin introducir, junto con la intensidad media $\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{B}$ del campo magnético microscópico, otra magnitud más, el vector \mathbf{H} . En vez de éste, todos los términos que resultan de promediar las corrientes microscópicas se suponen incluidos en la definición de \mathbf{D} .

Las propiedades de simetría del tensor γ_{ikl} en (83.1) se ponen de manifiesto aplicando el principio generalizado de simetría de los coeficientes cinéticos, de manera análoga a como procedimos en el § 76 para el tensor ϵ_{ik} . Vimos entonces que si como magnitudes x_i se eligen las componentes del vector \mathbf{E} en cada punto del cuerpo, las correspondientes magnitudes f_i serán las componentes del vector \mathbf{D} . Sin embargo, la presencia de las derivadas espaciales en las relaciones (83.1) entorpece la aplicación directa del principio de simetría. Conviene aquí aplicar éste como sigue. Sean x_i, x'_i dos sistemas distintos de valores de las magnitudes x_i , y f_i, f'_i los correspondientes conjuntos de valores de las magnitudes f_i . En virtud de la simetría ($\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$) de los coeficientes de las relaciones

$$x_i = \sum_k \alpha_{ik} f_k, \quad x'_i = \sum_k \alpha_{ik} f'_k$$

podemos escribir

$$\sum_i x_i f'_i = \sum_i x'_i f_i. \quad (83.3)$$

En el presente caso esta igualdad toma la forma

$$\int E_i D'_i dV = \int E'_i D_i dV.$$

Substituyendo aquí (83.1) y teniendo en cuenta la simetría de $\epsilon_{ik}^{(0)}$ ya conocida, se obtendrá

$$\int \gamma_{ikl} E_i \frac{\partial E'_k}{\partial x_l} dV = \int \gamma_{ikl} E'_i \frac{\partial E_k}{\partial x_l} dV$$

o bien, integrando por partes ambos miembros de la igualdad,

$$\int \gamma_{ikl} E_i \frac{\partial E'_k}{\partial x_l} dV = - \int \gamma_{ikl} E_k \frac{\partial E'_i}{\partial x_l} dV = - \int \gamma_{kil} E_i \frac{\partial E'_k}{\partial x_l} dV.$$

Dado el carácter arbitrario de las funciones \mathbf{E} y \mathbf{E}' , de aquí se sigue la propiedad de simetría buscada:

$$\gamma_{ikl} = -\gamma_{kil}. \quad (83.4)$$

Supongamos, además, que el medio no es absorbente y veamos cuáles son las condiciones que esto impone al tensor γ_{ikl} . La disipación de energía en un campo periódico viene dada por el valor medio (respecto del tiempo) de la integral

$$-(1/4\pi) \int \mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{D} / \partial t) dV.$$

Aquí \mathbf{E} y \mathbf{D} son reales; pero si se utiliza la representación compleja de las diferentes magnitudes, la integral que hay que promediar puede escribirse en la forma

$$-\frac{1}{16\pi} \int \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV = -\frac{i\omega}{16\pi} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* - \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D}) dV.$$

Substituyendo aquí (83.1) y teniendo en cuenta que, conforme sabemos ya, $\epsilon_{ik}^{(0)}$ es real en un medio transparente, obtendremos

$$\begin{aligned} & -\frac{i\omega}{16\pi} \int \left(\gamma_{ikl}^* E_i \frac{\partial E_k^*}{\partial x_l} - \gamma_{ikl} E_i^* \frac{\partial E_k}{\partial x_l} \right) dV \\ &= -\frac{i\omega}{16\pi} \int \left(\gamma_{ikl}^* E_i \frac{\partial E_k^*}{\partial x_l} + \gamma_{kil} E_k \frac{\partial E_i^*}{\partial x_l} \right) dV \\ &= -\frac{i\omega}{16\pi} \int (\gamma_{ikl}^* + \gamma_{kil}) E_i \frac{\partial E_k^*}{\partial x_l} dV. \end{aligned}$$

Esta expresión se anula idénticamente si se cumple la condición

$$\gamma_{ikl}^* = -\gamma_{kil} = \gamma_{ikl}.$$

Llegamos así a la conclusión de que la condición de que no exista absorción exige que el tensor γ_{ikl} sea real.

Para una onda plana con vector de onda $\mathbf{k} = (\omega \mathbf{n}/c)$ tenemos

$$\partial E_k / \partial x_l = i\omega E_k n_l / c,$$

de modo que $D_i = \epsilon_{ik} E_k$, donde se ha introducido la notación

$$\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)}_{ik} + i\omega \gamma_{ikml} n_l / c \quad (83.5)$$

para el tensor permitividad, que presenta ahora dispersión tanto respecto de la frecuencia, como del vector de onda*.

Introduzcamos en vez del tensor antisimétrico de segundo orden γ_{ikml} su dual axil, el vector giro \mathbf{g} , de acuerdo con

$$\omega \gamma_{ikml} n_l / c = e_{iklg_l}, \quad (83.6)$$

es decir, escribamos ϵ_{ik} en la forma

$$\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)}_{ik} + ie_{iklg_l}, \quad (83.7)$$

que coincide formalmente con la expresión utilizada en el § 82. La diferencia consiste en que, en dicho párrafo, el vector \mathbf{g} dependía solamente de las propiedades del medio (y del campo magnético aplicado), mientras que aquí el vector giro depende también del vector de onda del campo. Según (83.6), las componentes de este vector son funciones lineales de las componentes de \mathbf{n} , es decir,

$$g_i = g_{ik} n_k. \quad (83.8)$$

Substituyendo (83.8) en (83.6), se encuentra

$$\omega \gamma_{ikml} n_l / c = e_{ikmg_ml},$$

de donde, dado que \mathbf{n} es arbitrario,

$$\omega \gamma_{ikl} / c = e_{ikmg_ml}, \quad (83.9)$$

con lo que queda establecida la relación entre las componentes del tensor de tercer orden γ_{ikl} y el pseudotensor de segundo orden g_{ik} (**).

La simetría cristalográfica concreta del cuerpo impone determinadas limitaciones a las componentes del tensor γ_{ikl} (o del g_{ik}) y, en particular, puede conducir a la anulación idéntica de todas las componentes. Así, el tensor γ_{ikl} se reduce a cero en los cuerpos que poseen centro de simetría. En efecto, al cambiar el signo de las tres coordenadas (inversión), todas las componentes del tensor de tercer orden (y, por consiguiente, las del pseudotensor de segundo orden) cambian de signo, mientras que la simetría del cuerpo exigiría que no variaran en esta transformación.

* Cuando $\omega \rightarrow 0$, las magnitudes γ_{ikl} , que nada tienen que ver con el desarrollo en potencias de la frecuencia, tienden a valores constantes. La parte imaginaria de ϵ_{ik} , por consiguiente, tiende a cero proporcionalmente a la primera potencia de la frecuencia.

** En componentes:

$$g_{zx} = \omega \gamma_{yzx} / c, \quad g_{zy} = \omega \gamma_{yzy} / c, \quad g_{yx} = \omega \gamma_{zyx} / c,$$

etcétera.

De los cuerpos en los que el tensor g_{ik} no es nulo se dice que poseen *actividad óptica natural*. De esta manera, la existencia de actividad óptica exige, en cualquier caso, que el cuerpo carezca de centro de simetría.

Consideremos primero la actividad óptica natural de los cuerpos isótropos. Si un líquido (o un gas) está formado por una substancia que carece de estereoisómeros, es simétrico no sólo respecto de una rotación arbitraria, sino también con relación a la reflexión (inversión) respecto de un punto cualquiera, y la actividad natural queda excluida en él. Ópticamente activos lo son solamente los líquidos constituidos por substancias con dos formas estereoisoméricas, debiendo contener ambos isómeros en cantidades distintas; un líquido con estas características carece de centro de simetría.

En un cuerpo isótropo (y también en los cristales con simetría cúbica) el pseudotensor g_{ik} se reduce a un pseudoescalar:

$$g_{ik} = f\delta_{ik} \quad (83.10)$$

(el tensor γ_{ikl} se expresa en función de f de acuerdo con $\gamma_{ikl} = (c/\omega)fe_{ikl}$). Un pseudoescalar es una magnitud que cambia de signo en la inversión de las coordenadas. Dos substancias estereoisoméricas se transforman formalmente entre sí como resultado de la operación inversión; por ello, sus valores de la magnitud f tienen signos opuestos.

Así pues, en un cuerpo isótropo ópticamente activo el vector giro es $\mathbf{g} = f\mathbf{n}$ y entre el desplazamiento eléctrico y la intensidad del campo de la onda existe una relación dada por la fórmula

$$\mathbf{D} = \epsilon^{(0)}\mathbf{E} + if\mathbf{E} \times \mathbf{n}. \quad (83.11)$$

Puesto que $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = 0$, de aquí se sigue que también $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$. En otras palabras, en una tal onda no sólo es transversal el desplazamiento \mathbf{D} (respecto de la dirección de \mathbf{n}), como en cualquier medio, sino también la intensidad \mathbf{E} .

La variación del índice de refracción n cuando se tiene en cuenta la actividad natural de la substancia resulta ser pequeña. En consecuencia, al determinarla se puede hacer en el término pequeño $\mathbf{E} \times \mathbf{g}$ que aparece en (83.11) $n = n_0 = \sqrt{\epsilon^{(0)}}$. Entonces, el problema de calcular la diferencia $n - n_0$ coincide formalmente con el estudiado en el párrafo anterior acerca de la variación de n bajo la influencia del campo magnético, difiriendo de aquél solamente en el significado del vector \mathbf{g} y en el hecho de que este vector se encuentra siempre dirigido paralelamente a \mathbf{n} (eje z en el § 82). Por analogía con la fórmula (82.18) podemos así escribir sin más

$$n_{\pm}^2 = n_0^2 \pm g = n_0^2 \pm fn_0. \quad (83.12)$$

A estos dos valores corresponden (véase (82.20)) las siguientes relaciones entre las dos componentes del vector \mathbf{E} (o del \mathbf{D}):

$$E_x = \pm iE_y, \quad (83.13)$$

es decir, la polarización circular de las ondas a izquierda y a derecha. Observemos también que el módulo del vector \mathbf{n} no depende de su dirección; por ello, las direcciones del vector \mathbf{n} y del vector rayo \mathbf{s} coinciden.

Vemos, por consiguiente, que las propiedades ópticas de un cuerpo isótropo naturalmente activo son parecidas a las propiedades que posee un cuerpo no activo en un campo magnético: presenta doble refracción circular y cuando una onda polarizada linealmente se propaga en él se produce la rotación de su plano de polarización. El ángulo de rotación por unidad de longitud a lo largo del rayo es igual a $\omega f/2c$.

En dos modificaciones estereoisómeras de una substancia, los signos de las constantes g , y con ellos también los sentidos de rotación, son opuestos; desde este punto de vista, se habla de estereoisómeros *dextrógiros* y *levógiros*.

En contraste con la rotación del plano de polarización en un campo magnético, el valor y el signo del giro no depende en las substancias naturalmente activas de la dirección de propagación del rayo. Por ello, si un rayo de luz polarizada linealmente atraviesa dos veces, en el camino de ida y vuelta, la misma trayectoria en un medio naturalmente activo, el resultado es que se encuentra polarizado de nuevo en el plano original.

Pasemos a los cristales naturalmente activos. Sin entrar aquí en una exposición sistemática de todos los posibles casos de simetría (véase el problema en este párrafo), haremos observar que la actividad natural queda excluida por la existencia de un centro de simetría, pero que es posible cuando hay un plano de simetría o un eje de rotación-reflexión. Hay que subrayar que las condiciones para que se dé la actividad natural en los cristales no coinciden, por consiguiente, con las condiciones que hacen posible la existencia de cristales en dos formas isómero-especulares (los llamados *enantiomorfos*); estas últimas condiciones son mucho más estrictas y exigen no sólo que no exista centro de simetría, sino tampoco planos de simetría. Así pues, un cristal puede ser ópticamente activo y a la vez coincidir con su imagen especular.

En un cristal naturalmente activo (uniáxico o biáxico), al propagarse la luz en una dirección arbitraria del vector de onda, nos encontramos prácticamente ante un caso de refracción doble ordinaria de ondas polarizadas linealmente; tener en cuenta la actividad se reduce, esencialmente, a substituir la polarización rigurosamente lineal por una polarización elíptica con una razón de ejes pequeña (de primer orden de magnitud).

La única excepción la constituyen las direcciones de los ejes ópticos, a lo largo de los cuales, si no se tiene en cuenta la actividad, las dos raíces de la ecuación de Fresnel coinciden. En estas direcciones el fenómeno de la actividad natural de los cristales es análogo a la actividad de los cuerpos isótropos: se produce una doble refracción circular de primer orden y la correspondiente rotación del plano de polarización de las ondas polarizadas linealmente. Cuando el vector de onda se separa de la dirección de un eje óptico, estos fenómenos desaparecen rápidamente.

Para un cálculo cuantitativo de los fenómenos de la actividad natural en los

cristales es más conveniente utilizar, no la expresión de \mathbf{D} en función de \mathbf{E} , sino las fórmulas inversas que dan \mathbf{E} en función de \mathbf{D} (como hicimos ya en el párrafo 82). Salvo magnitudes de segundo orden, estas fórmulas se escriben:

$$E_i = \epsilon^{(0)-1}{}_{ik} D_k + (\mathbf{D} \times \mathbf{G})_i, \quad (83.14)$$

donde el vector \mathbf{G} está ligado con el vector \mathbf{g} que hemos introducido antes por

$$G_i = -\epsilon^{(0)}{}_{ik} g_k / |\epsilon^{(0)}|$$

(véase (82.13a)). Visto que esta expresión coincide formalmente con la (82.7), se conservan también igualmente las ecuaciones (82.9), (82.10). En estas ecuaciones G_z es la proyección del vector \mathbf{G} sobre la dirección de \mathbf{n} . Si se presenta \mathbf{G} en la forma

$$G_i = G_{ik} n_k, \quad (83.15)$$

(análoga a la (83.8)), dicha proyección es proporcional a

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{G} = G_{ik} n_i n_k. \quad (83.16)$$

Esta forma cuadrática determina las propiedades ópticas de un cristal naturalmente activo. Por sí mismo, el tensor G_{ik} no tiene por qué ser necesariamente simétrico, pero si lo descomponemos en una parte simétrica y otra antisimétrica, al construir la forma (83.16) desaparece la parte antisimétrica. Llegamos, por consiguiente, a la conclusión de que al estudiar las propiedades ópticas de los cristales naturalmente activos se puede suponer que el tensor G_{ik} es simétrico.

PROBLEMA

Determinar las limitaciones que la simetría cristalina impone a las componentes del tensor G_{ik} .

Solución. En cualquier rotación, el pseudotensor G_{ik} se comporta como un tensor en sentido estricto; en particular, la existencia de un eje de simetría de orden superior al segundo conduce, al igual que en el caso de un tensor simétrico de segundo orden, a la isotropía total en un plano perpendicular al eje. En cambio, el comportamiento del pseudotensor G_{ik} en las reflexiones viene determinado por el hecho de que es dual de un tensor de tercer orden: a saber, en cualquier reflexión que cambie el signo de una componente dada de un tensor de segundo orden, la misma componente de G_{ik} se conserva invariable, y reciprocamente. Así, en la reflexión en el plano yz las componentes $G_{xz}, G_{yy}, G_{zz}, G_{yz}$ cambian de signo, mientras que se conservan las componentes G_{xy}, G_{xz} .

A continuación se indican las componentes no nulas del tensor G_{ik} para todas las clases cristalinas compatibles con la actividad natural. El eje z se ha elegido paralelo al eje de simetría de tercero, cuarto o sexto orden o a lo largo del único eje de segundo orden (en las clases C_2, C_{2v}), mientras que en la clase C_s se ha tomado perpendicular al plano de simetría; cuando existen tres ejes de simetría perpendiculares entre sí, los ejes de coordenadas coinciden con ellos.

Clase C_1 : todas las componentes G_{ik} .

Clase C_2 : $G_{xz}, G_{yy}, G_{zz}, G_{xy}$; mediante una elección adecuada de los ejes x, y es posible anular G_{xy} .

Clase C_s : G_{xz}, G_{yz} ; mediante una elección adecuada de los ejes x, y puede anularse una de estas dos magnitudes.

Clase C_{2v} : G_{xy} (los planos yz y zx coinciden con los planos de simetría).

Clase D_2 : G_{xx}, G_{yy}, G_{zz} .

Clases C_3 , C_4 , C_6 , D_3 , D_4 , D_6 : $G_{xx} = G_{yy} = G_{zz}$.

Clase S_4 : $G_{xx} = -G_{yy}$, G_{xy} , mediante una elección adecuada de los ejes x , y puede anularse una de estas magnitudes.

Clase D_{2d} : G_{xy} (los ejes x , y se encuentran en planos verticales de simetría).

Clases T , O : $G_{xx} = G_{yy} = G_{zz}$.

Obsérvese que en los cristales uniaxicos de las clases S_4 y D_{2d} el escalar (83.16) se anula si el vector \mathbf{n} está dirigido en el sentido del eje z , puesto que $G_{zz} = 0$. Esto significa que en estos cristales no existen efectos de actividad natural a lo largo del eje óptico.

En un cristal biáxico de la clase C_{2v} , los ejes ópticos se encuentran en uno de los planos de simetría. Mas para los vectores \mathbf{n} que se encuentran en los planos yz o zx , el escalar (83.16) también se anula en este caso, por lo que no se producen en él dichos efectos a lo largo de los ejes ópticos. La única clase cristalina compatible con el fenómeno de rotación del plano de polarización a lo largo de un eje óptico y que a la vez no lo es con el enantiomorfismo es la clase monoclinica C_s .

CAPÍTULO XII

PASO DE PARTÍCULAS RÁPIDAS A TRAVÉS DE LA MATERIA

§ 84. Pérdidas de energía por ionización para partículas rápidas en la materia. Caso no relativista

Una partícula cargada rápida que atraviesa la materia ioniza sus átomos y con ello pierde energía*. En los gases las pérdidas por ionización pueden considerarse como resultado de los choques de la partícula rápida con los átomos individuales. En cambio, en un medio condensado, en la interacción con la partícula que pasa pueden quedar involucrados simultáneamente varios átomos. La influencia de esta circunstancia sobre la pérdida de energía de la partícula es, desde el punto de vista macroscópico, el resultado de la polarización dieléctrica del medio por la carga. Consideremos primero este efecto para el caso de partículas cuyas velocidades son no relativistas. Como quedará claro por los resultados, poco repercute entonces la polarización del medio en el valor de la pérdida de energía. Sin embargo, el razonamiento que lleva a esta conclusión posee un interés metódico con vistas a las aplicaciones de un procedimiento análogo.

Veamos ante todo qué condiciones permiten un estudio macroscópico de este fenómeno. En el desarrollo espectral del campo creado por una partícula que se mueve (con velocidad v) a una distancia r de su trayectoria, intervienen fundamentalmente las frecuencias del orden de v/r (recíproco del «tiempo de colisión»). A la ionización del átomo, en cambio, pueden conducir las componentes del campo con frecuencias $\omega \gtrsim \omega_0$, donde ω_0 es una cierta frecuencia media que corresponde al movimiento de la mayoría de los electrones atómicos. En consecuencia, la partícula entrará en interacción simultáneamente con varios átomos si la longitud v/ω_0 es grande comparada con las distancias interatómicas; en los cuerpos condensados estas últimas coinciden (en orden de magnitud) con las dimensiones a de los propios átomos. Llegamos así a la condición de que debe tenerse $v \gg a\omega_0$, es decir, la velocidad de la partícula ionizante ha de ser grande comparada con las velocidades de los electrones atómicos (o por lo menos con las de la mayoría de ellos)**.

* Como es costumbre, hablamos de «pérdidas por ionización», pero entre ellas se incluyen también, claro está, las pérdidas por excitación de los niveles atómicos discretos.

** Para la energía E de la partícula se obtiene a partir de aquí la condición

$$E \gg MI/m,$$

donde M es la masa de la partícula, m la masa del electrón e I una cierta energía media de ionización para la mayor parte de los electrones en el átomo.

Determinemos el campo creado por una partícula cargada que se mueve en un medio material. En el caso no relativista basta considerar solamente el campo eléctrico, que viene determinado por un único potencial escalar ϕ . Éste satisface la ecuación de Poisson

$$\hat{\epsilon} \Delta \phi = -4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \quad (84.1)$$

en la cual la «permitividad» hay que interpretarla como un operador, y la expresión $e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)$ en el segundo miembro de la igualdad es la densidad debida a la carga puntual e que se mueve con velocidad constante \mathbf{v} *.

Desarrollemos ϕ en integral de Fourier respecto de las coordenadas:

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k}. \quad (84.2)$$

Aplicando a ambos miembros de esta igualdad el operador de Laplace, obtendremos

$$\Delta \phi = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\mathbf{k}} k^2 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k},$$

lo que hace ver que la componente de Fourier de $\Delta \phi$ es igual a

$$(\Delta \phi)_{\mathbf{k}} = -k^2 \phi_{\mathbf{k}}.$$

Por otra parte, tomando la componente de Fourier de ambos miembros de la ecuación (84.1), tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}(\Delta \phi)_{\mathbf{k}} &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int 4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dV \\ &= -\frac{e}{2\pi^2} \exp(-it\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}). \end{aligned}$$

La comparación de ambas fórmulas, da

$$\hat{\epsilon} \phi_{\mathbf{k}} = (e/2\pi^2 k^2) \exp(-it\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}).$$

Vemos así que $\phi_{\mathbf{k}}$ depende del tiempo a través del factor $e^{-it\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}$. Pero el operador $\hat{\epsilon}$, aplicado a la función $e^{-i\omega t}$, la multiplica por $\epsilon(\omega)$. Por ello, tenemos en definitiva para $\phi_{\mathbf{k}}$ la siguiente expresión:

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2 k^2 \epsilon(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} \exp(-it\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}).$$

La componente de Fourier de la intensidad del campo está ligada con la componente de Fourier del potencial por

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = -\text{grad} [\phi_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] = -i\mathbf{k} \phi_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}),$$

* Al suponer que el movimiento de la partícula es rectilíneo, prescindimos de la dispersión, lo que es siempre legítimo en el problema considerado.

Si la partícula posee una carga ze , todas las fórmulas para el frenado en este párrafo y en el siguiente deben multiplicarse por z^2 .

o bien $\mathbf{E}_k = -ik\phi_k$. De esta manera,

$$\mathbf{E}_k = -\frac{ie\mathbf{k}}{2\pi^2 k^2 \epsilon(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} \exp(-it\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}). \quad (84.3)$$

La intensidad total del campo se obtiene a partir de las componentes de Fourier mediante la integral inversa:

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k}. \quad (84.4)$$

La pérdida que nos interesa de energía de la partícula en movimiento, no es sino el trabajo realizado por la fuerza de reacción de frenado $e\mathbf{E}$ que actúa sobre la partícula y debida al campo creado por ella misma. Tomando el valor del campo en el punto en el que se encuentra la partícula, es decir, en el punto $\mathbf{r} = v\mathbf{t}$, obtendremos en el integrando de la expresión (84.4) el factor $e^{it\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}$, que se reduce con el factor $e^{-it\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}$ en la expresión (84.3) para \mathbf{E}_k . En consecuencia, la fuerza de frenado \mathbf{F} viene dada por la siguiente integral:

$$\mathbf{F} = -\frac{ie^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{k}}{k^2 \epsilon(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} dk.$$

Es evidente a priori que la fuerza \mathbf{F} ha de ser antiparalela a la velocidad \mathbf{v} ; tomemos el eje x en la dirección de esta última. Introduciendo las notaciones $k_x v = \omega$, $q = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ y substituyendo $dk_y dk_z$ por $2\pi q dq$, escribiremos el valor absoluto F en la forma

$$F = \frac{ie^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{q\omega dq d\omega}{\epsilon(\omega)(q^2 v^2 + \omega^2)} \quad (84.5)$$

(acerca de la elección del límite superior de integración respecto de q , véase más adelante).

Es necesario hacer todavía la siguiente observación referente a la integración respecto de ω en la fórmula (84.5). Cuando $\omega \rightarrow \infty$, la función $\epsilon(\omega) \rightarrow 1$ y la integral diverge (logarítmicamente). Esta circunstancia está ligada con el hecho de que, en realidad, del campo \mathbf{E} debiéramos haber restado el que se tendría si la partícula se moviera en el vacío (es decir, para $\epsilon = 1$). Está claro que este campo nada tiene que ver con el frenado de la partícula en la materia. Esta substracción conduciría a substituir en el integrando de la expresión (84.5) $1/\epsilon$ por $(1/\epsilon) - 1$, hecho lo cual la integral convergerá. Sin embargo, es posible llegar al mismo resultado sin efectuar dicha sustitución si se conviene en interpretar la integración entre los límites $-\infty$ y $+\infty$ como integración entre los límites simétricos $-R$ y $+R$, haciendo luego $R \rightarrow \infty$. Dada la paridad de la función $\epsilon'(\omega)$ la parte real del integrando es una función impar de la frecuencia y con este procedimiento de integración el resultado que da es cero; en cuanto a la integral de la parte imaginaria del integrando, esta integral es convergente.

A continuación nos resultará a veces cómodo utilizar la notación

$$1/\epsilon(\omega) = \eta(\omega) = \eta' + i\eta'', \quad (84.6)$$

donde $\eta'(\omega)$, $\eta''(\omega)$ son, respectivamente, funciones par e impar, con $\eta'' = -\epsilon''/|\epsilon|^2 < 0$. La fórmula (84.5) se puede también escribir en forma explícitamente real:

$$F = \frac{2e^2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{q_0} \frac{q\omega |\eta''(\omega)|}{(q^2v^2 + \omega^2)} dq d\omega. \quad (84.7)$$

La pérdida de energía de la partícula por unidad de longitud recorrida es el trabajo de la fuerza de frenado a lo largo de dicho camino, es decir, coincide precisamente con la cantidad F . Dicha pérdida se llama *poder de frenado* (o de *detención*) del medio respecto de la partícula.

Según las reglas generales de la mecánica cuántica, la componente de Fourier del campo con vector de onda \mathbf{k} transfiere al electrón de ionización (electrón δ) el impulso $\hbar\mathbf{k}$. Para valores suficientemente grandes de q ($q \gg \omega_0/v$), tenemos $k^2 = q^2 + \omega^2/v^2 \approx q^2$, de modo que el impulso cedido coincide aproximadamente con $\hbar\mathbf{q}$. Al valor dado de \mathbf{q} corresponden colisiones con un «parámetro de impacto» $\sim 1/q$. Por ello, la condición de aplicabilidad del método macroscópico considerado exige que $1/q \gg a$. De acuerdo con esto, tomaremos como límite superior de integración un valor q_0 que cumpla la condición $\omega_0/v \ll q_0 \ll 1/a$; la cantidad $F(q_0)$ es el frenado de una partícula rápida acompañado de una cesión de impulso a un electrón atómico no mayor que $\hbar q_0$.

Efectuando en (84.7) la integración respecto de q , obtendremos

$$F(q_0) = \frac{2e^2}{\pi v^2} \int_0^\infty \omega |\eta''(\omega)| \ln \frac{q_0 v}{\omega} d\omega. \quad (84.8)$$

Esta fórmula no se puede transformar más conservando su carácter general, pero es posible representarla en una forma más cómoda mediante la introducción de notaciones adecuadas.

Calculemos primero la integral

$$\int_0^\infty \omega \eta''(\omega) d\omega = -\frac{1}{2}i \int_{-\infty}^\infty (\omega/\epsilon) d\omega.$$

Para ello observemos que si se efectúa la integración en el plano complejo ω a lo largo de un contorno constituido por el eje real y una semicircunferencia de radio infinito, σ , situada en el semiplano superior, la integral se anula, puesto que el integrando carece de polos en dicho semiplano. Para grandes valores de ω , la función $\epsilon(\omega)$ viene determinada por la fórmula (59.1):

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}. \quad (84.9)$$

La integración a lo largo de la semicircunferencia infinitamente alejada σ se lleva a cabo valiéndose de esta fórmula, y el resultado que se obtiene es*

$$-\int_0^\infty \omega \eta''(\omega) d\omega = -\frac{2\pi i Ne^2}{m} \int_\sigma^\infty \frac{d\omega}{\omega} = 2\pi^2 Ne^2/m. \quad (84.10)$$

Introduzcamos un cierto valor medio de la frecuencia del movimiento de los electrones atómicos determinado por la igualdad

$$\begin{aligned} \log \bar{\omega} &= \frac{\int_0^\infty \omega \eta''(\omega) \ln \omega d\omega}{\int_0^\infty \omega \eta''(\omega) d\omega} \\ &= \frac{m}{2\pi^2 Ne^2} \int_0^\infty \omega |\eta''(\omega)| \ln \omega d\omega. \end{aligned} \quad (84.11)$$

Con esta notación la fórmula (84.8) se escribe en la forma

$$F(q_0) = (4\pi Ne^4/mv^2) \ln (q_0 v/\bar{\omega}). \quad (84.12)$$

Hagamos aquí la siguiente observación. Por el aspecto de las fórmulas (84.7) o (84.11), cabría pensar que la contribución más importante al frenado por ionización (84.12) se debe solamente a aquellos intervalos de frecuencia en los que se produce una notable absorción. Esto, sin embargo, no tiene por qué ser así y las fórmulas indicadas pueden contener una importante contribución debida a regiones en las que ϵ'' es pequeño. La razón de ello descansa en que, en dichos intervalos, la función $\epsilon(\omega) \approx \epsilon'(\omega)$ puede anularse. Pero por la fórmula (84.5) es evidente que los ceros de $\epsilon(\omega)$ son polos del integrando. En realidad, naturalmente, $\epsilon''(\omega)$ no es igual a cero rigurosamente, por lo que un cero de la función $\epsilon(\omega)$ no está situado sobre el propio eje real, sino un poco por debajo de él. Esto significa que al utilizar la expresión de $\epsilon(\omega)$ que pasa por un cero, el polo del integrando debe evitarse por arriba, lo que da la correspondiente contribución a la integral. Así, si la función $\epsilon(\omega)$ viene dada por la fórmula (64.5), la contribución al frenado (84.12) debida al rodeo de los polos $\pm\omega_1$ (donde $\epsilon(\omega_1) = 0$) es igual a

$$(4\pi Ne^4/mv^2a^2) \ln (q_1 v/\omega_1).$$

como se comprueba fácilmente mediante un cálculo directo según (84.7).

