

Las derivadas se toman a entropía constante, puesto que la onda sonora es adiabática. A partir de la relación termodinámica $d\epsilon = Tds - pdV = Tds + + (p/p^2)d\rho$, tenemos $[\partial(\rho\epsilon)/\partial\rho]_s = \epsilon + p/\rho = w$, y la segunda derivada es

$$[\partial^2(\rho\epsilon)/\partial\rho]_s = (\partial w/\partial\rho)_s = (\partial w/\partial p)_s (\partial p/\partial\rho)_s = c^2/\rho.$$

Así pues, la energía de la unidad de volumen del fluido es

$$\rho_0\epsilon_0 + w_0\rho' + \frac{1}{2}c^2\rho'^2/\rho + \frac{1}{2}\rho_0v^2.$$

El primer término ($\rho_0\epsilon_0$) de esta expresión es la energía de la unidad de volumen cuando el fluido está en reposo y no está relacionado con la onda sonora. El segundo término ($w_0\rho'$) es la variación de energía debida a la modificación de la masa del fluido en el volumen unidad. Este término desaparece en la energía total, que se obtiene integrando la energía en el volumen completo del fluido: puesto que la masa total del fluido resulta sin variación, tenemos

$$\int \rho dV = \int \rho_0 dV, \text{ or } \int \rho' dV = 0.$$

Así pues, la variación total de la energía del fluido producida por la onda sonora viene dada por la integral

$$\int (\frac{1}{2}\rho_0v^2 + \frac{1}{2}c^2\rho'^2/\rho_0) dV.$$

El integrando puede considerarse como la densidad E de la energía sonora:

$$E = \frac{1}{2}\rho_0v^2 + \frac{1}{2}c^2\rho'^2/\rho_0. \quad (64.1)$$

Esta expresión toma una forma más sencilla para una onda plana móvil. En dicha onda $\rho' = \rho_0 v/c$ [ver (63.12)] y los dos términos en (64.1) son iguales, de modo que

$$E = \rho_0v^2. \quad (64.2)$$

En general, esta relación no es válida. Puede obtenerse una fórmula semejante únicamente para el promedio (temporal) de la energía sonora total. Se deduce inmediatamente a partir del bien conocido teorema general de la mecánica, que la energía potencial total media de un sistema que realiza oscilaciones pequeñas es igual a la energía cinética media total. Puesto que esta última es, en el caso considerado,

$$\frac{1}{2} \int \rho_0 \overline{v^2} dV,$$

encontramos que la energía sonora total media es

$$\int \bar{E} dV = \int \rho_0 \overline{v^2} dV. \quad (64.3)$$

Si se representa una onda no monocromática por medio de una serie de ondas monocromáticas, la energía media es igual a la suma de las energías medias de las componentes monocromáticas. Por lo tanto, si v esta repre-

sentado con una suma de términos de diversas frecuencias, $\bar{v^2}$ contendrá tanto el cuadrado de cada término como el producto de los términos de frecuencias distintas. Estos productos contienen factores de la forma $e^{i(\omega-\omega')t}$, que son funciones periódicas del tiempo. Pero el valor medio de una función periódica es cero, y, por tanto, estos términos se anulan. Así pues, la energía media contiene sólo términos en los que intervienen los valores cuadráticos medios de las componentes monocromáticas.

A continuación, consideremos un determinado volumen de fluido en el que se propaga el sonido y determinemos el flujo medio de energía a través de la superficie cerrada que limita dicho volumen. La densidad de flujo de energía en el fluido es, según (6.3), $\rho v(v^2/2 + w)$. En el caso presente podemos despreciar el término en v^2 , que es de tercer orden. De aquí que la densidad de flujo de energía media en la onda sonora sea $\bar{\rho v v}$. Sustituyendo $w = w_0 + w'$, tenemos $\bar{\rho v v} = w_0 \bar{\rho v} + \bar{\rho w' v}$. En el caso de una variación pequeña w' de la entalpía tenemos $w' = (\partial w / \partial p)_{s,p} p'$. Puesto que $(\partial w / \partial p)_{s,p} = 1/\rho$, se deduce que $w' = p'/\rho$ y $\bar{\rho v v} = w_0 \bar{\rho v} + \bar{p' v}$. El flujo de energía total a través de la superficie en cuestión es

$$\oint (w_0 \bar{\rho v} + \bar{p' v}) \cdot d\mathbf{f}.$$

Sin embargo, puesto que la cantidad total de fluido en el volumen considerado no varía en valor medio, el promedio temporal del flujo de masa a través de la superficie cerrada debe ser nulo. De aquí que el flujo de energía sea simplemente

$$\oint \bar{p' v} \cdot d\mathbf{f}.$$

Vemos que el flujo de energía sonora media está representado por el vector

$$\bar{\mathbf{q}} = \bar{p' v}. \quad (64.4)$$

Es fácil comprobar que la relación

$$\partial E / \partial t + \operatorname{div}(p' \mathbf{v}) = 0 \quad (64.5)$$

resulta válida. En esta forma la ecuación representa la ley de conservación de la energía sonora tomando el vector $\mathbf{q} = p' \mathbf{v}$ la parte de flujo de energía sonora. Así pues, la expresión es válida no sólo en el caso del flujo medio, sino también para el flujo en un instante cualquiera.

En una onda plana móvil la variación de presión está relacionada con la velocidad por $p' = c \rho_0 v$. Introduciendo el vector unidad \mathbf{n} en la dirección de propagación de la onda (que es la misma que la dirección de la velocidad \mathbf{v}), obtenemos $\mathbf{q} = c \rho_0 v^2 \mathbf{n}$, o sea,

$$\mathbf{q} = c E \mathbf{n}. \quad (64.6)$$

Así pues, la densidad de flujo de energía en una onda sonora plana es igual

a la densidad de energía multiplicada por la velocidad del sonido, resultado que era de esperar.

Consideremos a continuación una onda sonora que, en un instante dado cualquiera, ocupa una región finita del espacio[†] (un *paquete de ondas*), y determinemos el impulso total del fluido en la onda. El impulso de la unidad de volumen del fluido es igual a la densidad del flujo másico $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$. Sustituyendo $\rho = \rho_0 + \rho'$, tenemos $\mathbf{j} = \rho_0\mathbf{v} + \rho'\mathbf{v}$. La variación de densidad está relacionada con la variación de presión por $\rho' = p'/c^2$. Utilizando (64.4), se obtiene, por tanto,

$$\mathbf{j} = \rho_0\mathbf{v} + \mathbf{q}/c^2. \quad (64.7)$$

Puesto que tenemos un flujo potencial en una onda sonora podemos escribir $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi$; debe resaltarse que este resultado no es una consecuencia de las aproximaciones realizadas al deducir las ecuaciones lineales del movimiento en § 63, puesto que una solución tal como $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$ es una solución exacta de las ecuaciones de Euler. Por tanto, tenemos $\mathbf{j} = \rho_0 \mathbf{grad} \phi + \mathbf{q}/c^2$. El impulso total en la onda es igual a la integral $\int \mathbf{j} dV$ extendida a todo el volumen ocupado por la onda. La integral del $\mathbf{grad} \phi$ puede transformarse en una integral de superficie,

$$\int \mathbf{grad} \phi dV = \oint \phi d\mathbf{f},$$

y es cero, puesto que ϕ vale cero fuera del volumen ocupado por la onda. Así pues, el impulso total de la onda es

$$\int \mathbf{j} dV = (1/c^2) \int \mathbf{q} dV. \quad (64.8)$$

Esta magnitud no es, en general, cero. La existencia de un impulso total no nulo significa que existe una transferencia de materia. Por tanto, se tiene la conclusión de que la propagación de un paquete de ondas sonoras está acompañado por la transferencia de fluido. Este es un efecto de segundo orden (puesto que \mathbf{q} es una magnitud de segundo orden).

Finalmente, calculemos el valor medio de la variación de presión p' en una onda sonora. En primera aproximación, correspondiente a las ecuaciones linearizadas usuales del movimiento, p' es una función que varía de signo periódicamente y el valor medio de p' es cero. Sin embargo, este resultado deja de ser válido si pasamos a aproximaciones más altas. Si tomamos únicamente magnitudes de segundo orden, p' puede expresarse en función de magnitudes calculadas a partir de las ecuaciones sonoras lineales, de modo que no es necesario resolver directamente las ecuaciones no lineales del movimiento obtenidas cuando se tienen en cuenta términos de orden superior.

[†] No limitada por paredes sólidas.

Partiremos de la ecuación de Bernoulli: $w + v^2/2 + \partial\phi/\partial t = \text{constante}$, y la promediaremos respecto al tiempo. El valor medio de la derivada temporal $\partial\phi/\partial t$ es cero.[†] Haciendo también $w = w_0 + w'$ e incluyendo w_0 dentro de la constante, obtenemos $\overline{w'} + \overline{v^2/2} = \text{constante}$. Supongamos que la onda se propaga en un volumen infinito de fluido, pero que se amortigua en el infinito, es decir, que v , w' , etc., son cero en el infinito. Puesto que la constante es la misma en todo el espacio, evidentemente debe ser nula, de modo que

$$\overline{w'} + \frac{1}{2}\overline{v^2} = 0. \quad (64.9)$$

A continuación, desarrollaremos w' en potencias de p' y tomaremos únicamente los términos hasta el segundo orden:

$$w' = (\partial w/\partial p)_s p' + \frac{1}{2}(\partial^2 w/\partial p^2)_s p'^2;$$

como $(\partial w/\partial p)_s = 1/\rho$, tenemos

$$w' = \frac{p'}{\rho_0} - \frac{p'^2}{2\rho_0^2} \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_s = \frac{p'}{\rho_0} - \frac{p'^2}{2c^2\rho_0^2}.$$

Sustituyendo esta expresión en (64.9) se tiene

$$\overline{p'} = -\frac{1}{2}\rho_0\overline{v^2} + \overline{p'^2}/2\rho_0^2 = -\frac{1}{2}\rho_0\overline{v^2} + \overline{p'^2}c^2/2\rho_0, \quad (64.10)$$

que determina el valor medio requerido. La expresión del segundo miembro es una magnitud de segundo orden y se calcula utilizando los valores de p' y v obtenidos a partir de la solución de la ecuación linealizada del movimiento. La densidad media es

$$\overline{\rho'} = (\partial\rho/\partial p_0)_s \overline{p'} + \frac{1}{2}(\partial^2\rho/\partial p_0^2)_s \overline{p'^2}. \quad (64.11)$$

Si la onda puede considerarse como una onda plana móvil en el volumen referido, entonces $v = c\rho'/\rho_0$, de modo que $\overline{v^2} = c^2\overline{\rho'^2}/\rho_0^2$ y la expresión (64.10) es cero, es decir, la variación de presión media en una onda plana es un efecto de orden superior al segundo. Sin embargo, la variación de densidad $\overline{\rho'} = 1/2(\partial^2\rho/\partial p_0^2)_s \overline{p'^2}$ no es cero. (Podemos mencionar que la derivada $(\partial^2\rho/\partial p_0^2)_s$ de hecho es siempre negativa y, por lo tanto, $\overline{\rho'} < 0$ en una onda móvil.) Con la misma aproximación, tenemos para el valor medio del tensor de densidad de flujo del impulso en una onda plana móvil $\overline{p}\delta_{ik} + \overline{\rho v_i v_k} = p_0\delta_{ik} + \overline{\rho_0 v_i v_k}$. El primer término es la presión de equilibrio y no está rela-

[†] Por la definición general de valor medio, tenemos como valor medio de la derivada de cualquier función $f(t)$:

$$\overline{df/dt} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{df}{dt} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f(T) - f(-T)}{2T}.$$

Si la función $f(t)$ permanece finita para todo t , el límite es cero, de modo que $df/dt = 0$.

cionada con la onda sonora. En el segundo término se introduce el vector unidad \mathbf{n} en la dirección de \mathbf{v} (que es la misma que la dirección de propagación de la onda), y, utilizando (64.2), obtenemos para la densidad de flujo del impulso en una onda sonora

$$\bar{\Pi}_{ik} = \bar{E} n_i n_k. \quad (64.12)$$

Si la onda se propaga en la dirección x , únicamente la componente $\bar{\Pi}_{xx} = \bar{E}$ es no nula. Así pues, en esta aproximación existe en la onda sonora plana sólo una componente x del flujo del impulso medio y esta componente se transmite en la dirección x .

§ 65. Reflexión y refracción de ondas sonoras

Cuando una onda sonora incide sobre el límite de separación entre dos medios fluidos diferentes, sufre una reflexión y una refracción. Esto significa que, además de la onda incidente aparecen otras dos más; una de ellas (la *onda reflejada*) se propaga hacia atrás en el propio medio inicial desde la superficie de separación, y la otra (la *onda refractada*) se propaga por el interior del segundo medio. En consecuencia, el movimiento en el primer medio es una combinación de dos ondas (la incidente y la reflejada), mientras que en el segundo medio solamente existe uno, el de la onda refractada.

La relación entre estas tres ondas está determinada por las condiciones límites en la superficie de separación, que exigen que las presiones y las componentes de velocidad normal sean iguales.

Consideremos la reflexión y la refracción de una onda longitudinal monocromática en una superficie plana que separa dos medios, la cual consideraremos como plano yz . Es fácil ver que las tres ondas tienen la misma frecuencia ω y los mismos componentes k_y, k_z del vector de onda, pero no el mismo componente k_x perpendicular al plano de separación. Efectivamente, en un medio homogéneo, una onda monocromática con valor constante de \mathbf{k} y ω satisface las ecuaciones del movimiento. La presencia de un límite introduce solamente unas condiciones en la frontera, que en el caso considerado se aplican en $x = 0$, es decir, que no dependen ni del tiempo ni de las coordenadas y, z . De aquí que la dependencia de la solución respecto a t y z permanezca la misma en todo el espacio y en todo el tiempo, es decir, ω, k_y, k_z son los mismos que en la onda incidente.

A partir de este resultado podemos deducir inmediatamente las relaciones que dan las direcciones de propagación de las ondas reflejadas y refractadas. Supongamos que el plano de la onda incidente es el plano xy . Entonces, $k_z = 0$ en la onda incidente y lo mismo debe ser cierto en las ondas reflejada y refractada. Así pues, las direcciones de propagación de las tres ondas son coplanares.

Sea θ el ángulo que forman la dirección de propagación de la onda y el eje x . Entonces, a partir de la igualdad $k_y = (\omega/c) \operatorname{sen} \theta$ para las ondas incidente y reflejada, se deduce que

$$\theta_1 = \theta_1', \quad (65.1)$$

es decir, el ángulo de incidencia θ_1 es igual al ángulo de reflexión θ_1' . A partir de una ecuación semejante para las ondas incidente y refractada, se deduce que

$$\operatorname{sen} \theta_1 / \operatorname{sen} \theta_2 = c_1 / c_2, \quad (65.2)$$

que relaciona el ángulo de incidencia θ_1 con el ángulo de refracción θ_2 (siendo c_1 y c_2 las velocidades del sonido en ambos medios).

Con objeto de obtener una relación cuantitativa entre las intensidades de las tres ondas, escribiremos los potenciales de velocidad respectivos en la forma

$$\begin{aligned}\phi_1 &= A_1 \exp[i\omega\{(x/c_1) \cos \theta_1 + (y/c_1) \operatorname{sen} \theta_1 - t\}], \\ \phi_1' &= A_1' \exp[i\omega\{(-x/c_1) \cos \theta_1 + (y/c_1) \operatorname{sen} \theta_1 - t\}], \\ \phi_2 &= A_2 \exp[i\omega\{(x/c_2) \cos \theta_2 + (y/c_2) \operatorname{sen} \theta_2 - t\}].\end{aligned}$$

En la superficie de separación ($x = 0$), la presión ($p = -\rho \partial \phi / \partial t$) y las velocidades normales ($v_x = \partial \phi / \partial x$) en los dos medios deben ser iguales; estas condiciones conducen a las ecuaciones

$$\rho_1(A_1 + A_1') = \rho_2 A_2, \quad \frac{\cos \theta_1}{c_1}(A_1 - A_1') = \frac{\cos \theta_2}{c_2} A_2.$$

Se define el *coeficiente de reflexión R* como el cociente de las densidades de flujo de energía media (temporales) en las ondas reflejada e incidente. Puesto que la densidad de flujo de energía en una onda plana es $c \rho v^2$, tenemos $R = c_1 \rho_1 v_1'^2 / c_1 \rho_1 v_1^2 = |A_1'|^2 / |A_1|^2$. Un cálculo sencillo da

$$R = \left(\frac{\rho_2 \operatorname{tg} \theta_2 - \rho_1 \operatorname{tg} \theta_1}{\rho_2 \operatorname{tg} \theta_2 + \rho_1 \operatorname{tg} \theta_1} \right)^2. \quad (65.3)$$

Los ángulos θ_1 y θ_2 están relacionados a través de (65.2); expresando θ_2 en función de θ_1 , podemos poner el coeficiente de reflexión en la forma

$$R = \left[\frac{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 - \rho_1 \sqrt{(c_1^2 - c_2^2 \operatorname{sen}^2 \theta_1)}}{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 + \rho_1 \sqrt{(c_1^2 - c_2^2 \operatorname{sen}^2 \theta_1)}} \right]^2. \quad (65.4)$$

En el caso de incidencia normal ($\theta_1 = 0$), esta fórmula nos da simplemente

$$R = \left(\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} \right)^2. \quad (65.5)$$

En el caso de un ángulo de incidencia tal que

$$\operatorname{tg}^2 \theta_1 = \frac{\rho_2^2 c_2^2 - \rho_1^2 c_1^2}{\rho_1^2 (c_1^2 - c_2^2)} \quad (65.6)$$

el coeficiente de reflexión es cero, es decir, la onda se refracta totalmente. Esto puede suceder si $c_1 > c_2$ pero $\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$, o bien si ambas desigualdades se invierten.

PROBLEMA

Determinar la presión ejercida por una onda sonora en el límite de separación de dos fluidos.

Solución. La suma de los flujos de energía total en las ondas reflejada y refractada deben igualar al flujo de energía incidente. Tomando el flujo de energía por unidad de área de la superficie de separación, podemos escribir esta condición en la forma $c_1 E_1 \cos \theta_1 = c_1 E'_1 \cos \theta_1 + c_2 E_2 \cos \theta_2$, en donde E_1 , E'_1 y E_2 son las densidades de energía de las tres ondas. Introduciendo el coeficiente de reflexión $R = \bar{E}'_1 / \bar{E}_1$, tenemos, por tanto,

$$\bar{E}_2 = \frac{c_1 \cos \theta_1}{c_2 \cos \theta_2} (1 - R) \bar{E}_1.$$

La presión requerida p se determina como la componente x del impulso perdido por unidad de tiempo por la onda sonora (y por unidad de área de la frontera). Utilizando la expresión (64.12) para el tensor de densidad de flujo del impulso de una onda sonora, tenemos

$$p = \bar{E}_1 \cos^2 \theta_1 + \bar{E}'_1 \cos^2 \theta_1 - \bar{E}_2 \cos^2 \theta_2.$$

Sustituyendo el valor de \bar{E}_2 , e introduciendo R y utilizando (65.2), obtenemos

$$p = \bar{E}_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 [(1 + R) \cot \theta_1 - (1 - R) \cot \theta_2].$$

En el caso de incidencia normal ($\theta_1 = 0$), tenemos, utilizando (65.5),

$$p = 2\bar{E}_1 \left[\frac{\rho_1^2 c_1^2 + \rho_2^2 c_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 c_1^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2} \right].$$

§ 66. Acústica geométrica

Una onda plana tiene la propiedad distintiva de que su dirección de propagación y su amplitud son las mismas en todo el espacio. Una onda sonora arbitraria, como es natural, no posee esta propiedad. Sin embargo, pueden presentarse casos en donde una onda sonora que no es plana puede todavía considerarse como plana en una región pequeña del espacio. Para que esto sea así, es evidentemente necesario que la amplitud y la dirección de la propagación varíen únicamente de modo ligero en distancias del orden de la longitud de onda.

Si esta condición es válida, podemos introducir la idea de los *rayos*, que son líneas tales que la tangente a las mismas en un punto cualquiera coincide con la dirección de propagación; y podemos entonces decir que el sonido se propaga a lo largo de los rayos, ignorando su naturaleza ondulatoria. El estudio de las leyes de la propagación del sonido en estos casos es una tarea de la *acústica geométrica*. Podemos decir que la acústica geométrica corresponde al límite de longitudes de ondas pequeñas, $\lambda \rightarrow 0$.

Deduzcamos la ecuación básica de la acústica geométrica, que determina la dirección de los rayos. Escribamos el potencial de velocidades de la onda como

$$\phi = ae^{i\psi}. \quad (66.1)$$

En el caso en que la onda no es plana, pero puede aplicarse la acústica geométrica, la amplitud a es una función de variación lenta de las coordenadas y del tiempo, mientras que la fase de la onda ψ es «casi lineal» (recordemos que en una onda plana $\psi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha$, siendo \mathbf{k} y ω constantes). En regiones pequeñas del espacio y en intervalos cortos de tiempo, la fase ψ puede desarrollarse en serie; hasta los términos de primer orden tenemos

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{grad} \psi + t \partial \psi / \partial t.$$

De acuerdo con el hecho de que una región pequeña del espacio (y durante intervalos breves de tiempo), la onda puede considerarse como plana, definiremos el vector de onda y la frecuencia en cada punto como

$$\mathbf{k} = \partial \psi / \partial \mathbf{r} \equiv \mathbf{grad} \psi, \quad \omega = - \partial \psi / \partial t. \quad (66.2)$$

La magnitud ψ se denomina *eikonal*.

En una onda sonora tenemos $\omega^2/c^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Sustituyendo (66.2), obtenemos la ecuación básica de la acústica geométrica:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = 0. \quad (66.3)$$

Si el fluido no es homogéneo, el coeficiente $1/c^2$ es una función de las coordenadas.

Como sabemos, a partir de la mecánica, el movimiento de las partículas materiales puede determinarse mediante la ecuación de Hamilton-Jacobi, la cual, como (66.3), es una ecuación diferencial parcial de primer orden. La magnitud análoga a ψ es la acción S de la partícula y las derivadas de la acción determinan el impulso $\mathbf{p} = \partial S / \partial \mathbf{r}$ y la función de Hamilton (la energía) de la partícula $H = - \partial S / \partial t$; estas fórmulas son semejantes a (66.2). También sabemos que la ecuación de Hamilton-Jacobi es equivalente a las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\mathbf{p}} = - \partial H / \partial \mathbf{r}, \quad \mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \partial H / \partial \mathbf{p}.$$

A partir de la analogía anterior, entre la mecánica de una partícula material y la acústica geométrica, podemos escribir a continuación unas ecuaciones semejantes para los rayos:

$$\dot{\mathbf{k}} = -\partial\omega/\partial\mathbf{r}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}. \quad (66.4)$$

En un medio homogéneo e isótropo $\omega = ck$ con c constante, de modo que $\dot{\mathbf{k}} = 0$, $\dot{\mathbf{r}} = c\mathbf{n}$ (siendo \mathbf{n} un vector unidad en la dirección de \mathbf{k}), es decir, los rayos se propagan en líneas rectas con una frecuencia constante ω , como era de esperar.

Como es natural, la frecuencia permanece constante a lo largo de un rayo en todos los casos en que la propagación del sonido se produce en condiciones estacionarias, es decir, las propiedades del medio en cada punto del espacio no varían con el tiempo. En el caso de la derivada temporal total de la frecuencia, que nos da su variación respecto al tiempo a lo largo de un rayo, tenemos $d\omega/dt = \partial\omega/\partial t + \dot{\mathbf{r}} \cdot \partial\omega/\partial\mathbf{r} + \dot{\mathbf{k}} \cdot \partial\omega/\partial\mathbf{k}$. Al sustituir (66.4), se anulan los últimos dos términos, y en un estado estacionario $\partial\omega/\partial t = 0$, de modo que $d\omega/dt = 0$.

En la propagación estacionaria del sonido en un medio inhomogéneo en reposo $\omega = ck$, en donde c es una función dada de las coordenadas. Las ecuaciones (66.4) dan

$$\dot{\mathbf{r}} = c\mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{k}} = -k \mathbf{grad} c. \quad (66.5)$$

El módulo del vector \mathbf{k} varía a lo largo de un rayo de modo sencillo, de acuerdo con $k = \omega/c$ (siendo ω constante). Para determinar la variación de la dirección de \mathbf{n} pongamos $\mathbf{k} = \omega n \mathbf{c}$ en la segunda de las ecuaciones (66.5): $\omega \dot{\mathbf{n}}/c - (\omega n/c^2)(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{grad} c) = -k \mathbf{grad} c$, de aquí que $d\mathbf{n}/dt = -\mathbf{grad} c + n(\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} c)$. Introduciendo el elemento de longitud a lo largo del rayo $dl = c dt$, podemos volver a escribir esta ecuación

$$d\mathbf{n}/dl = -(1/c) \mathbf{grad} c + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} c)/c. \quad (66.6)$$

Esta ecuación determina la forma de los rayos; \mathbf{n} es un vector unidad tangencial a un rayo.[†]

Si se resuelve la ecuación (66.3) y el eikonal ψ es una función conocida de las coordenadas y del tiempo, podemos también encontrar entonces la distribución de la intensidad del sonido en el espacio. En condiciones estacionarias, viene dada por la ecuación $\operatorname{div} \mathbf{q} = 0$ (siendo \mathbf{q} la densidad de flujo de la energía sonora), que debe ser válida en todo el espacio, excepto en las fuentes de sonido. Haciendo $\mathbf{q} = cE\mathbf{n}$, en donde E es la densidad de energía

[†] Como sabemos, a partir de la geometría diferencial, la derivada $d\mathbf{n}/dl$ a lo largo del rayo es igual a \mathbf{N}/R , siendo \mathbf{N} un vector unidad a lo largo de la normal principal y R el radio de curvatura del rayo. La expresión del segundo miembro de (66.6) es, aparte de un factor $1/c$, la derivada de la velocidad del sonido a lo largo de la normal principal; de aquí que podamos escribir la ecuación como $1/R = -(1/c) \mathbf{N} \cdot \mathbf{grad} c$. Los rayos se desvian hacia la región en donde c es menor.

del sonido [ver (64.6)], y recordando que \mathbf{n} es un vector unidad en la dirección de $\mathbf{k} = \mathbf{grad} \psi$, obtenemos la ecuación

$$\operatorname{div}(cE \mathbf{grad} \psi / |\mathbf{grad} \psi|) = 0, \quad (66.7)$$

que determina la distribución de E en el espacio.

La segunda fórmula (66.4) da la velocidad de propagación de las ondas a partir de la dependencia conocida de la frecuencia con los componentes del vector de onda. Esta es una fórmula muy importante, que es válida no sólo para las ondas sonoras, sino para todas las ondas (por ejemplo, ya lo hemos aplicado a las ondas de gravedad en § 12). Daremos ahora otra deducción de esta fórmula que pone en evidencia el significado de la velocidad que se define en ella. Consideremos un *paquete de ondas* que ocupa una región finita determinada del espacio. Admitamos que su composición espectral incluye componentes monocromáticos, cuyas frecuencias están comprendidas sólo en un pequeño intervalo; lo mismo es cierto para los componentes de sus vectores de onda. Sea ω una cierta frecuencia media del paquete de onda y \mathbf{k} un cierto vector de onda medio. Entonces, en un instante inicial concreto, el paquete de ondas está descrito por una función de la forma

$$\phi = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})f(\mathbf{r}). \quad (66.8)$$

La función $f(\mathbf{r})$ es apreciablemente distinta de cero únicamente en una región que es pequeña (aunque sea grande en comparación con la longitud $1/k$). Su desarrollo en forma de integrales de Fourier contiene, por las hipótesis anteriores, componentes de la forma $\exp(ir \cdot \Delta\mathbf{k})$, siendo $\Delta\mathbf{k}$ pequeña.

Así pues, cada componente monocromático es, en el instante inicial,

$$\phi_{\mathbf{k}} = \text{constante} \times \exp[i(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}]. \quad (66.9)$$

La frecuencia correspondiente es $\omega(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k})$ (recordemos que la frecuencia es una función del vector de onda). De aquí que la misma componente tenga en el instante t la forma

$$\phi_{\mathbf{k}} = \text{constante} \times \exp[i(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r} - i\omega(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k})t].$$

Utilizaremos el hecho de que $\Delta\mathbf{k}$ es pequeño y desarrollaremos $\omega(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k})$ en serie, tomando únicamente los dos primeros términos: $\omega(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}) = \omega + (\partial\omega/\partial\mathbf{k}) \cdot \Delta\mathbf{k}$, en donde $\omega = \omega(\mathbf{k})$ es la frecuencia correspondiente al vector de onda medio. Entonces, $\phi_{\mathbf{k}}$ se transforma en

$$\phi_{\mathbf{k}} = \text{constante} \times \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \exp[i\Delta\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - t\partial\omega/\partial\mathbf{k})]. \quad (66.10)$$

Si ahora sumamos todos los componentes monocromáticos, con todos los valores de $\Delta\mathbf{k}$ que se presentan en el paquete de ondas, vemos a partir de (66.9) y (66.10) que el resultado es

$$\phi = \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]f(\mathbf{r} - t\partial\omega/\partial\mathbf{k}), \quad (66.11)$$

siendo f la misma función que en (66.8). Comparando con (66.8) se ve que,

después de un tiempo t , la distribución de amplitud se ha trasladado como un todo a través de una distancia $t\partial\omega/\partial\mathbf{k}$; el coeficiente exponencial de f en (66.11) influye únicamente en la fase. En consecuencia, la velocidad del paquete de ondas es

$$\mathbf{U} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}. \quad (66.12)$$

Esta fórmula da la velocidad de propagación para cualquier dependencia de ω respecto a \mathbf{k} .[†] Cuando $\omega = ck$, con c constante, se obtiene naturalmente el resultado ordinario $U = \omega/k = c$. En general, cuando $\omega(\mathbf{k})$ es una función arbitraria, la velocidad de propagación es una función de la frecuencia y la dirección de propagación puede no ser la misma que la del vector de onda.

PROBLEMA

Determinar la variación con la altitud de la amplitud del sonido que se propaga en una atmósfera isotérmica sometida sólo a la gravedad.

Solución. En una atmósfera isotérmica (considerada como un gas perfecto) la velocidad del sonido es constante. La densidad del flujo de la energía disminuye, evidentemente, a lo largo de un rayo en proporción inversa al cuadrado de la distancia r desde la fuente o foco: $c\rho v^2 \sim 1/r^2$. De aquí se deduce que la amplitud de las fluctuaciones de velocidad de la onda sonora varía a lo largo de un rayo inversamente como $r\sqrt{\rho}$; de acuerdo con la fórmula barométrica, $\rho \sim \exp(-\mu gz/RT)$, siendo z la altitud, μ el peso molecular del gas y R la constante de los gases.

§ 67. Propagación del sonido en un medio móvil

La relación $\omega = ck$ entre las frecuencias y el número de ondas es válida únicamente para la onda sonora monocromática que se propaga en un medio en reposo. No es difícil obtener una relación semejante para una onda que se propaga en un medio móvil (y que se observa en un sistema de coordenadas fijo).

Consideremos un flujo homogéneo de velocidad \mathbf{u} . Tomemos un sistema fijo K de coordenadas x, y, z , y además un sistema K' de coordenadas x', y', z' que se mueve con velocidad \mathbf{u} respecto a K . En el sistema K' el fluido está

[†] La velocidad definida por (66.12) se denomina *velocidad de grupo* de la onda y el cociente ω/k *velocidad de fase*. Sin embargo, debe recordarse que la velocidad de fase no corresponde a ninguna propagación física real.

Respecto a la deducción dada aquí debe resaltarse que el movimiento del paquete de ondas sin cambio de forma (es decir, sin variación en la distribución espacial de la amplitud), expresada por (66.11), es aproximada y se obtiene como resultado de la hipótesis de que el intervalo $\Delta\mathbf{k}$ es pequeño. En general, cuando U depende de ω , un «paquete de ondas» se «suaviza» durante su propagación y la región del espacio que ocupa aumenta de tamaño. Puede demostrarse que esta suavización es proporcional al valor al cuadrado del intervalo $\Delta\mathbf{k}$ de los vectores de onda que contribuyen a la composición del paquete de ondas.

en reposo y una onda monocromática tiene la forma normal $\phi = \text{constante} \times \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - kct)]$. El radio vector \mathbf{r}' en el sistema K' está relacionado con el radio vector \mathbf{r} en el sistema K por $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$. De aquí que, en el sistema fijo de coordenadas, la onda tenga la forma $\phi = \text{constante} \times \exp\{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - (kc + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u})t]\}$. El coeficiente de t en el exponente es la frecuencia ω de la onda. Así pues, la frecuencia en un medio móvil está relacionada con el vector de onda \mathbf{k} por

$$\omega = ck + \mathbf{u} \cdot \mathbf{k}. \quad (67.1)$$

La velocidad de propagación es

$$\partial\omega/\partial\mathbf{k} = c\mathbf{k}/k + \mathbf{u}; \quad (67.2)$$

y es la suma vectorial de la velocidad c en la dirección de \mathbf{k} con la velocidad \mathbf{u} , según la cual el sonido es «transportado» por el fluido móvil.

Utilizando la fórmula (67.1), podemos investigar lo que se denomina el *efecto Doppler*: la frecuencia del sonido, percibida por un observador móvil respecto a la fuente o foco, no es la misma que la frecuencia de oscilación de dicho foco.

Supongamos que el sonido emitido por una fuente en reposo (respecto al medio) es recibido por un observador que se mueve con velocidad \mathbf{u} . En un sistema K' en reposo respecto al medio tenemos $k = \omega_0/c$, en donde ω_0 es la frecuencia de oscilación de la fuente. En un sistema K móvil con el observador, el medio se mueve con velocidad $-\mathbf{u}$, y la frecuencia del sonido es, según (67.1), $\omega = ck - \mathbf{u} \cdot \mathbf{k}$. Introduciendo el ángulo θ entre la dirección de la velocidad \mathbf{u} y la del vector de onda \mathbf{k} y poniendo $k = \omega_0/c$, vemos que la frecuencia del sonido recibido por el observador móvil es

$$\omega = \omega_0[1 - (u/c) \cos \theta]. \quad (67.3)$$

El caso opuesto, en cierta medida, es la propagación en un medio en reposo de una onda sonora emitida a partir de un foco móvil. Supongamos ahora que \mathbf{u} es la velocidad del foco. Ahora pasaremos desde el sistema fijo de coordenadas a un sistema K' móvil con el foco; en el sistema K' el fluido se mueve con la velocidad $-\mathbf{u}$. En K' , en donde el foco está en reposo, la frecuencia de la onda sonora emitida debe ser igual a la frecuencia ω_0 de las oscilaciones del foco. Variando el signo de \mathbf{u} en (67.1) e introduciendo el ángulo θ entre las direcciones de \mathbf{u} y \mathbf{k} , tenemos $\omega_0 = ck[1 - (u/c) \cos \theta]$. Sin embargo, en el sistema fijo original K , la frecuencia y el vector de onda están relacionados por $\omega = ck$. Así pues, tenemos

$$\omega = \omega_0/[1 - (u/c) \cos \theta]. \quad (67.4)$$

Esta fórmula da la relación existente entre la frecuencia ω_0 de las oscilaciones de un foco móvil y la frecuencia ω del sonido oído por un observador en reposo.

Si el foco se mueve alejándose del observador, el ángulo θ formado por su velocidad y la dirección del observador está comprendido en el intervalo $\frac{1}{2}\pi < \theta \leq \pi$, de modo que $\cos \theta < 0$. Se deduce entonces a partir de (67.4) que, si el foco se mueve alejándose del observador, la frecuencia del sonido que se oye es menor que ω_0 .

Por otra parte, si el foco se aproxima al observador, entonces $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$, de modo que $\cos \theta > 0$, y la frecuencia $\omega > \omega_0$ aumenta con u . Para $u \cos \theta > c$, y de acuerdo con la fórmula (67.4), ω resulta negativa, lo cual significa que el sonido oído por el observador realmente le alcanza en orden inverso, es decir, el sonido emitido por el foco en un instante determinado cualquiera llega antes que el sonido emitido en instantes previos o anteriores.

Como ya se ha mencionado al principio del § 66, la aproximación de la acústica geométrica corresponde al caso de longitudes de ondas pequeñas, es decir, valores grandes del vector de onda. Para que esto sea así, la frecuencia del sonido debe ser, en general, grande. Sin embargo, en la acústica de los medios móviles, esta última condición no es preciso que se cumpla si la velocidad del medio supera la del sonido. Porque en este caso k puede ser grande incluso aunque la frecuencia sea cero; a partir de (67.1), tenemos que para $\omega = 0$ se cumple la ecuación

$$ck = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}, \quad (67.5)$$

y esta expresión tiene soluciones si $u > c$. Así pues, en un medio móvil con velocidades supersónicas pueden existir pequeñas perturbaciones estacionarias descritas por la acústica geométrica (si k es suficientemente grande). Esto significa que dichas perturbaciones se propagan a lo largo de rayos.

Consideremos, por ejemplo, una corriente supersónica homogénea que se mueve con velocidad constante \mathbf{u} , cuya dirección se toma como eje x . El vector \mathbf{k} se considera que está comprendido dentro del plano xy y sus componentes están relacionados por la expresión

$$(u^2 - c^2)k_x^2 = c^2k_y^2, \quad (67.6)$$

que se obtiene elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación (67.5). Para determinar la forma de los rayos utilizaremos las ecuaciones de la acústica geométrica (66.4), de acuerdo con las cuales $\dot{x} = \partial\omega/\partial k_x$, $\dot{y} = \partial\omega/\partial k_y$. Dividiendo entre sí ambas ecuaciones, tenemos $d\dot{y}/d\dot{x} = (\partial\omega/\partial k_y)/(\partial\omega/\partial k_x)$. Sin embargo, esta relación es, según la regla de derivación que se aplica a las funciones implícitas, exactamente la derivada $-\partial k_x/\partial k_y$ tomada a una frecuencia constante (cero en este caso). Así pues, la ecuación que da la forma de los rayos a partir de la relación conocida entre k_x y k_y es

$$dy/dx = -\partial k_x/\partial k_y. \quad (67.7)$$

Sustituyendo (67.6), obtenemos

$$dy/dx = \pm c/\sqrt{(u^2 - c^2)}.$$

En el caso de u constante esta ecuación representa dos líneas rectas que cortan el eje x formando ángulos $\pm \alpha$, en donde $\sin \alpha = c/u$.

Volveremos a un estudio detallado de estos rayos en la dinámica de los gases, en donde son muy importantes; ver, en particular, §§ 79, 96 y 109.

PROBLEMAS

Problema 1. Deducir una ecuación que exprese la forma de los rayos sonoros que se propagan en un medio homogéneo en movimiento estacionario con una distribución de velocidades $\mathbf{u}(x, y, z)$, cuando $u \ll c$ en todo punto.[†]

Solución. Sustituyendo (67.1) en (66.4) obtenemos las ecuaciones de propagación de los rayos en la forma

$$\dot{\mathbf{k}} = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{u} - \mathbf{k} \times \text{rot } \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v} = c\mathbf{k}/k + \mathbf{u}.$$

Utilizando estas ecuaciones y además

$$d\mathbf{u}/dt \equiv \partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{u} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{u} \approx (c/k)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{u},$$

podemos calcular la derivada $d(k\mathbf{v})/dt$, reteniendo únicamente los términos hasta el primer orden en \mathbf{u} . El resultado es $d(k\mathbf{v})/dt = -kv \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{u}$, en donde \mathbf{n} es un vector unidad en la dirección de \mathbf{v} . Pero $d(k\mathbf{v})/dt = n d(k\mathbf{v})/dt + kv dn/dt$. Puesto que \mathbf{n} y dn/dt son perpendiculares (debido a que $\mathbf{n}^2 = 1$, y, por tanto, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$), se deduce de las ecuaciones anteriores que $\mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{u}$. Introduciendo el elemento de longitud a lo largo del rayo $dl = c dt$, podemos escribir finalmente

$$dn/dl = -\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{u}/c. \quad (1)$$

Esta ecuación determina la forma de los rayos; \mathbf{n} es un vector tangencial unidad (que no tiene por qué tener la misma dirección que \mathbf{k}).

Problema 2. Determinar la forma de los rayos sonoros en un medio móvil con una distribución de velocidades $u_x = u(z)$, $u_y = u_z = 0$.

Solución. Desarrollando la ecuación (1), problema 1, encontramos $dn_z/dl = (n_z/c)du/dz$, $dn_y/dl = 0$; no es necesario escribir la ecuación para n_z , puesto que $\mathbf{n}^2 = 1$. La segunda ecuación da $n_y = \text{constante} \equiv n_{y,0}$. En la primera ecuación escribiremos $n_z = dz/dl$, y luego tendremos por integración $n_x = n_{x,0} + u(z)/c$. Estas fórmulas dan la solución buscada.

Admitamos que la velocidad u es cero para $z = 0$ y que aumenta hacia arriba ($du/dz > 0$). Si el sonido se propaga «contra el viento» ($n_x < 0$), su trayectoria se curva hacia arriba; si se propaga «con el viento» ($n_x > 0$), su trayectoria se curva hacia abajo. En este último caso un rayo que sale del punto $z = 0$ formando un ángulo pequeño con el eje x (es decir, con $n_{x,0}$ próximo a la unidad) se eleva únicamente hasta una altura finita $z = z_{\max}$, que puede calcularse del modo siguiente. En la altura z_{\max} el rayo es horizontal, es decir, $n_z = 0$. De aquí tenemos

$$n_x^2 + n_y^2 \approx n_{x,0}^2 + n_{y,0}^2 + 2n_{x,0}u/c = 1,$$

de modo que $2n_{x,0}u(z_{\max})/c = n_{z,0}^2$, de aquí que podemos determinar z_{\max} a partir de la función dada $u(z)$ y la dirección inicial \mathbf{n}_0 del rayo.

[†] Se supone que la velocidad u varía sólo en distancias grandes en comparación con la longitud de onda del sonido.

Problema 3. Obtener la expresión correspondiente al principio de Fermat para los rayos sonoros en un medio con movimiento estacionario.

Solución. El principio de Fermat establece que la integral

$$\oint \mathbf{k} \cdot d\mathbf{l},$$

tomada a lo largo de un rayo entre dos puntos dados es un mínimo; se supone que \mathbf{k} se expresa como una función de la frecuencia ω y de la dirección \mathbf{n} del rayo.[†] Puede encontrarse esta función eliminando v y k a partir de las relaciones $\omega = ck + \mathbf{u} \cdot \mathbf{k}$ y $v_n = ck/k + \mathbf{u}$. El principio de Fermat toma entonces la forma

$$\delta \oint \{\sqrt{[(c^2 - u^2)d\mathbf{l}^2 + (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{l})^2]} - \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}\} / (c^2 - u^2) = 0.$$

En un medio en reposo, esta integral se reduce a la normal, $\oint d\mathbf{l}/c$.

§ 68. Vibraciones características

Hasta ahora hemos estudiado únicamente el movimiento oscilatorio en un medio infinito, y hemos visto, en particular, que en dicho medio pueden propagarse ondas de frecuencia cualquiera.

El caso es muy distinto cuando consideramos un fluido dentro de un recipiente de dimensiones finitas. Las propias ecuaciones del movimiento (ecuaciones de onda) resultan invariables, como es natural, pero ahora deben supplementarse mediante condiciones límites que han de satisfacerse en las paredes macizas o en la superficie libre del fluido. Consideraremos ahora únicamente lo que se denomina *vibraciones libres*, es decir, aquéllas que se producen en ausencia de fuerzas externas variables. Las vibraciones que se producen como resultado de fuerzas externas se denominan *vibraciones forzadas*.

Las ecuaciones del movimiento en el caso de un fluido finito no tienen soluciones que satisfagan las condiciones límites apropiadas para todas las frecuencias. Dichas soluciones existen únicamente para una serie de frecuencias definidas ω . En otras palabras, en un medio de volumen finito, solamente pueden producirse vibraciones con determinadas frecuencias. Éstas se denominan *frecuencias características* del fluido en el recipiente de que se trate.

Los valores reales de las frecuencias características dependen del tamaño y de la forma del recipiente. En un caso cualquiera determinado existe un número infinito de frecuencias características. Para hallarlas es necesario examinar las ecuaciones del movimiento con las condiciones límites apropiadas.

El orden de magnitud de la primera frecuencia característica (es decir, la más pequeña) puede obtenerse fácilmente a partir de consideraciones

[†] Ver *Teoría clásica de los campos*, § 71. Editorial Reverté, Barcelona.

dimensionales. El único parámetro que tienen las dimensiones de longitud y que aparece en el problema es la dimensión lineal l del cuerpo. De aquí que resulte claro que la longitud de onda λ_1 correspondiente a la primera frecuencia característica debe ser del orden de l y el propio orden de magnitud de la frecuencia ω_1 se obtiene dividiendo la velocidad del sonido por la longitud de onda. Así pues,

$$\lambda_1 \sim l, \quad \omega_1 \sim c/l. \quad (68.1)$$

Comprobaremos la naturaleza del movimiento en las vibraciones características. Si buscamos una solución de la ecuación de onda para el potencial de velocidades (por ejemplo) que sea periódica en el tiempo, de la forma $\phi = \phi_0(x, y, z)e^{-i\omega t}$, entonces tenemos para ϕ_0 la ecuación

$$\Delta\phi_0 + (\omega^2/c^2)\phi_0 = 0. \quad (68.2)$$

En un medio infinito, en donde no necesitan aplicarse las condiciones límites, esta ecuación tiene soluciones a la vez reales y complejas. En particular, tiene una solución proporcional a $e^{ik \cdot r}$, que da un potencial de velocidades de la forma

$$\phi = \text{constante} \times \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)].$$

Dicha solución representa una onda que se propaga con una velocidad definida —onda móvil.

Sin embargo, en el caso de un medio de volumen finito no pueden existir, en general, soluciones complejas. Esto puede verse del modo siguiente. La ecuación satisfecha por ϕ_0 es real, y las condiciones límites son también reales. De aquí que si $\phi_0(x, y, z)$ es una solución de las ecuaciones del movimiento, la función conjugada compleja ϕ_0^* es también una solución. Sin embargo, puesto que la solución de las ecuaciones para condiciones límites determinadas es única[†] en general, aparte de un factor constante, debemos tener $\phi_0^* = \text{constante} \times \phi_0$, en donde la constante es compleja y su módulo es evidentemente la unidad. Así pues, ϕ_0 debe tener la forma $\phi_0 = f(x, y, z)e^{-ia}$, siendo reales la función f y la constante a . El potencial ϕ tiene así la forma (tomando la parte real de $\phi_0 e^{-i\omega t}$)

$$\phi = f(x, y, z) \cos(\omega t + \alpha), \quad (68.3)$$

es decir, es el producto de una cierta función de las coordenadas por una función periódica simple del tiempo.

Esta solución tiene propiedades totalmente diferentes de las correspondientes a una onda móvil. En esta última, en donde $\phi = \text{constante} \times \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha)$, la fase $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha$ de las oscilaciones en puntos diferen-

[†] Esto puede que no sea cierto cuando el recipiente tenga una forma con elevada simetría (por ejemplo una esfera).

tes del espacio es distinta en un instante cualquiera determinado, excepto únicamente en aquellos puntos para los cuales $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ difiere en un múltiplo entero de la longitud de onda. En la onda representada por (68.3), todos los puntos están oscilando en la misma fase $\omega t + \alpha$ en un instante dado cualquiera. Evidentemente dicha onda no se «propaga»; se denomina entonces *onda estacionaria*. Así pues, las vibraciones características son ondas estacionarias.

Consideremos una onda de sonido plana estacionaria en la que todas las magnitudes son funciones exclusivas de una coordenada (por ejemplo, x) y del tiempo. Escribiendo la solución general de $\partial^2\phi_0/\partial x^2 + \omega^2\phi_0/c^2 = 0$ en la forma $\phi_0 = a \cos(\omega x/c + \beta)$, tenemos $\phi = a \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega x/c + \beta)$. Mediante una selección apropiada del origen de x y t , podemos hacer que α y β sean cero, de modo que

$$\phi = a \cos \omega t \cos \omega x/c. \quad (68.4)$$

Para la velocidad y presión de la onda tenemos

$$\begin{aligned} v &= \partial\phi/\partial x = -(a\omega/c) \cos \omega t \sin \omega x/c; \\ p' &= -\rho \partial\phi/\partial t = \rho\omega \sin \omega t \cos \omega x/c. \end{aligned}$$

En los puntos $x = 0, \pi c/\omega, 2\pi c/\omega, \dots$, que difieren entre sí una distancia $\pi c/\omega = \lambda/2$, la velocidad v es siempre cero; estos puntos se denominan *nodos* de la velocidad. Los puntos intermedios, entre ellos ($x = \pi c/2\omega, 3\pi c/2\omega, \dots$), son aquellos en los que la amplitud de las variaciones respecto al tiempo de la velocidad es más alta. Estos puntos se denominan *antinodos* o *vientres*. La presión p' evidentemente tiene nodos y vientres en posiciones inversas. Así pues, en una onda plana estacionaria los nodos de la presión son los vientres de la velocidad y viceversa.

Un caso interesante de vibraciones características es el de las vibraciones de un gas en un recipiente que posee una pequeña abertura (un *resonador*). En un recipiente cerrado la frecuencia característica más pequeña es, como sabemos, del orden de c/l , siendo l la dimensión lineal del recipiente. Sin embargo, cuando existe una pequeña abertura, aparecen nuevas vibraciones características de unas frecuencias considerablemente menores. Estas vibraciones se deben al hecho de que, si existe una diferencia de presión entre el gas del interior del recipiente y el gas existente en el exterior, esta diferencia puede igualarse bien entrando o saliendo gas. Así pues, aparecen oscilaciones en las que interviene un intercambio de gas entre el resonador y el medio exterior. Como la abertura es pequeña, este intercambio tiene lugar lentamente y, por tanto, el período de las oscilaciones es grande, siendo en correspondencia pequeñas las frecuencias (ver problema 2). Las frecuencias de las vibraciones ordinarias que se producen en un recipiente cerrado son prácticamente invariables, aunque exista una pequeña abertura.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar las frecuencias características de las ondas sonoras de un fluido contenido en un recipiente de forma ortoédrica.

Solución. Busquemos una solución de la ecuación (68.2) de la forma

$$\phi_0 = \text{constante} \times \cos qx \cos ry \cos sz,$$

en donde $q^2 + r^2 + s^2 = \omega^2/c^2$. En las paredes del recipiente tenemos las condiciones $v_x = \partial\phi/\partial x = 0$ para $x = 0$ y a , $\partial\phi/\partial y = 0$ para $y = 0$ y b , $\partial\phi/\partial z = 0$ para $z = 0$ y c , siendo a , b , c las aristas del ortoedro. De aquí se encuentra que $q = m\pi/a$, $r = n\pi/b$, $s = p\pi/c$, siendo m , n y p números enteros cualesquiera. Así pues, las frecuencias características son

$$\omega^2 = c^2\pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2 + p^2/c^2).$$

Problema 2. Un tubo estrecho de área de sección recta S y de longitud l está fijo en la abertura de un resonador. Determinar la frecuencia característica.

Solución. Como el tubo es estrecho, al considerar las oscilaciones acompañadas por el movimiento del gas hacia dentro y hacia fuera del resonador, podemos suponer que únicamente el gas en el tubo tiene una velocidad apreciable, mientras que el gas en el recipiente está casi en reposo. La masa del gas dentro del tubo es $S\rho l$, y la fuerza ejercida sobre la misma es $S(p_0 - p)$, en donde p y p_0 son las presiones del gas en el interior y en el exterior del resonador, respectivamente. De aquí que debamos tener $S\rho l v = S(p - p_0)$, en donde v es la velocidad del gas en el tubo. La derivada temporal de la presión viene dada por $\dot{p} = c\rho v$, y la disminución por unidad de tiempo de la densidad del gas dentro del resonador ($-\dot{\rho}$) puede suponerse igual a la masa del gas que sale del resonador por unidad de tiempo ($S\rho v$) dividida por el volumen V del mismo. Así pues, tenemos $\dot{\rho} = -c^2 S\rho v / V$, de donde

$$\ddot{p} = -c^2 S\rho v / V = -c^2 S(p - p_0) / lV.$$

Esta ecuación da $p - p_0 = \text{constante} \times \cos \omega_0 t$, en donde la frecuencia característica $\omega_0 = c\sqrt{(S/lV)}$. Este valor es pequeño en comparación con c/L (siendo L la dimensión lineal del recipiente) y, por tanto, la longitud de onda es grande en comparación con L .

Al resolver este problema hemos supuesto que la amplitud lineal de las oscilaciones del gas en el tubo es pequeña en comparación con su longitud l . Si esto no fuese así, las oscilaciones vendrían acompañadas por el flujo de una fracción considerable del gas en el tubo y sería inaplicable la ecuación lineal del movimiento utilizada anteriormente.

§ 69. Ondas esféricas

Consideremos una onda sonora en la que la distribución de la densidad, velocidad, etc., depende únicamente de la distancia a un punto determinado, es decir, tiene una simetría esférica. Dicha onda se denomina *onda esférica*.

Determinemos la solución general de la ecuación de onda que representa una onda esférica. Tomemos la ecuación de onda para el potencial de velocidad: $\Delta\phi - (1/c^2)\partial^2\phi/\partial t^2 = 0$. Como ϕ es una función únicamente de la distancia r desde el centro y del tiempo t , tenemos, utilizando la expresión para la laplaciana en coordenadas esféricas,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right). \quad (69.1)$$

Busquemos una solución de la forma $\phi = f(r, t)/r$. Sustituyéndola, tenemos, después de un cálculo simple, la ecuación siguiente para f : $\partial^2 f / \partial t^2 = c^2 \partial^2 f / \partial r^2$. Esta es precisamente la ecuación de onda monodimensional ordinaria con el radio r como coordenada. La solución de esta ecuación es, como sabemos, de la forma $f = f_1(ct - r) + f_2(ct + r)$, siendo f_1 y f_2 funciones arbitrarias. La solución general de la ecuación (69.1) tiene la forma

$$\phi = \frac{f_1(ct - r)}{r} + \frac{f_2(ct + r)}{r}. \quad (69.2)$$

El primer término es una onda hacia fuera que se propaga desde el origen en todas las direcciones. El segundo, por el contrario, es una onda que va hacia el centro. A diferencia de una onda plana cuya amplitud permanece constante, una onda esférica tiene una amplitud que disminuye inversamente con la distancia al centro. La intensidad de la onda viene dada por el cuadrado de la amplitud y disminuye de modo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, como ha de ser, puesto que el flujo de energía total de la onda se distribuye sobre una superficie cuya área aumenta proporcionalmente a r^2 .

Las partes variables de la presión y de la densidad están relacionadas con el potencial por $p' = -\rho\partial\phi/\partial t$, $\rho' = -(\rho/c^2)\partial\phi/\partial t$, y su distribución está determinada por fórmulas, de la misma manera que (60.2). Sin embargo, la distribución de velocidades (radiales) que viene dada por el gradiente del potencial, tiene la forma

$$v = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{f_1(ct - r) + f_2(ct + r)}{r} \right\}. \quad (69.3)$$

Si no existe ninguna fuente de sonido en el origen, el potencial (69.2) debe permanecer finito cuando $r = 0$. Para que esto sea así, debemos tener $f_1(ct) = -f_2(ct)$, es decir, ϕ tiene la forma

$$\phi = \frac{f(ct - r) - f(ct + r)}{r} \quad (69.4)$$

(onda esférica estacionaria). Si, por otra parte, no existe ningún foco en el origen, el potencial de la onda que emerge del mismo es $\phi = f(ct - r)/r$; no es necesario que permanezca finita en $r = 0$, puesto que la solución es válida únicamente para la región exterior al foco.

Una onda esférica estacionaria monocromática tiene la forma

$$\phi = Ae^{-i\omega t} \frac{\operatorname{sen} kr}{r}, \quad (69.5)$$

en donde $k = \omega/c$. Una onda esférica monocromática emitida hacia fuera viene dada por

$$\phi = Ae^{i(kr - \omega t)}/r. \quad (69.6)$$

Es interesante señalar que esta expresión satisface la ecuación diferencial

$$\Delta\phi + k^2\phi = -4\pi Ae^{-i\omega t}\delta(\mathbf{r}), \quad (69.7)$$

en donde en el segundo miembro tenemos la función delta $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$. Efectivamente, $\delta(\mathbf{r}) = 0$ en todos los puntos, excepto en el origen, y volvemos a la ecuación homogénea (69.1); e integrando (69.7) en todo el volumen de una esfera pequeña en la que se incluye el origen (por tanto, la expresión (69.6) se reduce a $Ae^{-i\omega t}/r$), obtenemos $-4\pi Ae^{-i\omega t}$ en cada lado.

Consideremos una onda esférica saliente que ocupa una corteza esférica, fuera de la cual el medio está en reposo o muy próximo al reposo; dicha onda puede originarse de un foco que emite durante un intervalo finito de tiempo únicamente o bien de una cierta región en donde existe una perturbación sonora (ver el final del § 71 y § 73, problema 4). Antes de que la onda llegue a un punto determinado, el potencial es $\phi \equiv 0$. Despues de que ha pasado la onda, el movimiento debe ir amortiguándose; esto significa que ϕ debe ser constante. Sin embargo, en una onda esférica saliente el potencial es una función de la forma $\phi = f(ct - r)/r$; dicha función puede tender a una constante sólo si la función f es idénticamente nula. Así pues, el potencial debe ser cero antes y después del paso de la onda.[†] A partir de esto podemos obtener una conclusión importante respecto a la distribución de condensaciones y rarefacciones en una onda esférica.

La variación de presión en la onda está relacionada con el potencial por $p' = -\rho\partial\phi/\partial t$. A partir de lo dicho anteriormente, resulta claro que, si integramos p' respecto a todo tiempo para un r determinado, el resultado es cero:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p' dt = 0. \quad (69.8)$$

Esto significa que, cuando la onda esférica pasa a través de un punto determinado, se observarán tanto condensaciones ($p' > 0$) como rarefacciones ($p' < 0$) en dicho punto. En este aspecto una onda esférica es notablemente distinta de una onda plana que puede componerse únicamente de condensaciones o de rarefacciones.

Se observará un esquema semejante si consideramos el modo de variación de p' con la distancia en un instante dado; en lugar de la integral (69.8), consideraremos ahora otra integral que también se anula, a saber

$$\int_0^{\infty} rp' dr = 0. \quad (69.9)$$

[†] A diferencia de lo que ocurre en el caso de una onda plana, después de cuyo paso podemos tener $\phi = \text{constante} \neq 0$.

PROBLEMAS

Problema 1. En el instante inicial, el gas en el interior de una esfera de radio a se comprime, de modo que $\rho' = \text{constante} \equiv \Delta$; fuera de esta esfera, $\rho' = 0$. La velocidad inicial es cero en todo el espacio. Determinar el movimiento subsiguiente.

Solución. Las condiciones iniciales en el potencial son $\phi = 0$ para $t = 0$ y $r < a$ o $r > a$; $\phi = F(r)$ para $t = 0$, en donde $F(r) = 0$ para $r > a$ y $F(r) = -c^2\Delta/\rho$ para $r < a$. Busquemos una solución de ϕ de la forma

$$\phi(r, t) = \frac{f(ct - r) - f(ct + r)}{r}.$$

A partir de las condiciones iniciales obtenemos $f(-r) - f(r) = 0$, $f'(-r) - f'(r) = rF(r)/c$. A partir de la primera ecuación tenemos $f'(-r) + f'(r) = 0$, que junto con la segunda ecuación da $f'(r) = -f'(-r) = -rF(r)/2c$. Finalmente, sustituyendo el valor de $F(r)$ hallamos las expresiones siguientes para la derivada $f'(\xi)$ y la propia función $f(\xi)$:

$$\text{para } |\xi| > a, \quad f'(\xi) = 0, \quad f(\xi) = 0;$$

$$\text{para } |\xi| < a, \quad f'(\xi) = c\xi\Delta/2\rho, \quad f(\xi) = c(\xi^2 - a^2)\Delta/4\rho,$$

que da la solución del problema. Si consideramos un punto en donde $r > a$, es decir, fuera de la región de compresión inicial, tenemos para la densidad

$$\text{para } t < (r-a)/c, \quad \rho' = 0;$$

$$\text{para } (r-a)/c < t < (r+a)/c, \quad \rho' = \frac{1}{2}(r-ct)\Delta/r;$$

$$\text{para } t > (r+a)/c, \quad \rho' = 0.$$

La onda pasa el punto considerado durante un intervalo de tiempo $2a/c$; en otras palabras, la onda tiene la forma de una corteza esférica de espesor $2a$, que en el tiempo t está comprendida entre las esferas de radio $ct - a$ y $ct + a$. Dentro de esta corteza la densidad varía linealmente; en la parte exterior ($r > ct$), el gas está comprimido ($\rho' > 0$), mientras que en la parte interior ($r < ct$) está enrarecido ($\rho' < 0$).

Problema 2. Determinar las frecuencias características de las oscilaciones sonoras con simetría central en un recipiente esférico de radio a .

Solución. A partir de la condición límite $\partial\phi/\partial r = 0$ para $r = a$ [en donde ϕ viene dado por (69.5)], encontramos que $\tan ka = ka$, lo que determina las frecuencias características. La primera frecuencia (la más baja) es $\omega_1 = 4,49 c/a$.

§ 70. Ondas cilíndricas

Consideremos ahora una onda en la cual la distribución de todas las magnitudes es homogénea en una dirección determinada (que tomaremos como eje z) y que tiene una simetría axial completa alrededor de esta dirección. Esta onda se denomina *onda cilíndrica*, y en ella se tiene $\phi = \phi(R, t)$, en donde R designa la distancia al eje z . Determinemos la forma general de la solución con simetría axial de la ecuación de onda. Esto puede hacerse partiendo de la solución con simetría general esférica (69.2). R está relacionado con r por $r^2 = R^2 + z^2$, de modo que ϕ , según viene dada por la fórmula

(69.2), depende de z cuando se dan R y t . Una función que depende de R y t únicamente y que sigue satisfaciendo la ecuación de onda, puede obtenerse integrando (69.2) para todo valor de z desde $-\infty$ hasta $+\infty$, o lo que es lo mismo, desde 0 a ∞ . Podemos convertir la integración respecto a z en otra respecto a r . Puesto que $z = \sqrt{(r^2 - R^2)}$, $dz = r dr / \sqrt{(r^2 - R^2)}$. Cuando z varía desde 0 hasta ∞ , r varía desde R a ∞ . De aquí que encontraremos que la solución general con simetría axial es

$$\phi = \int_R^\infty \frac{f_1(ct-r)}{\sqrt{(r^2 - R^2)}} dr + \int_R^\infty \frac{f_2(ct+r)}{\sqrt{(r^2 - R^2)}} dr, \quad (70.1)$$

en donde f_1 y f_2 son funciones arbitrarias. El primer término es una onda cilíndrica que tiende a expandirse y el segundo una que va hacia el interior.

Sustituyendo en estas integrales $ct \pm r = \xi$, podemos volver a escribir la fórmula (70.1) en la forma

$$\phi = \int_{-\infty}^{ct-R} \frac{f_1(\xi)d\xi}{\sqrt{[(ct-\xi)^2 - R^2]}} + \int_{ct+R}^{\infty} \frac{f_2(\xi)d\xi}{\sqrt{[(\xi-ct)^2 - R^2]}}. \quad (70.2)$$

Vemos que el valor del potencial en el instante t en la onda cilíndrica saliente está determinada por los valores de f_1 en los instantes que van desde $-\infty$ hasta $t - R/c$; análogamente los valores de f_2 que influyen en la onda que va hacia el interior son aquellos que corresponden a instantes desde $t + R/c$ hasta el infinito.

Como en el caso esférico, se obtienen ondas estacionarias cuando $f_1(\xi) = -f_2(\xi)$. Puede demostrarse que una onda cilíndrica estacionaria se representa igualmente en la forma

$$\phi = \int_{ct-R}^{ct+R} \frac{F(\xi)d\xi}{\sqrt{[R^2 - (\xi - ct)^2]}}, \quad (70.3)$$

en donde $F(\xi)$ es otra función arbitraria.

Deduzcamos una expresión para el potencial en una onda cilíndrica monocromática. La ecuación de onda para el potencial $\phi(R, t)$ en coordenadas cilíndricas es

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

En una onda monocromática $\phi = e^{-i\omega t}f(R)$, y tenemos para la función $f(R)$ la ecuación $f'' + f'/R + k^2 f = 0$. Esta es la ecuación de Bessel de orden cero. En una onda cilíndrica estacionaria, ϕ debe permanecer finito para $R = 0$; la solución apropiada es $J_0(kR)$, en donde J_0 es una función de Bessel de primera clase. Así pues, en el caso de una onda cilíndrica estacionaria,

$$\phi = Ae^{-i\omega t} J_0(kR). \quad (70.4)$$

Para $R = 0$ la función J_0 tiende a la unidad, de modo que la amplitud tiende al valor límite finito A . A distancias R grandes, J_0 puede sustituirse por su expresión asintótica y ϕ toma entonces la forma

$$\phi = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(kR - \frac{1}{4}\pi)}{\sqrt{(kR)}} e^{-i\omega t}. \quad (70.5)$$

La solución correspondiente a la onda móvil monocromática hacia fuera es

$$\phi = Ae^{-i\omega t} H_0^{(1)}(kR), \quad (70.6)$$

en donde $H_0^{(1)}$ es la función de Hankel de primera clase, de orden cero. Esta función tiene una singularidad logarítmica para $R \rightarrow 0$:

$$\phi \cong (2iA/\pi) \log(kR) e^{-i\omega t}. \quad (70.7)$$

A distancias grandes tenemos la fórmula asintótica

$$\phi = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp[i(kR - \omega t - \frac{1}{4}\pi)]}{\sqrt{(kR)}}. \quad (70.8)$$

Vemos que la amplitud de la onda cilíndrica disminuye (a distancias grandes) de modo inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia respecto al eje y que la intensidad disminuye, por tanto, como $1/R$. Este resultado es evidente, puesto que el flujo de energía total se distribuye sobre una superficie cilíndrica cuya área aumenta proporcionalmente a R cuando se propaga la onda.

Una onda cilíndrica que sale hacia fuera difiere de otra onda esférica o plana en el aspecto importante de que tiene un frente hacia adelante, pero no hacia atrás: una vez que la perturbación sonora ha alcanzado un punto determinado, no cesa, sino que disminuye de modo comparativamente lento cuando $t \rightarrow \infty$. Supongamos que la función $f_1(\xi)$ en el primer término de (70.2) es distinta de cero únicamente en un determinado intervalo finito $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$. Entonces, en instantes tales que $ct > R + \xi_2$, tenemos

$$\phi = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{f_1(\xi) d\xi}{\sqrt{[(ct - \xi)^2 - R^2]}}.$$

Cuando $t \rightarrow \infty$, esta expresión tiende a cero como

$$\phi = \frac{1}{ct} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f_1(\xi) d\xi,$$

es decir, inversamente al tiempo.

Así pues, el potencial en una onda cilíndrica que sale hacia fuera, debido a una fuente que actúa sola durante un tiempo finito, se anula, aunque lentamente, cuando $t \rightarrow \infty$. Esto significa que, como en el caso esférico, la

integral de p' respecto a todo instante es cero:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p' dt = 0. \quad (70.9)$$

De aquí que una onda cilíndrica, de modo igual a una onda esférica, debe incluir necesariamente tanto condensaciones como rarefacciones.

§ 71. Solución general de la ecuación de onda

Deduzcamos ahora una fórmula general que dé la solución de la ecuación de onda en un fluido infinito para unas condiciones iniciales cualesquiera, es decir, que da la distribución de velocidades y de presión dentro del fluido en un instante cualquiera en función de su distribución inicial.

Obtendremos primero algunas fórmulas auxiliares. Sea $\phi(x, y, z, t)$ y $\psi(x, y, z, t)$ dos soluciones cualquiera de la ecuación de onda que se anulan en el infinito. Consideremos la integral

$$I = \int (\phi\ddot{\psi} - \psi\ddot{\phi}) dV,$$

tomada respecto a todo el espacio y calculemos su derivada temporal. Puesto que ϕ y ψ satisfacen las ecuaciones $\Delta\phi - \ddot{\phi}/c^2 = 0$ y $\Delta\psi - \ddot{\psi}/c^2 = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} dI/dt &= \int (\phi\ddot{\psi} - \psi\ddot{\phi}) dV = c^2 \int (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi) dV \\ &= c^2 \int \operatorname{div}(\phi \operatorname{grad}\psi - \psi \operatorname{grad}\phi) dV. \end{aligned}$$

La última integral puede transformarse en una integral extendida a una superficie infinitamente alejada y, por tanto, es cero. Así pues, obtenemos la conclusión de que $dI/dt = 0$, es decir, I es independiente del tiempo:

$$\int (\phi\ddot{\psi} - \psi\ddot{\phi}) dV = \text{constante}. \quad (71.1)$$

A continuación, consideremos la siguiente solución particular de la ecuación de onda:

$$\psi = \delta[r - c(t_0 - t)]/r \quad (71.2)$$

(en donde r es la distancia desde un punto determinado O , t_0 es un instante definido y δ designa la función delta), y calculemos la integral de ψ respecto a todo el espacio. Tenemos.

$$\int \psi dV = \int_0^{\infty} \psi \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi \int_0^{\infty} r \delta[r - c(t_0 - t)] dr.$$

El argumento de la función delta es cero para $r = c(t_0 - t)$ (admitimos que $t_0 > t$). De aquí que, a partir de las propiedades de la función δ , resulta:

$$\int \psi dV = 4\pi c(t_0 - t). \quad (71.3)$$

Derivando esta ecuación respecto al tiempo, obtenemos

$$\int \dot{\psi} dV = -4\pi c. \quad (71.4)$$

Sustituymos ahora para ψ , en la integral (71.1), la función (71.2), y tomemos ϕ de modo que sea la solución general buscada de la ecuación de onda. De acuerdo con (71.1), I es una constante; utilizando este resultado, escribiremos a continuación las expresiones correspondientes a I en los instantes $t = 0$ y $t = t_0$, e igualaremos ambas. Para $t = t_0$ son las dos funciones ψ y $\dot{\psi}$ diferentes de cero únicamente para $r = 0$. De aquí que, al integrar, podemos poner $r = 0$ en ϕ y $\dot{\phi}$ (es decir, tomaremos sus valores en el punto O) y sacaremos fuera de la integral a ϕ y $\dot{\phi}$:

$$I = \phi(x, y, z, t_0) \int \psi dV - \phi(x, y, z, t_0) \int \dot{\psi} dV,$$

en donde x, y, z son las coordenadas de O . De acuerdo con (71.3) y (71.4), el segundo término es cero para $t = t_0$ y el primer término nos da

$$I = -4\pi c \phi(x, y, z, t_0).$$

Calculemos ahora I para $t = 0$. Haciendo $\dot{\psi} = \partial\psi/\partial t = -\partial\psi/\partial t_0$ y designando por ϕ_0 el valor de la función ϕ para $t = 0$, tenemos

$$I = - \int \left(\phi_0 \frac{\partial \psi}{\partial t_0} + \phi_0 \dot{\psi} \right) dV = - \frac{\partial}{\partial t_0} \int \phi_0 \psi_{t=0} dV - \int \phi_0 \psi_{t=0} dV.$$

Escribiremos el elemento de volumen como $dV = r^2 dr d\Omega$, en donde $d\Omega$ es un elemento de ángulo sólido, y luego obtendremos por las propiedades de la función delta,

$$\int \phi_0 \psi_{t=0} dV = \int \phi_0 r \delta(r - ct_0) dr d\Omega = ct_0 \int \phi_0, r=ct_0 d\Omega;$$

la integral $\phi_0 \psi$ es semejante. Así pues,

$$I = - \frac{\partial}{\partial t_0} (ct_0 \int \phi_0, r=ct_0 d\Omega) - ct_0 \int \phi_0, r=ct_0 d\Omega.$$

Finalmente, igualando ambas expresiones para I y omitiendo el sufijo cero en t_0 , obtenemos

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (t \int \phi_0, r=ct d\Omega) + t \int \phi_0, r=ct d\Omega \right\}. \quad (71.5)$$

Esta fórmula, denominada *fórmula de Poisson*, da la distribución espacial del potencial en un instante cualquiera en función de la distribución del potencial y de su derivada temporal (o, lo que es equivalente, en función

de la distribución de velocidades y de presión) en un instante inicial determinado. Vemos que el valor del potencial en el instante t está determinado por los valores de ϕ y $\dot{\phi}$ en el instante $t = 0$ en la superficie de una esfera centrada en O , de radio ct .

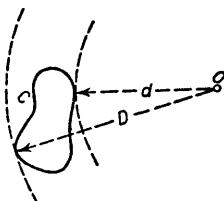


FIG. 34

Supongamos que, en el instante inicial, ϕ_0 y $\dot{\phi}_0$ son diferentes de cero únicamente en una región finita determinada del espacio, limitada por una superficie cerrada C (figura 34). Consideraremos los valores de ϕ en instantes siguientes y en un punto determinado O . Estos valores se determinan mediante los valores de ϕ_0 y $\dot{\phi}_0$ a una distancia ct de O . Las esferas de radio ct pasan a través de la región dentro de la superficie C únicamente para $d/c \leq t \leq D/c$, en donde d y D son las distancias menor y mayor desde el punto O a la superficie C . En otros instantes, los integrandos dentro de (71.5) son nulos. Así pues, el movimiento en O empieza en un instante $t = d/c$ y cesa en el tiempo $t = D/c$. La onda que se propaga desde la región interior a C tiene un frente delantero y un frente trasero. El movimiento empieza cuando el frente delantero llega al punto en cuestión, mientras que las partículas que están en el frente trasero, y que estaban previamente oscilando, pasan al reposo.

PROBLEMA

Deducir la fórmula que da el potencial en función de las condiciones iniciales para una onda que depende sólo de dos coordenadas, x e y .

Solución. Un elemento de área de una esfera de radio ct puede escribirse $df = c^2 t^2 do$, en donde do es un elemento de ángulo sólido. La proyección de df sobre el plano xy es $dx dy = df \sqrt{[(ct)^2 - \rho^2]} / ct$, en donde ρ es la distancia del punto x, y al centro de la esfera. Comparando ambas expresiones podemos escribir $do = dx dy / ct \sqrt{[(ct)^2 - \rho^2]}$. Designando por x, y las coordenadas del punto en donde buscamos el valor de ϕ , y por ξ, η las coordenadas de un punto variable en la región de integración, podemos, por tanto, sustituir do en la fórmula general (71.5) por $d\xi d\eta / ct \sqrt{[(ct)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2]}$, duplicando la expresión resultante debido a que $dx dy$ es la proyección de dos elementos de

área en las caras opuestas del plano xy . Así pues,

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z, t) = & \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int \int \frac{\phi_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{[(ct)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2]}} + \\ & + \frac{1}{2\pi c} \int \int \frac{\phi_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{[(ct)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2]}},\end{aligned}$$

en donde la integración se extiende a una circunferencia centrada en O , de radio ct . Si ϕ_0 y ϕ_1 son nulas excepto en una región finita C en el plano xy (o más exactamente, excepto en una región cilíndrica con sus generatrices paralelas al eje z), las oscilaciones en el punto O (figura 34) empiezan en el tiempo $t = d/c$, siendo d la distancia mínima de O a un punto dentro de la región. Sin embargo, después de este tiempo, la circunferencia de radio $ct > d$ centrada en O encerrará siempre parte o la totalidad de la región C , y ϕ tenderá únicamente asintóticamente a cero. Así pues, a diferencia de las ondas tridimensionales, las ondas bidimensionales consideradas aquí tienen un frente delantero pero no un frente trasero (comparar con § 70).

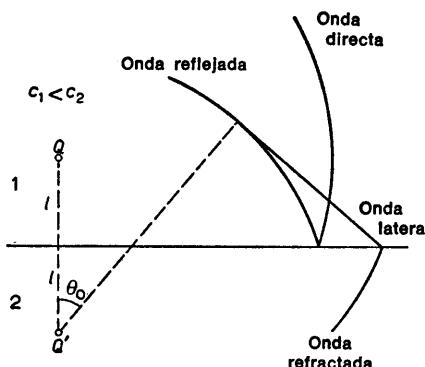
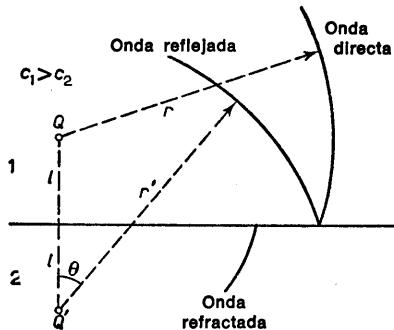


FIG. 35

§ 72. Onda lateral

La reflexión de una onda esférica en una superficie que separa dos medios tiene un interés particular, ya que puede ir acompañada por un fenómeno poco ordinario, que es la aparición de una *onda lateral*.

Sea Q (figura 35) la fuente o foco de la onda sonora esférica en el medio 1, a una distancia l de una superficie plana infinita que separa los medios 1 y 2. La distancia l es arbitraria y no necesita ser grande en comparación con la longitud de onda λ . Supongamos que las densidades de ambos medios son ρ_1 , ρ_2 y que las velocidades del fluido en ellas son c_1 , c_2 . Supongamos primero que $c_1 > c_2$; entonces, a distancia grande de la fuente, en comparación con λ , el movimiento en el medio 1 será una superposición de dos ondas que van hacia fuera. Una de ella será una onda esférica emitida por la fuente (*onda directa*); su potencial es

$$\phi_1^0 = e^{ikr}/r, \quad (72.1)$$

en donde r es la distancia a la fuente, y la amplitud se toma arbitrariamente como la unidad. Por brevedad, omitiremos el factor $e^{-i\omega t}$ de todas las expresiones en la sección presente.

Las superficies de onda de la segunda onda (*reflejada*) son esferas centradas en Q' , la imagen de la fuente Q en el plano de separación; este plano es el lugar geométrico de los puntos P que se alcanzan en un instante dado por los rayos que salen de Q simultáneamente y se reflejan en el plano de acuerdo con las leyes de la acústica geométrica (en la figura 36 se ha indicado el rayo QAP con ángulo de incidencia y reflexión θ). La amplitud de la onda reflejada disminuye inversamente con la distancia r' desde el punto Q' (que a veces se denomina *fuente o foco imaginario*), pero depende también del ángulo θ , como si cada rayo se reflejase con el coeficiente correspondiente a la reflexión de una onda plana con un ángulo de incidencia determinado θ . En otras palabras, a distancias grandes la onda reflejada viene dada por la fórmula

$$\phi'_1 = \frac{e^{ikr'}}{r'} \left[\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 \sqrt{(c_1^2 - c_2^2 \sin^2 \theta)}}{\rho_2 c_2 + \rho_1 \sqrt{(c_1^2 - c_2^2 \sin^2 \theta)}} \right]; \quad (72.2)$$

ver fórmula (65.4) para el coeficiente de reflexión de una onda plana. Esta fórmula, que es evidentemente válida para valores grandes de r' , puede deducirse rigurosamente por el método indicado a continuación.

Un caso más interesante es aquél en el que $c_1 < c_2$. Aquí, además de la onda reflejada ordinaria (72.2), aparece otra onda en el primer medio. Las propiedades principales de esta onda pueden verse mediante las siguientes consideraciones elementales.

El rayo reflejado ordinario QAP (figura 36) obedece al principio de Fermat en el sentido de que es el trayecto más rápido de Q a P entre todos los

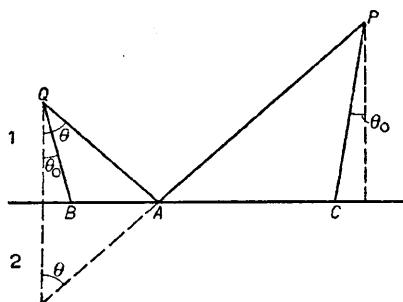


FIG. 36

trayectos que están comprendidos totalmente en el medio 1 y en el que interviene una sola reflexión. Sin embargo, cuando $c_1 < c_2$, el principio de Fermat se ve también satisfecho por otro trayecto, en el que el rayo incide sobre la frontera con el ángulo crítico de reflexión interna total θ_0 ($\sin \theta_0 = c_1/c_2$), luego se propaga en el medio 2 a lo largo del límite y, finalmente, vuelve al medio 1 con el ángulo θ_0 . El trayecto es el $QBCP$ de la figura 36 y es evidente que $\theta > \theta_0$. Es fácil ver que este trayecto también tiene la propiedad extremal: el tiempo empleado para recorrerlo es menor que para cualquier otro trayecto desde Q hasta P que esté comprendido parcialmente en el medio 2.

El lugar geométrico de los puntos P que son alcanzados en el mismo tiempo por rayos que dejan simultáneamente Q a lo largo del trayecto QB y luego vuelven al medio 1 en diversos puntos C , es evidentemente una superficie cónica, cuyas generatrices son perpendiculares a las líneas dibujadas desde el foco imaginario Q' formando un ángulo θ_0 .

Así pues, si $c_1 < c_2$, junto con la onda reflejada ordinaria, que tiene un frente esférico, se propaga en el medio 1 otra onda que tiene un frente cónico extendiéndose desde el plano de separación (en donde encuentra al frente de onda refractada en el medio 2) hasta el punto en el que toca al frente esférico de la onda reflejada; esto se produce a lo largo de la línea de intersección con un cono de semiángulo θ_0 y eje QQ' (figura 35). Esta onda cónica se denomina *onda lateral*.

Es fácil de ver, mediante un cálculo simple, que el tiempo transcurrido a lo largo del trayecto $QBCP$ (figura 36) es menor que el que se necesita para recorrer el trayecto QAP hasta el mismo punto P . Esto significa que una señal sonora procedente del foco Q alcanza a un observador situado en P , primero por la onda lateral y sólo después por la onda reflejada ordinaria.

Debe recordarse que la onda lateral es un efecto de la acústica ondulatoria, a pesar del hecho de que permite una interpretación simple como la

dada anteriormente en función del concepto de la acústica geométrica. Vemos a continuación que la amplitud de la onda lateral tiende a cero en el límite $\lambda \rightarrow 0$.

Realicemos ahora un cálculo cuantitativo. La propagación de una onda sonora monocromática procedente de un foco puntual está descrita por la ecuación (69.7):

$$\Delta\phi + k^2\phi = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{l}), \quad (72.3)$$

en donde $k = \omega/c$ y \mathbf{l} es el radio vector del foco. Se escoge el coeficiente de la función delta, de modo que la onda directa tenga la forma (72.1). En lo que sigue tomaremos un sistema de coordenadas con el plano xy como plano de separación y el eje z a lo largo de QQ' , siendo el primer medio aquél que tiene $z > 0$. En la superficie de separación la presión y la componente z de la velocidad, o (de modo equivalente) $\rho\phi$ y $\partial\phi/\partial z$, deben ser continuas.

Utilizando el método general de Fourier, obtenemos la solución en la forma

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\kappa}(z) \exp[i(\kappa_x x + \kappa_y y)] d\kappa_x d\kappa_y, \quad (72.4)$$

en donde

$$\phi_{\kappa}(z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi \exp[-i(\kappa_x x + \kappa_y y)] dx dy. \quad (72.5)$$

A partir de la simetría relativa al plano xy es evidente que ϕ_{κ} puede depender únicamente de la magnitud $|\kappa| = \sqrt{(\kappa_x^2 + \kappa_y^2)}$. Utilizando la bien conocida fórmula

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(u \operatorname{sen}\phi) d\phi,$$

podemos escribir (72.4) como

$$\phi = 2\pi \int_0^{\infty} \phi_{\kappa}(z) J_0(\kappa R) \kappa d\kappa, \quad (72.6)$$

en donde $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la coordenada cilíndrica (la distancia al eje z). Para los cálculos siguientes es conveniente transformar esta fórmula en otra en el que la integral se extiende desde $-\infty$ hasta $+\infty$, expresando el integrando en términos de la función de Hankel $H_0^{(1)}(u)$. Esta última tiene una singularidad logarítmica en el punto $u = 0$; si convenimos en ir desde la parte positiva real de u hasta la negativa, pasando por encima del punto $u = 0$ en el plano u complejo, entonces $H_0^{(1)}(-u) = H_0^{(1)}(ue^{i\pi}) = H_0^{(1)}(u) - 2J_0(u)$. Utilizando esta relación, podemos volver a escribir (72.6) como

$$\phi = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\kappa}(z) H_0^{(1)}(\kappa R) \kappa d\kappa. \quad (72.7)$$

A partir de la ecuación (72.3) encontramos para la función ϕ_κ la ecuación

$$\frac{d^2\phi_\kappa}{dz^2} - \left(\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\phi_\kappa = -\frac{1}{\pi}\delta(z-l). \quad (72.8)$$

Puede eliminarse la función delta en el segundo miembro de la ecuación imponiendo a la función $\phi_\kappa(z)$ (que satisface la ecuación homogénea) las condiciones límites en $z = l$:

$$\begin{aligned} [\phi_\kappa(z)]_{l+} - [\phi_\kappa(z)]_{l-} &= 0, \\ [d\phi_\kappa/dz]_{l+} - [d\phi_\kappa/dz]_{l-} &= -1/\pi. \end{aligned} \quad (72.9)$$

Las condiciones límites en $z = 0$ son

$$\begin{aligned} [\rho\phi_\kappa]_{0+} - [\rho\phi_\kappa]_{0-} &= 0, \\ [d\phi_\kappa/dz]_{0+} - [d\phi_\kappa/dz]_{0-} &= 0. \end{aligned} \quad (72.10)$$

Busquemos una solución en la forma

$$\left. \begin{aligned} \phi_\kappa &= Ae^{-\mu_1 z} && \text{para } z > l, \\ \phi_\kappa &= Be^{-\mu_1 z} + Ce^{\mu_1 z} && \text{para } l > z > 0, \\ \phi_\kappa &= De^{\mu_1 z} && \text{para } 0 > z. \end{aligned} \right\} \quad (72.11)$$

Aquí

$$\mu_1^2 = \kappa^2 - k_1^2, \quad \mu_2^2 = \kappa^2 - k_2^2 \quad (k_1 = \omega/c_1, \quad k_2 = \omega/c_2),$$

y debemos poner

$$\begin{aligned} \mu &= +\sqrt{(\kappa^2 - k^2)} && \text{para } \kappa > k, \\ \mu &= -i\sqrt{(k^2 - \kappa^2)} && \text{para } \kappa < k. \end{aligned} \quad (72.12)$$

La primera de estas expresiones es necesaria, de modo que ϕ no debe aumentar sin límite cuando $z \rightarrow \infty$, y la segunda para que ϕ represente un onda saliente. Las condiciones (72.9) y (72.10) dan cuatro ecuaciones que determinan los coeficientes A, B, C y D . Un cálculo simple da

$$\begin{aligned} B &= C \frac{\mu_1 \rho_2 - \mu_2 \rho_1}{\mu_1 \rho_2 + \mu_2 \rho_1}, & C &= \frac{e^{-l\mu_1}}{2\pi\mu_1}, \\ D &= C \frac{2\rho_1 \mu_1}{\mu_1 \rho_2 + \mu_2 \rho_1}, & A &= B + C e^{2l\mu_1}. \end{aligned} \quad (72.13)$$

Para $\rho_2 = \rho_1$, $c_2 = c_1$ (es decir, cuando todo el espacio está ocupado por un solo medio), B es cero y $A = C e^{2l\mu_1}$; el término correspondiente en ϕ es evidentemente la onda directa (72.1), y la onda reflejada en la que estamos interesados es, por tanto,

$$\phi'_1 = \pi \int_{-\infty}^{\infty} B(\kappa) e^{-z\mu_1} H_0^{(1)}(\kappa R) \kappa d\kappa. \quad (72.14)$$

En esta expresión ha de especificarse el trayecto de integración. Pasa por encima del punto singular $\kappa = 0$ (en el plano complejo κ), como ya hemos mencionado. El integrando tiene también puntos singulares (puntos ramificados) en $\kappa = \pm k_1, \pm k_2$, en donde μ_1 y μ_2 se anulan. De acuerdo con las condiciones (72.10), el contorno debe pasar por debajo de los puntos $+k_1, +k_2$, y por encima de los puntos $-k_1, -k_2$.

Analicemos la expresión resultante para distancias grandes respecto al foco. Sustituyendo la función de Hankel por su expresión asintótica bien conocida, obtenemos

$$\phi'_1 = \int_C \frac{\mu_1 \rho_2 - \mu_2 \rho_1}{\mu_1(\mu_1 \rho_2 + \mu_2 \rho_1)} \sqrt{\frac{\kappa}{2i\pi R}} \exp[-(z+l)\mu_1 + i\kappa R] d\kappa. \quad (72.15)$$

La figura 37 muestra el trayecto de integración C para el caso $c_1 > c_2$. Puede calcularse la integral mediante el método del punto de silla. El exponente $i[(z+l)\sqrt{(k_1^2 - \kappa^2)} + \kappa R]$ tiene un extremo en el punto en el que

$$\kappa/\sqrt{(k_1^2 - \kappa^2)} = R/(z+l) = r \operatorname{sen} \theta / r \cos \theta = \operatorname{tg} \theta,$$

es decir, $\kappa = k_1 \operatorname{sen} \theta$, en donde θ es el ángulo de incidencia (ver figura 35). Por el hecho de variar el trayecto de integración C' que pasa por este punto formando un ángulo de $\pi/4$ con eje de abscisas, obtenemos la fórmula (72.2).

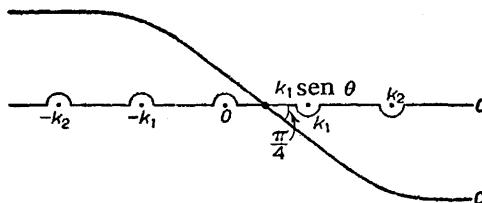


FIG. 37

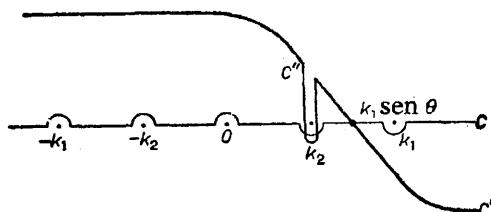


FIG. 38

En el caso $c_1 < c_2$ (es decir, $k_1 > k_2$), el punto $\kappa = k_1 \operatorname{sen} \theta$ cae entre k_2 y k_1 si $\operatorname{sen} \theta > k_2/k_1 = c_1/c_2 = \operatorname{sen} \theta_0$, es decir, si $\theta > \theta_0$ (figura 38). En este caso el contorno C' debe formar un lazo alrededor del punto k_2 y tenemos, además de la onda reflejada ordinaria (72.2), una onda ϕ''_1 dada por la integral (72.15) tomada alrededor del lazo, que denominaremos C'' . Esta es la

onda lateral. La integral se calcula fácilmente si el punto $k_1 \operatorname{sen} \theta$ no está próximo al k_2 , es decir, si el ángulo θ no está próximo al ángulo de reflexión interna θ_0 .[†]

Cerca del punto $\kappa = k_2$, μ_2 es pequeño; desarrollaremos el coeficiente del exponencial en el integrando de (72.15) en potencias de μ_2 . El término de orden cero no tiene ninguna singularidad en $\kappa = k_2$, y su integral alrededor de C'' es cero. De aquí que tengamos

$$\phi_1'' = - \int_{C'} \frac{2\mu_2\rho_1}{\mu_1^2\rho_2} \sqrt{\frac{\kappa}{2i\pi r}} \exp[-(z+l)\mu_1 + i\kappa R] d\kappa. \quad (72.16)$$

Desarrollando el exponente en potencias de $\kappa - k_2$ e integrando alrededor del lazo C'' , tenemos, después de un cálculo sencillo, la expresión siguiente para el potencial de la onda lateral:

$$\phi_1'' = \frac{2i\rho_1 k_2 \exp[ik_1 r' \cos(\theta_0 - \theta)]}{r'^2 \rho_2 k_1^2 \sqrt{[\cos \theta_0 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}^3(\theta_0 - \theta)]}}. \quad (72.17)$$

De acuerdo con los resultados anteriores, las superficies de ondas son los conos $r' \cos(\theta - \theta_0) = R \operatorname{sen} \theta_0 + (z + l) \cos \theta_0 = \text{constante}$. En una dirección dada la amplitud de la onda disminuye de modo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r' . Vemos también que esta onda desaparece en el límite $\lambda \rightarrow 0$. Para $\theta \rightarrow \theta_0$, la expresión (72.17) deja de ser válida; de hecho, la amplitud de la onda lateral en este intervalo de θ disminuye con la distancia proporcionalmente a $r'^{-5/4}$.

§ 73. Emisión del sonido

Un cuerpo que oscila en un fluido produce una compresión y rarefacción periódicas del fluido cerca de él, y, por tanto, produce ondas sonoras. La energía transportada por estas ondas la suministra la energía cinética del cuerpo. Así pues, podemos hablar de emisión del sonido mediante cuerpos oscilantes.^{††}

[†] Para una investigación de la onda lateral para todo valor de θ , ver L. BREKHOVSKIKH, *Zhurnal tehnicheskoi fiziki*, 18, 455, 1948. Este artículo da también el término siguiente del desarrollo de la onda reflejada ordinaria en potencias de λ/R . Podemos mencionar aquí que, en el caso de ángulos próximos a θ_0 (en el caso $c_1 < c_2$), el cociente entre el término de corrección y el término principal disminuye con la distancia proporcionalmente a $(\lambda/R)^{1/4}$ y no a λ/R .

^{††} En lo que sigue supondremos siempre que la velocidad u del cuerpo oscilante es pequeña en comparación con la velocidad del sonido. Como $u \sim a\omega$, siendo a la amplitud lineal de las oscilaciones, esto significa que $a \ll \lambda$.

La amplitud de las oscilaciones se supone, en general, pequeña en comparación también con las dimensiones del cuerpo, puesto que en otro caso no tendríamos flujo potencial cerca del cuerpo (ver § 9). Esta condición es innecesaria únicamente en el caso de las pulsaciones puras, cuando la solución (73.7), utilizada más adelante, es realmente una deducción directa de la ecuación de continuidad.

En el caso general de un cuerpo de forma arbitraria oscilando de una manera cualquiera, el problema de la emisión de ondas sonoras debe resolverse del modo siguiente. Tomemos como magnitud fundamental el potencial de velocidades ϕ ; satisface la ecuación de onda

$$\Delta\phi - (1/c^2)\partial^2\phi/\partial t^2 = 0. \quad (73.1)$$

En la superficie del cuerpo, la componente normal de la velocidad del fluido debe ser igual a la componente correspondiente de la velocidad \mathbf{u} del cuerpo:

$$\partial\phi/\partial n = u_n. \quad (73.2)$$

A distancias grandes del cuerpo, la onda puede transformarse en una onda esférica saliente. La solución de la ecuación (73.1) que satisface estas condiciones límites y la condición en el infinito determina la onda sonora emitida por el cuerpo.

Consideremos las dos condiciones límites con más detalle. Supongamos primero que la frecuencia de oscilación del cuerpo es tan grande que la longitud de la onda emitida es muy pequeña en comparación con la dimensión l del cuerpo:

$$\lambda \ll l. \quad (73.3)$$

En este caso podemos dividir la superficie del cuerpo en porciones cuyas dimensiones sean tan pequeñas que puedan considerarse aproximadamente como planas, siendo, sin embargo, todavía grandes en comparación con la longitud de onda. Entonces podemos suponer que cada una de dichas porciones emite una onda plana en la cual la velocidad del fluido es simplemente la componente normal u_n de la velocidad de dicha porción de la superficie. Pero el flujo de energía media en una onda plana es (ver § 64) $c\rho v^2$, en donde v es la velocidad del fluido en la onda. Haciendo $v = u_n$ e integrando respecto a la superficie completa del cuerpo, se obtiene el resultado de que la energía media emitida por unidad de tiempo por el cuerpo en forma de ondas sonoras, es decir, la intensidad total del sonido emitido, es

$$I = c\rho \oint u_n^2 df. \quad (73.4)$$

Esta expresión es independiente de la frecuencia de las oscilaciones (para una amplitud de velocidad determinada).

Consideremos ahora el caso límite opuesto en el que longitud de la onda emitida es grande en comparación con la dimensión del cuerpo:

$$\lambda \gg l. \quad (73.5)$$

Podemos entonces despreciar el término $(1/c^2)\partial^2\phi/\partial t^2$, en la ecuación general (73.1), cerca del cuerpo (a distancias pequeñas en comparación con la longitud de onda). En efecto, este término es del orden de $\omega^2\phi/c^2 \sim \phi/k^2$, mientras que las segundas derivadas respecto a las coordenadas en esta región son del orden de ϕ/P^2 .

Así pues, el flujo cerca del cuerpo satisface la ecuación de Laplace, $\Delta\phi = 0$. Esta es la ecuación correspondiente al flujo potencial de un fluido incompresible. En consecuencia, el fluido próximo al cuerpo se mueve como si fuese incompresible. Las propias ondas sonoras, es decir, las ondas de compresión y rarefacción se presentan sólo a distancias grandes del cuerpo.

A distancias del orden de la dimensión del cuerpo y menores, la ecuación buscada de la solución $\Delta\phi = 0$ no puede escribirse de una forma general, sino que depende de la forma real del cuerpo oscilante. A distancias grandes en comparación con l (aunque pequeñas en comparación con λ , de modo que la ecuación $\Delta\phi = 0$ siga siendo válida) podemos encontrar, sin embargo, una forma general de la solución, utilizando el hecho de que ϕ debe disminuir al aumentar la distancia. Hemos estudiado dichas soluciones de la ecuación de Laplace en § 11. Como allí, escribamos la forma general de la solución como

$$\phi = - (a/r) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad}(1/r), \quad (73.6)$$

en donde r es la distancia desde un origen situado en un punto cualquiera en el interior del cuerpo. Aquí, como es natural, las distancias que intervienen deben ser grandes en comparación con la dimensión del cuerpo, puesto que en otro caso no podemos restringirnos nosotros mismos a los términos en ϕ que disminuyen con menor rapidez que el aumento que sufre r . Hemos incluido ambos términos en (73.6), aunque debe recordarse que el primer término está a veces ausente (ver a continuación).

Aclaremos en qué casos este término $-a/r$ no es nulo. Vimos en § 11 que un potencial $-a/r$ da como resultado un valor no nulo $4\pi\rho a$ del flujo máscio a través de una superficie que rodea al cuerpo. Sin embargo, en un fluido incompresible, incluso dicho flujo de masa puede producirse sólo si varía el volumen total del fluido encerrado dentro de la superficie. En otras palabras, debe existir una variación en el volumen del cuerpo como resultado de la cual el fluido se vea expelido del volumen o bien aspirado hacia él. Así pues, el primer término en (73.6) aparece en aquellos casos en que el cuerpo emisor sufre pulsaciones, durante las cuales su volumen cambia.

Supongamos que esto sucede así y determinemos la intensidad total del sonido emitido. El volumen $4\pi a$ del fluido que circula a través de la superficie cerrada debe, por los argumentos anteriores, ser igual a la variación por unidad de tiempo del volumen V del cuerpo, es decir, a la derivada dV/dt (siendo el volumen V una función determinada del tiempo): $4\pi a = \dot{V}$. Así

pues, a distancias r tales que $l \ll r \ll \lambda$, el movimiento del fluido viene dado por la función $\phi = -\dot{V}(t)/4\pi r$. Sin embargo, a distancias $r \gg \lambda$ (es decir, en la «región ondulatoria»), ϕ debe representar una onda esférica saliente, es decir, debe tener la forma

$$\phi = -\frac{f(t-r/c)}{r}. \quad (73.7)$$

De aquí se obtiene, finalmente, la conclusión de que la onda emitida tiene a distancias grandes, en comparación con l , la forma

$$\phi = -\frac{\dot{V}(t-r/c)}{4\pi r}, \quad (73.8)$$

que se obtiene sustituyendo el argumento t de $(t\dot{V})$ por $t-r/c$.

La velocidad $\mathbf{v} = \text{grad } \phi$ está dirigida en todo punto a lo largo del radio vector \mathbf{r} y su módulo vale $v = \partial\phi/\partial r$. Al derivar (73.8) para distancias $r \gg \lambda$, únicamente es necesario tomar la derivada del numerador, puesto que la derivada del denominador dará un término de orden superior en $1/r$, que podemos despreciar. Puesto que $\partial\dot{V}(t-r/c)/\partial r = -(1/c)\ddot{V}(t-r/c)$, obtenemos

$$\mathbf{v} = \ddot{V}(t-r/c)\mathbf{n}/4\pi cr, \quad (73.9)$$

en donde \mathbf{n} es un vector unidad en la dirección de \mathbf{r} .

La intensidad del sonido viene dada por el cuadrado de la velocidad y resulta aquí independiente de la dirección de emisión, es decir, la emisión es isotropa. El valor medio de la energía total emitida por unidad de tiempo es

$$I = \rho c \oint \overline{v^2} df = (\rho/16c\pi^2) \oint (\overline{\dot{V}^2}/r^2) df,$$

en donde la integración se toma sobre una superficie cerrada que rodea el origen. Tomando esta superficie como una esfera de radio r y observando que el integrando depende únicamente de la distancia al origen, tenemos, finalmente,

$$I = \rho \overline{\dot{V}^2}/4\pi c. \quad (73.10)$$

Esta es la intensidad total del sonido emitido. Vemos que viene dada por la derivada de segundo grado respecto al tiempo al cuadrado del volumen del cuerpo.

Si el cuerpo realiza pulsaciones armónicas de frecuencia ω , la segunda derivada temporal del volumen es proporcional a la frecuencia y a la amplitud de la velocidad de las oscilaciones y su valor cuadrático medio es proporcional al cuadrado de la frecuencia para una amplitud de velocidad determinada de los puntos situados en la superficie del cuerpo. Sin embargo, en el caso de una amplitud determinada de las oscilaciones, la amplitud de

la velocidad es por sí misma proporcional a la frecuencia, de modo que la intensidad de la emisión es proporcional a ω^4 .

Consideremos ahora la emisión del sonido por un cuerpo oscilando sin variación de volumen. Entonces en (73.6) sólo resta el segundo término; lo escribiremos como $\phi = \text{div}[\mathbf{A}(t)/r]$. Como en el caso anterior se llega a la conclusión de que la forma general de la solución para todas las distancias $r \gg l$ es $\phi = \text{div}[\mathbf{A}(t - r/c)/r]$. Se ve inmediatamente que esta expresión es de hecho una solución de la ecuación de onda, puesto que la función $\mathbf{A}(t - r/c)/r$ es una solución y, por tanto, también lo son sus derivadas respecto a las coordenadas. Derivando de nuevo únicamente el numerador, obtenemos (para distancias $r \gg l$)

$$\phi = -\dot{\mathbf{A}}(t - r/c) \cdot \mathbf{n}/cr. \quad (73.11)$$

Para calcular la velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi$, necesitamos de nuevo derivar únicamente \mathbf{A} . De aquí que tengamos, por las reglas familiares del análisis vectorial para la derivación respecto a un argumento escalar,

$$\mathbf{v} = -\frac{\ddot{\mathbf{A}}(t - r/c) \cdot \mathbf{n}}{cr} \mathbf{grad}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

y, sustituyendo $\mathbf{grad}(t - r/c) = -(1/c)\mathbf{grad}r = -\mathbf{n}/c$, tenemos, finalmente,

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{A}})/c^2r. \quad (73.12)$$

La intensidad es ahora proporcional al coseno al cuadrado del ángulo formado por la dirección de emisión (es decir, la dirección de \mathbf{n}) y el vector $\ddot{\mathbf{A}}$; este valor se denomina *emisión dipolar*. La emisión total viene dada por la integral

$$I = \frac{\rho}{c^3} \oint \frac{(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{A}})^2}{r} df.$$

Tomemos de nuevo la superficie de integración como una esfera de radio r y utilicemos coordenadas esféricas con el eje polar en la dirección del vector \mathbf{A} . Una integración simple da, finalmente, para la emisión total por unidad de tiempo

$$I = \frac{4\pi\rho}{3c^3} \overline{\ddot{\mathbf{A}}^2}. \quad (73.13)$$

Los componentes del vector \mathbf{A} son funciones lineales de los componentes de la velocidad \mathbf{u} del cuerpo (ver § 11). Así pues, la intensidad es aquí una función cuadrática de las derivadas de segundo orden de las componentes de la velocidad.

Si el cuerpo realiza oscilaciones armónicas de frecuencia ω , podemos obtener la conclusión (razonando como en el caso anterior) de que la intensidad es proporcional a ω^4 para un valor determinado de la amplitud de la

velocidad. Cuando se tiene una amplitud lineal determinada de las oscilaciones del cuerpo, la amplitud de la velocidad es proporcional a la frecuencia y, por tanto, la intensidad es proporcional a ω^6 .

De un modo totalmente análogo puede resolverse el problema de una emisión de ondas sonoras cilíndricas por un cilindro de una sección recta cualquiera que sufre la acción de pulsaciones u oscilaciones perpendicularmente a su eje. Daremos ahora las fórmulas correspondientes en vista a las aplicaciones posteriores.

Consideremos en primer lugar las pulsaciones de un cilindro y sea $S = S(t)$ su área de la sección recta (variable). A distancias del eje del cilindro tales que $l \ll r \ll \lambda$, en donde l es la dimensión transversal del cilindro, tenemos análogamente a (73.8),

$$\phi = [\dot{S}(t)/2\pi] \log fr, \quad (73.14)$$

en donde $f(t)$ es una función del tiempo y el coeficiente del $\log fr$ se escoje, de modo que se obtenga el valor correcto del flujo de masa a través de una superficie cilíndrica coaxial. De acuerdo con la fórmula para el potencial de una onda cilíndrica saliente [el primer término de la fórmula (70.2)], se obtiene ahora la conclusión de que a todas las distancias $r \gg l$ el potencial viene dado por

$$\phi = -\frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\dot{S}(t') dt'}{\sqrt{[c^2(t-t')^2 - r^2]}}. \quad (73.15)$$

Cuando $r \rightarrow 0$ el término principal de esta expresión es el mismo que (73.14) y la función $f(t)$ en la última ecuación está automáticamente determinada (suponemos que la derivada $S(t)$ tiende con suficiente rapidez a cero cuando $t \rightarrow -\infty$). En el caso de valores muy grandes de r , por otra parte (la «región ondulatoria»), los valores de $t - t' \sim r/c$ son los que tienen más importancia en la integral (73.15). Por tanto, podemos poner en el denominador del integrando

$$(t-t')^2 - r^2/c^2 \approx (2r/c)(t-t' - r/c),$$

obteniendo así

$$\phi = -\frac{c}{2\pi\sqrt{(2r)}} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\dot{S}(t') dt'}{\sqrt{[c(t-t') - r]}}. \quad (73.16)$$

Finalmente, la velocidad $v = \partial\phi/\partial r$. Para realizar la derivación es conveniente sustituir $t - t' - r/c = \xi$:

$$\phi = -\frac{1}{2\pi\sqrt{2r}} \int_0^{\infty} \frac{\dot{S}(t-r/c-\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi;$$

los límites de la integración son entonces independientes de r . El factor $1/\sqrt{r}$ delante de la integral no necesita derivarse, puesto que simplemente daría un término de orden superior en $1/r$. Derivando bajo el signo integral y luego volviendo a la variable t' , obtenemos

$$v = \frac{1}{2\pi\sqrt{(2r)}} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\ddot{S}(t')dt'}{\sqrt{[c(t-t')-r]}}. \quad (73.17)$$

La intensidad viene dada por el producto $2\pi r \rho c v^2$. Debe señalarse que ahora, a diferencia de lo que ocurre en el caso esférico, la intensidad en un instante cualquiera está determinada por el comportamiento de la función $S(t)$ en todos los instantes desde $-\infty$ hasta $t-r/c$.

Finalmente, en el caso de las oscilaciones de traslación de un cilindro infinito en una dirección perpendicular a su eje, el potencial a distancias r tales que $l \ll r \ll \lambda$ tiene la forma

$$\phi = \operatorname{div}(\mathbf{A} \log fr), \quad (73.18)$$

en donde $\mathbf{A}(t)$ se determina al resolver la ecuación de Laplace para el flujo de un fluido incompresible que rodea un cilindro. De aquí que de nuevo obtengamos la conclusión de que para todas las distancias $r \gg l$,

$$\phi = -\operatorname{div} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\mathbf{A}(t')dt'}{\sqrt{[(t-t')^2 - r^2/c^2]}}. \quad (73.19)$$

En conclusión, debemos hacer la siguiente observación. Hemos despreciado ahora totalmente el efecto de la viscosidad del fluido y, de acuerdo con ello, hemos supuesto que existe un flujo potencial en la onda emitida. Sin embargo, en realidad, no tenemos ningún flujo potencial en una capa de fluido de espesor $\sim \sqrt{(\nu/\omega)}$ alrededor del cuerpo oscilante (ver § 24). De aquí, que si han de aplicarse las fórmulas anteriores es necesario que el espesor de esta capa sea pequeño en comparación con la dimensión l del cuerpo:

$$\sqrt{(\nu/\omega)} \ll l. \quad (73.20)$$

Esta condición puede que no se cumpla para frecuencias pequeñas o dimensiones pequeñas del cuerpo.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la intensidad total del sonido emitido por una esfera que realiza oscilaciones de traslación (armónicas) pequeñas de frecuencia ω , siendo comparable el valor de su longitud de onda con el radio R de la esfera.

