

FÍSICA TEÓRICA

ELECTRODINÁMICA
DE LOS MEDIOS
CONTINUOS

LANDAU^yLIFSHITZ

VOLÚMEN 8

CURSO DE FÍSICA TEÓRICA

Volumen 8

**ELECTRODINÁMICA DE LOS
MEDIOS CONTINUOS**

L. D. LANDAU E. M. LIFSHITZ
Academia de Ciencias, U.R.S.S.

ELECTRODINÁMICA DE LOS MEDIOS CONTINUOS

**Volumen 8
del
CURSO DE FÍSICA TEÓRICA**



EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México - Rio de Janeiro

Título de la obra original:

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
СПЛОШНЫХ СРЕД**

Edición original en lengua rusa publicada por:

Fizmatgiz, Moscú

Versión española directamente del ruso por el:

Prof. Dr. Ramón Ortiz Fornaguera

Jefe de la División de Física Teórica de la
Junta de Energía Nuclear - Madrid

Propiedad de EDITORIAL REVERTÉ, S. A. Encarnación, 86. Barcelona (24)

Reservados todos los derechos. Ninguna parte del material cubierto por este título de propiedad literaria puede ser reproducida, almacenada en un sistema de informática o transmitida de cualquier forma o por cualquier medio electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros métodos sin el previo y expreso permiso por escrito del editor.

Edición en español

© **EDITORIAL REVERTÉ, S. A.. 1981**

Impreso en España Printed in Spain

ISBN - 84 - 291 - 4089 - 1

Depósito legal: B. 29.132-1981

Márquez, S. A. - Ignacio Iglesias, 26 - Badalona (Barcelona)

ÍNDICE ANALÍTICO

PRÓLOGO	IX
NOTACIÓN	X
CAPÍTULO I. ELECTROSTÁTICA DE LOS CONDUCTORES	1
1. El campo electrostático de los conductores	1
2. Energía del campo electrostático de los conductores	4
3. Métodos de resolución de los problemas de electrostática	11
4. Elipsoide conductor	24
5. Fuerzas que actúan sobre un conductor	36
CAPÍTULO II. ELECTROSTÁTICA DE LOS DIELÉCTRICOS	43
6. Campo electrostático en los dieléctricos	43
7. La permitividad	45
8. Elipsoide dieléctrico	50
9. Permitividad de una mezcla	55
10. Relaciones termodinámicas para los dieléctricos en un campo eléctrico	57
11. Energía libre total de un dieléctrico	62
12. Electrostricción de los dieléctricos isótropos	66
13. Propiedades dieléctricas de los cristales	70
14. Carácter positivo de la susceptibilidad eléctrica	75
15. Fuerzas eléctricas en un dieléctrico líquido	77
16. Fuerzas eléctricas en los sólidos	82
17. Cuerpos piezoelectrinos	88
18. Desigualdades termodinámicas	95
19. Medios ferroeléctricos	100
CAPÍTULO III. CORRIENTE CONTINUA	111
20. Densidad de corriente y conductibilidad	111
21. Efecto Hall	116
22. Diferencia de potenciales de contacto	119
23. Elementos galvánicos	122
24. Electrocapilaridad	124
25. Fenómenos termoeléctricos	125
26. Fenómenos de difusión eléctrica	132

CAPÍTULO IV. CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE	135
27. Campo magnético constante	135
28. Simetría magnética de los cristales	138
29. Campo magnético de las corrientes continuas	143
30. Relaciones termodinámicas en un campo magnético	151
31. Energía libre total de una substancia magnética	154
32. Energía de un sistema de corrientes	156
33. Autoinductancia de los conductores lineales	162
34. Fuerzas en un campo magnético	168
35. Fenómenos giromagnéticos	172
CAPÍTULO V. FERROMAGNETISMO	175
36. Cuerpos ferromagnéticos cerca del punto de Curie	175
37. Energía de anisotropía magnética	178
38. Magnetostricción de los cuerpos ferromagnéticos	186
39. Estructura en dominios de los ferromagnéticos	189
40. Punto de Curie antiferromagnético	197
CAPÍTULO VI. SUPERCONDUCTIBILIDAD	199
41. Propiedades magnéticas de los superconductores	199
42. Corrientes en superconductores	202
43. El campo crítico	206
44. El estado intermedio	212
CAPÍTULO VII. CAMPO ELECTROMAGNÉTICO CUASIESTACIONARIO	221
45. Corrientes de Foucault	221
46. Efecto pelicular	232
47. Resistencia compleja	234
48. Capacidad en el circuito de una corriente cuasiestacionaria	239
49. Movimiento de un conductor en un campo magnético	244
50. Excitación de corrientes por aceleración	250
CAPÍTULO VIII. MAGNETOHIDRODINÁMICA	253
51. Ecuaciones del movimiento de un líquido en un campo magnético	253
52. Ondas magnetohidrodinámicas	259
53. Discontinuidades tangenciales y rotacionales	266
54. Ondas de choque	272
55. Campo magnético espontáneo en el movimiento turbulento de un líquido conductor	278
CAPÍTULO IX. LAS ECUACIONES DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS	285
56. Ecuaciones del campo en los dieléctricos cuando no existe dispersión	285
57. Electrodinámica de los dieléctricos en movimiento	289
58. Dispersión de la permitividad	295
59. Permitividad para muy altas frecuencias	298
60. Dispersión de la permeabilidad	299

61. Energía del campo en los medios dispersores	301
62. Relación entre las partes real e imaginaria de $\epsilon(\omega)$	305
63. Onda monocromática plana	312
64. Medios transparentes	316
 CAPÍTULO X. PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS	319
65. Óptica geométrica	319
66. Reflexión y refracción de las ondas electromagnéticas	322
67. Impedancia superficial de los metales	331
68. Propagación de las ondas en un medio no homogéneo	337
69. Principio de reciprocidad	341
70. Oscilaciones electromagnéticas en resonadores huecos	343
71. Propagación de las ondas electromagnéticas en las guías de onda	347
72. Dispersion de las ondas electromagnéticas por pequeñas partículas	355
73. Absorción de las ondas electromagnéticas por pequeñas partículas	359
74. Difracción por una cuña	360
75. Difracción por una pantalla plana	365
 CAPÍTULO XI. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN MEDIOS ANISÓTROPOS	369
76. La permitividad de los cristales	369
77. Onda plana en un medio anisótropo	371
78. Propiedades ópticas de los cristales uniáxicos	378
79. Cristales biaxicos	382
80. Doble refracción en un campo eléctrico	387
81. Fenómenos dinamo-ópticos	388
82. Efectos magneto-ópticos	389
83. Actividad óptica natural	397
 CAPÍTULO XII. PASO DE PARTÍCULAS RÁPIDAS A TRAVÉS DE LA MATERIA	405
84. Pérdidas de energía por ionización para partículas rápidas en la materia. Caso no relativista	405
85. Pérdida de energía de las partículas rápidas por ionización en la materia. Caso relativista	411
86. Radiación de Cherenkov	419
 CAPÍTULO XIII. FLUCTUACIONES ELECTROMAGNÉTICAS	423
87. Fluctuaciones de la corriente en los circuitos lineales	423
88. Fluctuaciones del campo electromagnético	424
89. La radiación del cuerpo negro en un medio transparente	431
90. Fuerzas de atracción molecular entre sólidos	433
 CAPÍTULO XIV. DISPERSION DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS	441
91. Teoría general de la dispersión en medios isótropos	441
92. El principio del equilibrio detallado en la dispersión	448
93. Dispersion con un pequeño cambio de frecuencia	451
94. Dispersion de Rayleigh en gases y líquidos	453

95. Opalescencia crítica	460
96. Dispersión en cuerpos sólidos amorfos	462
CAPÍTULO XV. DIFRACCIÓN DE LOS RAYOS X EN LOS CRISTALES	
97. Teoría general de la difracción de los rayos X	467
98. Intensidad integral	474
99. Dispersión térmica difusa de los rayos X.....	478
APÉNDICE. COORDENADAS CURVILÍNEAS.....	481
ÍNDICE ALFABÉTICO	485

PRÓLOGO

El volumen presente, Curso de Física Teórica, comprende la teoría de los campos magnéticos con las de la electricidad y las propiedades magnéticas de los materiales. Estas teorías encierran un amplio campo de conocimientos como puede comprobarse en el Índice Analítico.

Al escribir este libro se nos presentaron considerables dificultades, particularmente por la necesidad de seleccionar en el extenso campo de esta Ciencia y también porque la exposición usual de muchos tópicos que deben incluirse, no poseen la claridad necesaria y son generalmente incorrectos. Reconocemos que nuestro trabajo adolece todavía de muchos defectos que trataremos de remediar en las ediciones futuras.

Agradecemos al Profesor V. L. Ginzburg que leyó el manuscrito de este libro y nos proporcionó comentarios sumamente útiles. A I. E. Dzyaloshinskii y L. P. Pitaevskiĭ que nos corrigieron la edición rusa.

Gracias son también debidas al Dr. Sykes y al Dr. Bell que no solamente ayudaron a la ardua tarea de traducir el libro sino que nos proporcionaron algunos comentarios útiles concernientes a su contenido.

L. D. LANDAU y E. M. LIFSHITZ

NOTACIONES

Campo eléctrico \mathbf{E}

Inducción eléctrica \mathbf{D}

Campo magnético \mathbf{H}

Inducción magnética \mathbf{B}

Campo eléctrico externo \mathbf{E}_e

Campo magnético externo \mathbf{H}_e

Polarización dieléctrica \mathbf{P}

Magnetización \mathbf{M}

Momento eléctrico total de un cuerpo \mathcal{P}

Momento magnético total de un cuerpo \mathcal{M}

Permitividad eléctrica ϵ

Permitividad magnético μ

Densidad de corriente \mathbf{j}

Conductividad σ

Temperatura absoluta (en unidades de energía) T

Cantidades termodinámicas: por unidad de volumen para un cuerpo

entropía	S	\mathcal{S}
----------	-----	---------------

energía interna	U	\mathcal{U}
-----------------	-----	---------------

energía libre	F	\mathcal{F}
---------------	-----	---------------

potencial termodinámico	Φ	\mathcal{P}
-------------------------	--------	---------------

Potencial químico ζ

Un factor de tiempo periódico complejo se toma siempre como $e^{-i\omega t}$.

Se aplica siempre la regla de la suma con relación a los índices de los vectores y de los tensores tridimensionales (letras latinas) y bidimensionales (letras griegas) repitiéndose dos veces.

CAPÍTULO 1

ELECTROSTÁTICA DE LOS CONDUCTORES

§ 1. El campo electrostático de los conductores

El objeto de la electrodinámica macroscópica es el estudio de los campos electromagnéticos en el espacio ocupado por la materia. Como cualquier otra teoría macroscópica, la electrodinámica opera con magnitudes físicas promediadas en elementos de volumen «infinitamente pequeños físicamente», sin que interesen las fluctuaciones microscópicas de estas magnitudes que están ligadas con la estructura molecular de la materia. Así, en vez del verdadero valor «microscópico» de la intensidad del campo eléctrico e consideraremos su valor medio, designándolo por

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{E}. \quad (1.1)$$

Las ecuaciones fundamentales de la electrodinámica de los medios continuos se obtienen promediando la ecuaciones del campo electromagnético en el vacío. El primero en realizar este paso de las ecuaciones microscópicas a las macroscópicas fue H. A. Lorentz.

La forma de las ecuaciones de la electrodinámica macroscópica, como también el sentido de las magnitudes que en ellas aparecen, dependen de manera esencial de la naturaleza física del medio material al igual que del carácter del cambio del campo con el tiempo. Por ello, resulta razonable deducir y estudiar estas ecuaciones para cada categoría de objetos físicos por separado.

Como es sabido, en relación con sus propiedades eléctricas los cuerpos se clasifican en dos categorías, *conductores* y *dielectricos*, distinguiéndose los primeros de los segundos por el hecho de que cualquier campo eléctrico provoca en los conductores el movimiento de cargas, es decir, la aparición de *corrientes eléctricas**.

Comenzaremos por el estudio de los campos eléctricos constantes creados por conductores cargados (es decir, por la *electrostática de los conductores*). De la propiedad fundamental de los conductores se sigue, ante todo, que en el caso electrostático la intensidad del campo eléctrico dentro de ellos debe ser igual a cero.

* Sin embargo, es necesario advertir que un conductor se supone aquí homogéneo (en lo que concierne a su composición, temperatura, etc.). En un conductor no homogéneo, conforme veremos más adelante, pueden existir campos que no determinan el movimiento de las cargas.

En efecto, una intensidad \mathbf{E} no nula conduciría a la aparición de una corriente; por otra parte, la propagación de una corriente en un conductor trae consigo una disipación de energía y, en consecuencia, no puede por sí misma (sin que existan fuentes exteriores de energía) mantenerse en estado estacionario.

De aquí se sigue, a su vez, que todas las cargas en un conductor deben estar distribuidas por su superficie: la existencia de cargas en un volumen de conductor conduciría inmediatamente a la aparición de un campo eléctrico en él*; en cambio, la distribución de las cargas por la superficie puede efectuarse de manera tal que los campos creados por ellas dentro del conductor se compensen entre sí.

De esta manera, el problema que se plantea la electrostática de los conductores queda reducido a determinar un campo eléctrico en el vacío, fuera de los conductores, y a la distribución de las cargas sobre la superficie de los mismos.

En puntos no demasiado próximos a la superficie de un cuerpo, el campo medio \mathbf{E} en el vacío coincide de hecho con el verdadero campo \mathbf{e} . Estas dos magnitudes difieren una de otra solamente en la inmediata proximidad del cuerpo, donde todavía se manifiesta la influencia de los campos irregulares de las moléculas. Esta última circunstancia, con todo, no se refleja en la forma de las ecuaciones de los campos promediadas. Las ecuaciones microscópicas exactas de Maxwell en el vacío se escriben:

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = 0, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = -(1/c)\partial\mathbf{h}/\partial t, \quad (1.3)$$

(\mathbf{h} es la intensidad microscópica del campo magnético). Dado que se supone que el valor medio del campo magnético es igual a cero, también se anula la derivada $\partial\mathbf{h}/\partial t$ como resultado de efectuar el promedio y encontramos que un campo eléctrico constante en el vacío satisface las ecuaciones ordinarias

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (1.4)$$

es decir, se trata de un campo que deriva de un potencial ϕ ligado con la intensidad de aquél por la relación

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi, \quad (1.5)$$

y que satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta\phi = 0. \quad (1.6)$$

Las condiciones de contorno para el campo \mathbf{E} sobre la superficie del conductor se siguen de la propia ecuación $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ que es válida [al igual que la ecuación de partida (1.3)] tanto en el interior como fuera del cuerpo. Elijamos el eje z de modo que coincida con la normal a la superficie del conductor en uno de sus puntos. La componente E_z del campo en la inmediata proximidad de la superficie del cuerpo

* Esto se ve claramente en la ecuación (1.8) que se deduce más adelante.

alcanza valores muy grandes (debido a que en ella la diferencia de potenciales no es nula en puntos «infinitamente» próximos). La existencia de este campo muy intenso constituye una propiedad de la superficie misma y depende de sus propiedades físicas, pero nada tiene que ver con el problema electrostático que estamos considerando, puesto que dicho campo disminuye rápidamente ya a distancias comparables con las interatómicas. Es esencial, sin embargo, el hecho de que si la superficie es homogénea, las derivadas $\partial E_z / \partial x$, $\partial E_z / \partial y$ sobre ella se conservan finitas a pesar de que E_z tiende a infinito. En consecuencia, de $(\text{rot } \mathbf{E})_x = \partial E_z / \partial y - \partial E_y / \partial z = 0$, se sigue que $\partial E_y / \partial z$ es finita. Esto significa que E_y es una función continua sobre la superficie (ya que un salto de E_y significaría que su derivada $\partial E_y / \partial z$ sería igual a infinito). Lo mismo vale para E_x , y dado que dentro del conductor es $\mathbf{E} = 0$ en cualquier punto, llegamos a la conclusión de que las componentes tangenciales del campo exterior sobre la superficie de aquél deben anularse:

$$\mathbf{E}_t = 0. \quad (1.7)$$

Así pues, un campo electrostático ha de ser normal a la superficie del conductor en cada uno de sus puntos. Dado que $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$, esto significa que el potencial del campo debe ser constante sobre toda la superficie de cada conductor dado. En otras palabras, la superficie de un conductor homogéneo es una superficie equipotencial del campo electrostático.

En cuanto a la componente del campo normal a la superficie, su valor está ligado de una manera muy simple con la densidad de carga distribuida sobre ella. Esta relación se obtiene a partir de la ecuación general electrodinámica $\text{div } \mathbf{e} = 4\pi\rho$ que después de promediar nos da

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\bar{\rho}, \quad (1.8)$$

donde $\bar{\rho}$ es la densidad media de carga. En su forma integral esta ecuación significa, como es sabido, que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga total que se encuentra en el volumen limitado por esta superficie (multiplicada por 4π). Aplicando este teorema al elemento de volumen limitado por dos superficies de área unidad infinitamente próximas colocadas a uno y otro lado de la superficie del conductor, y teniendo en cuenta que en la superficie interior es $\mathbf{E} = 0$, se encuentra que $E_n = 4\pi\sigma$, donde σ es la densidad superficial de carga, es decir, la carga por unidad de área de la superficie del conductor. De esta manera, la distribución de las cargas en la superficie de un conductor viene determinada por la fórmula

$$4\pi\sigma = E_n = -\partial\phi/\partial n, \quad (1.9)$$

(la derivada del potencial se toma en el sentido de la normal exterior a la superficie). La carga total del conductor vale

$$e = -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial\phi}{\partial n} df, \quad (1.10)$$

donde la integral se extiende a toda su superficie.

La distribución del potencial en todo el campo electrostático posee la siguiente notable propiedad: la función $\phi(x, y, z)$ puede alcanzar valores máximos o mínimos tan sólo sobre las fronteras del dominio ocupado por el campo. Este teorema puede formularse también diciendo que es imposible el equilibrio estable de una carga de prueba e introducida en el campo, puesto que no existe punto alguno en el cual su energía potencial $e\phi$ presente un mínimo.

La demostración del teorema es muy sencilla. Supongamos, por ejemplo, que en un cierto punto A (que no se encuentra en la frontera del campo) el potencial tuviera un máximo. Entonces sería posible rodear el punto A por una superficie cerrada tan pequeña que sobre ella la derivada respecto de la normal fuera $\partial\phi/\partial n < 0$.