Para hallar el frenado $F(q_1)$ con transferencia de impulso que no supera un cierto valor $\hbar q_1 > \hbar q_0$, hay que «empalmar» la fórmula (84.12) con la fórmula de la

* Este valor coincide con el de la integral $\int_0^\infty \omega \epsilon''(\omega) d\omega$ (véase (62.14)), como debía ser, puesto que para $|\omega| \rightarrow \infty$, se tiene $|\epsilon| \rightarrow 1$, y, en consecuencia, $\eta'' \rightarrow -\epsilon''$.

teoría cuántica de las colisiones correspondiente al frenado en las colisiones con átomos por separado. Se puede hacer esto gracias a que los dominios de aplicabilidad de ambas fórmulas se solapan. Como es sabido por la teoría de colisiones, el frenado con una cesión de impulso en el intervalo $\hbar dq$ es

$$dF = (4\pi Ne^4/mv^2) dq/q, \quad (84.13)$$

siendo aplicable esta fórmula (en el caso no relativista) para valores cualesquiera $q \gg \omega_0/v$ compatibles con las leyes de conservación del impulso y de la energía, bajo la única condición de que la energía transferida sea pequeña comparada con la energía inicial de la partícula rápida*. Para el frenado correspondiente a todos los valores de q entre q_0 y q_1 se tiene así el valor

$$(4\pi Ne^4/mv^2) \ln (q_1/q_0).$$

Al sumar esta cantidad al segundo miembro de la fórmula (84.12), el resultado es que en ésta q_0 debe substituirse simplemente por q_1 , con lo cual

$$F(q_1) = (4\pi Ne^4/mv^2) \ln (q_1 v/\bar{\omega}). \quad (84.14)$$

Si a un electrón atómico se le cede un impulso $\hbar q_1$ grande (comparado con los atómicos), la energía que adquiere es igual a $E_1 = \hbar^2 q_1^2 / 2m$. Introduciendo esta cantidad, escribiremos

$$F(E_1) = (2\pi Ne^4/mv^2) \ln (2mv^2 E_1 / \hbar^2 \bar{\omega}^2). \quad (84.15)$$

Esta fórmula determina el frenado de una partícula rápida (por ejemplo, un electrón) por ionización acompañado de una cesión de energía que no supera el valor E_1 . Dicha fórmula difiere de la ordinaria, obtenida mediante un estudio microscópico de las colisiones sin tener en cuenta la interacción entre átomos**, tan sólo en la definición de la «energía de ionización», cuyo papel lo representa ahora $\hbar\omega$. Sin embargo, la energía media de ionización de un átomo (respecto de los electrones), de ordinario depende poco de su interacción con los otros átomos, puesto que el papel fundamental lo desempeñan en ella los electrones de las capas internas, que casi no son afectadas por esta interacción. Además, en el presente caso, esta cantidad aparece tras el símbolo de logaritmo y, por ello, el procedimiento utilizado para su determinación precisa se manifiesta aún mucho menos en el valor del frenado.

En el frenado de una partícula pesada rápida la energía máxima que se puede ceder a un electrón atómico es igual a $2mv^2$ y, en cualquier caso, es pequeña com-

* Véase vol. III, *Mecánica cuántica*, ec. (146.14); la magnitud F difiere del «frenado eficaz» allí introducido en el factor N .

La fórmula (84.13) corresponde a las colisiones con electrones libres. Sin embargo, su campo de aplicabilidad ($q \gg \omega_0/v$) comienza a partir de valores q para los que los electrones atómicos todavía no se pueden considerar de hecho como libres. Esto último exigiría valores $q \gg \omega_0/v_0$ (v_0 es el orden de magnitud de las velocidades de la mayoría de los electrones atómicos), lo que supone para la energía del electrón- δ , $\hbar^2 q^2 / 2m$, un valor grande comparado con las energías atómicas.

** Véase vol. III, *Mecánica cuántica*, ec. (146.14).

parada con su propia energía*. Substituyendo este valor en (84.15) en vez de E_1 , obtendremos el frenado total por ionización que experimenta una partícula pesada:

$$F = (4\pi Ne^4/mv^2) \ln(2mv^2/\hbar\omega). \quad (84.16)$$

Esta fórmula difiere de la que se emplea ordinariamente** tan sólo en la definición de la energía de ionización $\hbar\omega$.

§ 85. Pérdida de energía de las partículas rápidas por ionización en la materia. Caso relativista

Para velocidades comparables con la velocidad de la luz, la influencia de la polarización del medio sobre el frenado de una partícula rápida puede llegar a ser, conforme veremos, muy importante, no sólo en los medios condensados, sino incluso en los gases***.

Para deducir las correspondientes fórmulas aplicaremos un método análogo al utilizado en el párrafo precedente. Sin embargo, al hacerlo hay que partir de las ecuaciones de Maxwell completas. Cuando existen cargas extrañas (con densidad espacial ρ_{ex}) y corrientes asimismo extrañas (con densidad \mathbf{j}_{ex}), estas ecuaciones se escriben****

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (85.1)$$

$$\operatorname{div} \hat{\epsilon} \mathbf{E} = 4\pi\rho_{ex}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\epsilon} \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{ex}. \quad (85.2)$$

En el presente caso la distribución de las cargas y de las corrientes extrañas viene dada por las fórmulas

$$\rho_{ex} = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}), \quad \mathbf{j}_{ex} = ev\delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}). \quad (85.3)$$

Introduzcamos los potenciales escalar y vector de acuerdo con las definiciones ordinarias:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi, \quad (85.4)$$

* En el choque de una partícula pesada con un electrón, incluso la máxima transferencia de impulso $\hbar q_{\max}$ es pequeña comparada con el impulso de la partícula Mv . Por lo tanto, la variación de la energía de la partícula pesada es igual a $v \cdot \hbar q$; igualando a esta cantidad la energía del electrón, obtendremos $\hbar^2 q^2 / 2m = \hbar v \cdot \mathbf{q} \leq \hbar v q$,

de donde $\hbar q_{\max} = 2mv$, $E_{\max} = 2mv^2$.

** Véase vol. III, *Mecánica cuántica*, ec. (147.10).

*** Este efecto fue señalado por E. Fermi (1940) y calculado por él para un modelo especial de gas formado por átomos considerados como osciladores armónicos. La deducción general que se expone a continuación se debe a L. Landau.

**** Suponemos en todo eso $\mu(\omega) \equiv 1$, ya que la materia se comporta como no-magnética a las frecuencias que son las más importantes para las pérdidas por ionización.

de forma que las ecuaciones (85.1) quedan satisfechas idénticamente. A los potenciales \mathbf{A} y ϕ imponemos la condición suplementaria

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\epsilon}\phi}{\partial t} = 0 \quad (85.5)$$

que constituye una generalización de la *condición de Lorentz* que se suele imponer en la teoría de la radiación. Entonces, la sustitución de (85.4) en (85.2) conduce a las siguientes ecuaciones para los potenciales

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{\hat{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= - \frac{4\pi}{c} e \mathbf{v} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \\ \hat{\epsilon} \left(\Delta \phi - \frac{\hat{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) &= - 4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \end{aligned} \quad (85.6)$$

Descompongamos \mathbf{A} y ϕ en integrales de Fourier respecto de las coordenadas. Tomando las componentes de Fourier de ambos miembros de las ecuaciones (85.6), obtendremos (véase § 84)

$$\begin{aligned} k^2 \mathbf{A}_k + \frac{\hat{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_k}{\partial t^2} &= \frac{e \mathbf{v}}{2\pi^2 c} \exp(-i\mathbf{t} \cdot \mathbf{k}), \\ \hat{\epsilon} \left(k^2 \phi_k + \frac{\hat{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial t^2} \right) &= \frac{e}{2\pi^2} \exp(-i\mathbf{t} \cdot \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Se ve por esto que la dependencia de \mathbf{A}_k y ϕ_k respecto del tiempo viene dada por los factores $e^{-i\mathbf{t} \cdot \mathbf{k}}$. Introduzcamos de nuevo la notación $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = k_x v$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k &= \frac{e}{2\pi^2 c} \frac{\mathbf{v}}{k^2 - \omega^2 \epsilon(\omega)/c^2} e^{-i\omega t}, \\ \phi_k &= \frac{e}{2\pi^2 \epsilon(\omega)} \frac{1}{k^2 - \omega^2 \epsilon(\omega)/c^2} e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (85.7)$$

La componente de Fourier de la intensidad del campo eléctrico es

$$\mathbf{E}_k = i\omega \mathbf{A}_k / c - ik \phi_k. \quad (85.8)$$

Mediante las fórmulas obtenidas, la fuerza de frenado que actúa sobre la partícula, $\mathbf{F} = e\mathbf{E}^*$, se encuentra de la misma manera que en el párrafo precedente. Con las mismas notaciones obtendremos ahora para la intensidad de dicha fuerza la siguiente fórmula:

$$\mathbf{F} = \frac{ie^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{v^2} - \frac{\epsilon}{c^2} \right) \omega q dq d\omega}{\epsilon \left[q^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{\epsilon}{c^2} \right) \right]} \quad (85.9)$$

* En lo que concierne a la fuerza magnética $\frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$, por consideraciones de simetría es evidente que debe anularse (incluso dejando de lado el hecho de que esta fuerza, por ser perpendicular a la velocidad de la partícula, no efectuaría sobre ella trabajo alguno).

(cuando $c \rightarrow \infty$, esta fórmula se convierte, claro está, en la (84.5)).

Comencemos por integrar respecto de las frecuencias. Pensando efectuar la integración en el plano complejo ω , veamos ante todo en qué puntos del semiplano superior presenta polos el integrando. La función $\epsilon(\omega)$ carece en este dominio de puntos singulares, ni tampoco presenta ceros en él; por ello, los polos buscados pueden ser solamente los ceros de la expresión

$$\omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right) - q^2.$$

Demostremos que, para cualquier valor del número real positivo q^2 , esta expresión se anula únicamente para un valor de ω .

La demostración puede llevarse a cabo de manera análoga a como se procedió en V, § 125, al determinar los ceros de la función $\epsilon(\omega)$. Sea

$$f(\omega) \equiv \omega^2 \left[\frac{\epsilon(\omega)}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right].$$

Consideremos la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{df(\omega)}{d\omega} \frac{d\omega}{f(\omega) - a},$$

a lo largo del contorno C constituido por el eje real y una semicircunferencia infinitamente alejada (fig. 42). La función $f(\omega)$ carece de polos en el semiplano superior (y sobre el propio eje real)*; por ello, la integral considerada da directamente el número de ceros de la función $f(\omega) - a$ en el semiplano superior. Para calcularla, escribiremos esta integral en la forma

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{df}{f - a}. \quad (85.10)$$

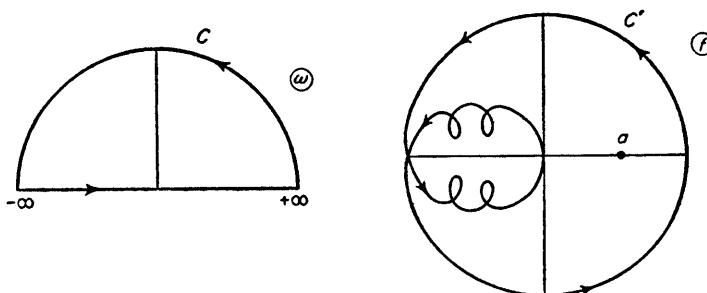


FIG. 42

* En los metales $\epsilon(\omega)$ tiene un polo en $\omega = 0$, pero de todas maneras $\omega^2 \epsilon$ tiende a cero.

Cuando $\omega = 0$, la función $f = 0$. Para valores reales y positivos de ω tenemos $\operatorname{Im} f > 0$, y para valores negativos, $\operatorname{Im} f < 0$. En el infinito, $f \rightarrow -\omega^2\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)$; en consecuencia, f recorre una circunferencia infinitamente alejada cuando ω se mueve sobre la semicircunferencia de radio infinito. Está claro, pues, que el contorno de integración C' en el plano f tiene una forma como la que se representa esquemáticamente en la figura 42. Sea $a = q^2$ un número real positivo (como en la fig. 42). Entonces, al recorrer C' , el argumento del número complejo $f-a$ varía en 2π y la integral (85.10) es igual a la unidad. Con esto queda demostrada la proposición enunciada*.

Además, es fácil ver que esta única raíz de la ecuación $f(\omega) - q^2 = 0$ se encuentra sobre el eje imaginario ω . En efecto, para valores de ω puramente imaginarios la función $f(\omega)$ (al igual que la función $\epsilon(\omega)$) es real y toma todos los valores desde 0 a ∞ , en particular todos los valores positivos q^2 .

Volvamos a la integral respecto de ω en (85.9):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\epsilon v^2} - \frac{1}{c^2}\right)\omega d\omega}{q^2 - \omega^2\left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right)}.$$

Es posible representarla como diferencia entre una integral a lo largo del contorno C y una integral a lo largo de una semicircunferencia infinitamente alejada. Esta última es igual a

$$\int d\omega/\omega = i\pi,$$

y la primera es igual al residuo del integrando en su único polo multiplicado por $2\pi i$. Entenderemos por $\omega(q)$ la función definida por la igualdad

$$\omega^2\left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right) = q^2. \quad (85.11)$$

Según la conocida regla para determinar los residuos**, se encuentra entonces que la integral a lo largo de C es igual a

$$2\pi i \frac{\omega\left(\frac{1}{\epsilon v^2} - \frac{1}{c^2}\right)}{-\frac{d}{d\omega}\left[\omega^2\left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right)\right]} = 2\pi i \frac{\omega\left(\frac{1}{\epsilon v^2} - \frac{1}{c^2}\right)}{-dq^2/d\omega}.$$

* Pero si a es un número negativo, al recorrer C' el argumento de $f-a$ varía en 4π , de modo que la integral (85.10) es igual a 2; en otras palabras, la ecuación $f(\omega) = -|a|$ tiene dos ceros en el semiplano superior.

** El residuo de la expresión $f(z)/\phi(z)$ correspondiente al polo $z = z_0$ es igual a $f(z_0)/\phi'(z_0)$.

Sumando las expresiones obtenidas y substituyendo en (85.9), se llega al resultado

$$F = e^2 \int_0^{q_0} \left[\frac{\omega \left(\frac{1}{\epsilon v^2} - \frac{1}{c^2} \right)}{q dq / d\omega} + 1 \right] q dq$$

o bien, substituyendo en el primer término la integración respecto de q por la integración respecto de ω ,

$$\begin{aligned} F &= e^2 \int_{\omega(0)}^{\omega(q_0)} \left[\frac{1}{v^2 \epsilon(\omega)} - \frac{1}{c^2} \right] \omega d\omega + \frac{1}{2} e^2 q_0^2 \\ &= \frac{e^2}{v^2} \int_{\omega(0)}^{\omega(q_0)} \left[\frac{1}{\epsilon(\omega)} - 1 \right] \omega d\omega + \frac{1}{2} e^2 q_0^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} e^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) [\omega^2(q_0) - \omega^2(0)]. \end{aligned} \quad (85.12)$$

A valores grandes q corresponden raíces ω de la ecuación (85.11) grandes en valor absoluto. Utilizando en virtud de esto la expresión (84.9) para $\epsilon(\omega)$, se halla

$$\omega^2(q_0) = - \frac{v^2}{\beta^2} \left(q_0^2 + \frac{4\pi Ne^2}{mc^2} \right),$$

donde se ha introducido la notación

$$\beta = \sqrt{[1 - v^2/c^2]}.$$

La sustitución en (85.12) da

$$F = \frac{e^2}{v^2} \int_{\omega(0)}^{ivq_0/\beta} \left[\frac{1}{\epsilon(\omega)} - 1 \right] \omega d\omega - \frac{2\pi Ne^4}{mc^2} - \frac{e^2 \beta^2}{2v^2} \omega^2(0) \quad (85.13)$$

(en la integral, basta conservar el término principal ivq_0/β en $\omega(q_0)$).

La integración en (85.13) se extiende a valores puramente imaginarios de ω . Introduzcamos la variable real definida por $\omega \equiv i\omega''$, designemos el límite inferior de la integral por $\omega(0) \equiv i\xi$ e introduzcamos de nuevo la notación (84.6) $1/\epsilon = \eta$. Se trata de calcular la integral

$$- \int_{\xi}^{vq_0/\beta} [\eta(i\omega'') - 1] \omega'' d\omega''.$$

Los valores de la función $\eta(\omega)$ sobre el eje imaginario pueden expresarse en función de los valores de su parte imaginaria sobre el eje real según la fórmula

$$\eta(i\omega'') - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x\eta''(x)}{x^2 + \omega''^2} dx$$

(véase (62.17)). Por ello, para la integral considerada se obtiene (prescindiendo de x frente a vq_0)

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_{\xi}^{vq_0/\beta} \frac{x|\eta''(x)|\omega'' d\omega'' dx}{x^2 + \omega''^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty x|\eta''(x)| \ln \frac{v^2 q_0^2}{\beta^2 (x^2 + \xi^2)} dx.$$

Substituyamos este resultado en (85.13), introduciendo, para simplificar la escritura, la notación

$$\ln \Omega \equiv \overline{\ln (\omega^2 + \xi^2)}, \quad (85.14)$$

donde el trazo horizontal significa el promedio con peso $\omega|\eta''(\omega)|$, como se hizo en (84.11). Entonces se obtendrá

$$F(q_0) = \frac{4\pi Ne^4}{mv^2} \ln \frac{q_0 v}{\beta \Omega} - \frac{2\pi Ne^4}{mc^2} + \frac{e^2 \beta^2}{2v^2} \xi^2. \quad (85.15)$$

Para seguir estudiando esta fórmula hay que considerar dos casos por separado. Supongamos primero que el medio es un dieléctrico y que la velocidad de la partícula satisface la condición

$$v^2 < c^2/\epsilon_0, \quad (85.16)$$

donde $\epsilon_0 = \epsilon(0)$ es el valor electrostático de la permitividad. Sobre el eje imaginario, la función $\epsilon(\omega)$ es monótona decreciente a partir del valor $\epsilon_0 > 1$ para $\omega = 0$ hasta 1 para $\omega = i\infty$. En cambio, la expresión en el primer miembro de la ecuación (85.11) crece entonces con monotonía desde 0 a ∞ . Por lo tanto, cuando $q = 0$, la ecuación (85.11) da también $\omega = 0$. Así, en (85.15) hay que hacer $\xi = 0$; con esto Ω pasa a ser la frecuencia atómica media $\bar{\omega}$ dada por (84.11), y

$$F(q_0) = \frac{4\pi Ne^4}{mv^2} \left[\ln \frac{q_0 v}{\beta \bar{\omega}} - \frac{v^2}{2c^2} \right] \quad (85.17)$$

(cuando $v \ll c$, esta fórmula, como debía ocurrir, se transforma en la (84.12)).

El valor q_0 satisface la condición $q_0 \ll 1/a$, donde a es del orden de magnitud de las distancias interatómicas (en un medio condensado, del tamaño de los átomos). Para extender esta fórmula al dominio de valores grandes de la transferencia de impulso y de energía, hay que efectuar su «empalme» con las fórmulas de la teoría ordinaria de las colisiones, de manera análoga a como se hizo en el párrafo precedente. Aquí, sin embargo, este «empalme» hay que llevarlo a cabo en dos etapas.

Primero, mediante la fórmula (84.13) pasamos al dominio de valores q que corresponden a transferencias de energía grandes comparadas con las energías atómicas, pero conservándose todavía no-relativistas. Entonces el aspecto de la fórmula (85.17) no cambia, pero en ella será posible introducir la energía de un electrón- δ , igual a $\hbar^2 q^2 / 2m$. Designándola por E_1 , obtendremos

$$F(E_1) = \frac{2\pi Ne^4}{mv^2} \left[\ln \frac{2mv^2 E_1}{\beta^2 \hbar^2 \omega^2} - \frac{v^2}{c^2} \right]. \quad (85.18)$$

Podemos luego pasar al dominio de los valores relativistas E_1 utilizando la fórmula de la teoría relativista de las colisiones, según la cual el frenado con una cesión de energía en el intervalo entre E' y $E'+dE'$ es igual a

$$(2\pi Ne^4/mv^2) dE'/E' \quad (85.19)$$

si E' es pequeña comparada con la cesión máxima $E_{1,\text{máx}}$ compatible con las leyes de conservación del impulso y de la energía en la colisión de la partícula rápida dada con un electrón libre (en el caso no relativista, esta fórmula coincide con (84.13)). Dado que al integrar la expresión (85.19) se obtiene $\ln E'$, está claro que la fórmula (85.18) no varía formalmente, de modo que resulta ser válida para todos los valores $E_1 \ll E_{1,\text{máx}}$.

En el frenado de una partícula pesada (de masa M), la máxima cesión de energía al electrón es $E_{1,\text{máx}} \approx 2mv^2/\beta^2$ *. Si $E_{1,\text{máx}}$ resulta con todo pequeña comparada con la energía total E de la partícula rápida (para lo cual debe ser $E \ll M^2 c^2/m$), la fórmula diferencial para el frenado por electrones libres se escribe:

$$\frac{2\pi Ne^4}{mv^2} \left(\frac{1}{E'} - \frac{\beta^2}{2mc^2} \right) dE'$$

con valores arbitrarios de E' e independientemente de la naturaleza de la partícula pesada. El frenado adicional (respecto del (85.18)) con cesión de energía desde E_1 a $E_{1,\text{máx}}$ (siendo $E_1 \ll E_{1,\text{máx}}$) vale, en este caso,

$$\frac{2\pi Ne^4}{mv^2} \left(\ln \frac{E_{1,\text{max}}}{E_1} - \frac{\beta^2 E_{1,\text{max}}}{2mc^2} \right) = \frac{2\pi Ne^4}{mv^2} \left(\ln \frac{2mv^2}{\beta^2 E_1} - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (85.20)$$

Sumando este valor a (85.18), se encuentra el frenado total de una partícula pesada:

$$F = \frac{4\pi Ne^4}{mv^2} \left(\ln \frac{2mv^2}{\beta^2 \hbar \omega} - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (85.21)$$

Las fórmulas (85.18) y (85.21) difieren de las fórmulas que da la teoría ordinaria únicamente en la definición de la «energía de ionización», $\hbar\omega$.

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 13.

Pasemos ahora al segundo caso, cuando la velocidad de la partícula satisface la condición

$$v^2 > c^2/\epsilon_0^- \quad (85.22)$$

(este caso, en particular, se presenta siempre para los metales, puesto que en ellos es $\epsilon(0) = \infty$). La expresión $\omega^2(\epsilon/c^2 - 1/v^2)$ en el primer miembro de la ecuación (85.11) se anula entonces dos veces (sobre el eje imaginario ω): para $\omega = 0$ y para $\omega = i\xi$, donde ξ viene determinado por la igualdad

$$\epsilon(i\xi) = c^2/v^2. \quad (85.23)$$

En el intervalo entre 0 e $i\xi$ esta expresión es negativa y para $|\omega| > \xi$ toma todos los valores positivos desde 0 a ∞ . Por ello, cuando $q \rightarrow 0$ la raíz de la ecuación (85.11) tiende en este caso al valor ξ , que debe substituirse en (85.14) y (85.15).

Cabe aquí distinguir dos casos límite. Si el valor ξ resulta ser pequeño comparado con las frecuencias atómicas ω_0 , en (85.15) se puede prescindir del último término, mientras que $\Omega \approx \omega$. Llegamos así de nuevo a la fórmula (85.17). En cambio, resulta particularmente interesante el caso límite opuesto, cuando $\xi \gg \omega_0$. Dado que para valores grandes de ξ la función $\epsilon(i\xi)$ tiende a 1, está claro por (85.23) que este caso corresponde a velocidades ultrarrelativistas de la partícula. Utilizando para $\epsilon(\omega)$ la fórmula (84.9), escribiremos la ecuación (85.23) en la forma

$$1 + 4\pi Ne^2/m\xi^2 = c^2/v^2,$$

de donde

$$\xi^2 = 4\pi Ne^2 v^2 / mc^2 \beta^2 \approx 4\pi Ne^2 / m\beta^2.$$

Al aumentar la velocidad de la partícula, la condición $\xi \gg \omega_0$ se cumple en último término, cualquiera que sea el medio, es decir, para un valor arbitrario de la densidad electrónica N (en particular, también en un gas). Sin embargo, las velocidades necesarias para ello son tanto mayores cuanto menor es N , es decir, cuanto más enrarecido es el medio.

De (85.14) se deduce ahora simplemente $\Omega \approx \xi$; haciendo también $v \approx c$, se encuentra que los dos últimos términos de (85.15) se reducen entre sí y queda

$$F(q_0) = (2\pi Ne^4/mc^2) \ln (mc^2 q_0^2 / 4\pi Ne^2).$$

Prolongando esta fórmula al dominio de grandes valores de la transferencia de impulso y de energía de la misma manera como se hizo anteriormente, encontramos la siguiente expresión para el frenado de una partícula ultrarrelativista con una cesión de energía no mayor que E_1 (con $E_1 \ll E_{1,\text{máx}}$):

$$F(E_1) = (2\pi Ne^4/mc^2) \ln (m^2 c^2 E_1 / 2\pi Ne^2 \hbar^2). \quad (85.24)$$

Este resultado difiere fundamentalmente del que da la teoría ordinaria de las colisiones sin tener en cuenta la polarización del medio. Según dicha teoría, en el caso relativista, el frenado $F(E_1)$ sigue creciendo (si bien más lentamente, según una ley

logarítmica) al aumentar la energía de la partícula. En cambio, la polarización del medio conduce a un apantallamiento tal de la carga, que el aumento del frenado se interrumpe en último término y tiende a un límite finito dado por la fórmula (85.24) que no contiene β .

También para las partículas pesadas se puede escribir una fórmula que da el frenado total con cesión arbitraria de energía hasta el valor $E_{1,\max}$ (con la condición de que $E_{1,\max}$ sea pequeña comparada con la energía de la propia partícula). Utilizando de nuevo la expresión (85.20) (en la que se puede hacer ahora $v = c$), encontramos

$$F = \frac{2\pi Ne^4}{mc^2} \left[\ln \frac{m^3 c^4}{\pi Ne^2 \hbar^2 \beta^2} - 1 \right]. \quad (85.25)$$

Vemos así que el frenado total sigue, no obstante, creciendo con la velocidad de la partícula, a expensas de las colisiones «a corta distancia» con una transferencia grande de energía y en las que no se manifiesta la influencia del apantallamiento por la polarización del medio. Este crecimiento, sin embargo, es algo más lento que el que da la teoría que no tiene en cuenta dicha polarización.

Haremos observar también que la presencia de la densidad electrónica N en el argumento del logaritmo en las fórmulas (85.24) y (85.25) conduce a la siguiente peculiaridad del frenado de las partículas ultrarrelativistas: cuando una de estas partículas atraviesa capas de diferentes materiales que contienen un mismo número de electrones (por 1 cm² de área), la pérdida de energía resulta ser menor en las substancias para las que N es grande.

Finalmente, indicaremos que la medición del frenado de las partículas rápidas en la materia proporciona una posibilidad, en principio, de construir la función $\epsilon(i\xi)$ para una substancia dada. Es fácil demostrar que la expresión exacta de F que corresponde al caso (85.22) satisface la relación

$$\frac{d[(F - F_0)v^2]}{d(v^2)} = - \frac{e^2 \xi^2}{2c^2}, \quad (85.26)$$

donde F_0 es la cantidad dada por la fórmula (85.18) o (85.21). Se mide F , mientras que la derivada $d(F_0 v^2)/d(v^2)$ contiene solamente magnitudes conocidas (N, v) y puede calcularse. De esta manera, mediante (85.26), a cada valor de ξ se hace corresponder un determinado valor de v , con lo cual, según (85.23), puede calcularse el correspondiente valor de $\epsilon(i\xi)$.

§ 86. Radiación de Cherenkov

Una partícula cargada que se mueve en un medio transparente emite, en determinadas condiciones, una singular radiación; los primeros en observarla fueron *P. A. Cherenkov y S. I. Vavilov*, y la interpretación y cálculos teóricos se deben a *I. E. Tamm e I. M. Frank* (1937). Hay que subrayar que esta radiación nada tiene

que ver con la radiación de frenado que, de hecho, siempre se produce en el movimiento de un electrón rápido. Esta última es emitida por el propio electrón al chocar con los átomos. En cambio, en el fenómeno de Cherenkov se trata esencialmente de la radiación emitida por un medio bajo la influencia del campo de una partícula que se mueve en él. La diferencia entre ambos tipos de radiación se manifiesta de manera particularmente clara al pasar al límite de la masa de la partícula tan grande cuanto se quiera: la radiación de frenado desaparece entonces por completo, mientras que la radiación de Cherenkov no cambia en absoluto.

El vector de onda y la frecuencia de una onda electromagnética que se propaga en un medio transparente están ligados por la relación $k = n\omega/c$, donde $n = 1/\epsilon$ es el índice de refracción real*. Por otra parte, vimos que la frecuencia de la componente de Fourier del campo de una partícula que se mueve uniformemente en un medio está ligada con la componente- x del vector de onda (el eje x está dirigido en el sentido de la velocidad de la partícula) por la relación $\omega = k_x v$. Para que tal componente represente una onda que se propaga libremente, las relaciones $k = n\omega/c$ y $k_x = \omega/v$ no deben contradecirse. Y, en efecto, dado que ha de ser $k > k_x$, es necesario que se cumpla la condición

$$v > c/n(\omega). \quad (86.1)$$

Así, pues, la radiación con frecuencia ω se produce cuando la velocidad de la partícula supera la velocidad de fase de las ondas de dicha frecuencia en el medio en cuestión.

Sea θ el ángulo formado por la dirección del movimiento de la partícula y la de emisión de radiación. Tenemos $k_x = k \cos \theta = (n\omega/c) \cos \theta$ y comparando con la igualdad $k_x = \omega/v$ se encuentra que

$$\cos \theta = c/nv. \quad (86.2)$$

Por consiguiente, a la radiación de una frecuencia dada corresponde un valor bien determinado del ángulo θ . En otras palabras, la radiación de cada frecuencia se produce hacia adelante respecto de la dirección del movimiento de la partícula y se distribuye sobre la superficie de un cono de ángulo 2θ determinado por la fórmula (86.2). La distribución angular de la radiación y su distribución en frecuencias, por consiguiente, se encuentran entre sí en una relación bien determinada.

La emisión de ondas electromagnéticas (en aquellos casos en que se produce) está ligada con una determinada pérdida de energía de la partícula en movimiento. Esta pérdida constituye una parte, si bien insignificante, del frenado total que se

* Como antes, suponemos que el medio es no-magnético e isotropo. La radiación de Cherenkov en un medio anisótropo ha sido estudiada en los trabajos: V. L. Ginzburg, ZhETF 10, 608, 1940; A. A. Kolomenskii, DAN SSSR 86, 1097, 1952; M. I. Kaganov, ZhTF 23, 507, 1953.

Un análisis general de varios casos en la teoría de la radiación de Cherenkov y una extensa bibliografía se encuentran en el trabajo de B. M. Bolotovskii, *Uspeji fizicheskij nauk* 67, 201, 1957.

calculó en el párrafo precedente*. En este sentido, no es del todo correcto hablar, en este caso, de pérdidas totales «por ionización». Separemos ahora esta parte de las pérdidas totales; con ello determinaremos la intensidad de la radiación de Cherenkov.

