

te finito de X , entonces $\{p(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ es un recubrimiento cerrado localmente finito de Y .]

9. Sea G un grupo topológico conexo y localmente compacto. Demuestre que G es paracompacto. [Indicación: sea U_1 un entorno de e con clausura compacta. En general, defina $U_{n+1} = \bar{U}_n \Delta U_1$. Pruebe que la unión de los conjuntos \bar{U}_n es, a la vez, abierta y cerrada en G .] Este resultado es cierto sin suponer que G es conexo, pero la demostración requiere más esfuerzo.

10. Teorema. Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto y paracompacto, entonces cada componente de X tiene una base numerable.

Demostración. Si X_0 es una componente de X , entonces X_0 es localmente compacto y paracompacto. Sea \mathcal{C} un cubrimiento localmente finito de X_0 por conjuntos abiertos en X_0 que tienen clausuras compactas. Sea U_1 un elemento no vacío de \mathcal{C} y, en general, sea U_n la unión de todos los elementos de \mathcal{C} que intersectan \bar{U}_{n-1} . Demuestre que \bar{U}_n es compacto y que los conjuntos U_n recubren X_0 .

§42 El teorema de metrización de Smirnov

El teorema de metrización de Nagata-Smirnov nos da un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que un espacio sea metrizable. En esta sección probamos un teorema que nos ofrece otro conjunto de tales condiciones. Es un corolario del teorema de Nagata-Smirnov, el cual fue probado primero por Smirnov.

Definición. Un espacio X es **localmente metrizable** si todo punto x de X tiene un entorno U que es metrizable con la topología del subespacio.

Teorema 42.1 (Teorema de metrización de Smirnov). Un espacio X es metrizable si, y sólo si, X es un espacio de Hausdorff paracompacto y localmente metrizable.

Demostración. Supongamos que X es metrizable. Entonces X es localmente metrizable y también es paracompacto, por el Teorema 41.4.

Recíprocamente, supongamos que X es un espacio de Hausdorff paracompacto y localmente metrizable. Vamos a probar que X tiene una base que es numerablemente localmente finita y, dado que X es regular, entonces se deducirá, por el teorema de Nagata-Smirnov, que X es metrizable.

La demostración es una adaptación de la última parte de la prueba del Teorema 40.3. Recubramos X por conjuntos abiertos y metrizzables; entonces escogamos un refinamiento \mathcal{C} de este cubrimiento que sea abierto localmente finito y que recubra X . Cada elemento C de \mathcal{C} es metrizable, por tanto existe una distancia $d_C : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$

que induce la topología de C . Dado $x \in C$, sea $B_C(x, \epsilon)$ el conjunto de todos los puntos y de C tales que $d_C(x, y) < \epsilon$. Entonces $B_C(x, \epsilon)$ es abierto en X , ya que es abierto en C .

Dado $m \in \mathbb{Z}_+$, sea \mathcal{A}_m el cubrimiento de X formado por todas estas bolas abiertas de radio $1/m$, concretamente,

$$\mathcal{A}_m = \{B_C(x, 1/m) \mid x \in C \text{ y } C \in \mathcal{C}\}.$$

Sea \mathcal{D}_m un refinamiento abierto localmente finito de \mathcal{A}_m que recubra X (aquí es donde usamos la paracompacidad). Sea \mathcal{D} la unión de las colecciones \mathcal{D}_m . Entonces \mathcal{D} es numerablemente localmente finita. Aseguramos que \mathcal{D} es una base para X , de donde se sigue nuestro teorema.

Sea x un punto de X y sea U un entorno de x . Nuestro objetivo es encontrar un elemento D de \mathcal{D} tal que $x \in D \subset U$. Ahora bien, x pertenece sólo a una cantidad finita de elementos de \mathcal{C} , pongamos que son C_1, \dots, C_k . Entonces $U \cap C_i$ es un entorno de x en el espacio C_i y, por tanto, existe un $\epsilon_i > 0$ tal que

$$B_{C_i}(x, \epsilon_i) \subset (U \cap C_i).$$

Elijamos m de forma que $2/m < \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$. Como la colección \mathcal{D}_m recubre a X , debe existir un elemento D de \mathcal{D}_m que contenga a x y, dado que la colección \mathcal{D}_m refina \mathcal{A}_m , debe existir un elemento $B_C(y, 1/m)$ de \mathcal{A}_m , para algún $C \in \mathcal{C}$ y algún $y \in C$, que contenga a D . Como

$$x \in D \subset B_C(y, 1/m)$$

el punto x pertenece a C , de donde C debe ser uno de los conjuntos C_1, \dots, C_k , pongamos que $C = C_i$. Finalmente, dado que $B_C(y, 1/m)$ tiene diámetro no más grande que $2/m < \epsilon_i$, se sigue que

$$x \in D \subset B_{C_i}(y, 1/m) \subset B_{C_i}(x, \epsilon_i) \subset U$$

como queríamos demostrar. ■

Ejercicios

1. Compare el Teorema 42.1 con los Ejercicios 7 y 8 de §34.
2. (a) Demuestre que, para cada $x \in S_\Omega$, la sección de S_Ω por x tiene una base numerable y, por tanto, es metrizable.
 (b) Concluya que S_Ω no es paracompacto.

Capítulo 7

Espacios métricos completos y espacios de funciones

El concepto de completitud para un espacio métrico puede haber sido estudiado ya por el lector. Es un concepto básico para todos los aspectos del análisis. Aunque la completitud es una propiedad métrica más que una propiedad topológica, hay una cierta cantidad de teoremas que implican a los espacios métricos completos y que, sin embargo, son de naturaleza topológica. En este capítulo, estudiamos los ejemplos más importantes de espacios métricos completos y probamos algunos de estos teoremas.

El ejemplo más familiar de espacio métrico completo es el espacio euclídeo con cualquiera de sus distancias usuales. Otro ejemplo, tan importante como el anterior, es el conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ de todas las aplicaciones continuas de un espacio X en un espacio métrico Y . Este conjunto tiene una distancia denominada *distancia uniforme*, análoga a la distancia uniforme definida para \mathbb{R}^J en §20. Si Y es un espacio métrico completo, entonces $\mathcal{C}(X, Y)$ es completo con la distancia uniforme. Esta propiedad será demostrada en §43. Como aplicación, construimos en §44 la bien conocida *curva de Peano que llena el espacio*.

Un teorema de naturaleza topológica concerniente a espacios métricos completos es un teorema que relaciona la compacidad de un espacio con la completitud del mismo. Tratamos esto en §45. Como corolario inmediato, obtenemos un teorema en relación con los subespacios compactos del espacio de funciones $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$; es una versión clásica del famoso teorema conocido como *teorema de Ascoli*.

Existen otras topologías usuales para el espacio de funciones $\mathcal{C}(X, Y)$ además de la topología derivada de la distancia uniforme. Estudiamos algunas de ellas en §46, llegando a una prueba de la versión general del teorema de Ascoli en §47.

§43 Espacios métricos completos

En esta sección definimos la noción de completitud y demostramos que si Y es un espacio métrico completo, entonces el espacio de funciones $\mathcal{C}(X, Y)$ es completo con la distancia uniforme. También probamos que todo espacio métrico puede ser embebido isométricamente en un espacio métrico completo.

Definición. Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión (x_n) de puntos de X se dice que es una **sucesión de Cauchy** en (X, d) si tiene la propiedad de que, dado $\epsilon > 0$, existe un entero N tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \text{para todo } n, m \geq N.$$

El espacio métrico (X, d) se dice que es **completo** si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

Es trivial que cualquier sucesión convergente en X es necesariamente una sucesión de Cauchy; la completitud obliga a que se verifique el recíproco.

Observemos que un subconjunto cerrado A de un espacio métrico completo (X, d) es necesariamente completo con la distancia restringida, ya que una sucesión de Cauchy en A también es una sucesión de Cauchy en X y, por tanto, converge en X . Como A es cerrado en X , el límite de la sucesión debe permanecer en A .

Observemos también que si X es completo con la distancia d , entonces X es completo con la distancia acotada estándar

$$\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$$

correspondiente a d , y recíprocamente. Esto se debe a que una sucesión (x_n) es una sucesión de Cauchy para la distancia \bar{d} si, y sólo si, es una sucesión de Cauchy para la distancia d . Y una sucesión converge en la distancia \bar{d} si, y sólo si, converge en la distancia d .

Un criterio útil para comprobar si un espacio métrico es completo, es el siguiente:

Lema 43.1. *Un espacio métrico X es completo si toda sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en (X, d) . Vamos a probar que si (x_n) tiene una subsucesión (x_{n_i}) que converge a un punto x , entonces la propia sucesión (x_n) converge a x .

Dado $\epsilon > 0$, elegimos primero N lo suficientemente grande para que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon/2$$

para todos $n, m \geq N$ (utilizando el hecho de que (x_n) es una sucesión de Cauchy). Entonces sea i un entero lo suficientemente grande para que $n_i \geq N$ y

$$d(x_{n_i}, x) < \epsilon/2$$

(utilizamos aquí el hecho de que $n_1 < n_2 < \dots$ es una sucesión creciente de enteros y que (x_{n_i}) converge a x). Teniendo en cuenta ambas desigualdades, obtenemos el resultado deseado de que para $n \geq N$,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x) < \epsilon.$$

Teorema 43.2. *El espacio euclídeo \mathbb{R}^k es completo con cualquiera de sus distancias usuales, la distancia euclídea d o la distancia del supremo ρ .*

Demuestra. Para probar que el espacio métrico (\mathbb{R}^k, ρ) es completo, sea (x_n) una sucesión de Cauchy en (\mathbb{R}^k, ρ) . Entonces el conjunto $\{x_n\}$ es un subconjunto acotado de (\mathbb{R}^k, ρ) , ya que si N es tal que

$$\rho(x_n, x_m) \leq 1$$

para todos $n, m \geq N$, entonces el número

$$M = \max\{\rho(x_1, 0), \dots, \rho(x_{N-1}, 0), \rho(x_N, 0) + 1\}$$

es una cota superior para $\rho(x_n, 0)$. De este modo, los puntos de la sucesión (x_n) permanecen todos en el cubo $[-M, M]^k$. Dado que este cubo es compacto, la sucesión (x_n) tiene una subsucesión convergente, por el Teorema 28.2. Entonces (\mathbb{R}^k, ρ) es completo.

Para probar que (\mathbb{R}^k, d) es completo, observemos que una sucesión es una sucesión de Cauchy para d si, y sólo si, es una sucesión de Cauchy para ρ , y una sucesión converge en la distancia d si, y sólo si, converge en la distancia ρ .

Vamos a estudiar ahora el espacio producto \mathbb{R}^ω . Antes necesitamos un lema acerca de sucesiones en un espacio producto.

Lema 43.3. *Sea X el espacio producto $X = \prod X_\alpha$ y sea x_n una sucesión de puntos de X . Entonces $x_n \rightarrow x$ si, y sólo si, $\pi_\alpha(x_n) \rightarrow \pi_\alpha(x)$, para cada α .*

Demuestra. Este resultado fue enunciado como un ejercicio en §19, ahora ofrecemos una prueba. En primer lugar, como la proyección $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ es una aplicación continua, entonces conserva la convergencia de sucesiones y deducimos la condición necesaria del lema.

Para probar el recíproco, supongámos que $\pi_\alpha(x_n) \rightarrow \pi_\alpha(x)$, para cada $\alpha \in J$. Sea $U = \prod U_\alpha$ un elemento básico de X que contenga a x . Para cada α de forma que U_α no es igual a todo el espacio X_α , sea N_α un entero tal que $\pi_\alpha(x_n) \in U_\alpha$ para todo $n \geq N_\alpha$. Si N es el número más grande de todos los N_α , entonces $x_n \in U$, para todo $n \geq N$. ■

Teorema 43.4. Existe una distancia para el espacio producto \mathbb{R}^ω con la cual \mathbb{R}^ω es completo.

Demostración. Sea $\bar{d}(a, b) = \min\{|a - b|, 1\}$ la distancia acotada estándar sobre \mathbb{R} . Sea D la distancia sobre \mathbb{R}^ω definida por

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{\bar{d}(x_i, y_i)/i\}.$$

Entonces D induce la topología producto sobre \mathbb{R}^ω . Vamos a comprobar que \mathbb{R}^ω es completo con la distancia D . Sea \mathbf{x}_n una sucesión de Cauchy en (\mathbb{R}^ω, D) . Como

$$\bar{d}(\pi_i(\mathbf{x}), \pi_i(\mathbf{y})) \leq iD(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

observamos que, para i fijo, la sucesión $\pi_i(\mathbf{x}_n)$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} y, por tanto, converge a un número a_i . Entonces la sucesión \mathbf{x}_n converge al punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots)$ de \mathbb{R}^ω . ■

EJEMPLO 1. Un ejemplo de un espacio métrico que no es completo, es el espacio \mathbb{Q} de los números racionales con la distancia usual $d(x, y) = |x - y|$. Por ejemplo, la sucesión

$$1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \dots$$

de números con una cantidad finita de decimales, que converge (en \mathbb{R}) a $\sqrt{2}$, es una sucesión de Cauchy en \mathbb{Q} que no converge en \mathbb{Q} .

EJEMPLO 2. Otro espacio que no es completo es el intervalo abierto $(-1, 1)$ de \mathbb{R} con la distancia $d(x, y) = |x - y|$. En este espacio, la sucesión (x_n) definida por

$$x_n = 1 - 1/n$$

es una sucesión de Cauchy que no converge. Este ejemplo demuestra que la completitud no es una propiedad topológica, es decir, no se conserva por homeomorfismos, ya que el intervalo $(-1, 1)$ es homeomorfo a la recta real \mathbb{R} y este espacio es completo con su distancia usual.

Aunque ambos espacios producto \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^ω tengan distancias con las cuales son completos, no podemos esperar una demostración del mismo resultado para el espacio producto \mathbb{R}^J en general, ya que \mathbb{R}^J no es ni siquiera metrizable cuando J no es numerable (véase §21). Sin embargo, existe otra topología sobre el conjunto \mathbb{R}^J ,

aquella inducida por la distancia uniforme. Relativo a esta distancia, \mathbb{R}^J es completo, como veremos.

Definimos la distancia uniforme en general como sigue:

Definición. Sea (Y, d) un espacio métrico. Pongamos $\bar{d}(a, b) = \min\{d(a, b), 1\}$ para la distancia acotada estándar sobre Y correspondiente a d . Si $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$ e $\mathbf{y} = (y_\alpha)_{\alpha \in J}$ son puntos del producto cartesiano Y^J , definimos

$$\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) \mid \alpha \in J\}.$$

Es fácil comprobar que $\bar{\rho}$ es una distancia, denominada **distancia uniforme** sobre Y^J correspondiente a la distancia d sobre Y .

Hemos usado la notación estándar de “upla” para los elementos del producto cartesiano Y^J . Como los elementos de Y^J son simplemente aplicaciones de J en Y , podemos utilizar también la notación funcional para ellos. En este capítulo, la notación funcional será más conveniente que la notación de upla, por lo que la usaremos a lo largo del mismo. Con esta notación, la definición de la distancia uniforme adquiere la siguiente forma: para $f, g : J \rightarrow Y$, entonces

$$\bar{\rho}(f, g) = \sup\{\bar{d}(f(\alpha), g(\alpha)) \mid \alpha \in J\}.$$

Teorema 43.5. Si el espacio Y es completo con la distancia d , entonces el espacio Y^J es completo con la distancia uniforme $\bar{\rho}$ correspondiente a d .

Demuestra. Recordemos que si (Y, d) es completo, entonces (Y, \bar{d}) también lo es, donde \bar{d} es la distancia acotada correspondiente a d . Supongamos que f_1, f_2, \dots es una sucesión de puntos de Y^J que es una sucesión de Cauchy para la distancia $\bar{\rho}$. Dado α en J , el hecho de que

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f_m(\alpha)) \leq \bar{\rho}(f_n, f_m)$$

para todos n, m se traduce en que la sucesión $f_1(\alpha), f_2(\alpha), \dots$ es una sucesión de Cauchy en (Y, \bar{d}) . Por tanto, la sucesión converge a un punto y_α . Sea $f : J \rightarrow Y$ la aplicación definida por $f(\alpha) = y_\alpha$. Afirmamos que la sucesión (f_n) converge a f en la distancia $\bar{\rho}$.

Dado $\epsilon > 0$, elegimos N lo suficientemente grande para que $\bar{\rho}(f_n, f_m) < \epsilon/2$, para todos $n, m \geq N$. Entonces, en particular,

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f_m(\alpha)) < \epsilon/2$$

para $n, m \geq N$ y $\alpha \in J$. Manteniendo n y α fijos y haciendo tender m a infinito, obtenemos que

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f(\alpha)) \leq \epsilon/2.$$

Esta desigualdad es cierta para todo α , siempre que $n \geq N$. Por consiguiente,

$$\bar{\rho}(f_n, f) \leq \epsilon/2 < \epsilon$$

para $n \geq N$, como deseábamos probar. ■

Vamos a centrarnos ahora en un caso peculiar considerando el conjunto Y^X , donde X es un *espacio topológico* más que un conjunto. Desde luego, esto no tiene influencia en lo que hemos estudiado antes; la topología de X es irrelevante cuando consideramos el conjunto de *todas* las aplicaciones $f : X \rightarrow Y$. Pero supongamos que consideramos el subconjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ de Y^X consistente en todas las aplicaciones *continuas* $f : X \rightarrow Y$. Resulta entonces que si Y es completo, este subconjunto es también completo con la distancia uniforme. Lo mismo ocurre para el conjunto $\mathcal{B}(X, Y)$ de todas las aplicaciones $f : X \rightarrow Y$ acotadas (una aplicación f se dice que es *acotada* si su imagen $f(X)$ es un subconjunto acotado del espacio métrico (Y, d)).

Teorema 43.6. *Sea X un espacio topológico y sea (Y, d) un espacio métrico. El conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ de las aplicaciones continuas es cerrado en Y^X con la distancia uniforme. También lo es el conjunto $\mathcal{B}(X, Y)$ de las aplicaciones acotadas. Por tanto, si Y es completo entonces estos dos espacios son completos con la distancia uniforme.*

Demostración. La primera parte de este teorema es justo el teorema del límite uniforme (Teorema 21.6) en otro formato. Veamos primero que si una sucesión de elementos f_n de Y^X converge al elemento f de Y^X en la distancia $\bar{\rho}$ de Y^X , entonces la sucesión converge uniformemente a f , en el sentido definido en §21, para la distancia \bar{d} sobre Y . Dado $\epsilon > 0$, elijamos un entero N tal que

$$\bar{\rho}(f, f_n) < \epsilon$$

para todo $n > N$. Entonces, para todo $x \in X$ y todo $n \geq N$,

$$\bar{d}(f_n(x), f(x)) \leq \bar{\rho}(f_n, f) < \epsilon.$$

Y, por tanto, (f_n) converge uniformemente a f .

Probemos ahora que $\mathcal{C}(X, Y)$ es cerrado en Y^X con la distancia $\bar{\rho}$. Sea f un elemento de Y^X que es un punto límite de $\mathcal{C}(X, Y)$. Existe entonces una sucesión (f_n) de elementos de $\mathcal{C}(X, Y)$ convergente a f en la distancia $\bar{\rho}$. Por el teorema del límite uniforme, f es continua, de forma que $f \in \mathcal{C}(X, Y)$.

Finalmente, probemos que $\mathcal{B}(X, Y)$ es cerrado en Y^X . Si f es un punto límite de $\mathcal{B}(X, Y)$, existe una sucesión de elementos f_n de $\mathcal{B}(X, Y)$ convergente a f . Elijamos N lo suficientemente grande para que $\bar{\rho}(f_N, f) < 1/2$. Entonces, para $x \in X$,

tenemos que $\bar{d}(f_N(x), f(x)) < 1/2$, lo cual implica que $d(f_N(x), f(x)) < 1/2$. Deducimos que, si M es el diámetro del conjunto $f_N(X)$, entonces $f(X)$ tiene diámetro menor o igual que $M + 1$. Por tanto, $f \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Concluimos que $\mathcal{C}(X, Y)$ y $\mathcal{B}(X, Y)$ son completos con la distancia $\bar{\rho}$ si Y es completo con la distancia d . ■

Definición. Si (Y, d) es un espacio métrico, podemos definir otra distancia en el conjunto $\mathcal{B}(X, Y)$ de las aplicaciones acotadas de X en Y por la ecuación

$$\rho(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

Es fácil observar que ρ está bien definida porque el conjunto $f(X) \cup g(X)$ está acotado si $f(X)$ y $g(X)$ lo están. La distancia ρ se conoce como **distancia del supremo**.

Hay una relación sencilla entre la distancia del supremo y la distancia uniforme. Efectivamente, si $f, g \in \mathcal{B}(X, Y)$ entonces

$$\bar{\rho}(f, g) = \min\{\rho(f, g), 1\}$$

ya que si $\rho(f, g) > 1$ entonces $d(f(x_0), g(x_0)) > 1$ para algún $x_0 \in X$, de manera que $\bar{d}(f(x_0), g(x_0)) = 1$ y $\bar{\rho}(f, g) = 1$, por definición. Por otro lado, si $\rho(f, g) \leq 1$ entonces $\bar{d}(f(x), g(x)) = d(f(x), g(x)) \leq 1$ para todo x , y así $\bar{\rho}(f, g) = \rho(f, g)$. Observemos que sobre $\mathcal{B}(X, Y)$, la distancia $\bar{\rho}$ es justamente la distancia acotada estándar derivada de la distancia ρ . Esta es la razón por la que hemos introducido la notación $\bar{\rho}$ para la distancia uniforme, volviendo a §20.

Si X es un espacio compacto, entonces toda aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ está acotada; por tanto, la distancia del supremo está definida en $\mathcal{C}(X, Y)$. Si Y es completo con la distancia d , entonces $\mathcal{C}(X, Y)$ es completo con la correspondiente distancia uniforme $\bar{\rho}$ y, por consiguiente, es también completo con la distancia de supremo ρ . Frecuentemente utilizamos la distancia del supremo más que la distancia uniforme en esta situación.

Vamos a probar ahora un teorema clásico, el cual afirma que todo espacio métrico se puede embeber isométricamente en un espacio métrico completo (una demostración diferente, de alguna manera más directa, está esbozada en el Ejercicio 9). Aunque no necesitaremos este teorema, es muy útil en otras partes de las matemáticas.

***Teorema 43.7.** Sea (X, d) un espacio métrico. Existe un embebimiento isométrico de X en un espacio métrico completo.

Demostración. Sea $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones acotadas de X en \mathbb{R} . Sea x_0 un punto fijo de X . Dado $a \in X$, definamos $\phi_a : X \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la ecuación

$$\phi_a(x) = d(x, a) - d(x, x_0).$$

Aseguramos que ϕ_a está acotada. Efectivamente, de las desigualdades

$$d(x, a) \leq d(x, b) + d(a, b),$$

$$d(x, b) \leq d(x, a) + d(a, b),$$

se deduce que

$$|d(x, a) - d(x, b)| \leq d(a, b).$$

Poniendo $b = x_0$, concluimos que $|\phi_a(x)| \leq d(a, x_0)$, para todo x .

Definamos $\Phi : X \rightarrow \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ por

$$\Phi(a) = \phi_a.$$

Vamos a probar que Φ es un embebimiento isométrico de (X, d) en el espacio métrico completo $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \rho)$. Es decir, vamos a probar que, para todo par de puntos $a, b \in X$,

$$\rho(\phi_a, \phi_b) = d(a, b).$$

Por definición,

$$\begin{aligned} \rho(\phi_a, \phi_b) &= \sup\{|\phi_a(x) - \phi_b(x)| : x \in X\} \\ &= \sup\{|d(x, a) - d(x, b)| : x \in X\}. \end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que

$$\rho(\phi_a, \phi_b) \leq d(a, b).$$

Por otro lado, esta desigualdad no puede ser estricta, ya que si $x = a$ entonces

$$|d(x, a) - d(x, b)| = d(a, b). \blacksquare$$

Definición. Sea X un espacio métrico. Si $h : X \rightarrow Y$ es un embebimiento isométrico de X en un espacio métrico completo Y , entonces el subespacio $\overline{h(X)}$ de Y es un espacio métrico completo. Se conoce como **completación** de X .

La completación de X está únicamente determinada salvo isometrías (véase el Ejercicio 10).

Ejercicios

1. Sea X un espacio métrico.

- (a) Suponga que, para algún $\epsilon > 0$, toda ϵ -bola en X tiene clausura compacta. Pruebe que X es completo.

- (b) Suponga que, para cada $x \in X$, existe un $\epsilon > 0$ tal que la bola $B(x, \epsilon)$ tiene clausura compacta. Muestre mediante un ejemplo que X no es completo necesariamente.
2. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos, con Y completo. Sea $A \subset Y$. Demuestre que si $f : A \rightarrow Y$ es uniformemente continua, entonces f puede ser extendida únicamente a una aplicación uniformemente continua $\bar{f} : \bar{A} \rightarrow Y$.
3. Dos distancias d y d' sobre un conjunto X se dice que son **métricamente equivalentes** si la aplicación identidad $i : (X, d) \rightarrow (X, d')$ y su inversa son uniformemente continuas.
- Demuestre que d es métricamente equivalente a la distancia acotada estándar \bar{d} asociada a d .
 - Demuestre que si d y d' son métricamente equivalentes, entonces X es completo con la distancia d si, y sólo si, es completo con la distancia d' .
4. Demuestre que el espacio métrico (X, d) es completo si, y sólo si, para toda sucesión encajada $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ de subconjuntos cerrados no vacíos de X tales que $\text{diá}\text{m } A_n \rightarrow 0$, la intersección de los conjuntos A_n no es vacía.
5. Si (X, d) es un espacio métrico, recuerde que una aplicación $f : X \rightarrow X$ se dice que es una **contracción** si existe un número $\alpha < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y),$$

para todos $x, y \in X$. Demuestre que si f es una contracción de un espacio métrico completo, entonces existe un único punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Compare con el Ejercicio 7 de §28.

6. Un espacio X se dice que es **topológicamente completo** si existe una distancia para la topología de X para la cual X es completo.
- Demuestre que un subespacio cerrado de un espacio topológicamente completo es topológicamente completo.
 - Pruebe que un producto numerable de espacios topológicamente completos es topológicamente completo (con la topología producto).
 - Demuestre que un subespacio abierto de un espacio topológicamente completo es topológicamente completo. [Indicación: si $U \subset X$ y X es completo con la distancia d , defina $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ por la ecuación

$$\phi(x) = 1/d(x, X - U).$$

Embeba U en $X \times \mathbb{R}$ poniendo $f(x) = x \times \phi(x)$.]

- Pruebe que si A es un conjunto G_δ en un espacio topológicamente completo, entonces A es topológicamente completo. [Indicación: sea A la intersección de los conjuntos abiertos U_n , para $n \in \mathbb{Z}_+$. Considera el embebimiento diagonal $f(a) = (a, a, \dots)$ de A en $\prod U_n$.] Concluya que el espacio de los números irracionales es topológicamente completo.

7. Demuestre que el conjunto de todas las sucesiones (x_1, x_2, \dots) tales que $\sum x_i$ converge, es completo con la distancia ℓ^2 (véase el Ejercicio 8 de §20).
8. Si X e Y son espacios topológicos, defina

$$e : X \times C(X, Y) \rightarrow Y$$

por la ecuación $e(x, f) = f(x)$; la aplicación e se denomina **aplicación evaluación**. Demuestre que si d es una distancia para Y y $C(X, Y)$ tiene la topología uniforme correspondiente, entonces e es continua. Generalizaremos este resultado en §46.

9. Sea (X, d) un espacio métrico. Pruebe que existe un embebimiento isométrico h de X en un espacio métrico completo (Y, D) , como sigue: denote por \tilde{X} el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$$

de puntos de X . Defina $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ si

$$d(x_n, y_n) \rightarrow 0.$$

Denote por $[\mathbf{x}]$ la clase de equivalencia de \mathbf{x} , y denote por Y el conjunto de estas clases de equivalencia. Defina una distancia D en Y por la ecuación

$$D([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

- (a) Pruebe que \sim es una relación de equivalencia, y demuestre que D es una distancia bien definida.
- (b) Defina $h : X \rightarrow Y$ poniendo $h(x)$ igual a la clase de equivalencia asociada a la sucesión constante (x, x, \dots) :

$$h(x) = [(x, x, \dots)].$$

Demuestre que h es un embebimiento isométrico.

- (c) Pruebe que $h(X)$ es denso en Y ; efectivamente, dado $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \tilde{X}$, pruebe que la sucesión $h(x_n)$ de puntos de Y converge al punto $[\mathbf{x}]$ de Y .
- (d) Demuestre que si A es un subconjunto denso de un espacio métrico (Z, ρ) , y si toda sucesión de Cauchy en A converge en Z , entonces Z es completo.
- (e) Pruebe que (Y, D) es completo.

10. Teorema (Unicidad de la completación). Sean $h : X \rightarrow Y$ y $h' : X \rightarrow Y'$ dos embebimientos isométricos de un espacio métrico (X, d) en los espacios métricos completos (Y, D) e (Y', D') , respectivamente. Entonces existe una isometría de $(h(X), D)$ en $(h'(X), D')$ que coincide con $h'h^{-1}$ sobre el subespacio $h(X)$.

*§44 Una curva que llena el espacio

Como una aplicación de la completitud del espacio métrico $\mathcal{C}(X, Y)$ con la distancia uniforme cuando Y es completo, vamos a construir la famosa “curva de Peano que llena el espacio”.

Teorema 44.1. Sea $I = [0, 1]$. Existe una aplicación continua $f : I \rightarrow I^2$ cuya imagen llena todo el cuadrado I^2 .

La existencia de este camino choca con nuestra inocente intuición geométrica de la misma forma que la existencia de una función continua y no derivable en ningún punto (la cual nos encontraremos más adelante).

Demostración. *Paso 1.* Vamos a construir la aplicación f como el límite de una sucesión de aplicaciones continuas f_n . Describiremos primero una operación particular sobre caminos, la cual será utilizada para generar la sucesión f_n .

Comenzamos con un intervalo cerrado arbitrario $[a, b]$ de la recta real y un cuadrado arbitrario en el plano con lados paralelos a los ejes coordenados, y consideremos el camino triangular g dibujado en la Figura 44.1, el cual es una aplicación continua de $[a, b]$ en el cuadrado. La operación que deseamos describir reemplaza el camino g por el camino g' dibujado en la Figura 44.2. Está hecho con cuatro caminos triangulares, cada uno de la mitad del tamaño de g . Observemos que g y g' tienen el mismo punto inicial y el mismo punto final. El lector puede escribir las ecuaciones para g y g' si lo desea.

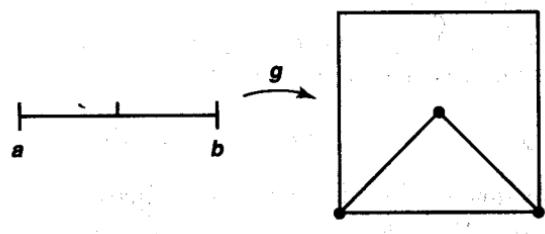


Figura 44.1

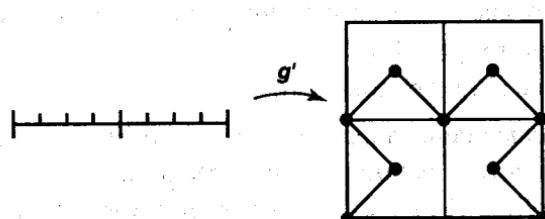


Figura 44.2

La misma operación también puede aplicarse a cualquier camino triangular conectando dos esquinas adyacentes del cuadrado. Por ejemplo, cuando aplicamos esta operación al camino h , dibujado en la Figura 44.3, obtenemos el camino h' .

Paso 2. Vamos a definir ahora una sucesión de aplicaciones $f_n : I \rightarrow I^2$. La primera aplicación, la cual denotaremos por f_0 por conveniencia, es el camino triangular dibujado en la Figura 44.1, haciendo $a = 0$ y $b = 1$. La siguiente aplicación f_1 es la aplicación obtenida al realizar la operación descrita en el Paso 1 sobre la aplicación f_0 , dibujada en la Figura 44.2. La siguiente aplicación f_2 es la que se obtiene mediante la misma operación sobre cada uno de los cuatro caminos triangulares que constituyen el camino f_1 . Está dibujado en la Figura 44.4. La siguiente aplicación f_3 se obtiene aplicando el mismo proceso a cada uno de los 16 caminos triangulares que constituyen el camino f_2 que está dibujado en la Figura 44.5, y así sucesivamente. En general, f_n es un camino formado por 4^n caminos triangulares del tipo considerado en el Paso 1, cada uno de ellos permaneciendo en un cuadrado de lado $1/2^n$. La aplicación f_{n+1} se obtiene aplicando la operación del Paso 1 a estos caminos triangulares, reemplazando cada uno de ellos por cuatro caminos triangulares más pequeños.

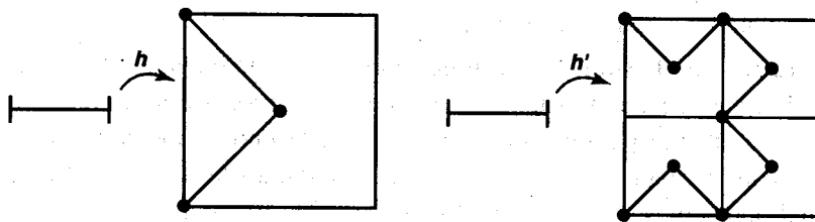


Figura 44.3

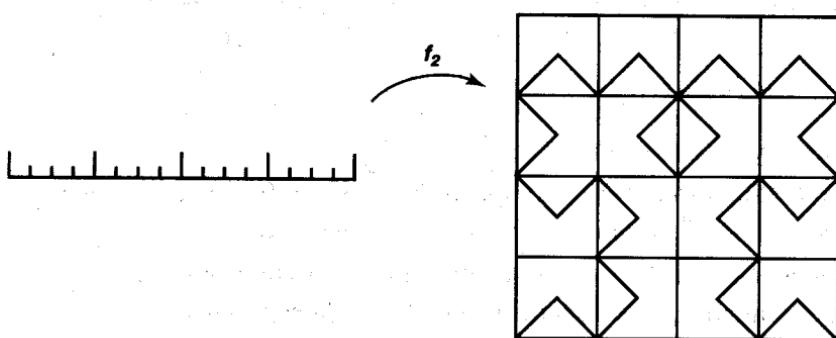


Figura 44.4

Paso 3. Para los propósitos de esta demostración, denotemos por $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ la distancia del supremo sobre \mathbb{R}^2 ,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

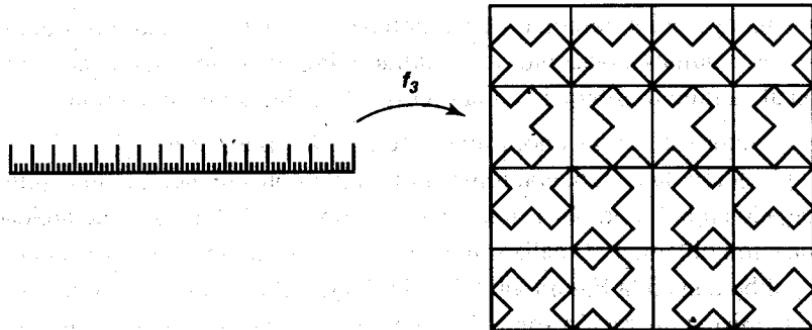


Figura 44.5

Entonces podemos denotar por ρ la correspondiente distancia del supremo sobre $C(I, I^2)$:

$$\rho(f, g) = \sup\{d(f(t), g(t)) \mid t \in I\}.$$

Como I^2 es cerrado en \mathbb{R}^2 , es completo con la distancia del supremo; entonces $C(I, I^2)$ es completo con la distancia ρ .

Aseguramos que la sucesión de aplicaciones (f_n) , definida en el Paso 2, es una sucesión de Cauchy para la distancia ρ . Con el fin de probar este hecho, estudiemos lo que sucede cuando pasamos de f_n a f_{n+1} . Cada uno de los pequeños caminos triangulares que forman f_n está contenido en un cuadrado de lado $1/2^n$. La operación con la cual obtenemos f_{n+1} , reemplaza cada camino triangular por cuatro caminos triangulares que están contenidos en el mismo cuadrado. Por tanto, con la distancia del supremo sobre I^2 , la distancia entre $f_n(t)$ y $f_{n+1}(t)$ es a lo más $1/2^n$. De manera que $\rho(f_n, f_{n+1}) \leq 1/2^n$. Se deduce entonces que (f_n) es una sucesión de Cauchy, ya que

$$\rho(f_n, f_{n+m}) \leq 1/2^n + 1/2^{n+1} + \cdots + 1/2^{n+m-1} < 2/2^n$$

para todos n y m .

Paso 4. Como $C(I, I^2)$ es completo, la sucesión f_n converge a una aplicación continua $f : I \rightarrow I^2$. Vamos a probar que f es sobreyectiva.

Sea x un punto de I^2 y veamos que x pertenece a $f(I)$. Observemos primero que, dado n , el camino f_n se encuentra a una distancia menor o igual que $1/2^n$ del punto x , ya que el camino f_n toca cada uno de los pequeños cuadrados de lado $1/2^n$ en los cuales hemos dividido I^2 .

Utilizando este hecho, vamos a probar que, dado $\epsilon > 0$, el ϵ -entorno de x interseca $f(I)$. Elijamos N suficientemente grande para que

$$\rho(f_N, f) < \epsilon/2 \quad \text{y} \quad 1/2^N < \epsilon/2.$$

Por el resultado del párrafo anterior, existe un punto $t_0 \in I$ tal que $d(\mathbf{x}, f_N(t_0)) \leq 1/2^N$. Entonces, como $d(f_N(t), f(t)) < \epsilon/2$ para todo t , deducimos que

$$d(\mathbf{x}, f(t_0)) < \epsilon,$$

y así, el ϵ -entorno de \mathbf{x} interseca $f(I)$.

Se sigue que \mathbf{x} pertenece a la clausura de $f(I)$. Pero I es compacto, luego $f(I)$ es compacto y, por tanto, cerrado. De manera que \mathbf{x} pertenece a $f(I)$, como deseábamos probar. ■

Ejercicios

- Dado n , pruebe que existe una aplicación $g : I \rightarrow I^n$ continua y sobreyectiva. [Indicación: considere $f \times f : I \times I \rightarrow I^2 \times I^2$.]
- Demuestre que existe una aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y sobreyectiva.
- (a) Si \mathbb{R}^ω tiene la topología producto, demuestre que no existe una aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\omega$ continua y sobreyectiva. [Indicación: pruebe que \mathbb{R}^ω no es una unión numerable de subespacios compactos.]
 (b) Si \mathbb{R}^ω tiene la topología producto, determine si existe o no una aplicación continua y sobreyectiva de \mathbb{R} en el subespacio \mathbb{R}^∞ .
 (c) ¿Qué sucede si, en los apartados (a) y (b), consideramos sobre \mathbb{R}^ω la topología uniforme o la topología por cajas?
- (a) Sea X un espacio de Hausdorff. Demuestre que si existe una aplicación $f : I \rightarrow X$ continua y sobreyectiva, entonces X es compacto, conexo, débilmente localmente compacto y metrizable. [Indicación: pruebe que f es una aplicación perfecta.]
 (b) El recíproco del resultado de (a) es un famoso teorema de topología conjuntista conocido por el *teorema de Hahn-Mazurkiewicz* (véase [H-Y], pág. 129). Suponiendo este teorema, demuestre que existe una aplicación $f : I \rightarrow I^\omega$ continua y sobreyectiva.

Un espacio de Hausdorff que es la imagen continua de un intervalo unidad cerrado es frecuentemente denominado *espacio de Peano*.

§45 Compacidad en espacios métricos

Ya hemos demostrado que la compacidad, la compacidad por punto límite y la compacidad sucesional son equivalentes para espacios métricos. Hay otra formulación para la compacidad en espacios métricos que involucra la noción de completitud que

estudiaremos en esta sección. Como una aplicación, probamos un teorema que caracteriza aquellos subespacios de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ que son compactos para la topología uniforme.

¿Cómo está relacionada la compactitud de un espacio métrico X con la compleitud de X ? Del Lema 43.1 se deduce que todo espacio métrico compacto es completo. El recíproco no es cierto —un espacio métrico completo no es necesariamente compacto—. Es razonable preguntarse qué condición extra necesitamos imponer a un espacio completo para asegurarnos que sea compacto. Dicha condición se conoce por el nombre de *acotación total*.

Definición. Un espacio métrico (X, d) se dice que está **totalmente acotado** si, para todo $\epsilon > 0$, existe un cubrimiento finito de X formado por ϵ -bolas.

EJEMPLO 1. La acotación total implica claramente acotación, pues si $B(x_1, 1/2), \dots, B(x_n, 1/2)$ es un cubrimiento finito de X por bolas abiertas de radio $1/2$, entonces X tiene diámetro menor o igual que $1 + \max\{d(x_i, x_j)\}$. Sin embargo, el recíproco no es cierto. Por ejemplo, con la distancia $\bar{d}(a, b) = \min\{1, |a - b|\}$, la recta real \mathbb{R} está acotada pero no está totalmente acotada.

EJEMPLO 2. Con la distancia $d(a, b) = |a - b|$, la recta real \mathbb{R} es completa pero no está totalmente acotada, mientras el subespacio $(-1, 1)$ está totalmente acotado pero no es completo. El subespacio $[-1, 1]$ es completo y está totalmente acotado, a la vez.

Teorema 45.1. Un espacio métrico (X, d) es compacto si, y sólo si, es completo y está totalmente acotado.

Demostración. Si X es un espacio métrico compacto, entonces X es completo, como se ha dicho antes. El hecho de que X esté totalmente acotado es una consecuencia del hecho de que todo cubrimiento de X por ϵ -bolas abiertas debe contener un subcubrimiento finito.

Recíprocamente, sea X completo y totalmente acotado. Vamos a probar que X es sucesionalmente compacto, lo cual será suficiente.

Sea (x_n) una sucesión de puntos de X . Vamos a construir una subsucesión de (x_n) que sea una sucesión de Cauchy, de manera que necesariamente converja. En primer lugar, recubramos X con una cantidad finita de bolas de radio 1. Al menos una de estas bolas, pongamos B_1 , contiene x_n para un número infinito de valores de n . Sea J_1 el subconjunto de \mathbb{Z}_+ consistente en todos los índices n para los que $x_n \in B_1$.

En el paso siguiente, recubramos X con una cantidad finita de bolas de radio $1/2$. Como J_1 es infinito, al menos una de estas bolas, pongamos B_2 , debe contener x_n para una cantidad infinita de valores de n en J_1 . Denotemos por J_2 el conjunto formado por los índices n para los que $n \in J_1$ y $x_n \in B_2$. En general, dado un

conjunto infinito J_k de enteros positivos, denotemos por J_{k+1} el subconjunto infinito de J_k tal que existe una bola B_{k+1} de radio $1/(k+1)$ que contiene x_n , para todo $n \in J_{k+1}$.

Escojamos $n_1 \in J_1$. Dado n_k , escojamos $n_{k+1} \in J_{k+1}$ tal que $n_{k+1} > n_k$, lo cual puede hacerse porque J_{k+1} es un conjunto infinito. Ahora bien, para $i, j \geq k$, los índices n_i y n_j pertenecen a J_k (ya que $J_1 \supset J_2 \supset \dots$ es una sucesión encajada de conjuntos). Por lo tanto, para todos $i, j \geq k$, los puntos x_{n_i} y x_{n_j} están contenidos en la bola B_k de radio $1/k$. Se sigue que la subsucesión (x_{n_i}) es una sucesión de Cauchy, como deseábamos. ■

Vamos a aplicar ahora este resultado para encontrar subespacios compactos del espacio $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$, con la topología uniforme. Sabemos que un subespacio de \mathbb{R}^n es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado. Podemos esperar que se dé un resultado análogo para $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$. Pero no es así, aunque X sea compacto. Necesitamos suponer que el subespacio de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ satisface una condición adicional, denominada *equicontinuidad*. Ahora consideraremos esta noción.

Definición. Sea (Y, d) un espacio métrico. Sea \mathcal{F} un subconjunto del espacio de funciones $\mathcal{C}(X, Y)$. Si $x_0 \in X$, el conjunto \mathcal{F} de aplicaciones se dice que es *equicontinuo en x_0* si, dado $\epsilon > 0$, existe un entorno U de x_0 tal que, para todo $x \in U$ y toda $f \in \mathcal{F}$,

$$d(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Si el conjunto \mathcal{F} es equicontinuo en x_0 , para todo $x_0 \in X$, se dice simplemente que es *equicontinuo*.

La continuidad de la aplicación f en x_0 significa que, dada f y dado $\epsilon > 0$, existe un entorno U de x_0 tal que $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, para todo $x \in U$. La equicontinuidad de \mathcal{F} significa que existe un entorno U válido simultáneamente para todas las aplicaciones f de la colección \mathcal{F} .

Observemos que la equicontinuidad depende no tanto de la topología sobre Y si no de la distancia concreta d .

Lema 45.2. Sean X un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico. Si el subconjunto \mathcal{F} de $\mathcal{C}(X, Y)$ está totalmente acotado para la distancia uniforme correspondiente a d , entonces \mathcal{F} es equicontinuo respecto a d .

Demostración. Supongamos que \mathcal{F} está totalmente acotado. Dado $0 < \epsilon < 1$ y dado x_0 , encontramos un entorno U de x_0 tal que $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, para todo $x \in U$ y $f \in \mathcal{F}$.

Pongamos $\delta = \epsilon/3$ y recubramos \mathcal{F} con un cantidad finita de δ -bolas abiertas

$$B(f_1, \delta), \dots, B(f_n, \delta)$$

en $\mathcal{C}(X, Y)$. Cada aplicación f_i es continua; por tanto, podemos escoger un entorno U de x_0 tal que, para $i = 1, \dots, n$,

$$d(f_i(x), f_i(x_0)) < \delta$$

siempre que $x \in U$.

Sea f un elemento arbitrario de \mathcal{F} . Entonces f pertenece al menos a una de las δ -bolas anteriores, pongamos que es $B(f_i, \delta)$. De manera que, para $x \in U$, tenemos

$$\begin{aligned}\bar{d}(f(x), f_i(x)) &< \delta, \\ d(f_i(x), f_i(x_0)) &< \delta, \\ \bar{d}(f_i(x_0), f(x_0)) &< \delta.\end{aligned}$$

La primera y la tercera desigualdad se deben a que $\bar{\rho}(f, f_i) < \delta$, y la segunda se tiene porque $x \in U$. Dado que $\delta < 1$, la primera y la tercera también se verifican si \bar{d} se reemplaza por d . Entonces, la desigualdad triangular implica que $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, para todo $x \in U$, como deseábamos probar. ■

Probamos ahora la versión clásica del teorema de Ascoli, el cual tiene que ver con los subespacios compactos del espacio de funciones $\mathcal{C}(X, Y)$. En §47 damos una versión más general, cuya prueba no depende de ésta. Sin embargo, la versión general depende del teorema de Tychonoff, mientras que ésta no.

Comenzamos probando un recíproco parcial del lema anterior, que se verifica cuando X e Y son compactos.

***Lema 45.3.** *Sea X un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico, y supongamos que X e Y son compactos. Si el subconjunto \mathcal{F} de $\mathcal{C}(X, Y)$ es equicontinuo respecto a d , entonces \mathcal{F} está totalmente acotado respecto de las distancias uniforme y del supremo correspondientes a d .*

Demostración. Como X es compacto, la distancia del supremo ρ está definida sobre $\mathcal{C}(X, Y)$. La acotación total respecto a ρ es equivalente a la acotación total respecto a $\bar{\rho}$, ya que para $\epsilon < 1$, toda ϵ -bola para ρ es también una ϵ -bola para $\bar{\rho}$, y recíprocamente. Por consiguiente, podemos utilizar igualmente la distancia ρ a lo largo de la demostración.

Supongamos que \mathcal{F} es equicontinuo. Dado $\epsilon > 0$, recubramos \mathcal{F} por una cantidad finita de conjuntos que sean ϵ -bolas abiertas para la distancia ρ .

Pongamos $\delta = \epsilon/3$. Dado cualquier $a \in X$, existe un entorno U_a de a tal que $d(f(x), f(a)) < \delta$, para todo $x \in U_a$ y toda $f \in \mathcal{F}$. Recubramos X con un cantidad finita de tales entornos U_a , para $a = a_1, \dots, a_k$; denotemos U_{a_i} por U_i . Recubramos también Y con una cantidad finita de conjuntos abiertos V_1, \dots, V_m de diámetro menor que δ .

Sea J la colección de todas las aplicaciones $\alpha : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$. Dado $\alpha \in J$, si existe una aplicación f de \mathcal{F} tal que $f(a_i) \in V_{\alpha(i)}$, para cada $i = 1, \dots, k$, elijámosla y denotémosla por f_α . La colección $\{f_\alpha\}$ está indexada por un subconjunto J' del conjunto J y, por tanto, es finita. Aseguramos que las bolas abiertas $B_\rho(f_\alpha, \epsilon)$, para $\alpha \in J'$, recubren \mathcal{F} .

Sea f un elemento de \mathcal{F} . Para cada $i = 1, \dots, k$, escogamos un entero $\alpha(i)$ tal que $f(a_i) \in V_{\alpha(i)}$. Entonces la aplicación α está en J' . Afirmamos que f pertenece a la bola $B_\rho(f_\alpha, \epsilon)$.

Sea x un punto de X y elijamos i tal que $x \in U_i$. Entonces

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a_i)) &< \delta, \\ d(f(a_i), f_\alpha(a_i)) &< \delta, \\ d(f_\alpha(a_i), f_\alpha(x)) &< \delta. \end{aligned}$$

La primera y la tercera desigualdad se verifican porque $x \in U_i$, y la segunda desigualdad es cierta porque $f(a_i)$ y $f_\alpha(a_i)$ están en $V_{\alpha(i)}$. Por lo tanto $d(f(x), f_\alpha(x)) < \epsilon$. Como esta desigualdad es cierta para todo $x \in X$,

$$\rho(f, f_\alpha) = \max\{d(f(x), f_\alpha(x))\} < \epsilon.$$

Por lo tanto, f pertenece a $B_\rho(f_\alpha, \epsilon)$, como deseábamos probar. ■

Definición. Si (Y, d) es un espacio métrico, un subconjunto \mathcal{F} de $\mathcal{C}(X, Y)$ se dice que está **puntualmente acotado** respecto a d si, para cada $a \in X$, el subconjunto

$$\mathcal{F}_a = \{f(a) \mid f \in \mathcal{F}\}$$

de Y , está acotado en la distancia d .

***Teorema 45.4 (Teorema de Ascoli, versión clásica).** Sea X un espacio compacto; denotemos por (\mathbb{R}^n, d) el espacio euclídeo con la distancia euclídea o la distancia del supremo; dotemos a $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ con la correspondiente distancia uniforme. Un subespacio \mathcal{F} de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ tiene clausura compacta si, y sólo si, \mathcal{F} es equicontinuo y está puntualmente acotado respecto a d .

Demostración. Dado que X es compacto, la distancia del supremo ρ está definida sobre $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ y proporciona la topología uniforme sobre $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$. A lo largo de la prueba, denotemos por \mathcal{G} la clausura de \mathcal{F} en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$.

Paso 1. Vamos a demostrar que si \mathcal{G} es compacto, entonces \mathcal{G} es equicontinuo y puntualmente acotado respecto a d . Entonces, como $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, deducimos que \mathcal{F} es también equicontinuo y puntualmente acotado respecto a d , con lo cual la condición necesaria del teorema estaría probada.

La compacidad de \mathcal{G} implica que \mathcal{G} está totalmente acotado respecto a ρ y $\bar{\rho}$, por el Teorema 45.1; a su vez, esto implica que \mathcal{G} es equicontinuo respecto a d , por el Lema 45.2. La compacidad de \mathcal{G} también implica que \mathcal{G} está acotado respecto a ρ , y a su vez, esto implica que \mathcal{G} está puntualmente acotado respecto a d , porque si $\rho(f, g) \leq M$, para todas $f, g \in \mathcal{G}$, entonces en particular $d(f(a), g(a)) \leq M$ para $f, g \in \mathcal{G}$, de manera que \mathcal{G}_a tiene diámetro no mayor que M .

Paso 2. Vamos a probar que si \mathcal{F} es equicontinuo y puntualmente acotado respecto a d , entonces también lo es \mathcal{G} .

En primer lugar, comprobamos la equicontinuidad. Dado $x_0 \in X$ y dado $\epsilon > 0$, escogamos un entorno U de x_0 tal que $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon/3$, para todo $x \in U$ y toda $f \in \mathcal{F}$. Dada $g \in \mathcal{G}$, elijamos $f \in \mathcal{F}$ tal que $\rho(f, g) < \epsilon/3$. La desigualdad triangular implica que $d(g(x), g(x_0)) < \epsilon$, para todo $x \in U$. Como g es arbitraria, se deduce que \mathcal{G} es equicontinuo en x_0 .

En segundo lugar, comprobamos la acotación puntual. Dado a , escogamos M de manera que $\text{diá}\mathcal{F}_a \leq M$. Entonces, dadas $g, g' \in \mathcal{G}$, existen $f, f' \in \mathcal{F}$ tales que $\rho(f, g) < 1$ y $\rho(f', g') < 1$. Como $d(f(a), f'(a)) \leq M$, deducimos que $d(g(a), g'(a)) \leq M + 2$. Finalmente obtenemos que $\text{diá}\mathcal{G}_a \leq M + 2$, debido a que g y g' son arbitrarias.

Paso 3. Vamos a probar que si \mathcal{G} es equicontinuo y puntualmente acotado, entonces existe un subespacio compacto Y de \mathbb{R}^n que contiene a la unión de los conjuntos $g(X)$, para $g \in \mathcal{G}$.

Elijamos, para cada $a \in X$, un entorno U_a de a tal que $d(g(x), g(a)) < 1$, para $x \in U_a$ y $g \in \mathcal{G}$. Dado que X es compacto, podemos recubrir X por una cantidad finita de dichos entornos, pongamos para $a = a_1, \dots, a_k$. Como los conjuntos \mathcal{G}_{a_i} están acotados, su unión también está acotada; supongamos que está contenida en la bola de radio N de \mathbb{R}^n centrada en el origen. Entonces, para toda $g \in \mathcal{G}$, el conjunto $g(X)$ está contenido en la bola de radio $N+1$ centrada en el origen. Sea Y la clausura de esta bola.

Paso 4. Probamos ahora la condición suficiente del teorema. Supongamos que \mathcal{F} es equicontinuo y puntualmente acotado respecto a d . Vamos a ver que \mathcal{G} es completo y totalmente acotado respecto a ρ ; entonces, por el Teorema 45.1, se tiene que \mathcal{G} es compacto.

La completitud es fácil, ya que \mathcal{G} es un subespacio cerrado del espacio métrico completo $(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n), \rho)$.

Vamos a comprobar la acotación total. En primer lugar, el Paso 2 implica que \mathcal{G} es equicontinuo y puntualmente acotado respecto a d ; entonces el Paso 3 nos dice que existe un subespacio compacto Y de \mathbb{R}^n tal que $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}(X, Y)$. La equicontinuidad de \mathcal{G} implica ahora, por el Lema 45.3, que \mathcal{G} está totalmente acotado respecto a d , como deseábamos probar. ■

***Corolario 45.5.** *Sea X un espacio compacto; denotemos por d la distancia euclídea o la distancia del supremo sobre \mathbb{R}^n ; dotemos a $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ con la correspondiente topología uniforme. Un subespacio \mathcal{F} de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado respecto a la distancia del supremo ρ , y equicontinuo respecto a d .*

Demostración. Si \mathcal{F} es compacto, entonces debe ser cerrado y acotado; el teorema anterior implica que es también equicontinuo. Recíprocamente, si \mathcal{F} es cerrado, entonces es igual a su clausura \mathcal{G} ; si está acotado respecto a ρ , está puntualmente acotado respecto a d ; y si es también equicontinuo, el teorema anterior implica que es compacto. ■

Ejercicios

1. Si X_n es metrizable con la distancia d_n , entonces

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{\bar{d}_n(x_n, y_n)/n\}$$

es una distancia para el espacio producto $X = \prod X_n$. Demuestre que X está totalmente acotado respecto a D si cada X_n está totalmente acotado respecto a d_n . Concluya, sin utilizar el teorema de Tychonoff, que un producto numerable de espacios metrizables compactos es compacto.

2. Sea (Y, d) un espacio métrico y sea \mathcal{F} un subconjunto de $\mathcal{C}(X, Y)$.
 - Demuestre que si \mathcal{F} es finito, entonces \mathcal{F} es equicontinuo.
 - Pruebe que si f_n es una sucesión de elementos de $\mathcal{C}(X, Y)$ que converge uniformemente, entonces la colección $\{f_n\}$ es equicontinua.
 - Suponga que \mathcal{F} es una colección de funciones diferenciables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que cada $x \in \mathbb{R}$ pertenece a un entorno U en el que las derivadas de las funciones de \mathcal{F} están uniformemente acotadas (esto significa que existe un M tal que $|f'(x)| \leq M$, para toda f en \mathcal{F} y todo $x \in U$). Demuestre que \mathcal{F} es equicontinua.
3. Pruebe el siguiente resultado:
Teorema (teorema de Arzela). *Sean X un espacio compacto y $f_n \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^k)$. Si la colección $\{f_n\}$ está puntualmente acotada y es equicontinua, entonces la sucesión f_n tiene una subsucesión que converge uniformemente.*
4. (a) Sea $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f_n(x) = x^n$. La colección $\mathcal{F} = \{f_n\}$ está puntualmente acotada pero la sucesión (f_n) no tiene una subsucesión que converja uniformemente. ¿En qué punto o puntos deja de ser \mathcal{F} equicontinua?
 (b) Repita (a) para las funciones f_n del Ejercicio 9 de §21.

5. Sea X un espacio topológico. Un subconjunto \mathcal{F} de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ se dice que *se anula uniformemente en el infinito* si, dado $\epsilon > 0$, existe un subespacio compacto C de X tal que $|f(x)| < \epsilon$, para todo $x \in X - C$ y $f \in \mathcal{F}$. Si \mathcal{F} consiste en una sola función f , decimos simplemente que *f se anula en el infinito*. Denote por $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$ el conjunto de las funciones continuas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que se anulan en el infinito.

Teorema. *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto; dotemos a $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$ con la topología uniforme. Un subconjunto \mathcal{F} de $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$ tiene clausura compacta si, y sólo si, está puntualmente acotado, es equicontinuo y se anula uniformemente en el infinito.*

[*Indicación:* denote por Y la compactificación por un punto de X . Demuestre que $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$ es isométrico a un subespacio cerrado de $\mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$ si ambos tienen la distancia del supremo.]

6. Demuestre que nuestra prueba del teorema de Ascoli también es válida si cambiamos \mathbb{R}^n por cualquier espacio métrico en el cual todos los subespacios cerrados y acotados son compactos.

- *7. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $A \subset X$ y $\epsilon > 0$, sea $U(A, \epsilon)$ el ϵ -entorno de A . Sea \mathcal{H} la colección de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de X . Si $A, B \in \mathcal{H}$, defina

$$D(A, B) = \inf\{\epsilon \mid A \subset U(B, \epsilon) \text{ y } B \subset U(A, \epsilon)\}.$$

- (a) Demuestre que D es una distancia sobre \mathcal{H} ; ésta se conoce como *distancia de Hausdorff*.
- (b) Pruebe que si (X, d) es completo, también lo es (\mathcal{H}, D) . [*Indicación:* sea A_n una sucesión de Cauchy en \mathcal{H} ; pasando a una subsucesión, suponga que $D(A_n, A_{n+1}) < 1/2^n$. Defina A como el conjunto de todos los puntos x que son límite de las sucesiones x_1, x_2, \dots tales que $x_i \in A_i$, para cada i , y $d(x_i, x_{i+1}) < 1/2^i$. Demuestre que $A_n \rightarrow A$.]
- (c) Demuestre que si (X, d) está totalmente acotado, también lo está (\mathcal{H}, D) . [*Indicación:* dado ϵ , elija $\delta < \epsilon$ y sea S un subconjunto finito de X tal que la colección $\{B_d(x, \delta) \mid x \in S\}$ recubre X . Sea \mathcal{A} la colección de todos los subconjuntos no vacíos de S ; demuestre que $\{B_D(A, \epsilon) \mid A \in \mathcal{A}\}$ recubre \mathcal{H} .]
- (d) **Teorema.** *Si X es compacto con la distancia d , entonces el espacio \mathcal{H} es compacto con la distancia de Hausdorff D .*
- *8. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos; dote a $X \times Y$ con la correspondiente distancia del supremo y denote por \mathcal{H} la colección de todos los subconjuntos cerrados y acotados no vacíos de $X \times Y$ con la distancia de Hausdorff resultante. Considere el espacio $\mathcal{C}(X, Y)$ con la distancia uniforme y sea $gr : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{H}$ la aplicación que asigna, a cada aplicación continua $f : X \rightarrow Y$,

su grafo

$$G_f = \{x \times f(x) \mid x \in X\}.$$

- (a) Demuestre que la aplicación gr es inyectiva y uniformemente continua.
- (b) Denote por \mathcal{H}_0 el conjunto imagen de la aplicación gr y sea $g : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{H}_0$ la aplicación sobreyectiva obtenida de gr . Demuestre que si $f : X \rightarrow Y$ es uniformemente continua, entonces la aplicación g^{-1} es continua en el punto G_f .
- (c) Dé un ejemplo donde g^{-1} no sea continua en el punto G_f .
- (d) Teorema. Si X es compacto, entonces $\text{gr} : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{H}$ es un embebimiento.

§46 Convergencia puntual y convergencia compacta

Existen otras topologías útiles sobre los espacios Y^X y $\mathcal{C}(X, Y)$ adicionalmente a la topología uniforme. Consideraremos aquí tres de ellas que son conocidas como la *topología de la convergencia puntual*, la *topología de la convergencia compacta* y la *topología compacto-abierta*.

Definición. Dado un punto x en el conjunto X y un conjunto abierto U del espacio Y , sea

$$S(x, U) = \{f \mid f \in Y^X \text{ y } f(x) \in U\}.$$

Los conjuntos $S(x, U)$ determinan una subbase para una topología sobre Y^X , la cual se conoce como *topología de la convergencia puntual* (o *topología punto-abierta*).

El elemento básico general para esta topología es una intersección finita de elementos subbásicos $S(x, U)$. Así, un elemento básico típico alrededor de la aplicación f consiste en todas las aplicaciones g que están “cerca” de f en una cantidad finita de puntos. Dicho entorno aparece ilustrado en la Figura 46.1 y consiste en todas las aplicaciones g cuyas gráficas intersecan los tres intervalos verticales dibujados.

La topología de la convergencia puntual sobre Y^X no es nada nueva. Es precisamente la topología producto que ya hemos estudiado. Si cambiamos X por J y denotamos el elemento general de J por α para que parezca más familiar, entonces el conjunto $S(\alpha, U)$ de todas las aplicaciones $x : J \rightarrow Y$ tales que $x(\alpha) \in U$ es precisamente el subconjunto $\pi_\alpha^{-1}(U)$ de Y^J , que es el elemento subbásico estándar para la topología producto.

La razón por la que llamamos a ésta la topología de la convergencia puntual proviene del siguiente teorema:

Teorema 46.1. Una sucesión f_n de aplicaciones converge a la aplicación f en la topología de la convergencia puntual si, y sólo si, para cada $x \in X$, la sucesión $f_n(x)$ de puntos de Y converge al punto $f(x)$.

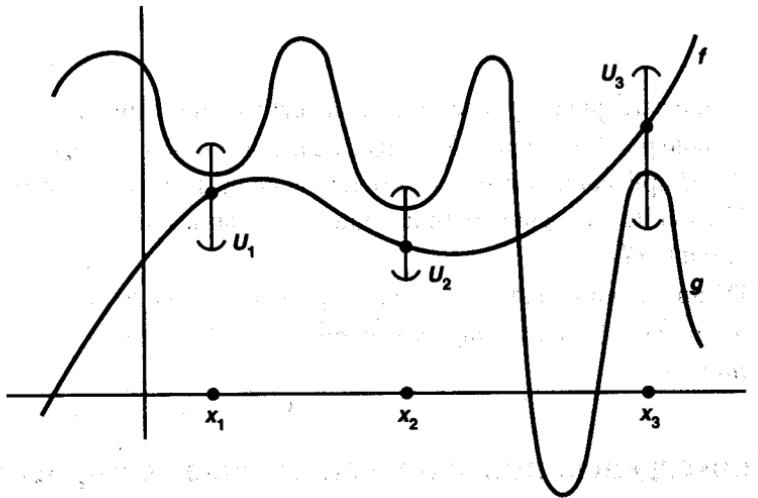


Figura 46.1

Democión. Este resultado es justo una reformulación, en términos de la nueva notación, de un resultado estándar para la topología producto probado como Lema 43.3. ■

EJEMPLO 1. Consideremos el espacio \mathbb{R}^I , donde $I = [0, 1]$. La sucesión (f_n) de funciones continuas dadas por $f_n(x) = x^n$ converge, en la topología de la convergencia puntual, a la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{para } x = 1. \end{cases}$$

Este ejemplo muestra que el subespacio $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ de las funciones continuas no es cerrado en \mathbb{R}^I con la topología de la convergencia puntual.

Sabemos que una sucesión (f_n) de aplicaciones continuas que converge en la topología uniforme, tiene un límite continuo, y el ejemplo anterior muestra que una sucesión que converge sólo en la topología de la convergencia puntual, no necesariamente. Podemos preguntarnos si existe una topología intermedia entre estas dos que sea suficiente para asegurar que el límite de una sucesión convergente de aplicaciones continuas sea una aplicación continua. La respuesta es "sí"; asumiendo la (medianamente débil) restricción de que el espacio X sea compactamente generado, será suficiente si f_n converge a f en la topología de la convergencia compacta, la cual definimos ahora.

Definición. Sean (Y, d) un espacio métrico y X un espacio topológico. Dados un elemento f de Y^X , un subespacio compacto C de X y un número $\epsilon > 0$, sea $B_C(f, \epsilon)$

el conjunto de todos aquellos elementos g de Y^X para los cuales

$$\sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in C\} < \epsilon.$$

Los conjuntos $B_C(f, \epsilon)$ conforman una base para una topología sobre Y^X . Se denomina **topología de la convergencia compacta** (o algunas veces “topología de la convergencia uniforme sobre conjuntos compactos”).

Es fácil comprobar que los conjuntos $B_C(f, \epsilon)$ satisfacen las condiciones para ser una base. El paso crucial está en darse cuenta de que si $g \in B_C(f, \epsilon)$, entonces para

$$\delta = \epsilon - \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in C\},$$

tenemos que $B_C(g, \delta) \subset B_C(f, \epsilon)$.

La topología de la convergencia compacta se diferencia de la topología de la convergencia puntual en que el elemento básico general que contiene a f consiste en las aplicaciones que están “cerca” de f no para un número finito de puntos, sino para todos los puntos de algún conjunto compacto.

La justificación para la elección de la terminología se desprende del siguiente teorema, cuya demostración es inmediata.

Teorema 46.2. Una sucesión $f_n : X \rightarrow Y$ de aplicaciones converge a la aplicación f en la topología de la convergencia compacta si, y sólo si, para cada subespacio compacto C de X , la sucesión $f_n|C$ converge uniformemente a $f|C$.

Definición. Un espacio X se dice que está **compactamente generado** si satisface la siguiente condición: un conjunto A es abierto en X si $A \cap C$ es abierto en C , para cada subespacio compacto C de X .

Esta condición equivale a decir que un conjunto B es cerrado en X si $B \cap C$ es cerrado en C , para cada compacto C . Es una restricción relativamente débil sobre el espacio; muchos espacios familiares están compactamente generados. Por ejemplo:

Lema 46.3. Si X es localmente compacto, o si X satisface el primer axioma de numerabilidad, entonces X está compactamente generado.

Demostración. Supongamos que X es localmente compacto. Sea $A \cap C$ abierto en C para todo subespacio compacto C de X . Probemos que A es abierto en X . Dado $x \in A$, elijamos un entorno U de x que esté incluido en un subespacio compacto C de X . Como $A \cap C$ es abierto en C por hipótesis, $A \cap U$ es abierto en U y, por tanto, abierto en X . Entonces $A \cap U$ es un entorno de x contenido en A , de manera que A es abierto en X .

Supongamos que X satisface el primer axioma de numerabilidad. Si $B \cap C$ es cerrado en C , para cada subespacio compacto C de X , probemos que B es cerrado en X . Sea x un punto de \bar{B} y veamos que $x \in B$. Dado que X tiene una base numerable en x , existe una sucesión (x_n) de puntos de B que converge a x . El subespacio

$$C = \{x\} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

es compacto, de manera que $B \cap C$ es cerrado en C por hipótesis. Como $B \cap C$ contiene a x_n , para todo n , también contiene a x . Por lo tanto $x \in B$, como deseábamos probar. ■

El hecho clave para los espacios compactamente generados es el siguiente:

Lema 46.4. Si X está compactamente generado, entonces una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es continua si para cada subespacio compacto C de X , la aplicación restringida $f|C$ es continua.

Demostración. Sea V un subconjunto abierto de Y y probemos que $f^{-1}(V)$ es abierto en X . Dado cualquier subespacio C de X ,

$$f^{-1}(V) \cap C = (f|C)^{-1}(V).$$

Si C es compacto, este conjunto es abierto en C porque $f|C$ es continua. Dado que X está compactamente generado, deducimos que $f^{-1}(V)$ es abierto en X . ■

Teorema 46.5. Sean X un espacio compactamente generado e (Y, d) un espacio métrico. Entonces $\mathcal{C}(X, Y)$ es cerrado en Y^X con la topología de la convergencia compacta.

Demostración. Sea $f \in Y^X$ un punto límite de $\mathcal{C}(X, Y)$; tenemos que probar que f es continua. Es suficiente comprobar que $f|C$ es continua para cada subespacio compacto C de X . Para cada n , consideremos el entorno $B_C(f, 1/n)$ de f ; éste interseca a $\mathcal{C}(X, Y)$, de manera que podemos elegir una aplicación $f_n \in \mathcal{C}(X, Y)$ dentro de este entorno. La sucesión de aplicaciones $f_n|C : C \rightarrow Y$ converge uniformemente a la aplicación $f|C$. Por tanto, por el teorema del límite uniforme, $f|C$ es continua. ■

Corolario 46.6. Sean X un espacio compactamente generado e (Y, d) un espacio métrico. Si una sucesión de aplicaciones continuas $f_n : X \rightarrow Y$ converge a f en la topología de la convergencia compacta, entonces f es continua.

Tenemos ahora tres topologías para el espacio de funciones Y^X , cuando Y es un espacio métrico. La relación entre ellas queda establecida en el siguiente teorema, cuya demostración es directa.

Teorema 46.7. Sean X un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico. Para el espacio de funciones Y^X , tenemos las siguientes inclusiones de topologías:

$$(\text{uniforme}) \supset (\text{convergencia compacta}) \supset (\text{convergencia puntual}).$$

Si X es compacto, las dos primeras coinciden, y si X es discreto, las dos últimas coinciden.

Observemos que las definiciones de la topología uniforme y la topología de la convergencia compacta hacen uso específico de la distancia d para el espacio Y . Sin embargo, la topología de la convergencia puntual no lo hace; de hecho, está definida para cualquier espacio Y . Es natural preguntarse si alguna de estas topologías puede ser extendida al caso donde Y es un espacio topológico arbitrario. No existe una respuesta satisfactoria a esta cuestión para el espacio Y^X de *todas* las aplicaciones de X en Y . Sin embargo, para el subespacio $\mathcal{C}(X, Y)$ de las aplicaciones continuas, sí que podemos probar algo. Resulta que existe una topología general sobre $\mathcal{C}(X, Y)$, conocida como **topología compacto-abierta**, que coincide con la topología de la convergencia compacta cuando Y es un espacio métrico. Esta topología es importante ya de por sí, como veremos.

Definición. Sean X e Y espacios topológicos. Si C es un subespacio compacto de X y U es un subconjunto abierto de Y , definimos

$$S(C, U) = \{f \mid f \in \mathcal{C}(X, Y) \text{ y } f(C) \subset U\}.$$

Los conjuntos $S(C, U)$ conforman una subbase para una topología sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ que se conoce como **topología compacto-abierta**.

Se desprende claramente de la definición que la topología compacto-abierta es más fina que la topología de la convergencia puntual. La topología compacto-abierta puede, de hecho, definirse en todo el espacio de funciones Y^X . Sin embargo, es interesante sólo para el subespacio $\mathcal{C}(X, Y)$, de manera que consideraremos esta topología únicamente para este espacio.

Teorema 46.8. Sean X un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico. Sobre el conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$, la topología compacto-abierta y la topología de la convergencia compacta coinciden.

Demostración. Si A es un subconjunto de Y y $\epsilon > 0$, sea $U(A, \epsilon)$ el ϵ -entorno de A . Si A es compacto y V es un conjunto abierto que contiene a A , entonces existe un

$\epsilon > 0$ tal que $U(A, \epsilon) \subset V$. Desde luego, el valor mínimo de la función $d(a, X - V)$ es el requerido ϵ .

Probemos primero que la topología de la convergencia compacta es más fina que la topología compacto-abierta. Sea $S(C, U)$ un elemento subbásico para la topología compacto-abierta y sea f un elemento de $S(C, U)$. Como f es continua, $f(C)$ es un subconjunto compacto del conjunto abierto U . Por lo tanto, podemos elegir ϵ de forma que el ϵ -entorno de $f(C)$ esté contenido en U . Entonces, como deseábamos,

$$B_C(f, \epsilon) \subset S(C, U).$$

Probemos ahora que la topología compacto-abierta es más fina que la topología de la convergencia compacta. Sea $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Dado un conjunto abierto alrededor de f en la topología de la convergencia compacta, existe un elemento básico de la forma $B_C(f, \epsilon)$ contenido en él. Vamos a encontrar un elemento básico para la topología compacto-abierta que contenga a f y esté contenido en $B_C(f, \epsilon)$.

Cada punto x de X tiene un entorno V_x tal que $f(\bar{V}_x)$ está contenido en un conjunto abierto U_x de Y con diámetro menor que ϵ . (Por ejemplo, escojamos V_x de forma que $f(V_x)$ esté contenido en el $\epsilon/4$ -entorno de $f(x)$. Entonces $f(\bar{V}_x)$ está contenido en el $\epsilon/3$ -entorno de $f(x)$, el cual tiene diámetro no más grande que $2\epsilon/3$). Recubramos C mediante una cantidad finita de tales conjuntos V_x , digamos para $x = x_1, \dots, x_n$. Sea $C_x = \bar{V}_x \cap C$. Entonces C_x es compacto y el elemento básico

$$S(C_{x_1}, U_{x_1}) \cap \dots \cap S(C_{x_n}, U_{x_n})$$

contiene a f y está contenido en $B_C(f, \epsilon)$, como deseábamos. ■

Corolario 46.9. *Sea Y un espacio métrico. La topología de la convergencia compacta sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ no depende de la distancia de Y . Por lo tanto, si X es compacto, la topología uniforme sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ no depende de la distancia de Y .*

El hecho de que la definición de la topología compacto-abierta no involucre una distancia es precisamente una de sus usuales ventajas. Otra es el hecho de que satisface el requisito de “unificar la continuidad”. Hablando a grandes rasgos, esto significa que la expresión $f(x)$ es continua no sólo en la “variable” x , sino que es continua conjuntamente en ambas “variables” x y f . Siendo más precisos, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 46.10. *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto y dotemos a $\mathcal{C}(X, Y)$ con la topología compacto-abierta. Entonces la aplicación*

$$e : X \times \mathcal{C}(X, Y) \longrightarrow Y$$

definida por la ecuación

$$e(x, f) = f(x)$$

es continua.

La aplicación e se conoce como aplicación evaluación.

Demostración. Dado un punto (x, f) de $X \times \mathcal{C}(X, Y)$ y un conjunto abierto V de Y alrededor del punto imagen $e(f, x) = f(x)$, deseamos encontrar un conjunto abierto alrededor de (x, f) que sea aplicado sobre V mediante e . Primero, utilizando la continuidad de f y el hecho de que X es de Hausdorff y localmente compacto, podemos escoger un conjunto abierto U alrededor de x con clausura compacta \bar{U} , tal que f aplica \bar{U} sobre V . Entonces consideremos el conjunto abierto $U \times S(\bar{U}, V)$ en $X \times \mathcal{C}(X, Y)$. Es un conjunto abierto que contiene a (x, f) . Y si (x', f') pertenece a este conjunto, entonces $e(x', f') = f'(x')$ pertenece a V , como deseábamos. ■

Una consecuencia de este teorema es el teorema que sigue. Es útil en topología algebraica.

Definición. Dada una aplicación $f : X \times Z \rightarrow Y$, existe una aplicación asociada $F : Z \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$, definida por la ecuación

$$(F(z))(x) = f(x, z).$$

Recíprocamente, dada $F : Z \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$, esta ecuación define la correspondiente aplicación $f : X \times Z \rightarrow Y$. Decimos que F es la aplicación de Z en $\mathcal{C}(X, Y)$ que está *inducida* por f .

***Teorema 46.11.** Sean X e Y espacios topológicos y consideremos en $\mathcal{C}(X, Y)$ la topología compacto-abierta. Si $f : X \times Z \rightarrow Y$ es continua, entonces la aplicación inducida $F : Z \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ también es continua. El recíproco es cierto si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto.

Demostración. Supongamos primero que F es continua y que X es de Hausdorff localmente compacto. Se sigue que f es continua, ya que f es igual a la composición

$$X \times Z \xrightarrow{i_X \times F} X \times \mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{e} Y$$

donde i_X es la aplicación identidad de X .

Supongamos ahora que f es continua. Para comprobar la continuidad de F , tomemos un punto z_0 de Z y un elemento subbásico $S(C, U)$ para $\mathcal{C}(X, Y)$ que contiene a $F(z_0)$, y encontremos un entorno W de z_0 que sea aplicado mediante F en $S(C, U)$. Esto será suficiente.

El hecho de que $F(z_0)$ esté en $S(C, U)$ significa simplemente que $(F(z_0))(x) = f(x, z_0)$ está en U , para todo $x \in C$, es decir, $f(C \times z_0) \subset U$. La continuidad de f implica que $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en $X \times Z$ que contiene a $C \times z_0$. Entonces

$$f^{-1}(U) \cap (C \times Z)$$

es un conjunto abierto en el subespacio $C \times Z$ que contiene la rebanada $C \times z_0$. El lema del tubo de §26 implica que existe un entorno W de z_0 en Z tal que el tubo completo $C \times W$ está contenido en $f^{-1}(U)$ (véase la Figura 46.2). Entonces, para $z \in W$ y $x \in C$, tenemos que $f(x, z) \in U$. Por lo tanto, $F(W) \subset S(C, U)$, como deseábamos probar. ■

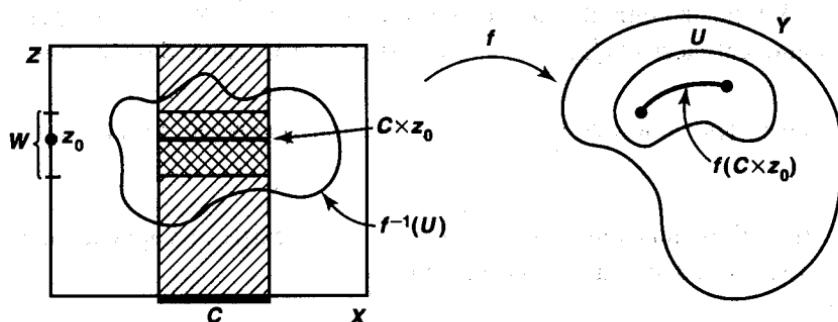


Figura 46.2

Vamos a abordar brevemente las relaciones existentes entre la topología compacto-abierta y el concepto de *homotopía*, el cual surge en topología algebraica.

Si f y g son aplicaciones continuas de X en Y , decimos que f y g son *homotópicas* si existe una aplicación continua

$$h : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

tal que $h(x, 0) = f(x)$ y $h(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. La aplicación h se llama *homotopía* entre f y g .

Hablando a grandes rasgos, una homotopía es una “familia uniparamétrica continua” de aplicaciones de X en Y . Siendo más precisos, observemos que una homotopía h puede verse como una aplicación

$$H : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{C}(X, Y)$$

que asigna, a cada valor del parámetro t en $[0, 1]$, la correspondiente aplicación continua de X en Y . Suponiendo que X es de Hausdorff y localmente compacto, vemos que h es continua si, y sólo si, H es continua. Esto significa que una homotopía h entre f y g se corresponde precisamente con un *camino* en el espacio de funciones $\mathcal{C}(X, Y)$ desde el punto f de $\mathcal{C}(X, Y)$ al punto g .

Volveremos a un estudio más detallado de la homotopía en la Parte II del libro.

Ejercicios

- Demuestre que los conjuntos $B_C(f, \epsilon)$ forman una base para una topología sobre Y^X .
- Pruebe el Teorema 46.7.
- Demuestre que el conjunto $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de las funciones acotadas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es cerrado en $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ con la topología uniforme, pero no con la topología de la convergencia compacta.
- Consideré la sucesión de funciones continuas $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = x/n.$$

¿En cuál de las tres topologías del Teorema 46.7 converge esta sucesión? Responda a la misma cuestión para la sucesión dada en el Ejercicio 9 de §21.

- Consideré la sucesión de funciones $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^k.$$

- Demuestre que (f_n) converge en la topología de la convergencia compacta y concluya que la función límite es continua (éste es un hecho estándar sobre series de potencias).
 - Pruebe que (f_n) no converge en la topología uniforme.
- Demuestre que, con la topología compacto-abierta, $\mathcal{C}(X, Y)$ es de Hausdorff si Y es de Hausdorff, y regular si Y es regular. [Indicación: si $\bar{U} \subset V$, entonces $S(C, U) \subset S(C, V)$.]
 - Demuestre que si Y es de Hausdorff y localmente compacto, entonces la composición de aplicaciones

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \longrightarrow \mathcal{C}(X, Z)$$

es continua, siempre que se utilice la topología compacto-abierta. [Indicación: si $g \circ f \in S(C, U)$, encuentre V tal que $f(C) \subset V$ y $g(\bar{V}) \subset U$.]

- Denote por $\mathcal{C}'(X, Y)$ el conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ con alguna topología \mathcal{T} . Demuestre que si la aplicación evaluación

$$e : X \times \mathcal{C}'(X, Y) \rightarrow Y$$

es continua, entonces \mathcal{T} contiene a la topología compacto-abierta. [Indicación: la aplicación inducida $E : \mathcal{C}'(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ es continua.]

9. Damos aquí una aplicación (inesperada) del Teorema 46.11 a las aplicaciones cociente (compare con el Ejercicio 11 de §29).

Teorema. Si $p : A \rightarrow B$ es una aplicación cociente y X es de Hausdorff y localmente compacto, entonces $i_X \times p : X \times A \rightarrow X \times B$ es una aplicación cociente.

Demostración.

- Sea Y el espacio cociente inducido por $i_X \times p$ y sea $q : X \times A \rightarrow Y$ la aplicación cociente. Demuestre que existe una aplicación continua biyectiva $f : Y \rightarrow X \times B$ tal que $f \circ q = i_X \times p$.
- Sea $g = f^{-1}$. Sean $G : B \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ y $Q : A \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ las aplicaciones inducidas por g y q , respectivamente. Demuestre que $Q = G \circ p$.
- Demuestre que Q es continua y concluya que G es continua, de manera que g es continua.

- *10. Un espacio es localmente compacto si puede ser recubierto por conjuntos abiertos de modo que cada uno de los cuales esté contenido en un subespacio compacto de X . Se dice que es σ -compacto si puede ser recubierto por una cantidad numerable de tales conjuntos abiertos.

- Demuestre que si X es localmente compacto y 2AN, entonces X es σ -compacto.
- Sea (Y, d) un espacio métrico. Demuestre que si X es σ -compacto, existe una distancia para la topología de la convergencia compacta sobre Y^X tal que si (Y, d) es completo, entonces Y^X es completo con esta distancia. [Indicación: sea A_1, A_2, \dots una colección numerable de subespacios compactos de X cuyos interiores recubren X . Denote por Y_i el conjunto de todas las aplicaciones de A_i en Y , con la topología uniforme. Defina un homeomorfismo entre Y^X y un subespacio cerrado del espacio producto $Y_1 \times Y_2 \times \dots$.]

11. Sea (Y, d) un espacio métrico y X un espacio topológico. Defina una topología sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ como sigue: dada $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ y dada una función continua positiva $\delta : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ en X , sea

$$B(f, \delta) = \{g \mid d(f(x), g(x)) < \delta(x) \text{ para todo } x \in X\}.$$

- Demuestre que los conjuntos $B(f, \delta)$ forman una base para una topología sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ que se conoce como **topología fina**.
- Pruebe que la topología fina contiene a la topología uniforme.
- Demuestre que si X es compacto, las topologías fina y uniforme coinciden.
- Pruebe que si X es discreto, entonces $\mathcal{C}(X, Y) = Y^X$ y las topologías fina y por cajas coinciden.

§47 El teorema de Ascoli

Probamos ahora una versión más general del teorema de Ascoli. Ésta caracteriza a los subespacios compactos de $\mathcal{C}(X, Y)$ con la topología de la convergencia compacta. La demostración, sin embargo, involucra a nuestras tres topologías estándar para los espacios de funciones: la topología de la convergencia puntual, la topología de la convergencia compacta y la topología uniforme.

Teorema 47.1 (Teorema de Ascoli). Sean X un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico. Dotemos a $\mathcal{C}(X, Y)$ con la topología de la convergencia compacta y sea \mathcal{F} un subconjunto de $\mathcal{C}(X, Y)$.

(a) Si \mathcal{F} es equicontinuo respecto a d y el conjunto

$$\mathcal{F}_a = \{f(a) \mid f \in \mathcal{F}\}$$

tiene clausura compacta para cada $a \in X$, entonces \mathcal{F} está contenido en un subespacio compacto de $\mathcal{C}(X, Y)$.

(b) El recíproco es cierto si X es de Hausdorff y localmente compacto.

Demostración de (a). Consideremos sobre Y^X la topología producto, la cual coincide con la topología de la convergencia puntual. Entonces Y^X es un espacio de Hausdorff. El espacio $\mathcal{C}(X, Y)$, que tiene la topología de la convergencia compacta, no es un subespacio de Y^X . Sea \mathcal{G} la clausura de \mathcal{F} en Y^X .

Paso 1. Veamos que \mathcal{G} es un subespacio compacto de Y^X . Dado $a \in X$, denotemos por C_a la clausura de \mathcal{F}_a en Y ; por hipótesis, C_a es un subespacio compacto de Y . El conjunto \mathcal{F} está contenido en el espacio producto

$$\prod_{a \in X} C_a$$

ya que este producto consiste, por definición, en todas las aplicaciones $f : X \rightarrow Y$ que satisfacen la condición $f(a) \in C_a$, para todo a . Este espacio producto es compacto, por el teorema de Tychonoff, y es un subespacio cerrado del espacio producto Y^X . Dado que \mathcal{G} es igual a la clausura de \mathcal{F} en Y^X , \mathcal{G} está contenido en $\prod C_a$; por tanto, al ser cerrado, \mathcal{G} es compacto.

Paso 2. Probamos ahora que cada aplicación perteneciente a \mathcal{G} es continua y, más aún, que \mathcal{G} es equicontinua respecto a d .

Dados $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$, escojamos un entorno U de x_0 tal que

$$(*) \quad d(f(x), f(x_0)) < \epsilon/3 \quad \text{para todo } f \in \mathcal{F} \text{ y todo } x \in U.$$

Vamos a demostrar que $d(g(x), g(x_0)) < \epsilon$ para todo $g \in \mathcal{G}$ y todo $x \in U$; de aquí se deduce que \mathcal{G} es equicontinua.

Sean $g \in \mathcal{G}$ y x un punto de U . Definamos V_x como el subconjunto de Y^X , abierto en Y^X , consistente en todos los elementos h de Y^X tales que

$$(**) \quad d(h(x), g(x)) < \epsilon/3 \quad \text{y} \quad d(h(x_0), g(x_0)) < \epsilon/3.$$

Dado que g pertenece a la clausura de \mathcal{F} , el entorno V_x de g debe contener un elemento f de \mathcal{F} . Aplicando la desigualdad triangular a $(*)$ y $(**)$, se deduce que $d(g(x), g(x_0)) < \epsilon$, como deseábamos.

Paso 3. Probemos que la topología producto sobre Y^X y la topología de la convergencia compacta sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ coinciden en el subconjunto \mathcal{G} .

En general, la topología de la convergencia compacta es más fina que la topología producto. Probemos que se tiene la inclusión inversa para el subconjunto \mathcal{G} . Sean g un elemento de \mathcal{G} y $B_C(g, \epsilon)$ un elemento básico para la topología de la convergencia compacta sobre Y^X que contenga a g . Encontremos un elemento básico B para la topología de la convergencia puntual sobre Y^X que contenga a g y tal que

$$[B \cap \mathcal{G}] \subset [B_C(g, \epsilon) \cap \mathcal{G}].$$

Utilizando la equicontinuidad de \mathcal{G} y la compacidad de C , podemos recubrir C con una cantidad finita de conjuntos abiertos U_1, \dots, U_n de X , que contenga puntos x_1, \dots, x_n , respectivamente, tales que, para cada i , se verifica

$$d(g(x), g(x_i)) < \epsilon/3$$

para $x \in U_i$ y $g \in \mathcal{G}$. Entonces definimos B como el elemento básico para Y^X dado por

$$B = \{h \mid h \in Y^X \text{ y } d(h(x_i), g(x_i)) < \epsilon/3 \text{ para } i = 1, \dots, n\}.$$

Probemos que si h es un elemento de $B \cap \mathcal{G}$, entonces h pertenece a $B_C(g, \epsilon)$. Es decir, probemos que $d(h(x), g(x)) < \epsilon$, para $x \in C$. Dado $x \in C$, escojamos i tal que $x \in U_i$. Entonces

$$\begin{aligned} d(h(x), h(x_i)) &< \epsilon/3 \quad \text{y} \\ d(g(x), g(x_i)) &< \epsilon/3 \end{aligned}$$

ya que $x \in U_i$ y $g, h \in \mathcal{G}$, mientras que

$$d(h(x_i), g(x_i)) < \epsilon/3$$

porque $h \in B$. Se sigue, por la desigualdad triangular, que $d(h(x), g(x)) < \epsilon$, como deseábamos.

Paso 4. Completemos la demostración. El conjunto \mathcal{G} contiene a \mathcal{F} y está contenido en $\mathcal{C}(X, Y)$. Es compacto como subespacio de Y^X con la topología producto. Y,

por el resultado que acabamos de probar, es también compacto como subespacio de $\mathcal{C}(X, Y)$ con la topología de la convergencia compacta.

Demostración de (b). Sea \mathcal{H} un subespacio compacto de $\mathcal{C}(X, Y)$ que contenga a \mathcal{F} . Probemos que \mathcal{H} es equicontinuo y que \mathcal{H}_a es compacto, para cada $a \in X$. Se tendrá entonces que \mathcal{F} es equicontinuo (dado que $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$) y que \mathcal{F}_a está contenido en el subespacio compacto \mathcal{H}_a de Y , de manera que \mathcal{F}_a es compacto.

Para probar que \mathcal{H}_a es compacto, consideraremos la composición de la aplicación

$$j : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow X \times \mathcal{C}(X, Y)$$

definida por $j(f) = a \times f$, y la aplicación evaluación

$$e : X \times \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow Y$$

dada por la ecuación $e(x \times f) = f(x)$. La aplicación j es obviamente continua y la aplicación e es continua por los Teoremas 46.8 y 46.10. La composición $e \circ j$ aplica \mathcal{H} en \mathcal{H}_a ; como \mathcal{H} es compacto, también lo es \mathcal{H}_a .

Vamos a demostrar ahora que \mathcal{H} es equicontinua en a , respecto a la distancia d . Sea A un subespacio compacto de X que contenga un entorno de a . Es suficiente probar que el subconjunto

$$\mathcal{R} = \{f|A : f \in \mathcal{H}\}$$

de $\mathcal{C}(A, Y)$ es equicontinuo en a .

Dotemos a $\mathcal{C}(A, Y)$ con la topología de la convergencia compacta. Veamos que la aplicación restricción

$$r : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(A, Y)$$

es continua. Sea f un elemento de $\mathcal{C}(X, Y)$ y sea $B = B_C(f|A, \epsilon)$ un elemento básico para $\mathcal{C}(A, Y)$ conteniendo a $f|A$, donde C es un subespacio compacto de A . Entonces C es un subespacio compacto de X y r aplica en B el entorno $B_C(f, \epsilon)$ de f en $\mathcal{C}(X, Y)$.

La aplicación r lleva \mathcal{H} sobre \mathcal{R} ; como \mathcal{H} es compacto, también lo es \mathcal{R} . Ahora \mathcal{R} es un subespacio de $\mathcal{C}(A, Y)$; dado que A es compacto, la topología de la convergencia compacta y la topología uniforme coinciden sobre $\mathcal{C}(A, Y)$. Se deduce del Teorema 45.1 que \mathcal{R} está totalmente acotado para la distancia uniforme sobre $\mathcal{C}(A, Y)$; entonces el Lema 45.2 implica que \mathcal{R} es equicontinuo respecto a d . ■

Una versión aún más general del teorema de Ascoli la podemos encontrar en [K] o [Wd]. En ésta no se supone que Y es un espacio métrico, sino únicamente que tiene lo que se conoce como una *estructura uniforme*, lo cual es una generalización del concepto de distancia.

El teorema de Ascoli tiene muchas aplicaciones en análisis, pero éstas se salen fuera del alcance de este libro (véase [K-F] para algunas de tales aplicaciones).

Ejercicios

1. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ están puntualmente acotados? ¿Cuáles son equicontinuos?

- (a) La colección $\{f_n\}$, donde $f_n(x) = x + \operatorname{sen} nx$.
- (b) La colección $\{g_n\}$, donde $g_n(x) = n + \operatorname{sen} x$.
- (c) La colección $\{h_n\}$, donde $h_n(x) = |x|^{1/n}$.
- (d) La colección $\{k_n\}$, donde $k_n(x) = n \operatorname{sen}(x/n)$.

2. Pruebe el siguiente resultado:

Teorema. Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces un subespacio \mathcal{F} de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ con la topología de la convergencia compacta tiene clausura compacta si, y sólo si, \mathcal{F} está puntualmente acotado y es equicontinuo respecto a cualquiera de las distancias estándar sobre \mathbb{R}^n .

3. Demuestre que la versión general del teorema de Ascoli implica la versión clásica (Teorema 45.4) cuando X es de Hausdorff.

4. Pruebe el siguiente resultado:

Teorema (teorema de Arzela, versión general). Sea X un espacio de Hausdorff que es σ -compacto y sea f_n una sucesión de aplicaciones $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}^k$. Si la colección $\{f_n\}$ está puntualmente acotada y es equicontinua, entonces la sucesión f_n tiene una subsucesión que converge, en la topología de la convergencia compacta, a una aplicación continua.

[*Indicación:* demuestre que $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^k)$ satisface el primer axioma de numerabilidad.]

5. Sea (Y, d) un espacio métrico y sea $f_n : X \rightarrow Y$ una sucesión de aplicaciones continuas y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación (no necesariamente continua). Suponga que f_n converge a f en la topología de la convergencia puntual. Demuestre que si $\{f_n\}$ es equicontinua, entonces f es continua y f_n converge a f en la topología de la convergencia compacta.

Capítulo 8

Espacios de Baire y teoría de la dimensión

En este capítulo introducimos una clase de espacios topológicos llamados los *espacios de Baire*. La condición que caracteriza a un espacio de Baire es un poco complicada para ser enunciada pero es, a menudo, muy útil en las aplicaciones, tanto en análisis como en topología. La mayoría de los espacios que hemos estudiado son espacios de Baire. Por ejemplo, un espacio de Hausdorff es un espacio de Baire si es compacto, o incluso si es localmente compacto. Un espacio metrizable X es un espacio de Baire si es topológicamente completo, esto es, si existe una distancia en X relativa a la cual X es un espacio completo.

Como el espacio $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ de todas las funciones continuas de un espacio X en \mathbb{R}^n es completo en la distancia uniforme, se sigue que dicho espacio es un espacio de Baire en la topología uniforme. Este hecho tiene numerosas e interesantes aplicaciones.

Una aplicación se presenta en la prueba que damos en §49 acerca de la existencia de una función continua, con valores en \mathbb{R} , que no es diferenciable en ningún punto.

Otra aplicación surge en la rama de topología llamada *teoría de la dimensión*. En §50 definimos una versión topológica de la dimensión debida a Lebesgue. Y probamos el clásico teorema que afirma que todo espacio metrizable compacto de dimensión topológica m puede ser embebido en el espacio euclídeo \mathbb{R}^N de dimensión $N = 2m + 1$. Se deduce que toda variedad m -dimensional compacta puede ser embebida en \mathbb{R}^{2m+1} , lo cual generaliza el teorema del embebimiento probado en §36.

A lo largo del capítulo se supone que el lector está familiarizado con los espacios métricos completos (§43). Cuando estudiemos la teoría de la dimensión haremos uso de la sección §36, de los embebimientos de variedades así como de los resultados básicos del álgebra lineal.

§48 Espacios de Baire

La condición que caracteriza a los espacios de Baire es probablemente la “menos natural” de todas las que han sido introducidas en este libro.

En esta sección definiremos los espacios de Baire y probaremos que dos importantes familias de espacios —los espacios métricos completos y los espacios de Hausdorff compactos— están contenidas en la clase de los espacios de Baire. Después presentaremos algunas aplicaciones que, incluso si no hacen que la condición de Baire parezca más natural, probarán al menos lo útil que dicho concepto puede llegar a ser. De hecho, es una herramienta muy útil y bastante sofisticada tanto en análisis como en topología.

Definición. Recordemos que si A es un subconjunto de un espacio X , el *interior* de A se define como la unión de todos los conjuntos abiertos de X que están contenidos en A . Decir que A tiene *interior vacío* significa que A no contiene ningún conjunto abierto de X distinto del conjunto vacío. Equivalentemente, A tiene interior vacío si todo punto de A es un punto límite del complementario de A , es decir, si el conjunto complementario de A es denso en X .

EJEMPLO 1. El conjunto \mathbb{Q} de los números racionales tiene interior vacío como subconjunto de \mathbb{R} , pero el intervalo $[0, 1]$ tiene interior no vacío. El intervalo $[0, 1] \times 0$ tiene interior vacío como subconjunto del plano \mathbb{R}^2 , igual que el subconjunto $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$.

Definición. Un conjunto X se dice que es un *espacio de Baire* si se satisface la siguiente condición: dada cualquier familia numerable $\{A_n\}$ de conjuntos cerrados de X , todos ellos con interior vacío en X , su unión $\bigcup A_n$ también tiene interior vacío en X .

EJEMPLO 2. El espacio \mathbb{Q} de los números racionales no es un espacio de Baire. Los conjuntos unipuntuales de \mathbb{Q} son cerrados y tienen interior vacío en \mathbb{Q} ; sin embargo, \mathbb{Q} es la unión numerable de sus subconjuntos unipuntuales.

El espacio \mathbb{Z}_+ , por otra parte, es un espacio de Baire. Todo subconjunto de \mathbb{Z}_+ es abierto, por lo que no existen subconjuntos de \mathbb{Z}_+ con interior vacío, excepto el conjunto vacío. Por tanto, \mathbb{Z}_+ satisface trivialmente la condición de Baire.

En general, cualquier subespacio cerrado de \mathbb{R} , al ser un espacio métrico completo, es un espacio de Baire. Sorprende el hecho de que los números irracionales de \mathbb{R} también constituyan un espacio de Baire (véase el Ejercicio 6).

La terminología utilizada originalmente por R. Baire para este concepto involucraba la palabra “categoría”. Un subconjunto A de un espacio X se dice que es de *primera categoría* en X si está contenido en la unión de una familia numerable de conjuntos cerrados de X con interiores vacíos en X ; en otro caso se dice que es de *segunda categoría*. Usando esta terminología, podemos decir lo siguiente:

Un espacio X es un espacio de Baire si, y sólo si, todo conjunto abierto no vacío de X es de segunda categoría.

En este libro no utilizaremos los términos “primera categoría” y “segunda categoría”.

La definición precedente es la “definición por conjuntos cerrados” de un espacio de Baire. Existe también una formulación que utiliza conjuntos abiertos y que es a menudo muy útil. Se enuncia en el siguiente lema:

Lema 48.1. *X es un espacio de Baire si, y sólo si, dada cualquier familia numerable $\{U_n\}$ de conjuntos abiertos en X , cada uno de los cuales es denso en X , su intersección $\bigcap U_n$ es también un conjunto denso en X .*

Demostración. Recordemos que un conjunto C es denso en X si $\bar{C} = X$. El resultado es entonces una consecuencia de los dos hechos siguientes:

- (1) A es cerrado en X si, y sólo si, $X - A$ es abierto en X .
- (2) B tiene interior vacío en X si, y sólo si, $X - B$ es denso en X .

Existen numerosos teoremas que proporcionan condiciones para que un espacio sea un espacio de Baire. El más importante es el siguiente.

Teorema 48.2 (Teorema de la categoría de Baire). *Si X es un espacio de Hausdorff compacto o un espacio métrico completo entonces X es un espacio de Baire.*

Demostración. Dada una familia numerable $\{A_n\}$ de conjuntos cerrados de X con interiores vacíos, queremos probar que su unión $\bigcup A_n$ tiene también interior vacío en X . Así, dado un conjunto abierto no vacío U_0 de X , debemos encontrar un punto x de U_0 que no pertenezca a ninguno de los conjuntos A_n .