En consecuencia, también la integral extendida a esta superficie sería $\int \frac{\partial\phi}{\partial n} df < 0$.

Pero, en virtud de la ecuación de Laplace, $\oint (\partial\phi/\partial n) df = \int \Delta\phi dV = 0$, contra lo supuesto.

§ 2. Energía del campo electrostático de los conductores

Calculemos la energía total \mathcal{U} del campo electrostático determinado por conductores cargados*

$$\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV, \quad (2.1)$$

donde la integral se extiende a todo el volumen del espacio fuera de los conductores. Transformemos esta integral de la siguiente forma:

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \text{grad } \phi dV = -\frac{1}{8\pi} \int \text{div}(\phi \mathbf{E}) dV + \frac{1}{8\pi} \int \phi \text{div} \mathbf{E} dV.$$

La segunda integral se anula en virtud de (1.4) y la primera se transforma en una integral extendida a las superficies de los conductores que limitan el campo y a una superficie infinitamente alejada. Pero esta última integral es igual a cero debido a la suficientemente rápida disminución del campo en el infinito. Numerando los conductores mediante el índice a y designando los valores constantes del potencial sobre cada una de sus superficies por ϕ_a , obtendremos**,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi} \sum_a \oint \phi E_n df = \frac{1}{8\pi} \sum_a \phi_a \oint E_n df.$$

* El cuadrado E^2 no coincide con el valor medio $\bar{e^2}$ del cuadrado del campo real cerca de la superficie del conductor ni tampoco en el volumen de este último (donde $E = 0$, pero, claro está, $e^2 \neq 0$). Al calcular la integral (2.1) prescindimos así tanto de la energía interna del conductor como tal, que no nos interesa, como de la energía de afinidad de las cargas hacia la superficie.

Finalmente, introduciendo las cargas totales de los conductores e_a de acuerdo con (1.10), se obtiene la expresión final

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_a e_a \phi_a, \quad (2.2)$$

análoga a la expresión de la energía de un sistema de cargas puntuales.

Las cargas y los potenciales de los conductores no pueden darse a la vez de manera arbitraria; entre unas y otros existe una determinada relación. En virtud del carácter lineal y homogéneo de las ecuaciones del campo en el vacío, esta relación debe ser también lineal, es decir, debe expresarse por igualdades de la forma

$$e_a = \sum_b C_{ab} \phi_b. \quad (2.3)$$

donde las magnitudes C_{aa} , C_{ab} tienen las dimensiones de una longitud y dependen de la forma y posición relativa de los conductores en el espacio. Las magnitudes C_{aa} se llaman *coeficientes de capacidad*, y las magnitudes C_{ab} ($a \neq b$), *coeficientes de inducción electrostática*. En particular, si hay un solo conductor, se tendrá $e = C\phi$, donde C es la *capacidad*; el orden de magnitud de una capacidad coincide con el de las dimensiones lineales del cuerpo. Las relaciones inversas, que dan los potenciales en función de las cargas, se escriben:

$$\phi_a = \sum_b C^{-1}_{ab} e_b, \quad (2.4)$$

donde los coeficientes C^{-1}_{ab} constituyen una matriz que es la inversa de la matriz de los coeficientes C_{ab} .

Calculemos la variación de la energía de un sistema de conductores al variar infinitamente poco sus cargas o sus potenciales. Variando la expresión de partida (2.1), tenemos $\delta\mathcal{U} = (1/4\pi) \int \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{E} dV$. Es posible transformar esta expresión siguiendo dos métodos equivalentes. Haciendo $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ y teniendo en cuenta que el campo variado, al igual que el de partida, satisface las ecuaciones (1.4) (de modo que $\text{div } \delta\mathbf{E} = 0$), escribiremos

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} &= -\frac{1}{4\pi} \int \text{grad } \phi \cdot \delta\mathbf{E} dV = -\frac{1}{4\pi} \int \text{div}(\phi \delta\mathbf{E}) dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_a \phi_a \oint \delta E_n df, \end{aligned}$$

o finalmente

$$\delta\mathcal{U} = \sum_a \phi_a \delta e_a, \quad (2.5)$$

** Al transformar una integral de volumen en una de superficie hay que tener en cuenta, tanto aquí como en lo que sigue, que E_n es la componente del campo en el sentido de la normal exterior con referencia al conductor; esta dirección orientada es opuesta a la de la normal exterior respecto del dominio de integración, es decir, del espacio exterior a los conductores. Debido a ello se ha cambiado el signo de la integral en la transformación.

es decir, hemos obtenido el cambio de la energía expresado en función de la variación de las cargas. Este resultado, por lo demás, era evidente a priori en tanto que es igual al trabajo que es necesario efectuar sobre las cargas infinitamente pequeñas δe_a para llevarlas a los conductores dados desde el infinito, donde el potencial del campo es igual a cero.

Por otra parte, se puede escribir

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{U} &= -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \text{grad } \delta\phi \, dV = -\frac{1}{4\pi} \int \text{div}(\mathbf{E} \delta\phi) \, dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_a \delta\phi_a \oint E_n \, df,\end{aligned}$$

o bien,

$$\delta \mathcal{U} = \sum_a e_a \delta\phi_a, \quad (2.6)$$

que da la variación de la energía expresada en función del cambio de los potenciales de los conductores.

Las fórmulas (2.5), (2.6) prueban que, al derivar la energía \mathcal{U} respecto de las cargas, obtenemos los potenciales de los conductores, y que las derivadas de \mathcal{U} respecto de los potenciales nos dan los valores de las cargas:

$$\partial \mathcal{U} / \partial e_a = \phi_a, \quad \partial \mathcal{U} / \partial \phi_a = e_a. \quad (2.7)$$

Por otra parte, los potenciales y las cargas son funciones lineales unas de otras. Mediante (2.3), podemos escribir $\partial^2 \mathcal{U} / \partial \phi_a \partial \phi_b = \partial e_b / \partial \phi_a = C_{ba}$, e invirtiendo el orden de derivación obtendríamos C_{ab} . De aquí se sigue que

$$C_{ab} = C_{ba}, \quad (2.8)$$

(y análogamente $C_{ab}^{-1} = C_{ba}^{-1}$). La energía \mathcal{U} puede representarse como forma cuadrática respecto de los potenciales o de las cargas:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{a,b} C_{ab} \phi_a \phi_b = \frac{1}{2} \sum_{a,b} C_{ab}^{-1} e_a e_b. \quad (2.9)$$

Esta forma cuadrática, como la expresión de partida (2.1), debe ser definida positiva. De esta condición se siguen determinadas desigualdades a las que deben satisfacer los coeficientes C_{ab} . En particular, todos los coeficientes de capacidad son positivos:

$$C_{aa} > 0 \quad (2.10)$$

(y también $C_{aa}^{-1} > 0$)*.

Por el contrario todos los coeficientes de inducción electrostática son negativos:

$$C_{ab} < 0 \quad (a \neq b). \quad (2.11)$$

* Indicaremos asimismo que entre las condiciones que impone el carácter definido positivo de la fórmula (2.9) figuran también las desigualdades $C_{aa} C_{bb} > C_{ab}^2$.

Esta circunstancia resulta ya evidente a partir de las simples consideraciones que siguen. Imaginemos que todos los conductores salvo uno (el a -ésimo) están conectados a tierra, es decir, sus potenciales son nulos. Entonces la carga inducida por el conductor cargado a -ésimo sobre otro conductor cualquiera b , es igual a $e_b = C_{ba}\phi_a$. Es claro que el signo de la carga inducida ha de ser opuesto al signo del potencial inductor y, por ello, $C_{ab} < 0$. De manera más rigurosa cabe cerciorarse de que así es partiendo del hecho de que el potencial de un campo electrostático no puede alcanzar valores máximos o mínimos fuera de los conductores. Supongamos, por ejemplo, que el potencial del único conductor no conectado a tierra es $\phi_a > 0$. Entonces el potencial será también positivo en todo el espacio, de modo que su valor mínimo (igual a cero) se alcance solamente sobre los conductores derivados a tierra. Se sigue de aquí que sobre la superficie de éstos la derivada normal del potencial $\partial\phi/\partial n$ será positiva y su carga, según (1.10), negativa.

Mediante consideraciones análogas puede verse que $C_{ab}^{-1} > 0$.

La energía del campo electrostático de los conductores posee determinada propiedad extremal que, a decir verdad, tiene un carácter más bien formal que físico. Para deducirla supongamos que la distribución de las cargas en los conductores se somete a una variación infinitamente pequeña (sin cambiar la carga total de cada uno de ellos), como consecuencia de la cual las cargas pueden incluso penetrar en el conductor; al proceder así, ignoramos el hecho de que, en realidad, una tal distribución de cargas no puede ser estacionaria. Consideremos la correspondiente variación de la integral

$$\mathcal{U} = (1/8\pi) \int E^2 dV,$$

que hay que suponer ahora extendida a todo el espacio, incluyendo el ocupado por los propios conductores (dado que después del desplazamiento de las cargas el campo E será, en general, distinto de cero también dentro de los conductores). Hagamos:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} &= -\frac{1}{4\pi} \int \text{grad } \phi \cdot \delta\mathbf{E} dV \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int \text{div}(\phi\delta\mathbf{E}) dV + \frac{1}{4\pi} \int \phi \text{ div } \delta\mathbf{E} dV. \end{aligned}$$

La primera integral, una vez transformada en una integral extendida a una superficie infinitamente alejada, resulta ser igual a cero. En la segunda, tenemos $\text{div } \delta\mathbf{E} = 4\pi\delta\rho$ en virtud de la ecuación (1.8), de modo que

$$\delta\mathcal{U} = \int \phi\delta\rho dV$$

Pero esta integral se anula si ϕ corresponde al verdadero campo electrostático: en este caso, dentro de cada conductor se tiene $\phi = \text{const}$ y las integrales $\int \delta\rho dV$ extendidas a sus volúmenes son nulas, puesto que las cargas totales de los conductores siguen siendo las mismas.

De esta manera, la energía del campo electrostático real es mínima* comparada

* No presentaremos aquí los simples razonamientos que demuestran que se trata precisamente de un mínimo, y no de un extremo en general.

con la energía de los campos que se podrían crear por cualesquiera otras distribuciones de cargas en el volumen o sobre la superficie de los conductores (*teorema de Thomson*).

De este teorema se deduce, en particular, el siguiente corolario: la introducción de un conductor no cargado en el campo creado por cargas dadas (por conductores cargados) disminuye la energía total del campo. Para verlo basta comparar la energía del campo real que se establece después de introducir el conductor, con la energía del campo ficticio en que no existen cargas inducidas sobre el conductor introducido. La primera, al ser la mínima posible, es menor que la segunda, que a su vez coincide con la energía del campo inicial (dado que de no existir cargas inducidas, el campo «penetraría» dentro del conductor sin cambio alguno). Este resultado se puede formular también de otra manera: un conductor no cargado colocado lejos de un sistema de cargas dadas es atraído hacia el mismo.

Finalmente, cabe demostrar que un conductor (cargado o no cargado) introducido en un campo electrostático no puede en modo alguno encontrarse en equilibrio estable bajo la acción de fuerzas eléctricas exclusivamente. Esta afirmación generaliza el teorema análogo mencionado al final del párrafo que precede para una carga puntual y puede obtenerse aplicando a la vez dicho teorema y el teorema de Thomson; no nos detendremos en presentar aquí el desarrollo del razonamiento.

Las fórmulas (2.9) son útiles para el cálculo de la energía de un sistema de conductores que se encuentran a distancias finitas uno de otro. Sin embargo, exige consideración especial en el caso de un conductor no cargado que se halla en un campo homogéneo exterior \mathfrak{E} , campo que cabe imaginar creado por cargas situadas en el infinito. Según (2.2), esta energía es igual $\mathcal{U} = \frac{1}{2} e\phi$, donde e es la carga muy alejada que crea el campo y ϕ el potencial del campo que determina el conductor considerado en el punto en que se encuentra la carga e (de \mathcal{U} se ha excluido la energía de la carga e en su propio campo en tanto que nada tiene que ver con la energía del conductor, que es lo que nos interesa). La carga del conductor es igual a cero, pero bajo la acción del campo exterior adquiere un momento eléctrico dipolar que designaremos por \mathcal{P} . El potencial del campo de un dipolo eléctrico a una distancia r grande del mismo es igual, como es sabido, a $\phi = \mathcal{P} \cdot \mathbf{r} / r^3$. Por consiguiente,

$$\mathcal{U} = e\mathcal{P} \cdot \mathbf{r} / 2r^3$$

Pero $e\mathbf{r}/r^3$ es, al mismo tiempo, la intensidad \mathfrak{E} del campo creado por la carga e . Así, pues,

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2} \mathcal{P} \cdot \mathfrak{E}. \quad (2.12)$$

En virtud del carácter lineal de todas las ecuaciones del campo, es evidente que las componentes del momento dipolar \mathcal{P} son funciones lineales de las componentes de la intensidad \mathfrak{E} . Los coeficientes de proporcionalidad entre \mathcal{P} y \mathfrak{E} tienen las dimensiones del cubo de una longitud y, por ello, son proporcionales al volumen del conductor:

$$\mathcal{P}_i = V \alpha_{ik} \mathfrak{E}_k, \quad (2.13)$$

donde los coeficientes α_{ik} dependen solamente de la forma del cuerpo. El conjunto de las magnitudes $V\alpha_{ik}$ constituye un tensor que se puede llamar *tensor polarizabilidad* del cuerpo. Este tensor es simétrico: $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ (la demostración se da en el § 11). De acuerdo con esto, la energía (2.12) se representa en la forma:

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2}V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_i\mathfrak{E}_k. \quad (2.14)$$

PROBLEMAS

1. Expresar la capacidad mutua C del sistema de dos conductores (con cargas $\pm e$) en función de los coeficientes C_{ab} .

Solución. La *capacidad mutua* de dos conductores se define como coeficiente en la igualdad $e = C(\phi_2 - \phi_1)$, y la energía del sistema se expresa en función de C mediante $\mathcal{U} = e^2/2C$. Compartiendo con (2.9), obtendremos:

$$\begin{aligned} 1/C &= C^{-1}_{11} - 2C^{-1}_{12} + C^{-1}_{22} \\ &= (C_{11} + 2C_{12} + C_{22})/(C_{11}C_{22} - C_{12}^2). \end{aligned}$$

2. Una carga puntual e se ha colocado en un punto O cerca de un sistema de conductores derivados a tierra e induce sobre ellos cargas e_a . Si no existiera la carga e y uno de los conductores (el a -ésimo) tuviese un potencial ϕ'_a (manteniendo los restantes conectados a tierra), el potencial del campo en el punto O sería ϕ'_0 . Expresar las cargas e_a en función de ϕ'_a y ϕ'_0 .

Solución. Si las cargas e_a sobre los conductores comunican a éstos los potenciales ϕ_a , y las cargas e'_a , los potenciales ϕ'_a , de (2.3) se sigue entonces que

$$\sum_a \phi_a e_a = \sum_{a,b} \phi_a C_{ab} \phi'_b = \sum_a \phi'_a e_a.$$

Aplicaremos esta relación a dos estados del sistema formado por todas las cargas y la carga puntual e (considerando esta última como caso límite de un conductor de dimensiones pequeñas). En un estado, la carga e no es nula, los conductores tienen las cargas e_a y sus potenciales son $\phi_a = 0$. En el otro estado, la carga $e = 0$ y uno de los conductores tienen un potencial $\phi'_a \neq 0$. Obtendremos entonces $e\phi'_0 + e_a\phi'_a = 0$, de donde

$$e_a = -e\phi'_0/\phi'_a.$$

Por ejemplo, si la carga e se encuentra a la distancia r del centro de una esfera conductora, derivada a tierra, de radio a ($r > a$), se tendrá $\phi'_0 = \phi'_a a/r$ y la carga inducida sobre ella será

$$e_a = -ea/r.$$

He aquí otro ejemplo. Supongamos que la carga e se encuentra entre dos esferas concéntricas, derivadas a tierra, de radios a y b (a una distancia r del centro, $a < r < b$). Si la esfera exterior está conectada a tierra y la interior se carga hasta un potencial ϕ'_a el potencial a la distancia r será igual a

$$\phi'_0 = \phi'_a \frac{1/r - 1/b}{1/a - 1/b}.$$

Así pues, la carga inducida por la carga e sobre la esfera interior es igual a

$$e_a = -ea(b-r)/r(b-a).$$

Análogamente, la carga inducida sobre la esfera exterior vale

$$e_b = -eb(r-a)/r(b-a).$$

3. Dos conductores cuyas capacidades son C_1 y C_2 se han colocado a una distancia r uno de otro, distancia que es grande comparada con sus propias dimensiones. Determinar los coeficientes C_{ab} .

Solución. Si el conductor 1 posee la carga e_1 y el conductor 2 no está cargado, en primera aproximación se tiene $\phi_1 = e_1/C_1$, $\phi_2 = e_1/r$, prescindiendo de las variaciones del campo en el conductor 2 y de su polarización. De esta manera, $C_{11}^{-1} = 1/C_1$, $C_{12}^{-1} = 1/r$ y, análogamente, $C_{22}^{-1} = 1/C_2$. De aquí se siguen los coeficientes C_{ab} *:

$$C_{11} = C_1 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{r^2} \right), \quad C_{12} = -\frac{C_1 C_2}{r}, \quad C_{22} = C_2 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{r^2} \right).$$

4. Determinar la capacidad C de un anillo formado por un conductor fino de sección circular (radio del anillo b , radio de la sección del conductor a ; $b \gg a$).