Solución. Escribamos la velocidad de la esfera en la forma $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t}$; entonces ϕ depende del tiempo a través de un factor $e^{-i\omega t}$ también, y satisface la ecuación $\Delta\phi + k^2\phi = 0$,

en donde $k = \omega/c$. Buscaremos una solución de la forma $\phi = \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} f(r)$, tomándose el origen en la posición instantánea del centro de la esfera. Para f obtenemos la ecuación $\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} (\Delta f + k^2 f) = 0$, de aquí que $\Delta f + k^2 f = \text{constante}$. Aparte de una constante aditiva sin importancia, tenemos, por tanto, $f = Ae^{ikr}/r$. La constante A se determina a partir de la condición $\partial\phi/\partial r = u_r$ para $r = R$, y el resultado es

$$\phi = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} e^{ik(r-R)} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \frac{ikr - 1}{2 - 2ikR - k^2 R^2}.$$

Así tenemos la emisión dipolar. A distancias suficientemente grandes de la esfera podemos despreciar la unidad en comparación con ikr y entonces ϕ toma la forma (73.11), siendo ahora el vector \mathbf{A}

$$\mathbf{\dot{A}} = -\mathbf{u} e^{ik(r-R)} R^3 \frac{i\omega}{2 - 2ikR - k^2 R^2}.$$

Observando que $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{\dot{A}})^2 = |\mathbf{\dot{A}}|^2/2$, obtenemos para la emisión total, según (73.13),

$$I = \frac{2\pi\rho}{3c^3} |\mathbf{u}_0|^2 \frac{R^6 \omega^4}{4 + (\omega R/c)^4}.$$

Cuando $\omega R/c \ll 1$, esta expresión se transforma en $I = \pi\rho R^6 |\mathbf{u}_0|^2 \omega^4 / 6c^6$, resultado que podía obtenerse también directamente sustituyendo en (73.13) la expresión $\mathbf{A} = R^3 \mathbf{u}/2$ a partir del § 11, problema 1. Para $\omega R/c \gg 1$ tenemos $I = 2\pi\rho c R^2 |\mathbf{u}_0|^2 / 3$, correspondiente a la fórmula (73.4).

La fuerza de arrastre que actúa sobre la esfera se obtiene integrando en toda la superficie de la esfera la componente de las fuerzas de presión [$p' = -\rho(\phi')_{r=R}$] en la dirección de \mathbf{u} , y vale

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi}{3} \rho \omega R^3 \mathbf{u} \frac{-k^3 R^3 + i(2 + k^2 R^2)}{4 + k^4 R^4};$$

ver al final del § 24 respecto al significado de una fuerza de arrastre compleja.

Problema 2. El mismo que el problema 1, pero para el caso en el que el radio R de la esfera es comparable en magnitud con $\sqrt{(\nu/\omega)}$, mientras que $\lambda \gg R$.

Solución. Si la dimensión del cuerpo es pequeña en comparación con $\sqrt{(\nu/\omega)}$, entonces la onda emitida debe analizarse, no a partir de la ecuación $\Delta\phi = 0$, sino a partir de la ecuación del movimiento de un fluido viscoso incompresible. La solución apropiada de esta ecuación para una esfera viene dada por las fórmulas (1) y (2) en § 24, problema 5. A distancias grandes puede omitirse el primer término de (1) que disminuye exponencialmente con r . El segundo término da la velocidad $\mathbf{v} = -b(\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{grad}(1/r)$. La comparación con (73.6) muestra que

$$\mathbf{A} = -b\mathbf{u} = \frac{1}{2} R^3 [1 - 3/(i-1)\kappa - 3/2ik^2] \mathbf{u},$$

en donde $\kappa = R\sqrt{(\omega/2\nu)}$, es decir, \mathbf{A} difiere de la expresión correspondiente para un fluido ideal en el factor comprendido entre corchetes. El resultado es

$$I = \frac{\pi\rho R^6}{6c^3} \omega^4 \left(1 + \frac{3}{\kappa} + \frac{9}{2\kappa^2} + \frac{9}{2\kappa^3} + \frac{9}{4\kappa^4} \right) |\mathbf{u}_0|^2.$$

Para $\kappa \gg 1$ esta expresión se transforma en la fórmula dada en el problema 1, mientras que para $\kappa \ll 1$ obtenemos

$$I = 3\pi\rho R^2 \nu^2 \omega^2 |\mathbf{u}_0|^2 / 2c^3,$$

es decir, la emisión es proporcional a la segunda y no a la cuarta potencia de la frecuencia.

Problema 3. Determinar la intensidad del sonido emitido por una esfera que realiza pulsaciones pequeñas (armónicas) de frecuencia arbitraria.

Solución. Busquemos una solución de la forma $\phi = (au/r)e^{ik(r-R)}$, siendo R el radio de equilibrio de la esfera, y determinemos la constante a a partir de la condición $[\partial\phi/\partial r]_{r=R} = u = u_0 e^{-i\omega t}$ (siendo u la velocidad radial de los puntos situados en la superficie de la esfera):

$$a = R^2/(ikR - 1).$$

La intensidad es $I = 2\pi\rho c|u_0|^2 k^2 R^4 / (1 + k^2 R^2)$. Para $kR \ll 1$, $I = 2\pi\rho\omega^2 R^4 |u_0|^2 / c$, de acuerdo con (73.10), mientras que para $kR \gg 1$, $I = 2\pi\rho c R^2 |u_0|^2$, de acuerdo con (73.4).

Problema 4. Determinar la naturaleza de la onda emitida por una esfera (de radio R) que realiza pulsaciones pequeñas cuando la velocidad radial de los puntos situados sobre la superficie es una función arbitraria del tiempo $u(t)$.

Solución. Busquemos una solución de la forma $\phi = f(t')/r$, en donde $t' = t - (r - R)/c$, y determinemos f a partir de la condición límite $\partial\phi/\partial r = u(t)$ para $r = R$. Esto nos da la ecuación $df/dt + cf(t)/R = -Rcu(t)$. Resolviendo esta ecuación lineal y sustituyendo t por t' en la solución, obtenemos

$$\phi(r, t') = -\frac{cR}{r} e^{-ct'/R} \int_{-\infty}^{t'} u(\tau) e^{c\tau/R} d\tau. \quad (1)$$

Si las oscilaciones de la esfera cesan en un instante determinado, digamos $t = 0$ [es decir, $u(\tau) = 0$ para $\tau > 0$], entonces el potencial a una distancia r del centro será de la forma $\phi = \text{constante} \times e^{-ct/r}$ después del instante $t = (r - R)/c$, es decir, disminuirá exponencialmente.

Sea T el tiempo durante el cual la velocidad $u(t)$ varía apreciablemente. Si $T \gg R/c$, es decir, si la longitud de onda de las ondas emitidas $\lambda \sim cT \gg R$, entonces podemos tomar el factor de variación lenta $u(\tau)$ sacándolo de la integral en (1) y sustituyéndolo por $u(t')$. Para distancias $r \gg R$, obtenemos entonces $\phi = -(R^2/r)u(t - r/c)$, de acuerdo con la fórmula (73.8). Por otra parte, si $T \ll R/c$, obtenemos de modo semejante

$$\phi = -\frac{cR}{r} \int_{-\infty}^{t'} u(\tau) d\tau, \quad v = \partial\phi/\partial r = (R/r)u(t'),$$

de acuerdo con la fórmula (73.4).

Problema 5. Determinar el movimiento de un fluido compresible ideal cuando una esfera de radio R realiza en él un movimiento de traslación arbitrario con una velocidad pequeña en comparación con la del sonido.

Solución. Busquemos una solución de la forma

$$\phi = \text{div}[\mathbf{f}(t')/r], \quad (1)$$

siendo r la distancia al origen, tomado en la posición del centro de la esfera en el instante $t' = t - (r - R)/c$; puesto que la velocidad \mathbf{u} de la esfera es pequeña en compara-

ción con la velocidad del sonido, puede despreciarse el movimiento del origen. La velocidad del fluido es

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi = \frac{3(\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{f}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{f}' \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{f}'}{cr^2} + \frac{(\mathbf{f}'' \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}}{c^2 r}, \quad (2)$$

siendo \mathbf{n} un vector unidad en la dirección de \mathbf{r} , y designando con el símbolo prima la derivación respecto al argumento de \mathbf{f} . La condición límite es $v_r = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ para $r = R$, de aquí que $\mathbf{f}''(t) + (2c/R)\mathbf{f}'(t) + (2c^2/R^2)\mathbf{f}(t) = R^2\mathbf{u}(t)$. Resolviendo esta ecuación mediante variación de parámetros, obtenemos para la función $\mathbf{f}(t)$ la expresión general

$$\mathbf{f}(t) = cR^2 e^{-ct/R} \int_{-\infty}^t \mathbf{u}(\tau) \operatorname{sen} \frac{c(t-\tau)}{R} e^{c\tau/R} d\tau. \quad (3)$$

Al sustituir en (1), debemos sustituir t por t' . El límite inferior se toma como $-\infty$, de modo que \mathbf{f} deberá ser cero para $t = -\infty$.

Problema 6. Una esfera de radio R empieza en el instante $t = 0$ a moverse con velocidad constante \mathbf{u}_0 . Determinar la intensidad del sonido emitido en el instante en que empieza el movimiento.

Solución. Sustituyendo en la fórmula (3) del problema 5 $\mathbf{u}(\tau) = 0$ para $\tau < 0$ y $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_0$ para $\tau > 0$, y sustituyendo en la fórmula (2) (reteniendo únicamente el último término, que disminuye con menor rapidez al aumentar r), encontramos para valor de la velocidad del fluido lejos de la esfera:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_0) \frac{\sqrt{2R}}{r} e^{-ct'/R} \operatorname{sen}\left(\frac{ct'}{R} - \frac{1}{4}\pi\right),$$

en donde $t' > 0$. La intensidad total disminuye a lo largo del tiempo de acuerdo con

$$I = (8\pi/3)c\rho R^2 u_0^2 e^{-2ct'/R} \operatorname{sen}^2(ct'/R - \frac{1}{4}\pi).$$

La cantidad total de energía emitida es $1/3\pi\rho R^3 u_0^2$.

Problema 7. Determinar la intensidad del sonido emitido por un cilindro infinito, de radio R , que realiza pulsaciones armónicas de longitud de onda $\lambda \gg R$.

Solución. De acuerdo con la fórmula (73.14), nos encontramos a primero de todo que a distancias $r \ll \lambda$ (en los problemas 7 y 8, r es la distancia desde el eje del cilindro), el potencial es $\phi = Ru \log kr$, en donde $u = u_0 e^{i\omega t}$ es la velocidad de los puntos situados en la superficie del cilindro. Para una comparación con las fórmulas (70.7) y (70.8), encontramos ahora que a distancias grandes el potencial tiene la forma $\phi = -Ru\sqrt{(i\pi/2k)r}e^{ikr}$. Por tanto, la velocidad es

$$\mathbf{v} = Ru\sqrt{(\pi k/2ir)}\mathbf{n}e^{ikr},$$

en donde \mathbf{n} es un vector unidad perpendicular al eje del cilindro y la intensidad por unidad de longitud del mismo es $I = 1/2\pi^2\rho\omega R^2 u_0^2$.

Problema 8. Determinar la intensidad del sonido emitido por un cilindro que realiza oscilaciones de traslación armónicas en una dirección perpendicular a su eje.

Solución. A distancias $r \ll \lambda$ tenemos $\phi = -\operatorname{div}(R^2\mathbf{u} \log kr)$; comparar con la fórmula (73.18) y § 10, problema 3. De aquí se obtiene la conclusión de que a distancias grandes

$$\phi = R^2\sqrt{(i\pi/2k)}\operatorname{div}(e^{ikr}\mathbf{u}/\sqrt{r}) = -R^2\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\sqrt{(\pi k/2ir)}e^{ikr},$$

y, por consiguiente, la velocidad es $\mathbf{v} = -kR^2\sqrt{(i\pi k/2r)}\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})e^{ikr}$. La intensidad es proporcional al coseno al cuadrado del ángulo formado entre las direcciones de oscilación y la de emisión. La intensidad total es $I = (\pi^2/4c^2)\rho\omega^3 R^4 |\mathbf{u}_0|^2$.

Problema 9. Determinar la intensidad del sonido emitido por una superficie plana cuya temperatura varía periódicamente con frecuencia $\omega \ll c^2/\chi$, en donde χ es la conductividad termométrica del fluido.

Solución. Supongamos que la parte variable de la temperatura de la superficie es $T'_0 e^{-i\omega t}$. Estas oscilaciones de temperatura producen una onda térmica amortiguada en el fluido (52.17):

$$T' = T'_0 e^{-i\omega t} e^{-(1-\delta)\sqrt{(\omega/2\chi)}x},$$

y, por tanto, la densidad del fluido oscila también: $\rho' = (\partial\rho/\partial T)_p T' = -\rho\beta T'$, en donde β es el coeficiente de dilatación térmica. Esto, a su vez, da como resultado la presencia de un movimiento determinado por la ecuación de continuidad: $\rho \partial v / \partial x = -\partial \rho' / \partial t = -i\omega \rho \beta T'$. En la superficie sólida la velocidad $v_x = v = 0$, y lejos de dicha superficie tiende al límite

$$v = -i\omega \beta \int_0^\infty T' dx = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \beta \sqrt{(\omega\chi)} T'_0 e^{-i\omega t}.$$

Y este valor se alcanza a distancias $\sim \sqrt{(\chi/\omega)}$, que son pequeñas en comparación con c/ω , y así tenemos una condición límite que actúa sobre la onda sonora resultante. De aquí resulta la intensidad por unidad de área de la superficie que es igual a $I = 1/2c\rho\beta^2\omega\chi|T'_0|^2$.

Problema 10. Un foco puntual que emite una onda esférica está a una distancia l de una pared maciza que refleja totalmente el sonido y limita un semiespacio ocupado por el fluido. Determinar el cociente entre la intensidad total del sonido emitido por la fuente y el que se encontraría en un medio infinito, y, además, la dependencia existente entre la intensidad y la dirección para distancias grandes del foco.

Solución. La suma de las ondas directa y reflejada viene dada por una solución de la ecuación de onda tal que la componente de la velocidad normal $v_n = \partial\phi/\partial n$ sea cero en la pared. Dicha solución es

$$\phi = \left(\frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr'}}{r'} \right) e^{-i\omega t}$$

(para mayor sencillez omitimos el factor constante), en donde r es la distancia al foco O (figura 39), y r' es la distancia desde un punto O' que es la imagen de O en la pared. A distancias grandes del foco tenemos $r' \approx r - 2l \cos \theta$, de modo que

$$\phi = \frac{e^{ik(r-wt)}}{r} (1 + e^{-2ikl \cos \theta}).$$

La relación entre la intensidad y la dirección viene dada por el factor $\cos^2(kl \cos \theta)$.

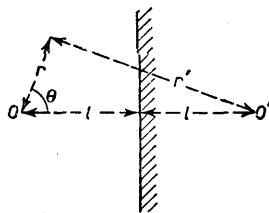


FIG. 39

Para determinar la intensidad total, integramos el flujo de energía $\bar{q} = \bar{p}'\mathbf{v} = -\rho\phi \mathbf{grad}\phi$ [ver (64.4)] sobre la superficie de una esfera de radio arbitrariamente pequeño, centrado en O . Esto nos da $2\pi\rho k\omega(1 + [1/2kl] \operatorname{sen} 2kl)$. Por otra parte, en un medio infinito, deberíamos tener simplemente una onda esférica $\phi = e^{i(kr-\omega t)}/r$, con un flujo de energía total $2\pi\rho k\omega$. Así pues, el cociente de intensidades buscado es $1 + (1/2kl) \operatorname{sen} 2kl$.

Problema 11. El mismo que el problema 10, pero en el caso de un fluido limitado para una superficie libre.

Solución. En la superficie libre debe ser válida la condición $p' = -\rho\phi = 0$; en una onda monocromática esta condición equivale a $\phi = 0$. La solución correspondiente a la ecuación de onda es

$$\phi = \left(\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr'}}{r'} \right) e^{-i\omega t}.$$

A distancias grandes del foco, la intensidad viene dada por un factor $\operatorname{sen}^2(kl \cos \theta)$. La relación buscada de intensidades es $1 - (1/2kl) \operatorname{sen} 2kl$.

§ 74. Principio de reciprocidad

Al deducir las ecuaciones de una onda sonora en § 63, se admitió que la onda se propagaba en un medio homogéneo. En particular, la densidad ρ_0 del medio y la velocidad del sonido en él, c , se consideraron como constantes. Con objeto de obtener algunas relaciones generales aplicables en el caso de un medio inhomogéneo arbitrario deduciremos, en primer lugar, la ecuación correspondiente a la propagación del sonido en dicho medio.

Escribamos la ecuación de continuidad en la forma $d\rho/dt + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Puesto que la propagación del sonido es adiabática, tenemos

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p \right),$$

y la ecuación de continuidad se deduce a $\partial p/\partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p + \rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

Como es normal hagamos $\rho = \rho_0 + \rho'$, en donde ρ_0 es ahora una función determinada de las coordenadas. Sin embargo, en la ecuación $p = p_0 + p'$, debemos considerar, como antes, $p_0 = \text{constante}$, puesto que la presión debe ser constante en todo un medio que esté en equilibrio (como es natural, en ausencia de un campo externo). Así pues, tenemos hasta magnitudes del segundo orden $\partial p'/\partial t + \rho_0 c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación (63.5), pero el coeficiente $\rho_0 c^2$ es una función de las coordenadas. Como en § 63, obtenemos la ecuación de Euler en la forma $\partial \mathbf{v} / \partial t = -(1/\rho_0) \mathbf{grad} p'$. Eliminando \mathbf{v} y omitiendo el sufijo en ρ_0 , obtenemos, finalmente, la ecuación de propagación del sonido en un medio inhomogéneo:

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{grad} p'}{\rho} - \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0. \quad (74.1)$$

Si la onda es monocromática, con frecuencia ω , tenemos $\ddot{p}' = -\omega^2 p'$, de modo que

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{grad} p'}{\rho} + \frac{\omega^2}{\rho c^2} p' = 0. \quad (74.2)$$

Consideremos una onda sonora emitida por un foco pulsante de dimensiones pequeñas; hemos visto en § 73 que la emisión es isotropa. Designemos por A el punto en donde está situado el foco y por $p_A(B)$ la presión p' en un punto B de la onda emitida.[†] Si se sitúa el mismo foco en B , produce en A una presión que designaremos por $p_B(A)$. Deduciremos la relación existente entre $p_A(B)$ y $p_B(A)$.

Para ello, utilizaremos la ecuación (74.2), aplicándola en primer lugar al sonido procedente de un foco situado en A y luego al sonido procedente de un foco situado en B :

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{grad} p'_A}{\rho} + \frac{\omega^2}{\rho c^2} p'_A = 0, \quad \operatorname{div} \frac{\mathbf{grad} p'_B}{\rho} + \frac{\omega^2}{\rho c^2} p'_B = 0.$$

Multipliquemos la primera ecuación por p'_B y la segunda por p'_A y restemos. El resultado es

$$\begin{aligned} & p'_B \operatorname{div} \frac{\mathbf{grad} p'_A}{\rho} - p'_A \operatorname{div} \frac{\mathbf{grad} p'_B}{\rho} \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{p'_B \mathbf{grad} p'_A}{\rho} - \frac{p'_A \mathbf{grad} p'_B}{\rho} \right) = 0. \end{aligned}$$

Integremos esta ecuación respecto a todo el volumen situado entre una superficie cerrada a distancia infinita C y dos pequeñas esferas C_A y C_B que encierran a los puntos A y B , respectivamente. La integral de volumen puede transformarse en tres integrales de superficie y resulta que la integral respecto a C es cero, puesto que el campo sonoro se anula en el infinito. Así pues, obtenemos

$$\oint_{C_A+C_B} \left(p'_B \frac{\mathbf{grad} p'_A}{\rho} - p'_A \frac{\mathbf{grad} p'_B}{\rho} \right) \cdot d\mathbf{f} = 0. \quad (74.3)$$

Dentro de la pequeña esfera C_A , la presión p'_A en la onda procedente de un foco situado en A disminuye rápidamente con la distancia a A y el gradiente $\mathbf{grad} p'_A$ es, por tanto, grande. La presión p'_B debida a un foco situado en B , es una función lentamente variable de las coordenadas en la región próxima al punto A , que está a una distancia considerable de B , de modo

[†] La dimensión del foco o fuente debe ser pequeña en comparación con la distancia entre A y B y con la longitud de onda.

que el gradiente $\mathbf{grad} p'_B$ es relativamente pequeño. Por tanto, cuando el radio de la esfera C_A es suficientemente pequeño, podemos despreciar la integral

$$\oint (p'_A/\rho) \mathbf{grad} p'_B \cdot d\mathbf{f}$$

extendida a C_A en comparación con

$$\oint (p'_B/\rho) \mathbf{grad} p'_A \cdot d\mathbf{f},$$

y en esta última puede extraerse de la integral la magnitud casi constante p'_B sustituyéndola por su valor en el punto A . Un razonamiento semejante es válido para las integrales extendidas a la esfera C_B , y como resultado obtenemos, a partir de (74.3), la relación

$$p'_B(A) \oint_{C_A} \frac{\mathbf{grad} p'_A}{\rho} \cdot d\mathbf{f} = p'_A(B) \oint_{C_B} \frac{\mathbf{grad} p'_B}{\rho} \cdot d\mathbf{f}.$$

Pero $(1/\rho) \mathbf{grad} p' = -\partial \mathbf{v}/\partial t$, y, por tanto, esta ecuación puede volverse a escribir como

$$p'_B(A) \frac{\partial}{\partial t} \oint_{C_A} \mathbf{v}_A \cdot d\mathbf{f} = p'_A(B) \frac{\partial}{\partial t} \oint_{C_B} \mathbf{v}_B \cdot d\mathbf{f}.$$

La integral

$$\oint \mathbf{v}_A \cdot d\mathbf{f}$$

extendida a C_A es el volumen del fluido que fluye por unidad de tiempo a través de la superficie de la esfera C_A , es decir, la variación respecto al tiempo del volumen del foco sonoro pulsante. Puesto que los focos en A y B son idénticos, es evidente que

$$\oint_{C_A} \mathbf{v}_A \cdot d\mathbf{f} = \oint_{C_B} \mathbf{v}_B \cdot d\mathbf{f},$$

y en consecuencia

$$p'_A(B) = p'_B(A). \quad (74.4)$$

Esta ecuación constituye el *principio de reciprocidad*: la presión en B , debida a un foco en A , es igual a la presión en A , debida a un foco semejante en B . Debe resaltarse que este resultado es válido en particular para el caso en que el medio esté compuesto de varias regiones diferentes, cada una de las cuales sea homogénea. Cuando se propaga el sonido en un medio de estos, se refleja y se refracta en las superficies que lo separan de las diversas regiones. Así pues, el principio de reciprocidad es válido también en aquellos casos en que la onda sufre una reflexión y refracción en su trayecto desde A a B .

PROBLEMA

Deducir el principio de reciprocidad para la emisión dipolar del sonido por un foco que oscila sin variación de volumen.

Solución. En este caso la integral

$$\oint \mathbf{v}_A \cdot d\mathbf{f}$$

extendida a C_A es idénticamente nula y debe tomarse la aproximación siguiente al calcular las integrales en (74.3). Para ello escribamos, dentro de los términos de primer orden,

$$p'_B = p'_B(A) + \mathbf{r} \cdot \nabla p'_B,$$

siendo \mathbf{r} el radio vector desde A . En la integral

$$\oint_{C_A} \left(p'_B \frac{\nabla p'_A}{\rho} - p'_A \frac{\nabla p'_B}{\rho} \right) \cdot d\mathbf{f}, \quad (1)$$

los dos términos son ahora del mismo orden de magnitud. Sustituyendo aquí p'_B por el desarrollo anterior, y utilizando el hecho de que la integral

$$\oint (1/\rho) \nabla p'_A \cdot d\mathbf{f}$$

extendida a C_A es ahora cero, obtenemos

$$\oint_{C_A} \left((\mathbf{r} \cdot \nabla p'_B) \frac{\nabla p'_A}{\rho} - p'_A \frac{\nabla p'_B}{\rho} \right) \cdot d\mathbf{f}.$$

A continuación, saquemos fuera de la integral la magnitud casi constante $\nabla p'_B = -\rho \mathbf{v}_B$, sustituyéndola por su valor en A :

$$\rho_A \mathbf{v}_B(A) \cdot \oint_{C_A} \left\{ \frac{p'_A}{\rho} d\mathbf{f} - \mathbf{r} \left(\frac{\nabla p'_A}{\rho} \cdot d\mathbf{f} \right) \right\},$$

en donde ρ_A es la densidad del medio en el punto A . Para calcular esta integral observemos que cerca de un foco el fluido puede suponerse incompresible (ver § 73), y de aquí que podemos escribir para la presión dentro de la esfera pequeña C_A , según (11.1), $p'_A = -\rho \phi = \rho \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}/r^3$. En una onda monocromática $\dot{\mathbf{v}} = -i\omega \mathbf{v}$, $\mathbf{A} = -i\omega \mathbf{A}$; incluyendo también el vector unidad \mathbf{n}_A en la dirección del vector \mathbf{A} para un foco situado en A , vemos que la integral (1) es proporcional a $\rho_A \mathbf{v}_B(A) \cdot \mathbf{n}_A$. Análogamente, la integral extendida sobre la esfera C_B es proporcional a $-\rho_B \mathbf{v}_A(B) \cdot \mathbf{n}_B$, con el mismo factor de proporcionalidad. Igualando la suma a cero, se encuentra la relación buscada

$$\rho_A \mathbf{v}_B(A) \cdot \mathbf{n}_A = \rho_B \mathbf{v}_A(B) \cdot \mathbf{n}_B,$$

que expresa el principio de reciprocidad en el caso de la emisión dipolar del sonido.

§ 75. Propagación de los sonidos en un tubo

Consideremos ahora la propagación de una onda sonora en un tubo estrecho largo. Por tubo «estrecho» entendemos aquél cuya anchura es peque-

ña en comparación con la longitud de onda. La sección recta del tubo puede variar a lo largo de su longitud, tanto en forma como de área. Sin embargo, es importante que esta variación ocurra con suficiente lentitud: el área de la sección recta S debe variar sólo ligeramente en distancias del orden de la anchura del tubo.

En estas condiciones podemos suponer que todas las magnitudes (velocidad, densidad, etc.) son constantes en cualquier sección recta transversal del tubo. Puede suponerse que la dirección de propagación de la onda coincide con el eje del tubo en todo punto. La ecuación para la propagación de dicha onda se deduce de modo más conveniente por un método semejante al utilizado en § 13 al deducir la ecuación de propagación de ondas de gravedad en canales.

En el tiempo unidad una masa $S\rho v$ de fluido pasa a través de una sección recta del tubo. De aquí que la masa del fluido existente en el volumen comprendido entre dos secciones rectas transversales y distantes entre sí dx disminuya en la unidad de tiempo en

$$(S\rho v)_{x+dx} - (S\rho v)_x = [\partial(S\rho v)/\partial x]dx,$$

midiéndose la coordenada x a lo largo del eje del tubo. Puesto que el volumen entre dos secciones permanece constante, la disminución sólo puede deberse a la variación de densidad del fluido. La variación de densidad por unidad de tiempo es $\partial\rho/\partial t$, y la disminución correspondiente en la masa del fluido dentro del volumen $S dx$ entre ambas secciones rectas es $-S(\partial\rho/\partial t)dx$. Igualando ambas expresiones, obtenemos

$$S\partial\rho/\partial t = -\partial(S\rho v)/\partial x, \quad (75.1)$$

que es la «ecuación de continuidad» para el flujo en el interior de una tubería.

A continuación escribamos la ecuación de Euler omitiendo el término cuadrático en la velocidad

$$\partial v/\partial t = -(1/\rho)\partial p/\partial x. \quad (75.2)$$

Derivemos (75.1) respecto al tiempo, considerando a la magnitud que está en el segundo miembro independiente del tiempo, puesto que la derivación de ρ da un término en el que interviene $v\partial\rho/\partial t = v\partial\rho'/\partial t$, y, por tanto, es un término de segundo orden. Así pues, $S\partial^2\rho/\partial t^2 = -\partial(S\rho\partial v/\partial t)/\partial x$. A continuación, sustituimos la expresión (75.2) correspondiente a $\partial v/\partial t$, y expresemos la derivada de la densidad del primer miembro en función de la derivada de la presión a través de $\rho = (\partial\rho/\partial p)p = p/c^2$.

El resultado es la ecuación siguiente para la propagación del sonido en un tubo:

$$\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (75.3)$$

En una onda monocromática p depende del tiempo a través de un factor $e^{-i\omega t}$, y (75.3) se transforma en

$$\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial p}{\partial x} \right) + k^2 p = 0. \quad (75.4)$$

en donde $k = \omega/c$ es el número de onda.[†]

Finalmente, consideremos el problema de la emisión del sonido procedente del extremo abierto de un tubo. La diferencia de presiones entre el gas en el extremo del tubo y el que está en el espacio que lo rodea es pequeño en comparación con la diferencia de presiones dentro del propio tubo. De aquí que la condición límite en el extremo abierto del tubo es, con suficiente exactitud, que la presión p debe ser nula. La velocidad del gas v en el extremo del tubo no es cero; supongamos que su valor es v_0 . El producto Sv_0 es el volumen de gas que sale del tubo por unidad de tiempo.

Podemos ahora considerar el extremo abierto del tubo como una «fuente» de gas de intensidad Sv_0 . El problema de la emisión de un tubo se hace así equivalente al de emisión de un cuerpo pulsante, el cual está resuelto por la fórmula (73.10). En lugar de la derivada respecto al tiempo \dot{V} del volumen del cuerpo debemos ahora poner Sv_0 . Así pues, la intensidad total del sonido emitido es

$$I = \rho S^2 \bar{v_0^2} / 4\pi c. \quad (75.5)$$

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el coeficiente de transmisión para el sonido que pasa de un tubo de sección recta S_1 a otro de sección recta S_2 .

Solución. En el primer tubo tenemos dos ondas, la onda incidente $p_1 = a_1 e^{i(kx - \omega t)}$ y la onda reflejada $p_1' = a_1' e^{-i(kx + \omega t)}$. En el segundo tubo tenemos la onda transmitida $p_2 = a_2 e^{i(2k - \omega t)}$. En el punto en donde se unen los tubos ($x = 0$), deben ser iguales las presiones y, por tanto, también lo deben ser los volúmenes Sv de gas que pasan de un tubo al otro por unidad de tiempo. Ambas condiciones nos dan $a_1 + a_1' = a_2$, $S_1(a_1 - a_1') = S_2 a_2$, de aquí que $a_2 = 2a_1 S_1 / (S_1 + S_2)$. El cociente D entre el flujo de energía de la onda transmitida y el de la onda incidente es

$$D = S_2 \rho c |v_2|^2 / S_1 \rho c |v_1|^2 = S_2 |v_2|^2 / S_1 |v_1|^2$$

o sea

$$D = \frac{4S_1 S_2}{(S_1 + S_2)^2} = 1 - \left(\frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1} \right)^2.$$

Problema 2. Determinar la cantidad de energía emitida por el extremo abierto de un tubo cilíndrico.

[†] Aquí, como en el problema, p designa la parte variable de la presión, que previamente designábamos por p' .

Solución. En la condición límite $p = 0$ en el extremo abierto del tubo, podemos despreciar aproximadamente la onda emitida (veremos que la intensidad emitida del extremo del tubo es pequeña). Entonces, tenemos la condición $p_1 = -p_1'$, en donde p_1 y p_1' son las presiones en la onda incidente y en la onda reflejada que retroceden por el interior del tubo; en el caso de las velocidades tenemos en correspondencia $v_1 = v_1'$, de modo que la velocidad total en el extremo del tubo es $v_0 = v_1 + v_1' = 2v_1$. El flujo de energía en la onda incidente es $cSpv_1^2 = cCpv_0^2/4$. Utilizando (75.5), obtenemos como cociente entre la energía emitida y el flujo de energía de la onda incidente $D = S\omega^2/\pi c^2$. En el caso de un tubo de sección recta circular (*radio R*) tenemos $D = R^2\omega^2/c^2$. Puesto que, por hipótesis, $R \ll c/\omega$, se deduce que $D \ll 1$.

Problema 3. Uno de los extremos de una tubería cilíndrica se recubre con una membrana que realiza una oscilación determinada emitiendo sonido; el otro extremo está abierto. Determinar el modo en que se emite el sonido del tubo.

Solución. En la solución general

$$p = (ae^{ikx} + be^{-ikx})e^{-i\omega t}$$

determinaremos las constantes a y b a partir de las condiciones $v = u = u_0 e^{-i\omega t}$, la velocidad determinada de la membrana en el extremo cerrado ($x = 0$) y $p = 0$ en el extremo abierto ($x = l$). Estas condiciones nos dan al $ae^{ikl} + be^{-ikl} = 0$, $a - b = c_p u_0$. Determinando a y b vemos que la velocidad del gas en el extremo abierto del tubo es $v_0 = u/\cos kl$. Si no existiese tubo, la intensidad del sonido emitido por la membrana oscilante vendría dada por el valor cuadrático medio $S^2|\tilde{u}|^2 = S^2\omega^2|\tilde{u}|^2$, de acuerdo con la fórmula (73.10) poniendo Su en lugar de \tilde{V} ; S es el área de la sección recta de la membrana. La emisión del extremo del tubo es proporcional a $S^2|\tilde{v}_0|^2\omega^2$. Definiendo el «coeficiente de amplificación» de la tubería como $A = S^2|\tilde{v}_0|^2/S^2|\tilde{u}|^2$, obtenemos $A = 1/\cos^2 kl$. Esta expresión se hace infinita para frecuencias de oscilación de la membrana igual a las frecuencias características del tubo (*resonancia*); como es natural, en realidad permanece finita debido a los efectos que hemos despreciado (como el rozamiento originado por la emisión del sonido).

Problema 4. El mismo que el problema 3, pero en el caso de un tubo cónico con la membrana cubriendo el extremo más pequeño.

Solución. La sección recta del tubo es $S = S_0 x^2$; supongamos que los valores de las coordenadas x que corresponden a los extremos menor y mayor son x_1 y x_2 , de modo que la longitud del tubo es $l = x_2 - x_1$. La solución final de la ecuación (75.4) es $p = (1/x)(ae^{ikx} + be^{-ikx})e^{-i\omega t}$; a y b están determinados por las condiciones $v = u$ para $x = x_1$ y $p = 0$ para $x = x_2$. El coeficiente de amplificación resulta ser

$$A = \frac{S_0 x_2^2 |\tilde{v}_2|^2}{S_0 x_1^2 |\tilde{u}|^2} = \frac{k^2 x_2^2}{(\operatorname{sen} kl + kx_1 \cos kl)^2}.$$

Problema 5. Igual que el problema 3, pero en el caso de un tubo cuya sección recta varía exponencialmente a lo largo de su longitud: $S = S_0 e^{\alpha x}$.

Solución. La ecuación (75.4) se transforma en $\partial^2 p / \partial x^2 + \alpha \partial p / \partial x + k^2 p = 0$, de aquí

$$p = e^{-\frac{1}{2}\alpha x}(ae^{imx} + be^{-imx})e^{-i\omega t},$$

con $m = \sqrt{(k^2 - \alpha^2/4)}$. Determinando a y b a partir de las condiciones $v = u$ para $x = 0$

y $p = 0$ para $x = l$, se tiene para el coeficiente de amplificación

$$A = \frac{S_0 e^{\alpha l} |v_0|^2}{S_0 |u|^2} = \frac{e^{\alpha l}}{[\frac{1}{2}(\alpha/m) \operatorname{sen} ml + \cos ml]^2}$$

para $k > \alpha/2$ y

$$A = \frac{e^\alpha}{[\frac{1}{2}(\alpha/m') \operatorname{senh} m'l + \cosh m'l]^2}, \quad m' = \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha^2 - k^2)},$$

para $k < \alpha/2$.

§ 76. Dispersión del sonido

Si existe algún cuerpo en el trayecto de la propagación de una onda sonora, entonces el sonido se *dispersa*: además de la onda incidente aparecen otras ondas (dispersadas), que se propagan en todas las direcciones a partir del cuerpo dispersor. La dispersión de una onda sonora se produce simplemente a causa de la presencia del cuerpo en su trayecto. Además, la onda incidente hace que el propio cuerpo se mueva y, por lo tanto, origina a su vez una emisión adicional de sonido por el propio cuerpo, es decir, una dispersión añadida. Sin embargo, si la densidad del cuerpo es grande en comparación con la del medio en el que se propaga el sonido y si su compresibilidad es pequeña, entonces la dispersión debida al movimiento del cuerpo constituye únicamente una pequeña corrección frente a la dispersión principal originada por la mera presencia del cuerpo. En lo que sigue despreciaremos esta corrección y supondremos, por tanto, que el cuerpo dispersor está inmóvil.

Admitiremos que la longitud de onda λ del sonido es grande en comparación con la dimensión l del cuerpo; para calcular las propiedades de la onda dispersada, podemos utilizar entonces las fórmulas (73.8) y (73.11).[†] Al hacer esto, consideraremos la onda dispersada como si fuese emitida por el cuerpo; la única diferencia es que en lugar de un movimiento del cuerpo en el fluido tenemos ahora un movimiento del fluido relativo al cuerpo. Evidentemente ambos problemas son equivalentes.

Para el potencial de la onda emitida hemos obtenido la expresión $\phi = -\dot{V}/4\pi r - \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}/cr^2$. En esta fórmula V era el volumen del cuerpo. Sin embargo, en el caso presente el propio volumen del cuerpo permanece invariable y debe tomarse \dot{V} no como la variación respecto al tiempo del volumen del cuerpo, sino como el volumen del fluido que entraría, por unidad de tiempo, en el volumen V_0 ocupado por el cuerpo, si éste estuviese ausente. De hecho, en presencia del cuerpo este volumen de fluido no penetra dentro

[†] Al mismo tiempo, la dimensión del cuerpo debe ser grande en comparación con la amplitud del desplazamiento de las partículas del fluido en la onda, puesto que en otro caso el fluido no está, en general, en flujo potencial.

de V_0 , lo que es equivalente a la emisión del mismo volumen de fluido desde V_0 . Como hemos visto en § 73, el coeficiente de $1/4\pi r$ en el primer término de ϕ debe coincidir exactamente con el volumen de fluido emitido desde el origen por unidad de tiempo. Este volumen es fácil de encontrar. La variación por unidad de tiempo de la masa de fluido en un volumen igual al del cuerpo es $V_0\rho$, en donde ρ representa la variación respecto al tiempo de la densidad del fluido en la onda sonora incidente (puesto que la longitud de onda es grande en comparación con la dimensión del cuerpo, puede suponerse que la densidad ρ es constante en distancias del orden de esta dimensión; de aquí que podamos escribir la variación respecto al tiempo de la masa del fluido en V_0 como $V_0\rho$ simplemente, siendo ρ la misma en todo el volumen V_0). La variación de volumen correspondiente a una variación de masa $V_0\rho$ es evidentemente $V_0\rho/\rho$. Así pues, V en la expresión correspondiente a ϕ debe sustituirse por $V_0\rho/\rho$. En una onda plana incidente, la parte variable ρ' de la densidad está relacionada con la velocidad por $\rho' = \rho v/c$; de aquí que $\dot{\rho} = \rho' = \rho\dot{v}/c$ y podemos sustituir $V_0\rho/\rho$ por $V_0\dot{v}/c$.

Cuando el cuerpo se mueve dentro del fluido, el vector \mathbf{A} se determina por las fórmulas (11.5), (11.6): $4\pi\rho A_k = m_{ik}u_k + \rho V_0 u_i$. Ahora debemos sustituir la velocidad \mathbf{u} del cuerpo por la velocidad inversa \mathbf{v} del fluido en la onda incidente que debería tener en la posición del cuerpo si éste estuviese ausente. Así pues,

$$A_i = -m_{ik}v_k/4\pi\rho - V_0 v_i/4\pi. \quad (76.1)$$

Finalmente, obtenemos para el potencial de la onda dispersada

$$\phi_{sc} = -V_0 \dot{v}/4\pi c r - \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r}/cr^2, \quad (76.2)$$

viniendo dado el vector \mathbf{A} por la fórmula (76.1). De aquí que tengamos para la distribución de velocidades de la onda dispersada

$$\mathbf{v}_{sc} = V_0 \ddot{v} \mathbf{n}/4\pi r c^2 + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{A}})/rc^2 \quad (76.3)$$

(ver § 73), siendo \mathbf{n} un vector unidad en la dirección de dispersión.

La cantidad media de energía dispersada por unidad de tiempo dentro de un elemento de ángulo sólido dado $d\Omega$ viene dada por el flujo de energía que es $c\rho\mathbf{v}_{sc}^2 r^2 d\Omega$. La intensidad dispersada I_{sc} se obtiene integrando esta expresión respecto a todas las direcciones. La integración del doble del producto de los dos términos que aparecen en (76.3) da cero, puesto que este producto es proporcional al coseno del ángulo formado entre la dirección de la dispersión y la dirección de propagación de la onda incidente y queda entonces [comparar con (73.10) y (73.13)]

$$I_{sc} = \frac{V_0^2 \rho}{4\pi c^3} \dot{v}^2 + \frac{4\pi \rho}{3c^3} \dot{\mathbf{A}}^2. \quad (76.4)$$

La dispersión está caracterizada, generalmente, por lo que se denomina *sección eficaz efectiva* $d\sigma$, que es el cociente de la energía media (temporal) dispersada dentro de un elemento de ángulo sólido y la densidad de flujo de energía media en la onda incidente. La *sección eficaz efectiva total* σ es la integral de $d\sigma$ en todas las direcciones de dispersión, es decir, el cociente de la intensidad dispersada total y la densidad de flujo de energía incidente, que tiene evidentemente dimensiones de un área.

La densidad de flujo de energía media en la onda incidente es $c\rho\overline{\mathbf{v}^2}$. De aquí que la sección eficaz dispersada efectiva diferencial sea $(c\rho\overline{\mathbf{v}_{sc}^2}/c\rho\overline{\mathbf{v}^2})r^2d\Omega$, es decir,

$$d\sigma = (\overline{\mathbf{v}_{sc}^2}/\overline{\mathbf{v}^2})r^2 d\Omega. \quad (76.5)$$

La sección eficaz efectiva total es

$$\sigma = \frac{V_0^2}{4\pi c^4} \frac{\overline{\mathbf{v}^2}}{\overline{\mathbf{v}^2}} + \frac{4\pi}{3c^4} \frac{\overline{\mathbf{A}^2}}{\overline{\mathbf{v}^2}}. \quad (76.6)$$

En el caso de una onda incidente monocromática, el valor cuadrático medio de la segunda derivada respecto al tiempo de la velocidad es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia. Así pues, la sección eficaz efectiva correspondiente a la dispersión del sonido por un cuerpo, que es pequeño en comparación con la longitud de onda, es proporcional a ω^4 .

Finalmente, estudiaremos brevemente el caso límite opuesto, en el que la longitud de onda del sonido dispersado es pequeña en comparación con las dimensiones del cuerpo. En este caso toda la dispersión, excepto aquella correspondiente a la dispersión en ángulos muy pequeños, se debe a la reflexión simple en la superficie del cuerpo. La parte correspondiente de la sección eficaz de dispersión efectiva total es evidentemente igual al área S de la sección recta del cuerpo cortado por un plano perpendicular a la dirección de la onda incidente. La dispersión en ángulos pequeños (del orden de λ/l), sin embargo, constituye la *difracción* en los bordes del cuerpo. No nos detendremos ahora en exponer la teoría de este fenómeno que es totalmente análogo al de la difracción de la luz.[†] Únicamente mencionaremos que, debido al principio de Babinet, la intensidad total del sonido difractado es igual a la intensidad total del sonido reflejado. De aquí que la parte de difracción de la sección eficaz de dispersión efectiva sea también igual a S , y, por tanto, la sección eficaz total es $2S$.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la sección eficaz efectiva para la dispersión de una onda sonora plana por una esfera maciza de radio R pequeño en comparación con la longitud de onda.

[†] Ver *Teoría clásica de campos*, §§ 7-7 a 7-9. Editorial Reverté, Barcelona.

Solución. La velocidad en un punto determinado de una onda plana es $v = a \cos \omega t$. En el caso de una esfera (ver § 11, problema 1), el vector \mathbf{A} es $-R^3 \mathbf{v}/2$. Para la sección eficaz efectiva diferencial tenemos

$$d\sigma = \frac{\omega^4 R^6}{9c^4} (1 - \frac{3}{2} \cos \theta)^2 d\Omega,$$

siendo θ el ángulo formado por la dirección de la onda incidente y la dirección de dispersión. La intensidad dispersada es máxima en dirección $\theta = \pi$, que es la que tiene sentido opuesto a la de la onda incidente. La sección eficaz efectiva es

$$\sigma = (7\pi/9)(R^3 \omega^2/c^2)^2. \quad (1)$$

En este caso se supone (y lo mismo en los problemas 3 y 4, a continuación) que la densidad ρ_0 de la esfera es grande en comparación con la densidad ρ del gas; si no fuese así, sería necesario tener en cuenta el movimiento de la esfera debido a las fuerzas de presión ejercida sobre ella por el gas oscilante.

Problema 2. Determinar la sección eficaz efectiva correspondiente a la dispersión del sonido por una gota de fluido, teniendo en cuenta la compresibilidad del mismo y el movimiento de la gota producido por la onda incidente.

Solución. Cuando la presión del gas que rodea la gota varía adiabáticamente en p' , el volumen de la gota se reduce en $(V_0/\rho_0)(\partial \rho_0/\partial p)_s p'$, en donde ρ_0 es la densidad de la gota. Pero $(\partial p/\partial \rho_0)_s$ es el cuadrado de la velocidad del sonido c_0 en el fluido y la variación de presión dentro de una onda plana está relacionada con la velocidad por $p' = v c \rho$, siendo ρ la densidad del gas. Así pues, la disminución del volumen de la gota es $V_0 v c \rho / c_0^2 \rho_0$ por unidad de tiempo. En las expresiones (76.2) y (76.3) debemos ahora sustituir $V_0 v/c$ por la diferencia $V_0(v/c - v c \rho / c_0^2 \rho_0)$. Además, en la expresión correspondiente a \mathbf{A} debemos sustituir $-\mathbf{v}$ por la diferencia $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, en donde \mathbf{u} es la velocidad adquirida por la gota como resultado de la acción de la onda incidente. En el caso de una esfera tenemos, utilizando los resultados del § 11, problema 1, $\mathbf{A} = R^3 \mathbf{v}(\rho - \rho_0)/(2\rho_0 + \rho)$. Sustituyendo estas expresiones, tenemos para la sección eficaz efectiva el valor

$$d\sigma = \frac{\omega^4 R^6}{9c^4} \left\{ \left(1 - \frac{c^2 \rho}{c_0^2 \rho_0} \right) - 3 \cos \theta \frac{\rho_0 - \rho}{2\rho_0 + \rho} \right\}^2 d\Omega.$$

La sección eficaz efectiva total es

$$\sigma = \frac{4\pi \omega^4 R^6}{9c^4} \left\{ \left(1 - \frac{c^2 \rho}{c_0^2 \rho_0} \right)^2 + \frac{3(\rho_0 - \rho)^2}{(2\rho_0 + \rho)^2} \right\}.$$

Problema 3. Determinar la sección eficaz efectiva para la dispersión del sonido por una esfera sólida de radio R pequeño en comparación con $\sqrt{(\nu/\omega)}$. Se supone que el calor específico de la esfera es tan grande que puede considerarse su temperatura como constante.

Solución. En este caso hemos de tener en cuenta el efecto de la viscosidad del gas sobre el movimiento de la esfera y debe modificarse el vector \mathbf{A} como se indica en § 73, problema 2. Para $R\sqrt{(\nu/\omega)} \ll 1$ tenemos $\mathbf{A} = -3iR\mathbf{v}\nu/2\omega$.

La conductividad térmica del gas da como resultado también una dispersión del mismo orden. Sea $T'_0 e^{-\omega t}$ la variación de temperatura en un punto determinado de la onda

sonora. La distribución de temperaturas cerca de una esfera es (ver § 52, problema 2)

$$T' = T'_0 e^{-i\omega t} [1 - (R/r)e^{-(1-i)(r-R)\sqrt{\omega/2\chi}}]$$

(en el caso en que $r = R$ debemos tener $T' = 0$). La cantidad de calor transferida del gas a la esfera por unidad de tiempo es [en el caso en que $R\sqrt{(\omega/\chi)} \ll 1$] $q = 4\pi R^2 \kappa [dT'/dr]_{r=R} = 4\pi R \kappa T'_0 e^{-i\omega t}$. Esta transferencia de calor da como resultado una variación del volumen del gas que puede considerarse que influye en la dispersión como una variación efectiva correspondiente del volumen de la esfera, $\dot{V} = 4\pi R \chi \beta T'_0 e^{-i\omega t} = -4\pi R \chi (\gamma - 1) v/c$, siendo β el coeficiente de dilatación térmica del gas y $\gamma = c_p/c_v$; hemos utilizado también las fórmulas (63.13) y (77.2).

Teniendo en cuenta ambos efectos, obtenemos la sección eficaz de dispersión efectiva diferencial

$$d\sigma = (\omega R/c^2)^2 [\chi(\gamma - 1) - \frac{3}{2}\nu \cos \theta]^2 d\Omega.$$

La sección eficaz efectiva total es

$$\sigma = 4\pi(\omega R/c^2)^2 [\chi^2(\gamma - 1)^2 + \frac{3}{4}\nu^2].$$

Estas fórmulas son válidas únicamente si la fuerza de rozamiento de Stokes es pequeña en comparación con la fuerza de inercia, es decir, si $\eta R \ll M\omega$, en donde $M = 4\pi R^3 \rho_0/3$ es la masa de la esfera; en otro caso, el movimiento de la esfera debido a las fuerzas de viscosidad resulta ser importante.

Problema 4. Determinar la fuerza media ejercida sobre una esfera sólida que dispersa una onda sonora plana ($\lambda \gg R$).

Solución. El impulso transmitido por unidad de tiempo desde la onda incidente a la esfera, es decir, la fuerza requerida, es la diferencia entre el impulso de la onda incidente y el flujo del impulso total en la onda dispersada. A partir de la onda incidente se dispersa un flujo de energía $\sigma c \bar{E}_0$, siendo E_0 la densidad de energía de la onda incidente; el flujo del impulso correspondiente se obtiene dividiendo por c y vale, por tanto, σE_0 . En la onda dispersada, el flujo del impulso dentro del elemento de ángulo sólido es $E_s c r^2 d\Omega = E_0 d\Omega$; proyectando este valor en la dirección de propagación de la onda incidente (que evidentemente es la dirección de la fuerza buscada), e integrando respecto a todos los ángulos, obtenemos

$$\bar{E}_0 \int \cos \theta d\Omega.$$

Así pues, la fuerza ejercida sobre la esfera es

$$F = \bar{E}_0 \int (1 - \cos \theta) d\Omega.$$

Sustituyendo el valor $d\Omega$ obtenido del problema 1, obtenemos $F = 11\pi\omega^4 R^6 E_0 / 9c^4$.

§ 77. Absorción del sonido

La existencia de la viscosidad y de la conductividad térmica da como resultado la disipación de la energía de las ondas sonoras y, en consecuencia, el sonido es *absorbido*, es decir, su intensidad disminuye progresivamente. Para calcular la velocidad de disipación de energía E_{meo} , utilizaremos los razonamientos generales siguientes. La energía mecánica coincide con la cantidad máxima de trabajo que puede realizarse al pasar de un estado dado de no equilibrio a otro de equilibrio termodinámico. Como sabemos, a partir de la

termodinámica,[†] el trabajo máximo se obtiene cuando la transición es reversible (es decir, sin variación de entropía) y vale entonces $E_{\text{mec}} = E_0 - E(S)$, en donde E_0 es el valor inicial dado de la energía y $E(S)$ es la energía en el estado de equilibrio con la misma entropía S que el sistema tenía inicialmente. Derivando respecto al tiempo, obtenemos $E_{\text{mec}} = -E(S) = -(\partial E/\partial S)S$. La derivada de la energía respecto a la entropía es la temperatura. De aquí que $\partial E/\partial S$ sea la temperatura que el sistema tendría si estuviese en equilibrio termodinámico (con el valor dado de la entropía). Designando esta temperatura por T_0 , tenemos, por tanto, $E_{\text{mec}} = -T_0 S$.

Utilicemos para S la expresión (49.6), que da la variación respecto al tiempo de la entropía, debida tanto a la conducción térmica como a la viscosidad. Puesto que la temperatura T varía sólo ligeramente a través del fluido y difiere poco de T_0 , puede sacarse fuera de la integral y entonces puede escribirse T_0 simplemente como T :

$$\begin{aligned}\dot{E}_{\text{mec}} = & -\frac{\kappa}{T} \int (\mathbf{grad} T)^2 dV - \frac{1}{2} \eta \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 dV - \\ & - \zeta \int (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 dV.\end{aligned}\quad (77.1)$$

Esta fórmula generaliza la fórmula (16.3) al caso de un fluido compresible que conduce el calor.

Supongamos que el eje x está en la dirección de propagación de la onda sonora. Entonces $v_x = v_0 \cos(kx - \omega t)$, $v_y = v_z = 0$. Los dos últimos términos en (77.1) dan

$$-\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) \int \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 dV = -k^2 \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) v_0^2 \int \sin^2(kx - \omega t) dV.$$

Como es natural, estamos interesados únicamente en el promedio temporal; tomando este promedio, tenemos $-k^2(4\eta/3 + \zeta) \cdot v_0^2 V_0/2$, siendo V_0 el volumen del fluido.

A continuación, calculemos el primer término en (77.1). La desviación T' de la temperatura en la onda sonora respecto a su valor de equilibrio está relacionada con la velocidad a través de la fórmula (63.13), de modo que el gradiente de temperatura es

$$\partial T/\partial x = (\beta c T/c_p) \partial v/\partial x = -(\beta c T/c_p) v_0 k \sin(kx - \omega t).$$

Para el promedio temporal del primer término de (77.1) obtenemos $-\kappa c^2 T \beta^2 v_0^2 k^2 V_0 / 2c_p^2$. Utilizando las fórmulas termodinámicas bien conocidas

$$c_p - c_v = T \beta^2 (\partial p / \partial \rho)_T = T \beta^2 (c_v/c_p) (\partial p / \partial \rho)_S = T \beta^2 c^2 c_v / c_p, \quad (77.2)$$

[†] Ver, por ejemplo, *Física Estadística*, § 19.

podemos volver a escribir esta expresión como $-\frac{1}{2}\kappa(1/c_v - 1/c_p)k^2v_0^2V_0$.

Reuniendo los resultados anteriores, encontramos el valor medio de la disipación de energía:

$$\dot{E}_{\text{mec}} = -\frac{1}{2}k^2v_0^2V_0[(\frac{4}{3}\eta + \zeta) + \kappa(1/c_v - 1/c_p)]. \quad (77.3)$$

La energía total de la onda sonora es

$$\bar{E} = \frac{1}{2}\rho v_0^2V_0. \quad (77.4)$$

El coeficiente de amortiguamiento deducido en § 25, en el caso de las ondas de gravedad, da el modo de disminución de la intensidad con el tiempo. Sin embargo, en el caso de las ondas sonoras, el problema se establece de ordinario de un modo ligeramente distinto: una onda sonora se propaga a través de un fluido y su intensidad disminuye con la distancia x recorrida. Es evidente que esta disminución se producirá de acuerdo con una ley $e^{-2\gamma x}$ y la amplitud disminuirá como $e^{-\gamma x}$, en donde el *coeficiente de absorción* γ viene definido por

$$\gamma = |\dot{E}_{\text{mec}}|/2c\bar{E}. \quad (77.5)$$

Sustituyendo aquí (77.3) y (77.4), encontramos la expresión siguiente para el coeficiente de absorción del sonido:

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2\rho c^3} \left[(\frac{4}{3}\eta + \zeta) + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right]. \quad (77.6)$$

Podemos señalar que es proporcional al cuadrado de la frecuencia del sonido.[†]

Esta fórmula es aplicable en tanto que el coeficiente de absorción determinado por ella sea pequeño: la amplitud debe disminuir relativamente poco en distancias del orden de una longitud de onda (es decir, debemos tener $\gamma c/\omega \ll 1$). La deducción anterior se basa, esencialmente, en esta hipótesis, puesto que hemos calculado la disipación de energía utilizando la expresión para una onda sonora no amortiguada. En el caso de los gases, esta condición se satisface en la práctica siempre. Consideremos, por ejemplo, el primer término en (77.6). La condición $\gamma c/\omega \ll 1$ significa que $v_{\text{mec}}/c^2 \ll 1$. Sin embargo, se sabe a partir de la teoría cinética de los gases que el coeficiente de viscosidad ν para un gas es del orden del producto de recorrido libre medio l por la velocidad térmica media de la molécula; la última es del mismo orden que la velocidad del sonido en el gas, de modo que $\nu \sim lc$. De

[†] M. A. ISAKOVICH ha demostrado que debe existir una absorción especial cuando el sonido se propaga en un sistema de dos fases (una *emulsión*). Debido a las diferentes propiedades termodinámicas de los dos componentes, sus variaciones de temperatura durante el paso del sonido serán, en general, distintas. El intercambio térmico resultante entre los componentes conduce a una absorción adicional del sonido. Teniendo en cuenta la lentitud relativa de este intercambio de calor, tiene lugar con una rapidez comparativamente grande una considerable dispersión del sonido. Para cálculos detallados ver M. A. ISAKOVICH, *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, **18**, 907, 1948.

aquí que tengamos

$$v\omega/c^2 \sim l\omega/c \sim l/\lambda \ll 1, \quad (77.7)$$

puesto que sabemos que $l \ll \lambda$. El término de conducción térmica en (77.6) da el mismo resultado, puesto que $\chi \sim v$.

En los líquidos, la condición de absorción pequeña se ve siempre cumplida cuando el problema de la absorción sonora, como hemos afirmado aquí, tiene significado en el punto considerado. La absorción en una longitud de onda puede resultar grande únicamente si las fuerzas de viscosidad son comparables con las fuerzas de presión que se producen cuando las sustancias se comprimen. Sin embargo, en estas condiciones la propia ecuación de Navier-Stokes (con los coeficientes de viscosidad independientes de la frecuencia) resulta que carece de validez y se produce una dispersión considerable del sonido, debido a procesos de rozamiento interno.[†]

En el caso de la absorción del sonido, la relación existente entre el número de onda y la frecuencia puede escribirse, evidentemente,

$$k = \omega/c + i\alpha\omega^2, \quad (77.8)$$

en donde α designa el coeficiente de ω^2 en el coeficiente de absorción $\gamma = \alpha\omega^2$. Es fácil ver, a partir de esta expresión, cómo debe modificarse la ecuación correspondiente a la onda sonora móvil, con objeto de tener en cuenta la absorción. Para ello observemos que, en ausencia de absorción, la ecuación diferencial para (por ejemplo) la presión $p' = p'(x - ct)$ puede escribirse $\partial p'/\partial x = -(1/c)\partial p'/\partial t$. La ecuación cuya solución es $e^{ikx-\omega t}$, con k dada por (77.8), debe ser, evidentemente,

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p'}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}. \quad (77.9)$$

Si sustituimos t por $\tau + x/c$, esta ecuación se transforma en

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2},$$

es decir, es una ecuación monodimensional de conducción térmica.

La solución general de esta ecuación puede escribirse (ver § 51)

$$p'(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{(\pi ax)}} \int p'_0(\tau') \exp[-(\tau' - \tau)^2/4ax] d\tau', \quad (77.10)$$

en donde $p'_0(\tau) = p'(0, \tau)$. Si la onda se emite durante un intervalo de tiempo finito, la expresión se transforma, a distancias suficientemente grandes del foco, en

$$p'(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{(\pi ax)}} \exp(-\tau^2/4ax) \int p'_0(\tau') d\tau'. \quad (77.11)$$

[†] Un caso especial en que es posible una intensa absorción, pero que puede estudiarse por los métodos usuales, es el de un gas con una conductividad térmica anormalmente grande en comparación con su viscosidad, para tener en cuenta efectos tales como la transferencia radiativa a temperaturas muy elevadas (ver problema 3).

En otras palabras, el perfil de la onda a grandes distancias es gaussiano. Su «anchura» es del orden de \sqrt{ax} , es decir, aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada de la distancia recorrida por la onda, mientras que la amplitud disminuye inversamente a \sqrt{x} . De aquí se puede obtener la conclusión de que la energía total de la onda disminuye como $1/\sqrt{x}$.

Es fácil deducir formas análogas para ondas esféricas; para ello debemos utilizar el hecho de que en dichas ondas

$$\int p' dt = 0$$

(ver § 69). En lugar de (77.11) tenemos ahora

$$p'(r, \tau) = \text{constante} \times \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\exp(-\tau^2/4ar)}{\sqrt{r}},$$

o sea,

$$p'(r, \tau) = \text{constante} \times \frac{\tau}{r^{\frac{3}{2}}} \exp(-\tau^2/4ar). \quad (77.12)$$

Debe producirse una absorción intensa cuando una onda sonora se refleja en una pared sólida (K. F. HERZFELD, 1938; B. P. KONSTANTINOV, 1939). La razón de este comportamiento es la siguiente. En una onda sonora sufren oscilaciones periódicas alrededor de sus valores medios, no sólo la densidad y la presión, sino también la temperatura. Por tanto, cerca de una pared maciza existe una diferencia de temperaturas con fluctuación periódica entre el fluido y la pared, aunque la temperatura media del fluido sea igual a la de la pared. Sin embargo, en la propia pared su temperatura y la del fluido que está en contacto deben ser iguales. Como resultado, se produce un gran gradiente de temperatura en una capa límite delgada de fluido, en donde la temperatura varía rápidamente desde su valor en la onda sonora a la temperatura de la pared. Sin embargo, la presencia de gradientes de temperatura grandes dan como resultado una elevada disipación de energía por conducción térmica. Por una razón semejante la viscosidad del fluido conduce a una absorción intensa del sonido cuando la onda incide en dirección oblicua. En este caso la velocidad del fluido de la onda (en la dirección de propagación) tiene una componente tangencial a la superficie no nula. Sin embargo, en la propia superficie el fluido debe «adherirse» por completo. De aquí que deba producirse un gradiente de velocidades tangencial grande[†] en la capa límite de fluido, dando como resultado una disipación de energía viscosa importante (ver problema 1).

[†] La componente de velocidad normal es cero en el límite debido a las condiciones en la frontera, exista o no la viscosidad.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la fracción de energía que se absorbe cuando una onda sonora se refleja en una pared sólida. La densidad de la pared se supone tan grande que el sonido no penetra en ella y el calor específico es también tan elevado que la temperatura de la pared puede suponerse constante.

Solución. Tomemos el plano de la pared como plano $x = 0$, y el plano de incidencia como plano xy . Sea θ el ángulo de incidencia (que es igual al ángulo de reflexión). La variación de densidad de la onda incidente en un punto cualquiera de la superficie ($x = y = 0$, por ejemplo) es $\rho'_1 = Ae^{-i\omega t}$. La onda reflejada tiene la misma amplitud, de modo que $\rho'_2 = \rho'_1$ en la pared. La variación real de la densidad de fluido, puesto que ambas ondas (incidente y reflejada) se propagan simultáneamente, es $\rho' = 2Ae^{-i\omega t}$. La velocidad del fluido en la onda viene dada por $v_1 = c\rho'_1 n_1 / \rho$, $v_2 = c\rho'_2 n_2 / \rho$. La velocidad total en la pared, $v = v_1 + v_2$, es, por tanto, $v = v_y = 2A \operatorname{sen} \theta \times ce^{-i\omega t} / \rho$ (o, más precisamente, esta es la velocidad que se encuentra cuando no se aplican las condiciones límites correctas en la pared en presencia de viscosidad). La variación real de la velocidad v_y a lo largo de la pared está determinada por la fórmula (24.13) y la disipación de energía debida a la viscosidad por la fórmula (24.14), en la cual debe sustituirse la expresión anterior para v por $v_y e^{-i\omega t}$.

La desviación T' de la temperatura, respecto a su valor medio (que es la temperatura de la pared), se calcula sin utilización de las condiciones límites correctas en la pared, resultando ser, entonces [ver (63.13)], $T' = 2Ac^2 T \beta e^{-i\omega t} / c_p \rho$. Sin embargo, en realidad, la distribución de temperaturas está determinada por la ecuación de conducción térmica, con la condición límite $T' = 0$ para $x = 0$, y de acuerdo con esto viene dada por una fórmula totalmente semejante a (24.13).

Al calcular la disipación de energía debida a la conducción térmica, conforme al primer término de la fórmula (77.1), obtenemos para la disipación de energía total por unidad de área de la pared:

$$\bar{E}_{\text{mech}} = - \frac{A^2 c^2 \sqrt{(2\omega)}}{\rho} \left[\sqrt{\chi} \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) + \sqrt{v \operatorname{sen}^2 \theta} \right].$$

La densidad de flujo de energía media incidente sobre la unidad de área de la pared a partir de la onda incidente es $\overline{c\rho v_i^2} \cos \theta (c^2 A^2 / 2\rho) \cos \theta$. De aquí que la fracción de energía absorbida en la reflexión sea

$$\frac{2\sqrt{(2\omega)}}{c \cos \theta} \left[\sqrt{v \operatorname{sen}^2 \theta} + \sqrt{\chi} \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) \right].$$

Esta expresión es válida únicamente si su valor es pequeño (puesto que al deducirla hemos supuesto que las amplitudes de las ondas incidente y reflejada son iguales). Esta condición significa que el ángulo de incidencia θ no debe ser demasiado próximo a $\pi/2$.[†]

Problema 2. Determinar el coeficiente de absorción del sonido que se propaga en una tubería cilíndrica.

Solución. La contribución principal a la absorción se debe a la presencia de las paredes. El coeficiente de absorción γ es igual a la energía disipada en las paredes por unidad

[†] Puede verse un cálculo de la absorción del sonido en la reflexión con un ángulo cualquiera en B. P. KONSTANTINOV, *Zhurnal tehnicheskoi fiziki*, 9, 226, 1939.

de tiempo y por unidad de longitud de la tubería, dividida por el doble del flujo de energía total que atraviesa una sección recta de la misma. Un cálculo totalmente semejante al dado en el problema 1 conduce al resultado

$$\gamma = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2Rc}} \left[\sqrt{\nu} + \sqrt{\chi} \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) \right],$$

siendo R el radio de la tubería.

Problema 3. Hallar la relación de dispersión para el sonido que se propaga en un medio de conductividad térmica muy alta.

Solución. En presencia de una conductividad térmica elevada el flujo de una onda sonora no es adiabático. De aquí que tengamos ahora, en lugar de la condición de entropía constante,

$$\dot{s} = \kappa \Delta T' / \rho T, \quad (1)$$

que es la forma linearizada de la ecuación (49.4) sin los términos de viscosidad. Como segunda ecuación tomaremos

$$\dot{p}' = \Delta p', \quad (2)$$

que se obtiene eliminando ν entre las ecuaciones (63.2) y (63.3). Tomando como variables fundamentales p' y T' , escribiremos ρ' y s' en la forma

$$\rho' = (\partial p / \partial T)_p T' + (\partial p / \partial p)_T p', \quad s' = (\partial s / \partial T)_p T' + (\partial s / \partial p)_T p'.$$

Sustituyamos estas expresiones en (1) y (2), y luego busquemos T' y p' en una forma proporcional a $e^{i(kx - \omega t)}$. La condición de compatibilidad para las dos ecuaciones resultantes para p' y T' puede transformarse (utilizando diversas relaciones entre las derivadas de las magnitudes termodinámicas) en la forma

$$k^4 - k^2 \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} + \frac{i\omega}{\chi} \right) + \frac{i\omega^3}{\chi c_s^2} = 0, \quad (3)$$

que da la relación buscada entre k y ω . Aquí hemos utilizado la notación

$$c_s^2 = (\partial p / \partial p)_s, \quad c_T^2 = (\partial p / \partial p)_T = c_s^2 / \gamma,$$

en donde $\gamma = c_p / c_v$ es el cociente de los calores específicos.

En el caso límite de frecuencias pequeñas ($\omega \ll c^2 / \chi$), la ecuación (3) da

$$k = \frac{\omega}{c_s} + i \frac{\omega^2 \chi}{2c_s} \left(\frac{1}{c_T^2} - \frac{1}{c_s^2} \right),$$

que corresponde la propagación del sonido con la velocidad ordinaria «adiabática» c_s y un coeficiente de absorción pequeño que es el segundo término de (77.6). Esto es como debería ocurrir, puesto que la condición $\omega \ll c^2 / \chi$, significa que durante un período el calor puede transmitirse únicamente en una distancia $\sim \sqrt{(\chi/\omega)}$ [comparar con (51.7)] que es pequeña en comparación con la longitud de onda c/ω .

En el caso límite opuesto de frecuencias grandes tenemos, a partir de (3),

$$k = \frac{\omega}{c_T} + i \frac{c_T}{2\chi c_s^2} (c_s^2 - c_T^2).$$

En este caso el sonido se propaga con la velocidad «isotérmica» c_T , que es siempre menor que c_s . El coeficiente de absorción es de nuevo pequeño en comparación con el valor

inverso de la longitud de onda y es independiente de la frecuencia e inversamente proporcional a la conductividad térmica.[†]

Problema 4. Determinar la absorción adicional debida a la difusión del sonido que se propaga en una mezcla de dos sustancias (I. G. SHAPOSHNIKOV y Z. A. GOL'DBERG, 1952).

Solución. La mezcla contiene una fuente adicional de absorción del sonido debido a que los gradientes de temperatura y de presión que se presentan en la onda sonora dan como resultado procesos irreversibles de difusión térmica y de barodifusión (pero, evidentemente, no existe ningún gradiente de concentración de masas y, por tanto, no hay transferencia de masa). La absorción viene dada por el término

$$(1/T\rho D)(\partial\mu/\partial C)_{p,T} \int \mathbf{i}^2 dV$$

en la variación de entropía por unidad de tiempo (58.13); llamamos aquí C a la concentración para distinguirla de c , velocidad del sonido. El flujo de difusión es

$$\mathbf{i} = -\rho D[(k_T/T) \mathbf{grad} T + (k_p/p) \mathbf{grad} p],$$

dado k_p por (58.10). Un cálculo semejante al dado en § 77, utilizando diversas relaciones entre las derivadas de las magnitudes termodinámicas, conduce al resultado de que a la expresión (77.6) para el coeficiente de absorción debe añadirse un término

$$\gamma_D = \frac{D\omega^2}{2c\rho^2(\partial\mu/\partial C)_{p,T}} \left\{ \left(\frac{\partial\rho}{\partial C} \right)_{p,T} + \frac{k_T}{c_p} \left(\frac{\partial\rho}{\partial T} \right)_{p,C} \left(\frac{\partial\mu}{\partial C} \right)_{p,T} \right\}^2.$$

Problema 5. Determinar la sección eficaz efectiva para la absorción del sonido por una esfera de radio pequeño en comparación con $\sqrt(\nu/\omega)$.

Solución. La absorción total está compuesta de los efectos de la viscosidad y de la conductividad térmica del gas. El primero viene dado por el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento de Stokes cuando el gas se mueve dentro de un flujo de una onda sonora que rodea la esfera; como en § 76, problema 3, se supone que la esfera no se mueve por la acción de esta fuerza. El efecto de la conductividad viene dado por la cantidad de calor q transferido del gas a la esfera por unidad de tiempo (§ 76, problema 3): la dissipación de energía cuando se transfiere la cantidad de calor q , es qT'/T , siendo T' la diferencia de temperatura existente entre el gas (lejos de la esfera) y la propia esfera. La sección eficaz de absorción efectiva total resulta ser

$$\sigma = \frac{2\pi R}{c} \left[3\nu + 2\chi \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) \right].$$

§ 78. Segunda viscosidad

El coeficiente de viscosidad segundo ζ (que denominaremos simplemente la *segunda viscosidad*) es, normalmente, del mismo orden de magnitud que

[†] La raíz segunda de la ecuación (3), que es cuadrática en k^2 , corresponde a «ondas térmicas» que son rápidamente amortiguadas con el incremento de x . En el límite $\omega_X \ll c^2$ esta raíz da:

$$k = \sqrt(i\omega/\chi) = (1+i)\sqrt(\omega/2\chi),$$

de acuerdo con (52.17). En el caso $\omega_X \gg c^2$ tenemos

$$k = (1+i)\sqrt(\omega c_v/2\chi c_p).$$

el coeficiente de viscosidad η . Sin embargo, existen casos en los que ζ puede tomar valores que superan considerablemente a η . Como sabemos, la segunda viscosidad aparece en los procesos que vienen acompañados de un cambio de volumen (es decir, de la densidad) del fluido. En la compresión o expansión, como en cualquier variación rápida de estado, el fluido deja de estar en equilibrio termodinámico y se establecen procesos internos en los que tiende a restaurar su equilibrio. Estos procesos son, normalmente, tan rápidos (es decir, su tiempo de relajación es tan corto) que la restauración del equilibrio sigue a la variación de volumen casi inmediatamente, a no ser, como es natural, que la variación del volumen por unidad de tiempo sea muy grande.

Sin embargo, puede ocurrir que los tiempos de relajación de los procesos de restauración del equilibrio sean largos, es decir, tengan lugar con una lentitud comparativamente alta. Por ejemplo, si se trata de un gas o un líquido que sea una mezcla de sustancias entre las que se producen reacciones químicas, existe un estado de equilibrio químico caracterizado por las concentraciones de las sustancias de la mezcla para cualquier densidad y temperatura determinadas. Por ejemplo, si comprimimos el fluido, se destruye el estado de equilibrio del fluido y empieza una reacción como resultado de la cual la concentración de la sustancia tiende a tomar los valores de equilibrio correspondientes a las nuevas densidad y temperatura. Si esta reacción no es rápida, la restauración del equilibrio se produce de modo relativamente lento y no sigue inmediatamente a la compresión. El último proceso es acompañado entonces por procesos internos que tienden hacia el estado de equilibrio. Pero los procesos que establecen el equilibrio son irreversibles; hacen aumentar la entropía y, por tanto, en ellos interviene una disipación de energía. De aquí que si el tiempo de relajación de estos procesos es largo se produzca una disipación considerable de energía cuando se comprime o se expande el fluido, y, puesto que esta disipación debe estar acompañada por la segunda viscosidad, se obtiene la conclusión de que ζ es grande.[†]

La intensidad de los procesos disipativos, y, por tanto, el valor de ζ , depende, como es natural, de la relación existente entre la velocidad de compresión o de expansión y el tiempo de relajación. Por ejemplo, si tenemos una compresión o expansión debida a una onda sonora, la segunda viscosidad dependerá de la frecuencia de la onda. Así pues, la segunda viscosidad no es precisamente una constante característica del material considerado, sino que depende de la frecuencia del movimiento en el cual aparece. La dependencia de ζ con la frecuencia se denomina *dispersión*.

[†] Un proceso lento que da como resultado un valor grande de ζ suele ser la transferencia de energía desde los grados de libertad de traslación de una molécula a los grados de libertad de vibración (intramoleculares).

El método general siguiente de estudiar todos estos fenómenos se debe a L. I. MANDEL'SHTAM y M. A. LEONTOVICH (1937). Sea ξ cierta magnitud física que caracteriza el estado de un cuerpo y ξ_0 su valor en el estado de equilibrio; ξ_0 es una función de la temperatura y de la densidad. Por ejemplo, en mezclas de fluidos, ξ puede ser la concentración de un componente y entonces ξ_0 es la concentración en el caso de equilibrio químico.

Si el cuerpo no está en equilibrio, ξ variará con el tiempo, tendiendo al valor ξ_0 . En estados próximos al equilibrio, la diferencia $\xi - \xi_0$ es pequeña y podemos desarrollar la variación por unidad de tiempo $\dot{\xi}$ de ξ en una serie de potencias de esta diferencia. El término de orden cero está ausente, puesto que ξ es cero en el estado de equilibrio, es decir, cuando $\xi = \xi_0$. De aquí que, hasta el término de primer orden, tengamos

$$\dot{\xi} = -(\xi - \xi_0)/\tau. \quad (78.1)$$

El coeficiente de proporcionalidad debe ser negativo, puesto que en otro caso ξ no tendería a un límite finito. La constante positiva τ tiene dimensiones de tiempo y puede considerarse como el tiempo de relajación para el proceso en cuestión; cuanto mayor es τ , más lentamente tiene lugar la aproximación al equilibrio.

En lo que sigue consideraremos procesos en los que el fluido está sometido a una compresión y expansión adiabática[†] periódica, de modo que la parte variable de la densidad (y de las demás magnitudes termodinámicas) depende del tiempo a través de un factor $e^{-i\omega t}$; estamos considerando una onda sonora en el fluido. Junto con la densidad y las demás magnitudes, la posición de equilibrio varía también, de modo que ξ_0 puede escribirse como $\xi_0 = \xi_{00} + \xi'_0$, en donde ξ_{00} es el valor constante de ξ_0 correspondiente a la densidad media y ξ'_0 es una parte periódica proporcional a $e^{-i\omega t}$. Escribiendo el verdadero valor ξ en la forma $\xi = \xi_{00} + \xi'$, obtenemos en conclusión, a partir de la ecuación (78.1), que ξ' también es una función periódica del tiempo relacionada con ξ'_0 por

$$\dot{\xi}' = \xi'_0/(1 - i\omega\tau). \quad (78.2)$$

Calculemos la derivada de la presión respecto a la densidad para el proceso en cuestión. La presión debe considerarse ahora como una función de la densidad y del valor de ξ en el estado considerado, y también de la entropía, que suponemos constante y omitimos para mayor brevedad. Entonces,

$$\partial p / \partial \rho = (\partial p / \partial \rho)_\xi + (\partial p / \partial \xi)_\rho \partial \xi / \partial \rho.$$

De acuerdo con (78.2), sustituimos aquí

$$\frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{\partial \xi'}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \frac{\partial \xi'_0}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho},$$

[†] La variación de entropía (en estados próximos al equilibrio) es de segundo orden de magnitud. De aquí que podamos hablar de un proceso adiabático con este orden de exactitud.

obteniendo así

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{1-i\omega\tau} \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi} + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{\rho} \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho} - i\omega\tau \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi} \right\}.$$

La suma $(\partial p / \partial \rho)_{\xi} + (\partial p / \partial \xi)_{\rho} \partial \xi_0 / \partial \rho$ es exactamente la derivada de p respecto a ρ para un proceso que es tan lento que el fluido permanece en equilibrio. Designándola por $(\partial p / \partial \rho)_{eq}$, tenemos, finalmente,

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{1-i\omega\tau} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{eq} - i\omega\tau \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi} \right]. \quad (78.3)$$

A continuación, supongamos que p_0 es la presión en un estado de equilibrio termodinámico; p_0 está relacionada con las demás magnitudes termodinámicas por la ecuación de estado del fluido y está totalmente determinada cuando la densidad y la entropía están dadas. Sin embargo, la presión p en un estado de no equilibrio difiere de p_0 y es una función también de ξ . Si la densidad aumenta adiabáticamente en $\delta\rho$, la presión de equilibrio varía en $\delta p_0 = (\partial p / \partial \rho)_{eq} \delta\rho$, mientras que el aumento total de la presión es $(\partial p / \partial \rho) \delta\rho$, viniendo dado $\partial p / \partial \rho$ por la fórmula (78.3). De aquí que la diferencia $p - p_0$ entre la presión verdadera y la presión de equilibrio, en un estado en donde la densidad es $\rho + \delta\rho$, vale

$$p - p_0 = \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{eq} \right] \delta\rho = \frac{i\omega\tau}{1-i\omega\tau} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{eq} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\xi} \right] \delta\rho. \quad (78.3a)$$

Ahora estamos interesados en las variaciones de densidad debidas al movimiento del fluido. Entonces $\delta\rho$ está relacionado con la velocidad a través de la ecuación de continuidad, que escribiremos en la forma $d(\delta\rho)/dt + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, en donde d/dt designa la derivada temporal total. En un movimiento periódico tenemos $d(\delta\rho)/dt = -i\omega\delta\rho$, y, por tanto, $\delta\rho = (\rho/i\omega) \operatorname{div} \mathbf{v}$. Sustituyendo esta expresión en (78.3a), obtenemos

$$p - p_0 = \frac{\tau\rho}{1-i\omega\tau} (c_0^2 - c_{\infty}^2) \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (78.4)$$

en donde hemos hecho uso de la notación

$$c_0^2 = (\partial p / \partial \rho)_{eq}, \quad c_{\infty}^2 = (\partial p / \partial \rho)_{\xi}, \quad (78.5)$$

cuyo significado explicaremos a continuación.

Con objeto de relacionar estas expresiones con la viscosidad del fluido, escribiremos a continuación el tensor de tensiones σ_{ik} . En este tensor la presión aparece en el término $-p\delta_{ik}$. Restando la presión p_0 determinada a través de la ecuación de estado, encontramos que en un estado de no-equilibrio σ_{ik} contiene un término adicional

$$-(p - p_0)\delta_{ik} = \frac{\tau\rho}{1-i\omega\tau} (c_{\infty}^2 - c_0^2) \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Comparando este término con la expresión general (15.2) y (15.3) para el tensor de tensiones, en el que $\operatorname{div} \mathbf{v}$ aparece en el término $\zeta \operatorname{div} \mathbf{v}$, llegamos a la conclusión de que la presencia de procesos lentos que tienden a establecer el equilibrio es macroscópicamente equivalente a la presencia de una segunda viscosidad dada por

$$\zeta = \tau \rho (c_\infty^2 - c_0^2) / (1 - i\omega\tau). \quad (78.6)$$

Estos procesos no influyen en la viscosidad ordinaria η . Para aquellos procesos tan lentos en los que $\omega\tau \ll 1$, ζ es

$$\zeta_0 = \tau \rho (c_\infty^2 - c_0^2); \quad (78.7)$$

aumenta con el tiempo de relajación τ , de acuerdo con lo que dijimos anteriormente. Para frecuencias grandes, ζ depende de la frecuencia, es decir, presenta una dispersión.

Consideremos ahora la cuestión de cómo influye en la propagación del sonido en un fluido la presencia de procesos con tiempos de relajación grandes (para mayor definición, hablaremos de reacciones químicas). Para ello, podemos partir de la ecuación del movimiento de un fluido viscoso, viiniendo dada ζ por la fórmula (78.6). Sin embargo, es más sencillo considerar un movimiento en el cual se desprecia la viscosidad, pero la presión viene dada por las fórmulas anteriores en lugar de venir dada por la ecuación de estado. Las relaciones generales que obtuvimos en § 63 siguen siendo, entonces, formalmente aplicables. En particular, el número de onda y la frecuencia siguen estando relacionados por $k = \omega/c$, en donde $c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)}$, y la derivada $\partial p / \partial \rho$ viene ahora dada por (78.3); sin embargo, la magnitud c deja ya de designar la velocidad del sonido al ser compleja. Así pues, obtenemos

$$k = \omega \sqrt{[(1 - i\omega\tau) / (c_0^2 - c_\infty^2 i\omega\tau)]}. \quad (78.8)$$

El «número de onda» dado por esta fórmula es complejo. El significado de este hecho se ve fácilmente. En una onda plana, todas las magnitudes dependen de la coordenada x (estando el eje x en la dirección de propagación) a través de un factor e^{ikx} . Escribiendo k en la forma $k = k_1 + ik_2$, con k_1, k_2 reales, tenemos $e^{ikx} = e^{ik_1 x} e^{-k_2 x}$, es decir, además del factor periódico $e^{ik_1 x}$, tenemos un factor de amortiguamiento $e^{-k_2 x}$ (como es natural, k_2 debe ser positivo). Así pues, la naturaleza compleja del número de onda expresa formalmente el hecho de que la onda está amortiguada, es decir, que existe absorción de sonido. La parte real del número de onda complejo da la variación en fase de la onda con la distancia, y la parte imaginaria es el coeficiente de absorción.

No es difícil separar las partes real e imaginaria de (78.8). En el caso general de ω arbitrario las expresiones para k_1 y k_2 son bastante complicadas y no las escribiremos ahora. Es importante el que k_1 sea una función de la frecuencia (como lo es k_2). Si se puede presentar una reacción química

en el fluido, la propagación del sonido a frecuencias suficientemente altas viene acompañada por la dispersión.

En el caso límite de bajas frecuencias ($\omega\tau \ll 1$), la fórmula (78.8) da hasta una primera aproximación $k = \omega/c_0$, lo que corresponde a la propagación del sonido con velocidad c_0 . Esto es como debería ser: la condición $\omega\tau \ll 1$ significa que el período $1/\omega$ de la onda sonora es grande en comparación con el tiempo de relajación, es decir, el establecimiento de equilibrio químico sigue a las variaciones de densidad de la onda sonora y la velocidad del sonido está determinada por el valor de equilibrio de la derivada $\partial p/\partial\rho$. En segunda aproximación tenemos

$$k = \frac{\omega}{c_0} + \frac{i\omega^2\tau}{2c_0^3}(c_\infty^2 - c_0^2), \quad (78.9)$$

es decir, se produce un amortiguamiento con un coeficiente proporcional al cuadrado de la frecuencia. Utilizando (78.7) podemos escribir la parte imaginaria de k en la forma $k_2 = \omega^2\xi_0/2\rho c_0^3$; esto concuerda con la parte dependiente de ξ del coeficiente de absorción γ que viene dado por (77.6), el cual se obtuvo sin tener en cuenta la dispersión.

En el caso límite opuesto de frecuencias elevadas ($\omega\tau \gg 1$), tenemos en primera aproximación $k = \omega/c_\infty$, es decir, la propagación del sonido con velocidad c_∞ —que es de nuevo un resultado natural, puesto que para $\omega\tau \gg 1$ podemos suponer que no se produce ninguna reacción durante un solo período y, por tanto, la velocidad del sonido debe estar determinada por la derivada $(\partial p/\partial\rho)_k$ supuesta a concentración constante. La segunda aproximación da

$$k = \frac{\omega}{c_\infty} + i\frac{c_\infty^2 - c_0^2}{2\tau c_\infty^3}. \quad (78.10)$$

El coeficiente de amortiguamiento es independiente de la frecuencia. Cuando pasamos de $\omega \ll 1/\tau$ a $\omega \gg 1/\tau$, este coeficiente aumenta monótonamente hacia el valor constante dado por la forma (78.10). Debe señalarse que la magnitud k_2/k_1 , que representa la absorción verificada en el recorrido de una longitud de onda, es pequeña en ambos casos límites ($k_2/k_1 \ll 1$); tiene un máximo a cierta frecuencia intermedia, a saber, $\omega = \sqrt{(c_0/c_\infty)/\tau}$.

Se ve de (78.7), por ejemplo, que

$$c_\infty > c_0, \quad (78.11)$$

puesto que debemos tener $\xi > 0$. Puede obtenerse el mismo resultado mediante razonamientos sencillos basados en el principio de Le Chatelier. Supongamos que el volumen del sistema se reduce y que la densidad aumenta a través de un agente externo. El sistema, por tanto, se sale del equilibrio y de acuerdo con el principio de Le Chatelier deben empezar aquellos procesos que tienden a reducir la presión. Esto significa que $\partial p/\partial\rho$ deberá dis-

minuir y cuando el sistema vuelva al equilibrio, el valor de $\partial p/\partial \rho = c^2$ será menor que en el estado de no equilibrio.

Al deducir todas las formas anteriores hemos supuesto que existe únicamente un solo proceso de relajación interno lento. Son también posibles casos en los que se producen simultáneamente diferentes procesos de este tipo. Pueden generalizarse entonces todas las fórmulas para cubrir dichos casos. En lugar de una sola magnitud ξ , tendremos ahora varias magnitudes ξ_1, ξ_2, \dots , que caracterizan el estado del sistema y una serie correspondiente del tiempo de relajación τ_1, τ_2, \dots . Escogeremos las magnitudes ξ_n de tal modo que cada una de las derivadas $\dot{\xi}_n$ dependa únicamente del valor correspondiente ξ_n , es decir, de modo que

$$\dot{\xi}_n = -(\xi_n - \xi_{n0})/\tau_n. \quad (78.12)$$

Cálculos totalmente semejantes a los anteriores dan entonces

$$c^2 = c_\infty^2 + \sum_n a_n / (1 - i\omega\tau_n), \quad (78.13)$$

en donde $c_\infty^2 = (\partial p / \partial \rho)_\xi$, y las constantes a_n son

$$a_n = (\partial p / \partial \xi_n) (\partial \xi_n / \partial \rho)_{\text{eq}}. \quad (78.14)$$

Si existe únicamente una magnitud ξ , la fórmula (78.13) se transforma en (78.3), como debería ocurrir.

CAPÍTULO IX

ONDAS DE CHOQUE

§ 79. Propagación de las perturbaciones en un gas móvil

Cuando la velocidad de un fluido en movimiento resulta comparable con la del sonido o la supera, resultan de importancia fundamental algunos efectos debidos a la compresibilidad del fluido. Dichos movimientos se encuentran en la práctica cuando nos ocupamos de los gases. Por tanto, la dinámica del flujo de alta velocidad se denomina normalmente *dinámica de gases*.

Ante todo debe señalarse que en la dinámica de gases los números de Reynolds que intervienen son casi siempre muy grandes. Ya que la viscosidad cinemática de un gas es, como sabemos, a partir de la teoría cinética de los gases, del orden del recorrido libre medio de las moléculas multiplicado por la velocidad media de su movimiento térmico; y esta última es del mismo orden que la velocidad del sonido, de modo que $v \sim cl$. Si la velocidad característica en un problema de dinámica de gases es también del orden de c , entonces el número de Reynolds $R \sim Lc/v \sim L/l$, es decir, está determinado por el cociente de la dimensión L al recorrido libre medio l , y como sabemos es muy grande.[†] Como siempre ocurre cuando R es muy grande, la viscosidad tiene un efecto importante en el movimiento del gas sólo en una región muy pequeña, y en lo que sigue consideraremos el gas como un fluido ideal (excepto donde se especifique lo contrario).

El flujo de un gas es totalmente diferente en cuanto a su naturaleza, según sea *subsónico* o *supersoníco*, es decir, cuando la velocidad sea menor o mayor que la del sonido. Una de las características distintivas más importantes del flujo supersónico es el hecho de que puede producirse en él lo que se denominan *ondas de choque*, cuyas propiedades examinaremos con detalle en las secciones siguientes. Ahora consideraremos otra propiedad característica del flujo supersónico relacionada con el modo de propagación de pequeñas perturbaciones en el gas.

[†] No consideraremos el problema del movimiento de cuerpos en gases muy rarificados, en donde el recorrido libre medio de las moléculas es comparable con la dimensión del cuerpo. Este problema no corresponde, en esencia, a la dinámica de fluidos y debe analizarse mediante la teoría cinética de los gases.

Si un gas en movimiento estacionario recibe una ligera perturbación en un punto cualquiera, el efecto de la perturbación se propaga en consecuencia a través del gas con la velocidad del sonido (respecto al propio gas). La velocidad de propagación de la perturbación respecto a un sistema de coordenadas fijo está compuesta de dos partes: en primer lugar, la perturbación es «transportada a lo largo de» por el flujo gaseoso con velocidad v , y en segundo lugar, se propaga respecto al gas con velocidad c en una dirección cualquiera n . Consideremos para mayor sencillez un flujo uniforme de gas con velocidad constante v , sometido a una pequeña perturbación en un punto fijo determinado O (fijo en el espacio). La velocidad $v + cn$, con la cual se propaga la perturbación desde O (respecto al sistema fijo de coordenadas), tiene valores diferentes para las distintas direcciones del vector unidad n . Obtenemos todos sus valores colocando un extremo del vector v en el punto O y dibujando una esfera de radio c centrada en su otro extremo. Los vectores que proceden de O y terminan en puntos de la esfera dan los valores posibles y las direcciones de la velocidad de propagación de la perturbación. Supongamos primero que $v < c$. Entonces el vector $v + cn$ puede tener cualquier dirección en el espacio (figura 40a). Es decir, una perturbación que parte de un punto cualquiera de un flujo subsónico llegará, finalmente, a todos los puntos del gas. Por otra parte, si $v > c$, la dirección del vector $v + cn$ estará incluida, como se ve en la figura 40b, sólo dentro de un cono con su vértice en O que toca a la esfera con su centro en el otro extremo del vector v . Si la abertura del cono es 2α , entonces, como se ve en la figura,

$$\operatorname{sen} \alpha = c/v. \quad (79.1)$$

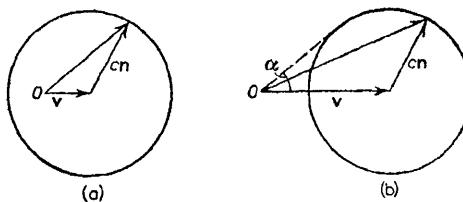


FIG. 40

Así pues, una perturbación que parte de un punto cualquiera de un flujo supersónico se propaga sólo aguas abajo dentro de un cono cuya apertura es tanto más pequeña cuanto menor sea el cociente c/v . Una perturbación que parte de O no influye sobre el flujo que está fuera de este cono.

El ángulo α determinado por la ecuación (79.1) se denomina *ángulo de Mach*. El propio cociente v/c que se presenta con mucha frecuencia en la dinámica de los gases es el *número de Mach*, M :

$$M = v/c. \quad (79.2)$$

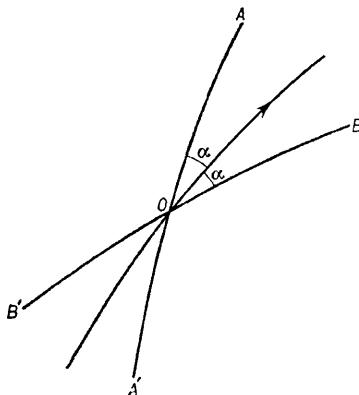


FIG. 41

La superficie que limita la región alcanzada por una perturbación que parte de un punto determinado se denomina *superficie de Mach* o *superficie característica*.

En el caso general de un flujo estacionario arbitrario, la superficie de Mach no es un cono que pasa por todo el volumen. Sin embargo, puede afirmarse que, como antes, esta superficie corta a la línea de corriente a través de un punto cualquiera sobre la misma, formando el ángulo de Mach. El valor del ángulo de Mach varía de un punto a otro con las velocidades v y c . Debe resaltarse ahora, incidentalmente, que, en el caso de flujo con velocidades altas, la velocidad del sonido es diferente en los distintos puntos: varía con las magnitudes termodinámicas (presión, densidad, etc.), de las cuales es una función.[†] La velocidad del sonido, como una función de las coordenadas, se denomina a veces *velocidad local del sonido*.

Las propiedades de flujo supersónico descritas anteriormente dan un carácter muy diferente a éste, del que se obtiene en el flujo subsónico. Si un flujo de gas subsónico se encuentra con cualquier obstáculo (por ejemplo, si el flujo rodea a un cuerpo), la presencia de este obstáculo influye en el flujo en todo el espacio, tanto aguas arriba como aguas abajo; el efecto del obstáculo es nulo sólo asintóticamente a distancia infinita del mismo. Sin embargo, un flujo supersónico incide «ciegamente» sobre el obstáculo; el efecto del mismo se extiende sólo aguas abajo,[‡] y en todo el resto del espacio aguas arriba el gas fluye como si no existiese obstáculo.

En el caso del flujo plano estacionario de un gas, las superficies características pueden sustituirse por *líneas características* (o simplemente *características*) en el plano del flujo. A través de un punto cualquiera O de este plano pasan dos características (AA' y BB' en la figura 41) que cortan a la

[†] En el estudio de las ondas sonoras dado en el capítulo VIII, la velocidad del sonido podía considerarse como constante.

[‡] Para evitar malas interpretaciones, debemos mencionar que, si se forma una onda de choque delante del obstáculo, esta región aumenta un poco (ver § 114).

línea de corriente a través de este punto, formando el ángulo de Mach. Las ramas aguas abajo OA y OB de las características puede decirse que *abandonan* el punto O ; limitan la región AOB del flujo en donde las perturbaciones que parten de O pueden tener influencia. Las ramas $B'O$ y $A'O$ puede decirse que *alcanzan* el punto O ; la región $A'OB'$ entre ellas es aquélla que puede afectar al flujo en O .

El concepto de características (superficies en el caso tridimensional) tienen también un aspecto ligeramente diferente. Son rayos a lo largo de los cuales se «propagan» perturbaciones que satisfacen las condiciones de la acústica geométrica. Por ejemplo, si un flujo de gas supersónico estacionario se encuentra con un obstáculo más bien pequeño, entonces aparecerá una perturbación estacionaria del flujo gaseoso a lo largo de las características que abandonan o salen de este obstáculo. Se obtuvo el mismo resultado en § 67 a partir de un estudio de la acústica geométrica de medios móviles.

Cuando hablamos de una perturbación del estado del gas, entendemos una variación ligera de cualquiera de las magnitudes que caracterizan su estado: la velocidad, la presión, la densidad, etc. Debe hacerse la siguiente aclaración respecto a este punto. Las perturbaciones de los valores de la entropía del gas (a presión constante) y de su vorticidad no se propagan con la velocidad del sonido. Estas perturbaciones, una vez que han surgido, no se mueven respecto al gas; se mueven con el gas a la velocidad apropiada de cada punto respecto a un sistema fijo de coordenadas. En el caso de la entropía esto es una consecuencia inmediata de la ley de conservación (en un fluido ideal),

$$ds/dt \equiv \partial s/\partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}s = 0,$$

que muestra que la entropía de un elemento de volumen determinado cualquiera en el gas permanece constante cuando el elemento se mueve, es decir, cada valor de s se mueve con el punto al cual pertenece. Se deduce el mismo resultado para la vorticidad a partir de la conservación de la circulación.

Podemos decir así que, en el caso de perturbaciones de entropía y de vorticidad, las características son las líneas de corriente. Como es natural, esto no influye en la validez general de los enunciados hechos anteriormente sobre las regiones de influencia, puesto que se basaron únicamente en la existencia de una velocidad de propagación máxima (la del sonido) de las perturbaciones respecto al propio gas.

§ 80. Flujo estacionario de un gas

Podemos obtener inmediatamente, a partir de la ecuación de Bernoulli, un cierto número de resultados generales respecto al flujo estacionario adiabático de un gas. La ecuación en el caso del flujo estacionario es $w + v^2/2 = \text{constante}$ a lo largo de cada línea de corriente; si tenemos un flujo poten-

cial, entonces la constante es la misma para todas las líneas de corriente, es decir, en todos los puntos del fluido. Si existe un punto sobre una determinada línea de corriente, en el cual es cero la velocidad del gas, entonces podemos escribir la ecuación de Bernoulli como

$$w + \frac{1}{2}v^2 = w_0, \quad (80.1)$$

en donde w_0 es el valor de la entalpía en el punto en el cual $v = 0$.

La ecuación de conservación de la entropía en el caso de flujo estacionario es $\mathbf{v} \cdot \nabla s = v \partial s / \partial l = 0$, es decir, s es constante a lo largo de cada línea de corriente. Podemos escribir esta expresión en una forma análoga a (80.1):

$$s = s_0. \quad (80.2)$$

Vemos a partir de la ecuación (80.1) que la velocidad v es mayor en los puntos en donde la entalpía w es más pequeña. Se encuentra el valor máximo de la velocidad (sobre la línea de corriente considerada) en el punto en donde w tiene su valor mínimo. Sin embargo, en el caso de entropía constante tenemos $dw = dp/\rho$; puesto que $\rho > 0$, los diferenciales dw y dp tienen signos iguales y, por consiguiente, w y p varían en el mismo sentido. En resumen, se puede decir que la velocidad aumenta a lo largo de una línea de corriente cuando la presión disminuye y viceversa.

Los valores más pequeños posibles de la presión y de la entalpía (en el flujo adiabático) se obtienen cuando la temperatura absoluta $T = 0$. La presión correspondiente es $p = 0$ y puede tomarse arbitrariamente el valor de w para $T = 0$ como el cero de energía. Entonces $w = 0$ para $T = 0$. Podemos ahora deducir, a partir de (80.1), que el valor mayor posible de la velocidad (para valores determinados de las magnitudes termodinámicas en los puntos en que $v = 0$) es

$$v_{\max} = \sqrt{(2w_0)}. \quad (80.3)$$

Puede obtenerse esta velocidad cuando un gas fluye de modo estacionario saliendo de un recinto a otro en el que está hecho el vacío.[†]

Consideremos ahora como varía la densidad de flujo másico $j = \rho v$ a lo largo de una línea de corriente. A partir de la ecuación de Euler $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -(\mathbf{1}/\rho) \nabla p$, vemos que la relación $v dv = dp/\rho$ entre las diferenciales dv y dp es válida a lo largo de una línea de corriente. Haciendo $dp = c^2 d\rho$, tenemos

$$d\rho/dv = -\rho v/c^2 \quad (80.4)$$

y, sustituyendo en $d(\rho v) = \rho dv + v d\rho$, resulta

$$d(\rho v)/dv = \rho(1 - v^2/c^2). \quad (80.5)$$

[†] Naturalmente, cuando se produce una abrupta disminución de temperatura, el gas debe condensar y formar una «niebla» de dos fases. Sin embargo, esto no influye esencialmente sobre el resultado obtenido.

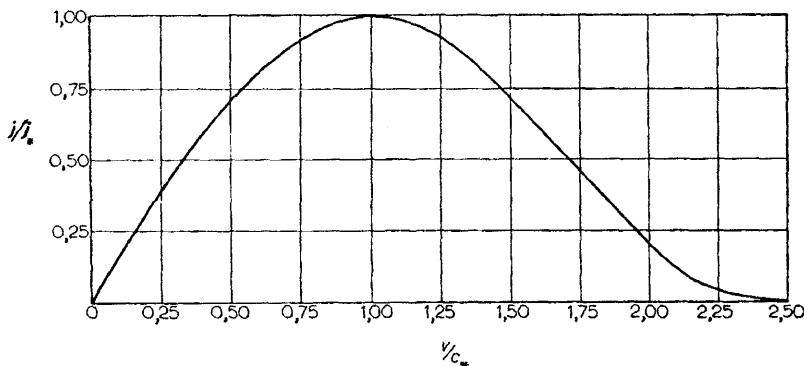


FIG. 42

A partir de esto vemos que, cuando la velocidad aumenta a lo largo de una línea de corriente, la densidad de flujo másico crece en tanto que el flujo permanezca subsónico. Sin embargo, en el intervalo supersónico la densidad de flujo másico disminuye al aumentar la velocidad y se anula al mismo tiempo que ρ cuando $v = v_{\max}$ (figura 42). Esta importante diferencia entre el flujo estacionario subsónico y el supersónico puede interpretarse simplemente del modo siguiente. En un flujo subsónico las líneas de corriente se aproximan en el sentido de la velocidad creciente. Sin embargo, en el flujo supersónico divergen en el mismo sentido.

El flujo j tiene su valor máximo j_* en el punto en que la velocidad del gas es igual a la velocidad local del sonido:

$$j_* = \rho_* c_*, \quad (80.6)$$

en donde el sufijo asterisco indica los valores correspondientes a este punto. La velocidad $v_* = c_*$ se denomina *velocidad crítica*. En el caso general de un gas arbitrario pueden expresarse los valores críticos de las magnitudes en función de sus valores en el punto $v = 0$, resolviendo las ecuaciones simultáneas

$$s_* = s_0, \quad w_* + \frac{1}{2}c_*^2 = w_0. \quad (80.7)$$

Es evidente que, siempre que $M = v/c < 1$, tenemos también $v/c_* < 1$, y si $M > 1$, entonces $v/c_* > 1$. De aquí que el cociente $M_* = v/c_*$ sirve en este caso como un criterio análogo a M , pero es aún más conveniente, puesto que c_* es una constante a diferencia de c que varía a lo largo de la corriente.

En aplicaciones de las ecuaciones generales de la dinámica de los gases, el caso del gas perfecto es de importancia particular. Para un gas perfecto conocemos todas las relaciones existentes entre las diversas magnitudes termodinámicas, las cuales son muy sencillas. Esto hace posible dar una

solución completa de las ecuaciones de la dinámica de los gases en muchos casos.

Daremos a continuación para referencia la relación existente entre las diversas magnitudes termodinámicas en el caso de un gas perfecto, puesto que se necesitarán con frecuencia en lo que sigue. Admitiremos siempre (a no ser que se advierta otra cosa) que el calor específico de un gas perfecto es independiente de la temperatura.

La ecuación de estado para un gas perfecto es

$$pV = p/\rho = RT/\mu, \quad (80.8)$$

en donde $R = 8,314 \times 10^7$ erg/grado es la constante de los gases y μ el peso molecular del gas. La velocidad del sonido en un gas perfecto es, como se vio en § 63,

$$c^2 = \gamma RT/\mu = \gamma p/\rho, \quad (80.9)$$

en donde hemos introducido el cociente de los calores específicos constante en este caso $\gamma = c_p/c_v$, que siempre es superior a la unidad; en el caso de gases monoatómicos $\gamma = 5/3$, y son diatómicos $\gamma = 7/5$ a las temperaturas ordinarias.

La energía interna de un gas perfecto, independientemente de una constante aditiva que carece de importancia, es

$$\epsilon = c_v T = pV/(\gamma - 1) = c^2/(\gamma - 1). \quad (80.10)$$

Para la entalpía tenemos las fórmulas análogas

$$w = c_p T = \gamma pV/(\gamma - 1) = c^2/(\gamma - 1). \quad (80.11)$$

Aquí hemos utilizado la relación bien conocida $c_p - c_v = R/\mu$. Finalmente, la entropía del gas es

$$s = c_v \log(p/\rho^\gamma) = c_p \log(p^{1/\gamma}/\rho). \quad (80.12)$$

Investiguemos ahora el flujo estacionario aplicando las relaciones generales previamente obtenidas al caso de un gas perfecto. Sustituyendo (80.11) en (80.3), encontramos que la velocidad máxima del flujo estacionario es

$$v_{\max} = c_0 \sqrt{[2/(\gamma - 1)]}. \quad (80.13)$$

En el caso de la velocidad crítica obtenemos a partir de la segunda ecuación (80.7)

$$\frac{c_*^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} c_*^2 = w_0 = \frac{c_0^2}{\gamma - 1},$$

de aquí†

$$c_* = c_0 \sqrt{[2/(\gamma + 1)]}. \quad (80.14)$$

La ecuación de Bernoulli (80.1), después de la sustitución de la expresión (80.11) para la entalpía, da la relación existente entre la temperatura

† La figura 42 muestra el cociente j/j_* en el caso del aire ($\gamma = 1,4$, $v_{\max} = 2,45c_*$).

y la velocidad en un punto cualquiera situado sobre la línea de corriente; pueden obtenerse de modo semejante relaciones para la presión y la densidad directamente mediante la ecuación adiabática de Poisson:

$$\rho = \rho_0(T/T_0)^{1/(\gamma-1)}, \quad p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma. \quad (80.15)$$

Así se obtienen los resultados importantes

$$\left. \begin{aligned} T &= T_0 \left[1 - \frac{1}{2}(\gamma-1) \frac{v^2}{c_0^2} \right] = T_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{v^2}{c_*^2} \right), \\ p &= p_0 \left[1 - \frac{1}{2}(\gamma-1) \frac{v^2}{c_0^2} \right]^{1/(\gamma-1)} = p_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{v^2}{c_*^2} \right)^{1/(\gamma-1)}, \\ p &= p_0 \left[1 - \frac{1}{2}(\gamma-1) \frac{v^2}{c_0^2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} = p_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{v^2}{c_*^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (80.16)$$

A veces es conveniente utilizar estas relaciones en una forma que dé la velocidad en función de otras magnitudes:

$$v^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (80.17)$$

También podemos dar la relación existente entre la velocidad del sonido y la velocidad v :

$$c^2 = c_0^2 - \frac{1}{2}(\gamma-1)v^2 = \frac{1}{2}(\gamma+1)c_*^2 - \frac{1}{2}(\gamma-1)v^2. \quad (80.18)$$

De aquí se ve que los números M y M_* están relacionados por

$$M_*^2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1 + 2/M^2}; \quad (80.19)$$

cuando M varía desde 0 hasta ∞ , M_*^2 varía desde 0 hasta $(\gamma+1)/(\gamma-1)$.

Finalmente, podemos dar expresiones para la temperatura, presión y densidad críticas: se obtienen haciendo $v = c_*$ en las fórmulas (80.16):[‡]

$$\left. \begin{aligned} T_* &= 2T_0/(\gamma+1), \\ p_* &= p_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \\ \rho_* &= \rho_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{1/(\gamma-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (80.20)$$

En conclusión, debe resaltarse que los resultados deducidos anteriormente son válidos únicamente para el flujo en el que no se producen ondas de

[‡] Para el aire, por ejemplo, ($\gamma = 1,4$)

$$c_* = 0,913c_0, \quad p_* = 0,528p_0, \quad \rho_* = 0,634\rho_0, \quad T_* = 0,833T_0.$$

choque. Cuando están presentes las ondas de choque, ya no es válida la ecuación (80.2); la entropía del gas aumenta cuando una línea de corriente pasa a través de una onda de choque. Sin embargo, veremos que la ecuación de Bernoulli (80.1) permanece válida aunque existan ondas de choque, puesto que $w + v^2/2$ es una magnitud que se conserva a través de una superficie de discontinuidad (§ 82); por ejemplo, la fórmula (80.14) sigue siendo válida en este caso.

PROBLEMA

Expresar la temperatura, presión y densidad a lo largo de una línea de corriente en función del número de Mach.