Consideremos el primer conjunto A_1 . Por hipótesis, A_1 no contiene a U_0 . Por tanto, podemos elegir un punto y de U_0 que no pertenece a A_1 . La regularidad de X , junto con el hecho de que A_1 sea cerrado, nos permite escoger un entorno U_1 de y tal que

$$\bar{U}_1 \cap A_1 = \emptyset,$$

$$\bar{U}_1 \subset U_0.$$

Si X es un espacio métrico, escogemos U_1 satisfaciendo que su diámetro sea menor que 1.

En general, dado un conjunto abierto no vacío U_{n-1} , escogemos un punto de U_{n-1} que no pertenece al conjunto cerrado A_n y entonces elegimos un entorno U_n

de dicho punto verificando

$$\begin{aligned}\bar{U}_n \cap A_n &= \emptyset, \\ \bar{U}_n &\subset U_{n-1}, \\ \text{diá}\bar{m} U_n < 1/n &\quad \text{en el caso métrico.}\end{aligned}$$

Afirmamos que la intersección $\bigcap \bar{U}_n$ es no vacía, de lo que se concluye el teorema. En efecto, si consideramos un punto x de $\bigcap \bar{U}_n$, entonces x pertenece a U_0 ya que $\bar{U}_1 \subset U_0$. Además, para cada n el punto x no pertenece a A_n , ya que \bar{U}_n y A_n son conjuntos disjuntos.

La prueba de que la intersección $\bigcap \bar{U}_n$ es no vacía se realiza en dos partes, dependiendo de que X sea un espacio de Hausdorff compacto o un espacio métrico completo. Si X es un espacio de Hausdorff compacto, consideramos la sucesión encajada $\bar{U}_1 \supset \bar{U}_2 \supset \dots$ de subconjuntos no vacíos de X . La familia $\{\bar{U}_n\}$ tiene la propiedad de la intersección finita; como X es compacto, la intersección $\bigcap \bar{U}_n$ debe ser no vacía.

Si X es un espacio métrico completo, entonces aplicamos el siguiente lema. ■

Lema 48.3. Sea $C_1 \supset C_2 \supset \dots$ una sucesión encajada de conjuntos cerrados no vacíos en un espacio métrico completo X . Si $\text{diá}\bar{m} C_n \rightarrow 0$ entonces $\bigcap C_n \neq \emptyset$.

*Demuestra*ción. Este resultado se propuso como un ejercicio en §43 y ahora presentamos una demostración. Para cada n escojamos un punto x_n en C_n . Como $x_n, x_m \in C_N$, para $n, m \geq N$, y el diámetro $\text{diá}\bar{m} C_N$ puede hacerse menor que cualquier ϵ dado con tal de elegir un N suficientemente grande, la sucesión (x_n) es una sucesión de Cauchy. Supongamos que converge a un punto x . Entonces dado k , la subsucesión x_k, x_{k+1}, \dots también converge a x . Por tanto, necesariamente se cumple que x pertenece a $\bar{C}_k = C_k$ y, en consecuencia, $x \in \bigcap C_k$, como deseábamos. ■

Ahora presentamos una aplicación de la teoría de los espacios de Baire, y presentaremos algunas más en las secciones siguientes. Esta aplicación es quizás más divertida que profunda y se refiere a una pregunta que un estudiante podría hacer en relación con las sucesiones convergentes de funciones continuas.

Sea $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas tales que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para cada $x \in [0, 1]$. Existen ejemplos que demuestran que la función límite f puede que no sea continua. Pero uno puede quedar muy sorprendido al saber lo discontinua que tal función puede llegar a ser. Por ejemplo, ¿podría ser que fuera discontinua en todos los puntos? La respuesta es “no”. Vamos a probar que f debe ser continua en un número infinito de puntos del intervalo $[0, 1]$. De hecho, el conjunto de puntos de continuidad de f es denso en $[0, 1]$.

Para probar este resultado necesitamos el siguiente lema:

***Lema 48.4.** Todo subespacio abierto Y de un espacio de Baire X es un espacio de Baire.

Demostración. Sea A_n una familia numerable de conjuntos cerrados de Y que tienen interiores vacíos en Y . Probaremos que la unión $\bigcup A_n$ también tiene interior vacío en Y .

Sea \bar{A}_n la clausura de A_n en X , de modo que $\bar{A}_n \cap Y = A_n$. El conjunto \bar{A}_n tiene interior vacío en X . En efecto, si U es un conjunto no vacío abierto en X y contenido en \bar{A}_n , entonces U debe intersecar a A_n . Por tanto, $U \cap Y$ es un conjunto no vacío abierto en Y y contenido en A_n , lo que contradice la hipótesis.

Si la unión de los conjuntos A_n contiene al conjunto no vacío W abierto en Y , entonces la unión de los conjuntos \bar{A}_n también contiene al conjunto W , que es abierto en X porque Y es abierto en X . Pero cada conjunto \bar{A}_n tiene interior vacío en X , lo que contradice el hecho de que X sea un espacio de Baire. ■

***Teorema 48.5.** Sea X un espacio y sea (Y, d) un espacio métrico. Sea $f_n : X \rightarrow Y$ una sucesión de funciones continuas tales que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in X$, donde $f : X \rightarrow Y$. Si X es un espacio de Baire, el conjunto de puntos de continuidad de f es un subconjunto denso en X .

Demostración. Dado un entero positivo N y dado un número $\epsilon > 0$, definimos el conjunto

$$A_N(\epsilon) = \{x \mid d(f_n(x), f_m(x)) \leq \epsilon \text{ para todo } n, m \geq N\}.$$

Observemos que $A_N(\epsilon)$ es cerrado en X . Esto es consecuencia del hecho de que el conjunto de puntos x para los cuales $d(f_n(x), f_m(x)) \leq \epsilon$ es cerrado en X , por la continuidad de las funciones f_n y f_m , y $A_N(\epsilon)$ es la intersección de estos conjuntos para $n, m \geq N$.

Para un número ϵ fijo, escojamos los conjuntos $A_1(\epsilon) \subset A_2(\epsilon) \subset \dots$. La unión de todos estos conjuntos es todo el conjunto X . En efecto, dado un punto $x_0 \in X$, el hecho de que $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$ implica que la sucesión $f_n(x_0)$ sea una sucesión de Cauchy y, en consecuencia, $x_0 \in A_N(\epsilon)$ para algún N .

Definamos el conjunto

$$U(\epsilon) = \bigcup_{N \in \mathbb{Z}_+} \text{Int } A_N(\epsilon).$$

Vamos a probar dos cosas:

- (1) $U(\epsilon)$ es un conjunto abierto y denso en X .
- (2) La función f es continua en los puntos del conjunto

$$C = U(1) \cap U(1/2) \cap U(1/3) \cap \dots$$

El teorema se sigue entonces del hecho de que X sea un espacio de Baire.

Para probar que $U(\epsilon)$ es denso en X , es suficiente probar que para cualquier conjunto V no vacío y abierto en X existe un número N tal que el conjunto $V \cap \text{Int } A_N(\epsilon)$ es no vacío. Con este objetivo en mente, notemos primero que, para cada N , el conjunto $V \cap A_N(\epsilon)$ es cerrado en V . Como V es un espacio de Baire por el lema precedente, al menos uno de estos conjuntos, digamos $V \cap A_M(\epsilon)$, debe contener un conjunto W no vacío y abierto en V . Como V es abierto en X , el conjunto W es también abierto en X y, por tanto, está contenido en $\text{Int } A_M(\epsilon)$.

Ahora probaremos que si $x_0 \in C$ entonces f es continua en x_0 . Dado $\epsilon > 0$ encontraremos un entorno W de x_0 tal que $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ para $x \in W$.

En primer lugar, elijamos un entero k tal que $1/k < \epsilon/3$. Como $x_0 \in C$ se tiene que $x_0 \in U(1/k)$ por lo que existe un número N tal que $x_0 \in \text{Int } A_N(1/k)$. Finalmente, la continuidad de la función f_N nos permite escoger un entorno W de x_0 , contenido en $A_N(1/k)$, tal que

$$(*) \quad d(f_N(x), f_N(x_0)) < \epsilon/3 \quad \text{para } x \in W.$$

Como $W \subset A_N(1/k)$ entonces se tiene

$$d(f_n(x), f_N(x)) \leq 1/k \quad \text{para } n \geq N \text{ y } x \in W.$$

Haciendo tender $n \rightarrow \infty$ obtenemos la desigualdad

$$(**) \quad d(f(x), f_N(x)) \leq 1/k < \epsilon/3 \quad \text{para } x \in W.$$

En particular, como $x_0 \in W$, tenemos

$$(***) \quad d(f(x_0), f_N(x_0)) < \epsilon/3.$$

Aplicando la desigualdad triangular a (*), (**) y (***) se deduce el resultado. ■

Ejercicios

1. Sea X igual a la unión numerable $\bigcup B_n$. Pruebe que si X es un espacio de Baire no vacío entonces al menos uno de los conjuntos \bar{B}_n tiene interior no vacío.
2. El teorema de la categoría de Baire implica que \mathbb{R} no puede escribirse como una unión numerable de subconjuntos cerrados con interiores vacíos. Pruebe que esto no es cierto si no se exige que los conjuntos sean cerrados.
3. Pruebe que todo espacio de Hausdorff localmente compacto es un espacio de Baire.

4. Pruebe que si todo punto x de X tiene un entorno que es un espacio de Baire, entonces X es un espacio de Baire. [Indicación: use la formulación mediante conjuntos abiertos de la condición de Baire.]
5. Pruebe que si Y es un conjunto G_δ en X , y X es un espacio de Hausdorff compacto o un espacio métrico, entonces Y es un espacio de Baire en la topología relativa. [Indicación: suponga que $Y = \bigcap W_n$, donde W_n es un abierto de X , y que B_n es cerrado en Y y tiene interior vacío. Dado un abierto U_0 en X tal que $U_0 \cap Y \neq \emptyset$, encuentre una sucesión de conjuntos abiertos U_n de X con $U_n \cap Y$ no vacío y tal que

$$\begin{aligned} \bar{U}_n &\subset U_{n-1}, \\ \bar{U}_n \cap \bar{B}_n &= \emptyset, \\ \text{diá}\bar{m} U_n &< 1/n, \quad \text{en el caso métrico,} \\ \bar{U}_n &\subset W_n. \end{aligned}$$

6. Pruebe que los números irracionales son un espacio de Baire.

7. Pruebe el siguiente resultado:

Teorema. Si D es un subconjunto numerable y denso en \mathbb{R} , entonces no existe una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sólo sea continua precisamente en los puntos de D . **Demostración.**

- (a) Pruebe que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entonces el conjunto C de los puntos de continuidad de f es un conjunto G_δ en \mathbb{R} . [Indicación: sea U_n la unión de todos los conjuntos U de \mathbb{R} tales que $\text{diá}\bar{m} f(U) < 1/n$. Pruebe que $C = \bigcap U_n$.]
- (b) Pruebe que D no es un conjunto G_δ en \mathbb{R} . [Indicación: suponga que $D = \bigcap W_n$, donde W_n es un abierto en \mathbb{R} . Para $d \in D$, sea $V_d = \mathbb{R} - \{d\}$. Pruebe que $W_n \cap V_d$ son densos en \mathbb{R} .]
8. Si f_n es una sucesión de funciones continuas $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, pruebe que f es continua en un conjunto no numerable de puntos de \mathbb{R} .
9. Sea $g : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Q}$ una función biyectiva y sea $x_n = g(n)$. Definimos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$\begin{aligned} f(x_n) &= 1/n \quad \text{para } x_n \in \mathbb{Q}, \\ f(x) &= 0 \quad \text{para } x \notin \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Pruebe que f es continua en los números irracionales y discontinua en los racionales. ¿Puede encontrar una sucesión de funciones continuas f_n que converja a f ?

10. Pruebe el siguiente resultado:

Teorema (Principio de la acotación uniforme). Sea X un espacio métrico completo y sea \mathcal{F} un subconjunto de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ tal que para cada $a \in X$ el conjunto

$$\mathcal{F}_a = \{f(a) \mid f \in \mathcal{F}\}$$

está acotado. Entonces existe un conjunto no vacío U abierto en X sobre el cual las funciones de \mathcal{F} están uniformemente acotadas, esto es, existe un número M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in U$ y toda $f \in \mathcal{F}$. [Indicación: sea $A_N = \{x : |f(x)| \leq N \text{ para toda } f \in \mathcal{F}\}$.]

11. Determine si \mathbb{R}_ℓ es un espacio de Baire.

12. Pruebe que \mathbb{R}^J es un espacio de Baire en las topologías por cajas, producto y uniforme.

***13.** Sea X un espacio topológico y sea Y un espacio métrico completo. Pruebe que $\mathcal{C}(X, Y)$ es un espacio de Baire en la topología fina (véase el Ejercicio 11 de §46). [Indicación: dados los elementos de la base $B(f_i, \delta_i)$ tales que $\delta_1 \leq 1$, $\delta_{i+1} \leq \delta_i/3$ y $f_{i+1} \in B(f_i, \delta_i/3)$, pruebe que

$$\bigcap B(f_i, \delta_i) \neq \emptyset.$$

*§49 Una función no diferenciable en ningún punto

Probaremos el siguiente resultado de análisis:

Teorema 49.1. Sea $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Dado $\epsilon > 0$, existe una función $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, con $|h(x) - g(x)| < \epsilon$ para todo x , tal que g es continua y no diferenciable en ningún punto.

Demostración. Sea $I = [0, 1]$. Consideremos el espacio $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ de las funciones continuas del intervalo I en \mathbb{R} con la distancia

$$\rho(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)|\}.$$

Éste es un espacio métrico completo y, por tanto, es un espacio de Baire. Para cada n vamos a definir un subconjunto U_n de \mathcal{C} que será abierto y denso, y con la propiedad de que las funciones pertenecientes a la intersección

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} U_n$$

serán no diferenciables en ningún punto. Como \mathcal{C} es un espacio de Baire, esta intersección es densa en \mathcal{C} , por el Lema 48.1. Por tanto, dados h y ϵ , esta intersección debe contener una función g tal que $\rho(h, g) < \epsilon$ y el teorema se deduce.

La parte ingeniosa es definir el conjunto U_n adecuadamente. En primer lugar, tomemos una función f y consideremos sus cocientes incrementales. Dado $x \in I$ y dado $0 < h \leq \frac{1}{2}$, consideremos las expresiones

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \quad \text{y} \quad \left| \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \right|.$$

Como $h \leq \frac{1}{2}$, al menos uno de los números $x+h$ y $x-h$ pertenece a I , de modo que al menos una de las expresiones anteriores está definida. Sea $\Delta f(x, h)$ la mayor de las dos expresiones si ambas están definidas; en caso contrario, denota la única que está definida. Si la derivada $f'(x)$ de f en x existe, entonces es igual a los límites de estos cocientes incrementales, es decir,

$$|f'(x)| = \lim_{h \rightarrow 0} \Delta f(x, h).$$

Buscaremos una función continua para la cual el límite anterior no exista nunca. Para ser más concretos, vamos a construir una función f para la cual dado x existe una sucesión de números h_n convergente a 0 para los cuales los números $\Delta f(x, h_n)$ son arbitrariamente grandes.

Esto nos proporciona la idea para construir el conjunto U_n . Dado cualquier número positivo $h \leq 1/2$, sea

$$\Delta_h f = \inf\{\Delta f(x, h) \mid x \in I\}.$$

Entonces para $n \geq 2$ definimos U_n por la condición de que una función f pertenece a U_n si, y sólo si, $\Delta_h f > n$ para algún número positivo $h \leq 1/n$.

EJEMPLO 1. Sea $\alpha > 0$ un número dado. La función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por la ecuación $f(x) = 4\alpha x(1-x)$, cuya gráfica es una parábola, satisface la condición $\Delta f(x, h) \geq \alpha$ para $h = 1/4$ y todo x , como puede comprobarse. Hablando geométricamente, dicha propiedad significa que para cada x , al menos una de las líneas secantes indicadas en la Figura 49.1 tiene una pendiente cuyo valor absoluto es al menos α . Entonces si $\alpha > 4$ la función pertenece a U_4 . La función g dibujada en la Figura 49.1 satisface la condición $\Delta g(x, h) \geq \alpha$ para cualquier $h \leq 1/4$; entonces g pertenece a U_n siempre que $\alpha > n$. La función k satisface la condición $\Delta k(x, h) \geq \alpha$ para cualquier $h \leq 1/8$; por tanto, k pertenece a U_n si $\alpha > n$.

Ahora vamos a probar las siguientes propiedades del conjunto U_n :

(1) *La intersección $\bigcap U_n$ está formada sólo por funciones no diferenciables en ningún punto.* Sea $f \in \bigcap U_n$. Probaremos que para cualquier punto x en $[0, 1]$ el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta f(x, h)$$

no existe. Dado n , el hecho de que f pertenece a U_n significa que podemos encontrar un número h_n , con $0 < h_n \leq 1/n$, tal que

$$\Delta f(x, h_n) > n.$$

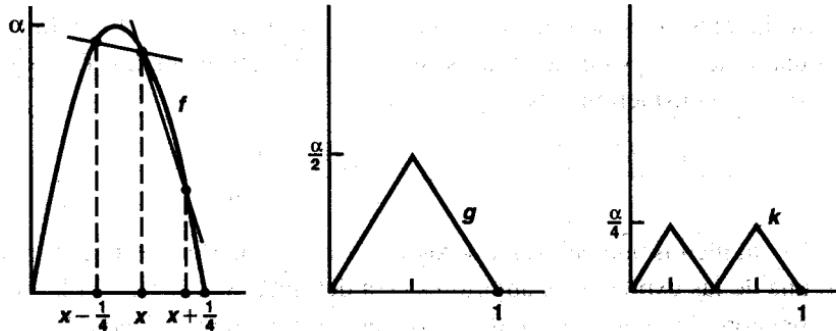


Figura 49.1

Entonces la sucesión (h_n) converge a cero, pero la sucesión $(\Delta f(x, h_n))$ no converge. Como consecuencia, f no es diferenciable en x .

(2) U_n es abierto en \mathcal{C} . Supongamos que $f \in U_n$ y consideremos un δ -entorno de f contenido en U_n . Como $f \in U_n$ existe un número h , con $0 < h \leq 1/n$, tal que $\Delta_h f > n$. Sea $M = \Delta_h f$ y escribamos

$$\delta = h(M - n)/4.$$

Afirmamos que si g es una función con $\rho(f, g) < \delta$, entonces

$$\Delta g(x, h) \geq \frac{1}{2}(M + n) > n$$

para todo $x \in I$, de forma que $g \in U_n$.

Para probar esta afirmación, supongamos en primer lugar que $\Delta f(x, h)$ es igual al cociente $|f(x + h) - f(x)|/h$. Entonces obtenemos

$$\left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \right| = \\ (1/h)|[f(x + h) - g(x + h)] - [f(x) - g(x)]| \leq 2\delta/h = (M - n)/2.$$

Si el primer cociente incremental es mayor o igual que el valor absoluto de M , entonces el valor absoluto del segundo es mayor o igual que

$$M - \frac{1}{2}(M - n) = \frac{1}{2}(M + n).$$

Un razonamiento similar se aplica si $\Delta f(x, h)$ es igual al segundo cociente incremental.

(3) U_n es denso en \mathcal{C} . Debemos probar que dada una función $f \in \mathcal{C}$ y dados números n y $\epsilon > 0$, existe un elemento g de U_n tal que $\rho(f, g) < \epsilon$.

Sea $\alpha > n$. Construiremos la función g como una “función poligonal”, es decir, una función cuya gráfica está formada por segmentos rectilíneos, donde el valor absoluto de la pendiente de cada segmento es mayor o igual que α . Se deduce inmediatamente que dicha función g debe pertenecer a U_n . En efecto, sea

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = 1$$

una partición del intervalo $[0, 1]$ tal que la restricción de g para cada subintervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ es una función lineal. Escojamos h tal que $h \leq 1/n$ y

$$h \leq \frac{1}{2} \min\{|x_i - x_{i-1}|; i = 1, \dots, k\}.$$

Si x está en el intervalo $[0, 1]$, entonces x pertenece a algún subintervalo I_i . Si x pertenece a la primera mitad del subintervalo I_i entonces $x + h$ pertenece a I_i y el cociente $(g(x + h) - g(x))/h$ es igual a la pendiente de la función lineal $g|I_i$. De modo similar, si x pertenece a la segunda mitad de I_i , entonces $x - h$ pertenece a la primera mitad de I_i y el cociente $(g(x - h) - g(x))/(-h)$ es igual a la pendiente de la función lineal $g|I_i$. En cualquier caso, $\Delta g(x, h) \geq \alpha$, de lo que se concluye que $g \in U_n$, como deseábamos.

Ahora, dados f, ϵ y α vamos a construir la función poligonal g . En primer lugar, utilizamos la continuidad uniforme de f para escoger una partición del intervalo

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$$

con la propiedad de que la variación de f en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de la partición no sea superior a $\epsilon/4$. Para cada $i = 1, \dots, m$, elegimos un punto $a_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Definimos una función poligonal g_1 por las siguientes ecuaciones

$$g_1(x) = \begin{cases} f(t_{i-1}) & \text{para } x \in [t_{i-1}, a_i] \\ f(t_{i-1}) + m_i(x - a_i) & \text{para } x \in [a_i, t_i] \end{cases}$$

donde $m_i = (f(t_i) - f(t_{i-1}))/(t_i - a_i)$. Las gráficas de f y g_1 están representadas en la Figura 49.2.

Para escoger los puntos a_i tenemos cierta flexibilidad. Si $f(t_i) \neq f(t_{i-1})$, elegimos a_i suficientemente próximo a t_i para que

$$t_i - a_i < \frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{\alpha}.$$

Entonces la gráfica de g_1 estará formada por segmentos horizontales (de pendiente cero) y segmentos con una pendiente, en valor absoluto, no inferior a α .

Además, se satisface que $\rho(g_1, f) \leq \epsilon/2$. En efecto, para x en el intervalo I_i , la diferencia de $g_1(x)$ y $f(x)$ con $f(t_{i-1})$ no es superior a $\epsilon/4$ por lo que la diferencia entre ellos no es superior a $\epsilon/2$. Entonces $\rho(g_1, f) = \max\{|g_1(x) - f(x)|\} \leq \epsilon/2$.

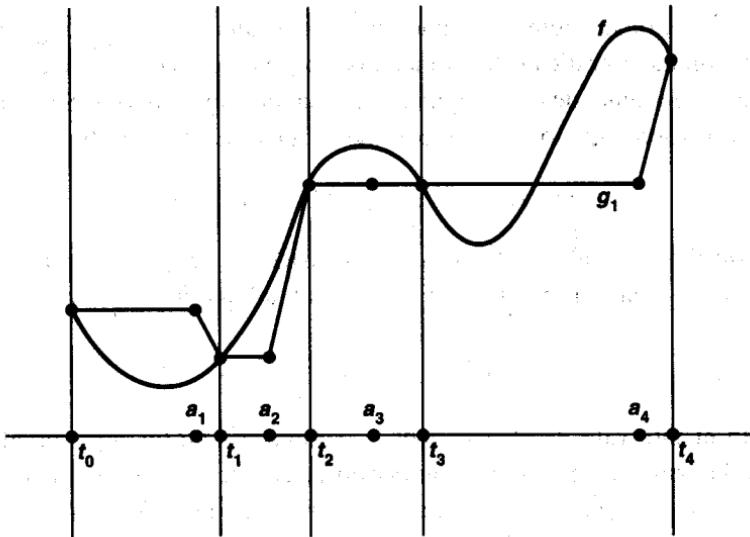


Figura 49.2

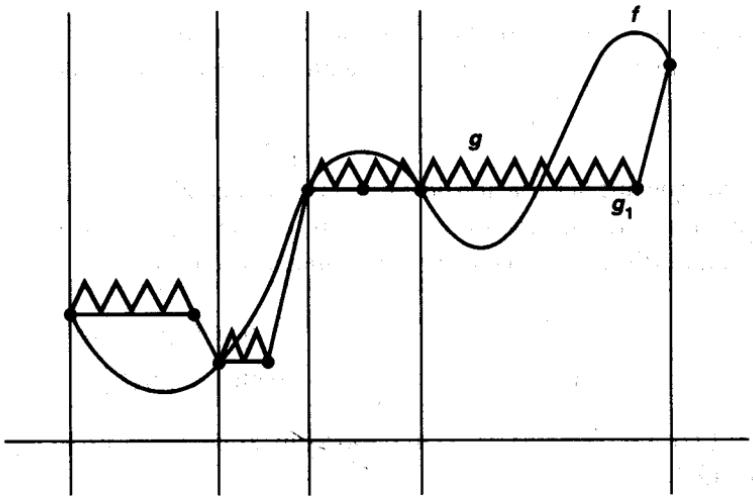


Figura 49.3

La función g_1 no es la función que estamos buscando. Definimos la función g reemplazando cada segmento horizontal de g_1 por una gráfica "sierra", cuya distancia a g_1 sea inferior a $\epsilon/2$, y con la propiedad de que el valor absoluto de la pendiente de cada segmento de la sierra no sea inferior a α . Esta parte de la construcción se deja como ejercicio al lector. El resultado es la función poligonal g que buscábamos. Véase la Figura 49.3.

Quizá pueda encontrar esta demostración frustrante, ya que es muy abstracta y la obtención de la función g no es constructiva. Sin embargo, en la demostración se encuentra implícito un procedimiento para construir la sucesión de funciones poligonales f_n que converge a la función f que no es diferenciable en ningún punto. Y la determinación de la función f de este modo es, al menos, tan constructiva como la definición usual de la función seno, por ejemplo, obtenida como el límite de una serie infinita.

Ejercicios

1. Verifique las propiedades enunciadas para las funciones f , g y k del Ejemplo 1.
2. Dados n y ϵ , defina una función continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in U_n$ y $|f(x)| \leq \epsilon$ para todo x .

§50 Introducción a la teoría de la dimensión

En §36 hemos demostrado que si X es una variedad compacta, entonces X puede ser embebido en \mathbb{R}^N para un entero positivo N . En esta sección vamos a generalizar este teorema a espacios métricos compactos arbitrarios.

Definiremos, para un espacio topológico arbitrario X , una noción de dimensión topológica. Es la “dimensión recubridora” originalmente introducida por Lebesgue. Probaremos que la dimensión topológica de cada subconjunto compacto de \mathbb{R}^m es, como máximo, m . También probaremos que la dimensión topológica de cualquier m -variedad compacta no es superior a m . De hecho, su dimensión topológica es exactamente m , pero no lo probaremos por su dificultad.

El teorema principal de esta sección es el teorema, debido a K. Menger y G. Nöbeling, que afirma que cualquier espacio compacto metrizable de dimensión topológica m puede ser embebido en \mathbb{R}^N para $N = 2m + 1$. La demostración es una aplicación del teorema de Baire. Se deduce que cualquier m -variedad compacta puede ser embebida en \mathbb{R}^{2m+1} . Así mismo, también se demuestra que un espacio compacto metrizable puede ser embebido en \mathbb{R}^N , para un cierto N , si, y sólo si, dicho espacio tiene dimensión topológica finita.

La mayoría de los cálculos que realizaremos siguen siendo válidos sin la hipótesis de compacidad. Sin embargo, nos restringiremos a este caso cuando sea conveniente. Las generalizaciones al caso no compacto se proponen en los ejercicios.

Definición. Una colección \mathcal{A} de subconjuntos de un espacio X se dice que tiene *orden* $m + 1$ si algún punto de X pertenece a $m + 1$ elementos de \mathcal{A} , y no existe ningún punto en X que pertenezca a más de $m + 1$ elementos de \mathcal{A} .

Ahora definiremos lo que entendemos por *dimensión topológica* de un espacio X . Recordemos que dada una colección \mathcal{A} de subconjuntos de X , una colección \mathcal{B} se dice que *refina* a \mathcal{A} , o que es un *refinamiento* de \mathcal{A} , si para cada elemento B de \mathcal{B} existe un elemento A de \mathcal{A} tal que $B \subset A$.

Definición. Un espacio X se dice que es de *dimensión finita* si existe algún entero m tal que para todo cubrimiento abierto \mathcal{A} de X existe un cubrimiento abierto \mathcal{B} de X que refina a \mathcal{A} y que tiene orden $m + 1$ como máximo. La *dimensión topológica* de X se define como el menor valor m que satisface lo anterior, y será denotada por $\dim X$.

EJEMPLO 1. Cualquier subespacio compacto X de \mathbb{R} tiene dimensión topológica 1, como máximo. Comenzaremos definiendo un cubrimiento abierto de \mathbb{R} de orden 2. Sea \mathcal{A}_1 la colección de los intervalos abiertos de \mathbb{R} de la forma $(n, n + 1)$, donde n es un entero. Sea \mathcal{A}_0 la colección de los intervalos abiertos $(n - 1/2, n + 1/2)$, donde n de nuevo es un entero. Entonces $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$ es un cubrimiento abierto de \mathbb{R} por conjuntos de diámetro uno. Como dos elementos de \mathcal{A}_0 siempre tienen intersección vacía, y lo mismo ocurre para dos elementos de \mathcal{A}_1 , entonces \mathcal{A} tiene orden 2.

Sea X un subespacio compacto de \mathbb{R} . Dado un cubrimiento \mathcal{C} de X por subconjuntos abiertos en X , dicho cubrimiento tiene un número de Lebesgue δ positivo. Esto significa que cualquier familia de subconjuntos de X que tengan diámetro inferior a δ es, automáticamente, un refinamiento de \mathcal{C} . Consideremos el homeomorfismo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x) = (\frac{1}{2}\delta)x$. Las imágenes a través de f de los elementos de \mathcal{A} constituyen un cubrimiento abierto de \mathbb{R} de orden 2 cuyos elementos tienen un diámetro igual a $\frac{1}{2}\delta$; sus intersecciones con X determinan el cubrimiento abierto de X que íbamos persiguiendo.

EJEMPLO 2. El intervalo $X = [0, 1]$ tiene dimensión topológica 1. Sabemos que $\dim X \leq 1$. Para probar la igualdad, sea \mathcal{A} el cubrimiento de X formado por los conjuntos $[0, 1)$ y $(0, 1]$. Probaremos que si \mathcal{B} es un cubrimiento abierto de X que refina a \mathcal{A} , entonces \mathcal{B} tiene orden mayor o igual que 2. Como \mathcal{B} refina a \mathcal{A} , entonces debe contener más de un elemento. Sea U uno de los elementos de \mathcal{B} y sea V la unión de los restantes. Si \mathcal{B} tuviera orden 1, entonces los conjuntos U y V serían disjuntos y formarían, por tanto, una separación de X . Concluimos entonces que \mathcal{B} tiene orden no inferior a 2.

EJEMPLO 3. Cualquier subconjunto compacto X de \mathbb{R}^2 tiene dimensión topológica no superior a 2. Para probar este hecho vamos a construir un cubrimiento abierto \mathcal{A} de \mathbb{R}^2 de orden 3. Comenzaremos definiendo \mathcal{A}_2 como la colección de todos los cuadrados abiertos unitarios de \mathbb{R}^2 del siguiente modo:

$$\mathcal{A}_2 = \{(n, n + 1) \times (m, m + 1) \mid n, m \text{ enteros}\}.$$

Observemos que los elementos de \mathcal{A}_2 son disjuntos. Entonces definimos una colección \mathcal{A}_1 considerando cada lado (abierto) de los cuadrados anteriores,

$$e = \{n\} \times (m, m + 1) \quad \text{o} \quad e = (n, n + 1) \times \{m\},$$

y lo extendemos ligeramente a un conjunto abierto U_e de \mathbb{R}^2 , con la precaución de que si $e \neq e'$ entonces los conjuntos U_e y $U_{e'}$ son disjuntos. También escogemos cada abierto

U_e con la condición de que su diámetro sea inferior a 2. Finalmente, definimos \mathcal{A}_0 como la colección formada por todas las bolas abiertas de radio $\frac{1}{2}$ alrededor de los puntos $n \times m$. Véase la Figura 50.1.

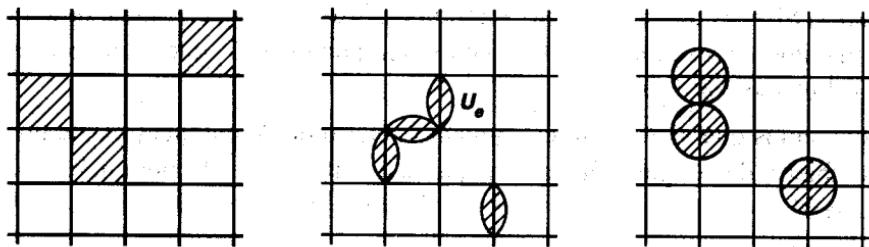


Figura 50.1

La colección de conjuntos abiertos $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_0$ recubre el plano \mathbb{R}^2 , teniendo cada uno de sus elementos un diámetro no superior a 2. Y tiene orden 3, ya que ningún punto de \mathbb{R}^2 puede estar contenido en más de un conjunto de cada familia \mathcal{A}_i .

Sea X un subespacio compacto de \mathbb{R}^2 . Cualquier cubrimiento abierto de X tiene número de Lebesgue δ positivo. Consideremos el homeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por la ecuación $f(x) = (\delta/3)x$. Las imágenes por f de los conjuntos abiertos de la colección \mathcal{A} forman un cubrimiento abierto de \mathbb{R}^2 por conjuntos cuyo diámetro es menor que δ ; sus intersecciones con X constituyen el cubrimiento abierto de X requerido.

Muy pronto generalizaremos este resultado a los subconjuntos compactos de \mathbb{R}^n .

Algunos hechos básicos sobre la dimensión topológica se proporcionan en los resultados siguientes.

Teorema 50.1. *Sea X un espacio de dimensión finita. Si Y es un subespacio cerrado de X entonces Y tiene dimensión finita y $\dim Y \leq \dim X$.*

Demuestração. Sea $m = \dim X$ y consideremos \mathcal{A} un cubrimiento de Y por conjuntos abiertos en Y . Para cada $A \in \mathcal{A}$ escogemos un conjunto abierto A' de X tal que $A' \cap Y = A$. Recubrimos X con los conjuntos abiertos A' , junto con el conjunto abierto $X - Y$. Sea \mathcal{B} un refinamiento de este cubrimiento, que es un cubrimiento abierto de X y tiene orden $m + 1$ como máximo. Entonces la familia

$$\{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

es un cubrimiento de Y por conjuntos abiertos en Y , tiene orden $m + 1$ como máximo y refina a \mathcal{A} . ■

Teorema 50.2. *Sea $X = Y \cup Z$, donde Y y Z son subespacios cerrados de X que tienen dimensión topológica finita. Entonces*

$$\dim X = \max\{\dim Y, \dim Z\}.$$

Demostración. Sea $m = \max\{\dim Y, \dim Z\}$. Probaremos que X tiene dimensión finita y que su dimensión topológica es m como máximo. Entonces el teorema precedente nos conduce a que la dimensión topológica de X es exactamente m .

Paso 1. Si \mathcal{A} es un cubrimiento abierto de X , decimos que \mathcal{A} tiene orden $m + 1$ como máximo en los puntos de Y si no existen puntos de Y que pertenezcan a más de $m + 1$ elementos de \mathcal{A} .

Probaremos que si \mathcal{A} es un cubrimiento abierto de X entonces existe un cubrimiento abierto de X que refina a \mathcal{A} y que tiene orden $m + 1$ como máximo en los puntos de Y .

Para probar lo anterior, consideremos la colección

$$\{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

Dicha familia constituye un cubrimiento abierto de Y , por lo que admite un refinamiento \mathcal{B} que es también un cubrimiento abierto de Y y que tiene orden $m + 1$ como máximo. Dado $B \in \mathcal{B}$, escogemos un conjunto abierto U_B en X tal que $U_B \cap Y = B$. Elegimos también un elemento A_B en \mathcal{A} tal que $B \subset A_B$. Sea \mathcal{C} la familia formada por todos los conjuntos $U_B \cap A_B$, con $B \in \mathcal{B}$, junto con los conjuntos $A - Y$, para $A \in \mathcal{A}$. Entonces \mathcal{C} es el cubrimiento abierto de Y que necesitamos.

Paso 2. Sea \mathcal{A} un cubrimiento abierto de X . Vamos a construir un cubrimiento abierto \mathcal{D} de X que refina a \mathcal{A} y que tenga orden $m + 1$ como máximo. Sea \mathcal{B} un cubrimiento abierto de X que refina a \mathcal{A} y que tiene orden $m + 1$ como máximo en los puntos de Y . Sea \mathcal{C} un cubrimiento abierto de X que refina a \mathcal{B} y que tiene orden $m + 1$ como máximo en los puntos de Z .

Construimos un nuevo cubrimiento \mathcal{D} de X como sigue. Definimos una aplicación $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ escogiendo para cada $C \in \mathcal{C}$ un elemento $f(C)$ de \mathcal{B} tal que $C \subset f(C)$. Dado $B \in \mathcal{B}$, definimos $D(B)$ como la unión de los elementos C de \mathcal{C} tales que $f(C) = B$. Obviamente, $D(B)$ es vacío si B no está en la imagen de f . Sea \mathcal{D} la colección de todos los conjuntos $D(B)$, para $B \in \mathcal{B}$.

Es claro que \mathcal{D} es un refinamiento de \mathcal{B} , ya que $D(B) \subset B$ para cada B por lo que \mathcal{D} refina a \mathcal{A} . Además, \mathcal{D} recubre X ya que \mathcal{C} recubre X y $C \subset D(f(C))$ para todo $C \in \mathcal{C}$. Probaremos ahora que \mathcal{D} tiene orden $m + 1$ como máximo. Supongamos que $x \in D(B_1) \cap \dots \cap D(B_k)$, donde los conjuntos $D(B_i)$ son distintos. Deseamos probar que $k \leq m + 1$. Observemos que los conjuntos B_1, \dots, B_k son distintos ya que los conjuntos $D(B_i)$ lo son. Como $x \in D(B_i)$, para cada i podemos elegir un conjunto $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C_i$ y $f(C_i) = B_i$. Los conjuntos C_i son distintos ya que los conjuntos B_i lo son. Además,

$$x \in [C_1 \cap \dots \cap C_k] \subset [D(B_1) \cap \dots \cap D(B_k)] \subset [B_1 \cap \dots \cap B_k].$$

Si resulta que $x \in Y$, entonces $k \leq m + 1$ ya que \mathcal{B} tiene orden $m + 1$ como máximo en los puntos de Y ; por el contrario, si $x \in Z$, entonces $k \leq m + 1$ porque \mathcal{C} tiene orden $m + 1$ como máximo en los puntos de Z . ■

Corolario 50.3. Sea $X = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_k$, donde cada Y_i es un subespacio cerrado de X de dimensión finita. Entonces

$$\dim X = \max\{\dim Y_1, \dots, \dim Y_k\}.$$

EJEMPLO 4. Toda 1-variedad compacta X tiene dimensión topológica 1. El espacio X puede escribirse como una unión finita de espacios homeomorfos al intervalo unidad $[0, 1]$; ahora basta aplicar el corolario precedente.

EJEMPLO 5. Toda 2-variedad compacta X tiene dimensión topológica no superior a 2. El espacio X puede escribirse como una unión finita de espacios homeomorfos a la bola unidad cerrada de \mathbb{R}^2 y, como en el ejemplo anterior, basta ahora aplicar el corolario precedente.

Una pregunta obvia puede plantearse: ¿la dimensión topológica de una 2-variedad es exactamente 2? La respuesta es “sí”, pero la demostración no es nada sencilla y requiere las técnicas y herramientas de la topología algebraica. En la Parte II de este libro probaremos que toda región cerrada triangular de \mathbb{R}^2 tiene dimensión topológica 2 como mínimo (véase §55). Se deduce entonces que todo subespacio compacto de \mathbb{R}^2 que contenga una región triangular y cerrada tiene dimensión topológica 2, de donde se llega a que toda 2-variedad compacta tiene dimensión topológica 2.

EJEMPLO 6. Un *arco* es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado unidad; los *extremos* de A son los puntos p y q de A tales que $A - \{p\}$ y $A - \{q\}$ son conexos. Un *grafo lineal* (finito) G es un espacio de Hausdorff que se escribe como la unión finita de arcos, tales que dos arcos distintos tienen como máximo un punto en común. Los arcos de la colección se denominan *aristas* de G , y los extremos de los arcos se llaman *vértices* de G . Cada lado de G es compacto y, por tanto, cerrado en G ; entonces el corolario precedente nos garantiza que G tiene dimensión topológica 1.

Dos grafos lineales particulares están representados en la Figura 50.2. El primero es un diagrama del familiar “problema del gas-agua-electricidad”; el segundo se denomina el “grafo completo de cinco vértices”. Ninguno de los dos puede ser embebido en \mathbb{R}^2 . Aunque este hecho es intuitivamente muy obvio, su demostración dista mucho de ser trivial. Presentaremos una prueba en §64.

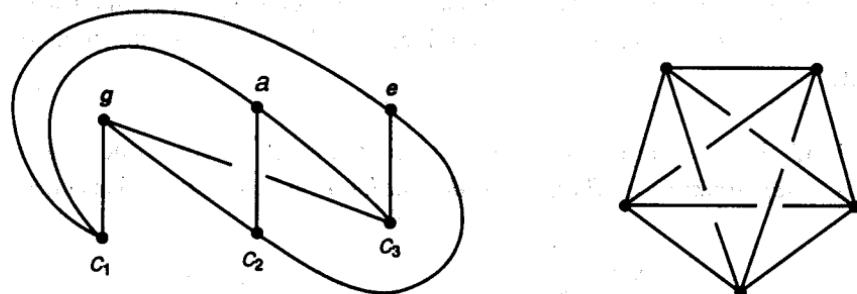


Figura 50.2

EJEMPLO 7. Todo grafo lineal finito puede ser embebido en \mathbb{R}^3 . La demostración utiliza la noción de “posición general”. Un conjunto S de puntos de \mathbb{R}^3 se dice que están en *posición general* si tres puntos de S no son nunca colineales y cuatro puntos no son coplanarios. Es fácil encontrar tales conjuntos de puntos: por ejemplo, los puntos de la curva

$$S = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

están en posición general. En efecto, si cuatro de tales puntos perteneciesen a un mismo plano $Ax + By + Cz = D$, entonces la ecuación polinómica

$$At + Bt^2 + Ct^3 = D$$

tendría cuatro raíces distintas. Y si tres de esos puntos estuviesen sobre una misma recta, podríamos tomar un punto de S de forma que tendríamos cuatro puntos sobre un mismo plano.

Ahora, dado un grafo lineal finito G , con vértices v_1, \dots, v_n , escogemos un conjunto $\{z_1, \dots, z_n\}$ de puntos de \mathbb{R}^3 que se encuentren en posición general. Definimos una aplicación $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ asociando cada vértice v_i con el punto z_i y transformando el lado entre v_i y v_j en el segmento que conecta z_i con z_j . Como cada lado de G es cerrado en G , el lema del pegamiento nos garantiza que la función f es continua. Ahora probaremos que f es inyectiva, de lo que concluiremos que f es un embebimiento. Sean $e = v_i v_j$ y $e' = v_k v_m$ dos lados de G . Si no tienen ningún vértice en común entonces los segmentos $f(e)$ y $f(e')$ son disjuntos, pues en caso contrario los puntos z_i, z_j, z_k y z_m serían coplanarios. Y si los lados e y e' tienen un vértice común, digamos $i = k$, entonces los segmentos $f(e)$ y $f(e')$ intersectan sólo en el punto $z_i = z_k$, pues en otro caso los puntos z_i, z_j y z_m serían colineales.

Ahora probaremos el teorema general del embebimiento, que nos conducirá a que todo espacio compacto metrizable de dimensión topológica m puede ser embebido en \mathbb{R}^{2m+1} . Este teorema es otro teorema “profundo”; no es obvio, por ejemplo, por qué $2m + 1$ es la dimensión crucial. Esto se verá a lo largo de la demostración del teorema.

Para probar el teorema del embebimiento, necesitamos generalizar al espacio \mathbb{R}^N la noción de posición general. Esta extensión requiere el uso de la geometría analítica de \mathbb{R}^N , que no es otra cosa que el álgebra lineal usual de \mathbb{R}^N reescrita en un lenguaje diferente.

Definición. Un conjunto $\{x_0, \dots, x_k\}$ de puntos de \mathbb{R}^N se dice que es **geométricamente independiente**, o **afinamente independiente**, si se satisfacen las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^k a_i x_i = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^k a_i = 0$$

sólo cuando cada $a_i = 0$.

Obviamente, un conjunto formado por un único punto es geométricamente independiente. Pero, ¿qué significa en general la independencia geométrica? Si resolvemos la segunda ecuación para a_0 y trasladamos la solución a la primera ecuación, observamos que esta definición es equivalente al enunciado que afirma que la ecuación

$$\sum_{i=1}^k a_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

se satisface sólo si cada $a_i = 0$. Ésta es precisamente la definición de *independencia lineal* para el conjunto de vectores $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$ del espacio vectorial \mathbb{R}^N . Esto nos da una idea para visualizar la independencia geométrica: dos puntos distintos forman un conjunto geométricamente independiente; tres puntos forman un conjunto geométricamente independiente si no son colineales; cuatro puntos en \mathbb{R}^3 forman un conjunto geométricamente independiente si no son coplanares. Y así sucesivamente.

De las observaciones anteriores se sigue que los puntos

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= (0, 0, \dots, 0), \\ \epsilon_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ &\dots \\ \epsilon_N &= (0, 0, \dots, 1)\end{aligned}$$

son geométricamente independientes en \mathbb{R}^N . Así mismo, se deduce que en \mathbb{R}^N no existe ningún conjunto de puntos geométricamente independiente con más de $N + 1$ puntos.

Definición. Sea $\{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k\}$ un conjunto de puntos en \mathbb{R}^N que es geométricamente independiente. El *plano P determinado por estos puntos* se define como el conjunto de todos los puntos \mathbf{x} de \mathbb{R}^N tales que

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^k t_i \mathbf{x}_i, \quad \text{donde } \sum_{i=0}^k t_i = 1.$$

Es fácil comprobar que P puede obtenerse como el conjunto de todos los puntos \mathbf{x} tales que

$$(*) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^k a_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0)$$

para ciertos números a_1, \dots, a_k . Por tanto, P no sólo puede describirse como “el plano determinado por los puntos $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k$ ”, sino también como “el plano que pasa por el punto \mathbf{x}_0 y es paralelo a los vectores $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$ ”.

Consideremos ahora el homeomorfismo $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ definido por la ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ y denominado *traslación* de \mathbb{R}^N . La expresión (*) prueba que esta aplicación transforma el plano P en el subespacio vectorial V^k de \mathbb{R}^N generado por los vectores $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$. Por esta razón, a menudo P se dice que es un *k-plano* en \mathbb{R}^N .

Dos hechos se deducen fácilmente. En primer lugar, si $k < N$, el *k-plano* P necesariamente tiene interior vacío en \mathbb{R}^N (pues V^k lo tiene). Y segundo, si \mathbf{y} es cualquier punto de \mathbb{R}^N que no está en P , entonces el conjunto

$$\{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}\}$$

es geométricamente independiente. En efecto, si $\mathbf{y} \notin P$, entonces $T(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{x}_0$ no está en V^k y un teorema estándar de álgebra lineal nos garantiza que los vectores $\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0, \mathbf{y} - \mathbf{x}_0\}$ son linealmente independientes, de donde se deduce nuestro resultado.

Definición. Un conjunto de puntos A en \mathbb{R}^N se dice que está en *posición general* en \mathbb{R}^N si todo subconjunto de A que contiene a lo más $N+1$ puntos es geométricamente independiente.

En el caso de \mathbb{R}^3 , esta definición coincide con la que hemos proporcionado anteriormente, como se puede comprobar fácilmente.

Lema 50.4. Dado un conjunto finito $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ de puntos en \mathbb{R}^N y dado $\delta > 0$, existe un conjunto $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$ de puntos en \mathbb{R}^N que están en posición general en \mathbb{R}^N y tales que $|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i| < \delta$ para todo i .

Demostración. Procederemos por inducción. Sea $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$. Supongamos que tenemos $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p$ puntos de \mathbb{R}^N que están en posición general. Consideremos el conjunto de todos los planos en \mathbb{R}^N determinados por subconjuntos de $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p\}$ formados por N o menos elementos. Cada subconjunto anterior es geométricamente independiente y determina un *k-plano* en \mathbb{R}^N para algún $k \leq N-1$. Cada uno de estos planos tiene interior vacío en \mathbb{R}^N . Recordemos que \mathbb{R}^N es un espacio de Baire. Elegimos como \mathbf{y}_{p+1} un punto de \mathbb{R}^N , con $|\mathbf{y}_{p+1} - \mathbf{x}_{p+1}| < \delta$, que no pertenece a ninguno de esos planos. Se deduce entonces que el conjunto

$$C = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p, \mathbf{y}_{p+1}\}$$

está en posición general en \mathbb{R}^N . En efecto, sea D cualquier subconjunto de C que contenga no más de $N+1$ elementos. Si D no contiene a \mathbf{y}_{p+1} entonces D es geométricamente independiente por la hipótesis de inducción. Si \mathbf{y}_{p+1} está contenido en D , entonces $D - \{\mathbf{y}_{p+1}\}$ no contiene más de N elementos y el punto \mathbf{y}_{p+1} no está contenido en el plano determinado por estos puntos, por construcción. Entonces D es geométricamente independiente. ■

Teorema 50.5 (Teorema del embebimiento). Todo espacio compacto metrizable X de dimensión topológica m puede ser embebido en \mathbb{R}^{2m+1} .

Demostración. Sea $N = 2m + 1$. Denotemos la distancia del supremo en \mathbb{R}^N por

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \max\{|x_i - y_i|; i = 1, \dots, N\}.$$

Usaremos ρ para denotar la distancia del supremo en el espacio de funciones continuas $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$, es decir,

$$\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in X\}.$$

El espacio $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$ es completo en la distancia ρ , ya que \mathbb{R}^N es completo en la distancia del supremo.

Sea d una distancia en el espacio X . Como X es un espacio compacto entonces d está acotada. Dada una función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^N$, definimos

$$\Delta(f) = \sup\{\text{diámetro } f^{-1}(\{z\}) \mid z \in f(X)\}.$$

El número $\Delta(f)$ mide cuánto se “desvía” f de ser inyectiva; si $\Delta(f) = 0$, cada conjunto $f^{-1}(\{z\})$ consiste en un único punto, por lo que f es inyectiva.

Dado $\epsilon > 0$ definimos U_ϵ como el conjunto de todas las aplicaciones continuas $f : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ que satisfacen $\Delta(f) < \epsilon$; dicho conjunto está formado por todas las funciones cuya “desviación” de la inyectividad es menor que ϵ . Probaremos que el conjunto U_ϵ es abierto y denso en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$. Se deduce entonces que la intersección

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} U_{1/n}$$

es densa en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$ y, en particular, es no vacía.

Si f es un elemento de esta intersección, entonces $\Delta(f) < 1/n$ para todo entero n . Por lo tanto, $\Delta(f) = 0$ y f es inyectiva. Como X es compacto, entonces f es un embebimiento. De este modo, el teorema del embebimiento está probado.

(1) U_ϵ es abierto en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$. Dado un elemento f de U_ϵ deseamos encontrar una bola $B_\rho(f, \delta)$ alrededor de f y contenida en U_ϵ . En primer lugar elegimos un número b tal que $\Delta(f) < b < \epsilon$. Observemos que si $f(x) = f(y) = z$ entonces x e y pertenecen al conjunto $f^{-1}(\{z\})$, de modo que $d(x, y)$ debe ser menor que b . Se deduce que si denotamos por A el siguiente subconjunto de $X \times X$,

$$A = \{x \times y \mid d(x, y) \geq b\},$$

entonces la función $|f(x) - f(y)|$ es positiva en A . Pero A es cerrado en $X \times X$ y, por tanto, compacto; entonces la función $|f(x) - f(y)|$ tiene un mínimo positivo en A . Sea

$$\delta = \frac{1}{2} \min\{|f(x) - f(y)|; x \times y \in A\}.$$

Afirmamos que dicho valor de δ es suficiente para nuestros propósitos.

Supongamos que g es una aplicación tal que $\rho(f, g) < \delta$. Si $x \times y \in A$, entonces $|f(x) - f(y)| \geq 2\delta$ por definición; como la distancia de $g(x)$ y $g(y)$ a $f(x)$ y $f(y)$, respectivamente, es menor que δ entonces $|g(x) - g(y)| > 0$. Por tanto, la función $|g(x) - g(y)|$ es positiva en A . Como consecuencia, si x e y son dos puntos tales que $g(x) = g(y)$ entonces necesariamente $d(x, y) < b$. Concluimos, como buscábamos, que $\Delta(g) \leq b < \epsilon$.

(2) U_ϵ es denso en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$. Esta es la parte difícil de la demostración. Aquí necesitaremos hacer uso de la geometría analítica de \mathbb{R}^N previamente discutida. Sea $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$. Dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, deseamos encontrar una función $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$ tal que $g \in U_\epsilon$ y $\rho(f, g) < \delta$.

Recubramos X por un número finito de conjuntos abiertos $\{U_1, \dots, U_n\}$ tales que

- (1) $\text{diá}\text{m } U_i < \epsilon/2$ en X ,
- (2) $\text{diá}\text{m } f(U_i) < \delta/2$ en \mathbb{R}^N ,
- (3) $\{U_1, \dots, U_n\}$ tiene orden $\leq m + 1$.

Sea $\{\phi_i\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U_i\}$ (véase §36). Para cada i , elijamos un punto $x_i \in U_i$. Entonces escogemos, para cada i , un punto z_i en \mathbb{R}^N tal que la distancia de z_i a $f(x_i)$ es menor que $\delta/2$ de tal modo que el conjunto de puntos $\{z_1, \dots, z_n\}$ esté en posición general en \mathbb{R}^N . Finalmente, definimos $g : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ por la ecuación

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) z_i.$$

Afirmamos que g es la función deseada.

En primer lugar probaremos que $\rho(f, g) < \delta$. Observemos que

$$g(x) - f(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) z_i - \sum_{i=1}^n \phi_i(x) f(x),$$

donde hemos utilizado la propiedad $\sum \phi_i(x) = 1$. Entonces

$$g(x) - f(x) = \sum \phi_i(x) (z_i - f(x_i)) + \sum \phi_i(x) (f(x_i) - f(x)).$$

Pero sabemos que $|z_i - f(x_i)| < \delta/2$ para cada i , por la elección de los puntos z_i . Por otro lado, si $\phi_i(x) \neq 0$ entonces $x \in U_i$; como se satisface $\text{diá}\text{m } f(U_i) < \delta/2$ entonces $|f(x_i) - f(x)| < \delta/2$. De la propiedad $\sum \phi_i(x) = 1$ concluimos que $|g(x) - f(x)| < \delta$ y, finalmente, deducimos que $\rho(f, g) < \delta$.

En segundo lugar vamos a probar que $g \in U_\epsilon$. Probaremos que si $x, y \in X$ y $g(x) = g(y)$ entonces x e y pertenecen a uno de los conjuntos abiertos U_i , de modo que necesariamente se verifica $d(x, y) < \epsilon/2$ (ya que $\text{diá}\text{m } U_i < \epsilon/2$). Como consecuencia, $\Delta(g) \leq \epsilon/2 < \epsilon$, como deseábamos.

Supongamos que $g(x) = g(y)$. Entonces

$$\sum_{i=1}^n [\phi_i(x) - \phi_i(y)] z_i = \mathbf{0}.$$

Como el cubrimiento $\{U_i\}$ tiene orden $m+1$ como máximo, entonces a lo más $m+1$ números $\phi_i(x)$ son no nulos y lo mismo sucede para los puntos $\phi_i(y)$. Entonces la suma $\sum[\phi_i(x) - \phi_i(y)]z_i$ tiene como máximo $2m+2$ términos no nulos. Observemos que la suma de los coeficientes se anula ya que

$$\sum [\phi_i(x) - \phi_i(y)] = 1 - 1 = 0.$$

Los puntos z_i están en posición general en \mathbb{R}^N , de modo que cualquier subconjunto con no más de $N+1$ elementos es geométricamente independiente. Y por hipótesis se tiene $N+1 = 2m+2$. Por lo tanto, concluimos que

$$\phi_i(x) - \phi_i(y) = 0$$

para todo i .

Pero $\phi_i(x) > 0$ para algún i , de modo que $x \in U_i$. Como $\phi_i(y) = \phi_i(x)$ deducimos que también $y \in U_i$, como afirmábamos. ■

Para proporcionar contenido al teorema del embebimiento necesitamos más ejemplos de espacios de dimensión finita. Probaremos el siguiente teorema.

Teorema 50.6. *Todo subespacio compacto de \mathbb{R}^N tiene dimensión topológica N como máximo.*

Demostración. La prueba es una generalización de la demostración dada en el Ejemplo 3 para \mathbb{R}^2 . Sea ρ la distancia del supremo en \mathbb{R}^N .

Paso 1. Comenzaremos dividiendo \mathbb{R}^N en “cubos unitarios”. Definimos \mathcal{J} como la siguiente familia de intervalos abiertos de \mathbb{R} :

$$\mathcal{J} = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

y denotamos por \mathcal{K} a la siguiente colección de conjuntos unipuntuales de \mathbb{R} :

$$\mathcal{K} = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Si M es un número entero tal que $0 \leq M \leq N$, sea \mathcal{C}_M el conjunto de todos los productos

$$C = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_N$$

donde exactamente M de los conjuntos A_i pertenecen a \mathcal{J} y el resto pertenecen a \mathcal{K} . Si $M > 0$, entonces C es homeomorfo al producto $(0, 1)^M$ y será llamado **M -cubo**. Si $M = 0$ entonces C es un punto y se denominará **0-cubo**.

Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_N$. Observemos que cada punto x de \mathbb{R}^N pertenece a un único elemento de \mathcal{C} , ya que cada número real x_i pertenece a un único elemento de $\mathcal{J} \cup \mathcal{K}$. Extendemos ligeramente cada elemento C de \mathcal{C} hasta formar un conjunto abierto $U(C)$ en \mathbb{R}^N , de diámetro inferior a $3/2$, tal que si C y D son dos M -cubos diferentes entonces $U(C)$ y $U(D)$ son disjuntos.

Sea $x = (x_1, \dots, x_N)$ un punto de un M -cubo C . Probaremos que existe un número $\epsilon(x) > 0$ tal que el $\epsilon(x)$ -entorno de x no corta a ningún otro cubo distinto de C . Si C es un 0-cubo, tomamos $\epsilon(x) = 1/2$ y hemos finalizado. En otro caso, $M > 0$ y exactamente M de los números x_i no son enteros. Elegimos $\epsilon \leq 1/2$ de forma que para cada x_i que no sea un entero el intervalo $(x_i - \epsilon, x_i + \epsilon)$ no contiene enteros. Si $y = (y_1, \dots, y_N)$ es un punto que pertenece al ϵ -entorno de x , entonces y_i no es entero siempre que x_i no sea entero. Esto significa que, o bien y pertenece al mismo M -cubo que x , o bien, y pertenece a algún L -cubo para $L > M$. En cualquier caso, el ϵ -entorno de x no corta a ningún otro M -cubo distinto de C .

Dado un M -cubo C , definimos el entorno $U(C)$ de C como la unión de los $\epsilon(x)/2$ -entornos de x , para todo $x \in C$. Es inmediato comprobar que si C y D son dos M -cubos distintos entonces $U(C)$ y $U(D)$ son disjuntos. Además, si z es un punto de $U(C)$ entonces $d(z, x) < \epsilon(x)/2 < 1/4$ para algún punto x de C . Como C tiene diámetro 1, entonces el conjunto $U(C)$ tiene diámetro no superior a $3/2$.

Paso 2. Dado M tal que $0 \leq M \leq N$, definimos \mathcal{A}_M como la colección de todos los conjuntos $U(C)$, donde $C \in \mathcal{C}_M$. Los elementos de \mathcal{A}_M son disjuntos y el diámetro de cada uno de ellos no es superior a $3/2$. El resto de la demostración es una copia de la prueba dada en el Ejemplo 3 para \mathbb{R}^2 . ■

Corolario 50.7. Toda m -variedad compacta tiene dimensión topológica m , como máximo.

Corolario 50.8. Toda m -variedad compacta puede ser embebida en \mathbb{R}^{2m+1} .

Corolario 50.9. Sea X un espacio compacto metrizable. Entonces X puede ser embebido en algún espacio euclídeo \mathbb{R}^N si, y sólo si, X tiene dimensión topológica finita.

Como hemos mencionado anteriormente, mucho de lo que hemos probado se verifica sin la condición de compacidad. Le proponemos las generalizaciones apropiadas en los ejercicios que siguen.

Sí hay algo que no proponemos, la demostración de que la dimensión topológica de una m -variedad es exactamente m . Y por una buena razón: la prueba requiere las herramientas y técnicas de la topología algebraica.

Tampoco proponemos que se demuestre que $N = 2m + 1$ es el menor valor de N tal que todo espacio compacto metrizable de dimensión topológica m puede ser embebido en \mathbb{R}^N . La razón es la misma. Incluso en el caso de un grafo lineal, donde $m = 1$, la demostración no es trivial, como ya señalamos anteriormente.

Para resultados adicionales sobre la teoría de la dimensión, el lector puede consultar la clásica obra de Hurewicz y Wallman [H-W]. En particular, este libro discute una nueva definición, enteramente diferente, de dimensión topológica, debida a Menger y Urysohn. Es una definición inductiva. El conjunto vacío tiene dimensión -1 . Y un espacio tiene dimensión no superior a n si existe una base para su topología tal que para cada elemento B de la base, la frontera de B tiene dimensión no superior a $n - 1$. La dimensión de un espacio es el menor valor de n que satisface la condición anterior. Esta noción de dimensión coincide con la nuestra para los espacios compactos metrizables.

Ejercicios

1. Pruebe que cualquier espacio discreto tiene dimensión 0.
2. Pruebe que cualquier espacio conexo T_1 con más de un punto tiene, como mínimo, dimensión 1.
3. Pruebe que la curva seno del topólogo tiene dimensión 1.
4. Pruebe que los puntos $0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ y $(1, 1, 1)$ están en posición general en \mathbb{R}^3 . Haga un esquema del correspondiente embebimiento en \mathbb{R}^3 del grafo completo de los cinco vértices.
5. Examine la demostración del teorema del embebimiento en el caso $m = 1$ y pruebe que la aplicación g de la parte (2) aplica X en un grafo lineal de \mathbb{R}^3 .
6. Demuestre el siguiente resultado:

Teorema. *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto con una base numerable, tal que cualquier subespacio compacto de X tiene dimensión topológica no superior a m . Entonces X es homeomorfo a un subespacio cerrado de \mathbb{R}^{2m+1} .*

Demostración. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ es una aplicación continua, se dice que $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ si dado n , existe un subespacio compacto C de X tal que $f(x) > n$ para todo $x \in X - C$.

- (a) Sea $\bar{\rho}$ la distancia uniforme en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$. Demuestre que si $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ y $\bar{\rho}(f, g) < 1$, entonces $g(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$.

- (b) Pruebe que si $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$, entonces f se extiende a una función continua en las compactificaciones por un punto. Concluya que si f es además inyectiva, entonces f es un homeomorfismo de X en un subespacio cerrado de \mathbb{R}^N .
- (c) Dada $f : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ y dado un subespacio compacto C de X , sea

$$U_\epsilon(C) = \{f \mid \Delta(f|C) < \epsilon\}.$$

Pruebe que $U_\epsilon(C)$ es abierto en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$.

- (d) Pruebe que si $N = 2m + 1$ entonces $U_\epsilon(C)$ es denso en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$. [Indicación: dada f y dados $\epsilon, \delta > 0$, escoja una función $g : C \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $d(f(x), g(x)) < \delta$ para $x \in C$, y $\Delta(g) < \epsilon$. Extienda $f - g$ a una función $h : X \rightarrow [-\delta, \delta]^N$ usando el teorema de Tietze.]
- (e) Pruebe que existe una aplicación $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$. [Indicación: escriba X como la unión de subespacios compactos C_n tales que $C_n \subset \text{Int } C_{n+1}$ para todo n .]
- (f) Sea C_n como en el apartado anterior. Use el hecho de que $\bigcap U_{1/n}(C_n)$ sea denso en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$ para completar la demostración.

7. Corolario. Toda m -variedad puede ser embebida en \mathbb{R}^{2m+1} como un subespacio cerrado.

8. Recordemos que X se dice que es σ -compacto si existe una colección numerable de subespacios compactos de X cuyos interiores recubren X .

Teorema. Sea X un espacio σ -compacto. Si todo subespacio compacto de X tiene dimensión topológica no superior a m , entonces también se satisface para X .

Demostración. Sea \mathcal{A} un cubrimiento abierto de X . Encuentre un cubrimiento abierto \mathcal{B} de X , que refina a \mathcal{A} y que tenga orden no superior a $m + 1$, como sigue:

- (a) Pruebe que $X = \bigcup X_n$, donde X_n es compacto y $X_n \subset \text{Int } X_{n+1}$ para todo n . Sea $X_0 = \emptyset$.
- (b) Encuentre un cubrimiento abierto \mathcal{B}_0 de X , que refina \mathcal{A} , y tal que para cada n , cada elemento de \mathcal{B}_0 que corta a X_n está en X_{n+1} .
- (c) Suponga que $n \geq 0$ y \mathcal{B}_n es un cubrimiento abierto de X , que refina \mathcal{B}_0 , y tal que \mathcal{B}_n tiene orden $m + 1$ como máximo en los puntos de X_n . Escoja un cubrimiento abierto \mathcal{C} de X , que refina \mathcal{B}_n , y que tenga orden $m + 1$ como máximo en los puntos de X_{n+1} . Sea una función $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}_n$ tal que $C \subset f(C)$. Para $B \in \mathcal{B}_n$, sea $D(B)$ la unión de los conjuntos C tales que $f(C) = B$. Sea \mathcal{B}_{n+1} la colección de todos los conjuntos $B \in \mathcal{B}_n$ tales que $B \cap X_{n-1} \neq \emptyset$, junto con todos los conjuntos $D(B)$ tales que $B \in \mathcal{B}_n$ y $B \cap X_{n-1} = \emptyset$. Pruebe que \mathcal{B}_{n+1} es un cubrimiento abierto de

X que refina \mathcal{B}_n y que tiene orden $m + 1$ como máximo en los puntos de X_{n+1} .

- (d) Defina \mathcal{B} como sigue: un conjunto B pertenece a \mathcal{B} si existe un número N tal que $B \in \mathcal{B}_n$ para todo $n \geq N$.

9. Corolario. Toda m -variedad tiene dimensión topológica m como máximo.

10. Corolario. Todo subespacio cerrado de \mathbb{R}^N tiene dimensión topológica N como máximo.

11. Corolario. Un espacio X puede ser embebido como un subespacio cerrado en \mathbb{R}^N , para algún entero N , si, y sólo si, X es localmente compacto y de Hausdorff con una base numerable, y tiene dimensión topológica finita.

*Ejercicios complementarios: espacios localmente euclídeos

Un espacio X se dice que es **localmente m -euclídeo** si para cada $x \in X$ existe un entorno de x que es homeomorfo a un conjunto abierto de \mathbb{R}^m . Todo espacio localmente euclídeo automáticamente satisface el axioma T_1 , pero no necesariamente es un espacio de Hausdorff (véanse los ejercicios de §36). Sin embargo, si X es de Hausdorff y tiene una base numerable, entonces X se dice que es una **m -variedad**.

A lo largo de los siguientes ejercicios, X denotará un espacio localmente m -euclídeo.

1. Pruebe que X es localmente compacto y localmente metrizable.

2. Considere las siguientes condiciones sobre X :

- (i) X es de Hausdorff y compacto.
- (ii) X es una m -variedad.
- (iii) X es metrizable.
- (iv) X es normal.
- (v) X es de Hausdorff.

Pruebe que (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v).

3. Pruebe que \mathbb{R} es localmente 1-euclídeo y satisface (ii) pero no (i).

4. Pruebe que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, con la topología del diccionario, es localmente 1-euclídeo y satisface (iii) pero no (ii).

5. Pruebe que la línea larga es localmente 1-euclídeo y satisface (iv) pero no (iii) (véanse los ejercicios de §24).

*6. Existe un espacio que es localmente 2-euclídeo y que satisface (v) pero no (iv). Se construye de la siguiente manera. Sea A el siguiente subespacio de \mathbb{R}^3 :

$$A = \{(x, y, 0) \mid x > 0\}.$$

Dado un número real c , sea B_c el siguiente subespacio de \mathbb{R}^3 :

$$B_c = \{(x, y, c) \mid x \leq 0\}.$$

Sea X el conjunto unión de A y todos los espacios B_c , para todo número c . Consideremos la topología en X generada por la base formada por los conjuntos de los siguientes tres tipos:

- (i) U , donde U es abierto en A .
- (ii) V , donde V es abierto en el subespacio de B_c formado por los puntos con $x < 0$.
- (iii) Para cada intervalo $I = (a, b)$ de \mathbb{R} , cada número real x y cada $\epsilon > 0$, el conjunto $A_c(I, \epsilon) \cup B_c(I, \epsilon)$, donde

$$A_c(I, \epsilon) = \{(x, y, 0) \mid 0 < x < \epsilon \quad y \quad c + ax < y < c + bx\},$$

$$B_c(I, \epsilon) = \{(x, y, c) \mid -\epsilon < x \leq 0 \quad y \quad a < y < b\}.$$

El espacio X se denomina “variedad de Prüfer”.

- (a) Represente los conjuntos $A_c(I, \epsilon)$ y $B_c(I, \epsilon)$.
- (b) Pruebe que los conjuntos de los tipos (i)–(iii) constituyen una base para una topología en X .
- (c) Pruebe que la aplicación $f_c : \mathbb{R}^2 \rightarrow X$ dada por

$$f_c(x, y) = \begin{cases} (x, c + xy, 0) & \text{para } x > 0 \\ (x, y, c) & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$$

define un homeomorfismo de \mathbb{R}^2 en el subespacio $A \cup B_c$ de X .

- (d) Pruebe que $A \cup B_c$ es abierto en X ; deduzca que X es 2-euclídeo.
- (e) Pruebe que X es de Hausdorff.
- (f) Pruebe que X es normal. [Indicación: el subespacio de X

$$L = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

es cerrado y discreto. Compare con el Ejemplo 3 de §31.]

7. Pruebe que X es de Hausdorff si, y sólo si, X es completamente regular.
8. Pruebe que X es metrizable si, y sólo si, X es de Hausdorff y paracompacto.
9. Pruebe que si X es metrizable, entonces cada componente de X es una variedad.

Parte II

TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

Capítulo 9

El grupo fundamental

Uno de los problemas básicos en topología es determinar si dos espacios topológicos dados son homeomorfos. No hay un método para resolver este problema en general, pero existen técnicas que se aplican en casos particulares.

Demostrar que dos espacios *son* homeomorfos consiste en construir una aplicación continua de uno en el otro que tenga inversa continua, y construir aplicaciones continuas es un problema para el cual hemos desarrollado técnicas que lo permiten.

Demostrar que dos espacios *no* son homeomorfos es una cuestión diferente. Para ello, debemos probar que *no* existe ninguna aplicación continua con inversa continua. Si podemos encontrar alguna propiedad topológica que sea cierta para un espacio pero no para el otro, entonces el problema queda resuelto —los espacios no pueden ser homeomorfos. Por ejemplo, el intervalo cerrado $[0, 1]$ no puede ser homeomorfo al intervalo abierto $(0, 1)$, porque el primer espacio es compacto y el segundo no lo es. Y la recta real \mathbb{R} no puede ser homeomorfa a la “recta larga” L porque \mathbb{R} tiene una base numerable y L no. Tampoco la recta real \mathbb{R} puede ser homeomorfa al plano \mathbb{R}^2 ; quitando un punto de \mathbb{R}^2 el espacio se mantiene conexo y, en cambio, quitándolo de \mathbb{R} esto no ocurre.

Sin embargo, las propiedades topológicas que hemos estudiado hasta ahora no van muy lejos en la resolución del problema. Por ejemplo, ¿cómo demostramos que el plano \mathbb{R}^2 no es homeomorfo al espacio tridimensional \mathbb{R}^3 ? Cuando recorremos la lista de propiedades topológicas —compacidad, conexión, conexión local, metrizabilidad, y así sucesivamente— no encontramos una propiedad que los distinga. Como otro ejemplo, consideraremos superficies tales como la 2-esfera S^2 , el toro T (superficie de un donut) y el doble toro $T \# T$ (superficie de un donut con dos agujeros). Ninguna de las propiedades topológicas que hemos estudiado hasta ahora permite distinguirlas.

Por tanto, debemos introducir nuevas propiedades y nuevas técnicas. Una de las propiedades más usuales es la de ser *simplemente conexo*. Probablemente el lector ya aprendió este concepto cuando estudió integrales de línea en el plano. Hablando

a grandes rasgos, decimos que un espacio X es simplemente conexo si toda curva cerrada en X puede contraerse a un punto en X (haremos más precisa la definición más adelante). La propiedad de conexión simple va a distinguir ahora entre \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 ; en efecto, quitando un punto de \mathbb{R}^3 el espacio obtenido sigue siendo simplemente conexo, pero al quitar un punto de \mathbb{R}^2 sucede lo contrario. También va a distinguir entre S^2 (que es simplemente conexa) y el toro (que no lo es). Sin embargo, no va a distinguir entre T y $T \# T$, ya que ninguno de los dos es simplemente conexo.

Existe una idea más general que el concepto de conexión simple, una idea que incluye la conexión simple como un caso particular. Ésta involucra cierto *grupo* que se conoce como *grupo fundamental del espacio*. Dos espacios que son homeomorfos tienen grupos fundamentales isomorfos. Y la condición de conexión simple es precisamente la condición de que el grupo fundamental de X sea el grupo trivial (grupo con un elemento). De esta forma, la demostración de que S^2 y T no son homeomorfos puede ser reformulada diciendo que el grupo fundamental de S^2 es trivial y el grupo fundamental de T no lo es. El grupo fundamental va a distinguir entre más espacios que la condición de conexión simple. Por ejemplo, esto puede ser utilizado para demostrar que T y $T \# T$ no son homeomorfos; resulta que T tiene grupo fundamental abeliano y $T \# T$ no.

Es este capítulo definimos el grupo fundamental y estudiamos sus propiedades. Posteriormente las aplicamos a determinados problemas, incluyendo el problema de demostrar que algunos espacios, tales como los ya mencionados, no son homeomorfos.

Otras aplicaciones incluyen teoremas que tratan con puntos fijos y aplicaciones que conservan los puntos antípodas de la esfera, así como el bien conocido *teorema fundamental del álgebra*, el cual dice que toda ecuación polinómica con coeficientes reales o complejos tiene una raíz. Finalmente, obtenemos el famoso *teorema de la curva de Jordan*, el cual estudiaremos en el siguiente capítulo; este teorema establece que toda curva simple cerrada C en el plano separa a éste en dos componentes, donde C es la frontera común.

A lo largo del capítulo, suponemos que el lector está familiarizado con la topología cociente (§22) y la conexión local (§25).

§51 Homotopía de caminos

Antes de definir el grupo fundamental de un espacio X , vamos a considerar caminos sobre X y una relación de equivalencia entre ellos conocida como *homotopía de caminos*. Posteriormente, definiremos cierta operación sobre la colección de las clases de equivalencia que la convierte en lo que en álgebra se conoce como un *grupoide*.

Definición. Si f y f' son aplicaciones continuas del espacio X en el espacio Y , decimos que f es **homotópica** a f' si existe una aplicación continua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que

$$F(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad F(x, 1) = f'(x)$$

para cada $x \in X$ (aquí $I = [0, 1]$). La aplicación F se conoce como **homotopía** entre f y f' . Si f es homotópica a f' , escribimos $f \simeq f'$. Si $f \simeq f'$ y f' es una aplicación constante, decimos que f es **homotópicamente nula**.

Podemos imaginar una homotopía como una familia uniparamétrica continua de aplicaciones de X en Y . Si pensamos en el parámetro t como representante del tiempo, entonces la homotopía F describe una “deformación” continua de la aplicación f en la aplicación f' , cuando t se mueve de 0 a 1.

Consideremos ahora el caso especial en el cual f es un camino en X . Recordemos que si $f : [0, 1] \rightarrow X$ es una aplicación continua tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = x_1$, decimos que f es un camino en X desde x_0 hasta x_1 . También decimos que x_0 es el **punto inicial** y x_1 es el **punto final** del camino f . En este capítulo usaremos, por conveniencia, el intervalo $I = [0, 1]$ como el dominio de todos los caminos.

Si f y f' son dos caminos en X , existe una relación más fuerte entre ellos que la de homotopía simplemente. Está definida como sigue:

Definición. Dos caminos f y f' , que aplican el intervalo I en X , se dice que son **homotópicos por caminos** si tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1 , y si existe una aplicación continua $F : I \times I \rightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= f(s) & \text{y} & \quad F(s, 1) = f'(s), \\ F(0, t) &= x_0 & \text{y} & \quad F(1, t) = x_1, \end{aligned}$$

para cada $s \in I$ y cada $t \in I$. La aplicación F recibe el nombre de **homotopía de caminos** entre f y f' . Véase la Figura 51.1. Si f es homotópico por caminos a f' , escribimos $f \simeq_p f'$.

La primera condición dice simplemente que F es una homotopía entre f y f' , y la segunda dice que, para cada t , la aplicación f_t , definida por la ecuación $f_t(s) = F(s, t)$, es un camino desde x_0 hasta x_1 . Dicho de otro modo, la primera condición dice que F representa una forma continua de deformar el camino f en el camino f' , y la segunda dice que los puntos extremos del camino permanecen fijos durante la deformación.

Lema 51.1. Las relaciones \simeq y \simeq_p son relaciones de equivalencia.

Si f es un camino, denotaremos su clase de equivalencia de homotopía de caminos por $[f]$.

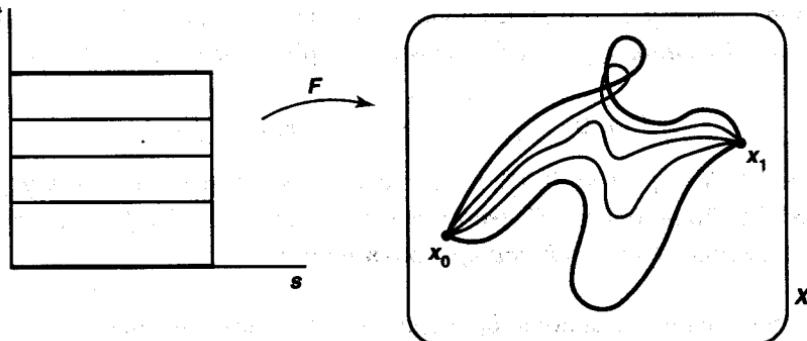


Figura 51.1

Demostración. Comprobemos las propiedades de una relación de equivalencia.

Dado f , es trivial que $f \simeq f$; la aplicación $F(x, t) = f(x)$ es la homotopía requerida. Si f es un camino, F es una homotopía de caminos.

Supongamos que $f \simeq f'$ y demostremos que $f' \simeq f$. Sean F una homotopía entre f y f' . Entonces $G(x, t) = F(x, 1-t)$ es una homotopía entre f' y f . Si F es una homotopía de caminos, también lo es G .

Supongamos que $f \simeq f'$ y $f' \simeq f''$. Probemos que $f \simeq f''$. Sean F una homotopía entre f y f' , y F' una homotopía entre f' y f'' . Definamos $G : X \times I \rightarrow Y$ por la ecuación

$$G(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{para } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F'(x, 2t - 1) & \text{para } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La aplicación G está bien definida ya que, para $t = \frac{1}{2}$, tenemos $F(x, 2t) = f'(x) = F'(x, 2t - 1)$. Dado que G es continua en los dos subconjuntos cerrados $X \times [0, \frac{1}{2}]$ y $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ de $X \times I$, entonces G es continua en todo $X \times I$, por el lema del pegamiento. Por lo tanto, G es la homotopía requerida entre f y f'' .

El lector puede comprobar que si F y F' son homotopías de caminos, entonces también lo es G (véase la Figura 51.2). ■

EJEMPLO 1. Sean f y g dos aplicaciones cualesquiera de un espacio X en \mathbb{R}^2 . Es fácil comprobar que f y g son homotópicas; la aplicación

$$F(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

es una homotopía entre ellas. Se conoce como **homotopía por rectas** porque lleva el punto $f(x)$ al punto $g(x)$ a lo largo del segmento de recta que las une.

Si f y g son caminos de x_0 a x_1 , entonces F será una homotopía de caminos, como puede comprobar el lector. Esta última situación está representada en la Figura 51.3.

En general, sea A un subespacio *convexo* de \mathbb{R}^n (lo cual significa que para dos puntos cualesquiera a, b de A , el segmento de recta que los une está contenido en A). Entonces

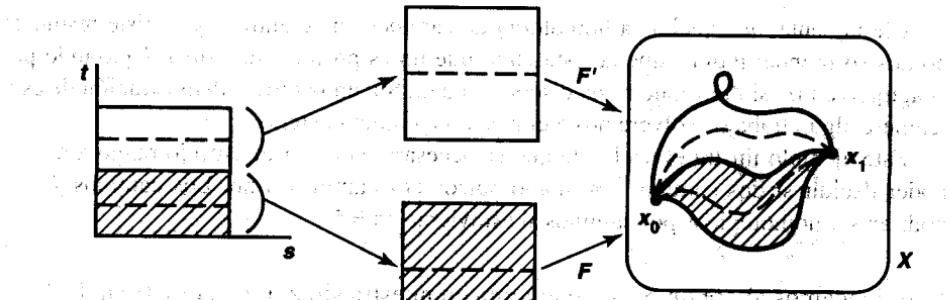


Figura 51.2

dos caminos cualesquiera f, g en A de x_0 a x_1 son homotópicos por caminos en A , ya que la homotopía por rectas F entre ellos mantiene su imagen en A .

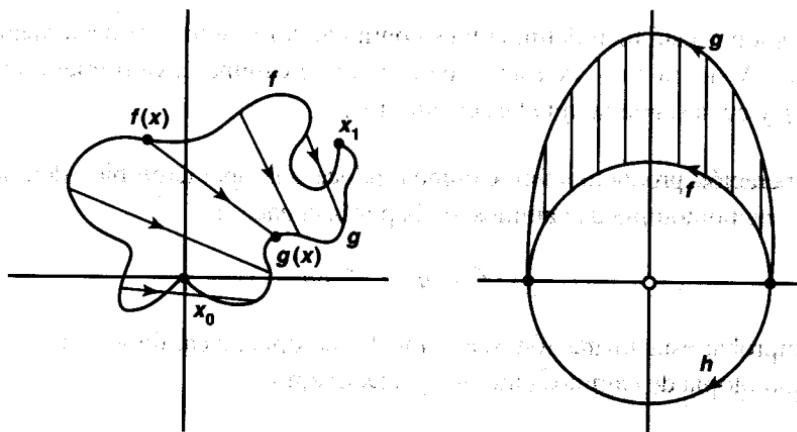


Figura 51.3

Figura 51.4

EJEMPLO 2. Denotemos por X el **plano agujereado** $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, el cual escribiremos como $\mathbb{R}^2 - 0$ para abreviar. Los siguientes caminos en X ,

$$f(s) = (\cos \pi s, \operatorname{sen} \pi s),$$

$$g(s) = (\cos \pi s, 2 \operatorname{sen} \pi s)$$

son homotópicos por caminos; la homotopía por rectas entre ellos es una homotopía de caminos aceptable. Pero la homotopía por rectas entre f y el camino

$$h(s) = (\cos \pi s, -\operatorname{sen} \pi s)$$

no es válida, porque su imagen no está contenida en el espacio $X = \mathbb{R}^2 - 0$. Véase la Figura 51.4.

Ciertamente, *no* existe una homotopía de caminos en X entre f y h . Este resultado no nos sorprende; intuitivamente está claro que no es posible “deformar f pasando por el agujero en 0” sin introducir una discontinuidad. Sin embargo, la demostración de esto requiere algún trabajo. Volveremos a ella en un ejemplo posterior.

Este ejemplo ilustra el hecho de que es necesario conocer el espacio rango antes de poder decidir si dos caminos son homotópicos por caminos o no. Los caminos f y h podrían ser homotópicos por caminos si estuvieran en \mathbb{R}^2 .

Introduzcamos ahora un poco de álgebra en nuestra situación geométrica. Definamos cierta operación sobre las clases de homotopía de caminos como sigue:

Definición. Si f es un camino en X de x_0 a x_1 , y g es un camino en X de x_1 a x_2 , definimos el **producto** $f * g$ de f y g como el camino h dado por las ecuaciones

$$h(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1), & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La aplicación h está bien definida y es continua, por el lema del pegamiento; es un camino en X de x_0 a x_2 . Pensamos en h como el camino cuya primera mitad es el camino f y cuya segunda mitad es el camino g .

La operación producto sobre caminos induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de caminos, dada por la ecuación

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Para comprobar esta afirmación, sea F una homotopía de caminos entre f y f' y sea G una homotopía de caminos entre g y g' . Definamos

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s - 1, t) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Dado que $F(1, t) = x_1 = G(0, t)$, para todo t , la aplicación H está bien definida; es continua por el lema del pegamiento. El lector puede comprobar que H es la homotopía de caminos requerida entre $f * g$ y $f' * g'$. Está representada en la Figura 51.5.

La operación $*$ sobre clases de homotopía de caminos satisface propiedades muy parecidas a los axiomas de grupo. Estas propiedades se conocen como *propiedades de grupoide* de $*$. Una diferencia respecto de las propiedades de grupo es que $[f] * [g]$ no está definida para cualquier par de clases, sino únicamente para aquellos pares $[f], [g]$ para los que $f(1) = g(0)$.

Teorema 51.2. La operación $*$ tiene las siguientes propiedades:

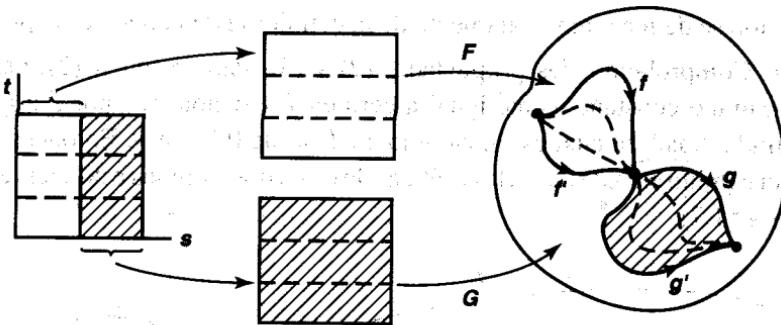


Figura 51.5

- (1) (Asociatividad). Si $[f] * ([g] * [h])$ está definida, también lo está $([f] * [g]) * [h]$, y son iguales.
- (2) (Neutro a izquierda y derecha). Dado $x \in X$, denotemos por e_x el camino constante $e_x : I \rightarrow X$ que lleva todo I al punto x . Si f es un camino en X desde x_0 hasta x_1 , entonces

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \quad \text{y} \quad [e_{x_0}] * [f] = [f].$$

- (3) (Inverso). Dado el camino f en X desde x_0 hasta x_1 , sea \bar{f} el camino definido por $\bar{f}(s) = f(1-s)$, el cual se conoce como **inverso** de f . Entonces

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \quad \text{y} \quad [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}].$$

Demostración. Vamos a utilizar dos hechos elementales. El primero es el hecho de que si $k : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua y si F es una homotopía de caminos en X entre los caminos f y f' , entonces $k \circ F$ es una homotopía de caminos en Y entre los caminos $k \circ f$ y $k \circ f'$. Véase la Figura 51.6.

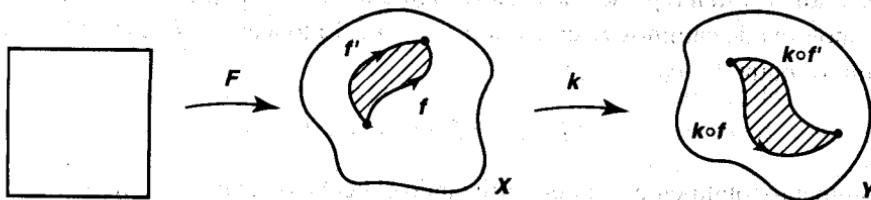


Figura 51.6

El segundo es el hecho de que si $k : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua y si f y g son caminos en X con $f(1) = g(0)$, entonces

$$k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g).$$

Esta ecuación se deduce inmediatamente de la definición de la operación producto *.

Paso 1. Comprobemos las propiedades (2) y (3). Para verificar (2), denotemos por e_0 el camino constantemente igual a cero en I y denotemos por $i : I \rightarrow I$ la aplicación identidad, la cual es un camino en I desde 0 hasta 1. Entonces $e_0 * i$ es también un camino en I de 0 a 1 (las gráficas de estos dos caminos están representadas en la Figura 51.7).

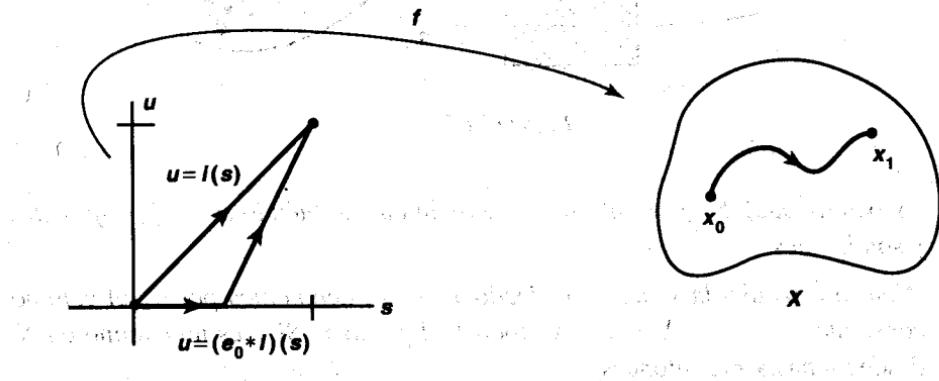


Figura 51.7

Como I es conexo, existe una homotopía de caminos G en I entre i y $e_0 * i$. Entonces $f \circ G$ es una homotopía de caminos en X entre los caminos $f \circ i = f$ y

$$f \circ (e_0 * i) = (f \circ e_0) * (f \circ i) = e_{x_0} * f.$$

Siguiendo un argumento similar, utilizando el hecho de que si e_1 denota el camino constantemente 1 entonces $i * e_1$ es homotópico por caminos en I al camino i , se demuestra que $[f] * [e_{x_1}] = [f]$.

Para comprobar (3), observemos que el inverso de i es $\bar{i}(s) = 1 - s$. Entonces $i * \bar{i}$ es un camino en I comenzando y acabando en 0, igual que el camino constante e_0 (sus gráficas están representadas en la Figura 51.8). Dado que I es convexo, existe una homotopía de caminos H en I entre e_0 e $i * \bar{i}$. Entonces $f \circ H$ es una homotopía de caminos entre $f \circ e_0 = e_{x_0}$ y

$$(f \circ i) * (f \circ \bar{i}) = f * \bar{f}.$$

Un argumento totalmente análogo, utilizando el hecho de que $\bar{i} * i$ es homotópico por caminos en I a e_1 , demuestra que $[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$.

Paso 2. La demostración de (1), asociatividad, es más delicada. Para ello, y también para uso posterior, será conveniente describir el producto $f * g$ de una forma diferente.

Si $[a, b]$ y $[c, d]$ son dos intervalos en \mathbb{R} , existe una única aplicación $p : [a, b] \rightarrow [c, d]$ de la forma $p(x) = mx + k$ que lleva a a c y b a d , denominada **aplicación lineal**

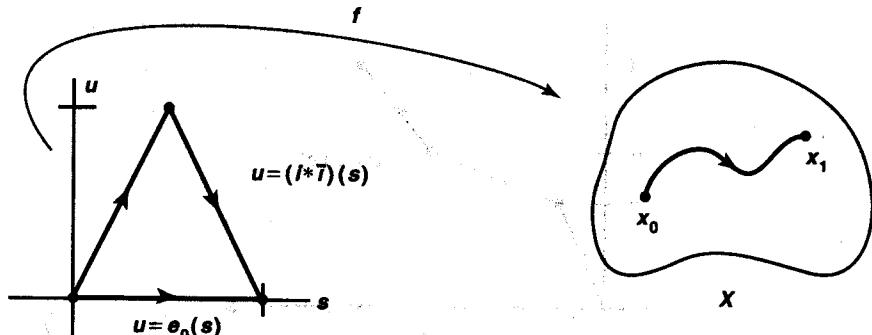


Figura 51.8

positiva de $[a, b]$ a $[c, d]$ porque su gráfica es un línea recta con pendiente positiva. Observemos que la inversa de dicha aplicación es otra de tales aplicaciones, igual que ocurre con la composición de dos aplicaciones de este tipo.

Con esta terminología, el producto $f * g$ puede describirse como sigue: en $[0, \frac{1}{2}]$ es igual a la aplicación lineal positiva de $[0, \frac{1}{2}]$ a $[0, 1]$ compuesta con la aplicación f y en $[\frac{1}{2}, 1]$ coincide con la aplicación lineal positiva de $[\frac{1}{2}, 1]$ en $[0, 1]$ compuesta con g .

Comprobamos ahora (1). Dados caminos f, g y h en X , los productos $f * (g * h)$ y $(f * g) * h$ están definidos precisamente cuando $f(1) = g(0)$ y $g(1) = h(0)$. Suponiendo estas dos condiciones, definimos también un “triple producto” de los caminos f, g y h como sigue: elegimos puntos a y b de I tales que $0 < a < b < 1$ y definimos un camino $k_{a,b}$ en X de la siguiente forma: en $[0, a]$ es igual a la aplicación lineal positiva de $[0, a]$ a I , compuesta con f ; en el intervalo $[a, b]$ coincide con la aplicación lineal positiva de $[a, b]$ a I , compuesta con la aplicación g ; y, en $[b, 1]$, es igual a la aplicación lineal positiva de $[b, 1]$ a I , compuesta con h . Ciertamente, el camino $k_{a,b}$ depende de la elección de los puntos a y b , pero su clase de homotopía de caminos no. Probemos que si c y d es otro par de puntos de I con $0 < c < d < 1$, entonces $k_{c,d}$ es homotópico por caminos a $k_{a,b}$.

Sea $p : I \rightarrow I$ la aplicación cuya gráfica está representada en la Figura 51.9. Cuando la restringimos a $[0, a]$, $[a, b]$ y $[b, 1]$, respectivamente, coincide con las aplicaciones lineales positivas de estos intervalos en $[0, c]$, $[c, d]$ y $[d, 1]$, respectivamente. Se sigue de inmediato que $k_{c,d} \circ p$ es igual a $k_{a,b}$. Pero p es un camino en I de 0 a 1 igual que la aplicación identidad $i : I \rightarrow I$. Por tanto, existe una homotopía de caminos P en I entre p e i . Entonces $k_{c,d} \circ P$ es una homotopía de caminos en X entre $k_{a,b}$ y $k_{c,d}$.

¿Qué tiene esto que ver con la asociatividad? Está muy relacionado, porque el producto $f * (g * h)$ es exactamente el triple producto $k_{a,b}$ cuando $a = 1/2$ y $b = 3/4$, como puede comprobar el lector; mientras que el producto $(f * g) * h$ coincide con

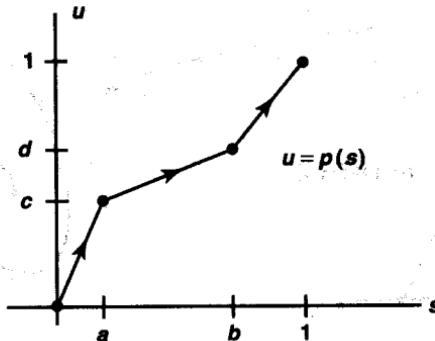


Figura 51.9

$k_{c,d}$ en el caso donde $c = 1/4$ y $d = 1/2$. Por consiguiente, los dos productos son homotópicos por caminos.

El argumento que acabamos de utilizar para probar la asociatividad es válido para cualquier producto de un número finito de caminos. Hablando a grandes rasgos, podemos decir que, mientras el resultado concierne a clases de homotopía de caminos, no importa cómo se parte el intervalo cuando formamos el producto de caminos. Este resultado nos será muy útil más adelante, de manera que lo establecemos formalmente a continuación.

Teorema 51.3. *Sea f un camino en X y sean a_0, \dots, a_n números tales que $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$. Sea $f_i : I \rightarrow X$ el camino igual a la aplicación lineal positiva de I en $[a_{i-1}, a_i]$ compuesta con f . Entonces*

$$[f] = [f_1] * \cdots * [f_n].$$

Ejercicios

- Demuestre que si $h, h' : X \rightarrow Y$ son homotópicas y $k, k' : Y \rightarrow Z$ son homotópicas, entonces $k \circ h$ y $k' \circ h'$ son homotópicas.
- Dados espacios X e Y , denote por $[X, Y]$ el conjunto de las clases de homotopía de aplicaciones de X en Y .
 - Sea $I = [0, 1]$. Demuestre que, para cualquier X , el conjunto $[X, I]$ tiene un único elemento.
 - Demuestre que si Y es conexo por caminos, el conjunto $[I, Y]$ tiene un único elemento.
- Un espacio X se dice que es **contractible** si la aplicación identidad $i_X : X \rightarrow X$ es homotópicamente nula.

- (a) Demuestre que I y \mathbb{R} son contractiles.
- (b) Pruebe que un espacio contractible es conexo por caminos.
- (c) Demuestre que si Y es contractible, entonces para cualquier X , el conjunto $[X, Y]$ tiene un único elemento.
- (d) Pruebe que si X es contractible e Y es conexo por caminos, entonces $[X, Y]$ tiene un único elemento.

§52 El grupo fundamental

El conjunto de las clases de homotopía de caminos en un espacio X no es un grupo con la operación $*$ porque el producto de dos clases de homotopía de caminos no está siempre definido. Pero supongamos que cogemos un punto x_0 de X que nos sirva como “punto base” y nos restringimos a aquellos caminos que comienzan y acaban en x_0 . El conjunto de sus clases de homotopía de caminos sí es un grupo con la operación $*$. Éste será denominado *grupo fundamental* de X .

En esta sección estudiamos el grupo fundamental y deducimos algunas de sus propiedades. En particular, probaremos que el grupo fundamental es un invariante topológico del espacio X , un hecho que tiene una importancia crucial para el estudio de problemas de existencia de homeomorfismos.

Revisemos alguna terminología de la teoría de grupos. Supongamos que G y G' son dos grupos, con sus operaciones indicadas multiplicativamente. Un **homomorfismo** $f : G \rightarrow G'$ es una aplicación tal que $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, para todos x, y , por lo que automáticamente satisface las ecuaciones $f(e) = e'$ y $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, donde e y e' son los neutros de G y G' , respectivamente, y el exponente -1 denota el inverso. El **núcleo** de f es el conjunto $f^{-1}(e')$, el cual es un subgrupo de G . Igualmente, la imagen de f es un subgrupo de G' . El homomorfismo f se dice que es un **monomorfismo** si es inyectivo (o, equivalentemente, el núcleo de f contiene sólo al neutro e). Se dice que es un **epimorfismo** si es sobreinyectivo, y es un **isomorfismo** si es biyectivo.

Supongamos que G es un grupo y H es un subgrupo de G . Sea xH el conjunto de todos los productos xh , para $h \in H$; este conjunto se conoce como una **clase por la izquierda** de H en G . La colección de tales clases forman una partición de G . Análogamente, la colección de todas las clases por la derecha Hx de H en G forman una partición de G . Decimos que H es un **subgrupo normal** de G si $x \cdot h \cdot x^{-1} \in H$, para todo $x \in G$ y $h \in H$. En este caso, tenemos que $xH = Hx$, para todo x , de manera que nuestras dos particiones de G coinciden. Denotamos esta partición por G/H . Si definimos

$$(xH) \cdot (yH) = (x \cdot y)H$$

obtenemos una operación bien definida sobre G/H que lo convierte en grupo. Este grupo se conoce como **cociente** de G por H . La aplicación $f : G \rightarrow G/H$, que

lleva x a xH , es un epimorfismo con núcleo H . Recíprocamente, si $f : G \rightarrow G'$ es un epimorfismo, entonces su núcleo N es un subgrupo normal de G y f induce un isomorfismo $G/N \rightarrow G'$ que lleva xN a $f(x)$, para cada $x \in G$.

Aunque el subgrupo H de G no sea normal, será conveniente utilizar la notación G/H ; en este caso, entenderemos que este conjunto es la colección de las clases por la derecha de H en G .

Definimos ahora el grupo fundamental.

Definición. Sea X un espacio topológico y x_0 un punto de X . Un camino en X que comienza y acaba en x_0 se llama *lazo* basado en x_0 . El conjunto de las clases de homotopía de caminos asociadas a los lazos basados en x_0 , con la operación $*$, se denomina **grupo fundamental** de X relativo al *punto base* x_0 . Se denota por $\pi_1(X, x_0)$.

Se sigue del Teorema 51.2 que la operación $*$, restringida a este conjunto, satisface los axiomas de grupo. Dados dos lazos f y g basados en x_0 , el producto $f * g$ está siempre definido y es un lazo basado en x_0 . La asociatividad, la existencia de un elemento neutro $[e_{x_0}]$ y la existencia de un inverso $[\bar{f}]$ para $[f]$ son inmediatas.

Algunas veces este grupo se conoce como **primer grupo de homotopía** de X , lo cual implica que existe un segundo grupo de homotopía. Desde luego qué hay grupos $\pi_n(X, x_0)$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, pero no los estudiaremos en este libro. Son parte de la materia más general conocida como **teoría de homotopía**.