Solución. Dada la pequeñez de la sección del anillo, el campo cerca de su superficie coincide con el campo creado por la misma carga distribuida a lo largo de la línea de los centros de las secciones (esto sería exacto para un cilindro recto). Por ello, el potencial del propio anillo vale

$$\phi_a = \frac{e}{2\pi b} \oint \frac{dl}{r},$$

donde r es la distancia del punto dado de la superficie del anillo hasta el elemento dl de su línea de centros, a lo largo de la cual se efectúa la integración. Descompongamos la integral en dos partes según sea $r < \Delta$ o $r > \Delta$, donde Δ es una distancia tal que $a \ll \Delta \ll b$. Entonces, cuando $r < \Delta$ se puede considerar como rectilíneo el segmento de anillo, por lo cual

$$\int_{\Delta > r}^{\Delta} \frac{dl}{r} = \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{dl}{\sqrt{l^2 + a^2}} \approx 2 \ln(2\Delta/a).$$

En cambio, en la región en que $r > \Delta$ es posible prescindir del grosor del conductor, es decir, considerar r simplemente como la distancia entre dos puntos de la línea de centros del anillo. En estas condiciones,

$$\int_{r > \Delta}^{\Delta} \frac{dl}{r} = 2 \int_{\phi_0}^{\pi} \frac{b d\phi}{2b \sin \frac{1}{2}\phi} = -2 \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2}\phi,$$

donde ϕ es el ángulo central correspondiente a la cuerda r y el límite inferior de integración se determina a partir de $2b \sin(\phi_0/2) = \Delta$, de donde $\phi_0 \approx \Delta/b$. Al sumar estas dos componentes de la integral desaparece la cantidad Δ y para la capacidad del anillo obtenemos, en definitiva, el valor $C = e/\phi_a$ dado por la siguiente expresión:

$$C = \frac{e}{\phi_a} = \frac{\pi b}{\ln(8b/a)}.$$

* Los términos siguientes del desarrollo son en general de orden superior en una unidad (respecto de $1/r$) a los aquí escritos. Sin embargo, si se interpreta r como distancia entre los «centros de carga» de uno y otro cuerpo (en el caso de esferas, la distancia entre sus centros geométricos), el orden de magnitud de los términos siguientes será superior en dos unidades.

§ 3. Métodos de resolución de los problemas de electrostática

Los métodos generales para la resolución de la ecuación de Laplace dadas las condiciones de contorno sobre determinadas superficies se estudian en el correspondiente capítulo de la física matemática y no figura entre nuestros fines exponerlos en detalle. Aquí nos limitaremos solamente a indicar algunos de los métodos más simples y a la resolución de toda una serie de problemas típicos que poseen un interés de por sí*.

1. *El método de las imágenes.* La determinación del campo creado por una carga puntual e situada fuera de un medio conductor que ocupa un semiespacio, es uno de los ejemplos más simples de aplicación del llamado método de las imágenes. La idea de este método consiste en elegir un número de cargas puntuales suplementarias ficticias tales que, junto con la carga dada, creen un campo para el cual la superficie del conductor dado coincida con una de las superficies equipotenciales del campo. En el caso en cuestión, esto se consigue introduciendo una carga ficticia $e' = -e$ colocada en un punto que represente la imagen reflejada del punto e sobre el plano frontera del medio conductor. El potencial del campo de la carga e y de su «imagen» e' es igual a

$$\phi = e \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right), \quad (3.1)$$

donde r y r' son las distancias del punto de observación a las cargas e y e' . Sobre el plano frontera, $r = r'$ y el potencial tiene el valor constante $\phi = 0$, de modo que la condición de contorno necesaria se cumple efectivamente y (3.1) da la solución del problema planteado. Obsérvese que la carga e es atraída hacia el conductor con una fuerza $e^2/(2a)^2$ (*fuerza de la imagen*; a es la distancia del plano a la carga), y que la energía de interacción es igual a $-e^2/4a$.

La distribución de las cargas superficiales sobre el plano frontera, cargas inducidas por la carga puntual e , viene dada por la fórmula

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_{r=r} = -\frac{e}{2\pi r^3} a. \quad (3.2)$$

Es fácil comprobar que la carga total sobre dicho plano es igual a

$$\int \sigma d\Omega = -e,$$

como debe ser.

La carga total inducida por otras cargas sobre un conductor inicialmente privado de carga es igual, claro está, a cero. Por ello, si en el caso dado el medio con-

* Las soluciones de un número considerablemente mayor de problemas más complicados se pueden encontrar en los libros de W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, 2.^a ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1950, y en el de G. A. Grinberg, *Izbrannye voprosy matematicheskoi teorii elektricheskij i magnitnyj iavlenij* (Temas seleccionados de la teoría matemática de los fenómenos eléctricos y magnéticos.) Izd. AN SSSR, 1948.

ductor (de hecho, un conductor de grandes dimensiones) está aislado, hay que imaginar que, al mismo tiempo que se induce la carga $-e$, se induce la carga $+e$, que, sin embargo, encontrándose distribuida por toda la superficie de un cuerpo de gran tamaño posee una densidad insignificante.

Consideremos ahora el problema más complicado relativo al campo creado por una carga puntual e que se encuentra cerca de un conductor esférico. Para resolver este problema utilizaremos el siguiente resultado que es fácil comprobar mediante un cálculo directo. El potencial del campo creado por dos cargas puntuales e y $-e'$ es

$$\phi = e/r - e'/r',$$

y se anula sobre la superficie de una esfera de radio R cuyo centro se encuentra sobre la prolongación del segmento que une las cargas e y $-e'$ y a distancias l y l' de estos puntos tales que l, l', R satisfacen las igualdades

$$l/l' = (e/e')^2, \quad R^2 = ll'.$$

Supondremos primero que el conductor esférico se mantiene a un potencial constante $\phi = 0$ (esfera derivada a tierra). Entonces, el campo creado fuera de la esfera por la carga puntual e que se encuentra a una distancia l del centro de la misma (en el punto A de la fig. 1) coincidirá con el campo que determina el sistema de dos cargas, la carga dada e y la carga ficticia $-e'$, colocada dentro de la esfera (en A') a una distancia l' de su centro, siendo

$$l' = R^2/l, \quad e' = eR/l. \quad (3.3)$$

El potencial de este campo es

$$\phi = \frac{e - eR}{r - lr'}, \quad (3.4)$$

(r, r' se representan en la fig. 1). Sobre la superficie de la esfera se induce en estas condiciones una carga total diferente de cero e igual a $-e'$. La energía de interacción de la carga con la esfera resulta igual a

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2} ee'/(l - l') = -\frac{1}{2} e^2 R/(l^2 - R^2), \quad (3.5)$$

y la carga es atraída hacia la segunda con una fuerza

$$F = -\partial \mathcal{U}/\partial l = -e^2 l R/(l^2 - R^2)^2$$

En cambio, si la esfera conductora se mantiene en condiciones de carga total nula (esfera aislada sin carga) hay que introducir una carga ficticia más, de tal modo que la carga total inducida sobre la superficie de la esfera resulta ser cero sin que deje de cumplirse la condición de que el potencial sobre dicha superficie sea constante. Esto se consigue colocando una carga $+e'$ en el centro de la esfera. El potencial del campo que se busca viene entonces determinado por la fórmula

$$\phi = \frac{e}{r} - \frac{e'}{r'} + \frac{e'}{r_0}. \quad (3.6)$$

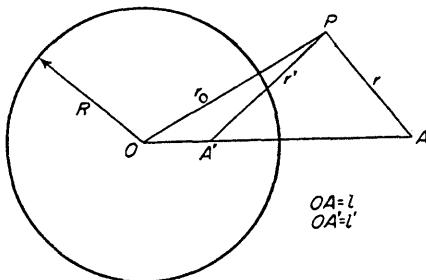


FIG. 1

La energía de interacción será en este caso

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} ee' \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l-l'} \right) = -\frac{e^2 R^3}{2l^2(l^2-R^2)}. \quad (3.7)$$

Finalmente, si la carga e se encuentra en una cavidad esférica situada en un medio conductor (en el punto A' de la fig. 1), el campo en el interior de la cavidad coincide con el que determinaría la carga e y su «imagen» en el punto A fuera de la esfera (con independencia de que el conductor esté aislado o conectado a tierra):

$$\phi = \frac{e}{r'} - \frac{eR}{l'r}. \quad (3.8)$$

2. *El método de la inversión.* Existe un método sencillo que en muchos casos permite resolver un problema electrostático cuando se conoce la solución de otro. Este método se basa en el hecho de que la ecuación de Laplace es invariante respecto de un determinado cambio de variables.

En coordenadas esféricas la ecuación de Laplace tiene la forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \phi = 0,$$

donde se ha designado por Δ_{Ω} la parte angular del operador de Laplace. Es fácil comprobar que esta ecuación conserva su forma si en vez de la variable r se introduce una nueva variable r' definida por

$$r = R^2/r' \quad (3.9)$$

(esta transformación se llama *inversión*) y a la vez se substituye la función incógnita ϕ por otra ϕ' de acuerdo con

$$\phi = r' \phi'/R. \quad (3.10)$$

R es aquí una cierta constante cuyas dimensiones son las de una longitud (*radio de inversión*). Así pues, si la función $\phi(r)$ satisface a la ecuación de Laplace, también la función

$$\phi'(r') = R\phi(R^2r'/r'^2)/r' \quad (3.11)$$

será solución de dicha ecuación.

Supongamos que conocemos la solución del problema de determinar el campo electrostático creado por un sistema de conductores, que se encuentran todos a un mismo potencial ϕ_0 , y por un sistema de cargas puntuales. El potencial $\phi(\mathbf{r})$ se determina de ordinario de manera que se anule en el infinito. Aquí, sin embargo, determinaremos $\phi(\mathbf{r})$ de modo que en el infinito tienda a $-\phi_0$; entonces sobre los conductores se tendrá $\phi = 0$.

Veamos ahora qué problema electrostático se resolverá mediante la función transformada (3.11). Ante todo, se cambian las formas de todos los conductores no puntuales y sus posiciones relativas. La condición de contorno de que el potencial sea constante sobre sus superficies queda satisfecha automáticamente, ya que para $\phi = 0$ será también $\phi' = 0$. A continuación se cambian las posiciones y los valores de todas las cargas puntuales. La carga que se encuentra en el punto \mathbf{r}_0 pasa a ocupar el punto $\mathbf{r}'_0 = (R^2/r_0^2)\mathbf{r}_0$ y toma el valor e' que se puede determinar de la siguiente manera. Cuando $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$, el potencial $\phi(\mathbf{r})$ tiende a infinito según la ley $\phi = e/\|\delta\mathbf{r}\|$, donde $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Por otra parte, diferenciando la igualdad $\mathbf{r} = (R^2/r'^2)\mathbf{r}'$ se encuentra que los valores absolutos de las distancias infinitesimales $\delta\mathbf{r}$ y $\delta\mathbf{r}' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0$ están ligados entre sí por la relación

$$(\delta\mathbf{r})^2 = R^4(\delta\mathbf{r}')^2/r'_0{}^4.$$

En consecuencia, cuando $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}'_0$ la función ϕ' tenderá a infinito como

$$eR/r'_0|\delta\mathbf{r}| = er'_0/R|\delta\mathbf{r}'|,$$

lo que corresponde a una carga

$$e' = er'_0/R = eR/r_0. \quad (3.12)$$

Finalmente, consideraremos el comportamiento de la función $\phi'(\mathbf{r}')$ cerca del origen de coordenadas. Al punto $\mathbf{r}' = 0$ corresponde $\mathbf{r} \rightarrow \infty$. Mas para $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ la función $\phi(\mathbf{r})$ tiende a $-\phi_0$. Por lo tanto, cuando $\mathbf{r}' \rightarrow 0$ la función ϕ' tenderá a infinito de acuerdo con la ley

$$-R\phi_0/r'$$

Esto significa que en el punto $\mathbf{r}' = 0$ se encuentra la carga $e_0 = -R\phi_0$.

Con carácter informativo indicaremos aquí cómo se transforman en la inversión algunas figuras geométricas. Una superficie esférica de radio a con centro en el punto \mathbf{r}_0 viene dada por la ecuación

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 = a^2$$

Aplicando la inversión, obtenemos la ecuación

$$([R^2\mathbf{r}'/r'^2] - \mathbf{r}_0)^2 = a^2$$

que después de multiplicarla por r'^2 y de agrupar los términos convenientemente se puede reducir a la forma

$$(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0)^2 = a'^2,$$

donde

$$\mathbf{r}'_0 = -R^2\mathbf{r}_0/(a^2 - r_0^2), \quad a' = aR^2/|a^2 - r_0^2|. \quad (3.13)$$

De esta manera, obtenemos de nuevo una esfera, aunque de otro radio a' y con centro en el punto \mathbf{r}'_0 . Si la esfera primitiva pasaba por el origen de coordenadas ($a = r_0$), se tendrá $a' = \infty$; en este caso la esfera se transforma en un plano perpendicular a la dirección de \mathbf{r}_0 y que pasa a una distancia

$$r'_0 - a' = R^2/(a + r_0) = R^2/2a$$

del origen de coordenadas.

3. *El método de la representación conforme.* Un campo que depende sólo de las dos coordenadas cartesianas (x, y) se llama *campo plano* o *bidimensional*. Un poderoso instrumento para resolver problemas planos de electrostática lo ofrece la teoría de las funciones de variable compleja. Los fundamentos para la aplicación de esta teoría pueden resumirse como sigue.

Un campo electrostático en el vacío satisface dos ecuaciones: $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ y $\text{div } \mathbf{E} = 0$. La primera de ellas permite introducir el potencial del campo de acuerdo con $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$. En cambio, la segunda ecuación muestra que, junto con ϕ , cabe introducir también un *potencial vector* del campo, \mathbf{A} , definido por $\mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{A}$. En el caso de un problema en el plano, el vector \mathbf{E} se encuentra en el plano xy y depende solamente de estas dos coordenadas. En correspondencia con esto, el vector \mathbf{A} se puede elegir de manera que en cualquier punto esté dirigido perpendicularmente al plano xy . Entonces las componentes de la intensidad del campo se expresan en forma de derivadas de ϕ o de \mathbf{A} de acuerdo con

$$E_x = -\partial\phi/\partial x = \partial A/\partial y, \quad E_y = -\partial\phi/\partial y = -\partial A/\partial x. \quad (3.14)$$

Pero precisamente estas relaciones entre las derivadas de las funciones ϕ y A coinciden, desde un punto de vista puramente matemático, con las conocidas condiciones de Cauchy-Riemann que expresan el hecho de que la variable compleja

$$w = \phi - iA \quad (3.15)$$

es una función analítica del argumento complejo $z = x + iy$. Esto significa que la función $w(z)$ posee en cada punto una derivada determinada que no depende de la dirección a lo largo de la cual se toma. Así, derivando en la dirección del eje x encontramos que

$$dw/dz = \partial\phi/\partial x - i\partial A/\partial x$$

o bien

$$dw/dz = -E_x + iE_y. \quad (3.16)$$

La función w se llama *potencial complejo*.

Las líneas de fuerza del campo se determinan por las ecuaciones

$$dx/E_x = dy/E_y.$$

Expresando E_x y E_y como derivadas de A , esta ecuación puede escribirse también en la forma

$$(\partial A/\partial x)dx + (\partial A/\partial y)dy = dA = 0$$

de donde $A(x, y) = \text{const.}$ Así pues, las líneas a lo largo de las cuales es constante el valor de la parte imaginaria de la función $w(z)$ coinciden con las líneas de fuerza del campo. En cambio, las líneas a lo largo de las cuales es constante la parte real de dicha función, son líneas equipotenciales. Las relaciones de partida (3.14), según las cuales

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

permiten asegurar el carácter ortogonal de estas dos familias de líneas.

Tanto la parte real como la parte imaginaria de una función analítica satisfacen a la ecuación de Laplace. Por ello, igualmente se puede adoptar $\text{Im } w$ como potencial del campo. Entonces, las líneas de fuerza vendrán dadas por las ecuaciones $\text{Re } w = \text{const.}$ En vez de (3.15) se tendrá, en estas condiciones, $w = A + i\phi$.

El flujo del campo eléctrico a través de un segmento cualquiera de línea equipotencial viene dado por la integral

$$\oint E_n dl = -\oint (\partial\phi/\partial n) dl$$

donde dl es el elemento de línea equipotencial y n la dirección orientada de la normal a la misma. De acuerdo con las relaciones (3.14) tenemos $\partial\phi/\partial n = -\partial A/\partial l$, donde el signo se elige de manera que si miramos en el sentido de n , el sentido positivo de l se encuentra a la izquierda. Por lo tanto,

$$\oint E_n dl = \oint (\partial A/\partial l) dl = A_2 - A_1$$

donde A_2 y A_1 son los valores de A en los extremos del segmento. En particular, el flujo del campo eléctrico a través de un contorno cerrado es igual a $4\pi e$, donde e es la carga total que se encuentra en el interior de este contorno (referida a la unidad de longitud de los conductores a lo largo del eje z , es decir, perpendicularmente al plano). Por consiguiente,

$$e = (1/4\pi)\Delta A, \quad (3.17)$$

donde ΔA es la variación de A al recorrer la línea equipotencial cerrada en sentido contrario al de las agujas de un reloj.

El ejemplo más simple de potencial complejo es el del campo creado por un hilo rectilíneo cargado (que coincide con el eje z). La intensidad de este campo viene dada por las fórmulas

$$E_r = 2e/r, \quad E_\theta = 0$$

donde r, θ son las coordenadas polares en el plano xy , y e es la carga del hilo por unidad de longitud. El correspondiente potencial complejo es

$$w = -2e \ln z = -2e \ln r - 2ie\theta. \quad (3.18)$$

Pero si el hilo cargado pasa, no por el origen de coordenadas, sino por el punto x_0, y_0 , el potencial complejo será

$$w = -2e \ln (z - z_0), \quad (3.19)$$

donde $z_0 = x_0 + iy_0$.

Desde el punto de vista matemático, la relación funcional $w = w(z)$ determina una *representación conforme* del plano complejo de la variable z sobre el plano complejo de la variable w . Sea C el contorno de la sección de un conductor por el plano xy y ϕ_0 el potencial de este conductor. Por todo lo dicho antes, es claro que el problema de determinar el campo creado por este conductor se reduce a hallar una función $w(z)$ que transforme el contorno C del plano z en la recta $w = \phi_0$ paralela al eje de ordenadas en el plano w ; entonces, la parte real $\operatorname{Re} w$ dará el potencial del campo considerado (pero si la función $w(z)$ da como imagen del contorno C una recta paralela al eje de abcisas, el potencial será el dado por la función $\operatorname{Im} w$).

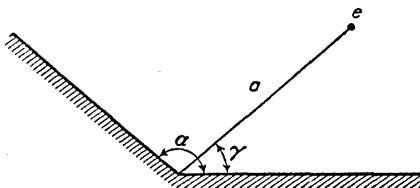


FIG. 2

4. *El problema de la cuña.* Como referencia, presentaremos aquí las fórmulas que determinan el campo creado por una carga puntual e situada en el espacio entre dos semiplanos conductores con la misma recta límite. Supongamos que el eje z de un sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) coincide con la arista del ángulo diedro que forman, contándose el ángulo θ a partir de una de sus caras; sean $(a, \gamma, 0)$ las coordenadas de la carga e (fig. 2). El ángulo formado por los dos planos puede ser tanto $< \pi$ como $> \pi$; en el último caso se trata de una carga que se encuentra colocada fuera de la cuña definida por los dos conductores.