Solución. Utilizando las fórmulas obtenidas anteriormente se tiene

$$T_0/T = 1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M^2, \quad p_0/p = [1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M^2]^{\gamma/(\gamma-1)}, \\ \rho_0/\rho = [1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M^2]^{1/(\gamma-1)}.$$

§ 81. Superficies de discontinuidad

En los capítulos anteriores hemos considerado únicamente aquellos flujos en los que todas las magnitudes (velocidad, presión, densidad, etc.), varían de modo continuo. Sin embargo, también es posible la existencia de flujos en los que se producen discontinuidades en la distribución de estas magnitudes.

Se produce una discontinuidad en un flujo gaseoso en una o más superficies; las magnitudes consideradas varían discontinuamente cuando cruzamos dichas superficies que se denominan *superficies de discontinuidad*. En un flujo gaseoso no estacionario las superficies de discontinuidad no permanecen fijas en general; debe resaltarse aquí, sin embargo, que la variación del movimiento respecto al tiempo de estas superficies no guarda ninguna relación con la velocidad del propio flujo gaseoso. Las partículas del gas en su movimiento pueden cruzar una superficie de discontinuidad.

En la superficie de discontinuidad deben satisfacerse ciertas condiciones límites. Para formularlas consideraremos un elemento de la superficie y utilizaremos un sistema de coordenadas fijo a dicho elemento, situando el eje x a lo largo de la normal al mismo.[†]

En primer lugar, el flujo máscico debe ser continuo: la masa de gas que llega a una cara debe ser igual a la masa que sale por la otra. El flujo máscico a través del elemento de superficie considerado es ρv_x por unidad de área. De aquí que se cumplirá $\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x}$, en donde los sufijos 1 y 2 se refieren a las dos caras de la superficie de discontinuidad.

[†] Si el flujo no es estacionario, consideraremos un elemento de la superficie durante un breve intervalo de tiempo.

La diferencia entre los valores de una magnitud cualquiera en ambas caras de la superficie la designaremos encerrándola entre corchetes; por ejemplo, $[\rho v_x] \equiv \rho_1 v_{1x} - \rho_2 v_{2x}$, y la condición que acabamos de deducir puede escribirse

$$[\rho v_x] = 0. \quad (81.1)$$

A continuación, señalemos que el flujo de energía debe ser también continuo. El flujo de energía viene dado por (6.3). Por tanto, tenemos la condición

$$[\rho v_x(\frac{1}{2}v^2 + w)] = 0. \quad (81.2)$$

Finalmente, el flujo del impulso debe ser continuo, es decir, las fuerzas ejercidas entre sí por los gases situados en las dos caras de la superficie de discontinuidad deben ser iguales. El flujo del impulso por unidad de área es (ver § 7) $p n_i + \rho v_i v_k n_k$. El vector normal \mathbf{n} está dirigido a lo largo del eje x . La continuidad de la componente x del flujo del impulso viene dada, por tanto, por la condición

$$[p + \rho v_x^2] = 0, \quad (81.3)$$

mientras la de las componentes y y z da

$$[\rho v_x v_y] = 0, \quad [\rho v_x v_z] = 0. \quad (81.4)$$

Las ecuaciones (81.1)-(81.4) forman un sistema completo de condiciones límites en la superficie de discontinuidad. A partir de ellas podemos inmediatamente deducir la posibilidad de dos tipos de superficie de discontinuidad.

En el primero de ellos no existe flujo másico a través de la superficie. Esto significa que $\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x} = 0$. Puesto que ρ_1 y ρ_2 no son cero, se deduce que $v_{1x} = v_{2x} = 0$. Las condiciones (81.2) y (81.4) se satisfacen entonces y la condición (81.3) da $p_1 = p_2$. Así pues, la componente de velocidad normal y la presión del gas son continuas en la superficie de discontinuidad:

$$v_{1x} = v_{2x} = 0, \quad [p] = 0, \quad (81.5)$$

mientras que las velocidades tangenciales v_y , v_z y la densidad (lo mismo que las demás magnitudes termodinámicas, excepto la presión) pueden ser discontinuas en una cantidad cualquiera. Denominaremos a esto *discontinuidad tangencial*.

En el segundo tipo, el flujo másico no es cero y, por tanto, v_{1x} y v_{2x} tampoco son nulas. Tenemos entonces a partir de (81.1) y (81.4)

$$[v_y] = 0, \quad [v_z] = 0, \quad (81.6)$$

es decir, la velocidad tangencial es continua en la superficie de discontinuidad. Sin embargo, la presión, la densidad (y las demás magnitudes termodinámicas) y la velocidad normal son discontinuas, estando relacionadas sus discontinuidades por (81.1)-(81.3). En la condición (81.2) podemos eliminar

ρv_x por (81.1) y sustituir v^2 por v_x^2 , puesto que v_y y v_z son continuas. Así pues, en este caso deben cumplirse las siguientes condiciones en la superficie de discontinuidad

$$\left. \begin{aligned} [\rho v_x] &= 0, \\ [\tfrac{1}{2}v_x^2 + w] &= 0, \\ [p + \rho v_x^2] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (81.7)$$

Una discontinuidad de este tipo se denomina *onda de choque* o simplemente un *choque*. Si volvemos ahora al sistema de coordenadas fijo debemos sustituir en todos los puntos v_x por la diferencia entre la componente de la velocidad del gas v_n normal a la superficie de discontinuidad y la velocidad u de la propia superficie que se define como normal a la superficie:

$$v_x = v_n - u. \quad (81.8)$$

Las velocidades v y u se toman en el sistema fijo. La velocidad v_x es la velocidad del gas respecto a la superficie de discontinuidad; podemos decir también que $-v_x = u - v_n$ es la velocidad de propagación de la superficie respecto al gas. Debe señalarse que, si v_x es discontinua, esta velocidad tiene valores distintos respecto al gas en las dos caras de la superficie.

Ya hemos estudiado (en § 30) discontinuidades tangenciales, en las cuales la componente de velocidad tangencial es discontinua y vimos que en un fluido incompresible dichas discontinuidades son absolutamente inestables y deben dar como resultado una región turbulenta. Un análisis semejante en el caso de un fluido compresible muestra que se produce la misma inestabilidad para velocidades cualesquiera.

Un caso particular «degenerado» de discontinuidad tangencial es aquél en el que la velocidad es continua, pero no la densidad (y por lo tanto tampoco las demás magnitudes termodinámicas, excepto la presión). Las notas anteriores sobre la inestabilidad no se relacionan con discontinuidades de esta clase.

§ 82. Choque adiabático

Investigaremos ahora las ondas de choque con detalle. Hemos visto que, en este tipo de discontinuidad, la componente tangencial de la velocidad del gas es continua. Por tanto, podemos tomar un sistema coordenado en el cual el elemento superficial considerado está en reposo y la componente tangencial de la velocidad del gas sea cero en ambas caras.[†] Entonces podemos

[†] Este sistema coordenado se utiliza en todos los §§ 82-85, 87, 88.

Una onda de choque en reposo constituye una *discontinuidad de compresión*. Si el choque es perpendicular a la dirección del flujo, tenemos un *choque normal*, en otro caso un *choque oblicuo*.

escribir la componente normal v_x como v simplemente y las condiciones (81.7) toman la forma

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \equiv j, \quad (82.1)$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \quad (82.2)$$

$$w_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = w_2 + \frac{1}{2}v_2^2, \quad (82.3)$$

donde j designa la densidad de flujo másico en la superficie de discontinuidad. En lo que sigue tomaremos siempre j como positivo, con el gas pasando del lado 1 al lado 2. Es decir, denominaremos gas 1 a aquél dentro del cual se mueve la onda de choque y gas 2 al que permanece detrás del choque. Denominaremos la cara de la onda de choque que mira hacia el gas 1 el *frente* de la onda de choque y hacia el gas 2 la *parte posterior*.

Deduciremos una serie de relaciones que resultan de las condiciones anteriores. Utilizando los volúmenes específicos $V_1 = 1/\rho_1$, $V_2 = 1/\rho_2$, obtenemos a partir de (82.1)

$$v_1 = jV_1, \quad v_2 = jV_2 \quad (82.4)$$

y, sustituyendo en (82.2),

$$p_1 + j^2 V_1 = p_2 + j^2 V_2, \quad (82.5)$$

o sea,

$$j^2 = (p_2 - p_1)/(V_1 - V_2). \quad (82.6)$$

Esta fórmula, junto con (82.4), relaciona la variación de propagación respecto al tiempo de una onda de choque con las presiones y densidades del gas en ambas caras de la superficie.

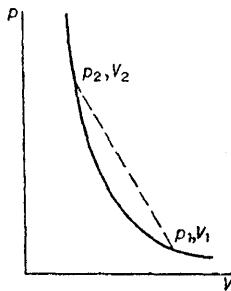


FIG. 43

Puesto que j^2 es positivo, vemos que o bien $p_2 > p_1$, $V_1 > V_2$ o $p_2 < p_1$, $V_1 < V_2$; veremos a continuación que sólo puede realmente presentarse el primer caso.

Podemos señalar la siguiente fórmula útil para la diferencia de velocidades $v_1 - v_2$. Sustituyendo (82.6) en $v_1 - v_2 = j(V_1 - V_2)$, obtenemos[†]

$$v_1 - v_2 = \sqrt{[(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)]}. \quad (82.7)$$

A continuación, escribamos (82.3) en la forma

$$w_1 + \frac{1}{2}j^2V_1^2 = w_2 + \frac{1}{2}j^2V_2^2 \quad (82.8)$$

y, sustituyendo j^2 de (82.6), obtenemos

$$w_1 - w_2 + \frac{1}{2}(V_1 + V_2)(p_2 - p_1) = 0. \quad (82.9)$$

Si sustituimos la entalpía w por $\epsilon + pV$, en donde ϵ es la energía interna, podemos escribir esta relación como

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 + \frac{1}{2}(V_1 - V_2)(p_1 + p_2) = 0. \quad (82.10)$$

Estas relaciones son válidas entre las magnitudes termodinámicas en ambas caras de la superficie de discontinuidad.

Para unos valores dados de p_1 , V_1 , la ecuación (82.9) o la (82.10) da la relación entre p_2 y V_2 . Esta relación se denomina *adiabática del choque* o *adiabática de Hugoniot* (W. J. M. RANKINE, 1870; H. HUGONIOT, 1889). Se representa gráficamente en el plano pV (figura 43) por una curva que pasa por el punto dado (p_1, V_1) [para $p_1 = p_2$, $V_1 = V_2$ tenemos también $\epsilon_1 = \epsilon_2$, de modo que satisface idénticamente la ecuación (82.10)]. Debe señalarse que la adiabática del choque no puede cortar la línea vertical $V = V_1$, excepto en (p_1, V_1) . Efectivamente, la existencia de otra intersección significaría que presiones diferentes que satisfagan a (82.10) corresponderían al mismo volumen. Sin embargo, para $V_1 = V_2$ tenemos a partir de (82.10) también que $\epsilon_1 = \epsilon_2$, y cuando los volúmenes y la energía son las mismas, las presiones

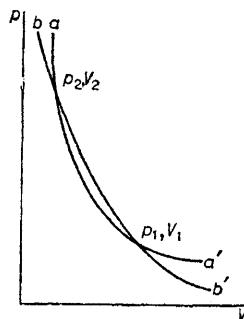


FIG. 44

[†] Aquí escribimos la raíz cuadrada positiva, puesto que debemos tener $v_1 - v_2 > 0$, como veremos posteriormente (§ 84).

deben ser iguales. Así pues, la línea $V = V_1$ divide a la adiabática del choque en dos partes, cada una de las cuales cae totalmente a un lado de la línea. Análogamente, la adiabática del choque corta o se encuentra con la línea horizontal $p = p_1$ únicamente en el punto (p_1, V_1) .

Sea aa' (figura 44) la adiabática del choque que pasa a través del punto (p_1, V_1) como un estado del gas 1. Tomemos un punto cualquiera (p_2, V_2) sobre él y dibujemos a través de este punto otra adiabática bb' , para la cual (p_2, V_2) es un estado del gas 1. Es evidente que el par de valores (p_1, V_1) satisface también la ecuación de esta adiabática. Las adiabáticas aa' y bb' se cortan, por tanto, en dos puntos (p_1, V_1) y (p_2, V_2) . Debe resaltarse que las adiabáticas no son idénticas como ocurriría en el caso de adiabáticas de Poisson a través de un punto determinado. Esto es una consecuencia del hecho de que la ecuación de la adiabática del choque no puede escribirse en la forma $f(p, V) = \text{constante}$, siendo f una determinada función, mientras que la adiabática de Poisson, por ejemplo, puede escribirse $s(p, V) = \text{constante}$. La adiabática de Poisson para un gas determinado forma una familia de curvas de un solo parámetro, pero la adiabática del choque está determinada por dos parámetros, los valores iniciales p_1 y V_1 . Esto tiene también la consecuencia importante siguiente: si dos (o más) ondas de choque sucesivas hacen pasar un gas del estado 1 al estado 2 y luego de éste al estado 3, la transición del estado 1 al estado 3 no puede, en general, verse influida por el paso de una onda de choque cualquiera.

En el caso de un estado termodinámico inicial determinado del gas (es decir, para un valor de p_1 y V_1), se define la onda de choque por un solo parámetro; por ejemplo, si se da la presión p_2 detrás del choque, entonces V_2 queda determinada por la adiabática de Hugoniot, y la densidad del flujo j y las velocidades v_1 y v_2 vienen dadas entonces por las fórmulas (82.4) y (82.6). Sin embargo, debe mencionarse que estamos considerando aquí la onda de choque en un sistema coordenado en el que el gas se está moviendo normalmente a la superficie. Si la onda de choque puede estar situada oblicuamente respecto a la dirección del flujo, se necesita otro parámetro; por ejemplo, el valor de la componente tangencial de la velocidad respecto a la superficie.

Puede mencionarse la siguiente interpretación gráfica conveniente de la fórmula (82.6). Si el punto (p_1, V_1) sobre la adiabática del choque (figura 43) se une por una cuerda a otro punto cualquiera (p_2, V_2) sobre la misma, entonces $(p_2 - p_1)/(V_2 - V_1) = -j^2$ es exactamente la pendiente de esta cuerda respecto al eje de abscisas. Así pues, j y, por tanto, la velocidad de la onda de choque está determinada en cada punto de la adiabática del choque por la pendiente de la cuerda que une este punto al punto (p_1, V_1) .

Como las demás magnitudes termodinámicas, la entropía es discontinua en una onda de choque. Por el principio de aumento de entropía, la entropía

de un gas puede aumentar únicamente durante su movimiento. De aquí que la entropía s_2 del gas que ha pasado a través de la onda de choque deba superar a su entropía inicial s_1 :

$$s_2 > s_1. \quad (82.11)$$

Veremos a continuación que esta condición plantea unas restricciones muy importantes sobre el modo de variación de todas las magnitudes que intervienen en una onda de choque.

Debe resaltarse también el hecho siguiente. La presencia de ondas de choque da como resultado un aumento de entropía en aquellos flujos que pueden considerarse como movimientos de un fluido ideal en todo el espacio, siendo nulas la viscosidad y la conductividad térmica. El aumento de entropía significa que el movimiento es irreversible, es decir, se disipa energía. Así pues, las discontinuidades son un medio mediante el cual puede disiparse la energía del movimiento de un fluido ideal. Se deduce que la paradoja de d'Alembert (§ 11) no surge cuando se mueven los cuerpos en un fluido ideal, de tal modo que producen ondas de choque. En dichos casos existe una fuerza de arrastre.

El verdadero mecanismo mediante el cual aumenta la entropía en las ondas de choque se basa, como es natural, en procesos disipativos que se producen en las capas muy delgadas, que son las ondas de choque reales (ver § 87). Sin embargo, debe señalarse que la cantidad de esta disipación está totalmente determinada por las leyes de conservación de masa, energía e impulso cuando se aplican a ambas caras de dichas capas; la anchura de las capas es precisamente la necesaria para dar el aumento de entropía requerido por estas leyes de conservación.

El aumento de entropía en una onda de choque tiene otro efecto importante sobre el movimiento: aunque tuviésemos un flujo potencial delante del choque, el flujo detrás del mismo es, en general, rotacional. Volveremos a este tema en § 106.

§ 83. Ondas de choque débiles

Consideremos una onda de choque en la cual la discontinuidad de todas las magnitudes sea pequeña; la denominaremos *onda de choque débil*. Transformemos la relación (82.9) desarrollando en potencias de las diferencias pequeñas $s_2 - s_1$ y $p_2 - p_1$. Veremos que los términos de primero y segundo orden en $p_2 - p_1$ se anulan entonces; por tanto, podemos llevar a cabo el desarrollo respecto a $p_2 - p_1$ hasta el tercer orden. En el desarrollo respecto a $s_2 - s_1$ únicamente es necesario retener los términos de primer orden. Tenemos así

$$\begin{aligned} w_2 - w_1 = & (\partial w / \partial s_1)_p (s_2 - s_1) + (\partial w / \partial p_1)_s (p_2 - p_1) + \\ & + \frac{1}{2} (\partial^2 w / \partial p_1^2)_s (p_2 - p_1)^2 + \frac{1}{6} (\partial^3 w / \partial p_1^3)_s (p_2 - p_1)^3. \end{aligned}$$

Mediante la identidad termodinámica $dw = T ds + V dp$, tenemos para las derivadas

$$(\partial w / \partial s)_p = T, \quad (\partial w / \partial p)_s = V.$$

De aquí que

$$\begin{aligned} w_2 - w_1 &= T_1(s_2 - s_1) + V_1(p_2 - p_1) + \\ &+ \frac{1}{2}(\partial V / \partial p_1)_s(p_2 - p_1)^2 + \frac{1}{6}(\partial^2 V / \partial p_1^2)_s(p_2 - p_1)^3. \end{aligned}$$

El volumen V_2 necesita desarrollarse únicamente respecto a $p_2 - p_1$, puesto que el segundo término de la ecuación (82.9) ya contiene la pequeña diferencia $p_2 - p_1$, y un desarrollo respecto a $s_2 - s_1$ daría un término de la forma $(s_2 - s_1)(p_2 - p_1)$, que carece de interés. Así pues,

$$V_2 - V_1 = (\partial V / \partial p_1)_s(p_2 - p_1) + \frac{1}{2}(\partial^2 V / \partial p_1^2)_s(p_2 - p_1)^2.$$

Sustituyendo este desarrollo en (82.9), obtenemos

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{12T_1} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3. \quad (83.1)$$

Así pues, la discontinuidad de la entropía en una onda de choque débil es del tercer orden de magnitud respecto a la discontinuidad de la presión.

En todos los casos que hemos analizado, la compresibilidad $-(\partial V / \partial p)_s$ disminuye al aumentar la presión, es decir, la segunda derivada

$$(\partial^2 V / \partial p^2)_s > 0. \quad (83.2)$$

Sin embargo, debe resaltarse que esto no es una relación termodinámica y no puede deducirse mediante razonamientos termodinámicos. Por consiguiente, es posible, en principio, que pueda ser negativa la derivada. En lo que sigue veremos en varias ocasiones que es muy importante en la dinámica de gases el signo de la derivada $(\partial^2 V / \partial p^2)_s$. Supondremos en el futuro que es positiva.[†]

Dibujemos a través del punto 1 (p_1, V_1) en el plano pV dos curvas, la correspondiente a la adiabática del choque y la adiabática de Poisson. La ecuación de esta última es $s_2 - s_1 = 0$. Comparándola con la ecuación (83.1) de la adiabática del choque cerca del punto 1, vemos que las dos curvas tienen contacto de segundo orden en este punto, siendo iguales tanto las derivadas de primero como de segundo orden. Con objeto de decidir la posición relativa de ambas curvas cerca del punto 1, utilizaremos el hecho de que, de acuerdo con (83.1) y (83.2), debemos tener $s_2 > s_1$ sobre la adiabática del choque para $p_2 > p_1$, mientras que sobre la adiabática de Poisson $s_2 = s_1$. La abscisa de un punto sobre la adiabática del choque debe, por tanto, superar la correspondiente a un punto situado sobre la adiabática de Poisson

[†] En el caso de un gas perfecto $(\partial^2 V / \partial p^2)_s = (\gamma + 1)V / \gamma^2 p^2$. Esta expresión puede obtenerse de modo más simple derivando la ecuación de Poisson $pV^\gamma = \text{constante}$.

que tenga la misma ordenada p_2 . Esto se deduce del hecho de que por la bien conocida fórmula termodinámica $(\partial V/\partial s)_p = (T/c_p)(\partial V/\partial T)_p$, la entropía aumenta con el volumen a presión constante para todas las sustancias que se dilatan al calentarse, es decir, que tienen $(\partial V/\partial T)_p$ positiva. Análogamente, podemos deducir que en el caso de que $p_2 < p_1$, la abscisa de un punto situado sobre la adiabática de Poisson supera a aquélla que está sobre el punto correspondiente de la adiabática del choque. Así pues, cerca del punto de contacto, las dos curvas tienen unas posiciones relativas indicadas en la figura 45 (HH' es la adiabática del choque y PP' la adiabática de Poisson),^t siendo ambas curvas cóncavas hacia arriba, según (83.2).

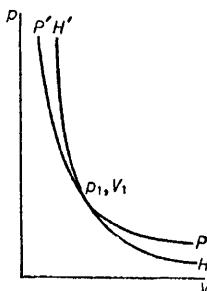


FIG. 45

En el caso en que $p_2 - p_1$ y $V_2 - V_1$ sean pequeños, puede escribirse la fórmula (82.6) en primera aproximación, como $j^2 = -(\partial p/\partial V)_s$ (tomamos la derivada para entropía constante, puesto que coinciden en el punto 1 las tangentes a ambas adiabáticas). En la misma aproximación, las velocidades v_1 y v_2 son iguales:

$$v_1 = v_2 = v = jV = \sqrt{[-V^2(\partial p/\partial V)_s]} = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s}.$$

Que coincide exactamente con la velocidad del sonido c . Así pues, la velocidad de propagación de las ondas de choque débiles es la velocidad del sonido en primera aproximación:

$$v = c. \quad (83.3)$$

A partir de las propiedades de la adiabática correspondiente al choque cerca del punto 1 deducidas anteriormente podemos obtener un cierto número de consecuencias importantes. Puesto que tenemos que $s_2 > s_1$ en una onda de choque, se deduce que $p_2 > p_1$, es decir, el punto 2 (p_2, V_2) debe estar por encima del punto 1. Además, puesto que la cuerda 12 tiene una pendiente mayor que la tangente a la adiabática en el punto 1 (figura 43), y la pendiente de la tangente es igual a la derivada $(\partial p/\partial V)_s$, tenemos

^t Si $(\partial V/\partial T)_p$ es negativa, se invierte la posición relativa.

$j^2 > -(\partial p / \partial V_1)_{s_1}$. Multiplicando ambos miembros de esta desigualdad por V_1^2 , resulta

$$j^2 V_1^2 = v_1^2 > -V_1^2 (\partial p / \partial V_1)_{s_1} = (\partial p / \partial \rho_1)_{s_1} = c_1^2,$$

siendo c_1 la velocidad del sonido correspondiente al punto 1. Así pues, $v_1 > c_1$. Finalmente, a partir del hecho de que la cuerda 12 tiene una pendiente menor que la tangente en el punto 2, se deduce de modo semejante que $v_2 < c_2$.†

§ 84. Sentido de variación de las magnitudes en una onda de choque

Los resultados del § 83 muestran que, si se supone que la derivada $(\partial^2 V / \partial p^2)_s$ es positiva, puede demostrarse de modo muy sencillo que en el caso de ondas de choque débiles la condición de entropía creciente ($s_2 > s_1$) significa necesariamente que

$$p_2 > p_1, \quad (84.1)$$

$$v_1 > c_1, \quad v_2 < c_2. \quad (84.2)$$

A partir de la nota hecha respecto a (82.6), se deduce que si $p_2 > p_1$, entonces

$$V_1 > V_2, \quad (84.3)$$

y puesto que $v_1/V_1 = v_2/V_2 = j$, también

$$v_1 > v_2. \quad (84.4)$$

Ahora demostraremos que todas estas desigualdades realmente son válidas en el caso de ondas de choque de cualquier intensidad [manteniendo la hipótesis de que $(\partial^2 V / \partial p^2)_s$ es positiva]. Por tanto, obtenemos la conclusión en particular de que cuando el gas pasa a través de una onda de choque se comprime, aumentando la presión y la densidad (E. JOUGUET, 1904; G. ZEMPLÉN, 1905).‡ Esto significa gráficamente que únicamente la rama superior de la adiabática del choque (por encima del punto 1) tiene un significado real; las ondas de choque que corresponden a puntos sobre la rama inferior no pueden existir. Podemos mencionar también el resultado importante siguiente que puede deducirse a partir de las desigualdades (84.2). Puesto que una onda de choque se mueve respecto al gas que está delante de él con una velocidad $v_1 > c_1$, es evidente que no puede penetrar dentro del

† Del mismo modo puede demostrarse fácilmente que, cuando la derivada $(\partial^2 V / \partial p^2)_s$ es negativa, la condición $s_2 > s_1$ para las ondas de choque implica que $p_2 < p_1$, mientras que las velocidades de nuevo satisfacen $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$.

‡ Si pasamos a un sistema coordenado en el que el gas 1 (delante de la onda de choque) está en reposo y la onda de choque está moviéndose, entonces la desigualdad $v_1 > v_2$ significa que el gas detrás de la onda de choque se mueve (con velocidad $v_1 - v_2$) en el mismo sentido que la propia onda.

gas ninguna perturbación que se origine en la onda de choque. En otras palabras, la presencia del choque no tiene ninguna influencia sobre el estado del gas que está delante de él.

Demostraremos ahora estas afirmaciones empezando con un cálculo preliminar. Derivemos la relación (82.5) y (82.8) respecto a las magnitudes que pertenecen al gas 2 suponiendo que el estado del gas 1 resulta invariable. Esto significa que p_1 , V_1 y w_1 se consideran como constantes, mientras que se derivan o diferencian p_2 , V_2 , w_2 y también j (que depende de p_2 y V_2). A partir de (82.5) obtenemos

$$V_1 d(j^2) = dp_2 + j^2 dV_2 + V_2 d(j^2),$$

o sea,

$$dp_2 + j^2 dV_2 = (V_1 - V_2)d(j^2), \quad (84.5)$$

y a partir de (82.8)

$$dw_2 + j^2 V_2 dV_2 = \frac{1}{2}(V_1^2 - V_2^2)d(j^2),$$

o sea, desarrollando la diferencial dw_2 ,

$$T_2 ds_2 + V_2 dp_2 + j^2 V_2 dV_2 = \frac{1}{2}(V_1^2 - V_2^2)d(j^2).$$

Sustituyendo esta ecuación en (84.5), obtenemos

$$T_2 ds_2 = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)^2 d(j^2). \quad (84.6)$$

De aquí vemos que

$$d(j^2)/ds_2 > 0, \quad (84.7)$$

es decir, j^2 aumenta con s_2 .

Veremos ahora que no puede existir ningún punto sobre la adiabática del choque en el que toque a una línea cualquiera dibujada desde el punto 1 (tal como el punto O que se dibuja en la figura 46). En dicho punto la pendiente de la cuerda trazada desde el punto 1 es un mínimo y j^2 tiene un

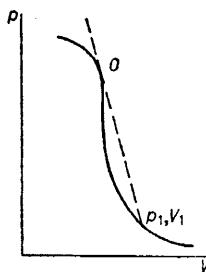


FIG. 46

máximo en correspondencia a éste, de modo que $d(j^2)/dp_2 = 0$. Vemos a partir de (84.6) que en este caso tenemos también $ds_2/dp_2 = 0$. A continuación, sustituyendo en (84.5) la diferencial dV_2 en la forma $dV_2 = (\partial V_2/\partial p_2)_{s_2} dp_2 + (\partial V_2/\partial s_2)_{p_2} ds_2$ y ds_2 en la forma dada por (84.6) y dividiendo por dp_2 , obtenemos

$$1 + j^2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2} \right)_{s_2} = (V_1 - V_2) \left\{ 1 - \frac{j^2(V_1 - V_2)}{T_2} \left(\frac{\partial V_2}{\partial s_2} \right)_{p_2} \right\} \frac{d(j^2)}{dp_2}.$$

De aquí se deduce que para $d(j^2)/dp_2 = 0$, debemos tener

$$1 + j^2(\partial V_2/\partial p_2)_{s_2} = 1 - v_2^2/c_2^2 = 0,$$

es decir, $v_2 = c_2$; inversamente, si $v_2 = c_2$, se deduce que $d(j^2)/dp_2 = 0$.[†]

Así pues, de las tres ecuaciones

$$d(j^2)/dp_2 = 0, \quad ds_2/dp_2 = 0, \quad v_2 = c_2, \quad (84.8)$$

cada una de ellas implica las otras dos y las tres deben ser válidas en el punto O (figura 46). Finalmente, tenemos para la derivada de $j^2(\partial V_2/\partial p_2)_{s_2} = -v_2^2/c_2^2$ en el punto O

$$\frac{d}{dp_2} \left(\frac{v_2^2}{c_2^2} \right) = -j^2 \left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial p_2^2} \right)_{s_2}.$$

Teniendo en cuenta la hipótesis de que $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$ es positiva, deberemos, por tanto, tener en O

$$d(v_2/c_2)/dp_2 < 0. \quad (84.9)$$

Es fácil ahora demostrar que no puede existir dicho punto en la adiabática del choque. En los puntos que estén exactamente por encima del punto 1, $v_2/c_2 < 1$ (ver el final de § 83). Por tanto, la ecuación $v_2/c_2 = 1$ puede satisfacerse únicamente mediante un aumento de v_2/c_2 ; es decir, en O debe cumplirse necesariamente que $d(v_2/c_2)/dp_2 > 0$, mientras que por (84.9) es cierto lo inverso. De un modo totalmente semejante podemos demostrar que tampoco puede resultar igual a la unidad el cociente v_2/c_2 en la parte de la adiabática del choque por debajo del punto 1.

A partir de la imposibilidad de la existencia de un punto tal como el O , como acabamos de demostrar, podemos deducir de una vez a partir del gráfico de la adiabática del choque que la pendiente de la cuerda que va desde el punto 1 (p_1, V_1) hasta el punto 2 (p_2, V_2) disminuye cuando nos movemos hacia arriba por la curva y, en correspondencia, aumenta j^2 . A partir de la propiedad de la adiabática del choque y la desigualdad (84.7) se deduce inmediatamente que la condición necesaria $s_2 > s_1$ implica que también $p_2 > p_1$.

[†] La expresión entre corchetes puede anularse sólo por casualidad y, por tanto, esta posibilidad es muy rara.

También es fácil ver que en la parte superior de la adiabática del choque son válidas las desigualdades $v_2 < c_2$, $v_1 > c_1$. La primera se deduce del hecho de que es válida cerca del punto 1 y el cociente v_2/c_2 nunca puede ser igual a la unidad. La segunda desigualdad se obtiene a partir del hecho de que toda cuerda procedente del punto 1 que vaya al punto 2 por encima de él tiene una pendiente superior que la tangente a la adiabática en el punto 1, puesto que la curva no puede comportarse como se ve en la figura 46.

La condición $s_2 > s_1$ y las tres desigualdades (84.1), (84.2) se satisfacen, por tanto, en la parte superior de la adiabática del choque. Sin embargo, en la parte inferior no son válidas ninguna de estas condiciones. En consecuencia, son equivalentes y si una de ellas se ve satisfecha, también lo son las demás.

En el estudio anterior hemos supuesto en todas partes que la derivada $(\partial^2 V / \partial p^2)_s$ es positiva. Si esta derivada pudiese variar de signo, dejaría de ser posible deducir de la necesidad de $s_2 > s_1$ cualquier conclusión general respecto a las desigualdades de las demás magnitudes. Sin embargo, es importante que las desigualdades (84.2) para las velocidades puedan obtenerse por razonamientos muy distintos, lo que demuestra que las ondas de choque en las que no son válidas dichas desigualdades no pueden existir, aunque su existencia no pudiese ser negada mediante los razonamientos puramente termodinámicos dados anteriormente.

La razón es que todavía hemos de estudiar el tema de la estabilidad de las ondas de choque. Supongamos que una onda de choque en reposo se somete a un desplazamiento infinitesimal en una dirección, por ejemplo, perpendicular a su plano. Puede demostrarse que el resultado de dicho desplazamiento es que la onda de choque se ve continuamente acelerada en una dirección determinada y es evidente que esto demuestra la inestabilidad absoluta de dicha onda y la imposibilidad de su existencia. El desplazamiento de la onda de choque viene acompañado por perturbaciones infinitesimales en la presión, velocidad, etc., del gas en ambas caras de la superficie de discontinuidad. Estas perturbaciones cerca del choque se propagan entonces alejándose del mismo con la velocidad del sonido (respecto al gas); sin embargo, esto no se aplica en la perturbación de la entropía, que se transmite únicamente con el propio gas. Así pues, una perturbación arbitraria del tipo en cuestión puede considerarse como formada por perturbaciones sonoras propagadas en los gases 1 y 2 en ambas caras de la onda de choque y una perturbación de la entropía; la última, que se mueve con el gas, se presenta evidentemente únicamente en el gas 2 detrás del choque. En cada una de las perturbaciones del sonido las variaciones de las diversas magnitudes están relacionadas por ciertas fórmulas que se deducen de las ecuaciones del movimiento (como en una onda sonora cualquiera, § 63), y, por tanto, una perturbación cualquiera de ellas se especifica con un solo parámetro.

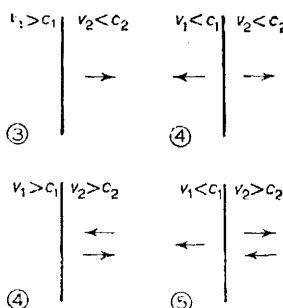


FIG. 47

Calculemos ahora el número de perturbaciones sonoras posibles. Este número depende de los valores relativos de las velocidades del gas v_1 , v_2 , y de las velocidades del sonido c_1 , c_2 . Tomemos la dirección de movimiento del gas (desde 1 hasta 2) como el sentido positivo del eje x . La velocidad de propagación de la perturbación en el gas 1 respecto a la onda de choque estacionaria es $u_1 = v_1 \pm c_1$, y en el gas 2 es $u_2 = v_2 \pm c_2$. Puesto que estas perturbaciones deben propagarse alejándose de la onda de choque, se deduce que $u_1 < 0$, $u_2 > 0$.

Supongamos que $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$. Entonces, es evidente que ambos valores $u_1 = v_1 \pm c_1$ son positivos, mientras que únicamente el valor $v_2 + c_2$ de la pareja de valores correspondientes a u_2 es positivo. Esto significa que las perturbaciones sonoras en las que estamos interesados no pueden existir en el gas 1, mientras que en el gas 2 puede únicamente existir una que se propaga respecto al gas con velocidad c_2 . El cálculo en otros casos es análogo a éste.

El resultado se indica en la figura 47, en donde cada flecha corresponde a una perturbación sonora que se propaga respecto al gas en la dirección indicada por la flecha. Cada perturbación sonora se define, como se dijo anteriormente, por un solo parámetro. Además, en los cuatro casos existen otros dos parámetros, uno que determina la perturbación de la entropía que se propaga en el gas 2 y la otra que determina el desplazamiento de la onda de choque. Para cada uno de los cuatro casos de la figura 47, el número encerrado dentro de un circulito indica el número total de parámetros así obtenidos, que definen una perturbación arbitraria que se origina debido al desplazamiento de la onda de choque.

El número de condiciones límites que deben satisfacerse por una perturbación en la superficie de discontinuidad es tres (la continuidad de los flujos de masa, de energía y de impulso). La solución del problema de estabilidad se efectúa prescribiendo el desplazamiento de la onda de choque (y, por lo tanto, las perturbaciones de todas las demás magnitudes) en una forma pro-

porcional a $e^{\Omega t}$, y determinando los valores posibles de Ω mediante las condiciones límites; la existencia de valores positivos reales de Ω indica inestabilidad absoluta. En todos los casos indicados en la figura 47, excepto el primero, el número de parámetros disponibles supera al número de ecuaciones dadas por las condiciones límites en la discontinuidad. Por tanto, en estos casos las condiciones límites admiten cualquier valor de Ω (y, por lo tanto, cualquier valor positivo) y la onda de choque es absolutamente inestable. En el único caso $v_1 > c_2$, $v_2 < c_2$; sin embargo, el número de parámetros es exactamente igual al número de ecuaciones y, por tanto, éstas nos dan un valor definido de Ω . Es evidente, sin que sea necesario escribir las ecuaciones, que este valor debe ser $\Omega = 0$, puesto que el problema no contiene ningún parámetro de las dimensiones s^{-1} que podría determinar un valor de Ω distinto de cero pero no arbitrario. Por tanto, no existe ninguna inestabilidad en este caso.

Así pues, vemos que las desigualdades (84.2) para la velocidad de la onda de choque son necesarias para que exista el choque cualesquiera que sean las propiedades termodinámicas del gas.

Con objeto de decidir la estabilidad de las ondas de choque para las cuales se satisface la condición (84.2), deberíamos investigar también los restantes modos posibles de inestabilidad. Uno de ellos es la inestabilidad respecto a las perturbaciones del tipo considerado en § 30 (caracterizadas por la periodicidad en la dirección paralela a la superficie de discontinuidad y formando «ondulaciones» en esta superficie). No realizaremos ahora los cálculos, sino que simplemente mencionaremos que estas ondas de choque son casi siempre estables respecto a dichas perturbaciones. Pueden producirse inestabilidades sólo para ciertas formas muy especiales de la adiabática del choque que parece que difícilmente pueden ocurrir en la naturaleza; todas ellas exigen que la derivada $(\partial^2 V / \partial p^2)$, tenga un signo variable.[†]

También, en principio, una onda de choque puede ser inestable respecto a una rotura en más de una superficie de discontinuidad. Este problema no ha sido investigado adecuadamente aún, pero parece ser que dichas inestabilidades únicamente pueden ocurrir para ciertos casos muy especiales de choque adiabático.

§ 85. Ondas de choque en un gas perfecto

Aplicaremos las relaciones generales obtenidas en las secciones anteriores a las ondas de choque de un gas perfecto. La entalpía de un gas perfecto viene dada por la fórmula simple $w = \gamma pV / (\gamma - 1)$. Sustituyendo esta ex-

[†] Ver S. P. D'YAKOV, *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, **27**, 288, 1954; V. M. KONTOROVICH, *ibid.*, **33**, 1525, 1957; *Soviet Physics JETP*, **6** (33), 1179, 1958.

presión en (82.9), tenemos después de una transformación simple

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2}{(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2}. \quad (85.1)$$

Utilizando esta fórmula, podemos determinar cualquiera de las magnitudes p_1 , V_1 , p_2 , V_2 , a partir de las otras tres. El cociente V_2/V_1 es una función monótonamente decreciente del cociente p_2/p_1 que tiende al límite finito $(\gamma - 1)/(\gamma + 1)$. La curva que muestra p_2 en función de V_2 para valores dados de p_1 , V_1 (la adiabática del choque) está representada en la figura 48. Es una hipérbola equilátera con asíntotas $V_2/V_1 = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$, $p_2/p_1 = -(\gamma - 1)/(\gamma + 1)$. Como sabemos, únicamente la parte superior de la curva, por encima del punto $V_2/V_1 = p_2/p_1 = 1$, tiene un significado real; está indicada en la figura 48 (para $\gamma = 1,4$) mediante una línea continua.

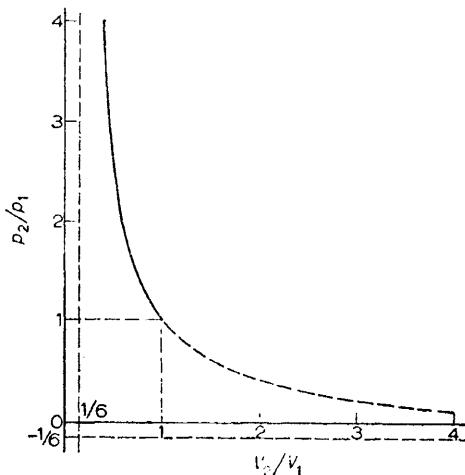


FIG. 48

En el caso del cociente de las temperaturas en ambos lados de la discontinuidad tenemos, a partir de la ecuación de estado para un gas perfecto $T_2/T_1 = p_2V_2/p_1V_1$, que

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2}{(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2}. \quad (85.2)$$

Para la densidad de flujo j obtenemos, a partir de (82.6) y (85.1),

$$j^2 = \{(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2\}/2V_1, \quad (85.3)$$

y entonces para las velocidades de propagación de la onda de choque respecto al gas delante y detrás de él

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \frac{1}{2}V_1\{(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2\}, \\ v_2^2 &= \frac{1}{2}V\{(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2\}^2 / \{(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2\}. \end{aligned} \quad (85.4)$$

Podemos deducir resultados límites para ondas de choque muy intensas, en las que p_2 es muy grande en comparación con p_1 .[†] A partir de (85.1) y (85.2) tenemos

$$V_2/V_1 = \rho_1/\rho_2 = (\gamma-1)/(\gamma+1), \quad T_2/T_1 = (\gamma-1)p_2/(\gamma+1)p_1. \quad (85.5)$$

El cociente T_2/T_1 aumenta hasta infinito con p_2/p_1 , es decir, la discontinuidad de temperaturas en una onda de choque, como la discontinuidad de presión, puede ser arbitrariamente grande. Sin embargo, el cociente de densidades tiene un límite constante; es decir, para un gas monoatómico el límite es $\rho_2 = 4\rho_1$, y en el caso de un gas diatómico $\rho_2 = 6\rho_1$. Las velocidades de propagación de una onda de choque intensa son

$$v_1 = \sqrt{\{\frac{1}{2}(\gamma+1)p_2V_1\}}, \quad v_2 = \sqrt{\{\frac{1}{2}(\gamma-1)^2p_2V_1/(\gamma+1)\}}. \quad (85.6)$$

Aumentan proporcionalmente a la raíz cuadrada de la presión p_2 .

Finalmente, podemos dar algunas fórmulas útiles en las aplicaciones, que expresan los cocientes de las densidades, presiones y temperaturas en una onda de choque en función del número de Mach $M_1 = v_1/c_1$. Estas fórmulas se deducen fácilmente a partir de los resultados anteriores:

$$\rho_2/\rho_1 = v_1/v_2 = (\gamma+1)M_1^2/(\gamma-1)M_1^2 + 2, \quad (85.7)$$

$$p_2/p_1 = 2\gamma M_1^2/(\gamma+1) - (\gamma-1)/(\gamma+1), \quad (85.8)$$

$$T_2/T_1 = \{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)\}(\gamma-1)M_1^2 + 2 / (\gamma+1)^2 M_1. \quad (85.9)$$

El número de Mach M_2 viene dado en función de M_1 por

$$M_2^2 = \{2 + (\gamma-1)M_1^2\}/\{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)\}. \quad (85.10)$$

PROBLEMAS

Problema 1. Deducir la fórmula $v_1 v_2 = c_*^2$, siendo c_* la velocidad crítica.

Solución. Puesto que $w + v^2/2$ es continua en una onda de choque, podemos definir una velocidad crítica que es la misma para los gases 1 y 2 por

$$\frac{\gamma p_1}{(\gamma-1)p_1} + \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{\gamma p_2}{(\gamma-1)p_2} + \frac{1}{2}v_2^2 = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}c_*^2;$$

[†] Es necesario que no sólo $p_2 \gg p_1$, sino que $p_2 \gg (\gamma+1)p_1/(\gamma-1)$.

ver (80.7). Determinando p_2/p_1 y v_1/v_2 a partir de estas ecuaciones y sustituyendo en

$$v_1 - v_2 = \frac{p_2}{\rho_2 v_2} - \frac{p_1}{\rho_1 v_1}$$

[obtenida combinando (82.1) y (82.2)], tenemos

$$\frac{\gamma+1}{2\gamma}(v_1 - v_2) \left(1 - \frac{c_*^2}{v_1 v_2} \right) = 0.$$

Puesto que $v_1 \neq v_2$, esto da la relación buscada.

Problema 2. Determinar el valor del cociente p_2/p_1 , para temperaturas dadas T_1 , T_2 en una discontinuidad de un gas perfecto con un calor específico variable.

Solución. En el caso general de un gas perfecto con calor específico variable, podemos únicamente decir que w (como e) es una función sólo de la temperatura y que p , V y T están relacionadas por la ecuación de estado $pV = RT/\mu$. Resolviendo la ecuación (82.9) para p_2/p_1 , obtenemos

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\mu}{RT} (w_2 - w_1) - \frac{T_2 - T_1}{2T_1} + \sqrt{\left[\left[\frac{\mu(w_2 - w_1)}{RT_1} - \frac{T_2 - T_1}{2T_1} \right]^2 + \frac{T_2}{T_1} \right]},$$

en donde $w_1 = w(T_1)$, $w_2 = w(T_2)$.

Problema 3. Una onda sonora plana incide normalmente sobre una onda de choque en un gas perfecto. Determinar la intensidad del sonido transmitido por la onda de choque (D. I. BLOKHINSEV, 1945).†

Solución. Puesto que una onda de choque se propaga con una velocidad supersónica respecto al gas que está delante de ella, no puede reflejarse en ella ninguna onda sonora. En el gas 2, detrás de la discontinuidad, se propaga una onda sonora transmitida isoentrópica ordinaria y también una perturbación de la entropía (a presión constante) que se propaga con el propio gas móvil.

Consideremos el proceso en un sistema coordenado en el que está en reposo la onda de choque y en el que el gas se mueve a través de la misma en el sentido positivo del eje x , propagándose también en este sentido la onda sonora incidente. Las perturbaciones en ambas caras de la discontinuidad están relacionadas por las condiciones obtenidas, haciendo variar las condiciones límites (82.1)-(82.3). Como resultado de la perturbación sonora, la onda de choque también empieza a oscilar; designando su velocidad oscilante por δu , debemos escribir la variación de las velocidades v_1 , v_2 en las condiciones límites, como $\delta v_1 - \delta u$, $\delta v_2 - \delta u$. Así pues,‡

$$v_1 \delta p_1 + p_1(\delta v_1 - \delta u) = v_2 \delta p_2 + p_2(\delta v_2 - \delta u),$$

$$\delta p_1 + v_1^2 \delta p_1 + 2\rho_1 v_1(\delta v_1 - \delta u) = \delta p_2 + v_2^2 \delta p_2 + 2\rho_2 v_2(\delta v_2 - \delta u),$$

$$\delta w_1 + v_1(\delta v_1 - \delta u) = \delta w_2 + v_2(\delta v_2 - \delta u).$$

En la onda sonora incidente tenemos

$$\delta s_1 = 0, \quad \delta v_1 = (c_1/\rho_1)\delta p_1 = \delta p_1/c_1\rho_1, \quad \delta w_1 = \delta p_1/\rho_1.$$

† La solución al problema más general de la incidencia oblicua del sonido sobre una onda de choque en un medio arbitrario ha sido dada por V. M. KONTOROVICH, *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, 33, 1527, 1957; *Soviet Physics JETP*, 6 (33), 1180, 1958.

‡ Designemos aquí las partes variables de las magnitudes por una δ en lugar de la prima usual.

La perturbación en el medio 2 está compuesta de la onda sonora y de la «onda de entropía», que designaremos por una y dos primas, respectivamente:

$$\begin{aligned}\delta s_2' &= 0, & \delta v_2' &= (c_2/\rho_2)\delta p_2' = \delta p_2'/c_2\rho_2, & \delta w_2 &= \delta p_2'/\rho_2, \\ \delta p_2'' &= 0, & \delta v_2'' &= 0, & \delta w_2'' &= T_2\delta s_2'' = -c_2^2\delta p_2''/\rho_2(\gamma-1)\end{aligned}$$

[en el caso de un gas perfecto $(\partial s/\partial p)_\theta = -c_p/p$].

Estas relaciones nos permiten expresar todas las magnitudes de las ondas transmitidas en función de las magnitudes correspondientes en la onda incidente. El cociente de presiones de las ondas sonoras resulta ser

$$\frac{\delta p_2'}{\delta p_1} = \frac{M_1 + 1}{M_2 + 1} \left\{ \frac{2(\gamma - 1)M_1 M_2^2(M_1^2 - 1) - (M_1 + 1)[(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{2(\gamma - 1)M_2^2(M_1^2 - 1) - (M_2 + 1)[(\gamma - 1)M_1^2 + 2]} \right\}.$$

En el caso de una onda de choque débil ($p_2 - p_1 \ll p_1$) tenemos

$$\frac{\delta p_2'}{\delta p_1} \approx 1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p_2 - p_1}{p_1},$$

y en el caso límite opuesto de una onda de choque intensa

$$\frac{\delta p_2'}{\delta p_1} \approx \frac{1}{\gamma + \sqrt{[2\gamma(\gamma - 1)]}} \frac{p_2}{p_1}.$$

En ambos casos la amplitud de la presión en la onda transmitida es mayor que la correspondiente en la onda incidente.

§ 86. Ondas de choque oblicuas

Consideremos una onda de choque estacionaria y abandonemos el sistema de coordenadas utilizado hasta aquí, en el cual la velocidad del gas era perpendicular al elemento de superficie del choque considerado. Las líneas de corriente pueden cortar a la superficie de dicha onda de choque en un ángulo cualquiera[†] y al hacer esto se ven «refractadas»: la componente tangencial de la velocidad del gas no varía mientras que la componente normal, de acuerdo con (84.4), disminuye, $v_{1n} = v_{2n}$, $v_{1n} > v_{2n}$. Por tanto, resulta claro que las líneas de corriente «se aproximan» a la onda de choque cuando pasan a través de la misma (ver figura 49). Así pues, las líneas de corriente se ven siempre refractadas en una dirección definida al pasar a través de una onda de choque.

El movimiento detrás de una onda de choque puede ser subsónico o supersónico (únicamente la componente de velocidad normal necesita ser menor que la velocidad del sonido c_2); el movimiento delante de ella es necesariamente supersónico. Si el flujo del gas en ambas caras es supersónico, todas las perturbaciones deben propagarse a lo largo de la superficie

[†] La única restricción es que la componente de velocidad normal v_{1n} supere a c_1 .

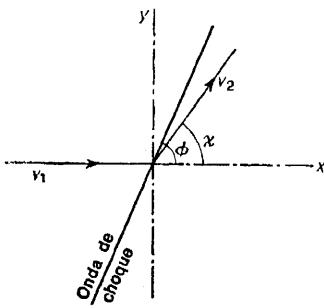


FIG. 49

en la dirección de la componente tangencial de la velocidad del gas. En este sentido podemos hablar de la «dirección» de una onda de choque y distinguir las ondas de choque que salen o llegan a un punto cualquiera (como en el caso de las características, el movimiento cercano es siempre supersónico; ver § 79). Si el movimiento dentro del choque es subsónico no tiene estrictamente ningún significado hablar de su «dirección», puesto que las perturbaciones pueden propagarse en todas las direcciones en su superficie.

Deduciremos una relación existente entre las dos componentes de la velocidad del gas después de que ha pasado a través de una onda de choque oblicua, suponiendo que tenemos un gas perfecto. Tomemos la dirección de la velocidad del gas v_1 delante de la onda de choque como eje x ; sea ϕ el ángulo entre la onda de choque y el eje x (figura 49). La continuidad de la componente de velocidad tangencial al choque significa que $v_1 \cos \phi = v_{2x} \cos \phi + v_{2y} \sin \phi$, o sea,

$$\operatorname{tg} \phi = (v_1 - v_{2x})/v_{2y}. \quad (86.1)$$

A continuación, utilicemos la fórmula (85.7), en la cual v_1 y v_2 designan las componentes de velocidad normal al plano de la onda de choque y que ahora deben ser sustituidas por $v_1 \sin \phi$ y $v_{2x} \sin \phi - v_{2y} \cos \phi$, de modo que

$$\frac{v_{2x} \operatorname{sen} \phi - v_{2y} \cos \phi}{v_1 \operatorname{sen} \phi} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2c_1^2}{(\gamma + 1)v_1^2 \operatorname{sen}^2 \phi}. \quad (86.2)$$

Entre ambas relaciones podemos eliminar el ángulo ϕ . Después de algunas transformaciones simples obtenemos la siguiente fórmula, que determina la relación existente entre v_{2x} y v_{2y} (para valores dados de v_1 y c_1):

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{2(v_1 - c_1^2/v_1)/(\gamma + 1) - (v_1 - v_{2x})}{v_1 - v_{2x} + 2c_1^2/(\gamma + 1)v_1}. \quad (86.3)$$

Esta fórmula puede escribirse de modo más inteligible introduciendo la velocidad crítica. De acuerdo con la ecuación de Bernoulli y la definición de

velocidad crítica, tenemos $w_1 + v_1^2/2 = v_1^2/2 + c_1^2/(\gamma - 1) = (\gamma + 1)c_*^2/2(\gamma - 1)$ (ver § 85, problema 1), y de aquí

$$c_*^2 = [(\gamma - 1)v_1^2 + 2c_1^2]/(\gamma + 1). \quad (86.4)$$

Utilizando esta expresión en (86.3), obtenemos

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{v_1 v_{2x} - c_*^2}{2v_1^2/(\gamma + 1) - v_1 v_{2x} + c_*^2}. \quad (86.5)$$

La ecuación (86.5) se denomina ecuación de la *polar del choque*. La figura 50 muestra un gráfico de la función $v_{2y}(v_{2x})$; es una curva cúbica denominada estrofoide. Corta el eje de abscisas en los puntos P y Q , correspondientes a $v_{2x} = c_*^2/v_1$ y $v_{2x} = v_1$.[†] Una recta (OB en la figura 50) dibujada desde el origen formando un ángulo χ con el eje de abscisas da la velocidad del gas detrás de una discontinuidad que hace desviar la corriente en un ángulo χ por la longitud del segmento comprendido entre O y el punto en la que la recta corta a la polar del choque. Existen dos de estas intersecciones (A , B), es decir, dos ondas de choque diferentes que corresponden a un valor χ dado. La dirección de la onda de choque también puede determinarse inmediatamente a partir de la polar de choque: viene dada por la dirección de la perpendicular trazada desde el origen hasta la línea QB o QA (la figura 50 muestra el ángulo en el caso de un choque correspondiente al punto B). Al disminuir χ , el punto A tiende a P , correspondiendo al caso de un choque normal ($\phi = \pi/2$) con $v_2 = c_*^2/v_1$. El punto B tiende a Q ; la intensidad del choque (discontinuidad de velocidad) tiende a cero y el ángulo ϕ tiende, como debería ser, al ángulo de Mach $\alpha = \arcsen(c_1/v_1)$; la tangente a la polar del choque en Q forma un ángulo $\pi/2 + \alpha$ con el eje de abscisas.

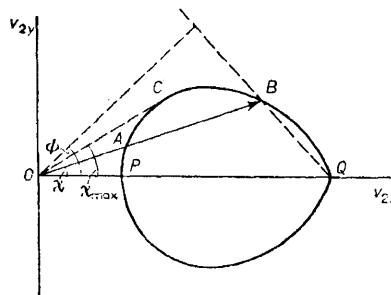


FIG. 50

[†] La estrofoide realmente continúa en dos ramas desde el punto $v_{2x} = v_1$ (que es un punto doble) hasta v_{2y} infinito; éstas no se han indicado en la figura 50. Tienen una asintota común $v_{2x} = c_*^2/v_1 + 2v_1/(\gamma + 1)$.

Los puntos sobre estas ramas carecen de significado físico; darían para v_{2x} y v_{2y} valores tales que $v_{2n}/v_{1n} > 1$, lo cual es imposible.

A partir de la polar del choque podemos deducir inmediatamente el resultado importante de que el ángulo de desviación χ de la corriente en la onda de choque no puede superar a un valor máximo determinado χ_{\max} , que corresponde a la tangente trazada desde O hasta la curva. Como es natural, esta magnitud es función del número de Mach $M_1 = v_1/c_1$, pero no daremos ahora su expresión porque resulta muy complicada. Para $M_1 = 1$, $\chi_{\max} = 0$; cuando M_1 aumenta, χ_{\max} aumenta monótonamente y tiende hasta un límite finito cuando $M_1 \rightarrow \infty$. Es fácil de estudiar los dos casos límites. Si la velocidad v_1 es próxima a c_* , entonces v_2 también lo será y el ángulo χ es pequeño; la ecuación (86.5) de la polar del choque puede escribirse entonces en la forma aproximada.[†]

$$\chi^2 = (\gamma + 1)(v_1 - v_2)^2(v_1 + v_2 - 2c_*)/2c_*^3, \quad (86.6)$$

en donde hemos puesto $v_{2x} \approx v_2$, $v_{2y} \approx c_*\chi$, en vista del valor tan pequeño de χ . De aquí que se encuentra fácilmente[‡]

$$\chi_{\max} = \frac{4\sqrt{(\gamma+1)}}{3\sqrt{3}} \left(\frac{v_1}{c_*} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}(\gamma+1)} (M_1 - 1)^{\frac{1}{2}}. \quad (86.7)$$

En el caso límite opuesto $M_1 = \infty$ (es decir, $M_{1*} = \sqrt[(\gamma+1)/(\gamma-1)]$), la polar de choque degenera en una circunferencia que corta al eje de abscisas en los puntos $c_*\sqrt[(\gamma-1)/(\gamma+1)]$ y $c_*\sqrt[(\gamma+1)/(\gamma-1)]$. Es fácil ver que se tienen entonces

$$\chi_{\max} = \arcsen(1/\gamma); \quad (86.8)$$

en el caso del aire vale $45,6^\circ$. La figura 51 muestra un gráfico de χ_{\max} en función de M_1 en el caso del aire; la curva superior es un gráfico semejante para el flujo que pasa a un cono (ver § 105).

La circunferencia $v_2 = c_*$ corta el eje de abscisas entre los puntos P y Q (figura 50), y, por tanto, divide a la polar del choque en dos partes que corresponden a las velocidades subsónica y supersónica del gas detrás de la discontinuidad. El punto en donde esta circunferencia corta a la polar cae a la derecha, pero muy próximo, del punto C ; el segmento completo PC corresponde, por tanto, a transiciones a velocidades subsónicas, mientras que CQ (excepto en el caso de segmentos muy pequeños próximos a C) corresponde a transiciones a velocidades supersónicas.

Para valores dados de M_1 y ϕ , la variación de presión en la onda de choque viene dada por

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 \operatorname{sen}^2 \phi - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)}; \quad (86.9)$$

[†] Se ve fácilmente que la ecuación (86.6) también es válida para un gas cualquiera (no perfecto), con tal que $(\gamma + 1)$ se sustituya por $2\alpha_*$ (95.2).

[‡] Puede señalarse que esta dependencia de χ_{\max} con $M_1 - 1$ está de acuerdo con la ley general de semejanza (118.7) para el flujo transónico.

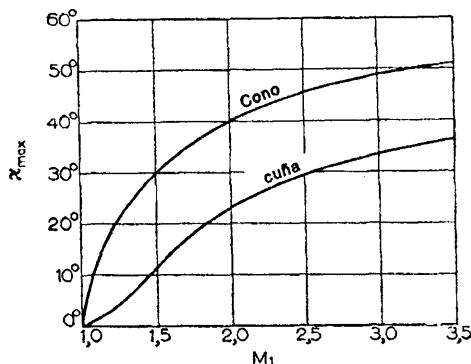


FIG. 51

esta es la fórmula (85.8) sustituyendo M_1 por $M_1 \operatorname{sen} \phi$. Este cociente aumenta monótonamente cuando crece ϕ , desde su valor menor $\operatorname{arcsen}(1/M_1)$ (cuando $p_2/p_1 = 1$) a $\pi/2$, es decir, cuando nos movemos a lo largo de la polar del choque desde Q hasta P .

Las dos ondas de choque determinadas por la polar de choque para un ángulo de desviación dado χ suele decirse que pertenecen a las familias *débil* y *fuerte*. Una onda de choque de la familia fuerte (segmento PC de la polar) es intensa (el cociente p_2/p_1 es grande), forma un ángulo ϕ grande con la dirección de la velocidad v_1 y convierte el flujo de supersónico en subsonico. Una onda de choque de la familia débil (segmento QC) es débil, está inclinada formando un ángulo más pequeño respecto a la corriente y casi siempre mantiene el flujo supersónico.

PROBLEMAS

Problema 1. Deducir la fórmula que da el ángulo de desviación χ de la velocidad en una onda de choque oblicua (en un gas perfecto) en función de $M_1 = v_1/c_1$ y del ángulo ϕ entre la onda de choque y la dirección de la velocidad v_1 (figura 49):

$$\cot \chi = \operatorname{tg} \phi \left[\frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2(M_1^2 \operatorname{sen}^2 \phi - 1)} - 1 \right].$$

Problema 2. Deducir la fórmula que da el número $M_2 = v_2/c_2$ en función de M_1 y ϕ :

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 \operatorname{sen}^2 \phi - (\gamma - 1)} + \frac{2M_1^2 \cos^2 \phi}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \operatorname{sen}^2 \phi}.$$

§ 87. Espesor de las ondas de choque

Hasta ahora hemos considerado las ondas de choque como superficies geométricas de espesor nulo. Consideraremos ahora la estructura de las superficies de discontinuidad reales y veremos que las ondas de choque con discontinuidades pequeñas son, en realidad, capas de transición de espesor finito, disminuyendo dicho espesor cuando aumenta el valor de las discontinuidades. Si las discontinuidades no son pequeñas, las variaciones se producen tan rápidamente que carece de significado el concepto de espesor.

Para determinar la estructura y espesor de la capa de transición, debemos tener en cuenta la viscosidad y la conductividad térmica del gas que hasta ahora hemos despreciado.

Las relaciones (82.1)-(82.3) para una onda de choque se obtuvieron a partir de la constancia de los flujos de masa, impulso y energía. Si consideramos una superficie de discontinuidad como una capa de espesor finito, estas condiciones deben escribirse no como la igualdad de las magnitudes relativas en ambas caras de la discontinuidad, sino como una constancia a través del espesor de la capa. La primera condición, (82.1), no varía:

$$\rho v \equiv j = \text{constante.} \quad (87.1)$$

En las otras dos condiciones deben tenerse en cuenta flujos adicionales de impulso y energía debidos al rozamiento interno y a la conducción térmica.

La densidad del flujo de impulso (en la dirección x) debido al rozamiento interno viene dada por la componente $-\sigma'_{xx}$ del tensor de tensiones de la viscosidad; de acuerdo con la expresión general (15.3) para este tensor, tenemos $\sigma'_{xx} = (4\eta/3 + \zeta)dv/dx$. Entonces, la condición (82.2) se transforma en

$$p + \rho v^2 - (\frac{4}{3}\eta + \zeta)dv/dx = \text{constante.}$$

Como en § 82, incluiremos el volumen específico V en lugar de la velocidad $v = jV$. Puesto que $j = \text{constante}$, $dv/dx = jdV/dx$, de modo que

$$p + j^2 V - (\frac{4}{3}\eta + \zeta)j dV/dx = \text{constante.}$$

A distancias grandes de la onda de choque, las magnitudes termodinámicas son constantes, es decir, son independientes de x . En particular, $dV/dx = 0$. Designaremos mediante un sufijo 1 los valores de las magnitudes que están bastante delante de la onda de choque. Entonces, podemos poner la constante igual a $p_1 + j^2 V_1$, obteniéndose así

$$p - p_1 + j^2(V - V_1) - (\frac{4}{3}\eta + \zeta)j dV/dx = 0. \quad (87.2)$$

A continuación, la densidad del flujo de energía debida a la conducción térmica es $-\kappa dT/dx$. La originada por el rozamiento interno es $-\sigma'_{xx}v_i$, o sea, puesto que la velocidad está dirigida a lo largo del eje x , $-\sigma'_{xx}v = -(4\eta/3 +$

$+\zeta)v \frac{dv}{dx}$. Así pues, la condición (82.3) puede escribirse

$$\rho v(w + \frac{1}{2}v^2) - (\frac{4}{3}\eta + \zeta)v \frac{dv}{dx} - \kappa \frac{dT}{dx} = \text{constante.}$$

Poniendo de nuevo $v = jV$, se puede obtener la forma final

$$w + \frac{1}{2}j^2V^2 - j(\frac{4}{3}\eta + \zeta)V \frac{dV}{dx} - (\kappa/j)\frac{dT}{dx} = w_1 + \frac{1}{2}j^2V_1^2. \quad (87.3)$$

Hemos considerado ahora ondas de choque en las cuales son pequeñas todas las discontinuidades. Entonces, todas las diferencias $V - V_1$, $p - p_1$, etc., entre los valores en el interior y en el exterior de la capa de transición son también pequeños. En (87.2) vamos a desarrollar $V - V_1$ en potencias de $p - p_1$ y $s - s_1$, tomando como variables independientes la presión y la entropía. Se ve a partir de las relaciones que obtendremos a continuación que $1/\delta$ (siendo δ el espesor de la discontinuidad) es del primer orden en $p - p_1$, y que la diferencia $s - s_1$ es del segundo orden.[†] De aquí que podamos escribir, despreciando magnitudes del tercer orden,

$$V - V_1 = (\partial V / \partial p)_s(p - p_1) + \frac{1}{2}(\partial^2 V / \partial p^2)_s(p - p_1)^2 + (\partial V / \partial s)_p(s - s_1).$$

Se toman, como es natural, los valores de todos los coeficientes fuera de la capa de transición (para $p = p_1$, $s = s_1$). Sustituyendo este desarrollo en (87.2), obtenemos

$$\begin{aligned} [1 + (\partial V / \partial p)_s j^2](p - p_1) + \frac{1}{2}j^2(\partial^2 V / \partial p^2)_s(p - p_1)^2 + (\partial V / \partial s)_p(s - s_1)j^2 \\ = (\frac{4}{3}\eta + \zeta)j \frac{dV}{dx}. \end{aligned}$$

La derivada dV/dx puede escribirse

$$\frac{dV}{dx} = \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s \frac{dp}{dx} + \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dx}.$$

Si derivamos respecto a x se aumenta el orden de los infinitésimos en una unidad, puesto que $1/\delta$ es de primer orden; la derivada dp/dx es, por tanto, del segundo orden y ds/dx del tercero. Por consiguiente, puede omitirse el término en ds/dx . Así pues, la condición (87.2) se transforma en

$$\begin{aligned} [1 + (\partial V / \partial p)_s j^2](p - p_1) + \frac{1}{2}j^2(\partial^2 V / \partial p^2)_s(p - p_1)^2 + (\partial V / \partial s)_p(s - s_1)j^2 \\ = (\frac{4}{3}\eta + \zeta)(\partial V / \partial p)_s \frac{dp}{dx} j. \end{aligned} \quad (87.4)$$

A continuación, multipliquemos cada término de (87.2) por $(V + V_1)/2$ y restémoslos de la ecuación (87.3). El resultado es

$$(w - w_1) - \frac{1}{2}(p - p_1)(V + V_1) - \frac{1}{2}j(\frac{4}{3}\eta + \zeta)(V - V_1) \frac{dV}{dx} - \frac{\kappa}{j} \frac{dT}{dx} = 0.$$

[†] La discontinuidad de la entropía total $s_2 - s_1$ es, como hemos visto en § 83, de tercer orden respecto a la discontinuidad de presión $p_2 - p_1$, mientras que $s - s_1$ es sólo de segundo orden en $p - p_1$. La razón es que, como veremos más adelante, la presión en la capa de transición varía monótonamente desde p_1 hasta p_2 , mientras que la entropía no varía monótonamente; tiene un máximo dentro de la capa.

El tercer término, que contiene el producto $(V - V_1) dV/dx$, es de tercer orden y puede omitirse:

$$(w - w_1) - \frac{1}{2}(p - p_1)(V + V_1) - (\kappa/j) dT/dx = 0.$$

Los dos primeros términos coinciden con la expresión que desarrollábamos en potencias de $p - p_1$ y $s - s_1$ al deducir la fórmula (83.1). Los términos de primero y segundo orden en $p - p_1$ de estos desarrollos son nulos y tenemos hasta los términos de segundo orden que la expresión vale exactamente $T(s - s_1)$. La derivada dT/dx puede escribirse

$$\frac{dT}{dx} = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{dp}{dx} + \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dx} \approx \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{dp}{dx}.$$

El resultado es

$$T(s - s_1) = \frac{\kappa}{j} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{dp}{dx}. \quad (87.5)$$

Sustituyendo esta expresión para $s - s_1$ en (87.4), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} j^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p - p_1)^2 + \left[1 + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s j^2 \right] (p - p_1) \\ = \left\{ -\frac{\kappa}{T} \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s + \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta \right) \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s \right\} \frac{dp}{dx} j. \end{aligned} \quad (87.6)$$

El flujo j es, en primera aproximación, $j = v/V \approx c/V$ [ver (83.3)]. Puede sustituirse esta expresión en el segundo miembro de (87.6), pero no servirá en el primero; entonces, hay que incluir términos adicionales en j^2 . Estos términos podrían obtenerse a partir de (87.2), por ejemplo. Sin embargo, es más sencillo razonar del modo siguiente. A distancias grandes de ambas caras de la superficie de discontinuidad, el segundo miembro de (87.6) es cero, puesto que dp/dx es cero. A esta distancia la presión es p_1 o p_2 . Esto es, podemos decir que la expresión cuadrática en p en el primer miembro de (87.6) tiene los ceros p_1 y p_2 . Por un teorema bien conocido del álgebra puede escribirse, por tanto, como el producto $(p - p_1)(p - p_2)$ multiplicado por el coeficiente de p_2 , $j^2(\partial^2 V / \partial p^2)_s / 2$.

Así pues, tenemos la siguiente ecuación diferencial para la función $p(x)$:[†]

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p - p_1)(p - p_2) = -\frac{V^3}{c^3} \left(\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta \right) + \frac{\kappa}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p c^2 \rho^2 \right) \frac{dp}{dx}.$$

A partir de las fórmulas termodinámicas para las derivadas, $(\partial V / \partial s)_p = -(\partial T / \partial p)_s$; es fácil ver que el coeficiente de $-dp/dx$ en el segundo miem-

[†] Al considerar una onda de choque débil podemos tomar la viscosidad y la conductividad térmica como constantes.

bro de la ecuación anterior es $2V^2a$, estando a relacionado con el coeficiente de absorción del sonido γ (77.6) por la relación $\gamma = a\omega^2$. Así pues,

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{1}{4V^2a} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p - p_1)(p - p_2). \quad (87.7)$$

Integrando tenemos

$$\begin{aligned} x &= - \frac{4V^2a}{(\partial^2 V / \partial p^2)_s} \int \frac{dp}{(p - p_1)(p - p_2)} \\ &= \frac{4aV^2}{\frac{1}{2}(p_2 - p_1)(\partial^2 V / \partial p^2)_s} \operatorname{tgh}^{-1} \frac{p - \frac{1}{2}(p_2 + p_1)}{\frac{1}{2}(p_2 - p_1)} + \text{constante}. \end{aligned}$$

Poniendo la constante igual a cero, tenemos

$$p - \frac{1}{2}(p_2 + p_1) = \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \operatorname{tgh}(x/\delta), \quad (87.8)$$

en donde

$$\delta = 8aV^2/(p_2 - p_1)(\partial^2 V / \partial p^2)_s. \quad (87.9)$$

Esta es la forma en que varía la presión entre los valores p_1 y p_2 que adquiere a distancias grandes a ambos lados de la onda de choque. El punto $x = 0$ corresponde a la media de la presión, $(p_1 + p_2)/2$. Para $x \rightarrow \pm \infty$, la presión tiende asintóticamente a p_1 y p_2 . Casi toda la variación de p_1 a p_2 se produce en una distancia del orden de δ que puede denominarse *espesor* de la onda de choque. Vemos que este espesor es tanto menor cuanto más intenso o fuerte sea el choque, es decir, cuanto mayor sea la discontinuidad en la presión.

La variación de la entropía a través de la discontinuidad se obtiene a partir de (87.5) y (87.8)

$$s - s_1 = \frac{\kappa}{16caVT} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s \frac{(p_2 - p_1)^2}{\cosh^2(x/\delta)}. \quad (87.10)$$

A partir de esta expresión vemos que la entropía no varía monótonamente, sino que tiene un máximo dentro de la onda de choque en $x = 0$. Para $x = \pm \infty$ esta fórmula da $s = s_1$ en cualquier caso; esto es debido a que la variación de entropía total $s_2 - s_1$ es del tercer orden en $p_2 - p_1$ [ver (83.1)], mientras que $s - s_1$ es del segundo orden.

La fórmula (87.8) es cuantitativamente válida sólo para diferencias $p_2 - p_1$ suficientemente pequeñas. Sin embargo, podemos utilizar cualitativamente (87.9) para determinar el orden de magnitud del espesor en aquellos casos en que la diferencia $p_2 - p_1$ sea del mismo orden de magnitud que los propios p_1 y p_2 . La velocidad del sonido en el gas es del mismo orden que la velocidad térmica v de las moléculas. La viscosidad cinemática es, como sabemos, a partir de la teoría cinética de los gases, $\nu \sim lv \sim lc$, siendo l el

recorrido libre medio de las moléculas. De aquí, $a \sim l/c^2$; una estimación del término de conducción térmica nos da el mismo resultado. Finalmente, $(\partial^2 V / \partial p^2)_s \sim V/p^2$, y $pV \sim c^2$. Utilizando estas relaciones en (87.9), obtenemos

$$\delta \sim l. \quad (87.11)$$

Así pues, el espesor de una onda de choque fuerte es del mismo orden de magnitud que el recorrido libre medio de las moléculas del gas.[†] Sin embargo, en la dinámica macroscópica de los gases, en donde se considera el gas como un medio continuo, debe tomarse el recorrido libre medio como cero. Se deduce entonces que la dinámica de los gases no puede utilizarse aisladamente de modo estricto para investigar la estructura interna de las ondas de choques intensas.

Puede producirse un aumento considerable del espesor de una onda de choque por la presencia dentro del gas de unos procesos de relajación comparativamente lentos (reacciones químicas lentas, transferencia de energía lenta entre diferentes grados de libertad de las moléculas y otros). Este tema ha sido estudiado por Y.A. B. ZEL'DOVICH (1946).

Sea τ del orden de magnitud del tiempo de relajación. Tanto los estados inicial como el final del gas deben ser estados de equilibrio completo; por tanto, resulta inmediatamente claro que el espesor total de la onda de choque será del orden de τv_1 , distancia recorrida por el gas en el tiempo τ . También se encuentra que, si la intensidad del choque supera a un determinado límite, su estructura se hace más compleja; esto puede verse del modo siguiente.

En la figura 52 la curva a trazo continuo muestra la adiabática del choque dibujada a través de un punto inicial 1 dado, con la hipótesis de que los estados finales del gas son estados de equilibrio completo; la pendiente de

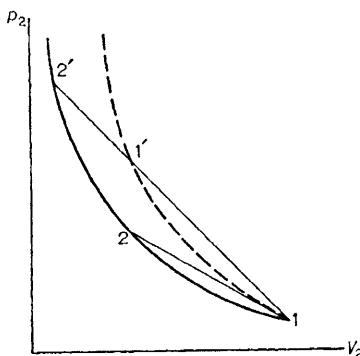


FIG. 52

[†] Una onda de choque intensa produce un aumento considerable de temperatura; l designa el recorrido libre medio para cierta temperatura media del gas en el choque.

la tangente en el punto 1 da la velocidad del sonido de «equilibrio» designada en § 78 por c_0 . La curva a trazos muestra la adiabática del choque que pasa a través del mismo punto 1, con la hipótesis de que los procesos de relajación están «congelados» y no se producen. La pendiente de la tangente de esta curva en el punto 1 representa la velocidad del sonido que designábamos en § 78 por c_∞ .

Si la velocidad de la onda de choque es tal que $c_0 < v_1 < c_\infty$, la cuerda 12 se traza como se ve en la figura 52 (cuerda inferior). En este caso tenemos un aumento simple del espesor del choque, estando representados todos los estados intermedios entre el estado inicial 1 y el estado final 2 en el plano pV sobre el segmento 12.[†]

Sin embargo, si $v_1 > c_\infty$, la cuerda adquiere la posición 11'2'. No hay ningún punto que caiga entre 1 y 1' que corresponda a un estado real cualquiera del gas; el primer punto real (después de 1) es 1', que corresponde a un estado en el cual el equilibrio de la relajación no es diferente del correspondiente al estado 1. La compresión del gas desde el estado 1 al estado 1' se produce de modo discontinuo y, posteriormente (en distancias del orden de $\sim v_1 r$), se ve comprimido gradualmente hasta el estado final 2'.

§ 88. Discontinuidad isotérmica

El estudio de la estructura de una onda de choque realizada en § 87 exige la hipótesis de que la viscosidad y la conductividad térmica sean del mismo orden de magnitud, como sucede normalmente. Sin embargo, también es posible el caso en el que $\chi \gg \nu$. Si la temperatura es suficientemente elevada, se transfiere un calor adicional por radiación térmica en equilibrio con la materia. La radiación tiene un efecto mucho menor sobre la viscosidad (es decir, sobre la transferencia de impulso) y por ello ν puede ser pequeña en comparación con χ . Veremos ahora que esta desigualdad conduce a una diferencia muy importante en la estructura de la onda de choque.

Despreciando términos en la viscosidad, podemos escribir las ecuaciones (87.2) y (87.3), que determinan la estructura de la capa de transición, como

$$p + j^2 V = p_1 + j^2 V_1, \quad (88.1)$$

$$\frac{\kappa}{j} \frac{dT}{dx} = w + \frac{1}{2} j^2 V^2 - w_1 - \frac{1}{2} j^2 V_1^2. \quad (88.2)$$

El segundo miembro de (88.2) es cero únicamente en los límites de la capa.

[†] Esto resulta del hecho de que (despreciando la viscosidad ordinaria y la conducción térmica) todos los estados a través de los cuales pasa el gas satisfacen las ecuaciones de conservación de masa, $\rho v = j = \text{constante}$, y del impulso, $p + j^2 V = \text{constante}$ (ver un estudio análogo, pero más detallado en § 121).

Puesto que la temperatura detrás de la onda de choque debe ser más elevada que la que hay delante de la misma, se deduce que tenemos

$$dT/dx > 0 \quad (88.3)$$

en todos los puntos de la capa de transición, es decir, la temperatura aumenta monótonamente.

Todas las magnitudes en la capa son funciones de una sola variable, la coordenada x , y, por tanto, son funciones unas de otras. Derivando (88.1) respecto a V , obtenemos

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \frac{dT}{dV} + \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T + j^2 = 0.$$

La derivada $(\partial p / \partial T)_V$ es siempre positiva en los gases. Por tanto, el signo de la derivada dT/dV es el inverso del correspondiente a la suma $(\partial p / \partial V)_{T+P}$. En el estado 1 tenemos $j^2 < -(\partial p_1 / \partial V_1)_s$ (puesto que $v_1 > c_1$), y $j^2 > -(\partial p_1 / \partial V_1)_T$ puesto que la compresibilidad adiabática es siempre menor que la compresibilidad isotérmica. Por tanto, en el lado 1, $dT_1/dV_1 < 0$. Si esta derivada permaneciese negativa en todas las partes dentro de la capa de transición, entonces al comprimir el gas (disminuir V), la temperatura aumenta monótonamente de acuerdo con (88.3), desde la cara 1 a la cara 2. En otras palabras, tenemos una onda de choque cuyo espesor se ve muy aumentado por la elevada conductividad térmica (posiblemente hasta una extensión tal que incluso el denominarla onda de choque es un simple convenio).

Sin embargo, si el choque es tan intenso que

$$j^2 < -(\partial p_2 / \partial V_2)_T, \quad (88.4)$$

en el estado 2 tenemos, entonces, $dT_2/dV_2 > 0$, de modo que la función $T(V)$ tiene un máximo en algún punto entre V_1 y V_2 (figura 53). Es evidente que la transición del estado 1 al estado 2, variando V continuamente, resulta entonces imposible, puesto que no puede satisfacerse en todos los puntos la desigualdad (88.3).

En consecuencia, tenemos el siguiente esquema de la transición desde el estado inicial 1 al estado final 2. Primeramente encontramos una región en donde el gas se comprime gradualmente pasando del volumen específico V_1 a cierto volumen V' (el valor para el cual $T(V') = T_2$ por primera vez; ver figura 53); el espesor de esta región está determinado por la conductividad térmica y puede ser considerable. La compresión desde V' hasta V_2 ocurre entonces discontinuamente, permaneciendo constante la temperatura al valor T_2 . Esta discontinuidad puede denominarse *discontinuidad isotérmica*.

Determinemos la variación de la presión y de la densidad en una discontinuidad isotérmica, admitiendo que tenemos un gas perfecto. La condición de continuidad del flujo del impulso (88.1), aplicada a los dos lados de la

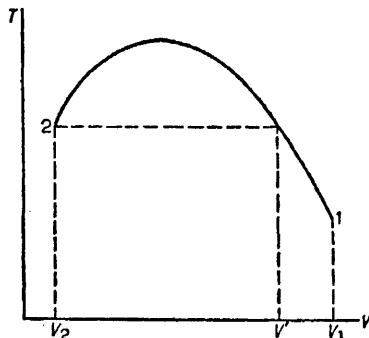


FIG. 53

discontinuidad, da $p' + j^2V' = p_2 + j^2V_2$. En el caso de un gas perfecto $V = RT/\mu p$; puesto que $T' = T_2$, tenemos

$$p' + \frac{j^2RT_2}{\mu p'} = p_2 + \frac{j^2RT_2}{\mu p_2}.$$

La ecuación de segundo grado en p' tiene las soluciones $p' = p_2$ (trivial) y

$$p' = j^2RT_2/\mu p_2 = j^2V_2. \quad (88.5)$$

Podemos expresar j^2 en la forma (82.6), obteniendo $p' = (p_2 - p_1)V_2/(V_1 - V_2)$, y, sustituyendo V_2/V_1 a partir de (85.1), tenemos

$$p' = \frac{1}{2}[(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2]. \quad (88.6)$$

Puesto que $p_2 > p'$, vemos que una discontinuidad isoterma se presenta sólo cuando el cociente de las presiones p_2 y p_1 satisface la relación

$$p_2/p_1 > (\gamma + 1)/(3 - \gamma) \quad (88.7)$$

(RAYLEIGH, 1910). Como es natural, esta condición puede obtenerse directamente a partir de (88.4).

Puesto que la densidad del gas para una temperatura dada es proporcional a la presión, el cociente de densidades en una discontinuidad isoterma es igual al cociente de presiones:

$$\rho'/\rho_2 = V_2/V' = p'/p_2. \quad (88.8)$$

§ 89. Discontinuidades débiles

Además de las discontinuidades superficiales, en las que las magnitudes ρ , p , v , etc., son discontinuas, podemos tener también superficies en las que estas magnitudes, aunque permanecen continuas, no sean funciones regulares de las coordenadas. La irregularidad puede ser de diversos tipos. Por ejemplo, pueden ser discontinuas las primeras derivadas espaciales de ρ , p ,

v , etc., sobre una superficie, o bien pueden estas derivadas ser infinitas; también las derivadas de orden superior pueden comportarse del mismo modo. Denominaremos a dichas superficies *discontinuidades débiles* en contraste con las discontinuidades fuertes o intensas (ondas de choque y discontinuidades tangenciales), en las que las propias magnitudes ρ , p , v , ..., son discontinuas.

A partir de consideraciones sencillas es fácil ver que las discontinuidades débiles se propagan respecto al gas (en cada lado de la superficie) con la velocidad del sonido. En efecto, puesto que las propias funciones ρ , p , v , ..., son continuas, pueden «suavizarse» modificándolas sólo cerca de las superficies de discontinuidad y sólo en cantidades arbitrariamente pequeñas, de tal modo que las funciones suavizadas carezcan de singularidades. La verdadera distribución de la presión, por ejemplo, puede representarse así como una superposición de una función perfectamente suave p_0 , libre de toda singularidad, y de una perturbación muy pequeña p' de esta distribución cerca de la superficie de discontinuidad; y esta última, como cualquier perturbación pequeña, se propaga respecto al gas con la velocidad del sonido.

Debe resaltarse que en el caso de una onda de choque, las funciones suavizadas diferirían de las verdaderas en magnitudes que en general no son pequeñas y, por tanto, los razonamientos anteriores dejan de ser válidos. Sin embargo, si las discontinuidades en la onda de choque son suficientemente pequeñas, aquellos argumentos vuelven a ser aplicables y dicha onda de choque se propaga con la velocidad del sonido, resultado que se obtuvo por otro método en § 83.

Si el flujo es estacionario en un sistema coordenado dado, entonces la superficie de discontinuidad está en reposo en dicho sistema y el gas fluye a su través. La componente de velocidad normal a la superficie debe ser igual a la velocidad del sonido. Si designamos por α el ángulo formado por la dirección de la velocidad del gas y el plano tangente a la superficie, entonces $v_n = v \operatorname{sen} \alpha = c$, o $\operatorname{sen} \alpha = c/v$, es decir, una superficie de discontinuidad débil corta a las líneas de corrientes formando el ángulo de Mach. En otras palabras, una superficie discontinua débil es una de las superficies características, resultado que es totalmente razonable si recordamos su significado físico: son superficies a lo largo de las cuales se propagan las pequeñas perturbaciones (ver § 79). Es evidente que en el flujo estacionario de un gas pueden producirse discontinuidades débiles sólo a velocidades no inferiores que la del sonido.

Las discontinuidades débiles difieren fundamentalmente de las intensas en el modo de su presentación. Veremos que las ondas de choque pueden formarse como un resultado directo del flujo gaseoso, siendo continuas las condiciones límites (por ejemplo, la formación de ondas de choque en una onda sonora, § 95). En contraste con esto, las discontinuidades débiles no

pueden producirse espontáneamente; son siempre el resultado de alguna singularidad de las condiciones iniciales o límites del flujo. Estas singularidades pueden ser de diversos tipos, como las propias discontinuidades débiles. Por ejemplo, puede producirse una discontinuidad débil a causa de la presencia de ángulos en la superficie de un cuerpo, al cual rodea el flujo; en este caso son discontinuas las primeras derivadas espaciales de la velocidad. También se forma una discontinuidad débil cuando la curvatura de la superficie del cuerpo es discontinua sin ser un ángulo; en este caso son discontinuas las segundas derivadas espaciales de la velocidad, y así sucesivamente. Finalmente, cualquier singularidad en la variación respecto al tiempo del flujo da como resultado una discontinuidad débil no estacionaria.

La componente tangencial de la velocidad del gas respecto a la superficie de una discontinuidad débil está dirigida siempre alejándose del punto (por ejemplo, un ángulo en la superficie de un cuerpo), a partir del cual empieza la perturbación que produce la discontinuidad; diremos que la discontinuidad empieza en este punto. Esto es un ejemplo del hecho de que en el flujo supersónico las perturbaciones se propagan aguas abajo.

La presencia de la viscosidad y de la conducción térmica da como resultado un espesor finito de una discontinuidad débil que, por tanto, es en realidad una capa de transición, como una onda de choque. Sin embargo, su espesor depende únicamente de su intensidad y es constante en el tiempo, mientras que el espesor de una discontinuidad débil aumenta con el tiempo a partir de su formación. Es fácil determinar la ley que rige este aumento. Para ello, consideremos de nuevo la nota hecha al principio de esta sección de que el movimiento de cualquier parte de la superficie de una discontinuidad débil obedece a las mismas ecuaciones que la propagación de cualquier perturbación débil en el gas. Cuando se presenta la viscosidad y la conducción térmica, una perturbación que esté inicialmente concentrada en un pequeño volumen (un «paquete de ondas») se expande cuando se mueve al transcurrir el tiempo; la forma de realizarse esta expansión ha sido determinada en § 77. Por tanto, podemos obtener la conclusión de que el espesor δ de una discontinuidad débil es del orden de

$$\delta \sim \sqrt{(act)}, \quad (89.1)$$

siendo t el tiempo a partir de la formación de la discontinuidad y a el coeficiente de la frecuencia elevada al cuadrado en el coeficiente de absorción del sonido. Si la discontinuidad está en reposo, entonces el tiempo t debe sustituirse por l/c , siendo l la distancia al punto en donde se inicia la discontinuidad (por ejemplo, en el caso de una discontinuidad débil que parte de un ángulo que existe en la superficie de un cuerpo, l es la distancia desde el vértice de dicho ángulo); en consecuencia, $\delta \sim \sqrt{(al)}$. Así pues, el espesor de una discontinuidad débil aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada del tiempo a partir de su formación o de la distancia de su punto de partida.

Para terminar esta sección hagamos las siguientes aclaraciones, análogas a las que hicimos al final del § 79. Allí indicamos que, entre las diversas perturbaciones del estado de un gas en movimiento, las perturbaciones de entropía (a presión constante) y de vorticidad tienen propiedades distintas. Dichas perturbaciones no se mueven respecto al gas y no se propagan con la velocidad del sonido. De aquí que las superficies en las que la entropía y la vorticidad[†] tienen una discontinuidad pequeña están en reposo respecto al gas y se mueven con él respecto a un sistema fijo de coordenadas. Dichas discontinuidades pueden denominarse *discontinuidades tangenciales débiles*; se mueven junto con las líneas de corriente, y en este aspecto son totalmente análogas a las discontinuidades tangenciales intensas.

[†] Una discontinuidad débil de la vorticidad implica una discontinuidad débil de la componente tangencial de la velocidad en la superficie de discontinuidad; por ejemplo, las derivadas normales de la velocidad pueden ser discontinuas.

CAPÍTULO X

FLUJO GASEOSO MONODIMENSIONAL

§ 90. Flujo de un gas a través de una tobera

Consideremos el flujo estacionario de un gas que sale de un gran recipiente a través de un tubo de sección recta variable (una *tobera*). Supongamos que el flujo gaseoso es uniforme en toda la sección recta de cada punto del tubo y que la velocidad está dirigida a lo largo de su eje. Para que esto sea así el tubo no debe ser demasiado ancho y el área de su sección recta S debe variar lentamente a lo largo de su longitud. En este caso todas las magnitudes que caracterizan el flujo serán funciones únicamente de la coordenada a lo largo del eje del tubo. Bajo estas condiciones podemos aplicar las relaciones obtenidas en § 80, que son válidas a lo largo de líneas de corriente, directamente a la variación de las magnitudes a lo largo del eje.

La masa de gas que pasa a través de una sección recta del tubo en la unidad de tiempo (*descarga* o *caudal*) es $Q = \rho v S$; este valor evidentemente debe ser constante a lo largo del tubo:

$$Q = S \rho v = \text{constante.} \quad (90.1)$$

Se supone que las dimensiones lineales del recipiente son muy grandes en comparación con el diámetro del tubo. La velocidad del gas en el recipiente puede, por tanto, tomarse como cero y de acuerdo con ello todas las magnitudes con el sufijo 0 en las fórmulas del § 80 tendrán los valores de aquellas mismas magnitudes dentro del recipiente.

Hemos visto que la densidad del flujo $j = \rho v$ no puede superar un cierto valor límite j_* . Por tanto, queda claro que los valores posibles del caudal total Q tienen (para un tubo dado y un estado determinado del gas dentro del recipiente) un límite superior Q_{\max} que se determina fácilmente. Si el valor j_* de la densidad del flujo se alcanzase en todas partes, excepto en el punto más estrecho del tubo, tendríamos $j > j_*$ para secciones rectas con valores más pequeños de S , lo cual es imposible. Por tanto, el valor $j = j_*$ puede obtenerse únicamente en el punto más estrecho del tubo; supongamos que el área de su sección recta sea S_{\min} . Entonces el límite superior del caudal total es

$$Q_{\max} = \rho_* v_* S_{\min} = \sqrt{(\gamma p_0 \rho_0)} [2/(\gamma + 1)]^{(1+\gamma)/2(\gamma-1)} S_{\min}. \quad (90.2)$$

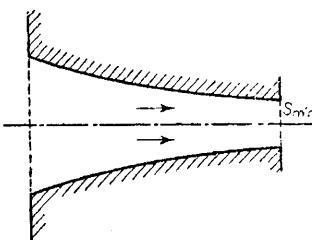


FIG. 54

Consideremos, en primer lugar, una tobera que se estrecha continuamente hacia su extremo exterior, de modo que el área de la sección recta mínima está en dicho extremo (figura 54). Según (90.1), la densidad de flujo j aumenta monótonamente a lo largo del tubo. Lo mismo se cumple para la velocidad del gas v , y la presión, de acuerdo con ello, disminuye monótonamente. El valor más grande posible de j se alcanza si v adquiere el valor c justo en el extremo exterior del tubo, es decir, si $v_1 = c_1 = v_*$ (el sufijo 1 designa las magnitudes que corresponden al extremo exterior). Al mismo tiempo, $p_1 = p_*$.

Sigamos ahora la variación en el modo de fluir hacia fuera del gas cuando disminuye la presión externa p_e . Cuando esta presión disminuye desde el valor p_0 , que es la presión en el interior del recipiente, hasta p_* , la presión p_1 en el extremo exterior del tubo disminuye también, y ambas presiones, p_1 y p_e , permanecen iguales; es decir, la totalidad de caída de presión desde p_0 hasta p_e se produce en la tobera. La velocidad v_1 , con la cual el gas abandona el tubo, y el caudal total $Q = j_1 S_{\min}$, aumentan, sin embargo, monótonamente. Para $p_e = p_*$ la velocidad se hace igual a la velocidad local del sonido y el caudal alcanza el valor Q_{\max} . Cuando la presión externa disminuye aún más, la presión p_1 permanece constante en el valor p_* y la caída de presión desde p_* hasta p_e se produce en el exterior del tubo, en el medio que lo rodea. En otras palabras, la caída de presión a lo largo del tubo no puede ser mayor que de p_0 a p_* , sea cualquiera la presión exterior. En el caso del aire ($p_* = 0,53 p_0$), la caída de presión máxima es $0,47 p_0$. La velocidad en el extremo del tubo y el caudal permanecen también constantes para $p_e < p_*$. Así pues, el gas no puede adquirir una velocidad supersónica al fluir a través de una tobera de este tipo.

Si consideramos únicamente el flujo en la proximidad inmediata del extremo del tubo, el movimiento del gas después de abandonar el tubo es esencialmente un flujo alrededor de un ángulo, cuyo vértice es la arista de la boca del tubo; estudiaremos con detalle este flujo en § 104.

La imposibilidad de obtener velocidades supersónicas mediante flujos a través de una tobera que se estrecha de modo continuo se debe al hecho de

que puede alcanzarse únicamente una velocidad igual a la velocidad local del sonido en el extremo de dicho tubo. Es evidente que puede alcanzarse una velocidad supersónica mediante una tobera que primeramente se estreche y luego se ensanche otra vez (figura 55). Este tipo de tobera se denomina *tobera de Laval*.

La densidad de flujo máximo j_* , si llega a alcanzarse, puede presentarse únicamente en la sección recta más estrecha, de modo que el caudal no puede superar a $S_{\min} j_*$. En la parte de estrechamiento de la tobera, la densidad de flujo aumenta (y la presión disminuye); la curva de la figura 56 muestra j en función[†] de p , y la variación que acabamos de describir corresponde al intervalo desde c hasta b . Si la densidad de flujo máximo se alcanza en la sección recta S_{\min} (el punto b de la figura 56), la presión continúa disminuyendo en la parte de la tobera en la que existe un ensanchamiento, mientras que j empieza a disminuir también, proceso que corresponde al segmento ba de la curva. En el extremo exterior del tubo j toma un valor

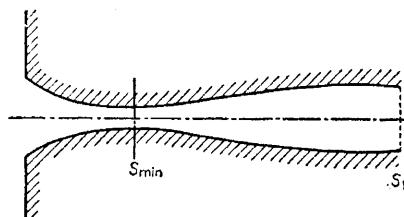


FIG. 55

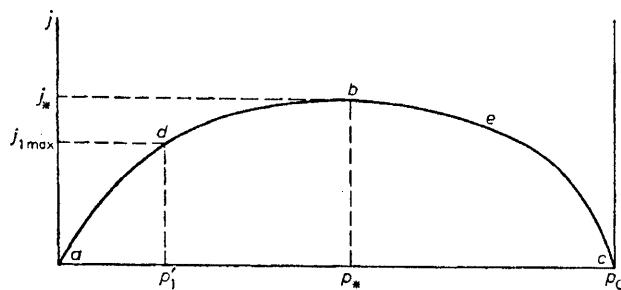


FIG. 56

[†] De acuerdo con las fórmulas (80.15-80.17), la dependencia es

$$j = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} p_0 \rho_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2}.$$

definido, $j_{1,\max} = j_* S_{\min}/S_1$, y la presión tiene el valor correspondiente, designado en la figura 56 por p'_1 , en un punto determinado d de la curva. Sin embargo, si sólo se alcanza un punto concreto e en la sección recta S_{\min} , la presión aumenta en la parte de ensanchamiento de la tobera, correspondiendo un retorno hacia abajo de la curva desde e hacia c . A primera vista puede parecer que es posible pasar de modo discontinuo desde cb hasta ab sin pasar a través del punto b , mediante la formación de una onda de choque. Sin embargo, esto es imposible, puesto que el gas que «entra» en la onda de choque no puede tener una velocidad subsónica.

Recordando estos resultados, analizaremos ahora el modo de variación del flujo de salida cuando aumenta gradualmente la presión externa p_e . En el caso de presiones pequeñas, desde cero hasta p'_1 , la presión p_* y la velocidad $v_* = c_*$ se alcanzan en la sección recta S_{\min} . En la parte de ensanchamiento de la tobera la velocidad continúa aumentando, de modo que como resultado se obtiene un flujo supersónico del gas y de acuerdo con ello la presión continúa disminuyendo, alcanzando el valor p'_1 en el extremo exterior del tubo, cualquiera que sea la presión p_e . La presión disminuye desde p'_1 hasta p_e fuera de la tobera en la onda de rarefacción que abandona el borde la boca del tubo (ver § 104).

Cuando p_e supera a p'_1 , una onda de choque oblicua sale del borde de la boca del tubo, comprimiendo el gas desde p'_1 hasta p_e (§ 104). Sin embargo, veremos que una onda de choque estacionaria solamente puede abandonar una superficie sólida si su intensidad no es demasiado grande (§ 103). De aquí que, cuando la presión externa aumenta adicionalmente, la onda de choque pronto empieza a moverse hacia el interior de la tobera, produciéndose la separación delante de la misma y en la superficie interior del tubo. Para un determinado valor de p_e la onda de choque alcanza la sección recta más estrecha y entonces desaparece; el flujo se hace en todas partes subsónico con separación en las paredes a lo largo de la parte ensanchada de la tobera. Todos estos fenómenos son, como es natural, tridimensionales.

PROBLEMA

A un gas perfecto se le suministra una pequeña cantidad de calor en un segmento corto del tubo por donde circula con flujo estacionario. Determinar la variación de la velocidad del gas cuando pasa a través de este segmento.

Solución. Sea Sq la cantidad de calor suministrada por unidad de tiempo, siendo S el área de la sección recta del tubo en el segmento de que se trata. La densidad de flujo mísico $j = \rho v$ y la densidad de flujo del impulso $p + jv$ son las mismas en ambos lados del segmento caliente; de aquí que $\Delta p = -j\Delta v$, designando por Δ la variación de una magnitud cuando pasa a través de dicho segmento. La diferencia de la densidad de flujo de energía ($w + v^2/2$) es q . Escribiendo $w = \gamma p/(\gamma - 1)$, obtenemos (suponiendo que Δv y Δp son pequeños) $vj\Delta v + \gamma(p\Delta v + v\Delta p)/(\gamma - 1) = q$. Eliminando Δp ,

tenemos $\Delta v = (\gamma - 1)q/\rho(c^2 - v^2)$. Vemos que, en el flujo subsónico, el suministro de calor acelera el flujo ($\Delta v > 0$), mientras que en el flujo supersónico lo retarda.

Escribiendo la temperatura del gas en la forma $T = \mu p/R\rho = \mu pv/Rj$ (siendo R la constante de los gases), se tiene

$$\Delta T = \frac{\mu}{Rj}(v\Delta p + p\Delta v) = \frac{\mu(\gamma - 1)q}{Rj(c^2 - v^2)} \left(\frac{c^2}{\gamma} - v^2 \right).$$

En el caso del flujo supersónico esta expresión es siempre positiva y la temperatura del gas aumenta; sin embargo, en el caso de flujo subsónico, ΔT puede ser o bien positiva o bien negativa.

§ 91. Flujo de un gas viscoso en una tubería

Consideremos el flujo de un gas en una tubería (de sección recta constante) suficientemente larga para que el rozamiento del gas contra las paredes, es decir, la viscosidad del gas, no pueda despreciarse. Supondremos que las paredes están térmicamente aisladas, de modo que no existe intercambio de calor entre el gas y el medio que lo rodea. En el caso de velocidades del gas—del orden de (o superiores a) la velocidad del sonido (único caso que estudiaremos aquí), el flujo de gas en la tubería es, como es natural, turbulento, si el radio de la misma no es pequeño. La turbulencia del flujo es importante respecto a nuestro problema sólo en un aspecto: hemos visto en § 43 que, en el flujo turbulento, la velocidad (media) es prácticamente la misma en casi todos los puntos de la sección recta de la tubería y disminuye rápidamente hacia cero cerca de las paredes. Por tanto, supondremos que la velocidad del gas v es constante en toda la sección recta y la definiremos de modo que el producto Spv (siendo S el área de la sección recta) sea igual al caudal total a través de la sección recta.

Puesto que el caudal total Spv es constante a lo largo de la tubería y se supone que S es constante, la densidad de flujo máscico debe ser también constante:

$$j = \rho v = \text{constante}. \quad (91.1)$$

A continuación, puesto que la tubería está térmicamente aislada, debe ser también constante el flujo de energía total transportado por el gas a través de una sección recta cualquiera. Este flujo vale $Spv(w + v^2/2)$, y según (91.1) tenemos

$$w + \frac{1}{2}v^2 = w + \frac{1}{2}j^2V^2 = \text{constante}. \quad (91.2)$$

Como es natural, la entropía s del gas no permanece constante, sino que aumenta cuando el gas se mueve a lo largo de la tubería debido al rozamiento interno. Si x es la coordenada a lo largo de la tubería, aumentando aguas abajo, podemos escribir

$$ds/dx > 0. \quad (91.3)$$

Derivemos a continuación (91.2) respecto a x . Puesto que $dw = Tds + Vdp$, tenemos

$$T\frac{ds}{dx} + V\frac{dp}{dx} + j^2V\frac{dV}{dx} = 0.$$

A continuación, sustituyendo

$$\frac{dV}{dx} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dx} + \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dx}, \quad (91.4)$$

obtenemos

$$\left[T + j^2V\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p\right] \frac{ds}{dx} = -V\left[1 + j^2\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s\right] \frac{dp}{dx}. \quad (91.5)$$

Por una bien conocida fórmula de la termodinámica, $(\partial V/\partial s)_p = (T/c_p)(\partial V/\partial T)_p$. El coeficiente de dilatación térmica es positivo en el caso de los gases. Por tanto, utilizando (91.3), se obtiene la conclusión que el primer miembro de (91.5) es positivo. Por consiguiente, el signo de la derivada dp/dx es el de $-[1 + j^2(\partial V/\partial p)_s] = (v/c)^2 - 1$. Vemos que

$$\frac{dp}{dx} \leq 0 \text{ para } v \leq c. \quad (91.6)$$

Así pues, en el caso de flujo subsónico la presión disminuye aguas abajo, lo mismo que ocurría en el caso de un fluido incompresible. Sin embargo, aumenta en el caso del flujo supersónico.

De modo semejante podemos determinar el signo de la derivada dV/dx . Puesto que $j = v/V = \text{constante}$, el signo de dv/dx es el mismo que el de dV/dx . Este último puede expresarse en función de la derivada positiva ds/dx mediante (91.4) y (91.5). El resultado es que

$$\frac{dv}{dx} \geq 0 \text{ para } v \leq c, \quad (91.7)$$

es decir, la velocidad aumenta aguas abajo en el caso del flujo subsónico y disminuye en el caso del flujo supersónico.

Dos magnitudes termodinámicas cualesquiera de un gas que fluye en el interior de una tubería son funciones entre sí (independientemente de la ley de resistencia de la tubería, además de ser independientes de otras magnitudes). Estas funciones dependen de la constante j como parámetro y vienen dadas por la ecuación $w + j^2V^2/2 = \text{constante}$, que se obtiene eliminando la velocidad de las ecuaciones de conservación de masa y energía para el gas.

Analicemos la naturaleza de las curvas que dan, por ejemplo, la entropía en función de la presión. Volviendo a escribir (91.5) en la forma

$$\frac{ds}{dp} = V \frac{(v/c)^2 - 1}{T + j^2V(\partial V/\partial s)_p},$$

vemos que, en el punto en el que $v = c$, la entropía tiene un valor extremal. Es fácil ver que s pasa por un máximo. Puesto que la segunda derivada respecto a p en este punto es

$$\left[\frac{d^2s}{dp^2} \right]_{v=c} = - \frac{j^2 V (\partial^2 V / \partial p^2)_s}{T + j^2 V (\partial V / \partial s)_p} < 0;$$

admitimos, como es normal, que la derivada $(\partial^2 V / \partial p^2)_s$ es positiva.

Las curvas que dan s en función de p (denominadas *líneas de Fanno*) tienen, por tanto, la forma que se indica en la figura 57. La región de velocidades subsónicas está a la derecha del máximo y la de velocidades supersónicas a la izquierda. Cuando el parámetro j aumenta, pasamos a curvas inferiores. En efecto, derivando la ecuación (91.2) respecto a j para p constante, tenemos

$$\frac{ds}{dj} = - \frac{j V^2}{T + j^2 V (\partial V / \partial s)_p} < 0.$$

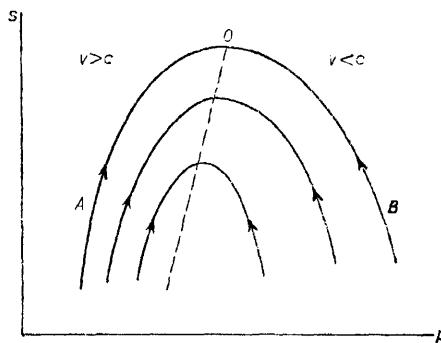


FIG. 57

A partir de los resultados anteriores se puede obtener una conclusión interesante. Supongamos que la velocidad del gas a la entrada de la tubería es menor que la del sonido. La entropía aumenta aguas abajo y la presión disminuye; esto corresponde a un movimiento a lo largo de la rama de la derecha de la curva $s = s(p)$, a partir de B hacia O (figura 57). Sin embargo, este movimiento sólo puede continuar hasta que la entropía alcanza su valor máximo. Un movimiento adicional a lo largo de la curva más allá de O (es decir, hacia el interior de la región de velocidades supersónicas) no es posible, puesto que la entropía del gas disminuiría cuando éste se moviea a lo largo de la tubería. La transición entre las ramas BO y OA no puede efectuarse ni siquiera mediante una onda de choque, puesto que el gas que

entra en una onda de choque no puede moverse con velocidad subsónica.

Así pues, llegamos a la conclusión de que, si la velocidad a la entrada de la tubería es menor que la del sonido, el flujo permanece subsónico en todo punto de la tubería. La velocidad del gas se hace igual a la velocidad local del sonido únicamente en el otro extremo de la tubería, si es que ocurre (sería así si la presión del medio externo en el cual entra el gas es suficientemente baja).

Con objeto de que el gas pueda tener velocidades supersónicas en la tubería, su velocidad a la entrada debe ser también supersónica. Por las propiedades generales del flujo supersónico (la imposibilidad de propagar perturbaciones aguas arriba), el flujo será entonces totalmente independiente de las condiciones a la salida de la tubería. En particular, la entropía aumentará a lo largo de la tubería de un modo totalmente definido y su valor máximo se obtendrá a una distancia definida $x = l_k$ de la entrada. Si la longitud total l de la tubería es menor que l_k , el flujo es supersónico en toda ella (correspondiendo a un movimiento sobre la rama AO desde A hacia O). Si, por otra parte, $l > l_k$, el flujo no puede ser supersónico a través de la tubería ni puede existir una transición suave a flujos supersónicos, puesto que podemos únicamente movernos a lo largo de la rama OB en el sentido indicado por la flecha. Por tanto, en este caso deberá formarse necesariamente una onda de choque que produzca un cambio discontinuo del flujo de supersónico a subsónico. Por consiguiente, la presión se ve aumentada y pasamos de la rama AO a BO sin pasar a través del punto O . El flujo es totalmente subsónico más allá de la discontinuidad.

§ 92. Movimiento de flujo de semejanza monodimensional

Una categoría importante de movimiento monodimensional no estacionario en ondas compresibles es el del flujo que se desarrolla en condiciones donde existan velocidades características, pero no longitudes características. El ejemplo más sencillo de dicho flujo viene dado por el flujo de gas en una tubería cilíndrica semiinfinita terminada por un pistón, cuando éste empieza a moverse con velocidad constante.

Dicho flujo se define por el parámetro velocidad y por los parámetros que dan, por ejemplo, la presión del gas y la densidad en el estado inicial. Sin embargo, no podemos formar ninguna combinación de estos parámetros que tengan las dimensiones de longitud o de tiempo. Por tanto, se deduce que la distribución de todas las magnitudes puede depender de las coordenadas x en el tiempo t únicamente a través del cociente x/t , que tiene las dimensiones de velocidad. En otras palabras, estas distribuciones en instantes distintos serán semejantes, difiriendo únicamente en la escala a lo largo del eje x , que aumenta proporcionalmente al tiempo. Podemos decir enton-

ces que el esquema del flujo no varía si las longitudes se miden en una unidad que aumenta proporcionalmente a t . Cuando el esquema de flujo resulta invariable con el tiempo, si la escala de longitud se modifica apropiadamente, hablamos de *flujo de semejanza*.