EJEMPLO 1. Sea \mathbb{R}^n el espacio euclídeo n -dimensional. Entonces $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ es el grupo trivial (consistente sólo en el neutro), ya que si f es un lazo en \mathbb{R}^n basado en x_0 , la homotopía por rectas es una homotopía de caminos entre f y el camino constantemente x_0 . En general, si X es un subconjunto convexo de \mathbb{R}^n , entonces $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial. En particular, la **bola unidad** B^n de \mathbb{R}^n ,

$$B^n = \{\mathbf{x} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\},$$

tiene grupo fundamental trivial.

Una cuestión inmediata que nos podemos plantear es el alcance de la dependencia en el punto base del grupo fundamental. Consideremos esta cuestión ahora.

Definición. Sea α un camino en X de x_0 a x_1 . Definimos la aplicación

$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

por la ecuación

$$\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha].$$

La aplicación $\hat{\alpha}$, que denominaremos “ α -gorro”, está bien definida porque la operación $*$ está bien definida. Si f es un lazo basado en x_0 , entonces $\bar{\alpha} * (f * \alpha)$ es un lazo basado en x_1 . Por tanto, $\hat{\alpha}$ aplica $\pi_1(X, x_0)$ en $\pi_1(X, x_1)$, como deseábamos; observemos que esta aplicación depende sólo de la clase de homotopía de caminos de α . Está representada en la Figura 52.1.

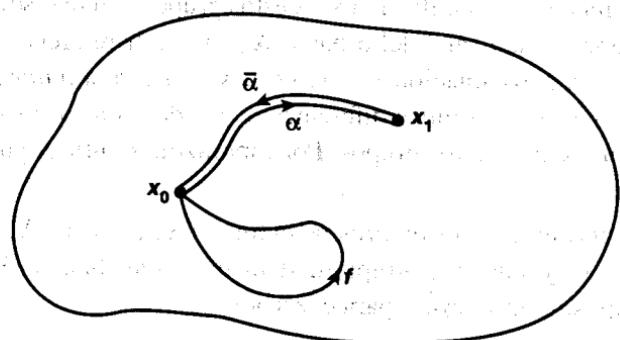


Figura 52.1

Teorema 52.1. *La aplicación $\hat{\alpha}$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Para probar que $\hat{\alpha}$ es un homomorfismo, calculemos

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) &= ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]) \\ &= [\bar{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha] \\ &= \hat{\alpha}([f * g]).\end{aligned}$$

Para ver que $\hat{\alpha}$ es un isomorfismo, vamos a probar que si β denota el camino $\bar{\alpha}$, que es el inverso de α , entonces $\hat{\beta}$ es el inverso para $\hat{\alpha}$. Calculamos, para cada elemento $[h]$ de $\pi_1(X, x_1)$,

$$\begin{aligned}\hat{\beta}([h]) &= [\bar{\beta}] * [h] * [\beta] = [\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}], \\ \hat{\alpha}(\hat{\beta}([h])) &= [\bar{\alpha}] * ([\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}]) * [\alpha] = [h].\end{aligned}$$

Un cálculo similar demuestra que $\hat{\beta}(\hat{\alpha}([f])) = [f]$, para todo $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. ■

Corolario 52.2. *Si X es conexo por caminos, y x_0 y x_1 son dos puntos de X , entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$.*

Supongamos que X es un espacio topológico. Sea C una componente por caminos de X contenido en x_0 . Es fácil ver que $\pi_1(C, x_0) = \pi_1(X, x_0)$, ya que todos los lazos y homotopías en X que están basados en x_0 deben permanecer en el subespacio

C. De este modo, $\pi_1(X, x_0)$ depende sólo de la componente por caminos de X conteniendo a x_0 , y no nos ofrece ninguna información del resto de X . Por esta razón, es muy usual trabajar sólo con espacios conexos por caminos cuando se estudia el grupo fundamental.

Si X es conexo por caminos, todos los grupos $\pi_1(X, x)$ son isomorfos, de manera que es tentador pretender “identificar” todos estos grupos con uno solo y hablar simplemente del grupo fundamental del espacio X , sin hacer referencia al punto base. La dificultad de esta aproximación es que no hay una forma *natural* de identificar $\pi_1(X, x_0)$ con $\pi_1(X, x_1)$; caminos diferentes α y β de x_0 a x_1 pueden darnos isomorfismos diferentes entre estos grupos. Por esta razón, omitir el punto base puede conducir a error.

Sin embargo, resulta que el isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$ es independiente del camino si, y sólo si, el grupo fundamental es abeliano (véase el Ejercicio 3). Éste es un requisito muy severo para el espacio X .

Definición. Un espacio X se dice que es *simplemente conexo* si es conexo por caminos y $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial (un elemento) para algún $x_0 \in X$ y, por tanto, para todo $x_0 \in X$. Con frecuencia expresamos el hecho de que $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial escribiendo $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Lema 52.3. En un espacio simplemente conexo X , dos caminos cualesquiera con los mismos puntos inicial y final son homotópicos por caminos.

Demostración. Sean α y β dos caminos de x_0 a x_1 . Entonces $\alpha * \bar{\beta}$ está definido y es un lazo en X basado en x_0 . Dado que X es simplemente conexo, este lazo es homotópico por caminos al lazo constante en x_0 . Entonces

$$[\alpha * \bar{\beta}] * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta],$$

de donde se deduce que $[\alpha] = [\beta]$. ■

Intuitivamente está claro que el grupo fundamental es un invariante topológico del espacio X . Una forma conveniente de probar este hecho es introduciendo el concepto de “homomorfismo inducido por una aplicación continua”.

Supongamos que $h : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua que lleva el punto x_0 de X al punto y_0 de Y . Frecuentemente denotamos esta propiedad escribiendo

$$h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0).$$

Si f es un lazo en X basado en x_0 , entonces la composición $h \circ f : I \rightarrow Y$ es un lazo en Y basado en y_0 . La correspondencia $f \rightarrow h \circ f$ nos conduce a una aplicación que lleva $\pi_1(X, x_0)$ a $\pi_1(Y, y_0)$. La definimos formalmente como sigue:

Definición. Sea $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ una aplicación continua. Definimos

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

por la ecuación

$$h_*([f]) = [h \circ f].$$

La aplicación h_* se denomina **homomorfismo inducido por h** , relativo al punto base x_0 .

La aplicación h_* está bien definida ya que si F es una homotopía de caminos entre los caminos f y f' , entonces $h \circ F$ es una homotopía de caminos entre los caminos $h \circ f$ y $h \circ f'$. El hecho de que h_* sea un homomorfismo se deduce de la ecuación

$$(h \circ f) * (h \circ g) = h \circ (f * g).$$

El homomorfismo h_* no sólo depende de la aplicación $h : X \rightarrow Y$ sino también de la elección del punto base x_0 (una vez que x_0 está fijado, y_0 está determinado por h). Así, podríamos tener alguna dificultad en la notación si queremos considerar diferentes puntos base en X . Si x_0 y x_1 son dos puntos diferentes de X , no podemos usar el mismo símbolo h_* para denotar los dos homomorfismos diferentes, uno teniendo dominio $\pi_1(X, x_0)$ y el otro dominio $\pi_1(X, x_1)$. Incluso si X es conexo por caminos, estos grupos son isomorfos pero no son el mismo grupo. En tal caso, utilizaremos la notación

$$(h_{x_0})_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

para el primer homomorfismo y $(h_{x_1})_*$ para el segundo. Si sólo hubiera un punto base en consideración, omitiremos la referencia al punto base y denotaremos el homomorfismo inducido simplemente por h_* .

El homomorfismo inducido tiene dos propiedades que son cruciales para las aplicaciones. Se conocen como "propiedades funtoriales" y están dadas en el siguiente teorema:

Teorema 52.4. Si $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ y $k : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ son continuas, entonces $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. Si $i : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ es la aplicación identidad, entonces i_* es el homomorfismo identidad.

Demostración. La prueba es una trivialidad. Por definición,

$$(k \circ h)_*([f]) = [(k \circ h) \circ f],$$

$$(k_* \circ h_*)([f]) = k_*(h_*([f])) = k_*([h \circ f]) = [k \circ (h \circ f)].$$

Análogamente, $i_*([f]) = [i \circ f] = [f]$. ■

Corolario 52.5. Si $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es un homeomorfismo entre X e Y , entonces h_* es un isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$.

Demostración. Considérese $k : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ la inversa de h . Entonces se satisface $k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = i_*$, donde i es la aplicación identidad de (X, x_0) ; y $h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = j_*$, donde j es la aplicación identidad de (Y, y_0) . Dado que i_* y j_* son los homomorfismos identidad de los grupos $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$, respectivamente, k_* es la inversa de h_* . ■

Ejercicios

1. Un subconjunto A de \mathbb{R}^n se dice que es **estrellado** si, para algún punto a_0 de A , todos los segmentos de recta uniendo a_0 con los puntos de A están contenidos en A .
 - (a) Encuentre un conjunto estrellado que no sea convexo.
 - (b) Demuestre que si A es estrellado entonces A es simplemente conexo.
2. Sea α un camino en X de x_0 a x_1 y sea β un camino en X de x_1 a x_2 . Demuestre que si $\gamma = \alpha * \beta$ entonces $\hat{\gamma} = \hat{\beta} \circ \hat{\alpha}$.
3. Sean x_0 y x_1 puntos de un espacio conexo por caminos X . Pruebe que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano si, y sólo si, para todo par de caminos α y β de x_0 a x_1 , se tiene que $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.
4. Sea $A \subset X$; suponga que $r : X \rightarrow A$ es una aplicación continua tal que $r(a) = a$, para cada $a \in A$ (la aplicación r se conoce como una **retracción** de X en A). Si $a_0 \in A$, demuestre que

$$r_* : \pi_1(X, a_0) \longrightarrow \pi_1(A, a_0)$$
 es sobreyectiva.
5. Sean A un subespacio de \mathbb{R}^n y $h : (A, a_0) \rightarrow (Y, y_0)$ una aplicación. Demuestre que si h se puede extender a una aplicación continua de \mathbb{R}^n en Y , entonces h_* es el homomorfismo trivial (el homomorfismo que aplica todos los elementos en el neutro).
6. Demuestre que si X es conexo por caminos, el homomorfismo inducido por una aplicación continua es independiente del punto base, salvo isomorfismos de los grupos implicados. Siendo más precisos, sea $h : X \rightarrow Y$ una aplicación continua con $h(x_0) = y_0$ y $h(x_1) = y_1$. Sea α un camino en X de x_0 a x_1 y pongamos $\beta = h \circ \alpha$. Demuestre que

$$\hat{\beta} \circ (h_{x_0})_* = (h_{x_1})_* \circ \hat{\alpha}.$$

Esta ecuación expresa el hecho de que el siguiente diagrama de aplicaciones “commute”.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{(h_{x_0})_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ \downarrow \hat{\alpha} & & \downarrow \hat{\beta} \\ \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{(h_{x_1})_*} & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

7. Sea G un grupo topológico con operación \cdot y elemento neutro x_0 . Denotemos por $\Omega(G, x_0)$ el conjunto de todos los lazos en G basados en x_0 . Si $f, g \in \Omega(G, x_0)$, definamos el lazo $f \otimes g$ por la regla

$$(f \otimes g)(s) = f(s) \cdot g(s).$$

- (a) Demuestre que esta operación dota al conjunto $\Omega(G, x_0)$ de estructura de grupo.
- (b) Pruebe que esta operación induce una operación de grupo \otimes en $\pi_1(G, x_0)$.
- (c) Demuestre que las dos operaciones de grupo $*$ y \otimes en $\pi_1(G, x_0)$ son la misma. [Indicación: calcule $(f * e_{x_0}) \otimes (e_{x_0} * g)$.]
- (d) Pruebe que $\pi_1(G, x_0)$ es abeliano.

§53 Espacios recubridores

Hemos demostrado que cualquier subespacio convexo de \mathbb{R}^n tiene grupo fundamental trivial; acometemos ahora la tarea de calcular algunos grupos fundamentales que no son triviales. Una de las herramientas más usuales para este propósito es la noción de *espacio recubridor*, la cual introducimos en esta sección. Los espacios recubridores son también importantes en el estudio de las superficies de Riemann y las variedades complejas (véase [A-S]). Los estudiaremos con más detalle en el Capítulo 13.

Definición. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación continua y sobreyectiva. Un conjunto abierto U de B se dice que está **regularmente cubierto** por p si la imagen inversa $p^{-1}(U)$ puede escribirse como una unión disjunta de conjuntos abiertos V_α de E tales que, para cada α , la restricción de p a V_α es un homeomorfismo de V_α en U . La colección $\{V_\alpha\}$ será denominada una **partición de $p^{-1}(U)$ en rebanadas**.

Si U es un conjunto abierto que está regularmente cubierto por p , frecuentemente dibujamos el conjunto $p^{-1}(U)$ como una “pila de tortitas”, cada una con la misma forma y tamaño que U , flotando en el aire sobre U ; la aplicación p las comprime a todas sobre U (véase la Figura 53.1). Observemos que si U está regularmente cubierto por p y W es un conjunto abierto contenido en U , entonces W está también regularmente cubierto por p .

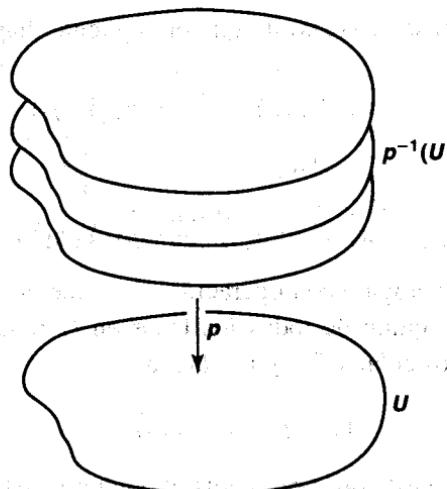


Figura 53.1

Definición. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación continua y sobreyectiva. Si todo punto b de B tiene un entorno U que está regularmente cubierto por p , entonces p se dice que es una **aplicación recubridora** y E un **espacio recubridor** de B .

Observemos que si $p : E \rightarrow B$ es una aplicación recubridora entonces, para cada $b \in B$, el subespacio $p^{-1}(b)$ de E tiene la topología discreta. Esto se debe a que cada rebanada V_α es abierta en E e interseca al conjunto $p^{-1}(b)$ en un solo punto; por tanto, este punto es abierto en $p^{-1}(b)$.

Observemos también que si $p : E \rightarrow B$ es una aplicación recubridora entonces p es una aplicación abierta. Efectivamente, supongamos que A es un conjunto abierto de E . Dado $x \in p(A)$, elijamos un entorno U de x que esté regularmente cubierto por p . Sea $\{V_\alpha\}$ una partición de $p^{-1}(U)$ en rebanadas. Existe un punto y de A tal que $p(y) = x$; sea V_β la rebanada que contiene a y . El conjunto $V_\beta \cap A$ es abierto en E y, por tanto, abierto en V_β ; como p aplica V_β homeomórficamente en U , el conjunto $p(V_\beta \cap A)$ es abierto en U y, por tanto, abierto en B ; es un entorno de x contenido en $p(A)$, como deseábamos.

EJEMPLO 1. Sea X un espacio topológico y sea $i : X \rightarrow X$ la aplicación identidad. Entonces i es una aplicación recubridora (del tipo más trivial). En general, sea E el espacio $X \times \{1, \dots, n\}$ consistente en n copias disjuntas de X . La aplicación $p : E \rightarrow X$ dada por $p(x, i) = x$, para todo i , es nuevamente una aplicación recubridora (más bien trivial). En este caso, podemos dibujar el espacio entero E como una pila de tortitas sobre X .

En la práctica, frecuentemente nos restringimos a espacios recubridores que son conexos por caminos, para eliminar cubrimientos triviales del tipo "pila de tortitas". Un ejemplo de dicho espacio recubridor no trivial es el siguiente:

Teorema 53.1. La aplicación $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por la ecuación

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$$

es una aplicación recubridora.

Podemos representar p como una aplicación que enrolla la recta real \mathbb{R} alrededor del círculo S^1 y, en el proceso, aplica cada intervalo $[n, n+1]$ sobre S^1 .

Demuestração. El hecho de que p sea una aplicación recubridora reside en las propiedades elementales de las funciones seno y coseno. Consideremos, por ejemplo, el subconjunto U de S^1 consistente en aquellos puntos que tienen la primera coordenada positiva. El conjunto $p^{-1}(U)$ consiste en aquellos puntos x para los que $\cos 2\pi x$ es positivo, es decir, es la unión de los intervalos

$$V_n = \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\right),$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ (véase la Figura 53.2). Ahora bien, la aplicación p , restringida a cualquier intervalo cerrado \bar{V}_n , es inyectiva porque $\operatorname{sen} 2\pi x$ es estrictamente monótona en tales intervalos. Además, p lleva \bar{V}_n sobreyectivamente sobre \bar{U} , y V_n sobre U , por el teorema de los valores intermedios. Dado que \bar{V}_n es compacto, $p|\bar{V}_n$ es un homeomorfismo entre \bar{V}_n y \bar{U} . En particular, $p|V_n$ es un homeomorfismo entre V_n y U .

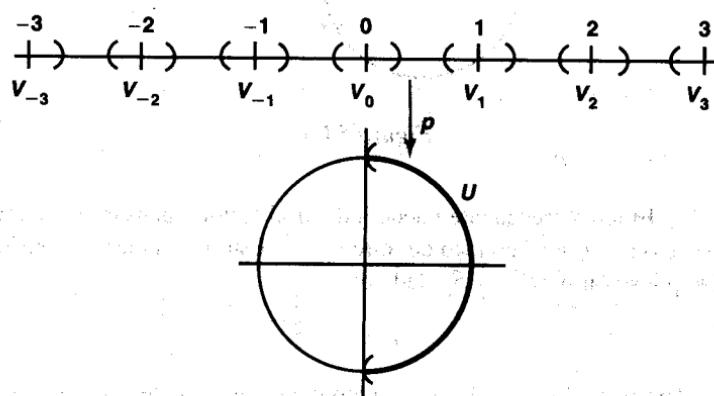


Figura 53.2

Podemos aplicar un razonamiento similar a las intersecciones de S^1 con los semiplanos abiertos superior e inferior, y con el semiplano abierto izquierdo. Estos conjuntos abiertos recubren S^1 y cada uno de ellos está regularmente cubierto por p . Por lo tanto, $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ es una aplicación recubridora. ■

Si $p : E \rightarrow B$ es una aplicación recubridora, entonces p es un **homeomorfismo local** entre E y B . Es decir, cada punto e de E tiene un entorno que se aplica por p

homeomórficamente sobre un subconjunto abierto de B . Sin embargo, la condición de que p sea un homeomorfismo local no es suficiente para asegurar que p sea una aplicación recubridora, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2. La aplicación $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow S^1$ dada por la ecuación

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$$

es sobreyectiva y es un homeomorfismo local (véase la Figura 53.3). Sin embargo, no es una aplicación recubridora ya que el punto $b_0 = (1, 0)$ no tiene un entorno U que esté regularmente cubierto por p . El típico intervalo U de b_0 tiene una imagen inversa consistente en pequeños entornos V_n de cada entero n , para $n > 0$, junto con un pequeño intervalo V_0 de la forma $(0, \epsilon)$. Cada uno de los intervalos V_n , para $n > 0$, se aplica homeomórficamente sobre U por la aplicación p , pero el intervalo V_0 está únicamente embebido en U mediante p .

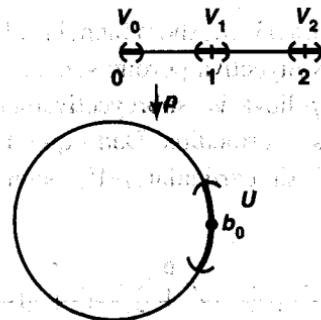


Figura 53.3

EJEMPLO 3. El lema precedente puede inducir al lector a pensar que la recta real \mathbb{R} es el único espacio recubridor conexo del círculo S^1 . Esto no es cierto. Consideremos, por ejemplo, la aplicación $p : S^1 \rightarrow S^1$ dada por

$$p(z) = z^2.$$

[Aquí consideramos S^1 como el subconjunto del plano complejo \mathbb{C} consistente en aquellos números complejos z con $|z| = 1$.] Dejamos al lector comprobar que p es una aplicación recubridora.

El Ejemplo 2 muestra que la aplicación obtenida al restringir una aplicación recubridora puede no ser una aplicación recubridora. A continuación tenemos una situación donde sí encontraremos este tipo de aplicación.

Teorema 53.2. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora. Si B_0 es un subespacio de B y si $E_0 = p^{-1}(B_0)$ entonces la aplicación $p_0 : E_0 \rightarrow B_0$, obtenida al restringir p , es una aplicación recubridora.

Demostración. Dado $b_0 \in B_0$, sea U un conjunto abierto en B que contiene a b_0 y que esté regularmente cubierto por p ; sea $\{V_\alpha\}$ una partición de $p^{-1}(U)$ en rebanadas. Entonces $U \cap B_0$ es un entorno de b_0 en B_0 y los conjuntos $V_\alpha \cap E_0$ son abiertos disjuntos en E_0 cuya unión es $p^{-1}(U \cap B_0)$, y cada uno de ellos se aplica homeomórficamente sobre $U \cap B_0$ mediante p . ■

Teorema 53.3. Si $p : E \rightarrow B$ y $p' : E' \rightarrow B'$ son aplicaciones recubridoras entonces

$$p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$$

es una aplicación recubridora.

Demostración. Dados $b \in B$ y $b' \in B'$, sean U y U' entornos de b y b' , respectivamente, que estén regularmente cubiertos por p y p' , respectivamente. Sean $\{V_\alpha\}$ y $\{V'_\beta\}$ particiones en rebanadas de $p^{-1}(U)$ y $(p')^{-1}(U')$, respectivamente. Entonces la imagen inversa mediante $p \times p'$ del conjunto abierto $U \times U'$ es la unión de todos los conjuntos $V_\alpha \times V'_\beta$. Estos conjuntos son abiertos disjuntos de $E \times E'$, y cada uno de ellos se aplica homeomórficamente sobre $U \times U'$ por $p \times p'$. ■

EJEMPLO 4. Consideremos el espacio $T = S^1 \times S^1$, conocido como *toro*. La aplicación producto

$$p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times S^1$$

es un cubrimiento del toro por el plano \mathbb{R}^2 , donde p es la aplicación recubridora del Teorema 53.1. Cada uno de los cuadrados unidad $[n, n+1] \times [m, m+1]$ se enrolla completamente alrededor del toro, por medio de $p \times p$ (véase la Figura 53.4).

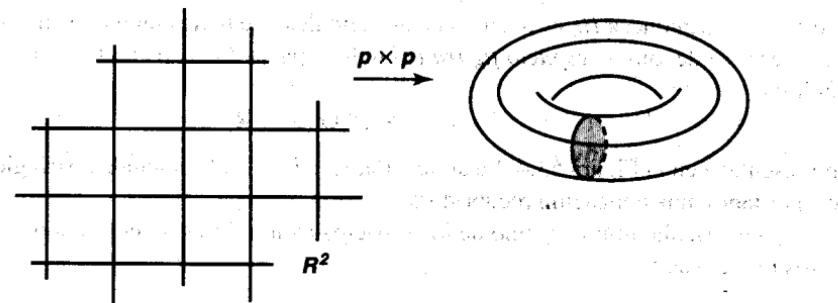


Figura 53.4

En esta figura, hemos representado el toro no como el producto $S^1 \times S^1$, que es un subespacio de \mathbb{R}^4 y difícil de visualizar, sino como la superficie familiar de un donut D en \mathbb{R}^3 obtenida rotando el círculo C_1 en el plano xz de radio $\frac{1}{3}$ centrado en $(1, 0, 0)$ alrededor del eje z . No es difícil ver que $S^1 \times S^1$ es homeomorfo con la superficie D . Sea C_2 el círculo de radio 1 en el plano xy centrado en el origen. Entonces apliquemos

$C_1 \times C_2$ en D definiendo $f(a \times b)$ como el punto al cual va a parar a cuando rotamos el círculo C_1 alrededor del eje z hasta que su centro alcanza el punto b (véase la Figura 53.5). La aplicación f será un homeomorfismo entre $C_1 \times C_2$ y D , como el lector puede comprobar mentalmente. Si lo desea, puede escribir las ecuaciones para f y comprobar la continuidad, inyectividad y sobreyectividad, directamente (la continuidad de f^{-1} se deducirá de la compacidad de $C_1 \times C_2$).

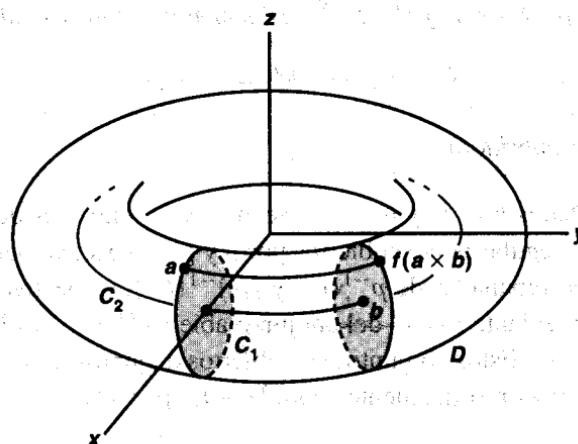


Figura 53.5

EJEMPLO 5. Consideremos la aplicación recubridora $p \times p$ del ejemplo anterior. Sea b_0 el punto $p(0)$ de S^1 y denotemos por B_0 el subespacio

$$B_0 = (S^1 \times b_0) \cup (b_0 \times S^1)$$

de $S^1 \times S^1$. Entonces B_0 es la unión de dos círculos que tienen un punto en común; algunas veces se denomina *espacio figura ocho*. El espacio $E_0 = p^{-1}(B_0)$ es la “cuadrícula infinita”

$$E_0 = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$$

representada en la Figura 53.4. La aplicación $p_0 : E_0 \rightarrow B_0$ obtenida restringiendo $p \times p$ es, por tanto, una aplicación recubridora.

La cuadrícula infinita es uno de los espacios recubridores de la figura ocho; veremos otros más adelante.

EJEMPLO 6. Consideremos la aplicación recubridora

$$p \times i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}_+,$$

donde i es la aplicación identidad de \mathbb{R}_+ y p es la aplicación del Teorema 53.1. Si tomamos el homeomorfismo estándar entre $S^1 \times \mathbb{R}_+$ y $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$, que lleva $x \times t$ a tx , la composición nos permite obtener un cubrimiento

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$$

del plano agujereado por el semiplano abierto superior. Lo representamos en la Figura 53.6. Esta aplicación recubridora aparece en el estudio de variables complejas como la *superficie de Riemann* correspondiente a la función logaritmo complejo.

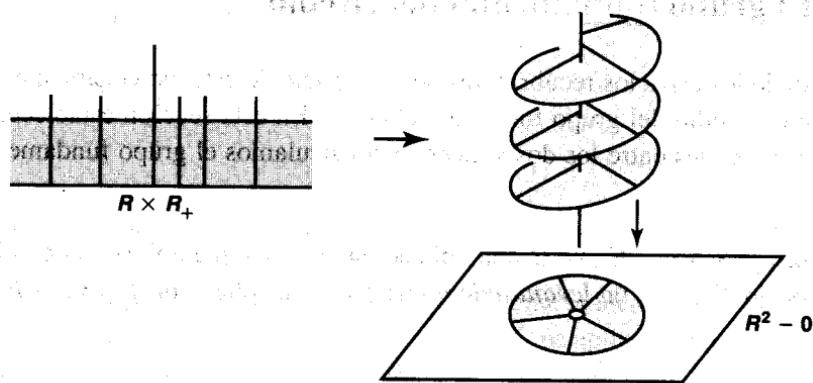


Figura 53.6

Ejercicios

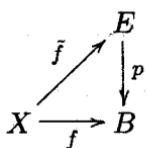
1. Sea Y un espacio con la topología discreta. Demuestre que si $p : X \times Y \rightarrow X$ es la proyección sobre la primera coordenada, entonces p es una aplicación recubridora.
2. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación continua y sobreyectiva. Suponga que U es un conjunto abierto de B que está regularmente cubierto por p . Demuestre que si U es conexo entonces la partición de $p^{-1}(U)$ en rebanadas es única.
3. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora, con B conexo. Demuestre que si $p^{-1}(b_0)$ tiene k elementos para algún $b_0 \in B$, entonces $p^{-1}(b)$ tiene k elementos para todo $b \in B$. En tal caso, se dice que E es un **recubridor de k hojas** de B .
4. Sean $q : X \rightarrow Y$ y $r : Y \rightarrow Z$ aplicaciones recubridoras y pongamos $p = r \circ q$. Demuestre que si $r^{-1}(z)$ es finito para cada $z \in Z$, entonces p es una aplicación recubridora.
5. Demuestre que la aplicación del Ejemplo 3 es una aplicación recubridora. Generalícelo a la aplicación $p(z) = z^n$.
6. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora.
 - (a) Si B es de Hausdorff, regular, completamente regular o de Hausdorff localmente compacto, entonces también lo es E . [Indicación: si $\{V_\alpha\}$ es una partición de $p^{-1}(U)$ en rebanadas y C es un conjunto cerrado de B tal que $C \subset U$, entonces $p^{-1}(C) \cap V_\alpha$ es un conjunto cerrado de E .]

(b) Si B es compacto y $p^{-1}(b)$ es finito, para todo $b \in B$, entonces E es compacto.

§54 El grupo fundamental del círculo

El estudio de los espacios recubridores de un espacio X está estrechamente relacionado con el estudio del grupo fundamental de X . En esta sección establecemos las relaciones cruciales entre los dos conceptos y calculamos el grupo fundamental del círculo.

Definición. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación. Si f es una aplicación continua de algún espacio X en B , un *levantamiento* de f es una aplicación $\tilde{f} : X \rightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.



La existencia de levantamientos cuando p es una aplicación recubridora es una herramienta importante en el estudio de los espacios recubridores y el grupo fundamental. Vamos a probar primero que, para un espacio recubridor, los caminos pueden ser levantados; entonces demostraremos que las homotopías de caminos también pueden ser levantadas. Demos previamente un ejemplo:

EJEMPLO 1. Consideremos el cubrimiento $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ del Teorema 53.1. El camino $f : [0, 1] \rightarrow S^1$ comenzando en $b_0 = (1, 0)$ y dado por $f(s) = (\cos \pi s, \operatorname{sen} \pi s)$ se levanta al camino $\tilde{f}(s) = s/2$ comenzando en 0 y acabando en $\frac{1}{2}$. El camino $g(s) = (\cos \pi s, -\operatorname{sen} \pi s)$ se levanta al camino $\tilde{g}(s) = -s/2$, que comienza en 0 y acaba en $-\frac{1}{2}$. El camino $h(s) = (\cos 4\pi s, \operatorname{sen} 4\pi s)$ se levanta al camino $\tilde{h}(s) = 2s$ comenzando en 0 y acabando en 2. Intuitivamente, h enrolla dos veces el intervalo $[0, 1]$ alrededor del círculo; esto queda reflejado en el hecho de que el levantamiento \tilde{h} comienza en cero y acaba en el número 2. Estos caminos están representados en la Figura 54.1.

Lema 54.1. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$. Cualquier camino $f : [0, 1] \rightarrow B$ comenzando en b_0 tiene un único levantamiento a un camino \tilde{f} en E que comienza en e_0 .

Demostración. Cubramos B por conjuntos abiertos U que estén regularmente cubiertos por p . Encontremos una subdivisión de $[0, 1]$, pongamos s_0, \dots, s_n , tal que para cada i el conjunto $f([s_i, s_{i+1}])$ esté contenido en alguno de tales conjuntos abiertos U (aquí utilizamos el lema del número de Lebesgue). Vamos a definir el levantamiento \tilde{f} paso a paso.

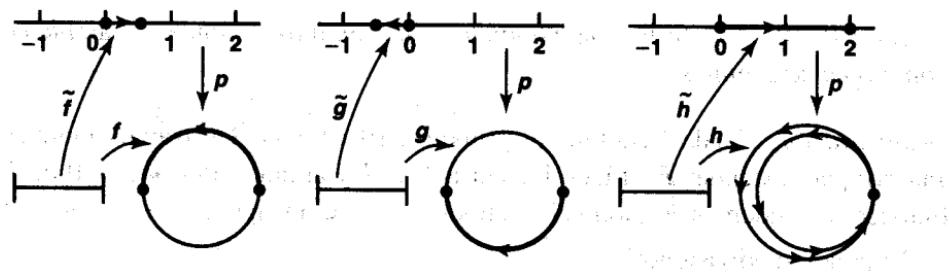


Figura 54.1

Primero, definamos $\tilde{f}(0) = e_0$. Entonces, suponiendo que $\tilde{f}(s)$ está definida para $0 \leq s < s_i$, definimos \tilde{f} en $[s_i, s_{i+1}]$ como sigue: el conjunto $f([s_i, s_{i+1}])$ está contenido en algún conjunto abierto U que está regularmente cubierto por p . Sea $\{V_\alpha\}$ una partición en rebanadas de $p^{-1}(U)$; cada conjunto V_α es aplicado por p homeomórficamente sobre U . Así, $\tilde{f}(s_i)$ está en alguno de estos conjuntos, pongamos en V_0 . Definamos $\tilde{f}(s)$ para $s \in [s_i, s_{i+1}]$ por la ecuación

$$\tilde{f}(s) = (p|V_0)^{-1}(f(s)).$$

Como $p|V_0 : V_0 \rightarrow U$ es un homeomorfismo, \tilde{f} será continua sobre $[s_i, s_{i+1}]$.

Continuando de esta forma, definimos \tilde{f} en todo el intervalo $[0, 1]$. La continuidad de \tilde{f} se deduce del lema del pegamiento; el hecho de que $p \circ \tilde{f} = f$ es inmediato de la definición de \tilde{f} .

La unicidad de \tilde{f} se prueba también paso por paso. Supongamos que \tilde{f} es otro levantamiento de f comenzando en e_0 . Entonces $\tilde{f}(0) = e_0 = \tilde{f}(0)$. Supongamos que $\tilde{f}(s) = \tilde{f}(s)$, para todo s tal que $0 \leq s < s_i$. Sea V_0 como en el párrafo anterior; entonces, para $s \in [s_i, s_{i+1}]$, $\tilde{f}(s)$ está definido como $(p|V_0)^{-1}(f(s))$. ¿Puede coincidir con $\tilde{f}(s)$? Dado que \tilde{f} es un levantamiento de f , debe llevar el intervalo $[s_i, s_{i+1}]$ en el conjunto $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$. Las rebanadas V_α son abiertas y disjuntas; como el conjunto $\tilde{f}([s_i, s_{i+1}])$ es conexo, debe estar totalmente contenido en uno de los conjuntos V_α . Y como $\tilde{f}(s_i) = \tilde{f}(s_i)$, que está en V_0 , \tilde{f} debe llevar todo el intervalo $[s_i, s_{i+1}]$ en el conjunto V_0 . Por lo tanto, para s en $[s_i, s_{i+1}]$, $\tilde{f}(s)$ debe ser igual a algún punto y de V_0 que esté en $p^{-1}(f(s))$. Pero sólo hay *un* punto y en estas condiciones, concretamente $(p|V_0)^{-1}(f(s))$. Por consiguiente, $\tilde{f}(s) = \tilde{f}(s)$ para $s \in [s_i, s_{i+1}]$. ■

Lema 54.2. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$. Sea $F : I \times I \rightarrow B$ una aplicación continua con $F(0, 0) = b_0$. Existe un único levantamiento de F a una aplicación continua

$$\tilde{F} : I \times I \rightarrow E$$

tal que $\tilde{F}(0, 0) = e_0$. Si F es una homotopía de caminos, entonces \tilde{F} también es una homotopía de caminos.

Demuestração. Dada F , definimos primero $\tilde{F}(0, 0) = e_0$. Utilizamos ahora el lema anterior para extender \tilde{F} al lado izquierdo $0 \times I$ y al lado inferior $I \times 0$ de $I \times I$. Entonces extendemos \tilde{F} a todo el cuadrado $I \times I$ como sigue.

Elijamos subdivisiones

$$s_0 < s_1 < \dots < s_m,$$

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n$$

de I lo suficientemente finas como para que cada rectángulo

$$I_i \times J_j = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$$

se aplique mediante F en un conjunto abierto de B que esté regularmente cubierto por p (utilizamos el lema del número de Lebesgue). Definimos el levantamiento \tilde{F} , paso a paso, comenzando con el rectángulo $I_1 \times J_1$, continuando con los otros rectángulos $I_i \times J_1$ de la “fila inferior”, después con los rectángulos $I_i \times J_2$ de la siguiente fila, y así sucesivamente.

En general, dados i_0 y j_0 , supongamos que \tilde{F} está definido en el conjunto A determinado por la unión de $0 \times I$, $I \times 0$ y todos los rectángulos “previos” a $I_{i_0} \times J_{j_0}$ (aquellos rectángulos $I_i \times J_j$ con $j < j_0$ y aquellos con $j = j_0$ y $i < i_0$). Supongamos también que \tilde{F} es un levantamiento continuo de $F|A$. Definamos \tilde{F} en $I_{i_0} \times J_{j_0}$. Escojamos un conjunto abierto U de B que esté regularmente cubierto por p y contenga al conjunto $F(I_{i_0} \times J_{j_0})$. Sea $\{V_\alpha\}$ una partición en rebanadas de $p^{-1}(U)$; cada conjunto V_α se aplica mediante p homeomórficamente sobre U . Ahora bien, \tilde{F} está ya definida en el conjunto $C = A \cap (I_{i_0} \times J_{j_0})$. Este conjunto es la unión de los lados izquierdo e inferior del rectángulo $I_{i_0} \times J_{j_0}$ y, por tanto, es conexo. Así, $\tilde{F}(C)$ es conexo y debe estar totalmente contenido dentro de uno de los conjuntos V_α . Supongamos que está contenido en V_0 . Entonces la situación es como la representada en la Figura 54.2.

Denotemos por $p_0 : V_0 \rightarrow U$ la restricción de p a V_0 . Dado que \tilde{F} es un levantamiento de $F|A$ sabemos que, para $x \in C$,

$$p_0(\tilde{F}(x)) = p(\tilde{F}(x)) = F(x),$$

de manera que $\tilde{F}(x) = p_0^{-1}(F(x))$. Por tanto, podemos extender \tilde{F} definiendo

$$\tilde{F}(x) = p_0^{-1}(F(x))$$

para $x \in I_{i_0} \times J_{j_0}$. La aplicación extendida será continua por el lema del pegamiento.

Continuando de esta forma, definimos \tilde{F} en todo el cuadrado I^2 .

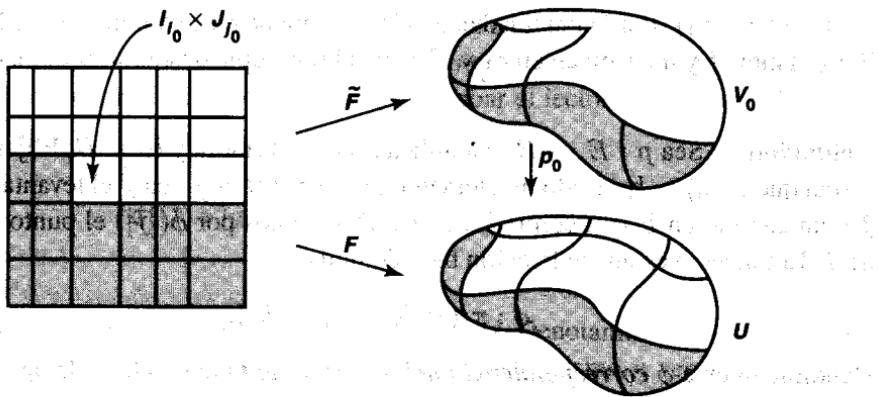


Figura 54.2

Para comprobar la unicidad, observemos que, en cada paso de la construcción de \tilde{F} , como primero hemos extendido \tilde{F} a los lados inferior e izquierdo de I^2 , y entonces a los rectángulos $I_i \times J_j$, uno por uno, existe sólo una forma de extender \tilde{F} de manera continua. De modo que, una vez especificado el valor de \tilde{F} en $(0, 0)$, \tilde{F} está completamente determinado.

Supongamos ahora que F es una homotopía de caminos. Queremos probar que \tilde{F} es una homotopía de caminos. La aplicación F lleva todo el lado izquierdo $0 \times I$ de I^2 a un solo punto b_0 de B . Como \tilde{F} es un levantamiento de F , lleva todo este lado sobre el conjunto $p^{-1}(b_0)$. Pero este conjunto tiene la topología discreta como subespacio de E . Dado que $0 \times I$ es conexo y \tilde{F} es continua, $\tilde{F}(0 \times I)$ es conexo y, por lo tanto, debe ser igual a un conjunto unipuntual. Análogamente, $\tilde{F}(1 \times I)$ debe ser también un conjunto unipuntual. Así, \tilde{F} es una homotopía de caminos. ■

Teorema 54.3. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$. Sean f y g dos caminos en B de b_0 a b_1 , y sean \tilde{f} y \tilde{g} sus respectivos levantamientos a caminos en E comenzando en e_0 . Si f y g son homotópicos por caminos, entonces \tilde{f} y \tilde{g} terminan en el mismo punto de E y son homotópicos por caminos.

Demostración. Sea $F : I \times I \rightarrow B$ la homotopía de caminos entre f y g . Entonces $F(0, 0) = b_0$. Sea $\tilde{F} : I \times I \rightarrow E$ el levantamiento de F a E tal que $\tilde{F}(0, 0) = e_0$. Por el lema anterior, \tilde{F} es una homotopía de caminos, de manera que $\tilde{F}(0 \times I) = \{e_0\}$ y $\tilde{F}(1 \times I)$ es un conjunto unipuntual $\{e_1\}$.

La restricción $\tilde{F}|I \times 0$ de \tilde{F} al lado inferior de $I \times I$ es un camino en E comenzando en e_0 y que es un levantamiento de $F|I \times 0$. Por la unicidad de los levantamientos de caminos, debemos tener que $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{f}(s)$. Análogamente, $\tilde{F}|I \times 1$ es un camino en E que es un levantamiento de $F|I \times 1$ y comienza en e_0 porque

$\tilde{F}(0 \times I) = \{e_0\}$. Por la unicidad de los levantamientos de caminos, $\tilde{F}(s, 1) = \tilde{g}(s)$. Por lo tanto, \tilde{f} y \tilde{g} terminan en e_1 y \tilde{F} es una homotopía de caminos entre ellos. ■

Definición. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora y $b_0 \in B$. Elijamos e_0 de forma que $p(e_0) = b_0$. Dado un elemento $[f]$ de $\pi_1(B, b_0)$, sea \tilde{f} el levantamiento de f a un camino en E que comience en e_0 . Denotemos por $\phi([f])$ el punto final $\tilde{f}(1)$ de \tilde{f} . Entonces ϕ es una aplicación bien definida

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0).$$

Denominamos a ϕ **correspondencia del levantamiento** derivada de la aplicación recubridora p . Desde luego, depende de la elección del punto e_0 .

Teorema 54.4. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$. Si E es conexo por caminos, entonces la correspondencia del levantamiento

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$$

es sobreyectiva. Si E es simplemente conexo, entonces es biyectiva.

Demostración. Si E es conexo por caminos entonces, dado $e_1 \in p^{-1}(b_0)$, existe un camino \tilde{f} en E de e_0 a e_1 . De modo que $f = p \circ \tilde{f}$ es un lazo en B con base b_0 y $\phi([f]) = e_1$, por definición.

Supongamos que E es simplemente conexo. Sean $[f]$ y $[g]$ dos elementos de $\pi_1(B, b_0)$ tales que $\phi([f]) = \phi([g])$. Sean \tilde{f} y \tilde{g} los levantamientos de f y g , respectivamente, a caminos en E comenzando en e_0 ; entonces $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. Como E es simplemente conexo, existe una homotopía de caminos \tilde{F} en E entre \tilde{f} y \tilde{g} . Entonces $p \circ \tilde{F}$ es una homotopía de caminos en B entre f y g . ■

Teorema 54.5. El grupo fundamental de S^1 es isomorfo al grupo aditivo de los enteros.

Demostración. Sea $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ la aplicación recubridora del Teorema 53.1, pongamos $e_0 = 0$ y sea $b_0 = p(e_0)$. Entonces $p^{-1}(b_0)$ es el conjunto \mathbb{Z} de los enteros. Dado que \mathbb{R} es simplemente conexo, la correspondencia del levantamiento

$$\phi : \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \mathbb{Z}$$

es biyectiva. Probemos que ϕ es un homomorfismo y el teorema quedará demostrado.

Dados $[f]$ y $[g]$ en $\pi_1(S^1, b_0)$, sean \tilde{f} y \tilde{g} sus respectivos levantamientos a caminos en \mathbb{R} comenzando en 0. Sean $n = \tilde{f}(1)$ y $m = \tilde{g}(1)$, entonces $\phi([f]) = n$ y $\phi([g]) = m$, por definición. Sea \tilde{g} el camino

$$\tilde{g}(s) = n + \tilde{g}(s)$$

en \mathbb{R} . Como $p(n+x) = p(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, el camino \tilde{g} es un levantamiento de g que comienza en n . Entonces el producto $\tilde{f} * \tilde{g}$ está definido y es el levantamiento de $f * g$ que comienza en 0, como puede comprobar el lector. El punto final de este camino es $\tilde{g}(1) = n + m$. Entonces, por definición,

$$\phi([f] * [g]) = n + m = \phi([f]) + \phi([g]). \quad \blacksquare$$

Definición. Sea G un grupo y x un elemento de G . Denotamos el inverso de x por x^{-1} . El símbolo x^n representa el producto de x por sí mismo n veces, x^{-n} denota el producto de x^{-1} por sí mismo n veces, y x^0 denota el elemento neutro de G . Si el conjunto de todos los elementos de la forma x^m , para $m \in \mathbb{Z}$, coincide con G , entonces se dice que G es un grupo **cíclico** y x se dice que es un **generador** de G .

El cardinal de un grupo se llama también **orden** del grupo. Un grupo es cíclico de orden infinito si, y solamente si, es isomorfo al grupo aditivo de los enteros; es cíclico de orden k si, y sólo si, es isomorfo al grupo \mathbb{Z}/k de los enteros módulo k . El teorema precedente implica que el grupo fundamental del círculo es cíclico infinito.

Observemos que si x es un generador del grupo cíclico infinito G y si y es un elemento de un grupo arbitrario H , entonces existe un único homomorfismo h de G en H tal que $h(x) = y$; está definido poniendo $h(x^n) = y^n$, para todo n .

Con el fin de utilizarlo más adelante, en §65 y en los Capítulos 13 y 14, probamos aquí una versión más fuerte del Teorema 54.4.

***Teorema 54.6.** Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$.

- (a) El homomorfismo $p_* : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$ es un monomorfismo.
- (b) Sea $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$. La correspondencia del levantamiento ϕ induce una aplicación inyectiva

$$\Phi : \pi_1(B, b_0)/H \rightarrow p^{-1}(b_0)$$

de la colección de las clases por la derecha de H en $p^{-1}(b_0)$, la cual es biyectiva si E es conexo por caminos.

- (c) Si f es un lazo en B basado en b_0 , entonces $[f] \in H$ si, y sólo si, f es un levantamiento a un lazo en E basado en e_0 .

Demostración. (a) Supongamos que \tilde{h} es un lazo en E basado en e_0 y que $p_*([\tilde{h}])$ es el elemento neutro. Sea F una homotopía de caminos entre $p \circ \tilde{h}$ y el lazo constante. Si \tilde{F} es el levantamiento de F a E tal que $\tilde{F}(0, 0) = e_0$, entonces \tilde{F} es una homotopía de caminos entre \tilde{h} y el lazo constante en e_0 .

(b) Dados lazos f y g en B , sean \tilde{f} y \tilde{g} sus levantamientos a E que empiezan en e_0 . Entonces $\phi([f]) = \tilde{f}(1)$ y $\phi([g]) = \tilde{g}(1)$. Demostremos que $\phi([f]) = \phi([g])$ si, y sólo si, $[f] \in H * [g]$.

Supongamos primero que $[f] \in H * [g]$. Entonces $[f] = [h * g]$, donde $h = p \circ \tilde{h}$ para algún lazo \tilde{h} en E basado en e_0 . Ahora bien, el producto $\tilde{h} * \tilde{g}$ está definido y es un levantamiento de $h * g$. Dado que $[f] = [h * g]$, los levantamientos \tilde{f} y $\tilde{h} * \tilde{g}$, los cuales comienzan en e_0 , deben acabar en el mismo punto de E . Entonces \tilde{f} y $\tilde{h} * \tilde{g}$ terminan en el mismo punto de E , de manera que $\phi([f]) = \phi([g])$ (véase la Figura 54.3).

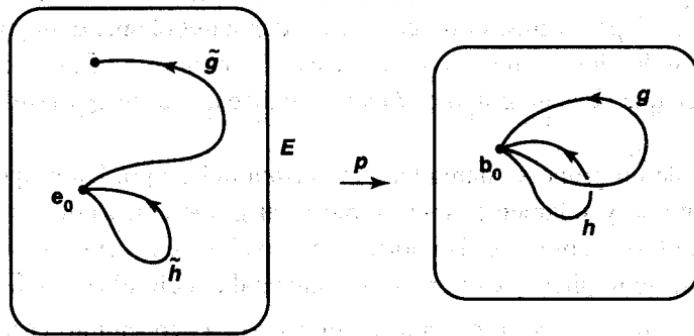


Figura 54.3

Supongamos ahora que $\phi([f]) = \phi([g])$. Entonces \tilde{f} y \tilde{g} acaban en el mismo punto de E . El producto de \tilde{f} y el inverso de \tilde{g} está definido y es un lazo \tilde{h} en E basado en e_0 . Mediante un cálculo directo, $[\tilde{h} * \tilde{g}] = [\tilde{f}]$. Si \tilde{F} es una homotopía de caminos en E entre los lazos $\tilde{h} * \tilde{g}$ y \tilde{f} , entonces $p \circ \tilde{F}$ es una homotopía de caminos en B entre $h * g$ y f , donde $h = p \circ \tilde{h}$. Por lo tanto $[f] \in H * [g]$, como deseábamos.

Si E es conexo por caminos entonces ϕ es sobreyectiva, de forma que Φ también es sobreyectiva.

(c) La inyectividad de Φ significa que $\phi([f]) = \phi([g])$ si, y sólo si, $[f] \in H * [g]$. Aplicando este resultado al caso en donde g es el lazo constante, vemos que $\phi([f]) = e_0$ si, y sólo si, $[f] \in H$. Pero $\phi([f]) = e_0$ precisamente cuando el levantamiento de f que comienza en e_0 también acaba en e_0 . ■

Ejercicios

1. ¿Qué es lo que falla en el “lema de levantamientos de caminos” (Lema 54.1) cuando se aplica al homeomorfismo local del Ejemplo 2 de §53?

2. Al definir la aplicación \tilde{F} en la demostración del Lema 54.2, ¿por qué hemos tenido tanto cuidado en el orden en el cual hemos considerado los rectángulos pequeños?
3. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora. Sean α y β caminos en B con $\alpha(1) = \beta(0)$; sean $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ sus levantamientos tales que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0)$. Demuestre que $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ es un levantamiento de $\alpha * \beta$.
4. Considere la aplicación recubridora $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ del Ejemplo 6 de §53. Encuentre levantamientos de los caminos

$$f(t) = (2 - t, 0),$$

$$g(t) = ((1+t) \cos 2\pi t, (1+t) \sin 2\pi t),$$

$$h(t) = f * g.$$

Dibuje estos caminos y sus levantamientos.

5. Considere la aplicación recubridora $p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$ del Ejemplo 4 de §53. Considere el camino

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \times (\cos 4\pi t, \sin 4\pi t)$$

en $S^1 \times S^1$. Dibuje lo que parece f cuando $S^1 \times S^1$ se identifica con la superficie del donut D . Encuentre un levantamiento \tilde{f} de f a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y dibújelo.

6. Considere las aplicaciones $g, h : S^1 \rightarrow S^1$ dadas por $g(z) = z^n$ y $h(z) = 1/z^n$ (aquí representamos S^1 como el conjunto de los números complejos z de valor absoluto 1). Calcule los homomorfismos inducidos g_* y h_* del grupo cíclico infinito $\pi_1(S^1, b_0)$ en sí mismo. [Indicación: recuerde la ecuación $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.]
7. Generalice la demostración del Teorema 54.5 para probar que el grupo fundamental del toro es isomorfo al grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
8. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora, con E conexo por caminos. Demuestre que si B es simplemente conexo, entonces p es un homeomorfismo.

§55 Retracciones y puntos fijos

Probamos ahora algunos resultados clásicos de topología que se deducen de nuestro conocimiento del grupo fundamental de S^1 .

Definición. Si $A \subset X$, una **retracción** de X en A es una aplicación continua $r : X \rightarrow A$ tal que $r|A$ es la aplicación identidad de A . Si existe dicha aplicación r , decimos que A es un **retracto** de X .

Lema 55.1. Si A es un retracto de X , entonces el homomorfismo de grupos fundamentales inducido por la inclusión $j : A \rightarrow X$ es inyectivo.

Demuestra. Si $r : X \rightarrow A$ es una retracción entonces la aplicación compuesta $r \circ j$ es igual a la aplicación identidad de A . Se sigue que $r_* \circ j_*$ es la aplicación identidad de $\pi_1(A, a)$, de manera que j_* debe ser inyectiva. ■

Teorema 55.2 (Teorema de la no-retracción). No existe una retracción de B^2 en S^1 .

Demuestra. Si S^1 fuera un retracto de B^2 , entonces el homomorfismo inducido por la inclusión $j : S^1 \rightarrow B^2$ debería ser inyectivo. Pero el grupo fundamental de S^1 es no trivial y el grupo fundamental de B^2 es trivial. ■

Lema 55.3. Sea $h : S^1 \rightarrow X$ una aplicación continua. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) h es homotópicamente nula.
- (2) h se extiende a una aplicación continua $k : B^2 \rightarrow X$.
- (3) h_* es el homomorfismo trivial de grupos fundamentales.

Demuestra. (1) \Rightarrow (2). Sea $H : S^1 \times I \rightarrow X$ una homotopía entre h y una aplicación constante. Sea $\pi : S^1 \times I \rightarrow B^2$ la aplicación

$$\pi(x, t) = (1 - t)x.$$

Entonces π es continua, cerrada y sobreyectiva, de manera que es una aplicación cociente; ésta colapsa todo $S^1 \times 1$ en el punto 0 y es inyectiva en el resto de puntos. Como H es constante sobre $S^1 \times 1$, induce, vía la aplicación cociente π , una aplicación continua $k : B^2 \rightarrow X$ que es una extensión de h (véase la Figura 55.1).

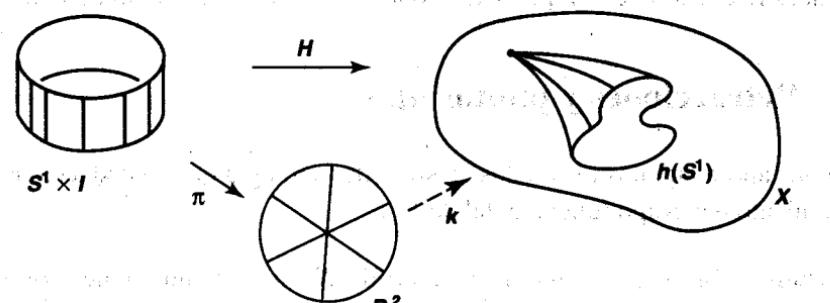


Figura 55.1

(2) \Rightarrow (3). Si $j : S^1 \rightarrow B^2$ es la aplicación inclusión, entonces h es igual a la composición $k \circ j$. Por tanto $h_* = k_* \circ j_*$. Pero

$$j_* : \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \pi_1(B^2, b_0)$$

es trivial porque el grupo fundamental de B^2 es trivial. Por consiguiente, h_* es trivial.

(3) \Rightarrow (1). Sea $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ la aplicación recubridora estándar y sea $p_0 : I \rightarrow S^1$ su restricción al intervalo unidad. Entonces $[p_0]$ genera $\pi_1(S^1, b_0)$ porque p_0 es un lazo en S^1 cuyo levantamiento a \mathbb{R} comienza en 0 y acaba en 1.

Pongamos $x_0 = h(b_0)$. Como h_* es trivial, el lazo $f = h \circ p_0$ representa el elemento neutro de $\pi_1(X, x_0)$. Por tanto, existe una homotopía de caminos F en X entre f y el lazo constante en x_0 . La aplicación $p_0 \times \text{id} : I \times I \rightarrow S^1 \times I$ es una aplicación cociente al ser continua, cerrada y sobreyectiva; ésta aplica $0 \times t$ y $1 \times t$ sobre $b_0 \times t$, para cada t , y en el resto es inyectiva. La homotopía de caminos F aplica $0 \times I$, $1 \times I$ e $I \times 1$ sobre el punto x_0 de X . De esta forma, induce una aplicación continua $H : S^1 \times I \rightarrow X$ que es una homotopía entre h y una aplicación constante (véase la Figura 55.2).

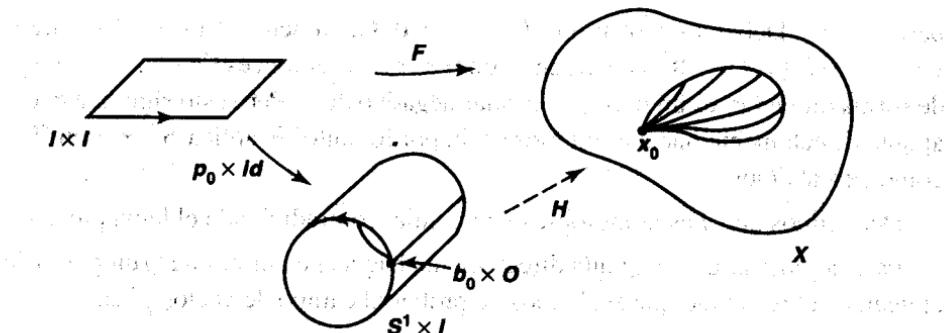


Figura 55.2

Corolario 55.4. La aplicación inclusión $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0$ no es homotópicamente nula. La aplicación identidad $i : S^1 \rightarrow S^1$ no es homotópicamente nula.

Demostración. Existe una retracción de $\mathbb{R}^2 - 0$ en S^1 dada por la ecuación $r(x) = x/\|x\|$. Así, j_* es inyectiva y, por tanto, no trivial. Análogamente, i_* es el homomorfismo identidad y, por tanto, no trivial. ■

Teorema 55.5. Dado un campo de vectores sobre B^2 que no se anule en ningún punto, existe un punto de S^1 donde el campo de vectores apunta directamente hacia el interior y un punto de S^1 donde apunta directamente hacia el exterior.

Demostración. Un **campo de vectores** sobre B^2 es un par ordenado $(x, v(x))$, donde x está en B^2 y v es una aplicación continua de B^2 en \mathbb{R}^2 . En cálculo, frecuentemente se utiliza la notación

$$\mathbf{v}(x) = v_1(x)\mathbf{i} + v_2(x)\mathbf{j}$$

para la aplicación v , donde \mathbf{i} y \mathbf{j} son los vectores básicos unitarios estándar en \mathbb{R}^2 . Sin embargo, nosotros consideraremos la notación funcional simple. Decir que un campo de vectores no se anula significa que $v(x) \neq \mathbf{0}$ para todo x ; en tal caso v realmente aplica B^2 en $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$.

Supongamos primero que $v(x)$ no apunta directamente hacia el interior en ningún punto x de S^1 y lleguemos a una contradicción. Consideremos la aplicación $v : B^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ y sea w su restricción a S^1 . Dado que la aplicación w se extiende a una aplicación de B^2 en $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$, es homotópicamente nula.

Por otro lado, w es homotópica a la aplicación inclusión $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$. La Figura 55.3 ilustra la homotopía, definida formalmente por la ecuación

$$F(x, t) = tx + (1-t)w(x),$$

para $x \in S^1$. Debemos probar que $F(x, t) \neq \mathbf{0}$. Claramente, $F(x, t) \neq \mathbf{0}$ para $t = 0$ y $t = 1$. Si $F(x, t) = \mathbf{0}$, para algún t con $0 < t < 1$, entonces $tx + (1-t)w(x) = \mathbf{0}$, de forma que $w(x)$ es un múltiplo escalar negativo de x . Pero esto significa que $w(x)$ apunta directamente hacia el interior en x , por lo tanto, F aplica $S^1 \times I$ en $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$, como deseábamos.

Deducimos que j es homotópicamente nula, contradiciendo el lema precedente.

Para demostrar que v apunta directamente hacia el exterior en algún punto de S^1 , aplicamos el resultado que acabamos de probar al campo de vectores $(x, -v(x))$. ■

Ya hemos visto que toda aplicación continua $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tiene un punto fijo (véase el Ejercicio 3 de §24). Lo mismo es cierto para la bola B^2 , aunque la demostración es más profunda.

Teorema 55.6 (Teorema del punto fijo de Brouwer para el disco). Si $f : B^2 \rightarrow B^2$ es continua entonces existe un punto $x \in B^2$ tal que $f(x) = x$.

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que $f(x) \neq x$, para todo x en B^2 . Entonces definiendo $v(x) = f(x) - x$, obtenemos un campo de vectores $(x, v(x))$ en B^2 que no se anula en ningún punto. Pero el campo de vectores v no puede apuntar directamente hacia el exterior en ningún punto x de S^1 porque esto significaría que

$$f(x) - x = ax \quad \text{para todo } x \in S^1$$

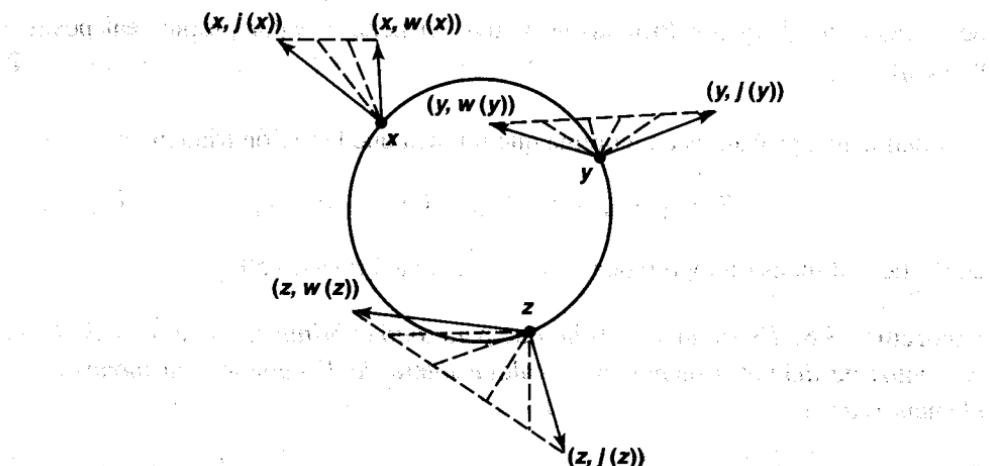


Figura 55.3

para algún número real *positivo* a , de manera que $f(x) = (1 + a)x$ se encontraría fuera de la bola unidad B^2 . Llegamos así a una contradicción. ■

El lector bien podría preguntarse por qué los teoremas del punto fijo son de interés en matemáticas. Resulta que muchos problemas, tales como los problemas relativos a la existencia de soluciones para sistemas de ecuaciones, por ejemplo, pueden ser formulados como teoremas del punto fijo. Aquí tenemos un ejemplo, un teorema clásico de Frobenius. Suponemos, en este punto, algún conocimiento de álgebra lineal.

***Corolario 55.7.** *Sea A una matriz 3 por 3 de números reales positivos. Entonces A tiene un valor propio (valor característico) real positivo.*

Demostración. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz (relativa a la base estándar para \mathbb{R}^3) es A . Sea B la intersección de la 2-esfera S^2 con el primer octante

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ y } x_3 \geq 0\}$$

de \mathbb{R}^3 . Es fácil comprobar que B es homeomorfo a la bola B^2 , por lo que el teorema del punto fijo es cierto para aplicaciones continuas de B en sí mismo.

Ahora bien, si $x = (x_1, x_2, x_3)$ está en B , entonces todas las componentes de x son no negativas y al menos una es positiva. Dado que todos los elementos de A son positivos, el vector $T(x)$ es un vector cuyas componentes son todas positivas. Como resultado, la aplicación $x \rightarrow T(x)/\|T(x)\|$ es una aplicación continua de B en sí mismo, la cual tiene, por tanto, un punto fijo x_0 . Entonces

$$T(x_0) = \|T(x_0)\|x_0,$$

de manera que T (y por lo tanto la matriz A) tiene el valor propio real positivo $\|T(x_0)\|$. ■

Finalmente, probamos un teorema que implica que la región triangular

$$T = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ y } x + y \leq 1\}$$

en \mathbb{R}^2 tiene dimensión topológica al menos igual a 2 (véase §50).

***Teorema 55.8.** Existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo cubrimiento abierto \mathcal{A} de T por conjuntos de diámetro menor que ϵ , algún punto de T pertenece a menos de tres elementos de \mathcal{A} .

Demostración. Usamos el hecho de que T es homeomorfo a B^2 , por lo tanto podemos aplicar los resultados probados en esta sección al espacio T .

Elijamos $\epsilon > 0$ de forma que ningún conjunto de diámetro menor que ϵ interseque los tres lados de T (de hecho, $\epsilon = \frac{1}{2}$ valdrá). Supongamos que $\mathcal{A} = \{U_1, \dots, U_n\}$ es un cubrimiento abierto de T por conjuntos de diámetro menor que ϵ tal que cualesquiera tres elementos de \mathcal{A} tienen intersección vacía, y lleguemos a una contradicción.

Para cada $i = 1, \dots, n$, elegimos un vértice v_i de T como sigue: si U_i interseca dos lados de T , sea v_i el vértice común de estos lados. Si U_i interseca sólo un lado de T , sea v_i uno de los vértices de este lado. Si U_i no interseca ningún lado de T , sea v_i cualquier vértice de T .

Sea ahora $\{\phi_i\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_1, \dots, U_n\}$ (véase §36). Definamos $k : T \rightarrow \mathbb{R}^2$ por la ecuación

$$k(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) v_i.$$

Entonces k es continua. Un punto x de T está contenido a lo más en dos elementos de \mathcal{A} , por tanto, como máximo dos de los números $\phi_i(x)$ son distintos de cero. Entonces $k(x) = v_i$ si x está sólo en un conjunto abierto U_i y $k(x) = tv_i + (1-t)v_j$, para algún t con $0 \leq t \leq 1$, si x está en dos conjuntos abiertos U_i y U_j . En otro caso, $k(x)$ pertenece a la unión de los lados de T , que es $\text{Fr } T$. Por lo tanto, k aplica T en $\text{Fr } T$.

Además, k aplica cada lado de T en sí mismo. Esto se debe a que si x pertenece al lado vw de T , cualquier conjunto abierto U_i que contenga a x interseca este lado, de manera que v_i debe ser igual a v o w . La definición de k muestra entonces que $k(x)$ pertenece a vw .

Sea $h : \text{Fr } T \rightarrow \text{Fr } T$ la restricción de k a $\text{Fr } T$. Dado que h puede extenderse a la aplicación continua k , h es homotópicamente nula. Por otro lado, h es homotópica a la aplicación identidad de $\text{Fr } T$; desde luego, como h aplica cada lado de T en

sí mismo; la homotopía por rectas entre h y la aplicación identidad de $\text{Fr } T$ será dicha homotopía. Pero la aplicación identidad i de $\text{Fr } T$ no es homotópicamente nula.

Ejercicios

- Demuestre que si A es un retracto de B^2 , entonces toda aplicación continua $f : A \rightarrow A$ tiene un punto fijo.
- Pruebe que si $h : S^1 \rightarrow S^1$ es homotópicamente nula, entonces h tiene un punto fijo y h aplica algún punto x a su antípoda $-x$.
- Demuestre que si A es una matriz 3 por 3 no singular y con elementos no negativos, entonces A tiene un valor propio real positivo.
- Suponga que conoce el hecho de que, para cada n , no existe una retracción $r : B^{n+1} \rightarrow S^n$ (este resultado puede probarse utilizando técnicas más avanzadas de topología algebraica). Demuestre las siguientes afirmaciones:
 - La aplicación identidad $i : S^n \rightarrow S^n$ no es homotópicamente nula.
 - La aplicación inclusión $j : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0}$ no es homotópicamente nula.
 - Todo campo de vectores sobre B^{n+1} que no se anula apunta directamente hacia el exterior en algún punto de S^n y directamente hacia el interior en otro punto de S^n .
 - Toda aplicación continua $f : B^{n+1} \rightarrow B^{n+1}$ tiene un punto fijo.
 - Toda matriz $n + 1$ por $n + 1$ con elementos reales positivos tiene un valor propio positivo.
 - Si $h : S^n \rightarrow S^n$ es homotópicamente nula, entonces h tiene un punto fijo y h aplica algún punto x en su antípoda $-x$.

*§56 El teorema fundamental del álgebra

Es un hecho básico en la teoría de números complejos que toda ecuación polinómica

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

de grado n con coeficientes reales o complejos tiene n raíces (si las raíces se cuentan de acuerdo a sus multiplicidades). Probablemente el lector ya habrá oido hablar de este hecho en algún curso de álgebra, aunque es dudoso que le fuera demostrado en ese momento.

La demostración es, de hecho, bastante difícil; la parte más complicada es probar que toda ecuación polinómica de grado positivo tiene *al menos una raíz*. Hay varias

formas de hacer esto. Pueden utilizarse técnicas de álgebra (esta prueba es larga y ardua), o puede desarrollarse la teoría de funciones analíticas de una variable compleja hasta el punto donde este resultado es un corolario trivial del teorema de Liouville. También puede probarse como un corolario relativamente fácil de nuestro cálculo del grupo fundamental del círculo; esto es lo que haremos a continuación.

Teorema 56.1 (Teorema fundamental del álgebra). *Una ecuación polinómica*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

de grado $n > 0$ con coeficientes reales o complejos tiene al menos una raíz (real o compleja).

Demostración. *Paso 1.* Consideremos la aplicación $f : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $f(z) = z^n$, donde z es un número complejo. Probemos que el homomorfismo inducido f_* de grupos fundamentales es inyectivo.

Sea $p_0 : I \rightarrow S^1$ el lazo estándar en S^1 ,

$$p_0(s) = e^{2\pi i s} = (\cos 2\pi s, \operatorname{sen} 2\pi s).$$

Su imagen bajo f_* es el lazo

$$f(p_0(s)) = (e^{2\pi i s})^n = (\cos 2\pi ns, \operatorname{sen} 2\pi ns).$$

Este lazo se levanta a los caminos $s \rightarrow ns$ en el espacio recubridor \mathbb{R} . Por lo tanto, el lazo $f \circ p_0$ se corresponde con el entero n bajo el isomorfismo estándar de $\pi_1(S^1, b_0)$ con los enteros, mientras p_0 se corresponde con el número 1. Así f_* es “multiplicar por n ” en el grupo fundamental de S^1 , de manera que, en particular, f_* es inyectiva.

Paso 2. Probemos que si $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0$ es la aplicación $g(z) = z^n$, entonces g no es homotópicamente nula.

La aplicación g es igual a la aplicación f del Paso 1 compuesta con la aplicación inclusión $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0$. Ahora bien, f_* es inyectiva y j_* es inyectiva porque S^1 es un retracto de $\mathbb{R}^2 - 0$. Por lo tanto, $g_* = j_* \circ f_*$ es inyectiva y g no puede ser homotópicamente nula.

Paso 3. Probemos ahora un caso especial del teorema. Dada una ecuación polinómica

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0,$$

supongamos que

$$|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| < 1$$

y demostremos que la ecuación tiene una raíz dentro de la bola unidad B^2 .

Supongamos que no tiene tal raíz. Entonces podemos definir una aplicación $k : B^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ mediante la ecuación

$$k(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0.$$

Sea h la restricción de k a S^1 . Dado que h se extiende a una aplicación de la bola unidad en $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$, la aplicación h es homotópicamente nula.

Por otro lado, vamos a definir una homotopía F entre h y la aplicación g del Paso 2; como g no es homotópicamente nula, obtendremos una contradicción. Definimos $F : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ por la ecuación

$$F(z, t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0).$$

Véase la Figura 56.1; $F(z, t)$ nunca es igual a $\mathbf{0}$ porque

$$\begin{aligned}|F(z, t)| &\geq |z^n| - |t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)| \\&\geq 1 - t(|a_{n-1}z^{n-1}| + \cdots + |a_0|) \\&= 1 - t(|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|) > 0.\end{aligned}$$

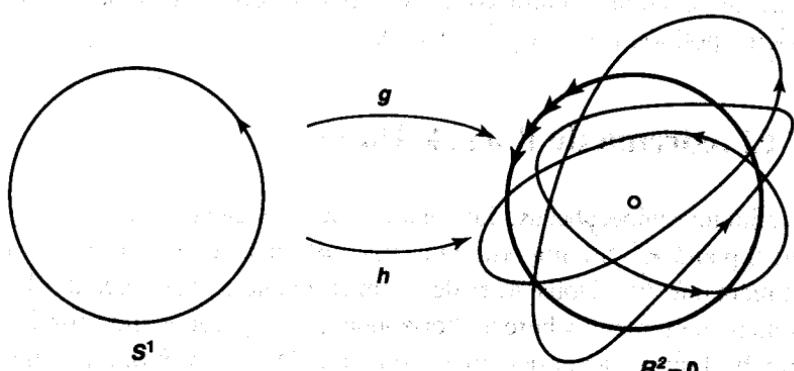


Figura 56.1

Paso 4. Probemos ahora el caso general. Dada una ecuación polinómica

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0,$$

elijamos un número real $c > 0$ y sustituymos $x = cy$. Obtenemos la ecuación

$$(cy)^n + a_{n-1}(cy)^{n-1} + \cdots + a_1(cy) + a_0 = 0$$

$$y^n + \frac{a_{n-1}}{c}y^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{c^{n-1}}y + \frac{a_0}{c^n} = 0.$$

Si esta ecuación tiene la raíz $y = y_0$, entonces la ecuación original tiene una raíz $x_0 = cy_0$. De manera que necesitamos simplemente elegir c lo suficientemente grande para que

$$\left| \frac{a_{n-1}}{c} \right| + \left| \frac{a_{n-2}}{c^2} \right| + \cdots + \left| \frac{a_1}{c^{n-1}} \right| + \left| \frac{a_0}{c^n} \right| < 1$$

y reducir el teorema al caso particular considerado en el Paso 3. ■

Ejercicios

1. Dada una ecuación polinómica

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

con coeficientes reales o complejos, pruebe que si $|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| < 1$, entonces *todas* las raíces de la ecuación están contenidas en el interior de la bola unidad B^2 . [Indicación: considere $g(x) = 1 + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n$ y pruebe que $g(x) \neq 0$ para $x \in B^2$.]

2. Encuentre un círculo centrado en el origen que contenga a todas las raíces de la ecuación polinómica $x^7 + x^2 + 1 = 0$.

*§57 El teorema de Borsuk-Ulam

Tenemos aquí un rompecabezas. Supongamos que nos dan una región poligonal acotada A en el plano \mathbb{R}^2 . Sin importar la forma que tenga A , es fácil probar que existe una línea recta que bisecciona A , es decir, un recta que corta el área de A por la mitad. Simplemente tomemos la recta horizontal $y = c$ y denotemos por $f(c)$ el área de la parte de A que está por debajo de esta recta. Observemos que f es una función continua de c por lo que, usando el teorema de los valores intermedios, encontramos un valor para c tal que $f(c)$ es exactamente igual a la mitad del área de A .

Pero ahora, en lugar de esto, supongamos que nos dan *dos* de tales regiones A_1 y A_2 , y nos piden encontrar una recta que las biseccione *a la vez*. No es nada obvio que exista tal recta. Intente el lector encontrar una, para un par arbitrario de regiones triangulares, si tiene dudas.

De hecho, tal línea recta siempre existe. Este resultado es un corolario de un teorema bien conocido llamado teorema de Borsuk-Ulam, el cual estudiamos ahora.

Definición. Si x es un punto de S^n , entonces su **antípoda** es el punto $-x$. Una aplicación $h : S^n \rightarrow S^n$ se dice que **conserva antípodas** si $h(-x) = -h(x)$, para todo $x \in S^n$.

Teorema 57.1. Si $h : S^1 \rightarrow S^1$ es continua y conserva antípodas, entonces h no es homotópicamente nula.

Demostración. Sea b_0 el punto $(1, 0)$ de S^1 . Sea $\rho : S^1 \rightarrow S^1$ una rotación de S^1 que aplique $h(b_0)$ en b_0 . Dado que ρ conserva antípodas, también lo hará la composición $\rho \circ h$. Además, si H fuera una homotopía entre h y una aplicación constante, entonces $\rho \circ H$ sería una homotopía entre $\rho \circ h$ y una aplicación constante. Por lo tanto, es suficiente probar el teorema bajo la hipótesis adicional de que $h(b_0) = b_0$.

Paso 1. Sea $q : S^1 \rightarrow S^1$ la aplicación $q(z) = z^2$, donde z es un número complejo. En coordenadas reales, $q(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) = (\cos 2\theta, \operatorname{sen} 2\theta)$. La aplicación q es una aplicación cociente, ya que es continua, cerrada y sobreyectiva. La imagen inversa bajo q de cualquier punto de S^1 consiste en dos puntos antípodas z y $-z$ de S^1 . Como $h(-z) = -h(z)$, tenemos la ecuación $q(h(-z)) = q(h(z))$. Por lo tanto, dado que q es una aplicación cociente, la aplicación $q \circ h$ induce una aplicación continua $k : S^1 \rightarrow S^1$ tal que $k \circ q = q \circ h$.

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{h} & S^1 \\ q \downarrow & & q \downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{k} & S^1 \end{array}$$

Observemos que $q(b_0) = h(b_0) = b_0$, de forma que también $k(b_0) = b_0$. Además, $h(-b_0) = -b_0$.

Paso 2. Probemos que el homomorfismo k_* de $\pi_1(S^1, b_0)$ en sí mismo es no trivial.

Con este fin, mostramos primero que q es una aplicación recubridora (propusimos esto como un ejercicio en §53). La demostración es similar a la prueba de que la aplicación estándar $p : \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$ es una aplicación recubridora. Si, por ejemplo, U es el subconjunto S^1 consistente en aquellos puntos que tienen la segunda coordenada positiva, entonces $p^{-1}(U)$ consiste en aquellos puntos de S^1 que están en el primer y tercer cuadrante de \mathbb{R}^2 . La aplicación q lleva cada uno de estos conjuntos homeomórficamente sobre U . Argumentos análogos se aplican cuando U es la intersección de S^1 con el semiplano abierto inferior, el semiplano abierto derecho o el semiplano abierto izquierdo.

Segundo, observemos que si \tilde{f} es cualquier camino en S^1 de b_0 a $-b_0$, entonces el lazo $f = q \circ \tilde{f}$ representa un elemento no trivial de $\pi_1(S^1, b_0)$. Esto se debe a que \tilde{f} es un levantamiento de f a S^1 que comienza en b_0 y no acaba en b_0 .

Finalmente, probemos que k_* es no trivial. Sea \tilde{f} un camino en S^1 de b_0 a $-b_0$ y sea f el lazo $q \circ \tilde{f}$. Entonces $k_*[f]$ es no trivial, ya que $k_*[f] = [k \circ (q \circ \tilde{f})] = [q \circ (h \circ \tilde{f})]$, y lo último no es trivial porque $h \circ \tilde{f}$ es un camino en S^1 de b_0 a $-b_0$.

Paso 3. Finalmente, probemos que el homomorfismo h_* es no trivial, de manera que h no puede ser homotópicamente nula.

El homomorfismo k_* es inyectivo por ser un homomorfismo no trivial de un grupo cíclico infinito en sí mismo. El homomorfismo q_* también es inyectivo; efectivamente, q_* se corresponde con la multiplicación por dos en el grupo de los enteros. Se sigue que $k_* \circ q_*$ es inyectivo. Dado que $q_* \circ h_* = k_* \circ q_*$, el homomorfismo h_* debe ser inyectivo también. ■

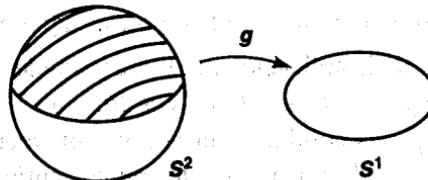


Figura 57.1

Teorema 57.2. No existe ninguna aplicación continua $g : S^2 \rightarrow S^1$ que conserve antípodas.

*Demuestra*ción. Supongamos que $g : S^2 \rightarrow S^1$ es continua y conserva antípodas. Tomemos S^1 como el ecuador de S^2 . Entonces la restricción de g a S^1 es una aplicación continua h de S^1 en sí misma que conserva antípodas. Por el lema precedente, h no es homotópicamente nula. Pero el hemisferio superior E de S^2 es homeomorfo a la bola B^2 y g es una extensión continua de h a E (véase la Figura 57.1). ■

Teorema 57.3 (Teorema de Borsuk-Ulam para S^2). Dada una aplicación continua $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, existe un punto x de S^2 tal que $f(x) = f(-x)$.

*Demuestra*ción. Supongamos que $f(x) \neq f(-x)$, para todo $x \in S^2$. Entonces la aplicación

$$g(x) = [f(x) - f(-x)] / \|f(x) - f(-x)\|$$

es una aplicación continua $g : S^2 \rightarrow S^1$ tal que $g(-x) = -g(x)$, para todo x . ■

Teorema 57.4 (Teorema de la biseción). Dadas dos regiones poligonales acotadas en \mathbb{R}^2 , existe un recta en \mathbb{R}^2 que biseca cada una de ellas.

*Demuestra*ción. Tomemos dos regiones poligonales acotadas A_1 y A_2 en el plano $\mathbb{R}^2 \times 1$ de \mathbb{R}^3 y demostremos que existe una recta L en este plano que biseca cada una de ellas.

Dado un punto u de S^2 , consideremos el plano P en \mathbb{R}^3 que pasa por el origen y tiene a u como vector normal unitario. Este plano divide a \mathbb{R}^3 en dos semiespacios;

sea $f_i(u)$ igual al área de la porción de A_i que está en el mismo lado de P que el vector u .

Si u es el vector unitario \mathbf{k} , entonces $f_i(u) = \text{área } A_i$ y si $u = -\mathbf{k}$, entonces $f_i(u) = 0$. En otro caso, el plano P interseca al plano $\mathbb{R}^2 \times 1$ en una recta L que divide $\mathbb{R}^2 \times 1$ en dos semiplanos y $f_i(u)$ es el área de la parte de A_i que está en un lado de esta recta (véase la Figura 57.2).

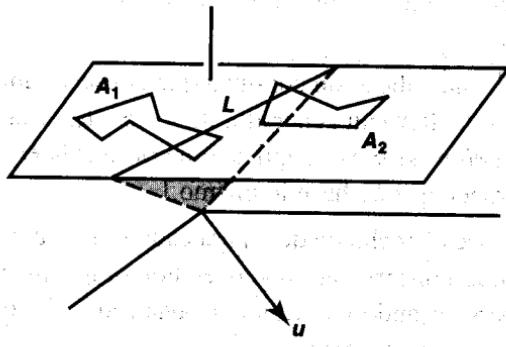


Figura 57.2

Cambiando u por $-u$, obtenemos el mismo plano P pero los semiespacios cambiados. De manera que $f_i(-u)$ es el área de la parte de A_i que está en el semiespacio determinado por P opuesto al que contiene al vector u . Se deduce que

$$f_i(u) + f_i(-u) = \text{área } A_i.$$

Consideremos ahora la aplicación $F : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(u) = (f_1(u), f_2(u))$. El teorema de Borsuk-Ulam nos da un punto u de S^2 para el cual $F(u) = F(-u)$. Entonces $f_i(u) = f_i(-u)$, para $i = 1, 2$, de forma que $f_i(u) = \frac{1}{2} \text{área } A_i$, como deseábamos probar. ■

Hemos probado el teorema de la bisectriz para regiones poligonales acotadas en el plano. Sin embargo, lo único que fue necesario en la demostración fue la existencia de una función área aditiva para A_1 y A_2 . Así, el teorema es válido para cualesquiera dos conjuntos A_1 y A_2 que sean “Jordan-medibles” en el sentido usual del análisis.

Estos teoremas se generalizan a dimensiones superiores, pero las demostraciones son considerablemente más sofisticadas. La versión generalizada del teorema de la bisectriz establece que, dados n conjuntos Jordan-medibles en \mathbb{R}^n , existe un plano de dimensión $n - 1$ que los bisectiza a todos. En el caso $n = 3$, este resultado se conoce con el nombre de “teorema del sandwich de jamón”. Si consideramos un sandwich de jamón consistente en dos piezas de pan y una loncha de jamón, entonces el teorema de la bisectriz dice que podemos dividir de forma precisa cada una de ellas por la mitad con un simple golpe de hacha.

Ejercicios

1. Pruebe el siguiente “teorema de meteorología”: en cualquier instante de tiempo, existen un par de puntos antípodas en la superficie de la tierra en los cuales la temperatura y la presión barométrica son iguales.
2. Demuestre que si $g : S^2 \rightarrow S^2$ es continua y $g(x) \neq g(-x)$, para todo x , entonces g es sobreyectiva. [Indicación: si $p \in S^2$, entonces $S^2 - \{p\}$ es homeomorfo a \mathbb{R}^2 .]
3. Sea $h : S^1 \rightarrow S^1$ una aplicación continua que conserva antípodas con $h(b_0) = b_0$. Demuestre que h_* lleva un generador de $\pi_1(S^1, b_0)$ a una potencia impar de sí mismo. [Indicación: si k es la aplicación construida en la demostración del Teorema 57.1, pruebe que k_* hace lo mismo.]
4. Suponga que conoce el hecho de que, para cada n , ninguna aplicación continua $h : S^n \rightarrow S^n$ que conserve antípodas es homotópicamente nula (este resultado puede probarse usando técnicas más avanzadas de topología algebraica). Demuestre las siguientes afirmaciones:
 - (a) No existe ninguna retracción $r : B^{n+1} \rightarrow S^n$.
 - (b) No existe ninguna aplicación continua $g : S^{n+1} \rightarrow S^n$ que conserve antípodas.
 - (c) (Teorema de Borsuk-Ulam). Dada una aplicación continua $f : S^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, existe un punto x de S^{n+1} tal que $f(x) = f(-x)$.
 - (d) Si A_1, \dots, A_{n+1} son conjuntos medibles acotados en \mathbb{R}^{n+1} , existe un n -plano en \mathbb{R}^{n+1} que los bisecciona a todos.

§58 Retractos de deformación y tipo de homotopía

Como hemos visto, una forma de obtener información acerca del grupo fundamental de un espacio X es estudiar los espacios recubridores de X . En esta sección vamos a discutir otra forma, la cual involucra el concepto de *tipo de homotopía*. Esto proporciona un método para reducir el problema de calcular el grupo fundamental de un espacio al problema de calcular el grupo fundamental de algún otro espacio —preferiblemente, uno que sea más familiar.

Comenzamos con un lema.

Lema 58.1. Sean $h, k : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ dos aplicaciones continuas. Si h y k son homotópicas y si la imagen del punto base x_0 de X permanece fija en y_0 durante la homotopía, entonces los homomorfismos h_* y k_* coinciden.

Demostración. La demostración es inmediata. Por hipótesis, existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow Y$ entre h y k tal que $H(x_0, t) = y_0$, para todo t . Se sigue que si f es

un lazo en X basado en x_0 , entonces la composición

$$I \times I \xrightarrow{f \times \text{id}} X \times I \xrightarrow{H} Y$$

es una homotopía entre $h \circ f$ y $k \circ f$; es una homotopía de caminos porque f es un lazo en x_0 y H aplica $x_0 \times I$ en y_0 . ■

Utilizando este lema, generalizamos un resultado concerniente al espacio $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ ya probado anteriormente, demostrando que el homomorfismo inducido por la inclusión $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ no sólo es inyectivo sino también sobreíectivo. Más generalmente, probemos el siguiente teorema.

Teorema 58.2. *La aplicación inclusión $j : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0}$ induce un isomorfismo de grupos fundamentales.*

Demuestração. Sea $X = \mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0}$ y $b_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Sea $r : X \rightarrow S^n$ la aplicación $r(x) = x/\|x\|$. Entonces $r \circ j$ es la aplicación identidad de S^n , de manera que $r_* \circ j_*$ es el homomorfismo identidad de $\pi_1(S^n, b_0)$.

Consideremos ahora la composición $j \circ r$, la cual aplica X en sí mismo;

$$X \xrightarrow{r} S^n \xrightarrow{j} X.$$

Esta aplicación no es la identidad de X , pero es homotópica a la aplicación identidad. En efecto, la homotopía por rectas $H : X \times I \rightarrow X$, dada por

$$H(x, t) = (1-t)x + tx/\|x\|,$$

es una homotopía entre la aplicación identidad de X y la aplicación $j \circ r$. Observemos que $H(x, t)$ nunca es igual a $\mathbf{0}$ porque $(1-t) + t/\|x\|$ es un número entre 1 y $1/\|x\|$. El punto b_0 permanece fijo durante la homotopía ya que $\|b_0\| = 1$. Se sigue por el lema precedente que el homomorfismo $(j \circ r)_* = j_* \circ r_*$ es el homomorfismo identidad de $\pi_1(X, b_0)$. ■

¿Qué hace que la demostración anterior funcione? Hablando a grandes rasgos, su realización es posible porque disponemos de una manera natural de deformar la aplicación identidad de $\mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0}$ a una aplicación que colapsa todo $\mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0}$ sobre S^n . La deformación H colapsa gradualmente cada recta radial que parte del origen al punto donde se corta con S^n ; cada punto de S^n permanece fijo durante esta deformación.

La Figura 58.1 ilustra, en el caso $n = 1$, cómo la deformación H nos da una homotopía de caminos $H(f(s), t)$ entre el lazo f en $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ y el lazo $g = f/\|f\|$ en S^1 .

Estos comentarios nos conducen a formular una situación más general en la cual se aplica el mismo procedimiento.

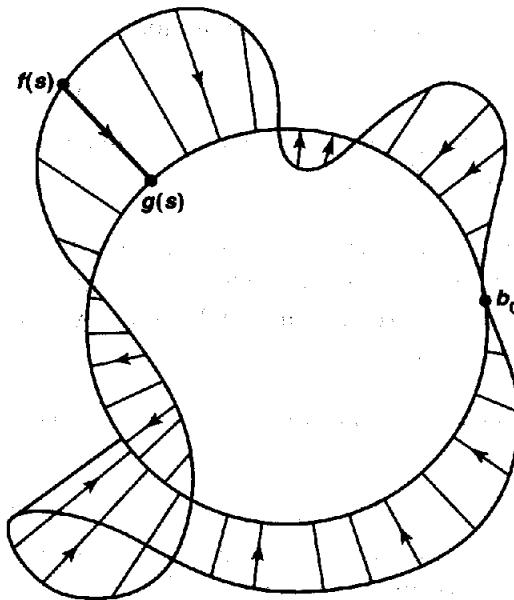


Figura 58.1

Definición. Sea A un subespacio de X . Decimos que A es un *retracto de deformación* de X si la aplicación identidad de X es homotópica a una aplicación que lleva todo X en A y tal que cada punto de A permanece fijo durante la homotopía. Esto significa que existe una aplicación continua $H : X \times I \rightarrow X$ tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) \in A$, para todo $x \in X$, y $H(a, t) = a$, para todo $a \in A$. La homotopía H se llama *retracción de deformación* de X en A . La aplicación $r : X \rightarrow A$ definida por la ecuación $r(x) = H(x, 1)$ es una retracción de X en A y H es una homotopía entre la aplicación identidad de X y la aplicación $j \circ r$, donde $j : A \rightarrow X$ es la inclusión.

La demostración del teorema anterior se generaliza inmediatamente para probar el siguiente:

Teorema 58.3. Sea A un retracto de deformación de X y $x_0 \in A$. Entonces la aplicación inclusión

$$j : (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$$

induce un isomorfismo de grupos fundamentales.

EJEMPLO 1. Denotemos por B el eje z de \mathbb{R}^3 y consideremos el espacio $\mathbb{R}^3 - B$. Éste tiene, como un retracto de deformación, al plano xy agujereado $(\mathbb{R}^2 - 0) \times 0$. La aplicación H definida por la ecuación

$$H(x, y, z, t) = (x, y, (1-t)z)$$

es un retracto de deformación; éste colapsa gradualmente cada recta paralela al eje z en el punto donde la recta interseca al plano xy . Concluimos que el espacio $\mathbb{R}^3 - B$ tiene grupo fundamental cíclico infinito.

EJEMPLO 2. Consideremos el *plano doblemente agujereado* $\mathbb{R}^2 - p - q$. Aseguramos que tiene al espacio “figura ocho” como un retracto de deformación. Más que escribir las ecuaciones, simplemente esbozamos el retracto de deformación; es la deformación en tres fases indicada en la Figura 58.2.

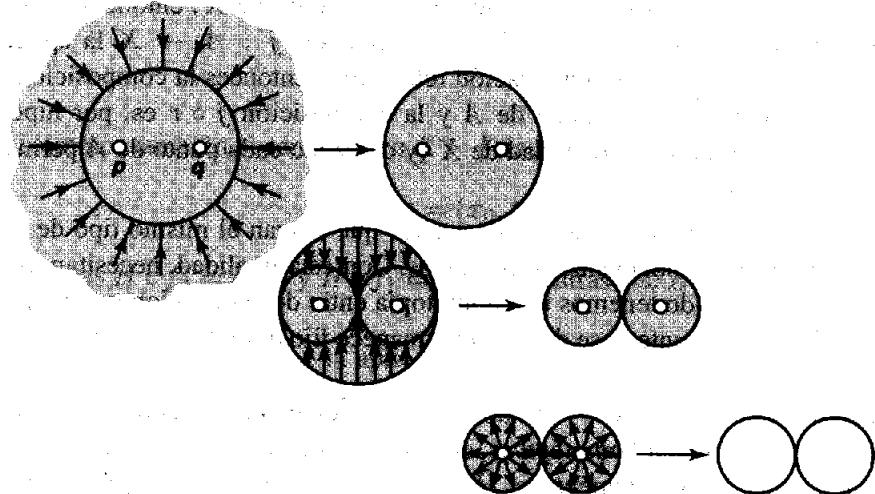


Figura 58.2

EJEMPLO 3. Otro retracto de deformación de $\mathbb{R}^2 - p - q$ es el “espacio theta”

$$\theta = S^1 \cup (0 \times [-1, 1]);$$

dejamos al lector esbozar las aplicaciones involucradas. Como resultado, la figura ocho y el espacio theta tienen grupos fundamentales isomorfos, si bien ninguno es un retracto de deformación del otro.

Desde luego, no sabemos todavía nada acerca del grupo fundamental de la figura ocho, pero ya lo estudiaremos.

El ejemplo de la figura ocho y el espacio theta sugiere la posibilidad de que podría haber una forma más general de demostrar que dos espacios tienen grupos fundamentales isomorfos que probando que uno de ellos es homeomorfo a un retracto de deformación del otro. Formulamos dicha noción ahora.

Definición. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ dos aplicaciones continuas. Supongamos que la aplicación $g \circ f : X \rightarrow X$ es homotópica a la aplicación identidad de X y que la aplicación $f \circ g : Y \rightarrow Y$ es homotópica a la aplicación identidad de

Y . Entonces las aplicaciones f y g se denominan *equivalencias homotópicas* y cada una de ellas se dice que es una *inversa homotópica* de la otra.

Es directo comprobar que si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica de X con Y y $h : Y \rightarrow Z$ es una equivalencia homotópica de Y con Z , entonces $h \circ f : X \rightarrow Z$ es una equivalencia homotópica de X con Z . Se sigue que la relación de equivalencia homotópica es una relación de equivalencia. Dos espacios que son homotópicamente equivalentes se dice que tienen el mismo *tipo de homotopía*.

Observemos que si A es un retracto de deformación de X , entonces A tiene el mismo tipo de homotopía que X . Efectivamente, sea $j : A \rightarrow X$ la aplicación inclusión y sea $r : X \rightarrow A$ la aplicación retracción. Entonces la composición $r \circ j$ es igual a la aplicación identidad de A y la composición $j \circ r$ es, por hipótesis, homotópica a la aplicación identidad de X (y de hecho cada punto de A permanece fijo durante la homotopía).

Vamos a demostrar ahora que dos espacios que tengan el mismo tipo de homotopía tienen grupos fundamentales isomorfos. Con esta finalidad, necesitamos estudiar qué sucede cuando tenemos una homotopía entre dos aplicaciones continuas de X en Y tales que el punto base de X no permanece fijo durante la homotopía.

Lema 58.4. Sean $h, k : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones continuas con $h(x_0) = y_0$ y $k(x_0) = y_1$. Si h y k son homotópicas, entonces existe un camino α en Y de y_0 a y_1 tal que $k_* = \hat{\alpha} \circ h_*$. Ciertamente, si $H : X \times I \rightarrow Y$ es la homotopía entre h y k , entonces α es el camino $\alpha(t) = H(x_0, t)$.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow k_* & \downarrow \hat{\alpha} \\ & & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

Demostración. Sea $f : I \rightarrow X$ un lazo en X basado en x_0 . Debemos probar que

$$k_*([f]) = \hat{\alpha}(h_*([f])).$$

Esta ecuación afirma que $[k \circ f] = [\bar{\alpha}] * [h \circ f] * [\alpha]$ o, equivalentemente, que

$$[\alpha] * [k \circ f] = [h \circ f] * [\alpha].$$

Ésta es la ecuación que vamos a comprobar.

Para empezar, consideremos los lazos f_0 y f_1 en el espacio $X \times I$ dados por las ecuaciones

$$f_0(s) = (f(s), 0) \quad \text{y} \quad f_1(s) = (f(s), 1).$$

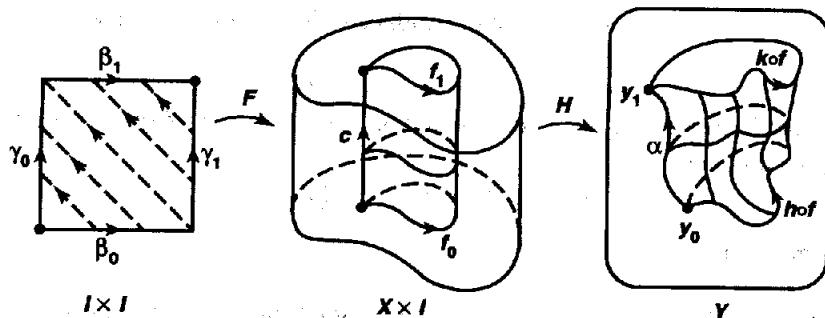


Figura 58.3

Consideremos también el camino c en $X \times I$ dado por la ecuación

$$c(t) = (x_0, t).$$

Entonces $H \circ f_0 = h \circ f$ y $H \circ f_1 = k \circ f$, mientras que $H \circ c$ es igual al camino α (véase la Figura 58.3).

Sea $F : I \times I \rightarrow X \times I$ la aplicación $F(s, t) = (f(s), t)$. Consideremos los siguientes caminos en $I \times I$, los cuales se mueven a lo largo de los cuatro lados de $I \times I$:

$$\begin{aligned} \beta_0(s) &= (s, 0) & y & \beta_1(s) = (s, 1), \\ \gamma_0(s) &= (0, t) & y & \gamma_1(s) = (1, t). \end{aligned}$$

Entonces $F \circ \beta_0 = f_0$ y $F \circ \beta_1 = f_1$, mientras que $F \circ \gamma_0 = F \circ \gamma_1 = c$.

Las caminos rectos a trozos $\beta_0 * \gamma_1$ y $\gamma_0 * \beta_1$ son caminos en $I \times I$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$; como $I \times I$ es convexo, existe una homotopía de caminos G entre ellos. Entonces $F \circ G$ es una homotopía de caminos en $X \times I$ entre $f_0 * c$ y $c * f_1$. Y $H \circ (F \circ G)$ es una homotopía de caminos en Y entre

$$\begin{aligned} (H \circ f_0) * (H \circ c) &= (h \circ f) * \alpha & y \\ (H \circ c) * (H \circ f_1) &= \alpha * (k \circ f), \end{aligned}$$

como deseábamos. ■

Corolario 58.5. Sean $h, k : X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas homotópicas satisfaceiendo $h(x_0) = y_0$ y $k(x_0) = y_1$. Si h_* es inyectiva, sobreyectiva o trivial, entonces también lo es k_* .

Corolario 58.6. Sea $h : X \rightarrow Y$ una aplicación. Si h es homotópicamente nula, entonces h_* es el homomorfismo trivial.

Demostración. La aplicación constante induce el homomorfismo trivial. ■

Teorema 58.7. Sea $f : X \rightarrow Y$ continua con $f(x_0) = y_0$. Si f es una equivalencia homotópica entonces

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Sea $g : Y \rightarrow X$ una inversa homotópica para f . Consideremos las aplicaciones

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (X, x_1) \xrightarrow{f} (Y, y_1),$$

donde $x_1 = g(y_0)$ e $y_1 = f(x_1)$. Tenemos los correspondientes homomorfismos inducidos:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{(f_{x_0})_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow g_* & \\ & \xleftarrow{(f_{x_1})_*} & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

[Aquí tenemos que distinguir entre los homomorfismos inducidos por f relativos a dos puntos base diferentes.] Ahora bien

$$g \circ f : (X, x_0) \longrightarrow (X, x_1)$$

es, por hipótesis, homotópica a la aplicación identidad, de manera que existe un camino α en X tal que

$$(g \circ f)_* = \hat{\alpha} \circ (i_X)_* = \hat{\alpha}.$$

Se sigue que $(g \circ f)_* = g_* \circ (f_{x_0})_*$ es un isomorfismo.

Análogamente, dado que $f \circ g$ es homotópica a la aplicación identidad i_Y , el homomorfismo $(f \circ g)_* = (f_{x_1})_* \circ g_*$ es un isomorfismo.