El potencial del campo viene dado por la fórmula*

$$\phi = \frac{e}{\alpha \sqrt{2ar}} \int_{\eta}^{\infty} \left\{ \frac{\operatorname{senh}(\pi\zeta/\alpha)}{\cosh(\pi\zeta/\alpha) - \cos[\pi(\theta - \gamma)/\alpha]} - \frac{\operatorname{senh}(\pi\zeta/\alpha)}{\cosh(\pi\zeta/\alpha) - \cos[\pi(\theta + \gamma)/\alpha]} \right\} \times$$

$$\times \frac{d\zeta}{\sqrt{\cosh \zeta - \cosh \eta}}, \quad \cosh \eta = (a^2 + r^2 + z^2)/2ar, \quad \eta > 0. \quad (3.20)$$

(sobre la superficie de los conductores, es decir, para $\theta = 0, \alpha$, el potencial es $\phi = 0$).

En particular, para $\alpha = 2\pi$ el problema es el de un plano conductor en el campo de una carga puntual. En este caso la integral (3.20) puede expresarse como combinación de funciones elementales y da

$$\phi = \frac{e}{\pi} \left\{ \frac{1}{R} \operatorname{arc cos} \left(\frac{-\cos \frac{1}{2}(\theta - \gamma)}{\cosh \frac{1}{2}\eta} \right) - \frac{1}{R'} \operatorname{arc cos} \left(\frac{-\cos \frac{1}{2}(\theta + \gamma)}{\cosh \frac{1}{2}\eta} \right) \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} R^2 &= a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos(\gamma - \theta), \\ R'^2 &= a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos(\gamma + \theta). \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

* El primero en dar esta fórmula fue H. M. MacDonald (1895). Cómo deducirla puede verse en su Electromagnetism, Bell, Londres, 1934, pág. 79.

En el límite, cuando el punto de observación del campo tiende al punto en que se encuentra la carga e , el potencial (3.21) toma la forma

$$\phi = \phi' + e/R, \quad \text{donde } \phi' = -\frac{e}{2\pi a} \left[1 + \frac{\pi - \gamma}{\sin \gamma} \right]. \quad (3.22)$$

El primer término es un potencial puramente coulombiano que tiende a infinito para $R \rightarrow 0$, y ϕ' es la variación del potencial, en el punto en que se encuentra la carga, debida a la influencia del conductor. La energía de interacción de la carga y del semiplano conductor es

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}e\phi' = -\frac{e^2}{4\pi a} \left[1 + \frac{\pi - \gamma}{\sin \gamma} \right] \quad (3.23)$$

PROBLEMAS

1. Determinar el campo en torno de una esfera conductora neutra (de radio R) que se encuentra en un campo eléctrico exterior homogéneo \mathbf{E} ,

Solución. Escribamos el potencial en la forma $\phi = \phi_0 + \phi_1$, donde $\phi_0 = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$ es el potencial del campo exterior y ϕ_1 la variación que se busca del potencial determinada por la esfera. Dada la simetría de ésta, la función ϕ_1 sólo puede depender del vector constante \mathbf{E} . La única solución de la ecuación de Laplace de este tipo, que se anula en el infinito, es

$$\phi_1 = -\text{const} \times \mathbf{E} \cdot \text{grad.}(1/r) = \text{const} \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}/r^3,$$

(como origen de coordenadas se ha elegido el centro de la esfera). Sobre la superficie de la esfera, ϕ debe ser constante; de aquí se sigue que $\text{const} = R^3$, de modo que

$$\phi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) = -\mathbf{E} r \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right),$$

(θ es el ángulo formado por \mathbf{E} y \mathbf{r}). La distribución de las cargas sobre la superficie de la esfera viene dada por la fórmula

$$\sigma = -(1/4\pi)[\partial\phi/\partial r]_{r=R} = (3\mathbf{E}/4\pi) \cos \theta.$$

La carga total es $e = 0$.

La manera más sencilla de hallar el momento dipolar de la esfera consiste en comparar ϕ_1 con el potencial $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}/r^3)$ del campo de un dipolo eléctrico; se encuentra así

$$\mathbf{P} = R^3 \mathbf{E}.$$

2. El mismo problema para un cilindro infinito en un campo homogéneo transversal.

Solución. Introduzcamos coordenadas polares en un plano perpendicular al eje del cilindro. La solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones que depende únicamente de un vector constante es

$$\phi_1 = \text{const} \times \mathbf{E} \cdot \text{grad.}(\ln r) = \text{const} \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}/r^2.$$

Sumando con $\phi_0 = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ y haciendo $\text{const} = R^2$, obtendremos

$$\phi = -\mathbf{E} r \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right).$$

La densidad superficial de las cargas es

$$\sigma = (\mathbf{E}/2\pi) \cos \theta.$$

El momento dipolar \mathbf{P} por unidad de longitud del cilindro puede hallarse comparando ϕ con

el potencial de un campo dipolar bidimensional. Este último es de la forma
 $2\mathcal{P} \cdot \text{grad}(\ln r) = 2\mathcal{P} \cdot \mathbf{r}/r^2$,
de modo que $\mathcal{P} = \epsilon R^2/2$.

3. Determinar el campo cerca de un saliente en forma de cuña en un conductor.

Solución. Elijamos coordenadas polares r, θ en un plano perpendicular a la arista de la cuña y con origen en el vértice del ángulo θ_0 formado por ella. El ángulo θ lo contaremos a partir de una de las caras de la cuña; a la región exterior al conductor corresponden los valores $0 < \theta < 2\pi - \theta_0$. Cerca del vértice de dicho ángulo el potencial se puede desarrollar en potencias de r , interesándonos el primer término de este desarrollo (después del término constante) que corresponda a la menor potencia de r . Las soluciones de la ecuación de Laplace bidimensional proporcionales a r^n son $r^n \cos n\theta$ y $r^n \sin n\theta$. La solución con el valor menor de n que cumple la condición $\phi = \text{const}$ para $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi - \theta_0$ (es decir, sobre la superficie del conductor), se escribe

$$\phi = \text{const} \times r^n \sin n\theta, \quad n = \pi/(2\pi - \theta_0).$$

(el valor const se puede determinar únicamente a partir de la solución del problema para el campo en conjunto). Según esto, la intensidad del campo depende de r como r^{n-1} . Para $\theta_0 < \pi$ ($n < 1$), por consiguiente, la intensidad tiende a infinito cerca de la arista. En particular, para una cuña muy aguda ($\theta_0 \ll 1$, $n \approx 1/2$) E crece al disminuir r como $r^{-1/2}$. En cambio, cerca de la arista de un entrante en forma de díedro obtuso sobre la superficie del conductor ($\theta_0 > \pi$, $n > 1$), el campo tiende a cero.

4. Determinar el campo cerca de un vértice cónico agudo sobre la superficie de un conductor.

Solución. Elijamos coordenadas esféricas con origen en el vértice y de manera que el eje polar coincida con el eje del cono. Supongamos que el ángulo de abertura del cono es tal que $2\theta_0 \ll 1$, de forma que a la región exterior al conductor correspondan los valores del ángulo polar $\theta_0 < \theta \ll \pi$. Para la parte variable del potencial, busquemos la solución simétrica respecto del eje del cono entre las expresiones de la forma

$$\phi = r^n f(\theta), \quad (1)$$

con el menor valor posible de n . La ecuación de Laplace

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0,$$

después de substituir en ella la expresión (1) da

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{df}{d\theta} \right) + n(n+1)f = 0. \quad (2)$$

La condición de que el potencial sea constante sobre la superficie del cono implica que debe ser $f(\theta_0) = 0$.

Para θ_0 pequeño buscaremos una solución partiendo de la hipótesis de que $n \ll 1$ y que $f(\theta)$ tiene la forma $f = \text{const} [1 + \psi(\theta)]$, donde $\psi \ll 1$ (para $\theta_0 \rightarrow 0$; es decir, para una punta infinitamente aguda, es natural esperar que ϕ tenderá a una constante prácticamente en toda la región en torno de la misma). Para ψ obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\psi}{d\theta} \right) = -n. \quad (3)$$

La solución que carece de singularidades fuera de la punta (en particular, para $\theta = \pi$), es

$$\psi(\theta) = 2n \ln \sin \frac{1}{2}\theta.$$

Cuando $\theta \sim \theta_0 \ll 1$ la función ψ deja de ser pequeña. Sin embargo, la expresión obtenida sigue siendo aplicable, puesto que en este dominio, y en virtud de que θ es pequeño, se puede prescindir del segundo término de la ecuación (2). Para determinar la constante n hay que imponer, en primera aproximación, la condición de que se anule la función que hemos encontrado ya $f = 1 + \psi$ para $\theta = \theta_0$. Se obtiene de esta manera*

$$n = -1/2 \ln \theta_0.$$

La intensidad del campo tiende a infinito al acercarnos al vértice de la punta como $r^{-(1-n)}$, es decir, en esencia como $1/r$.

5. El mismo problema para una cavidad cónica aguda en la superficie de un conductor.

Solución. A la región exterior al conductor corresponden ahora los valores $0 \leq \theta \leq \theta_0$. Como en el problema que precede, buscaremos para ϕ una expresión de la forma (1), si bien en este caso será $n \gg 1$. Dado que en todo el dominio del campo se tiene ahora $\theta \ll 1$, la ecuación (2) se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\theta \frac{df}{d\theta} \right) + n^2 f = 0.$$

Ésta es una ecuación de Bessel, y la solución de la misma que carece de singularidades en el dominio del campo es $J_0(n\theta)$. El valor n se determina como raíz mínima de la ecuación $J_0(n\theta_0) = 0$, de donde

$$n = \frac{2,4}{\theta_0}.$$

6. Determinar la energía de atracción entre un dipolo eléctrico y la superficie plana de un conductor.

Solución. Elijamos el eje x perpendicular a la superficie del conductor y de modo que pase por el punto en que se encuentra el dipolo; supongamos que el vector momento dipolar \mathcal{P} se encuentra en el plano xy . La «imagen» del dipolo se encuentra en el punto $-x$ y posee un momento dipolar $\mathcal{P}'_x = \mathcal{P}_x$, $\mathcal{P}'_y = -\mathcal{P}_y$. La energía de atracción buscada se calcula como energía de interacción del dipolo con su «imagen» y es

$$\mathcal{U} = -(2\mathcal{P}_x^2 + \mathcal{P}_y^2)/16x^3.$$

7. Determinar la capacidad mutua por unidad de longitud de dos conductores cilíndricos paralelos de longitud infinita (los radios son a y b , la distancia entre ejes, c^{**}).

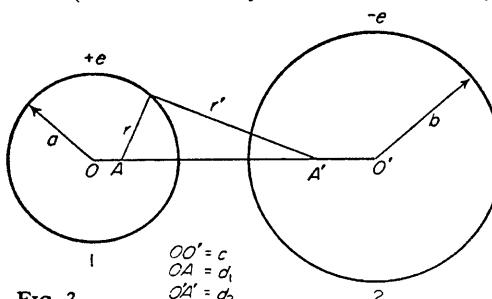


FIG. 3

* La fórmula más precisa $n = 1/2 \ln (2/\theta_0)$, en que aparece un coeficiente en el argumento de un logaritmo que es grande, no puede obtenerse de hecho mediante el simple método que hemos presentado.

** El problema análogo para dos esferas no se resuelve en forma finita. La diferencia se debe a que en el campo de dos hilos conductores paralelos (con cargas iguales y de signos opuestos) todas las superficies equipotenciales son cilindros circulares, mientras que en el campo de dos cargas puntuales $\pm e$ las superficies equipotenciales no son esferas.

Solución. El campo creado por los dos cilindros coincide con el que determinarían (en el espacio exterior a los cilindros) dos hilos cargados que pasen por dos puntos convenientemente elegidos A y A' (fig. 3). Los hilos tienen cargas (por unidad de longitud) $\pm e'$ iguales a las cargas de los cilindros y los puntos A y A' deben encontrarse sobre la recta OO' de modo que las superficies de los cilindros coincidan con dos superficies equipotenciales. Para ello las distancias OA y $O'A'$ deben satisfacer las condiciones

$$OA \cdot OA' = a^2, O'A' \cdot O'A = b^2,$$

es decir,

$$d_1(c-d_2) = a^2, d_2(c-d_1) = b^2.$$

Entonces, sobre cada una de las circunferencias, la razón r/r' de las distancias a los puntos A y A' toma sobre la circunferencia 1 el valor constante

$$r/r' = a/OA' = a/(c-d_2) = d_1/a,$$

y sobre la circunferencia 2 se tiene $r'/r = d_2/b$. De acuerdo con esto, los potenciales de los cilindros son

$$\phi_1 = -2e \ln (r/r') = -2e \ln (d_1/a), \quad \phi_2 = 2e \ln (d_2/b), \quad \phi_2 - \phi_1 = 2e \ln (d_1 d_2 / ab).$$

De aquí se sigue para la capacidad mutua buscada $C = e/(\phi_2 - \phi_1)$:

$$1/C = 2 \ln (d_1 d_2 / ab) = 2 \operatorname{arccosh} [(c^2 - a^2 - b^2)/2ab].$$

En particular, para un cilindro de radio a que se encuentra a una distancia h ($h > a$) de un plano conductor, hay que hacer $c = b + h$ y pasar al límite $b \rightarrow \infty$; esto da

$$1/C = 2 \operatorname{arccosh} (h/a).$$

Si dos cilindros huecos se encuentran el uno dentro del otro ($c < b - a$), no existe campo fuera de ellos y el campo en el espacio entre ambos cilindros coincide con el que crearían dos hilos con cargas $+e$ y $-e$ que pasasen por los puntos A y A' (fig. 4). De la misma manera que antes obtendremos el resultado:

$$1/C = 2 \operatorname{arccosh} [(a^2 + b^2 - c^2)/2ab].$$

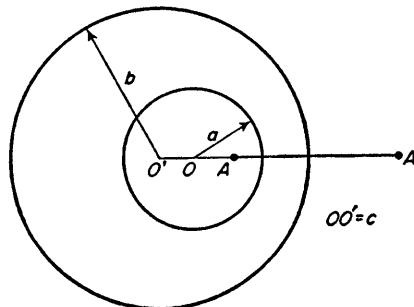


FIG. 4

8. La frontera del conductor está constituida por un plano infinito con una protuberancia en forma de hemisferio. Determinar la distribución de las cargas sobre la superficie.

Solución. En el campo que se halló en el problema 1, con un potencial de la forma

$$\phi = \text{const} \times z \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right),$$

el plano $z = 0$ con una protuberancia en $r = R$ es una superficie equipotencial (sobre la cual $\phi = 0$). Por consiguiente, puede también ser la superficie de un conductor, y la fórmula antes escrita determina el campo fuera del mismo. La distribución de las cargas sobre la parte plana de la superficie viene dada por la fórmula

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} = \sigma_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right);$$

(hemos hecho $\text{const} = -4\pi\sigma_0$, donde σ_0 es la densidad de las cargas lejos de la protuberancia). Sobre la superficie de la protuberancia, en cambio, se tiene

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{r=R} = 3\sigma_0 \frac{z}{R}.$$

9. Determinar el momento dipolar de una varilla cilíndrica conductora de pequeño diámetro ($\text{longitud } 2l$, radio a ; $a \ll l$) en un campo eléctrico \mathbf{E} , paralelo a su eje.

Solución. Sea $\tau(z)$ la carga inducida sobre la superficie de la varilla referida a la unidad de longitud; z es la coordenada a lo largo del eje del cilindro, y la contaremos a partir de su punto medio. La condición de que el potencial sea constante sobre la superficie del conductor se escribe:

$$-\mathbf{E}z + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_l^l \frac{\tau(z') dz' d\phi}{R} = 0,$$

$$R^2 = (z' - z)^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\phi$$

(ϕ es el ángulo formado por los planos que pasan por el eje del cilindro y por los puntos de su superficie cuya distancia mutua es igual a R). Descompongamos la integral en dos partes, substituyendo en ella la identidad $\tau(z') = \tau(z) + [\tau(z') - \tau(z)]$. Teniendo en cuenta que $l \gg a$ y considerando los puntos que no se encuentran demasiado cerca de los extremos de la varilla, tenemos

$$\frac{\tau(z)}{2\pi} \iint \frac{dz' d\phi}{R} \cong \frac{\tau(z)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{l^2 - z^2}{a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\phi} d\phi = \tau(z) \ln \frac{4(l^2 - z^2)}{a^2}$$

(se ha utilizado el valor conocido $\int_0^\pi \ln \sin \phi d\phi = -\pi \ln 2$). En la integral que contiene la diferencia $\tau(z') - \tau(z)$ se puede prescindir del término a^2 en R , puesto que ello no trae ya consigo la divergencia de la integral. De esta manera,

$$\mathbf{E}z = \tau(z) \ln \frac{4(l^2 - z^2)}{a^2} + \int_{-l}^l \frac{\tau(z') - \tau(z)}{|z' - z|} dz'.$$

La dependencia de τ respecto de z se reduce esencialmente a una mera proporcionalidad; en esta aproximación la integral que aquí aparece da $-2\tau(z)$ y obtenemos en definitiva

$$\tau(z) = \frac{\mathbf{E}z}{\ln [4(l^2 - z^2)/a^2] - 2}.$$

Esta expresión deja de valer cerca de los extremos de la varilla, mas para el cálculo del momento dipolar esta región de valores de z carece de importancia. Dentro de la aproximación adoptada aquí, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \int_{-l}^l \tau(z)z \, dz = \frac{\mathfrak{E}}{L} \int_0^l \left\{ z^2 - \frac{z^2}{2L} \ln \left(1 - \frac{z^2}{l^2} \right) \right\} dz \\ &= \frac{\mathfrak{E}l^3}{3L} \left\{ 1 + \frac{1}{L} \left(\frac{4}{3} - \ln 2 \right) \right\},\end{aligned}$$

(donde $L = \ln(2l/a) - 1$ es un número grande), o bien (con la misma precisión)

$$\mathcal{P} = \frac{\mathfrak{E}l^3}{3 \ln(4l/a) - 7}.$$

10. Determinar la capacidad de un conductor en forma de casquete esférico hueco.

Solución. Elijamos como origen de coordenadas O un punto cualquiera del borde del casquete (figura 5) y apliquemos la inversión $r = l^2/r'$ (l es la longitud de la cuerda de la sección principal del casquete). En estas condiciones, el casquete se transforma en un semiplano (recta de trazos en la fig. 5) perpendicular al radio AO del casquete y que pasa por el punto B de su borde; el ángulo $\gamma = \pi - \theta$, donde 2θ es el ángulo de abertura del casquete.