La ecuación de conservación de la entropía en el caso de un flujo que depende únicamente de una coordenada x es $\partial s/\partial t + v_x \partial s/\partial x = 0$. Admitiendo que todas las magnitudes dependen únicamente de $\xi = x/t$, y observando que en este caso $\partial/\partial x = (1/t)\partial/\partial\xi$, $\partial/\partial t = -(\xi/t)\partial/\partial\xi$, obtenemos $(v_x - \xi)s' = 0$ (designando con el símbolo prima la derivación respecto a ξ). De aquí que $s' = 0$, es decir, $s = \text{constante}^\dagger$; por tanto, el flujo de semejanza en una dimensión debe ser isoentrópico. De modo parecido, a partir de las componentes y y z de la ecuación de Euler: $\partial v_y/\partial t + v_x \partial v_y/\partial x = 0$, $\partial v_z/\partial t + v_x \partial v_z/\partial x = 0$, encontramos que v_y y v_z son constantes, que tomaremos como cero sin pérdida de generalidad.

A continuación, la ecuación de continuidad y la componente x de la ecuación de Euler son

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (92.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (92.2)$$

aquí y en lo que sigue escribiremos v_x simplemente como v . En función de la variable ξ , estas ecuaciones se transforman en

$$(v - \xi)\rho' + \rho v' = 0, \quad (92.3)$$

$$(v - \xi)v' = -p'/\rho = -c^2\rho'/\rho. \quad (92.4)$$

En la segunda ecuación hemos puesto $p' = (\partial p/\partial \rho)$, $\rho' = c^2\rho'$, puesto que la entropía es constante.

En primer lugar, estas ecuaciones tienen la solución trivial $v = \text{constante}$, $\rho = \text{constante}$, es decir, un flujo uniforme de velocidad constante. Para hallar una solución no trivial eliminemos ρ' y v' de las ecuaciones, obteniendo $(v - \xi)^2 = c^2$, de aquí que $\xi = v \pm c$. Tomemos el signo +:

$$x/t = v + c; \quad (92.5)$$

esta selección del signo significa que tomamos el eje positivo en una dirección y sentido definidos, seleccionados del modo que indicaremos a continuación. Finalmente, sustituyendo $v - \xi = -c$ en (92.3), obtenemos $c\rho' = \rho v'$, o sea, $\rho dv = cd\rho$. La velocidad del sonido es una función del estado termodinámico del gas; tomando como magnitudes termodinámicas fundamentales la entropía s y la densidad ρ , podemos representar la velocidad del sonido

[†] La hipótesis de que $v_x - \xi = 0$, resultaría contradictoria con las otras ecuaciones del movimiento; a partir de (92.3) tendríamos $v_x = \text{constante}$, en contra de la hipótesis.

como una función $c(\rho)$ de la densidad para un valor dado cualquiera de la entropía constante. Entendiendo que c es dicha función, podemos escribir

$$v = \int c d\rho / \rho = \int dp / c\rho. \quad (92.6)$$

Esta fórmula puede escribirse también en la forma

$$v = \int \sqrt{(-dp/dV)}, \quad (92.7)$$

en la cual permanece abierta la selección de la variable dependiente.

Las fórmulas (92.5) y (92.6) dan la solución buscada de las ecuaciones del movimiento. Si se conoce la función $c(\rho)$, entonces puede calcularse la velocidad v en función de la densidad a partir de (92.6). La ecuación (92.5) determina entonces la densidad como una función implícita de x/t , y así queda determinada también la relación entre todas las demás magnitudes con x/t .

Podemos deducir algunas propiedades generales de la solución así obtenida. Derivando la ecuación (92.5) respecto a x , tenemos

$$t \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{d(v+c)}{d\rho} = 1. \quad (92.8)$$

Para la derivada de $v + c$ tenemos, según (92.6),

$$\frac{d(v+c)}{d\rho} = \frac{c}{\rho} + \frac{dc}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho c)}{d\rho}.$$

Pero

$$\rho c = \rho \sqrt{(\partial p / \partial \rho)} = 1 / \sqrt{(-\partial p / \partial V)};$$

derivando, tenemos

$$d(\rho c) / d\rho = c^2 d(\rho c) / dp = \frac{1}{2} \rho^2 c^5 (\partial^2 V / \partial p^2)_s. \quad (92.9)$$

Así pues,

$$d(v+c) / d\rho = \frac{1}{2} \rho^2 c^5 (\partial^2 V / \partial p^2)_s > 0. \quad (92.10)$$

Se deduce, por tanto, a partir de (92.8) que $\partial \rho / \partial x > 0$ para $t > 0$.[†] Puesto que $\partial \rho / \partial x = c^2 \partial \rho / \partial x$, se obtiene la conclusión de que $\partial p / \partial x > 0$ también. Finalmente, tenemos $\partial v / \partial x = (c/\rho) \partial \rho / \partial x$, de modo que $\partial v / \partial x > 0$. Por consiguiente, son válidas las desigualdades

$$\partial \rho / \partial x > 0, \quad \partial p / \partial x > 0, \quad \partial v / \partial x > 0 \quad (92.11)$$

[†] El flujo de semejanza que estamos aquí considerando carece de significado para tiempos $t < 0$. Dicho flujo sólo podría producirse debido a alguna singularidad en las condiciones iniciales ($t = 0$) del flujo en el punto $x = 0$ y, por tanto, sólo tiene lugar para $t > 0$ (en nuestro ejemplo, la velocidad del pistón varía discontinuamente en $t = 0$. Ver también § 93).

El significado de estas desigualdades se hace más claro si seguimos la variación de las magnitudes en cuestión, no a lo largo del eje x para un valor dado t , sino en función del tiempo para un elemento determinado del gas cuando éste se mueve. Esta variación viene dada por la derivada total; por ejemplo, para la densidad tenemos, utilizando la ecuación de continuidad, $d\rho/dt = \partial\rho/\partial t + v \partial\rho/\partial x = -\rho \partial v/\partial x$. Según la tercera desigualdad (92.11), esta magnitud es negativa y, por lo tanto, también lo es $d\rho/dt$:

$$d\rho/dt < 0, \quad d\rho/dt < 0. \quad (92.12)$$

Análogamente [utilizando la ecuación de Euler (92.2)] podemos ver que $dv/dt < 0$; sin embargo, esto no significa que el valor de la velocidad disminuye con el tiempo, puesto que v puede ser negativa. Las desigualdades (92.12) muestran que la densidad y la presión de un elemento de un gas cualquiera disminuye al moverse éste. En otras palabras, el gas se ve rariificado continuamente en su movimiento. Por consiguiente, dicho flujo puede denominarse como una *onda de rarefacción no estacionaria*.

Una onda de rarefacción puede propagarse únicamente a una distancia finita a lo largo del eje x ; esto se ve a partir del hecho de que la fórmula (92.5) daría una velocidad infinita para $x \rightarrow \pm \infty$, lo cual es imposible.

Apliquemos la fórmula (92.5) a un plano que limita la región del espacio ocupado por la onda de rarefacción. Aquí x/t es la velocidad de este límite respecto al sistema de coordenadas fijas escogido. Su velocidad respecto al propio gas es $(x/t) - v$ y, por (92.5), es igual a la velocidad local del sonido. Esto significa que los límites de una onda de rarefacción son discontinuidades débiles. El flujo de semejanza en casos diferentes se constituye, por tanto, de ondas de rarefacción y de regiones de flujo constante separadas por superficies de discontinuidad débil.[†]

Se ve ahora que la selección del signo en (92.5) corresponde al hecho de que estas discontinuidades débiles se supone que se mueven en el sentido positivo del eje de las x respecto al gas. Las desigualdades (92.11) surgen como consecuencia de esta selección, pero como es natural las desigualdades (92.12) no dependen del sentido ni dirección del eje x .

Normalmente en los problemas reales nos ocupamos con ondas de rarefacción limitadas por una cara por una región en donde el gas está en reposo. Supongamos que esta región (I en la figura 58) está a la derecha de la onda de rarefacción. La región II es la onda de rarefacción y la región III contiene gas que se mueve con velocidad constante. Las flechas de la figura muestran el sentido del movimiento del gas y de las discontinuidades débiles que limitan la onda de rarefacción; la discontinuidad *a* siempre se mueve dentro del gas en reposo, pero la discontinuidad *b* se mueve en un sentido

[†] Como es natural, también pueden existir regiones de flujo constante separadas por ondas de choque.

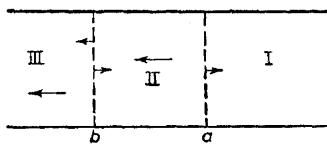


FIG. 58

cualquiera, dependiendo de la velocidad alcanzada en la onda de rarefacción (ver problema 2). Podemos dar explícitamente las relaciones existentes entre las diversas magnitudes de una onda de rarefacción de este tipo admitiendo que el gas es perfecto. En el caso de un proceso adiabático $\rho T^{1/(1-\gamma)} = \text{constante}$. Puesto que la velocidad del sonido es proporcional a \sqrt{T} , podemos escribir esta relación como

$$\rho = \rho_0 (c/c_0)^{2/(\gamma-1)}. \quad (92.13)$$

Sustituyendo esta expresión en la integral (92.6), obtenemos

$$v = \frac{2}{\gamma-1} \int dc = \frac{2}{\gamma-1} (c - c_0);$$

se escoge la constante de integración, de modo que $c = c_0$ para $v = 0$ (utilizamos el sufijo 0 para referirnos al punto en donde el gas está en reposo). Expresaremos todas las magnitudes en función de v , recordando que, con la situación anterior de las diversas regiones, la velocidad del gas tiene el sentido negativo del eje de las x , es decir, $v < 0$. Así pues,

$$c = c_0 - \frac{1}{2}(\gamma-1)|v|, \quad (92.14)$$

que determina la velocidad local del sonido en función de la velocidad del gas. Sustituyendo en (92.13), encontramos que la densidad resulta ser

$$\rho = \rho_0 [1 - \frac{1}{2}(\gamma-1)|v|/c_0]^{2/(\gamma-1)}, \quad (92.15)$$

y análogamente la presión es

$$p = p_0 [1 - \frac{1}{2}(\gamma-1)|v|/c_0]^{2\gamma/(\gamma-1)}. \quad (92.16)$$

Finalmente, sustituyendo (92.14) en la fórmula (92.5), obtenemos

$$|v| = \frac{2}{\gamma+1} \left(c_0 - \frac{x}{t} \right), \quad (92.17)$$

que nos da v en función de x y t .

Por definición, la magnitud c no puede ser negativa. Por tanto, podemos deducir a partir de (92.14) la conclusión importante de que la velocidad debe satisfacer la desigualdad

$$|v| \leq 2c_0/(\gamma-1); \quad (92.18)$$

cuando la velocidad alcanza este valor límite, la densidad del gas (y también p y c) se hace cero. Así pues, un gas originalmente en reposo y expansionándose de modo no estacionario en una onda de rarefacción, puede acelerarse únicamente a velocidades que no superen a $2c_0/(\gamma - 1)$.

Ya hemos mencionado al principio de esta sección un ejemplo simple de flujo de semejanza, a saber, aquél que se produce en una tubería cilíndrica en la que un pistón empieza a moverse con velocidad constante. Si el pistón se mueve hacia el exterior de la tubería crea una rarefacción y se forma una onda de rarefacción del tipo descrito. Sin embargo, si el pistón se mueve hacia dentro, comprime el gas que hay delante de él, y la transición a la presión menor original solamente puede producirse en una onda de choque, que de hecho se forma delante de un pistón que se mueve hacia delante en una tubería (ver los problemas siguientes).†

PROBLEMAS

Problema 1. Un gas perfecto ocupa una tubería cilíndrica semiinfinita terminada por un pistón. En un instante inicial el pistón empieza a moverse hacia el interior de la tubería con velocidad constante U . Determinar el flujo resultante.

Solución. Se forma una onda de choque delante del pistón y se mueve a lo largo de la tubería. En el instante inicial esta onda de choque y el pistón coinciden, pero en instantes subsiguientes el choque se adelanta al pistón y aparece una región de gas comprendida entre ambas (región 2). Delante de la onda de choque (región 1), la presión de gas es igual a su valor inicial p_1 y su velocidad respecto a la tubería es cero. En la región 2, el gas se mueve con velocidad constante igual a la velocidad U del pistón (figura 59). La diferencia de velocidades entre las regiones 1 y 2 es, por tanto, también U , y, por las fórmulas (82.7) y (85.1), podemos escribir

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{[(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)]} \\ &= (p_2 - p_1)\sqrt{\{2V_1/[(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2]\}}. \end{aligned}$$

De aquí se encuentra que la presión del gas p_2 entre el pistón y la onda de choque viene dada por

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\gamma(\gamma + 1)U^2}{4c_1^2} + \frac{\gamma U}{c_1} \sqrt{\left[1 + \frac{(\gamma + 1)^2 U^2}{16c_1^2}\right]}.$$

† Podemos mencionar también un flujo de semejanza análogo en tres dimensiones: el flujo gaseoso con simetría central producido por una esfera en expansión uniforme. Delante de la esfera se forma una onda de choque esférica, que se expande con velocidad constante. A diferencia de lo que ocurre en el caso monodimensional, no es constante la velocidad del gas entre la esfera y el choque; no puede integrarse analíticamente la ecuación que la determina como una función del cociente r/t .

Este problema ha sido estudiado por L. I. Sedov (1945; ver su obra *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Cleaver-Hume Press, London, 1959) y G. I. TAYLOR, *Proceedings of the Royal Society*, A186, 273, 1946.

Sabiendo p_2 , podemos calcular, a partir de las fórmulas (85.4), la velocidad de la onda de choque respecto al gas en cada lado de la misma. Puesto que el gas 1 está en reposo, la velocidad de la onda de choque respecto a él es igual a la velocidad de propagación del choque en la tubería. Si la coordenada x (a lo largo de la tubería) se mide a partir de la posición inicial del pistón (estando el gas en el lado $x > 0$), encontramos la posición de la onda de choque en el tiempo t , que resulta ser

$$x = t \left\{ \frac{1}{4} (\gamma + 1) U + \sqrt{\left[\frac{1}{16} (\gamma + 1)^2 U^2 + c_1^2 \right]} \right\},$$

mientras que la posición del pistón es $x = Ut$.

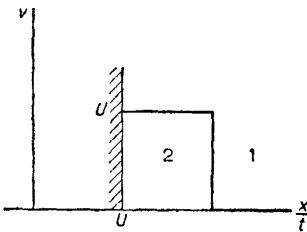


FIG. 59

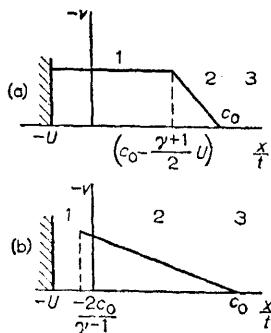


FIG. 60

Problema 2. Igual que el problema 1, pero para el caso en el que el pistón se mueve saliendo de la tubería con velocidad U .

Solución. El pistón limita o confina una región de gas (región 1, en la figura 60a) que se mueve en el sentido negativo del eje de las x con velocidad constante $-U$, igual a la propia velocidad del pistón. Entonces, se obtiene una onda de rarefacción (2) en la cual el gas se mueve en el sentido negativo del eje de las x , variando linealmente su velocidad desde $-U$ hasta cero, de acuerdo con (92.17). La presión varía de acuerdo con (92.16) desde $p_1 = p_0 [1 - (\gamma + 1)U/2c_0]^{2\gamma/(\gamma-1)}$ en el gas 1 hasta p_0 en el gas 3, que está en reposo. El límite de las regiones 1 y 2 viene dado por la condición $v = -U$; de acuerdo con (92.17), tenemos $x = [c_0 - (\gamma + 1)U/2]t = (c - U)t$, siendo c la velocidad del sonido en el gas 1. En el límite de las regiones 2 y 3, $v = 0$, de aquí que $x = c_0 t$. Ambos límites son discontinuidades débiles; la segunda se propaga siempre hacia la derecha (es decir, alejándose del pistón), pero la primera puede propagarse tanto hacia la derecha (como se ve en la figura 60a) o hacia la izquierda [si la velocidad del pistón $U > 2c_0/(\gamma + 1)$].

El esquema de flujo que acabamos de describir puede producirse únicamente si $U < 2c_0/(\gamma - 1)$. Si $U > 2c_0/(\gamma - 1)$, se forma un vacío delante del pistón (el gas no puede seguir al pistón) que se extiende desde el pistón hasta el punto $x = -2c_0t/(\gamma - 1)$ (región 1 en la figura 60b). En este punto, $v = -2c_0(\gamma - 1)$; entonces, sigue la región 2, en la cual la velocidad disminuye hasta cero en el punto $x = c_0t$, y luego la región 3, en donde el gas está en reposo.

Problema 3. Un gas ocupa una tubería cilíndrica semiinfinita ($x > 0$) terminada por una válvula. En el instante $t = 0$, se abre la válvula y el gas fluye hacia el medio exterior, cuya presión p_e es menor que la presión inicial p_0 dentro de la tubería. Determinar el flujo resultante.

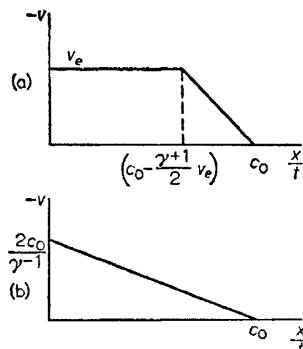


FIG. 61

Solución. Sca $-v_e$ la velocidad del gas que corresponde a la presión externa p_e de acuerdo con la fórmula (92.16); para $x = 0$ y $t > 0$, debemos tener $v = -v_e$. Si $v_e < 2c_0/(\gamma + 1)$, se tiene como resultado la distribución de velocidades indicada en la figura 61a. Para $v_e = -2c_0/(\gamma + 1)$ [correspondiente a una velocidad de flujo de salida igual a la velocidad local del sonido al final de la tubería: esto puede verse fácilmente haciendo $v = c$ en (92.14)], se anula la región de velocidad constante y se obtiene el esquema indicado en la figura 61b. La cantidad $2c_0(\gamma + 1)$ es la velocidad de flujo de salida de la tubería más grande posible en las condiciones establecidas. Si la presión externa p_e es tal que

$$p_e < p_0[2/(\gamma + 1)]^{2\gamma/(\gamma-1)}, \quad (1)$$

la velocidad correspondiente supera a $2c_0/(\gamma + 1)$. En realidad, la presión en el punto de salida de la tubería debería seguir siendo igual al valor límite [el segundo miembro de (1)] y la velocidad de flujo de salida debería ser $2c_0/(\gamma + 1)$; la caída de presión restante (hasta p_e) se produce en el medio externo.

Problema 4. Una tubería infinita se divide mediante un pistón; en un lado de la misma ($x < 0$) existe, en el instante inicial, gas a presión p_0 y en el otro lado existe el vacío. Determinar el movimiento del pistón cuando se expandiona el gas.

Solución. En el gas se forma una onda de rarefacción; uno de sus límites se mueve hacia la derecha con el pistón y el otro se mueve hacia la izquierda. La ecuación del movimiento del pistón es

$$m dU/dt = p_0[1 - \frac{1}{2}(\gamma - 1)U/c_0]^{2\gamma/(\gamma-1)},$$

siendo U la velocidad del pistón y m su masa por unidad de área. Integrando, obtenemos

$$U(t) = \frac{2c_0}{\gamma - 1} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{(\gamma + 1)p_0}{2mc_0} \right]^{-(\gamma-1)/(\gamma+1)} \right\}.$$

Problema 5. Determinar el flujo de una onda de rarefacción isotérmica de semejanza.

Solución. La velocidad isotérmica del sonido es $c_T = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_T} = \sqrt{(RT/\mu)}$, y en el caso de temperatura constante $c_T = \text{constante} = c_{T_0}$. De acuerdo con (92.5) y (92.6) tenemos, por tanto,

$$v = c_{T_0} \log(p/\rho_0) = c_{T_0} \log(p/p_0) = (x/t) - c_{T_0}.$$

§ 93. Discontinuidades en las condiciones iniciales

Una de las razones más importantes para la presencia de superficies de discontinuidad en un gas es la posibilidad de discontinuidades en las condiciones iniciales. Estas condiciones (es decir, las distribuciones iniciales de velocidad, presión, etc.) pueden, en general, escribirse arbitrariamente. En particular, no necesitan ser continuas en todos los puntos, sino que pueden ser discontinuas sobre diversas superficies. Por ejemplo, si se ponen en contacto dos masas de gas a presiones diferentes en un instante dado, su superficie de contacto será una superficie de discontinuidad de la distribución de presiones iniciales.

Es importante que las discontinuidades de las diversas magnitudes en las condiciones iniciales (o, como diremos brevemente, en las *discontinuidades iniciales*) puedan tener valores cualesquiera; no es necesario que existan relaciones entre ellas. Sin embargo, sabemos que deben cumplirse ciertas condiciones sobre las superficies de discontinuidad estables en un gas; por ejemplo, las discontinuidades de densidad y de presión en una onda de choque están relacionadas por la adiabática del choque. Por tanto, resulta claro que si estas condiciones no se satisfacen en la discontinuidad inicial no puede continuar siendo una discontinuidad en los instantes siguientes. En lugar de ello, la discontinuidad inicial en general se desdobra en varias discontinuidades, cada una de las cuales es uno de los posibles tipos de discontinuidad (onda de choque, discontinuidad tangencial, discontinuidad débil); en el transcurso del tiempo, estas discontinuidades se separan. Un estudio general del comportamiento de una discontinuidad arbitraria ha sido realizado por N. E. KOCHIN (1926).

Durante un intervalo breve de tiempo después del instante inicial $t = 0$, las discontinuidades formadas a partir de la discontinuidad inicial no se mueven alejándose a distancias grandes y el flujo en consideración tiene lugar, por tanto, en un volumen relativamente pequeño junto a la superficie de la discontinuidad inicial. Como es normal, basta considerar porciones separadas de esta superficie, cada una de las cuales puede considerarse como plana.

Por tanto, únicamente necesitamos considerar una superficie plana de discontinuidad que tomaremos como plano yz . Es evidente, a partir de la simetría, que las discontinuidades formadas a partir de la discontinuidad inicial serán también planos y perpendiculares al eje x . El esquema de flujo dependerá de la coordenada x únicamente (y del tiempo), de modo que el problema es monodimensional. No existiendo parámetros característicos de longitud y tiempo tenemos un problema de semejanza y pueden utilizarse los resultados obtenidos en § 92.

Las discontinuidades formadas a partir de la discontinuidad inicial puede moverse evidentemente alejándose de su punto de formación, es decir, alejándose de la posición de la discontinuidad inicial. Es fácil ver que pueden moverse en cada sentido (el sentido positivo o negativo del eje de las x), o bien una onda de choque o bien un par de discontinuidades débiles que limiten una onda de rarefacción. En efecto, si existen, por ejemplo, dos ondas de choque formadas en el mismo punto en el instante $t = 0$ y ambas se propagan en el sentido positivo del eje de las x , la que está delante debería moverse más rápidamente que la otra. Sin embargo, de acuerdo con las propiedades generales de las ondas de choque, la onda de choque adelantada debe moverse respecto al gas que está detrás de él con una velocidad menor que la velocidad del sonido c en dicho gas, y la siguiente onda de choque debe moverse respecto al mismo gas con una velocidad que supera a c (siendo c una constante en la región entre ondas de choque) es decir, que debería sobrepasar a la otra. Por la misma razón una onda de choque y una onda de rarefacción no pueden moverse en el mismo sentido; para verlo es suficiente observar que las discontinuidades débiles se mueven con la velocidad del sonido respecto al gas en cada lado de la misma. Finalmente, dos ondas de rarefacción formadas al mismo tiempo no pueden separarse, puesto que las velocidades de sus frentes traseros son iguales.

De modo semejante a las ondas de choque y a las ondas de rarefacción, una discontinuidad tangencial debe formarse, en general, a partir de una discontinuidad inicial. Dicha discontinuidad debe producirse si las componentes de velocidad transversal v_y , v_z son discontinuas en la discontinuidad inicial. Puesto que estas componentes de velocidad no varían en una onda de choque o de rarefacción, sus discontinuidades se convierten siempre en una discontinuidad tangencial, que permanece en la posición de la discontinuidad inicial; en cada lado de esta discontinuidad, v_y y v_z son constantes (en realidad, como es natural, la inestabilidad de una discontinuidad de velocidad tangencial produce su suavización gradual dentro de una región turbulenta).

Sin embargo, debe presentarse una discontinuidad tangencial, aunque v_y y v_z sean continuas en la discontinuidad inicial (sin pérdida de generalidad, podemos admitir que son nulas y así lo haremos). Esto se demuestra del modo siguiente. Las discontinuidades formadas a partir de la discontinuidad

inicial deben hacer posible el paso de un estado 1 del gas en una cara de la discontinuidad inicial a un estado dado 2 en la otra cara. El estado del gas está determinado por tres magnitudes independientes, por ejemplo, p , ρ y $v_x = v$. Por tanto, es necesario tener tres parámetros arbitrarios con objeto de pasar del estado 1 a un estado arbitrario 2 mediante cierta selección de las discontinuidades. Sabemos, sin embargo, que una onda de choque perpendicular a la corriente y que se propaga en un gas de un determinado estado termodinámico está definida por un solo parámetro (§ 82). Lo mismo es cierto en el caso de una onda de rarefacción; como vemos a partir de las fórmulas (92.14)-(92.16), cuando el estado del gas que entra en una onda de rarefacción está definido, el estado del gas que sale de ella está también completamente determinado por un solo parámetro. Además, hemos visto que, como máximo, puede moverse en cada sentido una onda (de rarefacción o de choque). Por tanto, tenemos a nuestra disposición sólo dos parámetros que no son suficientes.

La discontinuidad tangencial formada en la posición de la discontinuidad inicial nos proporciona el tercer parámetro necesario. La presión es continua allí, pero no así la densidad (y, por tanto, tampoco la temperatura ni la entropía). La discontinuidad tangencial es estacionaria respecto al gas en ambas caras de la misma y, por tanto, los razonamientos sobre el «traspaso» de las dos ondas que se propagan en el mismo sentido no se aplican a ellas.

Los gases en ambos lados de la discontinuidad tangencial no se mezclan, puesto que no existe ningún movimiento del gas a través de una discontinuidad tangencial; en todos los ejemplos que daremos a continuación estos gases pueden ser sustancias distintas.

La figura 62 muestra esquemáticamente todos los tipos posibles de ruptura o de desintegración de una discontinuidad inicial. Las líneas a trazos lleno muestran la variación de la presión a lo largo del eje x ; la variación de la densidad vendría dada por una línea semejante, siendo la única diferencia que existiría un salto adicional en la discontinuidad tangencial. Las líneas verticales muestran las discontinuidades formadas y las flechas muestran su sentido de propagación y el del flujo gaseoso. El sistema coordenado es siempre aquél en el que la discontinuidad tangencial está en reposo, junto con el gas en las regiones 3 y 3' que le son contiguas. Las presiones, densidades y velocidades de los gases en las regiones extremas de la izquierda (1) y de la derecha (2) son los valores de estas magnitudes en el instante $t = 0$ en cada lado de la discontinuidad inicial.

En el primer caso, que escribiremos $I \rightarrow S _ TS _$ (figura 62a), la discontinuidad inicial I da dos ondas de choque S que se propagan en sentidos opuestos y una discontinuidad tangencial T entre ellas. Este caso se presenta cuando dos masas de gas chocan con una velocidad relativa grande.

En el caso $I \rightarrow S_TR_\!$ (figura 62b), se propaga una onda de choque en un

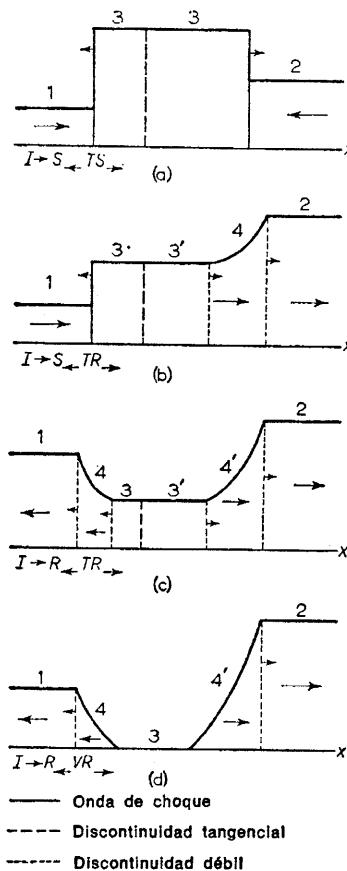


FIG. 62

lado de la discontinuidad tangencial y una onda de rarefacción en el otro lado. Este caso se presenta, por ejemplo, si dos masas de gas en reposo relativo ($v_2 - v_1 = 0$) y con presiones diferentes se ponen en contacto en el instante inicial. De todos los casos indicados en la figura 62, el segundo es el único en el que los gases 1 y 2 se están moviendo en el mismo sentido y, por lo tanto, la ecuación $v_1 = v_2$ es posible en dicho caso.

En el tercer caso ($I \rightarrow R \leftarrow TR$, figura 62c) se propaga una onda de rarefacción a cada lado de la discontinuidad tangencial. Si los dos gases 1 y 2 se separan con una velocidad relativa suficientemente grande $v_2 - v_1$, la presión puede disminuir hasta cero en las ondas de rarefacción. Entonces tenemos el esquema indicado en la figura 62d; se forma un vacío 3 entre las regiones 4 y 4'.

Podemos deducir las condiciones analíticas que determinan el modo en que se rompe la discontinuidad inicial, en función de sus parámetros. Supondremos en cada caso que $p_2 > p_1$ y tomaremos el sentido positivo del eje de las x desde la región 1 a la región 2 (como en la figura 62).

Puesto que los gases en ambos lados de la discontinuidad inicial pueden ser sustancias distintas, los distinguiremos como gases 1 y 2.

(1) $I \rightarrow S_{TS}$. Si $p_3 = p_3'$, V_3 y $V_{3'}$ son las presiones y volúmenes específicos en las regiones resultantes 3 y 3', entonces tenemos $p_3 > p_2 > p_1$, y los volúmenes V_3 y $V_{3'}$ son las abscisas de los puntos con ordenada p_3 en las adiabáticas de choque a través de (p_1, V_1) y (p_2, V_2) , respectivamente. Puesto que los gases en las regiones 3 y 3' están en reposo en el sistema de coordenadas escogido, podemos utilizar las fórmulas (82.7) para dar las velocidades v_1 y v_2 que tienen los sentidos positivo y negativo de x , respectivamente:

$$v_1 = \sqrt{[(p_3 - p_1)(V_1 - V_3)]}, \quad v_2 = -\sqrt{[(p_3 - p_2)(V_2 - V_{3'})]}.$$

El valor más pequeño de p_3 , para unos valores dados de p_1 y p_2 , que no contradice la hipótesis inicial ($p_3 > p_2 > p_1$) es p_2 . Además, como la diferencia $v_1 - v_2$ es una función monótonamente creciente de p_3 , se encuentra la desigualdad buscada

$$v_1 - v_2 > \sqrt{[(p_2 - p_1)(V_1 - V')]} \quad (93.1)$$

en donde V' designa la abscisa del punto con ordenada p_2 sobre la adiabática del choque para el gas 1 que pasa a través de (p_1, V_1) . Calculando V' con la fórmula (85.1) (sustituyendo V_2 por V') obtenemos la condición (93.1) para un gas perfecto en la forma

$$v_1 - v_2 > (p_2 - p_1) \sqrt{\{2V_1/[(\gamma_1 - 1)p_1 + (\gamma_1 + 1)p_2]\}}. \quad (93.2)$$

Debe señalarse que los límites colocados por (93.1) y (93.2) sobre los valores posibles de la diferencia de velocidades $v_1 - v_2$ no dependen claramente del sistema de coordenadas escogido.

(2) $I \rightarrow S_{TR}$. Aquí $p_1 < p_3 = p_3' < p_2$. Para la velocidad del gas en la región 1 tenemos de nuevo

$$v_1 = \sqrt{[(p_3 - p_1)(V_1 - V_3)]},$$

y la variación total de velocidad en la onda de rarefacción 4 es, según (92.7),

$$v_2 = \int_{p_3}^{p_2} \sqrt{(-dp dV)}.$$

Para valores dados de p_1 y p_2 , p_3 puede caer entre ambos. Sustituyendo p_3 en la diferencia $v_2 - v_1$ por p_1 y luego por p_2 , obtenemos la condición

$$-\int_{p_1}^p \sqrt{(-dp dV)} < v_1 - v_2 < \sqrt{[(p_2 - p_1)(V_1 - V')]} \quad (93.3)$$

En esta expresión V' tiene el mismo significado que en el caso anterior; debe calcularse el límite superior de la diferencia $v_1 - v_2$ para el gas 1 y el límite inferior para el gas 2. En el caso de un gas perfecto tenemos

$$\begin{aligned} -\frac{2c_2}{\gamma_2 - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{(\gamma_2 - 1)/2\gamma_2} \right] &< v_1 - v_2 \\ &< (p_2 - p_1) \sqrt{2V_1/[(\gamma_1 - 1)p_1 + (\gamma_1 + 1)p_2]}, \end{aligned} \quad (93.4)$$

en donde $c_2 = \sqrt{(\gamma_2 p_2 V_2)}$ es la velocidad del sonido en el gas 2 en el estado (p_2, V_2) .

(3) $I \rightarrow R _ T R _.$ Aquí $p_2 > p_1 > p_3 = p_3' > 0$. Por el mismo método encontramos la siguiente condición para que se presente este caso:

$$-\int_0^{p_1} \sqrt{(-dp dV)} - \int_0^{p_3} \sqrt{(-dp dV)} < v_1 - v_2 < -\int_{p_1}^{p_3} \sqrt{(-dp dV)}. \quad (93.5)$$

La primera integral del primer miembro se calcula para el gas 1 y las otras para el gas 2. En el caso de un gas perfecto tenemos

$$-\frac{2c_1}{\gamma_1 - 1} - \frac{2c_2}{\gamma_2 - 1} < v_1 - v_2 < -\frac{2c_2}{\gamma_2 - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{(\gamma_2 - 1)/2\gamma_2} \right], \quad (93.6)$$

en donde $c_1 = \sqrt{(\gamma_1 p_1 V_1)}$, $c_2 = \sqrt{(\gamma_2 p_2 V_2)}$. Si

$$v_1 - v_2 < -\frac{2c_1}{\gamma_1 - 1} - \frac{2c_2}{\gamma_2 - 1}, \quad (93.7)$$

entonces se forma un vacío entre las ondas de rarefacción ($I \rightarrow R _ V R _.$).

El problema de una discontinuidad en las condiciones iniciales incluye el de las diversas colisiones existentes entre las superficies planas de discontinuidad. En el instante del choque o colisión, coinciden los dos planos y forman una cierta discontinuidad inicial que entonces conduce a uno de los esquemas descritos anteriormente. La colisión de dos ondas de choque, por ejemplo, da como resultado otras dos ondas de choque que se mueven alejándose de la discontinuidad tangencial que permanece entre ellas: $S _ S _ \rightarrow S _ T S _.$ Cuando una onda de choque sobrepasa la otra, existen dos posibilidades: $S _ S _ \rightarrow S _ T S _$ y $S _ S _ \rightarrow R _ T S _.$ En cualquier caso una onda de choque continúa en el mismo sentido.

El problema de la reflexión y transmisión de ondas de choque por una discontinuidad tangencial (límite de dos medios) también ha de estudiarse bajo este encabezamiento. Existen dos casos posibles: $S _ T \rightarrow S _ T S _$ y $S _ T \rightarrow R _ T S _.$ La onda transmitida en el segundo medio es siempre un choque (ver también los problemas siguientes).†

† Para completar el tema debemos mencionar que, al chocar una onda de choque con una discontinuidad débil (problema que no es del tipo de semejanza considerado aquí), la onda de choque continúa propagándose en el mismo sentido; pero detrás de ella persiste una discontinuidad débil de la clase original y una discontinuidad tangencial débil (ver el final del § 89).

PROBLEMAS

Problema 1. Una onda de choque plana se refleja en una superficie plana rígida. Determinar la presión del gas detrás de la onda reflejada (S. V. IZMAILOV, 1935).

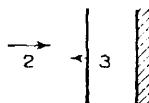
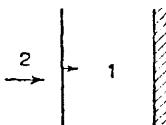


FIG. 63

Solución. Cuando una onda de choque incide sobre una pared rígida, se propaga una onda de choque reflejada alejándose de la pared. Designaremos mediante los sufijos 1, 2 y 3, respectivamente, las magnitudes que pertenecen al gas no perturbado delante de la onda de choque incidente, al gas detrás de este choque (que es también el gas delante del choque reflejado) y al gas detrás del choque reflejado; pueden verse estos números en la figura 63, en donde las flechas indican el sentido del movimiento de las ondas de choque y del propio gas. El gas en las regiones 1 y 3, que está junto a la pared, se encuentra en reposo respecto a la misma. La velocidad relativa de los gases a ambos lados de la discontinuidad es la misma en la onda de choque incidente y en la reflejada, e igual a la velocidad del gas 2. Utilizando la fórmula (82.7) para la velocidad relativa, tenemos, por tanto, $(p_2 - p_1)(V_1 - V_2) = (p_3 - p_2)(V_2 - V_3)$. La ecuación de la adiabática del choque (85.1) para cada choque da, entonces,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}, \quad \frac{V_3}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_3}{(\gamma - 1)p_2 + (\gamma + 1)p_3}.$$

Podemos eliminar los volúmenes específicos de estas tres ecuaciones y el resultado es

$$(p_3 - p_2)^2[(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2] = (p_2 - p_1)^2[(\gamma + 1)p_3 + (\gamma - 1)p_2].$$

Esta es una ecuación de segundo grado para p_3 , que tiene la raíz trivial $p_3 = p_1$; eliminando $p_3 - p_1$, se obtiene

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{(3\gamma - 1)p_2 - (\gamma - 1)p_1}{(\gamma - 1)p_2 - (\gamma + 1)p_1},$$

que determina p_3 a partir de p_1 y p_2 . En el caso límite de una onda de choque incidente muy densa, $p_3 = (3\gamma - 1)p_1/(\gamma - 1)$, mientras que en el caso de una onda de choque débil $p_3 - p_2 = p_2 - p_1$, que corresponde a la aproximación de la onda sonora.

Problema 2. Hallar la condición para que una onda de choque sea reflejada en un límite plano entre dos gases.

Solución. Sean $p_1 = p_2$, V_1 , V_2 , las presiones y volúmenes específicos de los dos medios antes de la incidencia de la onda de choque (que se propaga en el gas 2) en su superficie de separación, y p_2 , V_2 , son los valores de detrás de la onda de choque. La condición para

que la onda reflejada sea una onda de choque viene dada por la desigualdad (93.2), en la que debemos poner ahora

$$v_1 - v_2 = \sqrt{[(p_2 - p_{2'})(V_{2'} - V_2)]}.$$

Expresando todas las magnitudes en función del cociente de presiones p_2/p_1 y de los volúmenes específicos iniciales $V_1, V_{2'}$, obtenemos

$$\frac{V_1}{(\gamma_1 + 1)p_2/p_1 + (\gamma_1 - 1)} < \frac{V_{2'}}{(\gamma_2 + 1)p_2/p_1 + (\gamma_2 - 1)}.$$

§ 94. Ondas móviles monodimensionales

Al estudiar las ondas sonoras en § 63, admitíamos que era pequeña la amplitud de las oscilaciones de la onda. El resultado era que la ecuación del movimiento resultaba lineal y se resolvía fácilmente. Una solución particular de estas ecuaciones es una función cualquiera de $x \pm ct$ (onda plana) correspondiente a una *onda móvil* cuyo perfil se mueve con velocidad c , permaneciendo invariable su forma; por *perfil* de una onda entendemos la distribución de densidad, velocidad, etc., a lo largo de la dirección de propagación. Puesto que la velocidad v , la densidad ρ y la presión p (y las demás magnitudes) de dicha onda son funciones de la misma magnitud $x \pm ct$, pueden expresarse unas en función de otras, de modo que las coordenadas y el tiempo no aparezcan explícitamente [$p = p(\rho)$, $v = v(p)$, y así sucesivamente].

Cuando la amplitud de la onda no es necesariamente pequeña, no son válidas estas sencillas relaciones. Sin embargo, se encuentra que puede obtenerse una solución general de las ecuaciones exactas del movimiento, en forma de una onda plana móvil que es una generalización de la solución $f(x \pm ct)$ de las ecuaciones aproximadas, válidas para amplitudes pequeñas. Para deducir esta solución, empezaremos a partir del requisito de que, en el caso de una onda de cualquier amplitud, puede expresarse la velocidad como una función de la densidad.

En ausencia de ondas de choque, el flujo es adiabático. Si el gas es homogéneo en un instante inicial determinado (de modo que, en particular, $s = \text{constante}$), entonces $s = \text{constante}$ en todo instante y lo admitiremos así en lo que sigue.

En una onda sonora plana que se propaga en la dirección x , todas las magnitudes dependen sólo de x y t , y para la velocidad tenemos $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. La ecuación de continuidad es $\partial\rho/\partial t + \partial(\rho v)/\partial x = 0$, y la ecuación de Euler se escribe

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Utilizando el hecho de que v es función solamente de ρ , podemos escribir estas ecuaciones en la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d(\rho v)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (94.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dv} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (94.2)$$

Como

$$\frac{\partial \rho / \partial t}{\partial \rho / \partial x} = - \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_\rho,$$

tenemos a partir de (94.1)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_\rho = \frac{d(\rho v)}{d\rho} = v + \rho \frac{dv}{dp},$$

y análogamente a partir de (94.2)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_v = v + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dv}. \quad (94.3)$$

Como el valor de ρ únicamente determina el de v , las derivadas a ρ y v constantes son iguales, es decir, $(\partial x / \partial t)_\rho = (\partial x / \partial t)_v$, de modo que $\rho dv / dp = (1/\rho) dp / dv$. Poniendo $dp/dv = (dp/d\rho)(d\rho/dv) = c^2 d\rho / dv$, obtenemos $dv / d\rho = \pm c / \rho$, de aquí que

$$v = \pm \int \frac{c}{\rho} d\rho = \pm \int \frac{dp}{\rho c}. \quad (94.4)$$

Esto da la relación general existente entre la velocidad y la densidad o la presión en la onda.[†]

A continuación, podemos combinar (94.3) y (94.4) para dar $(\partial x / \partial t)_v = v + (1/\rho) dp / dv = v \pm c(v)$, o sea, integrando

$$x = t[v \pm c(v)] + f(v), \quad (94.5)$$

en donde $f(v)$ es una función arbitraria de la velocidad y $c(v)$ viene dada por (94.4).

Las fórmulas (94.4) y (94.5) dan la solución general requerida (B. RIEMANN, 1860). Determinan la velocidad (v , por tanto, todas las demás magnitudes) como una función implícita de x y t , es decir, el perfil de onda en todo instante. Para un valor determinado de v tenemos $x = at + b$, es decir, el punto en donde la velocidad tiene un valor dado se mueve con velocidad constante; en este sentido la solución obtenida es una onda móvil. Los dos

[†] En una onda de pequeña amplitud tenemos $\rho = \rho_0 + \rho'$, y (94.4) da en primera aproximación $v = c_0 \rho' / \rho_0$ [en donde $c_0 = c(\rho_0)$], es decir, la fórmula usual (63.12).

signos de (94.5) corresponden a ondas que se propagan (respecto al gas) en los sentidos positivo y negativo del eje de las x .

El flujo descrito por la solución (94.4) y (94.5) suele denominarse *onda simple* y utilizaremos esta expresión más adelante. Debe señalarse que el flujo de semejanza estudiado en § 92 es un caso particular de una onda simple que corresponde a $f(v) = 0$ en (94.5).

Podemos escribir explícitamente las relaciones para una onda simple en un gas perfecto; para mayor definición admitiremos que existen un punto en la onda para el cual $v = 0$, como suele ocurrir normalmente en la práctica. Puesto que la fórmula (94.4) es la misma que la (92.6), tenemos por analogía con las fórmulas (92.14)-(92.16)

$$c = c_0 \pm \frac{1}{2}(\gamma - 1)v, \quad (94.6)$$

$$\rho = \rho_0(1 \pm \frac{1}{2}(\gamma - 1)v/c_0)^{2/(\gamma-1)}, \quad (94.7)$$

$$p = p_0(1 \pm \frac{1}{2}(\gamma - 1)v/c_0)^{2\gamma/(\gamma-1)}.$$

Sustituyendo (94.6) en (94.5), obtenemos

$$x = t(\pm c_0 + \frac{1}{2}(\gamma + 1)v) + f(v). \quad (94.8)$$

A veces es conveniente escribir esta solución en la forma

$$v = F[x - (\pm c_0 + \frac{1}{2}(\gamma + 1)v)t], \quad (94.9)$$

siendo F otra función arbitraria.

A partir de las fórmulas (94.6) y (94.7) vemos nuevamente (como en § 92) que la velocidad en sentido opuesto al de la propagación de la onda (relativa al propio gas) tiene magnitud limitada; para una onda que se propaga en el sentido positivo del eje de las x tenemos

$$-v \leq 2c_0/(\gamma - 1). \quad (94.10)$$

Una onda móvil descrita por las fórmulas (94.4) y (94.5) es esencialmente distinta de la obtenida en el caso límite de amplitudes pequeñas. La velocidad de un punto del perfil de ondas es

$$u = v \pm c; \quad (94.11)$$

puede considerarse de modo conveniente como una superposición de la propagación de la perturbación relativa al gas con la velocidad del sonido y el movimiento del propio gas con velocidad v . La velocidad u es ahora una función de la densidad y , y, por tanto, diferente para los distintos puntos del perfil. Así pues, en el caso general de una onda plana de amplitud arbitraria no existe una «velocidad de onda» constante definida. Puesto que las velocidades de los distintos puntos del perfil de onda son diferentes, el perfil modifica su forma en el transcurso del tiempo.

Consideremos una onda que se propaga en el sentido positivo del eje de las x , para la cual $u = v + c$. La derivada de $v + c$ respecto a la densidad

ha sido calculada en § 92; ver (92.10). Hemos visto que $du/d\rho > 0$. La velocidad de propagación de un punto determinado en el perfil de onda es, por tanto, tanto mayor cuanto mayor sea la densidad. Si designamos por c_0 la velocidad del sonido en el caso de una densidad igual a la densidad de equilibrio ρ_0 , entonces en las compresiones $\rho > \rho_0$ y $c > c_0$, mientras que en las rarefacciones $\rho < \rho_0$ y $c < c_0$.

La desigualdad de la velocidad de los distintos puntos del perfil de onda causa la variación de su forma en el transcurso del tiempo: los puntos de compresión se mueven hacia adelante y los de rarefacción se quedan atrás hacia la izquierda (figura 64b). Finalmente, el perfil puede resultar de tal modo que la función $\rho(x)$ (para un valor dado de t) sea multiforme; a un valor x corresponden tres valores diferentes de ρ (la línea a trazos de la figura 64c). Como es natural, esto es físicamente imposible. En realidad, se forman discontinuidades, en donde ρ es multiforme y en consecuencia ρ es una función uniforme en todas partes, excepto en las propias discontinuidades. El perfil de onda tiene entonces la forma indicada por la línea continua de la figura 64c. Las superficies de discontinuidad se forman en puntos que distan entre sí una longitud de onda.

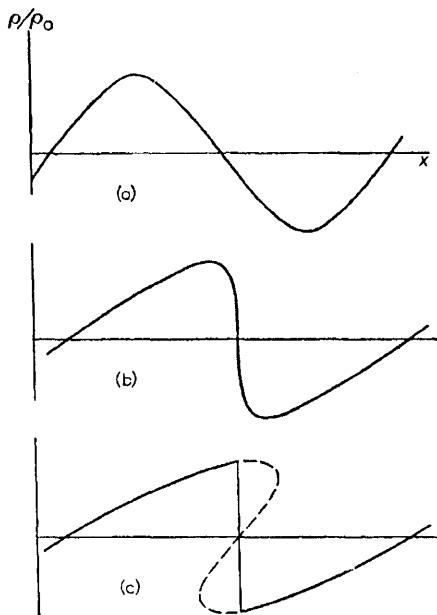


FIG. 64

Cuando se forman las discontinuidades, la onda cesa de ser una onda simple. La causa de ello puede enunciarse brevemente así: cuando están presentes las superficies de discontinuidad, la onda se «refleja» a partir de ella, y, por lo tanto, cesa de ser una onda móvil en un sentido. En consecuencia, la hipótesis sobre la que se basó toda la deducción, a saber, que las diversas magnitudes son entre ellas funciones uniformes, deja de verificarse en general.

La presencia de discontinuidades (ondas de choque) da como resultado la disipación de energía, como se mencionó en § 82. Por tanto, la formación de discontinuidades conduce a un amortiguamiento marcado de la onda. Esto es evidente en la figura 64. Cuando se forma la discontinuidad, se corta la parte más elevada del perfil de onda. En el transcurso del tiempo, cuando el perfil se curva, su altura resulta menor y el perfil se «suaviza» dando otro de amplitud menor, es decir, la onda se amortigua.

Es evidente, a partir de lo anterior, que deben, finalmente, formarse discontinuidades en toda onda simple que contenga regiones en las que la densidad disminuye en el sentido de la propagación. El único caso en el que no se presentan discontinuidades es en una onda en la que la densidad aumenta monótonamente en el sentido de propagación (como, por ejemplo, la onda formada cuando un pistón se mueve saliendo de una tubería infinita llena de gas; ver los problemas al final de esta sección).

Aunque cuando se ha formado una discontinuidad la onda deja de ser sencilla, el tiempo y lugar de formación de la discontinuidad puede determinarse analíticamente. Hemos visto que la presencia de discontinuidades se debe matemáticamente al hecho de que en una onda simple las magnitudes p , ρ y v resultan funciones multiformes de x (para un valor dado de t) en tiempos mayores que un valor definido t_0 , mientras que para $t < t_0$ son funciones uniformes. El tiempo t_0 es el de formación de la discontinuidad. Es evidente, a partir de consideraciones geométricas, que en el instante t_0 la curva que da, por ejemplo, v en función de x resulta vertical en un cierto punto $x = x_0$, que es el punto en el que la función resulta multiforme. Analíticamente esto significa que la derivada $(\partial v / \partial x)_t$ se hace infinita y $(\partial x / \partial v)_t$ se hace cero. Resulta también evidente que en el instante t_0 la curva $v = v(x)$ debe caer a ambos lados de la tangente vertical, puesto que en otro caso $v(x)$ ya sería multiforme. En otras palabras, el punto $x = x_0$ debe ser, no un extremo de la función $x(v)$, sino un punto de inflexión y, por tanto, debe también anularse la segunda derivada $(\partial^2 x / \partial v^2)_t$. Así pues, el lugar y tiempo de formación de la onda de choque están determinados por las ecuaciones simultáneas

$$(\partial x / \partial v)_t = 0, \quad (\partial^2 x / \partial v^2)_t = 0. \quad (94.12)$$

En el caso de un gas perfecto estas ecuaciones son

$$t = -2f'(v)/(\gamma + 1), \quad f''(v) = 0, \quad (94.13)$$

en donde $f(v)$ es la función que aparece en la solución general (94.8).

Estas condiciones exigen alguna modificación si la onda simple está junto a un gas en reposo y se forma la onda de choque en la frontera. Aquí también la curva $v = v(x)$ debe hacerse vertical, es decir, debe anularse la derivada $(\partial x / \partial v)_t$, en el instante en que se produce la discontinuidad. Sin embargo, la segunda derivada no necesita anularse; la segunda condición ahora es simplemente que la velocidad es cero en la frontera del gas en reposo, de modo que $(\partial x / \partial v)_t = 0$ para $v = 0$. A partir de esta condición podemos obtener expresiones explícitas para el tiempo y lugar de formación de la discontinuidad. Derivando (94.5), obtenemos

$$t = -f'(0)/c_0, \quad x = \pm c_0 t + f(0), \quad (94.14)$$

en donde x_0 es el valor para $v = 0$ de la magnitud x definida por la fórmula (95.2). En el caso de un gas perfecto

$$t = -2f'(0)/(\gamma + 1). \quad (94.15)$$

PROBLEMAS

Problema 1. Un gas perfecto está dentro de una tubería cilíndrica semiinfinita ($x > 0$) terminada por un pistón. En el instante $t = 0$ el pistón empieza a moverse con una velocidad uniformemente acelerada $U = \pm at$. Determinar el flujo resultante.

Solución. Si el pistón se mueve saliendo de la tubería ($U = -at$), el resultado es una onda de rarefacción simple, cuyo frente hacia adelante se propaga hacia la derecha a través del gas en reposo, con una velocidad c_0 ; en la región $x > c_0 t$, el gas está en reposo. En la superficie del pistón, el gas y el pistón deben tener la misma velocidad, es decir, debemos tener $v = -at$ para $x = -at^2/2$ ($t > 0$). Esta condición da la función $f(v)$ en (94.8)

$$f(-at) = -c_0 t + \frac{1}{2} \gamma a t^2.$$

De aquí que tengamos

$$\begin{aligned} x - [c_0 + \frac{1}{2}(\gamma + 1)a]t &= f(v) \\ &= c_0 v/a + \frac{1}{2} \gamma v^2/a, \end{aligned}$$

y entonces

$$-v = [c_0 + \frac{1}{2}(\gamma + 1)a]/\gamma - \sqrt{\{[c_0 + \frac{1}{2}(\gamma + 1)a]^2 - 2a\gamma(c_0 t - x)\}}/\gamma. \quad (1)$$

Esta fórmula da la variación de la velocidad en la región comprendida entre el pistón y el frente delantero $x = c_0 t$ de la onda (figura 65a) durante el intervalo de tiempo desde $t = 0$ a $t = 2c_0/(\gamma - 1)a$. La velocidad del gas es en todo punto hacia la izquierda, como la del pistón, y disminuye monótonamente de valor en el sentido positivo del eje de las x ; la densidad y presión aumenta monótonamente en este sentido. Para $t > 2c_0/(\gamma - 1)a$, la desigualdad (94.10) deja de ser válida para la velocidad del pistón y entonces el gas no puede seguir al pistón. Se forma entonces un vacío en una región junto al pistón, más allá de la cual la velocidad disminuye desde $-2c_0/(\gamma - 1)$ hasta cero, de acuerdo con la fórmula (1).

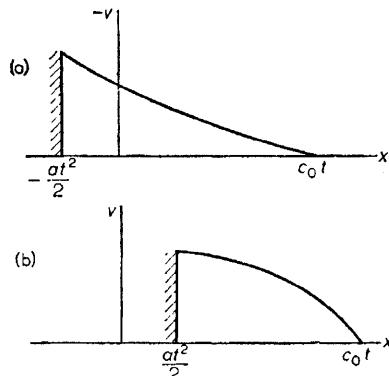


FIG. 65

Si el pistón se mueve introduciéndose en la tubería ($U = at$), se forma una onda de compresión simple; se obtiene la solución correspondiente cambiando simplemente el signo de a en (1) (figura 65b). Sin embargo, es válida únicamente hasta que se forma una onda de choque; el término en que esto ocurre está determinado por la fórmula (94.15) y es

$$t = 2c_0/a(\gamma + 1).$$

Problema 2. El mismo que el problema 1, pero para el caso en el que el pistón se mueve de cualquier manera.

Solución. Supongamos que el pistón empieza a moverse en el instante $t = 0$ de acuerdo con la ley $x = X(t)$ [con $X(0) = 0$]; su velocidad es $U = X'(t)$. La condición límite en el pistón ($v = U$ para $x = X$) da $v = X'(t)$, $f(v) = X(t) - t[c_0 + (\gamma + 1)X'(t)/2]$. Si ahora consideramos t como un parámetro, estas dos ecuaciones determinan la función $f(v)$ en forma paramétrica. Designando el parámetro por τ , podemos escribir la solución como

$$v = X'(\tau), \quad x = X(\tau) + (t - \tau)[c_0 + \frac{1}{2}(\gamma + 1)X'(\tau)], \quad (1)$$

que determina, en forma paramétrica, la función requerida $v(t, x)$ en la onda simple que está producida por el movimiento del pistón.

Problema 3. Determinar el tiempo y lugar de formación de la onda de choque cuando el pistón (problema 1) se mueve de acuerdo con la ley $U = at^n$ ($n > 0$).

Solución. Si $a < 0$, es decir, si el pistón se mueve alejándose de la tubería, se tiene como resultado una onda de rarefacción simple en la que no se forma ninguna onda de choque. Por tanto, admitimos que $a > 0$, es decir, el pistón se mueve dentro de la tubería, produciendo una onda de compresión simple.

Cuando la función $v(x, t)$ viene dada por las fórmulas paramétricas (1) (problema 2), y $X = ar^{n+1}/n + 1$, el tiempo y lugar de formación de la onda de choque vienen dadas por las ecuaciones

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \tau} \right)_t = -c_0 + \frac{1}{2}t\tau^{n-1}an(\gamma + 1) - \frac{1}{2}a\tau^n[\gamma - 1 + n(\gamma + 1)] = 0, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} \right)_t = \frac{1}{2}t\tau^{n-2}an(n-1)(\gamma + 1) - \frac{1}{2}an\tau^{n-1}[\gamma - 1 + n(\gamma + 1)] = 0,$$

en donde la segunda ecuación debe sustituirse por $\tau = 0$ si nos ocupa la formación de una onda de choque en el frente delantero de la onda sencilla.

Para $n = 1$ se encuentra $\tau = 0$, $t = 2c_0/a(\gamma + 1)$, es decir, se forma la onda de choque en el frente delantero en un tiempo finito después de que empieza el movimiento, de acuerdo con los resultados del problema 1.

Para $n < 1$, la derivada $\partial x/\partial \tau$ tiene un signo variable [y, por lo tanto, la función $v(x)$ para un t determinado es multiforme] para cualquier $t > 0$. Esto significa que se forma una onda de choque en el pistón tan pronto como empieza a moverse.

Para $n > 1$, se forma la onda de choque, no en el frente delantero de la onda sencilla, sino en un punto intermedio determinado dado por (1). Habiendo determinado τ y t a partir de (1), podemos entonces hallar el lugar de formación de la discontinuidad a partir de (1) del problema 2. El resultado es

$$t = \left(\frac{2c_0}{a} \right)^{1/n} \frac{1}{\gamma + 1} \left[\frac{n+1}{n-1} \gamma + 1 \right]^{(n-1)/n},$$

$$x = 2c_0 \left(\frac{2c_0}{a} \right)^{1/n} \left[\frac{\gamma}{\gamma + 1} + \frac{n-1}{n+1} \right] \frac{1}{(n-1)^{(n-1)/n} [\gamma - 1 + n(\gamma + 1)]^{1/n}}.$$

§ 95. Formación de discontinuidades en una onda sonora

Una onda sonora plana móvil, al ser una solución exacta de la ecuación del movimiento, es también una onda simple. Podemos utilizar los resultados generales obtenidos en § 94 para deducir algunas propiedades de las ondas sonoras de pequeña amplitud en la segunda aproximación (siendo la primera aproximación la que da la ecuación de onda lineal ordinaria).

Debemos observar en primer lugar que, finalmente, debe aparecer una discontinuidad en cada longitud de onda de una onda sonora. Esto conduce a un amortiguamiento muy notable de la onda como se vio en § 94. Sin embargo, debe señalarse que esto ocurre únicamente en el caso de una onda sonora suficientemente intensa; una onda sonora débil se amortigua por los efectos normales de la viscosidad y de la conducción térmica antes de que puedan desarrollarse los efectos de orden superior en la amplitud.

También tiene otro efecto la distorsión del perfil de onda. Si la onda es puramente armónica en un instante dado, cesa de serlo en instantes posteriores, teniendo en cuenta la variación de forma del perfil. Sin embargo, el movimiento permanece periódico con el mismo período que antes. Cuando la onda se desarrolla en una serie de Fourier, aparecen términos con la frecuencia $n\omega$ (siendo n un número entero y ω la frecuencia fundamental), lo mismo que el que tenía frecuencia ω . Así pues, la distorsión del perfil, cuando la onda sonora se propaga, puede considerarse como la aparición en ella de armónicos superiores además de la frecuencia fundamental.

La velocidad u de los puntos del perfil de onda (propagándose la onda en el sentido positivo del eje de las x) se obtiene en primera aproximación,

haciendo $v = 0$ en (94.11), es decir, $u = c_0$, lo que corresponde a la propagación de la onda sin variación de su perfil. En la aproximación siguiente tenemos

$$u = c_0 + \rho' \frac{\partial u}{\partial \rho_0} = c_0 + (\partial u / \partial \rho_0) \rho_0 v / c_0,$$

o sea, utilizando la expresión (92.10) para la derivada $\partial u / \partial \rho$,

$$u = c_0 + \alpha_0 v, \quad (95.1)$$

en donde hemos puesto para mayor brevedad

$$\alpha = (c^4 / 2V^3) (\partial^2 V / \partial p^2)_s. \quad (95.2)$$

En el caso de un gas perfecto, $\alpha = (\gamma + 1)/2$, y la fórmula (95.1) concuerda con la fórmula exacta [ver (94.8)] para la velocidad u .

En el caso general de amplitud arbitraria, la onda deja de ser simple después de que hayan aparecido las discontinuidades. Sin embargo, una onda de pequeña amplitud sigue siendo simple en la segunda aproximación, aun cuando estén presentes ciertas discontinuidades. Esto puede verse del modo siguiente. Las variaciones de velocidad, presión y volumen específico en una onda de choque están relacionadas con la expresión

$$v_2 - v_1 = \sqrt{[(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)]}$$

La variación de la velocidad v en un segmento del eje x en una onda simple es

$$v_2 - v_1 = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{(-\partial V / \partial p)} dp.$$

Un cálculo simple utilizando un desarrollo en serie muestra que estas dos expresiones difieren únicamente en términos del tercer orden (debe recordarse que la variación de entropía en una discontinuidad es del tercer orden de magnitud, mientras que en una onda simple la entropía es constante). De aquí se deduce que, hasta los términos de segundo orden, una onda sonora en cualquier lado de una discontinuidad permanece simple y la condición límite apropiada se satisface en la propia discontinuidad. En aproximaciones más altas esto deja de ser cierto, teniendo en cuenta la aparición de ondas reflejadas en la superficie de discontinuidad.

Deduzcamos ahora la condición que determina la posición de las discontinuidades en la onda sonora móvil (de nuevo en segunda aproximación). Sea u la velocidad de la discontinuidad respecto a un sistema coordenado fijo, y v_1, v_2 la velocidad de los gases en cada lado de la misma. Entonces, la condición de que el flujo de masa sea continuo es $\rho_1(v_1 - u) = \rho_2(v_2 - u)$, de aquí que $u = (\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2) / (\rho_1 - \rho_2)$. Hasta los términos de segundo orden, esto es igual a la derivada $d(\rho v) / d\rho$ en el punto en que v es igual a $(v_1 + v_2)/2$:

$$u = [d(\rho v) / d\rho]_{v=(v_1+v_2)/2}.$$

Puesto que en una onda simple, $d(\rho v)/d\rho = v + c$, tenemos, por (95.1),

$$u = c_0 + \frac{1}{2}\alpha(v_1 + v_2). \quad (95.3)$$

A partir de esta expresión puede obtenerse la siguiente condición geométrica simple que determina la posición de la onda de choque. En la figura 66 la curva muestra el perfil de velocidades correspondiente a la onda simple; supongamos que la discontinuidad es ae . La diferencia de las áreas sombreadas abc y cde es la integral

$$\int_{v_1}^{v_2} (x - x_0) dv$$

tomada a lo largo de la curva $abcde$. En el transcurso del tiempo, el perfil de onda se mueve; calculemos la derivada temporal de la integral anterior.

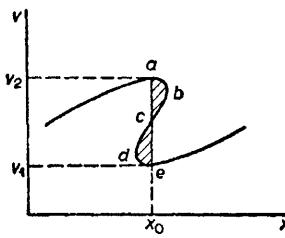


FIG. 66

Puesto que la velocidad dx/dt de los puntos en el perfil de onda viene dada por la fórmula (95.1) y la velocidad dx_0/dt de la discontinuidad viene dada por (95.3), tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{v_1}^{v_2} (x - x_0) dv = \alpha \left\{ \int_{v_1}^{v_2} v dv - \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \int_{v_1}^{v_2} dv \right\} = 0;$$

al derivar la integral, debemos observar que, aunque los límites de integración v_1 y v_2 varían también con el tiempo, $x - x_0$ se anula siempre en los límites, y así únicamente necesitamos derivar el integrando.

Así pues, la integral $\int (x - x_0) dv$ permanece constante en el tiempo. Puesto que es cero en el instante en que se forma la onda de choque (entonces coinciden los puntos a y e), se deduce que tenemos siempre

$$\int_{abcde} (x - x_0) dv = 0. \quad (95.4)$$

Geométricamente esto significa que las áreas abc y cde son iguales, una condición que determina la posición de la discontinuidad.

Consideraremos un pulso de compresión monodimensional simple, en el que se ha formado ya una onda de choque, y analicemos cómo se amortiguará

finalmente esta onda de choque. Para ello, hallaremos también las leyes del amortiguamiento de cualquier onda de choque plana después de que se haya propagado durante un tiempo suficientemente largo.

En las etapas posteriores de su propagación, un pulso sonoro que contenga una onda de choque, tendrá un perfil de velocidades triangular. Supongamos que el perfil viene dado en un cierto instante (que tomaremos como $t = 0$) por el triángulo ABC (figura 67a). Si los puntos de este perfil se mueven con las velocidades (95.1), obtenemos después del tiempo t un perfil $A'B'C'$ (figura 67b). En realidad, la discontinuidad se mueve hasta E , y el perfil real será $A'DE$. Las áreas $DB'F$ y $C'FE$ son iguales por (95.4), y, por tanto, el área $A'DE$ del nuevo perfil es igual al área ABC del perfil original. Sea l_0 la longitud del pulso sonoro en el instante t y Δv la discontinuidad de velocidades de la onda de choque. Durante el tiempo t , el punto B recorre una distancia $\alpha t \Delta v_0$ respecto a C ; la tangente del ángulo $B'A'C'$ es, por tanto, $\Delta v_0 / (l_0 + \alpha t \Delta v_0)$, y obtenemos la condición de áreas iguales ABC y $A'DE$ en la forma

$$l_0 \Delta v_0 = l^2 \Delta v_0 / (l_0 + \alpha t \Delta v_0),$$

y por tanto,

$$l = l_0 \sqrt{[1 + \alpha \Delta v_0 t / l_0]},$$

$$\Delta v = \Delta v_0 / \sqrt{[1 + \alpha \Delta v_0 t / l_0]}. \quad (95.5)$$

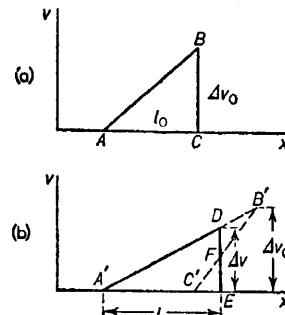


FIG. 67

Para $t \rightarrow \infty$ la intensidad de la onda de choque disminuye asintóticamente con el tiempo proporcionalmente a $1/\sqrt{t}$ (o, lo que es equivalente, proporcionalmente a la distancia, como $1/\sqrt{x}$). La energía total de un pulso sonoro móvil (por unidad de área de su frente) es

$$E = \rho_0 \int v^2 dx = E_0 / \sqrt{[1 + \alpha \Delta v_0 t / l_0]}, \quad (95.6)$$

en donde E_0 es la energía en el instante $t = 0$. Para $t \rightarrow \infty$ la energía tiende también a cero proporcionalmente a $1/\sqrt{t}$.

Si tenemos una onda sonora esférica, cualquier sección pequeña de la misma puede considerarse como plana a distancias r suficientemente grandes del origen. La velocidad de cualquier punto del perfil de onda viene entonces dado por la fórmula (95.1). Sin embargo, si deseamos utilizar esta fórmula para seguir el movimiento de un punto cualquiera del perfil de onda a intervalos largos de tiempo, debemos tener en cuenta el hecho de que la amplitud de una onda esférica disminuye de modo inversamente proporcional a la distancia r , incluso en primera aproximación. Esto significa que, en un punto cualquiera dado del perfil, v no es constante como sucedía en el caso de una onda plana, sino que disminuye como $1/r$. Si v_0 es el valor de v (para un punto determinado del perfil) a una distancia r_0 (grande), podemos poner $v = v_0 r_0 / r$. Así pues, la velocidad u de los puntos del perfil de onda es $u = c_0 + \alpha v_0 r_0 / r$. El primer término es la velocidad ordinaria del sonido y corresponde al movimiento de la onda sin variación en la forma del perfil (aparte de la disminución general de la amplitud proporcionalmente a $1/r$). El segundo término da como resultado una distorsión del perfil. La cantidad δr de este movimiento adicional de los puntos del perfil durante un tiempo $t = (r - r_0)/c$ se obtiene multiplicando por dr/c_0 e integrando desde r_0 hasta r ; esto da

$$\delta r = (\alpha v_0 r_0 / c_0) \log(r/r_0). \quad (95.7)$$

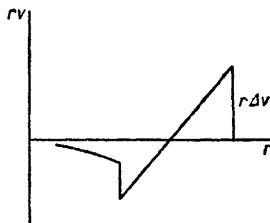


FIG. 68

Así pues, la distorsión del perfil de una onda esférica aumenta proporcionalmente al logaritmo de la distancia, es decir, con mucha mayor lentitud que en el caso de una onda plana, en donde la distorsión δx aumenta con la distancia x recorrida por la onda.

La distorsión del perfil conduce, finalmente, a la formación de discontinuidades. Consideremos ondas de choque formadas en un pulso sonoro esférico simple que ha alcanzado una distancia grande de la fuente o foco (el origen). El caso esférico se distingue del caso plano fundamentalmente por el hecho de que la región de compresión debe estar seguida por una región de rarefacción; el exceso de presión y la velocidad de las partículas

del gas en la onda deben ambas cambiar de signo (ver § 69). La distorsión del perfil da como resultado, finalmente, la formación de dos ondas de choque: una en la región de compresión y la otra en la región de rarefacción (figura 68).[†] En la onda de choque delantera, la presión aumenta discontinuamente, luego disminuye gradualmente hasta ser una rarefacción, luego aumenta de nuevo discontinuamente en el segundo choque (pero no hasta su valor sin perturbar, que se alcanza únicamente de modo asintótico detrás de este choque).

La obtención del amortiguamiento final de las ondas de choque con el tiempo (o lo que es lo mismo, con la distancia r de la fuente o foco) se encuentra fácilmente de un modo semejante al caso plano estudiado anteriormente. Utilizando el resultado (95.7), se ve que, a distancias suficientemente grandes, el espesor l del pulso sonoro (distancia entre dos discontinuidades) aumenta proporcionalmente a $\log^{1/2}(r/a)$, en lugar de aumentar proporcionalmente a \sqrt{r} como ocurría en el caso plano; a es una longitud constante determinada. La intensidad de la onda de choque delantera está amortiguada de acuerdo con la expresión $r\Delta v \sim \log^{-1/2}(r/a)$, o sea,

$$\Delta v \sim 1/r \log^1(r/a). \quad (95.8)$$

Finalmente, consideremos el caso cilíndrico. La disminución general de la amplitud de una onda sonora divergente se produce en proporción inversa a \sqrt{r} , siendo r la distancia al eje. Repitiendo los razonamientos dados para el caso esférico, encontramos ahora que la velocidad u de los puntos del perfil de ondas es $u = c_0 + \alpha v_0 \sqrt{(r_0/r)}$, y así el desplazamiento δr de los puntos del perfil entre r_0 y r es

$$\delta r = 2\alpha(v_0/c_0)\sqrt{r_0}(\sqrt{r} - \sqrt{r_0}). \quad (95.9)$$

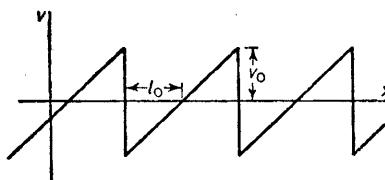


FIG. 69

La propagación cilíndrica de un pulso de compresión debe estar acompañada como en el caso esférico por una rarefacción del gas detrás de la compresión. Por tanto, deben formarse en este caso también dos ondas de

[†] Debe señalarse que, como siempre existe un amortiguamiento ordinario (debido a la viscosidad y a la conducción térmica) cuando se propaga el sonido en el gas, la lentitud de la distorsión de una onda esférica puede dar como resultado el amortiguamiento antes de que puedan formarse las discontinuidades.

choque. Por el mismo método encontramos la ley final de aumento del espesor del pulso: $l \sim r^{1/4}$, y la ley final de amortiguamiento de la intensidad de la onda de choque: $\sqrt{r}\Delta v \sim r^{-1/4}$, o sea,

$$\Delta v \sim r^{-\frac{1}{4}}. \quad (95.10)$$

La formación de discontinuidades en una onda de choque es un ejemplo de la presencia espontánea de ondas de choque en ausencia de cualquier singularidad en las condiciones externas del flujo. Debe resaltarse que, aunque pueda aparecer espontáneamente en un instante particular, no puede desaparecer del mismo modo. Una vez formada, una onda de choque disminuye sólo asintóticamente cuando el tiempo se hace infinito.

PROBLEMAS

Problema 1. En el instante inicial, el perfil de onda se compone de una serie infinita de «dientes», como se ve en la figura 69. Determinar cómo varían el perfil y la energía de la onda con el transcurso del tiempo.

Solución. Es evidente que en instantes subsiguientes el perfil de onda tendrá la misma forma, permaneciendo invariable l_0 , pero siendo la altura v_t menor que v_0 . Consideremos un «diente»: en el instante $t = 0$, la ordenada que pasa por el punto en donde $v = v_t$ corta una parte $v_t l_0 / v_0$ de la base del triángulo. Durante un tiempo t este punto se mueve hacia delante una distancia $\alpha v_t t$. La condición de que la base del triángulo resulte sin variación en su longitud es $v_t l_0 / v_0 + \alpha v_t t = l_0$, de aquí que $v_t = v_0 / (1 + \alpha v_0 t / l_0)$. Cuando $t \rightarrow \infty$, la amplitud de onda disminuye proporcionalmente a $1/t$. La energía es $E = E_0 / (1 + \alpha v_0 t / l_0)^2$, es decir, disminuye proporcionalmente a $1/t^2$ para $t \rightarrow \infty$.

Problema 2. Determinar la intensidad del segundo armónico formado por la distorsión del perfil de una onda esférica monocromática.

Solución. Escribiendo la onda en la forma $rv = A \cos(kr - \omega t)$, podemos tener en cuenta la distorsión en primera aproximación sumando δr a r en el segundo miembro de esta ecuación y desarrollando en potencias de δr . Esto da, según (95.7),

$$rv = A \cos(kr - \omega t) - (\alpha k / 2c_0) A^2 \log(r/r_0) \sin 2(kr - \omega t);$$

Aquí debe tomarse r_0 como una distancia a la cual la onda pueda considerarse también, con exactitud suficiente, como estrictamente monocromática. El segundo término de esta fórmula es el segundo armónico en el análisispectral de la onda. Su intensidad total (promedio temporal) I_2 , es

$$I_2 = (\alpha^2 k^2 / 8\pi c_0^3 \rho_0) \log^2(r/r_0) I_1^2,$$

en donde $I_1 = 2\pi c_0 \rho_0 A^2$ es la intensidad del primer armónico.

§ 96. Características

La definición de características dada en § 79, como líneas a lo largo de las cuales se propagan pequeñas perturbaciones (en la aproximación de la

acústica geométrica) es de validez general y no está restringida al flujo supersónico estacionario plano estudiado en § 79.

En el caso de un flujo no estacionario monodimensional podemos introducir las características como líneas en el plano xt , cuya pendiente dx/dt es igual a la velocidad de propagación de perturbaciones pequeñas respecto a un sistema coordenado fijo. Las perturbaciones, propagadas respecto al gas con la velocidad del sonido en el sentido positivo o negativo del eje de las x , se mueven respecto al sistema coordenado fijo con velocidad $v \pm c$. Las ecuaciones diferenciales de las dos familias de características, que denominaremos C_+ y C_- , son de acuerdo con ello

$$(dx/dt)_+ = v + c, \quad (dx/dt)_- = v - c. \quad (96.1)$$

Las perturbaciones transmitidas con el gas se propagan en el plano xt a lo largo de características que pertenecen a una tercera familia C_0 , para la cual

$$(dx/dt)_0 = v. \quad (96.2)$$

Estas son precisamente las «líneas de corriente» del plano xt ; ver el final de § 79.[†] Debe resaltarse que para que existan estas características deja de ser necesario el hecho de que el flujo del gas sea supersónico. La propagación direccional de las perturbaciones, como resulta evidenciado por las características, se debe aquí simplemente a la relación causal entre los movimientos en instantes sucesivos.

Como ejemplo, consideremos las características de una onda simple. Para una onda que se propaga en el sentido positivo del eje de las x tenemos, según (94.5), $x = t(v + c) + f(v)$. Diferenciando esta relación, tenemos

$$dx = (v + c)dt + [t + tc'(v) + f'(v)]dv.$$

A lo largo de una característica C_+ , tenemos $dx = (v + c)dt$; comparando ambas ecuaciones vemos que a lo largo de dicha característica $[t + tc'(v) + f'(v)]dv = 0$. La expresión entre corchetes no puede anularse idénticamente y, por tanto, $dv = 0$, es decir, $v = \text{constante}$. Así pues, llegamos a la conclusión de que a lo largo de una característica cualquiera C_+ , la velocidad es constante y, por tanto, lo son también todas las demás magnitudes. La misma propiedad es válida para las características C_- en una onda que se propaga hacia la izquierda. Veremos en § 97 que esto no es accidental, sino que es una consecuencia matemática de la naturaleza de las ondas simples.

A partir de esta propiedad de las características C_+ de una onda simple, podemos, a su vez, concluir que constituyen una familia de rectas en el plano xt ; la velocidad es constante a lo largo de las líneas $x = t[v + c(v)] +$

[†] Las mismas ecuaciones (96.1) y (96.2) determinan las características en el caso de un flujo con simetría esférica no estacionario, si se sustituye x por la coordenada radial r (las características serán ahora líneas en el plano rt).

$+ f(v)$ (94.5). En particular, en el caso de una onda de rarefacción de semejanza (una onda simple con $f(v) = 0$), estas líneas forman un pincel a través del origen en el plano xt . Por esta razón, se dice a veces que una onda simple de semejanza está *centrada*.

La figura 70 muestra la familia de características C_+ para la onda simple de rarefacción formada cuando un pistón se mueve saliendo de una tubería con aceleración. Es una familia de líneas rectas divergentes que empiezan en la curva $x = X(t)$ dada por el movimiento del pistón. A la derecha de la característica $x = c_0 t$ existe una región de gas en reposo en donde las características se hacen paralelas.

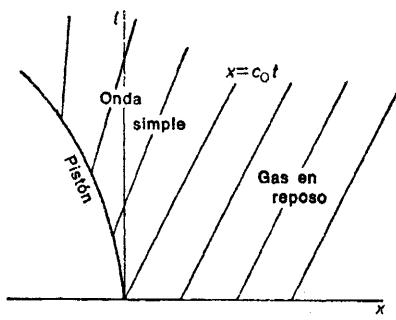


FIG. 70

La figura 71 es un diagrama análogo para el caso de una onda de compresión simple formada cuando se mueve un pistón hacia el interior de una tubería con aceleración. En este caso las características son líneas rectas convergentes que finalmente se cortan. Puesto que cada característica tiene un valor constante de v , su intersección muestra que la función $v(x, t)$ es multiforme, lo que carece de significado físico. Esta es la interpretación geométrica del resultado obtenido en § 94: una onda de compresión simple no puede existir indefinidamente y debe formarse una onda de choque. La interpretación geométrica de la condición (94.12), que determina el tiempo y lugar de formación de la onda de choque es la siguiente. La familia de características rectilíneas que se cortan tiene una envolvente que, en el caso de un valor mínimo de t determinado, tiene un punto anguloso; éste da el instante en el que aparece la multiformidad. Cada punto de la región comprendida entre las dos ramas de la envolvente está sobre tres características C_+ . Si las ecuaciones de las características vienen dadas en forma paramétricas $x = x(v)$, $t = t(v)$, la posición del punto anguloso viene dada por las ecuaciones (94.12).†

† El caso particular en que la onda de choque se produce en la frontera del gas en reposo corresponde a aquél en el que una rama de la envolvente es parte de la característica $x = c_0 t$.

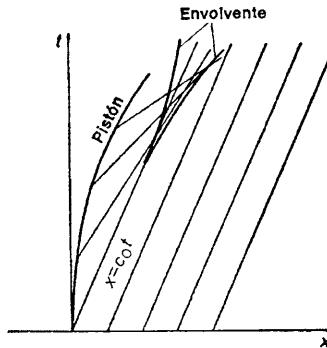


FIG. 71

A continuación indicaremos brevemente cómo la definición física dada anteriormente de las características como líneas a lo largo de las cuales se propagan las perturbaciones, se corresponde con el sentido matemático de la palabra en la teoría de las ecuaciones diferenciales. Consideremos una ecuación en derivadas parciales de la forma

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + D = 0, \quad (96.3)$$

que es lineal en las derivadas segundas; los coeficientes A, B, C, D pueden ser funciones cualesquiera, tanto de las variables independientes x, t , como de las funciones incógnitas ϕ y de sus primeras derivadas.[†] La ecuación (96.3) es del tipo elíptico si $B^2 - AC < 0$ en todos los puntos, y del tipo hiperbólico si $B^2 - AC > 0$. En este último caso, la ecuación

$$A dt^2 - 2B dx dt + C dx^2 = 0, \quad (96.4)$$

o sea,

$$dx/dt = [B \pm \sqrt{(B^2 - AC)}]/C, \quad (96.5)$$

determina dos familias de curvas en el plano xt , las *características* [para una solución determinada $\phi(x, t)$ de la ecuación (96.3)]. Si los coeficientes A, B, C son funciones únicamente de x y t , podemos señalar que entonces las características son independientes de la solución particular ϕ .

Supongamos que un flujo determinado corresponde a cierta solución $\phi = \phi_0(x, t)$ de la ecuación (96.3) y supongamos que se aplica a la misma una pequeña perturbación ϕ_1 . Admitamos que esta perturbación satisface las condiciones necesarias para que sea válida la acústica geométrica: esto no influye grandemente al flujo (ϕ_1 y sus primeras derivadas son pequeñas), pero varía considerablemente en distancias pequeñas (las segundas deriva-

[†] El potencial de la velocidad satisface una ecuación de esta forma en el flujo no estacionario monodimensional.

das de ϕ_1 son relativamente grandes). Poniendo en la ecuación (96.3) $\phi = \phi_0 + \phi_1$, obtenemos entonces para ϕ_1 la ecuación

$$A \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} = 0,$$

con $\phi = \phi_0$ en los coeficientes A, B, C . Siguiendo el método utilizado al pasar de la óptica ondulatoria a la óptica geométrica, escribamos $\phi_1 = ae^{i\psi}$, en donde la función ψ (*eikonal*) es grande, y se obtiene así

$$A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} + C \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = 0. \quad (96.6)$$

La ecuación de propagación de rayos en la acústica geométrica se obtiene igualando dx/dt a la velocidad de grupo: $dx/dt = d\omega/dk$, en donde $k = \partial\psi/\partial x$, $\omega = -\partial\psi/\partial t$. Derivando la relación $Ak^2 - 2Bk\omega + C\omega^2 = 0$, obtenemos $dx/dt = -(B\omega - Ak)/(C\omega - Bk)$, y eliminando k/ω por la misma relación, llegamos de nuevo a la ecuación (96.5).

PROBLEMA

Hallar la ecuación de la segunda familia de características en una onda simple centrada.

Solución. En una onda simple centrada que se propaga en un gas en reposo hacia la derecha del mismo, tenemos $x/t = v + c = c_0 + (\gamma + 1)v/2$. Las características C_+ forman el pincel $x = \text{constante} \times t$. Por otra parte, las características C_- están determinadas por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = v - c = \frac{3-\gamma}{\gamma+1} \frac{x}{t} - \frac{4}{\gamma+1} c_0.$$

Integrando, se obtiene

$$x = -\frac{2}{\gamma-1} c_0 t + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} c_0 t_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{(3-\gamma)/(\gamma+1)},$$

en donde la constante de integración se ha escogido de modo que la característica C_- pasa a través del punto $x = c_0 t_0$, $t = t_0$ sobre la característica C_+ ($x = c_0 t$) que es el límite entre la onda simple y la región en reposo.

Las «líneas de corriente» en el plano xt vienen dadas por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right),$$

de aquí que

$$x = -\frac{2}{\gamma-1} c_0 t + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} c_0 t_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/(\gamma+1)}.$$

§ 97. Invariantes de Riemann

Una perturbación pequeña arbitraria se propaga, en general, a lo largo de tres características (C_+ , C_- , C_0) saliendo de un punto determinado en el plano xt . Sin embargo, una perturbación arbitraria puede separarse en partes, cada una de las cuales se propaga a lo largo de sólo una característica.

Supongamos, en primer lugar, un flujo de gas isoentrópico. Escribamos la ecuación de continuidad y la ecuación de Euler en la forma

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0;$$

en la ecuación de continuidad hemos sustituido las derivadas de la densidad por las de la presión, utilizando las fórmulas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Dividiendo la primera ecuación por $\pm \rho c$ y sumándola a la segunda, obtenemos

$$\frac{\partial v}{\partial t} \pm \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \pm \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \right) (v \pm c) = 0. \quad (97.1)$$

Introduzcamos ahora dos nuevas funciones incógnitas

$$J_+ = v + \int dp/\rho c, \quad J_- = v - \int dp/\rho c, \quad (97.2)$$

que se denominan *invariantes de Riemann*. Debe recordarse que, en el flujo isoentrópico, ρ y c son funciones definidas de p y las integrales de los segundos miembros son, por tanto, funciones definidas. En el caso de un gas perfecto

$$J_+ = v + 2c/(\gamma - 1), \quad J_- = v - 2c/(\gamma - 1). \quad (97.3)$$

En función de estas magnitudes, las ecuaciones de movimiento toman la forma simple

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (v + c) \frac{\partial}{\partial x} \right] J_+ = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} + (v - c) \frac{\partial}{\partial x} \right] J_- = 0. \quad (97.4)$$

Los operadores diferenciales que actúan sobre J_+ y J_- son precisamente los operadores de derivación a lo largo de las características C_+ y C_- en el plano xt . Así pues, vemos que J_+ y J_- permanecen constantes a lo largo de cada característica C_+ o C_- , respectivamente. Podemos decir también que se propagan pequeñas perturbaciones de J_+ únicamente a lo largo de las características C_+ , y las de J_- sólo a lo largo de C_- .

En el caso general de flujo anisoentrópico, no pueden escribirse las ecuaciones (97.1) en la forma (97.4), puesto que $dp/\rho c$ no es una diferencial perfecta. Sin embargo, estas ecuaciones permiten todavía la separación de las perturbaciones que se propagan a lo largo de las características de sólo una familia. Puesto que estas perturbaciones son aquéllas que tienen la forma $\delta v \pm \delta p/\rho c$, en donde δv y δp son perturbaciones arbitrariamente pequeñas de la velocidad y de la presión. Con objeto de obtener un sistema completo de ecuaciones del movimiento, deben suplementarse las ecuaciones (97.1) por la ecuación adiabática

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right] s = 0, \quad (97.5)$$

que muestra que las perturbaciones δs se propagan a lo largo de las características C_0 . Una perturbación arbitrariamente pequeña puede separarse siempre en partes independientes de los tres tipos mencionados.

Una comparación con la fórmula (94.4) muestra que los invariantes de Riemann (97.2) son las magnitudes que, en ondas simples, son constantes a través de la región del flujo en todos los instantes: J_- es constante en una onda simple que se propaga hacia la derecha, y J_+ en otra que se mueve hacia la izquierda. Matemáticamente, ésta es la propiedad fundamental de las ondas simples a partir de la cual se deduce en particular la propiedad mencionada en § 96: una familia de características se compone de líneas rectas. Por ejemplo, supongamos que la onda se propaga hacia la derecha. Cada característica C_+ tiene un valor constante de J_+ y, además, un valor constante de J_- , el cual es el mismo en todos los puntos. Puesto que tanto J_+ como J_- son constantes, se deduce que v y p también lo son (v , por lo tanto, lo son todas las demás magnitudes), y obtenemos la propiedad de las características C_+ deducidas en § 96, que, a su vez, muestran que son líneas rectas.

Si el flujo en dos regiones adyacentes del plano xt se describe por dos soluciones analíticamente diferentes de las ecuaciones del movimiento, entonces el límite entre las regiones es una característica. En efecto, este límite es una discontinuidad en las derivadas de cierta magnitud, es decir, es una discontinuidad débil y, por lo tanto, debe coincidir necesariamente con una cierta característica.

La propiedad siguiente de las ondas simples es de gran importancia en la teoría del flujo isoentrópico monodimensional. El flujo en una región adyacente a una región de flujo constante (en la que $v = \text{constante}$, $p = \text{constante}$) debe ser una onda simple.

Es muy fácil de probar esta afirmación. Supongamos que la región 1 en el plano xt está limitada por la derecha por una región (2) de flujo constante (figura 72). Ambos invariantes J_+ y J_- son evidentemente constantes en esta última región y ambas familias de características son líneas rectas.

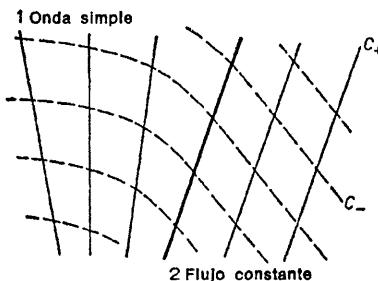


FIG. 72

El límite entre las dos regiones es una característica C_+ y las líneas C_+ en una región no entran en la otra. Las características C_- pasan continuamente de una región a la otra y transportan el valor constante de J_- de la región 1 a la región 2. Así pues, J_- es una constante a través de la región 1 también, de modo que el flujo en esta última es una onda simple.

La capacidad de las características para «transmitir» valores constantes de ciertas magnitudes, arroja cierta luz sobre el problema general de las condiciones iniciales y límites de las ecuaciones de la dinámica de fluidos. En los casos particulares de interés físico, no existe normalmente ninguna duda acerca de la selección de estas condiciones que vienen dictadas por las consideraciones físicas. Sin embargo, en casos más complejos, pueden ser útiles ciertas consideraciones matemáticas basadas en las propiedades generales de las características.

Para mayor claridad estudiaremos un flujo de gas isoentrópico monodimensional. Matemáticamente un problema de dinámica de gases normalmente necesitará la determinación de dos funciones incógnitas (por ejemplo, v y p) en una región del plano xt comprendida entre dos curvas dadas (OA y OB en la figura 73a), en las que se conocen las condiciones límites. El problema consiste en hallar cuántas magnitudes pueden tomar valores dados sobre estas curvas. En este aspecto es muy importante saber cómo se sitúa cada curva respecto a las direcciones o sentidos (indicados por flechas en la figura 73) de las características C_+ y C_- [†] que salen de cada punto de la misma. Dos casos pueden presentarse: o bien ambas características están en el mismo lado de la curva o no lo están. En la figura 73a, la curva OA pertenece al primer caso y la curva OB al segundo. Es claro que, en el caso de una determinación completa de las funciones incógnitas en la región AOB , los valores de las dos magnitudes deben estar dados sobre la curva OA (por ejemplo, los dos invariantes J_+ y J_-), y solamente los de una magnitud

[†] En el plano xt , las características que salen de un punto dado son aquéllas que van en el sentido de t creciente.

sobre OB . En efecto, los valores de la segunda magnitud se «transmiten» a la curva OB a partir de la curva OA mediante las características de la familia correspondiente y, por lo tanto, no pueden venir dados arbitrariamente.^f Análogamente, la figura 73b y c muestran casos en los que vienen dadas una o dos magnitudes, respectivamente, sobre cada curva límite.

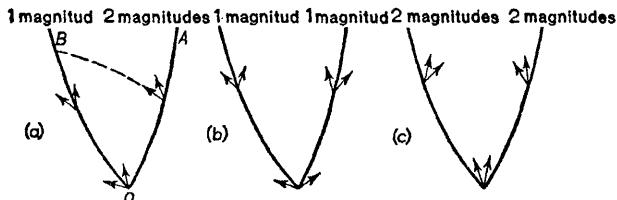


FIG. 73

Debe mencionarse también que, si la curva límite coincide con una característica, no pueden especificarse sobre ella dos magnitudes independientes, puesto que sus valores están relacionados por la condición de que sea constante el invariante de Riemann correspondiente.

El problema de condiciones límites especificadas para el caso general del flujo anisoentrópico puede estudiarse de un modo totalmente semejante.

Finalmente, podemos hacer la siguiente aclaración. Anteriormente, hemos hablado siempre de las características de un flujo monodimensional como líneas contenidas en el plano xt . Sin embargo, pueden definirse también las características en el plano de dos variables cualesquiera que describan el flujo. Por ejemplo, podemos considerar las características en el plano vc . En el caso del flujo isoentrópico, las ecuaciones de estas características vienen dadas simplemente por $J_+ = \text{constante}$, $J_- = \text{constante}$, con diversas constantes en el segundo miembro; denominaremos a estas características Γ_+ y Γ_- . En el caso de un gas perfecto estas son, según (97.3), dos familias de líneas paralelas (figura 74).

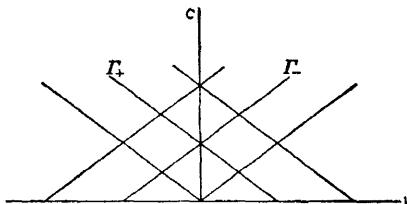


FIG. 74

^f Como ilustración puede darse un ejemplo de este caso: el flujo gaseoso que se produce cuando un pistón entra o sale de una tubería infinita. Aquí nos interesa hallar una solución de las ecuaciones de la dinámica de gases en la región del plano xt comprendida entre dos líneas, el eje x positivo y la línea $x = X(t)$ que da el movimiento del pistón (figuras 70, 71). En la primera línea están dados los valores de dos magnitudes (la condición inicial $v = 0$, $p = p_0$ para $t = 0$), y en la segunda línea los de una magnitud [$v = u$, siendo $u(t)$ la velocidad del pistón].

Debe señalarse que estas características están determinadas totalmente por las propiedades del gas y que no dependen de ninguna solución particular de las ecuaciones del movimiento. Esto se debe a que la ecuación del flujo isoentrópico descrito con las variables v, c es (como veremos en § 98) una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden, con coeficientes que dependen únicamente de las variables independientes.

Las características en los planos xt y vc son transformaciones mutuas que intervienen en la solución particular de las actuaciones del movimiento. Sin embargo, la transformación no necesita ser biunívoca. En particular, solamente una característica del plano vc corresponde a una onda simple dada y todas las demás características del plano xt se transforman en ella. Así, en el caso de una onda moviéndose hacia la derecha (por ejemplo), existe una de las características Γ_- ; las características C_- se transforman en la línea Γ_- , y las características C_+ en sus diversos puntos.

PROBLEMA

Hallar la solución general de la ecuación del flujo isoentrópico monodimensional de un gas perfecto con $\gamma = 3$.

Solución. Para $\gamma = 3$ tenemos $J_{\pm} = v \pm c$, y las ecuaciones (97.4) tienen la integral general

$$\begin{aligned} x &= (v + c)t + f_1(v + c), \\ x &= (v - c)t + f_2(v - c), \end{aligned}$$

siendo f_1 y f_2 funciones arbitrarias. Estas dos ecuaciones determinan implícitamente las funciones requeridas $v(x, t)$ y $c(x, t)$, y, por tanto, todas las demás magnitudes. Podemos decir que en este caso las dos magnitudes $v \pm c$ se propagan independientemente como dos ondas simples que no interaccionan.

§ 98. Flujo gaseoso monodimensional arbitrario

Consideremos ahora el problema general de un flujo gaseoso isoentrópico monodimensional arbitrario (sin ondas de choque). Primero demostraremos que este problema puede reducirse a la resolución de una ecuación diferencial lineal.

Un flujo monodimensional cualquiera (es decir, un flujo que depende únicamente de las coordenadas espaciales) debe ser un flujo potencial, puesto que cualquier función $v(x, t)$ puede escribirse como una derivada: $v(x, t) = \partial \phi(x, t) / \partial x$. Por tanto, podemos utilizar como primera integral de la ecua-

ción de Euler, la ecuación de Bernoulli (9.3): $\partial\phi/\partial t + v^2/2 + w = 0$. A partir de ella se encuentra la diferencial

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial t}dt \\ &= vdx - (\frac{1}{2}v^2 + w)dt. \end{aligned}$$

En este caso las variables independientes son x y t ; haremos ahora la transformación a las variables independientes v y w . Para ello, utilizaremos la transformación de Legendre; poniendo

$$d\phi = d(xv) - xdv - d[t(w + \frac{1}{2}v^2)] + td(w + \frac{1}{2}v^2)$$

y sustituyendo ϕ por una nueva función auxiliar

$$\chi = \phi - xv + t(w + \frac{1}{2}v^2),$$

obtenemos

$$d\chi = -xdv + td(w + \frac{1}{2}v^2) = tdw + (vt - x)dv,$$

en donde χ se considera como una función de v y w . Comparando esta relación con la ecuación $d\chi = (\partial\chi/\partial w)dw + (\partial\chi/\partial v)dv$, tenemos $t = \partial\chi/\partial w$, $vt - x = \partial\chi/\partial v$, o sea,

$$t = \partial\chi/\partial w, \quad x = v\partial\chi/\partial w - \partial\chi/\partial v. \quad (98.1)$$

Si se conoce la función $\chi(v, w)$, estas fórmulas determinan v y w en función de la coordenada x y del tiempo t .

Deduzcamos ahora una ecuación para χ . Para ello partamos de la ecuación de continuidad que todavía no hemos utilizado:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + v\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Transformemos esta ecuación en otra que sea función de las variables v , w . Escribiendo las derivadas parciales como jacobianos, tenemos

$$\frac{\partial(\rho, x)}{\partial(t, x)} + v\frac{\partial(t, \rho)}{\partial(t, x)} + \rho\frac{\partial(t, v)}{\partial(t, x)} = 0,$$

o sea, multiplicando por $\partial(t, x)/\partial(w, v)$,

$$\frac{\partial(\rho, x)}{\partial(w, v)} + v\frac{\partial(t, \rho)}{\partial(w, v)} + \rho\frac{\partial(t, v)}{\partial(w, v)} = 0.$$

Para desarrollar estos jacobianos debemos utilizar el resultado siguiente. De acuerdo con la ecuación de estado del gas, ρ es una función de otras dos cualesquier magnitudes termodinámicas independientes; por ejemplo, podemos considerar ρ como función de w y s . Si $s = \text{constante}$, tenemos simple-

mente $\rho = \rho(w)$, y la densidad es independiente de v . Desarrollando los jacobianos tenemos, por tanto,

$$\frac{d\rho}{dw} \frac{\partial x}{\partial v} - v \frac{d\rho}{dw} \frac{\partial t}{\partial v} + \rho \frac{\partial t}{\partial w} = 0.$$

Sustituyendo aquí las expresiones (98.1) para t y x , obtenemos

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dw} \left(\frac{\partial \chi}{\partial w} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2 \chi}{\partial w^2} = 0.$$

Si $s = \text{constante}$, tenemos $dw = dp/\rho$, y por tanto, $dw/dp = 1/\rho$. Es decir, podemos escribir $d\rho/dw = (d\rho/dp)(dp/dw) = \rho/c^2$. Finalmente, tenemos para χ la ecuación

$$c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial w^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} + \frac{\partial \chi}{\partial w} = 0; \quad (98.2)$$

en este caso la velocidad del sonido c ha de considerarse como una función de w . El problema de integrar las ecuaciones no lineales del movimiento se ha reducido así al de resolver una ecuación lineal.

Apliquemos este resultado al caso de un gas perfecto. Tenemos $c^2 = (\gamma - 1)w$, y la ecuación fundamental (98.2) se transforma

$$(\gamma - 1)w \frac{\partial^2 \chi}{\partial w^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} + \frac{\partial \chi}{\partial w} = 0. \quad (98.3)$$

Esta ecuación tiene una integral general elemental si $(3 - \gamma)/(\gamma - 1)$ es un número entero par:

$$(3 - \gamma)/(\gamma - 1) = 2n, \text{ o sea } \gamma = (3 + 2n)/(2n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (98.4)$$

Esta condición se satisface por los gases monoatómicos ($\gamma = 5/3$, $n = 1$) y diatómicos ($\gamma = 7/5$, $n = 2$). Expresando γ en función de n , podemos volver a escribir (98.3) como

$$\frac{2}{2n+1} w \frac{\partial^2 \chi}{\partial w^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} + \frac{\partial \chi}{\partial w} = 0. \quad (98.5)$$

Designaremos por χ_n una función que satisfaga esta ecuación para un valor dado de n . Para la función χ_0 tenemos

$$2w \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial w^2} - \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial v^2} + \frac{\partial \chi_0}{\partial w} = 0.$$

Introduciendo en lugar de w la variable $u = \sqrt{(2w)}$, obtenemos

$$\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial v^2} = 0.$$

Esta es precisamente la ecuación de ondas ordinaria, cuya solución general es

$$\chi_0 = f_1(u+v) + f_2(u-v),$$

siendo f_1 y f_2 funciones arbitrarias. Así pues,

$$\chi_0 = f_1[\sqrt{(2w)} + v] + f_2[\sqrt{(2w)} - v]. \quad (98.6)$$

Mostraremos ahora que, si se conoce la función χ_n , puede obtenerse la función χ_{n+1} por derivación. Efectivamente, derivando la ecuación (98.5) respecto a w , se encuentra fácilmente

$$\frac{2}{2n+1} w \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left(\frac{\partial \chi_n}{\partial w} \right) + \frac{2n+3}{2n+1} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial \chi_n}{\partial w} \right) - \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\partial \chi_n}{\partial w} \right) = 0.$$

Haciendo $v = v' \sqrt{[(2n+1)/(2n+3)]}$, tenemos para $\partial \chi_n / \partial w$ la ecuación

$$\frac{2}{2n+3} w \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left(\frac{\partial \chi_n}{\partial w} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial \chi_n}{\partial w} \right) - \frac{\partial^2}{\partial v'^2} \left(\frac{\partial \chi_n}{\partial w} \right) = 0,$$

que es la ecuación (98.5) para la función $\chi_{n+1}(w, v')$. Así pues, se obtiene la conclusión de que

$$\chi_{n+1}(w, v') = \frac{\partial}{\partial w} \chi_n(w, v) = \frac{\partial}{\partial w} \chi_n \left(w, v' \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}} \right). \quad (98.7)$$

Utilizando esta fórmula n veces y tomando χ_0 a partir de (98.6), encontramos que la solución general de la ecuación (98.5) es

$$\chi = \frac{\partial^n}{\partial w^n} \{ f_1[\sqrt{[2(2n+1)w]} + v] + f_2[\sqrt{[2(2n+1)w]} - v] \},$$

o sea,

$$\chi = \frac{\partial^{n-1}}{\partial w^{n-1}} \left\{ \frac{F_1[\sqrt{[2(2n+1)w]} + v] + F_2[\sqrt{[2(2n+1)w]} - v]}{\sqrt{w}} \right\}, \quad (98.8)$$

en donde F_1 y F_2 son de nuevo dos funciones arbitrarias.

Si expresamos w en función de la velocidad del sonido por la ecuación $w = c^2/(\gamma - 1) = (2n+1)c^2/2$, la solución (98.8) se transforma en

$$\chi = \left(\frac{\partial}{c \partial c} \right)^{n-1} \left\{ \frac{1}{c} F_1 \left(c + \frac{v}{2n+1} \right) + \frac{1}{c} F_2 \left(c - \frac{v}{2n+1} \right) \right\}. \quad (98.9)$$

Las expresiones $c \pm v/(2n+1) = c \pm (\gamma - 1)v/2$, que son los argumentos de las funciones arbitrarias, son precisamente los invariantes de Riemann (97.3), que son constantes a lo largo de las características.

En las aplicaciones suele ser necesario calcular los valores de la función $\chi(v, c)$ sobre una característica. Para este objetivo es útil la siguiente fórmula:[†]

$$\left(\frac{\partial}{c \partial c} \right)^{n-1} \left\{ \frac{1}{c} F \left(c \pm \frac{v}{2n+1} \right) \right\} = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{\partial}{\partial c} \right)^{n-1} \frac{F(2c+a)}{c^n}, \quad (98.10)$$

[†] Se deduce de modo más simple utilizando el teorema de Cauchy de las funciones de variable compleja.

con $\pm v/(2n+1) = c + a$ (siendo a una constante arbitraria).

Busquemos ahora la relación entre la solución general que acabamos de hallar y la solución de las ecuaciones de la dinámica de los gases que describe una onda simple. La última se distingue por la propiedad de que en ella v es una función definida de w : $v = v(w)$ y, por tanto, el jacobiano $\Delta = \partial(v, w)/\partial(x, t)$ se anula idénticamente. Sin embargo, al transformar las variables v y w dividimos la ecuación del movimiento por este jacobiano y, por tanto, se « pierde » la solución para la cual $\Delta \equiv 0$. Así pues, una onda simple no puede obtenerse directamente a partir de la integral general de la ecuación del movimiento, sino que es una integral especial de estas ecuaciones.

Para comprender la naturaleza de esta integral especial debemos observar que puede obtenerse a partir de la integral general mediante un cierto paso a un límite que está estrechamente relacionado al significado físico de las características, como trayectos de propagación de pequeñas perturbaciones. Supongamos que la región del plano vw , en el que la función $\chi(v, w)$ no es cero, se convierte en una zona muy estrecha a lo largo de una característica. Las derivadas de χ en la dirección transversal a la característica toman entonces un margen muy amplio de valores, puesto que χ disminuye muy rápidamente en esa dirección. Estas soluciones $\chi(v, w)$ de las ecuaciones del movimiento deben existir, puesto que, al considerarlas como una perturbación en el plano vw , satisfacen las condiciones de la acústica geométrica y, por tanto, son no nulas a lo largo de las características, como deben ser dichas perturbaciones.

Es evidente, a partir de lo anterior, que, en el caso de una función determinada χ de este tipo, el tiempo $t = \partial\chi/\partial w$ tomará un margen arbitrariamente grande de valores. La derivada de χ a lo largo de las características

pleja. En el caso de una función arbitraria $F(c+u)$ tenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{c \partial c} \right)^{n-1} \frac{F(c+u)}{c} &= 2^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial c^2} \right)^{n-1} \frac{F(c+u)}{c} \\ &= 2^{n-1} \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint \frac{F(\sqrt{z}+u)}{\sqrt{z}(z-c^2)^n} dz, \end{aligned}$$

en donde la integral se toma a lo largo de un contorno en el plano complejo que encierra el punto $z = c^2$. Haciendo ahora $u = c + a$ y sustituyendo en la integral $\sqrt{z} = 2\zeta - c$, obtenemos

$$\frac{1}{2^{n-1}} \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint \frac{F(2\zeta+a)}{\zeta^n (\zeta-c)^n} d\zeta,$$

en donde el contorno de integración encierra al punto $\zeta = c$; de nuevo aplicando el teorema de Cauchy se tiene el resultado (98.10).

es, sin embargo, finita. A lo largo de una característica (por ejemplo, la característica Γ_-) tenemos

$$\frac{dJ_-}{dv} = 1 - \frac{1}{\rho c} \frac{dp}{dw} \frac{dw}{dv} = 1 - \frac{1}{c} \frac{dw}{dv} = 0.$$

La derivada de χ a lo largo de una característica, que designaremos por $-f(v)$, es, por tanto,

$$\frac{d\chi}{dv} = \frac{\partial\chi}{\partial v} + \frac{\partial\chi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial\chi}{\partial v} + c \frac{\partial\chi}{\partial w} = -f(v).$$

Expresando las derivadas parciales de χ en función de x y t por (98.1), obtenemos la relación $x = (v + c)t + f(v)$, es decir, la ecuación (94.5) para una onda simple. La expresión (94.4), que da la relación entre v y c en una onda simple, se satisface necesariamente, puesto que J_- es constante a lo largo de una característica Γ_- .

Hemos visto en § 97 que, si la solución de las ecuaciones del movimiento se reduce a un flujo constante en una cierta parte del plano xt , entonces debe existir una onda simple en las regiones adyacentes. El movimiento descrito por la solución general (98.8) debe, por tanto, separarse de una región de flujo constante (en particular, una región de gas en reposo) mediante una onda simple. El límite o la frontera entre la onda simple y la solución general, como cualquier límite entre dos soluciones analíticamente diferentes, es una característica. Al resolver los problemas particulares puede determinarse el valor de la función $\chi(w, v)$ sobre esta característica límite.

La condición de unión en el límite entre la onda simple y la solución general se obtiene sustituyendo las expresiones (98.1) para x y t en la ecuación de la onda simple $x = (v \pm c)t + f(v)$; esto da

$$\frac{\partial\chi}{\partial v} \pm c \frac{\partial\chi}{\partial w} + f(v) = 0.$$

Además, en una onda simple (y, por lo tanto, sobre la característica límite), tenemos $dv = \pm dp/\rho c = \pm dw/c$, o sea, $\pm c = dw/dv$. Sustituyendo esta expresión en la condición anterior, tenemos

$$\frac{\partial\chi}{\partial v} + \frac{\partial\chi}{\partial w} \frac{dw}{dv} + f(v) = \frac{d\chi}{dv} + f(v) = 0,$$

o sea, finalmente,

$$\chi = - \int f(v) dv, \quad (98.11)$$

que determina el valor límite requerido de χ . En particular, si la onda simple tiene un centro en el origen, es decir, si $f(v) \equiv 0$, entonces $\chi = \text{constante}$; puesto que la función χ está definida únicamente hasta una constante aditi-

va, podemos, sin pérdida de generalidad, tomar $\chi = 0$ en la característica límite.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el flujo resultante cuando una onda de rarefacción centrada se refleja en una pared sólida.