Lo primero implica que g_* es sobreyectiva y lo segundo implica que g_* es inyectiva. Por lo tanto, g_* es un isomorfismo. Aplicando la primera ecuación una vez más, concluimos que

$$(f_{x_0})_* = (g_*)^{-1} \circ \hat{\alpha},$$

de forma que $(f_{x_0})_*$ es también un isomorfismo.

Observemos que, aunque g es una inversa homotópica para f , el homomorfismo g_* no es un inverso para el homomorfismo $(f_{x_0})_*$. ■

La relación de equivalencia homotópica es claramente más general que el concepto de retracto de deformación. El espacio theta y la figura ocho son ambos retractos de

deformación del plano doblemente agujereado. De manera que son equivalentes homotópicos al plano doblemente agujereado y, por tanto, equivalentes entre ellos. Pero ninguno es homeomorfo a un retracto de deformación del otro; de hecho, ninguno de ellos puede ni siquiera embeberse en el otro.

Es un hecho llamativo que la situación que se tiene para estos dos espacios es una situación estándar en relación con las equivalencias homotópicas. Martin Fuchs demostró un teorema en el sentido de que dos espacios X e Y tienen el mismo tipo de homotopía si, y sólo si, los dos son homeomorfos a retractos de deformación de un mismo espacio Z . La demostración, aunque utiliza sólo herramientas elementales, es difícil [F].

Ejercicios

1. Demuestre que si A es un retracto de deformación de X y B es un retracto de deformación de A , entonces B es un retracto de deformación de X .

2. Para cada uno de los siguientes espacios, el grupo fundamental es trivial, o cílico infinito, o isomorfo al grupo fundamental de la figura ocho. Determine para cada espacio cuál de las tres alternativas se da.

- (a) El “toro sólido”, $B^2 \times S^1$.
- (b) El toro T menos un punto.
- (c) El cilindro $S^1 \times I$.
- (d) El cilindro infinito $S^1 \times \mathbb{R}$.
- (e) \mathbb{R}^3 con los ejes no negativos x, y, z suprimidos.

Los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 :

- (f) $\{x \mid \|x\| > 1\}$.
- (g) $\{x \mid \|x\| \geq 1\}$.
- (h) $\{x \mid \|x\| < 1\}$.
- (i) $S^1 \cup (\mathbb{R}_+ \times 0)$.
- (j) $S^1 \cup (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$.
- (k) $S^1 \cup (\mathbb{R} \times 0)$.
- (l) $\mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}_+ \times 0)$.

3. Demuestre que, dada una colección \mathcal{C} de espacios, la relación de equivalencia homotópica es una relación de equivalencia en \mathcal{C} .

4. Sea X la figura ocho y sea Y el espacio theta. Describa aplicaciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ que sean inversas homotópicas una de otra.

5. Recordemos que un espacio X se dice que es *contractible* si la aplicación identidad de X en sí mismo es homotópicamente nula. Demuestre que X es contractible si, y sólo si, X tiene el tipo de homotopía de un espacio unipuntual.

6. Pruebe que un retracto de un espacio contractible es contractible.
7. Sea A un subespacio de X ; sean $j : A \rightarrow X$ la aplicación inclusión y $f : X \rightarrow A$ una aplicación continua. Suponga que existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow X$ entre la aplicación $j \circ f$ y la aplicación identidad de X .
 - (a) Demuestre que si f es una retracción, entonces j_* es un isomorfismo.
 - (b) Pruebe que si H aplica $A \times I$ en A , entonces j_* es un isomorfismo.
 - (c) Dé un ejemplo en el cual j_* no sea un isomorfismo.
- *8. Encuentre un espacio X y un punto x_0 de X tal que la inclusión $\{x_0\} \rightarrow X$ sea una equivalencia homotópica, pero $\{x_0\}$ no sea un retracto de deformación de X . [Indicación: sea X el subespacio de \mathbb{R}^2 formado por la unión de los segmentos de recta $(1/n) \times I$, para $n \in \mathbb{Z}_+$, el segmento de recta $0 \times I$ y el segmento de recta $I \times 0$; sea x_0 el punto $(0, 1)$. Si $\{x_0\}$ es un retracto de deformación de X , pruebe que, para cualquier entorno U de x_0 , la componente por caminos de U en la que está x_0 contiene un entorno de x_0 .]

9. Definimos el *grado* de una aplicación continua $h : S^1 \rightarrow S^1$ como sigue:

Sea b_0 el punto $(1, 0)$ de S^1 ; elijamos un generador γ para el grupo cíclico infinito $\pi_1(S^1, b_0)$. Si x_0 es cualquier punto de S^1 , escojamos un camino α en S^1 de b_0 a x_0 , y definamos $\gamma(x_0) = \hat{\alpha}(\gamma)$. Entonces $\gamma(x_0)$ genera $\pi_1(S^1, x_0)$. El elemento $\gamma(x_0)$ es independiente de la elección del camino α ya que el grupo fundamental de S^1 es abeliano.

Dada ahora $h : S^1 \rightarrow S^1$, elijamos $x_0 \in S^1$ y pongamos $h(x_0) = x_1$. Consideremos el homomorfismo

$$h_* : \pi_1(S^1, x_0) \rightarrow \pi_1(S^1, x_1).$$

Como ambos grupos son cílicos infinitos, tenemos

$$(*) \quad h_*(\gamma(x_0)) = d \cdot \gamma(x_1)$$

para algún entero d , si el grupo lo escribimos aditivamente. El entero d se llama **grado** de h y se denota por $\deg h$.[†]

El grado de h es independiente de la elección del generador γ ; eligiendo el otro generador simplemente cambiaría el signo de ambos lados de (*).

- (a) Demuestre que d es independiente de la elección de x_0 .
- (b) Pruebe que si $h, k : S^1 \rightarrow S^1$ son homotópicas entonces tienen el mismo grado.
- (c) Demuestre que $\deg(h \circ k) = (\deg h) \cdot (\deg k)$.

[†]N.T.: La razón de esta terminología reside en que *grado* es, en inglés, *degree*.

- (d) Calcule los grados de la aplicación constante, la aplicación identidad, la aplicación reflexión $\rho(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ y la aplicación $h(z) = z^n$, donde z es un número complejo.
- *(e) Pruebe que si $h, k : S^1 \rightarrow S^1$ tienen el mismo grado entonces son homotópicas.
10. Suponga que a toda aplicación $h : S^n \rightarrow S^n$ le hemos asignado un entero, denotado por $\deg h$ y denominado *grado* de h , tal que:

- Las aplicaciones homotópicas tienen el mismo grado.
- $\deg(h \circ k) = (\deg h) \cdot (\deg k)$.
- La aplicación identidad tiene grado 1, cualquier aplicación constante tiene grado 0 y la aplicación reflexión $\rho(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$ tiene grado -1 .

[Se puede construir una de estas funciones utilizando las herramientas de topología algebraica. Intuitivamente, $\deg h$ mide las veces que h enrolla S^n en sí misma; el signo nos dice si h conserva la orientación o no.] Pruebe lo siguiente:

- No existe una retracción $r : B^{n+1} \rightarrow S^n$.
- Si $h : S^n \rightarrow S^n$ tiene grado distinto de $(-1)^{n+1}$, entonces h tiene un punto fijo. [Indicación: demuestre que si h no tiene puntos fijos, entonces h es homotópica a la aplicación antípoda $a(x) = -x$.]
- Si $h : S^n \rightarrow S^n$ tiene grado distinto de 1, entonces h aplica algún punto x en su antípoda $-x$.
- Si S^n tiene un campo de vectores tangentes v que no se anula, entonces n es impar. [Indicación: si existe v , pruebe que la aplicación identidad es homotópica a la aplicación antípoda.]

§59 El grupo fundamental de S^n

Retornamos ahora al problema comentado al comienzo del capítulo: el problema de probar que la esfera, el toro y el doble toro son superficies topológicamente distintas. Comenzamos con la esfera; vamos a demostrar que S^n es simplemente conexa, para $n \geq 2$. El resultado clave que necesitamos queda establecido en el siguiente teorema.

Teorema 59.1. *Supongamos que $X = U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos de X . Supongamos que $U \cap V$ es conexo por caminos y que $x_0 \in U \cap V$. Sean i y j las aplicaciones inclusión de U y V , respectivamente, en X . Entonces las imágenes de los homomorfismos inducidos*

$$i_* : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \quad \text{y} \quad j_* : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

generan $\pi_1(X, x_0)$.

Demostración. Este teorema establece que, dado un lazo f en X basado en x_0 , éste es homotópico por caminos a un producto de la forma $(g_1 * (g_2 * (\dots * g_n)))$, donde cada g_i es un lazo en X basado en x_0 enteramente contenido en U o en V .

Paso 1. Probemos que existe una subdivisión $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ del intervalo unidad tal que $f(a_i) \in U \cap V$ y $f([a_{i-1}, a_i])$ está contenido en U o V , para cada i .

Para comenzar, elijamos una subdivisión b_0, \dots, b_m de $[0, 1]$ tal que, para cada i , el conjunto $f([b_{i-1}, b_i])$ esté contenido en U o V (utilizando el teorema del número de Lebesgue). Si $f(b_i)$ pertenece a $U \cap V$, para cada i , habremos terminado. Si no es así, sea i un índice tal que $f(b_i) \notin U \cap V$. Cada uno de los conjuntos $f([b_{i-1}, b_i])$ y $f([b_i, b_{i+1}])$ está contenido en U o en V . Si $f(b_i) \in U$, entonces ambos conjuntos deben estar en U ; si $f(b_i) \in V$, ambos conjuntos deben estar en V . En cualquier caso, podemos suprimir b_i , obteniendo una nueva subdivisión c_0, \dots, c_{m-1} que sigue satisfaciendo la condición de que $f([c_{i-1}, c_i])$ esté contenido en U o en V , para cada i .

Un número finito de repeticiones de este proceso nos permite conseguir la subdivisión deseada.

Paso 2. Probemos el teorema. Dado f , sea a_0, \dots, a_n la subdivisión construida en el Paso 1. Definamos f_i como el camino en X igual a la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[a_{i-1}, a_i]$ compuesta con f . Entonces f_i es un camino que está contenido en U o en V , y por el Teorema 51.3,

$$[f] = [f_1] * [f_2] * \dots * [f_n].$$

Para cada i , elijamos un camino α_i en $U \cap V$ de x_0 a $f(a_i)$ (aquí utilizamos el hecho de que $U \cap V$ es conexo por caminos). Dado que $f(a_0) = f(a_n) = x_0$, podemos escoger que α_0 y α_n sean ambos el camino constante en x_0 (véase la Figura 59.1).

Ponemos ahora

$$g_i = (\alpha_{i-1} * f_i) * \overline{\alpha_i}$$

para cada i . Entonces g_i es un lazo en X basado en x_0 cuya imagen está contenida en U o en V . Mediante un cálculo directo se comprueba que

$$[g_1] * [g_2] * \dots * [g_n] = [f_1] * [f_2] * \dots * [f_n]. \quad \blacksquare$$

El teorema precedente es un caso especial de un teorema famoso de topología conocido por *teorema de Seifert-van Kampen*, el cual expresa el grupo fundamental del espacio $X = U \cup V$ de manera bastante más general, cuando $U \cap V$ es conexo, en términos de los grupos fundamentales de U y V . Estudiaremos este teorema en el Capítulo 11.

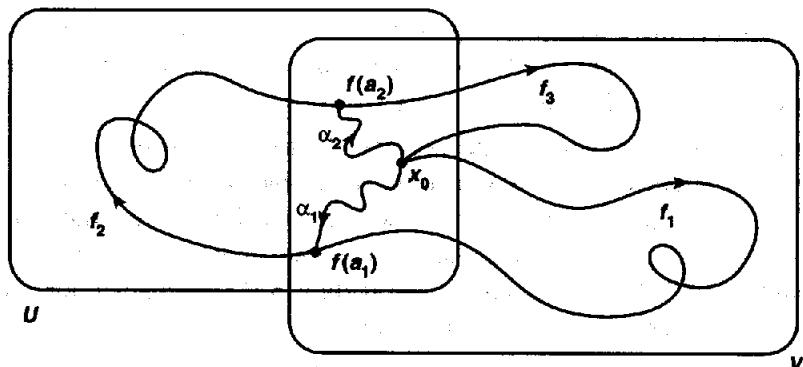


Figura 59.1

Corolario 59.2. Supongamos que $X = U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos de X y que $U \cap V$ es conexo por caminos y no vacío. Si U y V son simplemente conexos entonces X es simplemente conexo.

Teorema 59.3. Si $n \geq 2$, la n -esfera S^n es simplemente conexa.

*Demuestra*ón. Sean $p = (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $q = (0, 0, \dots, -1)$ el “polo norte” y el “polo sur” de S^n , respectivamente.

Paso 1. Probemos que, para $n \geq 1$, la esfera agujereada $S^n - p$ es homeomorfa a \mathbb{R}^n .

Definamos $f : (S^n - p) \rightarrow \mathbb{R}^n$ por la ecuación

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n).$$

La aplicación f se denomina *proyección estereográfica*. (Si cogemos la recta en \mathbb{R}^{n+1} que pasa por el polo norte p y el punto x de $S^n - p$, entonces esta recta interseca al n -plano $\mathbb{R}^n \times 0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ en el punto $f(x) \times 0$.) Se comprueba que f es un homeomorfismo viendo que la aplicación $g : \mathbb{R}^n \rightarrow (S^n - p)$ dada por

$$g(y) = g(y_1, \dots, y_n) = (t(y) \cdot y_1, \dots, t(y) \cdot y_n, 1 - t(y)),$$

donde $t(y) = 2/(1 + \|y\|^2)$, es la inversa por la derecha y por la izquierda de f .

Observemos que la aplicación reflexión $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$ define un homeomorfismo entre $S^n - p$ y $S^n - q$, de manera que el último espacio también es homeomorfo a \mathbb{R}^n .

Paso 2. Probemos el teorema. Sean U y V los conjuntos abiertos $U = S^n - p$ y $V = S^n - q$ de S^n .

Observemos primero que, para $n \geq 1$, la esfera S^n es conexa por caminos. Esto se deduce del hecho de que U y V son conexos por caminos (al ser homeomorfos a \mathbb{R}^n) y tienen en común el punto $(1, 0, \dots, 0)$ de S^n .

Probemos ahora que, para $n \geq 2$, la esfera S^n es simplemente conexa. Los espacios U y V son simplemente conexos, al ser homeomorfos a \mathbb{R}^n . Su intersección es igual a $S^n - p - q$, que es homeomorfo bajo la proyección estereográfica a $\mathbb{R}^n - 0$. El último espacio es conexo por caminos, ya que todo punto de $\mathbb{R}^n - 0$ puede unirse con un punto de S^{n-1} por un segmento de recta y S^{n-1} es conexo por caminos si $n \geq 2$. Entonces se aplica el corolario anterior. ■

Ejercicios

1. Sea X la unión de dos copias de S^2 teniendo un punto en común. ¿Cuál es el grupo fundamental de X ? Pruebe que su respuesta es correcta. Tenga en cuenta que la unión de dos espacios simplemente conexos con un punto en común no es necesariamente simplemente conexa (véase [S], pág. 59).
2. Juzgue la siguiente “prueba” de que S^2 es simplemente conexa: sea f un lazo en S^2 basado en x_0 . Elijamos un punto p de S^2 que no esté en la imagen de f . Dado que $S^2 - p$ es homeomorfo a \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^2 es simplemente conexo, el lazo f es homotópico por caminos al lazo constante.
3. (a) Demuestre que \mathbb{R}^1 y \mathbb{R}^n no son homeomorfos si $n > 1$.
 (b) Demuestre que \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^n no son homeomorfos si $n > 2$.
- De hecho, es cierto que \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n no son homeomorfos si $n \neq m$, pero la demostración requiere herramientas más avanzadas de topología algebraica.
4. Suponga la hipótesis del Teorema 59.1.
 - (a) ¿Qué puede decir acerca del grupo fundamental de X si j_* es el homomorfismo trivial? ¿Y si ambos i_* y j_* son triviales?
 - (b) Dé un ejemplo donde i_* y j_* sean triviales pero ni U ni V tengan grupos fundamentales triviales.

§60 Los grupos fundamentales de algunas superficies

Recordemos que una *superficie* es un espacio de Hausdorff con una base numerable y tal que cada punto tiene un entorno que es homeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 . Las superficies tienen interés en diferentes partes de las matemáticas, incluyendo geometría, topología y análisis complejo. Consideraremos aquí varias superficies, incluyendo el toro y el doble toro, y probaremos, comparando sus grupos fundamentales,

que no son homeomorfas. En un capítulo posterior, clasificaremos salvo homeomorfismos todas las superficies compactas.

Consideraremos primero el toro. En un ejercicio anterior, se le pidió al lector calcular su grupo fundamental utilizando la teoría de espacios recubridores. Aquí, calculamos su grupo fundamental utilizando un teorema acerca del grupo fundamental de un espacio producto.

Recordemos que si A y B son grupos con operación \cdot , entonces el producto cartesiano $A \times B$ tiene estructura de grupo con la operación

$$(a \times b) \cdot (a' \times b') = (a \cdot a') \times (b \cdot b').$$

Recordemos también que si $h : C \rightarrow A$ y $k : C \rightarrow B$ son homomorfismos de grupos, entonces la aplicación $\Phi : C \rightarrow A \times B$ definida por $\Phi(c) = h(c) \times k(c)$ es un homomorfismo de grupos.

Teorema 60.1. $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Demostración. Sean $p : X \times Y \rightarrow X$ y $q : X \times Y \rightarrow Y$ las aplicaciones proyección. Si utilizamos los puntos base indicados en el enunciado del teorema, tenemos los homomorfismos inducidos

$$\begin{aligned} p_* : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0), \\ q_* : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) &\longrightarrow \pi_1(Y, y_0). \end{aligned}$$

Definimos un homomorfismo

$$\Phi : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

por la ecuación

$$\Phi([f]) = p_*([f]) \times q_*([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f].$$

Probemos que Φ es un isomorfismo.

La aplicación Φ es sobreyectiva. Sea $g : I \rightarrow X$ un lazo basado en x_0 y sea $h : I \rightarrow Y$ un lazo basado en y_0 . Queremos probar que el elemento $[g] \times [h]$ está en la imagen de Φ . Definamos $f : I \rightarrow X \times Y$ por la ecuación

$$f(s) = g(s) \times h(s).$$

Entonces f es un lazo en $X \times Y$ basado en $x_0 \times y_0$ y

$$\Phi([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f] = [g] \times [h],$$

como deseábamos.

El núcleo de Φ es cero. Supongamos que $f : I \rightarrow X \times Y$ es un lazo en $X \times Y$ basado en $x_0 \times y_0$ y tal que $\Phi([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f]$ es el elemento neutro. Esto significa que $p \circ f \simeq_p e_{x_0}$ y $q \circ f \simeq_p e_{y_0}$; sean G y H las respectivas homotopías de caminos. Entonces la aplicación $F : I \times I \rightarrow X \times Y$ definida por

$$F(s, t) = G(s, t) \times H(s, t)$$

es una homotopía de caminos entre f y el lazo constante basado en $x_0 \times y_0$. ■

Corolario 60.2. *El grupo fundamental del toro $T = S^1 \times S^1$ es isomorfo al grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

Definimos ahora una superficie llamada el plano proyectivo y calculamos su grupo fundamental.

Definición. El *plano proyectivo* P^2 es el espacio cociente obtenido de S^2 identificando cada punto x de S^2 con su punto antípoda $-x$.

Puede que el plano proyectivo no sea un espacio con el que esté familiarizado el lector; éste no puede embeberse en \mathbb{R}^3 y es, por tanto, difícil de visualizar. Sin embargo, es el objeto fundamental de estudio en geometría proyectiva, igual que el plano euclídeo \mathbb{R}^2 lo es en la geometría euclídea ordinaria. Los topólogos están principalmente interesados en éste como ejemplo de una superficie.

Teorema 60.3. *El plano proyectivo P^2 es una superficie compacta y la aplicación cociente $p : S^2 \rightarrow P^2$ es una aplicación recubridora.*

Demostración. Probemos primero que p es una aplicación abierta. Sea U un abierto en S^2 . La aplicación antípoda $a : S^2 \rightarrow S^2$ dada por $a(x) = -x$ es un homeomorfismo de S^2 , por tanto $a(U)$ es abierto en S^2 . Dado que

$$p^{-1}(p(U)) = U \cup a(U),$$

este conjunto también es abierto en S^2 . De manera que, por definición, $p(U)$ es abierto en P^2 . Un razonamiento similar demuestra que p es una aplicación cerrada.

Probemos ahora que p es una aplicación recubridora. Dado un punto y de P^2 , elegimos $x \in p^{-1}(y)$. Entonces escogamos un ϵ -entorno U de x en S^2 para algún $\epsilon < 1$, utilizando la distancia euclídea d de \mathbb{R}^3 . Se tiene que U no contiene ningún par $\{z, a(z)\}$ de puntos antípodas de S^2 dado que $d(z, a(z)) = 2$. Como resultado, la aplicación

$$p : U \longrightarrow p(U)$$

es biyectiva. Como es continua y abierta, es un homeomorfismo. Análogamente

$$p : a(U) \rightarrow p(a(U)) = p(U)$$

es un homeomorfismo. El conjunto $p^{-1}(p(U))$ es, por tanto, la unión de los dos conjuntos abiertos y disjuntos U y $a(U)$, cada uno de los cuales se aplica homeomórficamente mediante p sobre $p(U)$. Entonces $p(U)$ es un entorno de $p(x) = y$ que está regularmente cubierto por p .

Dado que S^2 tiene una base numerable $\{U_n\}$, el espacio P^2 tiene una base numerable $\{p(U_n)\}$.

El hecho de que P^2 sea de Hausdorff se sigue del hecho de que S^2 es normal y p es una aplicación cerrada (véase el Ejercicio 6 de §31). Como alternativa, podemos dar una prueba directa: sean y_1 e y_2 dos puntos de P^2 . El conjunto $p^{-1}(y_1) \cup p^{-1}(y_2)$ consiste en cuatro puntos; sea 2ϵ la mínima distancia entre ellos. Sean U_1 el ϵ -entorno de uno de los puntos de $p^{-1}(y_1)$ y U_2 el ϵ -entorno de uno de los puntos de $p^{-1}(y_2)$. Entonces

$$U_1 \cup a(U_1) \quad \text{y} \quad U_2 \cup a(U_2)$$

son disjuntos. Se sigue que $p(U_1)$ y $p(U_2)$ son entornos disjuntos de y_1 e y_2 , respectivamente, en P^2 .

Dado que S^2 es una superficie y todo punto de P^2 tiene un entorno homeomorfo a un subconjunto abierto de S^2 , el espacio P^2 es también una superficie. ■

Corolario 60.4. $\pi_1(P^2, y)$ es un grupo de orden 2.

Demuestração. La proyección $p : S^2 \rightarrow P^2$ es una aplicación recubridora. Como S^2 es simplemente conexa, podemos aplicar el Teorema 54.4, el cual nos dice que existe una correspondencia biyectiva entre $\pi_1(P^2, y)$ y el conjunto $p^{-1}(y)$. Dado que este conjunto tiene dos elementos, $\pi_1(P^2, y)$ es un grupo de orden 2.

Cualquier grupo de orden 2 es, desde luego, isomorfo a $\mathbb{Z}/2$, los enteros mod 2. ■

Podemos proceder análogamente para definir P^n , para cualquier $n \in \mathbb{Z}_+$, como el espacio obtenido de S^n identificando cada punto x con su antípoda $-x$; se llama **n -espacio proyectivo**. La demostración del Teorema 60.3 vale, sin cambio alguno, para probar que la proyección $p : S^n \rightarrow P^n$ es una aplicación recubridora. Entonces como S^n es simplemente conexa, para $n \geq 2$, deducimos que $\pi_1(P^n, y)$ es un grupo de dos elementos, para $n \geq 2$. Dejamos al lector investigar lo que sucede cuando $n = 1$.

Estudiamos ahora el doble toro. Comenzamos con un lema acerca de la figura ocho.

Lema 60.5. *El grupo fundamental de la figura ocho es no abeliano.*

Demuestração. Sea X la unión de dos círculos A y B en \mathbb{R}^2 cuya intersección consiste en un solo punto x_0 . Describimos cierto espacio recubridor E de X .

El espacio E es el subespacio del plano consistente en el eje x y el eje y , y pequeños círculos tangentes a lo largo de estos ejes, un círculo tangente al eje x en cada punto entero no nulo y un círculo tangente al eje y en cada punto entero no nulo.

La aplicación proyección $p : E \rightarrow X$ enrolla el eje x alrededor del círculo A y enrolla el eje y alrededor del círculo B ; en cada caso, los puntos enteros son aplicados por p en el punto base x_0 . Cada círculo tangente en un punto entero del eje x se aplica homeomórficamente mediante p sobre B , mientras que cada círculo tangente en un punto entero del eje y se aplica homeomórficamente mediante p sobre A ; en cada caso, el punto de tangencia se aplica en el punto x_0 . Dejamos al lector comprobar mentalmente que efectivamente la aplicación p es una aplicación recubridora.

Podríamos escribir esta descripción en ecuaciones si lo deseáramos, pero la descripción informal nos parece más fácil de seguir.

Sea ahora $\tilde{f} : I \rightarrow E$ el camino $\tilde{f}(s) = s \times 0$, el cual va del origen al punto 1×0 a lo largo del eje x . Sea $\tilde{g} : I \rightarrow E$ el camino $\tilde{g}(s) = 0 \times s$, que va desde el origen al punto 0×1 a lo largo del eje y . Sean $f = p \circ \tilde{f}$ y $g = p \circ \tilde{g}$; entonces f y g son lazos en la figura ocho basados en x_0 y dispuestos alrededor de los círculos A y B , respectivamente (véase la Figura 60.1).

Aseguramos que $f * g$ y $g * f$ no son homotópicos por caminos, de manera que el grupo fundamental de la figura ocho no es abeliano.

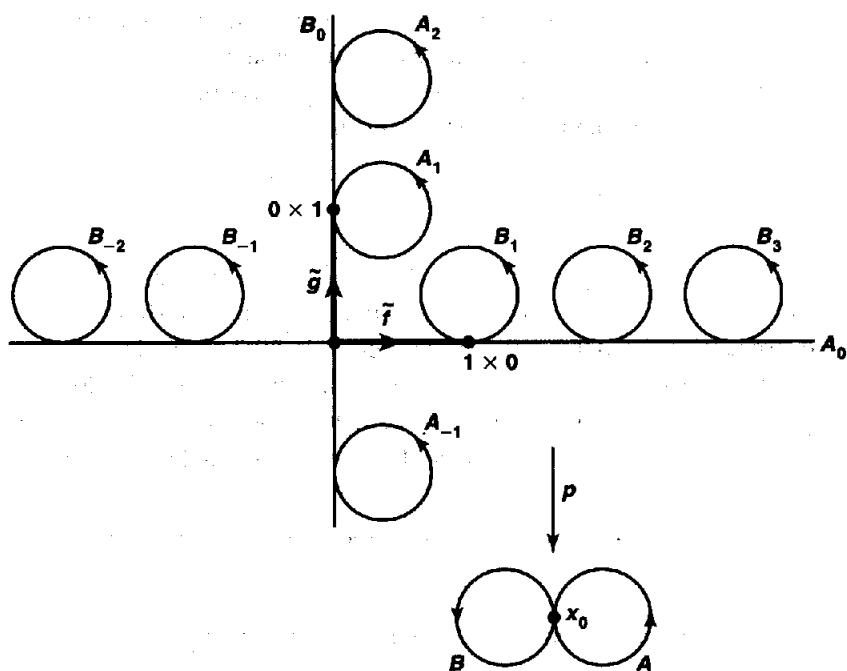


Figura 60.1

Para probar esta afirmación, levantemos cada uno de estos caminos en E comenzando en el origen. El camino $f * g$ se levanta a un camino que va desde el origen al punto 1×0 a lo largo del eje x y entonces da una vuelta alrededor del círculo tangente al eje x en el punto 1×0 . Por otro lado, el camino $g * f$ se levanta a un camino en E que va desde el origen al punto 0×1 a lo largo del eje y , y entonces, da una vuelta alrededor del círculo tangente al eje y en el punto 0×1 . Dado que los levantamientos no acaban en el mismo punto, $f * g$ y $g * f$ no pueden ser homotópicos por caminos. ■

Probaremos más adelante que el grupo fundamental de la figura ocho es, de hecho, el grupo que los algebristas llaman “grupo libre de dos generadores”.

Teorema 60.6. *El grupo fundamental del doble toro es no abeliano.*

Demuestração. El doble toro $T \# T$ es la superficie obtenida tomando dos copias del toro, quitando un pequeño disco abierto a cada uno de ellos, y uniendo los objetos resultantes a lo largo de sus bordes. Aseguramos que la figura ocho X es un retracto de $T \# T$. Este hecho implica que la inclusión $j : X \rightarrow T \# T$ induce un monomorfismo j_* , de manera que $\pi_1(T \# T, x_0)$ no es abeliano.



Figura 60.2

Podemos escribir las ecuaciones para la retracción $r : T \# T \rightarrow X$, pero es más sencillo indicarla con un dibujo, como hemos hecho en la Figura 60.2. Sea Y la unión de dos toros teniendo un punto en común. Llevamos primero $T \# T$ sobre Y mediante una aplicación que colapsa el círculo agujereado en un punto pero que es inyectiva en el resto; esta aplicación define un homeomorfismo h entre la figura ocho en $T \# T$ y la figura ocho en Y . Entonces hacemos un retracto de Y sobre su figura ocho aplicando cada círculo transversal en el punto donde éste interseca a la figura ocho. Finalmente, aplicamos la figura ocho en Y sobre la figura ocho en $T \# T$ mediante la aplicación h^{-1} . ■

Corolario 60.7. *La 2-esfera, el toro, el plano proyectivo y el doble toro son topológicamente distintos.*

Ejercicios

- Calcule los grupos fundamentales del “toro sólido” $S^1 \times B^2$ y el espacio producto $S^1 \times S^2$.
- Sea X el espacio cociente obtenido de B^2 identificando cada punto x de S^1 con su antípoda $-x$. Demuestre que X es homeomorfo al plano proyectivo P^2 .
- Sea $p : E \rightarrow X$ la aplicación construida en la demostración del Lema 60.5. Sea E' el subespacio de E dado por la unión del eje x y el eje y . Demuestre que $p|E'$ no es una aplicación recubridora.
- El espacio P^1 y la aplicación recubridora $p : S^1 \rightarrow P^1$ nos resultan familiares. ¿Qué son?

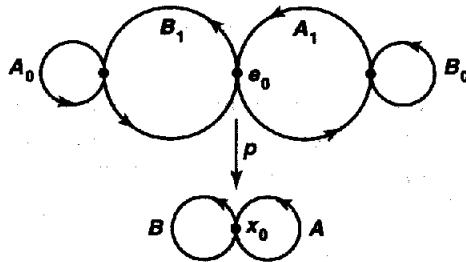


Figura 60.3

- Considere la aplicación recubridora indicada en la Figura 60.3. Aquí, p enrolla A_1 alrededor de A dos veces y enrolla B_1 alrededor de B también dos veces; p aplica A_0 y B_0 homeomórficamente sobre A y B , respectivamente. Utilice este espacio recubridor para demostrar que el grupo fundamental de la figura ocho es no abeliano.

Capítulo 10

Teoremas de separación en el plano

Existen algunas cuestiones difíciles acerca de la topología del plano que surgen de modo natural en el estudio del análisis. Las respuestas a estas preguntas parecen bastante obvias geométricamente, pero sorprendentemente son bastante difíciles de probar. Entre estas cuestiones se encuentra el teorema de la curva de Jordan, el teorema de Brouwer sobre la invariancia del dominio y el clásico teorema que afirma que el número de rotación de una curva simple cerrada es cero ó ± 1 . Obtendremos dichos teoremas en este capítulo como consecuencia de nuestro estudio sobre los espacios recubridores y el grupo fundamental.

§61 El teorema de separación de Jordan

En primer lugar consideramos uno de los teoremas clásicos de matemáticas, el teorema de la curva de Jordan. Dicho teorema establece un hecho que geométricamente es bastante plausible, como es que una curva simple cerrada en el plano siempre divide al plano en dos partes, su “interior” y su “exterior”. Originalmente fue conjecturado en 1892 por Camile Jordan, proporcionándose varias demostraciones incorrectas, una de ellas del propio Jordan. La primera prueba correcta del resultado fue proporcionada por Oswald Veblen en 1905. Las demostraciones iniciales eran complicadas, y con el paso de los años se han encontrado demostraciones más sencillas. Si utilizamos las herramientas de la topología algebraica moderna, y en particular la teoría de la homología singular, entonces la demostración es bastante directa. La prueba que presentamos en este libro es la más sencilla que conocemos, entre las que utilizan únicamente resultados de la teoría de espacios recubridores y el grupo fundamental.

Nuestra demostración del teorema de la curva de Jordan se divide en tres partes. La primera, que denominaremos *teorema de separación de Jordan*, establece que

una curva simple cerrada en el plano lo separa en, al menos, dos componentes. La segunda afirma que un arco en el plano no lo divide. Y la tercera parte, el *teorema de la curva de Jordan* propiamente dicho, afirma que una curva simple cerrada C en el plano lo divide precisamente en dos componentes, siendo C la frontera común de ambas. El primero de estos teoremas será probado en esta sección.

En el estudio de los teoremas de separación es a menudo conveniente reformularlos como teoremas de separación para subconjuntos de la esfera S^2 en lugar de considerarlos en el plano \mathbb{R}^2 . Los teoremas de separación en \mathbb{R}^2 se obtendrán como una consecuencia. La conexión entre los dos conjuntos de teoremas nos la proporciona el siguiente lema:

Recordemos que si b es un punto de S^2 , entonces existe un homeomorfismo h de $S^2 - b$ en \mathbb{R}^2 ; basta considerar una rotación que aplica el punto b en el polo norte y componerla con la proyección estereográfica.

Lema 61.1. Sean C un subespacio compacto de S^2 , b un punto de $S^2 - C$ y h el homeomorfismo de $S^2 - b$ en \mathbb{R}^2 . Supongamos que U es una componente de $S^2 - C$. Si U no contiene a b , entonces $h(U)$ es una componente acotada de $\mathbb{R}^2 - h(C)$. Si U contiene a b , entonces $h(U - b)$ es la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - h(C)$.

En particular, si $S^2 - C$ tiene n componentes, entonces $\mathbb{R}^2 - h(C)$ también tiene n componentes.

*Demuestra*cción. Probaremos primero que si U es una componente de $S^2 - C$ entonces $U - b$ es conexo. Este resultado es trivial si $b \notin U$, por lo que podemos suponer que $b \in U$ y que tenemos conjuntos A y B que constituyen una separación de $U - b$. Escojamos un entorno W de b disjunto con C tal que W sea homeomorfo a una bola abierta de \mathbb{R}^2 . Como W es conexo está contenido en U ; como $W - b$ es conexo entonces está contenido enteramente en A o en B . Digamos que $W - b \subset A$. Entonces b no es un punto límite de B , ya que W es un entorno de b disjunto con B . Se deduce entonces que los conjuntos $A \cup \{b\}$ y B forman una separación de U , lo que contradice la hipótesis.

Sea $\{U_\alpha\}$ la familia de componentes de $S^2 - C$; sea $V_\alpha = h(U_\alpha - b)$. Como $S^2 - C$ es localmente conexo, los conjuntos U_α son subconjuntos de S^2 conexos, disjuntos y abiertos. Por tanto, los conjuntos V_α son subconjuntos conexos, disjuntos y abiertos en $\mathbb{R}^2 - h(C)$, por lo que son las componentes de $\mathbb{R}^2 - h(C)$.

Ahora el homeomorfismo h de $S^2 - b$ en \mathbb{R}^2 puede extenderse a un homeomorfismo H de S^2 en la compactificación por un punto $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ del plano \mathbb{R}^2 , concretamente haciendo $H(b) = \infty$. Si U_β es la componente de $S^2 - C$ que contiene a b , entonces $H(U_\beta)$ es un entorno de ∞ en $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Por tanto, V_β no está acotado; como el complementario $\mathbb{R}^2 - V_\beta$ es compacto, entonces todas las componentes restantes de $\mathbb{R}^2 - h(C)$ están acotadas (véase la Figura 61.1). ■

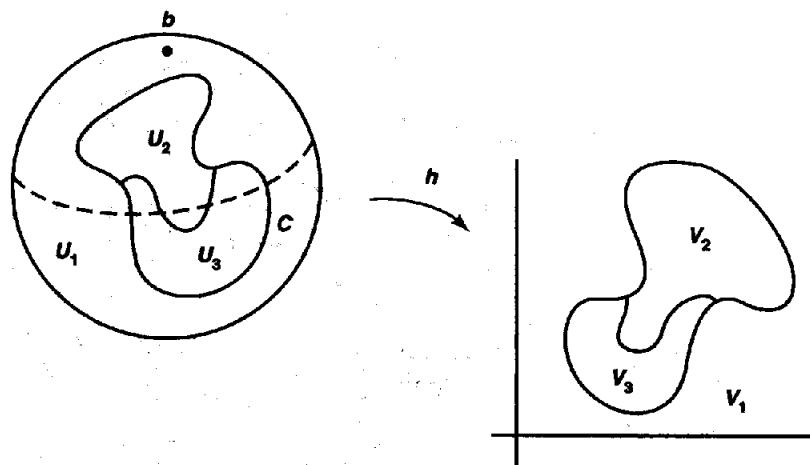


Figura 61.1

Lema 61.2 (Lema de la homotopía nula). Sean a y b puntos en S^2 , A un espacio compacto y

$$f : A \rightarrow S^2 - a - b$$

una aplicación continua. Si a y b pertenecen a la misma componente de $S^2 - f(A)$, entonces f es homotópicamente nula.

Demuestração. Podemos reemplazar S^2 por la compactificación por un punto $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ de \mathbb{R}^2 , haciendo corresponder a y b con los puntos $\mathbf{0}$ e ∞ . Entonces el lema se reduce a lo siguiente:

Sean A un espacio compacto y $g : A \rightarrow \mathbb{R} - \mathbf{0}$ una aplicación continua. Si $\mathbf{0}$ está en la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - g(A)$, entonces g es homotópicamente nula.

Esta afirmación es fácil de probar. Escojamos una bola B centrada en el origen, de radio suficientemente grande para que contenga a $g(A)$. Escojamos un punto p de \mathbb{R}^2 que no pertenezca a B . Entonces $\mathbf{0}$ y p pertenecen ambos a la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - g(A)$.

Como \mathbb{R}^2 es localmente conexo por caminos, también lo es el abierto $\mathbb{R}^2 - g(A)$. Por tanto, las componentes y las componentes por caminos de $\mathbb{R}^2 - g(A)$ coinciden. Escojamos pues un camino α en $\mathbb{R}^2 - g(A)$ conectando $\mathbf{0}$ con p . Definimos una homotopía $G : A \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ mediante la ecuación

$$G(x, t) = g(x) - \alpha(t)$$

que está representada en la Figura 61.2. La homotopía G es una homotopía entre la aplicación g y la aplicación k definida por $k(x) = g(x) - p$. Observemos que $G(x, t) \neq \mathbf{0}$ ya que el camino α no corta al conjunto $g(A)$.

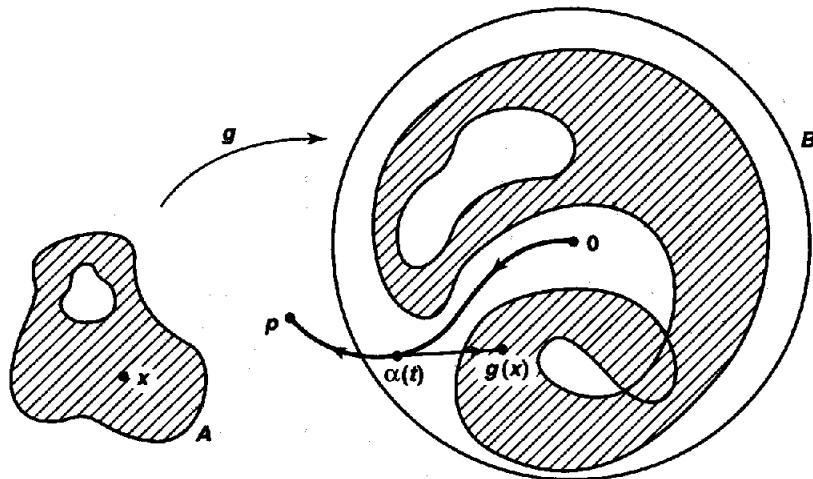


Figura 61.2

Ahora definimos una homotopía $H : A \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0$ por la ecuación

$$H(x, t) = tg(x) - p.$$

Dicha aplicación es una homotopía entre la aplicación k y una aplicación constante. Observemos que $H(x, t) \neq 0$ ya que $tg(x)$ está dentro de la bola B y p está fuera.

Por tanto, hemos probado que g es homotópicamente nula. ■

Ahora vamos a probar el teorema de separación de Jordan. En general, si X es un espacio conexo y $A \subset X$, diremos que A separa X si $X - A$ no es conexo; si $X - A$ tiene n componentes, diremos que A separa X en n componentes.

Un *arco* A es un espacio homeomorfo al intervalo unidad $[0, 1]$. Los *extremos* de A son los dos puntos p y q de A tales que $A - p$ y $A - q$ son conexos; los otros puntos de A se denominan *puntos interiores* de A .

Una *curva simple cerrada* es un espacio homeomorfo al círculo unidad S^1 .

Teorema 61.3 (Teorema de separación de Jordan). Sea C una curva simple cerrada en S^2 . Entonces C separa S^2 .

*Demuestra*ción. Como $S^2 - C$ es localmente conexo por caminos, sus componentes y sus componentes por caminos son las mismas. Supondremos que $S^2 - C$ es conexo por caminos y obtendremos una contradicción.

Escribamos C como la unión de dos arcos A_1 y A_2 que tienen en común sólo los extremos a y b . Sea X el espacio $S^2 - a - b$. Sea U el conjunto abierto $S^2 - A_1$ y sea V el conjunto abierto $S^2 - A_2$. Entonces X es la unión de los conjuntos U y V ,

y se verifica

$$U \cap V = S^2 - (A_1 \cup A_2) = S^2 - C$$

que, por hipótesis, es conexo por caminos. Entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 59.1.

Sea x_0 un punto de $U \cap V$. Vamos a probar que las inclusiones

$$i : (U, x_0) \rightarrow (X, x_0) \quad \text{y} \quad j : (V, x_0) \rightarrow (X, x_0)$$

inducen homomorfismos triviales entre los grupos fundamentales respectivos. Se deduce entonces del Teorema 59.1 que el grupo $\pi_1(X, x_0)$ es trivial. Pero $X = S^2 - a - b$ es homeomorfo al plano agujereado $\mathbb{R}^2 - 0$, por lo que su grupo fundamental *no es* trivial.

Probaremos que i_* es el homomorfismo trivial; dado un lazo $f : I \rightarrow U$ basado en x_0 , vamos a demostrar que $i_*([f])$ es trivial. Para probarlo, sea $p : I \rightarrow S^1$ el lazo estándar que genera $\pi_1(S^1, b_0)$. La aplicación $f : I \rightarrow U$ induce una aplicación continua $h : S^1 \rightarrow U$ tal que $h \circ p = f$ (véase la Figura 61.3).

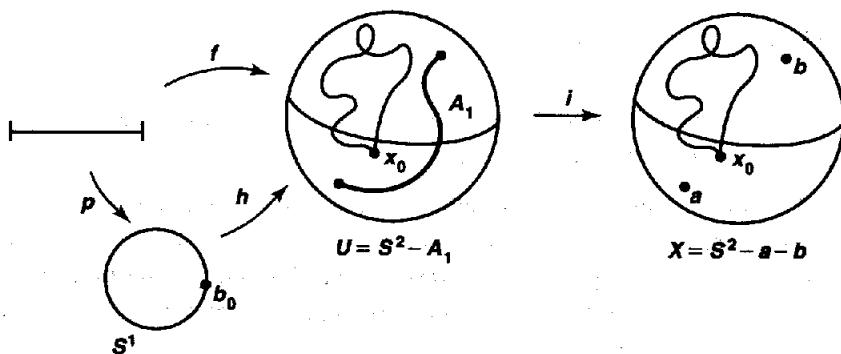


Figura 61.3

Consideremos la aplicación $i \circ h : S^1 \rightarrow S^2 - a - b$. Por hipótesis, el conjunto $i(h(S^1)) = h(S^1)$ no corta al conjunto conexo A_1 , que contiene los puntos a y b . Por tanto, los puntos a y b están en la misma componente de $S^2 - i(h(S^1))$. Por el lema precedente, la aplicación $i \circ h$ es homotópicamente nula. Se sigue del Lema 55.3 que $(i \circ h)_*$ es el homomorfismo trivial entre los respectivos grupos fundamentales. Pero

$$(i \circ h)_*([p]) = [i \circ h \circ p] = [i \circ f] = i_*([f]).$$

Por tanto, $i_*([f])$ es trivial, como se esperaba. ■

Examinemos la demostración previa. ¿Qué propiedades de la curva simple cerrada C han sido utilizadas? Todo lo que hemos necesitado ha sido que C puede

escribirse como la unión de dos conjuntos cerrados conexos A_1 y A_2 , cuya intersección consiste exactamente en dos puntos a y b . Esta observación nos conduce a la siguiente generalización del teorema de separación, que posteriormente nos será de mucha utilidad.

Teorema 61.4 (Teorema de separación general). Sean A_1 y A_2 subconjuntos cerrados y conexos de S^2 cuya intersección consiste exactamente en dos puntos a y b . Entonces el conjunto $C = A_1 \cup A_2$ separa S^2 .

Demuestração. Debemos probar en primer lugar que C no puede coincidir con todo S^2 . Este hecho era obvio en la demostración anterior. En este caso, podemos probar que $C \neq S^2$ debido a que $S^2 - a - b$ es conexo mientras que $C - a - b$ no lo es (los conjuntos $A_i - a - b$ constituyen una separación de $C - a - b$).

El resto de la demostración es una copia de la demostración del teorema anterior. ■

Ejercicios

- Proporcione ejemplos que demuestren que una curva simple cerrada en el toro puede o no separar el toro.
- Sea A el subconjunto de \mathbb{R}^2 formado por la unión de la curva seno del topólogo y la poligonal entre los puntos $(0, -1)$, $(0, -2)$, $(1, -2)$ y $(1, \operatorname{sen} 1)$. Véase la Figura 61.4. Diremos que A es la *curva seno del topólogo cerrada*. Pruebe que si C es un subespacio de S^2 homeomorfo a la curva seno del topólogo cerrada entonces C separa S^2 .

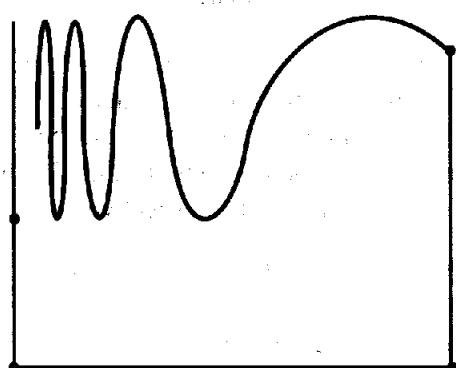


Figura 61.4

*§62 Invariancia del dominio[†]

Uno de los teoremas de topología que es realmente fundamental, porque expresa una propiedad intrínseca del espacio euclídeo, es el teorema de “invariancia del dominio”, probado por L. E. J. Brouwer en 1912. Dicho teorema establece que para cualquier conjunto abierto U de \mathbb{R}^n y cualquier aplicación continua e inyectiva $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, el conjunto imagen $f(U)$ es abierto en \mathbb{R}^n y la función inversa es continua. El teorema de la función inversa del análisis también implica este resultado con la hipótesis adicional de que la aplicación f sea diferenciable continuamente con matriz jacobiana no singular. Probaremos este teorema en el caso $n = 2$.

Lema 62.1 (Lema de la extensión homotópica). *Sea X un espacio tal que $X \times I$ es normal. Sean A un subespacio cerrado de X y $f : A \rightarrow Y$ una aplicación continua, donde Y es un subespacio abierto de \mathbb{R}^n . Si f es homotópicamente nula, entonces f puede extenderse a una aplicación continua $g : X \rightarrow Y$ que también es homotópicamente nula.*

Demostración. Sea $F : A \times I \rightarrow Y$ una homotopía entre f y una aplicación constante. Entonces $F(a, 0) = f(a)$ y $F(a, 1) = y_0$ para todo a . Extendamos F al espacio $X \times I$ mediante $F(x, 1) = y_0$ para $x \in X$. Entonces F es una aplicación continua del subespacio cerrado $(A \times I) \cup (X \times 1)$ de $X \times I$ en \mathbb{R}^n ; por el teorema de extensión de Tietze, dicha función puede extenderse a una aplicación continua $G : X \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

La aplicación $x \rightarrow G(x, 0)$ es una extensión de f , pero aplica X en \mathbb{R}^n en lugar de hacerlo en el subespacio Y . Para obtener la aplicación que buscamos, procederemos como se indica a continuación. Sea U el subconjunto abierto $U = G^{-1}(Y)$ de $X \times I$. Entonces U contiene a $(A \times I) \cup (X \times 1)$ (véase la Figura 62.1). Como I es compacto, el lema del tubo implica que existe un conjunto abierto W de X que contiene a A tal que $W \times I \subset U$. Además el espacio X es normal, ya que es homeomorfo al subespacio cerrado $X \times 0$ de $X \times I$. Por tanto, podemos elegir una función continua $\phi : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\phi(x) = 0$ para $x \in A$ y $\phi(x) = 1$ para $x \in X - W$. La aplicación $x \rightarrow x \times \phi(x)$ transforma X en el subespacio $(W \times I) \cup (X \times 1)$ de $X \times I$, que está contenido en U . Entonces la aplicación continua $g(x) = G(x, \phi(x))$ aplica X en Y . Y para $x \in A$ se tiene $\phi(x) = 0$, de modo que $g(x) = G(x, 0) = f(x)$. Por tanto, g es la extensión deseada de f . La aplicación $H : X \times I \rightarrow Y$ dada por

$$H(x, t) = G(x, (1-t)\phi(x) + t)$$

es una homotopía entre g y una aplicación constante. ■

[†]En esta sección haremos uso del teorema de extensión de Tietze (§35).

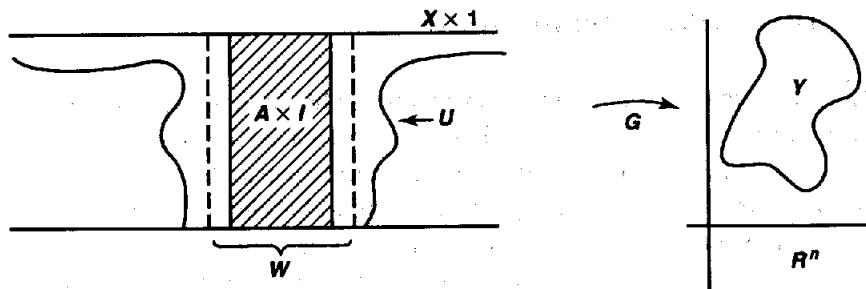


Figura 62.1

El siguiente lema es un recíproco parcial del lema de la homotopía nula de la sección anterior.

Lema 62.2 (Lema de Borsuk). Sean a y b puntos de S^2 . Sean A un espacio compacto y $f : A \rightarrow S^2 - a - b$ una aplicación continua e inyectiva. Si f es homotópicamente nula entonces a y b están en la misma componente de $S^2 - f(A)$.

Demuestra. Como A es compacto y S^2 es de Hausdorff, $f(A)$ es un subespacio compacto de S^2 que es homeomorfo a A . Como f es homotópicamente nula, también lo es la aplicación inclusión de $f(A)$ en $S^2 - a - b$. Por tanto, es suficiente probar el lema en el caso especial en que f es simplemente la aplicación inclusión. Además, podemos reemplazar S^2 por $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, haciendo corresponder a con 0 y b con ∞ . Entonces el lema se reduce a la siguiente afirmación:

Sea A un subespacio compacto de $\mathbb{R}^2 - 0$. Si la aplicación inclusión $j : A \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0$ es homotópicamente nula, entonces 0 está en la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - A$.

Vamos a probarlo. Sea C la componente de $\mathbb{R}^2 - A$ que contiene a 0 ; supongamos que C está acotada y obtengamos una contradicción. Sea D la unión de las otras componentes de $\mathbb{R}^2 - A$, incluyendo la componente no acotada. Entonces C y D son conjuntos abiertos y disjuntos de \mathbb{R}^2 , y $\mathbb{R}^2 - A = C \cup D$ (véase la Figura 62.2).

Definiremos una aplicación continua $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0$ que coincide con la identidad fuera de C .

Comenzamos con la aplicación inclusión $j : A \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0$. Como j es homotópicamente nula por hipótesis, el lema precedente implica que j puede extenderse a una aplicación continua k de $C \cup A$ en $\mathbb{R}^2 - 0$. Entonces k coincide con la identidad en los puntos de A . Extendemos k a una aplicación $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0$ haciendo $h(x) = x$ en los puntos $x \in D \cup A$; entonces h es continua por el lema del pegamiento.

Ahora vamos a obtener una contradicción. Sea B la bola cerrada en \mathbb{R}^2 de radio M y centrada en el origen, donde M es lo suficientemente grande como para que $\text{Int } B$ contenga a $C \cup A$. Aquí utilizamos el hecho que C está acotada. Si restringimos h

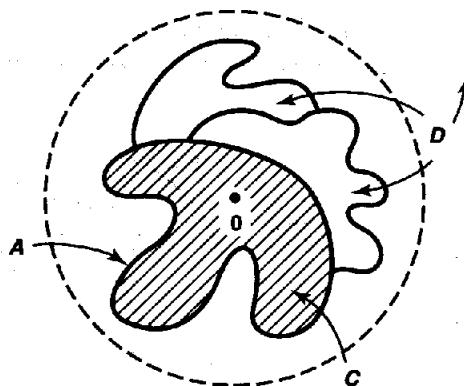


Figura 62.2

a B obtenemos una aplicación $g : B \rightarrow \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ tal que $g(x) = x$ para $x \in \text{Fr } B$. Si componemos g con la retracción estándar $x \rightarrow Mx/\|x\|$ de $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ sobre $\text{Fr } B$, obtenemos una retracción de B sobre $\text{Fr } B$. Sin embargo, tal retracción no existe. ■

Teorema 62.3 (Invariancia del dominio). Si U es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación continua e inyectiva, entonces $f(U)$ es abierto en \mathbb{R}^2 y la función inversa $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ es continua.

Demostración. Como es usual, podemos reemplazar \mathbb{R}^2 por S^2 . Probaremos que si U es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 y $f : U \rightarrow S^2$ es continua e inyectiva, entonces $f(U)$ es abierto en S^2 y la función inversa es continua.

Paso 1. Probaremos que si B es cualquier bola cerrada de \mathbb{R}^2 contenida en U , entonces $f(B)$ no separa S^2 .

Sean a y b dos puntos en $S^2 - f(B)$. Como la aplicación identidad $i : B \rightarrow B$ es homotópicamente nula, la aplicación $h : B \rightarrow S^2 - a - b$ obtenida al restringir f es también homotópicamente nula. El lema de Borsuk implica entonces que a y b están en la misma componente de $S^2 - h(B) = S^2 - f(B)$.

Paso 2. Probaremos que si B es una bola cerrada de \mathbb{R}^2 contenida en U , entonces $f(\text{Int } B)$ es abierto en S^2 .

El espacio $C = f(\text{Fr } B)$ es una curva simple cerrada en S^2 , por lo que separa S^2 . Sea V la componente de $S^2 - C$ que contiene al conjunto conexo $f(\text{Int } B)$ y sea W la unión de las otras componentes. Como S^2 es localmente conexo, V y W son abiertos en S^2 . Veamos que $V = f(\text{Int } B)$.

Supongamos que a es un punto de V que no está en $f(\text{Int } B)$ y obtengamos una contradicción. Sea b un punto de W . Como el conjunto $D = f(B)$ no separa S^2 , el conjunto $S^2 - D$ es un conjunto conexo que contiene los puntos a y b . Este conjunto

está contenido en $S^2 - C$ (ya que $D \supset C$); se deduce que a y b están en la misma componente de $S^2 - C$, lo cual no puede ocurrir por construcción (véase la Figura 62.3).

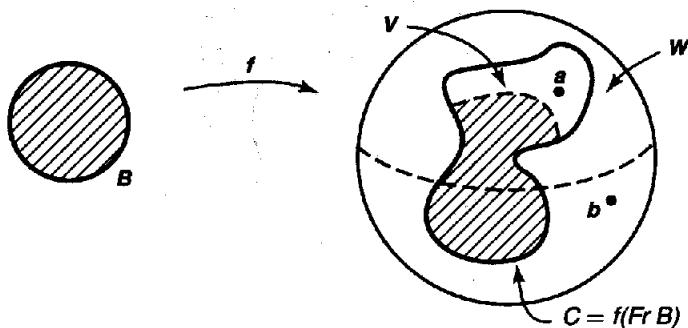


Figura 62.3

Paso 3. Probemos finalmente el teorema. Como para cualquier bola B contenida en U el conjunto $f(\text{Int } B)$ es abierto en S^2 , la aplicación $f : U \rightarrow S^2$ es una aplicación abierta. Se concluye que $f(U)$ es abierto en S^2 y la aplicación f^{-1} es continua. ■

Ejercicios

1. Proporcione un ejemplo que pruebe que la conclusión del lema de Borsuk puede no cumplirse si f no es inyectiva.
2. Sea A un subespacio compacto y contractible de S^2 . Pruebe que A no separa S^2 .
3. Sea X un espacio tal que $X \times I$ es normal. Sean A un subespacio cerrado de X y $f : A \rightarrow Y$ una aplicación continua, donde Y es un subespacio abierto de \mathbb{R}^n . Si f es homotópica a una aplicación que es extensible a una aplicación continua $h : X \rightarrow Y$, entonces f es también extensible a una aplicación continua $g : X \rightarrow Y$ tal que $g \simeq h$.
4. Sea C una curva simple cerrada en $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$; sea $j : C \rightarrow \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ la aplicación inclusión. Pruebe que j_* es trivial si 0 está en la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - C$, y es no trivial en caso contrario. De hecho, j_* es un *isomorfismo* en el último caso, como probaremos en §65.
5. Teorema. Sea U un conjunto abierto y simplemente conexo en \mathbb{R}^2 . Si C es una curva simple cerrada dentro de U , entonces cada componente acotada de $\mathbb{R}^2 - C$ también está incluida en U .

Esta condición caracteriza los conjuntos abiertos y simplemente conexos de \mathbb{R}^2 . Véase [RW]. El espacio $\mathbb{R}^2 - C$ tiene, desde luego, una única componente acotada, como probaremos en la siguiente sección.

6. Suponga que conoce que no existe ninguna retracción de B^n en la esfera S^{n-1} .

- (a) Pruebe que el lema de Borsuk se satisface en S^n .
- (b) Pruebe que ningún subespacio contractible y no compacto de S^n separa S^n .
- (c) Suponga que también conoce que ningún subespacio de S^n homeomorfo a S^{n-1} separa S^n . Pruebe el teorema de invariancia del dominio en dimensión n .

§63 El teorema de la curva de Jordan

El caso especial del teorema de Seifert-van Kampen, que fue utilizado en la demostración del teorema de separación de Jordan, nos proporciona información sobre el grupo fundamental de un espacio $X = U \cup V$ cuando la intersección $U \cap V$ es conexa por caminos. En el siguiente teorema examinamos qué ocurre cuando $U \cap V$ no es conexo por caminos. Este resultado nos permitirá completar la demostración del teorema de la curva de Jordan.

Teorema 63.1. *Sea X la unión de dos conjuntos abiertos U y V , tales que $U \cap V$ puede escribirse a su vez como la unión de dos conjuntos abiertos y disjuntos A y B . Supongamos que existe un camino α en U conectando el punto a de A con el punto b de B , y que existe un camino β en V de b hasta a . Sea f el lazo $f = \alpha * \beta$.*

- (a) *La clase de homotopía de caminos $[f]$ genera un subgrupo cíclico infinito de $\pi_1(X, a)$.*
- *(b) *Si $\pi_1(X, a)$ es cíclico infinito, entonces está generado por $[f]$.[†]*
- (c) *Supongamos que existe un camino γ en U desde el punto a hasta el punto a' de A , y que existe un camino δ en V desde a' hasta a . Sea g el lazo $g = \gamma * \delta$. Entonces los subgrupos de $\pi_1(X, a)$ generados por $[f]$ y $[g]$ sólo tienen en común el elemento neutro.*

Demostración. La prueba es, en muchos momentos, una copia de la demostración dada en §54 para probar que el grupo fundamental del círculo es cíclico infinito. Como en dicha demostración, el paso crucial es encontrar un espacio recubridor E adecuado para X .

[†]Este resultado utiliza el Teorema 54.6, y será usado sólo cuando trabajemos con los números de rotación en §65.

Paso 1 (construcción de E). Vamos a construir E pegando copias de los subespacios U y V . Tomemos una cantidad numerable de copias de U y también una cantidad numerable de copias de V , todas disjuntas, por ejemplo

$$U \times (2n) \quad \text{y} \quad V \times (2n+1)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, donde \mathbb{Z} denota el conjunto de los números enteros. Sea Y la unión de estos espacios; Y es un subespacio de $X \times \mathbb{Z}$. Construimos un nuevo espacio E como el cociente de Y al identificar los puntos

$$x \times (2n) \quad \text{y} \quad x \times (2n-1) \quad \text{para } x \in A$$

y también al identificar

$$x \times (2n) \quad \text{y} \quad x \times (2n+1) \quad \text{para } x \in B.$$

Consideremos $\pi : Y \rightarrow E$ la aplicación cociente.

La aplicación $\rho : Y \rightarrow X$ definida por $\rho(x \times m) = x$ induce una aplicación $p : E \rightarrow X$; la aplicación p es continua porque E está dotado de la topología cociente. La aplicación p también es sobreyectiva. Vamos a probar que p es una aplicación recubridora (véase la Figura 63.1).

En primer lugar probaremos que la aplicación π es una aplicación abierta. Como Y es la unión de los conjuntos abiertos y disjuntos $\{U \times (2n)\}$ y $\{V \times (2n+1)\}$, es suficiente probar que las aplicaciones $\pi|(U \times 2n)$ y $\pi|(V \times (2n+1))$ son abiertas. Y esto es fácil. Tomemos un conjunto abierto en $U \times 2n$, por ejemplo; será de la forma $W \times 2n$, donde W es abierto en U . Entonces

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(W \times 2n)) &= [W \times 2n] \cup [(W \cap B) \times (2n+1)] \\ &\cup [(W \cap A) \times (2n-1)] \end{aligned}$$

que es la unión de tres conjuntos abiertos de Y , por lo que es abierto en Y . Por definición de la topología cociente, $\pi(W \times 2n)$ es abierto en E , como se deseaba.

Ahora vamos a demostrar que p es una aplicación recubridora; probaremos que los conjuntos abiertos U y V están cubiertos por p . Consideremos U , por ejemplo. El conjunto $p^{-1}(U)$ es la unión de los conjuntos disjuntos $\pi(U \times 2n)$ para $n \in \mathbb{Z}$. Cada uno de estos conjuntos es abierto en E ya que π es una aplicación abierta. Sea π_{2n} la restricción de π al conjunto abierto $U \times 2n$, que lo transforma en el conjunto $\pi(U \times 2n)$. Es un homeomorfismo ya que es biyectiva, continua y abierta. Entonces la aplicación p , cuando se restringe a $\pi(U \times 2n)$, es la composición de dos homeomorfismos

$$\pi(U \times 2n) \xrightarrow{\pi_{2n}^{-1}} U \times 2n \xrightarrow{\rho} U$$

y es, por tanto, un homeomorfismo. Entonces $p|\pi(U \times 2n)$ aplica este conjunto homeomórficamente en U , como buscábamos.

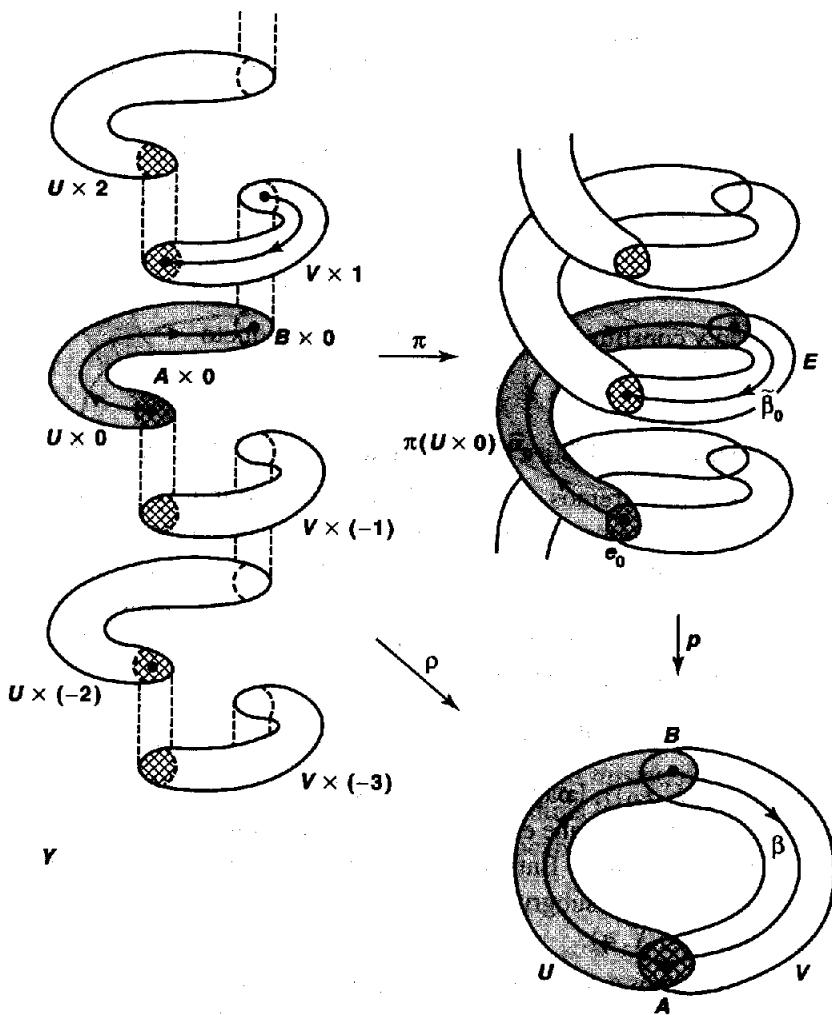


Figura 63.1

Paso 2. Ahora vamos a definir una familia de levantamientos del lazo $f = \alpha * \beta$.

Para cada entero n , sea e_n el punto $\pi(a \times 2n)$ de E . Entonces los puntos e_n son distintos, y constituyen el conjunto $p^{-1}(a)$. Definimos un levantamiento \tilde{f}_n de f que empieza en e_n y finaliza en e_{n+1} .

Como los caminos α y β están en U y V , respectivamente, podemos definir

$$\tilde{\alpha}_n(s) = \pi(\alpha(s) \times 2n),$$

$$\tilde{\beta}_n(s) = \pi(\beta(s) \times (2n + 1));$$

entonces $\tilde{\alpha}_n$ y $\tilde{\beta}_n$ son levantamientos de α y β , respectivamente. El caso $n = 0$ se ilustra en la Figura 63.1. El producto $\tilde{\alpha}_n * \tilde{\beta}_n$ está bien definido, ya que $\tilde{\alpha}_n$ finaliza en

$\pi(b \times 2n)$ y $\tilde{\beta}_n$ comienza en $\pi(b \times (2n+1))$. Escribimos $\tilde{f}_n = \tilde{\alpha}_n * \tilde{\beta}_n$; observemos que \tilde{f}_n comienza en $\tilde{\alpha}_n(0) = \pi(a \times 2n) = e_n$ y finaliza en $\tilde{\beta}_n(1) = \pi(a \times (2n+1)) = \pi(a \times (2n+2)) = e_{n+1}$.

Paso 3. Probaremos que $[f]$ genera un subgrupo cíclico infinito de $\pi_1(X, a)$. Es suficiente con demostrar que si m es un entero positivo, entonces $[f]^m$ no es el elemento neutro. Pero esto es fácil. En efecto, el producto

$$\tilde{h} = \tilde{f}_0 * (\tilde{f}_1 * (\cdots * \tilde{f}_{m-1}))$$

está bien definido y constituye un levantamiento del producto

$$h = f * (f * (\cdots * f)).$$

Como \tilde{h} comienza en e_0 y finaliza en e_m , la clase $[h] = [f]^m$ no es trivial.

**Paso 4.* Ahora probaremos que si $\pi_1(X, a)$ es cíclico infinito, entonces está generado por $[f]$. Consideraremos la correspondencia del levantamiento $\phi : \pi_1(X, a) \rightarrow p^{-1}(a)$. Hemos probado en el Paso 3 que para cada entero positivo m , la correspondencia ϕ transforma $[f]^m$ en el punto e_m de $p^{-1}(a)$. Un argumento similar prueba que aplica $[f]^{-m}$ en e_{-m} . Por tanto, ϕ es sobreyectiva. Ahora aplicando el Teorema 54.6, ϕ induce una aplicación inyectiva

$$\Phi : \pi_1(X, a)/H \longrightarrow p^{-1}(a)$$

donde $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$; la aplicación Φ es sobreyectiva porque ϕ lo es. Se sigue que H es el grupo trivial, ya que el cociente de un grupo cíclico infinito por cualquier subgrupo no trivial es finito. Entonces la correspondencia del levantamiento ϕ es biyectiva; como ϕ aplica el subgrupo generado por $[f]$ en $p^{-1}(a)$, este subgrupo debe coincidir con todo $\pi_1(X, a)$.

Paso 5. Ahora vamos a probar (c). El dibujo de la Figura 63.1 puede hacerle creer que el elemento $[g]$ de $\pi_1(X, a)$ considerado en la parte (c) es de hecho trivial. Pero dicha figura es bastante especial. La Figura 63.2 ilustra qué puede ocurrir cuando A es la unión de dos conjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos. En este caso (que pronto nos será muy útil), tanto $[f]$ como $[g]$ generan subgrupos cíclicos infinitos de $\pi_1(X, a)$.

Dado $g = \gamma * \delta$, definimos un levantamiento de g a E como sigue: como γ es un camino en U , podemos definir

$$\tilde{\gamma}(s) = \pi(\gamma(s) \times 0)$$

y como δ es un camino en V , podemos definir

$$\tilde{\delta}(s) = \pi(\delta(s) \times (-1)).$$

Entonces $\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\delta}$ son levantamientos de γ y δ . El producto $\tilde{g} = \tilde{\gamma} * \tilde{\delta}$ está bien definido, ya que $\tilde{\delta}$ finaliza en $\pi(a' \times 0)$ y $\tilde{\delta}$ comienza en $\pi(a' \times (-1))$, y es un levantamiento de

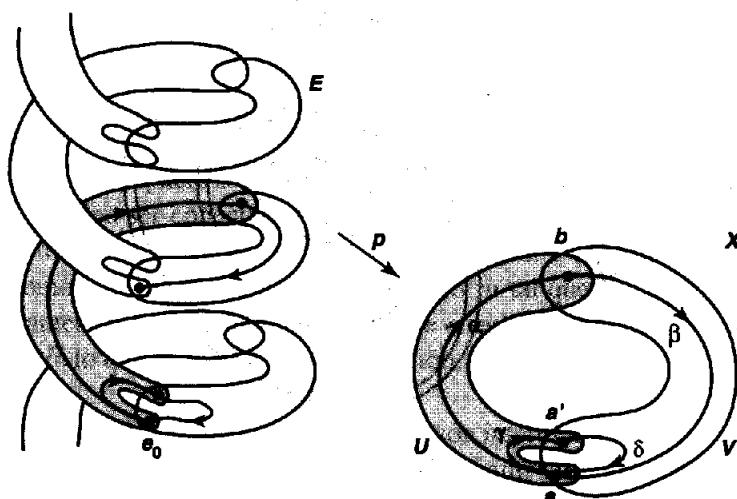


Figura 63.2

g. Observemos que \tilde{g} es un lazo en E , ya que empieza y acaba en el punto $\pi(a \times 0) = \pi(a \times (-1)) = e_0$.

Se sigue que los subgrupos generados por $[f]$ y $[g]$ sólo tienen en común el elemento neutro, ya que el m -ciclo producto de f consigo mismo m veces se levanta a un camino que empieza en e_0 y finaliza en e_m , mientras que todo producto de g consigo mismo se levanta a un camino que empieza y acaba en e_0 . Por tanto, $[f]^m \neq [g]^k$ para cualesquiera enteros no nulos m y k . ■

Teorema 63.2 (Teorema de no separación). Sea D un arco en S^2 . Entonces D no separa S^2 .

Demostración. Vamos a proporcionar dos demostraciones de este teorema. La primera utiliza los resultados de la sección anterior, mientras que la segunda sigue una vía distinta.

Primera demostración. Como D es contractible, la aplicación identidad $i : D \rightarrow D$ es homotópicamente nula. Entonces si a y b son dos puntos de S^2 que no están en D , la aplicación inclusión $j : D \rightarrow S^2 - a - b$ es homotópicamente nula. El lema de Borsuk implica entonces que a y b están en la misma componente de $S^2 - D$.

Segunda demostración. Escribamos D como la unión de dos arcos D_1 y D_2 que tienen un único punto en común d . Sean a y b dos puntos que no están en D . Vamos a probar que si a y b pueden ser conectados por caminos en $S^2 - D_1$ y en $S^2 - D_2$, entonces se pueden unir mediante un camino en $S^2 - D$. La Figura 63.3 ilustra el hecho de que esta afirmación no es nada trivial.

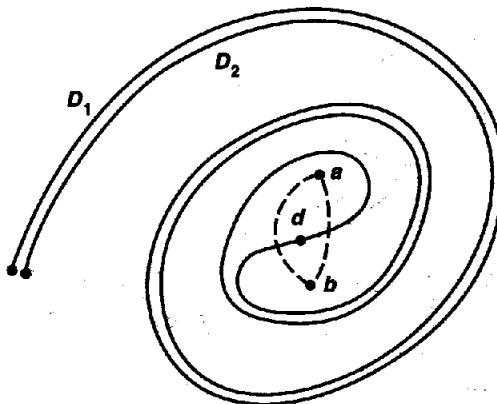


Figura 63.3

Supongamos que a y b no se pueden unir mediante un camino en $S^2 - D$. Vamos a utilizar el Teorema 63.1 para obtener una contradicción. Sea X el espacio $S^2 - d$; sean U y V los conjuntos abiertos

$$U = S^2 - D_1 \quad \text{y} \quad V = S^2 - D_2.$$

Entonces $X = U \cup V$ y $U \cap V = S^2 - D$. Por hipótesis, a y b son puntos en $S^2 - D$ que no pueden ser conectados por un camino en $S^2 - D$. Por tanto, $U \cap V$ no es conexo por caminos. Sea A la componente conexa por caminos de $U \cap V$ que contiene a a ; sea B la unión de las otras componentes de $U \cap V$. Como $U \cap V$ es localmente conexo por caminos (al ser abierto en S^2), las componentes conexas por caminos de $U \cap V$ son abiertas y, por tanto, A y B son abiertos en X . Sabemos que a y b pueden conectarse mediante caminos en $U = S^2 - D_1$ y $V = S^2 - D_2$. Concluimos, a partir del Teorema 63.1, que $\pi_1(X, a)$ no es trivial. Pero $X = S^2 - d$, por lo que su grupo fundamental es trivial.

Probemos ahora el teorema. Dado un arco D y los puntos a y b de $S^2 - D$, supongamos que a y b no pueden unirse mediante un camino en $S^2 - D$ y obtengamos una contradicción. Escogemos un homeomorfismo $h : [0, 1] \rightarrow D$; sea $D_1 = h([0, 1/2])$ y $D_2 = h([1/2, 1])$. El resultado del párrafo precedente prueba que puesto que a y b no pueden conectarse mediante un camino en $S^2 - D$, entonces tampoco pueden conectarse mediante dos caminos en $S^2 - D_1$ y $S^2 - D_2$. Supongamos, por ejemplo, que a y b no pueden conectarse en $S^2 - D_1$.

Ahora repetimos el argumento, dividiendo D_1 en dos arcos $E_1 = h([0, 1/4])$ y $E_2 = h([1/4, 1/2])$. Concluimos, como antes, que los puntos a y b no pueden conectarse mediante dos caminos en $S^2 - E_1$ y $S^2 - E_2$.

Si continuamos indefinidamente este razonamiento, entonces encontramos una sucesión

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

de intervalos cerrados tal que I_n tiene longitud $(1/2)^n$ y tal que, para cada n , los puntos a y b no pueden conectarse mediante un camino en $S^2 - h(I_n)$. La compactidad del intervalo unidad garantiza que existe un punto x en $\bigcap I_n$; como las longitudes de los intervalos convergen a cero, sólo existe un punto en la intersección.

Consideremos el espacio $S^2 - h(x)$. Como este espacio es homeomorfo a \mathbb{R}^2 , los puntos a y b pueden ser conectados por un camino α en $S^2 - h(x)$. Como $\alpha(I)$ es compacto, entonces es cerrado, por lo que existe algún ϵ -entorno de $h(x)$ disjunto con $\alpha(I)$. Como h es continua, existe un número m tal que $h(I_m)$ está incluido en el ϵ -entorno anterior. Se concluye entonces que α es un camino en $S^2 - h(I_m)$ que conecta a con b , lo que supone una contradicción. ■

Ambas demostraciones del teorema anterior son interesantes. Como ya indicamos en §62, la primera se generaliza para probar que ningún subespacio compacto y contractible de S^2 separa S^2 . La segunda se puede generalizar en otra dirección. Examinemos la segunda demostración y preguntémonos: ¿qué propiedades de los conjuntos D_1 y D_2 hacen que la prueba funcione? Enseguida nos damos cuenta que sólo se utilizó el hecho que D_1 y D_2 son subconjuntos cerrados de S^2 y $S^2 - (D_1 \cap D_2)$ es simplemente conexo. Por tanto, podemos deducir el siguiente resultado, que será utilizado posteriormente.

Teorema 63.3 (Teorema general de no separación). Sean D_1 y D_2 subconjuntos cerrados de S^2 tales que $S^2 - D_1 \cap D_2$ es simplemente conexo. Si ni D_1 ni D_2 separan S^2 , entonces $D_1 \cup D_2$ tampoco separa S^2 .

Ahora vamos a demostrar el teorema de la curva de Jordan.

Teorema 63.4 (Teorema de la curva de Jordan). Sea C una curva simple cerrada en S^2 . Entonces C separa S^2 en exactamente dos componentes W_1 y W_2 . Cada uno de los conjuntos W_1 y W_2 tiene a C como su frontera, esto es, $C = \overline{W}_i - W_i$ para $i = 1, 2$.

*Demuestra*ción. *Paso 1.* Probaremos en primer lugar que $S^2 - C$ tiene exactamente dos componentes. Escribamos C como la unión de dos arcos C_1 y C_2 que intersecan en el conjunto de dos puntos $\{p, q\}$. Sea X el espacio $S^2 - p - q$, y sean U y V los conjuntos abiertos

$$U = S^2 - C_1 \quad \text{y} \quad V = S^2 - C_2.$$

Entonces $X = U \cup V$ y $U \cap V = S^2 - C$. El espacio $U \cap V$ tiene al menos dos componentes, por el teorema de separación de Jordan.

Supongamos que $U \cap V$ tiene más de dos componentes y obtengamos una contradicción. Sean A_1 y A_2 dos de las componentes de $U \cap V$, y sea B la unión del resto. Como $S^2 - C$ es localmente conexo, cada uno de estos conjuntos es abierto. Sean

$a \in A_1$, $a' \in A_2$ y $b \in B$. Como los arcos C_1 y C_2 no separan S^2 , existen caminos α y γ en U que conectan a con b y a con a' , respectivamente, y existen caminos β y δ en V que conectan b con a y a' con a , respectivamente. Consideremos los lazos $f = \alpha * \beta$ y $g = \gamma * \delta$. Escribiendo $U \cap V$ como la unión de los conjuntos abiertos $A_1 \cup A_2$ y B , el Teorema 63.1 implica que $[f]$ es un elemento no trivial de $\pi_1(X, a)$. Escribiendo $U \cap V$ como la unión de los abiertos disjuntos A_1 y $A_2 \cup B$, vemos que $[g]$ también es un elemento no trivial de $\pi_1(X, a)$. Como $\pi_1(X, a)$ es cíclico infinito, debe verificarse $[f]^m = [g]^k$ para ciertos enteros no nulos m y k , lo que contradice el apartado (c) del Teorema 63.1.

Paso 2. Ahora vamos a probar que C es la frontera común de los conjuntos W_1 y W_2 .

Como S^2 es localmente conexo, cada una de las componentes W_1 y W_2 de $S^2 - C$ es abierta en S^2 . En particular, ninguna de ellas contiene puntos límite de la otra, por lo que los conjuntos $\overline{W}_1 - W_1$ y $\overline{W}_2 - W_2$ deben estar contenidos en C .

Para probar la inclusión contraria, demostraremos que si x es un punto de C entonces cualquier entorno U de x corta al conjunto cerrado $\overline{W}_1 - W_1$. Se seguirá que x pertenece al conjunto $\overline{W}_1 - W_1$.

Sea U un entorno de x . Como C es homeomorfo al círculo S^1 , podemos dividir C en dos arcos C_1 y C_2 que sólo tienen en común sus extremos y tal que C_1 es lo suficientemente pequeño como para que esté contenido en U . Véase la Figura 63.4.

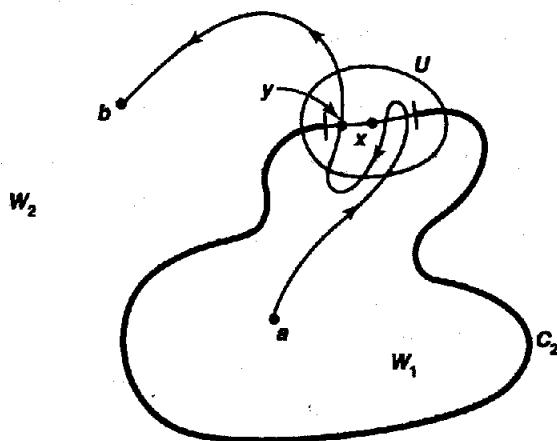


Figura 63.4

Sean a y b puntos de W_1 y W_2 , respectivamente. Como C_2 no separa S^2 , podemos encontrar un camino α en $S^2 - C_2$ que conecta a con b . El conjunto $\alpha(I)$ debe contener un punto y de $\overline{W}_1 - W_1$, pues de lo contrario $\alpha(I)$ sería un conjunto conexo contenido en la unión de los conjuntos abiertos y disjuntos W_1 y $S^2 - \overline{W}_1$, e intersecando a ambos. El punto y pertenece a la curva cerrada C , ya que $(\overline{W}_1 - W_1) \subset C$.

Como el camino α no corta al arco C_2 , el punto y debe, por tanto, pertenecer al arco C_1 , que está contenido en el conjunto abierto U . Entonces, U interseca a $\bar{W}_1 - W_1$ en el punto y , como queríamos probar. ■

Igual que con los teoremas anteriores, nos preguntaremos ahora cuáles son las propiedades que hacen funcionar la demostración anterior. Examinando el Paso 1 de la demostración vemos que sólo se ha utilizado que C_1 y C_2 son subconjuntos cerrados y conexos, que $C_1 \cap C_2$ está formado sólo por dos puntos, y que ni C_1 ni C_2 separan S^2 . Las dos primeras propiedades demuestran que $C_1 \cup C_2$ separa S^2 en al menos dos componentes; la tercera implica que *exactamente* hay dos componentes. Por tanto uno puede deducir, sin mucho más esfuerzo, el siguiente resultado.

Teorema 63.5. Sean C_1 y C_2 subconjuntos cerrados y conexos de S^2 cuya intersección está formada por dos puntos. Si ni C_1 ni C_2 separan S^2 , entonces $C_1 \cup C_2$ separa S^2 en exactamente dos componentes.

EJEMPLO 1. La segunda parte del teorema de la curva de Jordan, junto con el hecho de que C es la frontera común de W_1 y de W_2 , pueden parecer resultados tan obvios que no requieran ningún comentario adicional. Sin embargo, dichos resultados dependen fuertemente del hecho que C es homeomorfo a S^1 .

Por ejemplo, consideremos el espacio indicado en la Figura 63.5. Es la unión de dos arcos cuya intersección está formada por exactamente dos puntos, por lo que separa S^2 en dos componentes W_1 y W_2 , igual que hace el círculo, según el Teorema 63.5. Pero en este caso C no es igual a la frontera común de W_1 y W_2 .

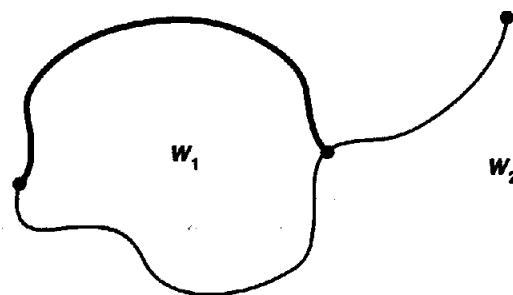


Figura 63.5

Existe un cuarto teorema que en ocasiones también es considerado, junto con los tres anteriores, un teorema de separación. Se trata del *teorema de Schoenflies*, que establece que si C es una curva simple cerrada en S^2 y las componentes de $S^2 - C$ son U y V , entonces \bar{U} y \bar{V} son homeomorfos a la bola cerrada unidad B^2 . Una demostración puede encontrarse en [H-S].

Los teoremas de separación pueden generalizarse a dimensiones superiores como sigue:

- (1) Cualquier subespacio C de S^n homeomorfo a S^{n-1} separa S^n .
- (2) Ningún subespacio A de S^n homeomorfo a $[0, 1]$ o a alguna bola B^m separa S^n .
- (3) Cualquier subespacio C de S^n homeomorfo a S^{n-1} ² separa S^n en dos componentes, siendo C la frontera común de ambas.

Estos teoremas pueden ser demostrados de forma bastante sencilla después de estudiar grupos de homología singular en topología algebraica (véase [Mu], pág. 202). El teorema de Brouwer sobre la invariancia del dominio en \mathbb{R}^n se deduce como un corolario.

El teorema de Schoenflies, sin embargo, no puede generalizarse a dimensiones superiores sin algunas restricciones adicionales sobre la forma en que el espacio C está embebida en S^n . Esto puede comprobarse con el famoso ejemplo de la “esfera con cuernos de Alexandrov”, una imagen homeomorfa de S^2 en S^3 pero con un dominio complementario que no es simplemente conexo (véase [H-Y], pág. 176).

Los teoremas de separación pueden ser generalizados todavía más. El teorema definitivo en esta dirección es el famoso *teorema de dualidad de Alexander-Pontryagin*, un teorema muy profundo de topología algebraica que ni siquiera enunciaremos aquí (véase [Mu]). Dicho teorema implica que si el subespacio cerrado C separa S^n en k componentes, lo mismo se verifica para cualquier subespacio de S^n que sea homeomorfo a C (o incluso homotópicamente equivalente a C). Los teoremas de separación (1)–(3) son corolarios inmediatos de este teorema.

Ejercicios

1. Sean C_1 y C_2 curvas simples cerradas y disjuntas en S^2 .
 - (a) Pruebe que $S^2 - C_1 - C_2$ tiene exactamente tres componentes. [*Indicación:* si W_1 es la componente de $S^2 - C_1$ disjunta con C_2 , y si W_2 es la componente de $S^2 - C_2$ disjunta con C_1 , pruebe que $\overline{W}_1 \cup \overline{W}_2$ no separa S^2 .]
 - (b) Demuestre que estas tres componentes tienen fronteras C_1 , C_2 y $C_1 \cup C_2$, respectivamente.
2. Sea D un subespacio cerrado y conexo de S^2 que separa S^2 en n componentes.
 - (a) Si A es un arco en S^2 cuya intersección con D sólo está formada por uno de sus extremos, demuestre que $A \cup D$ separa S^2 en n componentes.
 - (b) Si A es un arco en S^2 cuya intersección con D está formada por sus extremos, demuestre que $A \cup D$ separa S^2 en $n + 1$ componentes.
 - (c) Si C es una curva simple cerrada en S^2 que interseca D en un único punto, demuestre que $C \cup D$ separa S^2 en $n + 1$ componentes.

- *3. (a) Sea D un subespacio de S^2 homeomorfo a la curva seno del topólogo \bar{S} (véase §24). Demuestre que D no separa S^2 . [Indicación: sea $h : \bar{S} \rightarrow D$ un homeomorfismo. Dado $0 < c < 1$, sea \bar{S}_c igual a la intersección de \bar{S} con el conjunto $\{(x, y) | x \leq c\}$. Demuestre que dados $a, b \in S^2 - D$, para algún valor de c existe un camino en $S^2 - h(\bar{S}_c)$ desde a hasta b . Concluya que existe un camino en $S^2 - D$ entre a y b .]
- (b) Sea C un subespacio en S^2 homeomorfo a la curva seno del topólogo cerrada. Demuestre que C separa S^2 en exactamente dos componentes, que tienen a C como frontera común. [Indicación: sea h el homeomorfismo entre la curva seno del topólogo cerrada y C . Sea $C_0 = h(0 \times [-1, 1])$. Demuestre en primer lugar, usando el argumento del Teorema 63.4, que cada punto de $C - C_0$ está en la frontera de cada componente de $S^2 - C$.]

§64 Grafos embebidos en el plano

Un **grafo lineal** (finito) G es un espacio de Hausdorff que se escribe como una unión finita de arcos, de manera que dos de ellos tienen como máximo un extremo en común. Los arcos se denominan **aristas** del grafo y los extremos de los arcos se denominan **vértices** del grafo.

Los grafos lineales son utilizados en matemáticas como modelos de muchos fenómenos reales; sin embargo, nosotros los estudiaremos únicamente como interesantes espacios que generalizan, en cierto sentido, las curvas simples cerradas.

Observemos que cualquier grafo está determinado completamente (salvo un homeomorfismo) por sus vértices, junto con las parejas de éstos que tienen una arista en común.

EJEMPLO 1. Si G contiene exactamente n vértices y si para cada pareja de vértices de G existe una arista de G que los conecta, entonces G se dice que es un **grafo completo de n vértices**, y se denota por G_n . Algunos ejemplos de este tipo de grafos se representan en la Figura 64.1. Observe que los primeros tres grafos se dibujan como subespacios del plano \mathbb{R}^2 , mientras que el cuarto se supone dibujado en \mathbb{R}^3 . Un poco de experimentación le convencerá que dicho grafo *no puede* embeberse en \mathbb{R}^3 . Probaremos esta propiedad en breve.

EJEMPLO 2. Otro grafo interesante surge al considerar el puzzle clásico: "Dadas tres casas, c_1 , c_2 y c_3 , y tres servicios, g (para el gas), a (para el agua), y e (para la electricidad), ¿puede usted conectar cada casa con cada servicio sin que se corten las distintas líneas?" Formulado matemáticamente, la cuestión se reduce a determinar si el grafo dibujado en la Figura 64.2, conocido como **grafo de servicios**, puede ser embebido en \mathbb{R}^2 . Otra vez más, un poco de experimentación le convencerá de que no es posible, como muy pronto demostraremos.

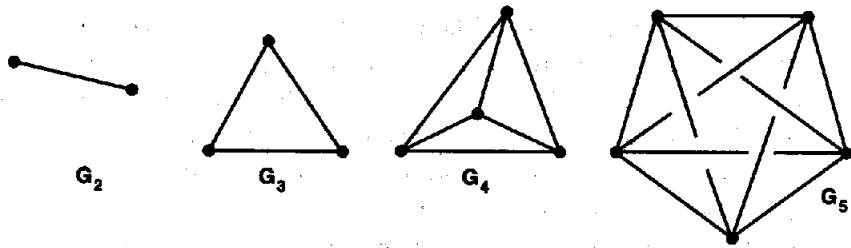


Figura 64.1

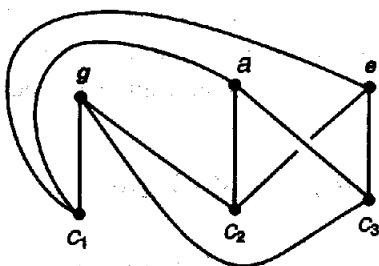


Figura 64.2

Definición. Un *espacio theta* X es un espacio de Hausdorff que se descompone como unión de tres arcos A, B y C tal que cada dos de ellos tienen en común sus extremos. El espacio X es, desde luego, homeomorfo a la letra griega theta.

Observe que un espacio theta X no es un grafo lineal, ya que los arcos en cuestión intersecan en más de un extremo. Sin embargo, un espacio theta puede escribirse como un grafo descomponiendo cada arco A, B y C en dos nuevos arcos con un punto en común.

Lema 64.1. Sea X un espacio theta que es un subespacio de S^2 ; sean A, B y C los arcos cuya unión es X . Entonces X separa S^2 en tres componentes, cuyas fronteras son $A \cup B$, $B \cup C$ y $A \cup C$, respectivamente. La componente que tiene $A \cup B$ como su frontera coincide con una de las componentes de $S^2 - A \cup B$.

Demostración. Sean a y b los extremos de los arcos A, B y C . Consideremos la curva simple cerrada $A \cup B$, que separa S^2 en dos componentes U y U' , cada una de las cuales es abierta en S^2 y tiene como frontera $A \cup B$ (véase la Figura 64.3).

El espacio $C - a - b$ es conexo, por lo que está contenido en una de estas componentes, digamos U' . Entonces podemos considerar los espacios $\bar{U} = U \cup A \cup B$ y C , que son ambos conexos. Ninguno de los dos separa S^2 , ya que C es un arco, y el complemento de \bar{U} es el conjunto conexo U' . Como la intersección de estos dos conjuntos está formada por los puntos a y b , su unión separa S^2 en dos componentes

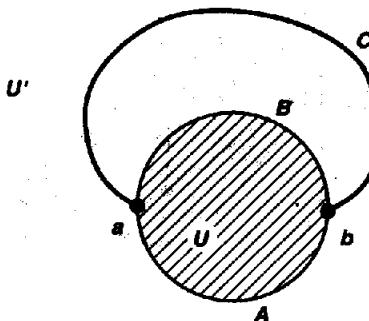


Figura 64.3

V y W , de acuerdo con el Teorema 63.5. Se sigue que $S^2 - (A \cup B \cup C)$ es la unión de tres conjuntos conexos y disjuntos U, V y W ; como son conjuntos abiertos en S^2 , son las componentes de $S^2 - (A \cup B \cup C)$. La componente U tiene $A \cup B$ como frontera. La simetría del problema implica que los otros dos conjuntos tienen $B \cup C$ y $A \cup C$ como fronteras, respectivamente. ■

Teorema 64.2. *Sea X el grafo de servicios. Entonces X no puede embeberse en el plano.*

*Demuestra*ción. Si X pudiera ser embebido en el plano, entonces podría ser embebido en la esfera S^2 . Por tanto, supongamos que X está embebido en S^2 y derivemos una contradicción.

Utilizaremos la notación del Ejemplo 2, donde g, a, e, c_1, c_2 y c_3 son los vértices de X . Sean A, B y C los siguientes arcos en X :

$$\begin{aligned} A &= gc_1a, \\ B &= gc_2a, \\ C &= gc_3a. \end{aligned}$$

Cada pareja de estos arcos sólo tienen en común sus extremos g y a por lo que $Y = A \cup B \cup C$ es un espacio theta. El espacio Y separa S^2 en tres componentes U, V y W , cuyas fronteras son $A \cup B, B \cup C$ y $A \cup C$, respectivamente (véase la Figura 64.4).

El vértice e de X está en una de estas tres componentes, de modo que los arcos ec_1, ec_2 y ec_3 de X están en la clausura de dicha componente. Ésta no puede ser U , ya que \bar{U} está contenida en $U \cup A \cup B$, un conjunto que no contiene el punto c_3 . De forma similar, la componente de e no puede ser V ni W , ya que \bar{V} no contiene el punto c_1 y \bar{W} no contiene el punto c_2 . Entonces hemos alcanzado una contradicción. ■

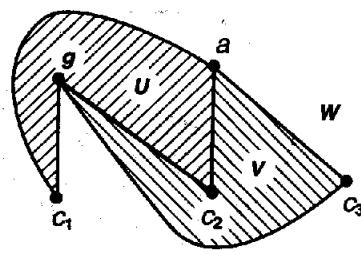


Figura 64.4

Lema 64.3. Sea X un subespacio de S^2 que es un grafo completo de cuatro vértices a_1, a_2, a_3 y a_4 . Entonces X separa S^2 en cuatro componentes. Las fronteras de estas componentes son los conjuntos X_1, X_2, X_3 y X_4 , donde X_i es la unión de las aristas de X que no tienen el punto a_i como vértice.

Demostración. Sea Y la unión de todos los arcos de X diferentes del arco a_2a_4 . Entonces podemos escribir Y como un espacio theta tomando

$$A = a_1a_2a_3,$$

$$B = a_1a_3,$$

$$C = a_1a_4a_3.$$

(Véase la Figura 64.5.) Los arcos A, B y C sólo tienen en común sus extremos a_1 y a_3 , y su unión es el espacio Y .

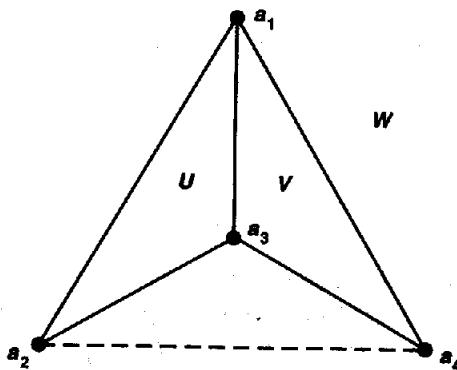


Figura 64.5

El espacio Y separa S^2 en tres componentes U, V y W , cuyas fronteras son los conjuntos $A \cup B, B \cup C$ y $A \cup C$, respectivamente. El espacio $a_2a_4 - a_2 - a_4$, al ser conexo, debe estar contenido en una de ellas. Pero no puede estar en U , ya que $A \cup B$ no contiene a_4 . Y tampoco puede ser V , porque $B \cup C$ no contiene a_2 . Por tanto, debe estar en W .

La unión $\bar{U} \cup \bar{V}$ es conexa, ya que tanto \bar{U} como \bar{V} lo son y tienen intersección no vacía B . Además, el conjunto $\bar{U} \cup \bar{V}$ no separa S^2 , pues su complementario es W . De forma similar, el arco a_2a_4 es conexo y no separa S^2 . Y los conjuntos a_2a_4 y $\bar{U} \cup \bar{V}$ sólo tienen en común los puntos a_2 y a_4 . Se sigue del Teorema 63.5 que $a_2a_4 \cup \bar{U} \cup \bar{V}$ separa S^2 en dos componentes W_1 y W_2 . Entonces $S^2 - Y$ es la unión de cuatro conjuntos conexos y disjuntos U, V, W_1 y W_2 . Como estos conjuntos son abiertos, necesariamente son las componentes de $S^2 - Y$.

Pero una de estas componentes, digamos U , tiene el grafo $A \cup B = X_4$ como su frontera. La simetría implica que las otras tres tienen a X_1, X_2 y X_3 como sus respectivas fronteras. ■

Teorema 64.4. *El grafo completo de cinco vértices no puede ser embebido en el plano.*

*Demuestra*ción. Supongamos que G es un subespacio de S^2 que es un grafo completo de cinco vértices a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 . Sea X la unión de las aristas de G que no tienen como vértice al punto a_5 ; entonces X es un grafo completo de cuatro vértices. El espacio X separa S^2 en cuatro componentes, cuyas respectivas fronteras son X_1, \dots, X_4 , donde X_i está formado por las aristas de X que no tienen como vértice el punto a_i . Ahora el punto a_5 debe pertenecer a alguna de estas cuatro componentes. Se deduce que el espacio conexo

$$a_1a_5 \cup a_2a_5 \cup a_3a_5 \cup a_4a_5,$$

que es la unión de las aristas de G que tienen como vértice al punto a_5 , debe estar en la clausura de dicha componente. Entonces los vértices a_1, \dots, a_4 están también en la frontera de esa componente. Pero esto es imposible, ya que ninguno de los grafos X_i contiene los cuatro vértices a_1, \dots, a_4 . Hemos obtenido, pues, una contradicción. ■

Se deduce de estos teoremas que si un grafo G contiene un subgrafo que es un grafo de servicios o un grafo completo de cinco vértices, entonces G no puede ser embebido en el plano. Un teorema importante, debido a Kuratowski, afirma que el recíproco también es cierto. La demostración no es nada sencilla.

Ejercicios

1. Sea X un espacio que puede escribirse como la unión finita de arcos A_1, \dots, A_n , donde cada pareja de arcos tiene como máximo un extremo en común.
 - (a) Pruebe que X es de Hausdorff si, y sólo si, cada arco A_i es cerrado en X .
 - (b) Encuentre un ejemplo que demuestre que X puede no ser de Hausdorff.

[Indicación: véase el Ejercicio 5 de §36.]

§65 El número de rotación de una curva simple cerrada

Si $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0$ es una aplicación continua, entonces el homomorfismo inducido h_* transforma un generador del grupo fundamental de S^1 en alguna potencia entera de un generador del grupo fundamental de $\mathbb{R}^2 - 0$. Esta potencia entera n se denomina *número de rotación* de h con respecto a 0. Mide cuántas veces h “se enrolla sobre S^1 alrededor del origen”; su signo depende desde luego de la elección de los generadores (véase la Figura 65.1). Lo introduciremos más formalmente en la siguiente sección.