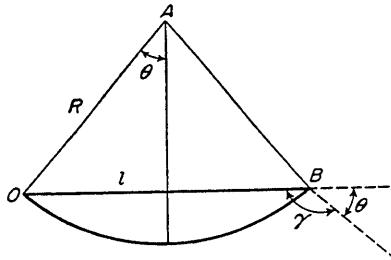


FIG. 5

Si el potencial del casquete, cargado con una carga e , se toma igual a cero, para $r \rightarrow \infty$ el potencial del campo se comportará como

$$\phi \rightarrow -\phi_0 + e/r.$$

En correspondencia con esto, en el problema transformado el potencial será de la forma

$$\phi' \rightarrow l\phi_0/r' \cong -l\phi_0/r' + e/l,$$

para $r' \rightarrow 0$ (el primer término corresponde a la carga $e' = -l\phi_0$ situada en el origen de coordenadas).

Por otra parte, según la fórmula (3.22) tenemos

$$\phi' = \frac{e'}{r'} - \frac{e'}{2\pi l} \left(1 + \frac{\theta}{\sin \theta} \right)$$

(que es el potencial cerca de la carga e' que se encuentra a la distancia l del borde de un semiplano conductor cuyo potencial es nulo). Comparando estas dos expresiones, obtenemos para la capacidad buscada $C = e/\phi_0$ la siguiente fórmula

$$C = \frac{l}{2\pi} \left(1 + \frac{\theta}{\sin \theta} \right) = \frac{R}{\pi} (\sin \theta + \theta),$$

(R es el radio del casquete).

11. Determinar la corrección ligada con el efecto de bordes que hay que aplicar al valor $C = S/4\pi d$ para la capacidad de un condensador plano (S es el área de la superficie de una armadura, d es la distancia entre ellas; se supone $d \ll \sqrt{S}$).

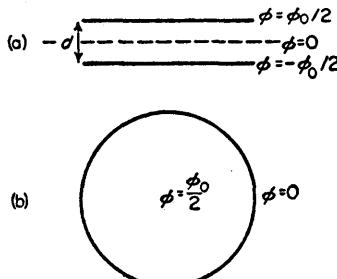


FIG. 6

Solución. La existencia de bordes libres en las armaduras rompe la homogeneidad de la distribución de las cargas sobre las mismas. Para determinar la corrección buscada consideremos en primera aproximación los puntos de aquéllas que se hallan a una distancia x del borde y tales que $d \ll x \ll \sqrt{S}$. Considerando, por ejemplo, la armadura superior (con un potencial $\phi = \phi_0/2$, figura 6 a) y prescindiendo de su distancia $d/2$ hasta el plano medio (superficie potencial $\phi = 0$), el problema que hemos de resolver es el de un campo cerca de la frontera de dos porciones de planos que se encuentran a potenciales diferentes. Este problema se resuelve de manera elemental* y para el exceso de densidad de carga (exceso comparado con el valor lejos del borde) se encuentra en definitiva la expresión

$$\Delta\sigma = E_n/4\pi = \phi_0/8\pi^2x,$$

de modo que el exceso total de carga vale

$$L \int \Delta\sigma dx = (\phi_0 L/8\pi^2) \ln(\sqrt{S}/d),$$

(L es la longitud del perímetro de una armadura); al efectuar el cálculo de la integral, que diverge logarítmicamente, se han tomado como límites inferior y superior los del intervalo $d \ll x \ll \sqrt{S}$.

De aquí se deduce para la capacidad**

$$C = \frac{S}{4\pi d} + \frac{L}{8\pi^2} \ln \frac{\sqrt{S}}{d}$$

§ 4. Elipsoide conductor

El problema de determinar el campo de un elipsoide conductor cargado y el problema de un elipsoide en un campo exterior homogéneo se resuelven mediante

* Véase § 22; en la forma (22.2) para el potencial hay que hacer en este caso $\phi_{ab} = \phi_0/2$, $a = \pi$. (Figura 6 b).

** Un cálculo más aproximado (que determina el coeficiente en el argumento del logaritmo) exige la aplicación de métodos notablemente más complicados y el resultado, además, depende de la forma de las armaduras. Cuando éstas son circulares (de radio R), se obtiene

$$C = \frac{R^2}{4d} + \frac{R}{4\pi} \left(\ln \frac{16\pi R}{d} - 1 \right)$$

(fórmula de Kirchhoff).

las llamadas *coordenadas elipsoidales*.

La relación entre las coordenadas elipsoidales y las cartesianas viene dada por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1 \quad (a > b > c). \quad (4.1)$$

Esta ecuación, que es una ecuación cúbica respecto de u , tiene tres raíces reales distintas ($u = \xi, \eta, \zeta$) que pertenecen a los siguientes intervalos:

$$\xi \geq -c^2, \quad -c^2 \geq \eta \geq -b^2, \quad -b^2 \geq \zeta \geq -a^2. \quad (4.2)$$

Estas tres raíces son precisamente las coordenadas elipsoidales del punto x, y, z . Su sentido geométrico resulta del hecho de que las superficies a lo largo de las cuales son constantes ξ, η, ζ , representan elipsoides, hiperboloides de una hoja, e hiperboloides de dos hojas, respectivamente, todos los cuales son homofocales con el elipsoide

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1. \quad (4.3)$$

Por cada punto del espacio pasa una superficie de cada una de estas tres familias, siendo estas superficies ortogonales entre sí. Las fórmulas de transformación que llevan de las coordenadas elipsoidales a las cartesianas se obtienen resolviendo simultáneamente tres ecuaciones del tipo (4.1) y tienen la forma*

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm \sqrt{\left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)} \right]}, \\ y &= \pm \sqrt{\left[\frac{(\xi+b^2)(\eta+b^2)(\zeta+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)} \right]}, \\ z &= \pm \sqrt{\left[\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)(\zeta+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)} \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

El elemento de longitud en coordenadas elipsoidales es:

$$\left. \begin{aligned} dl^2 &= h_1^2 d\xi^2 + h_2^2 d\eta^2 + h_3^2 d\zeta^2, \\ h_1 &= \sqrt{[(\xi-\eta)(\xi-\zeta)]/2R_\xi}, \quad h_2 = \sqrt{[(\eta-\zeta)(\eta-\xi)]/2R_\eta}, \\ h_3 &= \sqrt{[(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)]/2R_\zeta}, \quad R_u^2 = (u+a^2)(u+b^2)(u+c^2), \\ u &= \xi, \eta, \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Según esto, la ecuación de Laplace expresada en tales coordenadas se escribe

$$\Delta \phi = \frac{4}{(\xi-\eta)(\zeta-\xi)(\eta-\zeta)} \times \times \left[(\eta-\zeta) R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(R_\xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + (\zeta-\xi) R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(R_\eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + (\xi-\eta) R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(R_\zeta \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right] = 0. \quad (4.6)$$

* Rígorosamente hablando, como coordenadas elipsoidales habría que considerar no las propias ξ, η, ζ , sino las cantidades $\sqrt{a^2+\xi}$, $\sqrt{b^2+\eta}$, $\sqrt{c^2+\zeta}$. Desaparecerían entonces de las fórmulas (4.4) los dobles signos y la relación entre ambos sistemas de coordenadas pasaría a ser, como corresponde, binívoca.

Si dos de los semiejes a, b, c son iguales, el sistema de coordenadas elipsoidales degenera. Supongamos que $a = b > c$. Entonces la ecuación cúbica (4.1) pasa a ser una ecuación cuadrática:

$$\frac{\rho^2}{a^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1, \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \quad (4.7)$$

con dos raíces que pertenecen a los intervalos

$$\xi \geq -c^2, \quad -c^2 \geq \eta \geq -a^2.$$

Las superficies de coordenadas sobre las cuales son constantes ξ y η se transforman, en estas condiciones, en elipsoides de rotación achatados y en hiperboloides de rotación de una hoja homofocales (fig. 7). Como tercera coordenada cabe introducir el ángulo polar ϕ en el plano x, y ($x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi$). En lo que concierne a la coordenada elipsoidal ζ , cuando es $a = b$ ésta se reduce a la constante $-a^2$. Su relación con el ángulo ϕ se traduce en la ley según la cual ζ tiende a $-a^2$ cuando b tiende a a : concretamente, cuando $b \rightarrow a$ tenemos

$$\cos \phi = \sqrt{[(a^2 + \zeta)/(a^2 - b^2)]} \quad \text{cuando } b \rightarrow a, \quad (4.8)$$

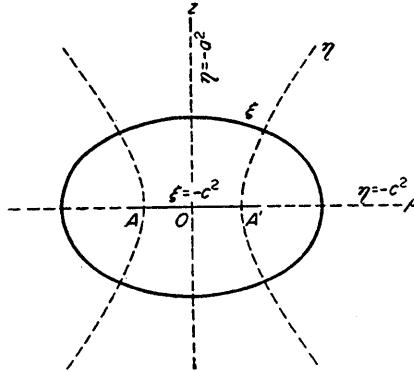


FIG. 7

lo que es fácil comprobar a partir de (4.4) o directamente a partir de la ecuación (4.1). La relación entre las coordenadas z, ρ y las coordenadas ξ, η viene dada, según (4.4), por las igualdades

$$z = \pm \sqrt{\left[\frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)}{c^2 - a^2} \right]}, \quad \rho = \sqrt{\left[\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)}{a^2 - c^2} \right]}. \quad (4.9)$$

Las coordenadas ξ, η, ϕ se llaman *coordenadas esferoidales achatadas**.

* Adoptamos aquí como definición de las coordenadas esferoidales aquella de acuerdo con la cual dichas coordenadas resultan directamente como caso límite de las elipsoidales. En la literatura se utilizan también otras definiciones que se reducen fácilmente a la nuestra.

De manera análoga, cuando $a > b = c$ las coordenadas elipsoidales degeneran en las llamadas *coordenadas esferoidales alargadas*. Las dos coordenadas ξ y ζ son las raíces de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{\rho^2}{b^2+u} = 1, \quad \rho^2 = y^2 + z^2, \quad (4.10)$$

con $\xi > -b^2$, $-b^2 > \zeta > -a^2$. Las superficies sobre las que ξ y ζ son constantes se reducen a elipsoides alargados e hiperboloides de rotación de dos hojas (figura 8). La coordenada η , en cambio, degenera cuando $c \rightarrow b$ reduciéndose a la constante $-b^2$ de acuerdo con la ley

$$\cos \phi = \sqrt{[(b^2 + \eta)/(b^2 - c^2)]}, \quad (4.11)$$

donde ϕ es el ángulo polar en el plano yz .

La relación entre las coordenadas ξ , ζ y las coordenadas x , ρ viene dada por las fórmulas

$$x = \pm \sqrt{\left[\frac{(\xi + a^2)(\zeta + a^2)}{a^2 - b^2} \right]}, \quad \rho = \sqrt{\left[\frac{(\xi + b^2)(\zeta + b^2)}{b^2 - a^2} \right]}. \quad (4.12)$$

En un sistema esferoidal achataido, los focos de las superficies de coordenadas (elipsoides e hiperboloides) se encuentran sobre la circunferencia de radio $\sqrt{a^2 - c^2}$ en el plano xy (en la fig. 7, AA' es el diámetro de esta circunferencia). Tracemos el plano que pasa por un punto P y el eje z . Este plano corta la circunferencia focal en dos puntos; sean r_1 y r_2 las distancias de estos puntos al punto P . Si ρ , z son las coordenadas de este punto, se tendrá

$$r_1^2 = [\rho - \sqrt{(a^2 - c^2)}]^2 + z^2, \quad r_2^2 = [\rho + \sqrt{(a^2 - c^2)}]^2 + z^2.$$

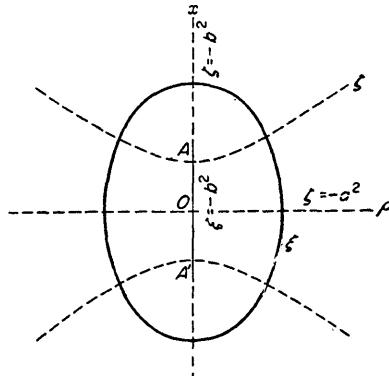


FIG. 8

Las coordenadas esferoidales ξ , η se expresan en función de r_1 , r_2 mediante las fórmulas siguientes:

$$\xi = \frac{1}{4}(r_1 + r_2)^2 - a^2, \quad \eta = \frac{1}{4}(r_2 - r_1)^2 - a^2. \quad (4.13)$$

En cambio, en el sistema esferoidal alargado los focos coinciden con los dos puntos $x = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$ sobre el eje x (puntos A, A' en la fig. 8). Si r_1, r_2 son las distancias del punto P a estos focos, se tendrá

$$r_1^2 = \rho^2 + [z - \sqrt{(a^2 - b^2)}]^2, \quad r_2^2 = \rho^2 + [z + \sqrt{(a^2 - b^2)}]^2,$$

y las coordenadas esferoidales ξ, ζ se expresan en función de r_1, r_2 por las mismas fórmulas (4.13) (con la substitución de η por ζ).

Volvamos al problema del campo de un elipsoide cargado cuya superficie viene definida por la ecuación (4.3). En coordenadas elipsoidales ésta es la superficie de coordenadas $\xi = 0$. Está claro que si se busca el potencial del campo de forma que sea función únicamente de ξ , serán automáticamente superficies equipotenciales todas las elipsoidales $\xi = \text{const}$, entre ellas la superficie del conductor. La ecuación de Laplace (4.6) se reduce entonces a

$$\frac{d}{d\xi} \left(R_\xi \frac{d\phi}{d\xi} \right) = 0,$$

de donde

$$\phi(\xi) = A \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_\xi}.$$

El límite superior de integración se ha elegido de manera que el campo se anule en el infinito. La manera más sencilla de determinar la constante A consiste en tener en cuenta la condición de que, a grandes distancias r , el campo debe tender a comportarse como un campo coulombiano: $\phi \approx e/r$, donde e es la carga total del conductor. Para $r \rightarrow \infty$ debe tenerse $\xi \rightarrow \infty$; concretamente, $r^2 \approx \xi$, como se sigue de la ecuación (4.1) con $u = \xi$. Por otra parte, para valores ξ grandes se tiene $R_\xi \approx \xi^{3/2}$ y $\phi \approx \frac{2A}{\sqrt{\xi}} = \frac{2A}{r}$. De aquí se sigue que $2A = e$, de modo que, en definitiva,

$$\phi(\xi) = \frac{1}{2} e \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_\xi}. \quad (4.14)$$

La integral que aquí aparece es una integral elíptica de primera especie. A la superficie del conductor corresponde el valor $\xi = 0$, por lo cual para la capacidad del elipsoide tenemos

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{R_\xi}. \quad (4.15)$$

La distribución de densidad de carga sobre la superficie del elipsoide está deter-

minada por la derivada normal del potencial

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_{\xi=0} = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(\eta\zeta)}}.$$

Partiendo de las ecuaciones (4.4), es fácil comprobar que para $\xi = 0$ se tiene

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{\eta\zeta}{a^2 b^2 c^2}.$$

Por lo tanto,

$$\sigma = \frac{e}{4\pi abc} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.16)$$

En el caso de un elipsoide con dos ejes (esferoide), las integrales (4.14) y (4.15) se expresan en términos de funciones elementales. El potencial del campo para un elipsoide alargado ($a > b = c$) viene dado por la fórmula

$$\phi = \frac{e}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \operatorname{artgh} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\xi + a^2}}, \quad (4.17)$$

y su capacidad es

$$C = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{\operatorname{arcosh}(a/b)}. \quad (4.18)$$

En cambio, para un elipsoide achataido ($a = b > c$), tenemos

$$\phi = \frac{e}{\sqrt{(a^2 - c^2)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}}, \quad C = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{\operatorname{arc cos}(c/a)}. \quad (4.19)$$

En particular, para un disco circular ($a = b, c = 0$)

$$C = 2a/\pi. \quad (4.20)$$

Pasemos al problema de un elipsoide conductor sin carga que se encuentra en un campo eléctrico exterior homogéneo \mathbf{E} . Sin restringir la generalidad basta considerar el campo exterior \mathbf{E} dirigido a lo largo de uno de los ejes del elipsoide. En caso contrario, cabe descomponerlo en tres componentes a lo largo de los ejes del elipsoide y buscar el campo resultante como superposición de los campos determinados por cada una de estas componentes por separado.

El potencial de un campo homogéneo \mathbf{E} dirigido a lo largo del eje x (eje a del elipsoide) se escribe, en coordenadas elipsoidales,

$$\phi_0 = -Ex = -E\sqrt{[(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)/(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)]}. \quad (4.21)$$

Representemos el potencial del campo fuera del elipsoide en la forma $\phi = \phi_0 + \phi'$, donde ϕ' da la variación buscada del campo exterior debida al elipsoide y busque-

mos para ϕ' una expresión del tipo

$$\phi' = \phi_0 F(\xi). \quad (4.22)$$

En esta función los factores que dependen de η y ζ coinciden con los correspondientes en la función ϕ_0 , lo que permite satisfacer la condición de contorno en $\xi = 0$ y valores arbitrarios de η y ζ (sobre la superficie del elipsoide). Substituyendo (4.22) en la ecuación de Laplace (4.6), obtendremos para $F(\xi)$ la ecuación

$$\frac{d^2F}{d\xi^2} + \frac{dF}{d\xi} \frac{d}{d\xi} \ln [R_\xi(\xi + a^2)] = 0.$$

Una de las soluciones de esta ecuación es $F = \text{const}$, y la otra

$$F(\xi) = A \int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{(s + a^2) R_s}. \quad (4.23)$$

El límite superior de integración se ha elegido de manera que en el infinito ($\xi \rightarrow \infty$) el potencial ϕ' tienda a cero. La integral que aquí aparece es una integral elíptica de segunda especie.