Según (85.9), la pérdida de energía en un intervalo de frecuencias $d\omega$ viene dada por la expresión

$$dF = -d\omega \frac{ie^2}{\pi} \sum \omega \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\epsilon v^2} \right) \int \frac{q dq}{q^2 - \omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right)},$$

donde el signo Σ significa que hay que sumar las expresiones con $\omega = \pm|\omega|$. Introduzcamos una nueva variable

$$\xi = q^2 - \omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right).$$

Entonces

$$dF = -d\omega \frac{ie^2}{2\pi} \sum \omega \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\epsilon v^2} \right) \int \frac{d\xi}{\xi}.$$

Al integrar a lo largo del eje real ξ , el punto singular $\xi = 0$ (que corresponde precisamente a la raíz de la ecuación $q^2 + k_x^2 = k^2$) debe rodearse de determinada manera. El sentido en que hay que evitar dicho punto viene determinado por el hecho de que, aunque consideramos $\epsilon(\omega)$ como una magnitud real (el medio es transparente!), sin embargo, posee en realidad una parte imaginaria, si bien pequeña, que es positiva para $\omega > 0$ y negativa para $\omega < 0$. De acuerdo con ello, ξ presenta una parte imaginaria pequeña negativa (positiva) y la integración debe efectuarse a lo largo de un camino que pasa por debajo (por encima) del eje real. Esto significa que cuando desplazamos el camino de integración llevándolo al eje real, el punto singular debe rodearse por debajo (por encima). Esto da una contribución a dF y las partes reales se reducen por completo al formar la suma. Rodeando las singularidades a lo largo de semicircunferencias de radio infinitesimal, obtendremos

$$\Sigma \omega \int d\xi / \xi = 2i\pi\omega.$$

Llegamos de esta manera a la fórmula final

$$dF = \frac{e^2}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2} \right) \omega d\omega, \quad (86.3)$$

que determina la intensidad de la radiación en el intervalo de frecuencias $d\omega$. Según (86.2) esta radiación se concentra en un intervalo angular

$$d\theta = \frac{c}{vn^2 \sin \theta} \frac{dn}{d\omega} d\omega. \quad (86.4)$$

* En estas pérdidas no interviene la radiación de frenado.

La intensidad total de la radiación viene dada por la integral de la expresión (86.3) extendida a todas las frecuencias en el dominio en que el medio es transparente.

Es fácil explicar también a qué se debe la polarización de la radiación de Cherenkov. Como se ve por (85.7), el potencial vector del campo de radiación es paralelo a la velocidad v . En consecuencia, el campo magnético $H_k = ik \times A_k$ es perpendicular al plano que pasa por v y por la dirección del rayo k . En cambio, el campo eléctrico (en la «zona de ondas» de la radiación) es perpendicular al campo magnético y , por lo tanto, se encuentra en dicho plano.

En relación con el problema de la emisión de radiación por una partícula que se mueve en un medio material, recordaremos aún otro efecto cuya existencia fue indicada como necesaria por *V. L. Ginzburg e I. M. Frank*: una partícula debe emitir radiación al pasar de un medio a otro. Esta radiación «de paso» difiere, en principio, del efecto Cherenkov por el hecho de que ha de producirse para cualquier velocidad de la partícula, y no solamente para aquellas velocidades mayores que la velocidad de fase de la luz en el medio. Nada tiene que ver con la radiación de frenado (que también se produce al incidir partículas cargadas sobre la superficie de separación de dos medios). Al igual que la radiación de Cherenkov, la diferencia resulta particularmente clara al pasar al límite de una masa de la partícula arbitrariamente grande: la radiación de frenado desaparece entonces, mientras que se mantiene la «de paso»*.

* Un cálculo detallado de la radiación «de paso» puede verse en *V. L. Ginzburg e I. M. Frank*, ZhETF 16, 25, 1946.

CAPÍTULO XIII

FLUCTUACIONES ELECTROMAGNÉTICAS

§ 87. Fluctuaciones de la corriente en los circuitos lineales

Aplicaremos la teoría general de las fluctuaciones* al interesante problema de las fluctuaciones de corriente en circuitos eléctricos lineales (estudiadas por primera vez por Nyquist, 1928).

Las fluctuaciones de corriente son oscilaciones eléctricas libres en un conductor (es decir, se producen cuando no existe una f.e.m. aplicada exterior). En un circuito cerrado lineal, el mayor interés lo ofrecen, naturalmente, aquellas oscilaciones que dan lugar a una corriente J total que fluye a lo largo del conductor. En lo que sigue supondremos que se cumple la condición de cuasiestacionariedad, es decir, que las dimensiones del circuito son pequeñas comparadas con la longitud de onda $\lambda \sim c/\omega$. Entonces la corriente total J es la misma en todas las porciones del circuito y depende solamente del tiempo.

Para determinar la distribución espectral de las fluctuaciones de corriente, elegiremos J como magnitud x que figura en las fórmulas generales de V, § 127. Por otra parte, para ver cuál es el sentido de la magnitud α en este caso, supondremos que en el circuito actúa una fuerza electromotriz exterior \mathcal{E} . Entonces la disipación de energía en el circuito es $Q = J\mathcal{E}$. Comparando con la fórmula V (127.7), vemos que $f = -\mathcal{E}$ o bien, suponiendo que en esta relación lineal f y \mathcal{E} son proporcionales a $e^{-i\omega t}$,

$$\mathcal{E} = i\omega f.$$

Por otra parte, la corriente y la f.e.m. en un circuito lineal están ligadas por la relación $\mathcal{E} = ZJ$, donde $Z(\omega)$ es la impedancia del circuito (véase § 47). Tenemos por ello

$$J = \mathcal{E}/Z = i\omega f/Z,$$

de donde se sigue que $a(\omega) = i\omega/Z(\omega)$. La parte imaginaria es

$$\alpha'' = \text{Im}(i\omega/Z) = \omega R/|Z|^2,$$

donde $R(\omega) = \text{Re}\{Z(\omega)\}$. La naturaleza de los fenómenos que causan la dispersión de la resistencia del circuito carece en absoluto de importancia para las fórmulas que siguen.

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 126. Las referencias a esta obra se caracterizarán por la cifra romana V.

Según la fórmula V (126.8) se encuentra ahora para las fluctuaciones de corriente buscadas

$$(J^2)_\omega = \frac{\hbar\omega}{2\pi|Z|^2} R \operatorname{ctgh} \frac{\hbar\omega}{2T}. \quad (87.1)$$

Esta fórmula puede representarse de otra manera, considerando la fluctuación de la corriente como resultado de la acción de una f.e.m. «aleatoria» $\mathcal{E}_\omega = Z(\omega)J_\omega$. Para ella tenemos

$$(\mathcal{E}^2)_\omega = \frac{\hbar\omega}{2\pi} R(\omega) \operatorname{ctgh} \frac{\hbar\omega}{2T}. \quad (87.2)$$

En el caso clásico ($\hbar\omega \ll kT$)

$$(\mathcal{E}^2)_\omega = TR(\omega)/\pi. \quad (87.3)$$

§ 88. Fluctuaciones del campo electromagnético

Las magnitudes electromagnéticas \mathbf{E} , \mathbf{H} , ..., que figuran en la electrodinámica macroscópica se obtienen como resultado de un promedio que cabe concebir como conjunto de dos operaciones. Si se parte, para mayor claridad, del punto de vista clásico, cabe distinguir el promedio respecto de un volumen físicamente infinitesimal para una distribución dada de todas las partículas en el mismo y, luego, el promedio de la magnitud obtenida respecto del movimiento de las partículas. Al considerar las fluctuaciones electromagnéticas, se trata de las oscilaciones con el tiempo de magnitudes promediadas en un volumen físicamente infinitesimal, y en lo que sigue todas las magnitudes se entenderán precisamente en este sentido.

Hay que observar que cuando en mecánica cuántica se habla de promedio en un volumen, se trata, naturalmente, no de la propia magnitud física, sino de su correspondiente operador; el segundo estadio del promedio, en cambio, consiste en determinar la esperanza matemática de este operador según las probabilidades cuánticas. Por ello, rigurosamente hablando, las magnitudes que aparecen a continuación \mathbf{E} , \mathbf{H} , ... deben interpretarse como operadores cuánticos. Esta circunstancia, sin embargo, no se refleja en absoluto en los resultados finales de la teoría que se expone a continuación, y para simplificar la escritura de las fórmulas consideraremos todas las magnitudes como si fueran clásicas.

Como resultado de las fluctuaciones en la posición y el movimiento de las cargas en un cuerpo, aparecen en éste momentos espontáneos eléctricos y magnéticos locales; los valores de estos momentos, referidos a la unidad de volumen del cuerpo, se designarán por $\mathbf{K}/4\pi$ y $\mathbf{L}/4\pi$, respectivamente. Estos momentos son análogos, en cierto sentido, a la polarización espontánea de los cuerpos piroeléctricos y a la imanación de los ferromagnéticos, si bien, naturalmente, difieren de ellas en que, al efectuar el promedio, se reducen a cero. Las relaciones entre las inducciones (des-

plazamiento eléctrico e inducción magnética) y los campos asociados en estas fluctuaciones eléctricas y magnéticas vienen dadas por las fórmulas:

$$D_i = \hat{\epsilon}_{ik} E_k + K_{i\omega}, \quad B_i = \hat{\mu}_{ik} H_k + L_{i\omega}, \quad (88.1)$$

y sus «componentes de Fourier» son:

$$D_{i\omega} = \epsilon_{ik}(\omega)E_{k\omega} + K_{i\omega}, \quad (88.2)$$

$$B_{i\omega} = \mu_{ik}(\omega)H_{k\omega} + L_{i\omega}.$$

En este caso, las ecuaciones de Maxwell se describen:

$$(\text{rot } \mathbf{E}_\omega)_i = (i\omega/c)(\mu_{ik}H_{k\omega} + L_{i\omega}), \quad (88.3)$$

$$(\text{rot } \mathbf{H}_\omega)_i = - (i\omega/c)(\epsilon_{ik}E_{k\omega} + K_{i\omega}). \quad (88.4)$$

Llamaremos a **K** y **L** *inducciones «extrañas» por fluctuación*; este nombre tiene, naturalmente, un carácter puramente convencional y subraya tan sólo el procedimiento formal de introducir estas magnitudes, no su naturaleza.

Para que sea posible utilizar las fórmulas generales deducidas en V (§ 127), es necesario establecer la correspondencia entre las magnitudes electromagnéticas consideradas aquí y las magnitudes x_i, f_i , que figuran en la teoría general. Procederemos con este fin de la siguiente manera. De modo puramente formal, consideremos las magnitudes **K** y **L** no como momentos que se producen espontáneamente, sino como resultado de una acción exterior que consiste en introducir desde fuera en el cuerpo determinadas cargas y corrientes eléctricas. Calculemos la variación de la energía del cuerpo ligada con esta acción.

Observemos para ello que la ecuación de conservación de la energía, en la forma en que se sigue de las ecuaciones de Maxwell, se escribe:

$$\int \frac{1}{4\pi} \left\{ \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\} dV = - \frac{c}{4\pi} \oint \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f},$$

o bien, después de substituir (88.1),

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{4\pi} \left\{ E_i \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\epsilon}_{ik} E_k) + H_i \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\mu}_{ik} H_k) \right\} dV \\ &= - \frac{c}{4\pi} \oint \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f} - \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} \right\} dV. \end{aligned}$$

Vemos así que la variación de energía que nos interesa, variación vinculada con la «acción exterior» considerada, viene dada por la integral

$$- \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} \right\} dV. \quad (88.5)$$

En V (§ 127) se consideró una sucesión discreta de magnitudes que fluctúan x_a , mientras que ahora se trata de una sucesión continua (los valores del campo en cada punto del cuerpo). Esta complicación, que no es esencial, la soslayaremos formalmente dividiendo el volumen del cuerpo en porciones pequeñas, pero finitas, ΔV y considerando ciertos valores medios del campo en cada una de ellas; el paso a elementos infinitamente pequeños se llevará a cabo en las fórmulas finales. De esta manera, en vez de la integral (88.5) escribiremos la suma

$$-\frac{1}{4\pi} \sum \left\{ \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} \right\} \Delta V,$$

extendida a todas las porciones ΔV .

Comparando esta expresión con la V (127.7), vemos que si como magnitudes x_i se eligen las componentes de los vectores $\mathbf{E}\Delta V/4\pi$, $\mathbf{H}\Delta V/4\pi$ en cada una de las porciones ΔV , las correspondientes magnitudes f_i serán las componentes a los vectores \mathbf{K} y \mathbf{L} :

$$\begin{aligned} x_i &\rightarrow \mathbf{E}\Delta V/4\pi, & \mathbf{H}\Delta V/4\pi; \\ f_i &\rightarrow \mathbf{K}, & \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (88.6)$$

El papel que representan las igualdades V (127.11),

$$f_{i\omega} = \sum_k \alpha^{-1}_{ik}(\omega) x_{k\omega}, \quad (88.7)$$

que establecen la relación entre las magnitudes f_ω y x_ω , lo que representan ahora las ecuaciones de Maxwell (88.3) y (88.4), de las que se sigue

$$\begin{aligned} K_{i\omega} &= -\epsilon_{ik} E_{k\omega} + (ic/\omega)(\text{rot } \mathbf{H}_\omega)_i, \\ L_{i\omega} &= -\mu_{ik} H_{k\omega} - (ic/\omega)(\text{rot } \mathbf{E}_\omega)_i. \end{aligned} \quad (88.8)$$

Los coeficientes α_{ik}^{-1} se determinan comparando (88.8) con (88.7), teniendo en cuenta las definiciones (88.6); los subíndices i, k numeran las componentes de los vectores \mathbf{E} , \mathbf{H} y las porciones ΔV a que corresponden sus valores.

Los operadores diferenciales rot en (88.8) hay que interpretarlos como operadores diferencia definidos en un sistema discreto de puntos (por ejemplo, los centros de las porciones ΔV). La forma concreta de estos operadores, sea dicho de paso, carece por completo de importancia, puesto que para lo que sigue basta tener en cuenta que, en las dos igualdades (88.8), los operadores aplicados a \mathbf{H}_ω y \mathbf{E}_ω , respectivamente, son imaginarios puros y difieren solamente en el signo. Esto significa que entre los coeficientes α_{ik}^{-1} que ligan los valores de las magnitudes \mathbf{K} y \mathbf{L} (en un punto dado del espacio) con los valores de las correspondientes magnitudes \mathbf{H} y \mathbf{E} en diferentes puntos del espacio, existen las relaciones

$$\alpha^{-1}_{ik} = (\alpha^{-1}_{ki})^*.$$

Según la fórmula general V (127.12) de aquí se sigue inmediatamente que

$$(K_{i1}L_{k2})_\omega = 0, \quad (88.9)$$

donde los subíndices (1) y (2) significan que las magnitudes se han tomado en puntos con vectores posición \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 ; la fórmula (88.9) es válida tanto para $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$ como $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$.

Además, de la primera igualdad (88.8) (teniendo en cuenta (88.6)) se deduce que los coeficientes a_{ik}^{-1} que ligan los valores de $K_{i\omega}$ con los valores de $E_{k\omega}$ son iguales a $-\epsilon_{ik} 4\pi / \Delta V$ si \mathbf{K}_ω y \mathbf{E}_ω corresponden a un mismo punto del espacio, e iguales a cero si los valores \mathbf{K}_ω y \mathbf{E}_ω se toman en puntos diferentes. Según V (127.12) tenemos por ello

$$(K_{i1}K_{k2})_\omega = 0 \quad (\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2),$$

$$(K_i K_k)_\omega = i\hbar(\epsilon_{ki}^* - \epsilon_{ik}) \frac{1}{\Delta V} \operatorname{ctgh}(\hbar\omega/2T).$$

Pasando ahora al límite $\Delta V \rightarrow 0$, podemos, evidentemente, escribir estas dos fórmulas juntas como fórmula única

$$(K_{i1}K_{k2})_\omega = i\hbar(\epsilon_{ki}^* - \epsilon_{ik}) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \operatorname{ctgh}(\hbar\omega/2T), \quad (88.10)$$

donde \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 son los vectores posición de dos puntos arbitrarios del cuerpo. En lo que sigue supondremos que éste no se encuentra en un campo magnético exterior constante; entonces $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$ y (88.10) puede escribirse en la forma

$$(K_{i1}K_{k2})_\omega = 2\hbar\epsilon_{ik}'' \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \operatorname{ctgh}(\hbar\omega/2T). \quad (88.11)$$

De manera enteramente análoga se obtiene la fórmula

$$(L_{i1}L_{k2})_\omega = 2\hbar\mu_{ik}'' \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \operatorname{ctgh}(\hbar\omega/2T). \quad (88.12)$$

Así pues, las fluctuaciones de las inducciones «extrañas» en puntos diferentes de un cuerpo están correlacionadas entre sí tan sólo en el límite de una distancia entre puntos ($\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1$) igual a cero. Claro está, este límite debe entenderse en el sentido que corresponde al punto de vista macroscópico; lo afirmado significa que, en realidad, la correlación de estas magnitudes se extiende solamente hasta distancias atómicas. Hay que subrayar la circunstancia fundamental de que las fórmulas de correlación para las inducciones «extrañas» resultan ser independientes de la forma geométrica del cuerpo en el que se consideran las fluctuaciones y, en este sentido, resultan tener una validez general.

A las fórmulas (88.11) y (88.12) puede dárseles otra forma en el dominio de las frecuencias relativamente pequeñas (dominio «cuasiestacionario») en el cual el tensor ϵ_{ik} puede expresarse en función de un tensor constante (independiente de la frecuencia) de conductibilidad σ_{ik} de acuerdo con

$$\epsilon_{ik} = 4\pi i \sigma_{ik} / \omega. \quad (88.13)$$

Introduzcamos en este caso en vez de \mathbf{K} una nueva magnitud \mathbf{j} definida por $\mathbf{j} = (1/4\pi)\partial\mathbf{K}/\partial t$ o bien por

$$\mathbf{j}_\omega = -i\omega\mathbf{K}_\omega/4\pi. \quad (88.14)$$

El significado de esta magnitud se explica por la forma que adopta la ecuación (88.4):

$$(\text{rot } \mathbf{H}_\omega)_i = (4\pi/c)(\sigma_{ik}E_{k\omega} + j_{i\omega}). \quad (88.15)$$

Se ve aquí que la fluctuación total de la densidad de corriente es $\sigma_{ik}E_{k\omega} + j_i$, de modo que el vector \mathbf{j} representa su parte «extraña», no ligada con el campo eléctrico \mathbf{E} . Para las frecuencias a las que vale (88.13) y para temperaturas no demasiado bajas, se tiene $kT \gg \hbar\omega$, de modo que $\text{ctgh}(\hbar\omega/2T) \approx 2T/\hbar\omega$. En definitiva, la fórmula (88.11) toma la forma

$$(j_{i1}j_{k2})_\omega = (T/\pi)\sigma_{ik}\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (88.16)$$

La fórmula (88.16) fue obtenida (siguiendo otro método) por *M. A. Leontovich* y *S. M. Rytov* (1952), y las fórmulas (88.11) y (88.12), por *S. M. Rytov* (1953). Junto con las ecuaciones (88.3) y (88.4), estas fórmulas resuelven, en principio, la cuestión de calcular las fluctuaciones electromagnéticas en un cuerpo cualquiera. El camino para resolver el problema en tal caso, es el siguiente. Considerando \mathbf{K}_ω y \mathbf{L}_ω como funciones dadas de las coordenadas, se resuelven las ecuaciones (88.3) y (88.4) respecto de \mathbf{E}_ω y \mathbf{H}_ω , teniendo en cuenta las necesarias condiciones de contorno relativas a la continuidad de las componentes tangenciales de \mathbf{E}_ω y \mathbf{H}_ω sobre la superficie del cuerpo (fuera de éste, claro está, se tiene $\mathbf{K} = \mathbf{L} = 0$, pero \mathbf{E} y \mathbf{H} no son nulos). El resultado que se obtiene es \mathbf{E}_ω y \mathbf{H}_ω expresados en forma de funcionales lineales de \mathbf{K}_ω y \mathbf{L}_ω . De acuerdo con esto, cualquier magnitud cuadrática (o bilineal) respecto de \mathbf{E}_ω y \mathbf{H}_ω se expresa como funcional cuadrática de \mathbf{K}_ω , \mathbf{L}_ω , obteniéndose sus valores medios mediante las fórmulas (88.11) y (88.12) y desapareciendo \mathbf{K}_ω , \mathbf{L}_ω del resultado.

Como ejemplo, consideremos las fluctuaciones electromagnéticas en un medio isótropo ilimitado (*S. M. Rytov*, 1953). Supondremos que la permeabilidad del medio es igual a la unidad; entonces $\mu'' = 0$ y hay que hacer también $\mathbf{L} = 0$. De esta manera, las ecuaciones (88.3) y (88.4) toman la forma

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}_\omega &= i\omega\mathbf{H}_\omega/c, \\ \text{rot } \mathbf{H}_\omega &= -i\omega(\epsilon\mathbf{E}_\omega + \mathbf{K}_\omega)/c, \end{aligned} \quad (88.17)$$

siendo

$$(K_{i1}K_{k2})_\omega = 2\hbar\epsilon''\delta_{ik}\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \text{ctgh}(\hbar\omega/2T). \quad (88.18)$$

Representemos \mathbf{K}_ω como integral de Fourier:

$$\mathbf{K}_\omega(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}_\omega(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{p}. \quad (88.19)$$

Entonces

$$\mathbf{g}_\omega(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_\omega(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

$$\mathbf{g}_\omega^*(\mathbf{p}) = \mathbf{g}_{-\omega}(-\mathbf{p}).$$

Determinemos la función correlación entre las componentes $\mathbf{g}_\omega(\mathbf{p})$. Para ello escribamos su producto en la forma de integral doble

$$\begin{aligned} & g_{i\omega}(\mathbf{p}) g_{k\omega}(\mathbf{p}') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{i\omega}(\mathbf{r}_1) K_{k\omega}(\mathbf{r}_2) \exp[-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}_2)] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \end{aligned}$$

Efectuando el promedio de acuerdo con

$$\overline{K_{i\omega}(\mathbf{r}_1) K_{k\omega}(\mathbf{r}_2)} = (K_{i1} K_{k2})_\omega \delta(\omega + \omega'),$$

substituyendo en (88.18) y calculando una de las integrales (respecto de \mathbf{r}_1 o de \mathbf{r}_2), obtendremos, dado que en el integrando aparece el factor $\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$:

$$\begin{aligned} \overline{g_{i\omega}(\mathbf{p}) g_{k\omega}(\mathbf{p}')} &= 2\hbar\epsilon'' \delta(\omega + \omega') \delta_{ik} \operatorname{ctgh}(\hbar\omega/2T) \times \\ &\quad \times \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \cdot \mathbf{r}] d\mathbf{r} \end{aligned}$$

o bien, en definitiva,

$$\overline{g_{i\omega}(\mathbf{p}) g_{k\omega}(\mathbf{p}')} = \frac{\hbar}{4\pi^3} \epsilon'' \delta_{ik} \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \operatorname{ctgh}(\hbar\omega/2T). \quad (88.20)$$

Las ecuaciones (88.17) se resolverán siguiendo el método de Fourier. Junto con la representación de \mathbf{K}_ω en forma de integral (88.19), haremos

$$\mathbf{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{p},$$

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{p} \times \mathbf{a} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{p}.$$

Con esto la primera de las ecuaciones (88.17) queda ya satisfecha, y la sustitución en la segunda nos da

$$\mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{a}) = -k^2(\epsilon \mathbf{a} + \mathbf{g}),$$

de donde

$$\mathbf{a} = [k^2\epsilon\mathbf{g} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{g})\mathbf{p}]/\epsilon(p^2 - \epsilon k^2).$$

Utilizando esta expresión y la fórmula (88.20), obtendremos para la correlación de las componentes de Fourier que corresponde al campo eléctrico el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \overline{a_{i\omega}(\mathbf{p})a_{k\omega'}(\mathbf{p}') } &= \frac{\hbar\epsilon''}{4\pi^3|\epsilon|^2}\delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}')\delta(\omega + \omega')\operatorname{ctgh}\frac{\hbar\omega}{2T} \times \\ &\quad \times \frac{k^4|\epsilon|^2\delta_{ik} - p_ip_k[k^2(\epsilon + \epsilon^*) - p^2]}{|p^2 - k^2\epsilon|^2}. \end{aligned} \quad (88.21)$$

Finalmente, la correlación espacial entre las fluctuaciones del campo eléctrico se obtendrá aplicando la transformación de Fourier inversa:

$$\begin{aligned} &\overline{E_{i\omega}(\mathbf{r}_1)E_{k\omega'}(\mathbf{r}_2)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{a_{i\omega}(\mathbf{p})a_{k\omega'}(\mathbf{p}')} \exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}_2)] d\mathbf{p} d\mathbf{p}'. \end{aligned}$$

Una integración se efectúa sin más en virtud de la presencia de la función δ en (88.21). En cambio, para llevar a cabo la segunda integración hay que desarrollar la expresión (88.21) en fracciones simples y utilizar luego las fórmulas

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{p^2 + \kappa^2} d\mathbf{p} &= 2\pi^2 \frac{e^{-\kappa r}}{r}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_ip_k \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{p^2 + \kappa^2} d\mathbf{p} &= -2\pi^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{e^{-\kappa r}}{r} \right). \end{aligned}$$

La primera de ellas se obtiene tomando las componentes de Fourier de los dos miembros de la conocida igualdad

$$(\Delta - \kappa^2) \frac{e^{-\kappa r}}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}), \quad (88.22)$$

y la segunda resulta de derivar la primera.

En definitiva obtendremos

$$\begin{aligned} (E_{i1}E_{k2})_{\omega} &= \frac{\hbar}{4\pi i} \operatorname{ctgh} \frac{\hbar\omega}{2T} \left\{ \frac{k^2}{r} (e^{-kr\sqrt{-\epsilon}} - e^{-kr\sqrt{-\epsilon^*}}) \delta_{ik} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|\epsilon|^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left[\frac{1}{r} (\epsilon^* e^{-kr\sqrt{-\epsilon}} - \epsilon e^{-kr\sqrt{-\epsilon^*}}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (88.23)$$

donde $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ y la raíz $\sqrt{-\epsilon}$ debe tomarse con signo tal que se tenga $\operatorname{Re} \sqrt{-\epsilon} > 0$. En particular, contrayendo respecto de los índices i, k y aplicando la relación (88.22), se encuentra

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)_\omega = \frac{\hbar}{4\pi i} \operatorname{ctgh} \frac{\hbar\omega}{2T} \left(\frac{2k^2}{r} (e^{-kr\sqrt{-\epsilon}} - e^{-kr\sqrt{-\epsilon}*}) + \right. \\ \left. + \frac{8\pi i \epsilon''}{|\epsilon|^2} \delta(\mathbf{r}) \right). \end{aligned} \quad (88.24)$$

De manera análoga puede calcularse la correlación de las diferentes componentes de \mathbf{H}_ω entre sí y con las componentes de \mathbf{E}_ω ; no nos detendremos aquí a estudiar este punto.

§ 89. La radiación del cuerpo negro en un medio transparente

La existencia de los factores ϵ'' o μ'' en las fórmulas (88.11) y (88.12) resalta claramente la relación entre las fluctuaciones electromagnéticas y la absorción en un medio dado. Pero si se efectúa el paso al límite $\epsilon'' \rightarrow 0$ (suponiendo al mismo tiempo $\epsilon' > 0$) en las fórmulas (88.23) y (88.24), obtendremos una expresión finita y no nula. Esta circunstancia está ligada con el orden del paso al límite en dos fases: a dimensiones infinitas del medio y a la tendencia de ϵ'' a cero. Dado que en un medio infinito un valor de ϵ'' , por pequeño que sea, conduce ya en último término a absorción, al seguir el orden de paso al límite que hemos adoptado, el resultado que se obtiene se refiere a un medio físicamente transparente, en el cual, como en cualquier medio real, existe siempre una cierta absorción no nula.

Efectuemos, por ejemplo, el indicado paso al límite en la fórmula (88.24). Observemos para ello que cuando ϵ'' es pequeño

$$\begin{aligned} \sqrt{-\epsilon} &= \sqrt{(-\epsilon' - i\epsilon'')} \approx -i\sqrt{\epsilon'}(1 + \frac{1}{2}i\epsilon''/\epsilon'), \\ \sqrt{-\epsilon^*} &= \sqrt{(-\epsilon' + i\epsilon'')} \approx i\sqrt{\epsilon'}(1 - \frac{1}{2}i\epsilon''/\epsilon'). \end{aligned}$$

El signo que hay que elegir en una y en otra expresión se determina por la condición de que sus partes reales sean positivas. Por consiguiente, en el límite $\epsilon'' \rightarrow 0$ obtendremos

$$(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)_\omega = \frac{\omega^2 \hbar}{\pi c^2} \frac{\sin \omega nr/c}{r} \operatorname{ctgh} \frac{\hbar\omega}{2T},$$

donde $n = \sqrt{\epsilon}$ es el índice de refracción. Visto que no existe ningún término con una función δ , esta expresión se conserva finita, y cuando los puntos \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 coinciden se tiene

$$(\mathbf{E}^2)_\omega = (\omega^3 \hbar n / \pi c^3) \operatorname{ctgh} (\hbar\omega / 2T). \quad (89.1)$$

La densidad espectral de la energía del campo eléctrico (por cm^3 del medio) viene dada por la expresión (61.10) y V (121.6)

$$\frac{1}{8\pi} 2(\mathbf{E}^2)_\omega \frac{d(n^2\omega)}{d\omega}.$$

Substituyendo aquí (89.1), se obtendrá

$$\frac{\omega^3 \hbar n}{4\pi^2 c^3} \frac{d(n^2\omega)}{d\omega} \operatorname{ctgh} \frac{\hbar\omega}{2T}.$$

De manera análoga se puede calcular el valor medio del cuadrado del campo magnético. En este caso resulta que $(\mathbf{H}^2)_\omega = \epsilon(\mathbf{E}^2)_\omega$, por lo que la energía magnética será

$$\frac{1}{8\pi} 2(\mathbf{H}^2)_\omega = \frac{\omega^3 \hbar n^3}{4\pi^2 c^3} \operatorname{ctgh} \frac{\hbar\omega}{2T}$$

(no efectuamos aquí los cálculos correspondientes teniendo en cuenta que el resultado final que se obtiene es ya de suyo evidente).

Así pues, la densidad espectral total de la energía electromagnética de los campos de fluctuación es

$$\begin{aligned} & \frac{\omega^3 \hbar}{4\pi^2 c^3} \left(n \frac{d(n^2\omega)}{d\omega} + n^3 \right) \operatorname{ctgh} \frac{\hbar\omega}{2T} \\ &= \left(\frac{1}{2} \hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \right) \frac{\omega^2 n^2}{\pi^2 c^3} \frac{d}{d\omega}(n\omega). \end{aligned}$$

El primer término entre paréntesis se debe a las oscilaciones de orden cero del campo. El segundo término, en cambio, da la energía de la radiación electromagnética en equilibrio termodinámico en el medio transparente (es decir, la energía llamada *radiación del cuerpo negro*):

$$\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \frac{\omega^2 n^2}{\pi^2 c^3} \frac{d}{d\omega}(n\omega). \quad (89.2)$$

Cabría también obtener esta fórmula, sin considerar las fluctuaciones, con sólo aplicar la correspondiente generalización de la fórmula de Planck para la radiación del cuerpo negro en el vacío. Según esta última, la energía de la radiación negra (por unidad de volumen) con componentes del vector de onda en intervalos dk_x, dk_y, dk_z viene dada por la fórmula

$$\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \cdot \frac{2dk_x dk_y dk_z}{(2\pi)^3}$$

(el factor 2 tiene en cuenta las dos direcciones de polarización). Para obtener la correspondiente densidad espectral de energía hay que substituir $dk_x dk_y dk_z$ por

$4\pi k^2 dk$ y hacer $k = \omega/c$. En cuanto al paso del vacío a un medio transparente, basta hacer $k = n\omega/c$ en vez de $k = \omega/c$, es decir, escribir

$$k^2 dk = k^2(dk/d\omega) d\omega = (\omega^2 n^2/c^3) d(n\omega)/d\omega,$$

lo que da la fórmula (89.2). Obsérvese que esta última se conserva también válida para $\mu \neq 1$, cuando por n hay que entender $\sqrt{\epsilon\mu}$.