Solución. Supongamos que la onda de rarefacción se forma en el punto $x = 0$ en el instante $t = 0$, y se propaga en el sentido positivo del eje de las x ; alcanza la pared después de un tiempo $t = l/c_0$, en donde l es la distancia de la pared. La figura 75 muestra las características para la reflexión de la onda. En las regiones 1 y $1'$ el gas está en reposo; en la región 3 se mueve con una velocidad constante $v = -U$.[†] La región 2 es la onda de rarefacción incidente (con características rectilíneas C_+), y la región 5 es la onda reflejada (con características rectilíneas C_-). La región 4 es la «región de interacción» en la que se busca la solución; las características lineales se hacen curvas al entrar en esta región. La solución está totalmente determinada por las condiciones límites en los segmentos ab y ac . Sobre ab (es decir, sobre la pared) debemos tener $v = 0$ para $x = l$; por (98.1) se tiene, a partir de aquí, la condición $\partial\chi/\partial v = -l$ para $v = 0$. El límite ac con la onda de rarefacción es parte de una característica C_- , y, por tanto, tenemos $c - (\gamma - 1)v/2 = c - v/(2n + 1) = \text{constante}$; puesto que en el punto a , $v = 0$ y $c = c_0$, la constante es c_0 . En este límite, x debe ser nulo, de modo que tenemos la condición $x = 0$ para $c - v/(2n + 1) = c_0$. Se ve fácilmente que una función de la forma (98.9) que satisface estas condiciones es

$$\chi = \frac{l(2n+1)}{2^n n!} \left(\frac{\partial}{c \partial c} \right)^{n-1} \left\{ \frac{1}{c} \left[\left(c - \frac{v}{2n+1} \right)^2 - c_0^2 \right]^n \right\}, \quad (1)$$

y esta expresión da la solución buscada.

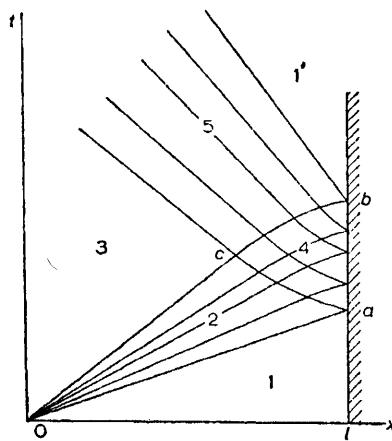


FIG. 75

[†] Si la onda de rarefacción se debe a un pistón que se mueve empezando a salir de una tubería con velocidad constante, entonces U es la velocidad del pistón.

La ecuación de la característica ac es (ver § 96, problema)

$$x = -(2n+1)c_0 t + 2(n+1)l(tc_0/l)^{(2n+1)/2(n+1)}.$$

Su intersección con la característica Oc

$$x/t = c_0 - \frac{1}{2}(\gamma+1)U = c_0 - 2(n+1)U/(2n+1)$$

determina el tiempo en el que desaparece la onda incidente:

$$t_c = \frac{l(2n+1)^{n+1} c_0^n}{[(2n+1)c_0 - U]^{n+1}}.$$

En la figura 75 se supone que $U < 2c_0/(\gamma+1)$; en el caso opuesto, la característica Oc está en el sentido negativo del eje de las x (figura 76). La interacción de las ondas incidente y reflejada subsiste durante un tiempo infinito (y no, como en la figura 75, para un tiempo finito).

La función (1) describe también la interacción entre dos ondas de rarefacción centradas iguales que salen de los puntos $x = 0$ y $x = 2l$ en el instante $t = 0$, y se propagan una hacia la otra; esto es evidente a partir de la simetría (figura 77).

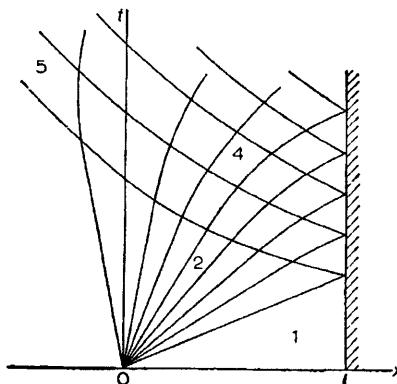


FIG. 76

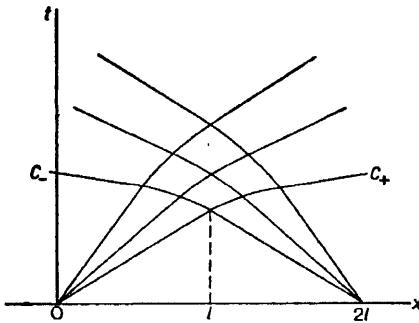


FIG. 77

Problema 2. Deducir la ecuación análoga a (98.3) para un flujo isotermo monodimensional de un gas perfecto.

Solución. En el caso de un flujo isotermo, la entalpía w en la ecuación de Bernouilli se sustituye por

$$\mu = \int dp/\rho = c_T^2 \int d\rho/\rho = c_T^2 \log \rho,$$

en donde $c_T^2 = (\partial p / \partial \rho)_T$ es el cuadrado de la velocidad isoterma del sonido. En el caso de un gas perfecto $c_T = \text{constante}$. Tomando la magnitud μ (en lugar de w) como una variable independiente, obtenemos por el mismo método que en el texto, la siguiente ecuación lineal con coeficientes constantes:

$$c_T^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \mu^2} + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} = 0.$$

§ 99. Propagación de ondas de choque intensas

Consideremos la propagación de una onda de choque esférica de gran intensidad que se obtiene como resultado de una explosión grande, es decir, a partir de una liberación instantánea de una gran cantidad de energía (que designaremos por E) en un volumen pequeño; supondremos que la onda de choque se propaga a través de un gas perfecto (L. I. SEDOV, 1946).

Consideremos la onda a distancias relativamente pequeñas de la fuente, de modo que la amplitud es todavía grande. Sin embargo, se supone que estas distancias son grandes en comparación con las dimensiones de la fuente; esto nos permite admitir que la energía E se genera en un solo punto (el origen).

Si la onda de choque es intensa, la discontinuidad de presiones en ella es muy grande. Supondremos que la presión p_2 detrás de la discontinuidad es tan grande en comparación con la presión p_1 del gas no perturbado delante de ella, que $p_2/p_1 \gg (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$. Esto significa que en todo punto podemos despreciar p_1 en comparación con p_2 , y que el cociente de las densidades p_2/ρ_1 es igual a su valor límite $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$; ver § 85.

Así pues, el esquema de flujo gaseoso está totalmente determinado por dos parámetros: la densidad de gas inicial ρ_1 y la magnitud de la energía E generada en la explosión. A partir de estos parámetros y de las dos variables independientes (el tiempo t y la coordenada radial r) podemos formar sólo una combinación adimensional que escribiremos como

$$\xi = r(\rho_1/Et^2)^{1/5}. \quad (99.1)$$

En consecuencia, tenemos un determinado tipo de flujo de semejanza.

En primer lugar, podemos decir que la posición de la propia onda de choque en todo instante debe corresponder a un cierto valor constante ξ_0 de la magnitud adimensional ξ . Esto da de una vez el modo en que se mueve la

onda de choque con el tiempo; designando por r_0 la distancia de la onda de choque al origen, tenemos

$$r_0 = \xi_0(Et^2/\rho_1)^{1/5}. \quad (99.2)$$

A partir de esta expresión encontramos la velocidad de propagación de la onda de choque (respecto al gas no perturbado, es decir, respecto a un sistema coordenado fijo):

$$u_1 = dr_0/dt = 2r_0/5t. \quad (99.3)$$

Disminuye respecto al tiempo como $t^{-3/5}$.

La presión del gas p_2 , la densidad ρ_2 y la velocidad $v_2 = u_1 - u_2$ (respecto a un sistema coordenado fijo) detrás precisamente de la discontinuidad puede expresarse en función de u_1 mediante las fórmulas deducidas en § 85. De acuerdo con (85.5) y (85.6),[†] tenemos

$$v_2 = 2u_1/(\gamma+1), \quad \rho_2 = \rho_1(\gamma+1)/(\gamma-1), \quad p_2 = 2\rho_1u_1^2/(\gamma+1). \quad (99.4)$$

La densidad es constante en el tiempo, mientras que v_2 y p_2 disminuyen como $t^{-3/5}$ y $p^{-6/5}$, respectivamente. También podemos señalar que la presión p_2 debida al choque aumenta con la energía total de la explosión como $E^{2/5}$.

Determinemos a continuación el flujo del gas a través de la región detrás del choque. En lugar de la velocidad del gas v , la densidad ρ y la presión p , introduzcamos variables adimensionales v' , ρ' , p' , definidas por

$$v = \frac{4}{5(\gamma+1)} \frac{r}{t} v', \quad \rho = \rho_1 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho', \quad p = \frac{8\rho_1}{25(\gamma+1)} \frac{r^2}{t^2} p'. \quad (99.5)$$

Las magnitudes v' , ρ' , p' pueden ser funciones únicamente de la variable adimensional ξ . En la superficie de discontinuidad (es decir, para $\xi = \xi_0$) deben tener los valores

$$v' = p' = \rho' = 1 \text{ para } \xi = \xi_0. \quad (99.6)$$

Las ecuaciones del flujo gaseoso adiabático con simetría central son

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{2\rho v}{r} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right) \log \frac{p}{\rho^\gamma} = 0. \quad (99.7)$$

La última ecuación es la ecuación de conservación de la entropía, habiendo sustituido la expresión (80.12) para la entropía de un gas perfecto. Después

[†] Designamos aquí por u_1 y u_2 las velocidades de la onda de choque relativas al gas, dadas por las fórmulas (85.6).

de sustituir (99.5) tenemos un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias para las funciones v' , ρ' y p' . La integración de estas ecuaciones se facilita por el hecho de que puede obtenerse inmediatamente una integral utilizando los razonamientos siguientes.

El hecho de que hayamos despreciado la presión p_1 del gas no perturbado significa que despreciamos la energía original del gas en comparación con la energía E que adquiere como resultado de la explosión. Por tanto, resulta claro que la energía total del gas dentro de la esfera limitada por la onda de choque es constante e igual a E . Además, puesto que tenemos un flujo de semejanza, es evidente que la energía del gas dentro de una esfera cualquiera de un radio más pequeño, que aumenta con el tiempo, de tal modo que ξ es igual a una constante cualquiera (no sólo ξ_0), debe permanecer constante; la velocidad radial de los puntos sobre esta esfera es $v_n = 2r/5t$ [comparar con (99.3)].

Es sencillo escribir a continuación la ecuación que expresa la constancia de esta energía. Por una parte, una cantidad de energía $dt \cdot 4\pi r^2 \rho v(w + v^2/2)$ sale de la esfera (cuya área es $4\pi r^2$) en el tiempo dt . Por otra parte, el volumen de la esfera aumenta en dicho tiempo en $dt \cdot v_n \cdot 4\pi r^2$, y la energía del gas en este volumen extra es $dt \cdot 4\pi r^2 \rho v_n (\epsilon + v^2/2)$. Igualando ambas expresiones, haciendo $\epsilon = p/\rho(\gamma - 1)$ y $w = \gamma\epsilon$, e introduciendo las funciones adimensionales dadas por (99.5), obtenemos

$$\frac{p'}{\rho'} = \frac{(\gamma + 1 - 2v')v'^2}{2\gamma v' - \gamma - 1}, \quad (99.8)$$

que es la integral buscada. Satisface automáticamente la condición límite (99.6) en la superficie de discontinuidad.

Cuando se conoce la integral (99.8), la integración de las ecuaciones es elemental, aunque laboriosa. La segunda y tercera ecuaciones (99.7) dan

$$\begin{aligned} \frac{dv'}{d \log \xi} + \left(v' - \frac{\gamma + 1}{2} \right) \frac{d \log \rho'}{d \log \xi} &= -3v', \\ \frac{d}{d \log \xi} \left(\log \frac{p'}{\rho'^\gamma} \right) &= \frac{5(\gamma + 1) - 4v'}{2v' - (\gamma + 1)}. \end{aligned} \quad (99.9)$$

A partir de ambas ecuaciones podemos expresar las derivadas $dv'/d \log \xi$ y $d \log \rho'/dv'$, mediante (99.8), como funciones únicamente de v' , y luego una integración con las condiciones límites (99.6) da

$$\left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^5 = v'^2 \left[\frac{5(\gamma + 1) - 2(3\gamma - 1)v'}{7 - \gamma} \right]^{v_1} \left[\frac{2\gamma v' - \gamma - 1}{\gamma - 1} \right]^{v_2},$$

$$\rho' = \left[\frac{2\gamma v' - \gamma - 1}{\gamma - 1} \right]^{v_3} \left[\frac{5(\gamma + 1) - 2(3\gamma - 1)v'}{7 - \gamma} \right]^{v_4} \left[\frac{\gamma + 1 - 2v'}{\gamma - 1} \right]^{v_5},$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{(3\gamma - 1)(2\gamma + 1)}, & v_2 &= -\frac{5(\gamma - 1)}{2\gamma + 1}, & v_3 &= \frac{3}{2\gamma + 1}, \\ v_4 &= \frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{(2 - \gamma)(3\gamma - 1)(2\gamma + 1)}, & v_5 &= \frac{1}{\gamma - 2}. \end{aligned} \quad (99.10)$$

Las fórmulas (99.8) y (99.10) dan la solución completa del problema. La constante ξ_0 está determinada por la condición

$$E = \int_0^{r_0} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} \right) 4\pi r^2 dr,$$

que establece que la energía total del gas es igual a la energía E de la explosión. En función de las magnitudes adimensionales, esta condición se transforma en

$$\xi_0^5 \frac{32\pi}{25(\gamma^2 - 1)} \int_0^1 (\xi^4 p' v'^2 + \xi^9 p') d\xi = 1. \quad (99.11)$$

Por ejemplo, en el caso del aire ($\gamma = 7/5$) esta constante es $\xi_0 = 1,033$.

Los cocientes v/v_2 y ρ/ρ_2 , funciones de $r/r_0 = \xi/\xi_0$, como se ve fácilmente a partir de las fórmulas anteriores, tienden a cero cuando $r/r_0 \rightarrow 0$, del modo

$$v/v_2 \sim r/r_0, \quad \rho/\rho_2 \sim (r/r_0)^{3/(\gamma-1)}; \quad (99.12)$$

sin embargo, el cociente de presiones p/p_2 tiende a una constante, y el cociente de temperaturas tiende, por tanto, a infinito.

La figura 78 muestra las magnitudes v/v_2 , p/p_2 y ρ/ρ_2 , en funciones de r/r_0 para el aire ($\gamma = 1,4$). La disminución muy rápida de la densidad dentro de la esfera es notable: casi todo el gas está dentro de una capa relativamente delgada detrás de la onda de choque. Como es natural, esto se debe al hecho de que el gas en la superficie de radio mayor (r_0) tiene una densidad que es seis veces la densidad normal.[†]

§ 100. Teoría del agua poco profunda

Existe una analogía notable entre un flujo gaseoso y el flujo en un campo gravitatorio de un fluido incompresible con una superficie libre, cuando la profundidad del fluido es pequeña (comparable con las dimensiones características del problema, tales como las dimensiones de las irregularidades en

[†] Los resultados de los cálculos para otros valores de γ han sido dados por L. I. SEDOV, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, capítulo IV, § 11, Cleaver-Hume Press, Londres, 1959. También se estudia el problema correspondiente con simetría cilíndrica.

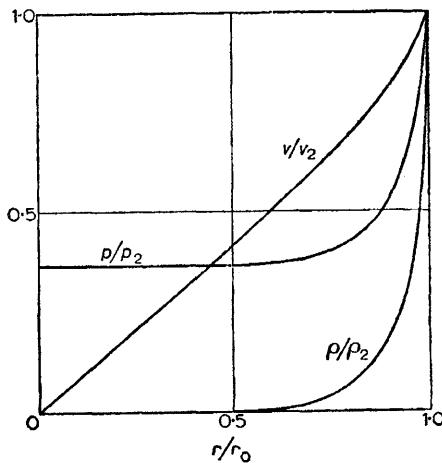


FIG. 78

el fondo del recipiente). En este caso puede despreciarse la componente vertical de la velocidad del fluido en comparación con su velocidad paralela a la superficie y esta última puede considerarse como constante a través de toda la profundidad del fluido. En esta aproximación (*hidráulica*), puede considerarse al fluido como un medio «bidimensional» que tiene una velocidad definida v en cada punto y también está caracterizada en cada punto por una magnitud h , que es la profundidad del fluido.

Las ecuaciones generales del movimiento correspondiente difieren de las obtenidas en § 13 únicamente en que las variaciones de las magnitudes durante el movimiento no necesitan suponerse que son pequeñas, como se hizo en § 13 al estudiar ondas de gravedad largas de pequeña amplitud. En consecuencia, los términos de segundo orden de la velocidad en la ecuación de Euler deben retenerse. En particular, en el caso de un flujo monodimensional en un canal, que depende sólo de una coordenada x (y del tiempo), las ecuaciones son

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(vh)}{\partial x} = 0, \quad (100.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x};$$

se supone aquí que la profundidad h es constante en todo el canal.

Ondas de gravedad largas son, en un sentido general, pequeñas perturbaciones del flujo que estamos ahora considerando. Los resultados del § 13 muestran que dichas perturbaciones se propagan respecto al fluido con una velocidad finita, a saber

$$c = \sqrt{(gh)}. \quad (100.2)$$

Esta velocidad juega aquí el papel de la velocidad del sonido en la dinámica de los gases. Lo mismo que en § 79, podemos obtener la conclusión de que, si el fluido se mueve con velocidades $v < c$ (*flujo tranquilo*), el efecto de las perturbaciones se propaga tanto aguas arriba como aguas abajo. Sin embargo, si el fluido se mueve con velocidades $v > c$ (*flujo rápido*), el efecto de las perturbaciones se propaga solamente en determinadas regiones aguas abajo.

La presión p (contada a partir de la presión atmosférica en la superficie libre) varía con la profundidad del fluido de acuerdo con la ley hidrostática $p = \rho g(h - z)$, siendo z la altura por encima del fondo. Es útil señalar que si introducimos las magnitudes

$$\tilde{\rho} = \rho h, \quad \tilde{p} = \int_0^h p dz = \frac{1}{2} \rho g h^2 = g \tilde{p}^2 / 2\rho, \quad (100.3)$$

entonces las ecuaciones (100.1) se transforman en

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \frac{\partial(v\tilde{p})}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}, \quad (100.4)$$

que son formalmente idénticas a las ecuaciones del flujo adiabático de un gas perfecto con $\gamma = 2(\tilde{p} \sim \tilde{p}^2)$. Esto nos permite aplicar inmediatamente a la teoría del agua poco profunda todos los resultados de la dinámica de los gases para el flujo en ausencia de ondas de choque. Sin embargo, si estuviesen presentes las ondas de choque, los resultados de la teoría del agua poco profunda difieren de los obtenidos en la dinámica de los gases perfectos.

Una «onda de choque» en un fluido dentro de un canal es una discontinuidad en la altura del fluido h y, por tanto, en la velocidad del fluido v (que se denomina *salto hidráulico* o *salto de agua*). La relación entre los valores de las magnitudes a ambos lados de la discontinuidad puede obtenerse a partir de las condiciones de continuidad de los flujos de masa y de impulso. La densidad del flujo de masa (por unidad de anchura del canal) es $j = \rho v h$. La densidad de flujo de impulso se obtiene integrando $p + \rho v^2$ en toda la profundidad del canal, y vale

$$\int_0^h (p + \rho v^2) dz = \frac{1}{2} \rho g h^2 + \rho v^2 h.$$

Por tanto, las condiciones de continuidad dan dos ecuaciones:

$$v_1 h_1 = v_2 h_2, \quad (100.5)$$

$$v_1^2 h_1 + \frac{1}{2} g h_1^2 = v_2^2 h_2 + \frac{1}{2} g h_2^2. \quad (100.6)$$

Estas expresiones nos dan las relaciones entre las cuatro magnitudes v_1 , v_2 , h_1 , h_2 , dos de las cuales pueden especificarse arbitrariamente. Expresando las velocidades v_1 y v_2 en función de las alturas h_1 y h_2 , obtenemos

$$v_1^2 = \frac{1}{2} g h_2 (h_1 + h_2) / h_1, \quad v_2^2 = \frac{1}{2} g h_1 (h_1 + h_2) / h_2. \quad (100.7)$$

Los flujos de energía a ambos lados de la discontinuidad no son iguales, y su diferencia es la cantidad de energía disipada en la discontinuidad por unidad de tiempo. La densidad de flujo de la energía en el canal es

$$q = \int_0^h \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 \right) \rho v dz = \frac{1}{2} j (gh + v^2).$$

Utilizando (100.7), hallamos que la diferencia es

$$q_1 - q_2 = gj(h_1^2 + h_2^2)(h_2 - h_1)/4h_1h_2.$$

Supongamos que el fluido se mueve a través de la discontinuidad del lado 1 al lado 2. Entonces, el hecho de que la energía se disipe significa que $q_1 - q_2 > 0$, y se obtiene la conclusión de que

$$h_2 > h_1, \quad (100.8)$$

es decir, el fluido se mueve desde la altura menor a la mayor. Podemos deducir, entonces, a partir de (100.7), que

$$v_1 > c_1 = \sqrt{gh_1}, \quad v_2 < c_2 = \sqrt{gh_2}, \quad (100.9)$$

en analogía completa con los resultados para las ondas de choque en la dinámica de los gases. También podían haberse deducido las desigualdades (100.9) como las condiciones necesarias para que sea estable la discontinuidad, como en § 84.

CAPÍTULO XI

INTERSECCIÓN DE SUPERFICIES DE DISCONTINUIDAD

§ 101. Ondas de rarefacción

La línea de intersección de dos ondas de choque es, matemáticamente, una línea singular de dos funciones que describen el flujo de gases. El vértice de un ángulo agudo en la superficie de un cuerpo por el que el gas fluye es siempre una línea singular de este tipo. Resulta que el flujo del gas cerca de la línea singular puede analizarse de una manera completamente general (L. PRANDTL y T. MEYER, 1908).

Al considerar la región cerca de un pequeño segmento de la línea singular, podemos considerar esta última con una línea recta que tomaremos como eje z en un sistema de coordenadas cilíndricas r, ϕ, z . Cerca de la línea singular todas las magnitudes dependen considerablemente del ángulo ϕ , pero su dependencia respecto a la coordenada r es sólo ligera y puede despreciarse para valores suficientemente pequeños de r . También carece de importancia la dependencia respecto a la coordenada z ; puede despreciarse, por tanto, la variación del esquema del flujo en un pequeño segmento de la línea singular.

Así pues, hemos de analizar un flujo estacionario en el que todas las magnitudes son funciones únicamente de ϕ . La ecuación de conservación de la entropía, $v \cdot \text{grad } s = 0$, da $v_\phi ds/d\phi = 0$, de aquí que $s = \text{constante}$,[†] es decir, el flujo es isoentrópico. Por tanto, podemos sustituir en la ecuación de Euler $\text{grad } p/\rho$ por $\text{grad } w$: $(v \cdot \text{grad})v = -\text{grad } w$. En coordenadas cilíndricas tenemos tres ecuaciones:

$$\frac{v_\phi}{r} \frac{dv_r}{d\phi} - \frac{v_\phi^2}{r} = 0, \quad \frac{v_\phi}{r} \frac{dv_\phi}{d\phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} = -\frac{1}{r} \frac{dw}{d\phi}, \quad v_\phi \frac{dv_z}{d\phi} = 0.$$

[†]Si $v_\phi = 0$, se puede deducir fácilmente a partir de las ecuaciones del movimiento que daremos más adelante que $v_r = 0$, $v_z \neq 0$. Dicho flujo correspondería a la intersección de superficies de discontinuidad tangencial (con una velocidad discontinua v_z), y carece de interés, puesto que dichas discontinuidades son inestables.

A partir de la última de estas tenemos $v_z = \text{constante}$, y sin pérdida de generalidad podemos poner $v_z = 0$, considerando el flujo como bidimensional; esto es simplemente un modo de definir adecuadamente la velocidad del sistema coordenado a lo largo del eje z . Las dos primeras ecuaciones pueden escribirse en la forma

$$v_\phi = \frac{dv_r}{d\phi}, \quad (101.1)$$

$$v_\phi \left(\frac{dv_\phi}{d\phi} + v_r \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\phi} = - \frac{dw}{d\phi}. \quad (101.2)$$

Sustituyendo (101.1) en (101.2), tenemos

$$v_\phi \frac{dv_\phi}{d\phi} + v_r \frac{dv_r}{d\phi} = - \frac{dw}{d\phi},$$

o sea, integrando

$$w + \frac{1}{2}(v_\phi^2 + v_r^2) = \text{constante}. \quad (101.3)$$

Podemos observar que la ecuación (101.1) implica que $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, es decir, tenemos flujo potencial como resultado del cual es válida la ecuación de Bernoulli (101.3).

A continuación, la ecuación de continuidad, $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$, da

$$\rho v_r + \frac{d}{d\phi}(\rho v_\phi) = \rho \left(v_r + \frac{dv_\phi}{d\phi} \right) + v_\phi \frac{dp}{d\phi} = 0. \quad (101.4)$$

Utilizando (101.2), obtenemos

$$\left(\frac{dv_\phi}{d\phi} + v_r \right) \left(1 - v_\phi \frac{dp}{d\rho} \right) = 0.$$

La derivada $dp/d\rho$, o más correctamente $(dp/d\rho)_s$, coincide con el cuadrado de la velocidad del sonido. Así pues,

$$\left(\frac{dv_\phi}{d\phi} + v_r \right) \left(1 - \frac{v_\phi^2}{c^2} \right) = 0. \quad (101.5)$$

Esta ecuación puede satisfacerse de cualquiera de las dos formas siguientes. Primeramente, podemos tener $dv_\phi/d\phi + v_r = 0$. Entonces, a partir de (101.2), $p = \text{constante}$ y $\rho = \text{constante}$, y a partir de (101.3), encontramos que $v^2 = v_r^2 + v_\phi^2 = \text{constante}$, es decir, el módulo de la velocidad es constante. Es fácil ver que en este caso también la dirección de la velocidad es constante. El ángulo χ formado por la velocidad y una dirección determinada en el plano del movimiento es (figura 79)

$$\chi = \phi + \text{arctg}(v_\phi/v_r). \quad (101.6)$$

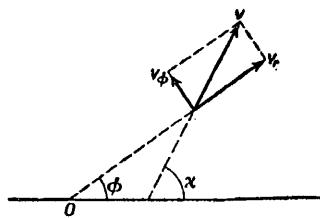


FIG. 79

Derivando esta expresión respecto a ϕ y utilizando las fórmulas (101.1) y (101.2), se obtiene fácilmente

$$\frac{d\chi}{d\phi} = -(v_r/\rho v_\phi v^2) \frac{dp}{d\phi}. \quad (101.7)$$

Como $p = \text{constante}$, se deduce que $\chi = \text{constante}$. Así pues, si el primer factor de (101.5) es cero, tenemos la solución trivial de un flujo uniforme.

En segundo lugar, la ecuación (101.5) puede satisfacerse haciendo $1 - v_\phi^2/c^2 = 0$, es decir, $v_\phi = \pm c$. La velocidad radial viene dada por (101.3). Designando la constante de la ecuación por w_0 , se encuentra que

$$v_\phi = \pm c, \quad v_r = \pm \sqrt{[2(w_0 - w) - c^2]}.$$

En esta solución, la componente de la velocidad v_ϕ perpendicular al radio vector es igual a la velocidad local del sonido en todo punto. La velocidad total $v = \sqrt{(v_\phi^2 + v_r^2)}$ supera, por tanto, a la del sonido. En distintos puntos son diferentes tanto el módulo como la dirección de la velocidad. Puesto que la velocidad del sonido no puede anularse, es evidente que la función $v_\phi(\phi)$, que es continua, debe valer en todo punto $+c$, o bien en todo punto $-c$. Midiendo el ángulo ϕ en la dirección apropiada, podemos tomar $v_\phi = c$. Veremos a continuación que la selección del signo de v_r se obtiene a partir de consideraciones físicas y que el signo más debe ser el elegido. Así pues,

$$v_\phi = c, \quad v_r = \sqrt{[2(w_0 - w) - c^2]}. \quad (101.8)$$

A partir de la ecuación de continuidad (101.4) tenemos $d\phi = -d(\rho v_\phi)/\rho v_r$. Sustituyendo (101.8) e integrando, tenemos

$$\phi = - \int \frac{d(\rho c)}{\rho \sqrt{[2(w_0 - w) - c^2]}}. \quad (101.9)$$

Si se conoce la ecuación de estado del gas y la ecuación de la adiabática (recordemos que s es constante) puede utilizarse esta fórmula para determinar todas las magnitudes como funciones del ángulo ϕ . Así pues, las fórmulas (101.8) y (101.9) determinan por completo el flujo del gas.

Estudiemos a continuación con más detalle la solución que hemos obtenido. En primer lugar, observemos que las líneas rectas $\phi = \text{constante}$,

cortan a las líneas de corriente en todo punto, formando el ángulo de Mach (cuyo seno es $v_\phi/v = c/v$), es decir, son características. Así pues, una familia de características (en el plano xy) es un haz de líneas rectas a través del punto singular y tiene una propiedad importante en este caso: todas las magnitudes son constantes a lo largo de cada característica. En este aspecto la solución que nos ocupa juega la misma parte en la teoría del flujo bidimensional estacionario que lo hacía el flujo de semejanza estudiado en § 92 en la teoría del flujo monodimensional no estacionario. Volveremos a este punto en § 107.

Se ve a partir de (101.9) que $(\rho c)' < 0$, designando con el símbolo prima la derivación respecto a ϕ . Haciendo $(\rho c)' = \rho' d(\rho c)/d\rho$ y observando que la derivada $d(\rho c)/d\rho$ es positiva [ver 92.9)], vemos que $\rho' < 0$, y, por lo tanto, también son negativas las derivadas $p' = c^2\rho'$ y $w' = p'/\rho$. A continuación, y teniendo en cuenta que w' es negativo, se deduce que la velocidad $v = \sqrt{[2(w_0 - w)]}$ aumenta con ϕ . Finalmente, a partir de (101.7), $\chi' > 0$. Así pues, tenemos

$$dp/d\phi < 0, \quad d\rho/d\phi < 0, \quad dv/d\phi > 0, \quad d\chi/d\phi > 0. \quad (101.10)$$

En otras palabras, cuando rodeamos el punto singular en la dirección del flujo, disminuyen la densidad y la presión, mientras que el módulo de la velocidad aumenta y su dirección gira en la dirección del flujo.

El flujo que acabamos de describir se suele denominar *onda de rarefacción*, y utilizaremos este nombre en lo que sigue.

Es fácil ver que una onda de rarefacción no puede existir en toda la región que rodea el punto singular. Efectivamente, puesto que v aumenta monótonamente con ϕ , un circuito completo alrededor del origen (es decir, una variación de ϕ en 2π) daría un valor de v diferente del valor inicial, lo cual es imposible. Por esta razón, el esquema real del flujo alrededor de una línea singular debe estar compuesto por una serie de sectores separados por planos $\phi = \text{constante}$, que son superficies de discontinuidad. En cada una de estas regiones tenemos una onda de rarefacción o un flujo con velocidad constante. El número y naturaleza de estas regiones para los diversos casos particulares se establecerá en las secciones siguientes. Aquí mencionaremos simplemente que el límite entre una onda de rarefacción y un flujo uniforme debe ser una discontinuidad débil: no puede ser una discontinuidad tangencial (de v_r), puesto que la componente de velocidad normal $v_\phi = c$ no se anula en ella. Ni puede ser una onda de choque, puesto que la componente de velocidad normal v_ϕ debe ser mayor que la velocidad del sonido en un lado de dicha discontinuidad y menor en el otro, mientras que en nuestro problema siempre tenemos $v_\phi = c$ sobre cada lado del límite.

De lo anterior puede obtenerse una importante conclusión. Las perturbaciones que producen discontinuidades débiles evidentemente abandonan

la línea singular (eje z) y se propagan alejándose de ella. Esto significa que las discontinuidades débiles que limitan la onda de rarefacción deben ser aquellas que abandonan esta línea, es decir, aquéllas cuya componente de velocidad v_r , tangencial a la discontinuidad débil sea positiva. Esto justifica la selección del signo de v_r , hecha en (101.8).

Apliquemos a continuación estas fórmulas a un gas perfecto. En dicho gas $w = c^2/(\gamma - 1)$, mientras que la ecuación de la adiabática de Poisson puede escribirse en la forma

$$\rho c^{-2/(\gamma-1)} = \text{constante}, \quad \rho c^{-2\gamma/(\gamma-1)} = \text{constante}; \quad (101.11)$$

ver (92.13). Utilizando estas fórmulas podemos escribir la integral (101.9) en la forma

$$\phi = - \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \int \frac{dc}{\sqrt{(c_*^2 - c^2)}},$$

siendo c_* la velocidad crítica [ver (80.14)]. De aquí

$$\phi = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cos^{-1} \frac{c}{c_*} + \text{constante},$$

o bien, si medimos ϕ de modo tal que la constante es cero,

$$v_\phi = c = c_* \cos \sqrt{[(\gamma-1)/(\gamma+1)]} \phi. \quad (101.12)$$

Por tanto, de acuerdo con la fórmula (101.8), tenemos

$$v_r = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} c_* \sin \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \phi. \quad (101.13)$$

A continuación, utilizando la ecuación adiabática de Poisson en la forma (101.11), podemos hallar la presión del ángulo ϕ :

$$p = p_* \cos^{2\gamma/(\gamma-1)} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \phi. \quad (101.14)$$

Finalmente, tenemos para el ángulo χ (101.6)

$$\chi = \phi + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \cot \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \phi \right), \quad (101.15)$$

midiéndose los ángulos χ y ϕ a partir de la misma línea inicial.

Puesto que debemos tener $v_r < 0$, $c > 0$, el ángulo ϕ en estas fórmulas puede variar únicamente entre 0 y ϕ_{\max} , siendo

$$\phi_{\max} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{[(\gamma+1)/(\gamma-1)]}. \quad (101.16)$$

Esto significa que la onda de rarefacción puede ocupar un sector cuyo ángulo no supere a ϕ_{\max} ; en el caso de un gas diatómico (el aire, por ejemplo), este ángulo es $219,3^\circ$. Cuando ϕ varía desde 0 hasta ϕ_{\max} , el ángulo χ varía desde $\pi/2$ hasta ϕ_{\max} . Así pues, la dirección de la velocidad de la onda de rarefacción puede girar un ángulo que no supere a $\phi_{\max} - \pi/2$ ($= 129,3^\circ$ en el caso del aire).

Cuando $\phi = \phi_{\max}$, la presión es cero. En otras palabras, si la onda de rarefacción ocupa el ángulo máximo, la discontinuidad débil en un lado constituye un límite con el vacío y, como es natural, constituye una línea de corriente; tenemos $v_\phi = c = 0$, $v_r = v = \sqrt{[(\gamma+1)/(\gamma-1)]}c_* = v_{\max}$, es decir, la velocidad es radial y alcanza su valor máximo límite v_{\max} (ver § 80).

La figura 80 muestra los gráficos de p/p_* , c_*/v y χ en función del ángulo ϕ para el caso del aire ($\gamma = 1,4$).

Es interesante señalar la forma de la curva en el plano $v_x v_y$ definida por las fórmulas (101.12) y (101.13) (denominada *hodógrafa de velocidades*). Es un arco de una epícloide entre las circunferencias de radio $v = c_*$ y $v = c_*\sqrt{[(\gamma+1)/(\gamma-1)]} = v_{\max}$ (figura 81).

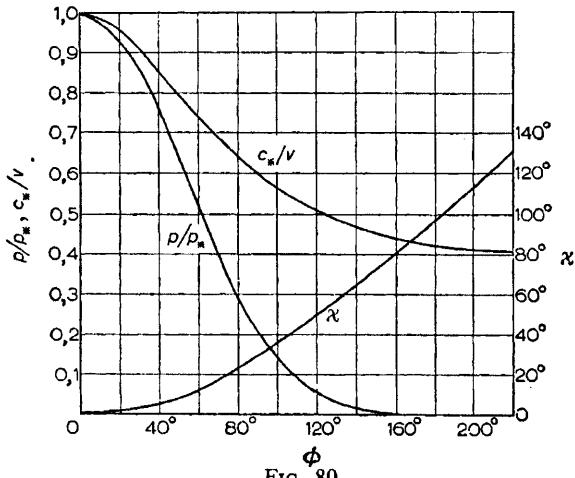


FIG. 80

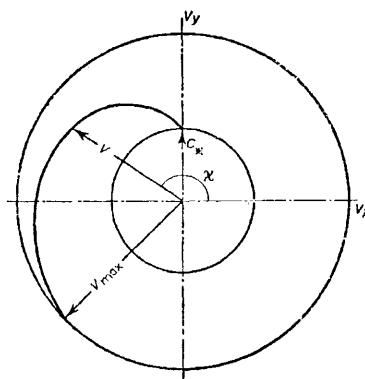


FIG. 81

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la forma de las líneas de corriente en una onda de rarefacción.

Solución. La ecuación de las líneas de corriente en el caso de un flujo bidimensional es, en coordenadas polares, $dr/v_r = r d\phi/v_\phi$. Sustituyendo (101.12) y (101.13) e integrando, obtenemos

$$r = r_0 \cos^{-(\gamma+1)/(\gamma-1)} \sqrt{[(\gamma-1)/(\gamma+1)]} \phi.$$

Estas líneas de corriente forman una familia de curvas semejantes con la concavidad hacia el origen que es el centro de semejanza.

Problema 2. Determinar el ángulo máximo posible entre las discontinuidades débiles que limitan una onda de rarefacción para valores dados v_1 , c_1 de la velocidad del gas y la velocidad del sonido en una discontinuidad.

Solución. El ángulo ϕ correspondiente a la primera discontinuidad es, según (101.12),

$$\phi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arccos \frac{c_1}{c_*}.$$

El valor de ϕ_2 es ϕ_{\max} , de modo que el ángulo buscado es

$$\phi_2 - \phi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arcsen \frac{c_1}{c_*}.$$

La velocidad crítica c_* viene dada en función de v_1 y c_1 por la ecuación de Bernouilli:

$$w_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{c_1^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} c_*^2.$$

El ángulo máximo posible a través del cual puede girar la velocidad del gas en una onda de rarefacción es, de acuerdo con (101.15), la diferencia $\chi_{\max} = \chi(\phi_1) - \chi(\phi_2)$:

$$\chi_{\max} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arcsen \frac{c_1}{c_*} - \arcsen \frac{c_1}{v_1}.$$

Por ser una función de v_1/c_1 , χ_{\max} es máximo para $v_1/c_1 = 1$:

$$\chi_{\max} = \frac{1}{2}\pi \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right).$$

Para $v_1/c_1 \rightarrow \infty$, χ_{\max} tiende a cero.

$$\chi_{\max} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{c_1}{v_1}.$$

§ 102. Intersección de las ondas de choque

Las ondas de choque pueden cortarse a lo largo de una línea. Al considerar el flujo cerca de un segmento pequeño de esta línea, podemos admitir que es una línea recta y que las superficies de discontinuidad son planas. Por tanto, es suficiente estudiar la intersección de ondas de choque planas.

La línea de intersección de dos continuidades es matemáticamente una línea singular, como ya se ha mencionado al principio del § 101. El esquema del flujo cerca de esta línea se compone de un cierto número de sectores, en cada uno de los cuales tenemos un flujo uniforme o una onda de rarefacción del tipo descrito en § 101. Es posible dar una clasificación general de los tipos posibles de intersección de las superficies de discontinuidad (L. LANDAU, 1944).

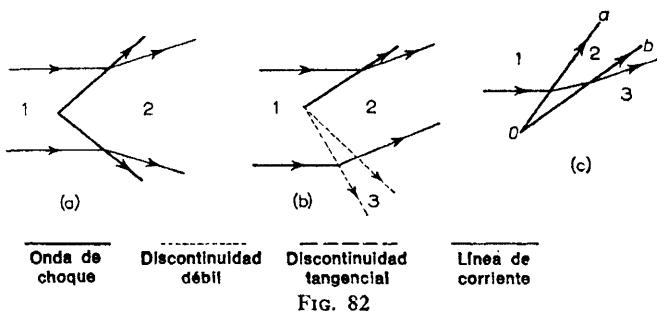
En primer lugar, debemos hacer la siguiente aclaración. Si el flujo del gas en ambos lados de la onda de choque es supersónico, entonces (como se mencionó al principio del § 86) podemos hablar del «sentido» de la onda de choque y de acuerdo con ello distinguir las ondas de choque que abandonan la línea de intersección de aquellas que se mueven hacia la misma. En el primer caso la componente de velocidad tangencial se aleja de la línea de intersección y podemos decir que las perturbaciones que produce la discontinuidad abandonan esta línea. En el segundo caso las perturbaciones salen de un punto que no está situado en la línea de intersección.

Si el flujo en un lado de la onda de choque es subsónico, entonces las perturbaciones se propagan en ambos sentidos a lo largo de su superficie y el «sentido» del choque no tiene, estrictamente hablando, ningún significado. Sin embargo, en los razonamientos que veremos a continuación, lo que tiene importancia es que las perturbaciones que salen del punto de intersección puedan propagarse a lo largo de dicha discontinuidad. En este sen-

tido, dichas ondas de choque juegan el mismo papel en el estudio siguiente que los choques puramente supersónicos que abandonan la intersección, e incluiremos ambos tipos en el término «choques que salen de la intersección».

Las figuras 82-86 muestran los esquemas del flujo en un plano perpendicular a la línea de intersección. Podemos admitir, sin pérdida de generalidad, que el flujo se produce en este plano. La componente de velocidad paralela a la línea de intersección (y , por tanto, a todos los planos de discontinuidad) debe ser la misma en todas las regiones que rodean la línea de intersección y, por tanto, podemos hacer que se anule mediante una selección apropiada de sistema de coordenadas.

Es fácil ver que no puede existir ninguna intersección de las ondas de choque en la que no exista ningún choque que alcance la intersección. Por ejemplo, en la intersección de dos ondas de choque que salen de la intersección, indicada en la figura 82a, las líneas de corriente del flujo incidente procedentes de la izquierda se desviarán en sentidos opuestos, mientras que la velocidad debería ser constante a través de la región 2 y esta dificultad no puede superarse añadiendo alguna otra discontinuidad adicional en la región 2.[†] Análogamente, podemos ver que la intersección de una onda de choque y de una onda de rarefacción, en la que ambas abandonan la intersección como se ve en la figura 82b, es imposible; aunque la velocidad en la región 2 puede tener una dirección constante, la presión no puede ser constante, puesto que aumenta en una onda de choque, mientras que disminuye en una onda de rarefacción.



A continuación, puesto que la intersección no puede influir en las ondas de choque que llegan a ella, la intersección simultánea (a lo largo de una línea común) de más de dos ondas de este tipo, que se deban a otras cau-

[†] Con objeto de no complicar la discusión con argumentos repetitivos, no haremos ninguna consideración semejante para aquellos casos en donde existen regiones de flujo subsónico y el choque que emerge de la intersección es realmente una onda de choque limitada por una región subsónica.

sas, sería una coincidencia muy poco probable. Así pues, sólo una o dos ondas de choque pueden llegar a la intersección.

El hecho siguiente es muy importante. El gas que fluye alrededor de un punto de intersección solamente puede atravesar una onda de choque o una onda de rarefacción que salga de este punto. Por ejemplo, supongamos que el gas se hace pasar a través de dos ondas de choque sucesivas que salen del punto O , como se ve en la figura 82c. Puesto que la componente de velocidad normal v_{2n} detrás del choque OA es menor que c_2 , la componente de velocidad en la región 2 normal al choque OB debe ser también menor que c_2 , en contradicción con una propiedad fundamental de las ondas de choque. Análogamente, podemos ver que el gas no puede pasar a través de dos ondas de rarefacción sucesivas, ni de una onda de choque y una onda de rarefacción que salgan del punto O .

Evidentemente estos razonamientos no pueden ampliarse a las ondas de choque que llegan al punto de intersección.

Ahora podemos continuar enumerando los tipos posibles de intersección. La figura 83 muestra una intersección en la que intervienen una onda de choque OA que llega a la misma y dos ondas de choque, OB , OC , que salen de ella. Este caso puede considerarse como la descomposición o división de una onda de choque en otras dos.[†] Es fácil ver que además de las dos ondas de choque que salen, debe estar formándose una discontinuidad tangencial OD comprendida entre ellas, que separa el gas que fluye a través de OB del que fluye a través de OC .[‡] Efectivamente, el choque OA se debe a otras causas y está, por tanto, totalmente definido. Esto significa que las magnitudes termodinámicas (p y ρ , por ejemplo) y la velocidad v tienen valores dados en las regiones 1 y 2. Por tanto, permanecen a nuestra disposición sólo dos magnitudes (los ángulos que dan las direcciones de las discontinuidades OB y OC), con lo que se satisfacen, en general, cuatro condiciones (la constancia de p , ρ y las dos componentes de velocidades) en la región 3-4, que deberían haberse satisfecho en ausencia de la discontinuidad tangencial OD . No obstante, la adición de esta última reduce el número de condiciones a dos (la constancia de la presión y la constancia de la dirección de la velocidad).

Sin embargo, una onda de choque arbitraria no puede dividirse de esta manera. Una onda de choque que llegue a la intersección está definida por dos parámetros (para un estado termodinámico dado del gas 1), por ejemplo, el número de Mach M_1 de la corriente incidente y el cociente de presio-

[†] Debe señalarse que una onda de choque no puede dividirse en una onda de choque y otra de rarefacción; se ve fácilmente que no pueden reconciliarse las variaciones de presión y la dirección de las velocidades de las ondas.

[‡] Como es normal, la discontinuidad tangencial se transforma en realidad en una región turbulenta.

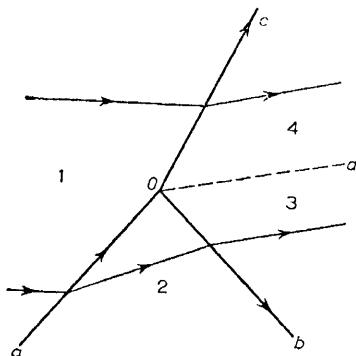


FIG. 83

nes p_1/p_2 . Solamente en una cierta región dentro del plano de estos dos parámetros puede producirse la ramificación.[†]

Las intersecciones en las que intervienen dos ondas de choque que llegan a encontrarse pueden considerarse como «colisiones» de dos choques debidas a otras causas. Aquí existen dos casos esencialmente distintos, como se ve en la figura 84.

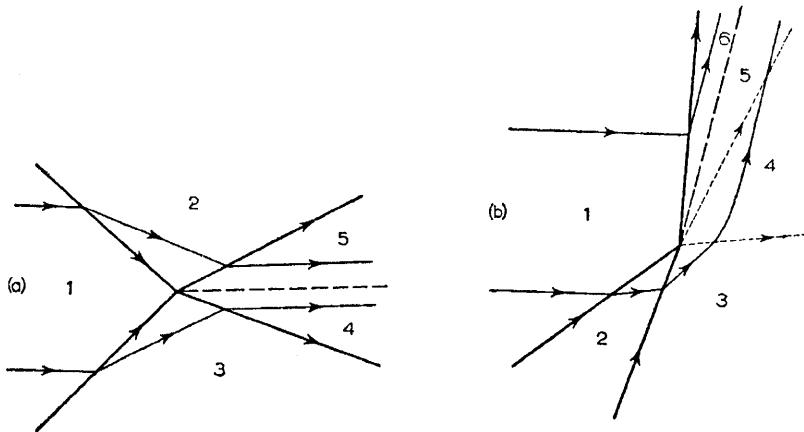


FIG. 84

[†] La determinación de esta región exige cálculos algebraicos muy laboriosos. Los resultados que se han publicado (ver, por ejemplo, R. COURANT y K. O. FRIEDRICH, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience, New York, 1948), se ven invalidados desgraciadamente por el hecho de que no hacen distinción entre ondas de choque que salen o llegan a la intersección. Por consiguiente, entre las configuraciones ternarias se incluyen también aquellas en las que dos ondas llegan a la intersección y sólo una sale de la misma. Sin embargo, este es el caso de intersección de dos choques debidos a causas diferentes y que alcanzan el punto de intersección con valores dados de todos los parámetros. Su «fusión» en un choque es posible sólo cuando estos parámetros arbitrarios están relacionados en cierto modo y esto resulta una coincidencia improbable.

En el primer caso, la colisión de las dos ondas de choque da como resultado otras dos ondas de choque que salen del punto de intersección. Si han de cumplirse todas las condiciones necesarias, debe formarse de nuevo una discontinuidad tangencial y debe estar entre las dos ondas de choque resultantes.

En el segundo caso, en lugar de dos ondas de choque, se forma una onda de choque y una onda de rarefacción.

Dos ondas de choque en colisión se definen mediante tres parámetros (por ejemplo, M_1 y los cocientes p_1/p_2 , p_1/p_3). Los tipos de intersección que acabamos de describir son posibles únicamente para ciertos márgenes de valores de estos parámetros. Si los valores de los parámetros no caen dentro de estas regiones, la colisión de las ondas de choque debe estar precedida por su ruptura y ramificación.

La figura 85 representa la reflexión de una onda de choque procedente del límite entre un gas en movimiento y un gas en reposo. La región 5 contiene gas en reposo separado del gas en movimiento mediante una discontinuidad tangencial. En las dos regiones 1 y 4 adyacentes a la misma, la presión debe ser la misma e igual a p_5 . Puesto que la presión aumenta en una onda de choque, es evidente que la onda de choque debe reflejarse en la discontinuidad tangencial con una onda de rarefacción 3, lo cual reduce la presión a su valor inicial.

Finalmente, estudiaremos brevemente la intersección de una onda de choque con una discontinuidad débil que llega procedente de una fuente externa. Aquí pueden presentarse dos casos, de acuerdo con que el flujo detrás de la onda de choque sea supersónico o subsónico. En el primer caso (figura 86a), la discontinuidad débil se ve «refractada» en la onda de choque en el espacio detrás de esta última; el propio choque no se ve refractado en la intersección, pero tiene una singularidad de orden superior, como el correspondiente a una discontinuidad débil. Además, la variación de entropía en la onda de choque debe producir detrás de ella una «discontinuidad tangencial débil», en la cual sean discontinuas las derivadas de la entropía.

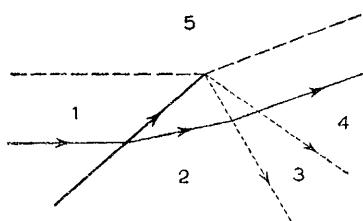


FIG. 85

Sin embargo, si el flujo se hace subsónico detrás de la onda de choque, la discontinuidad débil no puede penetrar dentro de esta región y cesa en el punto de intersección (figura 86b). Este último es ahora un punto singular; puede demostrarse que la distribución de velocidades detrás de la onda de choque tiene una singularidad logarítmica en este punto. Además, como en el caso anterior, debe presentarse una discontinuidad tangencial débil de la entropía detrás de la onda de choque.[†]

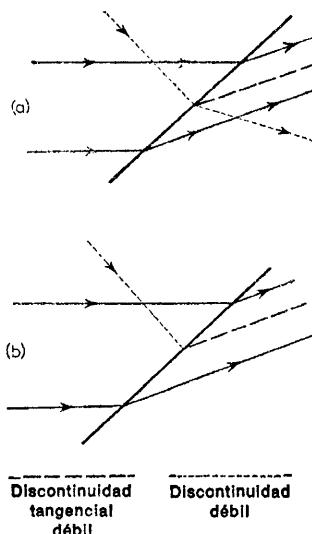


FIG. 86

§ 103. Intersección de ondas de choque con una superficie sólida

Una parte importante del fenómeno de la intersección estacionaria de ondas de choque con la superficie de un cuerpo está constituida por su interacción con la capa límite. Esta interacción es muy compleja y no ha sido suficientemente investigada experimental ni teóricamente. Sin embargo, algunos razonamientos generales simples nos permiten obtener ciertos resultados importantes que ahora expondremos.[‡]

[†] Un análisis detallado cualitativo y cuantitativo de los posibles tipos de intersección de las ondas de choque con las discontinuidades débiles ha sido dado por S. P. D'yAKOV, *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, 33, 948, 962, 1957; *Soviet Physics JETP*, 6 (33), 729, 739, 1958; *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 99, 921, 1954.

[‡] La capa límite contiene necesariamente una parte subsónica adjunta a la superficie, en la que no puede penetrar la onda de choque. Al hablar de la intersección, ignoramos este hecho, que no influye en el estudio siguiente.

La presión es discontinua en una onda de choque y aumenta en el sentido del movimiento del gas. De aquí que, si la onda de choque intersecta a la superficie, debe existir un incremento finito de presión en una distancia muy corta cerca del lugar de la intersección, es decir, debe aparecer un gradiente de presiones positivo muy grande. Sin embargo, sabemos que dicho incremento rápido de presión no puede producirse cerca de una pared sólida (ver el final del § 40); entonces se produciría la separación y el esquema del flujo alrededor del cuerpo se modifica de tal modo que la onda de choque se mueve, alejándose a una distancia suficiente de la superficie.

Sin embargo, estos razonamientos no se aplican cuando la onda de choque es débil. Es evidente, a partir de la prueba dada al final del § 40, que la imposibilidad de discontinuidad de presión positiva en la capa límite es una consecuencia de la hipótesis de que esta discontinuidad es grande: debe superar un cierto límite, que depende del valor de R , el cual disminuye cuando R aumenta.[‡]

Así pues, se obtienen las siguientes conclusiones importantes. Es imposible la intersección estacionaria de ondas de choques intensas con una superficie sólida. Una superficie sólida puede cortar sólo a ondas de choque débiles y la intensidad límite es tanto menor cuanto mayor sea R . La intensidad máxima permisible de la onda de choque depende también de si la capa límite es laminar o turbulenta. Si la capa límite es turbulenta, se retarda el establecimiento de la separación (§ 45). Por tanto, en una capa límite turbulenta, pueden salir de la superficie del cuerpo unas ondas de choque más intensas que si la capa límite fuese laminar.^{††}

Para evitar malas interpretaciones debe resaltarse que estos razonamientos cuentan con el hecho de que la capa límite existe delante de la onda de choque (es decir, aguas arriba de la misma). Por tanto, los resultados obtenidos se relacionan en particular con ondas de choque que salen del borde de atrás, pero no con aquéllas que salen del borde delantero del cuerpo; esto último puede producirse, por ejemplo, en el flujo que rodea una cuña de ángulo muy agudo que se estudia con detalle en § 104. En este último caso el gas llega al vértice del ángulo desde el exterior, es decir, desde una región en la que no existe ninguna capa límite. Por lo tanto, resulta claro que los razonamientos presentes no niegan que puedan producirse ondas de choque que salgan del vértice de dicho ángulo.

[‡] En § 40, problema, hemos determinado la menor variación de presión Δp en una distancia Δx que puede producir separación en una capa límite laminar. En la aplicación presente, nos interesa la variación de presión en una distancia del orden del espesor δ de la capa límite y se obtiene la ley siguiente que rige la disminución de Δp cuando aumenta el número de Reynolds:

$$\Delta p/p \sim 1/R_x^{\frac{1}{2}} \sim 1/R_{\delta}^{\frac{1}{2}}.$$

^{††} Los datos publicados existentes no nos permiten especificar la intensidad máxima permisible.

En el flujo subsónico puede producirse la separación únicamente cuando la presión en la corriente principal aumenta aguas abajo a lo largo de la superficie. Sin embargo, en el flujo supersónico se encuentra que puede producirse la separación, aun cuando la presión disminuya aguas abajo. Dicho fenómeno puede producirse por la combinación de una onda de choque débil con una separación, teniendo lugar en la onda de choque el aumento de presión necesario para la separación; la presión puede aumentar o bien disminuir aguas abajo en la región delante de la onda de choque.

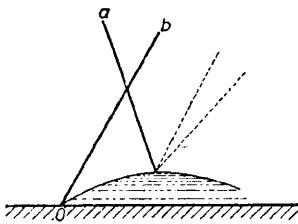


FIG. 87

Los datos existentes hasta el presente no nos permiten dar una descripción detallada de los fenómenos complejos que intervienen en la «reflexión» de una onda de choque procedente de la parte subsónica de una capa límite (o procedente de la región turbulenta más allá de la línea de separación). En estos fenómenos debe jugar una parte importante el hecho de que las perturbaciones debidas a la onda de choque puedan propagarse tanto aguas arriba como aguas abajo a través de la parte subsónica de la capa límite y pueden producir discontinuidades adicionales en ella. En particular, la formación de otra onda de choque débil aguas arriba puede dar como resultado la separación, que «desplace» una onda de choque fuerte incidente sobre la superficie desde el exterior. En la figura 87, la línea *a* es la onda de choque incidente, y la *b* la onda de choque formada aguas arriba que produce la separación en el punto *O*. Cuando el choque incidente se «refleja» a partir de la parte subsónica de la región turbulenta, es de esperar, en particular, que se forme una onda de rarefacción.

Todo el estudio anterior se relaciona únicamente con una intersección estacionaria, estando la onda de choque y el cuerpo en reposo relativo. Consideremos a continuación intersecciones no estacionarias cuando una onda de choque móvil está incidiendo sobre un cuerpo sólido, de modo que las líneas de intersección se mueven en la superficie. Dicha intersección está acompañada por la reflexión de la onda de choque: además de la onda incidente, se forma una onda reflejada que abandona el cuerpo.

Examinaremos el fenómeno en un sistema de coordenadas que se mueve con la línea de intersección; en este sistema las ondas de choque son esta-

cionarias. El tipo más sencillo de reflexión se produce cuando la onda reflejada abandona la propia línea de intersección; esto se denomina una reflexión *regular* (figura 88). Si se dan el ángulo de incidencia α_1 y la intensidad del choque incidente, el flujo en la región 2 está únicamente determinado. La velocidad del gas en el choque reflejado debe girar formando un ángulo tal que resulte de nuevo paralela a la superficie. Cuando se da este ángulo, la posición e intensidad del choque reflejado se obtiene a partir de la ecuación de la polar del choque. En el caso de un ángulo dado la polar determina dos ondas de choque distintas, que son las correspondientes a las familias débil e intensa (§ 86). Los resultados experimentales muestran que, de hecho, el choque reflejado siempre pertenece a la familia débil y admitiremos esto en lo que sigue. Debe señalarse que, cuando la intensidad de la onda de choque incidente tiende a cero, la intensidad del choque reflejado tiende también a cero, y el ángulo de reflexión α_2 tiende al ángulo de incidencia α_1 , como sería de esperar de acuerdo con la aproximación acústica. En el límite $\alpha_1 \rightarrow 0$, el choque reflejado de la familia débil pasa continuamente hacia el interior del choque obtenido cuando una onda de choque está incidiendo «frontalmente» (§ 93, problema 1).

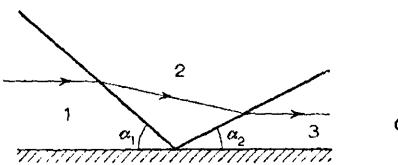


FIG. 88

Los cálculos matemáticos para la reflexión regular (en un gas perfecto) no ofrecen ninguna dificultad en principio, pero los detalles algebraicos son extremadamente laboriosos. Daremos aquí algunos de sus resultados.[†]

Es evidente, a partir de las propiedades generales de la polar del choque, que no es posible la reflexión regular en el caso de valores arbitrarios de los parámetros de la onda incidente (el ángulo de incidencia α_1 y el cociente p_2/p_1). Para un cociente dado p_2/p_1 existe un ángulo máximo posible α_{1k} ,[‡] y cuando $\alpha_1 > \alpha_{1k}$ es imposible la reflexión regular. Cuando $p_2/p_1 \rightarrow \infty$, el ángulo máxi-

[†] Una descripción más detallada de la reflexión de las ondas de choque viene dada por R. COURANT y K. O. FRIEDRICH, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience, New York, 1948, y por W. BLEAKNEY y A. H. TAUB, *Reviews of Modern Physics*, 21, 584, 1949.

La solución de problemas complejos relativos a la reflexión regular de una onda de choque con incidencia casi normal en el vértice de un ángulo próximo a 180° y la difracción de una onda de choque con incidencia rasante en el vértice de un ángulo semejante, ha sido dada por M. J. LIGHTHILL (*Proceedings of the Royal Society*, A198, 454, 1949; 200, 554, 1950).

[‡] Este valor es el del ángulo de incidencia para el cual coinciden los choques reflejados débil e intenso.

mo tiende a $\arcsen(1/\gamma)$ ($= 40^\circ$ para el aire). Cuando $p_2/p_1 \rightarrow 1$, α_{lk} tiende hacia 90° , es decir, es posible la reflexión regular para cualquier ángulo de incidencia. La figura 89 muestra α_{lk} en función de p_1/p_2 en el caso del aire.

El ángulo de reflexión α_2 no es, en general, el mismo que el ángulo de incidencia. Existe un valor α_* del ángulo de incidencia tal que, si $\alpha_1 < \alpha_*$, el ángulo de reflexión $\alpha_2 < \alpha_1$; si $\alpha_1 > \alpha_*$, por otra parte, $\alpha_2 > \alpha_1$. El valor de α_* es $1/2 \arccos [(\gamma - 1)/2]$ ($= 39,2^\circ$ para el aire); no depende de la intensidad de la onda incidente.

Cuando $\alpha_1 > \alpha_{lk}$ es imposible la reflexión regular y la onda de choque incidente debe romperse a una distancia de la superficie, de modo que tenemos el esquema indicado en la figura 90, con tres ondas de choque y una discontinuidad tangencial que sale del punto en donde la onda de choque incidente se divide o ramifica.

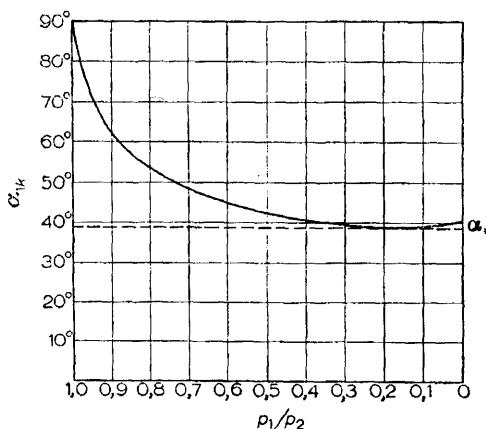


FIG. 89

§ 104. Flujo supersónico alrededor de un ángulo

Al estudiar el flujo cerca del vértice de un ángulo que existe en la superficie, es suficiente de nuevo considerar pequeñas porciones del vértice y suponer que el ángulo lo forman dos planos y que la arista es recta. Hablaremos de flujo exterior a un ángulo si el ángulo es mayor que π , y de flujo interior a un ángulo si es menor que π .

El flujo subsónico que rodea a un ángulo no es, en esencia, diferente del flujo de un fluido incompresible. Sin embargo, el flujo supersónico es totalmente distinto; una propiedad importante del mismo es la presencia de discontinuidades que salen del vértice del ángulo.

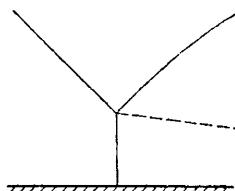


FIG. 90

Consideremos, en primer lugar, los esquemas de flujo posibles cuando una corriente de gas supersónico alcanza el vértice a lo largo de una de las caras del ángulo. De acuerdo con las propiedades generales del flujo supersónico, la corriente permanece uniforme hasta el vértice. Al desviarse la corriente hacia la dirección paralela al otro lado del ángulo se produce una onda de rarefacción que sale del vértice y el esquema de flujo se compone de tres regiones separadas por discontinuidades débiles (*Oa* y *Ob* en la figura 91): la corriente gaseosa uniforme que se mueve a lo largo del lado *AO* se convierte en una onda de rarefacción 2 y luego se mueve de nuevo con velocidad constante a lo largo del otro lado del ángulo. Debe señalarse que no se forma ninguna región turbulenta; por otra parte, en un flujo semejante de un fluido incompresible debe formarse una región turbulenta, con una línea de separación en el vértice del ángulo (figura 16, § 35).

Sea v_1 la velocidad de la corriente incidente (1 en la figura 91), y c_1 la velocidad del sonido en ella. La posición de la discontinuidad débil *Oa* se determina inmediatamente a partir del número de Mach $M_1 = v_1/c_1$ por la condición de que corta las líneas de corriente en el ángulo de Mach. Las variaciones de velocidad y presión en la onda de rarefacción están determinadas por las fórmulas (101.12)-(101.15); todo lo que se necesita es la dirección a partir de la cual ha de medirse el ángulo ϕ en estas fórmulas. La línea recta $\phi = 0$ corresponde a $v = c = c_*$; para $M_1 > 1$ no existe de hecho tal línea, puesto que $v/c > 1$ en todos los puntos. Sin embargo, si imaginamos que la onda de rarefacción se extiende formalmente dentro de la región a la izquierda de *Oa*, podemos utilizar la fórmula (101.12), y hallaremos que la discontinuidad *Oa* debe corresponder a un valor de ϕ dado por

$$\phi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arccos \frac{c_1}{c_*},$$

y que ϕ debe crecer desde *Oa* a *Ob*. La posición de la discontinuidad *Ob* está determinada por el hecho de que la dirección de la velocidad resulta paralela al lado *OB* del ángulo.

El ángulo a través del cual la corriente gira en la onda de rarefacción no puede superar al valor χ_{\max} determinado en § 101, problema 2. Si el án-

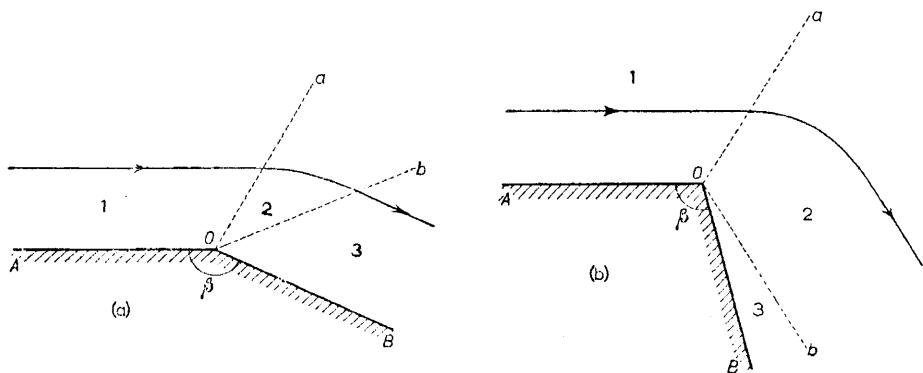


FIG. 91

gulo β alrededor del cual se produce el flujo es menor que $\pi - \chi_{\max}$, la onda de rarefacción no puede hacer girar la corriente el ángulo necesario y tenemos el esquema de flujo indicado en la figura 91b. La rarefacción en la onda 2 procede entonces hasta alcanzar el valor cero de presión (alcanzada en la línea Ob), de modo que la onda de rarefacción se separa de la pared a través de una región vacía (región 3).

Sin embargo, el esquema de flujo descrito anteriormente no es el único posible. Las figuras 92 y 93 muestran esquemas en los que una región de gas en reposo está junto a la segunda cara del ángulo y a su vez esta región está separada del gas móvil por una discontinuidad tangencial; como es normal, ésta se transforma en región turbulenta, de modo que el caso considerado corresponde a la presencia de separación.[†] La rotación de la corriente en un cierto ángulo se opera en la onda de rarefacción (figura 92) o en la onda

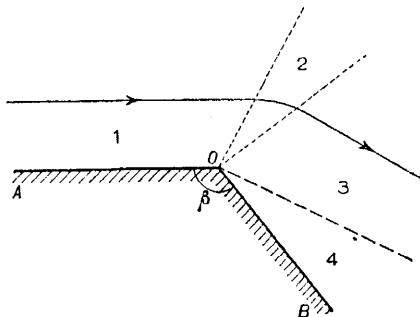


FIG. 92

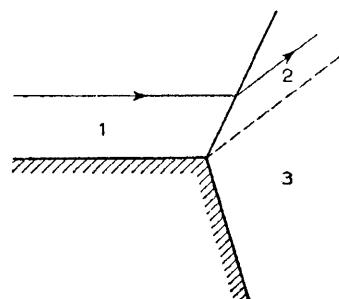


FIG. 93

[†] De acuerdo con los resultados experimentales, la compresibilidad del gas disminuye un poco el ángulo de la región turbulenta que se obtiene como resultado de la discontinuidad tangencial.

de choque (figura 93). Sin embargo, el último caso es posible únicamente si la onda de choque no es demasiado intensa (de acuerdo con las consideraciones generales dadas en § 103).

Las condiciones lejos del ángulo son las que determinan cuál de estos esquemas de flujo se producirá en un caso particular. Por ejemplo, cuando el gas fluye saliendo de una tobera (estando el vértice del ángulo en el borde de salida), la relación entre la presión p_1 del gas que sale y la presión p_e del medio externo tiene importancia. Si $p_e < p_1$, el flujo es del tipo indicado en la figura 92; la posición y ángulo de la onda de rarefacción están entonces determinados por la condición de que la presión en las regiones 3 y 4 es igual a p_e . Cuanto menor es p_e , mayor es el ángulo a través del cual debe hacerse girar la corriente. Sin embargo, si el ángulo β (figura 92) es grande, la presión del gas no puede alcanzar el valor requerido p_e ; la dirección de la velocidad se hace paralela a la cara OB del ángulo antes de que la presión disminuya hasta p_e . El flujo, cerca de la cara exterior o de la salida, será entonces como se indica en la figura 90. La presión cerca de la cara exterior OB de la salida está totalmente determinado por el ángulo β y no depende de la presión p_e ; la disminución final de la presión hasta p_e se produce sólo a una distancia determinada de la salida.

Si $p_e > p_1$, por otra parte, el flujo que rodea el borde de la salida es del tipo indicado en la figura 93, con una onda de choque que abandona el borde y eleva la presión desde p_1 hasta p_e . Sin embargo, esto es posible únicamente si la diferencia entre p_e y p_1 no es demasiado grande, es decir, si la onda de choque no es demasiado intensa; en otro caso existe una separación en la superficie interior de la tobera y la onda de choque se mueve dentro de la misma del modo descrito en § 90.

A continuación, consideraremos el flujo en el interior de un ángulo. En el caso subsónico dicho flujo está acompañado por la separación en un punto más adelante del vértice (ver el final del § 40). Sin embargo, en el caso de un flujo incidente supersónico, la variación de dirección puede efectuarse por una onda de choque que abandona el vértice (figura 94). Aquí debemos mencionar de nuevo que dicho esquema de flujo sin separación es posible únicamente si la onda de choque no es demasiado intensa. Su intensidad aumenta con el ángulo χ , a través del cual se hace girar la corriente y, por

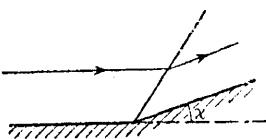


FIG. 94

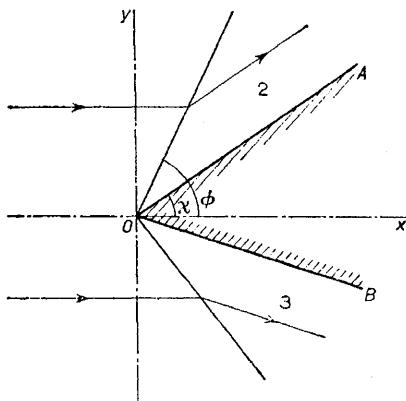


FIG. 95

tanto, podemos decir que el flujo sin separación es posible únicamente cuando χ no es demasiado grande.

Consideremos ahora el esquema de flujo que se obtiene como resultado en el caso de que una corriente supersónica libre incida sobre el vértice de un ángulo (figura 95). La corriente se hace girar en direcciones paralelas a las caras del ángulo por las ondas de choque que salen del vértice. Como se ha demostrado en § 103, éste es el caso excepcional en el que una onda de choque de intensidad arbitraria puede abandonar una superficie sólida.

Si conocemos las velocidades v_1 y c_1 de la corriente incidente, podemos determinar las posiciones de las ondas de choque del flujo del gas en las regiones detrás de ella. La dirección de la velocidad v_2 debe ser paralela a la cara OA : $v_{2y}/v_{2x} = \operatorname{tag} \chi$. Así pues, v_2 y el ángulo ϕ , que da la posición de la onda de choque, pueden determinarse inmediatamente a partir de la polar del choque utilizando una cuerda a través del origen con el ángulo conocido χ respecto al eje de abscisas (figura 50), como se explicó en § 86. Hemos visto que, para un valor de χ dado, la polar del choque da dos ondas de choque diferentes con valores distintos de ϕ . Uno de estos (correspondiente al punto B en la figura 50) es el más débil y, en general, abandona el flujo supersónico; el otro choque más intenso hace que el flujo se vuelva subsonico. En el caso presente de flujo que rodea un ángulo sobre una superficie sólida finita[†] debemos siempre tomar el primero, es decir, el choque débil. Deberá recordarse que esta selección se decide realmente por las condiciones del flujo lejos del ángulo. En el flujo que rodea un ángulo muy

[†] El problema puramente formal del flujo que rodea una cuña formada por la intersección de dos planos infinitos carece de interés físico.

agudo (χ pequeño), la onda de choque resultante debe, evidentemente, ser muy débil. Es natural suponer que cuando aumenta el ángulo, la intensidad del choque aumenta monótonamente; esto corresponde al movimiento a lo largo del arco QC de la polar del choque (figura 50), desde Q hacia C .

Hemos visto en § 86 que el ángulo a través del cual el vector velocidad se hace girar en una onda de choque no puede superar un valor determinado χ_{\max} , que depende de M_1 . El esquema de flujo descrito anteriormente es, por tanto, imposible si uno cualquiera de los lados del ángulo forma un ángulo mayor que χ_{\max} con la dirección de la corriente incidente. En este caso el flujo gaseoso cerca de un ángulo debe ser subsónico; esto se consigue por la aparición de una onda de choque en algún punto delante del ángulo (ver § 114). Puesto que χ_{\max} aumenta monótonamente con M_1 , podemos decir también que para un valor dado del ángulo χ , M_1 para la corriente incidente debe ser mayor que un valor determinado $M_{1,\min}$.

Finalmente, puede señalarse que, si los lados del ángulo se sitúan respecto a la corriente incidente, como se ve en la figura 96, entonces, como es natural, se forma una onda de choque en un lado solo del ángulo; la corriente se hace girar hacia el otro lado por una onda de rarefacción.

PROBLEMA

Determinar la posición e intensidad de la onda de choque en el flujo que rodea un ángulo muy pequeño ($\chi \ll 1$) para valores muy grandes de M_1 ($\gg 1/\chi$).

Solución. Para $\chi \ll 1$, la polar del choque da dos valores de ϕ , uno próximo a cero y el otro próximo a $\pi/2$. El choque débil que buscamos corresponde al primer valor, que es $(\gamma + 1)\chi/2$; ver § 86, problema 1. El cociente de presiones es, según (86.9), $p_2/p_1 = \gamma(\gamma + 1)M_1^2\chi^2/2$. El valor de M detrás del choque es

$$M_2 = \frac{1}{\chi} \sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma - 1)}},$$

es decir, es todavía grande en comparación con la unidad, pero no suficientemente grande en comparación con $1/\chi$.

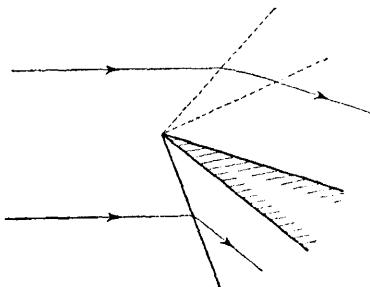


FIG. 96

§ 105. Flujo que rodea un obstáculo cónico

El problema del flujo supersónico estacionario cerca de una proyección puntiaguda situada sobre la superficie de un cuerpo es un problema tridimensional y es mucho más complicado que el flujo que rodea un ángulo diedro con una arista de intersección. Todavía no se ha realizado un estudio completo y general del primer problema. El único problema totalmente resuelto es el de un flujo con simetría axial que rodea a un saliente puntiagudo, y este es el caso que consideraremos.

Cerca de su vértice, una punta con simetría axial puede considerarse como un cono recto de sección recta circular y así el problema se reduce a analizar el flujo de una corriente uniforme que rodea un cono cuyo eje tiene la dirección del flujo incidente. El esquema del flujo es cualitativamente como sigue.

Como en el problema análogo del flujo que rodea un ángulo bidimensional debe formarse una onda de choque (A. BUSEMANN, 1929), y resulta evidente a partir de la simetría que este choque es una superficie cónica coaxial con el cono y poseyendo el mismo vértice (la figura 97 muestra el corte del cono por un plano que pasa por su vértice). Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en el caso bidimensional, la onda de choque no desvía la velocidad del gas a través del ángulo completo χ necesario para que el gas fluya a lo largo de la superficie del cono (siendo 2χ el ángulo del vértice del cono). Después de pasar a través de la superficie de discontinuidad, las líneas de corriente se curvan y tienden asintóticamente a las generatrices del cono.

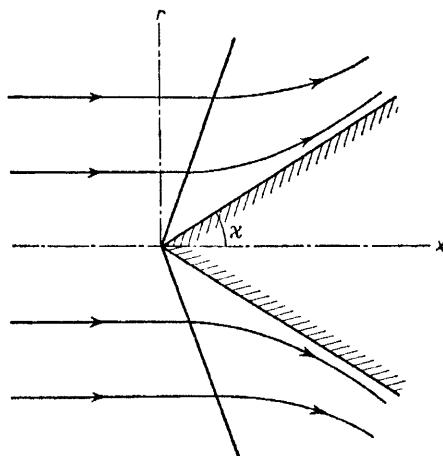


FIG. 97

Esta curvatura está acompañada por un aumento continuo de la densidad (además del incremento que se produce en el propio choque) y por la correspondiente disminución de la velocidad. Inmediatamente detrás de la onda de choque, la velocidad sigue siendo, en general, supersónica (como en el caso bidimensional, está determinada por la parte «supersónica» de la polar del choque), pero en la superficie del cono puede resultar subsónica. Como en el caso bidimensional, por cada valor del número de Mach $M_1 = v_1/c_1$ correspondiente a la corriente incidente, existe un valor límite χ_{\max} para el ángulo del cono, por encima del cual resulta imposible este tipo de flujo.

La onda de choque cortará a todas las líneas de corriente del flujo incidente con el mismo ángulo y, por tanto, tiene intensidad constante. De aquí resulta (ver § 106) que también habrá un flujo isoentrópico detrás de la onda de choque.

A partir de la simetría del problema y de sus propiedades de semejanza (no existen longitudes constantes características en las condiciones impuestas), es evidente que la distribución de todas las magnitudes (velocidad, presión) del flujo detrás de la onda de choque dependerá únicamente del ángulo θ que el radio vector, que va desde el vértice del cono hasta el punto considerado, forma con el eje del cono (el eje x en la figura 97). De acuerdo con ello, las ecuaciones del movimiento son ecuaciones diferenciales ordinarias; se determinan las condiciones límites correspondientes a estas ecuaciones en la onda de choque mediante la ecuación de la polar del choque, mientras que las correspondientes a la superficie del cono consisten en que la velocidad deberá ser paralela a las generatrices. Sin embargo, estas ecuaciones no pueden integrarse analíticamente y han de resolverse numéricamente. Referimos al lector a otros autores[†] para los resultados de los cálculos, mientras que ahora daremos simplemente la curva (figura 51, § 86) que muestra el ángulo máximo posible χ_{\max} en función de M_1 . Podemos mencionar también que, cuando $M_1 \rightarrow 1$, el ángulo χ_{\max} tiende a cero:

$$\chi_{\max} = \text{constante} \times \sqrt{[(M_1 - 1)/(\gamma + 1)]}, \quad (105.1)$$

como puede deducirse a partir de la ley general de la semejanza transónica (118.11); la constante es independiente, tanto de M_1 como del gas considerado.

Sólo es posible una solución analítica del problema del flujo que rodea a un cono en el límite de ángulos de vértices pequeños. Es evidente que en este caso la velocidad del gas en todo punto difiere grandemente de la velocidad v_1 de la corriente incidente. Designando por v a la pequeña diferencia existente entre la velocidad del gas en el punto considerado y v_1 , y utilizando su potencial ϕ , podemos aplicar la ecuación linealizada (106.4); si

[†] Por ejemplo, N. E. KOCHIN, I. A. KJEBEL' y N. V. ROZE, *Theoretical Hydromechanics* (*Teoreticheskaya gidromekhanika*), parte 2, 3.^a ed., p. 193, Moscow, 1948; L. HOWARTH, ed., *Modern Developments in Fluid Dynamics: High Speed Flow*, vol. 1, cap. 5, Oxford, 1953.

tomamos coordenadas cilíndricas x, r, ω con el eje polar a lo largo del eje del cono (siendo ω el ángulo polar), esta ecuación se reduce a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \quad (105.2)$$

o, en el caso de una solución con simetría axial,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \quad (105.3)$$

en donde

$$\beta = \sqrt{(v_1^2/c_1^2 - 1)}. \quad (105.4)$$

Con objeto de que la distribución de velocidades sea sólo una función de θ , el potencial debe ser de la forma $\phi = xf(\xi)$, siendo $\xi = r/x = \operatorname{tg} \theta$. Sustituyendo, obtenemos para la función $f(\xi)$ la ecuación

$$\xi(1 - \beta^2 \xi^2)f'' + f' = 0,$$

cuya solución es elemental. La solución trivial $f = \text{constante}$ corresponde a un flujo uniforme; la otra solución es

$$f = \text{constante} \times [\sqrt{(1 - \beta^2 \xi^2)} - \operatorname{arcosh}(1/\beta \xi)].$$

La condición límite en la superficie del cono (es decir, para $\xi = \operatorname{tg} \chi \approx \chi$) es

$$v_r/(v_1 + v_x) \approx (1/v_1) \partial \phi / \partial r = \chi \quad (105.5)$$

o sea, $f' = v_1 \chi$. De aquí que la constante sea $v_1 \chi^2$, y así tenemos la expresión siguiente para el potencial en la región $x > \beta r$:[†]

$$\phi = v_1 \chi^2 [\sqrt{(x^2 - \beta^2 r^2)} - x \operatorname{arcosh}(x/\beta r)]. \quad (105.6)$$

Debe señalarse que ϕ tiene una singularidad logarítmica para $r \rightarrow 0$.

A continuación podemos hallar las componentes de la velocidad:

$$\begin{aligned} v_x &= -v_1 \chi^2 \operatorname{arcosh}(x/\beta r), \\ v_r &= (v_1 \chi^2/r) \sqrt{(x^2 - \beta^2 r^2)}. \end{aligned} \quad (105.7)$$

La presión en la superficie del cono se calcula con la fórmula (106.5); puesto que ϕ tiene una singularidad logarítmica para $r \rightarrow 0$, la velocidad v_r en la superficie del cono (es decir, para r pequeño) es grande en comparación con v_x y, por tanto, sólo necesitamos retener el término en v_r^2 en la fórmula correspondiente a la presión. El resultado es

$$p - p_1 = \rho_1 v_1^2 \chi^2 [\log(2/\beta \chi) - \frac{1}{2}]. \quad (105.8)$$

[†] En esta aproximación el cono $x = \beta r$ es una superficie de discontinuidad débil.

Todas estas fórmulas, que se han deducido mediante una teoría linealizada, dejan de ser válidas para M_1 grande, comparable con $1/\chi$ (ver § 119).

El flujo que rodea un cono de sección recta arbitraria (no siendo necesariamente nulo el ángulo de ataque) es un flujo de semejanza, como el flujo simétrico que rodea un cono circular. No tiene parámetros de longitud característicos, y por ello la distribución de velocidades sólo puede ser una función de los cocientes y/x , z/x de las coordenadas, es decir, es constante a lo largo de cualquier recta que pase por el origen (el vértice del cono). Dichos flujos de semejanza se denominan flujos cónicos.[†]

PROBLEMA

Determinar el flujo que rodea un cono de ángulo en el vértice 2χ pequeño colocado con un pequeño ángulo de ataque α (C. FERRARI, 1937).[‡]

Solución. Tomemos el eje del cono (y no la dirección de la corriente principal) como eje x ; la ecuación linearizada (105.2) para el potencial resulta invariable si se desprecian magnitudes de orden superior ($\sim \alpha \phi$), y el potencial determina la velocidad del gas como $\mathbf{v}_1 + \mathbf{grad} \phi$. La condición límite en la superficie del cono es

$$\frac{v_1 \operatorname{sen} \alpha \cos \omega + v_r}{v_1 \cos \alpha + v_x} \approx \alpha \cos \omega + \frac{1}{v_1} \frac{\partial \phi}{\partial r} \approx \chi.$$

Busquemos ϕ en forma de una suma:

$$\phi = \phi^{(1)}(x, r) + \cos \omega \cdot \phi^{(2)}(x, r), \quad (1)$$

en donde $\phi^{(1)}$ es la expresión (105.6) y $\phi^{(2)}$ satisface la condición límite $\partial \phi^{(2)} / \partial r = -v_1 \alpha$. La función $\phi^{(2)}$ puede escribirse como $r f(r/x)$, y, sustituyendo $r f \cos \omega$ en la ecuación (105.2), obtenemos para f la ecuación

$$\xi f''(\beta^2 \xi^2 - 1) + f'(2\beta^2 \xi^2 - 3) = 0.$$

La solución trivial $f = \text{constante}$ corresponde a una corriente incidente uniforme (con velocidad $v_{1\alpha}$) en una dirección perpendicular al eje del cono; la otra solución conduce a

$$\phi^{(2)} = v_1 \beta \chi^2 \alpha [(x/\beta r) \sqrt{(x^2 - \beta^2 r^2)} - \beta r \operatorname{arcosh}(x/\beta r)].$$

La velocidad del gas es $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)}$, en donde $\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{grad} \phi^{(2)}$ y $\mathbf{v}^{(1)}$ viene dada por la fórmula (105.7). La presión se calcula mediante la fórmula

$$\begin{aligned} p - p_1 = & -\frac{1}{2} p_1 \{ (v_1 \cos \alpha + \partial \phi / \partial x)^2 + \\ & + (v_1 \operatorname{sen} \alpha \cos \omega + \partial \phi / \partial r)^2 + (-v_1 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \omega + \partial \phi / r \partial \omega)^2 - v_1^2 \} \end{aligned}$$

en donde deben retenerse los términos de segundo orden en α y χ . La presión en la superficie del cono resulta que viene dada por

$$\begin{aligned} p - p_1 = & \rho_1 v_1^2 \{ \chi^2 \log(2/\beta \chi) - \frac{1}{2} (\chi^2 + \alpha^2) - \\ & - 2\alpha \chi \cos \omega + \alpha^2 \cos 2\omega \}. \end{aligned}$$

[†] Una descripción detallada de los diversos problemas que afectan a estos flujos viene dada en E. CARAFOLI, *High Speed Aerodynamics (Compressible Flow)*, Pergamon Press, London, 1958.

[‡] La solución del mismo problema en el caso de un sólido de revolución delgado cualquiera viene dado en F. I. FRANKL' y E. A. KARPOVICH, *Gas Dynamics of Thin Bodies*, § 2-7, Interscience, New York, 1953.

CAPÍTULO XII

FLUJO GASEOSO BIDIMENSIONAL

§ 106. Flujo potencial de un gas

A continuación nos enfrentaremos con otros muchos casos importantes en donde el flujo de un gas puede considerarse como flujo potencial en casi todas partes. Ahora deduciremos las ecuaciones generales del flujo potencial y estudiaremos la cuestión de su validez.

Después de pasar a través de una onda de choque, el flujo potencial de un gas normalmente se transforma en flujo rotacional. Sin embargo, una excepción la constituyen aquellos casos en donde un flujo potencial pasa a través de una onda de choque, cuya intensidad es constante en toda su área; por ejemplo, sucede así cuando una corriente uniforme pasa a través de una onda de choque cortando a todas las líneas de corriente con un mismo ángulo.[†] El flujo detrás de la onda de choque es entonces también flujo potencial. Para demostrar esto utilizaremos la ecuación de Euler en la forma

$$\frac{1}{2} \mathbf{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -(1/\rho) \mathbf{grad} p$$

[ver (2.10)], o sea

$$\mathbf{grad}(w + \frac{1}{2}v^2) - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = T \mathbf{grad}s,$$

donde hemos utilizado la identidad termodinámica $dw = Tds + dp/\rho$. Sin embargo, en el flujo potencial, $w + v^2/2 = \text{constante}$ delante de la onda de choque, y esta magnitud es continua en el choque; por tanto, es constante en todas partes detrás de la onda de choque, de modo que

$$\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -T \mathbf{grad}s. \quad (106.1)$$

El flujo potencial delante de la onda de choque es isoentrópico. En el caso general de una onda de choque arbitraria, para la cual la discontinuidad de la entropía varía en su superficie, $\mathbf{grad}s \neq 0$ en la región detrás del choque y, por tanto, $\mathbf{rot} \mathbf{v}$ es también no nulo. Sin embargo, si la onda de choque es de intensidad constante, entonces la discontinuidad de entropía

[†] Ya nos hemos encontrado con este caso en conexión con el flujo supersónico que rodea una cuña o cono (§§ 104, 105).

en ella es constante y el flujo detrás de la misma es también isoentrópico, es decir, $\text{grad } s = 0$. De aquí se deduce que o bien $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, o bien los vectores \mathbf{v} y $\text{rot } \mathbf{v}$ son paralelos en todos los puntos. Sin embargo, esto último es imposible; en la onda de choque \mathbf{v} siempre tiene una componente normal no nula, pero la componente normal de $\text{rot } \mathbf{v}$ es siempre cero (puesto que viene dada por las derivadas tangenciales de las componentes de velocidad tangencial, que son continuas).

Otro caso importante en donde el flujo potencial se mantiene, a pesar de la onda de choque, es en el caso de un choque débil. Hemos visto (§ 83) que en dicha onda de choque la discontinuidad de la entropía es del tercer orden respecto a la discontinuidad de la presión o de la velocidad. Por tanto, vemos a partir de (106.1) que $\text{rot } \mathbf{v}$ detrás del choque es también del tercer orden. Esto nos permite admitir que tenemos flujo potencial detrás de la onda de choque, siendo el error de un orden superior.

Deduciremos a continuación la ecuación general para el potencial de velocidades en un flujo potencial estacionario arbitrario de un gas. Para ello eliminaremos la densidad en la ecuación de continuidad $\text{div}(\rho \mathbf{v}) \equiv \rho \text{ div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho = 0$, utilizando la ecuación de Euler

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} = -(1/\rho)\text{grad}p = -(c^2/\rho)\text{grad}\rho$$

y obteniendo así

$$c^2 \text{ div } \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} = 0.$$

Introduciendo el potencial de velocidad mediante $\mathbf{v} = \text{grad } \phi$ y desarrollando en sus componentes, obtenemos la ecuación

$$(c^2 - \phi_x^2)\phi_{xx} + (c^2 - \phi_y^2)\phi_{yy} + (c^2 - \phi_z^2)\phi_{zz} - 2(\phi_x \phi_y \phi_{xy} + \phi_y \phi_z \phi_{yz} + \phi_z \phi_x \phi_{zx}) = 0, \quad (106.2)$$

en donde los sufijos designan aquí las derivadas parciales. En particular, en el caso de un flujo bidimensional tenemos

$$(c^2 - \phi_x^2)\phi_{xx} + (c^2 - \phi_y^2)\phi_{yy} - 2\phi_x \phi_y \phi_{xy} = 0. \quad (106.3)$$

En estas ecuaciones la propia velocidad del sonido debe expresarse en función de la velocidad; esto puede, en principio, hacerse mediante la ecuación de Bernoulli, $w + v^2/2 = \text{constante}$, y la ecuación de la isoentrópica, $s = \text{constante}$. En el caso de un gas perfecto, c en función de v viene dada por la fórmula (80.18).

La ecuación (106.2) se simplifica mucho si en todos los puntos la velocidad del gas no difiere apreciablemente en valor o dirección de la correspondiente a la corriente incidente procedente del infinito.[†] Esto implica que las ondas de choque (si existen) son débiles, y en este caso el flujo potencial no se ve destruido.

[†] Un caso como éste se estudió en § 105 (flujo que rodea un cono estrecho), y se encontrarán otros en conexión con el flujo gaseoso que rodea cuerpos delgados de forma arbitraria.

Como en los casos semejantes vistos anteriormente, designaremos por \mathbf{v} la diferencia pequeña existente entre la velocidad del gas en un punto dado y la correspondiente a la corriente principal. Designando esta última por \mathbf{v}_1 podemos escribir la velocidad total como $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}$. El potencial ϕ se toma de modo que corresponda al potencial de la velocidad \mathbf{v} : $\mathbf{v} = \text{grad } \phi$. La ecuación para este potencial se obtiene a partir de (106.2) sustituyendo $\phi \rightarrow \phi + xv_1$; tomaremos el eje x en la dirección del vector \mathbf{v}_1 . Entonces consideraremos a ϕ como una magnitud pequeña y omitiremos todos los términos de orden superior al primero, obteniendo la siguiente ecuación lineal:

$$(1 - M_1^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (106.4)$$

en donde $M_1 = v_1/c_1$; como es natural, la velocidad del sonido viene dada por su valor en el infinito.

La presión en un punto cualquiera está determinada en función de la velocidad con la misma aproximación por una fórmula que puede obtenerse del modo siguiente. Consideraremos p en función de w (para una s dada), y utilizaremos el hecho de que $(\partial w / \partial p)_s = 1/\rho$, escribiendo $p - p_1 \approx (\partial p / \partial w)_s (w - w_1) = \rho_1 (w - w_1)$. A partir de la ecuación de Bernoulli tenemos

$$w - w_1 = -\frac{1}{2}[(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v})^2 - \mathbf{v}_1^2] \approx -\frac{1}{2}(v_y^2 + v_z^2) - v_1 v_x,$$

de modo que

$$p - p_1 = -\rho_1 v_1 v_x - \frac{1}{2} \rho_1 (v_y^2 + v_z^2). \quad (106.5)$$

En esta expresión el término correspondiente a la velocidad transversal al cuadrado debe conservarse en general, puesto que en la región próxima al eje x (y , en particular, en la propia superficie del cuerpo), las derivadas $\partial \phi / \partial y$, $\partial \phi / \partial z$ pueden ser grandes en comparación con $\partial \phi / \partial x$.

Sin embargo, la ecuación (106.4) no es válida si el número M_1 es muy próximo a la unidad (flujo *transónico*), de modo que el coeficiente del primer término es pequeño. Es evidente que en este caso deben mantenerse los términos de orden superior en las derivadas de ϕ respecto a x . Para deducir la ecuación correspondiente volvamos a la ecuación original (106.2); cuando se desprecian los términos que son ciertamente pequeños, esta ecuación se transforma en

$$\left(1 - \frac{\phi_{xx}^2}{c^2}\right) \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0. \quad (106.6)$$

En el caso presente, la velocidad $v_x \approx v$, y la velocidad del sonido c está próxima a la velocidad crítica c_* (designando ahora con \mathbf{v} a la velocidad total). Por tanto, podemos poner $c - c_* = (v - c_*) (dc/dv)_{v=c_*}$, o sea, $c - v = (c_* - v)[1 - (dc/dv)_{v=c_*}]$. Utilizando el hecho de que para $v = c = c_*$,

tenemos por (80.4) que $d\rho/dv = -\rho/c$, podemos escribir (para $v = c_*$)

$$\frac{dc}{dv} = \frac{dc}{d\rho} \frac{d\rho}{dv} = -\frac{\rho}{c} \frac{dc}{d\rho},$$

de modo que

$$c - v = [(c_* - v)/c] d(\rho c)/d\rho = \alpha_*(c_* - v). \quad (106.7)$$

Hemos utilizado aquí la expresión (92.9) para la derivada $d(\rho c)/d\rho$, mientras que α_* designa el valor de α (95.2) para $v = c_*$; en el caso de un gas perfecto, α es constante, de modo que $\alpha_* = \alpha = (\gamma + 1)/2$. Con la misma exactitud esta ecuación puede escribirse como

$$v/c - 1 = \alpha_*(v/c_* - 1). \quad (106.8)$$

Esta ecuación expresa la relación general existente entre los números de Mach M y M_* en el flujo transónico.

Utilizando esta fórmula, podemos escribir

$$1 - \frac{v_x^2}{c^2} \approx 1 - \frac{v^2}{c^2} \approx 2\left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx 2\alpha_*\left(1 - \frac{v}{c_*}\right).$$

Finalmente, introduzcamos un nuevo potencial mediante la sustitución $\phi \rightarrow c_*(x + \phi)$, de modo que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{v_x}{c_*} - 1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{v_y}{c_*}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{v_z}{c_*}. \quad (106.9)$$

Sustituyendo estas fórmulas en (106.6), obtenemos la siguiente ecuación final para el potencial de velocidades en un flujo transónico (siendo la velocidad en todo punto casi paralela al eje x):

$$2\alpha_* \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (106.10)$$

Las propiedades del gas aparecen aquí sólo a través de la constante α_* . Veremos posteriormente que esta constante rige la dependencia completa de las propiedades del flujo transónico respecto a la naturaleza del gas.

La ecuación linealizada (106.4) resulta inválida también en el caso límite de valores muy grandes de M_1 ; sin embargo, la aparición de ondas de choque intensas tiene como resultado el hecho de que el flujo potencial no puede realmente producirse para dichos valores de M_1 (ver § 119).

§ 107. Ondas simples estacionarias

Determinemos la forma general de aquellas soluciones de las ecuaciones del flujo gaseoso supersónico bidimensional estacionario que describen los flujos en los que existe una corriente plana paralela uniforme en el infinito,

que luego gira o se desvía a través de cierto ángulo cuando se mueve rodeando un perfil curvado. Ya hemos visto un caso particular de dicha solución al estudiar el flujo próximo a un ángulo; el flujo considerado era esencialmente plano, paralelo a lo largo de un lado del ángulo, y luego giraba en el vértice del mismo. En esta solución particular todas las magnitudes (las dos componentes de velocidad, la presión y la densidad) eran funciones de una sola variable, el ángulo ϕ . Por tanto, cada una de estas magnitudes podrían expresarse en función de cualquier otra. Puesto que esta solución debe ser un caso particular de la solución general buscada, es natural buscar esta última con la hipótesis de que cada una de las magnitudes p , ρ , v_x , v_y (considerándose el plano del movimiento como plano xy), puede expresarse en función unas de otras. Esta hipótesis es, como es natural, una restricción muy considerable sobre la solución de las ecuaciones del movimiento, y la solución así obtenida no es la integral general de aquellas ecuaciones. En el caso general, cada una de las magnitudes p , ρ , v_x , v_y , que son funciones de las dos coordenadas x , y , pueden expresarse en función de dos cualesquiera de ellas.

Como tenemos una corriente uniforme en el infinito, en la que todas las magnitudes, y en particular la entropía s , son constantes, y puesto que en el flujo estacionario de un fluido ideal la entropía es constante a lo largo de las líneas de corriente, es evidente que $s = \text{constante}$ en todo el espacio si no existe una onda de choque en el gas, como admitiremos.

Las ecuaciones de Euler y la ecuación de continuidad son

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, & v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) &= 0. \end{aligned}$$

Escribiendo las derivadas parciales en forma de jacobianos, podemos convertir estas ecuaciones en la forma

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial(v_x, y)}{\partial(x, y)} - v_y \frac{\partial(v_x, x)}{\partial(x, y)} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p, y)}{\partial(x, y)}, \\ v_x \frac{\partial(v_y, y)}{\partial(x, y)} - v_y \frac{\partial(v_y, x)}{\partial(x, y)} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p, x)}{\partial(x, y)}; \\ \frac{\partial(\rho v_x, y)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(\rho v_y, x)}{\partial(x, y)} &= 0. \end{aligned}$$

Tomemos ahora (por ejemplo) x y p como variables independientes. Con objeto de efectuar esta transformación necesitamos únicamente multiplicar las

ecuaciones anteriores por $\partial(x, y)/\partial(x, p)$, obteniendo las mismas ecuaciones, excepto que $\partial(x, p)$ sustituye a $\partial(x, y)$ en el denominador de cada jacobiano. A continuación desarrollaremos los jacobianos, recordando que todas las magnitudes ρ, v_x, v_y se suponen que son funciones de p pero no de x , de modo que su derivada parcial respecto a x es nula. Entonces se obtiene

$$\left(v_y - v_x \frac{\partial y}{\partial x}\right) \frac{dv_x}{dp} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \left(v_y - v_x \frac{\partial y}{\partial x}\right) \frac{dv_y}{dp} = -\frac{1}{\rho},$$

$$\left(v_y - v_x \frac{\partial y}{\partial x}\right) \frac{d\rho}{dp} + \rho \left(\frac{dv_y}{dp} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dv_x}{dp} \right) = 0.$$

Aquí $\partial y / \partial x$ designa $(\partial y / \partial x)_p$. Todas las magnitudes en estas ecuaciones, excepto $\partial y / \partial x$, son funciones de p únicamente, por hipótesis, y x no aparece explícitamente. Por tanto, podemos concluir, en primer lugar, que $\partial y / \partial x$ también es una función de p únicamente: $(\partial y / \partial x)_p = f_1(p)$, de aquí

$$y = xf_1(p) + f_2(p), \quad (107.1)$$

siendo $f_2(p)$ una función arbitraria de la presión.

No es necesario ningún cálculo adicional más si utilizamos la solución particular, ya conocida, para una onda de rarefacción en el flujo que rodea un ángulo (§§ 101, 104). Se recordará que en esta solución todas las magnitudes (incluyendo la presión) son constantes a lo largo de cualquier recta (característica) que pasa por el vértice del ángulo. Esta solución particular evidentemente corresponde al caso en donde la función arbitraria $f_2(p)$ en la expresión general (107.1) es idénticamente nula. La función $f_1(p)$ está determinada por las fórmulas obtenidas en § 101.

La ecuación (107.1) para diversos valores de p constante dan una familia de líneas rectas en el plano xy . Estas líneas cortan a las líneas de corriente en todo punto formando el ángulo de Mach. Esto se ve inmediatamente a partir del hecho de que las líneas $y = xf_1(p)$ en la solución particular con $f_2 \equiv 0$ tienen esta propiedad. Así pues, una de las familias de características (aquellas que salen de la superficie del cuerpo) se componen en el caso general de líneas rectas, a lo largo de las cuales todas las magnitudes permanecen constantes; sin embargo, estas líneas no son concurrentes.

Las propiedades del flujo descrito anteriormente son matemáticamente análogas a las de las ondas simples monodimensionales, en las que una familia de características es una familia de líneas rectas en el plano xt (ver §§ 94, 96, 97). De aquí que la clase de flujo en consideración ocupe el mismo lugar en la teoría del flujo bidimensional estacionario (supersónico) que las ondas simples en el flujo monodimensional no estacionario. Para tener en cuenta esta analogía, dichos flujos se denominan también *ondas simples*; en particular, la onda de rarefacción que corresponde al caso $f_2 \equiv 0$ se denomina una *onda simple centrada*.

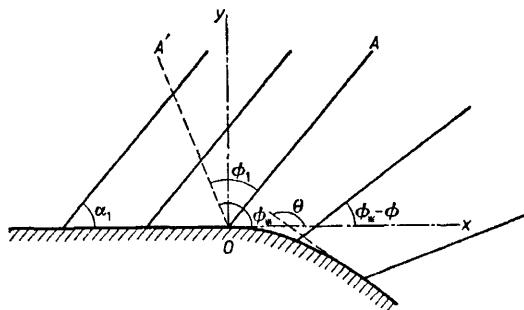


FIG. 98

Como en el caso no estacionario, una de las propiedades más importantes de las ondas simples estacionarias es que el flujo en cualquier región del plano xy , limitado por una región de flujo uniforme, es una onda simple (comparar § 97).

A continuación mostraremos cómo puede construirse una onda simple correspondiente al flujo alrededor de un perfil dado. La figura 98 muestra el perfil en cuestión; a la izquierda del punto O es recto, pero a la derecha empieza a curvarse. En el flujo supersónico el efecto de la curvatura, como es natural, se propaga sólo aguas abajo de la característica OA que sale del punto O . De aquí que el flujo a la izquierda de esta característica sea uniforme; designaremos mediante el sufijo 1 las magnitudes que pertenecen a esta región. Todas las características en la misma son paralelas y forman un ángulo con el eje x , que es igual al ángulo de Mach $\alpha_1 = \text{arc sen}(c_1/v_1)$.

En las fórmulas (101.12)-(101.15), el ángulo ϕ de las características se mide a partir de la línea sobre la cual $v = c = c_*$. Esto significa (comparar § 104) que la característica OA debe tener un valor de ϕ dado por

$$\phi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arccos \frac{c_1}{c_*},$$

y el ángulo ϕ ha de medirse a partir de OA' (figura 98). El ángulo entre las características y el eje x es entonces $\phi_* - \phi$, en donde $\phi_* = \alpha_1 + \phi_1$. De acuerdo con las fórmulas (101.12)-(101.15), la velocidad y la presión vienen dadas en función de ϕ por

$$v_x = v \cos \theta, \quad v_y = v \sin \theta, \quad (107.2)$$

$$v^2 = c_*^2 \left[1 + \frac{2}{\gamma-1} \sin^2 \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \phi \right], \quad (107.3)$$

$$\theta = \phi_* - \phi - \arctg \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \cot \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \phi \right), \quad (107.4)$$

$$p = p_* \cos^{2\gamma/(\gamma-1)} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \phi. \quad (107.5)$$

La ecuación de las características puede escribirse

$$y = x \operatorname{tg} (\phi_* - \phi) + F(\phi). \quad (107.6)$$

La función arbitraria $F(\phi)$ se determina del modo siguiente cuando se da la forma del perfil. Sea esta última $Y = Y(X)$, en donde X e Y son las coordenadas de los puntos sobre la misma. En la superficie, la velocidad del gas es tangencial, es decir,

$$\operatorname{tg} \theta = dY/dX. \quad (107.7)$$

La ecuación de la línea que pasa por el punto (X, Y) formando un ángulo $\phi_* - \phi$ con el eje x es

$$y - Y = (x - X) \operatorname{tg} (\phi_* - \phi).$$

Esta ecuación es la misma que (107.6) si ponemos

$$F(\phi) = Y - X \operatorname{tg} (\phi_* - \phi). \quad (107.8)$$

Partiendo de la ecuación dada $Y = Y(X)$ y de la ecuación (107.7), expresaremos la forma del perfil en ecuaciones paramétricas $X = X(\theta)$, $Y = Y(\theta)$, siendo el parámetro la inclinación θ de la tangente. Sustituyendo θ en función de ϕ a partir de (107.4), obtenemos X e Y como funciones de ϕ ; finalmente, sustituyendo estas expresiones en (107.8), obtenemos la función buscada $F(\phi)$.

En el flujo que rodea una superficie convexa, el ángulo θ entre el vector velocidad y el eje x disminuye aguas abajo (figura 98), y el ángulo $\phi_* - \phi$ entre la característica y el eje x disminuye también monótonamente (siempre entendemos que estamos hablando de la característica que sale de la superficie). Por esta razón las características no se cortan (en la región del flujo). Así pues, en la región aguas abajo de la característica OA (que es una discontinuidad débil), tenemos un flujo continuo y de rarefacción progresiva.

La situación es diferente en el flujo que rodea un perfil cóncavo. En este caso la inclinación θ de la tangente aumenta aguas abajo y, por tanto, lo mismo ocurre con la inclinación de la característica. En consecuencia, las características se cortan en la región de flujo. Sin embargo, en el caso de características diferentes no paralelas, todas las magnitudes (velocidad, presión, etc.) tienen valores diferentes. Así pues, todas estas magnitudes se convierten en multiformes en los puntos en donde se cortan las características, lo cual es físicamente imposible. Ya nos hemos encontrado con un fenómeno semejante en conexión con una onda de compresión simple monodimensional no estacionaria (§ 94). Como en este caso, ello significa que, en realidad,

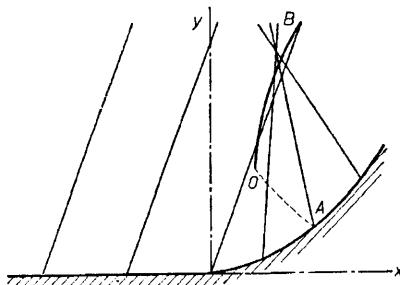


FIG. 99

se forma una onda de choque. La posición de la discontinuidad no puede determinarse completamente a partir de las soluciones que estamos considerando, puesto que se dedujo en la hipótesis de que no existían discontinuidades. El único resultado que puede obtenerse es el lugar donde empieza la onda de choque (el punto O en la figura 99, en donde se muestra el choque en forma de una línea continua OB). Dicho punto es el de intersección de las características cuya línea de corriente está más próxima a la superficie del cuerpo. En el caso de líneas de corriente que pasan por debajo de O (es decir, más próximas a la superficie) la solución es en todo punto uniforme; su comportamiento multiforme «empieza» en O . Las ecuaciones correspondientes a las coordenadas (x_0, y_0) de este punto pueden obtenerse del mismo modo que las ecuaciones correspondientes que determinan el tiempo y lugar de formación de la discontinuidad en una onda simple no estacionaria monodimensional. Si consideramos la inclinación de las características de una función de las coordenadas (x, y) de los puntos a través de los cuales pasan, entonces esta función resulta multiforme cuando x e y superan ciertos valores x_0, y_0 . En § 94 la situación fue la misma en relación con la función $v(x, t)$, y así no necesitamos repetir los razonamientos utilizados allí, pero podemos escribir a continuación inmediatamente las ecuaciones

$$(\partial y / \partial \phi)_x = 0, \quad (\partial^2 y / \partial \phi^2)_x = 0, \quad (107.9)$$

que determinan ahora el lugar de formación de la onda de choque. Matemáticamente se obtiene un punto angular de la envolvente de la familia de las características rectilíneas (ver § 96).