Sobre la superficie del elipsoide debe ser $\phi = \text{const}$. Para que esta condición pueda quedar satisfecha para $\xi = 0$ y η, ζ arbitrarios, debe ser $\text{const} = 0$. Eligiendo de acuerdo con esto el coeficiente A en $F(\xi)$ (de modo que sea $F(0) = -1$), obtendremos la siguiente expresión final para el potencial del campo en torno del elipsoide:

$$\phi = \phi_0 \left\{ 1 - \int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{(s + a^2) R_s} \right\} / \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s + a^2) R_s}. \quad (4.24)$$

Veamos cuál es la forma del potencial ϕ' a grandes distancias r del elipsoide. A valores de r grandes corresponden valores grandes de la coordenada ξ , siendo $r^2 \approx \xi$, conforme se sigue inmediatamente de la ecuación (4.1). Por consiguiente,

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{(s + a^2) R_s} \approx \int_{r^2}^{\infty} \frac{ds}{s^{5/2}} = \frac{2}{3r^3},$$

y para el potencial ϕ' obtenemos

$$\phi' = \mathfrak{E} x V / 4\pi n^{(x)} r^3,$$

donde $V = 4\pi abc/3$ es el volumen del elipsoide y la cantidad $n^{(x)}$ (al igual que las cantidades análogas que aparecen a continuación $n^{(y)}, n^{(z)}$) se definen por las igualdades

$$n^{(x)} = \frac{1}{2}abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s + a^2) R_s}, \quad n^{(y)} = \frac{1}{2}abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s + b^2) R_s}, \quad n^{(z)} = \frac{1}{2}abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s + c^2) R_s}. \quad (4.25)$$

La expresión para ϕ' , como debía ser, tiene la forma del potencial del campo de un dipolo eléctrico:

$$\phi' = x\mathcal{P}_x/r^3,$$

donde el momento dipolar del elipsoide es

$$\mathcal{P}_x = \mathfrak{E}_x V / 4\pi n^{(x)}. \quad (4.26)$$

Mediante expresiones análogas se determina el momento dipolar debido a un campo \mathfrak{E} dirigido a lo largo de los ejes y o z .

Las constantes positivas $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ dependen solamente de la forma del elipsoide, pero no de su volumen; se llaman *coeficientes de despolarización**. Si no se ha decidido de antemano la elección de los ejes de coordenadas a lo largo de los ejes del elipsoide, hay que escribir la fórmula (4.26) en forma tensorial:

$$(4\pi/V)n_{ik}\mathcal{P}_k = \mathfrak{E}_i. \quad (4.27)$$

Las cantidades $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ son los valores principales del tensor simétrico de segundo orden n_{ik} .

En el caso general en que los valores a , b , c son arbitrarios, de las definiciones de $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ se sigue, en primer lugar, que

$$n^{(x)} < n^{(y)} < n^{(z)} \text{ si } a > b > c. \quad (4.28)$$

Además, sumando las integrales $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ y tomando como variable de integración $u = R_s^2$, se encuentra

$$n^{(x)} + n^{(y)} + n^{(z)} = \frac{1}{2}abc \int_{(abc)^2}^{\infty} \frac{du}{u^{3/2}},$$

de donde

$$n^{(x)} + n^{(y)} + n^{(z)} = 1. \quad (4.29)$$

La suma de los tres coeficientes de despolarización son iguales a la unidad (en forma tensorial esto significa que $n_{ii} = 1$). Dado que, por otra parte, estos coeficientes son positivos, ninguno de ellos puede ser mayor que la unidad.

Para una esfera ($a = b = c$) es evidente, por razones de simetría, que $n^{(x)} = n^{(y)} = n^{(z)}$ y, por lo tanto:

$$n^{(x)} = n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{3}. \quad (4.30)$$

En el caso de un cilindro (con el eje a lo largo del eje x , $a \rightarrow \infty$) tenemos**

$$n^{(x)} = 0, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2}. \quad (4.31)$$

* Tablas útiles de estos coeficientes se dan en un artículo de E.C. Stoner (Phil. Mag., [7] 36, 803, 1945).

** Estos valores para la esfera y el cilindro concuerdan, naturalmente, con los resultados obtenidos en los problemas 1 y 2 del § 3.

Las integrales elípticas (4.25) se expresan mediante funciones elementales para todos los elipsoides de rotación. En el caso de un elipsoide de rotación alargado ($a > b = c$) con excentricidad $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ es

$$n^{(x)} = \frac{1-e^2}{2e^3} \left(\ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right), \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2}(1-n^{(x)}). \quad (4.32)$$

Si el elipsoide es casi una esfera ($e \ll 1$), se tiene aproximadamente

$$n^{(x)} = \frac{1}{3} - \frac{2}{15}e^2, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}e^2. \quad (4.33)$$

En cambio, para un elipsoide de rotación achatado ($a = b > c$), se tiene

$$n^{(x)} = \frac{1+e^2}{e^3} (e - \operatorname{arctg} e), \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2}(1-n^{(x)}), \quad (4.34)$$

donde $e = \sqrt{(a/c)^2 - 1}$. Si $e \ll 1$, entonces

$$n^{(x)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{15}e^2, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{15}e^2. \quad (4.35)$$

PROBLEMAS

1. Hallar el campo de un disco circular conductor cargado (de radio a) expresándolo en coordenadas cilíndricas. Hallar la distribución de la carga sobre el disco.

Solución. La distribución de la carga se obtiene pasando al límite $c \rightarrow 0$, $z \rightarrow 0$ en la fórmula (4.16), siendo la razón $z/c = \sqrt{1-r^2/a^2}$ (donde $r^2 = x^2+y^2$) de acuerdo con (4.3). Esto da

$$\sigma = \frac{e}{4\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

El potencial del campo en todo el espacio viene dado por la fórmula (4.19), en la que haremos $c = 0$ y expresaremos ξ en función de r y z mediante la ecuación (4.1) con $c = 0$, $u = \xi$, $a = b$:

$$\phi = \frac{e}{a} \operatorname{arctg} \left[\frac{2a^2}{r^2+z^2-a^2+\sqrt{[(r^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2]}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

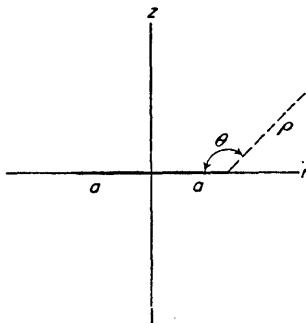


FIG. 9

Cerca del borde del disco introduciremos, en vez de r y z , las coordenadas ρ y θ de acuerdo con $z = \rho \sin \theta$, $r = a - \rho \cos \theta$ ($\rho \ll a$) (fig. 9) y obtendremos

$$\phi \approx \frac{e}{a} \left(\frac{1}{2} \pi - \sqrt{\frac{2\rho}{a} \sin \frac{1}{2}\theta} \right),$$

de acuerdo con el resultado general del problema 3 del § 3.

2. Determinar el momento eléctrico cuadripolar de un elipsoide cargado.

Solución. El tensor momento cuadripolar de un conductor cargado se define por la igualdad $D_{ik} = e(3x_i x_k - r^2 \delta_{ik})$, donde e es su carga total y el trazo significa el promedio definido por la ley

$$\overline{x_i x_k} = \frac{1}{e} \oint x_i x_k \sigma \, df.$$

Es evidente que los ejes del elipsoide son al mismo tiempo ejes principales del tensor D_{ik} . Utilizando para σ la fórmula (4.16) y para el elemento de superficie del elipsoide la expresión

$$df = \frac{dx \, dy}{v_z} = \frac{dx \, dy}{z/c^2} \sqrt{\left[\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right]},$$

obtendremos

$$\overline{z^2} = \frac{c}{4\pi ab} \int z \, dx \, dy = \frac{1}{3} c^2;$$

(la integración respecto de x , y se extiende dos veces a la superficie de la sección del elipsoide por el plano xy). De esta manera,

$$D_{xx} = \frac{1}{3} e(2a^2 - b^2 - c^2), \quad D_{yy} = \frac{1}{3} e(2b^2 - c^2 - a^2), \quad D_{zz} = \frac{1}{3} e(2c^2 - a^2 - b^2).$$

3. Determinar la distribución de las cargas sobre la superficie de un elipsoide conductor sin carga situado en un campo exterior homogéneo.

Solución. Según la fórmula (1.9), se tiene

$$\sigma = - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_{\xi=0} = - \left[\frac{1}{4\pi h_1} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_{\xi=0};$$

(el elemento de longitud a lo largo de la normal orientada a la superficie del elipsoide es, por (4.5), $h_1 d\xi$). Substituyendo (4.24) y teniendo en cuenta que

$$v_x = \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} = \left[\frac{x}{2a^2 h_1} \right]_{\xi=0}$$

(v es el vector unitario normal a la superficie del elipsoide) tendremos, supuesto orientado el campo según el eje x ,

$$\sigma = \mathfrak{E} v_x / 4\pi n^{(x)}.$$

Para una dirección arbitraria del campo exterior respecto de los ejes x , y , z , del elipsoide, resulta

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} v_i n^{-1} i_k \mathfrak{E}_k = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{v_x}{n^{(x)}} \mathfrak{E}_x + \frac{v_y}{n^{(y)}} \mathfrak{E}_y + \frac{v_z}{n^{(z)}} \mathfrak{E}_z \right].$$

4. El mismo problema para un disco plano circular (de radio a) situado paralelamente al campo*. Determinar el momento dipolar del disco.

* Para un disco colocado perpendicularmente al campo la cuestión sería trivial; el campo sigue siendo homogéneo en todo el espacio y sobre una y otra cara del disco se inducirán las cargas $\sigma = \pm \mathfrak{E}/4\pi$.

Solución. Consideremos el disco como límite de un elipsoide de rotación cuando el semieje c tiende a cero. En estas condiciones, el coeficiente de despolarización a lo largo de dicho eje (el eje z) tiende a 1, y a lo largo de los ejes x y y , a cero según la ley

$$n^{(x)} = 1 - \pi c / 2a, \quad n^{(x)} = n^{(y)} = \pi c / 4a,$$

que se sigue de (4.34). La componente v_x del vector unitario normal a la superficie del elipsoide de rotación tiende a cero según la ley

$$v_x = \frac{x}{a^2} \left(\frac{x^2 + y^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{x}{a^2} \frac{c^2}{z} = \frac{xc}{a^2} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Por ello, la densidad de carga será

$$\sigma = \frac{\mathfrak{C} v_x}{4\pi n^{(x)}} = \frac{\mathfrak{C} \rho \cos \phi}{\pi^2 \sqrt{(a^2 - \rho^2)}},$$

donde ρ, ϕ son las coordenadas polares en el plano del disco.

El momento dipolar del disco se determina por la fórmula (4.26) y es igual a

$$\mathcal{P} = 4a^3 \mathfrak{C} / 3\pi.$$

Obsérvese que dicho momento es proporcional a a^3 , y no al «volumen» del disco $a^2 c$.

5. Determinar el potencial del campo fuera de un elipsoide de rotación conductor colocado con su eje de simetría paralelo a un campo exterior homogéneo.

Solución. Para un elipsoide de rotación alargado ($a > b = c$, el campo \mathfrak{E} en la dirección de eje x) obtendremos, calculando la integral en la fórmula (4.24),

$$\phi = -\mathfrak{E}x \left\{ 1 - \frac{\operatorname{artgh} \sqrt{[(a^2 - b^2)/(\xi + a^2)]} - \sqrt{[(a^2 - b^2)/(\xi + a^2)]}}{\operatorname{artgh} \sqrt{(1 - b^2/a^2)} - \sqrt{(1 - b^2/a^2)}} \right\}.$$

la coordenada ξ está ligada con las coordenadas x y $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ por la relación

$$\frac{\rho^2}{b^2 + \xi} + \frac{x^2}{a^2 + \xi} = 1,$$

siendo en el espacio exterior del elipsoide $0 < \xi < \infty$.

Para un elipsoide de rotación achataido ($a = b > c$) el campo \mathfrak{E} está dirigido a lo largo del eje z . Debido a ello en la integral de (4.24) hay que substituir $s + a^2$ por $s + c^2$ y hacer $\phi_0 = -\mathfrak{E}z$. El resultado que se obtiene es

$$\phi = -\mathfrak{E}z \left\{ 1 - \frac{\sqrt{[(a^2 - c^2)/(\xi + c^2)]} - \operatorname{arctg} \sqrt{[(a^2 - c^2)/(\xi + c^2)]}}{\sqrt{(a^2/c^2 - 1)} - \operatorname{arctg} \sqrt{(a^2/c^2 - 1)}} \right\},$$

donde la coordenada ξ está ligada con las coordenadas z y $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ por la igualdad

$$\frac{\rho^2}{a^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} = 1.$$

6. El mismo problema si el eje de simetría del elipsoide es perpendicular al campo exterior.

Solución. Para un elipsoide de rotación alargado (campo en la dirección del eje z) es:

$$\phi = -\mathfrak{E}z \left\{ 1 - \frac{\sqrt{(\xi + a^2)(\xi + b^2)} - (a^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{artgh} \sqrt{[(a^2 - b^2)/(\xi + a^2)]}}{a/b^2 - (a^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{artgh} \sqrt{(1 - b^2/a^2)}} \right\}.$$

Para un elipsoide de rotación achataido (campo en la dirección del eje x) es:

$$\phi = -\mathfrak{E}x \left\{ 1 - \frac{(a^2 - c^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{[(a^2 - c^2)/(\xi + c^2)]} - \sqrt{(\xi + c^2)/(\xi + a^2)}}{(a^2 - c^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{(a^2/c^2 - 1)} - c/a^2} \right\}.$$

7. Un campo homogéneo \mathfrak{E} , orientado en el sentido del eje z (en el semiespacio $z < 0$) está limitado por un plano conductor, derivado a tierra, (plano $z = 0$) con una abertura circular. Determinar el campo y la distribución de cargas sobre el plano.

Solución. Consideremos el plano xy con una abertura circular de radio a en torno al origen de coordenadas como caso límite de un hiperbolóide de rotación de una hoja

$$\frac{\rho^2}{a^2 - |\eta|} - \frac{z^2}{|\eta|} = 1, \quad \rho^2 = x^2 + y^2,$$

cuando $|\eta| \rightarrow 0$. Estos hiperboloides constituyen una de las familias de superficies de coordenadas de un sistema de coordenadas esferoidales achatadas con $c = 0$. La coordenada cartesiana z se expresa según (4.9) en función de ξ y η por $z = \sqrt{\xi|\eta|}/a$, donde la raíz $\sqrt{\xi}$ debe tomarse con el signo + o — según se trate del semiplano superior o inferior, respectivamente.

Busquemos la solución entre las expresiones de la forma $\phi = -\mathfrak{E}zF(\xi)$, con lo que para la función $F(\xi)$ se obtiene:

$$F(\xi) = \text{const} \times \int \frac{d\xi}{\xi^2(\xi + a^2)} = \text{const} \times \left[\frac{a}{\sqrt{\xi}} - \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} \right];$$

(la constante de integración se toma igual a cero de acuerdo con la condición $\phi = 0$ para $z \rightarrow +\infty$, es decir, para $\sqrt{\xi} \rightarrow +\infty$). En estas condiciones, el arctg de un argumento negativo debe entenderse en el sentido de

$$\operatorname{arctg}(a/\sqrt{\xi}) = \pi - \operatorname{arctg}(a/\sqrt{\xi}),$$

y no como $-\operatorname{arctg}(a/\sqrt{\xi})$. De no proceder así, el potencial experimentaría una discontinuidad en el plano de la abertura ($\xi = 0$). El coeficiente constante lo elegimos de modo que cuando $z \rightarrow -\infty$ (es decir, cuando $\sqrt{\xi} \rightarrow -\infty$, $\operatorname{arctg}(a/\sqrt{\xi}) \rightarrow \pi$) sea $\phi \rightarrow -\mathfrak{E}z$ y obtenemos finalmente

$$\phi = -\frac{\mathfrak{E}z}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} - \frac{a}{\sqrt{\xi}} \right] = -\frac{\mathfrak{E}}{\pi} \sqrt{|\eta|} \left[\frac{\sqrt{\xi}}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} - 1 \right].$$

Sobre la superficie del conductor $\eta = 0$ y el potencial se anula, como debía ser.

A grandes distancias $r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$ de la abertura se tiene $\xi \cong r^2$ y el potencial (en el semiespacio superior) toma la forma

$$\phi \cong \frac{\mathfrak{E}a^2}{3\pi} \frac{\sqrt{-\eta}}{\xi} = \mathfrak{E}a^3 z / 3\pi r^3,$$

es decir, el campo es del tipo dipolar y corresponde al momento dipolar $\mathcal{P} = \mathfrak{E}a^3 / 3\pi$.

La intensidad del campo disminuye como $1/r^3$ y, en consecuencia, el flujo del mismo a través de una superficie infinitamente alejada (en el semiespacio $z > 0$) es nulo. Esto significa que todas las líneas de fuerza que pasan a través de la abertura mueren sobre la cara superior del plano conductor.

La distribución de las cargas sobre éste se calcula de la siguiente manera:

$$\sigma = \mp \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} = \mp \frac{a}{4\pi \sqrt{\xi}} \frac{\partial \phi}{\partial \sqrt{-\eta}} = \pm \frac{\mathfrak{E}}{4\pi^2} \left[\operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} - \frac{a}{\sqrt{\xi}} \right],$$

donde los signos \mp se refieren a las caras superior e inferior del plano. De acuerdo con la fórmula

$$\frac{\rho^2}{a^2 + \xi} + \frac{z^2}{\xi} = 1,$$

que liga ξ con ρ , z , sobre el plano $z = 0$ tenemos $\sqrt{\xi} = \pm \sqrt{\rho^2 - a^2}$. Así, pues, la distribución de cargas sobre la cara inferior del plano conductor viene dada por la fórmula

$$\sigma = -\frac{\mathfrak{E}}{4\pi^2} \left(\pi - \operatorname{arcsen} \frac{a}{\rho} + \frac{a}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)}} \right).$$

Cuando $\rho \rightarrow \infty$ tenemos $\sigma = -\epsilon/\infty$, como debía ser. En cambio, sobre la cara superior se tiene

$$\sigma = -\frac{\epsilon}{4\pi^2} \left(\frac{a}{\sqrt{(\rho^2-a^2)}} - \arcsen \frac{a}{\rho} \right).$$

8. El mismo problema si la abertura en el plano conductor tiene la forma de una rendija de anchura $2b$.

Solución. El plano xy , con la rendija a lo largo del eje x , lo consideraremos como caso límite de un cilindro hiperbólico

$$\frac{y^2}{b^2 - |\eta|} - \frac{z^2}{|\eta|} = 1$$

cuando $|\eta| \rightarrow 0$. Estos cilindros hiperbólicos constituyen una de las familias de superficies de coordenadas elipsoidales cuando $a \rightarrow \infty$, $c \rightarrow 0$. La coordenada cartesiana $z = \sqrt{|\eta|}/b$.