§ 90. Fuerzas de atracción molecular entre sólidos

La teoría de las fluctuaciones electromagnéticas puede aplicarse al cálculo de las fuerzas de interacción entre dos cuerpos macroscópicos cualesquiera cuyas superficies se han aproximado hasta distancias muy pequeñas (*E. M. Lifshitz*). A continuación solamente se supone que estas distancias son grandes comparadas con las interatómicas; esta condición permite abordar el problema desde un punto de vista puramente macroscópico.

La interacción entre dos cuerpos puede considerarse en tal caso como resultado del campo electromagnético de las fluctuaciones que existe siempre en el interior de cualquier medio absorbente y se extiende también más allá de sus límites. Si el espacio entre las superficies de los cuerpos es el vacío, este mecanismo de transmisión de la interacción resulta ser, evidentemente, el único posible.

Imaginemos los dos cuerpos en interacción como dos medios que llenan semi-espacios con fronteras planas paralelas separadas entre sí por una distancia l . El campo electromagnético de fluctuación en ambos medios y en el espacio entre ellos puede determinarse resolviendo las ecuaciones (88.17)* con las correspondientes condiciones de contorno (continuidad de las componentes tangenciales de \mathbf{E}_ω y \mathbf{H}_ω) sobre ambas superficies. La manera más conveniente de llegar a la solución consiste en desarrollar las funciones buscadas (y la magnitud \mathbf{K}_ω) en integrales de Fourier respecto de las coordenadas transversales y, z (el eje x se supone perpendicular al plano de la rendija), con lo cual se obtiene un sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias para determinar la dependencia del campo respecto de x . Resuelto este sistema, los campos $\mathbf{E}_\omega, \mathbf{H}_\omega$ se obtienen a su vez como integrales de expresiones que contienen en los integrandos los campos de fluctuación «externos» $\mathbf{K}_{1\omega}$ y $\mathbf{K}_{2\omega}$ en ambos medios. De hecho, basta obtener de forma explícita los campos $\mathbf{E}_\omega, \mathbf{H}_\omega$ únicamente en el espacio correspondiente a la rendija, puesto que la fuerza F_ω de atracción mutua (que actúa por 1 cm^2 de superficie de cada uno de los cuerpos) puede calcularse a partir de dichos campos como componente xx del tensor maxwelliano de tensiones promediado estadísticamente mediante la fórmula (88.18). Dado que en todo esto los cálculos se llevan a cabo con las componentes espectrales del campo por separado, la determinación de la fuerza total de atrac-

* Suponemos que la permeabilidad de ambos cuerpos es igual a la unidad.

ción buscada F exige todavía integrar F_ω para todas las frecuencias*.

Los cálculos correspondientes, con todo, son muy laboriosos; no nos detendremos en exponerlos aquí y daremos la fórmula final para la fuerza **:

$$F = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \operatorname{Re} \int_0^\infty \int p^2 \omega^3 \operatorname{ctgh} \frac{\hbar\omega}{2T} \left\{ \frac{(s_1 + p)(s_2 + p)}{(s_1 - p)(s_2 - p)} e^{-2ip\omega/c} - 1 \right\}^{-1} + \\ + \left\{ \frac{(s_1 + \epsilon_1 p)(s_2 + \epsilon_2 p)}{(s_1 - \epsilon_1 p)(s_2 - \epsilon_2 p)} e^{-2ip\omega/c} - 1 \right\}^{-1} \} dp d\omega, \quad (90.1)$$

donde $\epsilon_1(\omega)$, $\epsilon_2(\omega)$ son las permitividades de uno y otro cuerpo y

$$s_1 = \sqrt{[\epsilon_1(\omega) - 1 + p^2]}, \quad s_2 = \sqrt{[\epsilon_2(\omega) - 1 + p^2]}, \quad (90.2)$$

debiendo tomarse la raíz con signo tal que la parte imaginaria de s sea positiva***. El camino de integración se indica en la figura 43 a. La integral respecto de ω se extiende a valores reales desde 0 a ∞ , y respecto de p , a lo largo del eje real desde

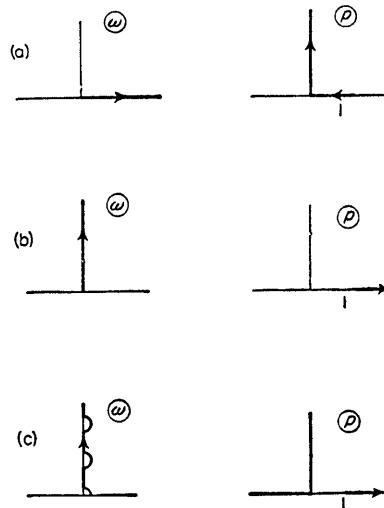


FIG. 43

* El valor F_ω que se obtiene como resultado de los cálculos, contiene un término que diverge al integrar respecto de ω . Este término divergente, sin embargo, no depende de la distancia l y representa la presión que determina sobre la superficie la radiación del cuerpo negro en el vacío. En condiciones reales, estas fuerzas, que actúan sobre un cuerpo por todos lados, se compensan entre sí. Por ello, el término a que nos referimos nada tiene que ver con la fuerza de atracción mutua que nos interesa, y debe prescindirse de él.

** Véase E. M. Lifshitz, ZhETF 29, 94, 1955. Otro procedimiento basado en el método de las funciones de Green ha sido utilizado por I. E. Dzialochynski, E. M. Lifshitz y L. P. Pitaevski, Advances in Physics, 10, 165, 1961.

*** Dado que la parte imaginaria del radicando (ϵ'') es positiva, cuando se tiene $\operatorname{Im} s > 0$ será también $\operatorname{Re} s > 0$.

1 a 0 y, siguiendo el eje imaginario, desde 0 a $i\infty$.

Si la temperatura de los cuerpos se puede considerar igual a cero (véase más adelante), $\operatorname{ctgh}(\hbar\omega/2T)$ en (90.1) se substituye por la unidad. Consideremos primero la fórmula (90.1) precisamente para este caso.

La fórmula (90.1) resulta poco conveniente, tanto por su forma compleja, como por el hecho de que el integrando contiene una expresión que oscila (sobre la parte real del camino de integración respecto de p), a saber, el factor $e^{-2ip\omega l/c}$. Esta circunstancia complica particularmente el cálculo de la integral para grandes valores de l , cuando la oscilación pasa a ser muy rápida. Estas dificultades se pueden eludir modificando convenientemente los caminos de integración en los planos de las variables complejas ω y p . En efecto, es posible desplazar simultáneamente estos caminos de tal manera que la integración respecto de p se extiende solamente a valores reales, y la relativa a ω , únicamente a valores imaginarios (fig. 43 b); entonces el exponente en $e^{-2ip\omega l/c}$ será siempre real*.

Como resultado obtenemos la expresión siguiente para la fuerza de interacción (cuando $T = 0$):

$$F = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int_0^\infty \int_1^\infty p^2 \xi^3 \left\{ \left[\frac{(s_1 + p)(s_2 + p)}{(s_1 - p)(s_2 - p)} e^{2p\xi l/c} - 1 \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[\frac{(s_1 + \epsilon_1 p)(s_2 + \epsilon_2 p)}{(s_1 - \epsilon_1 p)(s_2 - \epsilon_2 p)} e^{2p\xi l/c} - 1 \right]^{-1} \right\} dp d\xi. \quad (90.3)$$

Se ha introducido aquí la notación $\omega = i\xi$ para los valores imaginarios de ω , y hay que entender por ϵ_1 y ϵ_2 las funciones reales $\epsilon_1(i\xi)$ y $\epsilon_2(i\xi)$. El signo Re se ha suprimido, dado que la expresión que acabamos de escribir es real, evidentemente. La fórmula (90.3) proporciona, en principio, la posibilidad de calcular la fuerza F para una distancia arbitraria l , con tal que se conozcan las funciones $\epsilon(i\xi)$ para ambos cuerpos. Ahora bien, estas últimas pueden expresarse en función de los valores de la parte imaginaria de la función $\epsilon(\omega)$ para valores ω reales según la fórmula (62.17). De esta manera cabe decir que la ley de interacción de los cuerpos queda determinada por completo si se dan sus funciones $\epsilon''(\omega)$.

Consideremos el caso límite de distancias l pequeñas comparadas con las longitudes de onda λ_0 más importantes que figuran en el espectro de absorción de los cuerpos dados. Las temperaturas que pueden intervenir en el caso de cuerpos condensados son pequeñas, en cualquier caso, en comparación con los valores $\hbar\omega \sim \hbar\omega_0$ que aquí representan algún papel (donde $\omega_0 \sim 2\pi c/\lambda_0$). Por ello cabe considerar que $T = 0$ y utilizar, según esto, la fórmula (90.3).

* La condición de aplicabilidad de esta transformación consiste en la existencia de una manera de desplazar simultáneamente ambos caminos de modo que el integrando no pase en ningún caso por sus polos. Un estudio especial, basado en las propiedades generales de la función $\epsilon(\omega)$ (expuestas en el § 62), demuestra que dicha deformación sí es posible.

Gracias a la presencia en el denominador del integrando del factor $e^{2p\xi l/c}$ que crece exponencialmente, el papel principal en la integración respecto de p lo desempeñan aquellos valores p tales que $p\xi/c \sim 1$. Con esto es $p \gg 1$ y, por ello, al determinar los términos principales se puede hacer $s_1 \approx s_2 \approx p$. En esta aproximación, el primer término en los paréntesis rectangulares de (90.3) se anula. En cuanto al segundo término, después de introducir la variable de integración $x = 2p\xi/c$, da

$$F = \frac{\hbar}{16\pi^2 l^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^2 dx d\xi}{\left(\frac{\epsilon_1 + 1}{\epsilon_1 - 1}\right) \left(\frac{\epsilon_2 + 1}{\epsilon_2 - 1}\right) e^x - 1} \quad (90.4)$$

(el límite inferior $2l\xi/c$ de integración respecto de x se ha reemplazado, en esta misma aproximación, por el valor cero).

La fórmula (90.4) determina la fuerza de atracción en el caso límite de valores l pequeños. Dicha fuerza resulta ser inversamente proporcional al cubo de la distancia. La función $\epsilon(i\xi) - 1$ es monótona decreciente al aumentar ξ y tiende a cero. En consecuencia, los valores de ξ a partir de un cierto ξ_0 dejan de proporcionar una contribución importante a la integral; la condición de que l sea pequeño significa que debe tenerse $l \ll c/\xi_0$.

Veamos cómo se realiza en (90.4) el paso al límite correspondiente a la interacción de los átomos individuales. Para ello supondremos, de manera formal, que ambos medios se encuentran suficientemente enrarecidos. Entonces las diferencias $\epsilon_1 - 1$ y $\epsilon_2 - 1$ son casi nulas y de (90.4) se deduce, con precisión suficiente,

$$\begin{aligned} F &= \frac{\hbar}{64\pi^2 l^3} \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 e^{-x} (\epsilon_1 - 1)(\epsilon_2 - 1) dx d\xi \\ &= \frac{\hbar}{32\pi^2 l^3} \int_0^\infty [\epsilon_1(i\xi) - 1][\epsilon_2(i\xi) - 1] d\xi. \end{aligned}$$

Expresando $\epsilon(i\xi)$ en función de los valores $\epsilon''(\omega)$ sobre el eje real según (62.17), obtendremos

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty [\epsilon_1(i\xi) - 1][\epsilon_2(i\xi) - 1] d\xi \\ &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\omega_1 \omega_2 \epsilon_1''(\omega_1) \epsilon_2''(\omega_2)}{(\omega_1^2 + \xi^2)(\omega_2^2 + \xi^2)} d\xi d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\epsilon_1''(\omega_1) \epsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1 + \omega_2} d\omega_1 d\omega_2, \end{aligned}$$

y para la fuerza F se encuentra:

$$F = \frac{\hbar}{16\pi^3 l^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\epsilon_1''(\omega_1)\epsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1 + \omega_2} d\omega_1 d\omega_2. \quad (90.5)$$

Por otra parte, se puede considerar la fuerza de interacción entre dos medios enrarecidos como resultado de la interacción entre pares individuales de moléculas. Entonces, la fuerza (90.5) corresponde a la interacción de las moléculas con una energía que depende de la distancia R entre ellas de acuerdo con

$$U = -\frac{3\hbar}{8\pi^4 R^6 N^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\epsilon_1''(\omega_1)\epsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1 + \omega_2} d\omega_1 d\omega_2, \quad (90.6)$$

donde N es el número de átomos por unidad de volumen ((90.5) se obtiene a partir de aquí por integración en los dos semiespacios separados por una rendija de anchura l y derivando luego la energía total respecto de la distancia l). La fórmula (90.6) coincide con la conocida fórmula de *F. London* que se obtiene mediante la teoría cuántica ordinaria de perturbaciones aplicada a la interacción dipolar entre dos átomos. Al efectuar la comparación, debe tenerse en cuenta que $\epsilon''(\omega)$ está ligada con la densidad espectral de la «fuerza de los osciladores» $f(\omega)$ por la relación (62.13); ahora bien, la fuerza de éstos se expresa, como de ordinario, en función de los cuadrados de los elementos de matriz del momento dipolar del átomo. Vemos así, cómo una fórmula microscópica resulta de una teoría macroscópica.

Pasemos al caso límite opuesto, cuando las distancias son grandes comparadas con las longitudes de onda que más importan en el espectro de absorción de los cuerpos ($l \gg \lambda_0$). También aquí supondremos primero que la temperatura es igual a cero.

Introduzcamos de nuevo en la fórmula general (90.3) la variable de integración $x = 2p\xi l/c$, pero adoptemos como segunda variable no ξ , sino p :

$$\begin{aligned} F &= \frac{\hbar c}{32\pi^2 l^4} \int_0^\infty \int_1^\infty \frac{x^3}{p^2} \left\{ \left[\frac{(s_1 + p)(s_2 + p)}{(s_1 - p)(s_2 - p)} e^x - 1 \right]^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{(s_1 + \epsilon_1 p)(s_2 + \epsilon_2 p)}{(s_1 - \epsilon_1 p)(s_2 - \epsilon_2 p)} e^x - 1 \right]^{-1} \right\} dp dx, \\ \epsilon &= \epsilon(ixc/2pl), \quad s = \sqrt[\epsilon]{[\epsilon(ixc/2pl) - 1 + p^2]}. \end{aligned}$$

Gracias a la presencia de e^x en los denominadores, en la integral respecto de x representan un papel los valores $x \sim 1$, y dado que $p \geq 1$, el argumento de las funciones ϵ es casi cero para valores de l grandes en todo el dominio de valores de las variables que importa. De acuerdo con esto, se pueden substituir ϵ_1 y ϵ_2 , simplemente, por sus valores para $\omega = 0$, es decir, por las permitividades electrostáticas,

que designaremos por ϵ_{10} y ϵ_{20} . En los metales, la función $\epsilon(\omega)$ tiende a infinito cuando $\omega \rightarrow 0$; así pues, en dicho caso hay que suponer $\epsilon_0 = \infty$.

De esta manera obtendremos en definitiva el resultado siguiente:

$$F = \frac{\hbar c}{32\pi^2 l^4} \int_0^\infty \int_1^\infty \frac{x^3}{p^2} \left\{ \left[\frac{(s_{10} + p)(s_{20} + p)}{(s_{10} - p)(s_{20} - p)} e^x - 1 \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[\frac{(s_{10} + \epsilon_{10}p)(s_{20} + \epsilon_{20}p)}{(s_{10} - \epsilon_{10}p)(s_{20} - \epsilon_{20}p)} e^x - 1 \right]^{-1} \right\} dp dx, \quad (90.7)$$

$$s_{10} = \sqrt{(\epsilon_{10} - 1 + p^2)}, \quad s_{20} = \sqrt{(\epsilon_{20} - 1 + p^2)}.$$

La fuerza de atracción resulta aquí inversamente proporcional a l^4 . Es notable que, en este caso límite, dicha fuerza depende solamente de las permitividades electrostáticas de ambos medios.

Consideremos algunos casos particulares. Un resultado especialmente simple se obtiene cuando los dos medios son metales. Haciendo en (90.7) $\epsilon_{10} = \epsilon_{20} = \infty$, se obtendrá

$$F = \frac{\hbar c}{16\pi^2 l^4} \int_0^\infty \int_1^\infty \frac{x^3 dp dx}{p^2(e^x - 1)} = \frac{\hbar c}{l^4} \cdot \frac{\pi^2}{240}. \quad (90.8)$$

Esta fuerza es por completo independiente de la naturaleza de los mismos (esta propiedad no se presenta a pequeñas distancias, caso éste en que la intensidad de la interacción depende de la función $\epsilon(i\xi)$ para todos los valores de ξ , y no sólo para el correspondiente a $\xi = 0$).*

Para dos dieléctricos iguales ($\epsilon_{10} = \epsilon_{20} = \epsilon_0$), he aquí el resultado que se obtiene a partir de (90.7) mediante integración numérica:

$$F = \frac{\hbar c}{l^4} \cdot \frac{\pi^2}{240} \left(\frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 + 1} \right)^2 \phi(\epsilon_0), \quad (90.9)$$

donde $\phi(\epsilon_0)$ es una función cuyos valores se representan gráficamente en la figura 44.

Finalmente, en la fórmula (90.7) efectuemos el paso a la interacción de moléculas por separado. Como antes, supondremos para ello que ambos medios están suficientemente enrarecidos, es decir, que las diferencias $\epsilon_{10} - 1$ y $\epsilon_{20} - 1$ son pequeñas. Conservando en el integrando de (90.7) únicamente el primer término no nulo del desarrollo en serie respecto de estas diferencias obtendremos

$$F = \frac{\hbar c}{32\pi^2 l^4} \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx \int_1^\infty \frac{1 - 2p^2 + 2p^4}{8p^6} dp (\epsilon_{10} - 1)(\epsilon_{20} - 1)$$

* La fórmula (90.8) había sido antes obtenida por *H. B. G. Casimir* (1948) siguiendo otro método.

o bien

$$F = \frac{\hbar c}{l^4} \cdot \frac{23}{640\pi^2} (\epsilon_{10} - 1)(\epsilon_{20} - 1). \quad (90.10)$$

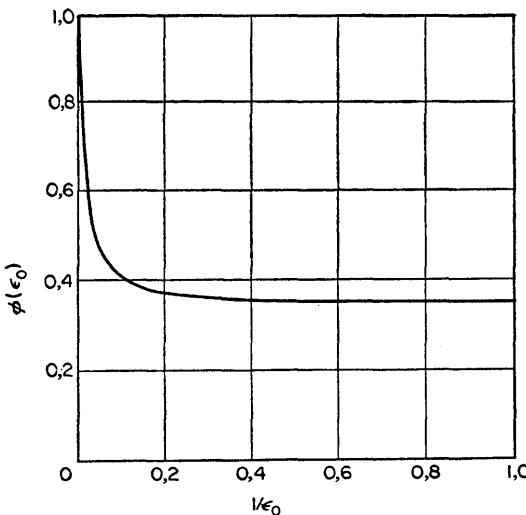


FIG. 44

Esta fuerza corresponde a la interacción de las moléculas con una energía

$$U = - \frac{23\hbar c}{64\pi^3 R^7} \frac{(\epsilon_{10} - 1)(\epsilon_{20} - 1)}{N^2} = - \frac{23\hbar c}{4\pi R^7} \alpha_1 \alpha_2, \quad (90.11)$$

donde α_1, α_2 son las polarizaciones estáticas de una y de otra. Esta fórmula coincide con el resultado del cálculo cuántico efectuado por Casimir y Polder (1948) para la atracción de dos moléculas a distancias suficientemente grandes, tanto que pasan a ser importantes los efectos de retardo de la interacción.

Para obtener fórmulas que tengan en cuenta la influencia de la temperatura, volvamos a la expresión de partida (90.1) y veamos en qué sentido debe modificarse cuando $T \neq 0$ la transformación que condujo a la fórmula (90.3) en el caso $T = 0$. La función $\operatorname{ctgh}(\hbar\omega/2T)$ posee infinitos polos situados sobre el eje imaginario, iguales a

$$\omega_n = i\xi_n = 2\pi iTn/\hbar, \quad (90.12)$$

donde n es un número entero. Por ello, al desplazar el camino de integración respecto de ω llevándolo a coincidir con el eje imaginario, es necesario sortear estos polos mediante semicircunferencias, salvo el polo $\omega = 0$ que debe rodearse siguiendo un cuadrante (fig. 43 c). Precisamente estos segmentos del camino de integración proporcionan contribuciones a la parte real de la integral, contribuciones que son

iguales a los residuos del integrando en dichos polos multiplicados por πi (por $\pi i/2$ para el polo $n = 0$); en cambio, la integración a lo largo de los segmentos del eje imaginario entre polos da cantidades puramente imaginarias que desaparecen al tomar la parte real.

Se obtiene así la siguiente fórmula:

$$F = \frac{T}{\pi c^3} \sum_{n=0}^{\infty'} \xi_n^3 \int_1^{\infty} p^2 \left\{ \left[\frac{(s_{1n} + p)(s_{2n} + p)}{(s_{1n} - p)(s_{2n} - p)} e^{2p\xi_nl/c} - 1 \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[\frac{(s_{1n} + \epsilon_{1n}p)(s_{2n} + \epsilon_{2n}p)}{(s_{1n} - \epsilon_{1n}p)(s_{2n} - \epsilon_{2n}p)} e^{2p\xi_nl/c} - 1 \right]^{-1} \right\} dp, \quad (90.13)$$

$$s_n = \sqrt{(\epsilon_n - 1 + p^2)}, \quad \epsilon_n = \epsilon(i\xi_n)$$

(el apóstrofo en el signo de suma significa que el término con $n = 0$ debe dividirse por dos). Cuando $T \rightarrow 0$, las distancias entre polos tienden también a cero, la suma respecto de n puede substituirse por una integración respecto de ξ y volvemos a la fórmula (90.3) que no contiene T .

Mientras que, en el caso límite de pequeñas distancias, al determinar la fuerza de interacción se puede considerar siempre de hecho la temperatura de los cuerpos como igual a cero, a grandes distancias la influencia de la temperatura puede cobrar importancia fundamental. La temperatura característica para una longitud l es $\hbar c/l$, y la condición que permite hacer $T = 0$ es, aproximadamente, $IT/\hbar c \ll 1$. Para temperaturas suficientemente pequeñas esta condición, claro está, puede siempre ser compatible con la condición $l \gg \lambda_0$. Pero en el caso de temperaturas elevadas, cabe que dichas dos condiciones resulten contradictorias entre sí, y entonces el dominio de aplicabilidad de la ley límite (90.7) de hecho desaparece.

Consideremos el caso límite de distancias tan grandes que se tiene $IT/\hbar c \gg 1$. Entonces, de todos los términos de la suma (90.13) sólo hay que conservar el primero. Sin embargo, es imposible hacer en él, sin más, $n = 0$ debido a la indeterminación que aparece en tal caso (el factor ξ_n^3 se anula, pero la integral respecto de p diverge). Esta complicación puede evitarse introduciendo primero, en vez de p , una nueva variable de integración $x = 2p\xi_nl/c$ (con lo cual desaparece el factor ξ_n^3). Haciendo luego $n = 0$, obtendremos

$$F = \frac{T}{16\pi l^3} \int_0^{\infty} x^2 \left[\frac{(\epsilon_{10} + 1)(\epsilon_{20} + 1)}{(\epsilon_{10} - 1)(\epsilon_{20} - 1)} e^x - 1 \right]^{-1} dx. \quad (90.14)$$

De esta manera, a distancias suficientemente grandes disminuye la rapidez con que decrece la fuerza de interacción, que pasa a seguir de nuevo la ley l^{-3} , con un coeficiente que depende de la temperatura y del valor electrostático de la permitividad. Todos los términos siguientes de la suma (90.13) disminuyen exponencialmente para grandes valores de $IT/\hbar c$.

CAPÍTULO XIV

DISPERSIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 91. Teoría general de la dispersión en medios isótropos

En la teoría de la propagación de las ondas electromagnéticas en medios transparentes expuesta en los capítulos IX-XI, en ningún caso se consideró un fenómeno relativamente débil, pero a la vez de importancia fundamental: la *dispersión*. Este fenómeno consiste en la aparición de ondas débiles (*ondas dispersas*), cuyas frecuencias y direcciones de propagación difieren de la frecuencia y de la dirección de propagación de la onda primaria.

El origen de la dispersión se reduce, en último término, a la variación del movimiento de las cargas que forman parte de un medio bajo la influencia del campo de la onda incidente; esta variación conduce a la emisión de nuevas ondas —las ondas dispersas. El estudio del mecanismo microscópico de la dispersión debe efectuarse tomando como base la mecánica cuántica; sin embargo, ello no es necesario para desarrollar la teoría macroscópica que se expone a continuación. Por consiguiente, nos limitaremos tan sólo a breves observaciones acerca de los caracteres de los procesos que conducen al cambio de frecuencia de las ondas en la dispersión.

El tipo fundamental de procesos elementales de dispersión consiste en la absorción de un cuanto inicial $\hbar\omega$ por el sistema dispersor con emisión simultánea de otro cuanto $\hbar\omega'$ por el mismo. La frecuencia ω' del cuanto dispersado, igual puede ser menor o mayor que la frecuencia ω (estos casos se llaman, respectivamente, *dispersión de Stokes* y *dispersión de anti-Stokes*). En el primer caso la energía $\hbar(\omega-\omega')$ es absorbida por el sistema, y en el segundo la energía $\hbar(\omega'-\omega)$ es cedida por el mismo a expensas de la transición a un estado energéticamente más bajo. Así, en el caso simple de un gas, la dispersión tiene lugar en las moléculas individuales y la variación de frecuencia puede tener lugar tanto a expensas de la transición de la molécula a otro nivel de energía, como a expensas de la variación de la energía cinética de su movimiento como un todo.

Otro tipo de proceso elemental consiste en que el cuanto inicial $\hbar\omega$ se mantiene invariable, pero bajo su influencia el sistema dispersor radia inmediatamente dos cuantos: un cuanto $\hbar\omega$ con la misma frecuencia y dirección, y un cuanto $\hbar\omega'$ «dispersado». La energía $\hbar(\omega+\omega')$, en tal caso, la proporciona el sistema dispersor. Los procesos de este tipo, sin embargo, son extraordinariamente raros en condicio-

nes ordinarias comparados con los del primer tipo y prácticamente no representan ningún papel en el fenómeno de la dispersión*.

Pasando a exponer la teoría macroscópica de la dispersión, es necesario ante todo precisar el significado de los promedios que se efectúan en ella. Como ya se indicó al principio del § 88, el promedio de las magnitudes en la electrodinámica macroscópica puede concebirse como conjunto de dos operaciones: un promedio en volúmenes físicamente infinitesimales para posiciones dadas de todas las partículas en el mismo y, luego, el promedio de la magnitud obtenida respecto del movimiento de las partículas. En la teoría de la dispersión, sin embargo, es imposible adoptar este procedimiento sin más, puesto que el promediar respecto del movimiento de las partículas conduciría a la desaparición del fenómeno que nos interesa precisamente. Así, por ejemplo, la inducción y la intensidad del campo de la onda dispersada que figura en la teoría de la dispersión hay que interpretarlas como resultado de, únicamente, la primera parte de la operación promedio. Las componentes monocromáticas de las magnitudes del campo de la onda dispersada así entendidas las designaremos en este párrafo por E' , H' , D' , B' .

En cuanto al campo de la onda incidente, sus componentes se representarán por las letras E , H sin apóstrofo. En todo este capítulo se supone que la onda incidente es monocromática y de frecuencia ω .

El mero proceso de propagación de la onda dispersada en el medio supondría la relación $D' = \epsilon(\omega')E'$ entre el desplazamiento y la intensidad del campo eléctricos (admitimos que el medio dispersor es isótropo). Sin embargo, esta relación no encierra en sí el fenómeno de la dispersión, es decir, la aparición de una onda dispersada bajo la influencia de la incidente. Para describirla, es necesario tener en cuenta pequeños términos complementarios en la expresión de D' . En primera aproximación, dichos términos han de ser lineales respecto del campo de la onda incidente; la forma más general de esta dependencia es:

$$D'_i = \epsilon'E'_i + \alpha_{ik}E_k + \beta_{ik}E_k^*. \quad (91.1)$$

Aquí ϵ' designa $\epsilon(\omega')$, mientras que α_{ik} y β_{ik} son tensores que caracterizan las propiedades dispersoras del medio. En el caso general, no poseen propiedad alguna de simetría y sus componentes son funciones tanto de la frecuencia ω' de la onda dispersada, como de la frecuencia inicial ω . **

El último término en (91.1) está vinculado con aquella parte de la dispersión debida a los procesos elementales de emisión forzada. En efecto, todos los términos en el segundo miembro de la igualdad (91.1) han de corresponder a la misma frecuencia ω' que D' en el primer miembro de la misma. Dado que E^* tiene una fre-

* Veremos más adelante (§ 92) que el efecto de *emisión forzada* (o *estimulada*) es muy pequeño a todas las temperaturas tales que $T \ll \hbar(\omega + \omega')$. Puede cobrar importancia en el dominio de las radiofrecuencias.

** El carácter tensorial de las magnitudes α y β , claro está, no se encuentra en contradicción con la isotropía del medio, isotropía que hemos admitido. Sólo son isótropas las propiedades totalmente promediadas del medio; en cambio, las desviaciones locales respecto de las propiedades medias, a las que precisamente se refieren los términos complementarios en (91.1), no tienen por qué ser isótropas necesariamente.

cuencia $-\omega$, la frecuencia de las magnitudes β_{ik} debe ser $\omega + \omega'$ para que la frecuencia de los productos $\beta_{ik}E_k^*$ sea ω' . Pero $\omega + \omega'$ es precisamente la frecuencia característica de los procesos de emisión forzada. Visto que este efecto, conforme se recordó antes, es pequeño, cabe prescindir de los términos correspondientes en (91.1), y escribiremos en lo que sigue

$$D'_i = \epsilon' E'_i + \alpha_{ik} E_k. \quad (91.2)$$

Mediante fórmulas análogas se expresa también la relación entre \mathbf{B}' y \mathbf{H}' . Sin embargo, prescindiremos de las propiedades magnéticas del medio, propiedades que de ordinario carecen de importancia en el fenómeno de dispersión de la luz, por lo que se hará $\mathbf{B}' = \mathbf{H}'$.