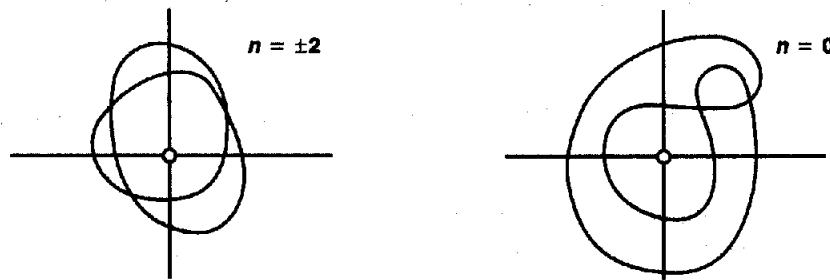


Figura 65.1

De momento, sólo nos plantearemos la siguiente cuestión: ¿qué podemos decir del número de rotación de h cuando h es inyectiva, es decir, si h es un homeomorfismo de S^1 en una curva simple cerrada C de $\mathbb{R}^2 - 0$? Los dibujos de la Figura 65.2 sugieren una conjectura obvia: si 0 pertenece a la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - C$, entonces $n = 0$, mientras que si 0 está en la componente acotada entonces $n = \pm 1$.

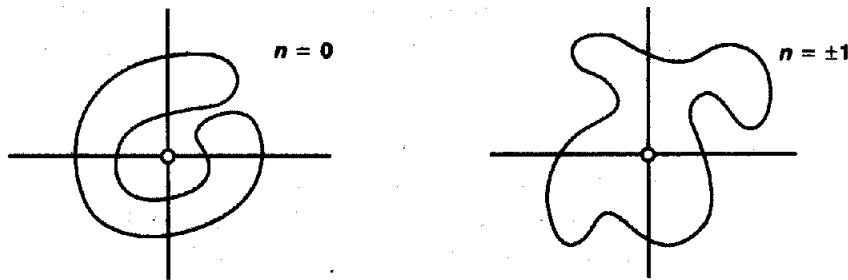


Figura 65.2

La primera conjectura es fácil de probar, ya que el Lema 61.2 nos dice que h es homotópicamente nula si 0 pertenece a la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - C$. Por otra parte, la segunda conjectura es sorprendentemente difícil; es, de hecho, un resultado muy profundo, que probaremos en esta sección.

Como es frecuente, reemplazaremos $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ por S^2 , haciendo corresponder 0 con el punto p e ∞ con el punto q . Entonces nuestra conjectura puede ser reformulada

como sigue: si C es una curva simple cerrada en S^2 , y si p y q pertenecen a diferentes componentes de $S^2 - C$, entonces la aplicación inclusión $j : C \rightarrow S^2 - p - q$ induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales. Esto es lo que probaremos.

En primer lugar, demostraremos el resultado en el caso en que la curva simple cerrada C esté contenida en un grafo completo de cuatro vértices. A continuación probaremos el caso general.

Lema 65.1. Sea G un subespacio de S^2 que es un grafo completo de cuatro vértices a_1, \dots, a_4 . Sea C el subgrafo $a_1a_2a_3a_4a_1$, que es una curva simple cerrada. Sean p y q puntos interiores de las aristas a_1a_3 y a_2a_4 , respectivamente. Entonces:

- (a) Los puntos p y q están en diferentes componentes de $S^2 - C$.
- (b) La inclusión $j : C \rightarrow S^2 - p - q$ induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales.

Demostración. (a) Como veíamos en la demostración del Lema 64.3, el espacio theta $C \cup a_1a_3$ separa S^2 en tres componentes U , V y W . Una de éstas, digamos W , tiene a C como su frontera; es la única componente que contiene a los puntos a_2 y a_4 . Por tanto, $a_2a_4 - a_2 - a_4$ debe estar en W , y en particular q debe pertenecer a W . Desde luego, p no está en W ya que p está en el espacio theta $C \cup a_1a_3$. Ahora el Lema 64.1 nos garantiza que W es una de las componentes de $S^2 - C$; por tanto, p y q pertenecen a diferentes componentes de $S^2 - C$.

(b) Sea $X = S^2 - p - q$. La idea de la demostración es la siguiente. Elegimos un punto x interior al arco a_1a_2 , y un punto y interior al arco a_3a_4 . Sean α y β los caminos siguientes:

$$\alpha = xa_1a_4y \quad y \quad \beta = ya_3a_2x.$$

Entonces $\alpha * \beta$ es un lazo en la curva simple cerrada C . Vamos a probar que $\alpha * \beta$ constituye un generador del grupo fundamental de X . Se sigue que el homomorfismo $j_* : \pi_1(C, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ es sobreyectivo, por lo que j_* debe ser un isomorfismo (ya que los grupos involucrados son cíclicos infinitos). Véase la Figura 65.3.

Sean D_1 y D_2 los arcos

$$D_1 = pa_3a_2q \quad y \quad D_2 = qa_4a_1p$$

y sean $U = S^2 - D_1$ y $V = S^2 - D_2$ (véase la Figura 65.4). Entonces $X = U \cup V$ y $U \cap V$ es igual a $S^2 - D$, donde D es la curva simple cerrada $D = D_1 \cup D_2$. Por tanto, $U \cap V$ tiene dos componentes, aplicando el teorema de la curva de Jordan. Además, como D es igual a la curva simple cerrada $a_1a_3a_2a_4a_1$, la parte (a) implica que los puntos x e y , que están en el interior de las otras dos aristas del grafo G , pertenecen a diferentes componentes de $S^2 - D$.

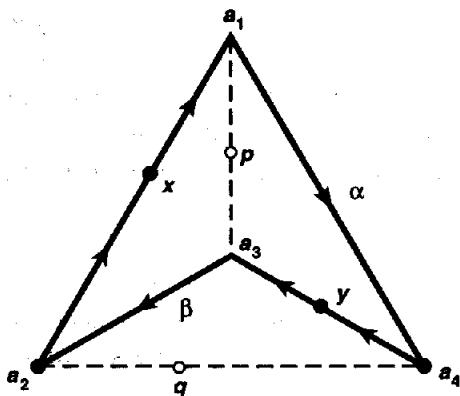


Figura 65.3

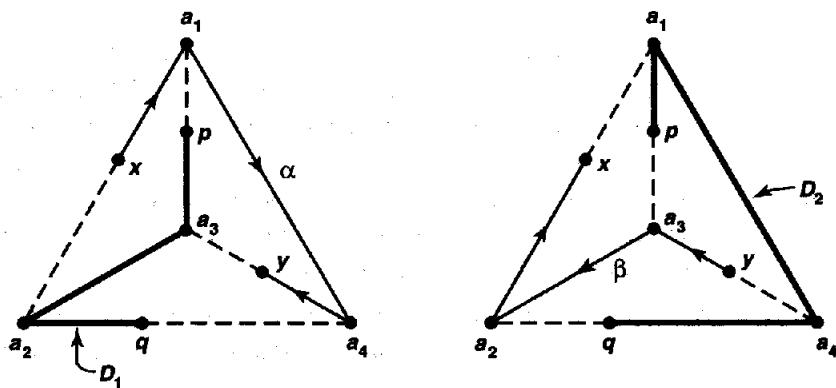


Figura 65.4

Las hipótesis del Teorema 63.1 se cumplen. El camino α es un camino en U entre x e y , mientras que β es un camino en V que conecta y con x . Como el grupo fundamental de X es cíclico infinito, el lazo $\alpha * \beta$ constituye un generador de este grupo. ■

Ahora vamos a probar nuestro teorema principal.

Teorema 65.2. *Sea C una curva simple cerrada en S^2 ; sean p y q dos puntos que están en distintas componentes de $S^2 - C$. Entonces la aplicación inclusión $j : C \rightarrow S^2 - p - q$ induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales.*

Demostración. La prueba consiste en construir un grafo completo de cuatro vértices que contenga a C como un subgrafo.

Paso 1. Sean a, b y c tres puntos distintos de \mathbb{R}^2 . Si A es un arco con extremos a y b , y si B es un arco con extremos b y c , entonces existe un arco contenido en $A \cup B$ con extremos a y c .

Escojamos caminos $f : I \rightarrow A$ desde a hasta b , y $g : I \rightarrow B$ desde b hasta c , tales que f y g sean homeomorfismos. Sea t_0 el valor más pequeño de I tal que $f(t_0) \in B$ y sea t_1 el punto de I tal que $g(t_1) = f(t_0)$. Entonces el conjunto $f([0, t_0]) \cup g([t_1, 1])$ es el arco requerido. Si $t_0 = 0$ o $t_1 = 1$, uno de dichos arcos está formado por un único punto (véase la Figura 65.5).

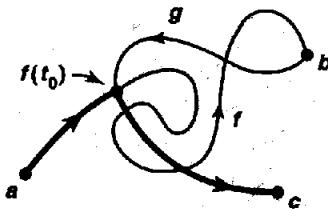


Figura 65.5

Paso 2. Probaremos que si U es un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 , entonces dos puntos cualesquiera de U que puedan conectarse mediante un camino en U serán los extremos de un arco contenido en U .

Si $x, y \in U$, establecemos que $x \sim y$ si $x = y$ o si existe un arco en U con extremos x e y . El Paso 1 demuestra que es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia son abiertas, ya que si un ϵ -entorno de x está incluido en U , está formado por puntos equivalentes a x . Como U es conexo, sólo existe una clase de equivalencia.

Paso 3. Sea C una curva simple cerrada en \mathbb{R}^2 . Construiremos un subespacio G de \mathbb{R}^2 que será un grafo completo de cuatro vértices a_1, \dots, a_4 y tal que C es el subgrafo $a_1a_2a_3a_4a_1$.

Por comodidad, supondremos que 0 está en la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - C$. Consideremos $\mathbb{R} \times 0$ el eje x en \mathbb{R}^2 , sea a_1 el mayor número en el eje x negativo que pertenece a C , y sea a_3 el menor número en el eje x positivo que pertenece a C . Entonces el segmento de recta a_1a_3 pertenece a la clausura de la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - C$.

Escribamos C como la unión de dos arcos C_1 y C_2 con extremos a_1 y a_3 . Sea a un punto de la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - C$. Como C_1 y C_2 no separan \mathbb{R}^2 , podemos elegir caminos $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2 - C_1$ y $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2 - C_2$ desde a hasta 0 ; teniendo en cuenta el Paso 2, podemos suponer que tanto α como β son inyectivos. Sea $a_2 = \alpha(t_0)$, donde t_0 es el menor número tal que $\alpha(t_0) \in C$; entonces a_2 es un punto del interior de C_2 . De forma similar, sea $a_4 = \beta(t_1)$, donde t_1 es el menor valor tal que $\beta(t_1) \in C$; entonces a_4 es un punto del interior de C_1 . Por tanto, $\alpha([0, t_0])$ y $\beta([0, t_1])$ son arcos que conectan a con a_2 y a_4 , respectivamente; según

lo obtenido en el Paso 2, su unión contiene un arco cuyos extremos son a_2 y a_4 ; este arco interseca a C únicamente en estos dos puntos. Dicho arco, junto con el segmento a_1a_3 y la curva C , constituye el grafo deseado (véase la Figura 65.6).

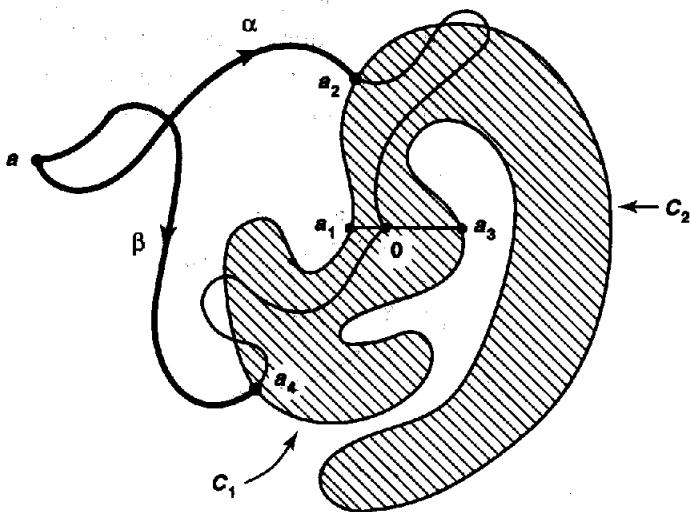


Figura 65.6

Paso 4. Se deduce del resultado del Paso 3 y del lema previo que para *alguna* pareja de puntos p y q pertenecientes a diferentes componentes de $S^2 - C$, la inclusión $j : C \rightarrow S^2 - p - q$ induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales. Para completar la demostración sólo necesitamos probar que lo mismo se cumple para *cualquier* pareja de puntos p y q pertenecientes a diferentes componentes de $S^2 - C$. Para conseguir esto, sólo es necesario probar lo siguiente:

Sea D una curva simple cerrada en \mathbb{R}^2 ; supongamos que 0 está en la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - D$. Sea p cualquier otro punto de esta componente. Si la inclusión $j : D \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0$ induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales, entonces también lo induce la inclusión $k : D \rightarrow \mathbb{R}^2 - p$.

Sea $f : \mathbb{R}^2 - p \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0$ el homeomorfismo $f(x) = x - p$. Es suficiente probar que la aplicación

$$D \xrightarrow{k} \mathbb{R}^2 - p \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 - 0$$

induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales. Sea α un camino en $\mathbb{R}^2 - D$ desde 0 hasta p , y sea $F : D \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0$ la aplicación dada por $F(x, t) = x - \alpha(t)$. Entonces F es una homotopía entre j y $f \circ k$; como j induce un isomorfismo, lo mismo verifica $f \circ k$ (véase el Corolario 58.5). ■

Este teorema es un caso especial de un teorema muy profundo de topología algebraica, relativo al “número de enlace” de dos subespacios disjuntos de S^{m+n+1} , uno

homeomorfo a una m -esfera y el otro homeomorfo a una n -esfera; está relacionado con el teorema de la dualidad de Alexandrov (véase [Mu], pág. 433). El caso especial de nuestro teorema se obtiene al considerar una 0-esfera (es decir, un espacio de dos puntos) y una 1-esfera (es decir, una curva simple cerrada) en S^2 .

§66 La fórmula integral de Cauchy

Uno de los teoremas centrales en el estudio de las funciones de una variable compleja se refiere a la fórmula integral de Cauchy para funciones analíticas. Para la versión clásica de este teorema se necesita, además del teorema de la curva de Jordan, el teorema del número de rotación probado en la última sección. Existe, sin embargo, una reformulación del teorema integral de Cauchy que evita usar estos resultados; esta versión del teorema, aunque es menos natural, aparece frecuentemente en los textos sobre este tema.

Como el teorema de la curva de Jordan está a nuestra disposición, nos proponemos obtener la fórmula integral de Cauchy en su versión clásica a partir de la versión reformulada.

Comenzaremos introduciendo la noción de “número de rotación” más formalmente.

Definición. Sea f un lazo en \mathbb{R}^2 y sea a un punto que no está en la imagen de f . Si

$$g(s) = \frac{f(s) - a}{\|f(s) - a\|}$$

entonces g es un lazo en S^1 . Sea $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ la aplicación recubridora estándar, y sea \tilde{g} un levantamiento de g a S^1 . Como g es un lazo, la diferencia $\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0)$ es un número entero. Este número se denomina *número de rotación de f respecto de a* , y se denota por $n(f, a)$.

Observemos que $n(f, a)$ es independiente de la elección del levantamiento de g . Si \tilde{g} es un levantamiento de g , la unicidad de los levantamientos implica que cualquier otro levantamiento de g tendría la forma $\tilde{g}(s) + m$, para algún entero m .

Definición. Sea $F : I \times I \rightarrow X$ una aplicación continua tal que $F(0, t) = F(1, t)$ para todo t . Entonces para cada t , la aplicación $f_t(s) = F(s, t)$ es un lazo de X . La aplicación F se dice que es una *homotopía libre* entre los lazos f_0 y f_1 . Es una homotopía de lazos en la que se permite que el punto base del lazo se desplace durante la homotopía.

Lema 66.1. Sea f un lazo en $\mathbb{R}^2 - a$.

- (a) Si \bar{f} es el inverso de f , entonces $n(\bar{f}, a) = -n(f, a)$.
- (b) Si f es libremente homotópico a f' , a través de lazos contenidos en $\mathbb{R}^2 - a$, entonces $n(f, a) = n(f', a)$.
- (c) Si a y b están en la misma componente de $\mathbb{R}^2 - f(I)$, entonces $n(f, a) = n(f, b)$.

Demostración. (a) Para calcular $n(\bar{f}, a)$ reemplazamos s por $1-s$ en la definición. Este cambio provoca un cambio de signo en la expresión $\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0)$.

(b) Sea F una homotopía libre entre f y f' . Definamos $G : I \times I \rightarrow S^1$ por la ecuación

$$G(s, t) = \frac{F(s, t) - a}{\|F(s, t) - a\|}.$$

Sea \tilde{G} un levantamiento de G a \mathbb{R} . Entonces $\tilde{G}(1, t) - \tilde{G}(0, t)$ es un número entero para cada t ; al ser una aplicación continua, necesariamente ha de ser constante.

(c) Sea α un camino en $\mathbb{R}^2 - f(I)$ desde a hasta b . Observemos que, por definición, $n(f, a) = n(f - a, 0)$. Como $f(s) - \alpha(t)$ es una homotopía libre en $\mathbb{R}^2 - 0$ entre $f - a$ y $f - b$, el resultado se obtiene fácilmente. ■

Definición. Sea f un lazo en X . Diremos que f es un **lazo simple** siempre que $f(s) = f(s')$ sólo para $s = s'$ o si uno de los puntos s, s' es 0 y el otro es 1. Si f es un lazo simple, el conjunto imagen es una curva simple cerrada en X .

Teorema 66.2. Sea f un lazo simple en \mathbb{R}^2 . Si a está en la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - f(I)$, entonces $n(f, a) = 0$; sin embargo, si a está en la componente acotada, entonces $n(f, a) = \pm 1$.

Demostración. Como $n(f, a) = n(f - a, 0)$ nos podemos restringir al caso $a = 0$. Además, podemos suponer que el punto base de f se encuentra en el eje x . Como siempre es posible rotar gradualmente $\mathbb{R}^2 - 0$ para que el punto base de f satisfaga dicha condición, y como dicha rotación modifica f por una homotopía libre, no se altera la conclusión del teorema.

Por tanto, sea f un lazo simple en $X = \mathbb{R}^2 - 0$ con base un punto x_0 en el semieje positivo de las abcisas x . Sea C la curva simple cerrada $f(I)$. Probaremos que si 0 está en la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - C$, entonces $[f]$ genera $\pi_1(X, x_0)$, mientras que si 0 está en la componente no acotada, entonces $[f]$ es trivial.

La aplicación f induce, vía la aplicación cociente estándar $p : I \rightarrow S^1$, un homeomorfismo $h : S^1 \rightarrow C$. El elemento $[p]$ genera el grupo fundamental de S^1 , de modo que $h_*[p]$ genera el grupo fundamental de C . Si 0 está en la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - C$, el Teorema 65.2 nos asegura que $j_*h_*[p] = [f]$ genera el grupo

fundamental de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, donde $j : C \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ es la inclusión. Por otra parte, si 0 está en la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - C$, entonces $j \circ h$ es homotópicamente nula por el Lema 61.2, de modo que $[f]$ es trivial.

A continuación probaremos que si $[f]$ genera $\pi_1(X, x_0)$ entonces $n(f, 0) = \pm 1$, mientras que si $[f]$ es trivial, entonces $n(f, 0) = 0$. Como la retracción $x \rightarrow x/||x||$ de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ en S^1 induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales, el lazo $g(s) = f(s)/||f(s)||$ representa un generador de $\pi_1(S^1, b_0)$ en el primer caso, y el elemento neutro en el segundo caso. Al examinar el isomorfismo $\phi : \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ construido en la demostración del Teorema 54.5 observamos que cuando levantamos g a un camino \tilde{g} en \mathbb{R} comenzando en 0 , el camino \tilde{g} finaliza en ± 1 en el primer caso, y en 0 en el segundo. ■

Definición. Sea f un lazo simple en \mathbb{R}^2 . Diremos que f es un lazo *en sentido contrario a las agujas del reloj* si $n(f, a) = +1$ para algún a (y, por tanto, para todo a) en la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - f(I)$. Diremos que f es un lazo *en el sentido de las agujas del reloj* si $n(f, a) = -1$. El lazo estándar $p(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$ es un lazo en sentido contrario a las agujas del reloj.

Aplicaciones a variables complejas

En este apartado relacionaremos el número de rotación con las integrales complejas a lo largo de caminos.

Lema 66.3. Sea f un lazo diferenciable a trozos en el plano complejo; sea a un punto que no está en la imagen de f . Entonces

$$n(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_f \frac{dz}{z-a}.$$

La ecuación anterior se toma en ocasiones como la *definición* del número de rotación de f .

Demostración. La demostración es un simple ejercicio de cálculo. Sean $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ la aplicación recubridora estándar. Sea $r(s) = ||f(s) - a||$ y $g(s) = [f(s) - a]/r(s)$. Sea $\tilde{g}(s)$ un levantamiento de g a \mathbb{R} . Sea $\theta(s) = 2\pi\tilde{g}(s)$. Entonces $f(s) - a = r(s)\exp(i\theta(s))$, de modo que

$$\begin{aligned} \int_f \frac{dz}{z-a} &= \int_0^1 [r'e^{i\theta} + ir\theta'e^{i\theta}/re^{i\theta}]ds \\ &= [\log r(s) + i\theta(s)]_0^1 \\ &= i[\theta(1) - \theta(0)] \\ &= 2\pi i[\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0)]. \end{aligned}$$

Teorema 66.4 (Versión clásica de la fórmula integral de Cauchy). Sea C una curva simple cerrada diferenciable a trozos en el plano complejo. Sea B la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - C$. Si $F(z)$ es analítica en un conjunto abierto Ω que contiene a B y C , entonces para cada punto a de B se satisface

$$F(a) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{z-a} dz.$$

El signo es $+$ si C está orientada en sentido contrario a las agujas del reloj, y $-$ en caso contrario.

Demuestra. Obtendremos esta fórmula a partir de la versión que puede encontrarse en Ahlfors [A], que es la siguiente:

Sea F analítica en una región Ω . Sea f un lazo diferenciable a trozos en Ω . Supongamos que $n(f, b) = 0$ para cada punto b que no esté en Ω . Si $a \in \Omega$ y a no está en la imagen de f , entonces

$$n(f, a) \cdot F(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_f \frac{F(z)}{z-a} dz.$$

Aplicaremos este resultado a una parametrización diferenciable a trozos f de nuestra curva simple cerrada. La condición $n(f, b) = 0$ se satisface para cada punto b que no esté en Ω , ya que tales puntos están en la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - C$. Además, $n(f, a) = \pm 1$ si a está en B , donde el signo depende de la orientación de C , según el Teorema 66.2. Esto concluye la demostración. ■

Obsérvese que no se puede enunciar ni siquiera la versión clásica del teorema integral de Cauchy sin conocer el teorema de la curva de Jordan. Para demostrarlo se requiere incluso más, concretamente el conocimiento del número de rotación de una curva simple cerrada. Es interesante observar que este último resultado puede ser probado (al menos en el caso diferenciable) mediante un método completamente diferente, utilizando la versión general del *teorema de Green*, probada en análisis. La demostración se indica en el Ejercicio 2.

Ejercicios

1. Sea f un lazo en $\mathbb{R}^2 - a$; sea $g(s) = [f(s) - a]/\|f(s) - a\|$. La aplicación g induce, vía la aplicación cociente estándar $p : I \rightarrow S^1$, una aplicación continua $h : S^1 \rightarrow S^1$. Demuestre que $n(f, a)$ coincide con el grado de h , tal y como se definió en el Ejercicio 9 de §58.

2. Este ejercicio presupone cierta familiaridad con el análisis en variedades.

Teorema. Sea C una curva simple cerrada en \mathbb{R}^2 que es una subvariedad diferenciable de \mathbb{R}^2 ; sea $f : I \rightarrow C$ un lazo simple parametrizando diferencialmente C . Si 0 es un punto de la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - C$, entonces

$$n(f, \mathbf{0}) = \pm 1.$$

Demostración. Sea U la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - C$. Sea B una ϵ -bola cerrada centrada en $\mathbf{0}$ y contenida en U ; sea $S = \text{Fr } B$. Sea M la clausura de $U - B$.

- (a) Demuestre que M es una variedad diferenciable 2-dimensional con frontera $C \cup S$.
- (b) Aplique el teorema de Green y pruebe que $\int_C dz/z = \pm \int_S dz/z$, donde el signo depende de las orientaciones de C y S . [Indicación: sea $P = -y/(x^2 + y^2)$ y $Q = x/(x^2 + y^2)$.]
- (c) Demuestre que la segunda integral vale $\pm 2\pi i$.

Capítulo 11

El teorema de Seifert-van Kampen

§67 Sumas directas de grupos abelianos

En esta sección sólo vamos a considerar grupos que sean abelianos. Como suele ser habitual, escribiremos tales grupos aditivamente, de modo que 0 denota el elemento neutro del grupo, $-x$ representa el inverso de x y nx denota la suma de n copias de x , $x + \cdots + x$.

Supongamos que G es un grupo abeliano y sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de subgrupos de G . Diremos que los grupos G_α **generan** G si cada elemento x de G puede escribirse como una suma finita de elementos de los grupos G_α . Como G es abeliano, siempre podemos reorganizar la suma para agrupar los términos que pertenezcan al mismo G_α , de modo que x siempre puede ser escrito en la forma

$$x = x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_n}$$

donde los índices α_i son distintos. En este caso, a menudo escribiremos x como la suma formal $x = \sum_{\alpha \in J} x_\alpha$, donde se sobrentiende que $x_\alpha = 0$ si α no es uno de los índices $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Si los grupos G_α generan G , a menudo diremos que G es la **suma** de los grupos G_α , escribiendo $G = \sum_{\alpha \in J} G_\alpha$ en general, o $G = G_1 + \cdots + G_n$ en el caso del conjunto finito de índices $\{1, \dots, n\}$.

Supongamos ahora que los grupos G_α generan G y que, para cada $x \in G$, la expresión $x = \sum x_\alpha$ es **única** para x . Esto es, supongamos que para cada $x \in G$ sólo existe una J -upla $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$, con $x_\alpha = 0$ siempre, excepto para una cantidad finita de índices α , tal que $x = \sum x_\alpha$. Entonces se dice que G es la **suma directa** de los grupos G_α y se escribe

$$G = \bigoplus_{\alpha \in J} G_\alpha$$

o bien, en el caso finito, $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$.

EJEMPLO 1. El producto cartesiano \mathbb{R}^ω es un grupo abeliano con la operación suma componente a componente. El conjunto G_n consistente en los elementos (x_i) tales que $x_i = 0$ para $i \neq n$ es un subgrupo isomorfo a \mathbb{R} . Los grupos G_n generan el subgrupo \mathbb{R}^∞ de \mathbb{R}^ω ; de hecho, \mathbb{R}^∞ es su suma directa.

Una caracterización útil de las sumas directas nos la proporciona el siguiente lema, que denominaremos *condición de extensión* para las sumas directas.

Lema 67.1. Sea G un grupo abeliano y $\{G_\alpha\}$ una familia de subgrupos de G . Si G es la suma directa de los grupos G_α entonces G satisface la siguiente condición:

(*) Dado cualquier grupo abeliano H y cualquier familia de homomorfismos $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, existe un homomorfismo $h : G \rightarrow H$ cuya restricción a G_α coincide con h_α para cada α .

Además, h es única. Recíprocamente, si los grupos G_α generan G y la condición de extensión (*) se satisface, entonces G es la suma directa de los grupos G_α .

Demuestra. Probaremos primero que si G posee la propiedad de extensión enunciada, entonces G es la suma directa de los grupos G_α . Supongamos que $x = \sum x_\alpha = \sum y_\alpha$; vamos a probar que para cualquier índice β se satisface que $x_\beta = y_\beta$. Sea H el grupo G_β y consideremos $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$ el homomorfismo trivial si $\alpha \neq \beta$ y el homomorfismo identidad si $\alpha = \beta$. Sea $h : G \rightarrow H$ la hipotética extensión de los homomorfismos h_α . Entonces

$$h(x) = \sum h_\alpha(x_\alpha) = x_\beta,$$

$$h(x) = \sum h_\alpha(y_\alpha) = y_\beta,$$

de modo que $x_\beta = y_\beta$.

Ahora vamos a demostrar que si G es la suma directa de los grupos G_α , entonces se satisface la condición de extensión. Dados los homomorfismos h_α , definimos $h(x)$ como sigue: si $x = \sum x_\alpha$, sea $h(x) = \sum h_\alpha(x_\alpha)$. Como esta suma es finita y la expresión para x es única, h está bien definida. Puede comprobarse inmediatamente que h es el homomorfismo deseado. La unicidad se sigue porque h debe satisfacer esta ecuación si es un homomorfismo que coincide con h_α sobre G_α para cada α . ■

De este lema se deducen numerosos resultados acerca de sumas directas que son muy fáciles de demostrar:

Corolario 67.2. Sea $G = G_1 \oplus G_2$. Supongamos que G_1 es la suma directa de los subgrupos H_α para $\alpha \in J$ y que G_2 es la suma directa de los subgrupos H_β para $\beta \in K$, donde los conjuntos de índices J y K son disjuntos. Entonces G es la suma directa de los subgrupos H_γ para $\gamma \in J \cup K$.

Demostración. Si $h_\alpha : H_\alpha \rightarrow H$ y $h_\beta : H_\beta \rightarrow H$ son familias de homomorfismos, entonces se extienden a homomorfismos $h_1 : G_1 \rightarrow H$ y $h_2 : G_2 \rightarrow H$ por el lema anterior. Entonces h_1 y h_2 se extienden a un homomorfismo $h : G \rightarrow H$. ■

Este corolario implica, por ejemplo, que

$$(G_1 \oplus G_2) \oplus G_3 = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3).$$

Corolario 67.3. Si $G = G_1 \oplus G_2$, entonces G/G_2 es isomorfo a G_1 .

Demostración. Sea $H = G_1$, $h_1 : G_1 \rightarrow H$ el homomorfismo identidad y $h_2 : G_2 \rightarrow H$ el homomorfismo trivial. Sea $h : G \rightarrow H$ su extensión al grupo G . Entonces h es sobreyectiva y su núcleo es G_2 . ■

En muchas situaciones, disponemos de una familia de grupos abelianos $\{G_\alpha\}$ y deseamos encontrar un grupo G que contenga subgrupos G'_α isomorfos a los grupos G_α tales que G sea la suma directa de estos subgrupos. Esto puede conseguirse siempre, y este hecho nos conduce al concepto de *suma directa externa*.

Definición. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de grupos abelianos. Supongamos que G es un grupo abeliano y que $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ es una familia de monomorfismos tales que G es la suma directa de los subgrupos $i_\alpha(G_\alpha)$. Entonces se dice que G es la *suma directa externa* de los grupos G_α , relativa a los monomorfismos i_α .

El grupo G no es único, desde luego; probaremos posteriormente que es único salvo isomorfismos. A continuación presentamos el método para construir G .

Teorema 67.4. Dada una familia de grupos abelianos $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$, existe un grupo abeliano G y una familia de monomorfismos $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ tal que G es la suma directa de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$.

Demostración. Consideremos, en primer lugar, el producto cartesiano

$$\prod_{\alpha \in J} G_\alpha$$

que es un grupo abeliano si consideramos como operación la suma componente a componente. Sea G el subgrupo del producto cartesiano consistente en los elementos $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ tales que $x_\alpha = 0_\alpha$, el elemento neutro de G_α , para todos los índices α excepto para una cantidad finita. Dado un índice β , definimos $i_\beta : G_\beta \rightarrow G$ asignando a $i_\beta(x)$ el único elemento que tiene x como coordenada β -ésima y el resto de coordenadas igual a 0_α , para $\alpha \neq \beta$. Es inmediato comprobar que i_β es un monomorfismo. Asimismo, es inmediato verificar que, dado que cada elemento x de G sólo tiene un

número finito de coordenadas no nulas, entonces x puede escribirse de forma única como una suma finita de elementos de los grupos $i_\beta(G_\beta)$. ■

La condición de extensión que caracteriza las sumas directas ordinarias se traslada inmediatamente a una condición de extensión para sumas directas externas:

Lema 67.5. *Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de grupos abelianos, G un grupo abeliano y sea $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ una familia de homomorfismos. Si cada i_α es un monomorfismo y G es la suma directa de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$, entonces G satisface la siguiente condición de extensión:*

(*) *Dado cualquier grupo abeliano H y cualquier familia de homomorfismos $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, existe un homomorfismo $h : G \rightarrow H$ tal que $h \circ i_\alpha = h_\alpha$ para todo α .*

Además, h es única. Recíprocamente, supongamos que los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$ generan G y se satisface la condición de extensión (*). Entonces cada i_α es un monomorfismo y G es la suma directa de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$.

Demuestração. La única implicación que requiere demostración es la afirmación de que si se satisface la condición de extensión, entonces cada i_α es un monomorfismo, lo cual puede probarse como sigue. Dado un índice β , sea $H = G_\beta$ y sea $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$ el homomorfismo identidad si $\alpha = \beta$, y el homomorfismo trivial si $\alpha \neq \beta$. Sea $h : G \rightarrow H$ la hipotética extensión. Entonces, en particular, $h \circ i_\beta = h_\beta$; se sigue entonces que i_β es inyectiva. ■

Una consecuencia inmediata es el teorema de unicidad para las sumas directas:

Teorema 67.6 (Unicidad de sumas directas). *Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de grupos abelianos. Supongamos que G y G' son grupos abelianos y sean $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ e $i'_\alpha : G_\alpha \rightarrow G'$ familias de monomorfismos tales que G es la suma directa de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$ y G' es la suma directa de los grupos $i'_\alpha(G_\alpha)$. Entonces existe un único isomorfismo $\phi : G \rightarrow G'$ tal que $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$ para todo α .*

Demuestração. Aplicaremos cuatro veces el lema previo. Como G es la suma directa externa de los grupos G_α e $\{i'_\alpha\}$ es una familia de homomorfismos, existe un único homomorfismo $\phi : G \rightarrow G'$ tal que $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$ para todo α . De manera similar, como G' es la suma directa externa de los grupos G_α e $\{i_\alpha\}$ es una familia de homomorfismos, existe un único homomorfismo $\psi : G' \rightarrow G$ tal que $\psi \circ i'_\alpha = i_\alpha$ para cada α . Entonces $\psi \circ \phi : G \rightarrow G$ satisface que $\psi \circ \phi \circ i_\alpha = i_\alpha$ para todo α ; como el elemento neutro de G tiene la misma propiedad, la unicidad que nos proporciona el lema nos permite asegurar que $\psi \circ \phi$ debe coincidir con el elemento neutro de G . De manera similar, $\phi \circ \psi$ debe coincidir con el elemento neutro de G' . ■

Si G es la suma directa externa de los grupos G_α , relativa a los monomorfismos i_α , en ocasiones haremos un abuso de notación y escribiremos $G = \bigoplus G_\alpha$, incluso aunque los grupos G_α no sean subgrupos de G . Esto es, identificaremos cada grupo G_α con su imagen bajo i_α , y trataremos G como una suma directa ordinaria en lugar de considerarlo como una suma directa externa. En cada caso, el contexto aclarará el significado preciso.

Ahora vamos a centrarnos en los grupos abelianos libres.

Definición. Sea G un grupo abeliano y sea $\{a_\alpha\}$ una familia indexada de elementos de G ; sea G_α el subgrupo de G generado por a_α . Si los grupos G_α generan G diremos que los *elementos* a_α generan G . Si cada subgrupo G_α es cíclico infinito, y si G es la suma directa de los grupos G_α , entonces se dice que G es un **grupo abeliano libre** con **base** $\{a_\alpha\}$.

La condición de extensión en las sumas directas implica la siguiente condición de extensión para grupos abelianos libres:

Lema 67.7. Sean G un grupo abeliano y $\{a_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de elementos de G que generan G . Entonces G es un grupo abeliano libre con base $\{a_\alpha\}$ si, y sólo si, para cada grupo abeliano H y cualquier familia $\{y_\alpha\}$ de elementos de H existe un homomorfismo h de G en H tal que $h(a_\alpha) = y_\alpha$ para todo α . En este caso, h es única.

Demostración. Sea G_α el subgrupo de G generado por a_α . Supongamos primero que la propiedad de extensión se satisface. Vamos a probar que cada grupo G_α es cíclico infinito. Supongamos que para algún índice β el elemento a_β genera un subgrupo cíclico finito de G . Entonces si hacemos $H = \mathbb{Z}$ no puede existir un homomorfismo $h : G \rightarrow H$ que haga corresponder cada elemento a_α con el número 1, ya que el elemento a_β tiene orden finito y el 1 no. Para probar que G es la suma directa de los grupos G_α simplemente aplicamos el Lema 67.1.

Recíprocamente, si G es un grupo abeliano libre con base $\{a_\alpha\}$, entonces dados los elementos $\{y_\alpha\}$ de H existen homomorfismos $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$ tales que $h_\alpha(a_\alpha) = y_\alpha$, ya que G_α es cíclico infinito. Entonces basta aplicar el Lema 67.1. ■

Teorema 67.8. Si G es un grupo abeliano libre con base $\{a_1, \dots, a_n\}$, entonces n está únicamente determinado por G .

Demostración. El grupo G es isomorfo al producto de n copias $\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$; el subgrupo $2G$ se corresponde con el subgrupo $(2\mathbb{Z}) \times \dots \times (2\mathbb{Z})$. Entonces el grupo cociente $G/2G$ se aplica biyectivamente en el conjunto $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, de modo que $G/2G$ tienen cardinal 2^n . Por tanto, n está únicamente determinado por G . ■

Si G es un grupo abeliano libre con una base finita, el número de elementos de una base para G se denomina *rango* de G .

Ejercicios

1. Supongamos que $G = \sum G_\alpha$. Demuestre que esta suma es directa si, y sólo si, la ecuación

$$x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_n} = 0$$

implica que cada x_{α_i} es cero (se supone que $x_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i}$ y los índices α_i son distintos).

2. Pruebe que si G_1 es un subgrupo de G , puede que no exista ningún subgrupo G_2 de G tal que $G = G_1 \oplus G_2$. [Indicación: sea $G = \mathbb{Z}$ y $G_1 = 2\mathbb{Z}$.]

3. Si G es un grupo abeliano libre con base $\{x, y\}$, demuestre que $\{2x+3y, x-y\}$ es también una base de G .

4. El *orden* de un elemento a de un grupo abeliano G es el menor entero positivo m tal que $ma = 0$, si existe; en otro caso, a se dice que es de orden infinito. El orden de a equivale, por tanto, al orden del subgrupo generado por a .

(a) Pruebe que los elementos de orden finito de G forman un subgrupo de G , denominado *subgrupo de torsión*.

(b) Pruebe que si G es abeliano libre, entonces no posee elementos de orden finito.

(c) Pruebe que el grupo aditivo de los racionales no tiene elementos de orden finito, pero no es un grupo abeliano libre. [Indicación: si $\{a_\alpha\}$ es una base, exprese $\frac{1}{2}a_\alpha$ en términos de esta base.]

5. Proporcione un ejemplo de un grupo abeliano libre G de rango n que posea un subgrupo H de rango n tal que $H \neq G$.

6. Demuestre el siguiente resultado:

Teorema. Si A es un grupo abeliano libre de rango n , entonces cualquier subgrupo B de A es un grupo abeliano libre de rango no superior a n .

Demostración. Podemos asumir que $A = \mathbb{Z}^n$, el producto de n copias de \mathbb{Z} . Sea $\pi_i : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ la proyección en la i -ésima coordenada. Dado $m \leq n$, sea B_m el subconjunto formado por todos los elementos \mathbf{x} de B tales que $\pi_i(\mathbf{x}) = 0$ para $i > m$. Entonces B_m es un subgrupo de B .

Consideremos el subgrupo $\pi_m(B_m)$ de \mathbb{Z} . Si este subgrupo no es trivial, escogamos $\mathbf{x}_m \in B_m$ de modo que $\pi_m(\mathbf{x}_m)$ sea un generador de este subgrupo. En otro caso, hagamos $\mathbf{x}_m = \mathbf{0}$.

(a) Pruebe que $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$ genera B_m para todo m .

- (b) Pruebe que los elementos no nulos de $\{x_1, \dots, x_m\}$ forman una base de B_m para todo m .
- (c) Pruebe que $B_n = B$ es abeliano libre con rango no superior a n .

§68 Productos libres de grupos

Ahora vamos a considerar grupos G que no tienen que ser necesariamente abelianos. En este caso, vamos a escribir G de forma multiplicativa. Denotaremos el elemento neutro de G por 1, y el inverso del elemento x será representado por x^{-1} . El símbolo x^n denotará el producto de n copias de x , x^{-n} el producto de n copias de x^{-1} y x^0 el elemento neutro.

En esta sección estudiaremos un concepto que desempeña un papel, en el caso de grupos arbitrarios, similar al que juega la suma directa para los grupos abelianos. Se denomina *producto libre* de grupos.

Sea G un grupo. Si $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una familia de subgrupos de G , diremos (como antes) que estos grupos *generan* G si todo elemento de G puede escribirse como un producto finito de elementos de los grupos G_α . Esto significa que existe una sucesión finita (x_1, \dots, x_n) de elementos de los grupos G_α tal que $x = x_1 \cdots x_n$. Tal sucesión se denomina **palabra** (de longitud n) en los grupos G_α ; se dice que *representa* el elemento x de G .

Observe que al perder la comutatividad no podemos reorganizar los factores en la expresión de x para agrupar los que pertenecen al mismo grupo G_α . Sin embargo, si x_i y x_{i+1} pertenecen al mismo grupo G_α podemos agruparlos para obtener la palabra

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$$

de longitud $n - 1$ y que también representa a x . Además, si cualquiera de los x_i es igual a 1, entonces podemos suprimir x_i de la sucesión, obteniendo de nuevo una palabra más corta que también representa a x .

Aplicando estas operaciones de reducción repetidamente, podemos obtener en general una palabra representando a x de la forma (y_1, \dots, y_m) , donde no existe ningún grupo G_α que contenga a dos elementos consecutivos y_i e y_{i+1} y donde $y_i \neq 1$ para todo índice i . Tal palabra se denomina **palabra reducida**. Esta discusión no se aplica, sin embargo, si x es el elemento neutro de G , ya que en este caso se podría representar x por una palabra de la forma (a, a^{-1}) que se reduciría a la palabra (aa^{-1}) de longitud uno y entonces desaparecería. Consecuentemente, utilizaremos el convenio de que el conjunto vacío es una palabra reducida (de longitud cero) que representa el elemento neutro de G . Con este convenio es cierto que si los grupos G_α generan G entonces todo elemento de G puede ser representado por una palabra reducida en los elementos de los grupos G_α .

Observe que si $(x_1, \dots, x_n) \in (y_1, \dots, y_m)$ son palabras que representan a x e y , respectivamente, entonces $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ es una palabra que representa a xy . Incluso si las dos primeras son palabras reducidas, la tercera puede no ser una palabra reducida, a menos que ningún grupo G_α contenga a los elementos x_n e y_1 .

Definición. Sea G un grupo, sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de subgrupos de G que generan G . Supongamos que $G_\alpha \cap G_\beta$ está formado sólo por el elemento neutro cuando $\alpha \neq \beta$. Diremos que G es el **producto libre** de los grupos G_α si para cada $x \in G$ existe una única palabra reducida en los grupos G_α que representa a x . En este caso escribiremos

$$G = \prod_{\alpha \in J}^* G_\alpha$$

o, en el caso finito, $G = G_1 * \dots * G_n$.

Sea G el producto de los grupos G_α y sea (x_1, \dots, x_n) una palabra en los grupos G_α que satisface la condición $x_i \neq 1$ para todo i . Entonces, para cada i , existe un único índice α_i tal que $x_i \in G_{\alpha_i}$; decir que la palabra es una palabra reducida significa simplemente que $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ para todo i .

Supongamos que los grupos G_α generan G , donde $G_\alpha \cap G_\beta = \{1\}$ siempre que $\alpha \neq \beta$. Para que G sea el producto libre de estos grupos, es suficiente con saber que la representación de 1 por la palabra vacía es única. En efecto, si se satisface esta última condición y suponemos que $(x_1, \dots, x_n) \in (y_1, \dots, y_m)$ son dos palabras reducidas que representan al mismo elemento x de G , podemos elegir los índices α_i y β_i tales que $x_i \in G_{\alpha_i}$ e $y_i \in G_{\beta_i}$. Como

$$x_1 \cdots x_n = x = y_1 \cdots y_m$$

la palabra

$$(y_m^{-1}, \dots, y_1^{-1}, x_1, \dots, x_n)$$

representa el 1. Por tanto debe ser posible reducir esta palabra, de modo que tenemos $\alpha_1 = \beta_1$; la palabra se reduce entonces a

$$(y_m^{-1}, \dots, y_1^{-1} x_1, \dots, x_n).$$

De nuevo podemos afirmar que es posible reducir esta palabra, por lo que $y_1^{-1} x_1 = 1$ y así $x_1 = y_1$ de modo que 1 está representado por la palabra

$$(y_m^{-1}, \dots, y_2^{-1}, x_2, \dots, x_n).$$

Continuando con este argumento concluimos que $m = n$ y que $x_i = y_i$ para todo i .

EJEMPLO 1. Consideremos el grupo P de las aplicaciones biyectivas del conjunto $\{0, 1, 2\}$ en sí mismo. Para $i = 1, 2$ definimos un elemento π_i de P haciendo $\pi_i(i) = i - 1$, $\pi_i(i - 1) = i$ y $\pi_i(j) = j$ en otro caso. Entonces π_i genera un subgrupo G_i de P de orden 2. Los grupos G_1 y G_2 generan P , como fácilmente puede comprobarse. Pero P no es su producto libre. Las palabras reducidas (π_1, π_2, π_1) y (π_2, π_1, π_2) , por ejemplo, representan el mismo elemento de P .

El producto libre verifica una *condición de extensión* análoga a la que satisface la suma directa:

Lema 68.1. Sea G un grupo y $\{G_\alpha\}$ una familia de subgrupos de G . Si G es el producto libre de los grupos G_α , entonces G satisface la siguiente condición:

Dado cualquier grupo H y cualquier familia de homomorfismos
(*) $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, existe un homomorfismo $h : G \rightarrow H$ cuya restricción a G_α coincide con h_α para cada α .

Además, h es único.

El recíproco de este lema también se satisface, pero la demostración no es tan sencilla como en el caso de las sumas directas, por lo que la posponemos para más adelante.

*Demuestra*ción. Dado $x \in G$ distinto de 1, sea (x_1, \dots, x_n) la palabra reducida que lo representa. Si h existe, entonces debe satisfacer la ecuación

$$(*) \quad h(x) = h(x_1) \cdots h(x_n) = h_{\alpha_1}(x_1) \cdots h_{\alpha_n}(x_n)$$

donde α_i es el índice tal que $x_i \in G_{\alpha_i}$. Por tanto, h es única.

Para probar que h existe, la definimos por la ecuación (*) si $x \neq 1$, y asignamos $h(1) = 1$. Como la representación de x por una palabra reducida es única, h está bien definida. Debemos probar que h es un homomorfismo.

Primero probaremos un resultado preliminar. Dada una palabra $w = (x_1, \dots, x_n)$ de longitud positiva en los elementos de los grupos G_α , definimos $\phi(w)$ como el elemento de H dado por la ecuación

$$(**) \quad \phi(w) = h_{\alpha_1}(x_1) \cdots h_{\alpha_n}(x_n)$$

donde α_i es el índice tal que $x_i \in G_{\alpha_i}$. Pero α_i es único excepto si $x_i = 1$; por tanto, ϕ está bien definida. Si w es la palabra vacía, hacemos $\phi(w)$ igual al elemento neutro de H . Vamos a probar que si w' es una palabra obtenida de w aplicando una de nuestras operaciones de reducción, entonces $\phi(w') = \phi(w)$.

Supongamos primero que w' se obtiene eliminando el factor $x_i = 1$ de la palabra w . Entonces la ecuación $\phi(w') = \phi(w)$ es consecuencia del hecho que $h_{\alpha_i}(x_i) = 1$. En segundo lugar, supongamos que $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, y que

$$w' = (x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Dado que

$$h_\alpha(x_i)h_\alpha(x_{i+1}) = h_\alpha(x_i x_{i+1})$$

donde $\alpha = \alpha_i = \alpha_{i+1}$, se tiene que $\phi(w') = \phi(w)$.

Se deduce asimismo que si w es cualquier palabra en los grupos G_α que representa a x , entonces $h(x) = \phi(w)$. Por la definición de h esta ecuación se satisface para cualquier palabra reducida y el proceso de reducción no cambia el valor de ϕ .

Supongamos ahora que h es un homomorfismo y que $w = (x_1, \dots, x_n)$ y $w' = (y_1, \dots, y_m)$ son palabras que representan a x e y , respectivamente. Sea (w, w') la palabra $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ que representa a xy . Se obtiene de la ecuación (**) que $\phi(w, w') = \phi(w)\phi(w')$. En consecuencia, $h(xy) = h(x)h(y)$. ■

Ahora vamos a considerar el problema de tomar una familia arbitraria de grupos $\{G_\alpha\}$ y encontrar un grupo G que contenga subgrupos G'_α isomorfos a los grupos G_α y tal que G sea el producto libre de los grupos G'_α . Esta cuestión tiene, de hecho, una solución y nos conduce a la noción de *producto libre externo*.

Definición. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de grupos. Supongamos que G es un grupo y que $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ es una familia de monomorfismos, tales que G es el producto libre de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$. Entonces se dice que G es el **producto libre externo** de los grupos G_α , relativo a los monomorfismos i_α .

El grupo G no es único, desde luego; probaremos, no obstante, que es único salvo isomorfismos. La construcción de G es mucho más difícil que la construcción de la suma directa externa.

Teorema 68.2. Dada una familia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de grupos, existe un grupo G y una familia de monomorfismos $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ tal que G es el producto libre de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$.

Demuestração. Por comodidad, supondremos que los grupos G_α son disjuntos como conjuntos. Esto puede conseguirse reemplazando G_α por $G_\alpha \times \{\alpha\}$, si fuese necesario.

Entonces podemos definir, como antes, una **palabra** (de longitud n) en los elementos de los grupos G_α como una n -upla $w = (x_1, \dots, x_n)$ de elementos de $\bigcup G_\alpha$. Se dice que es una **palabra reducida** si $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ para todo i , donde α_i es el índice tal que $x_i \in G_{\alpha_i}$ para todo i , y x_i no es el elemento neutro de G_{α_i} . Definimos el conjunto vacío como la única palabra reducida de longitud cero. Observemos que no estamos proporcionando un grupo G que contiene todos los grupos G_α como subgrupos, por lo que no podemos decir que una palabra "representa" un elemento de G .

Sea W el conjunto de todas las palabras reducidas en los elementos de los grupos G_α . Sea $P(W)$ el conjunto de todas las aplicaciones biyectivas $\pi : W \rightarrow W$. Entonces $P(W)$ es también un grupo, considerando la composición de funciones como la operación del grupo. Vamos a obtener el grupo G como un subgrupo de $P(W)$.

Paso 1. Para cada índice α y cada $x \in G_\alpha$, sea $\pi_x : W \rightarrow W$ la aplicación definida como sigue:

- (1) Si $x = 1_\alpha$, el elemento neutro de G_α , entonces π_x es la aplicación identidad de W .
- (2) Si $x, y \in G_\alpha$ y $z = xy$, entonces $\pi_z = \pi_x \circ \pi_y$.

Ahora procederemos como se indica a continuación. Sea $x \in G_\alpha$, $w = (x_1, \dots, x_n)$ un elemento genérico y no vacío de W y sea α_1 el índice tal que $x_1 \in G_{\alpha_1}$. Si $x \neq 1_\alpha$, definimos π_x como sigue:

- (i) $\pi_x(\emptyset) = (x),$
- (ii) $\pi_x(w) = (x, x_1, \dots, x_n), \quad \text{si } \alpha_1 \neq \alpha,$
- (iii) $\pi_x(w) = (xx_1, \dots, x_n), \quad \text{si } \alpha_1 = \alpha \text{ y } x_1 \neq x^{-1},$
- (iv) $\pi_x(w) = (x_2, \dots, x_n), \quad \text{si } \alpha_1 = \alpha \text{ y } x_1 = x^{-1}.$

Si $x = 1_\alpha$, definimos π_x como la aplicación identidad de W .

Observemos que los valores de π_x son en cada caso una palabra reducida, esto es, un elemento de W . En los casos (i) y (ii), la acción de π_x incrementa la longitud de la palabra; en el caso (iii) la longitud no se modifica, mientras que en el caso (iv) se reduce la longitud de la palabra. Cuando se aplica el caso (iv) a una palabra w de longitud uno, entonces w se aplica en la palabra vacía.

Paso 2. Vamos a probar que si $x, y \in G_\alpha$ y $z = xy$ entonces $\pi_z = \pi_x \circ \pi_y$.

El resultado es trivial si x ó y es igual a 1_α , ya que, en este caso, π_x ó π_y es la aplicación identidad. Por tanto, podemos suponer que $x \neq 1_\alpha$ e $y \neq 1_\alpha$. Vamos a calcular los valores de π_z y de $\pi_x \circ \pi_y$ sobre una palabra reducida w . Debemos considerar cuatro casos.

(i) Supongamos que w es la palabra vacía. Tenemos $\pi_y(\emptyset) = (y)$. Si $z = 1_\alpha$ entonces $y = x^{-1}$ y $\pi_x \pi_y(\emptyset) = \emptyset$ por (iv), mientras que $\pi_z(\emptyset) = \emptyset$ al ser π_z la aplicación identidad. Si $z \neq 1_\alpha$ entonces

$$\pi_x \pi_y(\emptyset) = (xy) = (z) = \pi_z(\emptyset).$$

En los restantes casos, supondremos que $w = (x_1, \dots, x_n)$ con $x_1 \in G_{\alpha_1}$.

(ii) Supongamos que $\alpha \neq \alpha_1$. Entonces $\pi_y(w) = (y, x_1, \dots, x_n)$. Si $z = 1_\alpha$ entonces $y = x^{-1}$ y $\pi_x \pi_y(w) = (x_1, \dots, x_n)$ por (iv), mientras que $\pi_z(w)$ vale lo

mismo al ser π_z la aplicación identidad. Si $z \neq 1_\alpha$, entonces

$$\begin{aligned}\pi_x \pi_y(w) &= (xy, x_1, \dots, x_n) \\ &= (z, x_1, \dots, x_n) = \pi_z(w).\end{aligned}$$

(iii) Supongamos que $\alpha = \alpha_1$ e $yx_1 \neq 1_\alpha$. Entonces $\pi_y(w) = (yx_1, x_2, \dots, x_n)$. Si $xyx_1 = 1_\alpha$ entonces $\pi_x \pi_y(w) = (x_2, \dots, x_n)$, mientras que $\pi_z(w)$ vale lo mismo porque $zx_1 = xyx_1 = 1_\alpha$. Si $xyx_1 \neq 1_\alpha$ entonces

$$\begin{aligned}\pi_x \pi_y(w) &= (xyx_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (zx_1, x_2, \dots, x_n) = \pi_z(w).\end{aligned}$$

(iv) Finalmente, supongamos que $\alpha = \alpha_1$ e $yx_1 = 1_\alpha$. Entonces $\pi_y(w) = (x_2, \dots, x_n)$, que es vacío si $n = 1$. Un cálculo directo prueba

$$\begin{aligned}\pi_x \pi_y(w) &= (x, x_2, \dots, x_n) \\ &= (x(yx_1), x_2, \dots, x_n) \\ &= (zx_1, x_2, \dots, x_n) = \pi_z(w).\end{aligned}$$

Paso 3. La aplicación π_x es un elemento de $P(W)$ y la aplicación $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow P(W)$ definida por $i_\alpha(x) = \pi_x$ es un monomorfismo.

Para probar que π_x es biyectiva, observemos que si $y = x^{-1}$ entonces las condiciones (1) y (2) implican que $\pi_x \circ \pi_y = \pi_y \circ \pi_x$ que coinciden con la aplicación identidad de W . Por tanto, π_x pertenece a $P(W)$. El hecho de que i_α sea un homomorfismo es una consecuencia de la condición (2). Para probar que i_α es un monomorfismo basta observar que si $x \neq 1_\alpha$ entonces $\pi_x(\emptyset) = (x)$, de modo que π_x no es la aplicación identidad de W .

Paso 4. Sea G el subgrupo de $P(W)$ generado por los grupos $G'_\alpha = i_\alpha(G_\alpha)$. Vamos a probar que G es el producto libre de los grupos G'_α .

En primer lugar demostraremos que $G'_\alpha \cap G'_\beta$ consiste únicamente en el elemento neutro cuando $\alpha \neq \beta$. Sean $x \in G_\alpha$ e $y \in G_\beta$; supongamos que ni π_x ni π_y son la aplicación identidad de W y probemos que $\pi_x \neq \pi_y$. Pero esto es muy fácil, ya que $\pi_x(\emptyset) = (x)$ y $\pi_y(\emptyset) = (y)$, y éstas son palabras diferentes.

En segundo lugar, probaremos que no existe una palabra reducida no vacía

$$w' = (\pi_{x_1}, \dots, \pi_{x_n})$$

en los grupos G'_α que represente al elemento neutro de G . Sea α_i el índice tal que $x_i \in G_{\alpha_i}$; entonces $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ y $x_i \neq 1_{\alpha_i}$ para todo i . Un cálculo directo prueba que

$$\pi_{x_1}(\pi_{x_2}(\cdots(\pi_{x_n}(\emptyset)))) = (x_1, \dots, x_n)$$

de modo que el elemento de G representado por w' no es el elemento neutro de $P(W)$. ■

A pesar de que esta demostración de la existencia de productos libres es ciertamente correcta, posee la desventaja de que no nos proporciona un método adecuado para trabajar con los elementos del producto libre. En muchos casos esto no supone ningún problema, ya que la condición de extensión es la propiedad crucial que se utiliza en las aplicaciones. Sin embargo, nos sentiríamos más cómodos si dispusiéramos de un modelo concreto para el producto libre.

Para la suma directa externa sí disponíamos de un modelo. La suma directa externa de los grupos abelianos G_α consistía en los elementos (x_α) del producto cartesiano $\prod G_\alpha$ tales que $x_\alpha = 0_\alpha$ para todos los índices α excepto para una cantidad finita. Y cada grupo G_β era isomorfo al subgrupo G'_β formado por los elementos (x_α) tales que $x_\alpha = 0_\alpha$ para todo $\alpha \neq \beta$.

¿Existe un modelo simple análogo para el producto libre? Sí. En el último paso de la demostración previa hemos probado que si $(\pi_{x_1}, \dots, \pi_{x_n})$ es una palabra reducida en los grupos G'_α entonces

$$\pi_{x_1}(\pi_{x_2}(\dots(\pi_{x_n}(\emptyset)))) = (x_1, \dots, x_n).$$

Esta ecuación implica que si π es cualquier elemento de $P(W)$ perteneciente al producto libre G , entonces la asignación $\pi \rightarrow \pi(\emptyset)$ define una correspondencia biyectiva entre G y el conjunto W . Por tanto, si π y π' son dos elementos de G tales que

$$\pi(\emptyset) = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{y} \quad \pi'(\emptyset) = (y_1, \dots, y_k)$$

entonces $\pi(\pi'(\emptyset))$ es la palabra obtenida al reducir $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$.

Esto nos proporciona una idea para imaginar los elementos del grupo G . Podemos imaginar G simplemente como el propio conjunto W , definiendo el producto de palabras como la yuxtaposición de ellas y la reducción posterior de la palabra resultante. El elemento neutro se corresponde con la palabra vacía. Y cada grupo G_β se corresponde con el subconjunto de W formado por el conjunto vacío y todas las palabras de longitud 1 de la forma (x) , para $x \in G_\beta$ y $x \neq 1_\beta$.

Surge una pregunta inmediata: ¿por qué no utilizamos esta noción como la *definición* del producto libre? Ciertamente parece mucho más simple que la opción de tratar con el conjunto $P(W)$ de las permutaciones de W . La respuesta es la siguiente: la verificación de los axiomas de grupo es muy difícil si utilizamos esta definición; en particular, la demostración de la asociatividad es horrenda. Por comparación, la demostración precedente de la existencia de productos libres es un modelo de simplicidad y elegancia.

La condición de extensión para productos libres ordinarios se traslada inmediatamente a una condición de extensión para productos libres externos.

Lema 68.3. Sean $\{G_\alpha\}$ una familia de grupos, G un grupo e $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ una familia de homomorfismos. Si cada i_α es un monomorfismo y G es el producto libre de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$, entonces G satisface la siguiente condición:

Dado cualquier grupo H y cualquier familia de homomorfismos

(*) $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, existe un homomorfismo $h : G \rightarrow H$ tal que $h \circ i_\alpha = h_\alpha$ para todo α .

Además, h es único.

Una inmediata consecuencia es el teorema de unicidad para productos libres; la demostración es muy similar a la correspondiente demostración para sumas directas, por lo que se deja al lector.

Teorema 68.4 (Unicidad de productos libres). Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de grupos. Supongamos que G y G' son grupos e $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ e $i'_\alpha : G_\alpha \rightarrow G'$ son familias de monomorfismos tales que las familias $\{i_\alpha(G_\alpha)\}$ e $\{i'_\alpha(G_\alpha)\}$ generan G y G' , respectivamente. Si tanto G como G' satisfacen la propiedad de extensión enunciada en el lema previo, entonces existe un único isomorfismo $\phi : G \rightarrow G'$ tal que $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$ para todo α .

Ahora, finalmente, vamos a probar que la condición de extensión caracteriza a los productos libres, demostrando los recíprocos de los Lemas 68.1 y 68.3.

Lema 68.5. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de grupos, G un grupo e $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ una familia de homomorfismos. Si se satisface la condición de extensión del Lema 68.3, entonces cada i_α es un monomorfismo y G es el producto libre de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$.

Demostración. Probaremos en primer lugar que cada i_α es un monomorfismo. Dado un índice β , escribamos $H = G_\beta$. Sea $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$ la identidad si $\alpha = \beta$, y el homomorfismo trivial en caso contrario. Sea $h : G \rightarrow H$ el homomorfismo dado por la condición de extensión. Entonces $h \circ i_\beta = h_\beta$, de modo que i_β es inyectivo.

Por el Teorema 68.2, existe un grupo G' y una familia $i'_\alpha : G_\alpha \rightarrow G'$ de monomorfismos tal que G' es el producto libre de los grupos $i'_\alpha(G_\alpha)$. Ambos grupos G y G' tienen la propiedad de extensión del Lema 68.3. El teorema precedente implica entonces que existe un isomorfismo $\phi : G \rightarrow G'$ tal que $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$. Se sigue entonces que G es el producto libre de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$. ■

Ahora vamos a demostrar dos resultados análogos a los Corolarios 67.2 y 67.3.

Corolario 68.6. Sea $G = G_1 * G_2$, donde G_1 es el producto libre de los subgrupos $\{H_\alpha\}_{\alpha \in J}$ y G_2 es el producto libre de los subgrupos $\{H_\beta\}_{\beta \in K}$. Si los conjuntos de índices J y K son disjuntos, entonces G es el producto libre de los subgrupos $\{H_\gamma\}_{\gamma \in J \cup K}$.

Demostración. La demostración es casi una copia de la demostración del Corolario 67.2. ■

Este resultado implica en particular que

$$G_1 * G_2 * G_3 = G_1 * (G_2 * G_3) = (G_1 * G_2) * G_3.$$

Con objeto de demostrar el siguiente teorema, recordamos alguna terminología de la teoría de grupos. Si x e y son elementos de un grupo G , se dice que y es *conjugado* de x si $y = cxc^{-1}$ para algún $c \in G$. Un subgrupo *normal* de G es aquél que contiene a todos los conjugados de sus elementos.

Si S es un subconjunto de G , podemos considerar la intersección N de todos los subgrupos normales de G que contienen a S . Es fácil probar que N es también un subgrupo normal de G ; se denomina *menor subgrupo normal* de G que contiene a S .

Teorema 68.7. Sea $G = G_1 * G_2$ y N_i un subgrupo normal de G_i , para $i = 1, 2$. Si N es el menor subgrupo normal de G que contiene a N_1 y N_2 entonces

$$G/N \cong (G_1/N_1) * (G_2/N_2).$$

Demostración. La composición de los homomorfismos inclusión y proyección

$$G_1 \rightarrow G_1 * G_2 \rightarrow (G_1 * G_2)/N$$

aplica N_1 en el elemento neutro, de modo que induce un homomorfismo

$$i_1 : G_1/N_1 \rightarrow (G_1 * G_2)/N.$$

De modo similar, la composición de los homomorfismos inclusión y proyección induce un homomorfismo

$$i_2 : G_2/N_2 \rightarrow (G_1 * G_2)/N.$$

Probaremos que la condición de extensión del Lema 68.5 se satisface con respecto a i_1 e i_2 ; se deduce entonces que i_1 e i_2 son monomorfismos y que $(G_1 * G_2)/N$ es el producto libre externo de G_1/N_1 y G_2/N_2 relativo a estos monomorfismos.

Por tanto, sean $h_1 : G_1/N_1 \rightarrow H$ y $h_2 : G_2/N_2 \rightarrow H$ homomorfismos arbitrarios. La condición de extensión para $G_1 * G_2$ implica que existe un homomorfismo de $G_1 * G_2$ en H que coincide con la composición

$$G_i \rightarrow G_i/N_i \rightarrow H$$

de la aplicación proyección y h_i sobre G_i , para $i = 1, 2$. Este homomorfismo aplica los elementos de N_1 y N_2 en el elemento neutro, de modo que su núcleo contiene a N . Por tanto induce un homomorfismo $h : (G_1 * G_2)/N \rightarrow H$ que satisface las condiciones $h_1 = h \circ i_1$ y $h_2 = h \circ i_2$. ■

Corolario 68.8. Si N es el menor subgrupo normal de $G_1 * G_2$ que contiene a G_1 , entonces $(G_1 * G_2)/N \cong G_2$.

La noción de “menor subgrupo normal” es un concepto que aparecerá frecuentemente. Obviamente, si N es el menor subgrupo normal de G que contiene al subconjunto S de G , entonces N contiene a S y todos los conjugados de los elementos de S . Para uso posterior, vamos a comprobar que estos elementos *generan* de hecho el subgrupo N .

Lema 68.9. Sea S un subconjunto del grupo G . Si N es el menor subgrupo normal de G que contiene a S , entonces N está generado por todos los conjugados de los elementos de S .

Demostración. Sea N' el subgrupo de G generado por todos los conjugados de los elementos de S . Sabemos que $N' \subset N$; para comprobar la inclusión recíproca, sólo necesitamos probar que N' es normal en G . Dados $x \in N'$ y $c \in G$, vamos a probar que $cxc^{-1} \in N'$.

Podemos escribir x de la forma $x = x_1x_2 \cdots x_n$, donde cada x_i es el conjugado de un elemento s_i de S . Entonces $cx_i c^{-1}$ es también conjugado de s_i . Como

$$cxc^{-1} = (cx_1c^{-1})(cx_2c^{-1}) \cdots (cx_nc^{-1})$$

entonces cxc^{-1} es un producto de conjugados de elementos de S , de modo que $cxc^{-1} \in N'$, como deseábamos. ■

Ejercicios

1. Compruebe los detalles del Ejemplo 1.
2. Sea $G = G_1 * G_2$, donde G_1 y G_2 son grupos no triviales.
 - (a) Pruebe que G no es abeliano.
 - (b) Si $x \in G$, definimos la *longitud* de x como la longitud de la única palabra reducida en los elementos de G_1 y G_2 que representa x . Pruebe que si x tiene longitud par (al menos 2), entonces x no tiene orden finito. Pruebe que si x tiene longitud impar, entonces x es el conjugado de un elemento de longitud menor.
 - (c) Pruebe que los únicos elementos de G que tienen orden finito son los elementos de G_1 y G_2 que tienen orden finito, y sus conjugados.
3. Sea $G = G_1 * G_2$. Dado $c \in G$, sea cG_1c^{-1} el conjunto de todos los elementos de la forma cxc^{-1} , donde $x \in G_1$, que es un subgrupo de G . Pruebe que su intersección con G_2 es igual al elemento neutro.
4. Demuestre el Teorema 68.4.

§69 Grupos libres

Sea G un grupo y $\{a_\alpha\}$ una familia de elementos de G , con $\alpha \in J$. Diremos que los elementos $\{a_\alpha\}$ **generan** G si todo elemento de G puede escribirse como un producto de potencias de los elementos a_α . Si la familia $\{a_\alpha\}$ es finita, diremos que G está **finitamente generado**.

Definición. Sea $\{a_\alpha\}$ una familia de elementos de un grupo G . Supongamos que cada a_α genera un subgrupo cíclico infinito G_α de G . Si G es el producto libre de los grupos $\{G_\alpha\}$ entonces diremos que G es un **grupo libre**, y la familia $\{a_\alpha\}$ se dice que es un **sistema de generadores libres** para G .

En este caso, para cada elemento x de G , existe una única palabra reducida en los elementos de los grupos G_α que representa x . Esto significa que si $x \neq 1$ entonces x puede escribirse de forma única como

$$x = (a_{\alpha_1})^{n_1} (a_{\alpha_2})^{n_2} \cdots (a_{\alpha_k})^{n_k}$$

donde $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ y $n_i \neq 0$ para todo i (desde luego, n_i puede ser negativo).

Los grupos libres están caracterizados por la siguiente propiedad de extensión:

Lema 69.1. Sea G un grupo y $\{a_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de elementos de G . Si G es un grupo libre con sistema de generadores libres $\{a_\alpha\}$, entonces G satisface la siguiente condición:

(*) Dado cualquier grupo H y cualquier familia $\{y_\alpha\}$ de elementos de H , existe un homomorfismo $h : G \rightarrow H$ tal que $h(a_\alpha) = y_\alpha$ para todo α .

Además, h es único. Recíprocamente, si la condición de extensión (*) se satisface, entonces G es un grupo libre con sistema de generadores libres $\{a_\alpha\}$.

Demostración. Si G es libre, entonces para cada α , el grupo G_α generado por a_α es cíclico infinito, de modo que existe un homomorfismo $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$ que verifica $h_\alpha(a_\alpha) = y_\alpha$. Entonces el Lema 68.1 se puede aplicar. Para probar el recíproco, sea β un índice fijo. Por hipótesis, existe un homomorfismo $h : G \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $h(a_\beta) = 1$ y $h(a_\alpha) = 0$ para $\alpha \neq \beta$. Se deduce que el grupo G_β es cíclico infinito. Entonces se aplica el Lema 68.5. ■

Los resultados de la sección precedente (en particular, el Corolario 68.6) implican el siguiente resultado.

Teorema 69.2. Sea $G = G_1 * G_2$, donde G_1 y G_2 son grupos libres con $\{a_\alpha\}_{\alpha \in J}$ y $\{a_\alpha\}_{\alpha \in K}$ como sistemas de generadores libres, respectivamente. Si J y K son disjuntos entonces G es un grupo libre con sistema de generadores libres $\{a_\alpha\}_{\alpha \in J \cup K}$.

Definición. Sea $\{a_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia arbitraria indexada. Sea G_α el conjunto de todos los símbolos de la forma a_α^n con $n \in \mathbb{Z}$. Convirtamos G_α en grupo con la operación

$$a_\alpha^n \cdot a_\alpha^m = a_\alpha^{n+m}.$$

Entonces a_α^0 es el elemento neutro de G_α y a_α^{-n} es el inverso de a_α^n . Denotaremos a_α^1 simplemente por a_α . El producto libre externo de los grupos $\{G_\alpha\}$ se denomina **grupo libre generado por los elementos a_α** .

Si G es un grupo libre por los elementos a_α , habitualmente haremos un abuso de notación e identificaremos los elementos del grupo G_α con sus imágenes bajo el monomorfismo $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ que aparece en la construcción del producto libre externo. Entonces cada a_α se trata como un elemento de G y la familia $\{a_\alpha\}$ constituye un sistema de generadores libres de G .

Existe una conexión importante entre los grupos libres y los grupos libres abelianos. Para describirla, debemos recordar la noción algebraica de subgrupo conmutador.

Definición. Sea G un grupo. Si $x, y \in G$, denotamos por $[x, y]$ el elemento

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

de G que se denomina **comutador** de x e y . El subgrupo de G generado por el conjunto de todos los comutadores en G se denomina **subgrupo comutador** de G y se denota por $[G, G]$.

El siguiente resultado puede resultar familiar aunque, por completitud, vamos a proporcionar una demostración.

Lema 69.3. Dado G , el subgrupo $[G, G]$ es un subgrupo normal de G y el grupo cociente $G/[G, G]$ es abeliano. Si $h : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de G en un grupo abeliano H , entonces el núcleo de h contiene a $[G, G]$, de modo que h induce un homomorfismo $k : G/[G, G] \rightarrow H$.

Demostración. *Paso 1.* Primero vamos a probar que cualquier conjugado de un comutador está en $[G, G]$. Todo es consecuencia de los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} g[x, y]g^{-1} &= g(xyx^{-1}y^{-1})g^{-1} \\ &= (gxyx^{-1})(1)(y^{-1}g^{-1}) \\ &= (gxyx^{-1})(g^{-1}y^{-1}yg)(y^{-1}g^{-1}) \\ &= ((gx)y(gx)^{-1}y^{-1})(ygy^{-1}g^{-1}) \\ &= [gx, y] \cdot [y, g] \end{aligned}$$

que pertenece a $[G, G]$, como deseábamos.

Paso 2. Probaremos que $[G, G]$ es un subgrupo normal de G . Sea z un elemento arbitrario de $[G, G]$; vamos a ver que cualquier conjugado gzg^{-1} de z está también en $[G, G]$. El elemento z es un producto de conmutadores y de sus inversos. Como

$$[x, y]^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = [y, x],$$

z es en realidad el producto de conmutadores. Sea $z = z_1 \cdots z_n$, donde cada z_i es un conmutador. Entonces

$$gzg^{-1} = (gz_1g^{-1})(gz_2g^{-1}) \cdots (gz_ng^{-1})$$

es un producto de elementos de $[G, G]$ por el Paso 1 y, por tanto, pertenece a $[G, G]$.

Paso 3. Probaremos que $G/[G, G]$ es un grupo abeliano. Si $G' = [G, G]$ deseamos probar que

$$(aG')(bG') = (bG')(aG'),$$

esto es, $abG' = baG'$. Esto es equivalente a la ecuación

$$a^{-1}b^{-1}abG' = G'$$

y esta ecuación se sigue del hecho que $a^{-1}b^{-1}ab = [a^{-1}, b^{-1}]$, que es un elemento de G' .

Paso 4. Para completar la demostración, observemos que como H es abeliano, h aplica cada conmutador en el elemento neutro de H . Por tanto, el núcleo de h contiene a $[G, G]$, de modo que h induce el homomorfismo k . ■

Teorema 69.4. Si G es un grupo libre con generadores libres a_α , entonces $G/[G, G]$ es un grupo abeliano libre con base $[a_\alpha]$, donde $[a_\alpha]$ denota la clase de a_α en $G/[G, G]$.

Demuestração. Aplicaremos el Lema 67.7. Dada cualquier familia $\{y_\alpha\}$ de elementos de un grupo abeliano H , existe un homomorfismo $h : G \rightarrow H$ tal que $h(a_\alpha) = y_\alpha$ para cada α . Como H es abeliano, el núcleo de h contiene a $[G, G]$ por lo que h induce un homomorfismo $k : G/[G, G] \rightarrow H$ que aplica $[a_\alpha]$ en y_α . ■

Corolario 69.5. Si G es un grupo libre con n generadores libres, entonces cualquier sistema de generadores libres para G tiene n elementos.

Demuestração. El grupo abeliano libre $G/[G, G]$ tiene rango n . ■

Las propiedades de los grupos libres son, en muchos casos, similares a las de los grupos abelianos libres. Por ejemplo, si H es un subgrupo de un grupo abeliano libre

G , entonces H es también un grupo abeliano libre. La demostración en el caso en que G tiene rango finito se indica en el Ejercicio 6 de §67; la demostración en el caso general es similar. El resultado análogo se satisface para grupos libres, pero la demostración es considerablemente más difícil. Proporcionaremos una demostración en el Capítulo 14 basada en la teoría de los espacios recubridores.

Por otra parte, los grupos libres son muy diferentes de los grupos abelianos libres. Dado un grupo abeliano libre de rango n , el rango de cualquier subgrupo es a lo sumo n ; pero el resultado análogo para grupos libres no se satisface. Si G es un grupo libre con un sistema de n generadores libres, entonces el cardinal de un sistema de generadores libres para un subgrupo de G puede ser mayor que n ; incluso puede ser infinito. Analizaremos esta situación más adelante.

Generadores y relaciones

Un problema básico en la teoría de grupos es determinar si dos grupos dados son isomorfos o no. El problema está resuelto para grupos abelianos; dos grupos abelianos son isomorfos si, y sólo si, tienen bases con el mismo cardinal. De modo similar, dos grupos libres son isomorfos si, y sólo si, sus sistemas de generadores libres tienen el mismo cardinal. Hemos probado estos resultados en el caso de cardinal finito.

Para grupos arbitrarios, sin embargo, la respuesta no es tan simple. Únicamente en el caso de un grupo abeliano finitamente generado la respuesta está clara.

Si G es abeliano y finitamente generado, entonces existe un teorema fundamental que garantiza la descomposición $G = H \oplus T$, donde H es libre abeliano de rango finito y T es el subgrupo de G formado por todos los elementos de orden finito. Decimos que T es el **subgrupo de torsión** de G . El rango de H está únicamente determinado por G , ya que coincide con el rango del cociente de G por su subgrupo de torsión. Este número es a menudo denominado **número de Betti** de G . Además, el subgrupo T es también una suma directa; es la suma directa de un número finito de grupos cíclicos finitos cuyos órdenes son potencias de números primos. Los órdenes de estos grupos están únicamente determinados por T (y, por tanto, por G), y se denominan **divisores elementales** de G . Así la clase de isomorfía de G está completamente determinada al especificar el número de betti y los divisores elementales.

Si G no es abeliano, los problemas que surgen están lejos de estar completamente resueltos, incluso si G es finitamente generado. ¿Qué propiedades estarán determinadas por G ? Lo máximo que podemos hacer es lo siguiente.

Dado G , supongamos que tenemos una familia $\{a_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de generadores de G . Sea F el grupo libre sobre los elementos $\{a_\alpha\}$. Entonces la aplicación $h(a_\alpha) = a_\alpha$ de estos elementos en G se extiende a un homomorfismo $h : F \rightarrow G$ que es sobreíectivo. Si N es igual al núcleo de h , entonces $F/N \cong G$. De modo que un método de especificar G consiste en proporcionar una familia $\{a_\alpha\}$ de generadores de G y una

manera de especificar N . Cada elemento de N se dice que es una *relación* sobre F , y N se denomina *subgrupo de relaciones*. Podemos especificar N proporcionando un conjunto de generadores para N . Pero como N es normal en F , también podemos especificar N mediante un conjunto menor. Concretamente, podemos especificar N mediante una familia $\{r_\beta\}$ de elementos de F tal que dichos elementos y sus conjugados generan N , esto es, tal que N es el menor subgrupo normal de F que contiene a los elementos r_β . En este caso, se dice que la familia $\{r_\beta\}$ es un *conjunto completo de relaciones* para G .

Cada elemento de N pertenece a F , de modo que puede representarse de forma única mediante una palabra reducida en potencias de los generadores $\{a_\alpha\}$. Cuando hablamos de una *relación* sobre los generadores de G habitualmente nos referimos a esta palabra reducida, en lugar de al elemento de N que representa. El contexto aclarará el significado.

Definición. Si G es un grupo, una *presentación* de G consiste en una familia $\{a_\alpha\}$ de generadores para G junto con un conjunto completo $\{r_\beta\}$ de relaciones para G , donde cada r_β es un elemento del grupo libre sobre el conjunto $\{a_\alpha\}$. Si la familia $\{a_\alpha\}$ es finita, entonces G está finitamente generado, desde luego. Si ambas familias $\{a_\alpha\}$ y $\{r_\beta\}$ son finitas, entonces G se dice que está *finitamente presentado* y dichas familias constituyen una *presentación finita* para G .

Este procedimiento para especificar G está lejos de ser satisfactorio. Una presentación para G determina únicamente G , salvo isomorfismos; pero dos presentaciones completamente diferentes pueden producir grupos isomorfos. Además, incluso en el caso finito no existe un medio efectivo para determinar si dos presentaciones diferentes proporcionarán grupos isomorfos o no isomorfos. Este resultado se conoce como la “irresolubilidad del problema del isomorfismo” para grupos.

A pesar de lo insatisfactorio del resultado, esto es lo máximo que podemos hacer.

Ejercicios

- Si $G = G_1 * G_2$, pruebe que

$$G/[G, G] \cong (G_1/[G_1, G_1]) \oplus (G_2/[G_2, G_2]).$$

[*Indicación:* use la condición de extensión para sumas directas y productos libres para definir los homomorfismos

$$G/[G, G] \longleftrightarrow (G_1/[G_1, G_1]) \oplus (G_2/[G_2, G_2])$$

que son el inverso uno del otro.]

- Generalice el resultado del Ejercicio 1 a productos libres arbitrarios.

3. Pruebe el siguiente resultado:

Teorema. Sea $G = G_1 * G_2$, donde G_1 y G_2 son cíclicos de órdenes m y n , respectivamente. Entonces m y n están únicamente determinados por G .

Demostración.

(a) Pruebe que $G/[G, G]$ tiene orden mn .

(b) Determine el mayor entero k tal que G tiene un elemento de orden k (véase el Ejercicio 2 de §68).

(c) Pruebe el teorema.

4. Pruebe que si $G = G_1 \oplus G_2$, donde G_1 y G_2 son cíclicos de órdenes m y n , respectivamente, entonces m y n no están únicamente determinados por G en general. [Indicación: si m y n son coprimos, pruebe que G es cíclico de orden mn .]

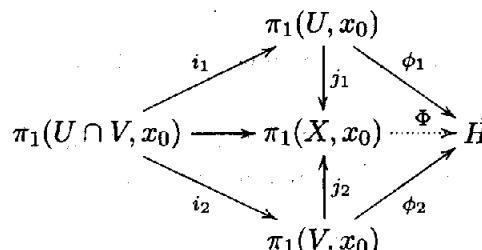
§70 El teorema de Seifert-van Kampen

Volvemos ahora al problema de determinar el grupo fundamental de un espacio X que puede escribirse como la unión de dos subconjuntos abiertos U y V que tienen intersección conexa por caminos. Hemos probado en §59 que si $x_0 \in U \cap V$, las imágenes de los grupos $\pi_1(U, x_0)$ y $\pi_1(V, x_0)$ en $\pi_1(X, x_0)$, bajo los homomorfismos inducidos por la inclusión, generan el último grupo. En esta sección probaremos que $\pi_1(X, x_0)$ está, de hecho, completamente determinado por estos dos subgrupos, el grupo $\pi_1(U \cap V, x_0)$ y los homomorfismos entre estos subgrupos inducidos por la inclusión. Éste es un resultado básico acerca de grupos fundamentales. Nos permitirá calcular los grupos fundamentales de numerosos espacios, incluyendo las variedades compactas de dimensión dos.

Teorema 70.1 (Teorema de Seifert-van Kampen). Sea $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos en X ; supongamos que U , V y $U \cap V$ son conexos por caminos; sea $x_0 \in U \cap V$. Sea H un grupo y sean

$$\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow H \quad \text{y} \quad \phi_2 : \pi_1(V, x_0) \longrightarrow H$$

homomorfismos. Sean i_1, i_2, j_1, j_2 los homomorfismos indicados en el siguiente diagrama, cada uno de ellos inducido por la inclusión.



Si $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, entonces existe un único homomorfismo $\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H$ tal que $\Phi \circ j_1 = \phi_1$ y $\Phi \circ j_2 = \phi_2$.

Este teorema afirma que si ϕ_1 y ϕ_2 son homomorfismos arbitrarios que son “compatibles sobre $U \cap V$ ”, entonces inducen un homomorfismo de $\pi_1(X, x_0)$ en H .

Demuestração. La unicidad es fácil. El Teorema 59.1 afirma que $\pi_1(X, x_0)$ está generado por las imágenes de j_1 y j_2 . El valor de Φ sobre el generador $j_1(g_1)$ debe ser igual a $\phi_1(g_1)$, y su valor sobre $j_2(g_2)$ debe coincidir con $\phi_2(g_2)$. Entonces Φ está completamente determinado por ϕ_1 y ϕ_2 . La demostración de que Φ existe es un caso aparte.

Por comodidad introduciremos la siguiente notación: dado un camino f en X , escribiremos $[f]$ para denotar su clase de homotopía de caminos en X . Si f está en U , entonces $[f]_U$ denotará su clase de homotopía de caminos en U . Las notaciones $[f]_V$ y $[f]_{U \cap V}$ se definen de modo similar.

Paso 1. Comenzamos definiendo una aplicación ρ que asigna a cada lazo f basado en x_0 , contenido en U o en V , un elemento de H . Definimos

$$\begin{aligned}\rho(f) &= \phi_1([f]_U) \text{ si } f \text{ está en } U, \\ \rho(f) &= \phi_2([f]_V) \text{ si } f \text{ está en } V.\end{aligned}$$

Entonces ρ está bien definida, ya que si f está en la intersección de U y V , entonces

$$\phi_1([f]_U) = \phi_1 i_1([f]_{U \cap V}) \quad \text{y} \quad \phi_2([f]_V) = \phi_2 i_2([f]_{U \cap V}),$$

y estos dos elementos de H son iguales por hipótesis. La aplicación ρ satisface las siguientes condiciones:

- (1) Si $[f]_U = [g]_U$, o si $[f]_V = [g]_V$, entonces $\rho(f) = \rho(g)$.
- (2) Si f y g están en U , o si ambas están en V , entonces $\rho(f * g) = \rho(f) \cdot \rho(g)$.

La primera afirmación se satisface por definición, y la segunda porque tanto ϕ_1 como ϕ_2 son homomorfismos.

Paso 2. Ahora vamos a extender ρ a una aplicación σ que asigna a cada camino f contenido en U o en V , un elemento de H , tal que la aplicación σ satisface la condición (1) del Paso 1, y satisface la condición (2) cuando $f * g$ está definido.

Para comenzar elegimos, para cada x en X , un camino α_x desde x_0 hasta x como sigue: si $x = x_0$, sea α_x el camino constante en x_0 . Si $x \in U \cap V$, sea α_x un camino en $U \cap V$. Y si x está en U o en V pero no en $U \cap V$, sea α_x un camino en U o en V , respectivamente.

Entonces para cualquier camino f en U o en V , definimos un lazo $L(f)$ en U o en V , respectivamente, basado en x_0 por la ecuación

$$L(f) = \alpha_x * (f * \bar{\alpha}_y)$$

donde x es el punto inicial de f e y es el punto final de f (véase la Figura 70.1). Finalmente, definimos

$$\sigma(f) = \rho(L(f)).$$

Probemos que σ es una extensión de ρ . Si f es un lazo basado en x_0 que está en U o en V , entonces

$$L(f) = e_{x_0} * (f * e_{x_0})$$

ya que α_{x_0} es el camino constante en x_0 . Entonces $L(f)$ es homotópica por caminos a f en U o en V , de modo que $\rho(L(f)) = \rho(f)$ por la condición (1) para ρ . Por tanto, $\sigma(f) = \rho(f)$.

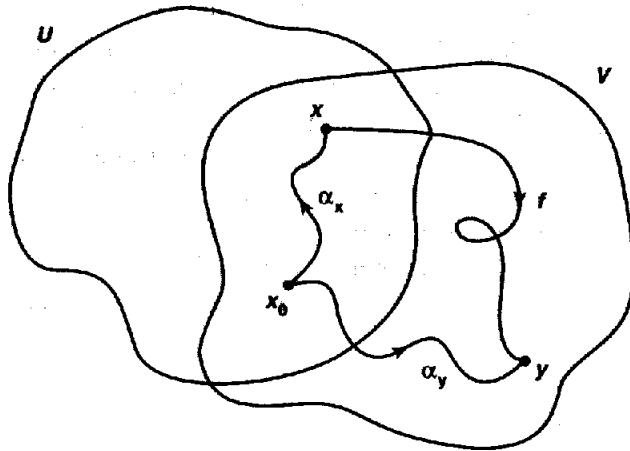


Figura 70.1

Para comprobar la condición (1), sean f y g caminos homotópicos en U o en V . Entonces los lazos $L(f)$ y $L(g)$ son también homotópicos por caminos en U o en V , de modo que la condición (1) para ρ se aplica. Para comprobar (2), sean f y g caminos arbitrarios en U o en V tales que $f(1) = g(0)$. Tenemos

$$L(f) * L(g) = (\alpha_x * (f * \bar{\alpha}_y)) * (\alpha_y * (g * \bar{\alpha}_z))$$

para puntos adecuados x, y, z ; este lazo es homotópico por caminos en U o en V a $L(f * g)$, por lo que

$$\rho(L(f * g)) = \rho(L(f) * L(g)) = \rho(L(f)) \cdot \rho(L(g))$$

por las condiciones (1) y (2) para ρ . Por tanto, $\sigma(f * g) = \sigma(f) \cdot \sigma(g)$.

Paso 3. Finalmente, extendemos la aplicación σ a una aplicación τ que lleva un camino arbitrario f a un elemento de H . Dicha aplicación satisfará las siguientes condiciones:

- (1) Si $[f] = [g]$ entonces $\tau(f) = \tau(g)$.

(2) $\tau(f * g) = \tau(f) \cdot \tau(g)$, si $f * g$ está definido.

Dado f , escogemos una partición $s_0 < \dots < s_n$ de $[0, 1]$ tal que f aplica cada uno de los subintervalos $[s_{i-1}, s_i]$ en U o en V . Denotemos por f_i la aplicación lineal positiva del intervalo $[0, 1]$ en el intervalo $[s_{i-1}, s_i]$ compuesta con f . Entonces f_i es un camino en U o en V , y

$$[f] = [f_1] * \dots * [f_n].$$

Si τ debe ser una extensión de σ satisfaciendo (1) y (2), debe verificarse

$$(*) \quad \tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdots \sigma(f_n).$$

De modo que utilizaremos esta ecuación como definición de τ .

Probaremos que esta definición es independiente de la elección del subintervalo. Será suficiente con probar que el valor de $\tau(f)$ permanece invariable si añadimos un único punto p a la partición. Sea i el índice tal que $s_{i-1} < p < s_i$. Si calculamos $\tau(f)$ utilizando esta nueva partición, el único cambio en la fórmula (*) es que el factor $\sigma(f_i)$ desaparece y es reemplazado por el producto $\sigma(f'_i) \cdot \sigma(f''_i)$, donde f'_i y f''_i son las aplicaciones lineales positivas de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, p]$ y $[p, s_i]$, respectivamente, compuestas con f . Pero f_i es homotópica por caminos a $f'_i * f''_i$ en U o en V , de modo que $\sigma(f_i) = \sigma(f'_i) \cdot \sigma(f''_i)$, por las condiciones (1) y (2) para σ . Por tanto, τ está bien definida.

Se deduce que τ es una extensión de σ . En efecto, si f está en U o en V , podemos utilizar la partición trivial de $[0, 1]$ para definir $\tau(f)$; entonces $\tau(f) = \sigma(f)$ por definición.

Paso 4. Probemos la condición (1) para la aplicación τ . Esta parte de la demostración requiere tomar precauciones.

En primer lugar verificaremos esta condición en un caso especial. Sean f y g caminos en X desde x hasta y , y sea F una homotopía de caminos entre ellos. Supongamos la hipótesis adicional que existe una partición $s_0 < \dots < s_n$ de $[0, 1]$ tal que F aplica cada rectángulo $R_i = [s_{i-1}, s_i] \times I$ dentro de U o de V . Probaremos en este caso que $\tau(f) = \tau(g)$.

Dado i , consideremos la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, s_i]$ compuesta con f o con g y denominemos a estos dos caminos f_i y g_i , respectivamente. La restricción de F a cada rectángulo R_i nos proporciona una homotopía entre f_i y g_i que toma valores en U o en V pero que no es una homotopía de caminos, ya que los extremos de los caminos pueden cambiar durante la homotopía. Consideremos los caminos trazados por los extremos durante la homotopía. Definimos β_i como el camino $\beta_i(t) = F(s_i, t)$. Entonces β_i es un camino en X desde $f(s_i)$ hasta $g(s_i)$. Los caminos β_0 y β_n son los caminos constantes en x e y , respectivamente (véase la Figura 70.2). Probaremos que, para cada i ,

$$f_i * \beta_i \simeq_p \beta_{i-1} * g_i$$

con la homotopía de caminos tomando valores en U o en V .

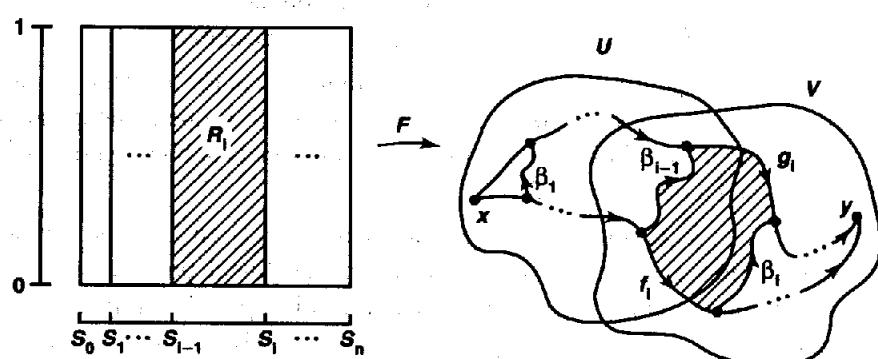


Figura 70.2

En el rectángulo R_i , consideremos el camino que recorre los lados inferior y derecho de R_i , desde $s_{i-1} \times 0$ hasta $s_i \times 0$ y hasta $s_i \times 1$; si componemos este camino con la aplicación F obtenemos el camino $f_i * \beta_i$. Análogamente, si consideramos el camino que recorre los lados izquierdo y superior de R_i y lo componemos con F obtenemos el camino $\beta_{i-1} * g_i$. Como R_i es convexo, existe una homotopía de caminos en R_i entre estos dos caminos; si componemos con F obtenemos una homotopía de caminos entre $f_i * \beta_i$ y $\beta_{i-1} * g_i$ que tiene lugar en U o en V , como deseábamos.

Se deduce de las condiciones (1) y (2) que

$$\sigma(f_i) \cdot \sigma(\beta_i) = \sigma(\beta_{i-1}) \cdot \sigma(g_i)$$

de modo que

$$(**) \quad \sigma(f_i) = \sigma(\beta_{i-1}) \cdot \sigma(g_i) \cdot \sigma(\beta_i)^{-1}.$$

De manera similar se deduce que puesto que β_0 y β_n son caminos constantes, $\sigma(\beta_0) = \sigma(\beta_n) = 1$. De la igualdad $\beta_0 * \beta_0 = \beta_0$ se deduce $\sigma(\beta_0) \cdot \sigma(\beta_0) = \sigma(\beta_0)$.

Ahora calculamos τ del siguiente modo:

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdots \sigma(f_n).$$

Sustituyendo (**) en esta ecuación y simplificando, obtenemos la ecuación

$$\tau(f) = \sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2) \cdots \sigma(g_n) = \tau(g).$$

Por tanto hemos probado la condición (1) en un caso especial.

Ahora probaremos la condición (1) en el caso general. Dados f y g y una homotopía de caminos F entre ellos, consideraremos subdivisiones s_0, \dots, s_n y t_0, \dots, t_m de $[0, 1]$ tales que F aplica cada rectángulo $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ en U o en V . Sea f_j

el camino $f_j(s) = F(s, t_j)$; entonces $f_0 = f$ y $f_m = g$. La pareja de caminos f_{j-1} y f_j satisfacen las condiciones de nuestro caso especial, de modo que $\tau(f_{j-1}) = \tau(f_j)$ para todo j . Se deduce entonces que $\tau(f) = \tau(g)$, como deseábamos.

Paso 5. Ahora probaremos la condición (2) para la aplicación τ . Dado un camino $f * g$ en X , escojamos una subdivisión $s_0 < \dots < s_n$ de $[0, 1]$ que contenga al punto $1/2$ como un punto de la subdivisión, tal que $f * g$ aplica cada subintervalo en U o en V . Sea k el índice tal que $s_k = 1/2$.

Para $i = 1, \dots, k$, la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, s_i]$ compuesta con la aplicación $f * g$ coincide con la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[2s_{i-1}, 2s_i]$ compuesta con f ; denotemos esta aplicación por f_i . De manera análoga, para cada $i = k+1, \dots, n$, la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, s_i]$, compuesta también con $f * g$ coincide con la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[2s_{i-1} - 1, 2s_i - 1]$ compuesta con g ; denotemos esta aplicación por g_{i-k} . Usando la subdivisión s_0, \dots, s_n para el dominio del camino $f * g$ obtenemos

$$\tau(f * g) = \sigma(f_1) \cdots \sigma(f_k) \cdot \sigma(g_1) \cdots \sigma(g_{n-k}).$$

Usando la subdivisión $2s_0, \dots, 2s_k$ para el camino f tenemos

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdots \sigma(f_k).$$

Y utilizando la subdivisión $2s_k - 1, \dots, 2s_n - 1$ para el camino g tenemos

$$\tau(g) = \sigma(g_1) \cdots \sigma(g_{n-k}).$$

Por tanto, la condición (2) se satisface trivialmente.

Paso 6. El teorema se obtiene ahora aplicando los pasos anteriores. Para cada lazo f en X basado en x_0 , definimos

$$\Phi([f]) = \tau(f).$$

Las condiciones (1) y (2) prueban que Φ es un homomorfismo bien definido.

Probemos que $\Phi \circ j_1 = \phi_1$. Si f es un lazo en U , entonces

$$\begin{aligned}\Phi(j_1([f]_U)) &= \Phi([f]) \\ &= \tau(f) \\ &= \rho(f) = \phi_1([f]_U)\end{aligned}$$

como deseábamos. De forma similar se demuestra $\Phi \circ j_2 = \phi_2$. ■

El teorema precedente es la formulación moderna del teorema de Seifert-van Kampen. Ahora retrocedemos a la versión clásica, que involucra el producto libre de dos grupos. Recordemos que si G es el producto libre $G = G_1 * G_2$, a menudo tratamos a G_1 y G_2 como subgrupos de G , para simplificar la notación.

Teorema 70.2 (Versión clásica del teorema de Seifert-van Kampen). Supongamos las hipótesis del teorema precedente. Sea

$$j : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

el homomorfismo del producto libre que extiende los homomorfismos j_1 y j_2 inducidos por la inclusión. Entonces j es sobreíectivo y su núcleo es el menor subgrupo normal N del producto libre que contiene todos los elementos representados por palabras de la forma

$$(i_1(g)^{-1}, i_2(g))$$

para $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$.

En otras palabras, el núcleo de j está generado por todos los elementos del producto libre de la forma $i_1(g)^{-1}i_2(g)$ y sus conjugados.

Demuestração. Como $\pi_1(X, x_0)$ está generado por las imágenes de j_1 y j_2 entonces j es sobreíectiva.

Probaremos que $N \subset \ker j$. Como $\ker j$ es normal, entonces es suficiente probar que $i_1(g)^{-1}i_2(g)$ pertenece a $\ker j$ para todo $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$. Si $i : U \cap V \rightarrow X$ es la aplicación inclusión, entonces

$$ji_1(g) = j_1i_1(g) = i_*(g) = j_2i_2(g) = ji_2(g).$$

Entonces $i_1(g)^{-1}i_2(g)$ pertenece al núcleo de j .

Se deducirá entonces que j induce un epimorfismo

$$k : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Probaremos que $N = \ker j$ demostrando que k es inyectivo. Para ello será suficiente con probar que k posee una inversa por la izquierda.

Sea H el grupo $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$. Definamos $\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \rightarrow H$ igual a la inclusión de $\pi_1(U, x_0)$ en el producto libre compuesta con la proyección del producto libre en su cociente con N . Sea $\phi_2 : \pi_1(V, x_0) \rightarrow H$ la aplicación definida de modo análogo. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(U, x_0) & & \\ & \nearrow i_1 & \downarrow j_1 & \searrow \phi_1 & \\ \pi_1(U \cap V, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X, x_0) & \xleftarrow{k} & H \\ & \searrow i_2 & \uparrow j_2 & \swarrow \phi_2 & \\ & & \pi_1(V, x_0) & & \end{array}$$

Es fácil ver que $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$. Si $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$, entonces $\phi_1(i_1(g))$ es la clase $i_1(g)N$ en H , y $\phi_2(i_2(g))$ es la clase $i_2(g)N$. Como $i_1(g)^{-1}i_2(g) \in N$, las clases son iguales.

Se deduce del Teorema 70.1 que existe un homomorfismo $\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H$ tal que $\Phi \circ j_1 = \phi_1$ y $\Phi \circ j_2 = \phi_2$. Probaremos que Φ es un inverso por la izquierda de k . Será suficiente con demostrar que $\Phi \circ k$ actúa como el elemento neutro sobre cualquier generador de H , esto es, sobre cualquier clase de la forma gN , donde $g \in \pi_1(U, x_0) \circ \pi_1(V, x_0)$. Pero si $g \in \pi_1(U, x_0)$, tenemos

$$k(gN) = j(g) = j_1(g)$$

de modo que

$$\Phi(k(gN)) = \Phi(j_1(g)) = \phi_1(g) = gN$$

como deseábamos. Un razonamiento similar se aplica si $g \in \pi_1(V, x_0)$. ■

Corolario 70.3. Supongamos las hipótesis del teorema de Seifert-van Kampen. Si $U \cap V$ es simplemente conexo, existe un isomorfismo

$$k : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Corolario 70.4. Supongamos las hipótesis del teorema de Seifert-van Kampen. Si V es simplemente conexo, existe un isomorfismo

$$k : \pi_1(U, x_0)/N \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

donde N es el menor subgrupo normal de $\pi_1(U, x_0)$ que contiene la imagen del homomorfismo

$$i_1 : \pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0).$$

EJEMPLO 1. Sea X un espacio theta. Entonces X es un espacio de Hausdorff igual a la unión de tres arcos A , B y C , cuya intersección dos a dos coincide con sus extremos p y q . Hemos probado con anterioridad que el grupo fundamental de X no es abeliano. Probaremos aquí que este grupo es de hecho un grupo libre sobre dos generadores.