Por lo que se refiere al dominio de existencia de la onda simple, cuando se trata de un flujo en un perfil cóncavo, se extiende a lo largo de las líneas de corriente que pasan por encima del punto O hasta el lugar de intersección de estas líneas con la onda de choque. Las líneas de corriente que pasan por debajo de O no cortan la onda de choque en absoluto, pero a partir de ello no se puede obtener la conclusión de que la solución en cuestión sea válida en todos los puntos de esta línea de corriente. La razón es que la

onda de choque tiene un efecto perturbador incluso sobre el gas que fluye a lo largo de esta línea de corriente, y así altera el flujo que existiría en ausencia de la onda de choque. Sin embargo, por una propiedad del flujo supersónico, estas perturbaciones alcanzan únicamente al gas aguas abajo de la característica OA (de la segunda familia) que salen del punto en donde empieza la onda de choque. Así pues, la solución que estamos considerando es válida en todas partes a la izquierda de AOB . La propia línea OA es una discontinuidad débil. Vemos que no puede existir una onda de compresión simple continua (ausencia de onda de choque) en ningún punto del flujo que rodea la superficie cóncava que correspondería a la onda de rarefacción simple en el flujo que rodea una superficie convexa.

La onda de choque formada en el flujo que rodea un perfil cóncavo es un ejemplo de choque que «empieza» en un punto del interior de la corriente lejos de las paredes macizas o sólidas. En el punto en donde el choque empieza tiene ciertas propiedades generales que pueden señalarse aquí. En el propio punto la intensidad de la onda de choque es cero y cerca del punto es pequeña. Sin embargo, en una onda de choque débil las discontinuidades de entropía y de vorticidad son del tercer orden de magnitud y así la variación en el flujo al pasar a través del choque difiere de una variación isoentrópica de potencial continuo únicamente por magnitudes del tercer orden. De aquí se deduce que en las discontinuidades débiles que parten del punto en donde empieza la onda de choque, sólo pueden ser discontinuas las tercera derivadas de las diversas magnitudes. En general, existirán dos de estas discontinuidades: una discontinuidad débil que coincide con la característica y una discontinuidad tangencial débil que coincide con la línea de corriente (ver el final del § 89).

§ 108. Ecuación de Chaplygin: el problema general del flujo gaseoso bidimensional estacionario

Habiendo ya considerado las ondas simples estacionarias, estudiemos ahora el problema general de un flujo potencial plano estacionario pero arbitrario. Admitiremos que el flujo es isoentrópico y que no contiene ondas de choque.

Como fue demostrado en primer lugar por S. A. CHAPLYGIN en 1902, es posible reducir este problema a la resolución de una ecuación en derivadas parciales y lineales sencillas. Esto se obtiene mediante una transformación a unas nuevas variables independientes, las componentes de velocidad v_x , v_y ; esta transformación suele denominarse la *transformación de la hodógrafa*, denominándose *plano de la hodógrafa* al plano v_x, v_y y *plano físico* al plano xy .

En el caso del flujo potencial podemos sustituir las ecuaciones de Euler por su primera integral, que es la ecuación de Bernoulli:

$$w + \frac{1}{2}v^2 = w_0. \quad (108.1)$$

La ecuación de continuidad es

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) = 0. \quad (108.2)$$

Como diferencial del potencial de velocidades ϕ tenemos $d\phi = v_x dx + v_y dy$. Haremos la transformación que convierta las variables independientes x , y a las nuevas variables v_x , v_y mediante una transformación de Legendre, poniendo

$$d\phi = d(xv_x) - xdv_x + d(yv_y) - ydv_y,$$

introduciendo la función

$$\Phi = -\phi + xv_x + yv_y, \quad (108.3)$$

y obteniendo

$$d\Phi = x dv_x + y dv_y,$$

en donde Φ se considera como una función de v_x y v_y . De aquí que

$$x = \partial\Phi/\partial v_x, \quad y = \partial\Phi/\partial v_y. \quad (108.4)$$

Sin embargo, es más conveniente para su empleo no utilizar las componentes cartesianas de la velocidad, sino su módulo v y el ángulo θ que forma con el eje x :

$$v_x = v \cos \theta, \quad v_y = v \sin \theta. \quad (108.5)$$

La transformación apropiada de las derivadas da, en lugar de (108.4),

$$x = \cos \theta - \frac{\sin \theta}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad y = \sin \theta + \frac{\cos \theta}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (108.6)$$

La relación existente entre el potencial ϕ y la función Φ viene dada por la fórmula sencilla

$$\phi = -\Phi + v \partial\Phi/\partial v. \quad (108.7)$$

Finalmente, con objeto de obtener la ecuación que determina la función $\Phi(v, \theta)$, debemos transformar la ecuación de continuidad (108.2) a las nuevas variables. Escribiendo las derivadas en forma de jacobianos:

$$\frac{\partial(\rho v_x, y)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(\rho v_y, x)}{\partial(x, y)} = 0,$$

multiplicando por $\partial(x, y)/\partial(v, \theta)$ y sustituyendo (108.5), tenemos

$$\frac{\partial(\rho v \cos \theta, y)}{\partial(v, \theta)} - \frac{\partial(\rho v \sin \theta, x)}{\partial(v, \theta)} = 0.$$

Para desarrollar estos jacobianos, debemos sustituir (108.6) para x e y . Además, como la entropía s es una constante determinada, si expresamos la den-

sidad en función de s y w y sustituimos $w = w_0 - v^2/2$, encontramos que la densidad puede escribirse en función de v únicamente: $\rho = \rho(v)$. Por tanto, y después de un cálculo simple, se obtiene la ecuación

$$\frac{d(\rho v)}{dv} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) + \rho v \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0.$$

De acuerdo con (80.5),

$$\frac{d(\rho v)}{dv} = \rho \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right),$$

y así tenemos, finalmente, la *ecuación de Chaplygin* para la función $\Phi(v, \theta)$:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{v^2}{1 - v^2/c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + v \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0. \quad (108.8)$$

En esta expresión la velocidad del sonido es una función conocida $c(v)$, determinada por la ecuación del estado del gas junto con la ecuación de Bernoulli.

La ecuación (108.8), más la relación (108.6), resulta ser equivalente a las ecuaciones del movimiento. Así el problema de resolver las ecuaciones no lineales del movimiento se reduce a la resolución de una ecuación lineal para la función $\Phi(v, \theta)$. Es cierto que las condiciones límites en esta ecuación no son lineales y poseen la forma siguiente. En la superficie de un cuerpo, la velocidad del gas debe ser tangencial. Expresando la ecuación de la superficie en la forma paramétrica $X = X(\theta)$, $Y = Y(\theta)$ (como en § 107), y sustituyendo X e Y en lugar de x e y en (108.6), obtenemos dos ecuaciones que deben satisfacerse para todos los valores de θ ; esto no es posible para toda función $\Phi(v, \theta)$. De hecho, la condición límite consiste en que ambas ecuaciones sean compatibles para todo valor de θ , es decir, que una de ella debe ser deducible de la otra.

Sin embargo, el que se satisfagan las condiciones finitas no asegura que la solución resultante de la ecuación de Chaplygin determine un flujo que sea realmente posible en todos los puntos del plano físico. También debe concluirse la siguiente condición: el jacobiano $\Delta \equiv \partial(x, y)/\partial(\theta, v)$ no debe ser nulo en ninguna parte, excepto en el caso trivial en que todas sus derivadas se anulen. Es fácil ver que, a no ser que se cumpla esta condición, la solución resulta compleja cuando pasamos a través de la línea (denominada *línea límite*) contenida en el plano xy y dada por la ecuación $\Delta = 0$.[†] Efectivamente, supongamos que $\Delta = 0$ en la línea $v = v_0(\theta)$, y supongamos que

[†] No existe ninguna objeción a pasar a través de puntos en donde Δ resulta infinito. Si $1/\Delta = 0$ sobre una cierta línea, esto simplemente significa que la correspondencia entre los planos xy y $v\theta$ deja de ser biunívoca: al recorrer el plano xy , cubrimos alguna parte del plano $v\theta$ dos o tres veces.

$(\partial y / \partial \theta)_v \neq 0$. Entonces tenemos

$$-\Delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_v = \frac{\partial(x, y)}{\partial(v, \theta)} \frac{\partial(v, \theta)}{\partial(v, y)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(v, y)} = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)_y = 0.$$

De aquí vemos que cerca de la línea límite v está determinada como una función de x (para un valor de y dado) por

$$x - x_0 = \frac{1}{2} (\partial^2 x / \partial v^2)_y (v - v_0)^2,$$

y v resulta compleja sobre un lado u otro de la línea límite.[†]

Es fácil ver que una línea límite puede presentarse sólo en regiones de flujo supersónico. Un cálculo directo, utilizando las relaciones (108.6) y la ecuación (108.8), nos da

$$\Delta = \frac{1}{v} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial v} - \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{v^2}{1 - v^2/c^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \right)^2 \right]. \quad (108.9)$$

Es evidente que, para $v \leq c$, $\Delta > 0$ y Δ , puede resultar cero sólo si $v > c$.

La aparición de líneas límites en la solución de la ecuación de Chaplygin indica que bajo las condiciones dadas es imposible un flujo continuo a través de dicha región y entonces deben producirse ondas de choque. Sin embargo, debe resaltarse que la posición de estos choques no coincide con la de las líneas límite.

En § 107 estudiamos el caso particular de flujo supersónico bidimensional estacionario (ondas simples) que está caracterizado por el hecho de que la velocidad no es una función únicamente de su dirección: $v = v(\theta)$. Esta solución no puede obtenerse a partir de la ecuación de Chaplygin, puesto que $1/\Delta \equiv 0$, y la solución se « pierde » cuando se multiplica la ecuación de continuidad por el jacobiano en la transformación hacia el plano de la hodógrafa. La situación es exactamente análoga a la que se encuentra en la teoría del flujo monodimensional no estacionario. Son totalmente aplicables las notas hechas en § 98 respecto a la relación existente entre la onda simple y la integral general de la ecuación (98.2) a la relación existente entre la onda simple estacionaria y la integral general de la ecuación de Chaplygin.

El hecho de que el jacobiano Δ sea positivo en el flujo subsónico nos permite demostrar un teorema interesante debido a A. A. NIKOL'SKI y G. I. TAGANOV (1946). Tenemos idénticamente

$$\frac{1}{\Delta} \equiv \frac{\partial(\theta, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\theta, v)}{\partial(x, v)} \frac{\partial(x, v)}{\partial(x, y)},$$

[†] Este resultado evidentemente permanece válido incluso si se anula $(\partial^2 x / \partial v^2)_y$ al mismo tiempo que Δ , pero $(\partial x / \partial v)_y$ cambia de signo de nuevo para $v = v_0$, es decir, la diferencia $x - x_0$ es proporcional a una potencia incluso más elevada de $v - v_0$.

o sea,

$$\frac{1}{\Delta} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_x. \quad (108.10)$$

En un flujo subsónico $\Delta > 0$, y vemos que las derivadas $(\partial \theta / \partial x)_v$ y $(\partial v / \partial y)_x$ tienen el mismo signo. Esto tiene un significado geométrico simple: si nos movemos a lo largo de una línea $v = \text{constante} \equiv v_0$, teniendo la región $v < v_0$ hacia la derecha, el ángulo aumenta monótonamente, es decir, el vector velocidad gira siempre en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Este resultado es válido, en particular, para la línea de transición entre flujo subsónico y supersónico, sobre la cual $v = c = c_*$.

En conclusión, podemos dar la ecuación de Chaplygin para un gas perfecto, escribiendo c explícitamente en función de v :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + v^2 \frac{1 - (\gamma - 1)v^2/(\gamma + 1)c_*^2}{1 - v^2/c_*^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + v \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0. \quad (108.11)$$

Esta ecuación tiene una familia de integrales particulares que se pueden expresar mediante funciones hipergeométricas.[†]

§ 109. Características de un flujo bidimensional estacionario

Ya se han estudiado en § 79 algunas propiedades generales de las características del flujo bidimensional estacionario (supersónico). Deduciremos ahora las ecuaciones que dan las características en función de una solución dada de las ecuaciones del movimiento.

En el flujo supersónico bidimensional estacionario existen, en general, tres familias de características. Todas las pequeñas perturbaciones, excepto las de entropía y vorticidad, se propagan a lo largo de dos de estas familias (que denominaremos las características C_+ y C_-); y las perturbaciones de entropía y vorticidad se propagan a lo largo de las características (C_0) de la tercera familia, que coinciden con las líneas de corriente. En el caso de un flujo dado, se conocen las líneas de corriente y el problema consiste en determinar las características que pertenecen a las dos primeras familias.

Las direcciones de las características C_+ y C_- que pasan a través de cada punto dentro del plano caen en lados opuestos de la línea de corriente que pasa por dicho punto, y forman con ella un ángulo igual al valor local del ángulo de Mach α (figura 41, § 79). Designaremos por m_0 la pendiente de la línea de corriente en un punto dado, y por m_+ , m_- las pendientes de las características C_+ , C_- . Entonces tenemos

$$\frac{m_+ - m_0}{1 + m_0 m_+} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{m_- - m_0}{1 + m_0 m_-} = - \operatorname{tg} \alpha,$$

[†] Ver, por ejemplo, L. I. SEDOV, *Two-dimensional Problems of Hydrodynamics and Aerodynamics* (*Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki*), Moskow, 1950.

de aquí

$$m_{\pm} = \frac{m_0 \pm \operatorname{tg} \alpha}{1 \mp m_0 \operatorname{tg} \alpha};$$

los signos superiores se relacionan en todos los puntos con C_+ y los inferiores con C_- . Sustituyendo $m_0 = v_y/v_x$, $\operatorname{tg} \alpha = c/\sqrt{(v^2 - c^2)}$ y simplificando, obtenemos la expresión siguiente para las pendientes de las características:

$$m_{\pm} \equiv \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\pm} = \frac{v_x v_y \pm c \sqrt{(v^2 - c^2)}}{v_x^2 - c^2}. \quad (109.1)$$

Si se conoce la distribución de velocidades, ésta es una ecuación diferencial que determina las características C_+ y C_- .[†]

Además de las características en el plano xy , podemos considerar aquéllas que existen en el plano de la hodógrafa, que son especialmente interesantes en el estudio del flujo potencial isoentrópico; consideramos este caso en lo que sigue. Matemáticamente estas características corresponden a la ecuación de Chaplygin (108.8), que son del tipo hiperbólico para $v > c$. Siguiendo el método general, que es familiar en física matemática (ver § 96), formamos, a partir de los coeficientes, la ecuación de las características:

$$dv^2 + d\theta^2 v^2 / (1 - v^2/c^2) = 0,$$

o sea,

$$\left(\frac{d\theta}{dv} \right)_{\pm} = \pm \frac{1}{v} \sqrt{\left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}. \quad (109.2)$$

Las características dadas por esta ecuación no dependen de la solución particular de la ecuación de Chaplygin considerada, ya que los coeficientes de esta ecuación son independientes de Φ . Las características en el plano de la hodógrafa son una transformación de las características C_+ y C_- en el plano físico, y las denominaremos, respectivamente, características Γ_+ y Γ_- , de acuerdo con los signos que aparecen en (109.2).

La integración de la ecuación (109.2) da unas relaciones de la forma $J_+(v, \theta) = \text{constante}$, $J_-(v, \theta) = \text{constante}$. Las funciones J_+ y J_- son magnitudes que permanecen constantes a lo largo de las características C_+ y C_- (es decir, son invariantes de Riemann). En el caso de un gas perfecto, la ecuación (109.2) puede integrarse explícitamente. Sin embargo, no es necesario realizar los cálculos, puesto que el resultado puede verse a partir de las fórmulas (107.3) y (107.4). En efecto, de acuerdo con las propiedades

[†] La ecuación (109.1) determina también las características para flujo estacionario con simetría axial si se sustituyen v_y e y por v_r y r , siendo r la coordenada cilíndrica (la distancia al eje de simetría, que es el eje x); resulta evidente que no se altera la deducción si consideramos, en lugar del plano xy , un plano xr que pase por el eje de simetría.

generales de las ondas simples (ver § 97), la dependencia de v respecto a θ en el caso de una onda simple, viene dada por la condición de que uno de los invariantes de Riemann sea constante en todo el espacio. La constante arbitraria en las fórmulas (107.3) y en (107.4) es ϕ_* ; eliminando el parámetro ϕ de estas fórmulas, obtenemos

$$J_{\pm} = \theta \pm \left\{ \arcsen \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\gamma+1) \left(1 - \frac{c_*^2}{v^2} \right) \right]} - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arcsen \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\gamma-1) \left(\frac{v^2}{c_*^2} - 1 \right) \right]} \right\}. \quad (109.3)$$

Las características en el plano de la hodógrafa son una familia de epicicloides, que ocupan el espacio situado entre dos circunferencias de radios $v = c_*$ y $v = \sqrt{[(\gamma+1)/(\gamma-1)]}c_*$ (figura 100).

En el caso del flujo potencial isoentrópico, las características Γ_+ , Γ_- tienen la propiedad importante siguiente: las familias Γ_+ , Γ_- son ortogonales a las familias C_- , C_+ , respectivamente (se supone que los ejes coordenados de x e y se transforman paralelamente a los correspondientes a v_x y v_y).†

Para demostrar esta propiedad, partiremos de la ecuación (106.3) de un flujo potencial bidimensional, que es de la forma

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad (109.4)$$

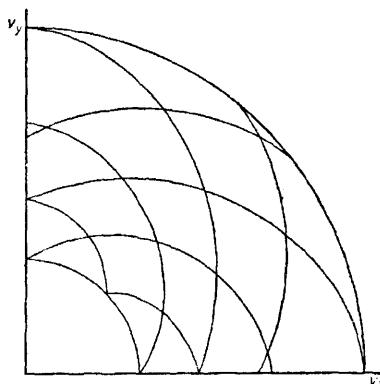


FIG. 100

† Esto no se aplica a las características del flujo asimétrico en el plano xy .

sin término independiente. Las pendientes m_{\pm} de las características C_{\pm} son las raíces de la ecuación de segundo grado

$$Am^2 - 2Bm + C = 0.$$

Consideremos la expresión $dv_x^+dx^- + dv_y^+dy^-$, en la cual las diferenciales de la velocidad se toman a lo largo de las características Γ_+ , y las diferenciales de las coordenadas a lo largo de C_- . Tenemos, idénticamente,

$$\begin{aligned} & dv_x^+dx^- + dv_y^+dy^- \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx^+dx^- + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} (dx^+dy^- + dx^-dy^+) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy^+dy^- . \end{aligned}$$

Dividiendo por dx^+dx^- , obtenemos como coeficiente de $\partial^2 \phi / \partial x \partial y$ y $\partial^2 \phi / \partial y^2$, respectivamente, $m_+ + m_- = 2B/A$ y $m_+m_- = C/A$. Resulta, entonces, evidente que la expresión es cero, según (109.4). Así pues,

$$dv_x^+dx^- + dv_y^+dy^- = dv^+ \cdot dr^- = 0.$$

Análogamente, $dv^- \cdot dr^+ = 0$. Estas ecuaciones son equivalentes al resultado indicado.

§ 110. Ecuación de Euler-Tricomi. Flujo transónico

La investigación de las propiedades del flujo que se obtienen como resultado de la transición entre el flujo subsónico y supersónico tiene un interés fundamental. Los flujos estacionarios en los que se produce la transición se denominan *flujos mixtos o transónicos*, y en la superficie en donde se produce la transición se denomina *superficie transicional o sónica*.

La ecuación de Chaplygin tiene un interés particular al estudiar el flujo cerca de la transición, puesto que se ve allí muy simplificada. En el límite en donde se produce la transición $v = c = c_*$, y cerca de la misma (en la región transónica) las diferencias $v - c$ y $v - c_*$ son pequeñas; están relacionadas por (106.8):

$$(v/c) - 1 = \alpha_*[(v/c_*) - 1].$$

Efectuemos la simplificación correspondiente en la ecuación de Chaplygin. El tercer término de la ecuación (108.8) es pequeño en comparación con el segundo, que contiene en el denominador a la expresión $1 - v^2/c^2$. En el segundo término podemos poner aproximadamente

$$\frac{v^2}{1 - v^2/c^2} \approx \frac{c_*^2}{2(1 - v/c)} = \frac{c_*}{2\alpha_*(1 - v/c_*)}.$$

Finalmente, sustituyendo la velocidad v por una nueva variable

$$\eta = (2\alpha_*)^{\frac{1}{2}}(v - c_*)/c_*, \quad (110.1)$$

obtenemos la ecuación buscada en la forma

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (110.2)$$

Una ecuación de esta forma se denomina en física matemática *la ecuación de Euler-Tricomi*.[†] En el semiplano $\eta > 0$ es hiperbólica, pero en $\eta < 0$ es elíptica. Estudiaremos aquí algunas propiedades matemáticas de esta ecuación que son importantes en conexión con diversos problemas físicos.

Las características de la ecuación (110.2) vienen dadas por la ecuación $\eta d\eta^2 - d\theta^2 = 0$, que tiene la integral general

$$\theta \pm \frac{2}{3}\eta^{\frac{3}{2}} = C, \quad (110.3)$$

siendo C una constante arbitraria. Esta ecuación representa una familia de curvas en el plano $\eta\theta$, que son ramas de paráolas semicúbicas en el semiplano derecho con vértices en el eje θ (figura 101).

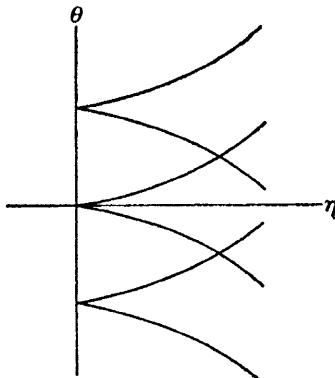


FIG. 101

Al estudiar el flujo en una región[‡] pequeña del espacio, en donde la dirección de la velocidad del gas varía sólo ligeramente, podemos siempre tomar la dirección del eje x de forma tal que el ángulo θ medido a partir del mismo

[†] La aplicación de esta ecuación al problema considerado aquí se debe a F. I. FRANKL' (1945). La teoría matemática de la ecuación (110.2) ha sido dada por F. TRICOMI, Linear Equations of the Mixed Type (*Sulle equazioni lineari ... di tipo misto*), *Memorie della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, classe di scienze fisiche*, ser. 5, 14, 133, 1922.

[‡] Como es natural, esta frase no debe tomarse literalmente. La región considerada puede estar en la proximidad del punto en el infinito, es decir, la región a distancias grandes del cuerpo.

sea pequeño en toda la región considerada. Las ecuaciones (108.6) que determinan las coordenadas x, y a partir de la función $\Phi(\eta, \theta)$ se simplifican entonces mucho también: [†] $x = (2\alpha_*)^{1/3} \partial\Phi/\partial\eta$, $y = \partial\Phi/\partial\theta$. Con objeto de evitar la aparición del factor $(2\alpha_*)^{1/3}$, sustituiremos la coordenada x por $x(2\alpha_*)^{-1/3}$, y denominaremos a esta última magnitud x . Entonces

$$x = \partial\Phi/\partial\eta, \quad y = \partial\Phi/\partial\theta. \quad (110.4)$$

Es interesante señalar que, puesto que resulta relacionada de un modo tan sencillo con Φ , la función $y(\eta, \theta)$ [pero no $x(\eta, \theta)$] también satisface la ecuación de Euler-Tricomi. Utilizando este hecho podemos escribir el jacobiano de la transformación desde el plano físico al plano de la hodógrafa como

$$\Delta = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \eta)} = \Phi_{\eta\theta}^2 - \Phi_{\eta\eta}\Phi_{\theta\theta} = \left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2 - \eta\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2. \quad (110.5)$$

Como ya se ha mencionado, la ecuación de Euler-Tricomi ha de aplicarse normalmente para estudiar las propiedades de la solución cerca del origen en el plano $\eta\theta$. En casos de interés físico el origen es un punto singular de la solución. Por esta razón se le asigna un significado especial a la familia de integrales particulares de la ecuación de Euler-Tricomi que posee ciertas propiedades de homogeneidad. Estas soluciones son homogéneas en las variables θ^2 y η^3 ; dichas soluciones deben existir, puesto que la transformación $\theta^2 \rightarrow a\theta^2$, $\eta^3 \rightarrow a\eta^3$ deja sin modificar la ecuación (110.2). Buscaremos estas soluciones en la forma $\Phi = \theta^{2k}f(\xi)$, $\xi = 1 - 4\eta^3/9\theta^2$, en donde k es una constante, que es el grado de homogeneidad de la función Φ respecto a la transformación mencionada. Hemos tomado la variable ξ de modo que se anule en las características que pasan por el punto $\eta = \theta = 0$. Haciendo la sustitución anterior obtenemos para la función $f(\xi)$ la ecuación

$$\xi(1 - \xi)f'' + [\tfrac{5}{6} - 2k - \xi(\tfrac{3}{2} - 2k)]f' - k(k - \tfrac{1}{2})f = 0.$$

Esta ecuación es hipergeométrica. Utilizando las expresiones bien conocidas para las dos integrales independientes de esta ecuación, se encuentra que la solución buscada es (para $2k + 1/6$ no enteros):

$$\begin{aligned} \Phi_k = & \theta^{2k} \left[AF\left(-k, -k + \tfrac{1}{2}; -2k + \tfrac{5}{6}; 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) + \right. \\ & \left. + B\left(1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)^{2k+1/6} F\left(k + \tfrac{1}{6}, k + \tfrac{2}{3}; 2k + \tfrac{7}{6}; 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (110.6)$$

[†] Omitimos un factor $1/c_*$ en los segundos miembros; esto significa simplemente que se sustituye Φ por $c_*\Phi$, lo cual no afecta a la ecuación (110.2) y, por tanto, es siempre permisible.

Utilizando las relaciones existentes entre las funciones hipergeométricas de argumentos z , $1/z$, $1-z$, $1/(1-z)$ y $z/(1-z)$, podemos poner también esta solución en otras cinco formas diferentes, las cuales se necesitan todas en distintos problemas. Daremos dos de ellas:

$$\Phi_k = \theta^{2k} \left[AF\left(-k, -k+\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) + B \frac{\eta}{\theta^{2/3}} F\left(-k+\frac{1}{6}, -k+\frac{5}{6}; \frac{4}{3}; \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) \right], \quad (110.7)$$

$$\Phi_k = \eta^{3k} \left[AF\left(-k, -k+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{9\theta^2}{4\eta^3}\right) + B \frac{\theta}{\eta^{3/2}} F\left(-k+\frac{1}{2}, -k+\frac{5}{6}; \frac{3}{2}; \frac{9\theta^2}{4\eta^3}\right) \right]; \quad (110.8)$$

como es natural, las constantes A y B en las fórmulas (110.6)-(110.8) no son iguales. Estas expresiones dan origen a la siguiente propiedad importante de las funciones Φ_k , que no es evidente a partir de (110.6). Las líneas $\eta = 0$ y $\theta = 0$ no son líneas singulares (se ve a partir de (110.7) en las proximidades de $\eta = 0$, Φ_k puede desarrollarse en potencias enteras de η , y a partir de (110.8) es cierto lo mismo para θ). También se ve a partir de la expresión (110.6) que, por otra parte, las características son líneas singulares de la integral homogénea Φ_k general (es decir, que contiene dos constantes A y B) de la ecuación de Euler-Tricomi: si $2k+1/6$ no es un entero, el factor $(9\theta^2 - 4\eta^3)^{2k+1/6}$ tiene puntos ramificados, mientras que si $2k+1/6$ es un entero, uno de los términos de (110.6) carece de significado† (o degenera en el otro término si $2k+1/6=0$), y debe sustituirse por la segunda solución independiente de la ecuación hipergeométrica, que en este caso tiene una singularidad logarítmica.

Las siguientes relaciones resultan ser válidas entre las integrales Φ_k con diferentes valores de k :

$$\Phi_k = \Phi_{-k-1/6} (9\theta^2 - 4\eta^3)^{2k+1/6}, \quad (110.9)$$

$$\Phi_{k-1/2} = \partial \Phi_k / \partial \theta. \quad (110.10)$$

La primera se deduce directamente de (110.6) y la segunda a partir del hecho de que $\partial \Phi_k / \partial \theta$ satisface la ecuación de Euler-Tricomi, y su grado de homogeneidad es el de $\Phi_{k-1/2}$. En estas fórmulas Φ_k significa, como es natural, la expresión general, con dos constantes arbitrarias.

Al investigar la solución cerca del punto $\eta = \theta = 0$, tenemos que seguir su variación a lo largo de un contorno que rodee este punto. Por ejemplo,

† Recordemos que la serie $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ carece de significado para $\gamma = 0, -1, -2, \dots$

supongamos que la función Φ_k (110.6) representa la solución en el punto A cerca de la característica $\theta = 2/3\eta^{3/2}$ (figura 102), y supongamos que se busca la forma de la solución cerca de la característica $\theta = -2/3\eta^{3/2}$ (en el punto B). El paso desde A a B exige cruzar el eje de abscisas, y $\theta = 0$ es una línea singular de las funciones hipergeométricas en la expresión (110.6), de modo que su argumento allí es infinito. Por consiguiente, con objeto de pasar de A a B es necesario transformar las funciones hipergeométricas en funciones del argumento recíproco $9\theta^2/(9\theta^2 - 4\eta^3)$, en el cual $\theta = 0$ no es una singularidad, y luego cambiar el signo de θ , volviendo finalmente al argumento original repitiendo la transformación. De este modo obtenemos las siguientes fórmulas de transformación para las funciones que aparecen en (110.6):

$$\begin{aligned} F_1 &\rightarrow \frac{F_1}{2\sin(2k + \frac{1}{6})\pi} + F_2 \cdot 2^{-4k-1/3} \frac{\Gamma(-2k - \frac{1}{6})\Gamma(-2k + \frac{5}{6})}{\Gamma(-2k)\Gamma(-2k + \frac{2}{3})}, \\ F_2 &\rightarrow \frac{-F_2}{2\sin(2k + \frac{1}{6})\pi} + F_1 \cdot 2^{4k+1/3} \frac{\Gamma(2k + \frac{1}{6})\Gamma(2k + \frac{7}{6})}{\Gamma(2k+1)\Gamma(2k + \frac{4}{3})}, \end{aligned} \quad (110.11)$$

en donde F_1 y F_2 significan

$$\begin{aligned} F_1 &= |\theta|^{2k} F\left(-k, -k + \frac{1}{2}; -2k + \frac{5}{6}; 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right), \\ F_2 &= |\theta|^{2k} \left|1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right|^{2k+1/6} F\left(k + \frac{1}{6}, k + \frac{2}{3}; 2k + \frac{7}{6}; 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right), \end{aligned} \quad (110.12)$$

en las cuales se toman los módulos de θ y $1 - 4\eta^3/9\theta^2$ en los coeficientes de las funciones hipergeométricas.

Análogamente podemos obtener fórmulas de transformación para el paso de A' a B' (figura 102) alrededor del origen, pero en sentido opuesto. Los cálculos son más complicados, puesto que hemos de pasar a través de tres singularidades de la función hipergeométrica (una con $\theta = 0$ y dos con $\eta = 0$; recordemos que las singularidades de una función hipergeométrica con argumento z son $z = 1$ y $z = \infty$). Las fórmulas finales son

$$\begin{aligned} F_1 &\rightarrow -\frac{\sin(4k - \frac{1}{6})\pi}{\sin(2k + \frac{1}{6})\pi} F_1 + F_2 \cdot 2^{-4k+2/3} \cos(2k + \frac{1}{6})\pi \frac{\Gamma(-2k - \frac{1}{6})\Gamma(-2k + \frac{5}{6})}{\Gamma(-2k)\Gamma(-2k + \frac{2}{3})}, \\ F_2 &\rightarrow \frac{\sin(4k - \frac{1}{6})\pi}{\sin(2k + \frac{1}{6})\pi} F_2 + F_1 \cdot 2^{4k+4/3} \cos(2k + \frac{1}{6})\pi \frac{\Gamma(2k + \frac{1}{6})\Gamma(2k + \frac{7}{6})}{\Gamma(2k+1)\Gamma(2k + \frac{4}{3})}. \end{aligned} \quad (110.13)$$

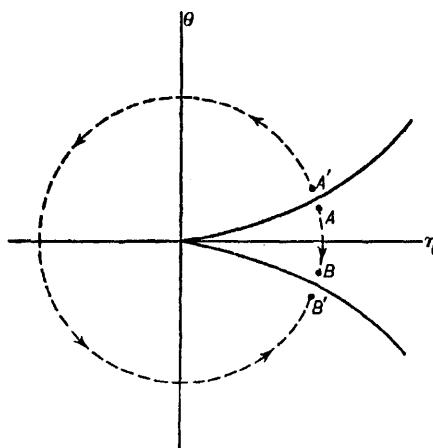


FIG. 102

Igual que esta familia de soluciones homogéneas, existen, como es natural, otras familias de integrales particulares de la ecuación de Euler-Tricomi. Podemos mencionar ahora aquella familia que resulta de un desarrollo en serie de Fourier en función de θ . Si buscamos una expresión de Φ en la forma

$$\Phi_\nu = g_\nu(\eta) e^{\pm i\nu\theta}, \quad (110.14)$$

siendo ν una constante arbitraria, obtenemos para la función g_ν la ecuación $g_\nu'' + \nu^2 g_\nu = 0$. Esta es la ecuación correspondiente a la función de Airy; su integral general es

$$g_\nu(\eta) = \sqrt{\eta} Z_{\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}\nu\eta^{3/2}), \quad (110.15)$$

en donde $Z_{1/3}$ es una combinación lineal arbitraria de las funciones de Bessel de orden $1/3$.

Finalmente, resulta útil recordar que la integral general de la ecuación de Euler-Tricomi puede escribirse

$$\Phi = \int_{C_z} f(\zeta) dz, \quad \zeta = z^3 - 3\eta z + 3\theta, \quad (110.16)$$

en donde $f(\zeta)$ es una función arbitraria y la integración en el campo complejo se realiza a lo largo de un contorno cualquiera C_z , en cuyos extremos la derivada $f'(\zeta)$ tenga valores iguales. Mediante una sustitución directa de

(110.16) en la ecuación de Euler-Tricomi se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} &= 9 \int_{C_z} (z^2 - \eta^2) f'''(\zeta) dz = 3 \int_{C_\zeta} f'''(\zeta) d\zeta \\ &= 3[f'(\zeta)] c_\zeta = 0,\end{aligned}$$

es decir, se satisface la ecuación.

§ 111. Soluciones de la ecuación de Euler-Tricomi cerca de puntos no singulares de la superficie sónica

Busquemos ahora aquellas soluciones Φ_k que corresponden a casos en los que el flujo gaseoso carece de singularidades físicas (discontinuidades débiles u ondas de choque) cerca de la transición. Para ello resulta más conveniente partir, no de la propia ecuación de Euler-Tricomi, sino de la ecuación correspondiente al potencial de velocidades en el plano físico. Esta ecuación se ha deducido en § 106; en el caso del flujo bidimensional, la ecuación (106.10) se transforma, previa la sustitución $x \rightarrow x(2a_*)^{1/3}$, en

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}. \quad (111.1)$$

Recuérdese que se define el potencial ϕ en esta ecuación, de modo que sus derivadas respecto a las coordenadas dan la velocidad de acuerdo con las ecuaciones

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \eta, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \theta. \quad (111.2)$$

Podemos señalar también que puede obtenerse directamente la ecuación de Euler-Tricomi a partir de la ecuación (111.1) cambiando las variables independientes θ, η mediante una transformación de Legendre, con $\Phi = -\phi + x\eta + y\theta$, o sea,

$$\phi = -\Phi + \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (111.3)$$

Tomando el origen del plano xy en el punto de la línea de transición, cuyas proximidades estamos investigando, desarrollaremos ϕ en potencias de x e y . En el caso general, el primer término de un desarrollo que satisface la ecuación (111.1) es

$$\phi = xy/a. \quad (111.4)$$

En este caso $\theta = x/a, \eta = y/a$, de modo que

$$\Phi = a\theta\eta. \quad (111.5)$$

Resulta evidente, a partir del grado de homogeneidad de esta función, que corresponde a una de las funciones $\Phi_{5/6}$; este término es el segundo de la expresión (110.7), en la cual la función hipergeométrica con $k = 5/6$ se reduce a 1 simplemente: $\eta\theta F(-1/2, 0; 4/3; 4\eta^3/9\theta^2) = \eta\theta$.

Si deseamos hallar la ecuación de la línea de transición en el plano físico, no basta con el primer término del desarrollo. El término siguiente es de grado 1, es decir, corresponde a una de las funciones Φ_1 , a saber, el primer término de la expresión (110.7), que se reduce a un polinomio para $k = 1$:

$$\theta^2 F(-1, -\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; 4\eta^3/9\theta^2) = \theta^2 + \frac{1}{3}\eta^3.$$

Así pues, los dos primeros términos del desarrollo de Φ son

$$\Phi = a\eta\theta + b(\theta^2 + \frac{1}{3}\eta^3). \quad (111.6)$$

De aquí que

$$\begin{aligned} x &= a\theta + b\eta^2, \\ y &= a\eta + 2b\theta. \end{aligned} \quad (111.7)$$

La línea de transición ($\eta = 0$) es la recta $y = 2bx/a$.

Para hallar la ecuación de las características en el plano físico, sólo necesitamos el primer término del desarrollo. Sustituyendo $\theta = x/a$, $\eta = y/a$ en la ecuación de las características de la hodógrafa $\theta = \pm 2/3\eta^{3/2}$, obtenemos $x = \pm 2/3y^{3/2}/\sqrt{a}$, es decir, de nuevo dos ramas de una parábola semicúbica con un vértice en la línea de transición. Esta propiedad de las características resulta también evidente del siguiente razonamiento simple. En los puntos de la línea de transición, el ángulo de Mach es $\pi/2$. Esto significa que coinciden las tangentes a las características de las dos familias, de modo que existe un vértice (figura 103). Las líneas de corriente cortan a la línea de

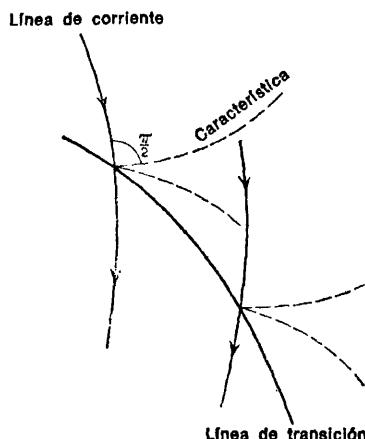


FIG. 103

transición perpendicularmente a las características y no poseen allí ninguna singularidad.

La solución (111.6) no es aplicable en el caso excepcional en que la línea de corriente sea perpendicular a la línea de transición en el punto considerado.[†] Cerca de dicho punto el flujo es evidentemente simétrico respecto al eje x . Este caso requiere una consideración especial, que ha sido examinada por F. I. FRANKL y S. V. FAL'KOVICH (1945).

La simetría del flujo significa que, si se cambia el signo de y , la velocidad v_y cambia de signo mientras v_x permanece sin variar. Es decir, el potencial ϕ debe ser una función par de y y el potencial Φ una función par de θ . Por consiguiente, los primeros términos del desarrollo de ϕ en este caso tienen la forma

$$\phi = \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}a^2xy^2 + \frac{1}{24}a^3y^4; \quad (111.8)$$

el orden relativo de magnitud de x e y no se conoce *a priori*, de modo que los tres términos pueden ser todos del mismo orden. De aquí que se encuentren las siguientes fórmulas para la transformación desde el plano físico al plano de la hodógrafo:

$$\begin{aligned} \eta &= ax + \frac{1}{2}a^2y^2, \\ \theta &= a^2xy + \frac{1}{6}a^3y^3. \end{aligned} \quad (111.9)$$

Sin resolver explícitamente estas ecuaciones para x e y , podemos ver fácilmente que el grado de la función $y(\theta, \eta)$ es $1/6$. De aquí que la función correspondiente Φ tenga $k = 1/6 + 1/2 = 2/3$, es decir, es un caso particular de la integral general $\Phi_{2/3}$.

Eliminando x de las ecuaciones (111.9), obtenemos una ecuación cúbica para la función $y(\theta, \eta)$:

$$(ay)^3 - 3\eta ay + 3\theta = 0. \quad (111.10)$$

En el caso $9\theta^2 - 4\eta^3 > 0$, es decir, a través de toda la región a la izquierda de las características de la hodógrafo que pasan por el punto $\eta = \theta = 0$ (incluyendo la totalidad de la región subsónica $\eta < 0$; figura 104), esta ecuación tiene sólo una raíz real, que debe ser la función $y(\theta, \eta)$. En la región a la derecha de las características, las tres raíces son reales y debemos tomar aquélla que sea la continuación de la raíz real en la región de la izquierda.

Las características en el plano físico (que pasan por el origen) se obtienen sustituyendo las expresiones (111.9) en la ecuación $4\eta^3 = 9\theta^2$. Esto nos da dos paráolas:

$$\begin{aligned} \text{las características 23 y 56: } x &= -ay^2/4 \\ \text{las características 34 y 45: } x &= ay^2/2 \end{aligned} \quad (111.11)$$

[†] Esto correspondería al caso $a = 0$ en (111.6); la solución cesa entonces de ser válida, puesto que el jacobiano Δ se anula en la linea $\eta = 0$.

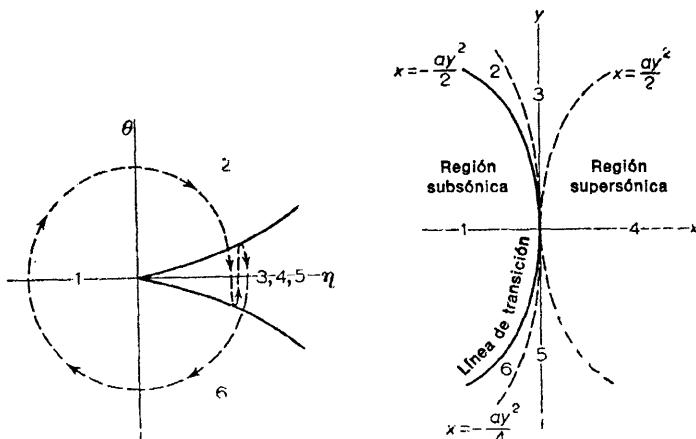


FIG. 104

Los números muestran que se encuentran en el plano físico dos regiones separadas por la característica en cuestión. La línea de transición ($\eta = 0$ en el plano de la hodógrafa) es la parábola $x = -ay^2/2$ en el plano físico (figura 104). Podemos observar la propiedad siguiente del punto donde corta la línea de transición al eje de simetría: salen de este punto cuatro ramas de características, mientras que sólo dos abandonan cualquier otro punto de la línea de transición.

La figura 104 muestra mediante los mismos números las regiones del plano de la hodógrafa que corresponden a las diversas regiones del espacio. Esta correspondencia no es biunívoca;[†] cuando en el plano físico rodeamos completamente el origen, la región entre las dos características en el plano de la hodógrafa se ve cubierta tres veces, como se indica mediante la línea de trazos de la figura 104, que se ve «reflejada» dos veces en las características.

Como la propia función $y(\theta, \eta)$ satisface la ecuación de Euler-Tricomi, debe poder obtenerse a partir de la integral general $\Phi_{1/6}$. Cerca de la característica 23 en el plano físico, es

$$y = \frac{1}{a\sqrt{\frac{3\theta}{2}}} F\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right); \quad (111.12)$$

el primer término de (110.6) carece de singularidad sobre esta característica. Continuándola analíticamente hasta la proximidad de la característica 56

[†] De acuerdo con el hecho de que $\Delta = \infty$ sobre la característica $x = ay^2/2$ en el plano físico; ver la primera nota a pie de página en § 108.

[mediante un trayecto que atravesie la región subsónica 1, es decir, mediante la fórmula (110.13)], obtenemos allí la misma función. Sin embargo, cerca de las características 34 y 45, $y(\theta, \eta)$ viene dada por combinaciones lineales de dicha función, y

$$\theta^{1/3} \sqrt{\left(\frac{4\eta^3}{9\theta^2} - 1 \right)} F\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}; \frac{3}{2}; 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2} \right), \quad (111.13)$$

es decir, el segundo término de (110.6). Se obtienen estas combinaciones mediante continuación analítica, utilizando las fórmulas (110.11); ahora debemos recordar que la raíz cuadrada de (111.13) cambia de signo a cada «reflexión» de una característica de una hodógrafa.

Matemáticamente, estos resultados demuestran que las funciones $\Phi_{1/6}$ son combinaciones lineales de las raíces de la ecuación cúbica

$$f^3 - 3\eta f + 3\theta = 0, \quad (111.14)$$

es decir, son funciones algebraicas.[†] Lo mismo que $\Phi_{1/6}$ todas las Φ_k con

$$k = \frac{1}{6} \pm \frac{1}{2}n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (111.15)$$

se reducen a funciones algebraicas; se obtienen a partir de $\Phi_{1/6}$, de acuerdo con las fórmulas (110.9) y (110.10), mediante derivaciones sucesivas, hecho que ha señalado F. I. FRANKL (1947).

Las funciones Φ_k con

$$k = \pm \frac{1}{2}n, \quad k = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{2}n, \quad (111.16)$$

en las que la función hipergeométrica se reduce a un polinomio,[‡] también se reducen a funciones algebraicas; por ejemplo, para $k = n/2$ tenemos el primer término de la expresión (110.6), y para $k = -n/2$ el segundo término.

Estas tres familias de funciones algebraicas Φ_k incluyen en particular todas las funciones que pueden ser potenciales Φ correspondientes a flujos que no poseen ninguna singularidad en el plano físico. En dichos flujos, todos los términos del desarrollo de Φ cerca de un punto asimétrico en la línea de transición [cuyos dos primeros términos vienen dados por la fórmula (111.6)] deben tener, o bien, $k = 5/6 + n/2$, o bien, $k = 1 + n/2$. Sin embargo, el desarrollo de Φ cerca de un punto simétrico, que empieza con un término con $k = 2/3$, puede contener también funciones con $k = 2/3 + n/2$.

[†] No es conveniente en la práctica utilizar las fórmulas explícitas de estas ecuaciones, que se obtienen a partir de (111.14) mediante la fórmula de Cardan.

[‡] Aquí debe recordarse que $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ se reduce a un polinomio si α (o β) es tal que $\alpha = -n$ o bien $\gamma - \alpha = -n$.

§ 112. Flujo a la velocidad del sonido

La forma simplificada de la ecuación de Chapligyn (es decir, la ecuación de Euler-Tricomi) tiene una importancia fundamental en la dinámica de los gases en el caso de flujo estacionario alrededor de los cuerpos, puesto que debe utilizarse para estudiar las propiedades cualitativas básicas de dicho flujo. Entre ellas deben incluirse, en primer lugar, los problemas relativos a la formación de ondas de choque. Por ejemplo, si se forma una onda de choque en flujo subsónico (en una región supersónica local adjunta a la superficie del cuerpo[†]), debe terminar a una distancia finita del cuerpo y entonces se plantea el problema de encontrar las propiedades de su punto terminal (ver § 113). Otro problema semejante es el de las propiedades de una onda de choque que acaba de formarse cerca de su intersección con la superficie. En ambos casos la onda de choque es débil, es decir, está en la región transónica y, por ello, su análisis debe realizarse mediante la ecuación de Euler-Tricomi.[‡]

Estudiaremos ahora otro problema de importancia teórica, el de la naturaleza del flujo bidimensional estacionario que rodea a un cuerpo cuando la velocidad de la corriente incidente es exactamente igual a la velocidad del sonido. Veremos, en particular, que una onda de choque debe extenderse desde la superficie del cuerpo hasta el infinito. A partir de ello, podemos sacar la importante conclusión de que la onda de choque debe aparecer primero para un número de Mach M_∞ que es ciertamente menor que la unidad.

Para ello, consideremos un flujo bidimensional que rodea un cuerpo («ala») de envergadura o longitud infinita y sección recta arbitraria (no necesariamente simétrica). Ahora estamos interesados en el esquema del flujo a distancias del cuerpo que son grandes en comparación con sus dimensiones. Por conveniencia describiremos, en primer lugar, los resultados de una manera cualitativa y después daremos el análisis cuantitativo.

En la figura 105, AB y $A'B'$ son líneas de transición, de modo que la región subsónica yace a su izquierda (aguas arriba); la flecha muestra la dirección de la corriente principal, que tomaremos como eje x , con el origen en un punto cualquiera cerca del cuerpo. A cierta distancia de la línea de transición, tenemos ondas de choque que salen del cuerpo (EF y $E'F'$ en la figura 105). Resulta que las características que abandonan el cuerpo (entre la línea de transición y la onda de choque) pueden dividirse en dos grupos.

[†] El menor número de Mach, $M_\infty < 1$ de la corriente principal para el cual el valor local de M en cualquier punto supera a la unidad, se denomina a veces *número de Mach crítico*.

[‡] Debe recordarse que, en una onda de choque débil, las variaciones de la entropía y de la vorticidad son de orden inferior. Por tanto, en primera aproximación, se puede suponer el flujo potencial isoentrópico en ambos lados de la discontinuidad.

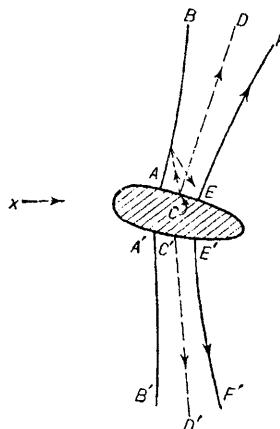


FIG. 105

Las características del primer grupo se encuentran con la línea de transición y terminan allí (es decir, son «reflejadas» en ella como características que llegan al cuerpo; la figura 105 muestra una de estas características). Las características del segundo grupo terminan en la onda de choque. Los dos grupos están separados por características límites, que son las únicas que llegan hasta el infinito y no se encuentran con la línea de transición ni con la onda de choque (CD y $C'D'$ en la figura 105). Como las perturbaciones (producidas, por ejemplo, por un cambio en la forma del cuerpo) que se propagan a partir del cuerpo a lo largo de características del primer grupo alcanzan la frontera de la región subsónica, es evidente que la parte de la región supersónica que está comprendida entre la línea de transición y las características limitadoras influyen en la región subsónica, pero el flujo a la derecha de las características limitadoras no tiene efecto sobre el flujo a la izquierda: el flujo a la izquierda no resulta afectado por una perturbación del flujo a la derecha (como, por ejemplo, una modificación en el perfil a la derecha de C o C'). El flujo detrás de la onda de choque no tiene, como ya sabemos, ninguna influencia sobre el flujo delante de él. Así pues, la totalidad del flujo puede dividirse en tres partes (a la izquierda de $DCC'D'$, entre $DCC'D'$ y $FEE'F'$, y a la derecha de $FEE'F'$), de tal modo que el flujo en la segunda parte no tiene ningún efecto sobre el de la primera y el flujo en la tercera parte no influye sobre el de la segunda.

A continuación, daremos una demostración cuantitativa del flujo, cuyo esquema acabamos de describir.

El origen del plano de la hodógrafa ($\theta = \eta = 0$) corresponde a una región infinitamente distante del plano físico y las características de la hodógrafa que salen del origen corresponden a las características límites CD y $C'D'$.

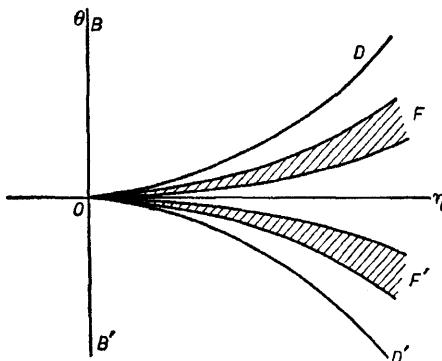


FIG. 106

La figura 106 muestra la zona próxima al origen, correspondiéndose las letras con las de la figura 105. La onda de choque corresponde, no a una línea, sino a dos líneas en el plano de la hodógrafa (que corresponden al flujo gaseoso a ambos lados de la discontinuidad); la región comprendida entre ambas líneas (sombreada en la figura 106) no corresponde a ninguna parte del plano físico.

En primer lugar, debemos encontrar cuál de las integrales generales Φ_k corresponde a este caso. Si $\Phi(\eta, \theta)$ es de grado k , entonces las funciones $x = \partial\Phi/\partial\eta$ e $y = \partial\Phi/\partial\theta$ son homogéneas y de grado $k - 1/3$ y $k - 1/2$, respectivamente. Cuando θ y η tiendan a cero deberemos, en general, alcanzar el infinito en el plano físico (x e y tienden a infinito). Es evidente que deberemos tener $k < 1/3$, para que esto sea así. Sin embargo, las características límites en el plano físico no necesitan estar totalmente en el infinito, es decir, $y = \pm\infty$ no es necesario que se cumpla en todos los puntos sobre la curva $9\theta^2 = 4\eta^3$. En este caso (para $2k + 1/6 < 5/6$), el segundo término entre corchetes de la ecuación (110.6) debe ser cero. Así pues, la función $\Phi(\eta, \theta)$ debe venir dada por el primer término de (110.6):

$$\Phi = A\theta^{2k}F\left(-k, -k+\frac{1}{2}; -2k+\frac{5}{6}; 1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right). \quad (112.1)$$

La función $y(\theta, \eta)$ (que también satisface la ecuación de Euler-Tricomi) es de la misma forma, pero con $k - 1/2$ en lugar de k .

Si la expresión (112.1) es válida cerca (por ejemplo) de la característica superior ($\theta = +2/3\eta^{3/2}$), sin embargo, ya no será válida cerca de la característica inferior ($\theta = -2/3\eta^{3/2}$) para un valor arbitrario de $k < 1/3$. Por tanto, debemos exigir también que se mantenga la forma (112.1) de la función $\Phi(\theta, \eta)$ al rodear el origen del plano de la hodógrafa desde una característica a la otra a través del semiplano $\eta < 0$ (el trayecto $A'B'$ en la figura 102). Este tra-

Área en las caras opuestas del plano xy . Así pues,

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z, t) = & \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int \int \frac{\phi_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{[(ct)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2]}} + \\ & + \frac{1}{2\pi c} \int \int \frac{\phi_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{[(ct)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2]}},\end{aligned}$$

en donde la integración se extiende a una circunferencia centrada en O , de radio ct . Si ϕ_0 y ϕ_1 son nulas excepto en una región finita C en el plano xy (o más exactamente, excepto en una región cilíndrica con sus generatrices paralelas al eje z), las oscilaciones en el punto O (figura 34) empiezan en el tiempo $t = d/c$, siendo d la distancia mínima de O a un punto dentro de la región. Sin embargo, después de este tiempo, la circunferencia de radio $ct > d$ centrada en O encerrará siempre parte o la totalidad de la región C , y ϕ tenderá únicamente asintóticamente a cero. Así pues, a diferencia de las ondas tridimensionales, las ondas bidimensionales consideradas aquí tienen un frente delantero pero no un frente trasero (comparar con § 70).

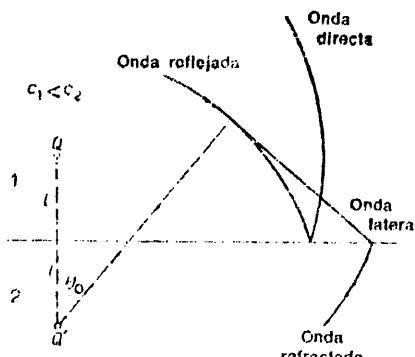
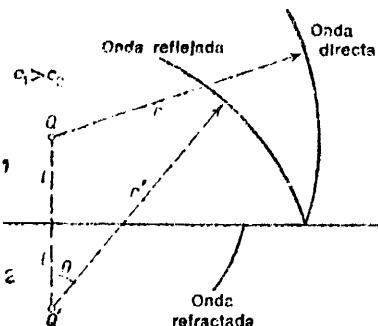


FIG. 35

Ahora veremos cómo pueden calcularse los coeficientes de estas fórmulas. El valor $k = -1/3$ es uno de aquellos para los cuales Φ_k se reduce a una función algebraica (ver § 111). La integral particular que determina Φ en el caso presente puede escribirse como $\Phi = \frac{1}{2}a_1 \partial f / \partial \theta$, siendo a_1 una constante arbitraria positiva y f la raíz de la ecuación cúbica

$$f^3 - 3\eta f + 3\theta = 0 \quad (112.5)$$

que es la raíz real para $9\theta^2 - 4\eta^3 > 0$. De aquí que

$$\Phi = \frac{1}{2}a_1 \partial f / \partial \theta = -a_1/2(f^2 - \eta), \quad (112.6)$$

y tenemos para las coordenadas

$$\begin{aligned} x &= \partial \Phi / \partial \eta = \frac{1}{2}a_1(f^2 + \eta)/(f^2 - \eta)^3, \\ y &= \partial \Phi / \partial \theta = -a_1 f / (f^2 - \eta)^3. \end{aligned} \quad (112.7)$$

Estas fórmulas pueden ponerse en una forma paramétrica conveniente utilizando como parámetro $s = f^2/(f^2 - \eta)$. Entonces

$$\left. \begin{aligned} x/y^{4/5} &= a_1^{1/5}(2s - 1)/2s^{2/5}, \\ \eta y^{2/5} &= a_1^{2/5}s^{1/5}(s - 1), \\ \theta y^{3/5} &= \frac{1}{3}a_1^{3/5}s^{4/5}(3 - 2s), \end{aligned} \right\} \quad (112.8)$$

que dan, en forma paramétrica, η y θ como funciones de las coordenadas. El parámetro s toma valores positivos desde cero hacia arriba ($s = 0$ corresponde a $x = -\infty$, es decir, a la corriente incidente desde el infinito). En particular, el valor $s = 1/2$ corresponde a $x = 0$, es decir, da la distribución de velocidades para valores grandes de y en un plano perpendicular al eje x y que pasa cerca del cuerpo. El valor $s = 1$ corresponde a la línea de transición ($\eta = 0$) y $s = 4/3$, como puede verse fácilmente, a la característica límite. El valor de la constante a_1 depende de la forma real del cuerpo y sólo puede determinarse a partir de una solución exacta del problema en todo el espacio.

Las fórmulas (112.8) se relacionan únicamente con la región delante de la onda de choque. Puede verse del modo siguiente la necesidad de que aparezca la onda de choque. Un cálculo sencillo a partir de la fórmula (110.5) da la expresión $a_1^2(4f^2 - \eta)/(f^2 - \eta)^3$ para el jacobiano Δ . Es fácil ver que $\Delta > 0$ (y no se anula) sobre las características y en todos los puntos situados a su izquierda, lo que corresponde a la región aguas arriba de las características límites en el plano físico. Sin embargo, a la derecha de las características Δ resulta ser cero y, por tanto, debe aparecer en esta región una onda de choque.

Las condiciones límites en la onda de choque que deben ser satisfechas por la solución de la ecuación de Euler-Tricomi son las siguientes. Sean

θ_1 , η_1 y θ_2 , η_2 los valores de θ y η en ambos lados de la discontinuidad. En primer lugar deben corresponder a la misma curva en el plano físico, es decir,

$$x(\theta_1, \eta_1) = x(\theta_2, \eta_2), \quad y(\theta_1, \eta_1) = y(\theta_2, \eta_2). \quad (112.9)$$

A continuación, la condición de que la componente tangencial de la velocidad en la discontinuidad sea continua (es decir, que las derivadas del potencial ϕ a lo largo de la discontinuidad sean continuas) es equivalente a la condición de que el propio potencial sea continuo:

$$\phi(\theta_1, \eta_1) = \phi(\theta_2, \eta_2); \quad (112.10)$$

el potencial ϕ se determina a partir de la función Φ mediante (111.3). Finalmente, puede obtenerse otra condición a partir de la forma límite de la ecuación (86.6) de la polar del choque, que da una relación entre las componentes de la velocidad a ambos lados de la discontinuidad. Sustituyendo el ángulo χ en (86.6) por $\theta_2 - \theta_1$, y poniendo η_1 , η_2 en lugar de v_1 , v_2 , obtenemos la relación

$$2(\theta_2 - \theta_1)^2 = (\eta_2 - \eta_1)^2 (\eta_2 + \eta_1). \quad (112.11)$$

En el caso presente, la solución de la ecuación de Euler-Tricomi detrás de la onda de choque (la región entre OF y OF' en el plano de la hodógrafa, figura 106) es de la misma forma que (112.5), (112.6), pero como es natural con una constante diferente (que denominaremos $-a_2$) en lugar de a_1 . Las cuatro ecuaciones simultáneas (112.9)-(112.11) determinan el cociente a_2/a_1 y relacionan entre sí las magnitudes η_1 , θ_1 , η_2 , θ_2 . La solución de estas ecuaciones es bastante complicada; se obtienen los siguientes resultados. La onda de choque corresponde al valor $s = 1/(5\sqrt{3} + 8) = 2,78$ del parámetro s de la fórmula (112.8), que da la forma del choque y la distribución de velocidades en la parte delantera de la discontinuidad. En la región detrás del choque (aguas abajo), el coeficiente $-a_2$ es negativo, y $f^2/(f^2 - \eta)$ toma valores negativos. Utilizando como parámetro la magnitud positiva $s = f^2/(\eta - f^2)$, tenemos, en lugar de (112.8), las fórmulas

$$\begin{aligned} x/y^{4/5} &= a_2^{1/5} (2s+1)/2s^{2/5}, & \eta y^{2/5} &= a_2^{2/5} s^{1/5} (s+1), \\ \theta y^{3/5} &= -\frac{1}{3} a_2^{3/5} s^{4/5} (2s+3), \end{aligned} \quad (112.12)$$

en donde

$$a_2/a_1 = (9\sqrt{3}+1)/(9\sqrt{3}-1) = 1.14,$$

y s toma valores desde $1/(5\sqrt{3}-8) = 0,11$ sobre la onda de choque hasta cero a una distancia infinita aguas abajo.

La figura 107 muestra los gráficos de $\eta y^{2/5}$ y $\theta y^{3/5}$ como funciones de $xy^{-4/5}$,

calculadas a partir de las fórmulas (112.8) y (112.12) (tomándose la constante a_1 arbitrariamente como la unidad).

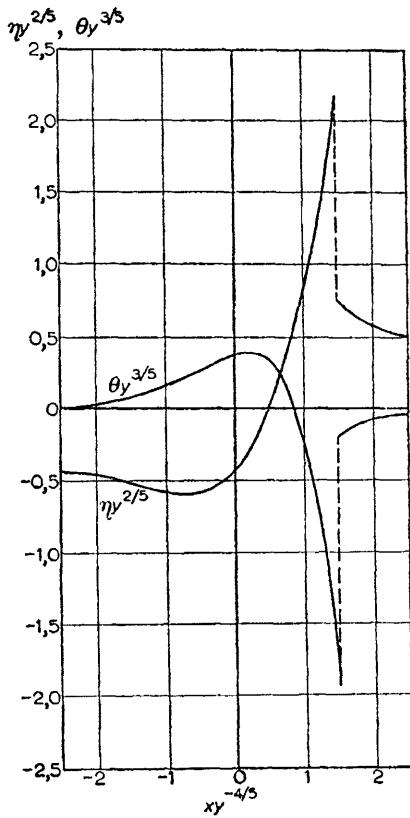


FIG. 107

§ 113. Intersección de las discontinuidades con la línea de transición

Como ejemplo adicional del estudio e investigación de las propiedades del flujo transónico mediante la ecuación de Euler-Tricomi, consideremos la reflexión de una discontinuidad débil en la línea de transición (L. D. LANDAU y E. M. LIFSHITZ, 1954).

Admitiremos que la discontinuidad débil incidente sobre la línea de transición (que alcanza el punto de intersección) es del tipo ordinario, formada (por ejemplo) por el flujo que pasa rodeando un ángulo agudo, es decir, de forma que las primeras derivadas espaciales de la velocidad son discontinuas en ella. Entonces se «refleja» en la línea de transición como otra dis-

continuidad débil, cuya naturaleza, sin embargo, es desconocida *a priori* y debe determinarse analizando el flujo cerca del punto de intersección. Tomaremos este punto como origen en el plano xy , de forma que el eje x tenga la dirección y sentido de la velocidad allí, de modo que corresponda también al origen en el plano de la hodógrafa.

Las discontinuidades débiles coinciden con las características, como sabemos. Supongamos que la característica Oa en el plano de la hodógrafa (figura 108a) corresponde a la discontinuidad incidente. Como las coordenadas x, y son continuas en la discontinuidad, las primeras derivadas Φ_η, Φ_θ deben ser también continuas. Por otra parte, las segundas derivadas de Φ pueden expresarse en función de las primeras derivadas espaciales de la velocidad y , por consiguiente, deben ser discontinuas. Si para designar las discontinuidades de las magnitudes las encerramos entre corchetes, tendremos, por tanto,

$$\text{sobre } Oa \quad [\Phi_\eta] = [\Phi_\theta] = 0; \quad [\Phi_{\theta\theta}], \quad [\Phi_{\theta\eta}], \quad [\Phi_{\eta\eta}] \neq 0. \quad (113.1)$$

Las propias funciones Φ en las regiones 1 y 2 a cada lado de la característica Oa no deben poseer singularidades sobre la característica. Puede construirse una solución de este tipo a partir del segundo miembro de (110.6) con $k = 11/12$, que es proporcional al cuadrado de la diferencia $1 - 4\eta^3/9\theta^2$ (la otra solución independiente $\Phi_{11/12}$ tiene una singularidad en la característica; ver más adelante). Las primeras derivadas de esta función se anulan en la característica y las segundas derivadas son finitas. Además, Φ puede incluir aquellas soluciones particulares de la ecuación de Euler-Tricomi que no den singularidades del flujo en el espacio físico. La solución de esta clase que tiene el menor grado en θ y η es η^θ (§ 111). Así pues, busquemos Φ cerca de la característica Oa a cada lado de la misma en las formas:

$$\begin{aligned} \text{en región 1, } \Phi &= -A\eta^\theta - \pi B\zeta^{2\theta} \Gamma(1/2, 1/2; 3; \zeta), \\ \text{en región 2, } \Phi &= -A\eta^\theta - \pi C\zeta^{2\theta} \Gamma(1/2, 1/2; 3; \zeta), \end{aligned} \quad (113.2)$$

en donde A, B, C son constantes (que demostraremos que son positivas), y $\zeta \equiv 1 - 4\eta^3/9\theta^2$; en las características, $\zeta = 0$.

Una segunda característica en el plano de la hodógrafa (Ob en la figura 108a) corresponde a la discontinuidad débil reflejada en la línea de transición. Se obtiene la forma de la función Φ cerca de esta característica mediante la continuación analítica de las funciones (113.2), utilizando (110.11)-(110.13). Para $k = 11/12$, sin embargo, la función F_1 carece de significado y, por tanto, no podemos utilizar directamente estas fórmulas. En lugar de ello, debemos poner primero $k = (11/12) + \epsilon$, y luego hacer tender ϵ a cero. Aparecen entonces términos logarítmicos de acuerdo con la teoría general de las funciones hipergeométricas.

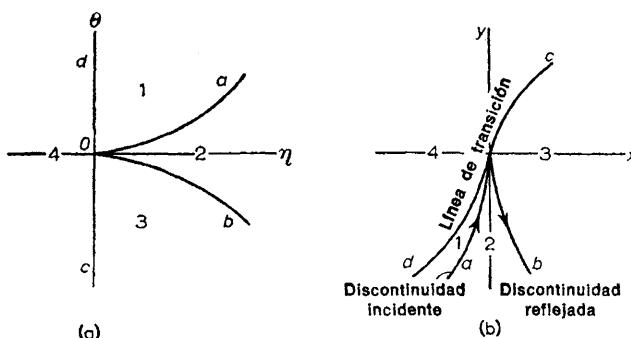


FIG. 108

El cálculo con (110.13) da la expresión siguiente para la función Φ en la región 3 cerca de la característica Ob (retemos los términos hasta el segundo orden en ζ):

$$\Phi = -A\theta\eta + B(-\theta)^{11/6}\{\zeta^2 \log |\zeta| - 108 + 41\cdot1\zeta + 4\cdot86\zeta^2\}; \quad (113.3)$$

a la hora de determinar la naturaleza de la singularidad en la distribución de velocidades en la discontinuidad reflejada, sólo tiene realmente importancia el término logarítmico (ver más adelante).

Una transformación semejante [utilizando la fórmula (110.11)] de la función Φ en la región 1 desde la proximidad de la característica Oa a la de la Ob da una expresión análoga a (113.3), con $C/2$ en lugar de B . Por tanto, la condición de que las coordenadas x e y sean continuas en la característica da

$$C = 2B. \quad (113.4)$$

A continuación, debemos comprobar que el jacobiano Δ (110.5) es positivo, puesto que no debe anularse. Cerca de la característica Oa , Δ puede calcularse a partir de las funciones (113.2) y se ve fácilmente que es positivo; el término principal de Δ es A^2 . Cerca de la característica Ob , un cálculo empleando (113.3) da como término principal en Δ

$$\Delta = -16(3/2)^{1/6}AB\eta^{1/4} \log |\zeta|.$$

Cuando tendemos hacia la característica, el logaritmo tiende a $-\infty$. Por tanto, la condición $\Delta > 0$ da $AB > 0$, es decir, A y B deben tener el mismo signo.

Finalmente, para determinar la forma de la línea de transición, necesitamos una expresión para Φ cerca de las dos mitades superior e inferior del eje $\eta = 0$. Se obtiene una expresión válida cerca de la mitad superior, transformando simplemente la función hipergeométrica en Φ (113.2) en funciones hipergeométricas de argumento $1 - \zeta = 4\eta^3/9\theta^2$, que se anulan para $\eta = 0$.

Al calcular los valores numéricos de los coeficientes de esta transformación y si se retienen sólo los términos de grado más bajo en η , se obtiene

$$\Phi = -A\eta\theta - 18,6B\theta^{11/6}. \quad (113.5)$$

Una continuación analítica dentro de la región cercana a la mitad inferior del eje da

$$\Phi = -A\eta\theta - 18,6\sqrt{3}B(-\theta)^{11/6}; \quad (113.6)$$

los cálculos son semejantes a los utilizados en la obtención de las fórmulas de transformación (110.13).

Podemos ahora determinar la forma de todas las líneas que estamos considerando. En las características tenemos, omitiendo términos de orden superior, $x = \Phi_\eta = -A\theta$, $y = \Phi_\theta = -A\eta$. Supondremos arbitrariamente que la característica superior ($\theta > 0$) corresponde a la discontinuidad débil que alcanza a la intersección. Como la velocidad del gas tiene el sentido positivo del eje de las x , esta discontinuidad es la única que alcanza la intersección si está comprendida en el semiplano $x < 0$. De aquí se deduce que la constante A y, por tanto, también la constante B , debe ser positiva. La ecuación de la línea de discontinuidad en el plano físico es

$$x = -\frac{2}{3}A^{-1/2}(-y)^{3/2}. \quad (113.7)$$

La discontinuidad «reflejada», que corresponde a la característica inferior, viene dada por la ecuación

$$x = \frac{2}{3}A^{-1/2}(-y)^{3/2}, \quad (113.8)$$

es decir, las dos discontinuidades son las ramas de una parábola semicúbica con un vértice en la línea de transición (figura 108b, en la cual están marcadas las líneas y regiones en correspondencia con las de la figura 108a).

Se obtiene la ecuación de la línea de la transición a partir de las funciones (113.5) y (113.6). Efectuando la derivación respecto a η y θ , y poniendo luego $\eta = 0$, obtenemos de (113.5) la ecuación de la parte para la cual $\theta > 0$: $x = -A\theta$, $y = -11/6 \cdot 19,6B\theta^{5/6}$; de aquí que

$$y = -36,0B(-x/A)^{5/6}. \quad (113.9)$$

Esta es la parte inferior de la línea de transición en la figura 108b. Análogamente, obtenemos a partir de (113.6) la ecuación de la parte superior de esta línea:

$$y = \sqrt{3} \cdot 36,0B(x/A)^{5/6}. \quad (113.10)$$

Así pues, ambas discontinuidades y ambas ramas de la línea de transición tienen una tangente común (el eje y) en el punto de intersección O . Cerca

de este punto las dos ramas de la línea de transición están en lados opuestos del eje y .

En la discontinuidad que alcanza O , las derivadas espaciales de la velocidad son discontinuas; como magnitud característica podemos considerar la discontinuidad de la derivada $(\partial \eta / \partial x)_y$. Utilizando el hecho de que

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_y = \frac{\partial(\eta, y)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\eta, y)}{\partial(\eta, \theta)} / \frac{\partial(x, y)}{\partial(\eta, \theta)} = - \frac{\Phi_{\theta\theta}}{\Delta}$$

y las fórmulas (113.2), (113.4), obtenemos

$$[(\partial \eta / \partial x)_y]_2^1 = 26,9B\eta^{-1/4}/A^2 = 29,9B) - y)^{-1/4}/A^{7/4}. \quad (113.11)$$

Así pues, la discontinuidad aumenta como $|y|^{-1/4}$ cuando nos acercamos al punto de intersección.

En la discontinuidad débil reflejada, las derivadas de la velocidad no son discontinuas, pero la distribución de velocidades tiene una singularidad muy curiosa. Calculando las coordenadas $x = \Phi_\eta$ e $y = \Phi_\theta$ como funciones de η, θ a partir de (113.3) (conservando sólo el primer término en el corchete), podemos poner la dependencia de η con x para un valor dado de y cerca de la discontinuidad reflejada en la forma paramétrica

$$\eta = \frac{|y|}{A} + \frac{x - x_0}{2\sqrt{A|y|}} - \frac{1}{6A}|y|\zeta, \quad (113.12)$$

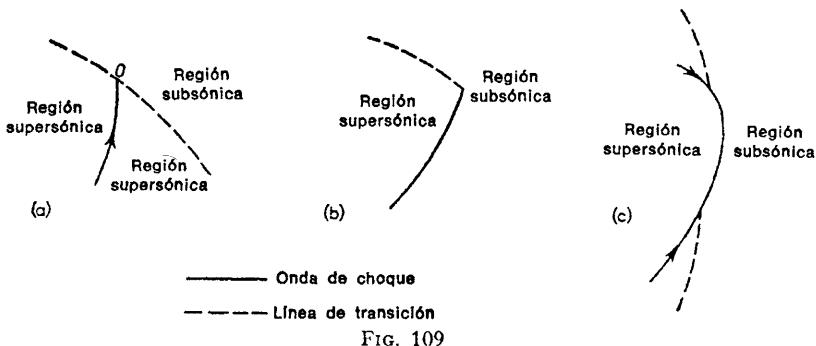
$$x - x_0 = \frac{1}{3\sqrt{A}}|y|^{3/2}\zeta - 5,7\frac{B|y|^{7/4}}{A^{7/4}}\zeta \log |\zeta|,$$

en donde ζ es el parámetro y $x_0 = x_0(y)$ es la ecuación de la discontinuidad en el plano físico.

También puede utilizarse la ecuación de Euler-Tricomi en el problema de si puede terminar una onda de choque en su intersección con la línea de transición (el punto O en la figura 109a, que la onda de choque alcanza[†]). Cerca de dicho punto la onda de choque es débil, es decir, el flujo es transónico. Sin embargo, la ecuación de Euler-Tricomi aparentemente no tiene ninguna solución que pueda describir un flujo de este tipo y satisfacer todas las condiciones necesarias en el choque. Ni, aparentemente, existen soluciones que correspondan a la terminación de la onda de choque y de la línea

[†] El «origen» de la onda de choque puede estar en un punto cualquiera en un flujo supersónico y sus propiedades pueden investigarse sin ninguna dificultad especial; ver el final del § 107.

de transición en su punto de intersección (figura 109b; la onda de choque no alcanza entonces literalmente el punto O , puesto que el flujo en un lado del mismo es subsónico). Esto significa que la onda de choque debe ir hasta el infinito o (si se formó en una región supersónica local; ver el principio de § 112) debe curvarse como se ve en la figura 109c, de modo que esté «saliendo» respecto a sus propios dos extremos. La línea de transición puede terminar en un punto de la intersección con una onda de choque, pero la intensidad de esta última no se anula allí.



CAPÍTULO XIII

FLUJO QUE RODEA A CUERPOS FINITOS

§ 114. Formación de ondas de choque en flujo supersónico que rodea a los cuerpos

Razonamientos sencillos demuestran que, en el flujo supersónico que rodea un cuerpo de forma arbitraria, debe formarse una onda de choque delante del cuerpo. Las perturbaciones del flujo supersónico producidas por la presencia del cuerpo se propagan sólo aguas abajo. De aquí que una corriente supersónica uniforme incidente sobre el cuerpo deberá carecer de perturbaciones, por lo menos hasta el frente delantero del cuerpo. La componente normal de la velocidad del gas deberá entonces ser no nula en la superficie que se encuentra allí, en contradicción con la condición límite necesaria. La resolución de esta dificultad puede estar sólo en la presencia de una onda de choque, como resultado de la cual resultará subsónico el flujo del gas entre éste y el frente o borde delantero del cuerpo.

Así pues, se forma una onda de choque delante del cuerpo cuando el flujo incidente es supersónico y este choque, en general, no toca el cuerpo; suele denominarse *onda de proa*. Delante de la onda de choque el flujo es uniforme; detrás del mismo, el flujo se ve modificado y se desvía rodeando el cuerpo (figura 110a). La superficie de la onda de choque se extiende hasta el infinito y a grandes distancias del cuerpo, en donde el choque es débil, corta a las líneas de corrientes incidentes formando un ángulo que se aproxima al ángulo de Mach.

La onda de choque puede tocar al cuerpo sólo cuando el frente delantero de este último es puntiagudo. Entonces la superficie de discontinuidad tiene un punto en el mismo lugar (figura 110b); debe recordarse que en el flujo asimétrico parte de esta superficie puede ser una discontinuidad débil.

Sin embargo, en el caso de un cuerpo de una forma dada, este tipo de esquema de flujo es sólo posible para velocidades que superen cierto límite; a velocidades inferiores, la onda de choque se «destaca» del frente delantero del cuerpo (ver §§ 104, 105), incluso aunque este último sea puntiagudo.

Consideremos el flujo supersónico que rodea un sólido de revolución (en una dirección paralela a su eje) y determinemos la presión del gas en el

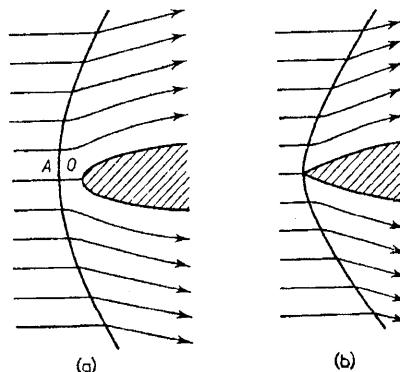


FIG. 110

extremo redondeado delantero del cuerpo (punto de estancamiento O de la figura 110a). A partir de la simetría resulta evidente que la línea de corriente que termina en O corta en ángulo recto a la onda de choque, de modo que la componente de la velocidad en A normal a la superficie de discontinuidad es la misma que la velocidad total. Los valores de las magnitudes en la corriente incidente se designarán, como es lo usual, por el sufijo o subíndice 1, y los valores detrás de la onda de choque en el punto A por el subíndice 2. Los últimos pueden determinarse de una vez mediante las fórmulas (85.7) y (85.8):

$$p_2 = p_1[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)]/(\gamma + 1),$$

$$v_2 = c_1 \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1}, \quad \rho_2 = \rho_1 \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2}.$$

La presión p_0 en el punto O (en donde la velocidad del gas es $v = 0$) puede obtenerse ahora mediante las fórmulas que dan la variación de las magnitudes a lo largo de una línea de corriente. Tenemos (ver § 80, problema)

$$p_0 = p_2 \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v_2^2}{c_2^2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)},$$

y un cálculo sencillo da

$$p_0 = p_1 \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \frac{M_1^2}{[\gamma - (\gamma - 1)/2M_1^2]^{1/(\gamma-1)}}. \quad (114.1)$$

Esta expresión determina la presión en el extremo delantero para un flujo incidente supersónico ($M_1 > 1$).

Para comparación, daremos la fórmula correspondiente a la presión en el

punto de estancamiento obtenida para un retardo adiabático continuo del gas, sin onda de choque (como sería lo correcto en el caso de un flujo incidente subsónico):

$$p_0 = p_1 [1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_1^2]^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (114.2)$$

Para $M_1 = 1$ las dos fórmulas dan el mismo valor de p_0 , pero para $M_1 > 1$ la presión dada por la fórmula (114.2) es siempre mayor que la presión verdadera p_0 dada por la fórmula (114.1).†

En el límite de velocidades muy grandes ($M_1 \gg 1$), la fórmula (114.1) da

$$p_0 = p_1 \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} M_1^{\gamma-1/(\gamma-1)}, \quad (114.3)$$

es decir, la presión p_0 es proporcional al cuadrado de la velocidad incidente. A partir de este resultado se puede obtener la conclusión de que la fuerza de arrastre total que actúa sobre el cuerpo a velocidades grandes comparadas con la del sonido es proporcional al cuadrado de la velocidad. Debe señalarse que este resultado coincide con la ley que rige la fuerza de arrastre que actúa a velocidades pequeñas en comparación con la del sonido, pero todavía suficientemente grandes como para que resulte elevado el número de Reynolds (ver § 45).

No se ha realizado aún ningún estudio o investigación acerca de las propiedades básicas del flujo supersónico que rodea a cuerpos de forma arbitraria. Además de que sabemos que deben formarse ondas de choque, podemos decir también que deben existir dos ondas de choque sucesivas a distancias grandes del cuerpo (L. LANDAU, 1945). Puesto que las perturbaciones producidas por el cuerpo a distancias elevadas son pequeñas, pueden considerarse, por lo tanto, como una onda sonora cilíndrica que sale del eje x (y que pasa a través del cuerpo paralelamente a la dirección del flujo); considerando, como es lo normal, el flujo en un sistema coordenado en el que el cuerpo está en reposo, tendremos una onda en la que el tiempo se representa por x/v_1 y la velocidad de propagación por $c_1/\sqrt{(M_1^2 - 1)}$ (ver § 115). Por consiguiente, podemos aplicar inmediatamente los resultados obtenidos en § 95 para una onda cilíndrica a distancias grandes de la fuente o foco. Así se llega al siguiente esquema de ondas de choque lejos del cuerpo: en el primer choque, la presión aumenta discontinuamente, de modo que detrás

† Esto es cierto en general y no depende de la hipótesis de gas perfecto. Efectivamente, cuando se encuentra presente una onda de choque, la entropía del gas en el punto O es s_0 mayor que s_1 , mientras que si estuviera ausente la onda de choque s_0 sería igual a s_1 . La entalpía es, en cualquier caso, $w_0 = w_1 + v_1^2/2$, puesto que la cantidad $w + v^2/2$ resulta invariante cuando una línea de corriente corta a una discontinuidad de compresión normal. A partir de la identidad termodinámica $dw = Tds + dp/\rho$ se deduce, por tanto, que la derivada $(\partial p/\partial s)_w = -\rho T < 0$, es decir, un aumento de entropía cuando w permanece constante lleva consigo una disminución de presión, y a partir de aquí se obtiene la conclusión mencionada.

de ella existe una condensación; luego sigue una región en la que gradualmente disminuye la presión hasta convertirse en una rarefacción, después de la cual aumenta la presión de nuevo discontinuamente en el segundo choque. La intensidad del choque delantero disminuye proporcionalmente a $r^{-3/4}$, siendo r la distancia al cuerpo, mientras que la distancia entre los dos choques aumenta proporcionalmente a $r^{1/4}$.

Examinemos a continuación la aparición y desarrollo de las ondas de choque cuando aumenta gradualmente el número M_1 . En primer lugar aparece una región supersónica para cierto valor de M_1 menor que la unidad, como una región adjunta a la superficie del cuerpo. Por lo menos se presenta en esta región una onda de choque. Sin embargo, no se sabe si esta onda debe aparecer tan pronto como se forma la región supersónica o si se presenta para algún valor de M_1 más alto (pero todavía menor que la unidad). También se desconoce si la onda de choque abandona la superficie del cuerpo cuando se forma por primera vez (y es aún muy débil) o empieza a alguna distancia. Como es natural, en el límite de la zona supersónica la onda de choque se extingue; todavía no se ha llevado a cabo ninguna investigación de las propiedades de la onda de choque cerca del punto en donde se extingue (como ya se mencionó al principio del § 112).

Cuando M_1 aumenta, la región supersónica se expande y aumenta la longitud de la onda de choque; para $M_1 = 1$ alcanza el infinito. Esta onda de choque es aquélla cuya existencia se ha demostrado para $M_1 = 1$ en § 112 (para el caso bidimensional); se sigue también que la onda de choque debe aparecer primeramente para $M_1 < 1$.

Tan pronto como M_1 supera a la unidad, aparece otra onda de choque, la onda de proa, que intersecta a la totalidad de la corriente gaseosa incidente de anchura infinita. Cuando M_1 es exactamente la unidad, el flujo delante del cuerpo es totalmente subsónico (§ 112). Para $M_1 > 1$, pero arbitrariamente cerca de la unidad; por consiguiente, la parte supersónica de la corriente incidente y, en consecuencia, la onda de proa, están arbitrariamente lejos delante del cuerpo. Cuando M_1 aumenta aún más, la onda de proa se acerca gradualmente al cuerpo.

§ 115. Flujo supersónico que rodea a un cuerpo puntiagudo

La forma que debe poseer un cuerpo para ser aerodinámico en flujo supersónico, es decir, adaptarse a las líneas de corriente, de modo que esté sometido a una fuerza de arrastre o resistencia lo más pequeña posible, es muy diferente de la forma correspondiente en el caso del flujo subsónico. Podemos recordar que en este último caso los cuerpos aerodinámicos eran aquellos que tenían forma alargada, con la parte delantera redondeada, mientras que la trasera terminaba en punta. Sin embargo, en el flujo super-

sónico que rodease tal cuerpo se formaría una onda de choque muy intensa delante de él, dando origen a un notable incremento de la resistencia o arrastre. Por consiguiente, en el caso supersónico un cuerpo aerodinámico largo debe tener ambos extremos en forma puntiaguda, debiendo ser pequeño el ángulo de dichas puntas; si el cuerpo está inclinado respecto a la dirección del flujo, también deberá ser pequeño el ángulo entre ellos (ángulo de ataque).

En el flujo supersónico que rodea a un cuerpo de esta forma, la velocidad del gas es en todo punto muy diferente en valor o dirección de la velocidad incidente, incluso cerca del cuerpo, y las ondas de choque formadas son débiles; la intensidad de la onda de proa disminuye cuando lo hace el ángulo de la parte delantera del cuerpo. Lejos del mismo, el flujo gaseoso se compone de ondas sonoras salientes. Puede considerarse que la parte principal del arrastre se debe a la conversión de energía cinética del cuerpo móvil en la energía de las ondas sonoras que emite. Este arrastre, que se produce sólo en el flujo supersónico, se denomina *arrastre o resistencia de onda*; † puede calcularse de una forma general que es válida para un cuerpo de sección recta cualquiera (T. VON KÁRMÁN, 1936).

La naturaleza del flujo que acabamos de describir hace posible utilizar la ecuación linealizada (106.4) para el potencial:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \quad (115.1)$$

en donde para mayor brevedad hemos introducido la constante positiva

$$\beta^2 = (v_1^2 - c_1^2)/c_1^2; \quad (115.2)$$

el eje x tiene la dirección del flujo, el subíndice 1 designa magnitudes que pertenecen a la corriente incidente y $1/\beta$ es exactamente la tangente del ángulo de Mach.

La ecuación (115.1) es formalmente idéntica a la ecuación de ondas bidimensional, representando x/v_1 el tiempo y v_1/β la velocidad de propagación de las ondas. Esto no es accidental; el significado físico consiste en que el gas lejos del cuerpo posee un flujo que se compone, como ya hemos mencionado, de ondas sonoras salientes «emitidas» por el cuerpo. Si se considera el gas en el infinito como estando en reposo, mientras que es el cuerpo el que está en movimiento, la sección recta del cuerpo en un punto determinado del espacio variará con el tiempo y la distancia a la que se habrá propagado la perturbación en el instante t (es decir, la distancia hasta el cono de Mach) aumentará proporcionalmente con $v_1 t/b$. Así pues, tendremos

† Se obtiene el arrastre total sumando al arrastre de onda las fuerzas debidas al rozamiento y a la separación en la parte trasera del cuerpo.

una emisión bidimensional de sonido (que se propaga con la velocidad v_1/b) por el perfil variable.

Utilizando como guía esta «analogía sónica», podemos escribir inmediatamente a continuación la expresión buscada para el potencial de velocidades del gas, utilizando la fórmula (73.15) para el potencial de las ondas sonoras cilíndricas emitidas por un foco o fuente (a distancias grandes en comparación con la propia dimensión del foco) y sustituyendo ct por x/β .

Sea $S(x)$ el área de la sección recta del cuerpo en un plano perpendicular a la dirección del flujo (el eje x), y l la longitud del cuerpo en dicha dirección; tomemos el origen en el extremo delantero del cuerpo. Entonces

$$\phi(x, r) = -\frac{v_1}{2\pi} \int_0^{x-\beta r} \frac{S'(\xi) d\xi}{\sqrt{[(x-\xi)^2 - \beta^2 r^2]}}; \quad (115.3)$$

se toma el límite inferior como cero, puesto que $S(x) \equiv 0$ para $x < 0$ (y para $x > l$).

Así pues, hemos determinado completamente el flujo del gas a distancias r del eje que sean grandes en comparación con el espesor del cuerpo.[†] Como es natural, las perturbaciones que abandonan el cuerpo en un flujo supersónico se propagan sólo dentro de la región detrás del cono $x - \beta r = 0$, cuyo vértice está en el extremo delantero del cuerpo; delante de este cono tenemos simplemente $\phi = 0$ (flujo uniforme). Entre los conos $x - \beta r = 0$ y $x - \beta r = l$, el potencial está determinado por la fórmula (115.3); detrás de este último cono (cuyo vértice está en el extremo trasero del cuerpo) el límite superior de la integral en (115.3) es evidentemente la constante l . En la aproximación considerada ambos conos son discontinuidades débiles; en realidad, son ondas de choque débiles.

La fuerza de rozamiento o arrastre que actúa sobre el cuerpo es precisamente la componente x del impulso transportado por las ondas sonoras por unidad de tiempo. Tomemos una superficie cilíndrica de radio r grande y eje situado a lo largo del eje x . La componente x de la densidad de flujo del impulso a través de esta superficie es $\Pi_{xr} = \rho v_r (v_x + v_1) \cong \rho_1 (\partial \phi / \partial r) (v_1 + \partial \phi / \partial x)$. Al integrar respecto a toda la superficie, el primer término da cero, puesto que la integral de ρv_r es el flujo de masa total que atraviesa la superficie, que es cero. Así pues,

$$F_x = -2\pi r \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_{xr} dx = -2\pi r \rho_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx. \quad (115.4)$$

[†] En el caso de un flujo axial que rodea un cuerpo con simetría axial, es válida la fórmula (115.3) para todo valor de r hasta la superficie del cuerpo. En particular, podemos deducir a partir de ella la fórmula (105.6) correspondiente al flujo que rodea a un cono estrecho.

A distancias grandes (en la «región de ondas»), las derivadas del potencial pueden calcularse como en § 73 [ver fórmula (73.17)], y tenemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{v_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\beta}{2r}} \int_0^{x-\beta r} \frac{S''(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi-\beta r)}}.$$

Esta expresión se sustituye en (115.4) y la integral al cuadrado se escribe como una integral doble; poniendo por brevedad $x-\beta r = X$, obtenemos

$$F_x = \frac{\rho_1 v_1^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^X \int_0^X \frac{S''(\xi_1) S''(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dX}{\sqrt{[(X-\xi_1)(X-\xi_2)]}}.$$

Puede efectuarse la integración respecto a X ; después de cambiar el orden de integración, la integral se extiende desde el valor de ξ_1 o ξ_2 que sea mayor hasta el infinito. En primer lugar, tomaremos como límite superior una cantidad grande pero finita L , que posteriormente haremos tender a infinito. Así

$$F_x = -\frac{\rho_1 v_1^2}{2\pi} \int_0^L \int_0^{\xi_1} S''(\xi_1) S''(\xi_2) [\log(\xi_2 - \xi_1) - \log 4L] d\xi_1 d\xi_2.$$

La integral del término que contiene el factor constante $\log 4L$ es nula, puesto que no sólo se anula el área $S(x)$, sino también su derivada $S'(x)$ en los extremos puntiagudos del cuerpo. Por consiguiente, tenemos

$$F_x = -\frac{\rho_1 v_1^2}{2\pi} \int_0^L \int_0^{\xi_1} S''(\xi_1) S''(\xi_2) \log(\xi_2 - \xi_1) d\xi_1 d\xi_2,$$

o sea,

$$F_x = -\frac{\rho_1 v_1^2}{4\pi} \int_0^L \int_0^L S''(\xi_1) S''(\xi_2) \log|\xi_2 - \xi_1| d\xi_1 d\xi_2. \quad (115.5)$$

Esta es la fórmula requerida para el arrastre por la onda de un cuerpo delgado terminado en punta.[†] El orden de magnitud de la integral es $(S/l^2)^2 l^2$, siendo S el área de cierta sección recta del cuerpo. De aquí que $F_x \sim \rho_1 v_1^2 S^2 / l^2$. El coeficiente de arrastre para un cuerpo alargado puede definirse de modo convencional, en función del cuadrado de la longitud, como $C_x = F_x / \rho_1 v_1^2 l^2 / 2$. Entonces, en este caso

$$C_x \sim S^2 / l^4; \quad (115.6)$$

es proporcional al cuadrado del área de la sección recta.

[†] El empuje ascensional (en el caso de un cuerpo que no posea simetría axial o de ángulo de ataque no nulo) es cero en la aproximación que estamos considerando aquí.

Podemos señalar la analogía formal completa que existe entre la fórmula (115.5) y la fórmula (47.4) correspondiente al arrastre inducido sobre un ala delgada; la función $\Gamma(z)$ en (47.4) se ha sustituido aquí por la función $v_1 S'(x)$. Podemos tener en cuenta esta analogía y utilizar el método descrito al final del § 47 para calcular la integral en (115.5).

También debe señalarse que el arrastre por onda dado por la fórmula (115.5) resulta invariable si se invierte el sentido del flujo: la integral es independiente del sentido en que se extiende el cuerpo. Esta propiedad de la fuerza de arrastre es característica de la teoría lineal.[†]

Finalmente, estudiaremos el margen de aplicación de esta fórmula. Este tema puede enfocarse del modo siguiente. La amplitud de oscilación de las partículas del gas en las ondas sonoras «emitidas» por el cuerpo es del orden de magnitud del espesor del cuerpo, que designaremos por δ . La velocidad de las oscilaciones es, de acuerdo con ello, del orden del cociente $\delta:(l/v_1)$ entre la amplitud δ y el período l/v_1 de la onda. La aproximación lineal para la propagación de ondas sonoras (es decir, la ecuación linealizada para el potencial) requiere siempre, sin embargo, que la velocidad del gas sea pequeña en comparación con la velocidad del sonido, es decir, debemos tener que $v_1/\beta \gg v_1\delta/l$, o, lo que en la práctica es lo mismo,

$$M_1 \ll l/\delta. \quad (115.7)$$

Así pues, la teoría dada anteriormente resulta inaplicable para valores de M_1 comparables con la razón existente entre la longitud y el espesor del cuerpo.

Como es natural, también es aplicable en el caso límite opuesto, en el que M_1 es cercano a la unidad y resulta invalidada la linealización de las ecuaciones.

PROBLEMA

Determinar la forma del sólido alargado de revolución que experimenta la menor fuerza de arrastre para un volumen V y longitud l dados.

Solución. Teniendo en cuenta la analogía mencionada en el texto, utilizaremos una variable θ tal que $x = l/2(1 - \cos \theta)$ ($0 \leq \theta \leq \pi$; el origen de x está en el extremo delantero del cuerpo); y escribamos la función $f(x) = S'(x)$ como

$$f = -l \sum_{n=2}^{\infty} A_n \operatorname{senn} n\theta;$$

la condición $S = 0$ para $x = 0$ y l significa que sólo pueden aparecer en la suma términos con $n \geq 2$. El coeficiente de arrastre es, entonces,

$$C_x = \frac{1}{4}\pi \sum_{n=2}^{\infty} n A_n^2.$$

[†] También es cierta en la teoría del arrastre de onda sobre alas delgadas dada en el § 117.

Se calculan el área $S(x)$ y el volumen total V del cuerpo a partir de la función $f(x)$ como

$$S = \int_0^x f(x)dx, \quad V = \int_0^l S(x)dx.$$

Un cálculo simple da $V = \pi l^3 A_2 / 16$, es decir, el volumen queda determinado por el coeficiente A_2 solamente. Por consiguiente, se alcanza el mínimo F_x si $A_n = 0$ para $n \geq 3$. El resultado es

$$C_{x,\min} = (128/\pi)(V/l^3)^2 = (9\pi/2)(S_{\max}/l^2)^2.$$

El área de la sección recta del cuerpo es $S = l^2 A_2 / 3 \operatorname{sen}^3 \theta$, y, por consiguiente, el radio viene dado en función de x por $R(x) = \sqrt{2}(8/\pi)(V/3l^4)^{1/2}[x(l-x)]^{3/4}$. El cuerpo es simétrico respecto al plano $x = l/2$.†

§ 116. Flujo subsónico que rodea un ala delgada

Consideremos el flujo subsónico de un gas que rodea un ala delgada aerodinámica. Como sucede en el caso de un fluido incompresible, un ala que sea aerodinámica o currentilínea al flujo subsónico debe tener un borde posterior delgado y agudo, mientras que el delantero debe ser redondeado; el ángulo de ataque debe ser pequeño. Tomaremos la dirección del flujo como el eje x y la dirección del propio ala como eje z .

La velocidad del gas en un punto cualquiera‡ difiere grandemente de la velocidad v_1 de la corriente incidente, de modo que podemos utilizar para el potencial la ecuación linealizada:

$$(1 - M_1^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (116.1)$$

En la superficie del ala (que llamaremos C) la velocidad debe ser tangencial; mediante el vector unitario \mathbf{n} a lo largo de la normal a la superficie, podemos escribir esta condición como

$$\left(v_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z = 0.$$

Puesto que el ala es aplana y el ángulo de ataque es pequeño, la normal \mathbf{n} es casi paralela al eje y , de modo que $|n_y|$ es casi la unidad, mientras que n_x y n_z son pequeños. Por tanto, podemos despreciar los términos de segundo orden $n_x \partial \phi / \partial x$ y $n_z \partial \phi / \partial z$, y sustituir n_y por ± 1 (+1 en la superficie superior y -1 en la superficie inferior). Así pues, la condición límite de la

† Aunque $R(x)$ se anula en los extremos del cuerpo, $R'(x)$ resulta infinita, es decir, el cuerpo no termina en un punto; por consiguiente, la aproximación que fundamenta el método no resulta estrictamente aplicable cerca de los extremos.

‡ Excepto en una pequeña región cerca del borde de ataque del ala, en donde existe una línea de estancamiento.

ecuación (116.1) es

$$v_1 n_x \pm \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \quad (116.2)$$

Como se supone que el ala es delgada, en su superficie puede tomarse $\partial \phi / \partial y$ como el valor límite para $y \rightarrow 0$.

La solución de la ecuación (116.1) con la condición (116.2) puede reducirse fácilmente a la resolución de un problema de flujo incompresible. Para ello, utilizaremos en lugar de las coordenadas x , y , z las variables

$$x' = x, \quad y' = y\sqrt{(1 - M_1^2)}, \quad z' = z\sqrt{(1 - M_1^2)}. \quad (116.3)$$

Con estas variables la ecuación (116.1) se reduce a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} = 0, \quad (116.4)$$

es decir, la ecuación de Laplace. La superficie del cuerpo se sustituye por otra, C' , obtenida dejando invariables los perfiles de las secciones rectas cuando se corta por planos paralelos al plano xy , pero reduciendo en la razón $\sqrt{(1 - M_1^2)}$ todas las dimensiones en la dirección del ala (dirección z).

La condición límite (116.2) se reduce entonces a

$$v_1 n_x \pm \frac{\partial \phi}{\partial y'} \sqrt{(1 - M_1^2)} = 0,$$

y puede volverse a obtener la forma anterior introduciendo en lugar de ϕ un nuevo potencial ϕ' :

$$\phi' = \phi \sqrt{(1 - M_1^2)}. \quad (116.5)$$

Tenemos entonces para ϕ' la ecuación de Laplace con la condición límite

$$v_1 n_x \pm \frac{\partial \phi'}{\partial y'} = 0, \quad (116.6)$$

que debe satisfacerse para $y' = 0$.

Sin embargo, la ecuación (116.4) con la condición límite (116.6) es la ecuación que debe satisfacer el potencial de velocidad de un fluido incompresible que fluye junto a la superficie C' . Así pues, el problema de determinar la distribución de velocidades en el flujo compresible que rodea un ala con superficie C es equivalente al de hallar la distribución de velocidades en el flujo incompresible que rodea un ala de superficie C' .

A continuación, consideraremos la fuerza ascensional F_y que actúa sobre el ala. En primer lugar, observemos que la deducción de la fórmula de Yukovski [dada en § 37 (37.4)] es totalmente válida para un fluido compresible, puesto que puede sustituirse la densidad variable ρ del fluido en esta aproximación por una constante ρ_1 . Así pues,

$$F_y = -\rho_1 v_1 \int \Gamma dz, \quad (116.7)$$

en donde la integración se realiza a lo largo de la envergadura l_z del ala. A partir de la relación (116.5) y de la igualdad de los perfiles transversales de las alas C y C' se deduce que la circulación de la velocidad Γ en el flujo compresible que rodea el ala C está relacionada con la circulación Γ' en el flujo incompresible que rodea el ala C' por

$$\Gamma' = \Gamma \sqrt{(1 - M_1^2)}. \quad (116.8)$$

Sustituyendo esta expresión en (116.7) y cambiando a una integración respecto a z' , obtenemos

$$F_y = -\rho_1 v_1 \int \Gamma' dz' / (1 - M_1^2).$$

El numerador es la fuerza ascensional sobre el ala C' en un fluido incompresible. Designándola por F'_y , tenemos

$$F_y = F'_y / (1 - M_1^2). \quad (116.9)$$

Introduciendo los coeficientes de empuje ascensional

$$C_y = F_y / \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 l_x l_z, \quad C'_y = F'_y / \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 l_x l_z'$$

(en donde l_x , l_z y l_x , $l_z' = l_z \sqrt{(1 - M_1^2)}$ son las longitudes de las alas C y C' en las direcciones x y z) podemos volver a escribir estas ecuaciones como

$$C_y = C'_y / \sqrt{(1 - M_1^2)}. \quad (116.10)$$

En el caso de alas de gran envergadura (y perfil constante), el coeficiente de empuje ascensional en un fluido incompresible es proporcional al ángulo de ataque y no depende de la longitud ni de la anchura del ala:

$$C'_y = \text{constante} \times \alpha, \quad (116.11)$$

en donde la constante depende sólo de la forma del perfil (ver § 46). Por consiguiente, en este caso, (116.10) puede sustituirse por

$$C_y = C_y^{(0)} / \sqrt{(1 - M_1^2)}, \quad (116.12)$$

en donde C_y y $C_y^{(0)}$ son los coeficientes de empuje ascensional para la misma ala en fluidos compresible e incompresible, respectivamente. Así pues, tenemos la regla de que la fuerza ascensional que actúa sobre un ala larga en un fluido compresible es $1/\sqrt{(1 - M_1^2)}$ veces la que actúa sobre la misma ala (y el mismo ángulo de ataque) en un fluido incompresible (L. PRANDTL, 1922, H. GLAUERT, 1928).

Para la fuerza de arrastre o de rozamiento pueden obtenerse relaciones semejantes. Junto con la fórmula de Yukovski para la fuerza ascensional, la fórmula (47.4) para el arrastre inducido sobre un ala es también totalmente aplicable al flujo compresible. Efectuando las mismas transformaciones

(116.3) y (116.8), se obtiene

$$F_x = F'_x / \sqrt{1 - M_1^2}, \quad (116.13)$$

en donde F'_x es el arrastre sobre el ala C' en un fluido incompresible. Cuando aumenta la envergadura, el arrastre inducido tiende a un límite constante (§ 47). En el caso de alas suficientemente largas podemos, por tanto, sustituir F'_x por $F_x^{(0)}$ (el arrastre en un fluido compresible para el ala C). Entonces el coeficiente de arrastre es

$$C_x = C_x^{(0)} / (1 - M_1^2). \quad (116.14)$$

Comparando esta expresión con (116.12), vemos que el cociente C_v^2/C_x es el mismo para fluidos compresibles e incompresibles.

Como es natural, todos los resultados dados aquí dejan de ser válidos para valores de M_1 cercanos a la unidad, puesto que entonces resulta inaplicable la teoría lineal.

§ 117. Flujo supersónico que rodea un ala

Si el ala es aerodinámica o currentilínea en una corriente supersónica debe ser afilada por ambos extremos, como los cuerpos delgados estudiados en § 115.

Consideraremos ahora sólo el flujo que rodea un ala delgada de envergadura muy grande, siendo el perfil constante a lo largo de la misma. Considerando la envergadura como infinita, tenemos un flujo gaseoso bidimensional (en el plano xy). En lugar de la ecuación (115.1), tendremos ahora para el potencial la ecuación

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \quad (117.1)$$

con la condición límite

$$[\partial \phi / \partial y]_{y \rightarrow \pm 0} = \mp v_1 n_x, \quad (117.2)$$

en donde los signos \mp del segundo miembro se relacionan con la superficie superior e inferior del ala, respectivamente. La ecuación (117.1) es una ecuación de ondas monodimensional y su solución general es de la forma $\phi = f_1(x - \beta y) + f_2(x + \beta y)$. El hecho de que las perturbaciones que afectan al flujo arrancan del propio cuerpo, significa que encima del ala ($y > 0$) debemos tener $f_2 \equiv 0$, de modo que $\phi = f_1(x - \beta y)$, y debajo del ala ($y < 0$) $\phi = f_2(x + \beta y)$. Para concretar, consideraremos la región por encima del ala en donde $\phi = f_1(x - \beta y)$. La función f se determina a partir de la condición (117.2) haciendo $n_x \approx -\zeta'_1(x)$, en donde $y = \zeta_1(x)$ es la ecuación de la

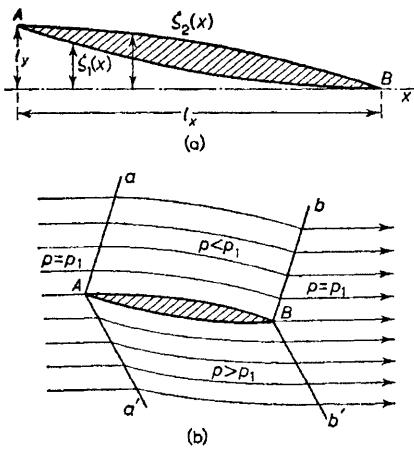


FIG. 111

parte superior del perfil del ala (figura 111a). Tenemos $[\partial\phi/\partial y]_{y \rightarrow +0} = -\beta f'(x) = v_1 \xi'_2(x)$; de aquí que $f = -v_1 \xi_2(x)/\beta$. Así pues, la distribución de velocidades para $y > 0$ viene dada por el potencial

$$\phi(x, y) = -(v_1/\beta)\xi_2(x - \beta y). \quad (117.3)$$

De modo semejante obtenemos, para $y < 0$, $\phi = (v_1/\beta)\xi_1(x + \beta y)$, en donde $y = \xi_1(x)$ es la ecuación de la parte inferior del perfil. Debe señalarse que el potencial y , por lo tanto, las demás magnitudes son constantes a lo largo de las rectas $x \pm \beta y = \text{constante}$ (las características), de acuerdo con los resultados de § 107, de los cuales es un caso particular la solución que acabamos de hallar.

El esquema del flujo es cualitativamente del modo siguiente. Por los bordes afilados delantero y trasero salen o se desprenden discontinuidades débiles (aAa' y bBb' en la figura 111b).† En las regiones delante de la discontinuidad aAa' y detrás de bBb' el flujo es uniforme, pero entre ellas se desvía de modo que rodea la superficie del ala; el flujo aquí es una onda simple y en la aproximación lineal presente las características son todas paralelas e inclinadas formando el ángulo de Mach respecto a la corriente incidente.

† Esta afirmación es válida solamente en la aproximación utilizada aquí. En realidad, no tenemos discontinuidades débiles, sino ondas de choque débiles u ondas de rarefacción centradas estrechas, dependiendo de la dirección en que se haga girar a la velocidad. Para el perfil indicado en la figura 111b, por ejemplo, Aa y Bb son ondas de rarefacción, mientras que Aa' y Bb' son ondas de choque.

La línea de corriente que sale del borde trasero (B en la figura 111b) es realmente una discontinuidad tangencial de la velocidad (que en la práctica resulta ser una estela turbulenta estrecha).