Las ecuaciones de Maxwell para el campo de la onda dispersada se escriben:

$$\text{rot } \mathbf{E}' = i\omega' \mathbf{H}'/c, \quad \text{rot } \mathbf{H}' = -i\omega' \mathbf{D}'/c.$$

Eliminando \mathbf{H}' entre estas ecuaciones, se encuentra

$$\text{rot rot } \mathbf{E}' = \omega'^2 \mathbf{D}'/c^2.$$

Substituyendo aquí (91.2), resulta

$$\mathbf{E}' = \mathbf{D}'/\epsilon' - \alpha \cdot \mathbf{E}/\epsilon',$$

(($\alpha \cdot \mathbf{E}$) representa el vector cuyas componentes son $\alpha_{ik}E_k$) y teniendo en cuenta que $\text{div } \mathbf{D}' = 0$, obtendremos la siguiente ecuación para \mathbf{D}' :

$$\Delta \mathbf{D}' + k'^2 \mathbf{D}' = -\text{rot rot } (\alpha \cdot \mathbf{E}), \quad (91.3)$$

donde $k' = (\omega/c)/\sqrt{\epsilon'}$ es el vector de onda dispersada.

Para formular exactamente las condiciones en que debe resolverse la ecuación (91.3), dividiremos el medio dispersor en pequeñas regiones (cuyo tamaño, sin embargo, es grande comparado con las distancias moleculares). En virtud del carácter molecular de los procesos de dispersión, la correlación entre estos procesos en diferentes puntos del medio (¡no cristalino!) se extiende, en general, tan sólo a distancias que son del orden de magnitud de las moleculares*. Por ello, la luz dispersada que procede de diferentes regiones del medio es incoherente. Podemos considerar, por lo tanto, la dispersión producida en una de dichas regiones como si en el volumen restante del cuerpo la luz se propagase sin ser dispersada. Procediendo de esta manera, calcularemos el campo de la onda dispersada a gran distancia de la región de dispersión. Utilizando la conocida fórmula aproximada para los potenciales retardados a gran distancia de la fuente**, se puede escribir, sin más, la solución que buscamos de la ecuación (91.3):

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{4\pi} \text{rot rot} \frac{\exp(ik'R_0)}{R_0} \int \alpha \cdot \mathbf{E} \exp(-ik' \cdot \mathbf{r}) dV. \quad (91.4)$$

* Pueden constituir excepción ciertos casos particulares de dispersión de los que se hablará en el § 94. En estos casos, el tamaño de las regiones dispersoras ha de suponerse también grande comparado con la longitud de onda de la luz e incluso mucho mayor.

** Véase vol. II, Teoría clásica de los campos, § 66.

Aquí, \mathbf{R}_0 es el vector posición desde un punto cualquiera en el interior del volumen dispersor (al que se extiende la integración) hasta el punto de observación del campo, mientras que el vector \mathbf{k}' es paralelo a \mathbf{R}_0 . La integral que aquí aparece no depende de las coordenadas del punto de observación; derivando y conservando, como de ordinario, tan sólo los términos en $1/R_0$, se obtiene

$$\mathbf{D}' = -\frac{\exp(ik'R_0)}{4\pi R_0} \mathbf{k}' \times [\mathbf{k}' \times \int \alpha \cdot \mathbf{E} \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) dV].$$

Dado que, en el punto de observación, consideramos el medio como si no fuera dispersor, la relación entre \mathbf{D}' y \mathbf{E}' en este punto viene dada simplemente por la igualdad $\mathbf{D}' = \epsilon' \mathbf{E}'$. Separemos en el campo de la onda incidente \mathbf{E} el factor periódico espacial, escribiendo

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}).$$

Introduciendo luego la notación

$$\mathbf{G} = \int \alpha \cdot \mathbf{E}_0 \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV, \quad (91.5)$$

donde

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k},$$

haremos

$$\mathbf{E}' = -\frac{\exp(ik'R_0)}{4\pi R_0 \epsilon'} \mathbf{k}' \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{G}). \quad (91.6)$$

El vector \mathbf{E}' es perpendicular a la dirección \mathbf{k}' de la onda dispersada y viene dado por la proyección del vector \mathbf{G} perpendicular a \mathbf{k}' .

Determinado de esta manera el campo no promediado de la onda dispersada, podemos pasar ahora al estudio de la intensidad y de la polarización de la luz dispersada. Para ello hay que formar el tensor

$$I_{ik} = \overline{E'_i E'_k *}, \quad (91.7)$$

donde el trazo representa el promedio final, no efectuado hasta ahora, respecto al movimiento de las partículas en el cuerpo; el valor medio de una expresión cuadrática es, naturalmente, diferente de cero. Dado que $\mathbf{E}' \perp \mathbf{k}'$, el tensor I_{ik} posee componentes no nulas tan sólo en un plano perpendicular a \mathbf{k}' ; estas componentes forman (en este plano) un tensor bidimensional $I_{\alpha\beta}$ (designamos con letras griegas los índices que toman dos valores). El tensor $I_{\alpha\beta}$, por definición, es hermítico: $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}^*$. Es posible reducirlo a sus «ejes principales», y la razón de sus dos valores principales nos da el grado de despolarización, mientras que su suma es proporcional a la intensidad total de la luz*.

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 50. Reducir un tensor hermítico a sus ejes principales significa representarlo en la forma $I_{ik} = \lambda_1 n^1_i n_k^{2*} + \lambda_2 n_i^2 n_k^{2*}$, donde n^1 , n^2 son vectores «unitarios», en general complejos, perpendiculares entre sí: $n^1 \cdot n^{1*} = n^2 \cdot n^{2*} = 1$, $n^1 \cdot n^{2*} = 0$. Los valores principales λ_1 , λ_2 de un tensor hermítico son reales.

En los productos $E'_i E'^*_k$ aparecen productos de integrales G_i ; también ellos deben someterse a promedio. Escribiendo el producto de dos integrales en la forma de integral doble, tenemos

$$G_i G_k^* = E_{0l} E_{0m}^* \int \int \alpha_{il,1} \alpha_{km,2}^* \exp [-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] dV_1 dV_2. \quad (91.8)$$

Los índices 1, 2 indican que los valores de α se toman en dos puntos del espacio diferentes.

Al promediar el integrando, hay que tener en cuenta que la correlación entre los valores de α en puntos distintos del cuerpo se extiende, en general, tan sólo a distancias que son del orden de magnitud de las moleculares. Esto significa que, después de efectuar el promedio, el integrando será esencialmente distinto de cero tan sólo para $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \sim a$, donde a es del orden de magnitud de las distancias moleculares. El exponente en el factor exponencial es $\sim a/\lambda$, donde λ es la longitud de onda dispersada; pero $a/\lambda \ll 1$ en virtud de la condición necesaria de aplicabilidad de la teoría macroscópica en general. Podemos, en consecuencia, substituir el factor exponencial por la unidad*.

Por otra parte, la integración respecto de las coordenadas \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 se puede substituir por la integración respecto de $(\frac{1}{2})(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Dado que el integrando depende (después de promediar) únicamente de \mathbf{r} , obtendremos

$$\overline{G_i G_k^*} = V E_{0l} E_{0m}^* \int \overline{\alpha_{il,1} \alpha_{km,2}^*} dV, \quad (91.9)$$

donde V es el volumen de la parte dispersora del cuerpo; el hecho de que la dispersión ha de ser proporcional a V es evidente a priori. Observemos que la dirección del vector de onda \mathbf{k} de la onda incidente no aparece ya en la fórmula (91.9) y, por consiguiente, tampoco en las fórmulas que siguen.

Las integrales que encontramos en (91.9) constituyen un tensor de cuarto orden que tan sólo depende de las propiedades del medio dispersor. Debido a la isotropía del medio, la forma más general de dicho tensor será

$$\int \overline{\alpha_{il,1} \alpha_{km,2}^*} dV = \frac{1}{2}(a + c)\delta_{il}\delta_{km} + \frac{1}{2}(a - c)\delta_{im}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{lm}, \quad (91.10)$$

donde a, b, c son constantes escalares (más exactamente, funciones de ω y ω'). Este tensor es automáticamente simétrico respecto de las permutaciones del par de índices i, l con el par k, m ; pero una tal permutación es equivalente a pasar a la magnitud conjugado-compleja (en virtud de la equivalencia de los puntos 1 y 2); en consecuencia, el tensor (91.10) es real, y por lo tanto también lo son a, b, c .

Substituyendo (91.10) en (91.9), obtendremos

$$\overline{G_i G_k^*} = V \left\{ \frac{1}{2}(a + c)E_{0i} E_{0k}^* + \frac{1}{2}(a - c)E_{0i}^* E_{0k} + bE_{0l} E_{0l}^* \delta_{ik} \right\}. \quad (91.11)$$

Esta expresión se podría haber escrito sin más, puesto que es el tensor hermítico más general de segundo orden, cuadrático respecto de \mathbf{E}_0 y que no contiene ninguna otra dirección privilegiada. Este tensor, claro está, no es «transversal» respecto

* Que esta aproximación sea admisible exige, sin embargo, especiales reservas en la llamada dispersión de Rayleigh (§ 94).

de la dirección de \mathbf{k}' . Pero la forma general del tensor buscado $I_{\alpha\beta}$ se obtiene mediante «proyección» del tensor (91.11) sobre un plano perpendicular a \mathbf{k}' (para lo cual basta elegir un sistema de coordenadas con uno de los ejes paralelo a \mathbf{k}' y hallar las componentes del tensor respecto de los otros dos ejes).

Consideremos la dispersión de una onda polarizada linealmente. La amplitud de su campo \mathbf{E}_0 puede definirse como magnitud puramente real*. Con ella serán entonces también reales todas las componentes del tensor $I_{\alpha\beta}$ de la luz dispersada. Esto significa que ésta se encuentra parcialmente polarizada, pudiéndose descomponer en dos ondas independientes (incoherentes), cada una de las cuales está polarizada linealmente. Debido a que existen sólo dos direcciones privilegiadas (\mathbf{E}_0 y \mathbf{k}') de las que depende el tensor $I_{\alpha\beta}$, es desde luego evidente que una de estas ondas está polarizada con el vector \mathbf{E}' en el plano $\mathbf{E}_0, \mathbf{k}'$, mientras que la otra lo está perpendicularmente a este plano; las intensidades de estas dos componentes de la luz dispersada se designarán, respectivamente, por I_1 e I_2 ; una y otra vienen determinadas por los correspondientes valores principales del tensor $I_{\alpha\beta}$.

Para \mathbf{E}_0 real, la expresión (91.11) toma la forma

$$\overline{G_i G_k^*} = V\{a E_{0i} E_{0k} + b E_0^2 \delta_{ik}\}. \quad (91.12)$$

Observemos, ante todo, que la dispersión de luz polarizada linealmente viene determinada únicamente por dos constantes independientes, no por tres. Para determinar I_1 e I_2 , proyectemos el vector \mathbf{E}_0 sobre las dos direcciones de polarización indicadas y, tomando las correspondientes componentes del tensor (91.12), obtendremos

$$I_1 \sim a \sin^2 \theta + b, \quad I_2 \sim b, \quad (91.13)$$

(con coeficientes de proporcionalidad iguales), donde θ es el ángulo formado por \mathbf{E}_0 y la dirección de dispersión \mathbf{k}' . Obsérvese que la intensidad de la componente de la luz dispersada cuyo campo eléctrico está polarizado perpendicularmente al plano $\mathbf{E}_0, \mathbf{k}'$, no depende de la dirección de dispersión.

Cuando la luz natural atraviesa un medio, la luz dispersada estará polarizada parcialmente, y por razones de simetría es evidente que sus dos componentes incoherentes tendrán polarizaciones lineales con el campo eléctrico en el plano \mathbf{k}, \mathbf{k}' (plano de dispersión) y perpendicular al mismo. Designemos las intensidades de estas componentes por $I_{||}$ e I_{\perp} . Para determinarlas, promediaremos la expresión (91.11), además, respecto de todas las direcciones del vector \mathbf{E}_0 en un plano perpendicular a \mathbf{k} . Al efectuar este promedio los productos $E_{0i} E_{0k}^*$ dan

$$\overline{E_{0i} E_{0k}^*} = \frac{1}{2} |\mathbf{E}_0|^2 (\delta_{ik} - n_i n_k) \quad (91.14)$$

(\mathbf{n} es el vector unitario correspondiente a \mathbf{k}); éste es un tensor de segundo orden que depende solamente de la dirección de \mathbf{k} , cuya contracción da $|\mathbf{E}_0|^2$ y que satisface la condición

$$\overline{n_i E_{0i} E_{0k}^*} = (\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{E}_0}) \overline{E_{0k}^*} = 0.$$

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 48. No estudiaremos aquí la luz polarizada elípticamente debido a la complejidad de las fórmulas que se obtienen.

De esta manera, en la dispersión de la luz natural tenemos

$$\overline{G_i G_k^*} = V |\mathbf{E}_0|^2 \left\{ \frac{1}{2} a (\delta_{ik} - n_i n_k) + b \delta_{ik} \right\}. \quad (91.15)$$

Finalmente, tomando las componentes de este tensor relativistas a ambas direcciones de polarización, obtendremos las fórmulas buscadas:

$$I_{\parallel} \sim \frac{1}{2} a \cos^2 \vartheta + b, \quad I_{\perp} \sim \frac{1}{2} a + b, \quad (91.16)$$

donde ϑ es el ángulo de dispersión (ángulo formado por \mathbf{k} y \mathbf{k}').

Volvamos a la fórmula (91.10) que liga las constantes escalares a, b, c con el tensor a_{ik} . Al igual que cualquier tensor de segundo orden, el tensor a_{ik} puede representarse, en el caso general, como suma de tres partes independientes:

$$a_{ik} = \frac{1}{3} a \delta_{ik} + s_{ik} + a_{ik}, \quad (91.17)$$

donde $a = a_{ii}$ es un escalar, s_{ik} , un tensor simétrico de traza nula ($s_{ik} = s_{ki}, s_{ii} = 0$), y a_{ik} un tensor antisimétrico. Substituyamos esta expresión en (91.10) y contraigamos respecto de los diferentes pares de índices; como resultado obtendremos las siguientes tres ecuaciones*:

$$\left. \begin{aligned} 6a + 3b + 3c &= \int \overline{\alpha_{ii,1}\alpha_{kk,2}}^* dV = \int \overline{\alpha_1\alpha_2}^* dV, \\ 3a + 9b &= \int \overline{\alpha_{ik,1}\alpha_{ik,2}}^* dV \\ &= \frac{1}{3} \int \overline{\alpha_1\alpha_2}^* dV + \int \overline{s_{ik,1}s_{ik,2}}^* dV + \int \overline{a_{ik,1}a_{ik,2}}^* dV, \\ 6a + 3b - 3c &= \int \overline{\alpha_{ik,1}\alpha_{ki,2}}^* dV \\ &= \frac{1}{3} \int \overline{\alpha_1\alpha_2}^* dV + \int \overline{s_{ik,1}s_{ik,2}}^* dV - \int \overline{a_{ik,1}a_{ik,2}}^* dV. \end{aligned} \right\} \quad (91.18)$$

Los segundos miembros de estas ecuaciones, y por consiguiente también sus soluciones respecto de a, b, c , no contendrán productos cruzados de las magnitudes a, s_{ik}, a_{ik} . Esto significa que cualquier proceso de dispersión puede representarse como superposición de tres procesos, de tres tipos de dispersión, que pueden llamarse, respectivamente, *escalar*, *simétrica* y *antisimétrica*. Consideraremos cada uno de estos tipos por separado.

* Las integrales que aparecen en los segundos miembros de estas ecuaciones son cantidades positivas, puesto que cada una de ellas puede escribirse como cuadrado perfecto mediante una transformación que es la inversa de la que aplicamos al pasar de (91.8) a (91.9). Expresando estas tres integrales en función de a, b, c (es decir, resolviendo respecto de dichas integrales las ecuaciones (91.18)), podemos obtener para estas constantes determinadas desigualdades, que se escriben:

$$2a + b + c > 0, \quad 2b + c - a > 0, \quad 2b + a - c > 0.$$

En particular, de ellas se deduce que $b > 0$.

Conservando en los segundos miembros de las ecuaciones (91.18) sólo los primeros términos, se obtendrá

$$a = c = \frac{1}{9} \int \overline{\alpha_1 \alpha_2^*} dV, \quad b = 0. \quad (91.19)$$

Por las fórmulas (91.13) se ve que, en la dispersión escalar de la luz polarizada, la luz dispersada se encuentra también polarizada del todo y que la distribución angular de su intensidad viene dada por la fórmula

$$I = (3/2) \operatorname{sen}^2 \theta.$$

(Aquí y en lo que sigue, las expresiones para I están normalizadas de manera que su promedio respecto de las direcciones resulte igual a 1). En cambio, en la dispersión de la luz natural, la distribución angular de la intensidad total y el grado de despolarización de la luz dispersada vienen dados, según (91.16), por las fórmulas

$$I = I_{\perp} + I_{\parallel} = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \theta), \quad I_{\parallel}/I_{\perp} = \cos^2 \theta$$

(véase la fórmula en la nota de la pág. 356).

Para la dispersión simétrica, las ecuaciones (91.18) dan

$$a = \frac{1}{3}b = -\frac{1}{5}c = \frac{1}{30} \int \overline{s_{ik,1}s_{ik,2}^*} dV. \quad (91.20)$$

En la dispersión de luz polarizada, tenemos

$$I = I_1 + I_2 = \frac{3}{2}\theta(6 + \operatorname{sen}^2 \theta),$$

$$I_2/I_1 = 3/(3 + \operatorname{sen}^2 \theta),$$

y en la de la luz natural

$$I = \frac{3}{4}\theta(14 - \operatorname{sen}^2 \theta),$$

$$I_{\parallel}/I_{\perp} = 1 - \frac{1}{7}\operatorname{sen}^2 \theta.$$

Finalmente, para la dispersión antisimétrica obtendremos

$$b = c = -a = \frac{1}{6} \int \overline{a_{ik,1}a_{ik,2}^*} dV; \quad (91.21)$$

en el caso de dispersión de luz polarizada,

$$I = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \theta), \quad I_1/I_2 = \cos^2 \theta,$$

y en el de la luz natural

$$I = \frac{3}{8}(2 + \operatorname{sen}^2 \theta), \quad I_{\perp}/I_{\parallel} = 1/(1 + \operatorname{sen}^2 \theta).$$

§ 92. El principio del equilibrio detallado en la dispersión

El principio general cuántico del equilibrio detallado* permite obtener determi-

* Véase vol. III, *Mecánica cuántica*, § 141.

nada relación que liga entre sí las intensidades de los distintos procesos de dispersión.

Designemos por $d\omega_{12}$ la probabilidad de que un cuanto $\hbar\omega_1$ experimente dispersión (por unidad de longitud) dando lugar a un cuanto $\hbar\omega_2$ que se propaga en un elemento de ángulo sólido $d\Omega_2$. Designemos, en cambio, por $d\omega_{21}$ la probabilidad del proceso inverso, que consiste en la dispersión del cuanto $\hbar\omega_2$ dando lugar al cuanto $\hbar\omega_1$ en el ángulo sólido $d\Omega_1$. El principio del equilibrio detallado establece la siguiente relación entre estas dos probabilidades:

$$d\omega_{12}/k_2^2 d\Omega_2 = d\omega_{21}/k_1^2 d\Omega_1,$$

donde k_1 , k_2 son los vectores de onda de dichos cuantos. Haciendo $k_1^2 = \epsilon_1\omega_1^2/c^2$, $k_2^2 = \epsilon_2\omega_2^2/c^2$ (donde $\epsilon_1 = \epsilon(\omega_1)$, $\epsilon_2 = \epsilon(\omega_2)$), obtendremos

$$\epsilon_1\omega_1^2 d\omega_{12}/d\Omega_2 = \epsilon_2\omega_2^2 d\omega_{21}/d\Omega_1. \quad (92.1)$$

En esta relación se supone que los estados inicial y final del sistema dispersor corresponden a niveles de energía discretos E_1 y E_2 , ligados entre sí por la igualdad

$$E_1 + \hbar\omega_1 = E_2 + \hbar\omega_2.$$

Este planteo de la cuestión no corresponde totalmente a la situación real de las cosas, puesto que el espectro de los niveles de energía de un cuerpo macroscópico es extraordinariamente denso y ha de considerarse como cuasicontinuo.

Por ello, en vez de la probabilidad de dispersión $d\omega_{12}$, con una variación rigurosamente determinada de la frecuencia, hay que introducir la probabilidad de dispersión en un intervalo de frecuencias $d\omega_2$, es decir, acompañada de una transición del cuerpo a un estado cuya energía se encuentra en el intervalo $dE_2 \doteq \hbar d\omega_2$. Designando esta probabilidad (de nuevo por 1 cm de camino) por dh_{12} , se tiene

$$dh_{12} = d\omega_{12} d\Gamma_2 = d\omega_{12} (d\Gamma_2/dE_2) \hbar d\omega_2,$$

donde $d\Gamma_2$ es el número de estados cuánticos del cuerpo en el intervalo de energías dE_2 . En vez de (92.1) escribiremos ahora

$$\frac{d\Gamma_1}{dE_1} \epsilon_1 \omega_1^2 \frac{dh_{12}}{d\Omega_2 d\omega_2} = \frac{d\Gamma_2}{dE_2} \epsilon_2 \omega_2^2 \frac{dh_{21}}{d\Omega_1 d\omega_1}.$$

Pero según la conocida relación entre el peso estadístico de un estado macroscópico de un cuerpo y su entropía \mathcal{S} , la derivada $d\Gamma/dE$ coincide esencialmente con $\exp \mathcal{S}$, de donde la relación

$$(d\Gamma_1/dE_1):(d\Gamma_2/dE_2) = \exp (\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2).$$

Dado que la variación de energía del cuerpo como resultado de la dispersión de un cuanto es extraordinariamente pequeña comparada con la propia energía, relativamente pequeña será también la variación de entropía, la cual, por ello, puede hacerse igual a

$$\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2 = (d\mathcal{S}/dE)(E_1 - E_2) = (E_1 - E_2)/T = \hbar(\omega_2 - \omega_1)/T.$$

Teniendo en cuenta esta circunstancia, escribiremos la expresión definitiva del principio del equilibrio detallado para la dispersión en la siguiente forma

$$e^{-\hbar\omega_1/T} \epsilon_1 \omega_1^2 \frac{dh_{12}}{d\omega_2 d\omega_2} = e^{-\hbar\omega_2/T} \epsilon_2 \omega_2^2 \frac{dh_{21}}{d\omega_1 d\omega_1}. \quad (92.2)$$

La magnitud dh (cuyas dimensiones son cm^{-1}) se llama *coeficiente diferencial de extinción* de la luz en la dispersión. Su definición puede formularse también de la siguiente manera: el coeficiente de extinción es la razón del número de cuantos dispersados (en las direcciones $d\omega$ y en el intervalo de frecuencias $d\omega$), por unidad de tiempo y por unidad de volumen del medio, a la densidad de flujo de fotones en la luz incidente. Integrando dh respecto de todas las direcciones y de todas las frecuencias de la luz dispersada, obtendremos el *coeficiente de extinción total*, que representa el índice de amortiguamiento de la densidad de flujo de fotones a medida que la onda se propaga por el medio dispersor.

Supongamos $\omega_2 < \omega_1$. La relación (92.2) liga entre sí las intensidades (los coeficientes de extinción) de las dispersiones de Stokes ($1 \rightarrow 2$) y de anti-Stokes ($2 \rightarrow 1$). Vemos así que la intensidad de esta última, en general, es menor que la de la primera aproximadamente en la razón dada por el factor

$$e^{-\hbar(\omega_1 - \omega_2)/T}.$$

Esta circunstancia tiene un carácter bastante general y corresponde al hecho de que la transferencia de energía del cuerpo al campo electromagnético reduce la probabilidad del proceso, disminuyéndola en la razón $e^{-\Delta E/T}$, donde ΔE es la energía cedida. En particular, por esta causa resulta de ordinario muy débil el efecto de emisión forzada en la que el cuerpo cede la energía $\hbar(\omega_1 + \omega_2)$ en un solo acto de dispersión. La probabilidad de este proceso cuando $\hbar(\omega_1 + \omega_2) \gg T$ contiene el pequeño factor

$$e^{-\hbar(\omega_1 + \omega_2)/T}.$$

La relación general (92.2) se simplifica considerablemente en el caso importante de dispersión con una variación de la frecuencia relativamente pequeña. Designaremos ω_1 simplemente por ω , y la pequeña diferencia $\omega_2 - \omega_1$, por $\Delta\omega$ ($\Delta\omega \ll \omega$). Además, introduzcamos, para abreviar, la notación

$$dh_{12}/d\omega_2 d\omega_2 = I(\omega, \Delta\omega).$$

En los factores no exponenciales $\epsilon\omega^3$ de (92.2) se puede prescindir de la diferencia $\Delta\omega$, con lo que aquéllos se reducen entre sí desapareciendo de ambos miembros de la igualdad, de forma que queda

$$I(\omega, \Delta\omega) e^{-\hbar\omega/T} = I(\omega + \Delta\omega, -\Delta\omega) e^{-\hbar(\omega + \Delta\omega)/T}.$$

En el primero de los argumentos de la función $I(\omega + \Delta\omega, -\Delta\omega)$, que indica la frecuencia inicial de la luz, puede prescindirse de $\Delta\omega$, es decir, referir la intensidad de la luz dispersada a un valor de la frecuencia de la onda incidente ligeramente des-

plazado. Entonces

$$I(\omega, \Delta\omega) = I(\omega, -\Delta\omega) e^{-\hbar\Delta\omega/T}. \quad (92.3)$$

En esta aproximación, I corresponde a la misma frecuencia de la luz incidente en ambos miembros de la igualdad. Dicho de otra manera, la relación (92.3) establece un simple ligamen entre las dispersiones de Stokes y anti-Stokes de una misma luz con los mismos valores absolutos del desplazamiento de la frecuencia.

§ 93. Dispersión con un pequeño cambio de la frecuencia

La teoría desarrollada en el § 91 posee una completa generalidad y es aplicable a todos los casos de dispersión en un medio isótropo, con independencia de sus mecanismos concretos. Sin embargo, es natural que con un grado tal de generalidad los cálculos no puedan llevarse muy lejos, y un estudio ulterior del fenómeno de la dispersión es únicamente posible bajo hipótesis más concretas.

En la mayoría de los casos observados, la dispersión de la luz va acompañada de un cambio relativamente pequeño de la frecuencia $\Delta\omega = \omega' - \omega$. Los cálculos que siguen a continuación se refieren precisamente a ellos; supondremos, además, que junto con la condición $\Delta\omega \ll \omega$, es relativamente pequeña la variación del coeficiente de refracción del medio en el intervalo de frecuencias $\Delta\omega$. Esta última condición significa que la frecuencia ω no debe hallarse demasiado cerca de cualquier dominio (o raya) de absorción del medio dispersor.

Si ω corresponde a la región óptica del espectro, el mecanismo microscópico de la dispersión con $\Delta\omega$ pequeño puede estar vinculado con movimientos de los átomos y de las moléculas de un tipo distinto de los ordinarios (es decir, de un tipo en contraste con los movimientos puramente electrónicos responsables de las transiciones ópticas). Tales pueden ser las oscilaciones intermoleculares de los átomos, las rotaciones u oscilaciones de las moléculas como un todo, etc.

Convengamos en designar por $q = q(t)$ el conjunto de las coordenadas que describen el movimiento causa de la dispersión*. La relativa lentitud de este movimiento permite pasar a una descripción macroscópica de la dispersión desde un nuevo punto de vista. En efecto, cabe introducir el tensor permitividad $\epsilon_{ik}(q)$ cuyas componentes (en cada instante) dependen sólo de los valores de las coordenadas q en dicho instante como parámetros. Esta propiedad se sigue precisamente de la hipótesis que hemos hecho y según la cual la variación relativa de ϵ es pequeña. La permitividad así introducida corresponde al campo promediado respecto del movimiento de los electrones y para una posición dada de los núcleos. Para el campo totalmente promediado (incluido el movimiento de los núcleos) la permitividad se reduce a un

* Para simplificar, adoptamos en este estudio un punto de vista clásico; los resultados que se obtienen a continuación resultan, en realidad, ser válidos también cuando el movimiento de los núcleos se considera cuánticamente.

escalar $\epsilon = \epsilon(\omega)$. Designaremos por ϵ_{ik} las desviaciones de $\delta\epsilon_{ik}$ respecto de este valor:

$$\epsilon_{ik}(q) = \epsilon\delta_{ik} + \delta\epsilon_{ik}(q). \quad (93.1)$$

El tensor ϵ_{ik} determina la relación entre la intensidad y el desplazamiento del campo eléctrico como funciones del tiempo. Hay que subrayar que la onda incidente se supone, como antes, monocromática (de frecuencia ω), pero el campo E' de la onda dispersada se considera ahora función del tiempo, no desarrollada en componentes monocromáticos. El campo total es el resultante del campo E de la onda incidente y del campo E' de la onda dispersada; de esta manera,

$$D_i + D'_i = \epsilon_{ik}(E_k + E'_k).$$

Por definición, los términos D y ϵE se reducen entre sí y prescindiendo del término $\delta\epsilon_{ik}E'_k$ como cantidad de segundo orden, obtendremos

$$D'_i = \epsilon E'_i + \delta\epsilon_{ik}(q)E_k. \quad (93.2)$$

La relación (93.2) tiene la misma forma que la expresión (91.2). Sin embargo, hay una diferencia, puesto que, en virtud del método seguido para resolver el problema, está claro que ahora el tensor $\alpha_{ik} = \delta\epsilon_{ik}$ es simétrico. Esto se sigue directamente del teorema general acerca de la simetría del tensor de permitividad. Además, dado que esta magnitud es real en un medio transparente, cabe afirmar que también el tensor $\delta\epsilon_{ik}$ es real.

Que el tensor α_{ik} carezca de parte antisimétrica significa que, de los tres tipos de dispersión indicados al final del § 91, uno de ellos (el antisimétrico) no existe en la dispersión acompañada de una pequeña variación de la frecuencia.

Calculemos la intensidad total de la dispersión (con todos los desplazamientos de la frecuencia tales que $\Delta\omega \ll \omega$). En el caso considerado, el cálculo se hace fácilmente como sigue. En la ecuación (91.3) para el campo de la onda dispersada, se puede substituir k' por $k = \omega/\sqrt{\epsilon}/c$ (y también tomar para α su valor en $\omega' = \omega$), con lo cual dicha expresión no contendrá ω' , es decir, será la misma para todas las componentes espectrales del campo. Por ello, la misma ecuación será también válida para el campo de la onda dispersada no desarrollado en componentes de Fourier, campo que designaremos aquí por la misma letra E' . Utilizando la solución de la ecuación en la forma (91.6), obtendremos

$$|\overline{E'}|^2 = \frac{k^4}{16\pi^2\epsilon^2R_0^2} |\overline{G}|^2 \sin^2\theta = \frac{\omega^4}{16\pi^2R_0^2c^4} |\overline{G}|^2 \sin^2\theta,$$

donde θ es el ángulo formado por \mathbf{k} y \mathbf{G} , y el trazo horizontal, al igual que en el § 91, representa el promedio final respecto del movimiento de las partículas (es decir, el promedio según la dependencia temporal $q(t)$).