Sea a un punto interior de A y b un punto interior de B . Escribamos X como la unión de los conjuntos abiertos $U = X - a$ y $V = X - b$ (véase la Figura 70.3). El espacio $U \cap V = X - a - b$ es simplemente conexo ya que es contractible. Además, los grupos fundamentales de U y V son cíclicos infinitos, ya que el tipo de homotopía de U coincide con el de $B \cup C$ y el de V es igual al de $A \cup C$. Por tanto, el grupo fundamental de X es el producto libre de dos grupos cíclicos infinitos, esto es, es el grupo libre sobre dos generadores.

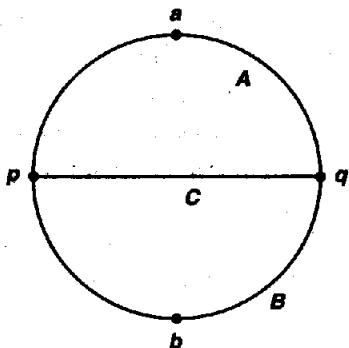


Figura 70.3

Ejercicios

En los siguientes ejercicios supondremos las hipótesis del teorema de Seifert-van Kampen.

1. Supongamos que el homomorfismo i_* inducido por la inclusión $i : U \cap V \rightarrow X$ es trivial.

- (a) Demuestre que j_1 y j_2 inducen un epimorfismo

$$h : (\pi_1(U, x_0)/N_1) * (\pi_1(V, x_0)/N_2) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

donde N_1 es el menor subgrupo normal de $\pi_1(U, x_0)$ que contiene a la imagen de i_1 , y N_2 es el menor subgrupo normal de $\pi_1(V, x_0)$ que contiene a la imagen de i_2 .

- (b) Demuestre que h es un isomorfismo. [Indicación: utilice el Teorema 70.1 para definir un inverso por la izquierda de h .]

2. Suponga que i_2 es sobreyectiva.

- (a) Demuestre que j_1 induce un epimorfismo

$$h : \pi_1(U, x_0)/M \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

donde M es el menor subgrupo normal de $\pi_1(U, x_0)$ que contiene $i_1(\ker i_2)$. [Indicación: demuestre que j_1 es sobreyectiva.]

- (b) Pruebe que h es un isomorfismo. [Indicación: sea $H = \pi_1(U, x_0)/M$ y consideremos la proyección $\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \rightarrow H$. Utilice el hecho que $\pi_1(U \cap V, x_0)/\ker i_2$ es isomorfo a $\pi_1(V, x_0)$ para definir un homomorfismo $\phi_2 : \pi_1(V, x_0) \rightarrow H$. Aplique el Teorema 70.1 para definir un inverso por la izquierda para h .]

3. (a) Demuestre que si G_1 y G_2 tienen presentaciones finitas, entonces $G_1 * G_2$ también tiene una presentación finita.
- (b) Demuestre que si $\pi_1(U \cap V, x_0)$ está finitamente generado y $\pi_1(U, x_0)$ y $\pi_1(V, x_0)$ tienen presentaciones finitas, entonces $\pi_1(X, x_0)$ tiene una presentación finita. [Indicación: si N' es un subgrupo normal de $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ que contiene los elementos $i_1(g_i)^{-1}i_2(g_i)$, donde g_i recorre un conjunto de generadores de $\pi_1(U \cap V, x_0)$, entonces N' contiene los elementos $i_1(g)^{-1}i_2(g)$ para cualquier g .]

§71 El grupo fundamental de una unión por un punto de círculos

En esta sección definiremos lo que entendemos por una *unión por un punto de círculos*, y calcularemos su grupo fundamental.

Definición. Sea X un espacio de Hausdorff que es la unión de subespacios S_1, \dots, S_n , cada uno de ellos homeomorfo al círculo unidad S^1 . Supongamos que existe un punto p en X tal que $S_i \cap S_j = \{p\}$ siempre que $i \neq j$. Entonces X se dice que es la *unión por un punto de los círculos* S_1, \dots, S_n .

Observe que cada espacio S_i , al ser compacto, es cerrado en X . Observe también que X puede embeberse en el plano; si C_i denota el círculo de radio i en el plano \mathbb{R}^2 centrado en el punto $(i, 0)$, entonces X es homeomorfo a $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$.

Teorema 71.1. *Sea X la unión por un punto de los círculos S_1, \dots, S_n ; sea p el punto común a los círculos. Entonces $\pi_1(X, p)$ es un grupo libre. Si f_i es un lazo en S_i que representa un generador de $\pi_1(S_i, p)$, entonces los lazos f_1, \dots, f_n representan un sistema de generadores libres para $\pi_1(X, p)$.*

Demostración. El resultado es inmediato si $n = 1$. Procederemos por inducción en n . La demostración es similar a la proporcionada en el Ejemplo 1 de la sección anterior.

Sea X la unión por un punto de los círculos S_1, \dots, S_n , con p el punto común de estos círculos. Escojamos un punto q_i de S_i diferente de p , para cada i . Hagamos $W_i = S_i - q_i$ y pongamos

$$U = S_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n \quad \text{y} \quad V = W_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n.$$

Entonces $U \cap V = W_1 \cup \dots \cup W_n$ (véase la Figura 71.1). Cada uno de los espacios U , V y $U \cap V$ es conexo por caminos, al ser la unión de espacios conexos por caminos con un punto en común.

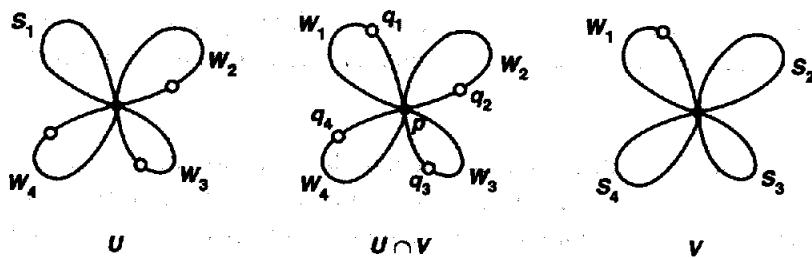


Figura 71.1

El espacio W_i es homeomorfo a un intervalo abierto, por lo que tiene al punto p como retracto de deformación; sea $F_i : W_i \times I \rightarrow W_i$ el retracto de deformación. Las aplicaciones F_i determinan una aplicación $F : (U \cap V) \times I \rightarrow U \cap V$ que es un retracto de deformación de $U \cap V$ en p . Para probar que F es continua, observemos que como S_i es un subespacio cerrado de X , el espacio $W_i = S_i - q_i$ es un subespacio cerrado de $U \cap V$, de modo que $W_i \times I$ es un subespacio cerrado de $(U \cap V) \times I$. Entonces podemos aplicar el lema del pegamiento. Se deduce que $U \cap V$ es simplemente conexo, de modo que $\pi_1(X, p)$ es el producto libre de los grupos $\pi_1(U, p)$ y $\pi_1(V, p)$, relativo a los monomorfismos inducidos por la inclusión.

Un razonamiento similar demuestra que S_1 es un retracto de deformación de U y $S_2 \cup \dots \cup S_n$ es un retracto de deformación de V . Se sigue que $\pi_1(U, p)$ es cíclico infinito, y el lazo f_1 representa un generador. Se deduce también, utilizando la hipótesis de inducción, que $\pi_1(V, p)$ es un grupo libre, siendo f_2, \dots, f_n un sistema de generadores libres. Ahora sólo nos resta aplicar el Teorema 69.2. ■

Generalizaremos este resultado a un espacio X que es la unión de *infinitos* círculos que tienen un punto en común. En este caso debemos ser muy cuidadosos con la topología.

Definición. Sea X un espacio que es la unión de los subespacios X_α , con $\alpha \in J$. La topología de X se dice que es *coherente* con los subespacios X_α siempre que un subconjunto C de X es cerrado en X sólo si $C \cap X_\alpha$ es cerrado en X_α para todo α . Una condición equivalente es que un conjunto es abierto en X sólo si su intersección con cada X_α es abierta en X_α .

Si X es la unión de una cantidad finita de subespacios cerrados X_1, \dots, X_n , entonces la topología de X es automáticamente coherente con estos subespacios, ya que si $C \cap X_i$ es cerrado en X_i entonces es cerrado en X , y C es la unión finita de estos subconjuntos $C \cap X_i$.

Definición. Sea X un espacio que es la unión de los subespacios S_α , con $\alpha \in J$, cada uno de ellos homeomorfo al círculo unidad. Supongamos que existe un punto p

de X tal que $S_\alpha \cap S_\beta = \{p\}$ siempre que $\alpha \neq \beta$. Si la topología de X es coherente con los subespacios S_α , entonces X se dice que es la **unión por un punto de los círculos** S_α .

En el caso finito, la definición involucraba la condición de Hausdorff en lugar de la condición de coherencia; en ese caso, la condición de coherencia se obtenía igualmente. En el caso infinito, esto no siempre es así, por lo que se incluye como parte de la definición. También queremos incluir la condición de Hausdorff, pero esto no es necesario ya que se deduce de la condición de coherencia.

Lema 71.2. *Sea X la unión por un punto de los círculos S_α , para $\alpha \in J$. Entonces X es normal. Además, cualquier subespacio compacto de X está contenido en una unión finita de círculos S_α .*

Demostración. Está claro que los conjuntos unipuntuales son cerrados en X . Sean A y B conjuntos cerrados y disjuntos en X ; supongamos que B no contiene a p . Escojamos subconjuntos disjuntos U_α y V_α de S_α que sean abiertos en S_α y contengan a $\{p\} \cup (A \cap S_\alpha)$ y $B \cap S_\alpha$, respectivamente. Sea $U = \bigcup U_\alpha$ y $V = \bigcup V_\alpha$; entonces U y V son disjuntos. Ahora $U \cap S_\alpha = U_\alpha$ ya que todos los subconjuntos U_α contienen a p , y $V \cap S_\alpha = V_\alpha$ ya que V_α no contiene a p . Por tanto U y V son abiertos en X , como deseábamos. Entonces X es normal.

Consideremos ahora C un subespacio compacto de X . Para cada α que sea posible, escojamos un punto x_α en $C \cap (S_\alpha - p)$. El conjunto $D = \{x_\alpha\}$ es cerrado en X , ya que su intersección con cada S_α es un conjunto unipuntual o es vacío. Por la misma razón, cada subconjunto de D es cerrado en X . Por tanto, D es un subespacio discreto cerrado en X y contenido en C ; como C es compacto por punto límite, D debe ser finito. ■

Teorema 71.3. *Sea X la unión por un punto de los círculos S_α , con $\alpha \in J$, y sea p el punto común a todos ellos. Entonces $\pi_1(X, p)$ es un grupo libre. Si f_α es un lazo en S_α que representa un generador de $\pi_1(S_\alpha, p)$, entonces los lazos $\{f_\alpha\}$ representan un sistema de generadores libres para $\pi_1(X, p)$.*

Demostración. Sea $i_\alpha : \pi_1(S_\alpha, p) \rightarrow \pi_1(X, p)$ el homomorfismo inducido por la inclusión, y denotemos por G_α a su imagen.

Observemos que si f es un lazo en X basado en p , entonces la imagen de f es compacta, de modo que f estará contenido en alguna unión finita de subespacios S_α . Además, si f y g son dos lazos que son homotópicos por caminos en X , entonces serán de hecho homotópicos por caminos en alguna unión finita de subespacios S_α .

Se deduce entonces que los grupos $\{G_\alpha\}$ generan $\pi_1(X, p)$. En efecto, si f es un lazo en X , entonces f está en $S_{\alpha_1} \cup \dots \cup S_{\alpha_n}$ para algún conjunto finito de índices;

entonces el Teorema 71.1 implica que $[f]$ es un producto de elementos de los grupos $G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}$. De modo análogo, se deduce que i_β es un monomorfismo. En efecto, si f es un lazo en S_β que es homotópico por caminos en X a una constante, entonces f es homotópico por caminos a una constante en alguna unión finita de espacios S_α , de modo que el Teorema 71.1 implica que f es homotópica por caminos a una constante en S_β .

Finalmente, supongamos que existe una palabra reducida no vacía

$$w = (g_{\alpha_1}, \dots, g_{\alpha_n})$$

en los elementos de los grupos G_α que representa el elemento neutro de $\pi_1(X, p)$. Sea f un lazo en X cuya clase de homotopía de caminos está representada por w . Entonces f es homotópica por caminos a una constante en X , de modo que es homotópica por caminos a una constante en alguna unión finita de subespacios S_α . Esto contradice el Teorema 71.1. ■

El teorema anterior depende del hecho de que la topología de X sea coherente con los subespacios S_α . Consideremos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1. Sea C_n el círculo de radio $1/n$ en \mathbb{R}^2 con centro el punto $(1/n, 0)$. Sea X el subespacio de \mathbb{R}^2 formado por la unión de todos estos círculos; entonces X es una unión infinita numerable de círculos, cada dos de ellos teniendo el origen como punto común p . Sin embargo, X no es la unión por un punto de los círculos C_n ; por conveniencia, X se denomina *pendiente infinito*.

Puede comprobarse directamente que X no tiene la topología coherente con los subespacios C_n ; la intersección del eje positivo de abcisas con X contiene exactamente un punto en cada círculo C_n , pero no es cerrado en X . Alternativamente, para cada n , sea f_n el lazo en C_n que representa un generador de $\pi_1(C_n, p)$; probaremos que $\pi_1(X, p)$ no es un grupo libre con $\{[f_n]\}$ como sistema de generadores libres. De hecho, probaremos que los elementos $[f_i]$ ni siquiera generan el grupo $\pi_1(X, p)$.

Consideremos el lazo g en X definido como sigue: para cada n , definimos g sobre el intervalo $[1/(n+1), 1/n]$ como la aplicación lineal positiva de este intervalo en $[0, 1]$ compuesta con f_n . Esto permite definir g en el intervalo $(0, 1]$. Definimos $g(0) = p$. Como X tiene la topología del subespacio derivada de \mathbb{R}^2 , es fácil probar que g es continua (véase la Figura 71.2). Probaremos que dado n , el elemento $[g]$ no pertenece al subgrupo G_n de $\pi_1(X, p)$ generado por $[f_1], \dots, [f_n]$.

Escojamos $N > n$, y consideremos la aplicación $h : X \rightarrow C_N$ definida por $h(x) = x$ para $x \in C_N$ y $h(x) = p$ en otro caso. Entonces h es continua y el homomorfismo inducido $h_* : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(C_N, p)$ aplica cada elemento de G_n en el elemento neutro. Por otra parte, $h \circ g$ es el lazo en C_N que es constante fuera de $[1/(N+1), 1/N]$ y sobre este intervalo coincide con la aplicación lineal positiva de este intervalo en $[0, 1]$ compuesta con f_N . Por tanto, $h_*([g]) = [f_N]$, que genera $\pi_1(C_N, p)$, por lo que $[g] \notin G_n$.

En el teorema precedente hemos calculado el grupo fundamental de un espacio que es una unión por un punto infinita de círculos. Para uso posterior, probaremos ahora que tales espacios existen (utilizaremos este hecho en el Capítulo 14).

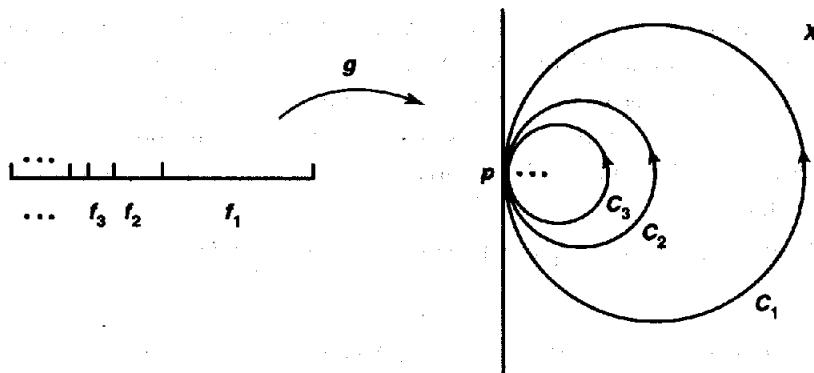


Figura 71.2

***Lema 71.4.** Dado cualquier conjunto de índices J , existe un espacio X que es la unión por un punto de los círculos S_α , con $\alpha \in J$.

Demarcación. Dotemos al conjunto J de la topología discreta y sea E el espacio producto $S^1 \times J$. Escojamos un punto $b_0 \in S^1$ y sea X el espacio cociente obtenido a partir de E identificando el conjunto cerrado $P = b_0 \times J$ con un punto p . Sea $\pi : E \rightarrow X$ la aplicación cociente y pongamos $S_\alpha = \pi(S^1 \times \alpha)$. Probaremos que cada S_α es homeomorfo a S^1 y X es la unión por un punto de los círculos S_α .

Observemos que si C es cerrado en $S^1 \times \alpha$, entonces $\pi(C)$ es cerrado en X , ya que $\pi^{-1}\pi(C) = C$ si el punto $b_0 \times \alpha$ no está en C y $\pi^{-1}\pi(C) = C \cup P$ en otro caso. En cualquier caso, $\pi^{-1}\pi(C)$ es cerrado en $S^1 \times J$, de modo que $\pi(C)$ es cerrado en X .

Se deduce que S_α es cerrado en X , ya que $S^1 \times \alpha$ es cerrado en $S^1 \times J$ y π aplica $S^1 \times \alpha$ homeomórficamente en S_α . Sea π_α este homeomorfismo.

Para probar que X tiene la topología coherente con los subespacios S_α , consideremos $D \subset X$ y supongamos que $D \cap S_\alpha$ es cerrado en S_α para cada α . Por otro lado,

$$\pi^{-1}(D) \cap (S^1 \times \alpha) = \pi_\alpha^{-1}(D \cap S_\alpha)$$

donde el último conjunto es cerrado en $S^1 \times \alpha$ porque π_α es continua. Entonces $\pi^{-1}(D)$ es cerrado en $S^1 \times J$, de modo que D es cerrado en X por definición de la topología cociente. ■

Ejercicios

1. Sea X un espacio que es la unión de subespacios S_1, \dots, S_n , cada uno de los cuales es homeomorfo a un círculo. Supongamos que existe un punto p en X tal que $S_i \cap S_j = \{p\}$ para $i \neq j$.
 - (a) Demuestre que X es de Hausdorff si, y sólo si, cada espacio S_i es cerrado en X .
 - (b) Demuestre que X es de Hausdorff si, y sólo si, la topología de X es coherente con los subespacios S_i .
 - (c) Proporcione un ejemplo que demuestre que X no tiene por qué ser de Hausdorff. [Indicación: véase el Ejercicio 5 de §36.]
2. Supongamos que X es un espacio que es la unión de los subespacios cerrados X_1, \dots, X_n y que existe un punto p de X tal que $X_i \cap X_j = \{p\}$ para $i \neq j$. Entonces diremos que X es la unión por un punto de los espacios X_1, \dots, X_n , y escribiremos $X = X_1 \vee \dots \vee X_n$. Demuéstre que si para cada i , el punto p es un retracto de deformación de un conjunto abierto W_i de X_i , entonces $\pi_1(X, p)$ es el producto libre externo de los grupos $\pi_1(X_i, p)$ relativos a los monomorfismos inducidos por la inclusión.
3. ¿Qué podemos decir acerca del grupo fundamental de $X \vee Y$ si X es homeomorfo a S^1 e Y es homeomorfo a S^2 ?
4. Demuestre que si X es una unión por un punto infinita de círculos, entonces X no satisface el primer axioma de numerabilidad.
5. Sea S_n el círculo de radio n en \mathbb{R}^2 centrado en el punto $(n, 0)$. Sea Y el subespacio de \mathbb{R}^2 formado por la unión de todos estos círculos y sea p el punto común a todos ellos.
 - (a) Demuestre que Y no es homeomorfo a una unión por un punto infinita numerable de círculos, ni al espacio descrito en el Ejemplo 1.
 - (b) Demuestre, sin embargo, que $\pi_1(Y, p)$ es un grupo libre con $\{[f_n]\}$ como sistema de generadores libres, donde f_n es un lazo que representa un generador de $\pi_1(S_n, p)$.

§72 Añadiendo una 2-celda

Hemos calculado el grupo fundamental del toro $T = S^1 \times S^1$ de dos formas. En la primera hemos utilizado la aplicación recubridora estándar $p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$ y la correspondencia de los levantamientos. En la segunda hemos usado un teorema básico sobre el grupo fundamental de un espacio producto. Ahora vamos a calcular el grupo fundamental del toro de una forma distinta.

Si restringimos la aplicación recubridora $p \times p$ al cuadrado unidad, obtenemos una aplicación cociente $\pi : I^2 \rightarrow T$. Dicha aplicación lleva $\text{Fr } I^2$ en el subespacio $A = (S^1 \times b_0) \cup (b_0 \times S^1)$, que es la unión por un punto de dos círculos, y el resto de I^2 lo transforma biyectivamente en $T - A$. Por tanto, T puede pensarse como el espacio obtenido pegando los lados de I^2 en el espacio A .

El proceso de construcción de un espacio pegando los lados de una región poligonal en el plano sobre otro espacio es bastante útil. Veremos aquí cómo calcular el grupo fundamental de un espacio así construido. Las aplicaciones serán muchas e interesantes.

Teorema 72.1. *Sea X un espacio de Hausdorff y A un subespacio de X cerrado y conexo por caminos. Supongamos que existe una aplicación continua $h : B^2 \rightarrow X$ que aplica $\text{Int } B^2$ biyectivamente sobre $X - A$ y aplica $S^1 = \text{Fr } B^2$ sobre A . Sean $p \in S^1$, $a = h(p)$ y $k : (S^1, p) \rightarrow (A, a)$ la aplicación obtenida al restringir h . Entonces el homomorfismo*

$$i_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$$

inducido por la inclusión es sobreyectivo y su núcleo es el menor subgrupo normal de $\pi_1(A, a)$ que contiene la imagen de $k_ : \pi_1(S^1, p) \rightarrow \pi_1(A, a)$.*

Algunas veces diremos que el grupo fundamental de X se obtiene a partir del grupo fundamental de A “eliminando” la clase $k_*[f]$, donde $[f]$ genera $\pi_1(S^1, p)$.

Demostración. *Paso 1.* El origen 0 es el punto central de B^2 ; sea x_0 el punto $h(0)$ de X . Si U es el conjunto abierto $U = X - x_0$ de X , probaremos que A es un retracto de deformación de U (véase la Figura 72.1).

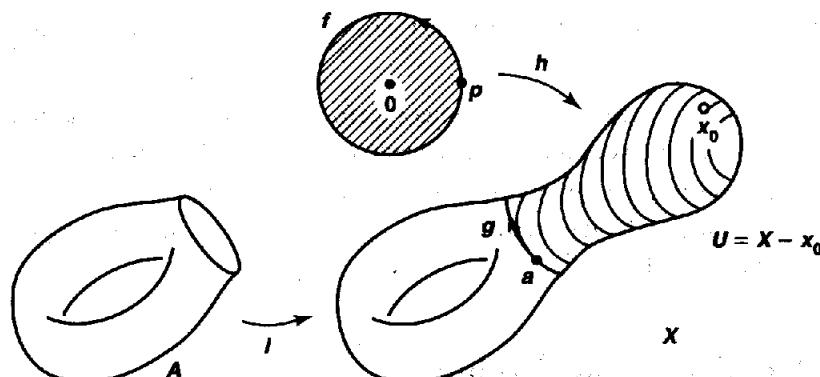


Figura 72.1

Sea $C = h(B^2)$ y sea $\pi : B^2 \rightarrow C$ la aplicación obtenida al restringir el rango de h . Consideremos la aplicación

$$\pi \times \text{id} : B^2 \times I \rightarrow C \times I$$

que es una aplicación cerrada ya que $B^2 \times I$ es compacto y $C \times I$ es de Hausdorff; por tanto, es una aplicación cociente. Su restricción

$$\pi' : (B^2 - \mathbf{0}) \times I \rightarrow (C - x_0) \times I$$

es también una aplicación cociente, ya que su dominio es un subespacio abierto en $B^2 \times I$ y está saturado con respecto a $\pi \times \text{id}$. Existe un retracto de deformación de $B^2 - \mathbf{0}$ sobre S^1 que induce, vía la aplicación cociente π' , un retracto de deformación de $C - x_0$ sobre $\pi(S^1)$. Extendemos este retracto de deformación a todo el espacio $U \times I$ haciendo que cada punto de A permanezca fijo durante la deformación. Por tanto, A es un retracto de deformación de U .

Deducimos que la inclusión de A en U induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales. Nuestro teorema entonces se reduce a la demostración de la siguiente afirmación:

Sea f un lazo cuya clase genera $\pi_1(S^1, p)$. Entonces la inclusión de U en X induce un epimorfismo

$$\pi_1(U, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$$

cuyo núcleo es el menor subgrupo normal que contiene a la clase del lazo $g = h \circ f$.

Paso 2. Para probar este resultado, es conveniente considerar primero el homomorfismo $\pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(X, b)$ inducido por la inclusión relativa a un punto base b que no pertenece a A .

Sea b cualquier punto de $U - A$. Escribamos X como la unión de los conjuntos abiertos U y $V = X - A = \pi(\text{Int } B^2)$. Entonces U es conexo por caminos ya que A es un retracto de deformación. Como π es una aplicación cociente, su restricción a $\text{Int } B^2$ es también una aplicación cociente y, por tanto, un homeomorfismo; entonces V es simplemente conexo. El conjunto $U \cap V = V - x_0$ es homeomorfo a $\text{Int } B^2 - \mathbf{0}$, de modo que es conexo por caminos y su grupo fundamental es cíclico infinito. Como b es un punto de $U \cap V$, el Corolario 70.4 implica que el homomorfismo

$$\pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(X, b)$$

inducido por la inclusión es sobreyectivo, y su núcleo es el menor subgrupo normal que contiene a la imagen del grupo cíclico infinito $\pi_1(U \cap V, b)$.

Paso 3. Ahora cambiaremos el punto base para demostrar el teorema.

Sea q el punto de B^2 igual al punto medio del segmento que une $\mathbf{0}$ con p , y sea $b = h(q)$; entonces b es un punto de $U \cap V$. Sea f_0 un lazo en $\text{Int } B^2 - \mathbf{0}$ basado en q que representa un generador del grupo fundamental de este espacio; entonces $g_0 = h \circ f_0$ es un lazo en $U \cap V$ basado en b que representa un generador del grupo fundamental de $U \cap V$ (véase la Figura 72.2).

El Paso 2 de la demostración garantiza que el homomorfismo $\pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(X, b)$ inducido por la inclusión es sobreyectivo y su núcleo es el menor subgrupo normal

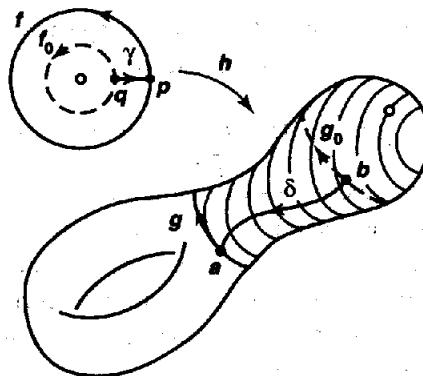


Figura 72.2

que contiene la clase del lazo $g_0 = h \circ f_0$. Para obtener el resultado análogo con punto base a procederemos como sigue.

Sea γ el segmento en B^2 que une q con p y sea δ el camino $\delta = h \circ \gamma$ en U desde b hasta a . Los isomorfismos inducidos por el camino δ (ambos serán denotados por $\hat{\delta}$) conmutan con los homomorfismos inducidos por la inclusión en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U, b) & \longrightarrow & \pi_1(X, b) \\ \downarrow \hat{\delta} & & \downarrow \hat{\delta} \\ \pi_1(U, a) & \longrightarrow & \pi_1(X, a) \end{array}$$

Por tanto, el homomorfismo de $\pi_1(U, a)$ en $\pi_1(X, a)$ inducido por la inclusión es sobreyectivo y su núcleo es el menor subgrupo normal que contiene el elemento $\hat{\delta}([g_0])$.

El lazo f_0 representa un generador del grupo fundamental de $\text{Int } B^2 - 0$ basado en q . Entonces el lazo $\bar{\gamma} * (f_0 * \gamma)$ representa un generador del grupo fundamental de $B^2 - 0$ basado en p . Por tanto, es homotópico por caminos a f o a su opuesto; supongamos lo primero. Componiendo esta homotopía de caminos con h , vemos que $\bar{\delta} * (g_0 * \delta)$ es homotópico por caminos en U a g . Entonces $\hat{\delta}([g_0]) = [g]$, y el teorema queda probado. ■

No existe nada especial en este teorema acerca de la bola unidad B^2 . El mismo resultado se satisface si reemplazamos B^2 por cualquier espacio B homeomorfo a B^2 , si denotamos por $\text{Fr } B$ el subespacio correspondiente a S^1 bajo el homeomorfismo. Tal espacio B se dice que es una **2-celda**. El espacio X del teorema puede imaginarse como obtenido a partir de A “añadiéndole una 2-celda”. Trataremos esta cuestión más formalmente con posterioridad.

Ejercicios

1. Sea X un espacio de Hausdorff y sea A un subespacio cerrado y conexo por caminos. Supongamos que $h : B^n \rightarrow X$ es una aplicación continua que aplica S^{n-1} en A y aplica $\text{Int } B^n$ biyectivamente en $X - A$. Sea a un punto de $h(S^{n-1})$. Si $n > 2$, ¿qué puede decir acerca del homomorfismo de $\pi_1(A, a)$ en $\pi_1(X, a)$ inducido por la inclusión?
2. Sea X el espacio adjunción formado por la unión disjunta del espacio normal conexo por caminos A y la bola unidad B^2 por medio de una aplicación continua $f : S^1 \rightarrow A$ (véase el Ejercicio 8 de §35). Pruebe que X satisface las hipótesis del Teorema 72.1. ¿En qué punto se utiliza el hecho que A es normal?
3. Sean G un grupo, x un elemento de G y N el menor subgrupo normal de G que contiene a x . Demuestre que si existe un espacio normal y conexo por caminos cuyo grupo fundamental es isomorfo a G , entonces existe un espacio normal y conexo por caminos cuyo grupo fundamental es isomorfo a G/N .

§73 Los grupos fundamentales del toro y del sombrero de asno

Ahora aplicaremos los resultados de la sección precedente para calcular dos grupos fundamentales, uno de los cuales ya conocemos y el otro no. Las técnicas involucradas serán importantes posteriormente.

Teorema 73.1. *El grupo fundamental del toro admite una presentación formada por dos generadores α, β y una relación simple $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$.*

*Demuestra*ción. Sea $X = S^1 \times S^1$ el toro y sea $h : I^2 \rightarrow X$ la aplicación obtenida al restringir la aplicación recubridora estándar $p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$. Sean p el punto $(0, 0)$ de $\text{Fr } B^2$, $a = h(p)$ y sea $A = h(\text{Fr } I^2)$. Entonces las hipótesis del Teorema 72.1 se satisfacen.

El espacio A es la unión por un punto de dos círculos, de modo que el grupo fundamental de A es libre. De hecho, si denotamos por a_0 el camino $a_0(t) = (t, 0)$ y por b_0 el camino $b_0(t) = (0, t)$ en $\text{Fr } I^2$, entonces los caminos $\alpha = h \circ a_0$ y $\beta = h \circ b_0$ son lazos en A tales que $[\alpha]$ y $[\beta]$ forman un sistema de generadores libres para $\pi_1(A, a)$. Véase la Figura 73.1.

Consideremos ahora a_1 y b_1 los caminos dados por $a_1(t) = (t, 1)$ y $b_1(1, t)$ en la frontera $\text{Fr } I^2$. Consideremos el lazo f en $\text{Fr } I^2$ definido por la ecuación

$$f = a_0 * (b_1 * (\bar{a}_1 * \bar{b}_0)).$$

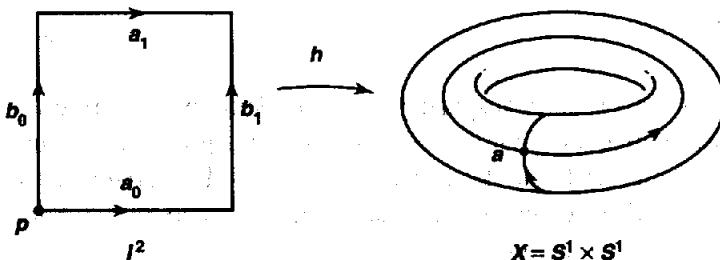


Figura 73.1

Entonces f representa un generador de $\pi_1(\text{Fr } I^2, p)$ y el lazo $g = h \circ f$ coincide con el producto $\alpha * (\beta * (\bar{\alpha} * \bar{\beta}))$. El Teorema 72.1 afirma que $\pi_1(X, a)$ es el cociente del grupo libre sobre los generadores libres $[\alpha]$ y $[\beta]$ con el menor subgrupo normal que contiene el elemento $[\alpha][\beta][\alpha]^{-1}[\beta]^{-1}$. ■

Corolario 73.2. *El grupo fundamental del toro es un grupo abeliano libre de rango 2.*

Demuestra. Sea G el grupo libre sobre los generadores α y β y sea N el menor subgrupo normal contenido en el elemento $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$. Como este elemento es un comutador, N está contenido en el subgrupo comutador $[G, G]$ de G . Por otra parte, G/N es abeliano, ya que está generado por las clases αN y βN , y estos elementos de G/N comutan. Por tanto, N contiene al subgrupo comutador de G .

Se deduce entonces del Teorema 69.4 que G/N es un grupo abeliano libre de rango 2. ■

Definición. Sea n un entero positivo con $n > 1$. Sea $r : S^1 \rightarrow S^1$ la rotación de ángulo $2\pi/n$, que aplica el punto $(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$ en el punto $(\cos(\theta + 2\pi/n), \operatorname{sen}(\theta + 2\pi/n))$. Formemos el espacio cociente X a partir de la bola unidad B^2 identificando cada punto x de S^1 con los puntos $r(x), r^2(x), \dots, r^{n-1}(x)$. Probaremos que X es un espacio de Hausdorff compacto, denominado *sombrero de asno de n picos*.

Sea $\pi : B^2 \rightarrow X$ la aplicación cociente. Probaremos que π es cerrada. Para lograr este objetivo, debemos probar que si C es un conjunto cerrado de B^2 , entonces $\pi^{-1}\pi(C)$ es también cerrado en B^2 ; se deducirá entonces por la definición de la topología cociente que $\pi(C)$ es cerrado en X . Sea $C_0 = C \cap S^1$, que es cerrado en B^2 . El conjunto $\pi^{-1}\pi(C)$ es igual a la unión de C y los conjuntos $r(C_0), r^2(C_0), \dots, r^{n-1}(C_0)$, que son todos cerrados en B^2 ya que r es un homeomorfismo. Por tanto, $\pi^{-1}\pi(C)$ es cerrado en B^2 , como deseábamos.

Como π es continua, X es compacto. Además, X es de Hausdorff como consecuencia del siguiente lema, que se propuso como un ejercicio en §31.

Lema 73.3. Sea $\pi : E \rightarrow X$ una aplicación cociente cerrada. Si E es normal entonces X también lo es.

Demostración. Supongamos que E es normal. Los conjuntos unipuntuales son cerrados en X ya que los conjuntos unipuntuales son cerrados en E . Sean A y B conjuntos cerrados disjuntos en X . Entonces $\pi^{-1}(A)$ y $\pi^{-1}(B)$ son conjuntos cerrados disjuntos en E . Escojamos dos conjuntos abiertos disjuntos U y V de E que contengan a $\pi^{-1}(A)$ y $\pi^{-1}(B)$, respectivamente. Es tentador suponer que $\pi(U)$ y $\pi(V)$ son los conjuntos abiertos alrededor de A y B que estamos buscando. Pero no es cierto. Ni siquiera tienen por qué ser conjuntos abiertos (π no es necesariamente una aplicación abierta), y tampoco tienen por qué ser disjuntos. Véase la Figura 73.2.

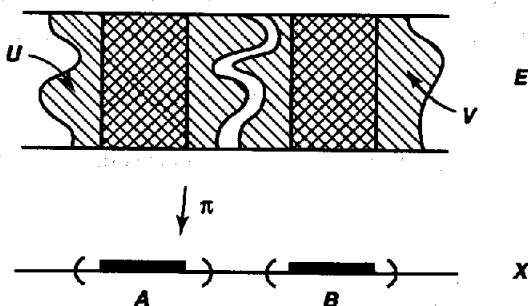


Figura 73.2

Procederemos como sigue. Sean $C = E - U$ y $D = E - V$. Como C y D son conjuntos cerrados en E , los conjuntos $\pi(C)$ y $\pi(D)$ son cerrados en X . Como C no contiene puntos de $\pi^{-1}(A)$ entonces el conjunto $\pi(C)$ es disjunto de A , de modo que $U_0 = X - \pi(C)$ es un conjunto abierto de X que contiene a A . De modo similar, $V_0 = X - \pi(D)$ es un subconjunto abierto de X contenido a B . Además, U_0 y V_0 son disjuntos. En efecto, si $x \in U_0$, entonces $\pi^{-1}(x)$ no corta a C , por lo que está contenido en U . De modo análogo, si $x \in V_0$, entonces $\pi^{-1}(x)$ está contenido en V . Como U y V son disjuntos, también lo son U_0 y V_0 . ■

Observemos que el sombrero de asno de 2 picos es un espacio que ya hemos estudiado; es homeomorfo al plano proyectivo P^2 . Para comprobar esta afirmación, recordemos que P^2 se definió como un espacio cociente a partir de S^2 identificando cada punto x con su antípoda $-x$. Sea $p : S^2 \rightarrow P^2$ la aplicación cociente. Consideremos el homeomorfismo estándar i de B^2 en el hemisferio superior de S^2 , dado por la ecuación

$$i(x, y) = (x, y, (1 - x^2 - y^2)^{1/2})$$

y lo componemos con la aplicación p . Obtenemos una aplicación $\pi : B^2 \rightarrow P^2$ que es continua, cerrada y sobreyectiva. Sobre $\text{Int } B$ es inyectiva y para cada $x \in S^1$,

aplica x y $-x$ al mismo punto. Por tanto, induce un homeomorfismo del sombrero de asno de 2 picos en P^2 .

El grupo fundamental del sombrero de asno de n picos es justamente lo que se podría esperar tras el cálculo realizado para P^2 .

Teorema 73.4. *El grupo fundamental de un sombrero de asno de n picos es un grupo cíclico de orden n .*

Demostración. Sea $h : B^2 \rightarrow X$ una aplicación cociente, donde X es un sombrero de asno de n picos. Sean $A = h(S^1)$, $p = (1, 0) \in S^1$ y $a = h(p)$. Entonces h aplica el arco C de S^1 que conecta p con $r(p)$ en el subespacio A ; h identifica los extremos de C y es inyectiva en el interior de C . Por tanto, A es homeomorfo al círculo, por lo que su grupo fundamental es cíclico infinito. De hecho, si γ es el camino

$$\gamma(t) = (\cos(2\pi t/n), \sin(2\pi t/n))$$

en S^1 que conecta p y $r(p)$, entonces $\alpha = h \circ \gamma$ representa un generador de $\pi_1(A, a)$. Véase la Figura 73.3.

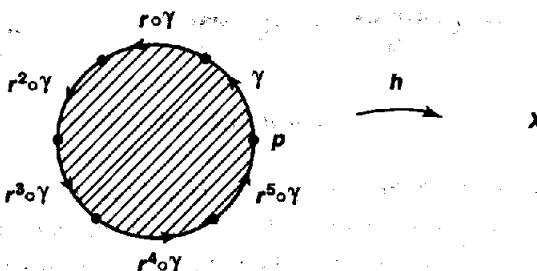


Figura 73.3

Entonces la clase del lazo

$$f = \gamma * ((r^0 \circ \gamma) * ((r^1 \circ \gamma) * \cdots * (r^{n-1} \circ \gamma)))$$

genera $\pi_1(S^1, p)$. Como $h(r^m(x)) = h(x)$ para cualesquiera x y m , el lazo $h \circ f$ coincide con el producto de n copias de α , es decir, $\alpha * (\alpha * (\cdots * \alpha))$. De aquí se deduce el teorema. ■

Ejercicios

1. Encuentre espacios cuyos grupos fundamentales sean isomorfos a los siguientes grupos (\mathbb{Z}/n denota el grupo aditivo de los enteros módulo n):

- (a) $\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/m$.
- (b) $\mathbb{Z}/n_1 \times \mathbb{Z}/n_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k$.
- (c) $\mathbb{Z}/n * \mathbb{Z}/m$ (véase el Ejercicio 2 de §71).
- (d) $\mathbb{Z}/n_1 * \mathbb{Z}/n_2 * \cdots * \mathbb{Z}/n_k$.

2. Demuestre el siguiente resultado.

Teorema. Si G es un grupo finitamente presentado entonces existe un espacio de Hausdorff compacto X cuyo grupo fundamental es isomorfo a G .

Demostración. Suponga que G tiene un presentación finita formada por n generadores y m relaciones. Sea A la unión por un punto de n círculos; forme el espacio adjunción a partir de la unión de A y m copias B_1, \dots, B_m de bolas unidad por medio de una aplicación continua $f : \bigcup \text{Fr } B_i \rightarrow A$.

- (a) Demuestre que X es de Hausdorff.
- (b) Pruebe el teorema en el caso $m = 1$.
- (c) Proceda por inducción sobre m , utilizando el lema algebraico que se enumera en el siguiente ejercicio.

La construcción indicada en este ejercicio es estándar en topología algebraica; el espacio X se denomina **CW complejo 2-dimensional**.

3. Lema. Sean $f : G \rightarrow H$ y $g : H \rightarrow K$ homomorfismos, sea f sobreyectivo. Si $x_0 \in G$ y $\ker g$ es el menor subgrupo normal de H contenido a $f(x_0)$, entonces se satisface que $\ker(g \circ f)$ es el menor subgrupo normal N de G contenido a $\ker f$ y x_0 .

Demostración. Demuestre que $f(N)$ es normal y concluya que $\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker g) \subset f^{-1}f(N) = N$.

4. Demuestre que el espacio construido en el Ejercicio 2 es de hecho metrizable.
[*Indicación:* la aplicación cociente es una aplicación perfecta.]

Capítulo 12

Clasificación de superficies

Uno de los primeros éxitos de la topología algebraica fue su contribución a resolver el problema de clasificar superficies compactas, salvo homeomorfismos. “Resolver” este problema significa dar un listado de superficies compactas no homeomorfas entre sí, de manera que cualquier otra superficie compacta sea homeomorfa a una de ellas. Éste es el problema que abordaremos en este capítulo.

§74 Grupos fundamentales de superficies

En esta sección probamos cómo construir superficies compactas y conexas y calculamos sus grupos fundamentales. Construiremos cada una de ellas como el espacio cociente obtenido de un polígono mediante el proceso de “pegar aristas”.

El procedimiento de pegado formalmente necesita ser tratado con cuidado. En primer lugar, definamos con precisión lo que entenderemos por un “polígono”. Dados un punto $c \in \mathbb{R}^2$ y un $a > 0$, se considera el círculo de radio a en \mathbb{R}^2 con centro en c . Dada una sucesión finita $\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n$ de números reales, donde $n \geq 3$ y $\theta_n = \theta_0 + 2\pi$, se toman los puntos $p_i = c + a(\cos \theta_i, \operatorname{sen} \theta_i)$, los cuales están en dicho círculo. Se numeran en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj a lo largo del círculo con $p_n = p_0$. La recta determinada por los puntos p_{i-1} y p_i divide al plano en dos semiplanos cerrados; sea H_i el que contiene a todos los puntos p_j , $j \neq i-1, i$. Entonces el espacio

$$P = H_1 \cap \dots \cap H_n$$

se llama **polígono** determinado por los puntos p_i , los cuales se denominan **vértices** de P ; el segmento $p_{i-1}p_i$ se llama **arista** de P ; la unión de las aristas de P se representa por $\operatorname{Fr} P$ y $P - \operatorname{Fr} P$ por $\operatorname{Int} P$. No es difícil probar que si p es un punto de $\operatorname{Int} P$, entonces P es la unión de todos los segmentos entre p y los puntos de $\operatorname{Fr} P$, y que dos de tales segmentos sólo se cortan en el punto p .

Dado un segmento L en \mathbb{R}^2 , una *orientación* de L es una ordenación de sus extremos; el primero, por ejemplo p , se llama *punto inicial* y el segundo, por ejemplo q , se llama *punto final* del segmento orientado. A menudo diremos que L está orientado *de p a q* (puede indicarse la orientación dibujando una flecha sobre L apuntando de p a q). Si L' es otro segmento rectilíneo, orientado de c a d , entonces la *aplicación lineal positiva* de L a L' es el homeomorfismo h que lleva el punto $x = (1-s)p + sq$ de L al punto $h(x) = (1-s)c + sd$ de L' .

Si P y Q son dos polígonos que tienen el mismo número de vértices, p_0, \dots, p_n y q_0, \dots, q_n , respectivamente, con $p_0 = p_n$ y $q_0 = q_n$, entonces obviamente existe un homeomorfismo h entre $\text{Fr } P$ y $\text{Fr } Q$ que aplica el segmento $p_{i-1}p_i$ en el segmento $q_{i-1}q_i$ por medio de una aplicación lineal positiva. Si p y q son puntos fijos de $\text{Int } P$ e $\text{Int } Q$, respectivamente, entonces tal homeomorfismo se puede extender a un homeomorfismo entre P y Q haciendo que el segmento de p al punto $x \in \text{Fr } P$ se aplique linealmente en el segmento de q a $h(x)$. Véase la Figura 74.1.

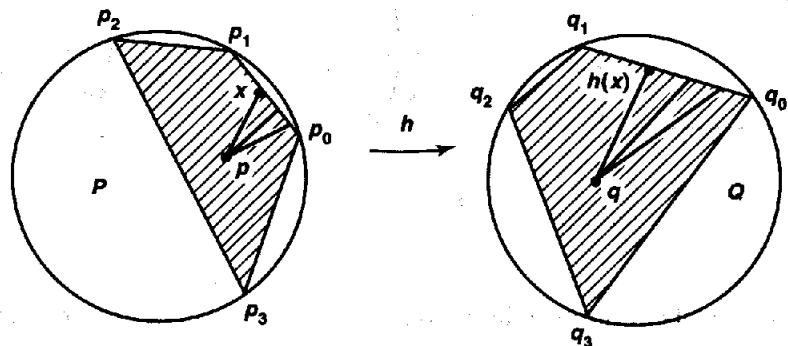


Figura 74.1

Definición. Sea P un polígono. Un *etiquetado* de las aristas de P es una aplicación del conjunto de las aristas de P en un conjunto S llamado conjunto de *etiquetas*. Dada una orientación de cada arista de P y un etiquetado de las aristas de P , se define una relación de equivalencia de los puntos de P como sigue: cada punto de $\text{Int } P$ es equivalente a sí mismo. Dadas dos aristas de P que tengan la misma etiqueta y h la aplicación lineal positiva entre ellas, se toma cada punto x de la primera arista equivalente al punto $h(x)$ de la segunda arista. Se tiene así una relación de equivalencia en P . El conjunto cociente X se dirá que se ha obtenido *pegando las aristas de P* de acuerdo con las orientaciones dadas y el etiquetado.

EJEMPLO 1. Considere las orientaciones y etiquetado de las aristas del triángulo de la Figura 74.2. El dibujo indica cómo se puede probar que el espacio cociente resultante es homeomorfo al disco unidad.

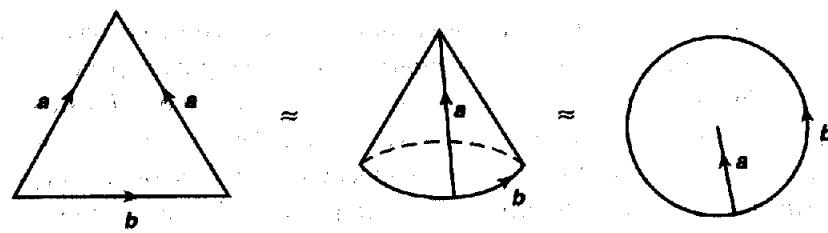


Figura 74.2

EJEMPLO 2. Las orientaciones y etiquetado de las aristas del cuadrado de la Figura 74.3 dan lugar a un espacio que es homeomorfo a la esfera S^2 .

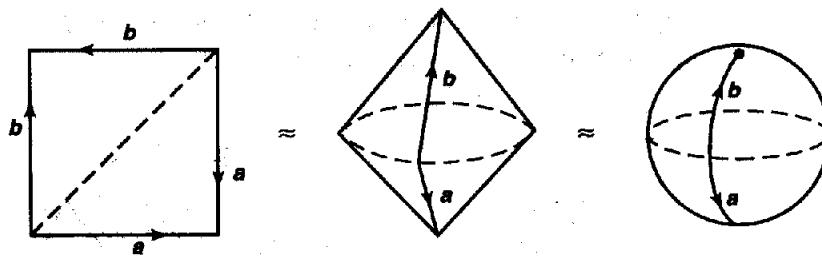


Figura 74.3

Describimos ahora un método conveniente para especificar las orientaciones y etiquetas de las aristas de un polígono, método que no supone hacer un dibujo.

Definición. Sea P un polígono con vértices sucesivos p_0, \dots, p_n , donde $p_0 = p_n$. Dadas orientaciones y un etiquetado de las aristas de P , sean a_1, \dots, a_m las distintas etiquetas asignadas a las aristas de P . Para cada k , sea a_{i_k} la etiqueta asignada a la arista $p_{k-1}p_k$, y sea $\epsilon_k = +1$ ó -1 , según que la orientación asignada a esa arista vaya de p_{k-1} a p_k , o al contrario. Entonces el número de aristas de P , las orientaciones de las aristas y el etiquetado están completamente especificados por el símbolo

$$w = (a_{i_1})^{\epsilon_1} (a_{i_2})^{\epsilon_2} \cdots (a_{i_n})^{\epsilon_n}.$$

Este símbolo se llamará *esquema de longitud n* de las aristas de P . Se trata simplemente de una sucesión de etiquetas con exponentes $+1$ ó -1 .

Se omiten normalmente los exponentes iguales a $+1$ cuando se da un esquema. Así las orientaciones y etiquetado del Ejemplo 1 se especifican por el esquema $a^{-1}ba$, si se toma p_0 el vértice superior del triángulo. Si se toma p_0 como otro cualquiera de los vértices, entonces se obtienen los esquemas baa^{-1} o $aa^{-1}b$. Análogamente, las

orientaciones y etiquetado del Ejemplo 2 pueden ser especificados (si comenzamos por el vértice inferior izquierdo del cuadrado) por el símbolo $aa^{-1}bb^{-1}$. Está claro que una permutación cíclica de los términos de un esquema cambiará el espacio X , formado al utilizar el esquema, solamente salvo homeomorfismos. Más adelante se considerarán otras modificaciones que se puedan hacer a un esquema que dejarán el espacio invariante por homeomorfismos.

EJEMPLO 3. Ya se ha visto cómo el toro puede ser expresado como un espacio cociente del cuadrado unidad por medio de la aplicación cociente $p \times p : I \times I \rightarrow S^1 \times S^1$. Este mismo espacio cociente puede ser especificado por las orientaciones y el etiquetado de las aristas del cuadrado de la Figura 74.4. Y también mediante el esquema $aba^{-1}b^{-1}$.

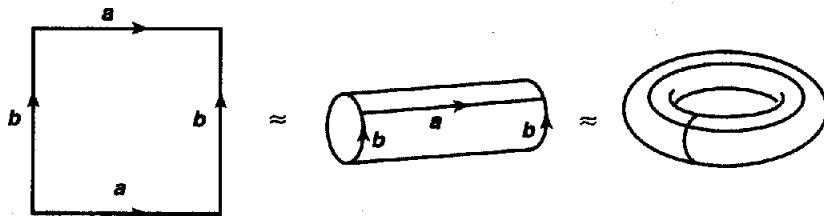


Figura 74.4

EJEMPLO 4. El plano proyectivo P^2 es homeomorfo al espacio cociente de la bola unidad B^2 obtenida identificando x con $-x$, para cada $x \in S^1$. Puesto que el cuadrado unidad es homeomorfo a la bola unidad, este espacio puede también ser especificado por las orientaciones y el etiquetado de las aristas del cuadrado unidad de la Figura 74.5. Y también mediante el esquema $abab$.

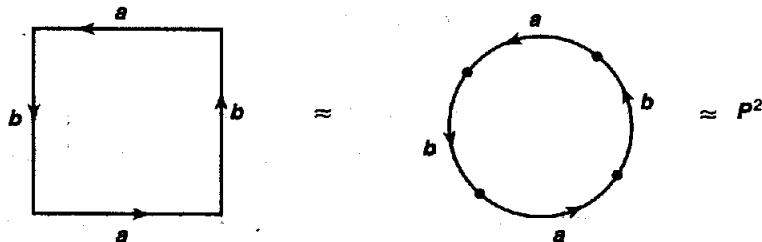


Figura 74.5

No existe razón alguna para restringirnos a un solo polígono cuando se construye un espacio pegando aristas. Dado un número finito P_1, \dots, P_k de polígonos disjuntos, junto con orientaciones y un etiquetado de sus aristas, se puede construir un espacio cociente X , exactamente del mismo modo que para un polígono, pegando aristas de esas regiones. También se pueden especificar orientaciones y un etiquetado por medio

de k etiquetados. Dependiendo de los esquemas particulares, el espacio X obtenido puede o no ser conexo.

EJEMPLO 5. La Figura 74.6 indica un etiquetado de las aristas de dos cuadrados para los cuales el espacio cociente resultante, conocido como *cinta de Möbius*, es conexo. Por supuesto, este espacio también podría haber sido obtenido a partir de un solo cuadrado por medio del esquema *abac*.

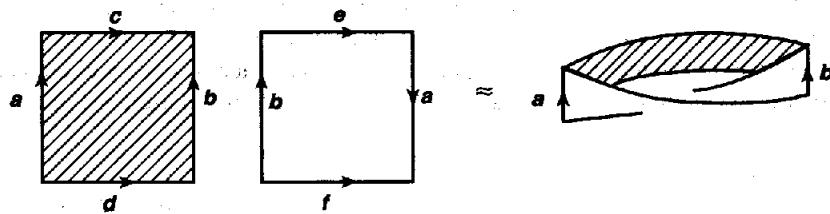


Figura 74.6

EJEMPLO 6. La Figura 74.7 indica un esquema para las aristas de dos cuadrados para los cuales el espacio cociente resultante no es conexo.

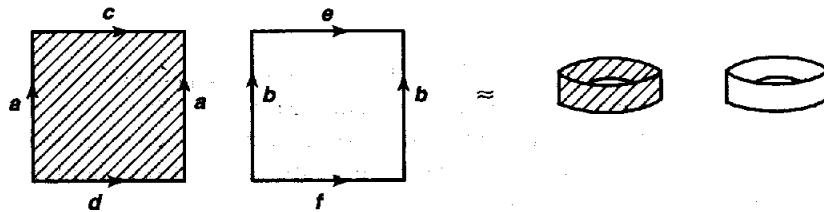


Figura 74.7

Teorema 74.1. *Sea X el espacio obtenido de una colección finita de polígonos pegando aristas según un esquema. Entonces X es un espacio de Hausdorff compacto.*

Demostración. Por simplicidad se trata el caso donde X se obtiene de un solo polígono. El caso general es similar.

Que X es compacto es obvio, ya que la aplicación cociente $\pi : P \rightarrow X$ es continua. Para probar que X es de Hausdorff basta demostrar que π es una aplicación cerrada (véase el Lema 73.3). Para ello debemos probar que para cada conjunto cerrado C de P el conjunto $\pi^{-1}\pi(C)$ es cerrado en P . Ahora bien, $\pi^{-1}\pi(C)$ está formado por puntos de C y todos los puntos de P que se pegan a puntos de C por medio de π . Estos puntos se determinan fácilmente. Para cada arista e de P , sea C_e el subespacio compacto $C \cap e$ de P . Si e_i es una arista de P que se pega a e y si $h_i : e_i \rightarrow e$ es el homeomorfismo de pegado, entonces el conjunto $D_e = \pi^{-1}\pi(C) \cap e$ contiene

al espacio $h_i(C_{e_i})$. Claramente D_e es igual a la unión de C_e y los espacios $h_i(C_{e_i})$ cuando e_i recorre todas las aristas de P que se pegan a e . Esta unión es compacta; por tanto es cerrada en e y en P .

Como $\pi^{-1}\pi(C)$ es la unión del conjunto C y los conjuntos D_e , cuando e recorre todos las aristas de P , éste es cerrado en P , como deseábamos. ■

Observemos que si X se obtiene pegando las aristas de un polígono, la aplicación cociente π puede aplicar todos los vértices del polígono en un solo punto de X , o puede que no. En el caso del toro del Ejemplo 3, la aplicación cociente satisface esta condición, pero no la satisface en los casos de la bola y la esfera de los Ejemplos 1 y 2. Es una buena noticia cuando π satisface esa condición, pues en tal caso se puede calcular fácilmente el grupo fundamental de X :

Teorema 74.2. Sean P un polígono y

$$w = (a_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots (a_{i_n})^{\epsilon_n}$$

un esquema para las aristas de P . Sean X el espacio cociente resultante y $\pi : P \rightarrow X$ la aplicación cociente. Si π aplica todos los vértices de P en un punto $x_0 \in X$ y si a_1, \dots, a_k son las distintas etiquetas del esquema, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo al cociente del grupo libre de k generadores $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ por el menor subgrupo normal que contiene al elemento

$$(\alpha_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots (\alpha_{i_n})^{\epsilon_n}.$$

Demuestração. La demostración es similar a la que se hizo para el toro en §73. Puesto que π aplica todos los vértices de P en un punto de X , el espacio $A = \pi(\text{Fr } P)$ es una unión por un punto de k círculos. Para cada i , escojamos una arista de P con la etiqueta a_i . Sea f_i la aplicación lineal positiva de I en esta arista orientada en sentido contrario a las agujas del reloj y pongamos $g_i = \pi \circ f_i$. Entonces los lazos g_1, \dots, g_k representan un conjunto de generadores libres para $\pi_1(A, x_0)$. El lazo f dando una vuelta alrededor de $\text{Fr } P$ en sentido contrario a las agujas del reloj genera el grupo fundamental de $\text{Fr } P$, y el lazo $\pi \circ f$ es igual al lazo

$$(g_{i_1})^{\epsilon_1} * \cdots * (g_{i_n})^{\epsilon_n}.$$

El teorema se sigue ahora del Teorema 72.1. ■

Definición. Considere el espacio obtenido de un polígono P de $4n$ lados por medio del esquema

$$(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})(a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}) \cdots (a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}).$$

Este espacio se llama **suma conexa de n toros**, o simplemente **n -toro**, y se indicará por $T \# \cdots \# T$.

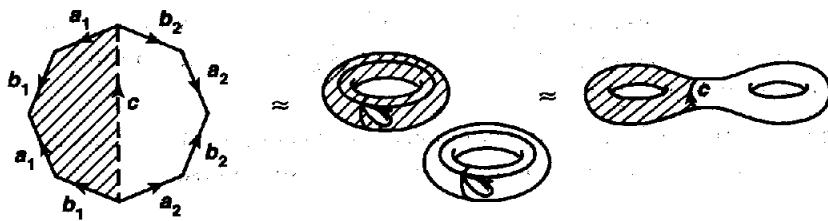


Figura 74.8

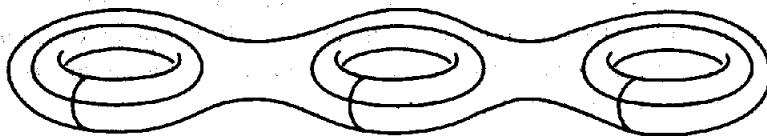


Figura 74.9

En la Figura 74.8 se esboza la suma conexa de dos toros, o 2-toro. Si sepáramos el polígono P a lo largo de la línea c , cada uno de los trozos resultantes representa un toro al que se le ha quitado un disco abierto. Si se pegan los dos trozos a lo largo de la curva c , se obtiene el espacio que se introdujo en §60 y se llamó *doble toro*. Un argumento similar prueba que el 3-toro $T \# T \# T$ puede ser esbozado como la superficie de la Figura 74.9.

Teorema 74.3. Sea X el n -toro. Entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo al cociente del grupo libre de $2n$ generadores $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$ por el menor subgrupo normal que contiene al elemento

$$[\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2] \cdots [\alpha_n, \beta_n]$$

donde, como es habitual, $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$.

Demostración. Para aplicar el Teorema 74.2 debemos probar que con el esquema para X , todos los vértices del polígono pertenecen a la misma clase de equivalencia. Se deja esto para comprobación del lector. ■

Definición. Sea $m > 1$. Se considera el espacio obtenido de un polígono P de $2m$ lados por medio del esquema

$$(a_1 a_1)(a_2 a_2) \cdots (a_m a_m).$$

Este espacio se llama *suma conexa de m planos proyectivos* o, simplemente, *m -plano proyectivo*, y se indicará por $P^2 \# \cdots \# P^2$.

El 2-plano proyectivo $P^2 \# P^2$ se esboza en la Figura 74.10, donde se indica cómo este espacio se obtiene a partir de dos copias del plano proyectivo quitando un disco abierto de cada una de ellas y pegando los espacios resultantes a lo largo de las fronteras de los discos eliminados. Como con el propio P^2 , no existe una forma cómoda de imaginar el m -plano proyectivo como una superficie de \mathbb{R}^3 , pues de hecho no se puede embeber en \mathbb{R}^3 . A veces, sin embargo, lo dibujamos en \mathbb{R}^3 como una superficie que se interseca a sí misma (entonces se habla de una superficie *inmersa* más bien que *embebida*). Este aspecto será tratado en los ejercicios.

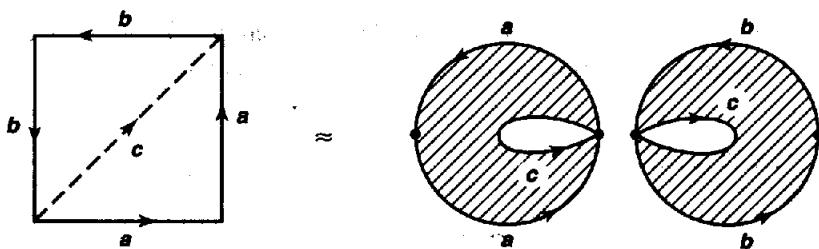


Figura 74.10

Teorema 74.4. Sea X el m -plano proyectivo. Entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo al cociente del grupo libre de m generadores $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ por el menor subgrupo normal que contiene al elemento

$$(\alpha_1)^2 (\alpha_2)^2 \cdots (\alpha_m)^2.$$

Demostración. Basta comprobar que con el esquema para X , todos los vértices del polígono pertenecen a la misma clase de equivalencia. Esto se deja para comprobación del lector. ■

Existen otras muchas formas de obtener superficies compactas. Por ejemplo, se puede quitar un disco abierto de cada uno de los espacios P^2 y T , y pegar los espacios resultantes a lo largo de las fronteras de los discos eliminados. Se puede comprobar que este espacio puede obtenerse de un polígono de 6 lados por medio del esquema $aabcb^{-1}c^{-1}$. Pero nos detendremos aquí, pues resulta que ya hemos obtenido un listado completo de las superficies conexas compactas. Este es el básico *teorema de clasificación de superficies*, que consideraremos en breve.

Ejercicios

2. Considere el espacio X obtenido de un polígono de siete lados por medio del esquema $abaaab^{-1}a^{-1}$. Demuestre que el grupo fundamental de X es el producto libre de dos grupos cíclicos. [Indicación: véase el Teorema 68.7.]
3. La **botella de Klein** K es el espacio obtenido de un cuadrado por medio del esquema $aba^{-1}b$. La Figura 74.11 representa K como una superficie inmersa en \mathbb{R}^3 .
- Halle una presentación del grupo fundamental de K .
 - Halle una aplicación recubridora de dos hojas $p : T \rightarrow K$. Describa el homomorfismo inducido entre los grupos fundamentales.

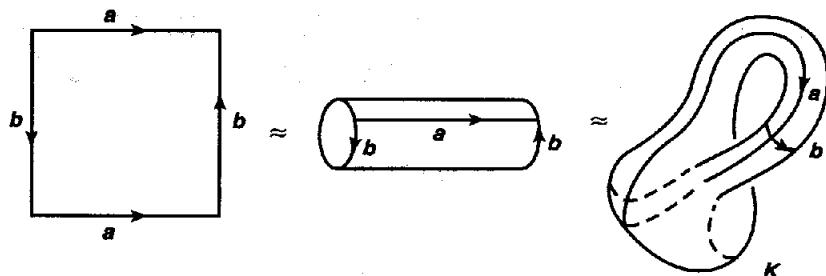


Figura 74.11

4. (a) Demuestre que K es homeomorfa a $P^2 \# P^2$. [Indicación: corte el cuadrado de la Figura 74.11 a lo largo de una diagonal y pegue los triángulos resultantes a lo largo de la arista b .]
- (b) Pruebe cómo dibujar el 4-plano proyectivo como una superficie inmersa en \mathbb{R}^3 .
5. La cinta de Möbius M no es una superficie, sino que se trata de una “superficie con borde”. Pruebe que M es homeomorfa al espacio que se obtiene suprimiendo un disco abierto de P^2 .
6. Si $n > 1$, pruebe que el grupo fundamental del n -toro no es abeliano. [Indicación: sea G el grupo libre generado por el conjunto $\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n\}$ y F el libre generado por $\{\gamma, \delta\}$. Considere el homomorfismo de G en F que lleva α_1 y β_1 a γ y los restantes α_i y β_i a δ .]
7. Si $m > 1$, pruebe que el grupo fundamental del m -plano proyectivo no es abeliano. [Indicación: existe un homomorfismo que aplica este grupo en el grupo $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$.]

§75 Homología de superficies

Aunque hemos conseguido obtener presentaciones del grupo fundamental de un cierto número de superficies, debemos detenernos a pensar qué hemos logrado en realidad. ¿Podemos deducir de nuestros cálculos que el doble toro y el triple toro son topológicamente distintos? No de forma inmediata, pues, como sabemos, carecemos de un procedimiento efectivo para determinar, a partir de las presentaciones de dos grupos, si esos grupos son isomorfos. Las cosas resultan más satisfactorias si pasamos al grupo abeliano $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$, donde $\pi_1 = \pi_1(X, x_0)$, pues entonces dispondremos de algunos invariantes con los que trabajar. En esta sección exploraremos esta situación.

Sabemos que si X es un espacio conexo por caminos y α es un camino en X de x_0 a x_1 , entonces existe un isomorfismo $\hat{\alpha}$ del grupo fundamental en x_0 en el grupo fundamental en x_1 , pero el isomorfismo depende del camino α . Un resultado más fuerte es válido para el grupo $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$. En este caso, el isomorfismo del “grupo fundamental abelianizado” basado en x_0 con el basado en x_1 , inducido por α , es *independiente* de la elección del camino α .

Para verificar este hecho, basta probar que si α y β son dos arcos de x_0 a x_1 , entonces el arco $g = \alpha * \bar{\beta}$ induce el isomorfismo identidad de $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$ consigo mismo. Esto es fácil. Si $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, se tiene

$$\hat{g}[f] = [\bar{g} * f * g] = [g]^{-1} * [f] * [g].$$

Cuando pasamos a las clases en el grupo abeliano $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$, vemos que \hat{g} induce la aplicación identidad.

Definición. Si X es un espacio conexo por caminos, sea

$$H_1(X) = \pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)].$$

Llamaremos a $H_1(X)$ *primer grupo de homología* de X . Se omite el punto base porque existe un único isomorfismo inducido por el camino entre los grupos fundamentales abelianizados basados en dos puntos distintos.

En estudios posteriores de topología algebraica puede encontrarse una definición completamente diferente de $H_1(X)$. En efecto, se introducen los grupos $H_n(X)$, llamados *grupos de homología* de X , que se definen para todo $n \geq 0$. Se trata de grupos abelianos que son invariantes topológicos de X y son de capital importancia a la hora de aplicar resultados algebraicos a problemas topológicos. Un teorema debido a W. Hurewicz establece una conexión entre estos grupos y los grupos de homotopía de X . Ello implica, en particular, que si X es conexo por caminos, el primer grupo de homología $H_1(X)$ de X es isomorfo al grupo fundamental abelianizado de X . Ese

teorema motiva la elección de nuestra notación para el grupo fundamental abelianizado.

Para el cálculo de $H_1(X)$ de las superficies anteriormente consideradas, se necesita el siguiente resultado:

Teorema 75.1. Sean F un grupo, N un subgrupo normal de F y $q : F \rightarrow F/N$ la proyección. Entonces el homomorfismo proyección

$$p : F \rightarrow F/[F, F]$$

induce un isomorfismo

$$\phi : q(F)/[q(F), q(F)] \rightarrow p(F)/p(N).$$

Este teorema viene a decir, más o menos, que si se divide F por N y se abelianiza el cociente, se obtiene el mismo resultado que si se abelianiza F y después se divide por la imagen de N en esta abelianización.

Demostración. Se tienen homomorfismos proyección p, q, r y s , como se muestran en el diagrama, donde $q(F) = F/N$ y $p(F) = F/[F, F]$.

$$\begin{array}{ccccc} & & q(F) & \xrightarrow{s} & q(F)/[q(F), q(F)] \\ & \nearrow q & \searrow u & & \downarrow \phi \\ F & & p(F) & \xrightarrow{v} & p(F)/p(N) \\ & \searrow p & \nearrow r & & \uparrow \psi \end{array}$$

Puesto que $r \circ p$ aplica N en 1, induce un homomorfismo $u : q(F) \rightarrow p(F)/p(N)$. Entonces, como $p(F)/p(N)$ es abeliano, el homomorfismo u induce un homomorfismo ϕ de $q(F)/[q(F), q(F)]$. Por otro lado, puesto que $s \circ q$ aplica F en un grupo abeliano, se induce un homomorfismo $v : p(F) \rightarrow q(F)/[q(F), q(F)]$. Como $s \circ q$ lleva N en 1, lo mismo ocurre con $v \circ p$, por consiguiente, v induce un homomorfismo ψ de $p(F)/p(N)$.

El homomorfismo ϕ se puede describir como sigue: dado un elemento y del grupo $q(F)/[q(F), q(F)]$, se elige un elemento $x \in F$ tal que $s(q(x)) = y$; entonces $\phi(y) = r(p(x))$. El homomorfismo ψ se puede describir de la misma manera. Se sigue que ϕ y ψ son inversos el uno del otro. ■

Corolario 75.2. Sean F un grupo libre con generadores libres $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ y N el menor subgrupo normal de F que contiene al elemento x de F . Sean $G = F/N$ y $p : F \rightarrow F/[F, F]$ la proyección. Entonces $G/[G, G]$ es isomorfo al cociente de $F/[F, F]$, que es abeliano libre con base $p(\alpha_1), \dots, p(\alpha_n)$, por el subgrupo generado por $p(x)$.

Demostración. Obsérvese que como N está generado por x y todos sus conjugados, el grupo $p(N)$ está generado por $p(x)$. El corolario se sigue entonces del teorema anterior. ■

Teorema 75.3. Si X es la suma conexa de n toros, entonces $H_1(X)$ es un grupo abeliano libre de rango $2n$.

Demostración. Según el corolario anterior, el Teorema 74.3 implica que $H_1(X)$ es isomorfo al cociente del grupo abeliano libre F' sobre el conjunto $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$ por el subgrupo generado por el elemento $[\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_n, \beta_n]$ donde, como es habitual, $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$. Como el grupo F' es abeliano, este elemento es igual al elemento neutro. ■

Teorema 75.4. Si X es la suma conexa de m planos proyectivos, entonces el subgrupo de torsión $T(X)$ de $H_1(X)$ es de orden 2 y $H_1(X)/T(X)$ es un grupo abeliano libre de rango $m - 1$.

Demostración. Según el corolario anterior, el Teorema 74.4 implica que $H_1(X)$ es isomorfo al cociente del grupo abeliano libre F' sobre el conjunto $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ por el subgrupo generado por el elemento $(\alpha_1)^2 \cdots (\alpha_m)^2$. Si cambiamos a notación aditiva (como es habitual cuando se trabaja con grupos abelianos), éste es el subgrupo generado por el elemento $2(\alpha_1 + \cdots + \alpha_m)$. Hagamos un cambio de base en el grupo F' . Si ponemos $\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$, entonces los elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \beta$ forman una base de F' ; cualquier elemento de F' se puede escribir de manera única en función de esos elementos. El grupo $H_1(X)$ es isomorfo al cociente del grupo abeliano libre sobre $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \beta$ por el subgrupo generado por 2β . Dicho de otra manera, $H_1(X)$ es isomorfo al cociente del m -producto cartesiano $\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ por el subgrupo $0 \times \cdots \times 0 \times 2\mathbb{Z}$. El teorema se sigue inmediatamente. ■

Teorema 75.5. Sean T_n y P_m la suma conexa de n toros y de m planos proyectivos, respectivamente. Entonces las superficies $S^2, T_1, T_2, \dots, P_1, P_2, \dots$, son topológicamente distintas.

Ejercicios

1. Calcule $H_1(P^2 \# T)$. Suponiendo que la lista de superficies compactas dada en el Teorema 75.5 es una lista completa, ¿a cuál de aquellas superficies es homeomorfa $P^2 \# T$?
2. Si K es la botella de Klein, calcule $H_1(K)$ directamente.

3. Sea X el espacio cociente obtenido de un polígono de ocho lados P pegando sus aristas según el esquema $acadbcb^{-1}d$.
- Compruebe que todos los vértices de P se aplican en el mismo punto del espacio cociente X por la aplicación de pegado.
 - Calcule $H_1(X)$.
 - ¿A qué superficie de las dadas en el Teorema 75.5 es X homeomorfo?
- *4. Sea X el espacio cociente obtenido de un polígono de ocho lados P pegando sus aristas según el esquema $abcdad^{-1}cb^{-1}$. Sea $\pi : P \rightarrow X$ la aplicación cociente.
- Pruebe que π no aplica todos los vértices de P en el mismo punto de X .
 - Determine el espacio $A = \pi(\text{Fr } P)$ y calcule su grupo fundamental.
 - Calcule $\pi_1(X, x_0)$ y $H_1(X)$.
 - ¿A qué superficie de las dadas en el Teorema 75.5 es X homeomorfo?

§76 Cortar y pegar

Para probar el teorema de clasificación de superficies necesitamos hacer uso de ciertos argumentos geométricos que requieren las llamadas técnicas de “cortar y pegar”. Éstas muestran la manera de conseguir un espacio X que se obtiene pegando aristas de uno o más polígonos, según un esquema, y de representar X por medio de una colección distinta de polígonos y un esquema distinto.

En primer lugar, veamos qué se entiende por “cortar” un polígono. Sea P un polígono con vértices sucesivos $p_0, \dots, p_n = p_0$. Dado k , con $1 < k < n - 1$, se consideran los polígonos Q_1 , con vértices sucesivos $p_0, p_1, \dots, p_k, p_0$, y Q_2 con vértices sucesivos $p_0, p_k, \dots, p_n = p_0$. Ambos tienen en común la arista p_0p_k y P es su unión.

Apíquese a Q_1 una traslación de \mathbb{R}^2 para obtener un polígono Q'_1 disjunto de Q_2 ; entonces Q'_1 tiene vértices sucesivos $q_0, q_1, \dots, q_k, q_0$, donde q_i es la imagen de p_i por la traslación. Se dirá entonces que los polígonos Q'_1 y Q_2 se han obtenido **cortando** P a lo largo de la arista p_0p_k . La región P es homeomorfa al espacio cociente de Q'_1 y Q_2 obtenido pegando la arista q_0q_k de Q'_1 a la arista p_0p_k de Q_2 mediante la aplicación lineal positiva de una arista en la otra (véase la Figura 76.1).

Se considerará ahora el proceso inverso. Supongamos que nos dan dos polígonos disjuntos Q'_1 , con vértices sucesivos q_0, \dots, q_k, q_0 y Q_2 con vértices sucesivos $p_0, p_k, \dots, p_n = p_0$. Supongamos que construimos un espacio cociente pegando la arista q_0q_k de Q'_1 a la arista p_0p_k de Q_2 mediante la aplicación lineal positiva de una arista en la otra. Queremos representar este espacio por un polígono.

Eso se hace de la siguiente manera: los puntos de Q_2 están sobre un círculo y se ordenan en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj. Escojamos puntos

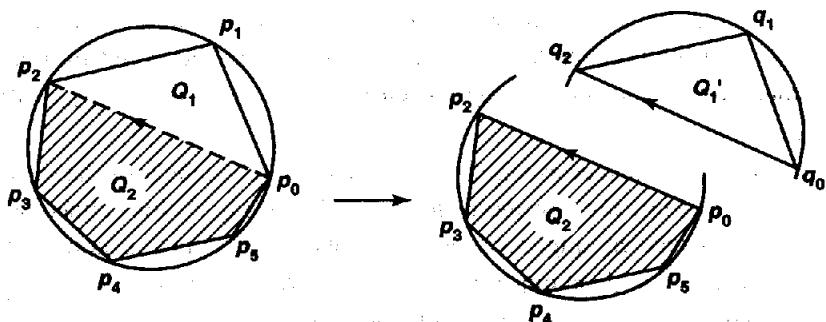


Figura 76.1

p_1, \dots, p_{k-1} en ese círculo de tal manera que $p_0, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k$ estén ordenados en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, y sea Q_1 el polígono formado con esos vértices. Existe un homeomorfismo entre Q'_1 y Q_1 que lleva q_i en p_i , para cada i , y aplica la arista q_0q_k de Q'_1 linealmente en la arista p_0p_k de Q_2 . Por tanto, el espacio cociente en cuestión es homeomorfo a P , que es la unión de Q_1 y Q_2 . Se dirá que P se obtiene **pegando** Q'_1 y Q_2 a lo largo de las aristas indicadas (véase la Figura 76.2).

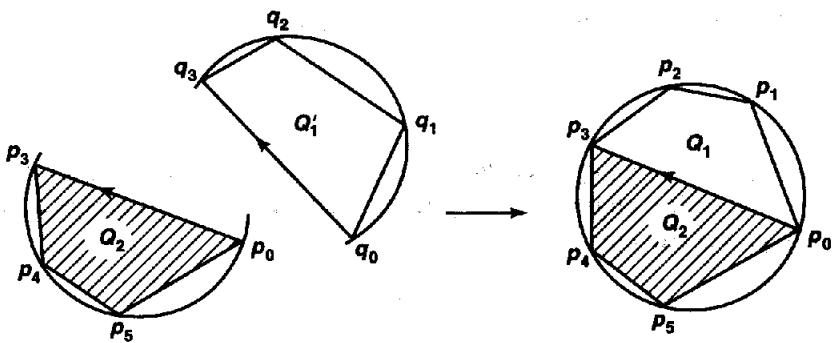


Figura 76.2

Planteémonos la siguiente cuestión: si un polígono P tiene un esquema, ¿qué efecto produce cortar P a lo largo de una arista sobre el esquema? Con mayor precisión, supongamos que disponemos de una colección de polígonos disjuntos P_1, \dots, P_m y un esquema para estos polígonos, por ejemplo w_1, \dots, w_m , donde w_i es un esquema de las aristas de P_i . Supongamos que X es el espacio cociente que se obtiene de ese esquema. Si cortamos P_1 a lo largo de la arista p_0p_k , ¿qué ocurre? Obtenemos $m+1$ polígonos $Q'_1, Q_2, P_2, \dots, P_m$; para conseguir el espacio X de estos polígonos, necesitamos un pegado adicional a lo largo de una arista. Para este nuevo pegado requerido se introducirá una nueva etiqueta que se asignará a las aristas q_0q_k y p_0p_k .

que se introdujeron. Puesto que la orientación de p_0 a p_k es contraria a las agujas del reloj para Q_2 y la orientación de q_0 a q_k es a favor de las agujas del reloj para Q'_1 , esta etiqueta tendrá exponente +1 cuando aparezca en el esquema de Q_2 y exponente -1 para Q'_1 .

Para ser más concretos, escribamos el esquema w_1 de P_1 de la forma $w_1 = y_0y_1$, donde y_0 se compone de los k primeros términos de w_1 e y_1 de los demás. Sea c una etiqueta que no aparece en ninguno de los esquemas w_1, \dots, w_m . Entonces damos a Q'_1 el esquema y_0c^{-1} , a Q_2 el cy_1 y para $i > 1$ a P_i su viejo esquema w_i .

Es inmediato que el espacio X puede ser obtenido a partir de los polígonos $Q'_1, Q_2, P_2, \dots, P_m$ por medio de este esquema. Como la composición de aplicaciones cociente es de nuevo una aplicación cociente, no importa si pegamos todas las aristas de una vez o por el contrario pegamos las aristas p_0p_k y q_0q_k antes de pegar las otras.

Por supuesto, este proceso se puede invertir. Si X está representado por un esquema de los polígonos $Q'_1, Q_2, P_2, \dots, P_m$ y si el esquema indica que una arista del primero se pega con una del segundo (*y ninguna otra arista se pega a ellas*), podemos llevar a cabo el pegado para representar X mediante un esquema para las m regiones P_1, \dots, P_m .

Todo lo anterior se recoge formalmente en el siguiente:

Teorema 76.1. *Sea X el espacio obtenido pegando las aristas de m polígonos según el esquema*

$$(*) \quad y_0y_1, w_2, \dots, w_m.$$

Sea c una etiqueta que no aparece en el esquema anterior. Si ambos y_0 e y_1 tienen longitud al menos dos, entonces X se puede obtener pegando las aristas de $m+1$ polígonos según el esquema

$$(**) \quad y_0c^{-1}, cy_1, w_2, \dots, w_m.$$

*Recíprocamente, si X es el espacio obtenido de $m+1$ polígonos por medio del esquema (**), también se puede obtener de m polígonos mediante el esquema (*), siempre que c no aparezca en el esquema (*).*

Operaciones elementales con esquemas

Damos un conjunto de operaciones elementales que se pueden realizar sobre un esquema w_1, \dots, w_m y que no afectan al espacio cociente resultante X . Las dos primeras surgen del teorema que acabamos de enunciar.

(i) *Corte.* Se puede sustituir el esquema $w_1 = y_0y_1$ por el esquema y_0c^{-1} y cy_1 , siempre que c no aparezca en algún otro sitio en el esquema total y que y_0 e y_1 sean de longitud al menos dos.

(ii) *Pegado*. Se puede sustituir el esquema y_0c^{-1} y cy_1 por el esquema y_0y_1 , siempre que c no aparezca en algún otro sitio en el esquema total.

(iii) *Reetiquetado*. Se pueden sustituir todas las presencias de una etiqueta dada por alguna otra etiqueta que no aparezca en otro lugar del esquema. Análogamente, se puede cambiar el signo del exponente de todas las apariciones de una etiqueta dada a ; esto equivale a invertir todas las orientaciones de todas las aristas con etiqueta “ a ”. Ninguna de estas alteraciones afecta a la aplicación de pegamiento.

(iv) *Permuta*. Se puede sustituir uno cualquiera de los esquemas w_i por una permutación cíclica de w_i . Específicamente, si $w_i = y_0y_1$, se puede sustituir w_i por y_1y_0 . Esto significa reenumerar los vértices del polígono P_i comenzando con un vértice distinto, sin afectar al espacio cociente resultante.

(v) *Inversión*. Se puede sustituir el esquema

$$w_i = (a_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots (a_{i_n})^{\epsilon_n}$$

por su inverso

$$w_i^{-1} = (a_{i_n})^{-\epsilon_n} \cdots (a_{i_1})^{-\epsilon_1}.$$

Esto significa simplemente “una inversión del polígono P_i ”. El orden de los vértices se invierte y por tanto la orientación de cada arista. El espacio cociente no se ve afectado.

(vi) *Eliminación*. Se puede sustituir el esquema $w_i = y_0aa^{-1}y_1$ por el esquema y_0y_1 , siempre que a no aparezca en otro sitio del esquema total y ambos y_0 e y_1 sean de longitud al menos dos.

Este último resultado se sigue del argumento de tres pasos que se indica en la Figura 76.3, aunque sólo uno de los pasos es nuevo. Sean b y c las etiquetas que no aparecen en otro sitio en el esquema total. En primer lugar se sustituye $y_0aa^{-1}y_1$ por el esquema y_0ab y $b^{-1}a^{-1}y_1$ usando la operación de corte (i). Entonces las aristas de etiquetas a y b de cada polígono se combinan para formar una nueva arista con una nueva etiqueta. Este es el paso nuevo. El resultado es el esquema y_0c y $c^{-1}y_1$, que se sustituye por el esquema simple y_0y_1 por medio de la operación de pegado (ii).

(vii) *Añadido*. Es la operación inversa de (vi). Consiste en sustituir el esquema y_0y_1 por el $y_0aa^{-1}y_1$, siendo a una etiqueta que no aparece en otro lugar del esquema total. En realidad no se hará uso de esta operación.

Definición. Dos esquemas de colecciones de polígonos se dicen *equivalentes* si uno se puede conseguir del otro mediante una sucesión de operaciones elementales con esquemas. Como la inversa de cada operación elemental es también elemental, se trata de una relación de equivalencia.

EJEMPLO 1. La botella de Klein K es el espacio que se obtiene del esquema $aba^{-1}b$. En los ejercicios de §74 se pidió probar que K es homeomorfo al plano proyectivo de dos

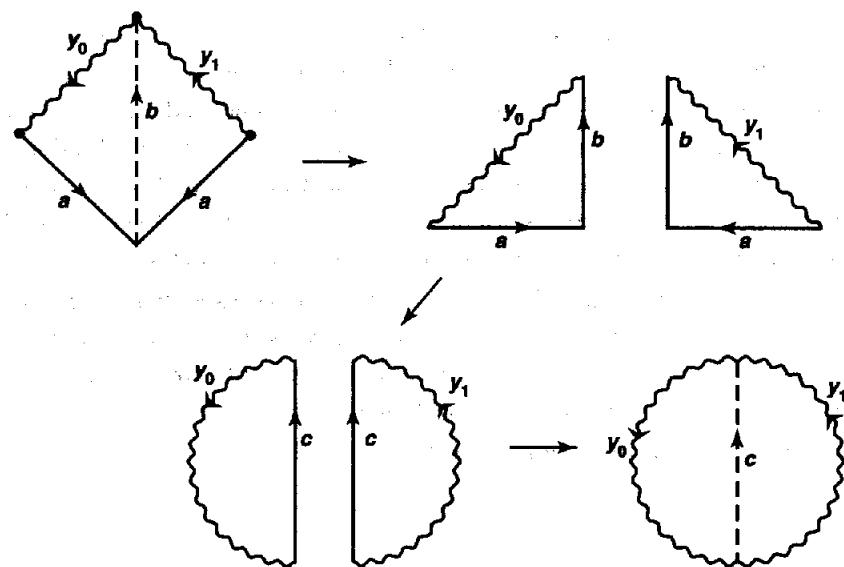


Figura 76.3

hojas $P^2 \# P^2$. El argumento geométrico que se sugirió allí se compone de hecho de las siguientes operaciones elementales:

$$\begin{aligned}
 aba^{-1}b &\rightarrow abc^{-1} \quad \text{y} \quad ca^{-1}b && \text{cortando} \\
 &\rightarrow c^{-1}ab \quad \text{y} \quad b^{-1}ac^{-1} && \text{permutando el primero} \\
 &&& \text{e invirtiendo el segundo} \\
 &\rightarrow c^{-1}aac^{-1} && \text{pegando} \\
 &\rightarrow aacc && \text{permutando y reetiquetando.}
 \end{aligned}$$

Ejercicios

1. Considere el espacio cociente X que se obtiene de dos polígonos por medio del esquema $w_1 = acbc^{-1}$ y $w_2 = cdba^{-1}d$.
 - Si se pegan estas regiones a lo largo de la arista “ a ”, se puede representar X como el cociente de un polígono P de siete lados. ¿Cuál es un esquema de P ? ¿Cuál es la sucesión de operaciones elementales que se necesitan para lograr ese esquema?
 - Repita (a) pegando a lo largo de “ b ”.
 - Explique por qué no se puede pegar a lo largo de “ c ” para obtener el esquema $acbdba^{-1}d$ como una forma de representar X .
2. Considere el espacio cociente X que se obtiene de dos polígonos por medio del esquema $w_1 = abcc$ y $w_2 = c^{-1}c^{-1}ab$. La siguiente sucesión de operaciones

elementales:

$$\begin{array}{ll}
 abcc \text{ y } c^{-1}c^{-1}ab \rightarrow ccab & \text{permutando e invirtiendo} \\
 \rightarrow ccaa^{-1}cc & \text{pegando} \\
 \rightarrow cccc & \text{eliminando}
 \end{array}$$

indica que X es homeomorfo al sombrero de asno de 4 picos. La sucesión de operaciones elementales:

$$\begin{array}{ll}
 abcc \text{ y } c^{-1}c^{-1}ab \rightarrow abcc^{-1}ab & \text{pegando} \\
 \rightarrow abab & \text{eliminando}
 \end{array}$$

indica que X es homeomorfo a P^2 . Pero esos espacios *no* son homeomorfos.
¿Qué argumento (si lo hay) es correcto?

§77 El teorema de clasificación

Probaremos en esta sección la parte geométrica de nuestro teorema de clasificación de superficies. Demostraremos que cada espacio obtenido pegando pares de aristas de un polígono es homeomorfo ya a S^2 , ya al n -toro T_n , ya al m -plano proyectivo P_m . Más adelante discutiremos el problema de probar que cada superficie compacta se puede obtener de esta manera.

Supongamos que w_1, \dots, w_k es un esquema de los polígonos P_1, \dots, P_k . Si cada etiqueta aparece exactamente *dos veces* en el esquema, lo llamaremos un esquema *propio*. Obsérvese el siguiente hecho importante:

Si se realiza una operación elemental sobre un esquema propio, se obtiene otro esquema propio.

Definición. Sea w un esquema propio de un polígono. Diremos que w es de *tipo toro* si cada etiqueta aparece en w una vez con exponente $+1$ y otra vez con exponente -1 . En otro caso se dirá que w es de *tipo proyectivo*.

Comenzamos considerando un esquema w de tipo proyectivo. Probaremos que w es equivalente a un esquema (de la misma longitud) en el que todas las etiquetas que tienen el mismo exponente están por pares y aparecen al comienzo del esquema. Es decir, w es equivalente a un esquema de la forma

$$(a_1a_1)(a_2a_2)\cdots(a_ka_k)w_1$$

donde w_1 es de tipo toro o vacío.

Como w es de tipo proyectivo, existe al menos una etiqueta, digamos a , tal que las dos veces que a aparece en el esquema w tiene el mismo exponente. Por tanto, podemos suponer que w tiene la forma

$$w = y_0 a y_1 a y_2$$

donde alguno de los y_i puede ser vacío. Insertaremos corchetes en esta expresión por conveniencia visual, escribiéndola de la forma

$$w = [y_0]a[y_1]a[y_2].$$

Se tiene el siguiente resultado:

Lema 77.1. *Sea w un esquema propio de la forma*

$$w = [y_0]a[y_1]a[y_2]$$

donde alguno de los y_i puede ser vacío. Entonces se tiene la equivalencia

$$w \sim aa[y_0 y_1^{-1} y_2]$$

donde y_1^{-1} indica el inverso formal de y_1 .

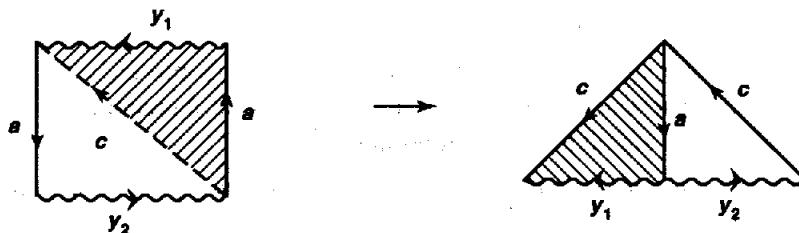


Figura 77.1

Demostración. *Paso 1.* En primer lugar se considera el caso en que y_0 es vacío. Probaremos que

$$a[y_1]a[y_2] \sim aa[y_1^{-1} y_2].$$

Si y_1 es vacío, este resultado es inmediato, mientras que si y_2 es vacío, se sigue de inversión, permuta y reetiquetado. Si ninguno es vacío, se aplica el argumento de cortar y pegar que se indica en la Figura 77.1, seguido de un reetiquetado. Se deja al lector la escritura de la sucesión de operaciones elementales requeridas.

Paso 2. Se considera ahora el caso general. Sea $w = [y_0]a[y_1]a[y_2]$, donde y_0 no es vacío. Si y_1 e y_2 son ambos vacíos, el lema se sigue por permutación. En otro

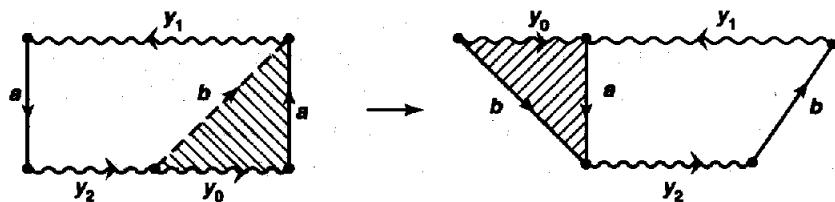


Figura 77.2

caso, se aplica el argumento de cortar y pegar tal como se indica en la Figura 77.2 para demostrar que

$$w \sim b[y_2]b[y_1y_0^{-1}].$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} w &\sim bb[y_2^{-1}y_1y_0^{-1}] && \text{por Paso 1} \\ &\sim [y_0y_1^{-1}y_2]b^{-1}b^{-1} && \text{por inversión} \\ &\sim aa[y_0y_1^{-1}y_2] && \text{por permuta y reetiquetado.} \end{aligned}$$

Corolario 77.2. Si w es un esquema de tipo proyectivo, entonces w es equivalente a un esquema de la misma longitud que tiene la forma

$$(a_1a_1)(a_2a_2) \cdots (a_k a_k)w_1$$

donde $k \geq 1$ y w_1 es ya vacío, ya de tipo toro.

Demostración. El esquema w se puede escribir de la forma

$$w = [y_0]a[y_1]a[y_2]$$

con lo que el lema anterior implica que w es equivalente a un esquema de la forma $w' = aa w_1$ que tiene la misma longitud que w . Si w_1 es de tipo toro ya hemos terminado; de lo contrario, se puede escribir w' de la forma

$$w' = aa[z_0]b[z_1]b[z_2] = [aa z_0]b[z_1]b[z_2].$$

Aplicando de nuevo el lema anterior, concluimos que w' es equivalente a un esquema w'' de la forma

$$w'' = bb[aaz_0z_1^{-1}z_2] = bbaaw_2$$

donde w'' tiene la misma longitud que w . Si w_2 es de tipo toro, ya hemos acabado; en otro caso, se continúa el argumento como antes. ■

Se sigue de este corolario que si w es un esquema propio de un polígono, entonces ya (1) w es de tipo toro, ya (2) w es equivalente a un esquema de la forma $(a_1a_1)\cdots(a_k a_k)w_1$, donde w_1 es de tipo toro, ya (3) w es equivalente a un esquema de la forma $(a_1a_1)\cdots(a_k a_k)$. En el caso (3) hemos acabado, pues un tal esquema representa una suma conexa de planos proyectivos. Así pues, consideremos los casos (1) y (2).

En este momento, observemos que si w es un esquema de longitud mayor que cuatro de la forma indicada en los casos (1) o (2), y si w contiene dos términos adyacentes con la misma etiqueta pero exponentes de signo opuesto, entonces la operación de cancelación se puede aplicar para reducir w a un esquema más corto que es también de la forma indicada en los casos (1), (2) o (3). Por tanto, podemos reducir w ya a un esquema de longitud cuatro, ya a uno que no contiene dos de tales términos adyacentes.

Esquemas de longitud cuatro son fáciles de manejar, como veremos más adelante, así pues supongamos que w no contiene dos términos adyacentes con la misma etiqueta pero exponentes opuestos. En tal caso, probaremos que w es equivalente a un esquema w' , de la misma longitud que w , que tenga la forma

$$\begin{aligned} w' &= aba^{-1}b^{-1}w'' && \text{en el caso (1) o} \\ w' &= (a_1a_1)\cdots(a_k a_k)aba^{-1}b^{-1}w'' && \text{en el caso (2)} \end{aligned}$$

donde w'' es de tipo toro o vacío. Esta es la esencia del siguiente lema:

Lema 77.3. *Sea w un esquema propio de la forma $w = w_0w_1$, donde w_1 es un esquema de tipo toro que no contiene dos términos adyacentes con la misma etiqueta. Entonces w es equivalente a un esquema de la forma w_0w_2 , donde w_2 tiene la misma longitud que w_1 y tiene la forma*

$$w_2 = aba^{-1}b^{-1}w_3$$

donde w_3 es de tipo toro o vacío.

Demostración. Se trata de la demostración más elaborada de esta sección, que involucra tres operaciones de cortar y pegar. En primer lugar probaremos que, cambiando las etiquetas y exponentes, si fuera necesario, w se puede escribir de la forma

$$(*) \quad w = w_0[y_1]a[y_2]b[y_3]a^{-1}[y_4]b^{-1}[y_5]$$

donde alguno de los y_i puede ser vacío.

Entre las etiquetas que aparecen en w_1 , sea a una cuya dos apariciones (con exponentes opuestos, por supuesto) sean tan próximas como sea posible. Y ambas son, por hipótesis, no adyacentes. Cambiando los exponentes, si fuera necesario, podemos

suponer que primero encontramos la etiqueta a y luego a^{-1} . Sea b cualquier etiqueta entre a y a^{-1} , que podemos suponer con exponente +1. Entonces el término b^{-1} aparece en w_1 , pero no se puede dar entre a y a^{-1} , pues éstos los hemos supuesto tan próximos como fuera posible. Si b^{-1} aparece a continuación de a^{-1} , ya hemos terminado. Si aparece antes de a , entonces todo lo que necesitamos hacer es cambiar los exponentes de las etiquetas b y después intercambiar las etiquetas a y b para obtener un esquema de la forma deseada.

Por tanto, supongamos que w tiene la forma (*).

Primer corte y pegado. Veremos que w es equivalente al esquema

$$w' = w_0 a[y_2] b[y_3] a^{-1}[y_1 y_4] b^{-1}[y_5].$$

Para probar este resultado reescrivamos w de la forma

$$w = w_0[y_1] a[y_2 b y_3] a^{-1}[y_4 b^{-1} y_5].$$

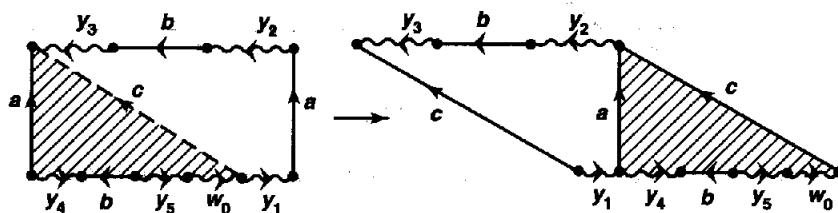


Figura 77.3

Ahora aplicamos el argumento de cortar y pegar indicado en la Figura 77.3 para concluir que

$$\begin{aligned} w &\sim w_0 c[y_2 b y_3] c^{-1}[y_1 y_4 b^{-1} y_5] \\ &\sim w_0 a[y_2] b[y_3] a^{-1}[y_1 y_4] b^{-1}[y_5] \end{aligned}$$

por reetiquetado. Nótese que el corte en c se puede hacer porque ambos polígonos resultantes tienen al menos tres lados.