La distribución de presiones viene dada por la fórmula $p - p_1 = -\rho_1 v_1 \partial \phi / \partial x$; el término en v_y^2 de la fórmula general (106.5) puede omitirse aquí, puesto que v_x y v_y son del mismo orden de magnitud. Sustituyendo (117.3) e introduciendo el *coeficiente de presión* C_p , obtenemos en el semiplano superior $C_p = (p - p_1)/\rho_1 v_1^2/2 = 2\zeta'_2(x - \beta y)/\beta$. En particular, el coeficiente de presión en la superficie superior del ala es

$$C_{p2} = 2\zeta'_2(x)/\beta. \quad (117.4)$$

Análogamente, encontramos en la superficie inferior

$$C_{p1} = -2\zeta'_1(x)/\beta. \quad (117.5)$$

Debe señalarse que la presión en un punto cualquiera del perfil del ala depende sólo de la pendiente del contorno del perfil en dicho punto.

Como el ángulo entre el contorno del perfil y el eje x es siempre pequeño, la componente vertical de la fuerza de la presión puede considerarse, con suficiente precisión, como la propia presión. La fuerza de ascensión resultante sobre el ala es igual a la diferencia de las presiones en las superficies inferior y superior. Por tanto, el coeficiente del empuje ascensional vale

$$C_y = \frac{1}{l_x} \int_0^{l_x} (C_{p1} - C_{p2}) dx = \frac{4l_y}{\beta l_x};$$

ver figura 111 para la definición de l_x , l_y . Definimos el ángulo de ataque α como el ángulo entre la cuerda AB trazada desde los extremos del perfil (figura 111) y el eje x : $\alpha \approx l_y/l_x$, y así se obtiene la siguiente fórmula simple:

$$C_y = 4\alpha/\sqrt{(M_1^2 - 1)} \quad (117.6)$$

(J. ACKERET, 1925). Vemos que la fuerza ascensional queda determinada por el ángulo de ataque y no depende de la forma de la sección recta del ala, a diferencia de lo que ocurre en el caso del flujo subsónico [ver fórmula (48.7)].

Determinemos a continuación la fuerza de rozamiento o arrastre sobre el ala (es decir, el arrastre de onda, que es de la misma naturaleza que el que aparece en el caso de cuerpos delgados; ver § 115). Para ello, debemos tomar la componente x de la fuerza de la presión e integrar respecto a todo el contorno del perfil. Entonces resulta que el coeficiente de rozamiento o arrastre vale

$$C_x = \frac{2}{\beta l_x} \int_0^{l_x} (\zeta'_1'^2 + \zeta'_2'^2) dx. \quad (117.7)$$

Ponemos $\zeta'_1' = \theta_1 - \alpha$, $\zeta'_2' = \theta_2 - \alpha$, en donde $\theta_1(x)$ y $\theta_2(x)$ son los ángulos entre

las partes superior e inferior del contorno y la cuerda AB . Las integrales de θ_1 y θ_2 son evidentemente cero y, por consiguiente, el resultado es

$$C_x = [4\alpha^2 + 2(\bar{\theta}_1^2 + \bar{\theta}_2^2)]/\sqrt{(\bar{M}_1^2 - 1)}; \quad (117.8)$$

en donde la barra designa un promedio respecto a x . Para un ángulo de ataque dado, se ve que el coeficiente de arrastre es mínimo para un ala en forma de una placa plana (en la cual $\theta_1 = \theta_2 = 0$). En este caso $C_x = \alpha C_y$. Si aplicamos la fórmula (117.8) a una superficie rugosa, encontramos que la rugosidad puede dar como resultado un aumento considerable en el arrastre, aunque la altura de las irregularidades sea pequeña.[†] En efecto, el arrastre o rozamiento es independiente de la altura de las irregularidades si la pendiente media de la superficie, es decir, el cociente promedio entre las alturas de las irregularidades y la distancia entre ellas permanece constante.

Finalmente, podemos señalar el punto siguiente. Aquí, como en otros casos, cuando hablamos de un ala estamos implicando que sus bordes o aristas son perpendiculares al flujo. La generalización al caso de un ángulo cualquiera γ entre la dirección del flujo y el borde (*ángulo de derrape*) es totalmente obvia. Resulta evidente que las fuerzas sobre un ala infinita de sección recta constante dependen solamente de la componente de la velocidad incidente normal a sus bordes; en un fluido ideal, la componente de la velocidad paralela a los bordes no da como resultado ninguna fuerza. Las fuerzas que actúan sobre un ala que forma un ángulo de derrape diferente de $\pi/2$ en una corriente con un número de Mach M_1 son las mismas que las que actúan sobre la misma ala para $\gamma = \pi/2$ en una corriente con un número de Mach $M_1 \sin \gamma$. En particular, si $M_1 > 1$ pero $M_1 \sin \gamma < 1$, el arrastre de onda, que es peculiar al flujo supersónico, dejará de presentarse.

§ 118. Ley de la semejanza transónico

La teoría del flujo supersónico y subsónico que rodea a cuerpos delgados, que ha sido desarrollada en §§ 115-117, no es aplicable al flujo transónico, en donde la ecuación lineal para el potencial resulta no ser válida. En este caso el esquema del flujo en todo el espacio viene dado por la ecuación no lineal (106.10):

$$2\alpha_* \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (118.1)$$

(o, en el caso de flujo bidimensional, mediante la ecuación de Euler-Tricomi

[†] Pero nunca mayor que el espesor de la capa límite.

equivalente). Sin embargo, la solución de estas ecuaciones es muy difícil en los casos particulares. Por consiguiente, resultan ser de gran interés las reglas de semejanza que pueden establecerse para estos flujos, aunque no permitan hallar las soluciones particulares.

Consideremos primeramente el flujo bidimensional y sea

$$Y = \delta f(x/l) \quad (118.2)$$

la ecuación que da la forma del contorno delgado alrededor del cual tiene lugar el flujo, mientras que l es su longitud (en la dirección del flujo) y δ algún espesor característico ($\delta \ll l$). Variando los dos parámetros l y δ , obtenemos una familia de contornos semejantes.

La ecuación del movimiento es

$$2\alpha_* \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad (118.3)$$

con las condiciones límites siguientes. En el infinito, la velocidad es igual a la velocidad v_1 de la corriente sin perturbar, es decir,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = M_{1*} - 1 = (M_1 - 1)/\alpha_*; \quad (118.4)$$

véase la definición del potencial ϕ , (106.9). En el perfil la velocidad debe ser tangencial:

$$v_y/v_x \approx \partial \phi / \partial y = dY/dX = (\delta/l)f'(x/l); \quad (118.5)$$

puesto que el perfil es delgado, esta condición puede imponerse a $y = 0$.

Introduzcamos las siguientes variables adimensionales:

$$x = l\bar{x}, \quad y = l\bar{y}/(\theta\alpha_*^{1/3}), \quad \phi = (l\theta^{2/3}/\alpha_*^{1/3})\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{y}); \quad (118.6)$$

en donde $\theta = \delta/l$ representa el espesor angular del ala o ángulo de ataque. Entonces

$$2 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2},$$

con las siguientes condiciones límites:

$$\partial \bar{\phi} / \partial \bar{x} = K, \quad \partial \bar{\phi} / \partial \bar{y} = 0 \text{ a infinito},$$

$$\partial \bar{\phi} / \partial \bar{y} = f'(\bar{x}) \text{ at } \bar{y} = 0,$$

siendo

$$K = (M_1 - 1)/(\alpha_* \theta)^{2/3}. \quad (118.7)$$

Estas condiciones contienen sólo un parámetro, K . Así pues, hemos obtenido la ley de semejanza requerida: dos flujos bidimensionales transónicos con

el mismo valor de K son semejantes, como puede verse en las fórmulas (118.6) (S. V. FALKOVICH, 1947).

Debe señalarse que en la expresión (118.7) interviene un solo parámetro α_* que caracteriza las propiedades del propio gas. Por consiguiente, la ley de semejanza determina también la semejanza respecto a la variación de la clase de gas.

En la aproximación que estamos considerando aquí, la presión viene dada por la fórmula $p - p_1 \approx -\rho_1 v_1 (v_x - v_1)$. Un cálculo con el empleo de las expresiones (118.6) muestra que el coeficiente de presión en el perfil es de la forma

$$C_p = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2} \rho_1 v_1^2} = \frac{\theta^{2/3}}{\alpha_*^{1/3}} P\left(K, \frac{x}{l}\right).$$

Los coeficientes de rozamiento y de empuje ascensional vienen dados por integrales a lo largo del contorno del perfil:

$$C_x = \frac{1}{l} \oint C_p \frac{dy}{dx} dx,$$

$$C_y = \frac{1}{l} \oint C_p dx,$$

y, por tanto, son de la forma[†]

$$C_x = \frac{\theta^{5/3}}{\alpha_*^{1/3}} f_x(K), \quad C_y = \frac{\theta^{2/3}}{\alpha_*^{1/3}} f_y(K). \quad (118.8)$$

De un modo totalmente análogo podemos obtener la ley de semejanza para un cuerpo tridimensional delgado, cuya forma venga dada por ecuaciones de la forma

$$Y = \delta f_1(x/l), \quad Z = \delta f_2(x/l), \quad (118.9)$$

con los dos parámetros δ y l ($\delta \ll l$). Existe una diferencia importante respecto al caso bidimensional, debido a que el potencial tiene una singularidad logarítmica para $y \rightarrow 0$, $z \rightarrow 0$ (véase, por ejemplo, las fórmulas que corresponden al flujo que rodea un cono delgado en § 105). De aquí que la condición límite en el eje x deba determinar, no las propias derivadas $\partial \phi / \partial y$, $\partial \phi / \partial z$, sino los productos $y \partial \phi / \partial y = Y dY/dx$, $z \partial \phi / \partial z = Z dZ/dx$, que permanecen finitos. Es fácil ver que en este caso la transformación de semejanza es

$$x = l\bar{x}, \quad y = (l/\theta\alpha_*^{1/3})\bar{y}, \quad z = (l/\theta\alpha_*^{1/3})\bar{z}, \quad \phi = l\theta^2\bar{\phi}, \quad (118.10)$$

[†] El margen de validez de estas fórmulas viene dado por la condición $|M_1 - 1| \ll 1$. Sin embargo, la teoría lineal corresponde a K grande, es decir, $|M_1 - 1| \gg \theta^{2/3}$. En el margen $1 \gg M_1 - 1 \gg \theta^{2/3}$, las fórmulas (118.8) deben, por tanto, reducirse a las fórmulas (117.6)-(117.8) dadas por la teoría lineal. Esto significa que, en el caso de K grande, las funciones f_x y f_y deben ser proporcionales a $K^{-1/2}$.

[‡] En el margen $1 \gg M_1 - 1 \gg \theta^2$, debemos obtener la fórmula (115.6) dada por la teoría lineal, de acuerdo con la cual $C_x \sim \theta^4$; esto significa que la función $f(K)$ tiende a una constante cuando K aumenta.

siendo el parámetro de semejanza

$$K = (M_1 - 1)/\theta^2 \alpha_* \quad (118.11)$$

(T. von KÁRMÁN, 1947). El coeficiente de presión en la superficie del cuerpo resulta ser de la forma $C_p = \theta^2 P(K, x/l)$, y el coeficiente de rozamiento o de arrastre es de acuerdo con ello[†]

$$C_x = \theta^4 f(K). \quad (118.12)$$

Todas estas fórmulas son válidas, como es natural, para valores de $M_1 - 1$ tanto pequeños positivos como pequeños negativos. Si $M_1 = 1$ exactamente, el parámetro de semejanza $K = 0$ y las funciones en las fórmulas (118.8) y (118.12) se reducen a constantes, de modo que estas fórmulas determinan completamente C_x y C_p , como funciones de θ y α_* , que representa las propiedades del gas.

§ 119. Ley de la semejanza hipersónica

La teoría lineal no es válida en el caso del flujo supersónico que rodea cuerpos delgados para valores muy grandes del número de Mach M_1 (*flujo hipersónico*), como ya se ha mencionado al final del § 106. Tiene, por lo tanto, interés una regla de semejanza simple que puede establecerse para este caso (H. S. TSIEN, 1946).

Las ondas de choque formadas en este tipo de flujo forman un ángulo pequeño con la dirección del flujo, del orden del cociente $\theta = \delta/l$ entre el espesor y la longitud del cuerpo. Estos choques son, en general, intensos y de forma curvada; la discontinuidad de velocidades es relativamente pequeña en ellos, pero la discontinuidad de presión (y, por tanto, la discontinuidad de la entropía) es grande. Por consiguiente, el flujo gaseoso no es, en general, un flujo potencial.

Supondremos que el número de Mach M_1 es del orden de $1/\theta$ o mayor. Una onda de choque reduce el valor local de M , pero este último siempre permanece del orden de $1/\theta$ (ver § 104, problema), de modo que M es grande en todo punto.

Utilicemos la «analogía sónica» mencionada en § 115: un problema tridimensional de flujo estacionario que rodea un cuerpo delgado de sección recta variable $S(x)$ es equivalente a un problema bidimensional de emisión no estacionaria de ondas sonoras por un contorno cuya área varía con el tiempo de acuerdo con la ley $S(v_1 t)$;† la velocidad del sonido está representada por $v_1 / \sqrt{(M_1^2 - 1)}$, o bien, para M_1 grande, por c_1 simplemente. Debe

† Por ejemplo, el problema del flujo que rodea un cono estrecho es equivalente al de la emisión de ondas sonoras cilíndricas por un cilindro circular que se expande de modo uniforme.

resaltarse que la única condición necesaria para que los dos problemas sean equivalentes es que el cociente δ/l sea pequeño; esto nos permite considerar pequeñas regiones anulares de la superficie del cuerpo como cilíndricas. Sin embargo, en el caso de M_1 grande la velocidad de propagación de las ondas «emitidas» es comparable con la velocidad de las partículas del gas en las ondas (ver el final del § 115), y, por tanto, el problema ha de resolverse sobre la base de las ecuaciones exactas (no lineales).

En este problema bidimensional, la velocidad lineal de la fuente es del orden de $v_1\theta$; los otros únicos parámetros independientes del problema son la velocidad del sonido c_1 , la dimensión δ del foco o fuente y la densidad ρ_1 .[†] A partir de todos ellos podemos formar una sola combinación adimensional,

$$K = M_1\theta, \quad (119.1)$$

que es el parámetro de semejanza.[‡] Las escalas de longitud para las coordenadas y , z y el tiempo deben tomarse de forma que tengan las dimensiones apropiadas y estén formadas mediante los mismos parámetros, es decir, δ y $\delta/v_1\theta = l/v_1$. Volviendo a la coordenada x , vemos que v/c_1 y C_p son funciones de las variables adimensionales x/l , y/δ , z/δ y del parámetro K .

Se encuentra fácilmente que el coeficiente de arrastre para un cuerpo delgado tiene la forma

$$C_x = \theta^4 f(K). \quad (119.2)$$

Se obtiene evidentemente la misma ley de semejanza en el caso bidimensional del flujo que rodea un ala delgada de envergadura infinita.

Los coeficientes de arrastre y de empuje ascensional resultan ser de la forma

$$C_x = \theta^3 f_x(K), \quad C_y = \theta^2 f_y(K). \quad (119.3)$$

PROBLEMA

Determinar la fuerza ascensional que actúa sobre una ala plana de envergadura infinita inclinada con un pequeño ángulo de ataque α respecto a la dirección del flujo, para valores grandes del número de Mach M_1 ($M_1 \gtrsim 1/2$).

Solución. El esquema de flujo es de la forma indicada en la figura 112: de cada uno de los dos bordes de la placa sale una onda de choque y otra de rarefacción, y la corriente gira con ellas un ángulo α en sentidos opuestos.

[†] Como es natural, estamos considerando no sólo las ecuaciones de movimiento del gas, sino también las condiciones límites de las mismas en la superficie del cuerpo y las condiciones que deben satisfacerse en las ondas de choque que se formen. Consideraremos el caso de un gas perfecto, de modo que las propiedades de la dinámica de gases dependan solamente del parámetro adimensional γ ; la regla de semejanza obtenida antes, sin embargo, no determina la dependencia del flujo respecto a este parámetro.

[‡] Si no se supusiese M_1 grande, obtendríamos una regla de semejanza con parámetro $K = \theta\sqrt{M_1^2 - 1}$. Sin embargo, esto carece de interés, puesto que en el caso de M_1 pequeño la teoría lineal determina todas las magnitudes en función de este parámetro.

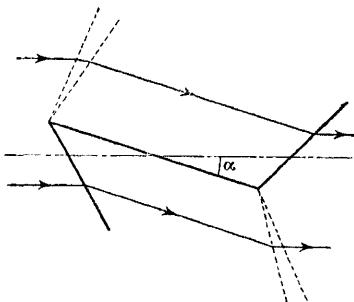


FIG. 112

De acuerdo con la analogía sónica, el problema del flujo estacionario que rodea dicha placa es equivalente al flujo gaseoso monodimensional no estacionario en cada lado o cara de un pistón que se mueve con velocidad uniforme αv_i . Delante del pistón se forma una onda de choque y detrás una onda de rarefacción (ver § 92, problemas 1 y 2). Utilizando los resultados obtenidos allí, se encuentra la fuerza ascensional buscada como la diferencia de las presiones en los dos lados de la placa. El coeficiente del empuje ascensional es

$$C_y = \alpha^2 \left\{ \frac{2}{\gamma K^2} + \frac{\gamma+1}{2} + \sqrt{\left[\frac{4}{K^2} + \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^2 \right]} \right\} - \frac{2\alpha^2}{\gamma K^2} \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} K \right]^{2\gamma/(\gamma-1)},$$

en donde $K = \alpha M_i$. Para $K \geq 2/(\gamma-1)$ se forma un vacío bajo la placa y debe omitirse el segundo término. En el margen $1 \ll M_i \ll 1/\alpha$, esta fórmula se reduce a $C_y = 4\alpha/M_i$, como ya dio la teoría lineal, de acuerdo con el hecho de que son aplicables en este intervalo ambos procedimientos.

CAPÍTULO XIV

DINAMICA DE FLUIDOS DE LA COMBUSTION

§ 120. Combustión lenta

La velocidad de una reacción química (medida, por ejemplo, por el número de moléculas que reaccionan en la unidad de tiempo) depende de la temperatura de la mezcla de gases en la que se produce, y aumenta con esta magnitud. En muchos casos esta dependencia es muy marcada.[†] La velocidad de la reacción puede ser tan pequeña a temperaturas ordinarias que la reacción sólo difícilmente puede producirse, aunque la mezcla gaseosa que corresponde a un estado de equilibrio (químico) termodinámico sería aquella en la cual ya se hubiese producido la reacción. Cuando la temperatura se eleva lo suficiente, la reacción progresá rápidamente. Si esta es endotérmica, se necesita un suministro continuo de calor desde un foco o fuente externa para que la reacción pueda mantenerse; si la temperatura se eleva simplemente al principio de la reacción, sólo reacciona una pequeña cantidad de materia y, como consecuencia, se reduce la temperatura del gas hasta un punto en el que la reacción cesa. La situación es muy diferente en el caso de una reacción fuertemente exotérmica, en donde se desarrolla una considerable cantidad de calor. Aquí basta con elevar la temperatura en un solo punto; la reacción que empieza en dicho punto desarrolla calor y así eleva la temperatura del gas que lo rodea, de modo que la reacción, una vez iniciada, se extenderá a la totalidad del gas. Esto se denomina *combustión lenta* o simplemente *combustión* de una mezcla gaseosa.[‡]

La combustión de una mezcla de gases viene acompañada necesariamente por el movimiento del gas. Por consiguiente, el proceso de combustión no

[†] La velocidad de reacción depende, normalmente, de modo exponencial con la temperatura, siendo casi proporcional a un factor de la forma $e^{-U/RT}$, en donde U es una constante para una reacción dada y se denomina *energía de activación*. Cuanto mayor es U , con más intensidad depende la velocidad de la reacción de la temperatura.

[‡] Debe recordarse que, en una mezcla capaz de combustión, puede ser imposible en determinadas circunstancias la propagación espontánea de la combustión. Esta limitación se debe a las pérdidas de calor que son una consecuencia de factores, como la conducción del calor a través de las paredes de un tubo en el que se produce una combustión por pérdidas debidas a la radiación, etc. Por esta razón no es posible la combustión en tubos de radio muy pequeño, por ejemplo.

es sólo un fenómeno químico, sino también un proceso de dinámica de gases. En general, la naturaleza del proceso de combustión ha de determinarse mediante la resolución de ecuaciones simultáneas, entre las que se deben incluir aquellas de cinética química para la reacción y las de dinámica de gases para la mezcla considerada.

Sin embargo, la situación se simplifica mucho en el caso muy importante (el único normalmente que hay que considerar) en el que la dimensión característica l del problema es grande (en un sentido que hay que definir más adelante). Veremos que, en estos casos, los problemas de la dinámica de gases y los de cinética química pueden considerarse, hasta un cierto límite, separadamente.

La región del gas quemado (es decir, aquella región en donde la reacción ya ha tenido lugar y el gas es una mezcla de los productos de la combustión) está separada de aquélla en donde el gas todavía no ha experimentado la combustión por una capa de transición, en donde la reacción está progresando (*zona de combustión o llama*); al transcurrir el tiempo, esta capa se mueve hacia adelante, con una velocidad que puede denominarse velocidad de propagación de la combustión en el gas. El valor de esta velocidad depende de la transferencia de calor desde la zona de combustión a la mezcla gaseosa fría. El mecanismo principal de transferencia es la conducción ordinaria. La teoría de estos medios de propagación de la combustión fue desarrollada en primer lugar por V. A. MIKHELSON (1980).

Designemos mediante δ el orden de magnitud de la anchura de la zona de combustión. Está determinada por la distancia media sobre la cual el calor desarrollado en la reacción se propaga durante el tiempo τ que dura la reacción (en el punto considerado). El tiempo τ es característico de la reacción y depende únicamente del estado termodinámico del gas que sufre la combustión (y no del parámetro l). Si la conductividad termométrica del gas es χ , tenemos [ver (51.7)][†]

$$\delta \sim \sqrt{(\chi\tau)}. \quad (120.1)$$

Precisamos ahora más la hipótesis anterior: admitiremos que la dimensión característica es grande en comparación con la anchura de la zona de combustión ($l \gg \delta$). Cuando se cumple esta condición, puede considerarse por separado el problema de la dinámica del gas. Al determinar el flujo gaseoso, podemos despreciar la anchura de la zona de combustión, considerándola como una superficie que separa los productos de la combustión del gas aún no quemado. En esta superficie (*frente de la llama*) el estado del gas

[†] Para evitar malas interpretaciones, debe señalarse que, cuando τ depende marcadamente de la temperatura, deberá aparecer un coeficiente más bien grande en la fórmula (120.1) si τ es el valor correspondiente a la temperatura de los productos de la combustión. Sin embargo, el hecho que tiene importancia para nosotros es que τ no depende de l .

varía discontinuamente, es decir, es una superficie de discontinuidad.

La velocidad v_1 de esta discontinuidad respecto al propio gas (en una dirección normal al frente) se denomina *velocidad normal* de la llama. En un tiempo τ , la combustión se propaga a través de una distancia del orden de δ , y así la velocidad de la llama es[†]

$$v_1 \sim \delta/\tau \sim \sqrt{(\chi/\tau)}. \quad (120.2)$$

La conductividad termométrica ordinaria del gas es del orden del recorrido libre medio de las moléculas multiplicado por su velocidad térmica, o, lo que es lo mismo, el tiempo libre medio τ_{fr} multiplicado por el cuadrado de esta velocidad. Puesto que la velocidad térmica de las moléculas es del mismo orden que la velocidad del sonido, tenemos $v_1/c \sim \sqrt{(\chi/\tau c^2)} \sim \sqrt{(\tau_{fr}/\tau)}$. No todas las colisiones que se producen entre moléculas dan lugar a una reacción química entre ellas; por el contrario, sólo una fracción muy pequeña de moléculas en colisión reaccionan entre sí. Esto significa que $\tau_{fr} \ll \tau$ y, por tanto, $v_1 \ll c$. Así pues, la velocidad de la llama es, en este caso, pequeña en comparación con la velocidad del sonido.[‡]

En la superficie de discontinuidad que sustituye a la zona de combustión, los flujos de masa, cantidad de movimiento o impulso y de energía deben ser continuos, como en cualquier discontinuidad. Como es usual, la primera de estas condiciones determina la relación de los componentes, normales a la superficie, de las velocidades de los gases respecto a la discontinuidad: $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, o sea,

$$v_1/v_2 = V_1/V_2, \quad (120.3)$$

en donde V_1 y V_2 son los volúmenes específicos del gas sin quemar y de los productos de la combustión. De acuerdo con los resultados generales obtenidos en § 81 en el caso de discontinuidades arbitrarias, la componente tangencial de la velocidad debe ser continua si la componente normal es discontinua. Por consiguiente, las líneas de corriente se «refractan» en la discontinuidad.

Teniendo en cuenta la pequeñez de la velocidad normal de la llama respecto a la del sonido, la condición de continuidad del flujo del impulso se reduce a la continuidad de la presión, y la del flujo de energía se reduce a

[†] Como ejemplo puede mencionarse que la velocidad de la llama en una mezcla de metano (6 por ciento) y aire es sólo de 5 cm/s, mientras que en la mezcla detonante ($2H_2 + O_2$) es de 1000 cm/s; las anchuras de las zonas de combustión en estos dos casos son aproximadamente 5×10^{-2} cm y 5×10^{-4} cm, respectivamente.

[‡] La difusión de los componentes de la mezcla que se quema tiene también cierta influencia sobre la propagación de la combustión; sin embargo, esto no altera los órdenes de magnitud de la velocidad y anchura de la llama.

la continuidad de la entalpía:

$$p_1 = p_2, \quad w_1 = w_2. \quad (120.4)$$

Al utilizar estas condiciones debe recordarse que los gases a los dos lados de la discontinuidad que estamos considerando son químicamente diferentes y por ello las magnitudes termodinámicas nos son las mismas funciones en ambas partes.

En el caso de un gas perfecto tenemos $w_1 = w_{01} + c_{p1}T_1$, $w_2 = w_{02} + c_{p2}T_2$; los términos constantes no pueden hacerse iguales a cero como en el caso de un gas simple (mediante la selección adecuada del cero de energía), puesto que w_{01} y w_{02} son diferentes. Pongamos $w_{01} - w_{02} = q$; es precisamente el calor que se desarrollaría en la reacción (por unidad de masa) si ésta se produjese a la temperatura del cero absoluto. Entonces se obtienen las siguientes relaciones entre las magnitudes termodinámicas del gas sin quemar (1) y el gas quemado (2):

$$p_1 = p_2, \quad T_2 = \frac{q}{c_{p2}} + \frac{c_{p1}}{c_{p2}} T_1, \quad V_2 = V_1 \frac{\gamma_1(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2(\gamma_1 - 1)} \left(\frac{q}{c_{p1}T_1} + 1 \right). \quad (120.5)$$

Como la llama tiene una velocidad normal definida, independiente de las propias velocidades del gas, el frente de la llama tiene una forma definida en el caso de una combustión estacionaria de un gas móvil. Como ejemplo podemos citar la combustión de un gas que sale del extremo de un tubo (boca de un quemador). Si es v la velocidad del gas promediada en la sección recta del tubo, es evidente que $v_1 S_1 = v S$, siendo S el área de la sección recta del tubo y S_1 el área de la superficie total del frente de la llama.

Si ha de verificarse esta situación, debe ser estable frente a pequeñas perturbaciones y se plantea la cuestión de los límites de esta estabilidad. Puede estudiarse la estabilidad del frente de la llama de un modo semejante al de la estabilidad de la discontinuidad tangencial en § 30. Como la velocidad del gas es pequeña en comparación con la del sonido, podemos considerar el gas como un fluido ideal incompresible, tomándose la velocidad normal del frente de la llama como una constante dada. Dicho estudio (ver problema 1) conduce al resultado de que el frente de la llama es absolutamente inestable, y, por consiguiente, la llama debe resultar turbulenta (L. LANDAU, 1944). De esta forma el estudio es únicamente válido para números altos de Reynolds. Sin embargo, cuando se tiene en cuenta la viscosidad no puede dar origen a un número de Reynolds crítico muy grande.

Por otra parte, los datos experimentales muestran que la «autoturbulen-

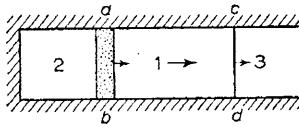


FIG. 113

cia» de la llama no se produce hasta números de Reynolds muy grandes.[†] Esto significa que deben haber otros factores que estabilicen el frente de la llama y que retrasen el momento en que se transforma en turbulenta hasta que se alcanzan números de Reynolds muy grandes. Es posible que tenga importancia la variación de la velocidad normal cuando se deforma el frente de la llama: en donde el frente es cóncavo, v_1 aumenta (puesto que la transferencia de calor dentro de la mezcla sin quemar resulta mejorada en la concavidad), mientras que donde resulta convexa se reduce v_1 (YA. B. ZELDOVICH). Todavía no está resuelto este problema importante.[‡]

Una llama que se propaga en una mezcla de gases combustibles da como resultado el movimiento del gas que la rodea hasta una distancia considerable. El hecho de que deba acompañar a la combustión un movimiento del gas es evidente a partir del hecho de que los productos de la combustión deben moverse con velocidad $v_1 - v_2$ respecto al gas sin quemar, debido a la diferencia existente entre las velocidades v_1 y v_2 . En algunos casos esta diferencia da como resultado la formación de ondas de choque. Estos choques no poseen ninguna relación directa con el proceso de combustión y su aparición se debe a la necesidad de satisfacer las condiciones en los límites. Consideremos, por ejemplo, la combustión que se propaga a partir del extremo cerrado de un tubo. En la figura 113, ab es la zona de combustión. El gas que se encuentra en las regiones 1 y 3 es la mezcla original sin quemar, mientras que el que se encuentra en la región 2 está formado por los productos de la combustión. La velocidad v_1 con la que se mueve la zona de la combustión respecto al gas 1 delante de ella, según lo dicho anteriormente, está determinada por las propiedades de la reacción y las condiciones de la transferencia del calor, y debe considerarse como dada. La velocidad v_2 con la que se mueve la llama respecto al gas 2 queda entonces determinada

[†] En la propagación esférica de la combustión en el espacio libre, la autoturbulencia, si se produce, lo hace para $R \sim 10^5$, en donde la dimensión característica corresponde al radio de la llama esférica (YA. B. ZELDOVICH y A. I. ROZLOVSKII, 1947). Cuando un gas se quema dentro de un tubo, no se produce la autoturbulencia, sino que es precedida por la turbulencia que aparece, para R grande, debido a la influencia de las paredes sobre el flujo gaseoso que acompaña a la combustión (es decir, debido a la inestabilidad del flujo laminar de Poiseuille).

[‡] Existen factores especiales que estabilizan la llama en la combustión de un gas que se evapora en la superficie de un líquido (produciéndose la reacción en el propio gas y no con ninguna sustancia externa, tal como el oxígeno del aire). En este caso las fuerzas capilares y el campo gravitatorio tienen un efecto estabilizador (ver problema 2).

de una vez por la condición (120.3). En el extremo cerrado del tubo, la velocidad del gas debe anularse, y, por tanto, el gas en la región 2 estará en reposo. Por tanto, el gas 1 debe moverse respecto al tubo con velocidad constante $v_2 - v_1$. En la parte delantera del tubo, lejos de la llama, el gas se encuentra de nuevo en reposo. Esta condición sólo puede satisfacerse mediante la presencia de una onda de choque (cd en la figura 113), en donde la velocidad del gas sea discontinua, de modo que el gas en 3 esté en reposo. A partir de la discontinuidad dada de la velocidad, podemos hallar las discontinuidades de las demás magnitudes y la velocidad de propagación del propio choque. Así pues, vemos que el frente de la llama actúa como un pistón sobre el gas que está delante de él. La onda de choque se mueve con mayor velocidad que la llama, de modo que la masa del gas puesta en movimiento aumenta con el transcurso del tiempo.

En el caso de números de Reynolds suficientemente grandes, el flujo gaseoso que acompaña a la combustión en un tubo resulta turbulento, y esto, a su vez, afecta a la llama que origina el movimiento. De acuerdo con K. I. Shchelkin, la estructura de la zona de combustión tiene entonces la forma siguiente. Los remolinos turbulentos que son grandes en comparación con la anchura ordinaria δ de la llama dan como resultado una curvatura irregular del frente de la llama. Esta curvatura puede ser considerable, puesto que la estabilidad del frente respecto a las deformaciones es probablemente pequeña, como se mencionó anteriormente. Como resultado se obtiene una zona de combustión comparativamente ancha, compuesta por un frente de llama estrecho pero notablemente irregular. Por consiguiente, la velocidad de combustión se ve considerablemente aumentada, teniendo en cuenta el marcado incremento de la superficie total en la que se produce. Debe señalarse que esta descripción es muy diferente de la que se obtendría si la llama fuese autoturbulenta: en este caso la zona de combustión sería una región homogénea en donde se obtendría una operación de mezclado total por la acción de remolinos turbulentos de pequeño tamaño en comparación con el radio del tubo.

PROBLEMAS

Problema 1. Estudiar la estabilidad de un frente de llama plano (que se propaga con una velocidad pequeña en comparación con la del sonido) respecto a perturbaciones infinitesimales.

Solución. Tomemos el plano de la discontinuidad como el plano yz , teniendo la velocidad del gas sin perturbar el sentido del eje x . Sobre el flujo con velocidades constantes v_1, v_2 (a ambos lados de la discontinuidad) superpongamos una perturbación periódica en la dirección y y en el tiempo. A partir de las ecuaciones del movimiento

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \quad \partial \mathbf{v}' / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}' = -(1/\rho) \operatorname{grad} p' \quad (1)$$

(siendo \mathbf{v} , ρ o bien \mathbf{v}_1 , ρ_1 o bien \mathbf{v}_2 , ρ_2), obtenemos como en § 30 la ecuación

$$\Delta p' = 0. \quad (2)$$

En la superficie de discontinuidad (es decir, para $x \approx 0$) deben satisfacerse las siguientes condiciones: la ecuación de continuidad de la presión

$$p'_1 = p'_2, \quad (3)$$

la condición de continuidad de la componente de tangencial de la velocidad tangencial a la superficie

$$v'_{1y} + v_1 \frac{\partial \zeta}{\partial y} = v'_{2y} + v_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (4)$$

[en donde $\zeta(y, t)$ es el pequeño desplazamiento de la superficie de discontinuidad a lo largo del eje x debido a la perturbación] y la condición de que resulte sin variación la velocidad del gas normal a la discontinuidad,

$$v'_{1x} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = v'_{2x} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

En la región $x < 0$ (gas sin quemar 1), la solución de las ecuaciones (1) y (2) puede escribirse

$$\begin{aligned} v'_{1x} &= Ae^{iky+kx-i\omega t}, & v'_{1y} &= iAe^{iky+kx-i\omega t}, \\ p'_1 &= A\rho_1 \left(\frac{i\omega}{k} - v_1 \right) e^{iky+kx-i\omega t}. \end{aligned} \quad (6)$$

En la región $x > 0$ (productos de la combustión, gas 2), además de la solución de la forma constante $\times e^{iky-kx-i\omega t}$, debemos tener en cuenta otra solución particular de las ecuaciones (1) y (2), en donde la dependencia con y y t viene dada por el mismo factor $e^{iky-i\omega t}$. Esta solución se obtiene poniendo $p' = 0$; entonces, resulta nulo el segundo miembro de la ecuación de Euler y la ecuación homogénea resultante tiene una solución en la que v'_x y v'_y son proporcionales a $e^{iky-i\omega t+i\omega x/v}$. La razón por la cual esta solución sólo es necesario tenerla en cuenta en el gas 2 y no en el gas 1, es que nuestro objetivo final consiste en determinar si pueden existir frecuencias ω que tengan partes imaginarias positivas; sin embargo, para tales ω el factor $e^{i\omega x/v}$ aumenta sin límites con $|x|$ para $x < 0$, y, por tanto, dicha solución no es posible en la región 1. Escogiendo de nuevo valores apropiados para los coeficientes constantes, busquemos una solución para $x > 0$ de la forma

$$\left. \begin{aligned} v'_{2x} &= Be^{iky-kx-i\omega} + Ce^{iky-i\omega t+i\omega x/v}, \\ v'_{2y} &= -iBe^{iky-kx-i\omega} - (\omega/kv_2)Ce^{iky-i\omega t+i\omega x/v}, \\ p'_2 &= -B\rho_2 v_2 + (i\omega/k) e^{iky-kx-i\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Poniendo también

$$\zeta = De^{iky-i\omega t}, \quad (8)$$

y sustituyendo estas expresiones en las condiciones (3)-(5), obtenemos cuatro ecuaciones homogéneas para los coeficientes A, B, C, D . Un cálculo simple (utilizando el hecho de que $j \equiv \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$) da la condición siguiente para que sean compatibles estas ecuaciones:

$$\Omega^2(v_1 + v_2) + 2\Omega k v_1 v_2 + k^2 v_1 v_2 (v_1 - v_2) = 0, \quad (9)$$

en donde $\Omega = -i\omega$. Si $v_1 > v_2$, esta ecuación tiene o dos raíces reales negativas o dos raíces conjugadas complejas con partes reales negativas. Sin embargo, si $v_1 < v_2$, las raíces son reales y de signo opuesto. Así pues, si $v_1 > v_2$ tenemos siempre $\text{re } \Omega < 0$ y el movimiento es estable, pero si $v_1 < v_2$ existen Ω , para las cuales $\text{re } \Omega > 0$ y el movimiento original es inestable. La densidad ρ_2 de los productos de combustión es realmente menor siempre que la densidad ρ_1 del gas sin quemar, teniendo en cuenta el considerable calor desarrollado durante la combustión. De aquí se deduce que, puesto que $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, entonces $v_2 > v_1$, y se obtiene la conclusión de que el frente de llama es inestable en las condiciones consideradas.

Problema 2. Se produce la combustión en la superficie de un líquido, teniendo lugar la reacción en el vapor que se evapora de la superficie. Determinar la condición de estabilidad en este caso, teniendo en cuenta el efecto del campo gravitatorio y las fuerzas de capilaridad (L. D. LANDAU, 1944).

Solución. Consideremos la zona de combustión en el vapor próximo a la superficie líquida como una superficie de discontinuidad, pero supongamos ahora que esta superficie tiene una tensión superficial α . Los cálculos son totalmente análogos a los del problema 1, con la única diferencia de que en lugar de la condición límite (3) tenemos ahora $p'_1 - p'_2 = -\alpha \partial^2 \zeta / \partial y^2 + (\rho_1 - \rho_2)g\zeta$; el medio 1 es el líquido y el medio 2 el gas quemado. Las condiciones (4) y (5) no varían. En lugar de la ecuación (9) obtenemos

$$\Omega^2(v_1 + v_2) + 2\Omega k v_1 v_2 + \left[k^2(v_1 - v_2) + \frac{gk(\rho_1 - \rho_2) + \alpha k^3}{j} \right] v_1 v_2 = 0.$$

En este caso la condición de estabilidad es que las raíces de esta ecuación deberán tener partes reales negativas, es decir, el término libre debe ser positivo para todo k . Esta exigencia de la condición de estabilidad $j^4 < 4\alpha g \rho_1 \rho_2^2 / (\rho_1 - \rho_2)$. Como la densidad de los productos gaseosos de la combustión es pequeña en comparación con la del líquido ($\rho_1 \gg \rho_2$), la condición se convierte en la práctica en

$$j^4 < 4\alpha g \rho_1 \rho_2^2.$$

Problema 3. Determinar la distribución de temperaturas en el gas que hay delante de un frente de llama.

Solución. En un sistema de coordenadas que se mueva con el frente, la distribución de temperaturas es estacionaria y el gas se mueve con velocidad $-v_1$. La ecuación de la conducción térmica,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} T = -v_1 dT/dx = \chi d^2T/dx^2,$$

tiene la solución $T = T_0 e^{-v_1 x / \chi}$, en donde T_0 es la temperatura del frente de la llama, tomándose como cero la temperatura lejos del frente.

§ 121. Detonación

En el tipo de combustión (combustión lenta) descrita hasta ahora, la propagación a través del gas se debe al calentamiento que resulta de la transferencia de calor directa desde el gas en combustión hasta el que está toda-

vía sin quemar. También es posible otro mecanismo de propagación de la combustión totalmente diferente. La onda de choque calienta el gas cuando pasa; la temperatura del gas detrás del choque es más elevada que delante de él. Si la onda de choque es suficientemente intensa, la elevación de temperatura que produce puede ser suficiente para que empiece la combustión. La onda de choque provocará entonces la «ignición» de la mezcla gaseosa al moverse, es decir, la combustión se propagará con la velocidad del choque, o sea, mucho más rápidamente que en la combustión ordinaria. Este mecanismo de propagación de la combustión se denomina *detonación*.

Cuando la onda de choque pasa por un punto determinado del gas, la reacción empieza en dicho punto y continúa hasta que todo el gas que se encuentra allí se ha quemado, es decir, durante un tiempo que caracteriza la cinética de la reacción de que se trate. Por consiguiente, resulta claro que la onda de choque será seguida por una capa que se moverá con ella en donde se está produciendo la combustión, y la anchura de esta capa es igual a la velocidad de propagación del choque multiplicada por el tiempo τ . Tiene importancia el hecho de que la anchura no depende de las dimensiones del cuerpo o cuerpos que estén presentes. Cuando las dimensiones características del problema son suficientemente grandes, podemos considerar, por tanto, la onda de choque y la zona de combustión que le sigue como una simple superficie de discontinuidad que separa a los gases quemados de los que aún están sin quemar. Denominaremos a dicha superficie *onda de detonación*.

En una onda de detonación las densidades de flujo de masa, energía e impulso o cantidad de movimiento deben ser continuas y siguen siendo válidas las relaciones (82.1)-(82.10) deducidas previamente, y que se siguen de estas condiciones de continuidad. En particular, la ecuación

$$w_1 - w_2 + \frac{1}{2}(V_1 + V_2)(p_2 - p_1) = 0 \quad (121.1)$$

se mantiene; el subíndice 1 pertenece siempre al gas sin quemar y el 2 a los productos de la combustión. La curva de p_2 en función de V_2 , dada por esta ecuación se denomina *adiabática de la detonación*. A diferencia de la adiabática del choque considerada anteriormente, esta curva no pasa por el punto inicial dado (p_1, V_1). El hecho de que la adiabática del choque pase a través de este punto se debe a que w_1 y w_2 son las mismas funciones de p_1, V_1 y p_2, V_2 , respectivamente, mientras que esto ya no es válido ahora, teniendo en cuenta la diferencia química entre ambos gases. En la figura 114 la línea continua muestra la adiabática de la detonación. La adiabática del choque ordinaria para la mezcla gaseosa sin quemar se ha dibujado (a trazos) pasando por el punto (p_1, V_1). La adiabática de la detonación siempre cae encima de la adiabática del choque, debido a que en la combustión se alcanza una temperatura más elevada y, por consiguiente, la presión del gas

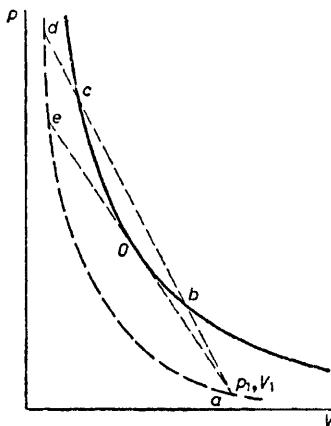


FIG. 114

es mayor que la que existiría en el gas sin quemar para el mismo volumen específico.

La fórmula (82.6) anterior es válida para la densidad de flujo máscio:

$$j^2 = (p_2 - p_1)/(V_1 - V_2), \quad (121.2)$$

de modo que gráficamente j^2 es de nuevo la pendiente de la cuerda que va del punto (p_1, V_1) a un punto cualquiera (p_2, V_2) de la adiabática de la detonación (por ejemplo, la cuerda ac de la figura 114). Se ve fácilmente en el diagrama que j^2 no puede ser menor que la pendiente de la tangente Oa . El flujo j es precisamente la masa de gas que entra en ignición por unidad de tiempo y por unidad de área de la superficie de la onda de detonación; vemos que, en una detonación, esta magnitud no puede ser inferior a un cierto valor límite j_{\min} (que depende del estado inicial del gas sin quemar).

La fórmula (121.2) es una consecuencia únicamente de las condiciones de continuidad de los flujos de masa y de impulso. Por tanto, es válida (para un estado inicial dado del gas) no sólo para el estado final de los productos de la combustión, sino también para todos los estados intermedios, en los que sólo se ha desarrollado parte de la energía de la reacción. En otras palabras, la presión p y el volumen específico V del gas en un estado cualquiera obedecen la relación lineal

$$p = p_1 + j^2(V_1 - V), \quad (121.3)$$

que está indicada gráficamente mediante la cuerda ad . Este resultado tiene importancia en la teoría de la detonación; fue enunciado por primera vez por V. A. MIKHELSON (1890).

Utilicemos a continuación un procedimiento desarrollado por Ya. B. ZELDOVICH (1940) para estudiar la variación del estado del gas a través de la capa de anchura finita que es en lo que consiste realmente una onda de detonación. El frente delantero de la onda de detonación es una verdadera onda de choque en el gas 1 sin quemar. En ella, el gas se comprime y se calienta hasta un estado representado por el punto *d* (figura 114) sobre la adiabática del choque del gas 1. La reacción química empieza en el gas comprimido, y cuando la reacción prosigue el estado del gas está representado por un punto que se mueve descendiendo por la cuerda *da*; se desarrolla calor, el gas se expande y disminuye su presión. Esto continúa hasta que la combustión es completa y se ha desprendido la totalidad del calor de la reacción. El punto correspondiente es *c*, que cae sobre la adiabática de la detonación y que representa el estado final de los productos de la combustión. El punto inferior *b* en el que la cuerda *ad* corta a la adiabática de la detonación no puede ser alcanzado en el caso de un gas en el que la combustión está producida por compresión y calentamiento en una onda de choque.[†]

Así pues, se obtiene la conclusión de que la detonación está representada no por la totalidad de la adiabática de la detonación, sino sólo por su parte superior, que está por encima del punto *O* en donde la adiabática toca a la línea recta *aO* dibujada desde el punto inicial *a*.

Se ha visto en § 84 que, en el punto en donde $d(j^2)/dp_2 = 0$, es decir, en donde la adiabática del choque toca la recta procedente de (p_1, V_1) , la velocidad v_2 es igual a la velocidad correspondiente del sonido c_2 , y $v_2 < c_2$ encima de dicho punto. Se han obtenido estos resultados sólo a partir de las leyes de conservación aplicadas a la superficie de discontinuidad y, por consiguiente, son también totalmente aplicables a la onda de detonación. En la adiabática ordinaria del choque para un gas simple no existen puntos con $d(j^2)/dp_2 = 0$, como se ha demostrado en § 84. Sin embargo, en la onda adiabática de la detonación existe un punto de estos, a saber, el punto *O*. Puesto que la detonación corresponde a la parte superior únicamente de la adiabática, por encima del punto *O*, se obtiene la conclusión de que

$$v_2 \leq c_2, \quad (121.4)$$

es decir, una onda de detonación se mueve respecto al gas exactamente detrás de él con una velocidad igual o menor que la del sonido; la igualdad $v_2 = c_2$ es válida para una detonación correspondiente al punto *O* (denominado *punto de Jouguet*).[‡]

[†] Para completar el tema debe señalarse también que una transición discontinua desde el estado *c* al estado *b* en otra onda de choque es también imposible, puesto que el gas debería cruzar dicho choque desde la zona de alta presión a la de baja presión.

[‡] Debe recordarse que las velocidades v_1 , v_2 significan siempre las velocidades normales a la superficie de discontinuidad.

La velocidad de la onda de detonación respecto al gas 1 es siempre supersónica (incluso para el punto O):

$$v_1 > c_1. \quad (121.5)$$

Esto se ve de modo más simple directamente de la figura 114. La velocidad del sonido viene dada gráficamente por la pendiente de la tangente a la adiabática del choque para el gas 1 (curva a trazos) en el punto a . Por otra parte, la velocidad v_1 viene dada por la pendiente de la cuerda ac . Puesto que todas las cuerdas que nos ocupan tienen una inclinación mayor que la tangente, siempre se tiene que $v_1 > c_1$. Moviéndose con velocidad supersónica, la onda de detonación, como una onda de choque, no influye sobre el estado del gas que está delante de él. La velocidad v_1 con que se mueve la onda de detonación respecto al gas sin quemar en reposo es la velocidad de propagación de la detonación.

Puesto que $v_1/V_1 = v_2/V_2 \equiv j$ y $V_1 > V_2$, se deduce que $v_1 > v_2$. La diferencia $v_1 - v_2$ es evidentemente la velocidad de los productos de la combustión respecto al gas sin quemar. Esta diferencia es positiva, es decir, los productos de la combustión se mueven en la dirección de propagación de la onda de detonación.

Podemos también señalar lo siguiente. En § 84 se demostró también que $ds_2/d(j^2) > 0$. En el punto en que j^2 tiene un mínimo, por consiguiente, s_2 también tiene un mínimo. Este punto es O y así se concluye que corresponde al menor valor de la entropía s_2 sobre la adiabática de la detonación. La entropía s_2 tiene también un extremal en O si consideramos el cambio de estado a lo largo de la línea ae (puesto que las pendientes de la curva y la tangente en O son iguales). Sin embargo, este extremal es un máximo. En efecto, un desplazamiento desde e a O corresponde al cambio de estado cuando la reacción de combustión tiene lugar en el gas comprimido y éste viene acompañado de desarrollo de calor y un aumento de entropía; sin embargo, el paso desde O hasta a correspondería a la conversión endotérmica de los productos de la combustión en los gases originales con un descenso de la entropía.

Si la detonación está producida por una onda de choque que se produce mediante una fuente o foco externo y que luego incide sobre el gas, cualquier punto de la parte superior de la adiabática de la detonación puede corresponder a la detonación. No obstante, resulta de particular interés considerar una detonación que sea debida al propio proceso de combustión. Veremos en § 122 que, en un cierto número de casos importantes, dicha detonación debe corresponder al punto de Jouguet, de modo que la velocidad de la onda de detonación respecto a los productos de la combustión inmediatamente detrás de ella es exactamente igual a la velocidad del sonido,

mientras que la velocidad $v_1 = jV_1$ respecto al gas sin quemar tiene el menor valor posible. Este resultado fue adelantado primeramente como hipótesis por D. L. CHAPMAN (1899) y E. JOGUET (1905), pero su justificación teórica completa se debe a YA. B. ZELDOVICH (1940).

Deduzcamos ahora las relaciones existentes entre las diversas magnitudes de una onda de detonación en un gas perfecto. Sustituyendo en la ecuación general (121.1) la entalpía en la forma

$$w = w_0 + c_p T = w_0 + \gamma p V / (\gamma - 1),$$

obtenemos

$$\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1} p_2 V_2 - \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} p_1 V_1 - V_1 p_2 + V_2 p_1 = 2q, \quad (121.6)$$

en donde $q = w_{01} - w_{02}$ designa nuevamente el calor de la reacción, reducido al cero absoluto de temperatura. La curva $p_2(V_2)$ dada por esta ecuación es una hipérbola rectangular. Para $p_2/p_1 \rightarrow \infty$, el cociente de densidades tiende a un límite finito $\rho_2/\rho_1 = V_1/V_2 = (\gamma_2 + 1)/(\gamma_2 - 1)$; esta es la mayor compresión que puede obtenerse en una onda de detonación.

Las fórmulas se simplifican mucho en el caso importante de ondas de detonación intensas, que se obtienen cuando el calor desarrollado en la reacción es grande en comparación con la energía térmica interna del gas original, es decir, $q \gg c_v T_1$. En este caso podemos despreciar los términos que contienen p_1 en (121.6), obteniéndose

$$p_2 \left(\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1} V_2 - V_1 \right) = 2q. \quad (121.7)$$

Consideremos con más detalle una detonación correspondiente al punto de Jouguet, que tiene un interés particular como vimos en el estudio previo. En este punto $j^2 = c_2^2/V_2^2 = \gamma_2 p_2/V_2$. A partir de esta relación y (121.2) podemos expresar p_2 y V_2 en la forma

$$p_2 = (p_1 + j^2 V_1) / (\gamma_2 + 1), \quad V_2 = \gamma_2 (p_1 + j^2 V_1) / j^2 (\gamma_2 + 1). \quad (121.8)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (121.6) y reemplazando j por v_1/V_1 , tenemos después de una simple reducción, la siguiente ecuación de cuarto grado para la velocidad v_1 :

$$v_1^4 - 2v_1^2[(\gamma_2^2 - 1)q + (\gamma_2^2 - \gamma_1)c_{v1}T_1] + \gamma_2^2(\gamma_1 - 1)^2 c_{v1}^2 T_1^2 = 0,$$

en donde se ha incluido la temperatura a través de $T = pV/(c_p - c_v) = pV/c_v(\gamma - 1)$. De aquí que[†]

$$v_1 = \sqrt{\left\{ \frac{1}{2}(\gamma_2 - 1)[(\gamma_2 + 1)q + (\gamma_1 + \gamma_2)c_{v1}T_1] \right\}} + \sqrt{\left\{ \frac{1}{2}(\gamma_2 + 1)[(\gamma_2 - 1)q + (\gamma_2 - \gamma_1)c_{v1}T_1] \right\}}. \quad (121.9)$$

Esta fórmula determina la velocidad de propagación de la detonación en función de la temperatura T_1 de la mezcla gaseosa original.

Podemos volver a escribir las fórmulas (121.8) en la forma

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{v_1^2 + (\gamma_1 - 1)c_{v1}T_1}{(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 - 1)c_{v1}T_1}, \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma_2[v_1^2 + (\gamma_1 - 1)c_{v1}T_1]}{(\gamma_2 + 1)v_1^2}. \quad (121.10)$$

Junto con (121.9), determinan las relaciones de presión y densidad existentes entre los productos de la combustión y el gas sin quemar a la temperatura T_1 .

Se calcula la velocidad v_2 como $v_2 = V_2v_1/V_1$, utilizando las fórmulas (121.9) y (121.10). El resultado es

$$v_2 = \sqrt{\left\{ \frac{1}{2}(\gamma_2 - 1)[(\gamma_2 + 1)q + (\gamma_1 + \gamma_2)c_{v1}T_1] \right\}} + \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1}\sqrt{\left\{ \frac{1}{2}(\gamma_2 + 1)[(\gamma_2 - 1)q + (\gamma_2 - \gamma_1)c_{v1}T_1] \right\}}. \quad (121.11)$$

La diferencia $v_1 - v_2$, es decir, la velocidad de los productos de la combustión respecto al gas sin quemar, es

$$v_1 - v_2 = \sqrt{\left\{ 2[(\gamma_2 - 1)q + (\gamma_2 - \gamma_1)c_{v1}T_1]/(\gamma_2 + 1) \right\}}. \quad (121.12)$$

La temperatura de los productos de la combustión se calcula a partir de la fórmula

$$c_{v2}T_2 = v_2^2/\gamma_2(\gamma_2 - 1) \quad (121.13)$$

[†] Si $x^2 - 2px^2 + q = 0$, entonces

$$x = \sqrt{[p \pm \sqrt{(p^2 - q)}]} = \sqrt{\left[\frac{1}{2}(p + \sqrt{q}) \right]} \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(p - \sqrt{q}) \right]}.$$

En este caso los dos signos corresponden al caso en que puedan dibujarse dos tangentes desde el punto a hasta la adiabática del choque: una hacia arriba, como se indica en la figura 114, y la otra hacia abajo. La tangente hacia arriba, que es la que nos interesa, tiene una mayor pendiente, y de acuerdo con esto tomaremos el signo más.

(puesto que $v_2 = c_2$).

Todas estas fórmulas, más bien complejas, se simplifican notablemente en el caso de ondas de detonación intensas. En este caso, las velocidades vienen dadas por las fórmulas simples

$$v_1 = \sqrt{[2(\gamma_2^2 - 1)q]}, \quad v_1 - v_2 = v_1/(\gamma_2 + 1). \quad (121.14)$$

El estado termodinámico de los productos de la combustión viene dado por las fórmulas

$$\begin{aligned} V_2/V_1 &= \gamma_2/(\gamma_2 + 1), & T_2 &= 2\gamma_2 q/c_{v2}(\gamma_2 + 1), \\ \frac{p_2}{p_1} &= \frac{2(\gamma_2 - 1)}{\gamma_1 - 1} \frac{q}{c_{v1}T_1} = \frac{\gamma_1 v_1^2}{(\gamma_2 + 1)c_1^2}. \end{aligned} \quad (121.15)$$

Si comparamos las fórmulas (121.15) con las fórmulas correspondientes (120.5) de la combustión lenta, observaremos que, en el caso límite $q \gg c_{v1}T_1$, el cociente de las temperaturas de los productos de la combustión después de la detonación y de la combustión lenta es $T_{2,\text{det}}/T_{2,\text{com}} = 2\gamma_2^2/(\gamma_2 + 1)$. Este cociente siempre supera a la unidad (puesto que $\gamma_2 > 1$).

En todos los razonamientos anteriores, que se basaron en la figura 114, se ha supuesto tácitamente que la reacción química de la combustión es exotérmica desde el principio hasta el fin (es decir, en todas las etapas intermedias entre el gas original sin quemar y los productos finales de la combustión). En la mayoría de los casos esta hipótesis está justificada. Sin

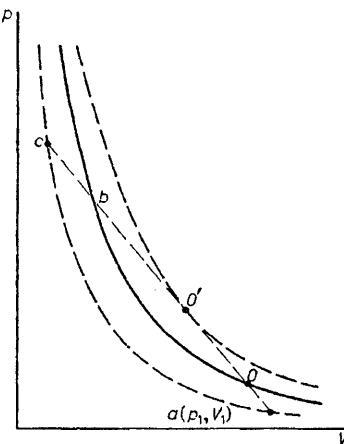


FIG. 115

embargo, son posibles, en principio, reacciones que sean exotérmicas inicialmente, pero endotérmicas en sus etapas finales (YA. B. ZELDOVICH y S. B. RATNER, 1941). La mezcla intermedia para la cual se absorbe por primera vez calor en lugar de desprenderse, corresponde entonces a una adiabática que cae por encima de la adiabática de la detonación que correspondería al estado de los productos de la combustión finales (figura 115).

Cualquier cuerda a lo largo de la cual varíe el estado de la mezcla detonante debe cortar a esta adiabática intermedia. El valor j_{\min} correspondiente al valor mínimo posible de la velocidad de propagación de la combustión queda determinado, por consiguiente, mediante la pendiente de la tangente aO' . Las ondas de detonación con $j > j_{\min}$ corresponden a puntos que caen sobre la adiabática de la detonación por encima del punto b y $v_2 < c_2$. Si $j = j_{\min}$, el estado del gas varía a lo largo de la línea ca desde c hasta O' y luego de nuevo hacia abajo hasta O , que sustituye el punto de Jouquet ordinario como punto que corresponde a la detonación espontánea; aquí $v_2 > c_2$, contrariamente al resultado usual.

PROBLEMA

Determinar las magnitudes termodinámicas correspondientes al gas que se encuentra inmediatamente detrás de la onda de choque que se forma en el frente delantero de una onda de detonación intensa correspondiente al punto de Jouquet.

Solución. Inmediatamente detrás de la onda de choque tenemos gas sin quemar y su estado está representado por el punto e en donde la tangente aO producida corta la adiabática del choque (figura 114) del gas 1, indicada a trazos. Designando las coordenadas de este punto por (p_1', V_1') , tenemos, en primer lugar, mediante la ecuación (85.1) para la adiabática del choque del gas 1,

$$\frac{V_1'}{V_1} = \frac{(\gamma_1 + 1)p_1 + (\gamma_1 - 1)p_1'}{(\gamma_1 - 1)p_1 + (\gamma_1 + 1)p_1'}$$

y, segundo, $(p_1' - p_1)/(V_1 - V_1') = j^2 = v_1^2/V_1^2$. Tomando v_1 a partir de (121.14), se obtiene

$$p_1' = p_1 \frac{4(\gamma_2^2 - 1)}{\gamma_1^2 - 1} \frac{q}{c_{v1} T_1}, \quad V_1' = V_1 \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1},$$

$$T_1' = \frac{q}{c_{v1}} \frac{4(\gamma_2^2 - 1)}{(\gamma_1 + 1)^2}.$$

El cociente entre la presión p_1' y la presión p_2 detrás de la onda de detonación es

$$p_1'/p_2 = 2(\gamma_2 + 1)/(\gamma_1 + 1).$$

§ 122. Propagación de una onda de detonación

Consideremos a continuación algunos casos reales de la propagación de ondas de detonación en un gas inicialmente en reposo. Tomemos primamente el caso de detonación en un gas que está dentro de un tubo cerrado por un extremo ($x = 0$). Las condiciones límites en este caso son que la velocidad del gas es cero, tanto delante de la onda de detonación (que no afecta al estado del gas que se encuentra delante de él) como en el extremo cerrado del tubo. Como el gas adquiere una velocidad no nula cuando la onda de detonación pasa, la velocidad debe disminuir en la región entre la onda de detonación y el extremo cerrado del tubo. Con objeto de determinar el esquema de flujo resultante, observemos que en este caso no hay ningún parámetro de longitud que pueda caracterizar las condiciones del flujo a lo largo del tubo (dirección x). Hemos visto en § 92 que, en dichos casos, la velocidad del gas puede cambiar, o bien en una onda de choque (que separa dos regiones en donde la velocidad es constante), o bien en una onda de rarefacción de semejanza.

Supongamos primeramente que la onda de detonación no corresponde al punto de Jouguet sobre la adiabática. Entonces, su velocidad de propagación relativa al gas detrás de ella es $v_2 < c_2$. Es fácil ver que, en este caso, no pueden seguir a la onda de detonación ni una onda de choque ni una discontinuidad débil (frente delantero de una onda de rarefacción). En el primer caso tendría que moverse, respecto al gas delante de ella, con una velocidad que superase a c_2 , y en el segundo con una velocidad igual a c_2 , y en ambos casos adelantaría a la onda de detonación. Así pues, en la hipótesis anterior, la velocidad del gas que se mueve detrás de la onda de detonación no puede disminuir, es decir, la condición límite en $x = 0$ no puede satisfacerse.

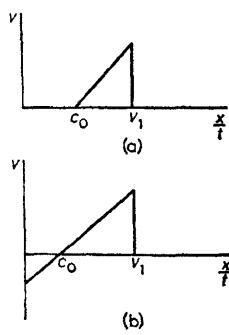


FIG. 116

Sólo puede satisfacerse esta condición en el caso de una onda de detonación correspondiente al punto de Jouguet. Entonces, $v_2 = c_2$ y la onda de

detonación puede ir seguida de una onda de rarefacción. Esta se forma en $x = 0$ cuando empieza la detonación y su frente delantero coincide con la onda de detonación.

Así llegamos al importante resultado de que una onda de detonación que se propaga dentro de un tubo, produciéndose la ignición del gas en el extremo cerrado, debe corresponder al punto de Jouguet. Se mueve respecto al gas que está inmediatamente detrás de ella con una velocidad igual a la velocidad local del sonido. La onda de detonación va junto con una onda de rarefacción, en la cual disminuye la velocidad del gas monótonamente hasta cero (respecto al tubo). El punto en donde la velocidad se hace cero es una discontinuidad débil. Detrás de esta discontinuidad el gas está en reposo (figura 116a).

Consideremos a continuación una onda de detonación que se propaga desde el extremo abierto de un tubo. La presión del gas delante de la onda de detonación debe ser igual a la presión original, que evidentemente es igual a la presión externa. Resulta claro en este caso también que la velocidad debe disminuir en alguna parte detrás de la onda de detonación. Si la velocidad del gas fuese constante, entre el extremo del tubo y la onda de detonación, resultaría que el gas estaría siendo succionado desde el extremo abierto del tubo hacia el exterior; esto resulta imposible, puesto que la presión del gas en el tubo debe ser mayor que la presión externa, teniendo en cuenta el aumento de presión de una onda de detonación. Por las mismas razones que en el caso anterior, la onda de detonación debe corresponder al punto de Jouguet. El esquema de flujo resultante se indica en forma diagramática en la figura 116b. Inmediatamente detrás de la onda de detonación existe una onda de rarefacción de semejanza, en la cual la velocidad decrece monótonamente hacia el extremo del tubo, cambiando de signo en cierto punto. Esto significa que en la sección final del tubo el gas se mueve hacia el extremo abierto y fluye al exterior; la velocidad con que sale del tubo es igual a la velocidad local del sonido y su presión supera a la presión externa. Hemos visto en § 90 que dicho flujo es posible.

Consideremos a continuación una onda de detonación con simetría esférica y que sale de un punto central en donde se produjo la ignición inicial (YA. B. ZELDOVICH, 1942). Como el gas debe estar en reposo tanto delante de la detonación como cerca de su centro, la velocidad del gas debe disminuir desde la onda de detonación hacia el centro. Igual que en el caso del flujo en un tubo, se carece de parámetros de semejanza que tengan las dimensiones de longitud. Por consiguiente, el resultado debe ser un flujo de semejanza, sustituyéndose la coordenada x por la distancia r al centro. Así pues, todas las magnitudes son funciones únicamente del cociente r/t .

En el caso de flujo con simetría central [$v_r = v(r, t)$, $v_\theta = v_\phi = 0$], las

ecuaciones del movimiento son como sigue. La ecuación de continuidad es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial r} + \frac{2v\rho}{r} = 0;$$

la ecuación de Euler,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r},$$

y la ecuación de conservación de la entropía,

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial r} = 0.$$

Utilizando la nueva variable $\xi = r/t (> 0)$ y suponiendo que todas las magnitudes son funciones de ξ únicamente, se tiene

$$(\xi - v)\rho'/\rho = v' + 2v/\xi, \quad (122.1)$$

$$(\xi - v)v' = p'/\rho, \quad (122.2)$$

$$(\xi - v)s' = 0, \quad (122.3)$$

designando con el símbolo prima la derivación respecto a ξ . No podemos tener $v = \xi$, puesto que esto contradice la primera ecuación. A partir de la tercera ecuación, por consiguiente, $s' = 0$, es decir, $s = \text{constante}$. Por tanto, podemos escribir $p' = (\partial p / \partial \rho)_{s'} \rho' = c^2 \rho'$, y la ecuación (122.2) se reduce a

$$(\xi - v)v' = c^2 \rho'/\rho. \quad (122.4)$$

Sustituyendo ρ'/ρ de (122.1), se obtiene la relación

$$\left[\frac{(\xi - v)^2}{c^2} - 1 \right] v' = \frac{2v}{\xi}. \quad (122.5)$$

Las ecuaciones (122.4) y (122.5) no pueden integrarse analíticamente, pero pueden estudiarse las propiedades de sus soluciones.

La región en donde el gas que fluye es del tipo considerado, está limitada, como veremos más adelante, por dos esferas, siendo la exterior la superficie de la propia onda de detonación, mientras que la interior es la superficie de una discontinuidad débil, en donde la velocidad es cero.

Examinemos primeramente las propiedades de la solución cerca del punto en donde v es cero. Es fácil ver que en donde $v = 0$, también $\xi = 0$:

$$v = 0, \quad \xi = c. \quad (122.6)$$

En efecto, cuando v tiende a cero, $\log v \rightarrow -\infty$; de aquí que cuando ξ disminuye hasta el valor correspondiente al límite interior de la región en cuestión, la derivada $d \log v / d\xi$ debe tender a $+\infty$. Sin embargo, según (122.5), tenemos cuando $v = 0$

$$d \log v / d\xi = 2c^2 / \xi (\xi^2 - c^2).$$

Esta expresión sólo puede tender a $+\infty$ si $\xi \rightarrow c$.

En el origen, la velocidad radial debe anularse por simetría. Así pues, existe una región de gas en reposo alrededor del origen; esta región es la interior a la esfera $\xi = c_0$, siendo c_0 la velocidad del sonido para el punto en donde $v = 0$.

Averiguemos las propiedades de la función $v(\xi)$ cerca del punto (122.6). A partir de (122.5) tenemos

$$v \frac{d\xi}{dv} = \frac{1}{2}\xi \left[\frac{(\xi - v)^2}{c^2} - 1 \right].$$

Conservando las magnitudes sólo de primer orden (tales como v , $\xi - c_0$ y $c - c_0$), tenemos después de un sencillo cálculo $v d(\xi - c_0) / dv = (\xi - c_0) - (v + c - c_0)$. De acuerdo con (95.1) tenemos $v + c - c_0 = \alpha_0 v$, siendo α_0 una constante positiva (el valor de (95.2) para $v = 0$), y así obtenemos la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden para $\xi - c_0$ en función de v :

$$v d(\xi - c_0) / dv - (\xi - c_0) = -\alpha_0 v.$$

La solución de esta ecuación es

$$\xi - c_0 = \alpha_0 v \log(\text{constante}/v). \quad (122.7)$$

Esta expresión determina implícitamente la función $v(\xi)$ cerca del punto en donde $v = 0$.

Vemos que el límite interno es una superficie de discontinuidad débil: la velocidad tiende de modo continuo hacia cero. La curva de $v(\xi)$ tiene una tangente horizontal en este punto ($dv/d\xi = 0$). La discontinuidad débil que aparece es muy poco corriente: la primera derivada es continua, pero todas las derivadas de orden superior son infinitas [como se ve fácilmente a partir de (122.7)]. El cociente r/t para $v = 0$ es evidentemente igual a la velocidad del movimiento del límite respecto al gas; de acuerdo con (122.6), es igual a la velocidad local del sonido, como debe ser en el caso de una discontinuidad débil.

Según (122.7), tenemos para valores pequeños de v ,

$$\begin{aligned}\xi - v - c &= (\xi - c_0) - (v + c - c_0) \\ &= \alpha_0 v [\log(\text{constante}/v) - 1].\end{aligned}$$

Para v pequeño, esta magnitud es positiva: $\xi - v - c > 0$. Demostraremos que la diferencia $(\xi - v) - c$ no puede cambiar de signo en la región del flujo considerado. Consideremos un punto de esta región, si es que hay alguno, en donde

$$\xi - v = c, \quad v \neq 0. \quad (122.8)$$

Según (122.5) la derivada v' debe ser infinita en este punto, es decir,

$$\frac{d\xi}{dv} = 0. \quad (122.9)$$

En cuanto a la segunda derivada $d^2\xi/dv^2$ se demuestra por simple cálculo [utilizando las condiciones (122.8) y (122.9)] que vale $d^2\xi/dv^2 = -\alpha_0 \xi / c_0 v$, que no es nula. Esto significa que ξ como función de v posee un máximo en el punto en cuestión. Así, la función $v(\xi)$ existe sólo para valores de ξ menores que el correspondiente a las condiciones (122.8), y este valor es el otro límite de la región considerada. Como $\xi - v - c$ se anula sólo en el límite de la región y $\xi - v - c > 0$ para valores pequeños de v , llegamos a la conclusión de que

$$\xi - v > c \quad (122.10)$$

en cualquier punto de la región.

Es fácil comprobar que el límite externo de la región del flujo considerado corresponde al punto en que se cumplen las condiciones (122.8). En efecto, observemos que la diferencia $r/t - v$, en donde r es la coordenada en el límite, es justamente la velocidad del límite relativo al gas posterior. Sin embargo, una superficie en la cual $r/t - v > c$ no puede corresponder a una onda de detonación (en donde debe cumplirse $r/t - v \leq c$). Por tanto, el límite externo de dicha región puede ser sólo el punto donde se cumple (122.8). En este límite v cae discontinuamente a cero y la velocidad del límite relativa al gas posterior es igual a la velocidad local del sonido. Esto significa que la onda de detonación debe corresponder al punto de Jouguet sobre la adiabática de la detonación.[†]

Tenemos así el siguiente esquema de flujo para la propagación esférica de una detonación. La onda de detonación, como la de un tubo, debe corresponder al punto de Jouguet. Inmediatamente detrás existe una onda de rare-

[†] Observemos que $v = \text{constante}$ no es una solución de las ecuaciones del movimiento simétrico centralmente. Por tanto, la onda de detonación no puede ir seguida de una región de velocidad constante.

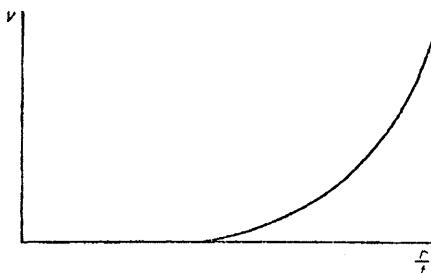


FIG. 117

facción igualmente esférica, en la cual la velocidad del gas disminuye hasta cero. El decrecimiento es monótono, ya que según (122.5) la derivada $dv/d\xi$ sólo se anula para $v = 0$. La presión y densidad del gas también decrecen monótonamente, ya que según (122.4) y (122.10) la derivada p' tiene siempre el mismo signo que v' . La curva que nos da v en función de r/t tiene una tangente vertical en el límite externo [según (122.9)] y una tangente horizontal en el límite interno (figura 117). El límite interno es una discontinuidad débil, cerca de la cual la dependencia de v con r/t viene dada por la ecuación (122.7). El gas dentro de la esfera limitada por la discontinuidad débil está en reposo. Sin embargo, la masa total del gas en reposo es muy pequeña (véanse las notas al final del § 99).

Así, en todos los casos típicos de propagación monodimensional espontánea de la detonación que hemos considerado, las condiciones límites en la región posterior a la detonación exigen una velocidad única en esta última que corresponde al punto de Jouquet (toda la adiabática de la detonación por debajo de este punto viene excluida por los argumentos del § 121). La obtención en un tubo de sección transversal constante de una detonación correspondiente a la parte de la adiabática por encima del punto de Jouquet[†] requeriría una compresión artificial de los productos de combustión por medio de un pistón que se desplazara con velocidad supersónica (véase problema 3).

Sin embargo, debe destacarse que estas conclusiones no son universalmente válidas y existen casos de propagación de la detonación, en donde una onda de detonación sobrecomprimida ocurre espontáneamente. En particular, este tipo de onda se produce cuando una onda de detonación ordinaria pasa de un tubo ancho a otro estrecho (B. V. AIVAZOV y YA. B. ZELDOVICH, 1947). Este fenómeno tiene lugar porque cuando una onda de detonación alcanza el estrechamiento del tubo, se refleja parcialmente y la presión

[†] Tales ondas de detonación se llaman a veces «sobrecomprimidas», ya que en ellas el gas está comprimido a presiones superiores a las de la onda «normal» de detonación correspondiente al punto de Jouquet.

de los productos de la combustión que se mueven de la parte ancha a la estrecha se incrementa considerablemente (véase problema 4).

Hasta ahora hemos despreciado completamente las pérdidas de calor que pueden acompañar a la propagación de una onda de detonación. Como en el caso de la combustión lenta, estas pérdidas pueden hacer imposible la propagación de la detonación. En la detonación del gas en un tubo, la fuente de las pérdidas es fundamentalmente la extracción de calor a través de las paredes del tubo y el retraso del gas a causa de la fricción. Una detonación en una barra delgada de explosivo viene limitada principalmente por la dispersión de los productos de la combustión: cuando la barra es demasiado delgada en comparación con la anchura de la zona de combustión, parte del material se dispersa antes de que tenga lugar la reacción y la propagación de la detonación es imposible (YU. B. Khariton, 1940).

En condiciones próximas a los límites para que pueda propagarse la detonación, se observa un curioso fenómeno denominado *detonación en giro* (*spinning detonation*). De acuerdo con K. I. SHCHELKIN (1945), la onda de choque que se propaga a lo largo del tubo en el caso de una detonación de este tipo deja de poseer simetría axial (normalmente casi plana), y gira alrededor del eje del tubo cuando se mueve a lo largo del mismo. La ignición del gas cuando pasa a través del choque se produce principalmente en una zona del frente de onda en donde existe una deformación excéntrica que se mueve en espiral. No existe ninguna teoría cuantitativa de la detonación en giro.[†]

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el flujo del gas cuando se propaga una detonación desde el extremo cerrado de un tubo.

Solución. La velocidad v_1 de la onda de detonación respecto al gas en reposo que hay delante de él, y su velocidad v_2 respecto al gas quemado que hay inmediatamente detrás de ella, vienen dadas en función de la temperatura T_1 por las fórmulas (121.11), (121.12). v_1 es también la velocidad de la onda respecto al tubo, de modo que su coordenada es $x = v_1 t$. La velocidad (relativa a la tubería) de los productos de la combustión en la onda de detonación es $v_1 - v_2$. La velocidad v_2 es igual a la velocidad local del sonido. Puesto que la velocidad del sonido está relacionada con la velocidad del gas v en una onda de rarefacción de semejanza a través de $c = c_0 + (\gamma - 1)v/2$, tenemos $v_2 = c_0 + (\gamma - 1)(v_1 - v_2)/2$, de aquí que $c_0 = (\gamma_2 + 1)v_2/2 - (\gamma_2 - 1)v_1/2$. En el caso de una onda de detonación intensa tenemos, según (121.14), simplemente que $c_0 = v_1/2$. La cantidad c_0 es la velocidad del límite en retroceso de la onda de rarefacción. La velocidad varía linealmente entre los dos límites (figura 116a).

Problema 2. Igual que el problema 1, pero en el caso de un tubo con el extremo abierto.

[†] YA. B. ZELDOVICH ha dado una discusión cualitativa (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 52, 147, 1946).

Solución. Las velocidades v_1 y v_2 se determinan como en el caso anterior y, por tanto, c_0 es la misma también. Sin embargo, la onda de rarefacción se extiende ahora, no hasta el punto en donde $v = 0$, sino hasta el extremo del tubo ($x = 0$, figura 116b). Vemos a partir de la fórmula $x/t = v + c$ (92.5) que el gas sale del extremo abierto del tubo con una velocidad $v = -c$ igual a la velocidad local del sonido. Poniendo $-v = c = c_0 + (\gamma_2 - 1)v/2$, se encuentra finalmente que la velocidad del flujo de salida es $[-v]_{x=0} = 2c_0/(\gamma_2 + 1)$. En el caso de una onda de detonación intensa esta velocidad es $v_1/(\gamma_2 + 1)$.

Problema 3. El mismo que el problema 1, pero en el caso de una onda de detonación que se propaga en un tubo cuyo extremo está cerrado por un pistón que empieza a moverse hacia adelante con una velocidad constante U .

Solución. Si $U < v_1$, la distribución de velocidades en el gas es de la forma indicada en la figura 118a. La velocidad del gas disminuye desde $v_1 - v_2$ en $x/t = v_1$ hasta U en $x/t = c_0 + (\gamma + 1)U/2$, con el mismo valor de c_0 que antes. A continuación, existe una región en la que el gas se mueve con velocidad constante U .

Sin embargo, si $U > v_1$, la onda de detonación no puede corresponder al punto de Jouguet (puesto que el pistón la adelantaría). En este caso tenemos una onda de detonación sobrecomprimida, que corresponde a un punto de la adiabática por encima del punto de Jouguet. Está determinado por el hecho de que la discontinuidad de la velocidad en la onda de detonación debe igualar a la velocidad del pistón: $v_1 - v_2 = U$. En toda la región comprendida entre la onda de detonación y el pistón el gas se mueve con velocidad constante U (figura 118b).

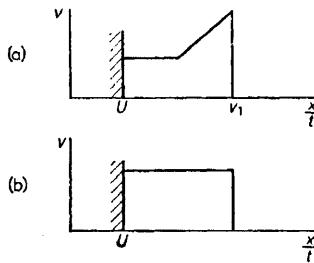


FIG. 118

Problema 4. Determinar la presión en una pared perfectamente rígida cuando una onda de detonación plana e intensa que incide normalmente se refleja sobre ella (K. P. STANUKOVICH, 1946).

Solución. Cuando una onda de detonación incide sobre una pared, se forma una onda de choque reflejada que se propaga en sentido opuesto a través de los productos de la combustión. Los cálculos son totalmente semejantes a los del § 93, problema 1. Con la misma notación, obtenemos las tres relaciones

$$p_2(V_1 - V_2) = (p_3 - p_2)(V_2 - V_3), \quad V_2/V_1 = \gamma_2/(\gamma_2 + 1),$$

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{(\gamma_2 + 1)p_2 + (\gamma_2 - 1)p_3}{(\gamma_2 - 1)p_2 + (\gamma_2 + 1)p_3};$$

en ellas hemos despreciado a p_1 en comparación con p_2 , pero p_2 y p_3 son del mismo orden de magnitud. Eliminando los volúmenes, obtenemos una ecuación de segundo grado para p_3 , y debemos tomar la raíz que sea mayor que p_2 :

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{5\gamma_2 + 1 + \sqrt{(17\gamma_2^2 + 3\gamma_2 + 1)}}{4\gamma_2}.$$

Debe señalarse que esta cantidad es casi independiente de γ_2 , variando desde 2,6 hasta 2,3 cuando γ_2 varía de 1 a ∞ .

§ 123. Relación existente entre los diversos modos de combustión

Se ha demostrado en § 121 que la detonación corresponde a puntos situados sobre la parte superior de la adiabática de la detonación para el proceso de combustión de que se trate. Como la ecuación de esta adiabática es consecuencia solamente de las leyes de conservación de la masa, el impulso y la energía (aplicadas a los estados inicial y final del gas en combustión), resulta evidente que los puntos que representan el estado de los productos de la reacción deben estar sobre la misma curva para cualquier otro modo de combustión en el que la zona de combustión pueda considerarse como una superficie de discontinuidad de cierto tipo. Investiguemos a continuación el significado físico del resto de la curva.

Pasando por el punto (p_1, V_1) (punto 1 de la figura 119) dibujamos dos rectas, una vertical $1A$ y la otra horizontal $1A'$, además de las dos tangentes $1O$ y $1O'$ a la adiabática. Los puntos A, A', O, O' en donde estas rectas cortan o tocan a la curva, dividen a la adiabática en cinco partes. La parte que cae por encima de O corresponde a la detonación, como ya hemos dicho. Consideraremos a continuación las otras partes de la curva.

En primer lugar, es fácil ver que la sección AA' carece de significado físico. Efectivamente, en esta sección tenemos $p_2 > p_1$, $V_2 > V_1$, y de este modo el flujo másico $j = \sqrt{[(p_2 - p_1)/(V_1 - V_2)]}$ es imaginario.

En los puntos de contacto O y O' , la derivada $d(j^2)/dp_2$ es cero; se ha demostrado en § 84 que en dichos puntos se tiene $v_2/c_2 = 1$ y $d(v_2/c_2)/dp_2 < 0$. De aquí se deduce que por encima de los puntos de contacto $v_2/c_2 < 1$, y por debajo de ellos $v_2/c_2 > 1$. La relación entre v_1 y c_1 se encuentra siempre fácilmente considerando las pendientes de las cuerdas y tangentes correspondientes, como hicimos en § 121 para la parte por encima de O . El resultado es que son válidas las siguientes desigualdades en las diversas secciones de la adiabática:

encima de O	$v_1 > c_1,$	$v_2 < c_2;$	}
sobre AO	$v_1 > c_1,$	$v_2 > c_2;$	
sobre $A'O'$	$v_1 < c_1,$	$v_2 < c_2;$	
por debajo de O'	$v_1 < c_1,$	$v_2 > c_2.$	

(123.1)

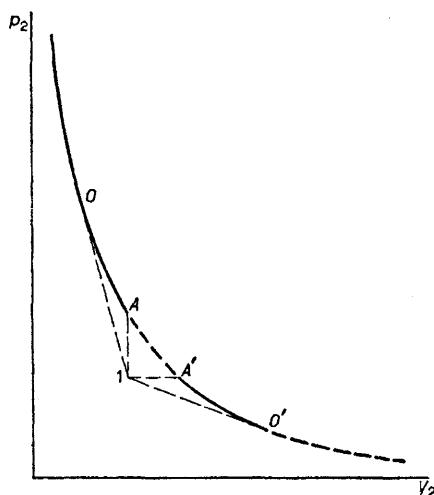


FIG. 119

En O y O' , $v_2 = c_2$. Cuando nos acercamos a A el flujo j y, por tanto, las velocidades v_1 , v_2 , tienden a infinito. Sin embargo, cuando nos aproximamos a A' , j y las velocidades v_1 , v_2 tienden a cero.

En § 84 hemos analizado la estabilidad de una onda de choque respecto a desplazamientos infinitesimales en dirección perpendicular a su plano y hemos visto que la estabilidad depende de la relación existente entre el número de parámetros que determinan la perturbación y el número de condiciones límites que deben satisfacer las perturbaciones en la superficie de discontinuidad.

También pueden aplicarse todas estas consideraciones a las superficies de discontinuidad consideradas aquí. En particular, sigue siendo válido el cálculo realizado en § 84 del número de parámetros de la perturbación en cada caso (123.1), indicado en la figura 47. La única diferencia es la siguiente. En la combustión sin detonación, la velocidad de propagación está determinada únicamente por las propiedades de la reacción química y por las condiciones de transferencia de calor desde la zona de combustión hacia el gas frío que hay delante de ella. Esto significa que el flujo másico j a través de la zona de combustión es una cantidad dada (o, con más precisión, una función determinada del estado del gas sin quemar), mientras que en una onda de choque o de detonación j puede tener un valor cualquiera. De aquí se deduce que, en una discontinuidad que es una zona de combustión sin detonación, el número de condiciones límites es uno más que en el caso de una onda de choque: se añade la condición de que j tenga un valor determinado. Así pues, existen conjuntamente cuatro condiciones y podemos ahora

sacar la conclusión, del mismo modo que en § 84, de que la discontinuidad es absolutamente inestable sólo en el caso en que $v_1 < c_1$, $v_2 > c_2$, que corresponde a puntos que están por debajo del punto O' de la adiabática. En consecuencia, esta parte de la curva no corresponde a ningún modo de combustión que pueda conseguirse en la práctica.

La sección $A'O'$ de la adiabática, en la cual las dos velocidades v_1 y v_2 son subsónicas, corresponde a la combustión lenta ordinaria. Un aumento de la velocidad de propagación de la combustión, es decir, de j , corresponde a un movimiento desde A' , en donde $j = 0$, hacia O' . Las fórmulas (120.5) corresponden al punto A' (en donde $p_1 = p_2$) y son válidas si j es suficientemente pequeño, por ejemplo, si la velocidad de propagación es pequeña en comparación con la del sonido. El punto O' corresponde a la combustión «más rápida» de este tipo. Daremos las fórmulas que corresponden a este caso límite.

El punto O' , como el O , es un punto de contacto entre la curva y la tangente desde el punto 1. De aquí que las fórmulas relacionadas con O' puedan obtenerse inmediatamente a partir de las fórmulas (121.8)-(121.11) para O cambiando de modo apropiado los signos [ver la nota a pie de página correspondiente a (121.9)]. En las fórmulas (121.9) y (121.11) correspondientes a v_1 y v_2 cambiaremos el signo del segundo radical y, por consiguiente, también resultará cambiado el signo de la expresión (121.12) correspondiente a $v_1 - v_2$. Las fórmulas (121.10) resultan sin cambios si se considera que v_1 toma su nuevo valor. Todas estas fórmulas se simplifican mucho si el calor de reacción es grande ($q \gg c_{v_2}T_1$). Obtenemos entonces

$$\begin{aligned} v_1 &= \gamma_2 p_1 V_1 / \sqrt{[2(\gamma_2^2 - 1)q]}, & v_2 &= \sqrt{[2(\gamma_2 - 1)q/(\gamma_2 + 1)]}, \\ p_2/p_1 &= 1/(\gamma_2 + 1), & c_{v_2} T_2 &= 2q/\gamma_2(\gamma_2 + 1). \end{aligned} \quad (123.2)$$

Ahora debe señalarse el punto siguiente. Hemos visto que, en la combustión lenta dentro de un tubo cerrado, debe formarse delante de la zona de combustión una onda de choque. En el caso de velocidades grandes de propagación de la combustión, esta onda de choque es intensa y puede influir considerablemente sobre el estado del gas que entra en la zona de combustión. Por consiguiente, resulta inútil, hablando estrictamente, el investigar la variación en la manera de producirse la combustión al aumentar la velocidad, si permanece sin variar el estado p_1 , V_1 del gas sin quemar. Con objeto de alcanzar el punto O' debemos crear condiciones de combustión en las que no se forme ninguna onda de choque. Esto puede hacerse, por ejemplo, en una combustión dentro de un tubo abierto por ambos extremos, en el que se produce una renovación continua de los productos de la combustión en su extremo posterior. La velocidad de renovación debe ser tal que se con-

siga el que la zona de combustión permanezca en reposo y así no se forme ninguna onda de choque.

Cuando la transferencia de calor es muy eficiente (por ejemplo, transferencia por radiación), el valor de j puede, en principio, superar al correspondiente al punto O' . El modo de combustión resultante entonces debe corresponder a puntos sobre la sección AO de la adiabática, puesto que la combustión correspondiente a un punto por encima de O no puede, en general, producirse espontáneamente por las mismas razones que en la detonación.

La combustión lenta ordinaria puede espontáneamente transformarse en una detonación. Esta transición se produce debido a una aceleración de la llama, acompañada de un aumento en la intensidad de la onda de choque que la precede, hasta que el choque resulta lo suficientemente intenso como para producir la ignición del gas que pasa a su través. El mecanismo de esta aceleración espontánea de la llama no está claro todavía; es posible que resulte tener importancia la turbulencia de la llama producida por las paredes de la tubería (K. I. SHCHELKIN). También es posible que la propagación estacionaria de la llama resulte inestable cuando su frente se curve debido al rozamiento del gas contra las paredes del tubo (YA. B. ZELDOVICH).

En conclusión, podemos llamar la atención acerca de las siguientes diferencias generales [además de las obtenidas en las desigualdades (123.1)] entre los modos de combustión correspondientes a la parte superior e inferior de la adiabática. Encima de A tenemos $p_2 > p_1$, $V_2 < V_1$, $v_2 < v_1$. Es decir, los productos de la reacción tienen una presión y densidad mayor que los del gas original y se mueven detrás del frente de la combustión con velocidad $v_1 - v_2$. En la región por debajo de A , sin embargo, las desigualdades se invierten: $p_2 < p_1$, $V_2 > V_1$, $v_2 > v_1$, y los productos de la combustión son menos densos que los del gas original.

§ 124. Discontinuidades de condensación

Existe una semejanza formal entre las ondas de detonación y lo que se denomina *discontinuidades de condensación*; éstas se producen, por ejemplo, en el flujo de un gas que contiene vapor de agua sobresaturado. Las discontinuidades son el resultado de una condensación repentina del vapor que se produce muy rápidamente en una región muy estrecha, que puede considerarse como una superficie de discontinuidad (discontinuidad de condensación) que separa el gas original de un gas que contiene vapor condensado (*niebla*). Debe resaltarse que las discontinuidades de condensación son un fenómeno físico distinto y diferenciado y no es el resultado de la compresión del gas en una onda de choque ordinaria; este último efecto no puede conducir a la condensación, puesto que el aumento de presión en la onda de choque tiene menos efecto sobre el grado de sobresaturación que el incre-

mento de temperatura. Las discontinuidades de condensación fueron estudiadas, en primer lugar, teóricamente por S. Z. BELENKII (1945).

Como la combustión, la condensación de un vapor es un proceso exotérmico. El calor de reacción está representado ahora por el calor desprendido por unidad de masa debido a la condensación del vapor.[†] La condensación adiabática que da p_2 en función de V_2 para un estado p_1 , V_1 dado del gas original no condensado, es de la misma forma que la adiabática de combustión indicada en la figura 119. La relación existente entre las velocidades de propagación de la discontinuidad v_1 , v_2 y las velocidades del sonido c_1 , c_2 para las diversas partes de la adiabática de la condensación, viene dada por las desigualdades (123.1). Sin embargo, en la realidad no pueden producirse los cuatro casos enumerados en (123.1).

En primer lugar, se plantea la cuestión de si son estables las discontinuidades de condensación respecto a perturbaciones pequeñas en una dirección perpendicular a la superficie. En este aspecto, sus propiedades son totalmente semejantes a las de las zonas de combustión. Hemos visto (§ 123) que la diferencia de estabilidad entre las zonas de combustión y las ondas de choque ordinarias se debe a la existencia de una condición adicional (que el flujo j tenga un valor dado) que debe satisfacerse en la superficie. En el caso de las discontinuidades de condensación existe de nuevo una condición adicional: el estado termodinámico del gas 1 delante de la discontinuidad debe ser la adecuada para que empiece una rápida condensación del gas.[‡] Por consiguiente, se obtiene inmediatamente la conclusión de que la totalidad de la adiabática por debajo de O' , para la cual $v_1 < c_1$, $v_2 > c_2$, está excluida, ya que no corresponde a discontinuidades estables.

Es fácil ver que las discontinuidades correspondientes a la parte por encima de O , en las cuales $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$, tampoco pueden presentarse en la práctica. Dicha discontinuidad se movería con velocidad supersónica respecto al gas que hay delante de él y, por tanto, su presencia no deberá influir sobre el estado de este gas. En consecuencia, la discontinuidad tendría que haberse formado a lo largo de una superficie determinada por las condiciones del flujo, a saber aquella superficie en la que se satisfacen las condiciones necesarias para el establecimiento de una rápida condensación. La velocidad de la discontinuidad respecto al gas que está detrás de ella, por otra parte, deberá ser subsónica en este caso. Sin embargo, en general, las ecuaciones del flujo subsónico no poseen ninguna solución, para la cual

[†] El calor q no es, estrictamente hablando, el calor latente usual de condensación, puesto que el proceso que se produce en la zona de condensación incluye, no sólo la condensación isoterma del vapor, sino también una variación general de la temperatura del gas. Sin embargo, si el grado de sobresaturación no es demasiado pequeño (condición que normalmente se satisface), la diferencia carece de importancia.

[‡] Esta condición da una relación entre la presión y la temperatura del gas 1.

todas las magnitudes tomen valores prescritos sobre una superficie dada.[†]

Así pues, sólo son posibles dos tipos de discontinuidades de condensación: (1) discontinuidades supersónicas (la sección AO de la adiabática) para las cuales

$$v_1 > c_1, \quad v_2 > c_2, \quad p_2 > p_1, \quad V_2 < V_1 \quad (124.1)$$

de modo que la condensación lleva como consecuencia una compresión, (2) discontinuidades subsónicas (la sección $A'O'$ de la adiabática), en las cuales

$$v_1 < c_1, \quad v_2 < c_2, \quad p_2 < p_1, \quad V_2 > V_1 \quad (124.2)$$

y la condensación lleva como consecuencia una rarefacción.

El valor del flujo j aumenta monótonamente a lo largo de la sección $A'O'$ desde A' (en donde $j = 0$) hasta O' , y disminuye monótonamente a lo largo de AO desde A (en donde $j = \infty$) hasta O . El intervalo de valores de j (y, por consiguiente, el margen de valores de la velocidad $v_1 = jV_1$) entre los correspondientes a O y O' están «prohibidos» y no pueden presentarse en una discontinuidad de condensación. La masa total de vapor condensado es normalmente muy pequeña en comparación con la masa del gas original. Por consiguiente, podemos considerar ambos gases 1 y 2 como gases perfectos; por la misma razón, los calores específicos de los dos gases pueden suponerse iguales. Entonces el valor de v_1 en el punto O está determinado por la fórmula (121.9), y su valor en O' por la misma fórmula, pero con el signo del segundo radical cambiado; poniendo $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$ y $c_1^2 = \gamma(\gamma - 1)c_n T_1$, encontramos que el margen prohibido de valores de v_1 es

$$\begin{aligned} \sqrt{[c_1^2 + \frac{1}{2}(\gamma^2 - 1)q]} - \sqrt{[\frac{1}{2}(\gamma^2 - 1)q]} &< v_1 \\ &< \sqrt{[c_1^2 + \frac{1}{2}(\gamma^2 - 1)q]} + \sqrt{[\frac{1}{2}(\gamma^2 - 1)q]}. \end{aligned} \quad (124.3)$$

PROBLEMA

Determinar los valores límites del cociente de presiones p_2/p_1 en una condensación de discontinuidad, suponiendo que $q/c_1^2 \ll 1$.

[†] Son válidos razonamientos semejantes en el caso en que la velocidad total v_2 (de la cual $v_2 < c_2$ es la componente normal a la discontinuidad) sea supersónica.

Para evitar malas interpretaciones, debe señalarse que una discontinuidad de condensación con $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$ puede simularse realmente (para ciertas condiciones del contenido del vapor y forma de la superficie a través de la cual se produce el flujo) mediante una discontinuidad de condensación verdadera con $v_1 > c_1$, $v_2 > c_2$, seguida muy de cerca por una onda de choque que hace subsónico al flujo.

Solución. En la sección $A'O'$ de la adiabática de la condensación (figura 119), el cociente p_2/p_1 aumenta monótonamente desde O' hasta A' , tomando valores comprendidos en el intervalo

$$1 - \gamma \sqrt{[2(\gamma - 1)q/(\gamma + 1)c_1^2]} \leq p_2/p_1 \leq 1.$$

En la sección AO , este cociente aumenta desde A hasta O , tomando valores comprendidos en el intervalo

$$1 + \gamma(\gamma - 1)q/c_1^2 \leq p_2/p_1 \leq 1 + \gamma \sqrt{[2(\gamma - 1)q/(\gamma + 1)c_1^2]}.$$

CAPÍTULO XV

DINAMICA RELATIVISTA DE FLUIDOS

§ 125. Tensor impulso-energía

El establecimiento de las ecuaciones relativistas del movimiento de los fluidos tiene una importancia fundamental. La necesidad de tener en cuenta los efectos relativistas puede deberse no sólo a una gran velocidad del movimiento macroscópico (comparable con la velocidad de la luz), sino también, como veremos, a una gran velocidad del movimiento microscópico de las partículas del fluido.

En primer lugar, debemos determinar la forma del cuadritensor impulso-energía, T_{ik} para un fluido en movimiento.[†] El flujo del impulso a través de un elemento df de la superficie de un cuerpo coincide con la fuerza ejercida sobre dicho elemento. De aquí que $T_{\alpha\beta} df^\beta$ sea el componente α de la fuerza sobre un elemento de superficie.[‡] Consideraremos un elemento de volumen en el fluido y utilicemos un sistema de referencia en el que este elemento esté en reposo (el sistema «propio»). En dicho sistema es válido el principio de Pascal: la presión ejercida por una porción determinada del fluido es la misma en todas las direcciones, siendo perpendicular al área sobre la que actúa. Por tanto, podemos escribir $T_{\alpha\beta} df^\beta = pdf_\alpha$, y de aquí^{††} $T_{\alpha\beta} = pg_{\alpha\beta}$.

Los componentes $T_{0\alpha}$ que dan la densidad de impulso son nulos para un elemento de volumen determinado en su sistema propio. El componente T_{00}

[†] La notación de este capítulo corresponde a la utilizada en los capítulos 10 y 11 de *Teoría clásica de campos*, Ed. Reverté, Barcelona. Los sufijos latinos i, k, l, \dots , toman los valores 0, 1, 2, 3, siendo $x^0 = ct$ la coordenada de tiempo real. Los sufijos griegos $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, toman los valores 1, 2, 3. El tensor métrico viene dado por la expresión $-ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$ correspondiente al intervalo, siendo los valores galileanos de g_{ik} los siguientes: $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{00} = -1$.

[‡] Podemos recordar que, en coordenadas galileanas, $T_{00} = T^{00} = -T_0^0$ es la densidad de energía, y $T_a^0/c = -T_{0a}/c = T^0\alpha/c$ es la densidad de componentes del impulso; las magnitudes $T_{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} = T_a^b$ forman el tensor densidad de flujo del impulso.

^{††} Escribiremos todas las expresiones en forma covariante, puesto que las utilizaremos cuando esté presente un campo gravitatorio, es decir, en la teoría general de la relatividad.

es la densidad de energía propia del fluido, que designaremos por e en este capítulo.

Así pues, el tensor impulso-energía para una porción determinada de fluido es, en el sistema propio,

$$T_{ik} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix}. \quad (125.1)$$

Ahora resulta ya fácil hallar la expresión correspondiente al tensor impulso-energía en cualquier sistema. Para ello, introduzcamos la cuadrvelocidad del fluido u^i . En el sistema propio del elemento de que se trata, los componentes de la cuadrvelocidad son $u^a = 0$, $u^0 = 1$. La expresión en que se transforma (125.1) para dar T_{ik} en correspondencia con estos valores de u^i es

$$T_{ik} = w u_i u_k + p g_{ik}, \quad (125.2)$$

en donde $w = e + p$ es la entalpía por unidad de volumen.[†] Esta expresión es la requerida para el tensor impulso-energía.

Los componentes T_{ik} en forma tridimensional son

$$T_{\alpha\beta} = \frac{w v_\alpha v_\beta}{c^2(1-v^2/c^2)} + p \delta_{\alpha\beta}, \quad (125.3)$$

$$T_{\alpha 0} = -\frac{w v_\alpha}{c(1-v^2/c^2)}, \quad T_{00} = \frac{w}{1-v^2/c^2} - p = \frac{e + p v^2/c^2}{1-v^2/c^2}.$$

El caso no relativista corresponde a velocidades pequeñas ($v \ll c$) y un movimiento de las partículas del fluido interno (microscópico) también con velocidades pequeñas. Al pasar al límite debe recordarse que la energía interna relativista e incluye la energía en reposo nmc^2 de las partículas del fluido (siendo m la masa en reposo de una partícula). También debe recordarse que la densidad n de partículas se refiere a un volumen unidad propio; sin embargo, en las expresiones no relativistas la densidad de energía se refiere al volumen unidad en el sistema de referencia del laboratorio, en

[†] En todas las fórmulas de este capítulo se toman las magnitudes termodinámicas, de modo que tengan sus valores en el sistema propio del elemento de fluido de que se trate. Magnitudes como la energía interna, la entalpía y la entropía se refieren a la unidad de volumen propio y se designan, respectivamente, por e , w y σ .

el que está en movimiento el elemento de fluido de que se trate. Por tanto, en el límite debemos poner, $nm \rightarrow \rho\sqrt{1-v^2/c^2} \approx \rho - \rho v^2/2c^2$, siendo ρ la densidad de masa ordinaria no relativista. Tanto la densidad de energía no relativista $\rho\epsilon$ como la presión son pequeñas en comparación con ρc^2 .

Así se halla que el valor límite de T_{00} es $\rho c^2 + \rho\epsilon + \rho v^2/2$, es decir, es ρc^2 junto con la densidad de energía no relativista. La forma límite correspondiente del tensor $T_{\alpha\beta}$ es $\rho v_\alpha v_\beta + p\delta_{\alpha\beta}$, es decir, coincide, como debería ocurrir, con la expresión normal para la densidad de flujo del impulso, que designamos en § 7 mediante $\Pi_{\alpha\beta}$.

La densidad de impulso relativista $-T_{00}/c$ es, al mismo tiempo, la densidad del flujo de energía (dividida por c^2). Sin embargo, esta sencilla relación deja de ser válida en el límite no relativista, debido a que la energía no relativista no incluye la energía en reposo. Tenemos $-T_{00}/c \equiv \rho v_\alpha + (v_\alpha/c^2)(\rho\epsilon + p + \rho v^2/2)$. De aquí vemos que el valor límite de la densidad del impulso es precisamente ρv_α , como debe ser; en el caso de la densidad del flujo de energía $-cT_{00}$ tenemos, omitiendo el término $\rho c^2 v_\alpha$, la expresión $(\rho\epsilon + \rho + \rho v^2/2)v_\alpha$, de acuerdo con el resultado obtenido en § 6.

§ 126. Ecuaciones de la dinámica relativista de fluidos

Las ecuaciones del movimiento están contenidas en:

$$\partial T_{ik}/\partial x^k = 0, \quad (126.1)$$

que expresa las leyes de conservación de la energía e impulso para el sistema físico al que pertenece el tensor T_{ik} . Utilizando la expresión (125.2) para T_{ik} , obtenemos las ecuaciones del movimiento del fluido; sin embargo, es necesario utilizar también el principio de conservación del número de partículas, que no está contenida en (126.1).

Deduzcamos la ecuación de continuidad, que expresa el hecho de que se conserva el número de partículas del fluido. Para ello utilicemos el cuadrivector de flujo de partículas n^i . Su componente temporal es la densidad numérica de partículas, y las tres componentes espaciales forman el vector de flujo de partículas tridimensional. Es evidente que el vector n^i debe ser proporcional a la cuadrivelocidad u^i , de modo que

$$n^i = n u^i, \quad (126.2)$$

siendo n un escalar; a partir de la definición de n resulta evidente que este escalar coincide con la densidad numérica de partículas en el sistema en el

que está en reposo[†] el elemento de volumen de fluido que nos interesa. Se obtiene la ecuación de continuidad igualando simplemente a cero la cuadridivergencia del vector flujo:[‡]

$$\partial(nu^i)/\partial x^i = 0. \quad (126.3)$$

Volvamos a la ecuación (126.1). Derivando la expresión (125.2) correspondiente al tensor impulso-energía, se obtiene

$$\frac{\partial T_{i^k}}{\partial x^k} = u_i \frac{\partial(wu^k)}{\partial x^k} + wu^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0. \quad (126.4)$$

Multipliquemos esta expresión por u^i , es decir, proyectémosla en la dirección del cuadrivector velocidad. Como $u_i u^i = -1$, $u_i \partial u^i / \partial x^k = 0$, se tiene

$$-\frac{\partial(wu^k)}{\partial x^k} + u^k \frac{\partial p}{\partial x^k} = 0.$$

Podemos volver a escribir esta ecuación como

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{w}{n} nu^k \right) - \frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial x^k} nu^k = 0$$

y, en virtud de la ecuación de continuidad (126.3), se obtiene

$$nu^k \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{w}{n} \right) - \frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial x^k} \right] = 0.$$

Pero $1/n$ es precisamente el volumen molecular de la sustancia, y w/n es su entalpía por partícula. Por la identidad termodinámica $d(w/n) - dp/n = Td(\sigma n)$ (siendo T la temperatura y σ la entropía por unidad de volumen propio) tendremos $nTu^k \partial(\sigma/n)/\partial x^k = 0$, o sea,

$$d(\sigma/n)/ds = 0, \quad (126.5)$$

en donde la derivada se toma a lo largo de la línea del universo del elemento de fluido de que se trata.

Utilizando la ecuación de continuidad (126.3), puede también escribirse (126.5) como la anulación de la cuadridivergencia del flujo de entropía σu^i :

$$\partial(\sigma u^i)/\partial x^i = 0. \quad (126.6)$$

[†] A temperaturas muy elevadas, pueden formarse en la sustancia nuevas partículas (por ejemplo, pares de electrones), de modo que se altera el número total de partículas de todas las clases. En estos casos n debe considerarse (por ejemplo) como el número de electrones que permanecerían si se aniquilaran todos los pares.

[‡] Comparar con la ecuación de continuidad en electrodinámica (*Teoría clásica de campos*, § 4-4).

Ambas ecuaciones muestran que el flujo es adiabático; el tensor impulso-energía (125.2) no tiene en cuenta los procesos de rozamiento interno y conducción térmica, es decir, consideramos un fluido ideal.

Proyectamos ahora la ecuación (126.1) sobre una dirección perpendicular a u^i . Dicha proyección del vector $\partial T_i^k / \partial x^k$ es evidentemente $\partial T_i^k / \partial x^k + u_i u^k \partial T_k^i / \partial x^k$; su multiplicación escalar por u^i da cero. Un sencillo cálculo conduce a la ecuación:

$$w u^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} = - \frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k}. \quad (126.7)$$

Las tres componentes espaciales de esta ecuación son la generalización relativista de la ecuación de Euler (la componente temporal es una consecuencia de las otras tres).

Como aplicación interesante, consideremos la propagación del sonido en una sustancia que tiene una ecuación de estado relativista (es decir, una sustancia cuya presión es comparable con la densidad de energía interna, incluyendo la energía en reposo). Las ecuaciones de la dinámica de fluidos para las ondas sonoras pueden linealizarse; es conveniente partir de las ecuaciones del movimiento en la forma original (126.1) y no la forma equivalente (126.6), (126.7). Sustituyendo las expresiones (125.3) correspondientes a las componentes del tensor impulso-energía y conservando sólo las magnitudes del mismo orden que la amplitud de la onda, obtenemos las ecuaciones

$$\partial e'/\partial t = -w \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (w/c^2) \partial \mathbf{v}/\partial t = -\mathbf{grad} p', \quad (126.8)$$

en donde las primas designan las partes variables de las magnitudes. Eliminando \mathbf{v} , se tiene $\partial^2 e'/\partial t^2 = c^2 \Delta p'$. Finalmente, sustituyendo $e' = (\partial e/\partial p)_{ad} p'$, obtenemos la ecuación de onda para p' , con la velocidad del sonido

$$u = c \sqrt{(\partial p/\partial e)_{ad}}; \quad (126.9)$$

el sufijo ad significa que las derivadas se toman para un proceso adiabático, es decir, para σ/n constante. Esta fórmula difiere de la expresión correspondiente no relativista en que la densidad másica se sustituye por e/c^2 .

En el caso ultrarrelativista, la ecuación de estado para cualquier sustancia es $p = e/3$. La velocidad del sonido es entonces $u = c/\sqrt{3}$, que es menor que la velocidad de la luz en un factor $\sqrt{3}$.