Introduzcamos el coeficiente de extinción h como razón de la intensidad total de la luz dispersada (en todas direcciones) a la densidad de flujo de la luz incidente,

referida a la unidad de volumen del medio dispersor*:

$$h = \frac{1}{V|\mathbf{E}'|^2} \int |\mathbf{E}'|^2 R_0^2 d\sigma' = \frac{\omega^4}{6\pi c^4 V} \frac{|\mathbf{G}|^2}{|\mathbf{E}'|^2}.$$

Como vimos en el § 91, al calcular el valor medio $\overline{|\mathbf{G}|^2}$, el factor exponencial en el integrando de \mathbf{G} se puede substituir por la unidad, de modo que

$$\overline{|\mathbf{G}|^2} = E_{0i} E_{0k} * \overline{\int \delta \epsilon_{li} dV \int \delta \epsilon_{lk} dV}.$$

La expresión que hay que promediar es un tensor de segundo orden, y dada la isotropía del medio se obtiene, una vez efectuado el promedio,

$$\overline{\int \delta \epsilon_{li} dV \int \delta \epsilon_{lk} dV} = \frac{1}{3} \delta_{ik} \left(\overline{\int \delta \epsilon_{lm} dV} \right)^2.$$

De esta manera resulta finalmente:

$$h = \frac{\omega^4}{18\pi c^4} \frac{1}{V} \left(\overline{\int \delta \epsilon_{lm} dV} \right)^2, \quad (93.3)$$

o bien

$$h = (\omega^4 / 18\pi c^4) V \overline{(\delta \epsilon_{lm})_V^2}, \quad (93.4)$$

donde se ha introducido la notación $(\dots)_V$ para la magnitud promediada en el volumen V .

El valor medio del cuadrado de la integral puede escribirse también como valor medio de una integral doble, con lo que se explica (véase § 91) que resulte proporcional al volumen V . En consecuencia, el valor del coeficiente de extinción, como debía ser, es independiente del valor del volumen dispersor. Observemos también que el coeficiente h no depende de la polarización de la luz incidente.

La fórmula (93.4) puede considerarse desde el siguiente punto de vista. Formalmente cabe decir que en un medio todo él homogéneo (es decir, un medio cuya permitividad es rigurosamente constante) la dispersión es por completo imposible. La dispersión puede describirse macroscópicamente como resultado de las heterogeneidades del medio. Y es precisamente la variación de estas heterogeneidades con el tiempo (sometida a desarrollo espectral) lo que determina el cambio de frecuencia de la luz en la dispersión.

§ 94. Dispersión de Rayleigh en gases y líquidos

De acuerdo con el carácter de la variación de la frecuencia de la luz, se distinguen

* Esta definición difiere de la definición general dada en el § 92 (que se refiere a los cuantos dispersados) en el factor ω'/ω . En el presente caso este factor se puede considerar igual a 1 y ambas definiciones son equivalentes.

dos tipos de dispersión: 1) la *dispersión combinatoria* (*efecto Raman-Landsberg-Mandel'shtam*), que conduce a la aparición, en la luz dispersada, de rayas desplazadas (según su frecuencia) respecto de la luz que la excita, y 2) la *dispersión de Rayleigh*, que se produce sin que la frecuencia varíe esencialmente.

El mecanismo de la dispersión combinatoria en los gases consiste en una variación, bajo la influencia de la luz incidente, del estado de vibración, de rotación y electrónico de una molécula*. Por el contrario, la dispersión de Rayleigh no está ligada con cambio alguno del estado interno de la molécula. En el caso límite de un gas enrarecido (libre camino medio de las moléculas l grande comparado con la longitud de onda de la luz λ) la dispersión se produce independientemente en cada molécula; este fenómeno puede estudiarse de manera puramente microscópica aplicando la mecánica cuántica.

Aquí estudiaremos el caso opuesto, aquel en que $l \ll \lambda$ **. En este caso, la dispersión de Rayleigh en un gas puede dividirse en dos partes. Una de ellas está ligada con la irregularidad en la orientación de las moléculas (las llamadas *fluctuaciones de anisotropía*). La otra, en cambio, representa la dispersión por las fluctuaciones de densidad del gas. La orientación de una molécula cambia por completo como resultado de unas cuantas colisiones, es decir, al cabo de un tiempo τ que es del orden de magnitud del tiempo correspondiente al libre camino medio. Por ello, la dispersión por fluctuaciones de anisotropía conduce a la aparición de una raya relativamente difusa, con un máximo en $\omega' = \omega$ y de anchura $\sim \hbar/\tau$. Por el contrario, la dispersión por fluctuaciones de la densidad lleva a la aparición sobre este fondo de una raya considerablemente más definida. Como veremos a continuación, para la dispersión de la luz con longitud de onda λ son fundamentales las fluctuaciones de densidad que se producen en volúmenes del orden de λ^3 . Debido a que estos volúmenes resultan ser grandes, la variación de las fluctuaciones en ellos tiene lugar con relativa lentitud, a lo que se debe que la correspondiente raya de dispersión sea estrecha. Convendremos en calificar de «no desplazada» precisamente esta raya bien delimitada.

La dispersión por fluctuaciones de la densidad pertenece al tipo escalar (véase el final del § 91); es evidente que, en tanto la densidad ρ es una magnitud escalar, también lo será la variación de la permitividad $\delta\epsilon$ ligada con la variación de ρ . En cambio, la variación en la permitividad debida a las fluctuaciones de anisotropía se representa por un tensor simétrico $\delta\epsilon_{ik}$ de traza nula; esto último está claro por el hecho de que, al promediar respecto de todas las direcciones, este efecto debe desaparecer por completo. Así pues, la dispersión por fluctuaciones de anisotropía pertenece al tipo simétrico.

En el caso de los líquidos la situación es más complicada. La dispersión combi-

* En condiciones ordinarias de observación, las transiciones electrónicas no representan ningún papel.

** Más precisamente, la condición necesaria en lo que sigue se escribe: $l \ll \lambda \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta)$, donde θ es el ángulo de dispersión. La razón de ello estriba en que en la expresión (94.4), que determina la intensidad de la dispersión, la frecuencia de la luz interviene solamente formando la combinación $q = (2\omega/c) \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta)$.

natoria puede aquí estar ligada solamente con una variación del estado de oscilación (o electrónico) de las moléculas; en la dispersión por un líquido no se producen rayas combinatorias de rotación. Ello se debe a que, dada la intensa interacción de las moléculas en un líquido, no existe una rotación libre de las mismas que posea niveles discretos de energía. En consecuencia, la rotación de las moléculas, al igual que cualquier otro movimiento que vaya acompañado de una alteración de sus posiciones mutuas, contribuye en un líquido sólo a la raya de dispersión relativamente ancha en torno de $\omega' = \omega$ que, en este caso, es del todo natural considerar como una raya de Rayleigh. El tiempo de relajación de esos movimientos está fundamentalmente ligado con la viscosidad del líquido.

La posibilidad de separar de la dispersión de Rayleigh total en un líquido una parte vinculada con fluctuaciones termodinámicas (de densidad o de temperatura), depende del valor de los diferentes tiempos de relajación. Es necesario que los tiempos de relajación de todos los procesos de establecimiento del equilibrio en el líquido sean pequeños comparados con el tiempo de variación de las fluctuaciones indicadas. En tales condiciones, se observará una estrecha raya «no desplazada» rodeada de un fondo más difuso. La dispersión que corresponde a la raya no desplazada es escalar. En lo que concierne al fondo, a diferencia de los gases, es imposible, en general, afirmar que es puramente simétrico, sin «adición» de una parte escalar.

La intensidad total de la raya no desplazada puede calcularse fácilmente mediante la fórmula general (93.4). En la dispersión escalar $\delta\epsilon_{ik} = \delta\epsilon\delta_{ik}$, y, por consiguiente, el coeficiente de extinción es

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} V \overline{(\delta\epsilon)v^2}. \quad (94.1)$$

Si $\delta\rho$ y δT son las variaciones de densidad y de temperatura, se tendrá

$$\delta\epsilon = (\partial\epsilon/\partial\rho)_T \delta\rho + (\partial\epsilon/\partial T)_\rho \delta T.$$

Según fórmulas conocidas*, las fluctuaciones de densidad y temperatura son estadísticamente independientes ($\overline{\delta T \delta \rho} = 0$), y los cuadrados medios de cada una de ellas valen

$$\overline{(\delta T)v^2} = T^2/\rho c_v V, \quad \overline{(\delta \rho)v^2} = (T\rho/V)(\partial \rho / \partial P)_T$$

(c_v es la capacidad calorífica por unidad de masa del medio). De esta manera tenemos finalmente

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \left[T\rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T^2 + \frac{T^2}{\rho c_v} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_\rho^2 \right]. \quad (94.2)$$

Einstein fue el primero en obtener esta fórmula (1910).

Para los gases la fórmula (94.2) se simplifica considerablemente. La permitividad de un gas (en la región óptica de frecuencias) resulta casi independiente de la tem-

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 114.

peratura; por ello, puede prescindirse del segundo término entre corchetes. En cuanto a la dependencia respecto de la densidad, queda reducida a la mera proporcionalidad entre $\epsilon - 1$ y ρ ; en consecuencia,

$$\rho(\partial\epsilon/\partial\rho)_T \approx \epsilon - 1 \approx 2(n - 1),$$

($n = 1/\epsilon$ es el índice de refracción). Teniendo en cuenta también que, según la ecuación de estado de un gas perfecto, es $(1/\rho)(\partial\rho/\partial p)_T = 1/NT$ (N es el número de partículas por 1 cm^3), se obtendrá

$$h = 2\omega^4(n - 1)^2/3\pi c^4 N. \quad (94.3)$$

Esta fórmula fue ya obtenida por Rayleigh, (1881).

Pasemos ahora a la cuestión de la estructura fina de la raya «no desplazada». Para ello hay que considerar el comportamiento temporal de las fluctuaciones. Como es sabido, en relación con el mismo las fluctuaciones termodinámicas se dividen en dos categorías*. Las fluctuaciones adiabáticas de la presión en un líquido (o en un gas) se propagan como ondas no amortiguadas cuya velocidad es la del sonido u (prescindimos aquí de la absorción del sonido, puesto que ésta conduce solamente a un pequeño ensanchamiento de la raya; véase más adelante). En cambio, las fluctuaciones de la entropía a presión constante no se propagan respecto de un líquido (amortiguándose tan sólo lentamente debido a la conductibilidad calorífica).

La dependencia de la intensidad respecto del tiempo (no promediada respecto del mismo) viene dada por el cuadrado del módulo de la integral

$$\mathbf{G}(t) = \int \delta\epsilon(t) \cdot \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV \cdot \mathbf{E}_0, \quad (94.4)$$

en la que $\delta\epsilon$ se considera función del tiempo. Para determinar la forma de la raya de dispersión, hay que efectuar el desarrollo espectral de $\mathbf{G}(t)$ (lo que se reduce a desarrollar la magnitud $\delta\epsilon(t)$), obteniéndose luego la distribución de la intensidad según las frecuencias $\Delta\omega$ a partir del cuadrado del módulo de la componente espectral $\mathbf{G}_{\Delta\omega}$. Sin embargo, es imposible ahora substituir en (94.4) el factor $e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$ por la unidad, como venimos haciendo hasta aquí. Ello se debe a que la magnitud $|\mathbf{G}_{\Delta\omega}|^2$ depende fundamentalmente de la correlación del comportamiento temporal de las fluctuaciones en puntos diferentes del espacio; que así es, se ve fácilmente considerando la expresión $|\mathbf{G}_{\Delta\omega}|^2$, escrita como integral doble

$$\int \int \delta\epsilon(t)\delta\epsilon(t') \exp[-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \exp[i\Delta\omega(t - t')] dV dV' dt dt'.$$

A causa del carácter ondulatorio de la propagación de las perturbaciones acústicas, el comportamiento temporal de las fluctuaciones de la presión se encuentra en correlación incluso a grandes distancias. Este hecho carecía de importancia en el cálculo de la intensidad total de la raya, que se determinaba promediando el cuadrado $|\mathbf{G}(t)|^2$ respecto del tiempo; dado que $\mathbf{G}(t)$ y $\mathbf{G}^*(t)$ se toman aquí en un mismo ins-

* Véase vol. VI *Hidrodinámica*, § 79.

tante, para esta magnitud es importante sólo la correlación entre los valores de $\delta\epsilon$ en puntos diferentes del espacio para un mismo instante, y esta correlación se extiende únicamente a cortas distancias.

Consideremos primero las variaciones $\delta\epsilon$ vinculadas con las fluctuaciones de la presión. La magnitud (94.4) es la componente del desarrollo espacial de Fourier de la fluctuación $\delta\epsilon$ con vector de onda \mathbf{q} . Pero esta fluctuación acústica depende del tiempo según la ley $e^{-it\Delta\omega}$, donde

$$\Delta\omega = \pm qu.$$

Dado que $\omega \approx \omega'$, se tiene

$$q = |\mathbf{k}' - \mathbf{k}| = (2\omega/c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}\vartheta$$

(ϑ es el ángulo formado por \mathbf{k}' y \mathbf{k}); designando el correspondiente valor de $\Delta\omega$ por $\Delta\omega_0$, tenemos, en consecuencia,

$$\Delta\omega_0 = qu = \pm (2\omega_0/c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}\vartheta. \quad (94.5)$$

Así pues, la dispersión por fluctuaciones de la presión conduce a que aparezca un doblete, con una distancia entre componentes $2\Delta\omega_0$ que depende del ángulo de dispersión (éste es el llamado *doblete de Mandel'shtam-Brillouin*).

Las fluctuaciones de la entropía, en cambio, de acuerdo con lo dicho antes tienen frecuencia nula. Por ello, la dispersión debida a ellas conduce a que aparezca una raya central con $\Delta\omega = 0$.

Determinemos las intensidades de las rayas del doblete y de la raya central. La intensidad total de la raya no desplazada se determina por la fórmula (94.2), de modo que basta calcular, por ejemplo, la razón $I_{\text{doblete}}/I_{\text{total}}$ (entenderemos por I_{doblete} la suma de las intensidades de ambas componentes del doblete, es decir, el doble de la intensidad de cada una de ellas*). Puesto que las rayas del doblete están determinadas por la dispersión debida a fluctuaciones adiabáticas de la presión, su intensidad viene dada por el valor medio del cuadrado

$$(\partial\epsilon/\partial p)_S^2 \overline{(\delta p)^2}.$$

Utilizando la conocida fórmula para las fluctuaciones adiabáticas de la presión y aplicando una simple transformación basada en la fórmula que da la razón de la compresibilidad adiabática a la isotérmica, obtendremos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial p} \right)_S^2 \overline{(\delta p)^2} &= \frac{\rho T}{V} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial p} \right)_S^2 \\ &= \frac{\rho T}{V} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial p} \right)_S^2 \\ &= \frac{\rho T c_v}{V c_p} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial p} \right)_S^2. \end{aligned} \quad (94.6)$$

* Según la fórmula (92.3), la diferencia entre las intensidades de ambas componentes carece por completo de importancia en general, ya que $\hbar\Delta\omega_0 \ll T$.

La derivada adiabática $(\partial\epsilon/\partial\rho)_S$ puede expresarse en función de magnitudes más convenientes refiriéndola a las variables ρ, T :

$$(\partial\epsilon/\partial\rho)_S = (\partial\epsilon/\partial\rho)_T + (T/c_v\rho^2)(\partial\rho/\partial T)_\rho(\partial\epsilon/\partial T)_\rho.$$

La razón de intensidades buscada es igual a la razón de la cantidad (94.6) al valor cuadrático medio de la fluctuación total (la expresión entre corchetes en (94.2)). No escribiremos aquí la engorrosa fórmula general, limitándonos a dar una fórmula simple que se obtiene prescindiendo de la dependencia de ϵ respecto de la temperatura:

$$h_{\text{doblete}}/h_{\text{total}} = c_v/c_p \quad (94.7)$$

(L. Landau y G. Placzek, 1933).

Para determinar la forma de la raya, hay que considerar los procesos disipativos que conducen al «decaimiento» de las fluctuaciones. Como resultado de estos procesos, la amplitud de la fluctuación se amortigua con el tiempo según la ley $e^{-\gamma t}$, con un determinado coeficiente γ . Si la «frecuencia propia» de las oscilaciones en la fluctuación es $\Delta\omega_0$, la dependencia general respecto del tiempo viene dada por el factor $e^{-t(i\Delta\omega_0+\gamma)}$. La distribución de la intensidad en la raya es proporcional a los cuadrados de los módulos de las componentes de Fourier de este factor, es decir,

$$dI = \frac{I_0}{\pi} \frac{\gamma}{(\Delta\omega - \Delta\omega_0)^2 + \gamma^2} d\Delta\omega, \quad (94.8)$$

donde I_0 es la intensidad total de la raya (su forma es la llamada *forma de dispersión*). La «anchura» de la raya viene dada por la cantidad γ .

Según fórmulas conocidas para la absorción del sonido*, el coeficiente de amortiguamiento de las fluctuaciones acústicas con vector de onda \mathbf{q} es

$$\gamma = \frac{q^2}{2\rho} \left[\frac{4}{3}\eta + \zeta + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right],$$

donde η, ζ son los coeficientes de viscosidad del líquido, y κ , su coeficiente de conductibilidad calorífica. Substituyendo $q^2 = 2(\omega/c)^2(1 - \cos \vartheta)$, obtendremos para la anchura de las componentes del doblete la siguiente expresión:

$$\gamma = \frac{\omega^2}{\rho c^2} (1 - \cos \vartheta) \left[\frac{4}{3}\eta + \zeta + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right]. \quad (94.9)$$

En cuanto al amortiguamiento de las fluctuaciones isobáricas de la entropía (y con ellas también de la temperatura), éste se determina por la ecuación de transmisión del calor

$$\partial T/\partial t = \chi \Delta T$$

* Véase vol. VI, *Hidrodinámica*, § 77.

(χ es el coeficiente de conductibilidad termométrica del medio). Para las fluctuaciones con vector de onda \mathbf{q} (es decir, con una dependencia espacial $e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$), de aquí se sigue

$$\gamma = \chi q^2 = 2\chi(\omega^2/c^2)(1 - \cos \vartheta). \quad (94.10)$$

La forma de la raya central viene dada por la fórmula (94.8) con $\Delta\omega_0 = 0$ y la anchura γ de (94.10).

Conforme se indicó ya al principio de este párrafo, la teoría expuesta aquí es aplicable a la dispersión en un líquido cuando se cumple la condición de que todos los tiempos de relajación en él son pequeños comparados con el tiempo de variación de las fluctuaciones. No hay que perder de vista que en cualquier líquido se encuentran tiempos de relajación de diferentes órdenes de magnitud. El proceso de relajación más rápido es, al parecer, el «decaimiento» de las tensiones elásticas en un líquido. El correspondiente tiempo de relajación (*tiempo de relajación maxwelliano*) es $\tau_M \sim \eta/G$, donde G es el módulo de rigidez*. Con mayor lentitud tiene lugar la redistribución de las moléculas según sus orientaciones, es decir, el «decaimiento» de las fluctuaciones anisótropas. El correspondiente tiempo de relajación (*tiempo de relajación de Debye*) es $\tau_D \sim \eta a^3/kT$, donde a caracteriza el tamaño de la molécula. La diferencia entre τ_M y τ_D resulta particularmente grande en los líquidos con moléculas de gran tamaño. Finalmente, son también posibles otros varios tipos de procesos de relajación lentos que conducen a la dispersión del sonido (por ejemplo, las reacciones químicas, la transferencia retardada de energía a los grados de libertad vibratorios de la molécula, etc.). Son fundamentales para la dispersión aquellos procesos para los que $1/\tau$ es comparable con la frecuencia de las excitaciones «acústicas» que conducen a dispersión. En la actualidad no existe en la literatura una lista completa de todos los casos que son aquí posibles, y no nos detendremos a considerar esta cuestión. Se indicará solamente que, para una viscosidad suficientemente grande del líquido, cuando

$$\tau_M \gg 1/qu \sim c/\omega u \operatorname{sen} \frac{1}{2}\vartheta,$$

éste se comporta respecto de la dispersión de la luz como un cuerpo sólido amorfo.

Recordaremos, para terminar, un singular fenómeno de dispersión que se produce en la superficie libre de un líquido. Como resultado de las oscilaciones por fluctuación, la superficie de un líquido no es un plano perfecto. La existencia de esta «rugosidad» por fluctuación de dicha superficie conduce a una dispersión parcial de la luz reflejada por la misma (*L. I. Mandel'shtam*, 1913)*.

* Véase vol. VII, *Teoría de la elasticidad*, § 36.

** Véase *L. I. Mandel'ehtam*, Annalen der Physik **41**, 609, 1913. En este trabajo se desarrolla el cálculo para la luz dispersada en el plano de incidencia.

PROBLEMA

La luz se dispersa en un gas constituido por moléculas de forma lineal con polarizabilidades $\alpha_{||}$ y α_{\perp} en direcciones paralela y transversal al eje, respectivamente. Determinar las intensidades de los diferentes tipos de dispersión.

Solución. La intensidad de dispersión total (para estados de vibración y electrónicos dados de las moléculas) incluye las partes de Rayleigh y de rotación de la dispersión combinatoria. Dado que la dispersión tiene lugar independientemente en cada una de las moléculas del gas, la manera más fácil de obtener el coeficiente de extinción total se basa en la fórmula (72.3), multiplicándola por el número N de partículas por 1 cm^3 y substituyendo el cuadrado de la polarizabilidad de las partículas por $(\frac{1}{3})\alpha_{ik}^2 = (\frac{1}{3})(\alpha_{||}^2 + 2\alpha_{\perp}^2)$:

$$h = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4} (\alpha_i^2 + 2\alpha_{\perp}^2). \quad (1)$$

La raya de Rayleigh no desplazada está ligada con la parte escalar de la polarizabilidad, es decir, se produce como si el tensor de polarizabilidad de la molécula fuese igual a $(\frac{1}{3})\alpha_{ii}\delta_{ik}$. Según la misma fórmula (72.3), encontramos por ello

$$h_{\text{no-desp}} = \frac{8\pi\omega^4 N}{27c^4} (\alpha_i^2 + 2\alpha_{\perp}^2). \quad (2)$$

La diferencia $h_{\text{tot}} - h_{\text{no-desp}}$ contiene el «fondo» de la raya no desplazada (dispersión por las «fluctuaciones anisótropas») y la dispersión combinatoria de rotación. Para separar la primera, hay que determinar previamente el valor medio del tensor de polarizabilidad de la molécula respecto de su rotación en torno de un determinado eje (perpendicular al eje de la misma). Es evidente que la polarizabilidad promediada de esta manera a lo largo del eje de rotación coincide con α_{\perp} , mientras que a lo largo de una dirección cualquiera en un plano perpendicular a dicho eje es igual a $(\frac{1}{2})(\alpha_{\perp} + \alpha_{||})$. En otras palabras, hay que considerar una molécula que gira en torno de un eje dado como una partícula con valores principales del tensor de polarizabilidad iguales a

$$[\alpha_{\perp}, \frac{1}{2}(\alpha_{\perp} + \alpha_{||}), \frac{1}{2}(\alpha_{\perp} + \alpha_{||})].$$

Mediante éstos hay que calcular el tensor simétrico $\alpha_{ik} - (\frac{1}{3})\alpha_{ii}\delta_{ik}$ con traza igual a cero y, luego, un cálculo análogo al que condujo a las fórmulas (1) y (2) da

$$h_{\text{fondo}} = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4} \frac{(\alpha_{\perp} - \alpha_{||})^2}{6}. \quad (3)$$

Finalmente, la intensidad de la dispersión combinatoria de rotación se obtiene restando (2) y (3) de (1):

$$h_{\text{combin}} = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4} \frac{(\alpha_{\perp} - \alpha_{||})^2}{2}.$$

§ 95. Opalescencia crítica

Como es sabido, la compresibilidad isotérmica de una substancia $(\partial\rho/\partial p)_T$ crece sin límites al acercarse al estado crítico. Junto con ella crece también la expresión (94.2) para la intensidad total de la dispersión de Rayleigh escalar. Esto pone de relieve un brusco aumento de la intensidad de la dispersión cerca del punto crítico (la llamada *opalescencia crítica*)*. Sin embargo, la propia fórmula (94.2) deja en-

* Un fenómeno similar se produce en la dispersión por un sólido cerca del punto crítico de un cambio de fase de segunda especie. Ha sido estudiado por V. L. Ginzburg DAN SSSR 105, 240, 1955.

tonces de ser aplicable debido a que pasan a ser incorrectas las expresiones para las fluctuaciones termodinámicas que se utilizaron al deducirla.

El crecimiento de la intensidad no se produce en las tres componentes de estructura fina de la raya de Rayleigh, sino solamente para la componente central. En lo que concierne a la intensidad del doblete, según (94.2) y (94.7) tenemos

$$h_{\text{doblete}} \approx \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \frac{Tpc_v}{c_p} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T^2.$$

Según la conocida fórmula termodinámica

$$c_p - c_v = \frac{T}{\rho^2} \frac{(\partial p / \partial T)_\rho^2}{(\partial p / \partial \rho)_T}$$

se encuentra cerca del punto crítico una cantidad finita

$$h_{\text{doblete}} = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \frac{\rho^3 c_v}{(\partial p / \partial T)_\rho^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T^2. \quad (95.1)$$

Como veremos más adelante, en las proximidades del punto crítico es imposible substituir en (94.4) el factor $e^{-ik \cdot r}$ por la unidad, ni aún en el cálculo de la intensidad total de dispersión. Sea dh el coeficiente diferencial de extinción relativo a la dispersión en el ángulo sólido dado $d\Omega$ (al que corresponde un valor $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ dado). Limitándonos, para concretar, a la dispersión de la luz natural y recordando que su dependencia angular (en la dispersión escalar) viene dada por el factor $(\frac{3}{4}(1 + \cos^2 \vartheta))$, tenemos para dh :

$$dh = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \frac{1}{V} \overline{\left| \int \delta \epsilon \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2} \cdot \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \vartheta) \frac{d\Omega'}{4\pi}. \quad (95.2)$$

Cerca del punto crítico, las fluctuaciones de la densidad crecen, mientras que las de la temperatura se conservan finitas. Por ello, basta considerar la fluctuación $\delta \epsilon = (\partial \epsilon / \partial \rho)_T \delta \rho$, de modo que

$$dh = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T^2 \frac{1}{V} \overline{\left| \int \delta \rho \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2} \cdot \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \vartheta) \frac{d\Omega'}{4\pi}. \quad (95.3)$$

Según una conocida teoría, el cuadrado medio de las fluctuaciones de la densidad cerca del punto crítico se puede expresar en función de los coeficientes a y b en la fórmula

$$F - \bar{F} = \frac{1}{2}a(\delta \rho)^2 + \frac{1}{2}b(\text{grad } \delta \rho)^2, \quad (95.4)$$

donde F es la energía libre por unidad de volumen del cuerpo*.

Esta fórmula representa los primeros términos del desarrollo de la variación

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 119.

de la energía libre en potencias de la propia $\delta\rho$ y de su gradiente; la necesidad de tener en cuenta este último se debe al aumento de las heterogeneidades locales en el cuerpo cerca del punto crítico. La constante a se expresa en función de las magnitudes termodinámicas habituales según la fórmula*.

$$a = (1/\rho)(\partial p/\partial \rho)_T. \quad (95.5)$$

El valor medio del cuadrado que aparece en (95.3) se expresa en función de a y b por la igualdad

$$\left| \int \delta\rho \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2 = VT/(a + bq^2). \quad (95.6)$$

Substituyendo en (95.3), obtendremos el siguiente resultado final

$$dh = \frac{\omega^4}{32\pi^2 c^4} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T + 2 \frac{\omega^2}{c^2} b (1 - \cos \vartheta)} d\sigma'. \quad (95.7)$$

(L. S. Ornstein y F. Zernike fueron los primeros en obtener una fórmula de este tipo en 1914). Para ángulos ϑ no excesivamente pequeños se puede prescindir del primer término en el denominador y entonces

$$dh = \frac{\omega^2}{64\pi^2 c^2 b} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{1 - \cos \vartheta} d\sigma'. \quad (95.8)$$

La intensidad total de dispersión en todas direcciones se obtiene por integración de (95.7) respecto de $d\sigma'$. Cuando $(\partial p/\partial \rho)_T = 0$ (es decir, en el propio punto crítico) la integral diverge logarítmicamente para ángulos pequeños. En realidad, la integración debería efectuarse solamente hasta ángulos que son del orden de magnitud del ángulo de difracción ($\sim \lambda/L$, donde L caracteriza el tamaño del cuerpo). En definitiva, la intensidad total dependerá logarítmicamente de las dimensiones del cuerpo dispensor.

§ 96. Dispersión en cuerpos sólidos amorfos

La dispersión de Rayleigh en cuerpos sólidos amorfos difiere esencialmente de la dispersión en los líquidos y gases. En un cuerpo sólido isótropo se tienen, como es sabido, no una, sino dos velocidades de propagación del sonido, la longitudinal u_l y la transversal u_t . Debido a ello, la estructura fina de la raya de Rayleigh contiene no un doblete de Mandel'shtam-Brillouin, sino dos. Éstos están ligados con la dispersión por «ondas acústicas» transversales y longitudinales y distan del centro de la raya valores $\pm \Delta\omega_l$ y $\pm \Delta\omega_t$, respectivamente, donde

$$\Delta\omega_l = q u_l, \quad \Delta\omega_t = q u_t.$$

* La derivada $(\partial F/\partial \rho)_T$ es el potencial termodinámico de la unidad de masa del cuerpo. En consecuencia, la segunda derivada es $a = (\partial^2 F/\partial \rho^2)_T = (\partial \Phi/\partial \rho)_T = (1/\rho)(\partial p/\partial \rho)_T$

Dado que siempre es $u_l > u_t$, se tendrá $\Delta\omega_l > \Delta\omega_t$. En cambio, la componente central de la raya está vinculada, como antes, a la dispersión por aquellas fluctuaciones que no se propagan respecto del medio. Entre éstas representan un papel fundamental, en el presente caso, las fluctuaciones de estructura. En un cuerpo amorfo, con su distribución desordenada de los átomos, estas últimas fluctuaciones son relativamente grandes y prácticamente no cambian con el tiempo (dada la extraordinaria lentitud de los procesos de difusión en un cuerpo sólido). La dispersión que determinan conduce a la aparición de una intensa raya cuya anchura es prácticamente nula. Por su polarización y por su distribución angular, esta dispersión representa una superposición de los tipos escalar y simétrico.

Consideremos las componentes de doblete de la raya de Rayleigh en los cuerpos amorfos. A diferencia de lo que ocurría en los líquidos y los gases, aquí es imposible suponer $e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = 1$ en la integral G , ni aún en el caso de la intensidad total (y de la polarización) de la luz dispersada; al mismo tiempo, desaparece también la clasificación de los tipos de dispersión según su dependencia angular que presentamos en el § 91. Ello se debe a que, en un cuerpo sólido, la influencia de cualquier deformación (en el presente caso, de una fluctuación) se propaga a distancias considerables. Por ello, las fluctuaciones en los diferentes puntos del cuerpo (en el mismo instante) se encuentran en correlación incluso a distancias grandes (comparadas con $1/q$).