Segundo corte y pegado. Dado

$$w' = w_0 a[y_2] b[y_3] a^{-1}[y_1 y_4] b^{-1}[y_5]$$

probaremos que w' es equivalente al esquema

$$w'' = w_0 a[y_1 y_4 y_3] b a^{-1} b^{-1}[y_2 y_5].$$

Si todos los esquemas y_1, y_4, y_5 y w_0 son vacíos, entonces el argumento es fácil, pues en este caso

$$\begin{aligned} w' &= a[y_2]b[y_3]a^{-1}b^{-1} \\ &\sim b[y_3]a^{-1}b^{-1}a[y_2] \quad \text{permutando} \\ &\sim a[y_3]ba^{-1}b^{-1}[y_2] \quad \text{reetiquetando} \\ &= w''. \end{aligned}$$

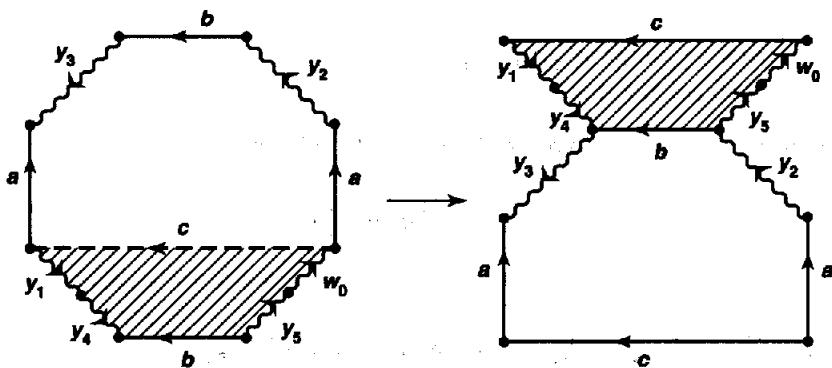


Figura 77.4

En otro caso, se aplica el argumento indicado en la Figura 77.4 para concluir que

$$\begin{aligned} w' &= w_0a[y_2]b[y_3]a^{-1}[y_1y_4]b^{-1}[y_5] \\ &\sim w_0c[y_1y_4y_3]a^{-1}c^{-1}a[y_2y_5] \\ &\sim w_0a[y_1y_4y_3]ba^{-1}b^{-1}[y_2y_5] \quad \text{reetiquetando}. \end{aligned}$$

Tercer corte y pegado. Completamos ahora la demostración. Dado

$$w'' = w_0a[y_1y_4y_3]ba^{-1}b^{-1}[y_2y_5]$$

probaremos que w'' es equivalente al esquema

$$w''' = w_0aba^{-1}b^{-1}[y_1y_4y_3y_2y_5].$$

Si los esquemas w_0, y_5 e y_2 son vacíos, el argumento es fácil, ya que en este caso

$$\begin{aligned} w'' &= a[y_1y_4y_3]ba^{-1}b^{-1} \\ &\sim ba^{-1}b^{-1}a[y_1y_4y_3] \quad \text{permutando} \\ &\sim aba^{-1}b^{-1}[y_1y_4y_3] \quad \text{reetiquetando} \\ &= w'''. \end{aligned}$$

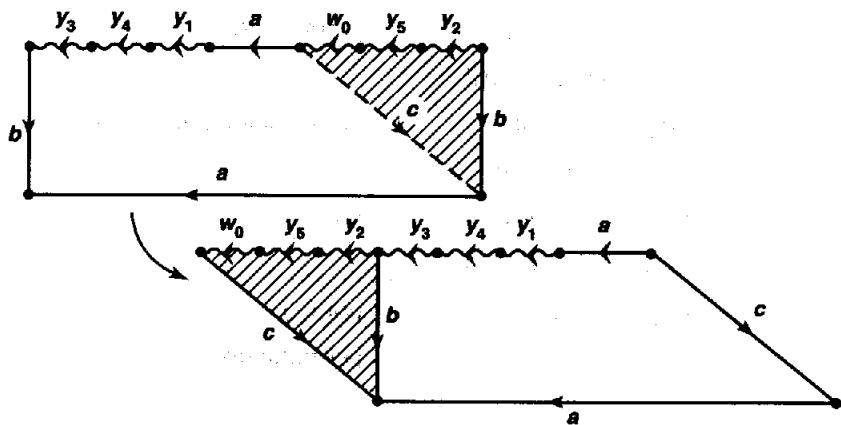


Figura 77.5

En otro caso, se aplica el argumento de la Figura 77.5 para concluir que

$$\begin{aligned} w'' &= w_0 a [y_1 y_4 y_3] b a^{-1} b^{-1} [y_2 y_5] \\ &\sim w_0 c a^{-1} c^{-1} a [y_1 y_4 y_3 y_2 y_5] \\ &\sim w_0 a b a^{-1} b^{-1} [y_1 y_4 y_3 y_2 y_5] \end{aligned}$$

re etiquetando, como queríamos. ■

El paso final de nuestro proceso de clasificación supone probar que una suma conexa de planos proyectivos y toros es equivalente a una suma conexa de planos proyectivos solamente.

Lema 77.4. *Sea w un esquema propio de la forma*

$$w = w_0 (cc) (aba^{-1} b^{-1}) w_1.$$

Entonces w es equivalente al esquema

$$w' = w_0 (aabbc) w_1.$$

Demostración. Recordemos que el Lema 77.1 establece que para esquemas propios se tiene

$$(*) \quad [y_0] a [y_1] a [y_2] \sim aa[y_0 y_1^{-1} y_2].$$

Procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}
 w &\sim (cc)(aba^{-1}b^{-1})w_1w_0 && \text{permutando} \\
 &= cc[ab][ba]^{-1}[w_1w_0] \\
 &\sim [ab]c[ba]c[w_1w_0] && \text{por (*) leído hacia atrás} \\
 &= [a]b[c]b[acw_1w_0] \\
 &\sim bb[ac^{-1}acw_1w_0] && \text{por (*)} \\
 &= [bb]a[c]^{-1}a[cw_1w_0] \\
 &\sim aa[bbccw_1w_0] && \text{por (*)} \\
 &\sim w_0aabbcw_1 && \text{permutando.} \blacksquare
 \end{aligned}$$

Teorema 77.5 (Teorema de clasificación). Sea X el espacio cociente que se obtiene de un polígono pegando sus aristas por pares. Entonces X es homeomorfo ya a S^2 , ya al n -toro T_n , ya al m -plano proyectivo P_m .

*Demuestra*ción. Sea w el esquema para el cual se forma el espacio X a partir del polígono P . Entonces w es un esquema propio de longitud al menos cuatro. Veamos que w es equivalente a uno de los siguientes esquemas:

- (1) $aa^{-1}bb^{-1}$,
- (2) $abab$,
- (3) $(a_1a_1)(a_2a_2)\dots(a_ma_m)$, con $m \geq 2$,
- (4) $(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1})(a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1})\dots(a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1})$, con $n \geq 1$.

El primer esquema da lugar al espacio S^2 , y el segundo a P^2 , como observamos en los Ejemplos 2 y 4 de §74. El tercero conduce al espacio P_m y el cuarto a T_n .

Paso 1. Sea w un esquema propio de tipo toro. Veamos que w es equivalente ya a un esquema como (1), ya a uno como (4).

Si w tiene longitud cuatro, entonces se puede escribir de una de las formas

$$aa^{-1}bb^{-1} \quad \text{ ó } \quad aba^{-1}b^{-1}.$$

El primero es de tipo (1) y el segundo de tipo (4).

Procederemos por inducción sobre la longitud de w . Supongamos que w tiene longitud mayor que cuatro. Si w es equivalente a un esquema más corto de tipo toro, entonces se aplica la hipótesis de inducción. En otro caso, sabemos que w no contiene pares adyacentes de términos con la misma etiqueta. Se aplica el Lema 77.3 (con w_0 vacío) para concluir que w es equivalente a un esquema, con la misma longitud que w , de la forma

$$aba^{-1}b^{-1}w_3$$

donde w_3 es de tipo toro. Obsérvese que w_3 no es vacío, ya que w tiene longitud mayor que cuatro. De nuevo, w_3 no puede contener dos términos adyacentes con la

misma etiqueta, puesto que w no es equivalente a un esquema más corto de tipo toro. Aplicando el lema de nuevo, con $w_0 = aba^{-1}b^{-1}$, se concluye que w es equivalente a un esquema de la forma

$$(aba^{-1}b^{-1})(cdc^{-1}d^{-1})w_4$$

donde w_4 es vacío o de tipo toro. Si w_4 es vacío, ya se ha terminado; de lo contrario se aplica de nuevo el lema. Y así sucesivamente.

Paso 2. Sea ahora w un esquema propio de tipo proyectivo. Veamos que w es equivalente ya a un esquema como (2), ya a uno como (3).

Si w tiene longitud cuatro, el Corolario 77.2 implica que w es equivalente a uno de los esquemas $aabb$ o $aab^{-1}b$. El primero es de tipo (3). El segundo se puede escribir de la forma $aay_1^{-1}y_2$, con $y_1 = y_2 = b$; entonces el Lema 77.1 implica que es equivalente al esquema $ay_1ay_2 = abab$, que es de tipo (2).

Procederemos por inducción sobre la longitud de w . Supongamos que w tiene longitud mayor que cuatro. El Corolario 77.2 nos dice que w es equivalente a un esquema de la forma

$$w' = (a_1a_1) \cdots (a_k a_k) w_1$$

donde $k \geq 1$ y w_1 es de tipo toro o vacío. Si w_1 es vacío, ya hemos acabado. Si w_1 tiene dos términos adyacentes con la misma etiqueta, entonces w' es equivalente a un esquema más corto de tipo proyectivo y se aplica la hipótesis de inducción. En otro caso, el Lema 77.3 nos dice que w' es equivalente a un esquema de la forma

$$w'' = (a_1a_1) \cdots (a_k a_k) aba^{-1}b^{-1} w_2$$

donde w_2 es vacío o de tipo toro. Entonces se aplica el Lema 77.4 para concluir que w'' es equivalente al esquema

$$(a_1a_1) \cdots (a_k a_k) aabbw_2.$$

Se continúa de la misma manera. Finalmente se consigue un esquema de tipo (3). ■

Ejercicios

1. Sea X un espacio obtenido pegando pares de aristas de un polígono.

- (a) Demuestre que X es homeomorfo a exactamente uno de los espacios de la lista siguiente: S^2 , P^2 , K , T_n , $T_n \# P^2$, $T_n \# K$, donde K es la botella de Klein y $n \geq 1$.

- (b) Demuestre que X es homeomorfo a exactamente uno de los espacios de la lista siguiente: S^2 , T_n , P^2 , K_m , $P^2 \# K_m$, donde K_m es la suma conexa de m botellas de Klein y $m \geq 1$.
2. (a) Escriba la sucesión de operaciones elementales que se necesitan para llevar a cabo los argumentos que se indican en las Figuras 77.1 y 77.2.
- (b) Escriba la sucesión de operaciones elementales que se necesitan para llevar a cabo los argumentos que se indican en las Figuras 77.3, 77.4 y 77.5.
3. La demostración del teorema de clasificación suministra un algoritmo para tomar un esquema propio de un polígono y reducirlo a una de las cuatro formas estándar indicadas en el teorema. Las equivalencias apropiadas son las siguientes:
- $[y_0]a[y_1]a[y_2] \sim aa[y_0y_1^{-1}y_2]$.
 - $[y_0]aa^{-1}[y_1] \sim [y_0y_1]$ si y_0y_1 tiene longitud al menos cuatro.
 - $w_0[y_1]a[y_2]b[y_3]a^{-1}[y_4]b^{-1}[y_5] \sim w_0aba^{-1}b^{-1}[y_1y_4y_3y_2y_5]$.
 - $w_0(cc)(aba^{-1}b^{-1})w_1 \sim w_0aabbc cw_1$.
- Mediante este algoritmo, reduzca cada uno de los siguientes esquemas a una de las formas estándar:
- $abacb^{-1}c^{-1}$.
 - $abca^{-1}cb$.
 - $abbca^{-1}ddc^{-1}$.
 - $abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$.
 - $abcda^{-1}c^{-1}b^{-1}d^{-1}$.
 - $aabdc^{-1}b^{-1}d^{-1}$.
 - $abcdabdc$.
 - $abcdabcd$.
4. Sea w un esquema propio para un polígono de diez lados. Si w es de tipo proyectivo, ¿qué espacio, de los del Teorema 77.5, representa? ¿Cuál si w es de tipo toro?

§78 Construcción de superficies compactas

Para completar nuestra clasificación de las superficies compactas debemos probar que cada superficie compacta conexa se puede obtener pegando pares de aristas de un polígono. En realidad, probaremos algo ligeramente más débil que eso, pues supondremos que la superficie en cuestión posee lo que se llama una *triangulación*. Se define este concepto como sigue:

Definición. Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Un *triángulo curvo* en X es un par (A, h) formado por un subespacio A de X y un homeomorfismo $h : T \rightarrow A$, donde T es una región triangular cerrada del plano. Si e es una arista de T , entonces $h(e)$ se dice que es una *arista* de A ; si v es un vértice de T , entonces $h(v)$ se dirá un *vértice* de A . Una *triangulación* de X es una colección de triángulos curvos A_1, \dots, A_n en X cuya unión es X , tal que para $i \neq j$, la intersección $A_i \cap A_j$ es bien vacía, bien un vértice de ambos A_i y A_j , bien una arista de ambos. Además, si $h_i : T_i \rightarrow A_i$ es el homeomorfismo asociado con A_i , pedimos que cuando $A_i \cap A_j$ sea una arista e de ambos, entonces la aplicación $h_j^{-1} \circ h_i$ defina un homeomorfismo lineal de la arista $h_i^{-1}(e)$ de T_i con la arista $h_j^{-1}(e)$ de T_j . Si X posee una triangulación, se dirá que es *triangulable*.

Es un resultado básico que cada superficie compacta es triangulable. La demostración es larga, pero no excesivamente difícil (véase [A-S] o [D-M]).

Teorema 78.1. Si X es una superficie compacta triangulable, entonces X es homeomorfa al espacio cociente obtenido de una colección de triángulos planos disjuntos pegando sus aristas por pares.

Demostración. Sea A_1, \dots, A_n una triangulación de X , con homeomorfismos correspondientes $h_i : T_i \rightarrow A_i$. Suponemos que los triángulos T_i son disjuntos; entonces las aplicaciones h_i se combinan para definir una aplicación $h : E = T_1 \cup \dots \cup T_n \rightarrow X$ que es automáticamente una aplicación cociente (E es compacto y X es de Hausdorff). Además, como la aplicación $h_j^{-1} \circ h_i$ es lineal, siempre que A_i y A_j se corten en una arista, h pega las aristas de T_i y T_j mediante un homeomorfismo lineal.

Dos cosas tenemos que probar. Primera, tenemos que demostrar que para cada arista e de un triángulo A_i , existe exactamente otro triángulo A_j tal que $A_i \cap A_j = e$. Esto probará que la aplicación cociente h pega las aristas de los triángulos T_i por pares.

La segunda es menos obvia. Tenemos que ver que si la intersección $A_i \cap A_j = v$ es un vértice de ambos, entonces existe una sucesión de triángulos que tiene a v por vértice, comenzando por A_i y acabando en A_j , tal que la intersección de cada dos triángulos consecutivos de la sucesión es una arista de ambos (véase la Figura 78.1).

Si no fuera este el caso, se podría dar una situación como la de la Figura 78.2. Aquí no se puede especificar la aplicación cociente h meramente especificando cómo se pegan las aristas de los triángulos T_i , sino que habría también que indicar cómo se identifican los vértices cuando la identificación no viene forzada por el pegamiento de aristas.

Paso 1. Enfrentémonos, en primer lugar, con el segundo problema. Probaremos que, puesto que el espacio X es una superficie, una situación tal como la que se indica en la Figura 78.2 no se puede presentar.

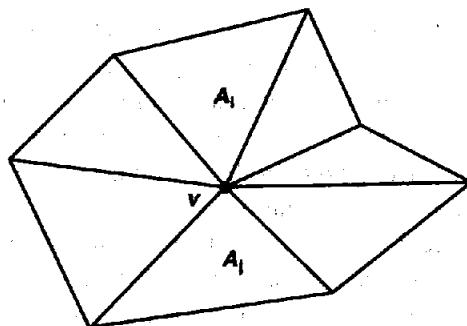


Figura 78.1

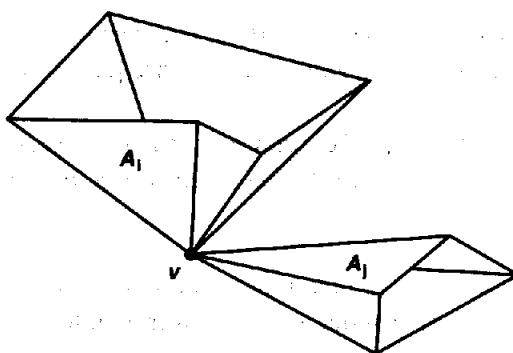


Figura 78.2

Dado v , dos triángulos A_i y A_j que tienen a v como vértice se dirá que son *equivalentes* si existe una sucesión de triángulos que tengan también a v como vértice, comenzando con A_i y acabando con A_j , tal que cada dos triángulos consecutivos se cortan en una arista común. Si existe más de una clase de equivalencia, sea B la unión de los triángulos de una clase y C la unión de los otros. Los conjuntos B y C se cortan solamente en v , ya que ningún triángulo de B tiene una arista común con uno de C . Concluimos que *para cada entorno suficientemente pequeño W de v en X, el espacio $W - v$ no es conexo.*

Por otra parte, si X es una superficie, entonces v tiene un entorno homeomorfo a una 2-bola abierta. En este caso, v tiene entornos W arbitrariamente pequeños tales que $W - v$ es conexo.

Paso 2. Veamos ahora la primera cuestión. Comenzaremos probando que, dada una arista e del triángulo A_i , existe *al menos un* triángulo adicional A_j que tiene a e como arista. Esto es una consecuencia del siguiente resultado:

Si X es un triángulo plano y x es un punto del interior de una de las aristas de X , entonces x no tiene un entorno en X homeomorfo a una 2-bola abierta.

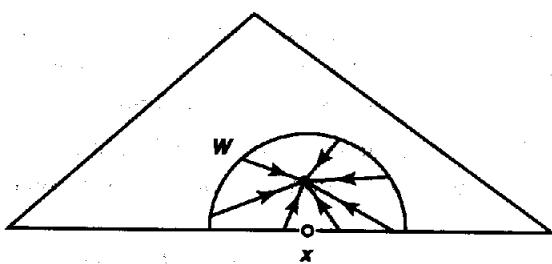


Figura 78.3

Para probar esto, observamos que x tiene entornos arbitrariamente pequeños W para los cuales $W - x$ es simplemente conexo. En efecto, si W es el ϵ -entorno de $x \in X$, para ϵ pequeño, entonces es fácil ver que $W - x$ es contractible a un punto. Véase la Figura 78.3.

Por otro lado, supongamos que existe un entorno U de x que es homeomorfo a una bola abierta de \mathbb{R}^2 , de manera que el homeomorfismo lleve x en el origen 0. Veamos que x no tiene entornos W arbitrariamente pequeños tales que $W - x$ es simplemente conexo!

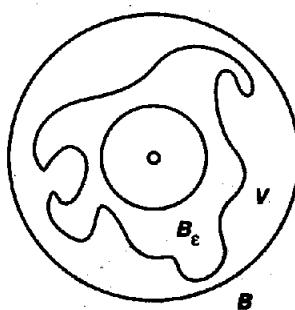


Figura 78.4

En efecto, sea B la bola abierta unidad de \mathbb{R}^2 centrada en el origen, y supongamos que V es un entorno cualquiera de 0 que está contenido en B . Escojamos ϵ de manera que la bola abierta B_ϵ , centrada en el origen y de radio ϵ , esté en V , y consideremos las aplicaciones de inclusión

$$\begin{array}{ccc} B_\epsilon - 0 & \xrightarrow{i} & B - 0 \\ & \searrow j \quad \nearrow k & \\ & V - 0 & \end{array}$$

La inclusión i es homotópica al homeomorfismo $h(x) = x/\epsilon$, así que induce un isomorfismo de grupos fundamentales. Por tanto, k_* es sobreyectiva; se sigue que $V - 0$ no puede ser simplemente conexo. Véase la Figura 78.4.

Paso 3. Ahora probamos que dada una arista e del triángulo A_i , existe *no más de un* triángulo adicional A_j que tiene a e como arista. Es una consecuencia del siguiente resultado:

Sea X la unión de k triángulos en \mathbb{R}^3 , cada par de los cuales se corta en la arista común e . Sea x un punto del interior de e . Si $k \geq 3$, entonces x no tiene un entorno en X homeomorfo a una 2-bola abierta.

Probaremos que no existe entorno alguno W de x en X tal que $W - x$ tenga grupo fundamental abeliano. Se sigue que ningún entorno de x es homeomorfo a una 2-bola abierta.

Para comenzar, veamos que si A es la unión de todas las aristas de los triángulos de X que son distintas de e , entonces el grupo fundamental de A no es abeliano. El espacio A es la unión de una colección de k arcos, cada par de los cuales se corta en sus extremos. Si B es la unión de tres de los arcos que forman A , entonces existe una retracción r de A sobre B , que se obtiene aplicando homeomórficamente cada uno de los arcos que no están en B en uno de los arcos en B , manteniendo fijos los extremos. Entonces r_* es un epimorfismo. Como el grupo fundamental de B no es abeliano (por el Ejemplo 1 de §70 o el Ejemplo 3 de §58), tampoco lo es el grupo fundamental de A .

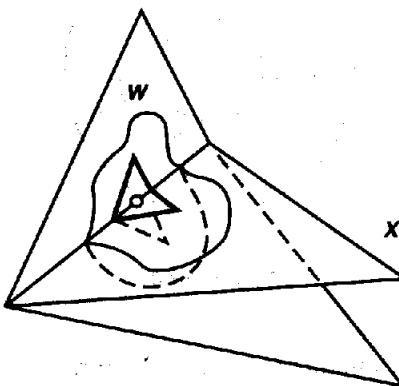


Figura 78.5

Se sigue que el grupo fundamental de $X - x$ no es abeliano, pues es fácil ver que A es un retracto de deformación de $X - x$ (véase la Figura 78.5).

Ahora probamos nuestro resultado. Por conveniencia, supongamos que el punto x es el origen 0 de \mathbb{R}^3 . Si W es un entorno arbitrario de 0 , se puede encontrar una “aplicación de reducción” $f(x) = \epsilon x$, que lleva X en W . El espacio $X_\epsilon = f(X)$ es

una copia de X que está dentro de W . Consideremos las inclusiones

$$\begin{array}{ccccc} X_\epsilon - \mathbf{0} & \xrightarrow{i} & X - \mathbf{0} \\ & \searrow j & \swarrow k \\ & W - \mathbf{0} & \end{array}$$

La inclusión i es homotópica al homeomorfismo $h(x) = x/\epsilon$, así que induce un isomorfismo de grupos fundamentales. Se sigue que k_* es sobreyectiva y por tanto el grupo fundamental de $W - \mathbf{0}$ no puede ser abeliano. ■

Teorema 78.2. Si X es una superficie compacta conexa triangulable, entonces X es homeomorfa a un espacio obtenido de un polígono plano pegando aristas por pares.

Demuestração. Se sigue del teorema anterior que existe una colección T_1, \dots, T_n de triángulos planos, orientaciones y un etiquetado de las aristas de esos triángulos, donde cada etiqueta aparece exactamente dos veces en el esquema total, tal que X es homeomorfo al espacio cociente que se obtiene de esos triángulos por medio de su esquema.

Aplicamos la operación de pegamiento de §76. Si dos triángulos tienen aristas con la misma etiqueta, podemos (después de la inversión de uno de ellos si fuera necesario) pegar los triángulos a lo largo de esas dos aristas. Como resultado se han sustituido dos triángulos por un polígono de cuatro lados, cuyas aristas tienen etiquetas y están orientadas. Continuamos de manera análoga. Siempre que tengamos dos polígonos con aristas con la misma etiqueta, el procedimiento se puede continuar.

Eventualmente se llega a la situación donde bien se tiene un polígono, en cuyo caso el teorema queda probado, bien se llega a varios polígonos de manera que ninguno de cada dos tienen aristas con la misma etiqueta. En tal caso, el espacio que se obtiene realizando los pegamientos indicados de aristas no es conexo; de hecho, cada uno de los polígonos da lugar a una componente conexa del espacio. Como X es conexo, esta situación no puede ocurrir. ■

Ejercicios

1. ¿Cuál es el espacio indicado por cada uno de los siguientes esquemas para una colección de cuatro triángulos?

- (a) abc, dac, bef, cdf .
- (b) abc, cba, def, dfe^{-1} .

2. Sea H^2 el subespacio de \mathbb{R}^2 formado por todos los puntos (x_1, x_2) con $x_2 \geq 0$. Una *2-variedad con borde* (*o superficie con borde*) es un espacio de Hausdorff X con una base numerable tal que cada punto $x \in X$ tiene un entorno homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 o de H^2 . El *borde* de X (escrito ∂X) consiste en los puntos x tales que x no tiene entorno alguno homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 .
- Pruebe que ningún punto de H^2 de la forma $(x_1, 0)$ tiene un entorno (en H^2) homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 .
 - Demuestre que $x \in \partial X$ si, y sólo si, existe un homeomorfismo h de un entorno de x en un abierto de H^2 tal que $h(x) \in \mathbb{R} \times 0$.
 - Pruebe que ∂X es una 1-variedad.
3. Demuestre que la bola unidad cerrada de \mathbb{R}^2 es una 2-variedad con borde.
4. Sea X una 2-variedad; sea U_1, \dots, U_k una colección de abiertos disjuntos de X . Supongamos que para cada i , existe un homeomorfismo h_i de la bola abierta unidad B^2 en U_i . Sean $\epsilon = 1/2$ y B_ϵ la bola abierta de radio ϵ . Pruebe que el espacio $Y = X - \bigcup h_i(B_\epsilon)$ es una 2-variedad con borde y que ∂Y tiene k componentes conexas. El espacio Y se llama “ X -con- k -agujeros”.
5. Demuestre el siguiente:
- Teorema.** *Dada una 2-variedad compacta conexa triangulable con borde Y , tal que ∂Y tiene k componentes, entonces Y es homeomorfa a X -con- k -agujeros, donde X es ya S^2 , ya el n -toro T_n , ya el m -plano proyectivo P_m . [Indicación: cada componente de ∂Y es homeomorfa a un círculo.]*

Capítulo 13

Clasificación de espacios recubridores

Hasta aquí hemos usado espacios recubridores principalmente como una herramienta para calcular grupos fundamentales. Ahora invertimos las cosas y usaremos el grupo fundamental como una herramienta para estudiar espacios recubridores.

Para hacer eso de una forma razonable, nos restringiremos al caso en que B es localmente conexo por caminos. Una vez hecho esto, también podemos pedir que B sea conexo por caminos, puesto que B se descompone en los conjuntos abiertos disjuntos B_α que son sus componentes conexas, y las aplicaciones $p^{-1}(B_\alpha) \rightarrow B_\alpha$ obtenidas por restricción de p son aplicaciones recubridoras, por el Teorema 53.2. Podemos suponer también que E es conexo por caminos. Pues si E_α es una componente conexa de $p^{-1}(B_\alpha)$, entonces la aplicación $E_\alpha \rightarrow B_\alpha$ obtenida por restricción de p es también una aplicación recubridora (véase el Lema 80.1). Por tanto, se pueden determinar todos los recubridores del espacio localmente conexo por caminos B determinando cuáles son conexos por caminos de cada componente conexa de B .

Por esta razón, adoptamos el siguiente:

Convenio. En todo este capítulo, la declaración de que $p : E \rightarrow B$ es una aplicación recubridora incluirá la hipótesis de que E y B son localmente conexos por caminos y conexos por caminos, a menos que se especifique lo contrario.

Con este convenio, vamos a describir la relación entre espacios recubridores de B y el grupo fundamental de B .

Si $p : E \rightarrow B$ es una aplicación recubridora, con $p(e_0) = b_0$, entonces el homomorfismo inducido p_* es inyectivo, por el Teorema 54.6, de manera que

$$H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0))$$

es un subgrupo de $\pi_1(B, b_0)$ isomorfo a $\pi_1(E, e_0)$. Resulta que el subgrupo H_0 determina completamente el recubridor p , salvo una conveniente relación de equivalencia de recubridores. Esto lo veremos en §79. Además, bajo una muy suave condición adicional de “sutiliza local” sobre B , existe, para cada subgrupo H_0 de $\pi_1(B, b_0)$, un recubridor $p : E \rightarrow B$ de B cuyo subgrupo correspondiente es H_0 . Esto se probará en §82.

Dicho sin mucha precisión, estos resultados prueban que podemos determinar todos los espacios recubridores de B simplemente examinando la colección de todos los subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$. Este es el procedimiento clásico de topología algebraica; se “resuelve” un problema de topología reduciéndolo a uno de álgebra, que afortunadamente es más tratable.

A lo largo de este capítulo, suponemos el teorema general de la correspondencia del levantamiento, Teorema 54.6.

§79 Equivalencia de espacios recubridores

En esta sección probamos que el subgrupo H_0 de $\pi_1(B, b_0)$ determina completamente el recubridor $p : E \rightarrow B$, salvo una adecuada noción de equivalencia de recubridores.

Definición. Sean $p : E \rightarrow B$ y $p' : E' \rightarrow B$ aplicaciones recubridoras. Diremos que son *equivalentes* si existe un homeomorfismo $h : E \rightarrow E'$ tal que $p = p' \circ h$. El homeomorfismo h se denomina *equivalencia de aplicaciones recubridoras* o *equivalencia de espacios recubridores*.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & B & \end{array}$$

Dadas dos aplicaciones recubridoras $p : E \rightarrow B$ y $p' : E' \rightarrow B$ cuyos subgrupos correspondientes H_0 y H'_0 son iguales, probaremos que existe una equivalencia $h : E \rightarrow E'$. Para ello, necesitamos generalizar los lemas de levantamiento de §54.

Lema 79.1 (Lema del levantamiento general). Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora y $p(e_0) = b_0$. Sea $f : Y \rightarrow B$ una aplicación continua con $f(y_0) = b_0$. Supongamos que Y es conexo por caminos y localmente conexo por caminos. La aplicación f se puede levantar a una aplicación $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ tal que $\tilde{f}(y_0) = e_0$ si, y sólo si,

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Además, si tal levantamiento existe, es único.

Demostración. Si el levantamiento \tilde{f} existe, entonces

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Esto prueba la parte “sólo si” del teorema.

Ahora probamos que si \tilde{f} existe, es única. Dado $y_1 \in Y$, se elige un camino α en Y desde y_0 hasta y_1 . Se toma el camino $f \circ \alpha$ en B y se levanta a un camino γ en E que comienza en e_0 . Si un tal levantamiento \tilde{f} de f existe, entonces $\tilde{f}(y_1)$ debe ser igual al punto final $\gamma(1)$ de γ , pues $\tilde{f} \circ \alpha$ es un levantamiento de $f \circ \alpha$ que comienza en e_0 , y los levantamientos de caminos son únicos.

Finalmente, probamos la parte “si” del teorema. La parte de unicidad de la demostración nos da una pista de cómo proceder. Dado $y_1 \in Y$, se elige un camino α en Y desde y_0 hasta y_1 . Se levanta el camino $f \circ \alpha$ a un camino γ en E que comienza en e_0 y se define $\tilde{f}(y_1) = \gamma(1)$ (véase la Figura 79.1). Supone un cierto trabajo probar que \tilde{f} está bien definida, es decir, no depende de la elección de α . Una vez probemos esto, la continuidad de \tilde{f} se demuestra fácilmente, como ahora vemos.

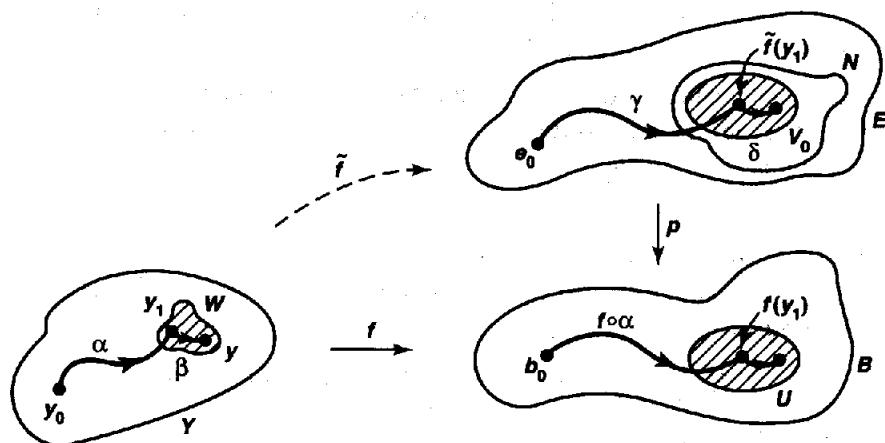


Figura 79.1

Para probar la continuidad de \tilde{f} en el punto $y_1 \in Y$, veamos que, dado un entorno N de $\tilde{f}(y_1)$, existe un entorno W de y_1 tal que $\tilde{f}(W) \subset N$. Para comenzar, se elige un entorno conexo por caminos U de $f(y_1)$ que está regularmente cubierto por p . Descompongamos $p^{-1}(U)$ en rebanadas, y sea V_0 la rebanada que contiene al punto $\tilde{f}(y_1)$. Sustituyendo U por un entorno más pequeño de $f(y_1)$, si fuera necesario, podemos suponer que $V_0 \subset N$. Sea $p_0 : V_0 \rightarrow U$ obtenida por restricción de p ; entonces p_0 es un homeomorfismo. Como f es continua en y_1 e Y es localmente conexo por caminos, podemos encontrar un entorno conexo por caminos W de y_1 tal que $f(W) \subset U$. Probaremos que $\tilde{f}(W) \subset V_0$; entonces el resultado quedará demostrado.

Dado $y \in W$, se elige un camino β en W desde y_1 hasta y . Como \tilde{f} está bien definida, $\tilde{f}(y)$ se puede obtener tomando el camino $\alpha * \beta$ desde y_0 hasta y , levantando el camino $f \circ (\alpha * \beta)$ a un camino en E que empieza en e_0 , y haciendo que $\tilde{f}(y)$ sea el punto final de este levantamiento. Ahora γ es un levantamiento de α que empieza en e_0 . Puesto que el camino $f \circ \beta$ está en U , el camino $\delta = p_0^{-1} \circ f \circ \beta$ es un levantamiento de $f \circ \beta$ que parte de $\tilde{f}(y_1)$. Entonces $\gamma * \delta$ es un levantamiento de $f \circ (\alpha * \beta)$ que parte de e_0 y acaba en el punto $\delta(1) \in V_0$. Por consiguiente, $\tilde{f}(W) \subset V_0$, como deseábamos.

Finalmente, probamos que \tilde{f} está bien definida. Sean α y β dos caminos en Y desde y_0 hasta y_1 . Tenemos que ver qué si levantamos $f \circ \alpha$ y $f \circ \beta$ a caminos en E partiendo de e_0 , entonces ambos levantamientos acaban en el mismo punto de E .

En primer lugar, levantamos $f \circ \alpha$ a un camino γ en E que comienza en e_0 ; luego levantamos $f \circ \beta$ a un camino δ en E que comienza en el punto $\gamma(1)$ de γ . Entonces $\gamma * \delta$ es un levantamiento del lazo $f \circ (\alpha * \beta)$. Ahora por hipótesis,

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Por tanto, $[f \circ (\alpha * \beta)]$ está en la imagen de p_* . El Teorema 54.6 implica que su levantamiento $\gamma * \delta$ es un lazo en E .

Se sigue que \tilde{f} está bien definida, ya que $\tilde{\delta}$ es un levantamiento de $f \circ \beta$ que parte de e_0 y γ es un levantamiento de $f \circ \alpha$ que parte de e_0 , y ambos levantamientos acaban en el mismo punto de E . ■

Teorema 79.2. Sean $p : E \rightarrow B$ y $p' : E' \rightarrow B$ aplicaciones recubridoras; sea $p(e_0) = p'(e'_0) = b_0$. Existe una equivalencia $h : E \rightarrow E'$ tal que $h(e_0) = e'_0$ si, y sólo si, los grupos

$$H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0)) \quad \text{y} \quad H'_0 = p'_*(\pi_1(E', e'_0))$$

son iguales. Si h existe, es única.

Demuestração. Probamos la parte “sólo si” del teorema. Dado h , el hecho de que sea un homeomorfismo implica que

$$h_*(\pi_1(E, e_0)) = \pi_1(E', e'_0).$$

Como $p' \circ h = p$, se tiene que $H_0 = H'_0$.

Ahora probamos la parte “si” del teorema. Suponemos que $H_0 = H'_0$ y demostramos que h existe. Aplicaremos el lema anterior (cuatro veces). Se consideran las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} & E' & \\ & \downarrow p' & \\ E & \xrightarrow{p} & B. \end{array}$$

Como p' es una aplicación recubridora y E es conexo por caminos y localmente conexo por caminos, existe una aplicación $h : E \rightarrow E'$, con $h(e_0) = e'_0$, que es un levantamiento de p (es decir, tal que $p' \circ h = p$). Invirtiendo los papeles de E y E' en este argumento, vemos que existe una aplicación $k : E' \rightarrow E$, con $k(e'_0) = e_0$, tal que $p \circ k = p'$. Ahora se consideran las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ & \downarrow p & \\ E & \xrightarrow{p} & B. \end{array}$$

La aplicación $k \circ h : E \rightarrow E$ es un levantamiento de p (ya que $p \circ k \circ h = p' \circ h = p$), con $p(e_0) = e_0$. La aplicación identidad i_E de E es otro de tales levantamientos. La parte de unicidad del lema anterior implica que $k \circ h = i_E$. Un argumento similar demuestra que $h \circ k = i_{E'}$. ■

Nos parece haber resuelto nuestro problema de equivalencia. Pero hay una sutileza que hemos pasado por alto. Hemos obtenido una condición necesaria y suficiente para la existencia de una equivalencia $h : E \rightarrow E'$ que lleva el punto e_0 en el punto e'_0 . Pero aún no hemos determinado bajo qué condiciones existe una equivalencia en general. Podría ser que no existiera equivalencia llevando e_0 a e'_0 , pero que *existiera* una aplicando e_0 en algún otro punto e'_1 de $(p')^{-1}(b_0)$. ¿Podemos determinar si es éste el caso simplemente examinando los subgrupos H_0 y H'_0 ? Consideraremos ahora este problema.

Si H_1 y H_2 son subgrupos de un grupo G , recordamos de álgebra que aquéllos se dice que son subgrupos **conjugados** si $H_2 = \alpha \cdot H_1 \cdot \alpha^{-1}$, para algún elemento α de G . Dicho de otra manera, los subgrupos son conjugados si el isomorfismo de G en sí mismo que aplica x en $\alpha \cdot x \cdot \alpha^{-1}$ aplica H_1 en H_2 . Es fácil comprobar que la conjugación es una relación de equivalencia en la colección de los subgrupos de G . La clase de equivalencia del subgrupo H se denomina *clase de conjugación* de H .

Lema 79.3. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora. Sean e_0 y e_1 puntos de $p^{-1}(b_0)$ y $H_i = p_*(\pi_1(E, e_i))$.

- (a) Si γ es un camino en E de e_0 a e_1 y α es el lazo $p \circ \gamma$ en B , entonces se satisface la ecuación $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} = H_0$; por consiguiente, H_0 y H_1 son conjugados.
- (b) Recíprocamente, dados e_0 y un subgrupo H de $\pi_1(B, b_0)$ conjugado de H_0 , existe un punto e_1 de $p^{-1}(b_0)$ tal que $H_1 = H$.

Demostración. (a) En primer lugar, probamos que $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} \subset H_0$. Dado un elemento $[h]$ de H_1 , se tiene que $[h] = p_*([\tilde{h}])$, para algún lazo \tilde{h} en E basado en e_1 . Sea \tilde{k} el camino $\tilde{k} = (\gamma * \tilde{h}) * \tilde{\gamma}$; es un lazo en E basado en e_0 y

$$p_*([\tilde{k}]) = [(\alpha * h) * \bar{\alpha}] = [\alpha] * [h] * [\alpha]^{-1},$$

así el último elemento pertenece a $p_*(\pi_1(E, e_0)) = H_0$, como deseábamos (véase la Figura 79.2).

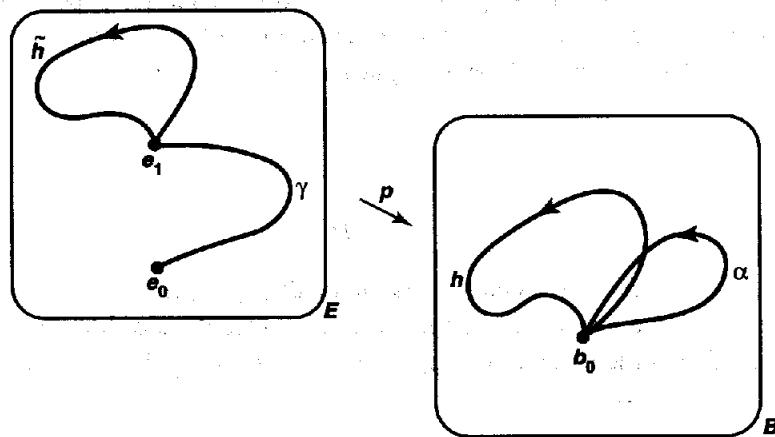


Figura 79.2

Ahora probamos que $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} \subset H_0$. Nótese que $\bar{\gamma}$ es un camino de e_1 a e_0 y $\bar{\alpha}$ es igual al lazo $p \circ \bar{\gamma}$. Por el resultado que se acaba de probar se tiene

$$[\bar{\alpha}] * H_0 * [\bar{\alpha}]^{-1} \subset H_1$$

que implica el resultado deseado.

(b) Para probar el recíproco, sean e_0 un punto dado y H conjugado de H_0 . Entonces $H_0 = [\alpha] * H * [\alpha]^{-1}$ para algún lazo α en B basado en b_0 . Sea γ el levantamiento de α a un camino en E partiendo de e_0 , y sea $e_1 = \gamma(1)$. Entonces (a) implica que $H_0 = [\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1}$. Concluimos que $H = H_1$. ■

Teorema 79.4. Sean $p : E \rightarrow B$ y $p' : E' \rightarrow B$ aplicaciones recubridoras y $p(e_0) = p'(e'_0) = b_0$. Las aplicaciones recubridoras p y p' son equivalentes si, y sólo si, los subgrupos

$$H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0)) \quad \text{y} \quad H'_0 = p'_*(\pi_1(E', e'_0))$$

de $\pi_1(B, b_0)$ son conjugados.

Demostración. Si $h : E \rightarrow E'$ es una equivalencia, sean $e'_1 = h(e_0)$ y $H'_1 = p'_*(\pi_1(E', e'_1))$. El Teorema 79.2 implica que $H_0 = H'_1$, mientras que el lema anterior nos dice que H'_1 es conjugado de H'_0 .

Recíprocamente, si los grupos H_0 y H'_0 son conjugados, el lema anterior implica la existencia de un punto e'_1 de E' tal que $H'_1 = H_0$. El Teorema 79.2 nos da entonces una equivalencia $h : E \rightarrow E'$ tal que $h(e_0) = e'_1$. ■

EJEMPLO 1. Consideremos espacios recubridores del círculo $B = S^1$. Como $\pi_1(B, b_0)$ es abeliano, dos subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$ son conjugados si, y sólo si, son iguales. Por tanto, dos recubridores de B son equivalentes si, y sólo si, se corresponden con el mismo subgrupo de $\pi_1(B, b_0)$.

Ahora bien, $\pi_1(B, b_0)$ es isomorfo a \mathbb{Z} . ¿Cuáles son los subgrupos de \mathbb{Z} ? Un teorema conocido de álgebra dice que un subgrupo no trivial de \mathbb{Z} debe ser el grupo G_n de todos los múltiplos de n , para algún $n \in \mathbb{Z}_+$.

Hemos estudiado un espacio recubridor del círculo, el recubridor $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$. Debe corresponder al subgrupo trivial de $\pi_1(S^1, b_0)$, ya que \mathbb{R} es simplemente conexo. También hemos considerado el recubridor $p : S^1 \rightarrow S^1$ definido por $p(z) = z^n$, donde z es un número complejo. En este caso, la aplicación p_* lleva un generador de $\pi_1(S^1, b_0)$ en n veces él mismo. Por tanto, el grupo $p_*(\pi_1(S^1, b_0))$ se corresponde con el subgrupo G_n de \mathbb{Z} mediante el isomorfismo estándar de $\pi_1(S^1, b_0)$ con \mathbb{Z} .

Concluimos del teorema anterior que cada espacio recubridor conexo por caminos de S^1 es equivalente a uno de estos recubridores.

Ejercicios

- Demuestre que si $n > 1$, cada aplicación continua $f : S^n \rightarrow S^1$ es homotópicamente nula. [Indicación: utilice el lema del levantamiento.]
- (a) Pruebe que cada aplicación continua $f : P^2 \rightarrow S^1$ es homotópicamente nula.
 (b) Encuentre una aplicación continua del toro en S^1 que no sea homotópicamente nula.
- Sean $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora y $p(e_0) = b_0$. Demuestre que $H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$ si, y sólo si, para cada par de puntos e_1, e_2 de $p^{-1}(b_0)$, existe una equivalencia $h : E \rightarrow E$ con $h(e_1) = e_2$.
- Sea $T = S^1 \times S^1$ el toro. Existe un isomorfismo de $\pi_1(T, b_0 \times b_0)$ con $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ inducido por la proyección de T sobre cada uno de sus dos factores.
 - Encuentre un espacio recubridor de T correspondiente al subgrupo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ generado por el elemento $m \times 0$, siendo m un entero positivo.
 - Encuentre un espacio recubridor de T correspondiente al subgrupo trivial de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
 - Encuentre un espacio recubridor de T correspondiente al subgrupo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ generado por $m \times 0$ y $0 \times n$, siendo m y n enteros positivos.
- * Sean $T = S^1 \times S^1$ el toro y $x_0 = b_0 \times b_0$.
 - Pruebe el siguiente resultado:
Teorema. Cada isomorfismo de $\pi_1(T, x_0)$ consigo mismo está inducido por un homeomorfismo de T consigo mismo que aplica x_0 en x_0 .

[*Indicación:* sea $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$ la aplicación recubridora usual. Si A es una matriz 2×2 de elementos enteros, la aplicación lineal $T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con matriz A induce una aplicación continua $f : T \rightarrow T$. Además, f es un homeomorfismo si A es invertible sobre los enteros.]

- (b) Pruebe el siguiente resultado:

Teorema. Si E es un espacio recubridor de T , entonces E es homeomorfo ya a \mathbb{R}^2 , ya a $S^1 \times \mathbb{R}$, ya a T .

[*Indicación:* puede usar el siguiente resultado de álgebra: si F es un grupo abeliano libre de rango 2 y N es un subgrupo no trivial, entonces existe una base a_1, a_2 de F tal que ya (1) ma_1 es una base de N , para algún entero positivo m , ya (2) ma_1, na_2 es una base de N , donde m y n son enteros positivos.]

- *6. Pruebe el siguiente resultado:

Teorema. Sea G un grupo topológico con operación de multiplicación $m : G \times G \rightarrow G$ y con elemento neutro e . Supongamos que $p : \tilde{G} \rightarrow G$ es una aplicación recubridora. Dado \tilde{e} con $p(\tilde{e}) = e$, existe una única operación de multiplicación sobre \tilde{G} que lo convierte en un grupo topológico tal que \tilde{e} es el elemento neutro y p es un homomorfismo.

Demostración. Recuérdese que, por convenio, G y \tilde{G} son conexos por caminos y localmente conexos por caminos.

- (a) Sea $I : G \rightarrow G$ la aplicación $I(g) = g^{-1}$. Demuestre que existen aplicaciones únicas $\tilde{m} : \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ e $\tilde{I} : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$, con $\tilde{m}(\tilde{e} \times \tilde{e}) = \tilde{e}$, $\tilde{I}(\tilde{e}) = \tilde{e}$ tales que $p \circ \tilde{m} = m \circ (p \times p)$ y $p \circ \tilde{I} = I \circ p$.
- (b) Pruebe que las aplicaciones $\tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ dadas por $\tilde{g} \rightarrow \tilde{m}(\tilde{e} \times \tilde{g})$ y $\tilde{g} \rightarrow \tilde{m}(\tilde{g} \times \tilde{e})$ son iguales a la aplicación identidad de \tilde{G} . [*Indicación:* utilice la parte de unicidad del Lema 79.1.]
- (c) Demuestre que las aplicaciones $\tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ dadas por $\tilde{g} \rightarrow \tilde{m}(\tilde{g} \times \tilde{I}(\tilde{g}))$ y $\tilde{g} \rightarrow \tilde{m}(\tilde{I}(\tilde{g}) \times \tilde{g})$ aplican \tilde{G} en \tilde{e} .
- (d) Pruebe que las aplicaciones $\tilde{G} \times \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ dadas por

$$\tilde{g} \times \tilde{g}' \times \tilde{g}'' \rightarrow \tilde{m}(\tilde{g} \times \tilde{m}(\tilde{g}' \times \tilde{g}''))$$

$$\tilde{g} \times \tilde{g}' \times \tilde{g}'' \rightarrow \tilde{m}(\tilde{m}(\tilde{g} \times \tilde{g}') \times \tilde{g}'')$$

son iguales.

- (e) Complete la demostración.

7. Sea $p : \tilde{G} \rightarrow G$ un homomorfismo de grupos topológicos que es una aplicación recubridora. Demuestre que si G es abeliano, también lo es \tilde{G} .

§80 El espacio recubridor universal

Supongamos que $p : E \rightarrow B$ es una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$. Si E es simplemente conexo, entonces E se denomina **espacio recubridor universal** de B . Como $\pi_1(E, e_0)$ es trivial, este espacio recubridor corresponde al subgrupo trivial de $\pi_1(B, b_0)$ bajo la correspondencia definida en la sección anterior. El Teorema 79.4 implica así que cualesquiera dos espacios recubridores de B son equivalentes. Por esta razón, a menudo hablamos de “el” espacio recubridor universal de un espacio dado B . No todo espacio tiene un espacio recubridor universal, como veremos. Por el momento, simplemente supondremos que B tiene un espacio recubridor universal y obtendremos algunas consecuencias de esta hipótesis.

Probamos dos lemas preliminares:

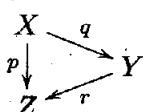
Lema 80.1. *Sea B conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora en el sentido anterior (de manera que no se requiere que E sea conexo por caminos). Si E_0 es una componente conexa por caminos de E , entonces la aplicación $p_0 : E_0 \rightarrow B$ obtenida por restricción de p es una aplicación recubridora.*

Demuestração. Primero probamos que p_0 es sobreyectiva. Como el espacio E es localmente homeomorfo a B , es localmente conexo por caminos. Por tanto, E_0 es abierto en E . Se sigue que $p(E_0)$ es abierto en B . Probamos que $p(E_0)$ es también cerrado en B , así que $p(E_0) = B$.

Sea x un punto de B perteneciente a la clausura de $p(E_0)$. Sea U un entorno conexo por caminos de x que está regularmente cubierto por p . Puesto que U contiene un punto de $p(E_0)$, alguna rebanada V_α de $p^{-1}(U)$ debe cortar a E_0 . Como V_α es homeomorfo a U , es conexo por caminos; por tanto, debe estar contenido en E_0 . Entonces $p(V_\alpha) = U$ está contenido en $p(E_0)$, de manera que en particular, $x \in p(E_0)$.

Ahora probamos que $p_0 : E_0 \rightarrow B$ es una aplicación recubridora. Dado $x \in B$, escogamos un entorno U de x como antes. Si V_α es una rebanada de $p^{-1}(U)$, entonces V_α es conexo por caminos; si corta a E_0 , está en E_0 . Por tanto, $p^{-1}(U)$ es igual a la unión de aquellas rebanadas V_α de $p^{-1}(U)$ que cortan a E_0 ; cada una de ellas es abierta en E_0 y aplicada homeomórficamente por p_0 en U . Así U está regularmente cubierto por p_0 . ■

Lema 80.2. *Sean p, q y r aplicaciones continuas con $p = r \circ q$, como en el siguiente diagrama:*

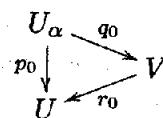


- (a) Si p y r son aplicaciones recubridoras, también lo es q .
 *(b) Si p y q son aplicaciones recubridoras, también lo es r .

Demostración. Por nuestro convenio, X , Y y Z son conexos por caminos y localmente conexos por caminos. Sea $x_0 \in X$; pongamos $y_0 = q(x_0)$ y $z_0 = p(x_0)$.

(a) Supongamos que p y r son aplicaciones recubridoras. Probaremos primero que q es sobreyectiva. Dado $y \in Y$, escojamos un camino $\tilde{\alpha}$ en Y de y_0 a y . Entonces $\alpha = r \circ \tilde{\alpha}$ es un camino en Z partiendo de z_0 ; sea $\tilde{\alpha}$ un levantamiento de α a un camino en X partiendo de x_0 . Entonces $q \circ \tilde{\alpha}$ es un levantamiento de α a Y partiendo de y_0 . Por la unicidad de levantamientos de caminos, $\tilde{\alpha} = q \circ \tilde{\alpha}$. Entonces q aplica el punto final de $\tilde{\alpha}$ en el punto final y de $\tilde{\alpha}$. Por tanto, q es sobreyectiva.

Dado $y \in Y$, encontramos un entorno de y que está regularmente cubierto por q . Sea $z = r(y)$. Como p y r son aplicaciones recubridoras, podemos encontrar un entorno conexo por caminos U de z que está regularmente cubierto por ambas p y r . Sea V la rebanada de $r^{-1}(U)$ que contiene al punto y ; probaremos que V está regularmente cubierto por q . Sea $\{U_\alpha\}$ la colección de rebanadas de $p^{-1}(U)$. Ahora q aplica cada conjunto U_α en el conjunto $r^{-1}(U)$; como U_α es conexo, debe ser aplicado por q en una de las rebanadas de $r^{-1}(U)$. Por tanto, $q^{-1}(V)$ es la unión de aquellas rebanadas U_α que se aplican por q en V . Es fácil ver que cada una de tales U_α se aplica homeomórficamente sobre V por q . Pues sean p_0 , q_0 y r_0 las aplicaciones obtenidas por restricción de p , q y r , respectivamente, como se indica en el siguiente diagrama:



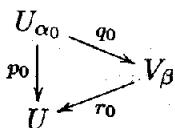
Puesto que p_0 y r_0 son homeomorfismos, así lo es $q_0 = r_0^{-1} \circ p_0$.

*(b) Usaremos este resultado solamente en los ejercicios. Supongamos que p y q son aplicaciones recubridoras. Como $p = r \circ q$ y p es sobreyectiva, r también es sobreyectiva.

Dado $z \in Z$, sea U un entorno conexo por caminos de z que esté regularmente cubierto por p . Probaremos que U también está regularmente cubierto por r . Sea $\{V_\beta\}$ la colección de componentes conexas de $r^{-1}(U)$. Estos conjuntos son disjuntos y abiertos en Y . Veamos que para cada β , la aplicación r lleva homeomórficamente V_β en U .

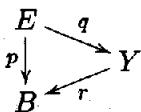
Sea $\{U_\alpha\}$ la colección de rebanadas de $p^{-1}(U)$, que son disjuntas, abiertas y conexas por caminos; por tanto, son las componentes conexas por caminos de $p^{-1}(U)$. Ahora q aplica U_α en el conjunto $r^{-1}(U)$; como U_α es conexo, debe ser aplicado por q en uno de los conjuntos V_β . Por tanto, $q^{-1}(V_\beta)$ es la unión de una subcolección de la colección U_α . El Teorema 53.2 junto con el Lema 80.1 implican que si

U_{α_0} es una cualquiera de las componentes conexas de $q^{-1}(V_\beta)$ entonces la aplicación $q_0 : U_{\alpha_0} \rightarrow V_\beta$ obtenida por restricción de q es una aplicación recubridora. En particular, q_0 es sobreyectiva. Por consiguiente, q_0 es un homeomorfismo, siendo continua, abierta e inyectiva también. Consideremos las aplicaciones



obtenidas por restricción de p , q y r . Como p_0 y q_0 son homeomorfismos, así lo es r_0 . ■

Teorema 80.3. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora, con E simplemente conexo. Dada cualquier aplicación recubridora $r : Y \rightarrow B$, existe una aplicación recubridora $q : E \rightarrow Y$ tal que $r \circ q = p$.



Este teorema demuestra por qué E se denomina recubridor *universal* de B ; recubre cualquier otro espacio recubridor de B .

Demostración. Sea $b_0 \in B$; escojamos e_0 e y_0 tales que $p(e_0) = b_0$ y $r(y_0) = b_0$. Se aplica el Lema 79.1 para construir q . La aplicación r es una aplicación recubridora, y la condición

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) \subset r_*(\pi_1(Y, y_0))$$

se satisface trivialmente, ya que E es simplemente conexo. Por tanto, existe una aplicación $q : E \rightarrow Y$ tal que $r \circ q = p$ y $q(e_0) = y_0$. Se sigue del lema anterior que q es una aplicación recubridora. ■

Ahora damos un ejemplo de un espacio que no tiene recubridor universal. Para ello se necesita el siguiente lema.

Lema 80.4. Sean $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora y $p(e_0) = b_0$. Si E es simplemente conexo, entonces b_0 tiene un entorno U tal que la inclusión $i : U \rightarrow B$ induce el homomorfismo trivial

$$i_* : \pi_1(U, b_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0).$$

Demostración. Sea U un entorno de b_0 regularmente cubierto por p . Se descompone $p^{-1}(U)$ en rebanadas y sea U_α la rebanada que contiene a e_0 . Sea f un lazo en U

basado en b_0 . Como p define un homeomorfismo de U_α con U , el lazo f se levanta a un lazo \tilde{f} en U_α basado en e_0 . Como E es simplemente conexo, existe una homotopía de caminos \tilde{F} en E entre \tilde{f} y un lazo constante. Entonces $p \circ \tilde{F}$ es una homotopía de caminos en B entre f y un lazo constante. ■

EJEMPLO 1. Sea X nuestro familiar “pendiente infinito” en el plano; si C_n es el círculo de radio $1/n$ en el plano con centro en el punto $(1/n, 0)$, entonces X es la unión de los círculos C_n . Sea b_0 el origen; veamos que si U es un entorno cualquiera de b_0 en X , entonces el homomorfismo de grupos fundamentales inducido por la inclusión $i : U \rightarrow X$ no es trivial.

Dado n , existe una retracción $r : X \rightarrow C_n$ obtenida haciendo que r aplique cada círculo C_i , para $i \neq n$, en el punto b_0 . Elijamos n lo suficientemente grande como para que C_n esté en U . Entonces en el siguiente diagrama de homomorfismos inducidos por la inclusión, j_* es inyectiva; por consiguiente, i_* no puede ser trivial.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(C_n, b_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_1(X, b_0) \\ & \searrow k_* & \swarrow i_* \\ & \pi_1(U, b_0) & \end{array}$$

Se sigue que aunque X sea conexo por caminos y localmente conexo por caminos, no posee recubridor universal.

Ejercicios

1. Dadas las aplicaciones $q : X \rightarrow Y$ y $r : Y \rightarrow Z$, sea $p = r \circ q$.
 - Sean q y r aplicaciones recubridoras. Demuestre que si Z tiene un espacio recubridor universal, entonces p es una aplicación recubridora. Compare con el Ejercicio 4 de §53.
 - *(b) Dé un ejemplo donde q y r sean aplicaciones recubridoras pero p no.

*§81 Transformaciones recubridoras

Dada una aplicación recubridora $p : E \rightarrow B$, tiene cierto interés considerar el conjunto de todas las equivalencias de este espacio recubridor con *él mismo*. Tal equivalencia se denomina **transformación recubridora**. Composiciones e inversas de transformaciones recubridoras son transformaciones recubridoras, por tanto este conjunto forma un grupo, que se denomina **grupo de transformaciones recubridoras** y se escribirá $\mathcal{C}(E, p, B)$.

A lo largo de esta sección, supondremos que $p : E \rightarrow B$ es una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$ y pondremos $H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0))$. Probaremos que

el grupo $\mathcal{C}(E, p, B)$ está completamente determinado por el grupo $\pi_1(B, b_0)$ y el subgrupo H_0 . Específicamente, probaremos que si $N(H_0)$ es el mayor subgrupo de $\pi_1(B, b_0)$ del que H_0 es un subgrupo normal, entonces $\mathcal{C}(E, p, B)$ es isomorfo a $N(H_0)/H_0$.

Formalmente definimos $N(H_0)$ como sigue:

Definición. Si H es un subgrupo del grupo G , entonces el **normalizador** de H en G es el subconjunto de G definido por la ecuación

$$N(H) = \{g \mid gHg^{-1} = H\}.$$

Es fácil ver que $N(H)$ es un subgrupo de G . Se sigue de la definición que él contiene a H como subgrupo normal y es el mayor de tales subgrupos de G .

La correspondencia entre los grupos $N(H_0)/H_0$ y $\mathcal{C}(E, p, B)$ se establece mediante la correspondencia de levantamientos de §54 y los resultados sobre la existencia de equivalencias demostrada en §79. Damos la siguiente definición:

Definición. Dada $p : E \rightarrow B$ con $p(e_0) = b_0$, sea F el conjunto $F = p^{-1}(e_0)$. Sea

$$\Phi : \pi_1(B, b_0)/H_0 \rightarrow F$$

la correspondencia de levantamientos del Teorema 54.6; es una biyección. Se define también una correspondencia

$$\Psi : \mathcal{C}(E, p, B) \rightarrow F$$

poniendo $\Psi(h) = h(e_0)$ para cada transformación recubridora $h : E \rightarrow E$. Como h queda únicamente determinada una vez que se conoce su valor en e_0 , la correspondencia Ψ es inyectiva.

Lema 81.1. La imagen de la aplicación Ψ es igual a la imagen por Φ del subgrupo $N(H_0)/H_0$ de $\pi_1(B, b_0)/H_0$.

Demostración. La correspondencia del levantamiento $\Phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow F$ se definía de la siguiente manera: dado un lazo α en B basado en b_0 , sea γ su levantamiento a E partiendo de e_0 . Pongamos $e_1 = \gamma(1)$. Se define Φ por $\Phi([\alpha]) = e_1$. Para probar el lema necesitamos demostrar que existe una transformación recubridora $h : E \rightarrow E$ con $h(e_0) = e_1$ si, y sólo si, $[\alpha] \in N(H_0)$.

El Lema 79.1 dice que h existe si, y sólo si, $H_0 = H_1$, donde $H_1 = p_*(\pi_1(E, e_1))$. Y el Lema 79.3 afirma que $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} = H_0$. Por consiguiente, h existe si, y sólo si, $[\alpha] * H_0 * [\alpha]^{-1} = H_0$, que es simplemente decir que $[\alpha] \in N(H_0)$. ■

Teorema 81.2. *La biyección*

$$\Phi^{-1} \circ \Psi : \mathcal{C}(E, p, B) \rightarrow N(H_0)/H_0$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Sólo necesitamos probar que $\Phi^{-1} \circ \Psi$ es un homomorfismo. Sean $h, k : E \rightarrow E$ transformaciones recubridoras, $h(e_0) = e_1$ y $k(e_0) = e_2$. Entonces

$$\Psi(h) = e_1 \quad \text{y} \quad \Psi(k) = e_2$$

por definición. Escojamos caminos γ y δ en E de e_0 a e_1 y e_2 , respectivamente. Si $\alpha = p \circ \gamma$ y $\beta = p \circ \delta$, entonces

$$\Phi([\alpha]H_0) = e_1 \quad \text{y} \quad \Phi([\beta]H_0) = e_2$$

por definición. Sea $e_3 = h(k(e_0))$; entonces $\Psi(h \circ k) = e_3$. Probemos que

$$\Phi([\alpha * \beta]H_0) = e_3$$

y la demostración quedará completada.

Como δ es un camino de e_0 a e_2 , el camino $h \circ \delta$ va de $h(e_0) = e_1$ a $h(e_2) = h(k(e_0)) = e_3$ (véase la Figura 81.1). Entonces el producto $\gamma * (h \circ \delta)$ está definido y es un camino de e_0 a e_3 . Es un levantamiento de $\alpha * \beta$, ya que $p \circ \gamma = \alpha$ y $p \circ h \circ \delta = p \circ \delta = \beta$. Por tanto, $\Phi([\alpha * \beta]H_0) = e_3$, como deseábamos. ■

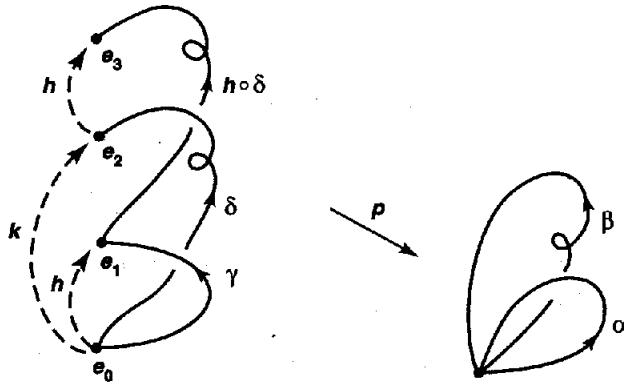


Figura 81.1

Corolario 81.3. *El grupo H_0 es un subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$ si, y sólo si, para cada par de puntos e_1 y e_2 de $p^{-1}(b_0)$, existe una transformación recubridora $h : E \rightarrow E$ con $h(e_1) = e_2$. En este caso, existe un isomorfismo*

$$\Phi^{-1} \circ \Psi : \mathcal{C}(E, p, B) \rightarrow \pi_1(B, b_0)/H_0.$$

Corolario 81.4. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora. Si E es simplemente conexo, entonces

$$\mathcal{C}(E, p, B) \cong \pi_1(B, b_0).$$

Si H_0 es un subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$, entonces $p : E \rightarrow B$ se denomina **aplicación recubridora regular**. (Aquí nos encontramos otro ejemplo de sobreuso de términos familiares. Las palabras “normal” y “regular” han sido ya utilizadas con significados completamente diferentes.)

EJEMPLO 1. Como el grupo fundamental del círculo es abeliano, cada recubridor de S^1 es regular. Si $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ es la aplicación recubridora estándar, por ejemplo, las transformaciones recubridoras son los homeomorfismos $x \rightarrow x + n$. El grupo de tales transformaciones es isomorfo a \mathbb{Z} .

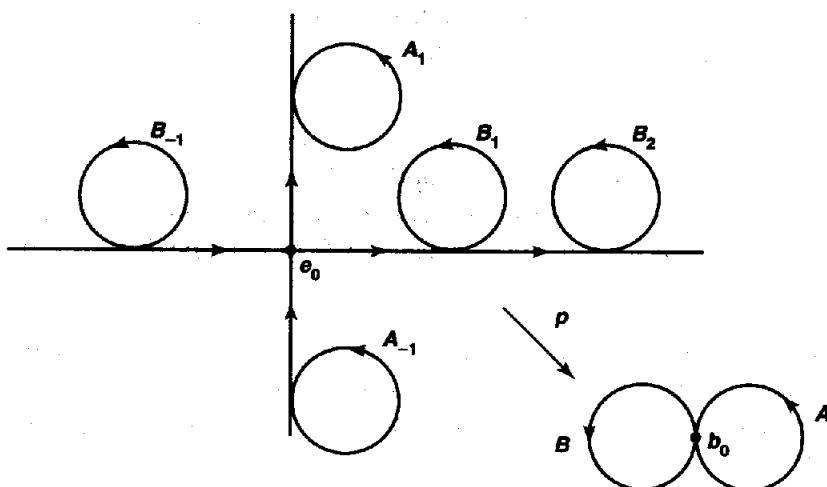


Figura 81.2

EJEMPLO 2. Para dar un ejemplo en el otro extremo, consideremos el espacio recubridor de la figura ocho indicada en la Figura 81.2. (Este recubridor ya fue considerado en §60. El eje x se envuelve alrededor del círculo A y el y alrededor del B . Los círculos A_i y B_i se aplican homeomórficamente en A y B , respectivamente.) En este caso, probamos que el grupo $\mathcal{C}(E, p, B)$ es trivial.

En general, si $h : E \rightarrow E$ es una transformación recubridora, entonces cualquier lazo en el espacio base que se levanta a un lazo en E en e_0 también se levanta a un lazo cuando el levantamiento parte de $h(e_0)$. En el presente caso, un lazo que genera el grupo fundamental de A se levanta a un no-lazo cuando el levantamiento está basado en e_0 y se levanta a un lazo cuando está basado en cualquier otro punto de $p^{-1}(b_0)$ en el eje y . Análogamente, un lazo que genera el grupo fundamental de B se levanta a un no-lazo partiendo de e_0 y a un lazo partiendo de cualquier otro punto de $p^{-1}(b_0)$ en el eje x . Se sigue que $h(e_0) = e_0$, así que h es la aplicación identidad.

Existe un método para construir espacios recubridores que conduce automáticamente a un recubridor que es regular y, en efecto, cada espacio recubridor regular se puede construir por este método. Requiere la *acción* de un grupo G sobre un espacio X .

Definición. Sean X un espacio y G un subgrupo del grupo de homeomorfismos de X consigo mismo. El *espacio de órbitas* X/G se define como el espacio cociente obtenido de X por medio de la relación de equivalencia $x \sim g(x)$ para todo $x \in X$ y todo $g \in G$. La clase de equivalencia de x se denomina *órbita* de x .

Definición. Si G es un grupo de homeomorfismos de X , la acción de G sobre X se dice que es *propiamente discontinua* si para cada $x \in X$ existe un entorno U de x tal que $g(U)$ es disjunto con U siempre que $g \neq e$ (aquí e es el elemento neutro de G). Se sigue que $g_0(U)$ y $g_1(U)$ son disjuntos siempre que $g_0 \neq g_1$, pues de lo contrario U y $g_0^{-1}g_1(U)$ no serían disjuntos.

Teorema 81.5. Sean X conexo por caminos y localmente conexo por caminos y G un grupo de homeomorfismos de X . La aplicación cociente $\pi : X \rightarrow X/G$ es una aplicación recubridora si, y sólo si, la acción de G es propiamente discontinua. En este caso, la aplicación recubridora π es regular y G es su grupo de transformaciones recubridoras.

*Demuestra*ción. Probemos que π es una aplicación abierta. Si U es un abierto en X , entonces $\pi^{-1}\pi(U)$ es la unión de los conjuntos abiertos $g(U)$ de X , para cada $g \in G$. Por consiguiente, $\pi^{-1}\pi(U)$ es abierto en X , así que $\pi(U)$ es abierto en X/G por definición. Así π es abierta.

Paso 1. Suponemos que la acción de G es propiamente discontinua y probamos que π es una aplicación recubridora. Dado $x \in X$, sea U un entorno de x tal que $g_0(U)$ y $g_1(U)$ son disjuntos siempre que $g_0 \neq g_1$. Entonces $\pi(U)$ está regularmente cubierto por π . En efecto, $\pi^{-1}\pi(U)$ es igual a la unión de los conjuntos abiertos disjuntos $g(U)$, para $g \in G$, cada uno de los cuales contiene a lo sumo un punto de cada órbita. Por tanto, la aplicación $g(U) \rightarrow \pi(U)$ obtenida por restricción de π es biyectiva; como es continua y abierta es un homeomorfismo. Los conjuntos $g(U)$, para $g \in G$, forman así una partición de $\pi^{-1}\pi(U)$ en rebanadas.

Paso 2. Suponemos ahora que π es una aplicación recubridora y probamos que la acción de G es propiamente discontinua. Dado $x \in X$, sea V un entorno de $\pi(x)$ que está regularmente cubierto por π . De la partición de $\pi^{-1}(V)$ en rebanadas, sea U_α la que contiene a x . Dado $g \in G$, con $g \neq e$, el conjunto $g(U_\alpha)$ debe ser disjunto con U_α , pues de lo contrario, dos puntos de U_α deberían pertenecer a la misma órbita y la restricción de π a U_α no sería inyectiva. Se sigue que la acción de G es propiamente discontinua.

Paso 3. Probamos que si π es una aplicación recubridora, entonces G es su grupo de transformaciones recubridoras. Desde luego, cualquier $g \in G$ es una transformación recubridora, pues $\pi \circ g = \pi$ ya que la órbita de $g(x)$ es igual a la de x . Por otra parte, sea h una transformación recubridora con $h(x_1) = x_2$, por ejemplo. Como $\pi \circ h = \pi$, los puntos x_1 y x_2 se aplican por π en el mismo punto; por tanto, existe un elemento $g \in G$ tal que $g(x_1) = x_2$. La parte de unicidad del Teorema 79.2 implica entonces que $h = g$.

Se sigue que π es regular. Claramente, para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 en la misma órbita, existe un elemento $g \in G$ tal que $g(x_1) = x_2$. Entonces se aplica el Corolario 81.3. ■

Teorema 81.6. Si $p : X \rightarrow B$ es una aplicación recubridora y G es su grupo de transformaciones recubridoras, entonces existe un homeomorfismo $k : X/G \rightarrow B$ tal que $p = k \circ \pi$, donde $\pi : X \rightarrow X/G$ es la proyección.

$$\begin{array}{ccc} X & = & X \\ \downarrow \pi & & \downarrow p \\ X/G & \xrightarrow{k} & B \end{array}$$

Demostración. Si g es una transformación recubridora, entonces $p(g(x)) = p(x)$ por definición. Por tanto, p es constante sobre cada órbita, lo que induce una aplicación continua k del espacio cociente X/G en B . Por otro lado, p es una aplicación cociente porque es continua, sobreyectiva y abierta. Como p es regular, cualesquier dos puntos de $p^{-1}(b)$ están en la misma órbita bajo la acción de G . Por consiguiente, π induce una aplicación continua $B \rightarrow X/G$ que es la inversa de k . ■

EJEMPLO 3. Sea X el cilindro $S^1 \times I$. Sean $h : X \rightarrow X$ y $k : X \rightarrow X$ los homeomorfismos definidos por $h(x, t) = (-x, t)$ y $k(x, t) = (-x, 1-t)$. Los grupos $G_1 = \{e, h\}$ y $G_2 = \{e, k\}$ son isomorfos a los enteros módulo 2; ambos actúan propiamente discontinuamente sobre X . Pero X/G_1 es homeomorfo a X , mientras que X/G_2 es homeomorfo a la cinta de Möbius, como se puede comprobar (véase la Figura 81.3).



Figura 81.3

Ejercicios

1. (a) Encuentre un grupo G de homeomorfismos del toro T que tenga orden 2 tal que T/G sea homeomorfo al toro.
 (b) Encuentre un grupo G de homeomorfismos de T que tenga orden 2 y que T/G sea homeomorfo a la botella de Klein.
2. Sea $X = A \vee B$ la unión por un punto de dos círculos.
 (a) Sea E el espacio de la Figura 81.4; sea $p : E \rightarrow X$ que envuelve cada arco A_1 y A_2 alrededor de A y aplica B_1 y B_2 homeomórficamente en B . Demuestre que p es una aplicación recubridora regular.

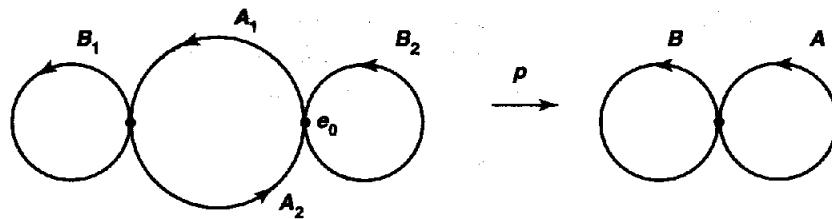


Figura 81.4

- (b) Determine el grupo de transformaciones recubridoras del recubridor de X indicado en la Figura 81.5. ¿Es un recubridor regular?
3. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación recubridora (no necesariamente regular); sea G su grupo de transformaciones recubridoras.
 - Pruebe que la acción de G sobre X es propiamente discontinua.

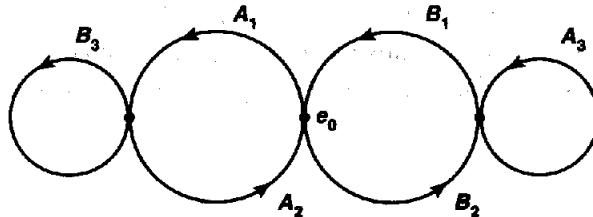


Figura 81.5

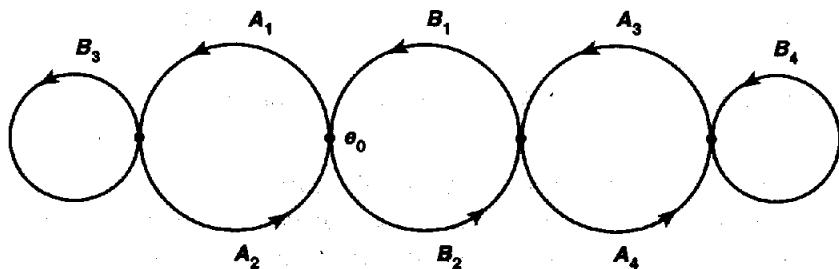


Figura 81.6

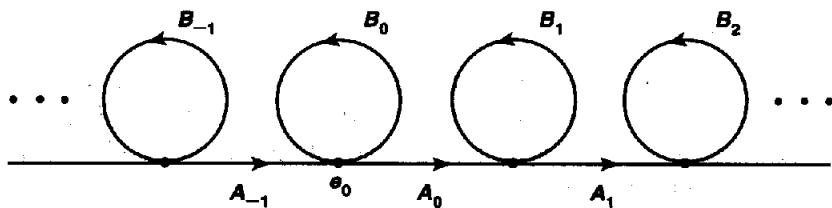


Figura 81.7

- (b) Sea $\pi : X \rightarrow X/G$ la aplicación proyección. Demuestre que existe una aplicación recubridora $k : X/G \rightarrow B$ tal que $k \circ \pi = p$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & X/G \\ p \downarrow & & \swarrow k \\ B & & \end{array}$$

4. Sea G un grupo de homeomorfismos de X . La acción de G sobre X se dice *sin puntos fijos* si ningún elemento de G , que no sea el neutro e , tiene un punto fijo. Demuestre que si X es de Hausdorff y G es un grupo finito de homeomorfismos de X cuya acción es sin puntos fijos, entonces la acción de G es propiamente discontinua.

5. Consideremos S^3 como el espacio de todos los pares de números complejos (z_1, z_2) satisfaciendo la ecuación $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Dados dos enteros positivos coprimos n y k , se define $h : S^3 \rightarrow S^3$ por la ecuación

$$h(z_1, z_2) = (z_1 e^{2\pi i/n}, z_2 e^{2\pi i k/n}).$$

- (a) Demuestre que h genera un subgrupo G del grupo de homeomorfismos de S^3 que es cíclico de orden n , y que sólo el elemento neutro de G tiene un punto fijo. El espacio de órbitas S^3/G se denomina *espacio lente* $L(n, k)$.
- (b) Pruebe que si $L(n, k)$ y $L(n', k')$ son homeomorfos, entonces $n = n'$. [Un teorema dice que $L(n, k)$ y $L(n', k')$ son homeomorfos si, y sólo si,

$n = n'$ y ya $k \equiv k'$ (mód n), ya $kk' \equiv 1$ (mód n). La demostración no es trivial.]

- (c) Demuestre que $L(n, k)$ es una 3-variedad compacta.

6. Pruebe el siguiente resultado:

Teorema. Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto; sea G un grupo de homeomorfismos de X tal que la acción de G es sin puntos fijos. Supongamos que para cada subespacio compacto C de X , existe un número finito de elementos g de G tal que la intersección $C \cap g(C)$ es no vacía. Entonces la acción de G es propiamente discontinua y X/G es de Hausdorff localmente compacto.

Demostración.

- (a) Para cada subespacio compacto C de X , demuestre que la unión de los conjuntos $g(C)$, para $g \in G$, es cerrada en X . [Indicación: si U es un entorno de x con \bar{U} compacto, entonces $\bar{U} \cup C$ corta a $g(\bar{U} \cup C)$ solamente para un número finito de g .]
- (b) Demuestre que X/G es de Hausdorff.
- (c) Pruebe que la acción de G es propiamente discontinua.
- (d) Demuestre que X/G es localmente compacto.

§82 Existencia de espacios recubridores

Hemos demostrado que a cada aplicación recubridora $p : E \rightarrow B$ le corresponde una clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$ y que dos de tales aplicaciones recubridoras son equivalentes si, y sólo si, se corresponden con la misma clase. De este modo, tenemos una correspondencia inyectiva entre clases de equivalencia de recubridores de B y clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$. Ahora nos preguntamos si esa correspondencia es sobreyectiva, es decir, si para cada clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$ existe un recubridor de B correspondiente a esa clase.

La respuesta es “no”, en general. En §80 dimos un ejemplo de un espacio B conexo por caminos y localmente conexo por caminos que no tenía espacio recubridor simplemente conexo, es decir, que no tenía espacio recubridor correspondiente a la clase del subgrupo trivial. Este ejemplo dependía del Lema 80.4, que dio una condición que cualquier espacio que tenga un espacio recubridor simplemente conexo debe satisfacer. Ahora introducimos esta condición formalmente.

Definición. Un espacio B se dice *semilocalmente simplemente conexo* si para cada $b \in B$, existe un entorno U de b tal que el homomorfismo

$$i_* : \pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$$

inducido por la inclusión es trivial.

Observemos que si U satisface esta condición, también lo hace cualquier entorno más pequeño de b , así que b posee “entornos arbitrariamente pequeños” satisfaciendo esta condición. Nótese también que esta condición es más débil que la genuina conexión simple local, la cual requeriría que en cada entorno de b existiera un entorno U de b que fuera simplemente conexo.

Que B sea semilocalmente simplemente conexo es condición necesaria y suficiente para que exista, para cada clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$, un correspondiente espacio recubridor de B . La necesidad se probó en el Lema 80.4; la suficiencia se verá en esta sección.

Teorema 82.1. *Sea B conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semi-localmente simplemente conexo. Sea $b_0 \in B$. Dado un subgrupo H de $\pi_1(B, b_0)$, existen una aplicación recubridora $p : E \rightarrow B$ y un punto $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ tales que*

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = H.$$

Demostración. *Paso 1. Construcción de E .* El procedimiento para construir E recuerda al usado en análisis complejo para la construcción de superficies de Riemann. Sea \mathcal{P} el conjunto de todos los caminos en B que parten de b_0 . Se define una relación de equivalencia en \mathcal{P} poniendo $\alpha \sim \beta$ si α y β acaban en el mismo punto de B y

$$[\alpha * \bar{\beta}] \in H.$$

Es fácil ver que se trata de una relación de equivalencia. La clase de equivalencia del camino α se indicará por $\alpha^\#$.

Sea E la colección de las clases de equivalencia y definamos $p : E \rightarrow B$ por la ecuación

$$p(\alpha^\#) = \alpha(1).$$

Como B es conexo por caminos, p es sobreyectiva. Dotaremos a E de una topología de manera que p sea una aplicación recubridora.

En primer lugar, observemos dos hechos:

- (1) Si $[\alpha] = [\beta]$, entonces $\alpha^\# = \beta^\#$.
- (2) Si $\alpha^\# = \beta^\#$, entonces $(\alpha * \delta)^\# = (\beta * \delta)^\#$, para cualquier camino δ en B partiendo de $\alpha(1)$.

La primera se sigue teniendo en cuenta que si $[\alpha] = [\beta]$, entonces $[\alpha * \bar{\beta}]$ es el elemento neutro, el cual pertenece a H . Y la segunda observando que $\alpha * \delta$ y $\beta * \delta$ acaban en el mismo punto de B y

$$[(\alpha * \delta) * \overline{(\beta * \delta)}] = [(\alpha * \delta) * (\bar{\delta} * \bar{\beta})] = [\alpha * \bar{\beta}]$$

que pertenece a H por hipótesis.

Paso 2. Una topología sobre E . Una manera de definir una topología sobre E consiste en dotar a \mathcal{P} de la topología compacto-abierta (véase el Capítulo 7) y la correspondiente topología cociente sobre E . Pero podemos dotar a E de una topología directamente de la siguiente manera.

Sean α un elemento cualquiera de \mathcal{P} y U un entorno conexo por caminos de $\alpha(1)$. Se define

$$B(U, \alpha) = \{(\alpha * \delta)^\# \mid \delta \text{ es un camino en } U \text{ partiendo de } \alpha(1)\}.$$

Observemos que $\alpha^\#$ es un elemento de $B(U, \alpha)$, ya que si $b = \alpha(1)$ entonces $\alpha^\# = (\alpha * e_b)^\#$; por definición, este elemento pertenece a $B(U, \alpha)$. Afirmando que los conjuntos $B(U, \alpha)$ forman una base para una topología sobre E .

En primer lugar, probamos que si $\beta^\# \in B(U, \alpha)$, se tiene que $\alpha^\# \in B(U, \beta)$ y $B(U, \alpha) = B(U, \beta)$.

Si $\beta^\# \in B(U, \alpha)$, entonces $\beta^\# = (\alpha * \delta)^\#$ para algún camino δ en U . Entonces

$$\begin{aligned} (\beta * \bar{\delta})^\# &= ((\alpha * \delta) * \bar{\delta})^\# && \text{por (2)} \\ &= \alpha^\# && \text{por (1),} \end{aligned}$$

de manera que $\alpha^\# \in B(U, \beta)$ por definición (véase la Figura 82.1). Demostramos primero que $B(U, \beta) \subset B(U, \alpha)$. Nótese que el elemento general de $B(U, \beta)$ es de la forma $(\beta * \gamma)^\#$, donde γ es un camino en U . Entonces se observa que

$$\begin{aligned} (\beta * \gamma)^\# &= ((\alpha * \delta) * \gamma)^\# \\ &= (\alpha * (\delta * \gamma))^\#, \end{aligned}$$

que pertenece a $B(U, \alpha)$ por definición. Por simetría se tiene la inclusión $B(U, \alpha) \subset B(U, \beta)$.

Ahora demostramos que los conjuntos $B(U, \alpha)$ forman una base. Si $\beta^\#$ pertenece a la intersección $B(U_1, \alpha_1) \cap B(U_2, \alpha_2)$, sólo necesitamos escoger un entorno conexo por caminos V de $\beta(1)$ contenido en $U_1 \cap U_2$. La inclusión

$$B(V, \beta) \subset B(U_1, \beta) \cap B(U_2, \beta)$$

se sigue de la definición de estos conjuntos, y la parte derecha de la ecuación es igual a $B(U_1, \alpha_1) \cap B(U_2, \alpha_2)$ por el resultado que acabamos de probar.

Paso 3. La aplicación p es continua y abierta. Es fácil ver que p es abierta, pues la imagen del elemento básico $B(U, \alpha)$ es el subconjunto abierto U de B : dado $x \in U$, elegimos un camino δ en U desde $\alpha(1)$ hasta x ; entonces $(\alpha * \delta)^\#$ está en $B(U, \alpha)$ y $p((\alpha * \delta)^\#) = x$.

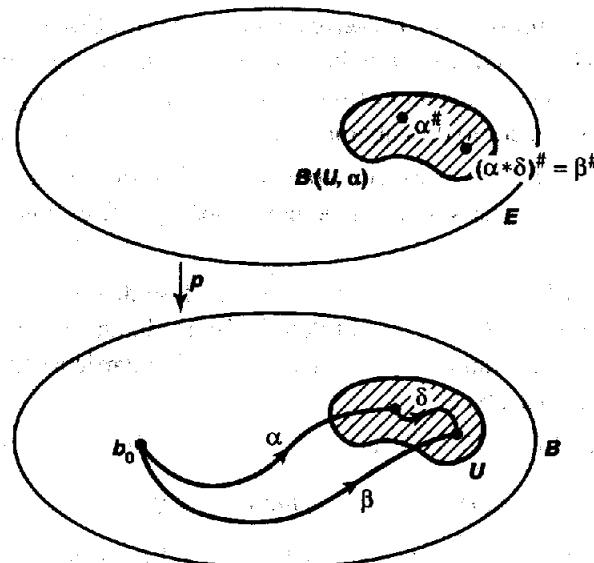


Figura 82.1

Para ver que p es continua, tomemos un elemento $\alpha^\#$ de E y un entorno W de $p(\alpha^\#)$. Elijamos un entorno conexo por caminos U del punto $p(\alpha^\#) = \alpha(1)$ en W . Entonces $B(U, \alpha)$ es un entorno de $\alpha^\#$ que p aplica en W . Así p es continua en $\alpha^\#$.

Paso 4. Cada punto de B tiene un entorno que está regularmente cubierto por p . Dado $b_1 \in B$, tomemos U un entorno conexo por caminos de b_1 que satisface la condición adicional de que el homomorfismo $\pi_1(U, b_1) \rightarrow \pi_1(B, b_1)$ inducido por la inclusión es trivial. Afirmámos que U está regularmente cubierto por p .

En primer lugar, probamos que $p^{-1}(U)$ es igual a la unión de los conjuntos $B(U, \alpha)$, cuando α recorre todos los caminos en B de b_0 a b_1 . Como p aplica cada conjunto $B(U, \alpha)$ sobre U , está claro que $p^{-1}(U)$ contiene la unión. Por otra parte, si $\beta^\#$ pertenece a $p^{-1}(U)$, entonces $\beta(1) \in U$. Escojamos un camino δ en U desde b_1 hasta $\beta(1)$ y sea α el camino $\beta * \bar{\delta}$ de b_0 a b_1 . Entonces $[\beta] = [\alpha * \delta]$, de manera que $\beta^\# = (\alpha * \delta)^\#$, que pertenece a $B(U, \alpha)$. Así $p^{-1}(U)$ está contenido en la unión de los conjuntos $B(U, \alpha)$.

En segundo lugar, observemos que los distintos conjuntos $B(U, \alpha)$ son disjuntos. Pues si $\beta^\# \in B(U, \alpha_1) \cap B(U, \alpha_2)$, entonces $B(U, \alpha_1) = B(U, \beta) = B(U, \alpha_2)$, por el Paso 2.

En tercer lugar, demostramos que p define una aplicación biyectiva entre $B(U, \alpha)$ y U . Se sigue que $p|B(U, \alpha)$ es un homeomorfismo, siendo biyectiva, continua y abierta. Ya sabemos que p aplica $B(U, \alpha)$ sobre U . Para probar la inyectividad, supongamos que

$$p((\alpha * \delta_1)^\#) = p((\alpha * \delta_2)^\#),$$

donde δ_1 y δ_2 son caminos en U . Entonces $\delta_1(1) = \delta_2(1)$. Como el homomorfismo $\pi_1(U, b_1) \rightarrow \pi_1(B, b_1)$ inducido por la inclusión es trivial, $\delta_1 * \bar{\delta}_2$ es un camino homotópico en B al lazo constante. Entonces $[\alpha * \delta_1] = [\alpha * \delta_2]$, de manera que $(\alpha * \delta_1)^\# = (\alpha * \delta_2)^\#$, como deseábamos.

Se sigue que $p : E \rightarrow B$ es una aplicación recubridora en el sentido de los capítulos anteriores. Para ver si lo es, debemos probar que E es conexo por caminos, lo que haremos en breve.

Paso 5. Levantando un camino en B . Sea e_0 la clase de equivalencia del camino constante en b_0 ; entonces $p(e_0) = b_0$ por definición. Dado un camino α en B partiendo de b_0 , calculamos su levantamiento a un camino en E partiendo de e_0 y probamos que este levantamiento acaba en $\alpha^\#$.

Para empezar, dado $c \in [0, 1]$, sea $\alpha_c : I \rightarrow B$ el camino definido por la ecuación

$$\alpha_c(t) = \alpha(tc), \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1.$$

Entonces α_c es el “trozo” de α que va de $\alpha(0)$ a $\alpha(c)$. En particular, α_0 es el camino constante en b_0 y α_1 es el propio camino α . Definimos $\tilde{\alpha} : I \rightarrow E$ por la ecuación

$$\tilde{\alpha}(c) = (\alpha_c)^\#$$

y probamos que $\tilde{\alpha}$ es continua. Entonces $\tilde{\alpha}$ es un levantamiento de α , puesto que $p(\tilde{\alpha}(c)) = \alpha_c(1) = \alpha(c)$; además, $\tilde{\alpha}$ comienza en $(\alpha_0)^\# = e_0$ y acaba en $(\alpha_1)^\# = \alpha^\#$.

Para estudiar la continuidad, introducimos la siguiente notación. Dados $0 \leq c < d \leq 1$, sea $\delta_{c,d}$ el camino que es igual a la aplicación lineal positiva de I sobre $[c, d]$ compuesta con α . Observemos que los caminos α_d y $\alpha_c * \delta_{c,d}$ son homotópicos porque uno es justamente una reparametrización del otro (véase la Figura 82.2).

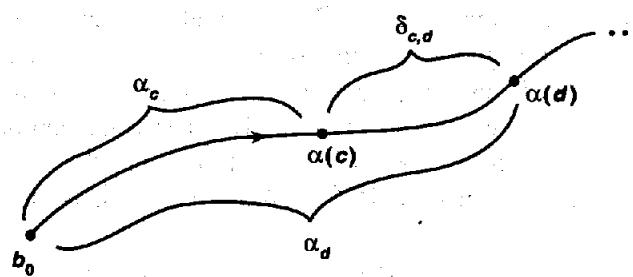


Figura 82.2

Verificamos ahora la continuidad de $\tilde{\alpha}$ en el punto c de $[0, 1]$. Sea W un elemento básico en E alrededor del punto $\tilde{\alpha}(c)$. Entonces W es igual a $B(U, \alpha_c)$ para algún entorno conexo por caminos U de $\alpha(c)$. Escojamos $\epsilon > 0$ tal que para $|c - t| < \epsilon$, el punto $\alpha(t)$ esté en U . Probamos que si d es un punto de $[0, 1]$ satisfaciendo que $|c - d| < \epsilon$, entonces $\tilde{\alpha}(d) \in W$; esto prueba la continuidad de $\tilde{\alpha}$ en c .

Suponemos pues que $|c - d| < \epsilon$. Tomemos primeramente el caso en que $d > c$. Sea $\delta = \delta_{c,d}$; entonces, como $[\alpha_d] = [\alpha_c * \delta]$, tenemos

$$\tilde{\alpha}(d) = (\alpha_d)^\# = (\alpha_c * \delta)^\#.$$

Como δ está en U , tenemos que $\tilde{\alpha}(d) \in B(U, \alpha_c)$, como deseábamos. Si $d < c$, ponemos $\delta = \delta_{d,c}$ y procedemos de manera análoga.

Paso 6. La aplicación $p : E \rightarrow B$ es una aplicación recubridora. Solamente necesitamos verificar que E es conexo por caminos, y esto es fácil. Pues si $\alpha^\#$ es un punto cualquiera de E , entonces el levantamiento $\tilde{\alpha}$ del camino α es un camino en E de e_0 a $\alpha^\#$.

Paso 7. Finalmente, $H = p_(\pi_1(E, e_0))$.* Sea α un lazo en B basado en b_0 . Sea $\tilde{\alpha}$ su levantamiento a E partiendo de e_0 . El Teorema 54.6 nos dice que $[\alpha] \in p_*(\pi_1(E, e_0))$ si, y sólo si, $\tilde{\alpha}$ es un lazo en E . Ahora bien, el punto final de $\tilde{\alpha}$ es el punto $\alpha^\#$, y $\alpha^\# = e_0$ si, y sólo si, α es equivalente al lazo constante en b_0 , es decir, si, y sólo si, $[\alpha * \bar{e}_{b_0}] \in H$. Esto ocurre precisamente cuando $[\alpha] \in H$. ■

Corolario 82.2. *El espacio B tiene un espacio recubridor universal si, y sólo si, B es conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo.*

Ejercicios

1. Demuestre que un espacio simplemente conexo es semilocalmente simplemente conexo.
2. Sea X el pendiente infinito en \mathbb{R}^2 (véase el Ejemplo 1 de §80). Sea $C(X)$ el subespacio de \mathbb{R}^3 que es la unión de todos los segmentos que unen puntos de $X \times 0$ con el punto $p = (0, 0, 1)$. Se denomina **cono** sobre X . Demuestre que $C(X)$ es simplemente conexo, pero no es localmente simplemente conexo en el origen.

*Ejercicios complementarios: propiedades topológicas y π_1

Los resultados de la sección anterior nos dicen que las hipótesis apropiadas para clasificar los espacios recubridores de B son que B sea conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Demostramos ahora que son también las hipótesis correctas para estudiar la relación entre varias propiedades topológicas de B y el grupo fundamental de B .

1. Sean X un espacio y \mathcal{A} un cubrimiento abierto de X . ¿Bajo qué condiciones existe un cubrimiento abierto \mathcal{B} de X que sea un refinamiento de \mathcal{A} tal que para cada par B, B' de elementos de \mathcal{B} que tengan intersección no vacía, la unión $B \cup B'$ está en un elemento de \mathcal{A} ?

- (a) Demuestre que tal cubrimiento \mathcal{B} existe si X es metrizable. [Indicación: elija $\epsilon(x)$ para que $B(x, 3\epsilon(x))$ esté en un elemento de \mathcal{A} . Sea \mathcal{B} la colección de los abiertos $B(x, 3\epsilon(x))$.]
- (b) Demuestre que tal cubrimiento \mathcal{B} existe si X es de Hausdorff compacto. [Indicación: sea A_1, \dots, A_n una subcolección finita de \mathcal{A} que recubre X . Elija un cubrimiento abierto C_1, \dots, C_n de X tal que $\bar{C}_i \subset A_i$, para cada i . Para cada subconjunto no vacío J de $\{1, \dots, n\}$, se considera el conjunto

$$B_J = \bigcap_{j \in J} A_j - \bigcup_{j \notin J} \bar{C}_j.$$

2. Pruebe el siguiente resultado:

Teorema. Sea X un espacio conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Si X es regular con una base numerable, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es numerable.

Demostración. Sea \mathcal{A} un cubrimiento de X por abiertos conexos por caminos A tal que para cada $A \in \mathcal{A}$ y cada $a \in A$, el homomorfismo $\pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$ inducido por la inclusión es trivial. Sea \mathcal{B} un cubrimiento abierto numerable de X por conjuntos conexos por caminos no vacíos que satisfacen la condición del Ejercicio 1. Elija un punto $p(B) \in B$ para cada $B \in \mathcal{B}$. Para cada par B, B' de elementos de \mathcal{B} para los cuales $B \cap B' \neq \emptyset$, elija un camino $g(B, B')$ en $B \cup B'$ de $p(B)$ a $p(B')$. El camino $g(B, B')$ se denomina *camino selecto*.

Sean B_0 un elemento fijo de \mathcal{B} y $x_0 \in p(B_0)$. Demuestre que si f es un lazo en X basado en x_0 , entonces f es homotópico por caminos a un producto de caminos selectos, como sigue:

- (a) Pruebe que existe una subdivisión

$$0 = t_0 < \dots < t_n = 1$$

de $[0, 1]$ tal que f aplica $[t_{n-1}, t_n]$ en B_0 , y para cada $i = 1, \dots, n-1$, f aplica $[t_{i-1}, t_i]$ en un elemento B_i de \mathcal{B} . Ponga $B_n = B_0$.

- (b) Sea f_i la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ sobre $[t_{i-1}, t_i]$ compuesta con f . Sea $g_i = g(B_{i-1}, B_i)$. Elija un camino α_i en B_i de $f(t_i)$ a $p(B_i)$; si $i = 0$ ó n , sea α_i el camino constante en x_0 . Demuestre que

$$[f_i] * [\alpha_i] = [\alpha_{i-1}] * [g_i].$$

- (c) Demuestre que $[f] = [g_1] * \dots * [g_n]$.

3. Sea $p : E \rightarrow X$ una aplicación recubridora tal que $\pi_1(X, x_0)$ es numerable. Demuestre que si X es regular con una base numerable, entonces también lo es E . [Indicación: sea \mathcal{B} una base numerable para X formada por conjuntos conexos por caminos. Sea \mathcal{C} la colección de componentes conexas por caminos de $p^{-1}(B)$, para $B \in \mathcal{B}$. Compare con el Ejercicio 6 de §53.]

4. Pruebe el siguiente resultado:

Teorema. *Sea X un espacio conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Si X es de Hausdorff compacto, entonces $\pi_1(X, x_0)$ está finitamente generado y, por tanto, es numerable.*

Demostración. Repita la demostración esbozada en el Ejercicio 2, eligiendo que \mathcal{B} sea finita. Como antes, se tiene la ecuación

$$[f] = [g_1] * \cdots * [g_n].$$

Elija, para cada $x \in X$, un camino β_x de x_0 a x ; sea β_{x_0} el camino constante. Si $g = g(B, B')$, defina

$$L(g) = \beta_x * (g * \bar{\beta}_y)$$

donde $x = p(B)$ e $y = p(B')$. Demuestre que

$$[f] = [L(g_1)] * \cdots * [L(g_n)].$$

5. Sea X el pendiente infinito (véase el Ejemplo 1 de §80). Demuestre que X es un espacio de Hausdorff compacto con una base numerable cuyo grupo fundamental es no numerable. [Indicación: sea $r_n : X \rightarrow C_n$ una retracción. Dada una sucesión a_1, a_2, \dots de ceros y unos, demuestre que existe un lazo f en X tal que, para cada n , el elemento $(r_n)_*[f]$ es trivial si, y sólo si, $a_n = 0$.]

Capítulo 14

Aplicaciones a la teoría de grupos

En el capítulo anterior probamos cómo un problema de topología —clasificar espacios recubridores de un espacio B — se puede reducir a un problema de álgebra —clasificar los subgrupos del grupo fundamental de B —. Ahora consideraremos el proceso inverso, reducir un problema de álgebra a uno de topología. El problema de álgebra en cuestión consiste en probar que cualquier subgrupo de un grupo libre es también un grupo libre. Aunque esta afirmación es desde luego creíble, no lo es tanto que su prueba es obvia. Procederemos aplicando la teoría de espacios recubridores a ciertos espacios topológicos llamados *grafos lineales*.

§83 Espacios recubridores de un grafo

Definimos aquí el concepto de grafo lineal (introducido antes en el caso finito) y probamos el teorema básico de que cualquier espacio recubridor de un grafo lineal es también un grafo lineal.

Recordemos que un *arco* A es un espacio homeomorfo al intervalo unidad $[0, 1]$. Los *extremos* de A son los puntos p y q correspondientes a 0 y 1 por el homeomorfismo; son los únicos puntos de A tales que $A - p$ y $A - q$ son conexos. El *interior* de un arco A consiste en A con sus extremos eliminados.

Definición. Un *grafo lineal* es un espacio X que se escribe como la unión de una colección de subespacios A_α , cada uno de los cuales es un arco, tal que:

- (1) La intersección $A_\alpha \cap A_\beta$ de dos arcos es vacía o consiste en un punto que es un extremo de cada uno.
- (2) La topología de X es coherente con los subespacios A_α .

Los arcos A_α se denominan *aristas* de X , y sus interiores *aristas abiertas* de X . Sus extremos se denominan *vértices* de X ; indicamos el conjunto de vértices de X por X^0 .

Si X es un grafo lineal y C es un subconjunto de X que es igual a una unión de aristas y vértices de X , entonces C es cerrado en X . La intersección de C con A_α es cerrada en A_α , puesto que es bien vacía, bien igual a A_α , bien igual a uno o ambos vértices de A_α . Se sigue que cada arista de X es un subconjunto cerrado de X . También que X^0 es un subespacio discreto cerrado de X , ya que cualquier subconjunto de X^0 es cerrado en X .