Al igual que en el problema 7 buscaremos la solución entre las expresiones de la forma $\phi = -\epsilon z F(\xi)$ y para la función F obtendremos:

$$F = \text{const} \times \int \frac{d\xi}{\xi^4 \sqrt{(\xi+b^2)}}.$$

El coeficiente y la constante de integración se determinan aquí por las condiciones $F = 0$ y $F = 1$, respectivamente, para $z \rightarrow +\infty$ y $z \rightarrow -\infty$ (es decir, cuando $\sqrt{\xi} \rightarrow +\infty$ y $\sqrt{\xi} \rightarrow -\infty$) y finalmente resulta

$$\phi = \frac{\epsilon}{2b} [\sqrt{(\xi+b^2)} \mp \sqrt{\xi}] \sqrt{|\eta|},$$

donde tomamos para la raíz $\sqrt{\xi}$ el valor positivo y los dos signos $-$ y $+$ corresponden a las regiones $z > 0$ y $z < 0$.

A grandes distancias de la rendija, en el semiespacio superior tenemos $\xi \cong y^2 + z^2 = r^2$ y el potencial

$$\phi \cong \pm b \epsilon \sqrt{(|\eta|/\xi)} = \pm \epsilon b^2 z / r^2,$$

es decir, el campo coincide con el de un dipolo bidimensional con momento dipolar $\epsilon b^2/8$ por unidad de longitud de la rendija (véase la fórmula en el problema 2 del § 3).

La distribución de cargas sobre el plano conductor viene dada por la fórmula

$$\sigma = -\frac{\epsilon}{8\pi} \left(\frac{y}{\sqrt{(y^2-b^2)}} \mp 1 \right).$$

§ 5. Fuerzas que actúan sobre un conductor

En un campo eléctrico, sobre la superficie de un conductor actúan determinadas fuerzas debidas a aquél. Es fácil calcularlas de la siguiente manera.

La densidad de flujo de impulso en un campo eléctrico en el vacío viene determinada, como es sabido, por el tensor de tensiones de Maxwell*:

$$-\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi} (\frac{1}{2} E^2 \delta_{ik} - E_i E_k).$$

* Véase Teoría clásica de los campos, § 33; $-\sigma_{ik}$ se designa allí por $T_{\alpha\beta}$.

En el presente caso aplicamos esta fórmula a una superficie que no coincide exactamente con la superficie del cuerpo, sino a una un tanto alejada respecto de la misma a fin de eliminar la influencia de la estructura del campo cerca de la superficie del cuerpo (cf. pág. 3).

En cuanto a la fuerza que actúa sobre el elemento df de superficie del cuerpo, no es sino el flujo de impulso que «incide» sobre él desde el exterior, es decir, es igual a $\sigma_{ik}df_k = \sigma_{ik}n_kdf$ (se ha cambiado el signo debido a que el vector normal n está orientado hacia el exterior del cuerpo, no hacia su interior). La cantidad $\sigma_{ik}n_k$ es, por consiguiente, la fuerza F_s por cm^2 de área. Teniendo en cuenta que en la superficie de un metal el campo E tiene sólo la componente normal, obtendremos

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{n}E^2/8\pi, \quad (5.1)$$

o bien, introduciendo la densidad superficial de carga σ ,

$$\mathbf{F}_s = 2\pi\sigma^2\mathbf{n} = \frac{1}{2}\sigma\mathbf{E}.$$

Llegamos así a la conclusión de que sobre la superficie de un conductor actúan fuerzas de «presión negativa» dirigidas en el sentido de la normal exterior a la superficie y cuyo módulo es igual a la densidad de energía del campo.

La fuerza total F que actúa sobre el conductor se obtiene integrando la expresión (5.1) de la fuerza sobre toda la superficie del mismo:

$$\mathbf{F} = \oint (E^2/8\pi) d\mathbf{t}. \quad (5.2)$$

Sin embargo, de ordinario es más conveniente calcular esta cantidad aplicando las reglas generales de la mecánica, es decir, derivando la expresión de la energía \mathcal{U} . En efecto, la fuerza que actúa sobre el conductor a lo largo del eje de coordenadas q es $-\partial\mathcal{U}/\partial q$, donde la derivada hay que entenderla en el sentido de variación de la energía al desplazar paralelamente el cuerpo dado como un todo a lo largo del eje q . Para ello, la energía debe expresarse en función de las cargas sobre los conductores (las fuentes del campo) y la derivación se efectúa manteniendo constantes dichas cargas. Caracterizando estas circunstancias mediante el subíndice e , escribiremos

$$F_q = -(\partial\mathcal{U}/\partial q)_e. \quad (5.3)$$

Análogamente, la proyección sobre un eje cualquiera del momento de las fuerzas que actúan sobre el conductor es igual a

$$K = -(\partial\mathcal{U}/\partial\psi)_e, \quad (5.4)$$

donde ψ es el ángulo de rotación del cuerpo como un todo en torno del eje dado.

En cambio, si la energía se expresa en función de los potenciales, y no en función de las cargas de los conductores, el problema de calcular las fuerzas a partir de ella exige un tratamiento especial. Ello se debe a que para mantener el conductor (durante su desplazamiento) a un potencial constante es necesario acudir a cuerpos adicionales. Es posible, por ejemplo, mantener constante el potencial del conductor conectándolo con otros conductores que posean una capacidad muy grande («depósitos de cargas»). Al adquirir la carga e_a , el conductor la toma del «depósito», cuyo potencial ϕ_a no varía debido a su gran capacidad. Sin embargo, sí cambia la energía del «depósito», disminuyendo en $e_a\phi_a$. Al cargar todo el sistema de conductores

con cargas e_a , la energía de los «depósitos» conectados con ellos varía en total en $-\sum_a e_a \phi_a$. Ahora bien, en la expresión de \mathcal{U} interviene solamente la energía de los conductores considerados, pero no la energía de los «depósitos». En este sentido cabe decir que \mathcal{U} se refiere a un sistema no cerrado energéticamente. De esta manera, para el sistema de conductores cuyos potenciales se mantienen constantes, el papel de energía mecánica lo representa no \mathcal{U} , sino la magnitud

$$\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} - \sum_a e_a \phi_a. \quad (5.5)$$

Substituyendo aquí (2.2), encontramos que \mathcal{U} y $\tilde{\mathcal{U}}$ difieren solamente en el signo:

$$\tilde{\mathcal{U}} = -\mathcal{U}. \quad (5.6)$$

La fuerza F_q se obtiene derivando $\tilde{\mathcal{U}}$ respecto de q manteniendo constantes los potenciales, es decir,

$$F_q = -(\partial \tilde{\mathcal{U}} / \partial q)_\phi = (\partial \mathcal{U} / \partial q)_\phi. \quad (5.7)$$

Así pues, las fuerzas que actúan sobre el conductor pueden obtenerse derivando \mathcal{U} bien sea conservando constantes las cargas, bien sea manteniendo constantes los potenciales, con la única diferencia que la derivada debe tomarse en el primer caso con el signo menos, y en el segundo, con el signo más.

Este mismo resultado se hubiera podido obtener también de manera más formal partiendo de la identidad diferencial

$$d\mathcal{U} = \sum_a \phi_a de_a - F_q dq, \quad (5.8)$$

en la cual \mathcal{U} se considera función de las cargas de los conductores y de las coordenadas q ; con esta identidad se expresa el hecho de que las derivadas $\partial \mathcal{U} / \partial e_a = \phi_a$ y $\partial \mathcal{U} / \partial q = -F_q$. Pasando a las variables ϕ_a en vez de e_a , se obtiene aquí

$$d\tilde{\mathcal{U}} = -\sum_a e_a d\phi_a - F_q dq, \quad (5.9)$$

de donde se sigue precisamente (5.7).

Al final del § 2 se consideró la energía de un conductor en un campo eléctrico homogéneo exterior. La fuerza total que actúa entonces sobre el conductor es igual a cero, naturalmente. Pero la expresión de la energía (2.14) puede utilizarse para determinar la fuerza que actúa sobre un conductor en un campo \mathbf{E} casi homogéneo, es decir, en un campo que varía poco a lo largo de distancias que son del orden de las dimensiones del cuerpo. En un campo de estas características, es posible aún calcular la energía en primera aproximación según la fórmula (2.14) y la fuerza \mathbf{F} se determina como gradiente de esta energía:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } \mathcal{U} = \frac{1}{2} \alpha_{ik} V \text{ grad } (\mathbf{E}_i \mathbf{E}_k). \quad (5.10)$$

En lo que concierne al momento total de las fuerzas \mathbf{K} , este par es, en general, no nulo, incluso en el caso de un campo exterior homogéneo. Según las reglas generales de la mecánica, \mathbf{K} se puede determinar considerando una rotación virtual

infinitésima del cuerpo; la variación de la energía en dicha rotación está ligada con \mathbf{K} por la igualdad $\delta \mathcal{U} = -\mathbf{K} \cdot \delta \psi$, donde $\delta \psi$ es el ángulo de giro. La rotación del cuerpo de ángulo $\delta \psi$ en un campo homogéneo es equivalente a una rotación del campo de ángulo $-\delta \psi$ respecto del primero. La variación del campo en estas condiciones es $\delta \mathbf{E} = -\delta \psi \times \mathbf{E}$ y la variación de la energía vale

$$\delta \mathcal{U} = (\partial \mathcal{U} / \partial \mathbf{E}) \cdot \delta \mathbf{E} = -\delta \psi \cdot \mathbf{E} \times \partial \mathcal{U} / \partial \mathbf{E}.$$

Pero $\partial \mathcal{U} / \partial \mathbf{E} = -\mathcal{P}$, como puede verse comparando las fórmulas (2.13) y (2.14). Por lo tanto, $\delta \mathcal{U} = -\mathcal{P} \times \mathbf{E} \cdot \delta \psi$, de donde

$$\mathbf{K} = \mathcal{P} \times \mathbf{E}, \quad (5.11)$$

de acuerdo con la expresión general ya conocida por la teoría del campo en el vacío.

Si la fuerza y el momento totales que actúan sobre el conductor son nulos, el conductor se conserva en reposo en el campo y en primer término se manifiestan los efectos ligados con la deformación del cuerpo (efectos que constituyen la llamada *electrostricción*). Las fuerzas (5.1) que actúan sobre la superficie del conductor conducen a una modificación de su forma y de su volumen. En ella, y debido al carácter expansivo de las fuerzas, el volumen del cuerpo aumenta. Una determinación completa de la deformación exige resolver las ecuaciones de la teoría de la elasticidad para la distribución dada de fuerzas (5.1) sobre la superficie del cuerpo. Sin embargo, si solamente nos interesa la variación de volumen, el problema se puede resolver de manera muy simple.

Para ello hay que tener en cuenta que si la deformación es pequeña (como en efecto tiene lugar en la electrostricción), la influencia de la variación de la forma sobre el cambio de volumen es un efecto de segundo orden de magnitud. Por lo tanto, en primera aproximación se puede considerar la variación de volumen como una deformación sin cambio de la forma, es decir, como una expansión en todas direcciones bajo la influencia de una cierta presión en exceso efectiva Δp distribuida uniformemente por la superficie del cuerpo y que substituye a la distribución exacta definida por (5.1). La variación relativa del volumen se obtiene multiplicando Δp por el coeficiente de dilatación del cuerpo. La presión Δp se determina, según una fórmula conocida, como derivada de la energía eléctrica del cuerpo \mathcal{U} respecto de su volumen: $\Delta p = -\partial \mathcal{U} / \partial V^*$.

Supongamos que el campo deformante es creado por el propio conductor cargado. Entonces la energía $\mathcal{U} = e^2/2C$, y la presión vale

$$\Delta p = -\frac{1}{2}e^2 \partial C^{-1} / \partial V.$$

Para una forma dada del cuerpo, su capacidad (que tiene las dimensiones de una

* La magnitud así definida es la fuerza expansiva que actúa sobre la superficie del lado del propio cuerpo; en cambio, la presión que actúa sobre él desde el exterior se obtiene cambiando el signo de dicha magnitud.

longitud) es proporcional a sus dimensiones lineales, es decir, proporcional a $V^{1/3}$. Encontramos por ello

$$\Delta p = e^2/6CV = e\phi/6V. \quad (5.12)$$

Pero si un conductor no cargado se encuentra en un campo exterior homogéneo \mathfrak{E} , su energía viene dada por la fórmula (2.14). Por consiguiente, en este caso, la presión expansiva es

$$\Delta p = \frac{1}{2}\alpha_{ik}\mathfrak{E}_i\mathfrak{E}_k. \quad (5.13)$$

PROBLEMAS

1. Un pequeño conductor cuya capacidad es c (del orden de magnitud de sus dimensiones) se encuentra a una distancia r del centro de un conductor esférico cuyo radio a es grande ($a \gg c$). La distancia $r - a$ desde el conductor a la superficie de la esfera se supone grande tan sólo comparada con c , pero no en comparación con a . Ambos conductores están unidos entre sí por un conductor fino, de modo que se encuentran a un mismo potencial ϕ . Determinar la fuerza de repulsión mutua entre los conductores.

Solución. Dado que el conductor c es pequeño, se puede considerar que su potencial se compone del potencial $\phi a/r$ que se crea a la distancia r de la esfera grande y del potencial propio e/c creado por la carga e que se encuentra sobre el mismo. De aquí se sigue $\phi = \phi a/r + e/c$ o $e = c\phi(1 - \frac{a}{r})$.

La fuerza de interacción F que se busca se determina como fuerza de Coulomb repulsiva entre la carga e del conductor c y la carga $a\phi$ de la esfera:

$$F = \frac{ac\phi^2}{r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

(esta expresión es correcta salvo términos de orden superior respecto de c). Así pues, el pequeño conductor se separa de la esfera impulsado por una fuerza que disminuye al acercarlo a su superficie.

2. Una esfera conductora cargada se ha dividido en dos mitades. Determinar la fuerza con que se repelen entre sí los dos hemisferios*.

Solución. Imaginemos que los dos hemisferios se encuentran separados por una hendedura infinitamente estrecha y determinemos la fuerza F que actúa sobre cada uno de ellos integrando sobre su superficie la fuerza $(E^2/8\pi) \cos \theta$ (proyección de la fuerza (5.1) sobre la dirección perpendicular al plano que separa los dos hemisferios). En la hendedura que los separa es $E = 0$ y sobre la superficie exterior se tiene $E = e/a^2$, donde a es el radio de la esfera y e la carga total sobre ella. El resultado que se obtiene es

$$F = e^2/8a^2.$$

3. Lo mismo para una esfera no cargada que se encuentra en un campo homogéneo exterior perpendicular al plano de la sección.

La solución es análoga a la del problema que precede con la diferencia de que sobre la superficie de la esfera es $E = 3\mathfrak{E} \cos \theta$ (de acuerdo con el problema 1 del § 3). La fuerza buscada vale

$$F = 9a^2\mathfrak{E}^2/16.$$

* En los problemas 2 y 3 se supone que los dos hemisferios se encuentran a un mismo potencial.

4. Determinar las variaciones de volumen y de forma de una esfera conductora en un campo eléctrico homogéneo exterior.

Solución. La variación de volumen $\Delta V/V = \Delta p/K$, donde K es el módulo de dilatación del cuerpo y Δp se determina por la fórmula (5.13). Para una esfera es $a_{ik} = \delta_{ik}$ $a = \frac{3}{4\pi} \delta_{ik}$ (con a dada en el problema 1 del § 3), de modo que

$$\Delta V/V = 3\mathbb{E}^2/8\pi K.$$

Como resultado de la deformación, la esfera se transforma en un elipsoide alargado. Para determinar la excentricidad de este elipsoide cabe considerar la deformación como una deformación homogénea de cizalla en todo el volumen del cuerpo, de la misma manera que, para calcular la variación del volumen total, se consideró una deformación homogénea de dilatación.

La condición de equilibrio del cuerpo deformado se puede formular como condición de que sea mínima la suma de las energías electrostática y elástica. La primera de ellas, según las fórmulas (2.12) y (4.26), es igual a

$$\mathcal{U}_{es} = -\frac{V}{8\pi n} \mathbb{E}^2 \approx -\frac{3V\mathbb{E}^2}{8\pi} - \frac{3V}{10\pi} \frac{a-b}{R} \mathbb{E}^2,$$

donde R es el radio inicial de la esfera, a y b , los semiejes del elipsoide, y

$$n \approx \frac{1}{2} - 4(a-b)/15R$$

es el coeficiente de despolarización (véase (4.33)).

En virtud de la simetría axial de la deformación (en torno de la dirección del campo, eje x) son diferentes de cero tan sólo las componentes u_{xx} y $u_{yy} = u_{zz}$ del tensor de deformación. Dado que, por otra parte, consideramos el equilibrio respecto de un cambio de forma, se puede suponer que en él no varía el volumen, es decir, que $u_{ii} = 0$. Por ello la energía elástica* se puede escribir en la forma (σ_{ik} es el tensor de tensiones elásticas).

$$\mathcal{U}_{el} = \frac{1}{2} u_{ik} \sigma_{ik} V = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})(u_{xx} - u_{yy}) V,$$

Tenemos

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 2\mu(u_{xx} - u_{yy}),$$

donde μ es el módulo de rigidez del cuerpo, y $u_{xx} - u_{yy} = (a-b)/R$. Por consiguiente,

$$\mathcal{U}_{el} = \frac{3}{2}\mu(a-b)^2 V/R^2.$$

Determinando el mínimo de la suma $\mathcal{U}_{es} + \mathcal{U}_{el}$ respecto de $a-b$, obtendremos

$$(a-b)/R = 9\mathbb{E}^2/40\pi\mu.$$

5. Hallar la relación entre la frecuencia y la longitud de las ondas que se propagan por la superficie plana cargada de un conductor líquido (en el campo de la gravedad). Hallar la condición de estabilidad de esta superficie (J. Frenkel, 1953).