El campo de la onda luminosa dispersada viene dado por la fórmula

$$\mathbf{E}' = -\frac{\omega^2 \exp(i\mathbf{k}R_0)}{4\pi R_0 c^2} \mathbf{n}' \times (\mathbf{n}' \times \mathbf{G}), \quad (96.1)$$

donde

$$G_i = \int \delta\epsilon_{ik} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV \cdot E_{0k}, \quad (96.2)$$

y \mathbf{n}' es el vector unitario en la dirección de dispersión. La variación de la permitividad debida a la deformación de un cuerpo isótropo se obtiene por la fórmula

$$\delta\epsilon_{ik} = a_1 u_{ik} + a_2 u_{ll} \delta_{ik}, \quad (96.3)$$

donde u_{ik} es el tensor deformación (véase (81.1)). Dado que la integral (96.2) separa de $\delta\epsilon_{ik}$ la componente espacial de Fourier con vector de onda \mathbf{q} , también en (96.3) hay que entender por u_{ik} la deformación en la onda acústica con este vector de onda. Por esta razón, escribimos el vector desplazamiento en la forma

$$\mathbf{u} = \operatorname{Re}\{\mathbf{u}_0 \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\} = \frac{1}{2}[\mathbf{u}_0 \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{u}_0^* \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})], \quad (96.4)$$

de donde resulta el tensor deformación

$$\begin{aligned} u_{ik} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \\ &= \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{2} i(u_{0i} q_k + u_{0k} q_i) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \right\}, \end{aligned}$$

y la integral de volumen es

$$\int u_{ik} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV = \frac{1}{4} i V (u_{0i} q_k + u_{0k} q_i). \quad (96.5)$$

Consideremos primero la dispersión por ondas «acústicas» transversales. Dado que en una onda transversal se tiene $\mathbf{u} \perp \mathbf{q}$ y $u_{ll} = 0$, será

$$\delta\epsilon_{ik} = a_1 u_{ik}.$$

Aplicando (96.5), se encuentra, en consecuencia,

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4} i V a_1 \{ \mathbf{u}_0 (\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}_0) + \mathbf{q} (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{E}_0) \}. \quad (96.6)$$

En una onda acústica transversal son posibles dos direcciones independientes de polarización: el vector \mathbf{u} puede encontrarse en el plano \mathbf{k}, \mathbf{k}' o ser perpendicular al mismo. Teniendo también en cuenta que $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, es fácil ver que, en el primer caso, la proyección de \mathbf{G} sobre un plano perpendicular a \mathbf{k}' es igual a cero. Así pues, las ondas acústicas y transversales, «polarizadas» en el plano \mathbf{k}, \mathbf{k}' , no dispersan la luz.

Pero si el vector desplazamiento \mathbf{u} es perpendicular al plano \mathbf{k}, \mathbf{k}' , un cálculo fácil con ayuda de (96.1) y (96.6) da para el campo de la onda dispersada las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} E'_{||} &= \frac{\omega^2 \exp(i k R_0)}{4\pi R_0 c^2} \cdot \frac{1}{4} a_1 i V q u_0 \cos \frac{1}{2}\vartheta \cdot E_{||}, \\ E'_{\perp} &= \frac{\omega^2 \exp(i k R_0)}{4\pi R_0 c^2} \cdot \frac{1}{4} a_1 i V q u_0 \cos \frac{1}{2}\vartheta \cdot E_{\perp} \end{aligned} \quad (96.7)$$

(ϑ , como siempre, es el ángulo formado por \mathbf{k} y \mathbf{k}' y los índices $||$ y \perp designan las componentes de los vectores en el plano de dispersión y en el perpendicular al mismo). Los coeficientes de proporcionalidad en estas dos fórmulas contienen la misma magnitud que fluctúa u_0 . Esto significa que en la dispersión no se produce despolarización, es decir, que la luz polarizada linealmente se conserva linealmente polarizada (si bien en otro plano).

Dado que los coeficientes en las fórmulas (96.7) coinciden completamente, el coeficiente de extinción dh no depende del estado de polarización de la luz incidente y es igual a

$$dh = \left(\frac{q \omega^2 a_1}{16\pi c^2} \right)^2 V \overline{|u_0|^2} \cos^2 \frac{1}{2}\vartheta d\sigma. \quad (96.8)$$

Falta determinar el valor medio del cuadrado de la amplitud del desplazamiento por fluctuación u_0 .

Desde el punto de vista de la teoría general de las fluctuaciones termodinámicas, se puede considerar la onda acústica (96.4) como conjunto de dos osciladores clásicos (ondas que se propagan hacia la derecha y hacia la izquierda), cada uno de los cuales ha de tener una energía cinética media $T/2$. Dado que, en este caso, la fre-

cuencia de las oscilaciones es $\Delta\omega = u_t q$, la energía cinética media vale

$$\frac{1}{2}V\rho\bar{\dot{\mathbf{u}}^2} = \frac{1}{4}V\rho(u_t q)^2|\bar{\mathbf{u}_0}|^2.$$

Igualando esta expresión a $2 \cdot T/2$, obtendremos

$$|\bar{\mathbf{u}_0}|^2 = 4T/V\rho u_t^2 q^2. \quad (96.9)$$

Finalmente, substituyendo (96.9) en (96.8), se obtendrá en definitiva:

$$dh = \frac{a_1^2 \omega^4 T}{64\pi^2 c^4 u_t^2 \rho} \cos^2 \frac{1}{2}\vartheta d\vartheta. \quad (96.10)$$

Obsérvese el singular carácter de la dependencia angular de la dispersión, distinto por completo de la que encontramos en los líquidos y en los gases.

Pasemos a la dispersión por ondas «acústicas» longitudinales. En estas ondas es $\mathbf{u} \parallel \mathbf{q}$ y mediante (96.3) y (96.4) hallamos que

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}iVu_0 q \left\{ a_1 \frac{\mathbf{q}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}_0)}{q^2} + a_2 \mathbf{E}_0 \right\}.$$

Un cálculo fácil da para el campo de la onda dispersada:

$$\begin{aligned} E_{\perp} &= \frac{\omega^2 \exp(ikR_0)}{4\pi R_0 c^2} \cdot \frac{1}{2}iVu_0 q a_2 E_{\perp}, \\ E_{\parallel} &= \frac{\omega^2 \exp(ikR_0)}{4\pi R_0 c^2} \cdot \frac{1}{2}iVu_0 q [\frac{1}{2}a_1 + (\frac{1}{2}a_1 + a_2) \cos \vartheta] E_{\parallel}. \end{aligned} \quad (96.11)$$

También en este caso no hay despolarización en la dispersión. Sin embargo, la distribución angular y el valor del coeficiente de extinción, dependen del estado y de la dirección de polarización de la luz incidente. No nos detendremos en reproducir aquí las correspondientes fórmulas, que son bastante largas y complejas; los cálculos son exactamente análogos a los que se han efectuado anteriormente, difiriendo la expresión para $|\bar{\mathbf{u}_0}|^2$ únicamente en la sustitución de u_t por u_t en (96.9).

CAPÍTULO XV

DIFRACCIÓN DE LOS RAYOS X EN LOS CRISTALES

§ 97. Teoría general de la difracción de los rayos X

El fenómeno de la difracción de los rayos X en los cristales ocupa un puesto especial en la electrodinámica de los medios materiales, puesto que sus longitudes de onda son comparables con las distancias interatómicas. Por esta causa, el tratamiento macroscópico ordinario de la materia como medio continuo es aquí por completo inaplicable y hay que partir de un estudio de la dispersión por partículas cargadas individuales (por electrones)*.

Las frecuencias del movimiento de los electrones en un átomo es del orden de magnitud de $\omega_0 \sim v/a$, donde v es su velocidad y a caracteriza el tamaño de los átomos. Si $\lambda \sim a$, dado que $v \ll c$ estas frecuencias son pequeñas comparadas con las frecuencias de los rayos X, $\omega \sim c/\lambda$. Esta circunstancia permite escribir la ecuación del movimiento de un electrón en el campo de una onda electromagnética en la forma

$$m\ddot{\mathbf{v}}' = e\mathbf{E}, \quad (97.1)$$

es decir, considerar los electrones como libres (véase § 59).

De la ecuación (97.1) resulta para la velocidad que adquiere el electrón bajo la influencia del campo de la onda:

$$\mathbf{v}' = ie\mathbf{E}/m\omega.$$

Designemos por $n(x, y, z)$ la densidad del número de electrones en el cristal, promediada respecto del estado cuántico electrónico y de la distribución estadística del movimiento térmico de los núcleos en la red. Subrayaremos, sin embargo, que aquí no se efectúa el promedio habitual en la teoría macroscópica respecto de elementos de volumen infinitesimales, es decir, $n(x, y, z)$ es la verdadera densidad cuántica de la «nube electrónica» en la red cristalina. La correspondiente densidad de corriente creada por el campo de la onda es

$$\mathbf{j}' = e n \mathbf{v}' = ie^2 n \mathbf{E} / m \omega. \quad (97.2)$$

* La dispersión por los núcleos, naturalmente, es insignificante debido a la gran masa de los mismos.

Introduzcamos esta corriente en las ecuaciones microscópicas de Maxwell:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mathbf{H}/c, \quad (97.3)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\omega \mathbf{E}/c + 4\pi \mathbf{j}'/c \\ &= -\frac{i\omega}{c} \left(1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}\right) \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (97.4)$$

Con esto tenemos en cuenta su acción recíproca sobre el campo, es decir, el efecto de dispersión. Se supone, claro está, que este efecto es pequeño, es decir, que es válida la desigualdad

$$4\pi e^2 n / m\omega^2 \ll 1. \quad (97.5)$$

Introduciendo la notación $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, donde

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}, \quad (97.6)$$

que corresponde a la definición ordinaria del desplazamiento eléctrico, la ecuación (97.4) se lleva a la forma usual $\operatorname{rot} \mathbf{H} = -(i\omega/c)\mathbf{D}$. En este sentido, vemos que la expresión (97.6) para la permitividad (cf. (59.1)) puede aplicarse también a longitudes de onda $\lambda \sim a$. Con todo, hay que recordar, naturalmente, que el sentido literal de las magnitudes \mathbf{E} y \mathbf{D} que aquí figuran no coincide con el que antes tenían, puesto que se refieren al campo no promediado respecto de volúmenes infinitesimales. Por esta razón, ϵ es ahora función de las coordenadas.

En la dispersión de los rayos X por átomos pesados puede presentarse el caso en que la condición $\omega \gg \omega_0$ se cumple para las capas electrónicas exteriores y, a la vez, deja de cumplirse para los electrones interiores, para los cuales $\omega \lesssim \omega_0$ y, en consecuencia, es válida la desigualdad $\lambda \gg a$. En este caso cabe también introducir el concepto de permitividad (como coeficiente de proporcionalidad entre \mathbf{D} y \mathbf{E}), pero mediante una fórmula del tipo (97.6) se determina entonces únicamente la contribución debida a los electrones exteriores. En cuanto a la correspondiente a las capas interiores, ésta debe calcularse, en principio, promediando en el volumen de las mismas. De esta manera, si se escribe de forma general $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, con una ϵ dependiente de las coordenadas, tenemos en cuenta automáticamente todos los casos posibles. Para concretar, utilizaremos en todo lo que sigue la expresión (97.6).

Efectuando en (97.2) el promedio de la densidad electrónica y habiendo obtenido como resultado una $n(x, y, z)$ que no depende del tiempo, excluimos con ello la posible variación de la frecuencia en la dispersión. En otras palabras, consideramos la dispersión rigurosamente coherente, sin variación de la frecuencia.

Eliminando \mathbf{H} entre las dos ecuaciones (97.3) y (97.4), se obtendrá

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \omega^2 \mathbf{D}/c^2.$$

Substituyamos aquí

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} + 4\pi e^2 n \mathbf{E} / m\omega^2$$

y desarrollemos la expresión $\text{rot rot } \mathbf{E}$, teniendo en cuenta que $\text{div } \mathbf{D} = 0$ (conforme se sigue de (97.4)). Obtendremos entonces

$$\Delta \mathbf{D} + \omega^2 \mathbf{D}/c^2 = \text{rot rot} (4\pi e^2 n \mathbf{E}/m\omega^2). \quad (97.7)$$

En el segundo miembro de esta igualdad, que contiene ya la pequeña cantidad $4\pi e^2 n/m\omega^2$, \mathbf{E} significa el campo dado de la onda incidente. Hallemos la solución de la ecuación (97.7) en el espacio exterior al cristal dispersor y a grandes distancias del mismo*. Dado que esta ecuación coincide formalmente con la ecuación (91.3), podemos escribir sin más la solución buscada, por analogía con (91.4):

$$\mathbf{E} = \frac{e^2}{mc^2} \frac{\exp(ikR_0)}{R_0} \mathbf{k}' \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0) \int n \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV. \quad (97.8)$$

Aquí R es la distancia desde el origen de coordenadas, que se supone interior al cristal, hasta el punto de observación del campo; $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$; $k = k' = \omega/c$; \mathbf{E}_0 es la amplitud de la onda incidente; en el primer miembro de la igualdad hemos escrito: \mathbf{E} en vez de \mathbf{D} , dado que en el vacío exterior al cuerpo es $\mathbf{D} = \mathbf{E}$.

Introduzcamos como característica de la intensidad de la difracción de los rayos X la sección eficaz σ , definida como razón de la intensidad de la radiación difractada en el ángulo sólido $d\Omega'$ a la densidad de flujo de energía en la onda incidente. Según (97.8) tenemos

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta \left| \int n \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2 d\Omega', \quad (97.9)$$

donde θ es el ángulo formado por \mathbf{E}_0 y \mathbf{k}' . Si los rayos incidentes son «naturales» (no polarizados), el factor $\sin^2 \theta$ en esta fórmula se substituye por $(\frac{1}{2})(1 + \cos^2 \vartheta)$, donde ϑ es el ángulo entre \mathbf{k} y \mathbf{k}' (véase la nota en la pág. 356):

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \left| \int n \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2 d\Omega'. \quad (97.10)$$

A continuación supondremos, para concretar, que de este caso se trata precisamente.

Vemos así que la intensidad de los rayos difractados en una dirección dada queda determinada fundamentalmente por el cuadrado del módulo de la integral

$$\int n \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) dV, \quad (97.11)$$

es decir, por la componente espacial de Fourier (con el correspondiente valor de \mathbf{q}) de la densidad electrónica. Cuando $\mathbf{q} \rightarrow 0$, esta integral se reduce simplemente al valor medio de la densidad electrónica \bar{n} en el volumen del cristal (es decir, en el de su celda elemental). Pero si en las ecuaciones (97.3) y (97.4) se substituye n por \bar{n} ,

* Al resolver la ecuación (91.3) en el § 91 fue imposible considerar el campo fuera del cuerpo, ya que ello hubiera exigido tener en cuenta las condiciones de contorno sobre su superficie debido a que el primer miembro de la ecuación contenía la magnitud (ϵ) , que es diferente dentro y fuera del medio. En cambio, el primer miembro de la ecuación (97.7) es el mismo en todo el espacio.

se obtendrán las ecuaciones macroscópicas ordinarias de Maxwell con una permitividad $\epsilon(\omega) = 1 - 4\pi e^2 \bar{n}/m\omega^2$.

Según estas ecuaciones, cuando los rayos X atraviesan el cristal, se produce su refracción de acuerdo con la ley ordinaria (con un índice de refracción $1/\epsilon$). Así pues, la difracción a ángulos pequeños se reduce a la refracción ordinaria que no nos interesa aquí. En todo lo que sigue supondremos que \mathbf{q} es apreciablemente distinto de cero.

La densidad electrónica (como cualquier otra función de punto en una red cristalina) puede desarrollarse en serie de Fourier de la forma

$$n = \sum_{\mathbf{b}} n_{\mathbf{b}} \exp(2\pi i \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}), \quad (97.12)$$

donde la suma se extiende a todos los períodos \mathbf{b} de la red recíproca*. Al substituir (97.12) en (97.11) e integrar en el volumen ocupado por el cristal, sólo se obtiene un resultado apreciablemente distinto de cero para aquellos valores \mathbf{q} próximos a alguno de los $2\pi\mathbf{b}$. En cambio, para valores intermedios entre éstos, la intensidad es prácticamente nula. Debido a ello, cabe considerar cada uno de los máximos de difracción por separado, suponiendo al hacerlo $n = n_{\mathbf{b}} e^{2\pi i \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}$ con un valor dado de \mathbf{b} . Substituyendo esta expresión en (97.10), se obtendrá

$$\begin{aligned} d\sigma = & \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_{\mathbf{b}}|^2 \times \\ & \times \left| \int \exp[-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}) \cdot \mathbf{r}] dV \right|^2 d\vartheta'. \end{aligned} \quad (97.13)$$

Los máximos más intensos aparecen en las direcciones en las que se cumple la igualdad exacta

$$\mathbf{k}' - \mathbf{k} = 2\pi\mathbf{b} \quad (97.14)$$

(ecuación de Laue); estos máximos se califican de *principales*. Para un \mathbf{b} dado, sin embargo, un máximo principal puede no presentarse para una dirección (y frecuencia) arbitraria de los rayos incidentes. Escribiendo la igualdad (97.14) en la forma $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}$, elevándola al cuadrado y teniendo en cuenta que $k^2 = k'^2$, se obtendrá

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} = -\pi b^2. \quad (97.15)$$

Mediante esta ecuación se determinan aquellos valores del vector de onda \mathbf{k} para los que son posibles los máximos principales con un valor de \mathbf{b} dado. Geométricamente, (97.15) es la ecuación de un plano en el espacio \mathbf{k} , perpendicular al vector \mathbf{b} y situado a la distancia πb del origen de coordenadas. Vemos, en particular, que necesariamente debe ser $k \geq \pi b$.

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 135.

Dado que $|k' - k| = 2k \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta)$, de (97.14) se sigue que

$$k \sin \frac{1}{2}\vartheta = \pi b \quad (97.16)$$

ecuación que determina el ángulo de difracción en el máximo principal (*ecuación de Bragg y Wulff*).

Como es sabido, cada vector \mathbf{b} de la red recíproca determina una familia de planos cristalográficos de acuerdo con las ecuaciones $\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = \text{const}$, donde la constante toma valores enteros. Estos planos son perpendiculares a la dirección del vector \mathbf{b} , y respecto de los mismos los vectores \mathbf{k} y \mathbf{k}' (que corresponden a la condición (97.14)) están dirigidos formando ángulos iguales de «incidencia» y de «reflexión» (fig. 45). Por este motivo, a veces al referirse a la reflexión en un máximo principal se habla de «reflexión» en los correspondientes planos cristalográficos.

La intensidad total de la «mancha» de difracción cerca de un máximo se obtiene por integración de (97.13) en un ángulo sólido en torno de la correspondiente dirección de \mathbf{k}' . Determinemos la intensidad total en las proximidades de un máximo principal.

Designemos por \mathbf{k}_0' el valor de \mathbf{k}' que corresponde exactamente a la condición de Laue (para un \mathbf{k} dado): $\mathbf{k}_0' = \mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}$. Introduzcamos también el vector $\mathbf{x} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}_0'$. En la vecindad del máximo, \mathbf{x} es pequeño y dado que \mathbf{k}' y \mathbf{k}_0' difieren solamente en su dirección será $\mathbf{x} \perp \mathbf{k}_0'$. Por ello, el elemento de ángulo sólido se puede escribir en la forma

$$d\sigma' = d\kappa_x d\kappa_y / k'^2 = d\kappa_x d\kappa_y / k^2, \quad (97.17)$$

donde el eje z se ha elegido paralelo a \mathbf{k}'_0 . De esta manera, tenemos

$$\sigma = \frac{1}{2k^2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \int \int d\kappa_x d\kappa_y \left| \int \exp(-i\kappa \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2.$$

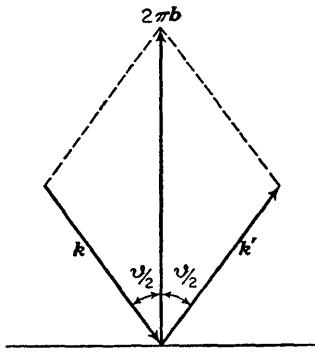


FIG. 45

En la integral de volumen puede efectuarse la integración respecto de z , ya que $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ no depende de esta coordenada:

$$\int \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dV = \int Z \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) df,$$

donde $df = dx dy$, y $Z = Z(x, y)$ es la longitud del cuerpo en la dirección de \mathbf{k}_0' . Finalmente, apliquemos la conocida fórmula de la teoría de las integrales de Fourier:

$$\int |\phi_{\kappa}|^2 d\kappa_x d\kappa_y = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \phi^2 dx dy, \quad (97.18)$$

donde

$$\phi_{\kappa} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \phi(x, y) \exp(-i\kappa \cdot \mathbf{r}) dx dy$$

son las componentes del desarrollo bidimensional de Fourier. En definitiva obtenremos la siguiente fórmula final:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2\pi^2}{k^2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \int Z^2 df \\ &= \frac{2}{b^2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \frac{1}{2}\vartheta (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \int Z^2 df. \end{aligned} \quad (97.19)$$

La integral que aquí aparece es del orden de magnitud de L^4 , donde L caracteriza las dimensiones lineales del cuerpo. Así pues, la sección eficaz total (o lo que es lo mismo, la intensidad total de la mancha) es proporcional a $V^{4/3}$, donde V es el volumen del cuerpo. Obsérvese que la intensidad en el propio máximo es proporcional a otra potencia del volumen: cuando $\mathbf{k}' - \mathbf{k} = 2\pi\mathbf{b}$, la integral en (97.13) es, simplemente, igual a V , de modo que $d\sigma$ resulta proporcional a V^2 :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 V^2. \quad (97.20)$$

El hecho de que la intensidad en el máximo sea proporcional a una potencia mayor de V que la intensidad total queda ilustrada intuitivamente por el acusado carácter del máximo. La «anchura» de éste es proporcional, evidentemente, a $V^{4/3}/V^2 = V^{-2/3}$.

La teoría desarrollada aquí es aplicable únicamente si se cumple la condición de que el efecto total de difracción es pequeño. Esta condición impone, conforme vemos ahora, una determinada limitación a las dimensiones del cristal. En efecto, σ debe ser pequeña comparada con el área geométrica de la sección del cuerpo ($\sim L^2$), de donde

$$\frac{e^2}{mc^2} \frac{L}{k} |n_b| \ll 1. \quad (97.21)$$

PROBLEMAS

1. Determinar la distribución de la intensidad en la mancha de difracción alrededor de un máximo principal en la difracción por un cristal cuya forma es la de un paralelepípedo rectangular de aristas L_x, L_y, L_z .

Solución. Introduzcamos, como en el texto, el vector $\mathbf{k} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}_0'$ y elijamos el sistema de coordenadas de modo que sus ejes sean paralelos a las aristas del paralelepípedo y que su origen coincida con el centro.

La integral $\int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dV$ se descompone en el producto de tres integrales de la forma

$$\int_{-\frac{1}{2}L_x}^{\frac{1}{2}L_x} \exp(-i\kappa_x x) dx = \frac{2}{\kappa_x} \sin \frac{1}{2}\kappa_x L_x.$$

Así pues,

$$d\sigma = 32 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \frac{1}{\kappa_x^2 \kappa_y^2 \kappa_z^2} \sin^2 \frac{1}{2}\kappa_x L_x \sin^2 \frac{1}{2}\kappa_y L_y \sin^2 \frac{1}{2}\kappa_z L_z d\sigma'.$$

Hay que recordar que las componentes del vector \mathbf{k} no son independientes, sino que están ligadas por la condición $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_0' = 0$.

2. Lo mismo para la difracción por un cristal esférico de radio a .

Solución. Introduzcamos de nuevo $\mathbf{k} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}_0'$; el sistema de coordenadas lo elegiremos de modo que el eje z sea paralelo a \mathbf{k} (y con origen en el centro de la esfera). Tenemos

$$\begin{aligned} \int \exp(-i\kappa z) dV &= \int_{-a}^a \pi(a^2 - z^2) \exp(-i\kappa z) dz \\ &= \frac{4\pi}{\kappa^3} (\sin \kappa a - \kappa a \cos \kappa a). \end{aligned}$$

Así pues,

$$d\sigma = 8\pi^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \frac{1}{\kappa^6} (\sin \kappa a - \kappa a \cos \kappa a)^2 d\sigma'.$$

3. Determinar la intensidad total de la mancha de difracción en torno de un máximo secundario.

Solución. En este caso el vector de onda \mathbf{k} de la onda incidente no cumple la condición (97.15). Como se indicó en el texto, (97.15) es la ecuación de un plano perpendicular al vector \mathbf{b} ; designemos por \mathbf{k} el pequeño desplazamiento del extremo del vector $\eta\mathbf{b}$ a partir de este plano, donde $\eta \ll 1$. En otras palabras, representemos \mathbf{k} en la forma $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \eta\mathbf{b}$, donde \mathbf{k}_0 satisface la ecuación (97.15) (figura 46).

Al máximo de la intensidad en la mancha corresponde aquella dirección \mathbf{k}' para la cual la diferencia $\mathbf{k}' - (\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b})$ presenta un mínimo (de modo que la integral en (97.13) es máxima). Pero el valor absoluto de la diferencia de dos vectores (uno de los cuales tiene una dirección arbitraria) alcanza el valor mínimo cuando las direcciones de estos vectores coinciden. Tenemos por ello (puesto que $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$)

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}|_{\min} &= k - |\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}| \\ &= \frac{k^2 - (\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b})^2}{k + |\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}|}. \end{aligned}$$

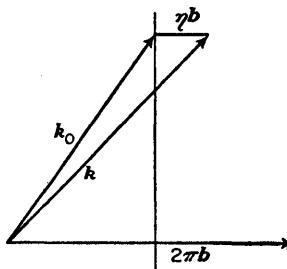


FIG. 46

Dado que \mathbf{k} es próximo a \mathbf{k}_0 y que consideramos una región en el entorno del máximo, será $\mathbf{k}' \cong \mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}$, y el denominador de la expresión que precede puede substituirse por $2k$. En el numerador desarrollaremos el paréntesis, con lo que se obtiene

$$-2\mathbf{k} \cdot 2\pi\mathbf{b} - (2\pi\mathbf{b})^2 = [-2\mathbf{k}_0 \cdot 2\pi\mathbf{b} - (2\pi\mathbf{b})^2] - 2\eta\mathbf{b} \cdot 2\pi\mathbf{b} = -4\pi\eta\mathbf{b}^2.$$

Así pues,

$$|\mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}|_{\min} \cong -2\pi\eta\mathbf{b}^2/k.$$

Introduzcamos ahora el vector \mathbf{x} definido por

$$\mathbf{k}' = (\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}) \left(1 - \frac{2\pi\eta\mathbf{b}^2}{k}\right) + \mathbf{x},$$

y, eligiendo el eje z paralelo a $\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}$, el problema se reduce a calcular la integral (véase la deducción de la fórmula (97.19))

$$\begin{aligned} & \int d\kappa_x d\kappa_y \left| \int \exp\{2\pi i \eta b^2/k - z - i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}\} dV \right|^2 \\ &= \int \int d\kappa_x d\kappa_y \left| \int \exp(-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}) \frac{\sin(\pi\eta b^2 Z/k)}{\pi\eta b^2/k} df \right|^2. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando la fórmula (97.18), se obtendrá:

$$\sigma = \frac{2\pi^2}{k^2} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n_b|^2 \int \frac{\sin^2(\pi\eta b^2 Z/k)}{(\pi\eta b^2/k)^2} df.$$

Cuando $\eta \rightarrow 0$, esta fórmula pasa a ser la (97.19). Pero si $\pi\eta b^2 Z/k \gg 1$ (lo que no contradice la condición $\eta \ll 1$), el cuadrado del seno se substituye por su valor medio $\frac{1}{2}$ y obtenemos

$$\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\eta^2 b^4} |n_b|^2 S,$$

donde S es el área de la proyección (de la «sombra») del cuerpo sobre el plano x, y .

§ 98. Intensidad integral

Las fórmulas obtenidas en el párrafo que precede determinan la intensidad de la difracción cuando sobre el cristal incide una onda rigurosamente monocromática

y rigurosamente plana. Consideremos ahora una serie de casos en los que estas condiciones no se cumplen.

Comencemos por aquel en que la onda incidente es plana, pero no monocromática*. En otras palabras, su desarrollo espectral contiene ondas con vectores de onda \mathbf{k} todos de igual dirección, pero de módulos $k = \omega/c$ diferentes. Designemos por $\rho(k)$ la densidad de la distribución de intensidad de la radiación incidente referida a la frecuencia y normalizada a la unidad por la condición $\int \rho(k) dk = 1$.

La intensidad total de la mancha de difracción viene determinada por la sección eficaz que se obtiene multiplicando la expresión (97.13) por $\rho(k)$ e integrando respecto de θ' y respecto de $\rho(k) dk$:

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 \int \int \left| \int \exp[-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}) \cdot \mathbf{r}] dV \right|^2 \times \\ \times (1 + \cos^2 \theta') \rho(k) d\theta' dk. \quad (98.1)$$

Introduzcamos por el momento la notación $\mathbf{K} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}$ y escribamos el cuadrado del módulo en forma de integral doble:

$$\left| \int \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2 = \int \int \exp[i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] dV_1 dV_2.$$

Substituyendo en vez de \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 las variables $(\frac{1}{2})(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ y efectuando la integración respecto de la primera en el volumen del cuerpo, obtendremos

$$\left| \int \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2 = V \int \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) dV.$$

En la integral que queda cabe ahora efectuar la integración respecto de todas las variables entre límites infinitos**, como resultado de lo cual se encuentra

$$\left| \int \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2 = (2\pi)^3 V \delta(\mathbf{K}). \quad (98.2)$$

Substituyendo este resultado en la fórmula (98.1), escribiremos ésta en la forma

$$\sigma = 4\pi^3 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 V (1 + \cos^2 \theta_0) \times \\ \times \int \int \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}) \rho(k) d\theta' dk; \quad (98.3)$$

debido a la presencia de la función δ en el integrando, hemos separado el factor $1 + \cos^2 \theta$ substituyéndolo por su valor para $\theta = \theta_0$, donde θ_0 es el ángulo formado por los vectores \mathbf{k} y \mathbf{k}' que satisfacen la condición de Laue (los designaremos por \mathbf{k}_0 y $\mathbf{k}'_0 = \mathbf{k}_0 + 2\pi\mathbf{b}$).

* Este caso corresponde al conocido *método de Laue* para el análisis por rayos X de la estructura de los cristales.

** Esto puede hacerse en tanto se trata de calcular solamente la intensidad total de la onda difractada, no su anchura.

La integración respecto de do' conviene efectuarla observando que equivale a la integración respecto de

$$dk' = k'^2 dk' do' = \frac{1}{2}k' d(k'^2) do',$$

con tal que en el integrando se introduzca un factor $(2/k)\delta(k'^2 - k^2)$. De esta manera la integral (98.3) se substituye por

$$\int \int \frac{2}{k} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}) \delta(k'^2 - k^2) \rho(k) dk' dk.$$

Al integrar respecto de $d^3\mathbf{k}'$ mediante la primera función δ , debemos substituir en la segunda k'^2 por $(\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b})^2$, con lo que se obtiene

$$\int \frac{2}{k} \delta(4\pi^2 b^2 + 4\pi\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}) \rho(k) dk = \int \frac{1}{2\pi k} \delta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} + \pi b^2) \rho(k) dk,$$

de modo que

$$\sigma = 2\pi^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 V (1 + \cos^2 \vartheta_0) \int \frac{1}{k} \delta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} + \pi b^2) \rho(k) dk. \quad (98.4)$$

Finalmente, efectuemos la última integración respecto de k (para una dirección dada $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$). El argumento de la función δ se anula cuando $k = k_0$, y la integral es igual a

$$\rho(k_0)/k_0 |\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}| = \rho(k_0)/|\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}_0| = \rho(k_0)/\pi b^2.$$

De este modo obtenemos finalmente:

$$\sigma = 2\pi \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 V (1 + \cos^2 \vartheta_0) \rho(k_0)/b^2. \quad (98.5)$$

Consideremos ahora otro caso, aquel en que la onda incidente es monocromática, pero contiene componentes con direcciones de \mathbf{k} distintas que se obtienen una de otra por rotación en torno de cierto eje*. El vector unitario correspondiente a la dirección de éste se designará por \mathbf{l} , y el ángulo de giro en torno del mismo, por ψ . Sea $\rho(\psi)$ la función que da la distribución angular de la intensidad de la radiación

incidente, normalizada a la unidad: $\int_{2\pi} \rho(\psi) d\psi = 1$.