Finalmente, analicemos brevemente las ecuaciones de la dinámica de fluidos en presencia de campos gravitatorios. Se obtienen a partir de las ecuaciones (126.6) y (126.7), sustituyendo simplemente las derivadas ordinarias por las covariantes:

$$w u^k u_{i;k} = -\partial p/\partial x^i - u_i u^k \partial p/\partial x^k, \quad (\sigma u^i)_{;i} = 0. \quad (126.10)$$

A partir de estas ecuaciones podemos deducir la condición del equilibrio mecánico en un campo gravitatorio. En el equilibrio el campo es estático; se puede tomar un sistema de referencia en el que esté en reposo el cuerpo en cuestión ($u^\alpha = 0$, $u^0 = 1/\sqrt{-g_{00}}$), todas las magnitudes sean independientes del tiempo y los componentes mixtos del tensor métrico sean nulos ($g_{0\alpha} = 0$). Los componentes espaciales de la ecuación (126.10) dan entonces

$$-w\Gamma_{x0}^0 u^0 u_0 = \frac{1}{2}(w/g_{00}) \partial g_{00}/\partial x^\alpha = -\partial p/\partial x^\alpha,$$

o sea

$$\frac{1}{w} \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \log \sqrt{(-g_{00})}. \quad (126.11)$$

Esta es la ecuación de equilibrio buscada. En el límite no relativista $w \cong \rho c^2$, $-g_{00} = 1 + 2\phi/c^2$ (siendo ϕ el potencial gravitatorio newtoniano), y la ecuación (126.11) se convierte en $\text{grad } p = -\rho \text{ grad } \phi$, es decir, la ecuación ordinaria de la hidrostática.

PROBLEMAS

Problema 1. Hallar la solución de las ecuaciones de la dinámica de fluidos relativista que describe una onda monodimensional simple no estacionaria.

Solución. En una onda simple, todas las magnitudes pueden expresarse en función de una cualquiera de ellas (ver § 94). Escribiendo las ecuaciones del movimiento en la forma

$$\frac{\partial T_{00}}{c \partial t} + \frac{\partial T_{01}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_{01}}{c \partial t} + \frac{\partial T_{11}}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

y suponiendo que T_{00} , T_{01} , T_{11} son funciones unos de otros, obtenemos $dT_{00}dT_{11} = (dT_{01})^2$. Aquí debemos sustituir $T_{00} = eu_0^2 + pu_0^2$, $T_{01} = wu_0u_1$, $T_{11} = eu_1^2 + pu_1^2$, utilizando el hecho de que $u_1^2 - u_0^2 = -1$; es conveniente introducir un parámetro η tal que $u_0 = \cosh \eta$, $u_1 = \operatorname{senh} \eta$. El resultado es

$$\operatorname{arctgh} (v/c) = \pm (1/c) \int (u/w) de, \quad (2)$$

siendo u la velocidad del sonido. A continuación, a partir de (1) tenemos que $\partial x/\partial t = cdT_{01}/dT_{00}$, y al calcular las derivadas se tiene

$$x = \frac{t(v \pm u)}{1 \pm uv/c^2} + f(v). \quad (3)$$

Las fórmulas (2) y (3) dan la solución requerida.

Problema 2. Hallar la generalización relativista de la ecuación de Bernoulli.

Solución. En el flujo estacionario, todas las magnitudes son independientes del tiempo. La componente espacial de la ecuación (126.7) da

$$\frac{w}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} = -c^2 \mathbf{grad} p - \frac{\mathbf{v}}{1-v^2/c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p.$$

17*

Multiplicando escalarmente estas ecuaciones por v/n y haciendo uso del hecho de que, en el caso de una entropía constante σ/n , tenemos $d(e/n) = -pd(1/n)$, obtenemos, finalmente,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \frac{w/n}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} = 0,$$

de aquí se deduce que la magnitud

$$\frac{w/n}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}$$

es constante a lo largo de una línea de corriente cualquiera. Para $v \ll c$ ésta se transforma en la ecuación de Bernoulli usual $p/\rho + v^2/2 = \text{constante}$.

Problema 3. Hallar la generalización relativista del flujo potencial (I. M. KHALATNIKOV, 1954).

Solución. Cuando el flujo es isoentrópico tenemos $\sigma/n = \text{constante}$, y, por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\sigma}{n} \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{w}{n} \right) - \frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial x^k} = 0.$$

La ecuación del movimiento (126.7) se transforma entonces en

$$\begin{aligned} & \frac{w}{n} u^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} + u_i u^k \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{w}{n} \right) \\ & \equiv u^k \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{w}{n} u_i \right) = - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{w}{n} \right) \end{aligned}$$

o sea, $u^k \omega_{ik} = 0$, en donde

$$\omega_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{w}{n} u_i \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{w}{n} u_k \right).$$

Las soluciones de esta ecuación que corresponden al flujo potencial son aquéllas para las que $\omega_{ik} = 0$, es decir,

$$\frac{w}{n} u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}. \quad (1)$$

En el límite no relativista esta expresión es la condición normal $v_i = \partial\phi/\partial x^i$.

Cuando el flujo es estacionario, se obtiene a partir de (1) la ecuación de Bernouilli: wu_0/n es constante en todo punto del fluido.

Problema 4. Obtener la ecuación del choque adiabático y las fórmulas para las velocidades del gas en una onda de choque en la dinámica de fluidos relativista (A. M. TAUB, 1948).

Solución. Consideremos la discontinuidad en un sistema en el que está en reposo y supongamos que el eje x^1 (eje x) es perpendicular a su plano, es decir, tiene la dirección de la velocidad del gas. Las condiciones de continuidad para las densidades de los flujos de energía e impulso son

$$-[cT_{0x}] = -c[wu_0u_x] = [wv/(1-v^2/c^2)] = 0, \quad (1)$$

$$[T_{xx}] = [wu_x^2 + p] = [wv^2/(c^2 - v^2) + p] = 0. \quad (2)$$

A partir de ellas se obtienen fácilmente (poniendo $v/c = \tgh \phi$, $u_x = \operatorname{senh} \phi$, $u_0 = -\cosh \phi$) las expresiones siguientes para las velocidades del gas en ambos lados de la onda de choque:

$$\frac{v_1}{c} = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_2 + p_1)}{(e_2 - e_1)(e_1 + p_2)}}, \quad \frac{v_2}{c} = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_1 + p_2)}{(e_2 - e_1)(e_2 + p_1)}} \quad (3)$$

designando los subíndices 1 y 2 las magnitudes que pertenecen a los dos lados de la discontinuidad. La velocidad relativa del gas a ambos lados viene dada por la ley relativista de adición de velocidades:

$$v_{12} = \frac{v_1 - v_2}{1 - v_1 v_2 / c^2} = c \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_2 - e_1)}{(e_1 + p_2)(e_2 + p_1)}}. \quad (4)$$

En el límite relativista hacemos $e \cong mc^2n = c^2/V$ (siendo V el volumen específico y despreciamos p en comparación con e). Las fórmulas (3) y (4) se transforman entonces en (82.6) y (82.7). En el caso ultrarrelativista, $p = e/3$, y tenemos según (3)

$$\frac{v_1}{c} = \sqrt{\frac{3e_2 + e_1}{3(3e_1 + e_2)}}, \quad \frac{v_2}{c} = \sqrt{\frac{3e_1 + e_2}{3(3e_2 + e_1)}}.$$

Cuando aumenta la intensidad de la onda de choque ($e_1 \rightarrow \infty$), v_1 tiende a la velocidad de la luz c y v_2 hacia $c/\sqrt{3}$.

Para obtener la ecuación del choque adiabático, (1) y (2) deben suplementarse con la condición de continuidad de la densidad del flujo de partículas:

$$[nu_x] = \left[\frac{nv}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \right] = 0. \quad (5)$$

Eliminando las velocidades entre (1), (2) y (5), se obtiene la ecuación buscada:

$$\frac{w_1^2}{n_1^2} - \frac{w_2^2}{n_2^2} + (p_2 - p_1) \left(\frac{w_1}{n_1^2} + \frac{w_2}{n_2^2} \right) = 0. \quad (6)$$

En el límite no relativista, esta fórmula se reduce a (82.9).

§ 127. Ecuaciones relativistas en el caso de procesos disipativos

Hallar las ecuaciones relativistas de la dinámica de fluidos en presencia de procesos disipativos (viscosidad y conducción térmica) exige determinar la forma de los términos adicionales en el tensor impulso-energía y en el vector de densidad de flujo de partículas. Designando estos términos por τ_{ik} y v_i , respectivamente, escribiremos

$$T_{ik} = pg_{ik} + wu_i u_k + \tau_{ik}, \quad (127.1)$$

$$n_i = nu_i + v_i. \quad (127.2)$$

Las ecuaciones de movimiento están contenidas de nuevo en $\partial T_{ik}/\partial x^k = 0$, $\partial n^i/\partial x^i = 0$.

En primer lugar, sin embargo, debemos estudiar más a fondo el propio concepto de velocidad u^i . En mecánica relativista, un flujo de energía necesariamente comprende un flujo de masa. De aquí que, cuando existe, por ejemplo, un flujo térmico, la definición de la velocidad en función de la densidad del flujo de masa (como en la dinámica no relativista) no tiene significado directo. Definiremos ahora la velocidad por la condición de que, en el sistema propio de un elemento fluido cualquiera determinado, el impulso del elemento es cero y su energía es expresable en función de las demás magnitudes termodinámicas mediante las mismas fórmulas que cuando estaban ausentes los procesos disipativos. Esto significa que en el sistema propio los componentes τ_{00} y τ_{0k} del tensor τ_{ik} son nulos; puesto que en este sistema también $u^a = 0$, tenemos (en un sistema cualquiera) la ecuación tensorial

$$\tau_{ik} u^k = 0. \quad (127.3)$$

En el caso del vector v_i debe ser válida una relación análoga

$$v_i u^i = 0, \quad (127.4)$$

puesto que el componente n^0 del cuadrivector n_i del flujo de partículas en el sistema propio debe ser, por definición, igual a la densidad numérica de partículas n .

Puede establecerse la forma solicitada del tensor τ_{ik} y del vector v_i a partir de los requisitos del principio de incremento de entropía. Este principio debe estar contenido en las ecuaciones del movimiento (del mismo modo que se obtuvo en 2 la condición de entropía constante para un fluido ideal a partir de las mismas). Mediante sencillas transformaciones y utilizando la ecua-

ción de continuidad se obtiene fácilmente la ecuación

$$u^i \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = -T \frac{\partial}{\partial x^i} (\sigma u^i) + \mu \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + u^l \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x^k},$$

en donde $\mu = (w - T\sigma)/n$ es el potencial químico relativista. Finalmente, utilizando la relación (127.3) podemos volver a escribir esta ecuación como

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sigma u^i - \frac{\mu}{T} v^i \right) = -v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\mu}{T} \right) - \frac{\tau_{ik}}{T} \frac{\partial u^i}{\partial x^k}. \quad (127.5)$$

La expresión del primer miembro debe ser la cuadrivergencia del flujo de entropía debido a los procesos disipativos. Así pues, el cuadrvíctor de densidad de flujo de entropía es

$$\sigma^i = \sigma u^i - (\mu/T) v^i, \quad (127.6)$$

y τ_{ik} y v^i deben ser funciones lineales de los gradientes de velocidad y de las magnitudes termodinámicas, de modo que el segundo miembro de la ecuación (127.5) se haga necesariamente positivo. Esta condición, junto con (127.3) y (127.4) determina únicamente la forma del cuadrvíctor τ_{ik} y del cuadrvíctor v_i :

$$\tau_{ik} = -\eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} + u_k u^l \frac{\partial u_i}{\partial x^l} + u_i u^l \frac{\partial u_k}{\partial x^l} \right) - (\zeta - \frac{2}{3}\eta) \frac{\partial u_l}{\partial x} (g_{ik} + u_i u_k), \quad (127.7)$$

$$v_i = -\frac{\kappa}{c} \left(\frac{nT}{w} \right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\mu}{T} \right) + u_i u^k \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\mu}{T} \right) \right]. \quad (127.8)$$

En estas fórmulas η y ζ son los dos coeficientes de viscosidad y κ la conductividad térmica, considerados de acuerdo con sus definiciones no relativistas.

En particular, la conducción térmica pura corresponde a un flujo de energía sin flujo de partículas. La condición de flujo nulo de partículas es $n u^\alpha + v^\alpha = 0$; la densidad de flujo de energía es, entonces, hasta los términos de primer orden en los gradientes,

$$c T_\alpha^0 = c w u^0 u_\alpha = -\frac{cw}{n} v_\alpha = \frac{\kappa n T^2}{w} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\mu}{T} \right).$$

Utilizando la identidad termodinámica

$$d(\mu/T) = -(w/nT^2)dT + dp/nT,$$

obtenemos el flujo de energía $-\kappa[\mathbf{grad} T - (T/w)\mathbf{grad} p]$. Vemos que, en el caso relativista de la conducción térmica, el flujo térmico es proporcional a cierta combinación de los gradientes de temperatura y presión y no simplemente al gradiente de presión.

CAPÍTULO XVI

DINAMICA DE SUPERFLUIDOS

§ 128. Propiedades principales de los superfluidos

A temperaturas próximas al cero absoluto, los efectos cuánticos empiezan a tener importancia sobre las propiedades de los fluidos. En la naturaleza sólo existe una sustancia que permanece fluida en el cero absoluto, que es el helio; todos los demás elementos solidifican antes que los efectos cuánticos empiezan a ser observables. A una temperatura de 2,19 K el helio líquido presenta un *punto λ* (transición de fase de segundo orden); a temperaturas por debajo de este punto el helio líquido (helio II) tiene un cierto número de notables propiedades, la más importante de las cuales es la *superfluidez* descubierta por P. L. KAPITZA en 1938. Esta propiedad consiste en poder fluir sin viscosidad a través de pequeños orificios o capilares.[†]

La teoría de los superfluidos fue desarrollada por L. LANDAU (1942). Estudiaremos ahora sólo aquella parte de la teoría que da una descripción macroscópica de las propiedades dinámicas de los superfluidos.

La base de la dinámica del helio II es el siguiente resultado fundamental de la teoría macroscópica.[‡] A cualquier temperatura distinta de cero el helio II se comporta como si fuese una mezcla de dos líquidos diferentes. Uno de ellos es un superfluido y se mueve con viscosidad nula a lo largo de una superficie sólida. El otro es un fluido normal viscoso. Tiene gran importancia el que no exista fricción entre ambas partes del líquido en su movimiento relativo, es decir, no se transfiere ningún impulso del uno al otro.

Sin embargo, debe resaltarse adecuadamente el hecho de que considerar el líquido como una mezcla de partes normal y superfluida no es más que una descripción conveniente de los fenómenos que aparecen en un fluido cuando adquieran importancia los fenómenos cuánticos. Como cualquier otra descripción de los fenómenos cuánticos en términos clásicos, no es suficientemente adecuada. En realidad, deberíamos decir que un fluido cuántico, como el helio II, puede realizar simultáneamente dos movimientos, en cada uno de los cuales interviene su propia «masa efectiva» (siendo la suma de las

[†] Sólo es superfluido uno de los isótopos del helio, He^4 . El isótopo He^3 líquido no resulta superfluido.

[‡] Ver *Física Estadística*, §§ 66, 67, Ed. Reverté.

dos masas efectivas igual a la masa total del fluido). Uno de estos movimientos es normal, es decir, tiene las mismas propiedades que el movimiento de un fluido viscoso ordinario, pero el otro es el movimiento de un superfluido. Los dos movimientos se producen sin ninguna transferencia de impulso del uno al otro. En cierto sentido podemos hablar de las partes superfluidas y normal del fluido, pero esto no significa que el fluido pueda realmente separarse en estas dos partes.

Después de haber precisado todas las reservas relativas a la verdadera naturaleza de los fenómenos en el helio II, podemos utilizar los términos *parte superfluida* y *parte normal* del fluido para dar una descripción concisa y conveniente de estos problemas. Sin embargo, preferiremos utilizar los términos más exactos *flujo superfluido* y *flujo normal*, sin asociarlos con las componentes de «una mezcla de dos partes» de fluido.

El concepto de dos clases de flujo nos permite dar una explicación simple de las principales propiedades dinámicas observadas del helio II. La ausencia de viscosidad cuando el helio II fluye por un conducto estrecho es el resultado del flujo superfluido en dicho conducto; podemos decir que la parte normal permanece en el recipiente, fluyendo con mucha más lentitud a través del conducto, con una velocidad de acuerdo con su viscosidad y con la anchura del conducto. La medida de la viscosidad del helio II mediante el amortiguamiento de las oscilaciones de torsión de un disco sumergido en él, por otra parte, da un valor no nulo; la rotación del disco produce un flujo normal cerca del mismo que lleva el disco al reposo en virtud de la viscosidad que pertenece a dicho flujo. Así pues, en experimentos de flujo a través de un capilar se observa el flujo superfluido, mientras que en experimentos realizados con la rotación de un disco en helio II se observa el flujo normal. Se ve de modo especialmente claro la existencia de estos dos flujos cuando se hace girar alrededor de un eje un recipiente cilíndrico lleno de helio II. Las paredes del cilindro en rotación producen un flujo normal y arrastran con ellas sólo parte del fluido, quedando en reposo la parte superfluida. En consecuencia, el momento de inercia total I del recipiente en rotación es menor que el momento de inercia I_0 calculado con la hipótesis de que la totalidad del fluido rota con el recipiente y así una medida del cociente I/I_0 nos permite hallar de una vez qué partes del fluido son normal y superfluidas.

Además de la ausencia de viscosidad, el flujo superfluido tiene otras dos propiedades importantes: en él no existe transferencia térmica y es siempre un flujo potencial. Ambas propiedades se deducen también de la teoría microscópica, de acuerdo con la cual el flujo normal es realmente el flujo de un «gas de excitaciones» (podemos recordar que el movimiento térmico colectivo de los átomos de un fluido cuántico puede considerarse como un sistema de excitaciones, que se comportan como quasi-partículas moviéndose

en el volumen ocupado por el fluido y con impulsos y energías definidos).

La entropía del helio II está determinada por la distribución estadística de las excitaciones elementales. Por tanto, en un flujo cualquiera en el que el gas de excitaciones esté en reposo, no existe ninguna transferencia macroscópica de entropía. Esto significa que en el flujo superfluido no interviene ninguna transferencia de energía. De aquí se deduce que el flujo superfluido del helio II es termodinámicamente reversible, resultado que está de acuerdo con lo observado.

En el helio II el único mecanismo de transferencia de calor se realiza mediante el flujo normal. Por consiguiente, participa de la naturaleza de la convección y es fundamentalmente diferente de la conducción térmica ordinaria. Cualquier diferencia de temperatura en el helio II produce un flujo interno, tanto normal como superfluidos; los dos flujos pueden compensarse mutuamente mediante una transferencia de masa, de modo que no aparezca en el fluido ninguna transferencia de masa macroscópica.

En lo que sigue designaremos mediante \mathbf{v}_s y \mathbf{v}_n las velocidades del flujo superfluido y normal, respectivamente. El mecanismo de transferencia térmica descrito anteriormente significa que la densidad de flujo de la entropía es el producto $v_n s$ de la velocidad \mathbf{v}_n por la entropía de la unidad de volumen (siendo s la entropía por unidad de masa). Se obtiene la densidad de flujo térmico multiplicando la densidad de flujo de entropía por T , es decir,

$$\mathbf{q} = \rho T s \mathbf{v}_n. \quad (128.1)$$

El flujo potencial de la parte superfluida corresponde a la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{v}_s = 0, \quad (128.2)$$

que debe ser válida en un instante cualquiera en todo el volumen del fluido. Esta propiedad es la expresión macroscópica de una propiedad del espectro de energía del helio II que es la base de la teoría microscópica de la superfluidez: las excitaciones elementales que tienen longitudes de onda larga (es decir, impulsos y energías pequeños) son cuantos de sonido o *fonones*. De aquí que la dinámica macroscópica de los superfluidos no debe admitir más que vibraciones sonoras, resultado que se deduce de la condición (128.2).

Puesto que el flujo es potencial, un flujo de superfluido estacionario no ejerce ninguna fuerza sobre un cuerpo sólido (paradoja de d'Alembert; ver § 11). Por otra parte, el flujo normal ejerce una fuerza de arrastre. Si el flujo tiene tales condiciones que las transferencias de masa del fluido normal y del superfluido se equilibran, tenemos entonces un flujo poco normal: un cuerpo sumergido en helio II se ve sometido a la acción de una fuerza, pero no existe transferencia neta de masa.

§ 129. Efecto termomecánico

El efecto termomecánico en el helio II es de la forma siguiente: cuando el helio sale de un recipiente a través de un capilar estrecho, se produce en el recipiente una elevación de temperatura, mientras que se origina un enfriamiento cuando el helio pasa del capilar a otro recipiente.[†] Esto fenómeno tiene la explicación natural de que el flujo en el interior de un capilar es preferentemente superfluido y, por tanto, no transfiere calor, de modo que el calor que permanece en el recipiente se distribuye en una cantidad menor del helio II. En el flujo a través de un capilar hacia un recipiente se observa el efecto opuesto.

Es fácil hallar la cantidad de calor Q absorbida cuando entra la unidad de masa del helio en un recipiente a través de un capilar. El fluido que entra no transfiere ninguna entropía. Si el helio en el interior del recipiente hubiese de permanecer a su temperatura inicial T , se necesitaría una cantidad de calor Ts para compensar la disminución de entropía por unidad de masa debida a la adición de la unidad de masa de helio de entropía nula. Esto significa que se absorbe una cantidad de calor

$$Q = Ts \quad (129.1)$$

cuando la unidad de masa del helio entra en un recipiente conteniendo helio a temperatura T . Inversamente, cuando la unidad de masa de helio sale de un recipiente que contiene helio a la temperatura T , entonces se desprende una cantidad de calor Ts .

Consideremos a continuación dos recipientes que contienen helio II a temperaturas T_1 y T_2 , unidos por un capilar estrecho. Como el superfluido puede circular libremente a lo largo del capilar, rápidamente se establece el equilibrio mecánico. Sin embargo, el superfluido no transfiere calor y por ello el equilibrio térmico (en el que es igual la temperatura del helio en ambos recipientes) se establece con mucha mayor lentitud.

Se escribe fácilmente la condición del equilibrio mecánico utilizando el hecho de que se establece este equilibrio para valores constantes de la entropía s_1 , s_2 del helio en los dos recipientes. Si ϵ_1 , ϵ_2 son las energías internas por unidad de masa del helio a temperaturas T_1 , T_2 , la condición de equilibrio mecánico (energía mínima) conseguida por el flujo superfluido es $(\partial\epsilon_1/\partial N)_{s1} = (\partial\epsilon_2/\partial N)_{s2}$, siendo N el número de átomos que hay en la unidad

[†] Estrictamente hablando se produce un efecto termomecánico muy ligero en cualquier fluido; la anomalía del helio II es el gran valor del efecto. En el caso de fluidos ordinarios, este efecto es un fenómeno irreversible semejante al efecto termoeléctrico Peltier (y se observa realmente en gases rarificados). Dicho efecto se produce también en el helio II, pero está enmascarado por otro efecto considerablemente mayor que se describirá más adelante, el cual sólo se presenta en el helio II y no es un fenómeno irreversible como el efecto Peltier.

de masa del helio. La derivada $(\partial \epsilon / \partial N)_s$, es el potencial químico μ . Por tanto, se obtiene la condición de equilibrio

$$\mu(p_1, T_1) = \mu(p_2, T_2), \quad (129.2)$$

en donde p_1 y p_2 son las presiones en los dos recipientes.

En lo que sigue entenderemos por potencial químico μ no el potencial termodinámico usual por partícula (átomo), sino el potencial termodinámico por unidad de masa del helio. Ambos difieren sólo en un factor constante, la masa del átomo del helio.

Si las presiones p_1 , p_2 son pequeñas, entonces, desarrollando en potencias de las presiones y recordando que $(\partial \mu / \partial p)_T$ es el volumen específico (que depende sólo ligeramente de la temperatura), obtenemos

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \mu(0, T_1) - \mu(0, T_2) = \int_{T_i}^{T_f} s dT,$$

en donde $\Delta p = p_2 - p_1$. Si también la diferencia de temperaturas $\Delta T = T_2 - T_1$ es pequeña, entonces, desarrollando en potencias de ΔT y recordando que $(\partial \mu / \partial T)_p = -s$, se obtiene

$$\Delta p / \Delta T = \rho s. \quad (129.3)$$

Como $s > 0$, $\Delta p / \Delta T > 0$. La relación (129.3) fue obtenida, en primer lugar, por H. LONDON (1939).

§ 130. Ecuaciones de la dinámica de superfluidos

Deduciremos a continuación un sistema completo de ecuaciones que describen macroscópicamente (fenomenológicamente) el flujo del helio II. Según hemos visto en el estudio anterior, nos hemos de ocupar de ecuaciones del movimiento en la que en todos los puntos intervienen dos velocidades v_s y v_n , y no una sola como sucede en la dinámica de fluidos ordinaria. Resulta entonces que el sistema buscado de ecuaciones puede determinarse únicamente a partir de los simples requisitos impuestos por el principio de relatividad de Galileo y por las leyes de conservación necesarias [utilizando también las propiedades del movimiento expresadas por las ecuaciones (128.1) y (128.2)].

Debe recordarse que el helio II realmente cesa de ser superfluido a velocidades elevadas. No estudiaremos este fenómeno de las *velocidades críticas*, si no que señalaremos meramente que su existencia significa que las ecuaciones de la dinámica de superfluidos para el helio II son físicamente importantes sólo cuando no son demasiado grandes las velocidades v_s y v_n . Sin

embargo, deduciremos primeramente estas ecuaciones sin hacer ninguna hipótesis que se refiera a las velocidades v_s y v_n , puesto que, si se desprecian las potencias más elevadas de las velocidades, las ecuaciones no podrían deducirse de modo consistente a partir de las leyes de conservación. La transición al caso físicamente significativo de velocidades pequeñas se hace en las ecuaciones finales.

Designemos por \mathbf{j} la densidad del flujo de masa; esta magnitud es también el impulso del volumen unidad (ver nota a pie de página en § 49). Escribamos

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n \quad (130.1)$$

como una suma de los flujos que pertenecen a la parte superfluida y normal. Los coeficientes ρ_s y ρ_n pueden denominarse densidades superfluida y normal. Su suma es la densidad real ρ del helio II:

$$\rho = \rho_s + \rho_n. \quad (130.2)$$

Como es natural, ρ_s y ρ_n son funciones de la temperatura; ρ_n se anula en el caso absoluto, en donde el helio II se hace totalmente superfluido,[†] mientras que ρ_s se anula en el punto λ , en donde el líquido se hace completamente normal. También debe señalarse que, en general, ρ_n y ρ_s dependen de las propias velocidades;[‡] únicamente a velocidades pequeñas puede despreciarse esta dependencia, y ρ_n , ρ_s pueden considerarse únicamente como funciones de la temperatura (y presión).

La densidad ρ y el flujo \mathbf{j} deben satisfacer la ecuación de continuidad

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (130.3)$$

que expresa la ley de conservación de la masa. La ley de conservación del impulso da una ecuación

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (130.4)$$

siendo Π_{ik} el tensor de densidad del flujo del impulso.

En este momento no consideraremos procesos disipativos. Entonces el flujo es reversible y también se conserva la entropía del fluido. Como el flujo de entropía es $\rho s v_n$, podemos escribir la ley de conservación de la en-

[†] Si el helio II contiene una mezcla (del isótopo He³), entonces ρ_n es no nula, incluso a 0 K.

[‡] Con más precisión, de la diferencia de velocidades $v_n - v_s$, puesto que el movimiento del fluido como un todo con velocidad $v_s = v_n$ no puede, lógicamente, afectar a sus propiedades termodinámicas.

tropía como

$$\partial(\rho s)/\partial t + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{v}_s) = 0. \quad (130.5)$$

Las ecuaciones (130.3)-(130.5) deben completarse con una ecuación que dé la derivada temporal de la velocidad \mathbf{v}_s . Esta ecuación debe ser tal que tengamos flujo potencial en todo instante; esto significa que la derivada de \mathbf{v}_s debe ser el gradiente de un escalar. Podemos escribir la ecuación como

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{grad}(\frac{1}{2}v_s^2 + \mu) = 0, \quad (130.6)$$

Naturalmente, las ecuaciones (130.4) y (130.6) tienen significado sólo cuando obtenemos valores para las magnitudes Π_{ik} y μ todavía indefinidas. Para ello debemos utilizar la ley de conservación de la energía y razonamientos basados en el principio de relatividad de Galileo. Las ecuaciones (130.3)-(130.6) deben implicar el principio de conservación de la energía, que se expresa mediante una ecuación de la forma

$$\partial E/\partial t + \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0, \quad (130.7)$$

en donde E es la energía de la unidad de volumen del fluido y \mathbf{Q} la densidad del flujo de energía. El principio de relatividad de Galileo no permite determinar todas las magnitudes como funciones de una velocidad (\mathbf{v}_s) y la velocidad relativa dada $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ de los dos movimientos simultáneos.

Utilicemos, por tanto, el sistema original de coordenadas K y un sistema K_0 en el que es nula la velocidad del flujo superfluido de un elemento de fluido determinado. El sistema K_0 se mueve respecto al sistema K con una velocidad igual a la velocidad del superfluido en el sistema original. Los valores de todas las magnitudes del sistema K están relacionadas con sus valores en K_0 (que distinguiremos con el sufijo 0) mediante las siguientes fórmulas de transformación de la mecánica:[†]

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j} &= \rho \mathbf{v}_s + \mathbf{j}_0, \\ E &= \frac{1}{2} \rho v_s^2 + \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{v}_s + E_0, \\ \mathbf{Q} &= (\frac{1}{2} \rho v_s^2 + \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{v}_s + E_0) \mathbf{v}_s + \frac{1}{2} v_s^2 \mathbf{j}_0 + \Pi_0 \cdot \mathbf{v}_s + \mathbf{Q}_0, \\ \Pi_{ik} &= \rho v_{si} v_{sk} + v_{sij} j_{0k} + v_{skj} j_{0i} + \Pi_{0ik}. \end{aligned} \right\} \quad (130.8)$$

[†] Estas fórmulas son una consecuencia directa del principio de relatividad de Galileo y, por tanto, son válidas para cualquier sistema particular. Pueden deducirse considerando, por ejemplo, un fluido ordinario. El tensor de la densidad del flujo del impulso en dinámica de fluidos ordinaria es $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik}$. La velocidad del fluido \mathbf{v} en el sistema K está relacionada con la velocidad \mathbf{v}_0 en K_0 por $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$, siendo \mathbf{u} la velocidad relativa de los dos sistemas. Sustituyendo en Π_{ik} , tenemos

$$\Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_{0i} v_{0k} + \rho v_{0i} u_k + \rho u_i v_{0k} + \rho u_i u_k.$$

Haciendo $\Pi_{0ik} = p \delta_{ik} + \rho v_{0i} v_{0k}$ y $\mathbf{j}_0 = \rho \mathbf{v}_0$, obtenemos la fórmula de transformación para el tensor Π_{ik} dada en (130.8). Las fórmulas restantes se obtienen de modo análogo.

Hemos llamado $\Pi_0 \cdot \mathbf{v}_s$ al vector cuyos componentes son $\Pi_{0ik} v_{sk}$.

En el sistema K_0 , el elemento de fluido considerado realiza un solo movimiento, que es un flujo normal con velocidad $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. De aquí que las magnitudes \mathbf{j}_0 , E_0 , \mathbf{Q}_0 y Π_{0ik} sólo pueden depender de la diferencia $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, y no de \mathbf{v}_n y \mathbf{v}_s separadamente; en particular, los vectores \mathbf{j}_0 y \mathbf{Q}_0 deben ser paralelos al vector $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ [el flujo másico \mathbf{j}_0 es simplemente $\rho_n(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$]. Así pues, las fórmulas (130.8) dan la dependencia entre las magnitudes relacionadas con \mathbf{v}_s para valores dados de $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$.

La energía E_0 , como función de ρ , s y el impulso \mathbf{j}_0 por unidad de volumen, satisface la identidad termodinámica

$$dE_0 = \mu d\rho + T d(\rho s) + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{j}_0, \quad (130.9)$$

siendo μ el potencial químico (termodinámico) por unidad de masa. Los dos primeros términos corresponden a la identidad termodinámica usual correspondiente a un fluido en reposo con volumen constante (en este caso la unidad) y el último término muestra que la derivada de la energía respecto al impulso es la velocidad.

No daremos ahora los cálculos subsiguientes, que son bastante laboriosos, sino su esquema general. En la ecuación de conservación de la energía (30.7) sustituiremos E y \mathbf{Q} de (30.8), calculando la derivada $\partial E_0 / \partial t$ mediante la identidad (30.9). Luego se eliminan todas las derivadas temporales (ρ , \mathbf{v}_s , etc.) mediante las ecuaciones (130.3)-(130.6); entonces debe satisfacerse idénticamente la ecuación de conservación de la energía. Si tenemos en cuenta el hecho de que los flujos \mathbf{Q}_0 , Π_{0ik} y el escalar μ en la ecuación (130.6) sólo pueden depender de las variables termodinámicas y de la velocidad $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, pero no de sus gradientes (puesto que despreciamos los procesos disipativos), nos encontramos con que sólo puede obtenerse esta identidad si las magnitudes mencionadas anteriormente se escogen de un modo definido únicamente.

Resulta también que el escalar μ es el potencial químico (por cuya razón se ha designado con la misma letra) y las expresiones finales para la densidad del flujo de energía y el tensor densidad del flujo de impulso son

$$\mathbf{Q} = (\mu + \frac{1}{2}v_s^2)\mathbf{j} + T\rho s \mathbf{v}_n + \rho_n \mathbf{v}_n [\mathbf{v}_n \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)], \quad (130.10)$$

$$\Pi_{ik} = \rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_s v_{si} v_{sk} + p \delta_{ik}, \quad (130.11)$$

en donde

$$p = -E_0 + T\rho s + \mu\rho + \rho_n(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2. \quad (130.12)$$

La expresión correspondiente a Π_{ik} es la generalización natural de la fórmula $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik}$ de la dinámica de fluidos ordinaria. La magnitud p definida mediante la fórmula (130.12) puede considerarse naturalmente como

la presión del fluido.[†]

Las ecuaciones (130.3)-(130.6), definiéndose \mathbf{j} y Π_{ik} mediante (130.10) y (130.11), forman el sistema requerido completo de ecuaciones de la dinámica de superfluidos.[‡] Son muy complejas, debido fundamentalmente a que las magnitudes ρ_s , ρ_n , μ , etc., que aparecen en las ecuaciones son funciones de las velocidades (más precisamente, de la diferencia $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$). La forma de estas funciones puede determinarse en principio sólo a partir de la teoría microscópica.

Sin embargo, estas ecuaciones se simplifican mucho en el caso, de gran interés físico, de velocidades pequeñas.^{††} En este caso podemos en primer lugar despreciar, como ya se ha mencionado, la dependencia de ρ_n y ρ_s con la velocidad; entonces la expresión (130.1) para el flujo \mathbf{j} da esencialmente los primeros términos de un desarrollo de \mathbf{j} en potencias de \mathbf{v}_s y \mathbf{v}_n . El desarrollo en potencias de las velocidades debe hacerse también para las otras magnitudes termodinámicas que aparecen en las ecuaciones.

Consideremos la presión y la temperatura como variables termodinámicas independientes. La identidad termodinámica correspondiente al potencial químico es

$$d\mu = -sdT + (1/\rho)d\rho - (\rho_n/\rho)(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \cdot d(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s);$$

que puede obtenerse diferenciando la expresión (130.12) y utilizando la identidad (130.9). De aquí vemos que los dos primeros términos del desarrollo de μ en potencias de la diferencia de velocidades son

$$\mu(p, T, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \approx \mu(p, T) - \frac{1}{2}(\rho_n/\rho)(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2, \quad (130.13)$$

el segundo miembro contiene el potencial químico ordinario $\mu(p, T)$ y la densidad $\rho(p, T)$ del fluido en reposo. Derivando respecto a la temperatura y a la presión, se encuentran los desarrollos correspondientes de la entropía y de la densidad:

$$s(p, T, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \approx s(p, T) + \frac{1}{2}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right), \quad (130.14)$$

$$\rho(p, T, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \approx \rho(p, T) + \frac{1}{2}\rho^2(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right). \quad (130.15)$$

[†] En termodinámica, la presión normalmente definida como la fuerza media que actúa sobre la unidad de área se relaciona con un medio en reposo. No obstante, en la dinámica de fluidos ordinaria no existe ninguna ambigüedad en la definición de la presión (despreciándose los procesos dissipativos), puesto que siempre podemos tomar un sistema coordenado en el que esté en reposo el elemento de volumen de fluido considerado. Sin embargo, en la dinámica de superfluidos podemos eliminar solamente uno de los dos movimientos simultáneos mediante una selección adecuada del sistema coordenado y así no puede aplicarse la definición usual de la presión.

En un fluido totalmente en reposo, la definición (130.12) es, naturalmente, la misma que la definición ordinaria, puesto que en este caso $\mu_0 + T\rho s - E_0 = p$ por la definición del potencial químico.

[‡] También puede establecerse el sistema de ecuaciones en una forma general para una mezcla de helio II con otras sustancias (en la práctica, el isótopo He^3), para cualquier concentración. Esto se debe a I. M. KHALATNIKOV (*Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, 23, 169, 1952).

^{††} Es decir, cuando el cociente entre la velocidad y la velocidad de propagación del segundo sonido

Estas expresiones han de sustituirse en las ecuaciones dinámicas, que son entonces válidas hasta los términos de segundo orden en las velocidades.

Consideremos brevemente el tema de los términos disipativos en las ecuaciones de la dinámica de superfluidos. La forma de estos términos sólo se ve restringida por las condiciones impuestas por la ley de incremento de la entropía y por la simetría de los coeficientes cinéticos. Un análisis detallado, debido a I. M. KHALATNIKOV,[‡] muestra que existen cinco coeficientes de disipación diferentes (en lugar de los tres coeficientes η , ζ , κ que aparecen en un fluido ordinario). De ellos, uno es la primera viscosidad η , debida al flujo normal y totalmente análoga a la viscosidad de un flujo ordinario. En el tensor de flujo del impulso Π_{ik} y en la magnitud cuyo gradiente aparece en (130.6) intervienen términos adicionales proporcionales a $\operatorname{div} v_n$ y a $\operatorname{div} [\rho_s(v_n - v_s)]$; de los cuatro coeficientes de proporcionalidad, dos son iguales, habida cuenta la simetría de los coeficientes cinéticos, de modo que existen tres «segundas viscosidades» ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 . Finalmente, en el segundo miembro de la ecuación de la entropía (30.5) interviene un término de la forma $(1/T) \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} T)$, con un coeficiente κ que es formalmente análogo a la conductividad térmica de un fluido ordinario, y además términos cuadráticos en los gradientes de la velocidad, que se obtienen como resultado del efecto de la viscosidad en la transferencia térmica [ver ecuación (49.5)].

Las condiciones límites a aplicar en las ecuaciones de la dinámica de superfluidos son las siguientes. En primer lugar, el componente perpendicular del flujo másico j debe anularse en cualquier superficie sólida que esté en reposo. Para determinar las condiciones sobre v_n , debemos recordar que el flujo normal es realmente un flujo de un gas de excitaciones térmicas. En el flujo a lo largo de una superficie sólida, los cuantos de interacción interactúan con la superficie y esto debe describirse macroscópicamente como la «adherencia» del flujo normal a la superficie como en los fluidos viscosos ordinarios. En otras palabras, la componente tangencial de la velocidad v_n debe ser nula en la superficie del sólido.

El componente de v_n perpendicular a la superficie no necesita anularse, puesto que los cuantos de excitación pueden ser absorbidos o emitidos por la superficie, correspondiendo simplemente a la transferencia térmica entre el fluido y la superficie. La condición límite exige solamente que el flujo térmico perpendicular a la superficie sea continuo. La propia temperatura tiene una discontinuidad en el límite que es proporcional al flujo térmico: $\Delta T = Kq$, con un coeficiente de proporcionalidad que depende de las propiedades, tanto del fluido como del sólido. La presencia de esta discontinuidad se debe a la naturaleza peculiar de la transferencia térmica en el helio II.

[‡] Ver *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, 23, 265, 1952.

Toda la resistencia a la transferencia térmica entre el sólido y el fluido se encuentra en el fluido junto a la superficie, puesto que la propagación convectiva del calor en el fluido no encuentra casi resistencia. En consecuencia, la totalidad de la caída de temperatura que produce la transferencia térmica se produce en la propia superficie.

Una propiedad interesante de estas condiciones límites es que el intercambio térmico entre la superficie sólida y el fluido da como resultado la aparición de fuerzas tangenciales sobre la superficie. Si el eje x es perpendicular a la superficie y el eje y tangencial, la fuerza tangencial por unidad de área es igual al componente Π_{xy} del tensor de flujo de cantidad de movimiento. Puesto que debemos tener $j_x = \rho_n v_{nx} + \rho_s v_{sx} = 0$ en la superficie, se encuentra para esta fuerza la expresión no nula $\Pi_{xy} = \rho_s v_{sx} v_{sy} + \rho_n v_{nx} v_{ny} = \rho_n v_{nx} (v_{ny} - v_{sy})$. Podemos escribir esta expresión en función del flujo térmico $q = \rho s T v_n$ como $\Pi_{xy} = (\rho_n / \rho_s T) q_s (v_{ny} - v_{sy})$, siendo q_s el flujo térmico desde la superficie sólida al fluido, que es continuo en la superficie.

En ausencia de transferencia térmica entre la superficie sólida y el fluido, la componente de v_n perpendicular a la superficie es también nula. Las condiciones límites $j_x = 0$ y $v_n = 0$ (con el eje x perpendicular a la superficie) son equivalentes a $v_{sx} = 0$ y $v_{ny} = 0$. Por consiguiente, en este caso, obtenemos las condiciones límites usuales correspondientes a un fluido ideal para v_s y las de un fluido viscoso para v_n .

Finalmente, consideraremos los movimientos del helio II, el cual puede considerarse a este respecto como incompresible, como sucede normalmente en el flujo que rodea a los cuerpos. También tendremos en cuenta la viscosidad del flujo normal. Para ello, debemos sumar al tensor Π_{ik} un término en el que interviene, como es usual, el coeficiente de viscosidad η y las derivadas espaciales de la derivada v_n :

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho_s v_{si} v_{sk} + \rho_n v_{ni} v_{nk} - \eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} \right). \quad (130.16)$$

Los coeficientes de la segunda viscosidad no aparecen en el caso de un fluido incompresible. Los términos disipativos en la ecuación de la entropía son, en el caso considerado, cantidades pequeñas de orden superior y pueden despreciarse. Admitiendo que las densidades ρ_n , ρ_s y la entropía s son constantes, obtenemos a partir de la ecuación (130.5) $\operatorname{div} v_n = 0$, y a partir de (130.3) $\operatorname{div} j = 0$, de modo que $\operatorname{div} v_s = \operatorname{div} v_n = 0$. Utilizando estas ecuaciones y sustituyendo (130.16) en (130.4), obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned} \rho_s \frac{\partial v_s}{\partial t} + \rho_n \frac{\partial v_n}{\partial t} + \rho_s (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}_s + \rho_n (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}_n \\ = - \mathbf{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v}_n. \end{aligned} \quad (130.17)$$

La ecuación (130.6) permanece sin variar.

Puesto que el flujo superfluido es flujo potencial, podemos introducir el potencial de velocidad por $\mathbf{v}_s = \text{grad } \phi_s$ y, como $\text{div } \mathbf{v}_s = 0$, el potencial satisfará la ecuación de Laplace

$$\Delta \phi_s = 0. \quad (130.18)$$

Introduciendo ϕ_s en la ecuación (130.17) y poniendo $(\mathbf{v}_s \cdot \text{grad})\mathbf{v}_s = \text{grad } v_s^2/2$, obtenemos

$$\begin{aligned} \rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho_n (\mathbf{v}_n \cdot \text{grad})\mathbf{v}_n + \rho_s \text{grad } \frac{1}{2}v_s^2 + \rho_s \text{grad}(\partial \phi_s / \partial t) \\ = -\text{grad } p + \eta \Delta \mathbf{v}_n. \end{aligned}$$

Utilicemos como magnitudes auxiliares las «presiones» p_n , p_s de los flujos normal y superfluidos:

$$p = p_0 + p_n + p_s, \quad (130.19)$$

en donde p_0 es la presión en el infinito, y p_s se define por la forma usual correspondiente a un fluido ideal,

$$p_s = -\rho_s \partial \phi_s / \partial t - \frac{1}{2} \rho_s v_s^2. \quad (130.20)$$

La ecuación para la velocidad \mathbf{v}_n queda entonces

$$\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + (\mathbf{v}_n \cdot \text{grad})\mathbf{v}_n = -\frac{1}{\rho_n} \text{grad } p_n + \frac{\eta}{\rho_n} \Delta \mathbf{v}_n. \quad (130.21)$$

Esta ecuación es formalmente idéntica a la ecuación de Navier-Stokes para un fluido de densidad ρ_n y viscosidad η (y, por tanto, viscosidad cinemática η/ρ_n).

Así pues, el problema del flujo del helio II incompresible se reduce a dos problemas de dinámica de fluidos ordinarios, uno correspondiente a un fluido ideal y el otro a un fluido viscoso. El flujo del superfluido está determinado por la ecuación de Laplace (130.18) con una condición límite respecto a la derivada normal $\partial \phi_s / \partial n$, como en el problema ordinario del flujo potencial de un fluido ideal que rodea un cuerpo. El flujo normal queda determinado por la ecuación de Navier-Stokes (130.21), con las mismas condiciones límites sobre \mathbf{v}_n (en ausencia de intercambio térmico entre la superficie y el fluido) que en el flujo ordinario de un fluido viscoso. La distribución de presiones queda determinada entonces por la fórmula (130.19).

PROBLEMAS

Problema 1. Se mantiene una pequeña diferencia de temperatura ΔT entre los extremos de un capilar que contiene helio II. Determinar el flujo térmico a lo largo del capilar.

Solución. De acuerdo con la fórmula (129.3), la caída de presión entre los dos extremos del capilar es $\Delta p = \rho s \Delta T$. Esto origina un flujo normal, cuya velocidad media (sobre la sección recta del capilar) es $v_n = R^2 \Delta p / 8\eta l$ [en donde R es el radio del capilar, l su longitud y η la viscosidad del flujo normal; ver fórmula (17.10)]. El flujo térmico total es $\rho s \bar{v}_n \pi R^2 = \pi R^4 \rho^2 s^2 \Delta T / 8\eta l$. Se produce un flujo superfluido en sentido opuesto, viniendo dada su velocidad por la condición de transferencia total de masa nula: $\bar{v}_s = -\rho_n \bar{v}_n / \rho_s$.

Problema 2. Deducir la fórmula para la distribución de temperaturas del helio II en flujo incompresible.

Solución. Escribiendo en la ecuación (130.6) [con μ dado por (130.13)] $\mathbf{v}_s = \mathbf{grad} \phi_s$, e integrando, obtenemos $\mu(p, T) + v_s^2/2 - (\rho_n/\rho)(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2/2 + \partial \phi_s / \partial t = \text{constante}$. Las variaciones de presión y de temperatura en un fluido incompresible son pequeñas y tenemos hasta los términos de primer orden $\mu - \mu_0 = -s(T - T_0) + (p - p_0)/\rho$, en donde T_0 y p_0 son la temperatura y presión en el infinito. Sustituyendo esta expresión en la integral anterior, y utilizando p_n y p_s , se obtiene

$$T - T_0 = \frac{\rho_n}{\rho s} \left[\frac{p_n}{\rho_n} - \frac{p_s}{\rho_s} - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 \right].$$

§ 131. Propagación del sonido en un superfluido

Aplicaremos las ecuaciones de la dinámica de fluidos para el helio II a la propagación del sonido en él. Como es normal, se supone que son pequeñas las velocidades de la onda sonora y que la densidad, la entropía y la presión son casi iguales a sus valores de equilibrio constantes. Entonces podemos linealizar las ecuaciones, despreciando los términos cuadráticos en la velocidad de (130.11), (130.13) y (130.14), y considerar la entropía ρ_s como constante en el término $\text{div}(\rho s \mathbf{v}_n)$ de (130.5) (puesto que dicho término ya contiene la pequeña magnitud \mathbf{v}_n). Así pues, las ecuaciones de la dinámica de fluidos se reducen a

$$\partial \rho / \partial t + \text{div} \mathbf{j} = 0, \quad (131.1)$$

$$\partial(\rho s) / \partial t + \rho s \text{div} \mathbf{v}_n = 0, \quad (131.2)$$

$$\partial \mathbf{j} / \partial t + \mathbf{grad} p = 0, \quad (131.3)$$

$$\partial \mathbf{v}_s / \partial t + \mathbf{grad} \mu = 0. \quad (131.4)$$

Derivando (131.1) respecto al tiempo y sustituyendo (131.3), se obtiene

$$\partial^2 \rho / \partial t^2 = \Delta p. \quad (131.5)$$

Mediante la identidad termodinámica $d\mu = -sdT + dp/\rho$, tenemos $\mathbf{grad} p = \rho s \mathbf{grad} T + \rho \mathbf{grad} \mu$. Sustituyendo $\mathbf{grad} p$ de (131.3) y $\mathbf{grad} \mu$ de (131.4), se

tiene

$$\rho_n \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) + \rho s \mathbf{grad} T = 0.$$

Tomemos la divergencia de esta ecuación sustituyendo $\operatorname{div}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$ por la expresión $(\rho/s\rho_s) \partial s/\partial t$, que se deduce de la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} - \frac{s}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= -s \operatorname{div} \mathbf{v}_n + (s/\rho) \operatorname{div} \mathbf{j} \\ &= (s\rho_s/\rho) \operatorname{div}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n). \end{aligned}$$

El resultado es

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = (\rho_s s^2 / \rho_n) \Delta T. \quad (131.6)$$

Las ecuaciones (131.5) y (131.6) determinan la propagación del sonido en un superfluido. Como existen dos ecuaciones, vemos que aparecen dos velocidades de propagación del sonido.

Escribamos s , p , ρ y T como $s = s_0 + s'$, $p = p_0 + p'$, etc., en donde las letras con prima representan variaciones pequeñas de las magnitudes correspondientes en la onda sonora, y las que tienen subíndice cero (que omitiremos por brevedad) sus valores de equilibrio constantes. Entonces podemos escribir

$$\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial p} p' + \frac{\partial \rho}{\partial T} T', \quad s' = \frac{\partial s}{\partial p} p' + \frac{\partial s}{\partial T} T',$$

y las ecuaciones (131.5) y (131.6) se convierten en

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial s}{\partial p} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{\partial s}{\partial T} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} \Delta T' &= 0. \end{aligned}$$

Busquemos una solución de estas ecuaciones en la forma de una onda plana, en la que p' y T' son proporcionales a un factor $e^{-i\omega(t-x/u)}$ (designándose ahora por u la velocidad del sonido). La condición de compatibilidad de ambas ecuaciones es

$$u^4 \frac{\partial(s, \rho)}{\partial(T, p)} - u^2 \left(\frac{\partial s}{\partial T} + \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) + \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} = 0,$$

en donde $\partial(s, \rho)/\partial(T, p)$ designa el jacobiano de la transformación de s, ρ a T, p . Mediante una transformación simple, con empleo de las relaciones termodinámicas, esta ecuación puede reducirse a

$$u^4 - u^2 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s + \frac{\rho_s T s^2}{\rho_n c_v} \right] + \frac{\rho_s T s^2}{\rho_n c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = 0, \quad (131.7)$$

siendo c_v el calor específico por unidad de masa. Esta ecuación cuadrática en u^2 da las dos velocidades de propagación del sonido en el helio II. Para $\rho_s = 0$, una raíz es cero, y obtenemos, como era de esperar, sólo la velocidad ordinaria del sonido $u = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s}$.

Los calores específicos c_p y c_v del helio II son, en la realidad, casi iguales a todas las temperaturas (puesto que el coeficiente de dilatación térmica es pequeño). Mediante una fórmula termodinámica bien conocida, las compresibilidades isotérmica y adiabática son, entonces, también casi coincidentes: $(\partial p/\partial \rho)_T \approx (\partial p/\partial \rho)_s$. Designando el valor común de c_p y c_v por c , y el de $(\partial p/\partial \rho)_T$ y $(\partial p/\partial \rho)_s$ por $\partial p/\partial \rho$, obtenemos a partir de (131.7) las expresiones siguientes para las velocidades del sonido:

$$u_1 = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)}, \quad u_2 = \sqrt{(T s^2 \rho_s / c \rho_n)}. \quad (131.8)$$

Una de ellas, u_1 , es casi constante, mientras que la otra, u_2 , depende marcadamente de la temperatura, anulándose con ρ_s en el punto λ .†

A temperaturas muy bajas, en donde casi todas las excitaciones elementales en el fluido son fonones, las magnitudes ρ_n , c y s están relacionadas‡ por $c = 3s$, $\rho_n = c T \rho / 3 u_1^2$ y $\rho_s \approx \rho$. Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (131.8) para u_2 , se encuentra $u_2 = u_1 / \sqrt{3}$. Así pues, cuando la temperatura tiende a cero, las velocidades u_1 y u_2 tienden a límites finitos, y su cociente tiende a $\sqrt{3}$.

Con objeto de aclarar más la naturaleza física de los dos tipos de ondas sonoras en el helio II, consideraremos una onda sonora plana (E. LIFSHITZ, 1944). En dicha onda las velocidades \mathbf{v}_n , \mathbf{v}_s y las partes variables T' , p' de la temperatura y presión son proporcionales entre sí. Definiremos los coeficientes de proporcionalidad mediante

$$\mathbf{v}_n = a \mathbf{v}_s, \quad p' = b v_s, \quad T' = c v_s. \quad (131.9)$$

† El problema de la propagación del sonido en disoluciones con mezclas de helio II ha sido estudiado por I. YA. POMERAUNCHK, *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, **19**, 42, 1949, para el caso de concentraciones pequeñas, y por I. M. KHALATNIKOV, *ibid.*, **23**, 265, 1952, en el caso de concentraciones arbitrarias.

‡ Ver *Física Estadística*, §§ 66, 67.

Un cálculo sencillo, utilizando las ecuaciones (131.1)-(131.6), y trabajando con la precisión necesaria, da para el *primer sonido*

$$a_1 = 1 + \frac{\beta\rho}{\rho_s s} \frac{u_1^2 u_2^2}{(u_1^2 - u_2^2)}, \quad b_1 = \rho u_1, \quad c_1 = \frac{\beta T u_1^3}{c(u_1^2 - u_2^2)}, \quad (131.10)$$

y para el *segundo sonido*

$$a_2 = -\frac{\rho_s}{\rho_n} + \frac{\beta\rho}{\rho_n s} \frac{u_1^2 u_2^2}{(u_1^2 - u_2^2)}, \quad b_2 = \frac{\beta \rho u_1^2 u_2^3}{s(u_1^2 - u_2^2)}, \quad c_2 = -u_2/s. \quad (131.11)$$

Aquí $\beta = -(1/\rho)\partial\rho/\partial T$ es el coeficiente de dilatación térmica; puesto que es pequeño, las magnitudes en que interviene β son pequeñas en comparación con aquellas otras en que no interviene.

Vemos que en una onda sonora del primer tipo, $\mathbf{v}_n \approx \mathbf{v}_s$, es decir, en una primera aproximación el fluido contenido en un elemento de volumen cualquiera oscila como un todo en dicha onda, moviéndose conjuntamente las partes normal y superfluida. Este tipo de ondas corresponde claramente a una onda sonora ordinaria en un fluido ordinario.

Sin embargo, en una onda del segundo tipo, tenemos $\mathbf{v}_n \approx -\rho_s \mathbf{v}_s / \rho_n$, es decir, la densidad de flujo total $\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n \approx 0$. Así pues, en una onda de segundo sonido las partes superfluida y normal se mueven en oposición, permaneciendo en primera aproximación el centro de masas de un elemento de volumen cualquiera en reposo y siendo nulo el flujo de masa total. Dicha onda es evidentemente una característica peculiar de los superfluidos.

Existe otra diferencia importante entre los dos tipos de onda, que se ve a partir de las fórmulas (131.10) y (131.11). En una onda sonora del tipo ordinario, la amplitud de las oscilaciones de presión es relativamente grande, mientras que la correspondiente a las oscilaciones de temperatura es pequeña. Sin embargo, en una onda de segundo sonido, la amplitud relativa de las oscilaciones de temperatura es grande en comparación con la de las oscilaciones de presión. En este sentido podemos decir que las ondas del segundo sonido son ondas de temperatura no amortiguadas.[†]

En una aproximación en la que se desprecie la dilatación térmica, las ondas del segundo sonido son puramente oscilaciones de temperatura (con $\mathbf{j} = 0$), mientras que las ondas del primer sonido son oscilaciones de presión (con $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_n$). De acuerdo con ello, sus ecuaciones del movimiento son totalmente separables: en la ecuación (131.6) escribiremos $s' = cT'/T$, obteniendo $\partial^2 T' / \partial t^2 = u_2^2 \Delta T'$, y en la ecuación (131.5) escribiremos $\rho' = p' \partial \rho / \partial p$, obteniendo $\partial^2 p' / \partial t^2 = u_1^2 \Delta p'$.

[†] Naturalmente, no tienen relación alguna con las ondas de temperatura amortiguadas en un medio conductor termodinámico ordinario.

El tema de los diversos métodos que existen para excitar ondas sonoras en el helio II ha sido estudiado por E. M. LIFSHITZ (1944). Resulta (ver los problemas) que los medios mecánicos normales de excitación de ondas sonoras (oscilación de cuerpos sólidos) son muy poco adecuados para crear el segundo sonido, ya que la intensidad del segundo sonido emitido es despreciable en comparación con la del sonido ordinario. Sin embargo, son posibles otros métodos de excitación de ondas sonoras en el helio II. Por ejemplo, la emisión de sonido por cuerpos sólidos cuya temperatura varía periódicamente; la intensidad del segundo sonido emitido es entonces grande en comparación con el primer sonido, como era de esperar en vista de la diferencia ya mencionada de la naturaleza de las oscilaciones de temperatura.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el cociente entre las intensidades del primer y segundo sonido emitido por un plano que oscila en una dirección perpendicular a sí mismo.

Solución. Busquemos las velocidades v_s (a lo largo del eje x , perpendicular al plano) de las ondas del primer y segundo sonido en las formas

$$v_{s1} = A_1 \cos \omega(t - x/u_1), \quad v_{s2} = A_2 \cos \omega(t - x/u_2)$$

respectivamente. En la superficie del plano oscilante, las velocidades v_1 y v_n deben ser iguales a la velocidad del plano, que designaremos por $v_0 \cos \omega t$. Esto nos da las ecuaciones $A_1 + A_2 = v_0$, $a_1 A_1 + a_2 A_2 = v_0$, en donde los coeficientes a_1 y a_2 vienen dados por (131.10) y (131.11). La densidad de energía media (temporal) de una onda sonora en el helio II es $\rho_s v_s^2 + \rho_n v_n^2 = A^2(\rho_s + \rho_n a^2)/2$; se obtiene el flujo de energía (intensidad) multiplicando por la velocidad correspondiente del sonido u . El cociente entre las intensidades de las ondas del segundo y primer sonido resulta ser

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{A_2^2(\rho_s + \rho_n a_2^2)u_2}{A_1^2(\rho_s + \rho_n a_1^2)u_1} \approx \frac{\beta^2 T u_2^3}{c u_1}.$$

Aquí hemos supuesto que $u_2 \ll u_1$, lo cual no es cierto cuando se descende a temperaturas muy bajas. El cociente es siempre pequeño.

Problema 2. Igual que el problema 1, pero en el caso de una superficie cuya temperatura varía periódicamente.

Solución. Es suficiente utilizar la condición límite $j = 0$, que debe ser válida en una superficie fija. Nos da $\rho_s(A_1 + A_2) + \rho_n(a_1 A_1 + a_2 A_2) = 0$, de aquí que

$$|A_2/A_1| = (\rho_n a_1 + \rho_s)/(\rho_n a_2 + \rho_s) \approx s/\beta u_2^2.$$

El cociente de intensidades resulta ser $I_2/I_1 = c/T\beta^2 u_1 u_2$, y es muy grande.

Problema 3. Determinar la velocidad de los puntos situados en el perfil de una onda de segundo sonido monodimensional móvil de gran amplitud, y la velocidad de propagación de las discontinuidades que se presentan en la onda como resultado de la deformación del perfil (I. M. KHALATNIKOV, 1952).

Solución. En una onda móvil monodimensional pueden expresarse todas las magnitudes (ρ , p , T , v_s , v_n) en función de un solo parámetro, que puede ser una de ellas (ver § 94). La velocidad U de los puntos situados sobre el perfil de la onda es igual a la derivada dx/dt tomada para un valor dado del parámetro. Las derivadas espacial y temporal de cada magnitud están relacionadas entre sí por $\partial/\partial t = -U\partial/\partial x$. Las derivadas de las magnitudes respecto al parámetro se indicarán añadiéndole una prima.

En lugar de las velocidades v_s y v_n , es conveniente utilizar $v = j/\rho$ y $w = v_n - v_s$, y tomar un sistema coordenado en el que la velocidad sea cero en el punto considerado. Las ecuaciones (130.3)-(130.6), con Π_{ik} , μ , ρ , s dadas por (130.11), (130.13)-(130.15), conducen a las ecuaciones

$$-U \frac{\partial \rho}{\partial p} p' - U \rho^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) w w' + \rho v' = 0, \quad (1)$$

$$p' + 2\rho_s \rho_n w w'/\rho - U \rho v' = 0, \quad (2)$$

$$\left[-\rho U \frac{\partial s}{\partial T} + w \frac{\partial}{\partial T} (\rho s) \right] T' + s w \frac{\partial \rho_s}{\partial p} p' + \left[\rho_s s - U w \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right] w' = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \left[-\rho s + U w \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right] T' + \left[1 + U w p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) \right] p' + \\ & + \left[\rho_n U - \frac{\rho_n \rho_s}{\rho} w \right] w' - [U \rho + w \rho_n] v' = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Ahora se han omitido todos los términos por encima del segundo orden de magnitud y así se tienen todos los términos que contienen el coeficiente de dilatación térmica.

En una onda de segundo sonido, la amplitud relativa de las oscilaciones de p y v es pequeña en comparación con la de T y w ; por tanto, podemos omitir también los términos en wp' y wv' . Para determinar U es suficiente tomar la ecuación (3) y la diferencia de las ecuaciones (2) y (4); la condición de compatibilidad de las dos ecuaciones lineales obtenidas para T' y w' da la ecuación cuadrática

$$\rho_n U^2 \frac{\partial s}{\partial T} - U w \left[\frac{4\rho_s \rho_n}{\rho} \frac{\partial s}{\partial T} - 2s \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right] - \rho_s s^2 = 0$$

de aquí que

$$U = u_2 + w \left(\frac{2\rho_s}{\rho} - \frac{s T}{\rho_n c} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right).$$

Aquí u_2 es la velocidad local del segundo sonido, que varía en el perfil de onda junto con la desviación de la temperatura δT , a partir de su valor de equilibrio. Desarrollando u_2 en potencias de δT , tenemos

$$u_2 = u_{20} + \frac{\partial u_2}{\partial T} \delta T = u_{20} + \frac{\partial u_2}{\partial T} \frac{\rho_n u_2}{\rho s} w,$$

siendo u_{20} el valor de equilibrio de u_2 . Finalmente tenemos

$$U = u_{20} + w \frac{\rho_s s T}{\rho c} \frac{\partial}{\partial T} \log \frac{u_{20}^3 c}{T}. \quad (5)$$

Cuando el perfil de onda varía suficientemente, en él ocurren discontinuidades (en este caso discontinuidades de temperatura); ver §§ 94, 95. La velocidad de propagación de la discontinuidad es la semisuma de las velocidades U en ambos lados de la misma, esto es

$$c_{20} + \frac{w_1 + w_2}{2} \frac{\rho_s s T}{\rho c} \frac{\partial}{\partial T} \log \frac{u_{20}^3 c}{T},$$

siendo w_1, w_2 los valores de w en ambos lados de la discontinuidad.

El coeficiente de w en (5) puede ser positivo o negativo. De acuerdo con esto, los puntos con valores grandes de w pueden estar bien por delante o bien por detrás de aquellos con valores pequeños de w , y la discontinuidad se podrá formar en el frente de ondas hacia adelante o hacia atrás (mientras que en una onda sonora ordinaria, la onda de choque siempre aparece en el frente hacia adelante).

CAPÍTULO XVII

FLUCTUACIONES EN DINAMICA DE FLUIDOS

§ 132. Teoría general de fluctuaciones en dinámica de fluidos

El cálculo de las fluctuaciones cuadráticas medias de la densidad, temperatura, velocidad, etc., en cada punto de un fluido en reposo no requiere ningún estudio especial: estas fluctuaciones (en el caso clásico, es decir, no cuántico) vienen dadas por las fórmulas normales de la termodinámica, que son válidas para las fluctuaciones en cualquier medio que esté en equilibrio termodinámico.[†]

Sin embargo, un problema peculiar de la dinámica de fluidos es el de las correlaciones temporales que aparecen entre las fluctuaciones de estas magnitudes, que corresponden, por tanto, a las fluctuaciones de un fluido en movimiento. En la solución de este problema deben tenerse en cuenta los procesos disipativos del fluido (viscosidad y conducción térmica).

La construcción de la teoría general de las fluctuaciones en dinámica de fluidos exige el plantear las «ecuaciones del movimiento» correspondientes a las magnitudes que fluctúan. Esto puede hacerse incluyendo los términos adicionales apropiados en las ecuaciones generales de la dinámica de fluidos.

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos en la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (132.1)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}, \quad (132.2)$$

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} s \right) = \frac{1}{2} \sigma'_{ik} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \operatorname{div} \mathbf{q}, \quad (132.3)$$

sin que aparezca ninguna forma específica del tensor de tensiones σ'_{ik} o del vector flujo térmico \mathbf{q} , expresan simplemente la conservación de la masa, del impulso y de la energía en el fluido en movimiento. Por consiguiente,

[†] Ver *Física Estadística*, § 111, Editorial Reverté, Barcelona. Para referirse a secciones y fórmulas de este libro se les antepondrá el prefijo FE.

son válidas en esta forma para cualquier movimiento, incluyendo las variaciones fluctuantes en el estado del fluido. En este caso, ρ , p , v , etc., deben entenderse como las sumas de los valores de las magnitudes correspondientes en el movimiento principal del fluido y de sus fluctuaciones; como es natural, las ecuaciones pueden siempre linealizarse respecto a estas últimas.

Las expresiones generales (15.3) para el tensor de tensiones y (49.1) para el flujo térmico, relacionan estas magnitudes con los gradientes de velocidad y temperatura, respectivamente. Sin embargo, en presencia de fluctuaciones, existen también en el fluido tensiones locales y flujos térmicos espontáneos, que no están relacionados con los gradientes de velocidad y temperatura; los designaremos mediante los símbolos s_{ik} y \mathbf{g} , y los llamaremos magnitudes aleatorias.[†] Así pues, podemos escribir[‡]

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik} + s_{ik}, \quad (132.4)$$

$$\mathbf{q} = -\kappa \operatorname{grad} T + \mathbf{g}.$$

El problema consiste ahora en establecer ciertas propiedades de s_{ik} y \mathbf{g} , por ejemplo, sus valores cuadráticos medios y las correlaciones entre sus valores en los diversos puntos del fluido y en diferentes instantes. Esto puede hacerse mediante las fórmulas generales de la teoría de las fluctuaciones. Por sencillez, daremos el razonamiento a seguir en el caso de las fluctuaciones no cuantizadas que normalmente aparecen en la mecánica de fluidos,^{††} y supondremos que los coeficientes de viscosidad y conducción térmica son independientes de la frecuencia de las fluctuaciones, es decir, no presentan dispersión.

En la teoría general de las fluctuaciones (FE §§ 110, 121) hemos estudiado una serie discreta de magnitudes fluctuantes x_1, x_2, \dots , mientras que aquí tenemos una serie continua (los valores de ρ, p, v, \dots , en todo punto del fluido). Sortearemos esta dificultad, que carece de importancia, de una manera puramente formal dividiendo el volumen del fluido en porciones ΔV pequeñas pero finitas, y tomando ciertos valores medios de las magnitudes en cada porción; el paso a porciones infinitesimales se realizará en las fórmulas finales.

[†] En correspondencia con el término *fuerzas aleatorias* de la teoría general de las fluctuaciones.

[‡] En este capítulo sobreentenderemos que T es la temperatura medida en unidades de energía, es decir, se omitirá la constante de Boltzmann.

^{††} Esto significa que las frecuencias ω que aparecen en las fluctuaciones se están suponiendo que son de un valor tal que $h\omega \ll T$; ver FE (109.2).

Consideraremos las fórmulas (132.4) como las ecuaciones

$$\dot{x}_a = - \sum_b \gamma_{ab} X_b + y_a \quad (132.5)$$

de la teoría general [ver FE (121.9)], siendo las magnitudes \dot{x}_a las componentes del tensor σ'_{ik} y del vector \mathbf{q} en cada porción ΔV :

$$\dot{x}_a \rightarrow \sigma'_{ik}, \quad q_i. \quad (132.6)$$

Las magnitudes aleatorias s_{ik} y \mathbf{g} son entonces las magnitudes correspondientes y_a :

$$y_a \rightarrow s_{ik}, \quad g_i. \quad (132.7)$$

Se encuentra el significado de X_a , de acuerdo con las reglas generales, utilizando la fórmula correspondiente a la variación respecto al tiempo de la entropía total S del fluido. Como en § 49, se encuentra a partir de la ecuación (132.3) que

$$S = \int \left\{ \frac{\sigma'_{ik}}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad } T}{T^2} \right\} dV$$

[cuando $s_{ik} = 0$, $\mathbf{g} = 0$ esta expresión nos da (49.6)] o bien, sustituyendo la integral por una suma extendida a las porciones ΔV ,

$$S = \sum \left\{ \frac{\sigma'_{ik}}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad } T}{T^2} \right\} \Delta V. \quad (132.8)$$

Debemos tener también $S = - \sum X_a \dot{x}_a$; ver (58.4). Sustituyendo (132.6) y comparando con (132.8), se halla que las magnitudes correspondientes X_a son

$$X_a \rightarrow - \frac{1}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \Delta V, \quad \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} \Delta V. \quad (132.9)$$

Resulta ahora sencillo hallar los coeficientes γ_{ab} , que nos dan ya las correlaciones requeridas por

$$\overline{y_a(t_1)y_b(t_2)} = (\gamma_{ab} + \gamma_{ba})\delta(t_1 - t_2); \quad (132.10)$$

ver FE (121.10a). La operación de promediar se realiza aquí en el sentido usual de la estadística, es decir, promediamos respecto a las probabilidades de todos los valores que las magnitudes pueden tener en los instantes t_1 y t_2 ; también puede considerarse que se promedia respecto a t_1 o t_2 para una diferencia dada $t_1 - t_2$.

Señalemos en primer lugar que las fórmulas (132.4) no contienen ningún

término que relacione σ'_{ik} con el gradiente de temperatura o \mathbf{q} con el gradiente de velocidades. Esto significa que los coeficientes correspondientes γ_{ab} son nulos, y según (132.10) tenemos

$$\overline{s_{ik}(\mathbf{r}_1, t_1)g_l(\mathbf{r}_2, t_2)} = 0, \quad (132.11)$$

es decir, los valores de s_{ik} y g_l carecen de toda correlación (siendo \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 las coordenadas de dos puntos del fluido).

A continuación, los coeficientes q_i que relacionan q_i con los valores de $(1/T^2)(\partial T / \partial x_k)\Delta V$ son cero si se toman estas dos magnitudes en volúmenes diferentes ΔV , mientras que valen $\kappa T^2 \delta_{ik}/\Delta V$ si el elemento de volumen es el mismo. De aquí tenemos

$$\overline{g_i(\mathbf{r}_1, t_1)g_k(\mathbf{r}_2, t_2)} = 0 \quad \text{si} \quad \mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2,$$

$$\overline{g_i(\mathbf{r}, t_1)g_k(\mathbf{r}, t_2)} = \frac{2\kappa T^2}{\Delta V} \delta_{ik} \delta(t_1 - t_2).$$

Pasando ahora al límite $\Delta V \rightarrow 0$, podemos evidentemente escribir ambas fórmulas conjuntamente como

$$\overline{g_i(\mathbf{r}_1, t_1)g_k(\mathbf{r}_2, t_2)} = 2\kappa T^2 \delta_{ik} \delta(t_1 - t_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (132.12)$$

Finalmente, podemos de modo semejante obtener las fórmulas que nos dan las correlaciones entre los componentes del tensor de tensiones aleatorias:

$$\begin{aligned} & \overline{s_{ik}(\mathbf{r}_1, t_1)s_{lm}(\mathbf{r}_2, t_2)} \\ &= 2T[\eta(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}) + (\zeta - \frac{2}{3}\eta)\delta_{ik}\delta_{lm}] \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (132.13)$$

Las fórmulas (132.11)-(132.13) dan la solución del problema (L. D. LANDAU y E. M. LIFSHITZ, 1957).†

Estas fórmulas pueden volverse a escribir en función de las componentes temporales de Fourier de las magnitudes que nos ocupan. Se define la componente de Fourier de la magnitud fluctuante $x_a(t)$ como

$$x_{a\omega} = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{i\omega t} dt, \quad x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{a\omega} e^{-i\omega t} d\omega; \quad (132.14)$$

† Para convertir a las unidades ordinarias de medida de temperatura (grados) debemos sustituir T por kT y κ por κ/k , siendo k la constante de Boltzmann.

ver FE § 118. Para los componentes $y_{a\omega}$ e $y_{b\omega}$ así definidos tenemos

$$\overline{y_{a\omega} y_{b\omega}} = (1/2\pi)(\gamma_{ab} + \gamma_{ba})\delta(\omega + \omega');$$

ver FE (121.10). Así pues, sustituyendo $\delta(t_1 - t_2)$ por $(1/2\pi)\delta(\omega + \omega')$, obtenemos en lugar de (132-11)-(132-13)

$$\overline{s_{ik\omega}(\mathbf{r}_1)g_{l\omega}(\mathbf{r}_2)} = 0, \quad (132.15)$$

$$\overline{g_{i\omega}(\mathbf{r}_1)g_{k\omega}(\mathbf{r}_2)} = \frac{\kappa T^2}{\pi}\delta_{ik}\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(\omega + \omega'), \quad (132.16)$$

$$\begin{aligned} & \overline{s_{ik\omega}(\mathbf{r}_1)s_{lm\omega}(\mathbf{r}_2)} \\ &= (T/\pi)[\eta(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}) + (\zeta - \frac{2}{3}\eta)\delta_{ik}\delta_{lm}]\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(\omega + \omega'). \end{aligned} \quad (132.17)$$

La generalización de estas fórmulas al caso de fluctuaciones cuantizadas se hace incluyendo simplemente un factor $(\hbar\omega/2T)\coth(\hbar\omega/2T)$ en los segundos miembros de las fórmulas (132.15)-(132.17); ver FE (124.21). Cuando la viscosidad y la conductividad térmica presentan dispersión, η , ζ , κ son funciones complejas de la frecuencia. La generalización correspondiente de las fórmulas (132.15)-(132.17) se realiza sustituyendo η , ζ , κ por las partes reales de las funciones $\eta(\omega)$, $\zeta(\omega)$, $\kappa(\omega)$, como puede demostrarse fácilmente.

§ 133. Fluctuaciones en un medio infinito

Las fórmulas que acabamos de obtener dan, en principio, las fluctuaciones en cualquier caso particular. El problema se resuelve del modo siguiente. Considerando s_{ik} y \mathbf{g} como funciones conocidas de las coordenadas y el tiempo, resolvamos formalmente las ecuaciones (132.1)-(132.3) para \mathbf{v} , ρ , ..., teniendo en cuenta las condiciones límites apropiadas de la mecánica de fluidos. Así obtenemos \mathbf{v} , ρ , ..., como funciones lineales de s_{ik} y \mathbf{g} . De acuerdo con ello, cualquier magnitud cuadrática (o bilineal) en \mathbf{v} , ρ , ..., puede expresarse en función de funcionales cuadráticas de s_{ik} y \mathbf{g} , y se calculan los valores medios a partir de las fórmulas (132.11)-(132.13); las magnitudes auxiliares s_{ik} y \mathbf{g} no aparecen en el resultado final.

Como ilustración del método que acabamos de describir, consideraremos las fluctuaciones de presión en un medio infinito en reposo, teniendo una segunda viscosidad grande $\zeta(\omega)$ que presenta dispersión; en comparación se suponen despreciables los efectos de la viscosidad ordinaria y de la conducción térmica (como puede suceder en las condiciones descritas en § 78).

La solución de las ecuaciones (132.1)-(132.3) puede conseguirse desarrollando todas las magnitudes (ya desarrolladas por Fourier respecto al tiempo) como integrales de Fourier espaciales; en el caso de una magnitud cualquiera $f(\mathbf{r})$ ponemos

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k}, \quad d\mathbf{k} = dk_x dk_y dk_z, \quad (133.1)$$

en donde

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dV. \quad (133.2)$$

Las funciones de correlación para las componentes de Fourier pueden hallarse a su vez a partir de aquellas que correspondan a las propias magnitudes. Por ejemplo, si

$$\overline{f(\mathbf{r}_1)f(\mathbf{r}_2)} = A\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (133.3)$$

entonces

$$\begin{aligned} \overline{f_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}'}} &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \int \overline{f(\mathbf{r}_1)f(\mathbf{r}_2)} \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_2)] dV_1 dV_2 \\ &= \frac{A}{(2\pi)^6} \int \int \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_2)] dV_1 dV_2 \\ &= \frac{A}{(2\pi)^6} \int \exp[-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}] dV, \end{aligned}$$

o, finalmente,

$$\overline{f_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}'}} = \frac{A}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (133.4)$$

En particular, en lugar de la fórmula (132.17), en la que retenemos (en este caso) solamente el término en ζ , tenemos

$$\overline{(s_{ik})_{\omega\mathbf{k}}(s_{lm})_{\omega\mathbf{k}'}} = \frac{T}{8\pi^4} \operatorname{re} \zeta(\omega) \cdot \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (133.5)$$

Bajo las condiciones anteriores (pequeña conductividad térmica) la influencia de la variación de la entropía sobre la variación de presión es relativamente pequeña; por consiguiente, pueden considerarse las fluctuaciones

de presión como adiabáticas. De acuerdo con ello, escribamos la ecuación linealizada (132.1) como

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \delta \mathbf{v} = 0,$$

en donde δp , $\delta \mathbf{v}$ son las fluctuaciones de presión y velocidad, ρ es la densidad de equilibrio y c_0 la velocidad del sonido calculada a partir de la ecuación de estado del equilibrio (§ 78). Tomando las componentes de Fourier temporal y espacial, tenemos

$$-\frac{\omega}{c_0^2} \delta p_{\omega \mathbf{k}} + \rho \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_{\omega \mathbf{k}} = 0. \quad (133.6)$$

Análogamente, la ecuación (132.2) se transforma en

$$-\omega \rho (\delta v_i)_{\omega \mathbf{k}} = -k_i \delta p_{\omega \mathbf{k}} + i\zeta(\omega) k_i \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_{\omega \mathbf{k}} + k_i s_{ik}, \quad (133.7)$$

en donde $\zeta(\omega)$ puede, por ejemplo, definirse mediante la fórmula (78.6).

Para hallar $\delta p_{\omega \mathbf{k}}$, multipliquemos escalarmente la ecuación (133.7) por \mathbf{k} :

$$-\omega \rho \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_{\omega \mathbf{k}} = -k^2 \delta p_{\omega \mathbf{k}} + i\zeta k^2 (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_{\omega \mathbf{k}}) + k_i k_i s_{ik},$$

y eliminemos $\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_{\omega \mathbf{k}}$ por medio de (133.6). El resultado es

$$\delta p_{\omega \mathbf{k}} = k_i k_i s_{ik} / \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2} - i\zeta k^2 \frac{\omega}{\rho c_0^2} \right).$$

Finalmente, tomando el producto $\delta p_{\omega \mathbf{k}} \delta p_{\omega' \mathbf{k}'}$ y promediando con ayuda de la fórmula (133.6), tenemos

$$\overline{\delta p_{\omega \mathbf{k}} \delta p_{\omega' \mathbf{k}'}} = \frac{T c_0^4}{8\pi^4} \frac{\operatorname{re} \zeta(\omega) \cdot \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')}{[c_0^2 - (\omega^2/k^2) - i\omega(\zeta/\rho)][c_0^2 - (\omega'^2/k'^2) + i\omega(\zeta^*/\rho)]}. \quad (133.8)$$

Por ejemplo, si sustituimos $\zeta(\omega)$ tomada de (78.6), obtenemos

$$\overline{\delta p_{\omega \mathbf{k}} \delta p_{\omega' \mathbf{k}'}} = \frac{T}{8\pi^4} \frac{\tau \rho c_0^4 (c_\infty^2 - c_0^2) \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')}{[c_0^2 - (\omega^2/k^2)]^2 + \omega^2 \tau^2 [c_\infty^2 - (\omega^2/k^2)]^2}. \quad (133.9)$$

Para concluir, mostraremos cómo puede deducirse de (133.8) la fórmula usual (clásica) para la fluctuación cuadrática media de la presión en un punto determinado del fluido. Para simplificar los cálculos admitiremos que ζ es independiente de ω .[†]

[†] El resultado (clásico) es realmente independiente de la forma de la función $\zeta(\omega)$; las únicas propiedades de esta función que se utilizan en la deducción son las que debe poseer en cualquier caso (ver FE § 122).

Retornando mediante las fórmulas (132.14) y (133.2) desde los desarrollos de Fourier a las propias funciones $\delta p(\mathbf{r}_1, t_1)$, $\delta p(\mathbf{r}_2, t_2)$, y tomando $t_1 = t_2 \equiv t$, podemos escribir

$$\begin{aligned} & \overline{\delta p(\mathbf{r}_1, t)\delta p(\mathbf{r}_2, t)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\delta p_{\omega\mathbf{k}} \delta p_{\omega'\mathbf{k}'}} \exp[-i(\omega + \omega')t] \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_2)] \times \\ & \quad d\omega d\omega' d\mathbf{k} d\mathbf{k}', \end{aligned}$$

en donde debemos sustituir (133.8). Se obtiene una integración sobre la frecuencia al sustituir $\omega + \omega'$ por cero en el integrando, debido al factor $\delta(\omega + \omega')$. Una segunda integración da[†]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(c_0^2 \zeta / \rho) d\omega}{[c_0^2 - (\omega^2/k^2) - (i\zeta\omega/\rho)][c_0^2 - (\omega^2/k^2) + (i\zeta\omega/\rho)]} = \pi.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \overline{\delta p(\mathbf{r}_1, t)\delta p(\mathbf{r}_2, t)} &= \frac{T\rho c_0^2}{(2\pi)^3} \iint \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_2)] d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \\ &= \frac{T\rho c_0^2}{(2\pi)^3} \int \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] d\mathbf{k} \\ &= \rho T c_0^2 \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \end{aligned} \tag{133.10}$$

Este resultado es el que se buscaba: promediando (133.10) sobre un pequeño volumen ΔV , se obtiene

$$\overline{(\delta p)^2} = \rho T c_0^2 / \Delta V,$$

de acuerdo con una fórmula de la termodinámica, FE (111.11).

[†] La integración se realiza fácilmente, por ejemplo, mediante el cálculo de residuos, tomando el trayecto de integración como una gran semicircunferencia en el plano de la variable compleja ω .

Índice alfabético

- Absorción sonido, 341.
— —, coeficiente, 343.
- Aceleración gravitatoria, 9.
- Acústica geométrica, 293, 294.
— —, ecuación básica, 294.
- Adiabática choque, 367.
— detonación, 551.
—, ecuación, 5.
— Hugoniot, 367.
- Adiabático, movimiento, 4.
- Aerodinámico, cuerpo. Flujo, 194.
- Agua poco profunda, teoría, 452.
- Ala, 195.
— aerodinámica, 195.
— —, fuerza arrastre, 198, 199.
— —, sustentación, 196.
—, ángulo ataque, 195.
—, coeficiente arrastre, 202.
— delgada, coeficiente sustentación, 206.
— —, distribución velocidad, 205.
— —, flujo subsónico, 531.
— —, sustentación, 203.
—, envergadura, 154.
—, flujo supersónico, 534.
— plana, fuerza ascensional, 541.
- d'Alambert, paradoja, 38.
- Amortiguamiento onda gravedad, 108.
- Amplitud compleja onda, 284.
— onda, 284.
— —, fase, 284.
- Ángulo contacto superficie separación, 267.
— derrape, 537.
- Mach, 356.
- Antinodo, 303.
- Arrastre, coeficiente, 168.
—, crisis, 190.
—, fuerza, 34, 38.
- Arrastre inducido, 197.
— onda, 527.
- , parte disipativa, 103.
—, — inercial, 103.
- Autoturbulencia llama, 546, 547.
- Autovalor, conducción térmica, 227.
- Barodifusión, coeficiente, 255.
- Bernoulli, ecuación, 11, 12.
— —, fluido incompresible, 23.
— —, flujo potencial, 22.
— —, generalización relativista, 581.
- Bessel, ecuación, 308.
- Burbuja gas, fuerza arrastre, 194.
- Campo gravitatorio, equilibrio mecánico, 580.
- Canal convergente, flujo, 91.
— divergente, flujo, 91.
- Cantidad movimiento fluido, 14.
- Capa límite, 20, 146, 163.
— —, ecuación Bernoulli, 164.
— —, — continuidad, 164.
— —, — movimiento, 165.
— —, — Navier-Stokes, 164.
— —, espesor, 166, 167.
— —, — cerca punto estancamiento, 169.
— —, — desplazamiento, 167.
— —, flujo cerca línea separación, 170.
— — laminar, 163.
— — —, estabilidad flujo, 176.
— — —, transferencia térmica, 233.
— —, presión, 164.
— —, separación, 170.
— —, teoría Prandtl, 88.
— —, transferencia térmica, 232.
— — turbulenta, 187.
— — —, transferencia térmica, 233.

Capa límite, velocidad flujo, 164.
 Capilaridad, 271.
 —, constante, 266.
 —, onda, 271, 272.
 Característica, 357, 432.
 — flujo bidimensional estacionario, 496.
 Catenoide, 268.
 Cauchy-Riemann, condiciones, 26.
 Caudal, 64, 397.
 Cavitación, 285.
 Circulación, conservación, 16.
 — velocidad, 16.
 — —, contorno fluido, 17.
 Cociente difusión térmica, 255.
 Coeficiente absorción sonido, 343.
 — amortiguamiento onda, 110.
 — — — gravedad, 110.
 — arrastre, 168.
 — barodifusión, 255.
 — cinético, 253.
 — —, principio simetría, 253.
 — difusión, 255.
 — — barométrica, 255.
 — — térmica, 253, 255.
 — presión, 536.
 — reflexión, 292.
 — superficial, 263.
 — sustentación, 196.
 — transferencia masa, 253, 255.
 — viscosidad, 55.
 — — segundo, 348.
 Combustión, dinámica fluido, 543.
 — lenta, 543.
 — modo, relación, 567.
 — producto, estado termodinámico, 557.
 — —, temperatura, 556.
 — —, velocidad, 556.
 — zona, 544.
 Condensación, discontinuidad, 570.
 Conducción térmica, 207.
 — —, autovalores, 227.
 — —, ecuación, 214, 215.
 — — fluido incompresible, 213.
 — — medio finito, 222.
 — — — infinito, 217.
 — — pura, 255.
 — —, tiempo relajación, 219.
 — — turbulenta, 232.
 Conductividad térmica, 208.
 — termométrica, 214.
 — — turbulenta, 232.

Conservación circulación, ley, 16, 17.
 — energía, fluido ideal, 207.
 — —, ley general, 208.
 — materia, 2.
 Constante capilaridad, 266.
 Continuidad, ecuación, 1, 3.
 Contorno fluido, 16.
 — —, circulación velocidad, 17.
 Convección, 9, 214, 228.
 — ausente, equilibrio mecánico, 9.
 — flujo estacionario, 241.
 — libre, 240.
 — —, ley semejanza, 242.
 — — campo gravitatorio, parámetros, 242.
 Correlación triple velocidad, 141.
 — velocidades, 138.
 Crisis arrastre, 190.
 — fuerza arrastre, 192.
 Cuanto sonido, 589.
 Cuerpo aerodinámico, 195.
 — —, flujo, 194.
 — finito, flujo, 523.
 — geométricamente semejante, 68, 69.
 — puntiagudo, flujo supersónico, 526.
 — sólido, oscilación fluido viscoso, 97.
 — sumergido fluido ideal, ecuación movimiento, 39.

Chaplygin, ecuación, 492, 494.
 —Zhukovskii, condición, 197.
 Choque, adiabática, 367.
 — adiabático, 365.
 — —, ecuación relativista, 582.
 — normal, 365.
 — oblicuo, 365.
 —, onda, 355, 365.
 — polar, 383.
 Chorro débil, 97.
 —, flujo medio fuera región turbulenta, 151.
 — fuerte, 97.
 —, impulso, 95.
 —, línea corriente, 97.
 — sumergido, 95.
 — turbulento, 146.
 — —, distribución velocidades, 149.
 — — sumergido, tamaño, 152.
 — — —, velocidad, 152.

Degenerada, frecuencia, 274.
 Densidad campo gravitatorio, 8.

- Densidad fluido, 1.
 — flujo energía, 13.
 — — entropía, 5.
 — — másico, 3.
- Derrape, ángulo, 537.
- Descarga, 397.
- Detonación, 550, 551.
 —, adiabática, 551.
 —, ónda, 551.
 —, —, propagación, 559.
 —, velocidad propagación, 556.
- Difusión, 249.
 — barométrica, coeficiente, 255.
 —, coeficiente, 255.
 — partícula suspendida fluido, 258.
 — térmica, cociente, 255.
 — —, coeficiente, 255.
- Dinámica fluido, 1.
 — — combustión, 543.
 — —, ecuación campo gravitatorio, 579.
 — —, fundamental, 2.
 — —, fluctuación, 607.
 — gas, 355.
 — relativista fluido, 575.
 — — —, ecuaciones, 577.
 — superfluidos, 587.
 — —, ecuación, 591.
- Discontinuidad compresión, 365.
 — condensación, 570.
 — condición inicial, 412.
 — débil, 393, 394.
 — inicial, 412.
 —, intersección línea transición, 516.
 — isoterma, 391, 392.
 — onda sonora, 426.
 —, superficie, 363.
 — tangencial, 364.
 — — débil, 396.
 — —, inestabilidad, 128.
 — —, superficie, 19, 128.
- Dispersión onda, sección eficaz efectiva total, 339.
 — sonido, 337.
- Doppler, efecto, 298.
- Ecuación adiabática, 5.
 — Bernoulli, 11, 12.
 — —, generalización relativista, 581.
 — continuidad, 1, 3.
 — — entropía, 5.
 — — fluido incompresible, 23.
- Ecuación Euler, 3, 4, 6.
 — —, generalización relativista, 579.
 — — Tricomi, 499, 500.
 — Fourier, 214.
 — fundamental dinámica fluido, 2.
 — Laplace, 23, 35.
 — movimiento fluido viscoso, solución exacta, 90.
 — Navier-Stokes, 56.
 — onda, 48, 282.
 — —, solución general, 310.
- Efecto Doppler, 298.
- Eigenvalues, 227.
- Eikonal, 294.
- Einstein, relación, 260.
- Emulsión, absorción sonido, 343.
- Emisión dipolar, 323.
 — sonido, 319.
- Energía activación, 543.
- cinética fluido incompresible, 60.
 —, densidad flujo, 13.
 —, disipación. Fluido incompresible, 60.
 — fluido, variación con tiempo, 12.
 — — — por unidad tiempo, 13.
 —, flujo, 12.
 — onda sonora, 286.
 — sonora total media, 287.
 —, variación 12, 13.
- Entalpía libre, 8.
 — unidad masa, 13.
- Entropía, 5.
 —, densidad flujo, 5.
 —, ecuación continuidad, 5.
 — equilibrio, 9.
 —, partícula fluido, 4.
- Envergadura ala, 154.
- Equilibrio, condición estabilidad, 9.
 —, estabilidad, 9.
 — mecánico, convección ausente, 9.
 — — fluido, 7, 9.
 — —, temperatura, 9.
 — térmico fluido, 8.
- Espectro continuo, 115.
 — discreto, 115.
- Estancamiento, punto, 24.
 — —, Presión, 24.
- Estela laminar, 79.
 — turbulenta, 152.
 — —, anchura, 153, 156.
- Estrofoide, 383.

- Euler, constante, 76.
 —, ecuación, 3, 4, 6.
 —, —, fluido viscoso, 53.
 —, —, generalización relativista, 579.
 —Tricomi, ecuación, 499, 500.
 ——, —, solución, 505.
- Fenómeno separación, 146.
 — superficial, 263.
- Fluctuación dinámica fluido, 607.
 — medio infinito, 611.
 —, teoría general, 607.
- Fluido campo gravitatorio, 4.
 —, cantidad movimiento, 14.
 —, conducción térmica, 207.
 — cuántico, 587.
 —, densidad, 1.
 —, dinámica, 1.
 —, — relativista, 575.
 —, — —, ecuaciones, 577.
 —, dissipación energía, 4.
 —, energía cinética, 36.
 —, — total, 36.
 —, — Variación con tiempo, 12.
 —, — — por unidad tiempo, 13.
 —, equilibrio mecánico, 7.
 — — térmico, 8.
 — ideal, 4.
 — —, condición límite, 6.
 — —, determinación estado. Magnitudes, 6.
 — —, ecuación movimiento monodimensional, 6, 7.
 — —, ley conservación energía, 207.
 —, impulso, 14.
 —, — total, 37.
 — incompresible, 22.
 — —, condiciones, 27.
 — —, conducción térmica, 213.
 — —, dissipación energía, 59.
 — —, ecuación Bernoulli,
 — —, — continuidad, 23.
 — —, — general, 22.
 — —, energía cinética, 60.
 — —, flujo energía, 23.
 — —, — estacionario, ecuación Navier-Stokes, 71.
 — —, — potencia, 23.
 — —, onda, 49.
 — inmiscible, superficie límite, 6.
 —, masa total, 2.
 —, mezcla, ecuación dinámica, 249.

- Fluido móvil, calentamiento cuerpo, 237.
 — —, descripción matemática, 1.
 — —, determinación estado. Magnitudes, 6.
 — — movimiento, cuadrivector impulso energía, 575.
 — —, partícula, 1.
 —, presión, 1.
 —, punto, 1.
 —, velocidad, 1.
 — viscoso, 53.
 — —, ecuación Euler, 53.
 — —, — movimiento, 53, 55.
 — —, — —. Condiciones límites, 56.
 — —, — —. Solución exacta, 88.
 — — incompresible, movimiento, 61.
 — —, movimiento oscilante, 97.
 — —, tensor densidad flujo impulso, 53.
 —, volumen. Ecuación movimiento, 3, 4.
- Flujo alrededor obstáculo cónico, 479.
 — bidimensional, 25.
 — — estacionario, característica, 496.
 — canal convergente, 91.
 — — divergente, 91.
 — cónico, 482.
 — cuerpo aerodinámico, 194.
 — discontinuo, 19, 20.
 — energía, 12.
 — — fluido incompresible, 23.
 — entre cilindros en rotación, 67.
 — — dos planos, curva límite, 125.
 — entropía, cuadrivector densidad, 584.
 —, estabilidad, estudio matemático, 113.
 — estacionario, 11.
 — —, ecuación convección, 241.
 — — entre cilindros en rotación, estabilidad, 119.
 — —, estabilidad, 113.
 — —, —, estudio matemático, 114.
 — — gas, 358.
 — — metaestable, 123.
 — — gas a través tobera, 397.
 — — subsónico, 355.
 — — supersónico, 355.
 — —, velocidad crítica, 360.
 — — viscoso, tubería, 401.
 — gaseoso bidimensional, 483.
 — — — estacionario, 492.
 — — — monodimensional, 397.
 — — — arbitrario, 441.
 — hipersonico, 540.

- Flujo impulso, 14.
 —, —. Tensor densidad, 16.
 — incompresible, 22.
 — irrotacional, 18.
 — laminar, 118.
 —, coeficiente resistencia, 185.
 — mixto, 499.
 — no estacionario, 11.
 — normal, 588.
 — plano, 25.
 — potencial, 18.
 —, ecuación Bernoulli, 22.
 — fluido incompresible, 23.
 —, fuerza arrastre, 34.
 — gas, 483.
 —, generalización relativista, 581.
 — parte superfluida, 589.
 — primera aproximación, 21.
 —, propiedades, 21.
 — rápido, 454.
 — rotacional, 18.
 — semejante, 70.
 — semejanza, 405.
 — monodimensional, movimiento, 404.
 — subsónico rodea ala delgada, 531.
 — superfluido, 588.
 — supersónico alrededor ángulo, 473.
 —, formación onda choque, 523.
 — rodea ala, 534.
 — — cuerpo puntiagudo, 526.
 — tranquilo, 454.
 — transónico, 485, 499.
 —, potencial velocidades, 486.
 — tubería, 61.
 —, estabilidad, 123.
 — turbulento, 118.
 —, disipación energía, orden magnitud, 134.
 —, región, 145.
 — tubería, 184.
 — velocidad sonido, 510.
 Fonones, 589.
 Fourier, componente, 285.
 —, — magnitud fluctuante, 610.
 —, ecuación, 214.
 Frecuencia angular, 43.
 — característica, 301.
 —, orden magnitud, 301.
 —, circular, 43.
 — degenerada, 274.
 Frente llama, 544.
 Froude, número, 70.
 Fuerza arrastre, 38.
 — —, crisis, 192.
 — sustentación, 38, 81.
 Función armónica esférica volumétrica, 273.
 — corriente, 25.
 — error, 224.
 — Legendre asociada, 274.
 Gas, dinámica, 355.
 —, flujo estacionario, 358.
 — — potencial, 483.
 — — subsónico, 355.
 — — supersónico, 355.
 — móvil, propagación perturbación, 355.
 — perfecto, ecuación estado, 361.
 — —, energía interna, 361.
 — —, entalpía, 361.
 — — entropía, 361.
 — —, equilibrio, 11.
 — —, onda choque, 377.
 —, velocidad relativista, 582.
 Gibbs, potencial, 8.
 Grashof, número, 242.
 Gravedad, onda, 41.
 Green, fórmula, 2.
 Hankel, función, 310.
 Helio líquido, punto λ , 587.
 Helio II, 587.
 —, densidad normal, 592.
 —, — real, 592.
 —, — superfluida, 592.
 —, efecto termomecánico, 590.
 —, entropía, 589.
 —, parte normal, 588.
 —, — superfluida, 588.
 Hidrostática, 7.
 Hodógrafa, plano, 492.
 —, transformación, 492.
 — velocidad, 462.
 Hugoniot, adiabática, 367.
 Ignición mezcla gaseosa, 551.
 Impulso, cantidad, 15.
 — energía, tensor, 575.
 — fluido, 14.
 —, flujo, 14.
 —, —. Tensor densidad, 16.
 — onda sonora, 286.
 — total onda sonora, 289.

- Invariante Riemann, 437.
 Isoentrópico, movimiento, 5.
 Jouget, punto, 553.
 Joukowski, teorema, 154, 156.
 Kelvin, teorema, 17.
 Kolmogorov, ley, 136.
 Lagrangiana, variable, 6.
 Laplace, ecuación, 23, 35.
 —, fórmula, 263, 264.
 Laval, tovera, 399.
 Legendre asociada, función, 274.
 Ley semejanza, 68.
 — — hipersónica, 540.
 — — transferencia térmica, 228.
 — — transónica, 537.
 Línea característica, 357.
 — corriente, 11.
 — —, ecuación Bernoulli, 12.
 — límite, 494.
 — separación, 146.
 — transición, intersección discontinuidad, 516.
 Longitud mezcla, 151.
 Loytsianski, ley, 160.
 Llama, 544.
 —, autoturbulencia, 546, 547.
 —, frente, 544.
 —, velocidad normal, 545.
 Mach, ángulo, 356.
 —, número, 193, 356.
 —, — crítico, 510.
 —, superficie, 357.
 Magnitud aleatoria, 608.
 — fluctuante, componente Fourier, 610.
 — —, ecuación movimiento, 607.
 Masa virtual, 40.
 Materia, conservación, 2.
 Medio móvil, propagación sonido, 297.
 Mezcla fluido, conservación energía, 252.
 — —, ecuación continuidad, 249.
 — —, — dinámica, 249.
 — —, — Navier-Stokes, 250.
 — —, flujo energía total, 252.
 — —, velocidad, 250.
 — —, gaseosa, ignición, 551.
 Movimiento browniano, 258.
 Navier-Stokes, ecuación, 56.
 Newton, constante gravitación, 9.
 Niebla, 570.
 Nodo, 303.
 Número Froude, 70.
 — Grashof, 242.
 — Mach, 193, 356.
 — — crítico, 510.
 — Nusselt, 231.
 — Péclét, 230.
 — Prandtl, 230.
 — onda, 43.
 — Reynolds, 69.
 — Strouhal, 71.
 Nusselt, número, 231.
 Obukhov, ley, 136.
 Onda, amplitud, 284.
 —, arrastre, 527.
 — capilaridad, 271, 272.
 — cilíndrica, 307.
 —, coeficiente amortiguamiento, 110.
 —, componente Fourier, 285.
 —, monocromático, 285.
 — choque, 355, 365.
 — —, colisión, 467.
 — — débil, 369.
 — — entropía, 381.
 — —, espesor, 386, 389.
 — —, formación en flujo supersónico, 523.
 — —, frente, 366.
 — — intensa, propagación, 449.
 — —, intersección, 464.
 — —, — superficie sólida, 469.
 — — gas perfecto, 377.
 — —, parte trasera, 366.
 — — sentido variación magnitud, 372.
 — —, velocidad crítica, 379.
 — detonación, 551.
 — —, propagación, 559.
 — directa, 314.
 — dispersada, potencial, 338.
 —, ecuación, 48, 282.
 — entropía, 381.
 — esférica, 304.
 — —, reflexión, 314.
 — estacionaria, 303.
 — fluido incompresible, 49.
 —, frecuencia, 43.
 — — angular, 43.
 — — circular, 43.

- Onda gravedad, 41, 272.
 — —, amortiguamiento, 108.
 — —, coeficiente amortiguamiento, 110.
 — —, dissipación energía, 109.
 — —, energía mecánica, 109.
 — —, flujo fluido muy viscoso, 110.
 — — larga, 47.
 — —, relación número onda y frecuencia, 43.
 — —, velocidad propagación, 44.
 — — larga, 47.
 — —, propagación, 47..
 — lateral, 314, 315.
 — —, potencial, 319.
 — longitudinal, 283.
 — monocromática, 284.
 — monodimensional no estacionaria, dinámica relativista, 580.
 — móvil, 302, 419.
 — — — monodimensional, 419.
 — perfil, 419.
 — plana, 50, 282.
 — — móvil, 283.
 — — —, velocidad, 283.
 — proa, 523.
 — profundidad penetración, 99.
 — rarefacción, 457, 460.
 — — no estacionaria, 407.
 — reflejada, 291.
 — refractada, 291.
 — resistencia, 527.
 — simple, 421, 488.
 — — centrada, 488.
 — — estacionaria, 486.
 — — semejanza centrada, 434.
 — sonora, 281.
 — — descripción, 282.
 — —, ecuación Euler, 281.
 — —, energía, 286.
 — —, impulso, 286.
 — — — total, 289.
 — — formación discontinuidad, 426.
 — — reflexión, 291.
 — — refracción, 291.
 — térmica, 227.
 — transversal, 50, 98.
 — vector, 50, 284.
 — velocidad grupo, 297.
 Oseen, ecuación, 76.
- Paquete onda, 289.
 Parte superfluida, 588.
- Parte superfluida, flujo potencial, 589.
 Particula, difusión fluido, 259.
 — esférica, coeficiente difusión, 260.
 — fluido, 1.
 — — entropía, 4, 5.
 — suspendida, movilidad, 259.
 Pascal, principio, 575.
 Péclét, número, 230.
 Película adsorbida, influencia movimiento líquido, 276.
 Perturbación, coeficiente amplificación, 130.
 — propagación gas móvil, 355.
 Placa rugosa, coeficiente arrastre, 190.
 Plano físico, 492.
 — hodógrafa, 492.
 Poiseuille, fórmula, 64.
 Poisson, fórmula, 311.
 Polar choque, ecuación, 383.
 Potencial complejo, 26.
 — gravitatorio newtoniano, 9.
 — químico relativista, 584.
 — termodinámico por unidad masa, 8.
 — velocidad, 22, 23.
 Prandtl, número, 230.
 — teoría capa límite, 88.
 Presión campo gravitatorio, 8.
 —, coeficiente, 536.
 — equilibrio, 9.
 — fluido, 1.
 — punto estancamiento, 24.
 — superficial, 263.
 Primer sonido, 602.
 Principio simetría coeficiente cinético, 253.
 Proceso disipativo, ecuación relativista, 583.
 Punto estancamiento, 24.
 — — presión, 24.
 — fluido, 1.
 — Jouguet, 553.
- Rayo sonoro, ecuación, 299, 300.
 — — principio Fermat, 301.
 Reciprocidad, principio, 330, 332.
 Reflexión, coeficiente, 292.
 — onda sonora, 291.
 — regular, 472.
 Refracción onda sonora, 291.
 Región flujo turbulento, 145.
 — turbulenta, 145.
 — — chorro, caudal, 150.
 — — forma, 147.
 Remolino, 131.

- Remolino, disipación energía, 133, 134.
 —, escala, 131.
 —, tamaño, 131.
- Resistencia, crisis, 190.
 — onda, 38, 527.
- Resoluciónpectral, 285.
- Resonador, 303.
- Reynolds, número, 69.
 —, — crítico, 114.
- Riemann, invariante, 437.
- Salto agua, 454.
 — hidráulico, 454.
- Schwarz-Christoffel, fórmula, 34.
- Sección eficaz efectiva, 339.
- Segunda viscosidad, 348.
- Segundo sonido, 602.
- Semejanza hipersónica, ley, 540.
 —, ley, 68, 70.
 — transónica, ley, 537.
- Separación capa límite, 170.
 — flujo, fenómeno, 146.
 — —, línea, 146.
- Sonido, 281.
 —, absorción, 341.
 —, cuanto, 589.
 —, dispersión, 337.
 —, emisión, 319.
 —, intensidad, 322.
 —, primero, 602.
 —, propagación medio móvil, 297.
 —, — en superfluído, 599.
 —, — tubo, 333.
 —, — —, ecuación, 334.
 —, segundo, 602.
 —, velocidad, 283.
 —, — local, 357.
- Stokes, fórmula, 17, 71, 74.
 —, teorema, 18.
- Strouhal, número, 71.
- «Subcapa laminar», 182.
- viscosa, 182.
- Sufijo mudo, 14.
- Superficie característica, 357.
 — contacto, ángulo separación, 267.
 — discontinuidad, 363.
 — —, intersección, 457.
 — — tangencial, 19.
- Mach, 357.
- sónica, 499.
 — —, solución ecuación Euler-Tricomi, 505.
- Superficie transicional, 499.
- Superfluidez, 587.
- Superfluído, dinámica, 587.
 —, ecuación dinámica, 591.
 —, propagación sonido, 599.
 —, teoría, 587.
- Suspensión, viscosidad, 85.
 —, viscosidad efectiva, 86, 87.
- Sustancia, ecuación estado ultrarrelativista, 579.
- Sustentación, coeficiente, 196.
 —, fuerza, 38, 81.
- Temperatura campo gravitatorio, 8.
 —, ley igualación, 228.
- Tensión superficial, coeficiente, 263.
- Tensor densidad flujo impulso, 16.
 — — —, fluido viscoso, 53.
 — — impulsivo-energía, 575.
 — masas asociadas, 37.
 — tensiones, 54.
 — — viscosidad, 54.
- Teorema Kelvin, 17.
 — Stokes, 18.
- Termomecánico, efecto, 590.
- Tiempo relajación conductividad térmica, 219.
- Tobera, 397.
 — Laval, 399.
- Torbellino turbulento, 131.
- Transferencia calor, ecuación general, 207.
 — masa, coeficiente, 255.
 — térmica capa límite, 232.
 — — — laminar, 233.
 — — — turbulenta, 233.
 — — —, coeficiente, 230.
 — — —, ecuación general, 209.
 — — —, ley semejanza, 228.
- Tubería, caudal, 64, 65.
 —, coeficiente resistencia, 185.
 —, estabilidad flujo, 123.
 —, flujo, 61.
 —, — turbulento, 184.
 —, ley resistencia, 185.
- Tubo estrecho, 333.
- , propagación sonido, 333.
 —, — —, ecuación, 334.
- Turbulencia, 113.
 —, escala externa, 137.
 —, — interna, 137.
 —, establecimiento, 115.

Turbulencia, fenómeno separación, 144.
—, isótropa, 135, 158.
— —, disminución, 161.
— local, 134.
— —, correlación velocidades, 138.
— totalmente desarrollada, 130.
—, región, 144.

Unidad masa fluido, energía potencial, 8.

Valor propio conducción térmica, 227.
Variable lagrangiana, 6.
Vector onda, 50, 284.
Velocidad, circulación, 16.
— compleja, 26.
—, correlación, 138.
— — triple, 141.
— crítica flujo gas, 360.
— fase onda, 297.
— fluido, 1.
— grupo onda, 297.
—, hodógrafa, 462.

Velocidad, ley relativista adición, 582.
— local sonido, 357.
—, parte fluctuante, 131.
—, perfil logarítmico, 180, 183.
—, potencial, 22, 23.
— sonido, 283.
— — relativista, 579.

Vibración característica, 301.
— forzada, 301.
— libre, 301.

Vientre, 303.

Viscosidad, 4, 53.
— cinemática, 56.
—, coeficiente, 55.
— dinámica, 56.
— efectiva suspensión, 86, 87.
— evanescente, teoría, 88.
— suspensión, 85.
—, tensor tensiones, 54.

Vorticidad, 18.

Zhukovskii, fórmula, 196.

Zona combustión, 544.