En el caso de un grafo finito, ya considerado, usamos la condición de Hausdorff en nuestra definición en lugar de la condición (2); se siguió, en aquel caso, que la topología de X era coherente con los subespacios A_α . En el caso de un grafo infinito, esto ya no sería cierto, así que tenemos que suponer la condición de coherencia como parte de la definición. También supondríamos la condición de Hausdorff, pero ya no es necesario, pues se sigue de la condición de coherencia:

Lema 83.1. *Todo grafo lineal es de Hausdorff; de hecho, es normal.*

Demuestra. Sean B y C subconjuntos disjuntos de X . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que cada vértice de X está en B o en C . Escojamos, para cada α , subconjuntos disjuntos U_α y V_α de A_α que sean abiertos en A_α y que contengan a $B \cap A_\alpha$ y $C \cap A_\alpha$, respectivamente. Sean $U = \bigcup U_\alpha$ y $V = \bigcup V_\alpha$. Entonces $B \subset U$ y $C \subset V$.

Veamos que los conjuntos U y V son disjuntos. Si $x \in U \cap V$, entonces $x \in U_\alpha \cap V_\beta$, para algún $\alpha \neq \beta$. Esto implica que A_α y A_β contienen el punto x , lo que significa que x es un vértice de X . Esto es imposible, pues si $x \in B$, entonces x no está en ningún V_β , y si $x \in C$, entonces x no está en ningún U_α .

Ahora demostramos que U y V son abiertos en X . Para probar que U es abierto, probamos que $U \cap A_\alpha = U_\alpha$ para cada α . Por definición, $U \cap A_\alpha$ contiene a U_α . Si x es un punto de $U \cap A_\alpha$ que no está en U_α , entonces x pertenece a U_β , para algún $\beta \neq \alpha$. Entonces ambos A_α y A_β contienen a x , así que x debe ser un vértice de X . Esto es imposible, pues si $x \in B$, entonces $x \in U_\alpha$ por definición de U_α , y si $x \in C$, entonces x no puede pertenecer a U . ■

EJEMPLO 1. Si X es la unión por un punto de los círculos S_α , con punto común p , entonces X se puede expresar como un grafo lineal. Simplemente se necesita escribir cada S_α como un grafo con tres aristas, siendo p uno de sus vértices; entonces X es una unión de arcos. Para probar que la topología de X es coherente con la colección de arcos resultante, observamos que si $D \cap A_\alpha$ es cerrado en A_α , para cada arco A_α , entonces $D \cap S_\beta$ es la unión de tres conjuntos de la forma $D \cap A_\alpha$ y por tanto es cerrado en S_β ; entonces D es cerrado en X por definición (véase la Figura 83.1).

EJEMPLO 2. Sea J un espacio discreto y pongamos $E = [0, 1] \times J$. Entonces el espacio cociente X obtenido de E colapsando el conjunto $0 \times J$ a un punto p es un grafo lineal.

La aplicación cociente $\pi : E \rightarrow X$ es una aplicación cerrada. Pues si C es un cerrado en E , entonces $\pi^{-1}\pi(C)$ es igual a $C \cup (\{0\} \times J)$ si C contiene un punto de $0 \times J$, y $\pi^{-1}\pi(C)$ es igual a C en otro caso. En cada caso, $\pi^{-1}\pi(C)$ es cerrado en E , así que $\pi(C)$ es cerrado en X . Se sigue que π aplica cada espacio $[0, 1] \times \alpha$ homeomórficamente sobre su imagen A_α , por tanto A_α es un arco. La topología de X es coherente con los subespacios A_α , ya que π es una aplicación cociente (véase la Figura 83.2).

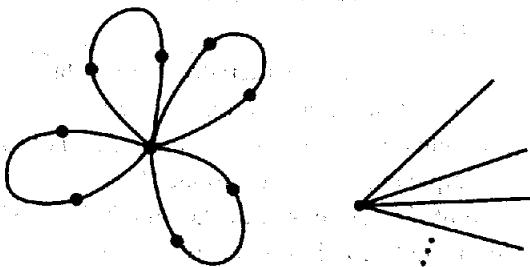


Figura 83.1

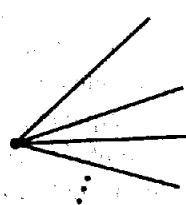


Figura 83.2

Definición. Sea X un grafo lineal. Sea Y un subespacio de X que es una unión de aristas de X . Entonces Y es cerrado en X y es, a su vez, un grafo lineal; se le denomina *subgrafo* de X .

Para probar que Y es un grafo lineal, necesitamos demostrar que la topología relativa sobre Y es coherente con el conjunto de aristas de Y . Si el subconjunto D de Y es cerrado en la topología relativa, entonces D es cerrado en X , de manera que $D \cap A_\alpha$ es cerrado en A_α , para cada arista de X , y en particular para cada arista de Y . Recíprocamente, supongamos que, para cada arista A_β de Y , $D \cap A_\beta$ es cerrado en A_β . Tenemos que probar que $D \cap A_\alpha$ es cerrado en A_α para cada arista A_α de X que no esté contenida en Y . Pero en este caso, $D \cap A_\alpha$ es ya vacío, ya un conjunto unipuntual. Concluimos que Y tiene la topología coherente con su conjunto de aristas.

Lema 83.2. Sea X un grafo lineal. Si C es un subespacio compacto de X , existe un subgrafo finito Y de X que contiene a C . Si C es conexo, Y se puede elegir conexo.

Demarcación. En primer lugar, observemos que C contiene solamente un número finito de vértices de X . Pues $C \cap X^0$ es un subespacio discreto cerrado del espacio compacto C ; como no tiene punto límite, debe ser finito. Análogamente, sólo existe un número finito de valores de α para los cuales C contiene un punto interior de la arista A_α . Pues si elegimos un punto x_α de C interior a A_α , para cada índice α para el cual esto es posible, obtenemos una colección $B = \{x_\alpha\}$ cuya intersección con

cada arista A_β es un conjunto unipuntual o vacío. Se sigue que cada subconjunto de B es cerrado en X , así que B es un subespacio discreto cerrado de C y, por tanto, finito.

Formamos Y eligiendo, para cada vértice x de X que pertenece a C , una arista de X que tenga a x por vértice, y añadiendo a esas aristas todos los vértices A_α cuyos interiores contienen puntos de C . Entonces Y es un subgrafo finito que contiene a C . Notemos que si C es conexo, entonces Y es la unión de una colección de arcos cada uno de los cuales interseca a C , así que Y es conexo. ■

Lema 83.3. Si X es un grafo lineal, entonces X es localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo.

Demostración. *Paso 1.* Demostramos que X es localmente conexo por caminos. Si $x \in X$ es un punto interior de alguna arista de X , entonces en cada entorno de x existe otro entorno de x homeomorfo a un intervalo abierto de \mathbb{R} , que es conexo por caminos. Por otro lado, si x es un vértice de X y U es un entorno de x , entonces podemos elegir, para cada arista A_α teniendo a x como un extremo, un entorno V_α de x en A_α contenido en U que es homeomorfo al intervalo semiabierto por la derecha $[0, 1)$. Entonces $\bigcup V_\alpha$ es un entorno de x en X contenido en U , y es una unión de espacios conexos por caminos que tienen en común el punto x .

Paso 2. Veamos que X es semilocalmente simplemente conexo. Es decir, demostraremos que si $x \in X$, entonces x tiene un entorno U tal que $\pi_1(U, x)$ es trivial.

Si x está en el interior de alguna arista de X , entonces el interior de esta arista es dicho entorno. Así supongamos que x es un vértice de X . Denotemos por $\overline{\text{St}}(x)$ la unión de aquellas aristas de X que tienen a x como un extremo, y por $\text{St}(x)$ el subespacio de $\overline{\text{St}}(x)$ obtenido eliminando todos los vértices distintos de x ($\text{St}(x)$ se llama la *estrella* de x en X). El conjunto $\text{St}(x)$ es abierto en X , porque su complementario es una unión de arcos y vértices. Probamos que $\pi_1(\text{St}(x), x)$ es trivial.

Sea f un lazo en $\text{St}(x)$ basado en x . Entonces el conjunto imagen $f(I)$ es compacto, por tanto está en alguna unión finita de arcos de $\overline{\text{St}}(x)$. Cualquier unión de este tipo es homeomorfa a la unión de un conjunto finito de segmentos en el plano que tienen en común un extremo. Y para cada lazo en tal espacio, la homotopía por rectas lo reduce al lazo constante en x . ■

Ahora bien, si x es un vértice de X , es cierto que el espacio unipuntual $\{x\}$ es un retracto de deformación de $\overline{\text{St}}(x)$. Pero se requiere un considerable esfuerzo para probar que la deformación es continua. Se necesita el hecho de que una aplicación

$$F : \overline{\text{St}}(x) \times I \rightarrow \overline{\text{St}}(x)$$

es continua si su restricción a cada subespacio $A_\alpha \times I$ es continua. Este resultado se sigue del lema del pegamiento cuando $\overline{\text{St}}(x)$ es una unión de un número finito

de arcos, pero el resultado general requiere demostrar que la topología de $\overline{St}(x) \times I$ es coherente con los subespacios $A_\alpha \times I$. Y esto a su vez se sigue de un teorema básico sobre productos de aplicaciones cociente (véase el Ejercicio 11 de §29). Estas consideraciones no surgen si simplemente se desea reducir un lazo a un punto (más bien que el espacio entero $\overline{St}(x)$), ya que cualquier lazo está en la unión de un número finito de aristas, donde no hay problema.

Ahora discutiremos espacios recubridores de grafos lineales. Nótese que el convenio de que cada espacio recubridor se supone que es conexo por caminos y localmente conexo por caminos, hipótesis que hicimos en el último capítulo, ya no se aplica.

Teorema 83.4. *Sea $p : E \rightarrow X$ una aplicación recubridora, donde X es un grafo lineal. Si A_α es una arista de X y B es una componente conexa de $p^{-1}(A_\alpha)$, entonces p aplica B homeomórficamente sobre A_α . Además, el espacio E es un grafo lineal, con las componentes conexas de los espacios $p^{-1}(A_\alpha)$ como sus aristas.*

Demuestração. *Paso 1.* Probemos que p aplica B homeomórficamente sobre A_α . Como el arco A_α es conexo por caminos y localmente conexo por caminos, los Teoremas 53.2 y 80.1 nos dicen que la aplicación $p_0 : B \rightarrow A_\alpha$, obtenida por restricción de p , es una aplicación recubridora. Puesto que B es conexo por caminos, la correspondencia de levantamientos $\Phi : \pi_1(A_\alpha, a) \rightarrow p_0^{-1}(a)$ es sobreyectiva. Como A_α es simplemente conexo, $p_0^{-1}(a)$ consiste en un único punto (véase el Teorema 54.4). Por consiguiente p_0 es un homeomorfismo.

Paso 2. Puesto que X es la unión de los arcos A_α , el espacio E es la unión de los arcos B que son las componentes conexas de los espacios $p^{-1}(A_\alpha)$. Sean B y B' componentes conexas de $p^{-1}(A_\alpha)$ y $p^{-1}(A_\beta)$, respectivamente, con $B \neq B'$. Probemos que B y B' se cortan a lo sumo en un extremo común. Si A_α y A_β son iguales, entonces B y B' son disjuntas, y si A_α y A_β son disjuntas, así lo son B y B' . Por tanto, si B y B' se cortan, A_α y A_β deben cortarse en un extremo x de cada uno de ellos; entonces $B \cap B'$ consiste en un único punto, que deberá ser un extremo de cada una.

Paso 3. Probemos que E tiene la topología coherente con los arcos B . Ésta es la parte más difícil de la demostración. Sea W un subconjunto de E tal que $W \cap B$ es abierto en B , para cada arco B de E . Probemos que W es abierto en E .

En primer lugar, demostremos que $p(W)$ es abierto en X . Si A_α es una arista de X , entonces $p(W) \cap A_\alpha$ es la unión de los conjuntos $p(W \cap B)$, cuando B recorre todas las componentes conexas de $p^{-1}(A_\alpha)$. Cada uno de los conjuntos $p(W \cap B)$ es abierto en A_α , ya que p aplica B homeomórficamente sobre A_α ; por consiguiente su unión $p(W) \cap A_\alpha$ es abierta en A_α . Como X tiene la topología coherente con los subespacios A_α , el conjunto $p(W)$ es abierto en X .

En segundo lugar, probemos nuestro resultado en el caso especial donde el conjunto W está contenido en una de las rebanadas V de $p^{-1}(U)$, donde U es un abierto

de X que está regularmente recubierto por p . Por el resultado que acabamos de probar, sabemos que el conjunto $p(W)$ es abierto en X . Se sigue que $p(W)$ es abierto en U . Como la aplicación de V sobre U obtenida por restricción de p es un homeomorfismo, W debe ser abierto en V , y por tanto abierto en E .

Finalmente, demostremos nuestro resultado en general. Escojamos un cubrimiento \mathcal{A} de X por abiertos U que estén regularmente recubiertos por p . Entonces las rebanadas V de los conjuntos $p^{-1}(U)$, para $U \in \mathcal{A}$, recubren E . Para cada una de tales rebanadas V , sea $W_V = W \cap V$. El conjunto W_V tiene la propiedad de que para cada arco B de E , el conjunto $W_V \cap B$ es abierto en B , pues $W_V \cap B = (W \cap B) \cap (V \cap B)$ y los conjuntos $W \cap B$ y $V \cap B$ son abiertos en B . El resultado del párrafo anterior implica que W_V es abierto en E . Como W es la unión de los conjuntos W_V , es también abierto en E . ■

Ejercicios

1. En la demostración de normalidad de un grafo lineal X , ¿por qué hicimos la hipótesis de que cada vértice de X pertenece ya a B ya a C ?
2. El *número de Euler* de un grafo lineal X se define como el número de vértices de X menos el número de aristas de X . Es un invariante topológico de X , como veremos más adelante. ¿Cuál es el número de Euler de un arco? ¿de un círculo? ¿de una unión por un punto de n círculos? ¿del grafo completo de n vértices? Si E es un espacio recubridor de n hojas de X , ¿cómo se relacionan los números de Euler de E y X ?

§84 El grupo fundamental de un grafo

Ahora probaremos el teorema básico de que el grupo fundamental de un grafo lineal es un grupo libre. De aquí en adelante nos referiremos a un grafo lineal simplemente como un *grafo*.

Definición. Una *arista orientada* e de un grafo X es una arista de X junto con una ordenación de sus vértices, el primero de los cuales se denomina *vértice inicial* y el segundo *vértice final* de e . Un *trayecto* en X es una sucesión e_1, \dots, e_n de aristas orientadas de X tal que el vértice final de e_i coincide con el vértice inicial de e_{i+1} , para $i = 1, \dots, n-1$. Un trayecto queda completamente especificado por la sucesión de vértices x_0, \dots, x_n , donde x_0 es el vértice inicial de e_1 y x_i es el vértice final de e_i , para $i = 1, \dots, n$. Se dice un trayecto de x_0 a x_n . Se dirá que es un *trayecto cerrado* si $x_0 = x_n$.

Dada una arista orientada e de X , sea f_e la aplicación lineal positiva de $[0,1]$ sobre e ; es un camino desde el punto inicial de e hasta el punto final de e . Entonces, correspondiente al trayecto e_1, \dots, e_n de x_0 a x_n , se tiene el camino

$$f = f_{e_1} * (f_{e_2} * (\dots * f_{e_n}))$$

de x_0 a x_n , donde $f_i = f_{e_i}$, que está determinado de manera única por el trayecto e_1, \dots, e_n . Le llamaremos *camino correspondiente al trayecto* e_1, \dots, e_n . Si el trayecto es cerrado, entonces el camino correspondiente f es un lazo.

Lema 84.1. *Un grafo X es conexo si, y sólo si, cada par de vértices de X se puede unir por un trayecto en X .*

Demostración. Supongamos que X es conexo. Se define $x \sim y$ si existe un trayecto en X de x a y . Para cualquier arista de X , sus extremos están en la misma clase de equivalencia; sea Y_x la unión de todas las aristas cuyos extremos son equivalentes a x . Entonces Y_x es un subgrafo de X y por tanto es cerrado en X . Los subgrafos Y_x forman una partición de X en subespacios cerrados disjuntos; como X es conexo, sólo puede existir uno de tales subespacios.

Recíprocamente, supongamos que cada par de vértices de X se puede unir por un trayecto. Entonces se pueden unir por un camino en X . Por consiguiente, todos los vértices de X pertenecen a la misma componente de X . Como cada arista es conexa, también pertenece a esta componente. Así pues, X es conexo. ■

Definición. Sea e_1, \dots, e_n un trayecto en el grafo lineal X . Puede ocurrir que para algún i , las aristas orientadas e_i y e_{i+1} sean la misma arista de X pero con orientaciones opuestas. Si esta situación *no* ocurre, entonces el trayecto se dice que es un *trayecto reducido*.

Obsérvese que si esta situación ocurre, entonces se pueden eliminar e_i y e_{i+1} de la sucesión de aristas orientadas y tener todavía un trayecto (siempre que la sucesión original tenga al menos tres aristas). Este proceso de eliminación se denomina *reducción* del trayecto. Permite probar que en cualquier grafo conexo, cada par de vértices distintos se pueden unir por un trayecto reducido (véase la Figura 84.1).

Definición. Un subgrafo T de un grafo X se dice que es un *árbol* en X si T es conexo y T no contiene trayectos reducidos cerrados.

Un grafo lineal formado por una arista es un árbol. El grafo de la Figura 84.2 no es un árbol, pero la supresión del eje e lo convertiría en un árbol. El grafo de la Figura 84.3 es un árbol; la supresión de la arista A dejaría un nuevo árbol.

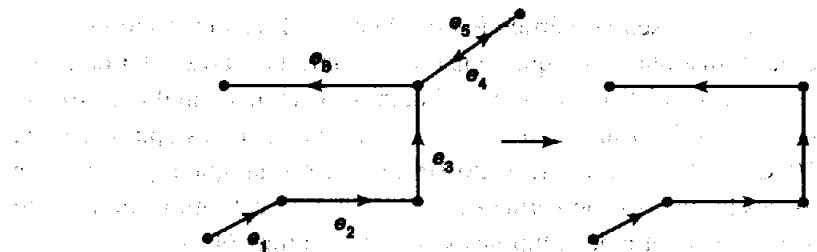


Figura 84.1

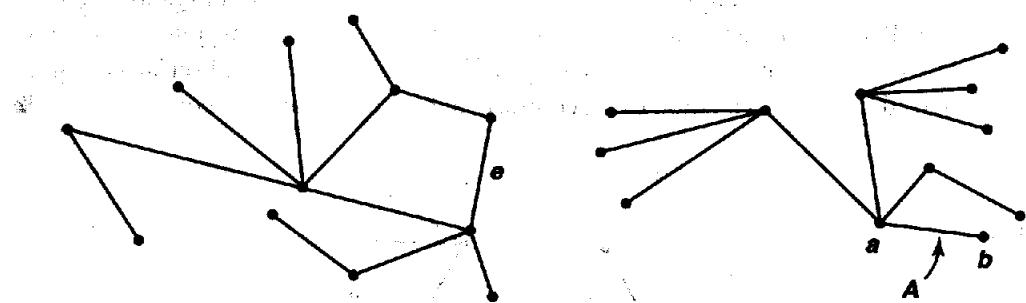


Figura 84.2

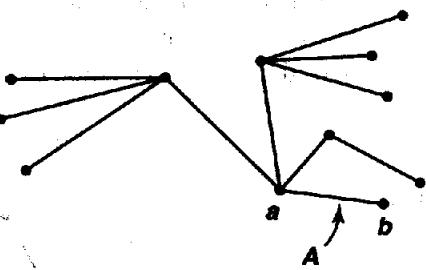


Figura 84.3

Lema 84.2. Si T es un árbol en X y A es una arista de X que corta a T en un vértice, entonces $T \cup A$ es un árbol en X . Recíprocamente, si T es un árbol finito en X que consiste en más de una arista, entonces existen un árbol T_0 en X y una arista A de X que corta a T_0 en un vértice, tal que $T = T_0 \cup A$.

Demostración. Supongamos que T es un árbol en X y que A es una arista que corta a T en un vértice. Está claro que $T \cup A$ es conexo; probemos que no contiene ningún trayecto reducido cerrado. Sean a y b los extremos de A , con $\{a\} = T \cap A$ (véase la Figura 84.3). Supongamos que $x_0, \dots, x_n = x_0$ es la sucesión de vértices de un trayecto reducido en $T \cup A$. Si ninguno de los vértices x_i es igual a b , entonces el trayecto está en T , en contra de la hipótesis. Si $x_i = b$, para algún i , con $0 < i < n$, entonces debemos tener $x_{i-1} = a$ y $x_{i+1} = a$; por tanto el trayecto no es reducido, en contra de la hipótesis. Finalmente, si $x_0 = b = x_n$ y $x_i \neq b$, para $i = 1, \dots, n-1$, entonces $x_1 = a$ y $x_{n-1} = a$, y la sucesión de vértices x_1, \dots, x_{n-1} especifica un trayecto reducido cerrado en T , de nuevo en contra de la hipótesis.

Sea ahora T un árbol finito en X con más de una arista. En primer lugar, probemos que algún vértice b de T pertenece a una sola arista de T . Si no fuera así, podemos construir un trayecto en T como sigue: comenzamos con un vértice x_0 de T ; entonces escogemos una arista e_1 de T que tenga a x_0 como un extremo. Orient-

tamos e_1 de manera que x_0 sea su vértice inicial. Sea x_1 el otro extremo de e_1 , y sea e_2 una arista de T distinta de e_1 que tenga a x_1 como un vértice. Orientamos e_2 de manera que x_1 sea su vértice inicial. Continuamos de manera análoga. No hay dos términos consecutivos de la sucesión e_1, e_2, \dots con orientaciones opuestas de la misma arista de T . Como T es finito, debe existir un índice n tal que $x_n = x_i$, para algún $i < n$. Entonces la sucesión de vértices x_i, x_{i+1}, \dots, x_n determina un trayecto reducido cerrado en T , en contra de la hipótesis (véase la Figura 84.4).

Sea b un vértice de T que pertenezca a una sola arista A de T , y sea T_0 formado por todas las aristas de T distintas de A . Entonces $T = T_0 \cup A$. Como T es conexo, T_0 debe cortar a A en su otro vértice a . Veamos que T_0 es un árbol. Está claro que no contiene trayectos reducidos cerrados, ya que T no contiene ninguno, y que es conexo. Pues si T_0 fuera la unión de dos conjuntos cerrados disjuntos C y D , el punto a estaría en uno de ellos, por ejemplo C . Entonces $C \cup A$ y D serían conjuntos cerrados disjuntos cuya unión es T , contrario al hecho de que T es conexo. ■

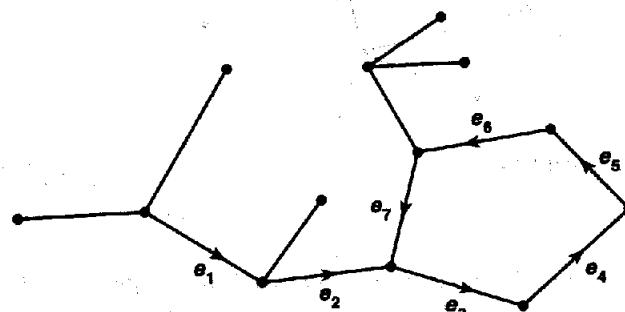


Figura 84.4

Teorema 84.3. Todo árbol T es simplemente conexo.

Demuestra. Primero consideraremos el caso en que T es un árbol finito. Si T consiste en una sola arista, entonces T es simplemente conexo. Si T tiene n aristas, con $n > 1$, existe una arista A de T tal que $T = T_0 \cup A$, donde T_0 es un árbol con $n - 1$ aristas y $T_0 \cap A$ es un vértice. Entonces T_0 es un retracto de deformación de T . Como T_0 es simplemente conexo por la hipótesis de inducción, así lo es T .

Para probar el caso general, sea f un lazo en T . El conjunto imagen de f es compacto y conexo, por tanto está contenido en un subgrafo conexo finito Y de T . Ahora bien, Y no contiene ningún trayecto reducido cerrado, ya que así ocurre con T . Por tanto Y es un árbol. Como Y es finito, es simplemente conexo. Por consiguiente, f es un camino homotópicamente nulo. ■

Definición. Un árbol T en X es *maximal* si no existe árbol alguno en X que contenga propiamente a T .

Teorema 84.4. Sea X un grafo conexo. Un árbol T en X es maximal si, y sólo si, contiene todos los vértices de X .

Demostración. Supongamos que T es un árbol en X que contiene todos los vértices de X . Si Y es un subgrafo de X que contiene propiamente a T , probemos que Y contiene un trayecto reducido cerrado; se sigue que T es maximal. Sea A una arista de Y que no está en T ; por hipótesis, los extremos a y b de A pertenecen a T . Como T es conexo, podemos elegir un trayecto reducido e_1, \dots, e_n en T de a a b . Si seguimos esta sucesión por la arista A , orientada de b a a , obtenemos un trayecto reducido cerrado en Y .

Sea ahora T un árbol en X que no contiene todos los vértices de X . Probemos que T no es maximal. Sea x_0 un vértice de X que no está en T . Como X es conexo, podemos elegir un trayecto en X de x_0 a un vértice de T , especificado por la sucesión de vértices x_0, \dots, x_n . Sea i el menor índice tal que $x_i \in T$. Sea A la arista de X con vértices x_{i-1} y x_i . Entonces $T \cup A$ es un árbol en X , por el lema anterior, y $T \cup A$ contiene propiamente a T . ■

Teorema 84.5. Si X es un grafo lineal, cada árbol T_0 en X está contenido en un árbol maximal en X .

Demostración. Aplicamos el lema de Zorn a la colección \mathcal{T} de todos los árboles en X que contienen a T_0 , estrictamente parcialmente ordenada por la inclusión propia. Para probar que esta colección tiene un elemento maximal, solamente necesitamos demostrar lo siguiente:

Si \mathcal{T}' es una subcolección de \mathcal{T} que está simplemente ordenada por la inclusión propia, entonces la unión Y de los elementos de \mathcal{T}' es un árbol en X .

En primer lugar, observemos que como Y es una unión de subgrafos de X , es un subgrafo de X . En segundo lugar, como Y es una unión de espacios conexos que contienen al espacio conexo T_0 , resulta que Y es conexo.

Finalmente, supongamos que e_1, \dots, e_n es un trayecto reducido cerrado en Y y lleguemos a una contradicción. Para cada i , escojamos un elemento T_i de \mathcal{T}' que contenga a e_i . Puesto que \mathcal{T}' está simplemente ordenada por la inclusión propia, uno de los árboles T_1, \dots, T_n , por ejemplo T_j , contiene a todos los demás. Pero entonces e_1, \dots, e_n es un trayecto reducido cerrado en T_j , en contra de la hipótesis. ■

Ahora calculamos el grupo fundamental de un grafo. Necesitamos el siguiente resultado.

Lema 84.6. Supongamos $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos de X . Supongamos que $U \cap V$ es la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos conexos por caminos A y B , que α es un camino en U desde el punto a de A al punto b de B , y que β es un camino en V de b a a . Si U y V son simplemente conexos, entonces la clase $[\alpha * \beta]$ genera $\pi_1(X, a)$.

Demostración. La situación es similar a la del Teorema 59.1, excepto que $U \cap V$ tiene dos componentes conexas en vez de una. La demostración es análoga.

Sea f un lazo en X basado en a . Elijamos una subdivisión $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ del intervalo $[0, 1]$, tal que para cada i , $f(a_i) \in U \cap V$ y f aplica $[a_{i-1}, a_i]$ ya en U ya en V . Sea f_i la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ sobre $[a_{i-1}, a_i]$ seguida de f ; entonces $[f] = [f_1] * \dots * [f_n]$. Para $i = 1, \dots, n-1$, escojamos un camino α_i ya en A ya en B desde a ó b hasta $f(a_i)$; elijamos α_0 y α_n los caminos constantes en a . Entonces pongamos

$$g_i = \alpha_{i-1} * (f_i * \bar{\alpha}_i).$$

Por cálculo directo $[f] = [g_1] * \dots * [g_n]$. Como g_i es un camino ya en U ya en V con extremos en el conjunto $\{a, b\}$, y como U y V son simplemente conexos, g_i es un camino homotópico ya a una constante, ya a α , β , $\bar{\alpha}$ ó $\bar{\beta}$. Se sigue que bien $[f]$ es trivial, bien es igual a una potencia positiva de $[\alpha * \beta]$ ó de $[\bar{\beta} * \bar{\alpha}]$. Por consiguiente, $[\alpha * \beta]$ genera el grupo $\pi_1(X, a)$ (véase la Figura 84.5). ■

Teorema 84.7. Sea X un grafo conexo que no es un árbol. Entonces el grupo fundamental de X es un grupo libre no trivial. En realidad, si T es un árbol maximal en X , entonces el grupo fundamental de X tiene un sistema de generadores libres que está en correspondencia biyectiva con la colección de aristas de X que no están en T .

Demostración. Sea T un árbol maximal en X ; T contiene a todos los vértices de X . Sea x_0 un vértice fijo de T . Para cada vértice x de X , escojamos un camino γ_x en T de x_0 a x . Entonces para cada arista A de X que no está en T , definamos un lazo g_A en X como sigue. Orientemos A ; sea f_A un camino lineal en A desde su vértice inicial x hasta su vértice final y ; pongamos

$$g_A = \gamma_x * (f_A * \bar{\gamma}_y).$$

Probemos que las clases $[g_A]$ forman un sistema de generadores libres para $\pi_1(X, x_0)$.

Paso 1. En primer lugar probaremos el teorema cuando las aristas de X que no están en T son un número finito. Procederemos por inducción. El proceso de inducción es fácil, por lo que lo consideraremos primero.

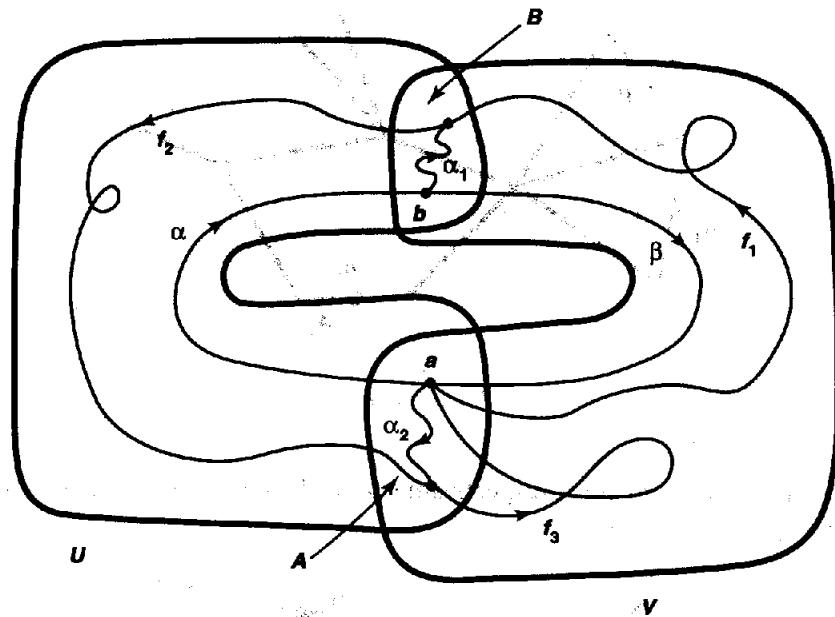


Figura 84.5

Sean A_1, \dots, A_n las aristas de X que no están en T , donde $n > 1$. Orientemos esas aristas y denotemos por g_i el lazo g_{A_i} . Para cada i , escojamos un punto p_i interior a A_i . Sean

$$U = X - p_2 - \cdots - p_n \quad y \quad V = X - p_1.$$

Entonces U y V son abiertos en X y el espacio $U \cap V = X - p_1 - \cdots - p_n$ es simplemente conexo, ya que tiene a T como un retracto de deformación. Por tanto, $\pi_1(X, x_0)$ es el producto libre de los grupos $\pi_1(U, x_0)$ y $\pi_1(V, x_0)$, por el Corolario 70.3.

El espacio U tiene a $T \cup A_1$ como retracto de deformación, de manera que $\pi_1(U, x_0)$ es libre sobre el generador $[g_1]$, como demostraremos en el Paso 2. El espacio V tiene a $T \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ como retracto de deformación, así que $\pi_1(V, x_0)$ es libre sobre los generadores $[g_2], \dots, [g_n]$, por la hipótesis de inducción. Se sigue del Teorema 69.2 que $\pi_1(X, x_0)$ es libre sobre los generadores $[g_1], \dots, [g_n]$ (véase la Figura 84.6).

Paso 2. Ahora consideramos el caso donde hay una sola arista D de X que no está en T . Este paso es más difícil. Orientemos D . Probaremos que $\pi_1(X, x_0)$ es cíclico infinito con generador $[g_D]$.

Sean a_0 y a_1 los vértices inicial y final de D , respectivamente. Escribamos D como la unión de tres arcos: D_1 con extremos a_0 y a ; D_2 con extremos a y b ; y D_3 con extremos b y a_1 (véase la Figura 84.7). Sean f_1, f_2 y f_3 caminos lineales en D

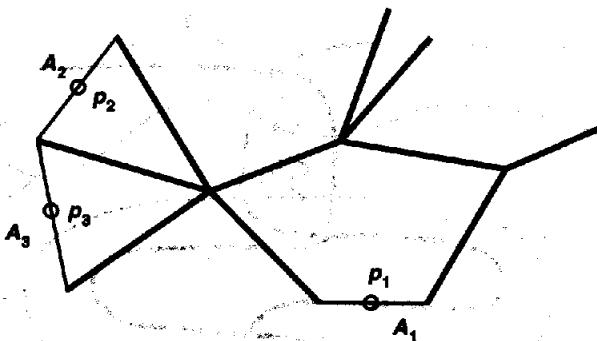


Figura 84.6

de a_0 a a , de a a b y de b a a_1 , respectivamente. Aplicamos el teorema anterior para calcular $\pi_1(X, a)$.

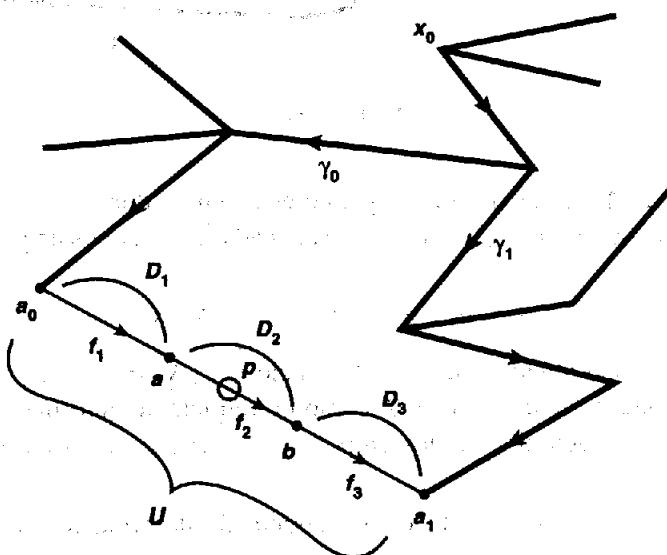


Figura 84.7

Escojamos un punto p interior al arco D_2 . Sean $U = D - a_0 - a_1$ y $V = X - p$. Entonces U y V son abiertos en X cuya unión es X . El espacio U es simplemente conexo, porque es un arco abierto. Y el espacio V es simplemente conexo, porque tiene el árbol T como retrato de deformación. El espacio $U \cap V$, que es igual a $U - p$, tiene dos componentes conexas; sea A la que contiene a a y B la que contiene a b . Entonces la hipótesis del lema anterior se satisface. El camino $\alpha = f_2$ es un camino en U de a a b . Si ponemos $\gamma_0 = \gamma_{a_0}$ y $\gamma_1 = \gamma_{a_1}$, entonces el camino $\beta = (f_3 * (\bar{\gamma}_1 * (\gamma_0 * f_1)))$ es un camino en V de b a a . Por tanto, $\pi_1(X, a)$ está generado

por la clase

$$[\alpha * \beta] = [f_2] * [f_3] * [\bar{\gamma}_1] * [\gamma_0] * [f_1].$$

Se sigue que $\pi_1(X, x_0)$ está generado por $\delta[\alpha * \beta]$, donde δ es el camino $\bar{f}_1 * \bar{\gamma}_0$ de a a x_0 . Calculamos esta clase de homotopía de caminos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\delta[\alpha * \beta] &= [\gamma_0 * f_1] * [\alpha * \beta] * [\bar{f}_1 * \bar{\gamma}_0] \\ &= [\gamma_0] * [f_1 * (f_2 * f_3)] * [\bar{\gamma}_1] \\ &= [\gamma_0] * [f_D] * [\bar{\gamma}_1] \\ &= [g_D].\end{aligned}$$

Por tanto, $[g_D]$ genera $\pi_1(X, x_0)$.

Falta demostrar que el elemento $[g_D]$ tiene orden infinito, de manera que $\pi_1(X, x_0)$ es cíclico infinito. Se puede aplicar el Teorema 63.1 (que utilizamos para probar el teorema de la curva de Jordan), según el cual el elemento $[\alpha * \beta]$ tiene orden infinito en $\pi_1(X, a)$. Alternativamente (y más fácil), se puede considerar la aplicación $\pi : X \rightarrow S^1$ que colapsa el árbol T en un punto p y aplica homeomórficamente el arco abierto $\text{Int } D$ sobre $S^1 - p$. Entonces $\pi \circ \gamma_0$ y $\pi \circ \bar{\gamma}_1$ son caminos constantes, así que

$$\pi_*([g_D]) = [\pi \circ f_D].$$

Esta clase genera $\pi_1(S^1, p)$. Se sigue que $[g_D]$ tiene orden infinito en $\pi_1(X, x_0)$.

Paso 3. Ahora consideraremos la situación donde la colección de aristas de X que no están en T es infinita. La demostración en este caso es muy similar a la correspondiente para una unión infinita por un punto de círculos y por tanto se omiten los detalles (véase el Teorema 71.3). Los hechos cruciales son: cualquier lazo en X basado en x_0 está en el espacio

$$X(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = T \cup A_{\alpha_1} \cup \dots \cup A_{\alpha_n}$$

para algún conjunto finito de índices α_i , y cualquier homotopía de caminos entre tales lazos también está en tal espacio. Pero esto significa que el caso general se reduce al caso finito. ■

Ejercicios

1. Encuentre un ejemplo para probar que la segunda parte del Lema 84.2 no es válida si T es infinito.
2. ¿Cuál es el cardinal de un sistema de generadores libres para el grupo fundamental del grafo completo sobre n vértices? ¿Y el del grafo de servicios? (véase §64).

3. Sean X la unión por un punto de dos círculos y $p : E \rightarrow X$ una aplicación recubridora. El grupo fundamental de E se aplica isomórficamente por p_* en un subgrupo H del grupo fundamental de X ; éste último es libre sobre dos generadores α y β .
- Para cada uno de los cuatro espacios recubridores E dados en el Ejercicio 2 de §81, determine el cardinal de un sistema de generadores libres para el grupo fundamental de E .
 - Para cada uno de esos espacios recubridores, halle, en términos de α y β , un sistema de generadores libres para el subgrupo H del grupo fundamental de X .

§85 Subgrupos de grupos libres

Demostraremos ahora nuestro teorema principal, que un subgrupo de H de un grupo libre F es también libre. El método de demostración, bastante notable, nos proporcionará alguna información acerca del cardinal de un sistema de generadores libres para H , cuando se conoce el cardinal de un sistema de generadores libres para F .

Teorema 85.1. Si H es un subgrupo de un grupo libre F , entonces H es libre.

Demuestração. Sea $\{\alpha \mid \alpha \in J\}$ un sistema de generadores libres para F . Sea X una unión por un punto de círculos S_α , uno para cada $\alpha \in J$; sea x_0 el punto común. Podemos dar a X la estructura de grafo lineal descomponiendo cada círculo S_α en tres arcos, dos de los cuales tienen a x_0 como extremo. La función que asigna a cada α un lazo generando $\pi_1(S_\alpha, x_0)$ induce un isomorfismo de F con $\pi_1(X, x_0)$. Por tanto, podemos también suponer que F es igual al grupo $\pi_1(X, x_0)$.

El espacio X es conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Por tanto el Teorema 82.1 se aplica para probar que existe un espacio recubridor $p : E \rightarrow X$ de X tal que, para algún punto e_0 de $p^{-1}(x_0)$,

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = H.$$

Como p_* es un monomorfismo, $\pi_1(E, e_0)$ es isomorfo a H .

El espacio E es un grafo lineal por el Teorema 83.4. Entonces el Teorema 84.7 implica que su grupo fundamental es un grupo libre. ■

Definición. Si X es un grafo lineal finito, se define el *número de Euler* de X como el número de vértices de X menos el número de aristas de X . Se suele representar por $\chi(X)$.

Lema 85.2. Si X es un grafo lineal conexo finito, entonces el cardinal de un sistema de generadores finito para el grupo fundamental de X es $1 - \chi(X)$.

Demostración. **Paso 1.** En primer lugar probamos que para cualquier árbol finito T , se tiene que $\chi(T) = 1$. Se procede por inducción sobre el número n de aristas de T . Si $n = 1$, entonces T tiene una arista y dos vértices, por tanto $\chi(T) = 1$. Si $n > 1$, podemos escribir $T = T_0 \cup A$, donde T_0 es un árbol con $n - 1$ aristas y A es una arista que corta a T_0 en un vértice. Tenemos que $\chi(T_0) = 1$ por la hipótesis de inducción. El grafo T tiene una arista más y un vértice más que T_0 ; por consiguiente $\chi(T) = \chi(T_0)$.

Paso 2. Ahora probamos el teorema. Dado X , sea T un árbol maximal en X . Si $X = T$, ya hemos terminado. En otro caso, sean A_1, \dots, A_n las aristas de X que no están en T . Entonces el grupo fundamental de X tiene un sistema de n generadores libres. Por otro lado, X y T tienen exactamente el mismo conjunto de vértices, y X tiene n aristas más que T . Por tanto,

$$\chi(X) = \chi(T) - n = 1 - n,$$

así que $n = 1 - \chi(X)$. ■

Definición. Sea H un subgrupo de un grupo G . Si la colección G/H de clases por la derecha de H en G es finita, su cardinal se denomina *índice* de H en G . (La colección de clases por la izquierda de H en G tiene, por supuesto, el mismo cardinal.)

Teorema 85.3. Sean F un grupo libre con $n + 1$ generadores libres y H un subgrupo de F . Si H tiene índice k en F , entonces H tiene $kn + 1$ generadores libres.

Demostración. Aplicamos la construcción dada en la demostración del Teorema 85.1. Podemos suponer que $F = \pi_1(X, x_0)$, donde X es un grafo lineal cuyo espacio subyacente es una unión por un punto de $n + 1$ círculos. Dado H , escogemos un espacio recubridor conexo por caminos $p : E \rightarrow X$ tal que $p_*(\pi_1(E, e_0)) = H$. Ahora la correspondencia de levantamientos

$$\Phi : \pi_1(X, x_0)/H \rightarrow p^{-1}(x_0)$$

es una biyección. Por tanto, E es un recubridor de k hojas de X .

El espacio E es también un grafo lineal. Dada una arista A de X , las componentes conexas por caminos de $p^{-1}(A)$ son aristas de E y cada una de ellas se aplica homeomórficamente por p sobre A . Así E tiene k veces tantas aristas como X y k veces tantos vértices. Se sigue que $\chi(E) = k\chi(X)$. Como el grupo fundamental de

X tiene $n + 1$ generadores libres, el lema anterior nos dice que $\chi(X) = -n$. Entonces el número de generadores libres del grupo fundamental de E , que es isomorfo a H , es

$$1 - \chi(E) = 1 - k\chi(X) = 1 + kn.$$

Obsérvese que si F es un grupo libre con un sistema finito de generadores libres y H es un subgrupo de F tal que F/H es infinito, entonces nada se puede decir acerca de el cardinal de un sistema de generadores libres para H . Podría ser finito (por ejemplo, si H es el subgrupo trivial) o infinito (por ejemplo, si H es el grupo fundamental del espacio recubridor del Ejemplo 2 de §81).

Ejercicios

- Demuestre que el número de Euler de un grafo lineal finito X es un invariante topológico de X . [Indicación: primero considere el caso donde X es conexo.]
- Sea F un grupo libre sobre dos generadores α y β . Sea H el subgrupo generado por α . Demuestre que H tiene índice infinito en F .
- Sea $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ la aplicación recubridora estándar; considere la aplicación recubridora $p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$. Sea $b_0 = (1, 0) \in S^1$; escribamos $X = (b_0 \times S^1) \cup (S^1 \times b_0)$; sean $E = (p \times p)^{-1}(X)$ y $q : E \rightarrow X$ la aplicación recubridora obtenida por restricción de $p \times p$. El grupo fundamental de X tiene generadores libres α y β , donde α está representado por un lazo en $b_0 \times S^1$ y β por un lazo en $S^1 \times b_0$. Encuentre un sistema de generadores libres para el subgrupo $q_*(\pi_1(E, e_0))$, donde e_0 es el origen de \mathbb{R}^2 .

Bibliografía

- [A] L.V. Ahlfors. *Complex Analysis, 3rd edition.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1979.
- [A-S] L.V. Ahlfors y L. Sario. *Riemann Surfaces.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1960.
- [C] P.J. Campbell. The origin of “Zorn’s lemma”. *História Mathematica*, 5:77–89, 1978.
- [D-M] P.H. Doyle y D.A. Moran. A short proof that compact 2-manifolds can be triangulated. *Inventiones Math.*, 5:160–162, 1968.
- [D] J. Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- [F] M. Fuchs. A note on mapping cylinders. *Michigan Mathematical Journal*, 18:289–290, 1971.
- [G-P] V. Guillemin y A. Pollack. *Differential Topology.* Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [H] P.R. Halmos. *Naive Set Theory.* Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1960.
- [H-S] D.W. Hall y G.L. Spencer. *Elementary Topology.* John Wiley & Sons. Inc., New York, 1955.
- [H-W] W. Hurewicz y H. Wallman. *Dimension Theory.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1974.
- [H-Y] J.G. Hocking y G.S. Young. *Topology.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1961.
- [K] J.L. Kelley. *General Topology.* Springer-Verlag, New York, 1991.
- [K-F] A.N. Kolmogorov y S.V. Fomin. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, vol. 1.* Graylock Press, Rochester, New York, 1957.

- [M] W.S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [Mo] G.H. Moore. *Zermelo's Axiom of Choice*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [Mu] J.R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Perseus Books, Reading, Mass., 1993.
- [M-Z] D. Montgomery y L. Zippin. *Topological Transformation Groups*. Interscience Publishers, Inc., New York, 1955.
- [RM] M.E. Rudin. The box product of countably many compact metric spaces. *General Topology and its Applications*, 2:293–298, 1972.
- [RW] W. Rudin. *Real and Complex Analysis, 3rd edition*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.
- [S-S] L.A. Steen y J.A. Seebach Jr. *Counterexamples in Topology*. Holt, Rinehart & Winston, Inc., New York, 1970.
- [Sm] R.M. Smullyan. The continuum hypothesis. In *The Mathematical Sciences, A Collection of Essays*. The M.I.T. Press. Cambridge, Mass., 1969.
- [S] E.H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
- [T] J. Thomas. A regular space, not completely regular. *American Mathematical Journal*, 76:181–182, 1969.
- [W] R.L. Wilder. *Introduction to the Foundations of Mathematics*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1965.
- [Wd] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1970.

Índice analítico

- A**
 \bar{A} , 108
Abierta
 aplicación, 105, 155
 arista, 567
Abierto
 conjunto, 86
 intervalo, 27
Acción de un grupo sobre un espacio, 228
Acotación uniforme, principio de la, 342
Acotada, función, 305
Acotado, 137
 inferiormente, 30
 superiormente, 29
Adherencia, véase Clausura
Adjunto, espacio, véase Espacio adjunto
Afínmente independiente, 352
Aislado, punto, 200
 $\hat{\alpha}$, 376
 es un isomorfismo, 377
 independencia del camino, 380
Algebraico, número, 57
Añadiendo una 2-celda, 500
 efecto sobre el grupo fundamental, 498
Antiimagen, 21
Antípoda, 404
 aplicación, 422
 aplicación que conserva, 404
Aplicación
 abierta, véase Abierta, aplicación
 cerrada, 155
 cociente, 154
 lineal positiva, 373, 507
 proyección, véase Proyección, aplicación
Aplicación cociente, 154
 composición, 160
 producto, 162, 164, 213, 330
 restricción, 156, 159
Aplicación contrátil, 207
 vs. contracción, 207
 y puntos fijos, 207
Aplicación perfecta, 195, 227
 y compacidad, 195
 y paracompacidad, 297
Aplicación recubridora, 382
 composición, 387, 547, 550
 es abierta, 382
 es un homeomorfismo local, 383
 productos, 385
 regular, 553
 restricción, 384, 547
Aplicaciones homotópicas, 367
Árbol, 572
 maximal, 575
Arco, 351, 430
 extremos, 351, 430
 no separa S^2 , 441
 puntos interiores, 430
Arista, 506, 533, 567
 abierta, 567
 arco de, 571

- de un grafo lineal, 447
- orientada, 571
- Arquimediana**, propiedad, 37
- Arzela**, teorema, 319, 334
- Ascoli**, teorema, 317, 331
- Axioma de elección**, 66
 - finito, 68
 - vs. producto no vacío, 134
 - y teorema del buen orden, 83
- Axioma de regularidad**, 166
- Axioma T_1** , 112
 - para espacios cociente, 160
 - vs. condición de Hausdorff, 112
 - vs. punto límite, 112
- Axiomas T_i** , 241
- B**
 - B^2 , 152
 - Baire**
 - espacio, 336
 - teorema de la categoría, 337
 - caso especial, 202
 - Barbero de Sevilla**, paradoja, 53
 - Base**
 - de un grupo abeliano libre, 466
 - para la topología de subespacio, 101
 - para la topología producto, 98
 - para una topología, 88, 90, 91
 - Base numerable**, véase 2AN
 - en un punto, véase 1AN
 - $B_d(x, \epsilon)$, 135
 - Betti**, número de, 481
 - Bicompatibilidad**, 203
 - Bien ordenado**, conjunto, véase Conjunto bien ordenado
 - Binaria**, operación, 33
 - Bing**, teorema de metrización, 288
 - Bisección**, teorema, 406, 407
 - Biyectiva**, función, 20
 - B^n , 177
 - compacidad, 198
 - conexión por caminos, 177
 - grupo fundamental, 376
 - Bola métrica**, 135
 - Bola unidad**, 152, véase también B^n
 - Borde**, 538
 - Borsuk**, lema, 434, 437
 - Borsuk-Ulam**, teorema, 406, 408
 - Botella de Klein**, 514
 - Brouwer**, teorema del punto fijo, 398, 401
 - Buen orden**, teorema, 73
 - aplicación, 269
 - y axioma de elección, 75
 - y principio del máximo, 79
 - C**
 - Camino**, 176
 - constante, 371
 - correspondiente, 572
 - Caminos homotópicos**, 367
 - Campo de vectores**, 398
 - Cantor**, conjunto, 202
 - Cardinal**
 - comparabilidad, 77
 - de un conjunto finito, 44, 47
 - igual, 58
 - mayor, 70
 - Categoría**
 - conjunto de primera, 336
 - conjunto de segunda, 336
 - Cauchy**, sucesión, 301
 - Cerrada**, curva simple, véase Curva simple cerrada
 - Cerrado**
 - conjunto, 105
 - trayecto, 571
 - Cíclico**, grupo, 393
 - Cinta de Möbius**, 510, 514
 - Círculo unidad**, 121
 - Cl A**, 108
 - Clase**, 165
 - de conjugación, 543

- de equivalencia, 25
- de homotopía de caminos, 367
- por la derecha, 375
- por la izquierda, 375
- Clasificación**
 - de espacios recubridores, 544
 - de superficies, 517, 530
 - de transformaciones recubridoras, 552
- Clausura**, 108
 - de un subespacio conexo, 170
 - de una intersección, 115
 - de una unión, 114
 - en un producto cartesiano, 115, 132
 - en un subespacio, 108
 - vía elementos básicos, 109
 - vía puntos límite, 111
 - vía redes, 214
 - vía sucesiones, 147, 217
- Cociente, aplicación**, véase **Aplicación cociente**
- Cociente, espacio**, 375, véase también **Topología cociente**
- Cociente, topología**, véase **Topología cociente**
- Cofinal**, 213
- Coherente, topología**, 256, 493
- Colección**, 12
 - localmente finita, 278
- Compacidad**, 186, véase también **Espacio de Hausdorff compacto**
 - criterio de los conjuntos cerrados, 192
 - de intervalos cerrados en \mathbb{R} , 197
 - de productos finitos, 190
 - de productos numerables, 319
 - de subespacios, 187
 - de una imagen continua, 189
 - del espacio producto, 267, 269
 - en \mathbb{R} y en \mathbb{R}^n , 197
 - en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$, 317, 319, 334
 - en $\mathcal{C}(X, Y)$, 331
- en la distancia de Hausdorff, 320
- en la topología cofinita, 189
- en la topología del orden, 196
- vía redes, 215
- vs. compacidad por punto límite, 203
- vs. completitud, 314
- vs. sucesionalmente compacto, 204
- y aplicaciones perfectas, 195
- y propiedad del supremo, 196
- Compacidad local**, 208
 - de \mathbb{R} , 208
 - de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^ω , 208
 - de productos, 212
 - de subespacios, 211
 - del espacio cociente, 228
 - implica compactamente generado, 323
 - para el espacio de órbitas, 228
 - y aplicaciones perfectas, 228
 - y propiedad del supremo, 208
- Compacidad numerable**, 206
- Compacidad por punto límite**, 203
 - vs. compacidad, 203
 - vs. compacidad numerable, 206
- Compacidad secuencial**, 204
 - vs. compacidad, 204
- Compactamente generado, espacio**, 323
- Compactificación**, 210, 270
 - de $(0, 1)$, 271
 - inducida por un embebimiento, 271
 - por un punto, 210
 - unicidad, 208
- Compactificación de Stone-Čech**, 275
 - condición de extensión, 274
 - de \mathbb{Z}_+ , 276
 - de S_Ω , 275
 - existencia, 273
 - metrizabilidad, 276
 - unicidad, 274
- Compacto**, véase **Compacidad y Espacio de Hausdorff compacto**

- Comparabilidad, 26
 de cardinales, 77
 de conjuntos bien ordenados, 83
 de topologías, 87
- Complemento, 10
- Completación, 307
 unicidad, 309
- Completemente normal, espacio, 234
- Completemente regular, espacio, véase
 Regularidad completa
- Completitud
 de \mathbb{R}^ω con la topología producto, 303
 de \mathbb{R}^J con la distancia uniforme, 304
 de \mathbb{R}^n , 302
 de $\mathcal{A}(X, Y)$ con la distancia uniforme, 305
 de $\mathcal{C}(X, Y)$ con la distancia del supremo, 306
 de $\mathcal{C}(X, Y)$ con la distancia uniforme, 305
 de Y^J con la distancia uniforme, 304
 de Y^X con la topología compacto-abierta, 330
 de subespacios cerrados, 301
 vs. compacidad, 314
 y condición de Baire, 337
- Completitud topológica, 308, véase también Espacio métrico completo
- Componente, 181
 de \mathbb{R}^ω con la topología por cajas, 184
 de \mathbb{R}^ω con la topología uniforme, 184
 por caminos, 181
 vs. componente por caminos, 183
 vs. cuasicomponente, 185, 269
- Composición
 de aplicaciones cociente, 160
 de aplicaciones recubridoras, 387, 547, 550
 de funciones, 19
- Conclusión, 7
- Condición de extensión, 466
 grupo libre, 478
 producto libre, 470, 475
 suma directa, 463, 465
- Condición de Hausdorff, 112
 componentes y cuasicomponentes, 269
 en espacios cociente, 161, 228
 en la topología del orden, 113, 115
 en la topología por cajas, 132
 en la topología producto, 132
 normalidad, 231
 para el espacio de órbitas, 228
 para espacios métricos, 146
 para espacios productos, 113, 115
 para grupos topológicos, 166
 para subespacios, 113, 115, 146
 para variedades, 259
 paracompacidad, 294
 vs. axioma T_1 , 112
 vs. regularidad, 223, 225
 y sucesiones convergentes, 113
 y unicidad de las extensiones, 127
- Condición de Lindelöf, 219
 efecto de una aplicación continua, 222
 para \mathbb{R}_ℓ , 220
 para \mathbb{R}_ℓ^2 , 220
 para productos, 220
 para subespacios, 221
 para subespacios cerrados, 222
- Conexa, componente, 181
- Conexión, 168
 de \mathbb{R}^ω , 172
 de \mathbb{R}_K , 202
 de la clausura, 170
 de la curva seno del topólogo, 178
 de la línea larga, 180

- de productos finitos, 171
- de un espacio producto, 173
- de un subespacio, 168
- de una imagen continua, 170
- del cuadrado ordenado, 177
- en la topología cofinita, 172
- en la topología por cajas, 172
- en un continuo lineal, 174
- vs. conexión por caminos, 178
- Conexión local**, 183
 - por caminos, 183
 - vs. conexión local débil, 185
- Conexión local débil**, 185
 - vs. conexión, 185
- Conexión por caminos**, 176
 - de $\mathbb{R}^n - 0$, 177
 - de B^n , 177
 - de S^n , 177
 - de la curva seno del topólogo, 178
 - de la línea larga, 180
 - del cuadrado ordenado, 177
- Conjugados**, elementos, 476
- Conjunto abierto**
 - relativo a un subespacio, 101
- Conjunto acotado**, 137
- Conjunto bien ordenado**, 70
 - \mathbb{Z}_+ , 36
 - $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, 71
 - finito, 72
 - no numerable, 74, 84
 - no numerable minimal, véase S_Ω
 - normalidad, 231
 - orden del diccionario, 72
 - subconjuntos bien ordenados, 72
 - subespacios compactos, 196
- Conjunto cerrado**, 105
 - en subespacio, 107
 - vs. puntos límite, 111
- Conjunto convexo en un conjunto ordenado**, 103, 174
- Conjunto de índices**, 40
- Conjunto de primera categoría**, 336
- Conjunto de segunda categoría**, 336
- Conjunto dirigido**, 213, 215
- Conjunto estrellado**, 380
- Conjunto finito**, 44, 47
- Conjunto imagen**, 17
- Conjunto inductivo**, 35
- Conjunto infinito**, 50
 - vía funciones inyectivas y sobre-
yectivas, 64
- Conjunto infinito-numerable**, 50
- Conjunto no numerable**, 51
- Conjunto numerable**, véase Numerabilidad
- Conjunto potencia**, 12
- Conjunto saturado**, 155
- Conjunto vacío**, 6
- Conjuntos disjuntos**, 6
- Cono**, 563
- Contiene**, 4
- Continuidad**, 116
 - criterio de la base, 117
 - criterio de la clausura, 118
 - criterio de la subbase, 117
 - criterio del conjunto cerrado, 118
 - de $\min\{f, g\}$, 127
 - de aplicaciones en espacios cociente, 161
 - de aplicaciones en productos, 124, 132
 - de la distancia, 143
 - de la función constante, 122
 - de la inclusión, 122
 - de la restricción, 122
 - de las composiciones, 122
 - de las operaciones algebraicas en \mathbb{R} , 149, 154
 - del límite uniforme, 149
 - del producto de aplicaciones, 127
 - en un punto, 118
 - en variables separadamente, 127
 - formulación ϵ - δ , 147
 - formulación local, 122

- fuerte, 155
 - vía redes, 214
 - vía sucesiones, 147
 - y cambio de recorrido, 122
 - y teorema del grafo cerrado, 195
 - Continuidad uniforme**, 200
 - teorema, 167, 200
 - Continuo lineal**, 35
 - cuadrado ordenado, 176
 - línea larga, 180
 - normalidad, 235
 - subespacios compactos, 196
 - subespacios conexos, 174
 - Continuo, hipótesis**, 234
 - Contracción**, 207, 308
 - vs. aplicación contrátil, 207
 - y puntos fijos, 207
 - Contractible**, espacio, 374
 - tipo de homotopía, 415
 - Contrátil, aplicación**, véase **Aplicación contrátil**
 - Contrarrecíproco**, 8
 - Convergencia compacta**, topología, véase **Topología de la convergencia compacta**
 - Convergencia uniforme**, 149, 323
 - sobre conjuntos compactos, 323
 - test- M de Weierstrass, 153
 - Convexo**, conjunto
 - en un conjunto ordenado, 103
 - Coordenada**
 - de una ω -upla, 42
 - de una J -upla, 128
 - de una m -upla, 41
 - función, 125
 - Correspondencia del levantamiento**, 392
 - Cota**
 - inferior, 30
 - superior, 29, 80
 - Cuadrado ordenado**, 103
 - conexión, 177
 - conexión por caminos, 177
 - es continuo lineal, 176
 - metrizabilidad, 222
 - Cuantificadores lógicos**, 10
 - Cuasicomponente**, 269
 - vs. componente, 269
 - Cubo**
 - de Hilbert, 145
 - en \mathbb{R}^n , 358
 - Cubrimiento**, 186
 - abierto, 186
 - de un subespacio, 187
 - Cuerpo**, 35
 - ordenado, 35
 - Curva**, 257
 - Curva seno del topólogo**, 178
 - componentes, 182
 - componentes por caminos, 182
 - conexión, 178
 - conexión por caminos, 178
 - no separa S^2 , 447
 - Curva seno del topólogo cerrada**
 - separa S^2 , 447
 - Curva simple cerrada**, 430
 - genera π_1 de $\mathbb{R}^2 - 0$, 455
 - número de rotación, 458
 - separa S^2 , 443
 - teorema de separación, 430
 - CW complejo**, 505
 - $C(X, Y)$ con la topología fina**
 - es Baire, 342
- D**
- \bar{d} , 137
 - Definición inductiva**, véase **Definición recursiva**
 - Definición recursiva**, 53
 - principio, 53
 - DeMorgan**, leyes, 11
 - Denso numerable**, subconjunto, véase **Subconjunto denso numerable**
 - Denso**, subconjunto, 218
 - Derecha, inversa por**, 23

- Desigualdad triangular, 135
- Diagonal, 115
- Diámetro de un conjunto, 137
- Diccionario, orden del, 29
- Diferencia de dos conjuntos, 10
- Dimensión
- finita, 348
 - inductiva, 359
 - recubridora, 347
- Dimensión topológica, 348
- de $[0, 1]$, 348
 - de las 1-variedades, 351
 - de las 2-variedades, 351, 400
 - de los subespacios compactos de \mathbb{R}^2 , 348
 - de los subespacios compactos de \mathbb{R}^N , 357
 - de un grafo lineal, 351
 - de un subespacio cerrado, 349
 - de un subespacio cerrado de \mathbb{R}^N , 361
 - de un subespacio compacto de \mathbb{R} , 348
 - de una región triangular, 400
 - de una unión, 349
 - de una variedad, 358, 361
- Dirigido, conjunto, 213, 215
- Disjuntos, conjuntos, 6
- Distancia, 135
- acotada, 138, 146
 - de Hausdorff, 320
 - del supremo, 138
 - vs. distancia uniforme, 306
 - entre dos puntos, 135
 - euclídea, 138, 145
 - para \mathbb{R} , 136
 - para \mathbb{R}^ω , 142
 - para \mathbb{R}^n , 138
 - para la topología discreta, 136
 - uniforme, 141
 - vs. distancia del supremo, 306
- Divisores elementales, 481
- Doble toro, 425, 512
- grupo fundamental, 425
- Doblemente agujereado, plano, 410
- Dominio, 170
- invariancia del, 435, 437
- 2-celda, 500
- 2AN, 217, 218
- $C(I, \mathbb{R})$, 222
 - de \mathbb{R}, \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^ω , 218
 - de \mathbb{R}^ω con la topología uniforme, 218
 - de \mathbb{R}_ℓ , 219
 - de productos, 218
 - de subespacios, 218
 - del espacio cociente, 228
 - espacios métricos compactos, 222
 - grupos topológicos, 223
 - para el espacio de órbitas, 228
 - vs. subconjunto denso numerable, 222
 - y aplicaciones perfectas, 228
- 2-esfera, véase S^2
- 2-variedad, 257
- dimensión topológica, 351, 400
- $d(x, A)$, 199
- $d(x, y)$, 135
-
- ## E
- ϵ -bola, 135
- ϵ -entorno de un conjunto, 202
- Elección, función, 67
- Elección, axioma de, véase Axioma de elección
- Elementales, divisores, 481
- Elemento
- conjugado, 476
 - de un conjunto, 4
 - maximal, 80
 - representado por una palabra, 468
- Embebimiento, 120
- isométrico, 151

- en un espacio métrico completo, 306, 309
- Embebimiento, teorema del**
para un espacio completamente regular, 249
para un espacio de dimensión m , 355
para un grafo lineal, 352
para una variedad, 360
para una variedad compacta, 358
- Encajada**, sucesión de conjuntos, 193
- Encogimiento**, lema general, 294
- Enteros**, 35
- Entorno simétrico**, 166
- Epmorfismo**, 375
- Equicontinuidad**, 315
vs. acotación total, 315
vs. compacidad, 317, 319
- Equivalencia**
clase, 25
de aplicaciones recubridoras, 540
de esquemas, 522
homotópica, 411
induce un isomorfismo de π_1 , 413
vs. retracto de deformación, 414, 415
lógica, 8
métrica, 308
relación, 24
- Equivalentes**, 540
- Esfera unidad**, véase S^n
- Espacio adjunto**, 255
normalidad, 256
- Espacio cociente**, 157
- Espacio completamente normal**, 234
- Espacio completamente regular**, véase Regularidad completa
- Espacio de órbitas**, 228, 554
- Espacio de Baire**, 336
 \mathbb{R}^J con las topologías por cajas, producto y uniforme, 342
- de Hausdorff compacto, 337
espacio localmente de Hausdorff compacto, 340
métrico completo, 337
subespacio abierto de un espacio de Baire, 339
topología fina en $C(X, Y)$, 342
- Espacio de descomposición**, 157
- Espacio de Hausdorff**, véase Condición de Hausdorff
- Espacio de Hausdorff compacto**
es Baire, 337
metrizabilidad, 249
normalidad, 231
paracompacidad, 288
- Espacio de Hausdorff localmente compacto**
regularidad, 234
regularidad completa, 243
- Espacio de identificación**, 157
- Espacio euclídeo**, 43
- Espacio homogéneo**, 165
- Espacio lente**, 557
- Espacio localmente de Hausdorff compacto**
es Baire, 340
- Espacio localmente euclídeo**, 361
- Espacio métrico**, 137
- Espacio métrico completo**, véase Completitud
es Baire, 337
- Espacio metrizable**, 137
- Espacio normal**, véase Normalidad
- Espacio paracompacto**, véase Paracompacidad
- Espacio perfectamente normal**, 243
- Espacio producto**, véase Topología producto
- Espacio proyectivo**, 423
- Espacio recubridor**, 382
de $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$, 387
de k -hojas, 387

- de P^2 , 422
 - de S^1 , 383, 384, 545
 - de la figura ocho, 386, 425
 - de un grafo lineal, 570
 - del toro, 385, 545
 - existencia, 559
 - propiedades topológicas, 387
 - universal, 547
 - Espacio regular, véase Regularidad
 - Espacio regular de Lindelöf
 - metrizabilidad, 249
 - normalidad, 234
 - paracompacidad, 293
 - Espacio separa X en n componentes, 430
 - Espacio theta, 411, 448
 - grupo fundamental, 490
 - separa S^2 , 448
 - Espacio topológico, 86
 - Espacios recubridores, clasificación, 544
 - Esquema, 508
 - equivalencia, 522
 - Estereográfica, proyección, 419
 - Estrella, 569
 - Estrellado, conjunto, 380
 - Estricto, orden parcial, 27
 - Estructura uniforme, 333
 - Etiqueta, 507
 - Etiquetado, 507
 - Euclídeo, espacio, 43
 - Evaluación, aplicación, 309, 327
 - e_x (camino constante), 371
 - Existencia de espacio recubridor, 559
 - Expansión, lema, 297
 - Extensión homotópica, lema, 433
 - Extensión, condición de
 - producto libre, 470
 - suma directa, 463, 465
 - Extensión, teorema de Tietze, 250
 - Externa, suma directa, 464
 - Externo, producto libre, 471
 - Extremo
 - de un arco, 351, 430
 - inferior, 30
 - superior, 30
- F**
- Familia
 - de conjuntos, 40
 - indexada de conjuntos, 40
 - indexada finita para puntos, 259
 - indexada localmente finita, 279
 - localmente finita, 127
 - colección localmente finita, 279
 - Fibonacci, números, 63
 - Figura ocho, 386, 410
 - espacio recubridor, 386, 425
 - grupo fundamental, 423, 492
 - Final, vértice, 571
 - Finalmente cero, 58
 - Finita para puntos, familia indexada, 259
 - Finitamente generado, grupo, 478
 - Finito, conjunto, 44, 47
 - Finitud:
 - aplicaciones inyectivas y sobrejetivas, 48
 - de productos cartesianos, 48
 - de subconjuntos, 48
 - de uniones, 48
 - Fórmula de recursión, 53
 - Fr A, 115
 - Frobenius, teorema, 399
 - Frontera de un conjunto, 115
 - F_σ , 287
 - Función, 17
 - acotada, 305
 - biyectiva, 20
 - continua, véase Continuidad
 - coordenada, 125
 - de elección, 67
 - identidad, 23
 - indexante, 40
 - inversa, 20

inyectiva, 20
 no diferenciable en ningún punto, 342
 poligonal, 345
 sobreyectiva, 20

Funtor, 276

G G_δ , 221, 283**Generado**

- por elementos, 466, 478
- por subgrupos, 468

Generador de un grupo cíclico, 393**Generadores libres**, sistema, 478**General**

- teorema de no separación, 443
- teorema de separación, 445

Geométricamente independiente, 352 G/H , 165, 375

- es grupo topológico, 165
- regularidad, 166

 $GL(n)$, 165**Grado de una aplicación**, 416**Grafo**

- cerrado, teorema, 195
- de una función, 194

Grafo completo, 447

- de cinco vértices, 351, 451

Grafo de servicios, 351, 448

- no puede embeberse en el plano, 449

Grafo lineal, 351, 566

- aristas, 447
- dimensión topológica, 351
- embebimiento en \mathbb{R}^3 , 352
- espacio recubridor, 570
- finito
 - número de Euler, 582
- grupo fundamental, 576
- lados, 351
- localmente conexo por caminos, 569

número de Euler, 571, 580

semilocalmente simplemente conexo, 569
 vértices, 351, 447

Grupo

cíclico, 393

de homología, 515

de transformaciones recubridoras,
 550

finitamente generado, 478

finitamente presentado, 482

grupo fundamental, 505

generado por subgrupos, 462

Grupo abeliano libre, 466

- condición de extensión, 466
- rango, 467

Grupo fundamental, 376

caso abeliano, 381

de $\mathbb{R}^n - 0$, 409de P^2 , 423de S^1 , 392de S^n , 419

de la figura ocho, 410, 423, 492

de un grafo lineal, 576

de un grupo finitamente presentado, 505

de un producto, 421

de un retracto de deformación, 410

de un sombrero de asno, 504

de una unión por un punto de círculos, 492, 494

de una unión por un punto de espacios, 497

del m -plano proyectivo, 513, 514del n -toro, 512, 514

del doble toro, 425

del espacio theta, 411, 490

del pendiente infinito, 565

del toro, 421, 501

no numerable, 565

numerable, 564, 565

Grupo general lineal, 165

- Grupo libre, 478
 condición de extensión, 478
 sobre un conjunto, 479
- Grupo topológico, 165
 $A \cdot B$ cerrado, 195
 condición de Hausdorff, 166
 normalidad, 236
 paracompacidad, 298
 π_1 es abeliano, 381
 regularidad, 166
 regularidad completa, 243
 1AN, 223
- Grupode, propiedades, 370
- H**
- h_* , 379
 dependencia del punto base, 380
 propiedades functoriales, 379
- Hahn-Mazurkiewicz, teorema, 313
- Hausdorff compacto, espacio, véase Espacio de Hausdorff compacto
- Hausdorff, condición, véase Condición de Hausdorff
- Hausdorff, distancia, 320
- Hilbert, cubo, 145
- Hipótesis, 7
- Hipótesis del continuo, 70, 234
- Homeomorfismo, 119
 local, 383
 vs. aplicación continua biyectiva, 120
- Homomorfismo, 375
 inducido por un camino, véase α
 inducido por una aplicación, véase h_*
 trivial, 380
- Homotopía, 367
 como un camino en el espacio de funciones, 328
 de caminos, 367
 efecto sobre h_* , 408, 412, 413
 libre entre lazos, 458
- nula, lema, 429
 por rectas, 368
 tipo, 412
- Homotópica
- equivalencia, véase Equivalencia homotópica
 inversa, véase Inversa homotópica
 lema de la extensión, 433
- Homotópicamente nula, aplicación, 367
 induce el homomorfismo trivial, 413
- Homotópicas, aplicaciones, 367
- I**
- Identidad, función, 23
- Igualdad, símbolo, 4
- Imagen, 18
 conjunto, 17
 inversa, 21
- Imagen continua
 de un espacio compacto, 189
 de un espacio con un subconjunto denso numerable, 222
 de un espacio conexo, 170
 de un espacio de Lindelöf, 222
- Inclusión, 4
 propia, 4
- Independencia
 afín, 352
 geométrica, 352
- Índice, 582
 de un subgrupo, 581
- Inductivo, conjunto, 35
- Inf A , 30
- Inferior
 cota, 30
 extremo, 30
- Ínfimo, 30
 propiedad, 30
- Infinito, conjunto, 50
- Infinito-numerable, conjunto, 50
- Inicial, vértice, 571

Inmediato

- predecesor, 27
- sucesor, 27

Int A, 108**Interior**

- de un conjunto, 108
- punto de un arco, 430
- vacío, 336

Intersección, 6**Intersección finita, propiedad**, 192**Intersección numerable, propiedad**, 268**Intervalo**, 27, 95

- abierto, 95
- cerrado, 95
- semiabierto, 95

Intervalos en \mathbb{R}

- compacidad, 197
- conexión, 175
- dimensión topológica, 348

Invariancia del dominio, 435, 437**Inversa**

- función, 20
- homotópica, 411
- imagen, 21
- por la derecha, 23
- por la izquierda, 23

Inyectiva, función, 20 **I_0^2 , véase Cuadrado ordenado****Isometría**, 207**Isomorfismo**, 375**Izquierda, inversa por**, 23**J****Jordan, teorema de la curva**, 443**K****k-plano en \mathbb{R}^N** , 354**Klein, botella**, 514**K-topología sobre \mathbb{R} , véase \mathbb{R}_K** **Kuratowski**

- lema, 81
- problema de los 14 conjuntos, 116

L**Lados de un grafo lineal**, 351**Lazo**, 376

- en el sentido de las agujas del reloj, 459
- en sentido contrario a las agujas del reloj, 459
- simple, 458

 ℓ^2 -topología, 145**Lebesgue, número**, 199**Lema de Borsuk**, 434, 437**Lema de la extensión homotópica**, 433**Lema de la homotopía nula**, 429**Lema de la sucesión**, 147**Lema de Urysohn**, 237

- versión fuerte, 243

Lema del levantamiento general, 540**Lema del pegamiento**, 123**Lente, espacio**, 557**Levantamiento**, 388

- correspondencia del, 392

- de caminos, 388

- de homotopías de caminos, 389

- lema general, 540

Leyes

- de DeMorgan, 11

- distributivas para \cap y \cup , 11

Libre, grupo abeliano, 466**Límite de una sucesión**, 113**Límite uniforme, teorema**, 149

- recíproco falla, 152

- recíproco parcial, 195

Lindelöf y regular, espacio, véase Espacio regular de Lindelöf**Lindelöf, condición, véase Condición de Lindelöf****Línea larga**, 180, 361

- conexión, 180

- conexión por caminos, 180

Lineal

- grafo, 566

- orden, 26

- Lineal positiva, aplicación de intervalos en \mathbb{R} , 373
- Localmente discreta, 287
- Localmente euclídeo, espacio, 361
- Localmente finita colección, 278 familia, 127 familia indexada, 279
- Localmente metrizable, espacio, 249, 298
- Lógicamente equivalentes, 8
- Longitud de una palabra, 468
- M**
- Möbius, cinta, 514
- Maximal árbol, 575 elemento, 80
- Máximo, 29 principio, véase Principio del máximo
- Mayor cardinal, 70
- Menor subgrupo normal, 476 generadores, 477
- Métricamente equivalentes, 308
- Metrizabilidad de \mathbb{R}^ω , 150 de \mathbb{R}^J , 151 de \mathbb{R}^n , 139 de \mathbb{R}_ℓ , 222 de espacios de Hausdorff compactos, 249 de espacios regulares 2AN, 245 de espacios regulares de Lindelöf, 249 de la compactificación de Stone-Čech, 276 de productos, 151 de variedades, 259 del cuadrado ordenado, 222 sobre \mathbb{R}^ω , 142 teorema de Bing, 288
- teorema de Nagata-Smirnov, 285 teorema de Smirnov, 298
- Metrizabilidad local, 249, 298
- Mínimo, 29
- Monomorfismo, 375
- m*-plano proyectivo, 512
- m*-upla, 41
- N**
- Nagata-Smirnov, teorema de metrización, 285
- Negación, 9
- n*(f, a), véase Número de rotación
- No numerabilidad conjunto bien ordenado, 84 de \mathbb{R} , 201 de $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$, 56 de $\{0, 1\}^\omega$, 56 de los números trascendentes, 57
- No retracción, teorema, 396
- No separación, teorema arco en S^2 , 441 curva seno del topólogo, 447 general, 443
- Norma, 138
- Normal, subgrupo, 375
- Normalidad, 223 de \mathbb{R}^J , 232, 235 de \mathbb{R}_ℓ , 226 de conjuntos bien ordenados, 231 de espacios 2AN, 229 de espacios de Hausdorff compactos, 231 de espacios métricos, 230 de espacios regulares de Lindelöf, 234 de grupos topológicos, 236 de la topología coherente, 256 de productos, 226, 232, 234 de subespacios, 232 de subespacios cerrados, 233 de un espacio cociente, 228, 503

de un espacio de Hausdorff para-compacto, 289
del continuo lineal, 235
del espacio adjunto, 256
para el espacio de órbitas, 228
vs. condición de Hausdorff, 223
vs. regularidad, 223, 226, 232
vs. regularidad completa, 241, 242

Normalizador, 551

n-toro, 511

Núcleo de un homomorfismo, 375

Nula exactamente sobre A , 243

Numerabilidad, 51

- de \mathbb{Z} , 50
- de $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, 50, 54
- de los números algebraicos, 57
- de los racionales, 54
- de productos finitos, 55
- de subconjuntos, 54
- de uniones numerables, 55
- primer axioma, véase 1AN
- segundo axioma, véase 2AN
- vía aplicaciones inyectivas y sobreyectivas, 51

Numerable denso, subconjunto, véase Subconjunto denso numerable

Numerablemente compacto, 206

Numerablemente localmente discreta, 287

Número de Euler, 580

- de un grafo lineal, 571
- de un grafo lineal finito, 582

Número de Lebesgue, 199

lema, 199

Número de rotación, 452, 457

- como una integral, 459
- curva simple cerrada, 458, 460, 461

Número de Betti, 481

Números

- algebraicos, 57
- de Fibonacci, 63
- enteros, 36

racionales, 36

reales, véase \mathbb{R} (reales)

trascendentes, 57

O

“O”, significado de, 5

Operación binaria, 33

Órbita, 554

espacio, 228

Orden

de un cubrimiento, 347

de un elemento de un grupo, 467

de un grupo, 393

del diccionario, 29

lineal, 26

parcial, 80

axiomas, 81, 213

estricto, 27, 77

relación, 26

simple, 26

tipo, 27

Orden, topología, véase Topología del orden

Orientación, 507

Orientada, arista, 571

P

P^2 , 422

es una superficie, 422

grupo fundamental, 423

$\mathcal{P}(A)$, 12

Palabra

longitud de una, 468

reducida, 468

Paracompacidad, 288

de \mathbb{R}^∞ , 297

de \mathbb{R}^ω con la topología producto, 294

de \mathbb{R}^J , 294

de \mathbb{R}^n , 288

de \mathbb{R}_ℓ , 293

de $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$, 293

- de S_Ω , 297
 de espacios metrizables, 293
 de espacios regulares y de Lindelöf, 293
 de grupos topológicos, 298
 de productos, 297
 de subespacios cerrados, 289
 de un espacio de Hausdorff compacto, 288
 vs. normalidad, 289
 y aplicaciones perfectas, 297
- Paradoja de Russell, 70
- Paradoja del barbero de Sevilla, 53
- Parcial, orden
 axiomas, 213
- Partición de un conjunto, 25
- Partición de la unidad, 257, 294
 existencia, 257, 295
- Peano
 curva, 310
 espacio, 313
- Pegamiento, lema, 123
- Pegando las aristas, 507
- Pendiente infinito
 grupo fundamental, 565
 no posee recubridor universal, 550
- Perfecta, aplicación, véase Aplicación perfecta
- Perfectamente normal, espacio, 243
- $\pi_1(X, x_0)$, véase Grupo fundamental
- Plano agujereado, véase $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$
- Plano de \mathbb{R}^N , 353
- Plano de Sorgenfrey, véase \mathbb{R}_ℓ^2
- Plano doblemente agujereado, 410
- Plano proyectivo, 422, véase P^2
- Polygonal, función, 345
- Polígono, 506
- Posición general en \mathbb{R}^N , 354
- Potencia, conjunto, 12
- Predecesor, inmediato, 27
- Presentación finita, 482
- Primer axioma de numerabilidad, 148,
 véase 1AN
 de un espacio métrico, 148
- Primer grupo de homología, 515
 del m -plano proyectivo, 517
 del n -toro, 517
- Primera categoría, conjunto de, 336
- Primera coordenada, 14
- Principio de definición recursiva, 53
 general, 82
- Principio de inducción, 35, 36
 fuerte, 36
 transfinita, 76
- Principio de la acotación uniforme, 342
- Principio del máximo, 78
 y lema de Zorn, 80, 81
 y teorema del buen orden, 83
- Producto
 de aplicaciones abiertas, 160
 de aplicaciones cociente, 160, 162,
 164, 213, 330
 de aplicaciones continuas, 127
 de aplicaciones recubridoras, 385
 de caminos, 370
 de clases de homotopía de caminos, 370
- Producto cartesiano
 finito, 14, 41
 general, 129
 infinito numerable, 42
- Producto libre
 condición de extensión, 470, 475
 existencia, 471
 externo, 471
 unicidad, 475
- Propiamente discontinua, 554
- Propiedad
 arquimediana, 37
 del ínfimo, 30
 del supremo, 30
 topológica, 120
- Propiedad de la intersección

- finita, 192
numerable, 268
- Propiedad del supremo, 30
para \mathbb{R} , 34
para conjuntos bien ordenados, 75
y compacidad, 196, 201
y compacidad local, 208
y propiedad del ínfimo, 32
- Propiedades functoriales de h_* , 379
- Propiedades topológicas de un espacio
recubridor, 565
- Proyección
estereográfica, 419
aplicación, 99, 130
es una aplicación abierta, 105
- Proyectivo, espacio n -dimensional, 423
- Proyectivo, plano, véase P^2
- Prüfer, variedad de, 362
- Punto aislado, 200
- Punto antípoda, 404
- Punto base, 376
efecto sobre π_1 , 377
efecto sobre h_* , 380
- Punto de acumulación, 110
de una red, 214
- Punto fijo, 179, 207
- Punto fijo, teorema
de Brower, 398, 401
para B^2 , 398
para B^n , 401
para $[0,1]$, 179
para un retracto de B^2 , 401
para una contracción, 207, 308
- Punto final, 507
de un camino, 367
de una arista, 572
- Punto inicial, 507
de un camino, 367
de una arista, 572
- Punto interior
de un arco, 430
de un conjunto, 108
- Punto límite, 110
vs. axioma T_1 , 112
- Puntualmente acotado, 317
- Puntualmente finita, colección, 282
- R**
- \mathbb{R} (reales), 33
compacidad local, 208
distancia sobre, 136
no numerabilidad, 201
propiedades algebraicas, 34
propiedades de orden, 34
subespacios compactos, 197
subespacios conexos, 175
topología usual, 92
- \mathbb{R}_+ , 34
- \mathbb{R}^2 , topología usual, 99
- $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, 369
espacio recubridor, 387
grupo fundamental, 409
- Racionales, 36
- Rama infinita, 185
- Rango
de un grupo abeliano libre, 467
de una función, 17
- Rayo en un conjunto ordenado, 97
abierto, 97
cerrado, 97
- Rebanada
en un espacio producto, 190
en un espacio recubridor, 381
- Recíproco, 9
- Rectas, homotopía por, 368
- Recubridor universal, espacio, 547
- Recursión, fórmula, 53
- Red, 213
convergente, 214
punto de acumulación, 214
- Reducción, lema, 259
- Reducido, trayecto, 572
- Refinamiento, 280, 348
abierto, 280

- cerrado, 280
 preciso, 294
Regla de asignación, 17
Regular de Lindelöf, espacio, véase Espacio regular de Lindelöf
Regularidad, 223
 axioma, 166
 de aplicaciones perfectas, 228
 de espacios de Hausdorff localmente compactos, 234
 de productos, 225, 234
 de subespacios, 225
 de variedades, 259
 del espacio cociente, 228
 para el espacio de órbitas, 228
 vs. condición de Hausdorff, 223
 vs. metrizabilidad, 245
 vs. normalidad, 223
 vs. regularidad completa, 245
Regularidad completa, 241
 de \mathbb{R}^J con la topología por cajas, 243
 de \mathbb{R}_ℓ^2 , 242
 de $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$, 242
 de espacios de Hausdorff localmente compactos, 243
 de los subespacios, 241
 del espacio producto, 241
 vs. normalidad, 241, 242
 vs. regularidad, 245
Regularmente cubierto, 381
Relación, 23
 de equivalencia, 24
 de orden, 26
Relación sobre un grupo libre, 482
 conjunto completo de relaciones, 482
Relativa, topología, véase Topología de subespacio
Restricción
 de una aplicación cociente, 156,
 159
 de una función, 18
 de una relación, 31
Retracción, 380, 395
 como una aplicación cociente, 164
 de deformación, 410
 vs. equivalencia homotópica, 414,
 415
Retracto, 255, 395
 absoluto, 255
 vs. propiedad universal de extensión, 255
 de deformación, 409
 grupo fundamental, 410
 \mathbb{R}^∞ , 134
 clausura en \mathbb{R}^ω , 134, 144
 paracompacidad, 297
 \mathbb{R}^J con la topología por cajas es Baire, 342
 regularidad completa, 243
 \mathbb{R}^J con la topología producto es Baire, 342
 metrizabilidad, 151
 normalidad, 232
 paracompacidad, 294
 subconjunto denso numerable, 222
 \mathbb{R}^J con la topología uniforme, 141
 completitud, 304
 es Baire, 342
 \mathbb{R}_K , 93
 axiomas de separación, 225
 conexión, 202
 vs. topología usual, 93
 \mathbb{R}_ℓ , 92
 axiomas de numerabilidad, 219
 metrizabilidad, 222
 normalidad, 226
 paracompacidad, 293
 vs. topología usual, 93
 \mathbb{R}_ℓ^2 , 220
 axiomas de separación, 226
 condición de Lindelöf, 220
 paracompacidad, 293

- regularidad completa, 242
 \mathbb{R}^n , 43
 base, 131
 compacidad local, 208
 completitud, 302
 distancia para, 138
 distancias para, 139
 2AN, 218
 paracompacidad, 288
 subespacios compactos, 197
 $\mathbb{R}^n - 0$, 177
 conexión por caminos, 177
 grupo fundamental, 409
 ρ , 306, véase también Distancia del supremo
 $\bar{\rho}$, 306, véase también Distancia uniforme
 \mathbb{R}^ω con la topología por cajas, 43, 150
 componentes, 184
 conexión, 172
 paracompacidad, 234
 \mathbb{R}^ω con la topología producto
 compacidad local, 208
 completitud, 303
 componentes, 184
 componentes por caminos, 184
 conexión, 172
 2AN, 218
 metrizabilidad, 142
 normalidad, 234
 paracompacidad, 294
 \mathbb{R}^ω con la topología uniforme
 componentes, 184
 normalidad, 234
 Rotación, número de, véase Número de rotación
 Russell, paradoja, 70
- S**
 S^1 , 121
 espacio recubridor, 383
 grupo fundamental, 392
 S^2 , 157
 como espacio cociente, 154, 157
 S_α (sección de un conjunto bien ordenado), 74
 Sandwich de jamón, teorema, 407
 Saturado, conjunto, 155
 Schoenflies, teorema, 445
 Schroeder-Bernstein, teorema, 58
Sección
 de los enteros positivos, 36
 de un conjunto bien ordenado, 74
Segunda categoría, conjunto, 336
Segunda coordenada, 14
Segundo axioma de numerabilidad, véase
 2AN
Seifert-van Kampen, teorema, 483
Seifert-van Kampen, teorema de
 caso especial, 418
 versión clásica, 489
Semilocalmente simplemente conexo, 558
Separar puntos de conjuntos cerrados, 249
Separable, véase Subconjunto denso numerable
Separación, 168
 en n componentes, 430
 por funciones continuas, 240
Separación, teorema
 curva seno del topólogo cerrada, 447
 curva simple cerrada, 430
 general, 432, 445
 la curva seno del topólogo cerrada separa S^2 , 432
 un espacio theta en S^2 , 448
Serie infinita, 153
Servicios, grafo de, 351, 448
"Si... entonces", significado, 7
 σ -compacidad, 360
 σ -localmente discreta, 287
 σ -localmente finita, 280

- σ -compacto, 330
- Símbolo de igualdad, 4
- Simple, curva cerrada, véase Curva simple cerrada
- Simple, orden, 26
- Simplemente conexo, 378, 419
 - conjunto estrellado, 380
- Sin puntos fijos, 557
- Sistema de generadores libres, 478
- Smirnov, teorema de metrización, 298
- S^n (esfera unidad), 177
 - compacidad, 198
 - conexión por caminos, 177
 - grupo fundamental, 419
 - simplemente conexa, 419
- S_Ω , 74
 - compactificación, 275
 - paracompacidad, 297
- $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$, 232
 - normalidad, 232
 - paracompacidad, 290
 - regularidad completa, 242
- \bar{S}_Ω , 75
 - metrizabilidad, 206
- Sobreyectiva, función, 20
- Sombrero de asno, 502
 - grupo fundamental, 504
- Soporte, 257, 294
- Sorgenfrey, plano, véase \mathbb{R}_ℓ^2
- Stone-Čech, compactificación, véase Compactificación de Stone-Čech
- Subbase, 93
 - para la topología del orden, 98
 - para la topología producto, 100, 130
- Subconjunto, 4
 - denso, 218
 - propio, 4
- Subconjunto denso numerable, 219
 - efecto de una aplicación continua, 222
 - en \mathbb{R}^I , 222
- en \mathbb{R}^J , 222
- en \mathbb{R}_ℓ , 220
- en subespacios, 222
- Subespacio, 101
- Subgrafo, 568
- Subgrupo
 - índice, 581
 - de relaciones, 482
 - de torsión, 467, 481
 - normal, 375
- Subgrupos conjugados, 543
- Subred, 214
- Subsucesión, 204
- Sucesión
 - de Cauchy, 301
 - encajada de conjuntos, 193
 - infinita, 42
 - lema, 147
- Sucesión convergente, 112
 - en la topología de la convergencia compacta, 323
 - en la topología de la convergencia puntual, 321
 - en un espacio de Hausdorff, 113
 - en un espacio producto, 134, 302
- Sucesionalmente compacto, 204
- Sucesiones, 42
 - y clausura, 147, 217
 - y continuidad, 147, 217
- Sucesor, inmediato, 27
- Suma conexa
 - de planos proyectivos, 512
 - de toros, 511
- Suma de grupos, 462
- Suma directa, 462
 - condición de extensión, 463, 465
 - existencia, 464
 - externa, 464
 - unicidad, 465
- Sup A, 30
- Superconjunto, 265
- Superficie, 257, 420

- con borde, 538
- Superior**
 - cota, 29
 - extremo, 30
- Supremo, 30**
 - propiedad, 30
- Supremo, distancia, 306**
 - vs. distancia uniforme, 306

- T**
- Tener el mismo cardinal, 58
- Teorema de la categoría de Baire, 337**
- Teorema de la curva de Jordan, 443**
- Teorema de no separación**
 - arco en S^2 , 441
 - curva seno del topólogo, 447
 - general, 443
- Teorema de Schoenflies, 445**
- Teorema de Seifert-van Kampen, 483**
 - versión clásica, 489
- Teorema de separación**
 - curva seno del topólogo cerrada, 447
 - curva simple cerrada, 430
 - general, 432, 445
 - la curva seno del topólogo cerrada separa S^2 , 432
 - un espacio theta en S^2 , 448
 - una curva simple cerrada en S^2 , 443
- Teorema del embebimiento**
 - para un espacio de dimensión m , 355
 - para un grafo lineal, 352
 - para una variedad, 360
 - para una variedad compacta, 358
- Teorema fundamental del álgebra, 402**
- Test de comparación para series infinitas, 153**
- θ , espacio, véase Espacio theta
- Theta, espacio, véase Espacio theta**
- Tietze, teorema de extensión, 250**

- Tipo de homotopía, 412**
 - de un espacio contractible, 415
- Tipo de orden, 27**
- Tipo proyectivo, 523**
- Tipo toro, 523**
- Topológica**
 - dimensión, véase Dimensión topológica
- Topología, 86**
 - cofinita, 86
 - coherente, 256, 493
 - de los complementos finitos, 86
 - discreta, 86
 - estrictamente más fina, 87
 - estrictamente más gruesa, 87
 - fina, 330
 - generada por una base, 88, 90, 91
 - generada por una subbase, 93
 - indiscreta, 86
 - más fina, 87
 - criterio de la base, 91
 - más gruesa, 87
 - trivial, 86
- Topología cociente, 156**
 - compacidad local, 228
 - condición T_1 , 160
 - condición de Hausdorff, 160, 161, 228
 - conexión local, 185
 - 2AN, 228
 - normalidad, 228
 - regularidad, 228
 - vs. topología producto, 160, 162, 164, 212, 330
 - y aplicaciones continuas, 161
- Topología cofinita**
 - compacidad, 189
 - conexión, 172
- Topología compacto-abierta, 325**
 - continuidad de la aplicación evaluación, 326

- vs. topología de la convergencia compacta, 325
- Topología de la convergencia puntual,** véase **Topología punto-abierta**
- Topología de la convergencia compacta,** 323
 - independencia de la distancia, 326
 - sucesiones convergentes en, 323
 - vs. topología compacto-abierta, 325
 - vs. topología de la convergencia puntual, 325
 - vs. topología uniforme, 325
- Topología de subespacio,** 101
 - base, 101
 - compacidad, 187
 - compacidad local, 211
 - condición de Hausdorff, 115, 225
 - condición de Lindelöf, 221, 222
 - conexión, 168
 - 2AN, 218
 - en espacios métricos, 146
 - normalidad, 232, 233
 - paracompacidad, 289
 - regularidad, 225
 - subconjunto denso numerable, 222
 - 1AN, 218
 - vs. topología del orden, 103
 - vs. topología producto, 102
- Topología del límite inferior,** véase \mathbb{R}_ℓ
- Topología del orden,** 96
 - condición de Hausdorff, 113, 115
 - normalidad, 231, 235
 - subbase, 98
 - subespacios compactos, 196
 - vs. topología de subespacio, 103
- Topología discreta,** distancia para, 136
- Topología métrica,** 135
- Topología por cajas,** 129
 - base, 129, 131
 - clausura en, 132
 - condición de Hausdorff, 132
 - vs. topología de subespacio, 132
- vs. topología fina, 330
- vs. topología producto, 131
- vs. topología uniforme, 141, 330
- Topología producto,** 98, 130
 - base, 98, 130, 131
 - clausura en, 115, 132
 - compacidad, 190, 267
 - compacidad local, 212
 - condición de Hausdorff, 113, 115, 132
 - condición de Hausdorff, 225
 - condición de Lindelöf, 220
 - conexión, 171, 173
 - 2AN, 218
 - grupo fundamental, 421
 - metrizabilidad, 151
 - normalidad, 226
 - paracompacidad, 293, 297
 - regularidad, 225
 - regularidad completa, 241
 - subbase, 100, 130
 - sucesiones convergentes, 134, 302
 - 1AN, 218
 - vs. topología cociente, 160, 162, 164, 212
 - vs. topología de la convergencia puntual, 321
 - vs. topología de subespacio, 102, 132
 - vs. topología por cajas, 131
 - vs. topología uniforme, 141
- Topología punto-abierta,** 321
 - coincide con la topología producto, 321
 - sucesiones convergentes en, 321
 - vs. topología compacto-abierta, 325
 - vs. topología de la convergencia compacta, 325
- Topología relativà,** véase **Topología de subespacio**
- Topología uniforme,** 141, 304

- vs. topología de la convergencia compacta, 325
- vs. topología por cajas, 141
- vs. topología producto, 141
- Topología usual**
 - sobre \mathbb{R} , 92
 - sobre \mathbb{R}^2 , 99
 - vs. K -topología, 93
 - vs. topología del límite inferior, 93
- Toro, 385
 - espacio recubridor, 385
 - grupo fundamental, 421, 501
 - igual a la superficie de un donut, 385
- Toro doble, véase Doble toro
- Torre, 83
- Torsión, subgrupo de, 467
- Totalmente acotado, 314
 - vs. equicontinuidad, 315
- Transfinita, principio de inducción, 76
- Transformación recubridora, 550
- Trascendente, número, 57
- Traslación en \mathbb{R}^N , 354
- Trayecto, 571
 - cerrado, 571
 - reducido, 572
- Triangulable, 533
- Triangulación, 533
- Triángulo curvo, 533
- Tubo, 190
- Tubo, lema, 191
 - generalizado, 195
- Tukey, lema, 81
- Tychonoff, teorema, 267
 - para productos finitos, 200
 - para productos numerables, 319
 - vía el teorema del buen orden, 269
- U**
- $U(A, \epsilon)$, 202
- Unión, 5
- Unicidad de la suma directa, 465
- Uniforme**
 - estructura, 333
 - principio de la acotación, 342
 - teorema de la continuidad, 167, 200
- Uniforme, convergencia, véase Convergencia uniforme**
- Uniforme, distancia, 304, 306, véase también Topología uniforme**
 - completitud, 304
 - vs. distancia del supremo, 306
- Uniformemente continua, 200
- Unión por un punto de círculos, 492, 494
 - existencia, 496
 - grupo fundamental, 492, 494
- Unión por un punto de espacios
 - grupo fundamental, 497
- 1-variedad, dimensión topológica, 351
- 1AN, 217
 - de \mathbb{R}_ℓ , 219
 - de productos, 218
 - de subespacios, 218
 - implica compactamente generado, 323
- Urysohn
 - lema, 237
 - teorema de metrización, 245
- V**
- Vacía, verdad, 8
- Vacio, conjunto, 6
- Valor de una función, 18
- Valor intermedio, teorema, 167
- Valor máximo, teorema
 - del análisis, 167
 - general, 198
- Valores extremos, teorema, 198
- Variedad, 256, 361
 - dimensión topológica, 358, 361
 - embebimiento en \mathbb{R}^n , 258, 358, 360
 - metrizabilidad, 259

- necesidad de la condición de Hausdorff, 259
- regularidad, 259
- Variedad de Prüfer, 362
- Vectores, campo de, 398
- Verdad vacía, 8
- Vértice, 506, 533, 567
 - de un grafo lineal, 351, 447
 - final, 571
 - inicial, 571

W

- Weierstrass, test- M de convergencia uniforme, 153

ω -upla, 42

X

- X^J , 128
- X^m , 42
- X^ω , 42
- $[X, Y]$, 374

Z

- \mathbb{Z} , 36
- \mathbb{Z}_+ , 35
 - bien ordenado, 36
 - infinito, 47
- Zermelo, 74
- Zorn, lema, 80
 - aplicado, 81, 82

Topología

2^a Edición

Munkres

La **Topología**, además del interés que tiene por sí misma, sirve para establecer los fundamentos de futuros estudios en otras disciplinas, fundamentalmente en análisis y geometría. Existen muchos temas que son apropiados para un curso de topología; en la elección del material considerado se ha tratado de establecer un equilibrio entre los diferentes puntos de vista que existen en la actualidad.

La Parte I, formada por los primeros ocho capítulos, está dedicada a lo que ordinariamente se conoce como Topología General. En los primeros cuatro capítulos, considerados el "núcleo irreducible" de la asignatura, se estudia teoría de conjuntos, espacios topológicos, conexión, compacidad y los axiomas de numerabilidad y separación. Los restantes cuatro capítulos exploran temas menos básicos, aunque no de menor importancia.

La Parte II constituye una introducción a la Topología Algebraica. Esta parte del libro trata con cierta minuciosidad los conceptos de grupo fundamental y espacio recubridor, junto con sus muchas y variadas aplicaciones. El capítulo dedicado a la clasificación de superficies compactas y conexas merece una especial atención por su cuidado y detallado tratamiento.

Los problemas constituyen una parte crucial del aprendizaje de las matemáticas. La dificultad de ellos en este texto varía, siendo los primeros los más fáciles. Algunos son de verificación rutinaria, diseñados para poner a prueba si el lector ha comprendido las definiciones y ejemplos de la sección que les precede; otros son de menor rutina. Ciertos ejercicios, que son más difíciles que el resto, están señalados con asterisco; pero ninguno llega a ser tan difícil como para que un buen estudiante no lo pueda resolver.

ISBN 84-205-3180-4



9 788420 531809

Pearson
Educación

www.pearsoneducacion.com