Todos los cálculos que condujeron a la fórmula (98.4) valen también para este caso, con la única diferencia de que la integración respecto de $\rho(k) dk$ hay que substituirla por la integración respecto de $\rho(\psi) d\psi$:

$$\sigma = 2\pi^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 V (1 + \cos^2 \vartheta_0) \int \frac{1}{k} \delta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} + \pi b^2) \rho(\psi) d\psi. \quad (98.6)$$

* Este caso corresponde al conocido *método de Bragg* (o método de rotación) del análisis estructural por rayos X, si bien, de hecho, se trata no del giro de la dirección de \mathbf{k} , sino de la rotación del propio cristal en torno del eje \mathbf{l} .

De nuevo designaremos por \mathbf{k}_0 el valor de \mathbf{k} para el que se anula el argumento de la función δ , y contaremos ψ a partir del plano \mathbf{l} , \mathbf{k}_0 . Para valores de ψ pequeños, tenemos

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + (\mathbf{l} \times \mathbf{k}_0)\psi.$$

Entonces la integral en (98.6) toma la forma

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{k} \delta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{k}_0\psi) \rho(\psi) d\psi &= \rho(0)/k |\mathbf{b} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{k}_0| \\ &= \rho(0)/k^2 |\mathbf{b} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{n}_0| \\ &= \rho(0) \sin^2(\frac{1}{2}\vartheta_0)/\pi^2 b^2 |\mathbf{b} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{n}_0|. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\sigma = \frac{2}{b^2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \frac{1}{2}\vartheta_0 (1 + \cos^2 \vartheta_0) |n_b|^2 V \frac{\rho(0)}{|\mathbf{b} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{n}_0|}. \quad (98.7)$$

Finalmente, consideremos la difracción de una onda plana monocromática por un cuerpo que está constituido por un conjunto de cristales orientados al azar*.

Designemos por \mathbf{k}' y \mathbf{b}_0 los vectores \mathbf{k}' y \mathbf{b} dirigidos de tal manera que se satisfaga la condición de Laue $\mathbf{k}'_0 = \mathbf{k} + 2\pi\mathbf{b}_0$. Las direcciones de \mathbf{k}'_0 y \mathbf{b}_0 no están determinadas únicamente, puesto que la condición de Laue sigue cumpliéndose para una rotación cualquiera del triángulo \mathbf{k} , $2\pi\mathbf{b}_0$, \mathbf{k}'_0 en torno de la dirección de \mathbf{k} . Así pues, al máximo principal corresponden direcciones de \mathbf{k}' que están sobre una superficie cónica de ángulo $2\vartheta_0$ en el vértice; en vez de la «mancha» de difracción, tendremos ahora un «anillo» de difracción.

La sección eficaz total buscada se determina por una fórmula que difiere de la (98.4) tan sólo en la substitución de la integración respecto de $\rho(k) dk$ por el promedio respecto de las direcciones de \mathbf{b} :

$$\sigma = 2\pi^2 V \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 (1 + \cos^2 \vartheta_0) \int \frac{1}{k} \delta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} + \pi b^2) \frac{d\omega_b}{4\pi}, \quad (98.8)$$

($d\omega_b$ es el elemento de ángulo sólido en la dirección de \mathbf{b}). Designando el ángulo entre \mathbf{k} y \mathbf{b} por α , escribiremos como sigue la integral que aparece en (98.8):

$$\int \frac{1}{k} \delta(bk \cos \alpha + \pi b^2) \frac{2\pi d \cos \alpha}{4\pi} = \frac{1}{2bk^2} = \frac{1}{2b^3 \pi^2} \sin^2 \frac{1}{2}\vartheta_0.$$

De esta manera,

$$\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 \frac{V}{b^2} (1 + \cos^2 \vartheta_0) \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}$$

Cada uno de los tres casos considerados corresponde a un determinado criterio de promedio de la figura de difracción. Observemos que la dependencia de la intensidad de difracción promediada con relación al volumen del cuerpo queda reducida,

* Este caso corresponde al *método de Debye-Scherrer* (*método del polvo*) para el análisis estructural por rayos X.

como era de esperar, a la mera proporcionalidad. Recuérdese que, en la figura no promediada, la intensidad y su distribución en la mancha dependen del volumen de una manera más acusada.

§ 99. Dispersión térmica difusa de los rayos X

En los dos párrafos que preceden $n(x, y, z)$ representaba la densidad electrónica en el cristal promediada respecto del tiempo. Con ello se excluyen de la misma las oscilaciones de densidad provocadas por diferentes causas y, a la vez, la correspondiente parte (incoherente) de la dispersión de los rayos X. Una de las fuentes de dispersión incoherente la constituyen las fluctuaciones térmicas de densidad. Esta dispersión está distribuida de modo «difuso» en todas direcciones, pero su característica peculiar consiste en la intensidad relativamente grande que presenta cerca de las direcciones que corresponden a las rayas, bien acusadas, de la dispersión «estructural» estudiada en los párrafos anteriores. Consideraremos ahora precisamente estos máximos de la dispersión térmica (W. H. Zachariasen, 1940).

Las oscilaciones térmicas de una red cristalina pueden representarse por desarrollos en ondas «acústicas» separadas. Como se verá por lo que sigue, en la formación de los máximos de dispersión térmica que nos interesan, participan las ondas con grandes longitudes de onda (grandes comparadas con la constante de la red). La variación de la densidad electrónica provocada por dicha onda puede considerarse, en cada punto del espacio, como resultado de un simple desplazamiento de la red cuyo valor es igual al valor local del vector desplazamiento \mathbf{u} en la onda. De esta manera, la variación de densidad (no promediada respecto del tiempo!) al pasar una onda acústica dada puede expresarse en función de la densidad media por

$$\delta n = n(\mathbf{r} - \mathbf{u}) - n(\mathbf{r}) \cong -\mathbf{u} \cdot \partial n / \partial \mathbf{r}.$$

Al considerar la dispersión difusa cerca de una determinada raya, hay que substituir n por $n_b e^{2\pi i \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}$ con un \mathbf{b} dado, de modo que

$$\delta n = -2\pi i \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} n_b \exp(2\pi i \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}). \quad (99.1)$$

La dispersión por las fluctuaciones de densidad, naturalmente, es incoherente con la dispersión por la densidad media y, por ello, no interfiere con ésta. En consecuencia, la sección eficaz de la dispersión difusa puede hallarse mediante la fórmula (97.10) substituyendo en ésta δn en vez de n y efectuando luego el promedio estadístico respecto de las fluctuaciones:

$$\begin{aligned} d\sigma = & 2\pi^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_b|^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \times \\ & \times \left| \int \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) dV \right|^2 d\sigma', \end{aligned} \quad (99.2)$$

donde se ha introducido la notación $\mathbf{K} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} - 2\pi\mathbf{b}$. La intensidad de la dispersión es grande en aquellas direcciones para las que el vector \mathbf{K} es pequeño ($K \ll 2\pi b$).

La integral $\int ue^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} dV$ separa de u la componente espacial de Fourier con vector de onda \mathbf{K} ; podemos, por lo tanto, interpretar u simplemente como el vector desplazamiento en una onda acústica con este vector de onda. La desigualdad $K \ll 2\pi b$ significa, en consecuencia, que la longitud de la onda acústica dispersora es grande comparada con las dimensiones de la celda elemental del cristal.

De esta manera escribiremos

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}[\mathbf{u}_0 \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{u}_0^* \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})], \quad (99.3)$$

de modo que

$$\int (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) dV = \frac{1}{2} V \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_0$$

y la sección eficaz resulta igual a

$$d\sigma = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |\mathbf{n}_b|^2 (1 + \cos^2 \vartheta) b_i b_k \overline{u_{0i} u_{0k}} V^2 d\omega'. \quad (99.4)$$

El promedio de los productos de las componentes \mathbf{u}_0 se efectúa de manera análoga a como se procedió en el § 96 para una onda acústica en un cuerpo isótropo. La energía elástica por unidad de volumen del cristal deformado viene dada por la expresión

$$\frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm},$$

donde u_{ik} es el tensor deformación, y λ_{iklm} , el tensor de módulos elásticos*. Por ello, la energía elástica media de todo el cristal es

$$\frac{1}{2} V \lambda_{iklm} \overline{u_{ik} u_{lm}}.$$

Substituyamos aquí

$$\begin{aligned} u_{ik} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ (iK_k u_{0i} + iK_i u_{0k}) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \}. \end{aligned}$$

Los términos con los factores $e^{\pm 2i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}$ se anulan al calcular el valor medio. Teniendo en cuenta también las propiedades de simetría del tensor λ_{iklm} (simetría respecto de los índices i , k y l , m y respecto de la permutación del par i , k con el par l , m), obtendremos

$$\frac{1}{4} V \lambda_{iklm} K_k K_m \overline{u_{0i} u_{0l}}^*$$

o bien

$$\frac{1}{4} V g_{ik} \overline{u_{0i} u_{0k}}^*,$$

* Véase vol. VII, Teoría de la elasticidad, § 10.

donde se ha introducido la notación

$$g_{ik} = \lambda_{ilk} K_l K_m. \quad (99.5)$$

Según la teoría general de las fluctuaciones termodinámicas, podemos escribir ahora, sin más, para los valores medios buscados*

$$\overline{u_{0i} u_{0k}^*} = (4T/V) g_{ik}^{-1}, \quad (99.6)$$

(g_{ik}^{-1} es el tensor inverso del tensor g_{ik}), y para la sección eficaz de dispersión tenemos finalmente:

$$d\sigma = 2\pi^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 TV |n_b|^2 (1 + \cos^2 \vartheta) b_i b_k g_{ik}^{-1} d\omega'. \quad (99.7)$$

Así pues, la intensidad de la dispersión difusa, como era de esperar, es proporcional al volumen del cristal. La particularidad característica de esta dispersión es la distribución de su intensidad en la superficie de la mancha. Prescindiendo del factor $(1 + \cos^2 \vartheta)$, prácticamente constante en la mancha dada, vemos que la distribución de la intensidad viene determinada por la expresión $g_{ik}^{-1} b_i b_k$. Esta representa el producto de K^{-2} por una función bastante complicada de la dirección del vector \mathbf{K} respecto de los ejes cristalográficos. En la dispersión cerca del máximo principal, la intensidad de la dispersión difusa es también máxima en el punto $\mathbf{K} = 0$ (la propia expresión (99.7), que se hace infinita para $\mathbf{K} = 0$, claro está, resulta con esto inaplicable). Pero si la condición (97.15) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} = -\pi b^2$ no se cumple, la igualdad $\mathbf{K} = 0$ es imposible y el máximo de la intensidad de la dispersión difusa se presenta para un cierto \mathbf{K} diferente de cero que, en general, no coincide con la posición del máximo de la dispersión estructural. En ambos casos la dispersión difusa da lugar a un fondo cuya intensidad disminuye esencialmente como $1/K^2$, es decir, con una lentitud considerablemente mayor que la intensidad de la raya más acusada que corresponde a la dispersión estructural, y superpuesta a dicho fondo.

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 113. Si la distribución de probabilidades para las magnitudes que fluctúan x_1, x_2, \dots es de la forma

$$\exp(-\frac{1}{2}\lambda_{ik}x_i x_k),$$

se tendrá $\overline{x_i x_k} = \lambda_{ik}^{-1}$. El factor 2 en la fórmula (99.6) se debe a que cada una de las u_{oi} complejas representa el conjunto de dos magnitudes independientes.

APÉNDICE

COORDENADAS CURVILÍNEAS

Presentamos a continuación, como referencia, una serie de fórmulas relativas a las operaciones vectoriales en coordenadas curvilíneas en general y en algunos casos especiales.

En un sistema ortogonal arbitrario de coordenadas curvilíneas u_1, u_2, u_3 , el cuadrado del elemento de longitud tiene la forma

$$dl^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2,$$

donde las h_i son funciones de las coordenadas. El elemento de volumen en estas mismas coordenadas es

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3.$$

Las diferentes operaciones vectoriales se expresan mediante las funciones h_i según las fórmulas que siguen a continuación. Operaciones vectoriales con un escalar:

$$\begin{aligned} (\text{grad } f)_i &= \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i}, \\ \Delta f &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_2 h_3}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \right), \end{aligned}$$

donde la suma se extiende a las permutaciones circulares de los índices 1, 2, 3. Operaciones vectoriales con un vector:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum \frac{\partial}{\partial u_i} (h_2 h_3 A_i), \\ (\text{rot } \mathbf{A})_1 &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 A_2) \right] \end{aligned}$$

(las demás componentes de $\text{rot } \mathbf{A}$ se obtienen por permutación circular de los índices).

Coordenadas cilíndricas r, φ, z.

Elemento de longitud: $dl^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$;

$$h_r = 1, \quad h_\phi = r, \quad h_z = 1.$$

Operaciones vectoriales:

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z},$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\phi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r},$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi},$$

$$(\Delta \mathbf{A})_r = \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi},$$

$$(\Delta \mathbf{A})_\phi = \Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \phi},$$

$$(\Delta \mathbf{A})_z = \Delta A_z.$$

En las expresiones para las componentes del vector $\Delta \mathbf{A}$ se entiende por ΔA_i el resultado de aplicar el operador Δ a la magnitud A_i , considerada al hacerlo como un escalar.

Coordenadas esféricas r, θ, φ.

Elemento de longitud: $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$;

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \sin \theta.$$

Operaciones vectoriales:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi},$$

$$\begin{aligned}
 (\text{rot } \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right], \\
 (\text{rot } \mathbf{A})_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi), \\
 (\text{rot } \mathbf{A})_\phi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right], \\
 (\Delta \mathbf{A})_r &= \Delta A_r - \frac{2}{r^2} \left[A_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right], \\
 (\Delta \mathbf{A})_\theta &= \Delta A_\theta + \frac{2}{r^2} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right], \\
 (\Delta \mathbf{A})_\phi &= \Delta A_\phi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{2 \sin \theta} \right].
 \end{aligned}$$

ÍNDICE ALFABÉTICO

- Absorción de ondas electromagnéticas por partículas pequeñas, 359 ss
- Actividad óptica natural, 295
- Ángulo de Brewster, 326
- Antiferromagnéticos, 139
- Atracción molecular entre cuerpos sólidos, 432 s
- Autoinductancia, 157
- de circuitos lineales, 162 ss
 - de superconductores, 204
- Binormal, 384
- Birradial, 384
- Calidad de un resonador, 345
- Campo cuasiestático, 221, 428
- Campo bidimensional, 14
- crítico, 206
 - despolarizante, 53
 - eléctrico constante de conductores, 1 ss
 - — — condiciones de contorno, 2 s, 47 s, 111
 - — — energía del, 3 ss
 - — — en dieléctricos, 43 ss
 - — — condiciones de contorno, 44 ss
 - — — termodinámico de, 57 ss
- Véase también Campo electromagnético
- electromagnético, condiciones de contorno, 323, 332 s, 343
- — — quasi-estático (VII), 221 ss
 - — — en dieléctricos, 285 ss
 - — — fluctuaciones, 424 ss
 - — — movimiento en un medio, 289 ss
 - — — variable, 294 ss
 - — magnético, 135
 - — condiciones de contorno, 137, 222 s
 - — conductor móvil en, 243 ss
- — constante (IV), 135 ss
 - — de corriente constante, 142 ss
 - — movimiento de un líquido en un, 253 ss
 - — fuerzas sobre una substancia, 168 ss, 262
 - — termodinámica del, 151 ss
- Véase también Campo electromagnético
- Capacidad, 4, 9 f, 23 s, 74, 239 ss
- coeficientes, 5, 7, 9
 - del elipsoide conductor, 28
 - de una esfera conductora, 74
 - mutua, 9, 20
- Cargas en un dieléctrico, 81
- extrañas, 44
- Causalidad, 306, 309
- Cilindro conductor, 19, 20, 21, 149, 231
- dieléctrico, 51, 68, 69
- Clases cristalográficas magnéticas, 141
- Coeficiente de absorción, 314
- de reflexión, 325, 328 ss, 335
- Coeficientes cinéticos, 114
- simetría de, 114, 119, 370, 390, 398 s
- Coeficiente de desmagnetización, 52, 202
- de despolarización, 31
 - de extinción diferencial, 450
 - — total, 450
- giromagnéticos, 173
- Coeficiente Peltier, 129
- Thomson, 129
 - de inducción electrostática, 5, 7
- Condición de Lorentz, 412
- Conductividad eléctrica, 111
- — tensor, 112, 116
- Conductores, 1 ss
- cilíndricos, 19, 20, 21
 - disco circular, 32, 33
 - electrostática de (I), 1 ss

- Conductores, electrostricción, 39
 - elíptico, 24 ss
 - esférico, 17 s, 40 s, 115 s, 229 s, 252
 - fuerzas sobre los, 37 ss, 74, 169 ss, 262
 - movimiento en un campo magnético, 243 ss
 - turbulento, 278 ss
- Constante de Hall, 118
- dieléctrica, véase Permeabilidad dieléctrica
- Constantes opticoelásticas, 389
- Coordenadas curvilíneas, 481
 - elipsoidales, 25
- Coordenadas esfenoidales achatadas, 26
 - alargadas, 27
- Corriente campo eléctrico creado, 111
 - conducción, 143
 - constante (III), 111 ss
 - campo magnético, 142 ss
 - corriente de Foucault, 225 ss
 - densidad, 111
 - eléctrica, 1
 - en un cristal, 467
 - en un conductor en movimiento, 244
 - excitación por aceleración, 249 ss
 - lineal, 146
 - molecular, 143
 - superconductibilidad, 202 ss
 - superficial, 138
- Corrientes de Foucault, 225
 - autoinductancia, 162 ss
 - fluctuaciones de las, 423 s
 - inductancia mutua, 158 ss
 - lineales, 146 ss, 158 ss, 234 ss, 249, 252
- Cristales biaxicos, 71, 382 ss
 - dieléctricos, 70, 469 ss
 - enantiomorfos, 402
 - naturalmente activo, 402
 - piezoelectrónico, 91
 - piroelectrónico, 72
 - propiedades dieléctricas, 69, 369
 - propiedades magnéticas, 138
 - rayos X, difracción de los, 467 ss
 - teoría general, 467 ss
 - uniáxicos, 71, 144 ss
 - — negativo, 379
 - — positivo, 379
- Densidad de corriente de conducción, 143
- Desigualdades termodinámicas, 97 ss
- Desplazamiento eléctrico, 44
- Dieléctrico, 1
 - condiciones de contorno, 292 s
- electrostático de (II), 43 ss
- electrostricción de isotropos, 66 ss
- energía libre total, 62 ss
- en movimiento, 289 ss
- termodinámica de los, 57 ss
- Difracción de rayos X en cristales (XV), 467 ss
 - teoría general, 467 ss
 - por una cuña, 360 ss
 - por una pantalla plana, 365 ss
- Dirección de imanación fácil, 179
- Disco conductor, 32, 33
 - dieléctrico, 51, 68, 69, 74
 - superconductor, 206
- Discontinuidades de contacto, 267
 - de rotación, 269
 - estabilidad, 270
 - en un fluido magnético, 266 ss
 - tangencial, 267
- Dispersión antisimétrica, 448
 - anti-Stokes, 441
 - combinación, 453
 - de las ondas, 441
 - de ondas electromagnéticas (XIV), 441
 - — — por pequeñas partículas, 354 ss
 - escalar, 448
 - principio de equilibrio detallado, 448 ss
 - por fluctuaciones, 454 ss
 - por pequeño cambio de frecuencia, 451
 - Reyleigh, en líquidos y gases, 453
 - sección eficaz de dispersión, 355 ss
 - simétrica, 448
 - Stokes, 441
 - térmica difusa de los rayos X, 478 ss
- Distribución de las cargas sobre los conductores, 32, 33
 - — sobre un disco circular conductor, 32, 33
 - — — sobre un elíptico conductor, 33
- Doble refracción circular, 394
- Doblete de Mandel'shtam-Brillouin, 457
- Dominios, 105 ss, 182 ss, 189 ss, 213 ss
- Ecuación de Fresnel, 374, 382 ss
 - de Lane, 470
- Ecuaciones de Bragg y Wulff, 471
 - de Maxwell, 2, 135, 371, 411
 - de los telegrafistas, 353
 - de ondas magnéticas (IX), 285 ss
- Efecto Barnett, 172
 - Cotton-Mouton, 396
 - Einstein-de Haas, 172
 - electrocalórico, 67 ss

- Ettingshausen, 131
- de Faraday, 394
- Hall, 117
- Kerr, 387
- Leduc-Righi, 131
- de Maxwell, 390
- Nernst, 131
- Peltier, 129 s
- Raman-Lendsberg-Mandel'shtam, 453
- Skin, 162, 232 ss
- Stewart-Tolman, 252
- Thomson, 128
- Efectos magneto-ópticos, 389 ss
 - termagalvanomagnéticos, 130 s
- Eje ferroeléctrico, 100
 - óptico, 379, 384
- Ejes dieléctricos principales, 373
 - ópticos de rayos, 384
- Electrocapilaridad, 124 s
- Electrostática de conductores, 39 ss
 - de dieléctricos, 66 ss
- Electrostricción de conductores, 39 ss
 - de dieléctricos, 64 ss
- Elementos galvánicos, 122 ss
- Elipsoide conductora, 24 ss
 - dieléctrica, 50 ss, 67 ss
 - ferromagnética, 188 s
 - superconductora, 202 s, 217
 - de Fresnel, 378
 - dieléctrico, 50 ss, 67
 - tensional, 70
- Energía de dieléctricos, 57 ss, 62 ss, 95 ss
 - de anisotropía magnética, 176, 178, 179 ss
 - de conductores, 3 ss, 148
 - de campos en los medios dispersores, 301 ss
 - en sistemas de corrientes, 156 ss
 - flujo (vector de Poynting), 148, 227, 289, 301, 321, 325, 332, 370
 - en guía de onda, 350 s
 - en onda plana, 313, 372 s
 - en resonador, 344 s
 - interacción, 157
 - libre propia, 157
 - substancias magnéticas, 154 s, 179 ss, 187, 190 f
 - magnetoelástica, 186
- Esfera conductora, 18, 40 s, 74, 115 s, 229 ss, 248 f, 252
 - dieléctrica, 50 s, 54, 73 s, 74, 87, 293 s
- Estado crítico, 99
- Estructura magnética, 139
- Excitación de corrientes por aceleración, 250 ss
- F. e. m., 122
- Fenómeno de difusión, 132 ss
- Fenómenos giromagnéticos, 172 s
 - termoeléctricos, 125 ss
- Ferroeléctricos, 100 ss
 - dominios, 105 s
- Ferromagnéticos, 139
 - cerca del punto de Curie, 175
 - dominios de imanación, 182 ss, 189 ss
 - termodinámica de los, 176
- Ferromagnetismo (V), 175
- Fluctuaciones electromagnéticas (XIII), 423 ss
- Fluido dieléctrico, fuerzas en, 77 ss
- Flujo magnético, 159
- Fórmulas de Fresnel, 324
 - de Kramer y Kronig, 308 ss, 334 s
- Fórmula de Thomson, 241
- Frecuencias ópticas, 295
- Fuerza de los osciladores, 310
 - electromotriz, 122
- Fuerzas eléctricas en los sólidos, 82 ss
- Fuerzas ponderomotrices, 77
- Fuerza termoelectromotriz, 129
- Función de Airy, 339
 - disipativa, 242
- Girotrópico, 390, 399
- Grupos espaciales magnéticos, 140
- Guías de ondas, 347 ss
- Histéresis, 181
- Ional, 319, 374
- Imagen, 11
 - fuerza, 11, 48
- Imágenes, métodos de las, 11
- Imanación, 136
 - dominios donde es espontánea, 182
 - por rotación, 171
- Impedancia, 234 ss
 - matriz, 238
 - superficie, 332 ss, 370 s
- Índice de refracción, 314, 315, 319, 373, 379, 432
- Inducción eléctrica, 44
 - fluctuaciones extrañas, 424
 - — correlaciones, 427 ss
 - unipolar, 247 s
 - eléctrica, 44
 - magnética, 135

- Inducción unipolar, 247 s
 Inductancia auto, 158
 — mutua, 158
 Inversión, método de, 13 s
 — radio de, 14
 — transformación, 14
- Ley de Biot y Savart, 146
 — de Curie-Weiss, 178
 — de Faraday, 246
 — de Joule, 112
 — en un conductor móvil, 244
 — de Ohm, 111, 238
- Magnetoestática y electrostática comparadas, 117, 118, 151 ss, 168 s, 175
 Magnetohidrodinámica (VIII), 253 ss
 Magnetotricción, 186
 Medios girotrópicos, 376, 391 ss
 — transparentes, 316 ss
 — radiación del cuerpo negro, 431 s
 Método de Bragg, 476
 — de Debye y Scherrer, 477
 — de Lane, 475
 — de Powder, 471
 — de rotación, 476
 Momento dipolar cilíndrico conductor, 19, 22 s
 — conductor, 8
 — dieléctrico, 43 s, 65
 — disco plano circular, 33
 — esfera conductora, 19
 — eléctrico, 44
 — magnético, 136
 — en campo variable, 300
- Ondas, electromagnética, véase Ondas electromagnéticas
 — extraordinarias, 379 ss
 — hidromagnética, 262
 — absorción, 265
 — ordinaria, 379
 — principal, 350
 — propagación por la superficie de un líquido, 41
 — tipo magnético, 348
 — choque, véase Ondas de choque
 — de choque en magnetohidrodinámica, 273, 275 ss
 — débiles, 274
 — en campos magnéticos débiles, 274
 Ondas E, 337 s, 348 ss
- Ondas electromagnéticas, 285 ss
 — — absorción de, por pequeñas partículas, 359 s
 — — en medios anisótropos (XI), 369 ss
 — — — extraordinarias, 380 ss
 — — — ordinaria, 380
 — — dispersión (XIV), 441 ss
 — — — por pequeñas partículas, 354
 — — en resonadores, 348 ss
 — — plano de frecuencia constante, 312 ss, 318
 — — — en un medio absorbente, 314
 — — — anisotrópico, 371 ss
 — — — transparente, 313
 — — — homogéneas, 313
 — — — no homogéneas, 313
 — — propagación de las (X), 369 s
 — — — en guías de ondas, 347
 — — — en un medio homogéneo, 336 ss
 — — reflexión y retracción de, 322 ss, 335 s
 — — en medios anisótropos (XI), 369 ss
 — — extraordinarias, 380
 — H, 337, 339 s, 348 ss
 — magnetohidrodinámicas, 262
 — — absorción de las, 265
 — de elipsoide cargado, 33
 — ordinarias, 380
 — principales en guía ondas, 33
 Opalescencia crítica, 460 ss
 Óptica geométrica, 319 ss
- Paso de partículas rápidas a través de la materia (XII), 405
 Pérdidas eléctricas, 302
 — magnéticas, 302
 — de energía para partículas rápidas, 405 ss
 — — caso relativista, 411
 Permeabilidad magnética, 137
 — de cristales, 369
 — — dispersión, 299 ss
 — — propiedades analíticas, 311
 — — tensor, 142
 Permitividad dieléctrica de cristales, 369 ss
 — — dispersión de, 294 ss
 — — de alta frecuencia, 299
 — — de baja frecuencia, 298
 — — de una mezcla, 54 ss
 — — electrostática, 45
 — — propiedades analíticas, 305 ss
 — — tensor, 69, 83 ss, 387 ss, 399, 450 s
 — — variación espacial, 397 ss
- Piezoelectricidad, 72, 84, 87

- Piezomagnetismo, 142
- Piroelectricidad, 72 s
- Placa circular dieléctrica, 51, 68, 69, 74
- Poder de frenado, 408
- Polarización, 43
 - coeficiente, 46
 - de dieléctrico en campo variable, 297
 - de ondas electromagnéticas en un medio anisotrópico, 376
 - en cristales biáxicos, 382
 - en medio girotrópico, 394 ss
 - en óptica geométrica, 321
 - total, ángulo de, 327
- Potencia de detención, 408
- Potencial, contacto, 120
 - eléctrico complejo, 15
 - — escalar, 2 s, 412
 - — vector, 15, 412
 - vector magnético, 143
- Potenciales de contacto, 120
- Polarización dieléctrica, 44
- Principio de Fermat, 320
- Problema Wedge, 16 s
- Profundidad de penetración, 225, 330 s
 - — en un superconductor, 199
- Punto de Curie antiferromagnético, 197 s
 - — antiferromagnético, 197 s
 - — ferroeléctrico, 100
 - — ferromagnético, 175
- Radiación de Cherenkov, 419
 - del cuerpo negro en un medio transparente, 431 s
- Reactancia, 235
- Reflexión total, 328
 - ángulo de, 328
- Refracción cónica externa, 386
 - — interna, 384, 386
- Regiones de transparencia, 303
- Relación de dispersión, 261
- Relaciones de Thomson, 128
- Representación conforme, 15
 - método de, 14 ss
- Resistencia, 235
 - compleja, 234
- Resonadores, 343 ss
- calidad de los, 345
- Sección principal, 380
- Solenoide, 163, 167 s
- Superconductibilidad (VI), 199
 - desaparición de la, 207
 - punto de transición, 199
- Superconductores, autoinductancia, 204
 - campo crítico, 206
 - corrientes en, 200
 - elipsoidal, 202, 217
 - estado intermedio, 212 ss
 - impedancia, 333 s
 - multiplemente conexos, 203 ss
 - propiedades magnéticas, 199 ss
 - rotación, 252
 - termodinámica, 206 ss
- Superficie de los rayos, 374 ss
 - de los vectores de onda, 374 ss, 379, 382 ss, 393 ss
- Susceptibilidad eléctrica, 46
 - — signo de la, 75 s
 - magnética, 137 s
 - — signo de la, 138, 154
- Tensor de constantes elásticas, 90
 - de polarizabilidad, 8, 228
 - dieléctrico, 69; véase también Permitividad dieléctrica
 - momento cuadripolar, 33
 - piezoelectrónico, 89, 91 ss
 - — magnética, 228
 - de tensiones, 77, 84 s
 - — de Maxwell, 36
 - Teorema de reciprocidad, 342 s
 - de Thomson, 8
 - Tiempo de relajación de Debye, 459
 - — maxwelliano, 459
 - Trabajo de extracción, 119
- Vector de Poynting, véase Energía, flujo de
 - rayo, 374 ss
- Velocidad de fase, 260
 - de grupo, 261, 320, 375
 - de la luz en un medio en movimiento, 322 s