Solución. Supongamos que la onda se propaga a lo largo del eje x , con el eje z dirigido verticalmente hacia arriba. El desplazamiento vertical de los puntos de la superficie del líquido es $\zeta = a\epsilon^{i(kx-\omega t)}$. Para la superficie inmóvil, la intensidad del campo sobre ella vale $E_z = E = 4\pi\sigma_0$, y su potencial $\phi = -4\pi\sigma_0 z$, donde σ_0 es la densidad superficial de carga. El potencial del campo sobre la superficie que oscila lo escribiremos en la forma

$$\phi = -4\pi\sigma_0 z + \phi_1,$$

con

$$\phi_1 = \text{const} \times e^{i(kx-\omega t)} e^{-kz},$$

donde ϕ_1 es una pequeña corrección que satisface la ecuación $\Delta\phi_1 = 0$ y que se anula para $z \rightarrow \infty$. Sobre la propia superficie del conductor el potencial debe tener un valor constante que tomamos como cero; de aquí se sigue

$$\phi_1 = 4\pi\sigma_0 \zeta \quad \text{para } z = 0.$$

* Véase VII, Teoría de la elasticidad, § 4.

Según (5.1) sobre la superficie cargada del líquido actúa una presión negativa adicional que, salvo términos de orden superior al primero respecto de ϕ_1 , es igual a

$$E^2/8\pi \cong E_\varepsilon^2/8\pi \cong 2\pi\sigma_0^2 + [\kappa\sigma_0\phi_1]_{z=0} = 2\pi\sigma_0^2 + 4\pi\sigma_0^2 k\zeta.$$

El término constante $2\pi\sigma_0^2$ carece de importancia (se le puede incluir en la presión exterior constante).

El estudio del movimiento hidrodinámico en la onda es por completo análogo al de la teoría de las ondas capilares*, fenómeno del que difiere solamente en la existencia de la presión adicional indicada más arriba. Sobre la superficie del líquido tenemos la condición de contorno

$$\rho g\zeta + \rho[\partial\Phi/\partial t]_{z=0} - \alpha\partial^2\zeta/\partial x^2 - 4\pi\sigma_0^2 k\zeta = 0,$$

donde α es el coeficiente de tensión superficial, ρ la densidad del líquido y Φ el potencial de su velocidad. Φ y ζ están ligados entre sí, además, por la relación

$$\partial\zeta/\partial t = [\partial\Phi/\partial x]_{z=0}.$$

Substituyendo en estas dos igualdades $\zeta = ae^{i(kx-\omega t)}$ y $\Phi = Ae^{i(kx-\omega t)}$ y eliminando a y A obtendremos la relación buscada entre k y ω :

$$\omega^2 = k(g\rho - 4\pi\sigma_0^2 k + \alpha k^2)/\rho. \quad (1)$$

Para que la superficie del líquido sea estable, la frecuencia ω debe ser real para valores cualesquiera de k (en caso contrario, aparecerían valores ω complejos con parte imaginaria positiva y el factor $e^{-i\omega t}$ crecería sin límites). La condición de que sea positivo el segundo miembro de (1) se escribe: $(4\pi\sigma_0^2)^2 - 4g\rho\alpha < 0$, de donde

$$\sigma_0^4 < g\rho\alpha/4\pi^2.$$

Ésta es precisamente la condición de estabilidad.

6. Hallar la condición de estabilidad para una gota esférica cargada (Rayleigh, 1882).

Solución. La suma de las energías electrostática y superficial de la gota vale

$$\mathcal{U} = e^2/2C + \alpha S,$$

donde α es el coeficiente de tensión superficial del líquido, C la capacidad de la gota, y S el área de su superficie. La inestabilidad aparece (al aumentar e) en relación con el alargamiento de la esfera para transformarse en elipsoide y viene determinada por el momento en que \mathcal{U} pasa a ser función decreciente de la excentricidad (para un volumen dado de la gota). La forma esférica corresponde siempre a un extremo de \mathcal{U} ; por ello, la condición de estabilidad resulta ser:

$$[\partial^2\mathcal{U}/\partial(a-b)^2]_{a=b} > 0,$$

donde a, b son los semiejes del elipsoide y la derivación se efectúa para $ab^2 = \text{const}$. Utilizando la conocida fórmula que da la superficie de un elipsoide de revolución y la forma (4.18) para su capacidad, se obtiene después de un cálculo bastante largo,

$$e^2 < 16\pi\alpha^3 a.$$

* Véase, VI, *Hidrodinámica*, §61.

CAPÍTULO II

ELECTROSTÁTICA DE LOS DIELÉCTRICOS

§ 6. Campo electrostático en los dieléctricos

Pasemos ahora al estudio de un campo eléctrico constante en otra categoría de medios materiales —en los dieléctricos.

La propiedad fundamental de los dieléctricos consiste en la imposibilidad de hacer circular por ellos una corriente constante. Por esto, en contraste con los conductores, la intensidad de un campo eléctrico constante en los dieléctricos no tiene en absoluto por qué ser igual a cero y debemos hallar las ecuaciones mediante las cuales se describe este campo. Una de ellas se obtiene promediando la ecuación (1.3) y se escribe como antes

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (6.1)$$

En cuanto a la segunda ecuación, ésta se obtiene promediando la ecuación $\text{div } \mathbf{e} = 4\pi\rho$:

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\bar{\rho}. \quad (6.2)$$

Supondremos que dentro del material dieléctrico no se ha introducido desde el exterior carga adicional alguna; éste es el caso más frecuente e importante. Entonces la carga total en todo el volumen del dieléctrico se conserva igual a cero, y aun después de introducirlo en un campo eléctrico se tiene:

$$\int \bar{\rho} dV = 0.$$

Esta ecuación integral, que debe cumplirse para un cuerpo de forma cualquiera, significa que la densidad media de las cargas puede escribirse en forma de divergencia de un cierto vector, que se suele designar por \mathbf{P} :

$$\bar{\rho} = -\text{div } \mathbf{P}, \quad (6.3)$$

siendo fuera del cuerpo $\mathbf{P} = 0$. En efecto, integrando en el volumen limitado por una superficie que encierra al cuerpo y los puntos de la cual son todos exteriores al mismo, obtendremos

$$\int \bar{\rho} dV = - \int \text{div } \mathbf{P} dV = - \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{f} = 0.$$

La magnitud \mathbf{P} se llama vector *polarización dieléctrica* (o, simplemente, *polarización*) del cuerpo: un dieléctrico en el cual \mathbf{P} es diferente de cero se dice que está *polarizado*. Junto con la densidad volumétrica (6.3), el vector \mathbf{P} determina también la densidad superficial σ de las cargas distribuidas por la superficie del dieléctrico polarizado. Si se integra la fórmula (6.3) en un elemento de volumen limitado entre dos superficies unidad infinitamente próximas situadas a uno y otro lado de la superficie del dieléctrico y se tiene en cuenta que sobre la superficie exterior es $\mathbf{P} = 0$, se obtiene (cf. la deducción de la fórmula (1.9)):

$$\sigma = P_n, \quad (6.4)$$

donde P_n es la componente del vector \mathbf{P} respecto de la normal exterior a la superficie.

Para poner de manifiesto el sentido físico de la propia magnitud \mathbf{P} , consideremos el momento dipolar total de todas las cargas interiores en el dieléctrico; en contraste con la carga total, esta cantidad no tiene por qué ser nula. Por definición, el momento dipolar viene dado por la integral

$$\int \mathbf{r} \bar{\rho} dV.$$

Substituyendo en vez de $\bar{\rho}$ la expresión (6.3) e integrando de nuevo en un volumen que contiene al cuerpo en su interior, obtendremos

$$\int \mathbf{r} \bar{\rho} dV = - \int \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{P} dV = - \oint \mathbf{r} (\mathbf{df} \cdot \mathbf{P}) + \int (\mathbf{P} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{r} dV.$$

La integral de superficie se anula, y en la segunda tenemos $(\mathbf{P} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{r} = \mathbf{P}$, de modo que

$$\int \mathbf{r} \bar{\rho} dV = \int \mathbf{P} dV. \quad (6.5)$$

Así pues, el vector polarización representa el momento dipolar (o como suele decirse, el *momento eléctrico*) por unidad de volumen del dieléctrico*.

Substituyendo (6.3) en (6.2), obtendremos la segunda ecuación del campo electrostático en la forma:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (6.6)$$

donde se ha introducido la nueva magnitud \mathbf{D} definida por

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad (6.7)$$

llamada *desplazamiento eléctrico*. La ecuación (6.6) se obtuvo promediando la densidad de las cargas que forman parte de la composición del dieléctrico. Pero si se introducen en él desde el exterior cargas adicionales respecto a las de su propia naturaleza (las llamaremos *cargas extrañas*), al segundo miembro de la ecuación (6.6) hay que añadir su densidad:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\text{ex}}. \quad (6.8)$$

* Hay que hacer notar que la igualdad (6.3) dentro del dieléctrico y la condición $\mathbf{P} = 0$ fuera del mismo no determinan todavía por sí solas la magnitud \mathbf{P} de manera unívoca; en el interior del dieléctrico puede sumarse a \mathbf{P} cualquier vector de la forma $\operatorname{rot} \mathbf{f}$. Únicamente el establecimiento de la relación que lo liga con el momento dipolar determina en definitiva al vector \mathbf{P} .

Sobre la superficie de separación de dos dieléctricos distintos deben cumplirse determinadas condiciones de contorno. Una de estas condiciones es consecuencia de la ecuación $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. Si la superficie de separación es homogénea por sus propiedades físicas*, esta condición impone la continuidad de la componente tangencial de la intensidad del campo:

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}; \quad (6.9)$$

(cf. la deducción de la condición (1.7)). En cuanto a la segunda condición, ésta se sigue de la ecuación $\text{div } \mathbf{D} = 0$ e impone la continuidad de la componente del desplazamiento eléctrico normal a la superficie:

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (6.10)$$

En efecto, un salto de la componente normal $D_n = D_z$ supondría para la derivada $\partial D_z / \partial z$ (y con ella también para $\text{div } \mathbf{D}$) un valor infinito.

Sobre la frontera entre un dieléctrico y un conductor se tiene $\mathbf{E}_t = 0$ y la condición relativa a la componente normal se deduce de (6.8):

$$\mathbf{E}_t = 0, \quad D_n = 4\pi\sigma, \quad (6.11)$$

donde σ es la densidad de las cargas sobre la superficie del conductor.

§ 7. La permitividad

Para que las ecuaciones (6.1) y (6.6) constituyan un sistema completo de ecuaciones para la determinación del campo eléctrico hay que añadirles todavía una relación que ligue entre sí el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} y la intensidad del campo \mathbf{E} . En la inmensa mayoría de casos puede suponerse que esta dependencia es lineal. Corresponde entonces al primer término del desarrollo de \mathbf{D} en potencias de \mathbf{E} y su aplicabilidad se debe a que los campos eléctricos exteriores son pequeños en comparación con los campos moleculares internos.

La dependencia lineal de \mathbf{D} respecto de \mathbf{E} toma una forma particularmente simple en el importante caso de los dieléctricos isótropos. Es evidente que en un dieléctrico isótropo los vectores \mathbf{D} y \mathbf{E} deben tener la misma dirección. Por esta razón, su dependencia lineal se reduce a la mera proporcionalidad**

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (7.1)$$

* Esto es, respecto de la composición de los cuerpos en contacto, de la temperatura, etc. Si el dieléctrico es un cristal, la dirección cristalográfica de la superficie debe ser constante, esto es, la superficie ha de ser un plano.

** Sin embargo, hay que hacer notar que dicha dependencia, que supone la anulación de \mathbf{D} simultáneamente con la de \mathbf{E} , es válida, rígidamente hablando, tan sólo en los dieléctricos homogéneos por sus propiedades físicas (composición, temperatura, etc.). En los cuerpos no homogéneos, \mathbf{D} puede tener valores diferentes de cero incluso cuando $\mathbf{E} = 0$, viiniendo determinado entonces por los gradientes de las magnitudes termodinámicas que varían en el interior del cuerpo. Estos términos, con todo, son muy pequeños y de hecho no representan en la práctica papel alguno. Por ello, utilizaremos en lo que sigue la relación (7.1) incluso para cuerpos no homogéneos.

El coeficiente ϵ se llama *permeabilidad dieléctrica* o *permitividad* de la materia y es función de su estado termodinámico.

Junto con el desplazamiento eléctrico, es proporcional al campo también la polarización:

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E} \equiv (\epsilon - 1) \mathbf{E} / 4\pi. \quad (7.2)$$

La magnitud κ se llama *coeficiente de polarización* de la substancia (o su *susceptibilidad eléctrica*). Más adelante (§ 14) se probará que la permitividad es siempre mayor que la unidad; según esto, la polarizabilidad es siempre positiva. La polarizabilidad de un medio enrarecido (un gas) puede considerarse proporcional a su densidad.

Las condiciones de contorno (6.9) y (6.10) sobre la superficie de separación de dos dieléctricos isótropos toman la forma:

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}, \quad \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}. \quad (7.3)$$

Así pues, la componente normal de la intensidad del campo experimenta un salto, variando de manera inversamente proporcional a las permitividades de los dos medios.

En un dieléctrico homogéneo se tiene $\epsilon = \text{const}$ y entonces de la ecuación $\text{div } \mathbf{D} = 0$ se sigue que también $\text{div } \mathbf{P} = 0$. Teniendo en cuenta la definición (6.3), esto significa que la densidad volumétrica de carga en un cuerpo de estas características es igual a cero (en cambio, la densidad superficial (6.4) es, en general, no nula). Por el contrario, si el dieléctrico no es homogéneo, se tiene una densidad volumétrica de carga diferente de cero.

$$\bar{\rho} = -\text{div } \mathbf{P} = -\text{div} \frac{\epsilon - 1}{4\pi\epsilon} \mathbf{D} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{D} \cdot \text{grad} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \mathbf{E} \cdot \text{grad} \epsilon.$$

Si se introduce el potencial del campo eléctrico de acuerdo con $\mathbf{E} = -\text{grad} \phi$, la ecuación (6.1) queda satisfecha automáticamente y la ecuación $\text{div } \mathbf{D} = \text{div} \epsilon \mathbf{E} = 0$ da

$$\text{div}(\epsilon \text{ grad} \phi) = 0. \quad (7.4)$$

Esta ecuación se reduce a la ecuación ordinaria de Laplace tan sólo en un medio dieléctrico homogéneo. Las condiciones de contorno (7.3) pueden escribirse también en la forma de condiciones impuestas al potencial:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2, \\ \epsilon_1 \partial \phi_1 / \partial n &= \epsilon_2 \partial \phi_2 / \partial n; \end{aligned} \quad (7.5)$$

(la condición de continuidad de las derivadas tangenciales del potencial es equivalente a la condición de continuidad del propio ϕ).

En un medio dieléctrico homogéneo a trozos, la ecuación (7.4) se reduce a la ecuación de Laplace $\Delta \phi = 0$ en cada porción homogénea, de modo que las permitividades intervienen en la solución del problema únicamente en virtud de la aplicación de las condiciones (7.5). Pero estas condiciones contienen tan sólo la razón

de las permitividades de los dos medios en contacto. En particular, la solución del problema electrostático para un cuerpo dieléctrico con una permitividad ϵ_2 rodeado por un medio de permitividad ϵ_1 se reduce, por consiguiente, al mismo problema para un cuerpo con permitividad ϵ_2/ϵ_1 que se encuentra en el vacío.

Consideremos la cuestión de cómo varían los resultados obtenidos en los párrafos que preceden relativos al campo electrostático de los conductores si éstos se encuentran, no en el vacío, sino sumergidos en un medio dieléctrico homogéneo e isótropo. En ambos casos la distribución del potencial viene descrita por la ecuación $\Delta\phi = 0$ con la condición de contorno de que ϕ sea constante sobre la superficie del conductor y la única diferencia se reduce a que, en vez de la relación $E_n =$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial n} = 4\pi\sigma \text{ cor la densidad superficial de carga, ahora será:}$$

$$D_n = -\epsilon \frac{\partial\phi}{\partial n} = 4\pi\sigma. \quad (7.6)$$

Vemos así que la solución del problema relativo al campo de un conductor cargado en el vacío permite hallar la correspondiente al mismo problema en un medio dieléctrico mediante un cambio formal de los potenciales y de las cargas, bien sea $\phi \rightarrow \epsilon\phi$, $e \rightarrow e$, bien sea $\phi \rightarrow \phi$, $e \rightarrow e/\epsilon$. Para cargas dadas de los conductores, el potencial y la intensidad del campo disminuyen quedando divididos por ϵ en relación con sus valores para el campo en el vacío; esta debilitación del campo puede interpretarse intuitivamente como resultado de un «apantallamiento» parcial de la carga del conductor por las cargas superficiales del dieléctrico polarizado en contacto con él. Pero si se mantienen constantes los potenciales de los conductores, el campo se conserva invariable, si bien las cargas de los conductores quedan multiplicadas por ϵ .

Finalmente, haremos observar que en electrostática es posible considerar formalmente un conductor (sin carga) como un cuerpo cuya permitividad es infinita, en el sentido de que la influencia que ejerce él sobre un campo eléctrico exterior es la misma que la que determinaría en un dieléctrico (de igual forma) para el cual $\epsilon \rightarrow \infty$. En efecto, en virtud del carácter finito de la condición de contorno para el desplazamiento D , éste debe conservarse finito dentro del cuerpo incluso cuando $\epsilon \rightarrow \infty$; pero esto significa que en un campo tal será $E \rightarrow 0$, de acuerdo con las propiedades de los conductores.

PROBLEMAS

1. Determinar el campo creado por una carga puntual e situada a una distancia h de la superficie de separación plana entre dos medios dieléctricos diferentes.

Solución. Llamemos O el punto en que se encuentra la carga e en el medio 1 y sea O' el punto simétrico de O respecto del plano de separación (en el medio 2) (fig. 10). El campo en el medio 1 lo determinaremos como campo creado por dos cargas puntuales, la carga e y una carga ficticia e' en el punto O' (cf. el método de las imágenes, § 3):

$$\phi_1 = e/\epsilon_1 r + e'/\epsilon_1 r',$$

donde r, r' son las distancias del punto de observación a los puntos O y O' , respectivamente. En cambio, el campo en el medio 2 lo consideraremos como campo creado por una carga ficticia e'' que se encuentra en el punto O :

$$\phi_2 = e''/\epsilon_2 r.$$

Sobre el plano frontera ($r = r'$) deben cumplirse las condiciones (7.5) de las que se siguen las ecuaciones

$$e - e' = e'', (e + e')/\epsilon_1 = e''/\epsilon_2,$$

de donde

$$e' = e(\epsilon_1 - \epsilon_2)/(\epsilon_1 + \epsilon_2), \quad e'' = 2\epsilon_2 e/(\epsilon_1 + \epsilon_2). \quad (1)$$

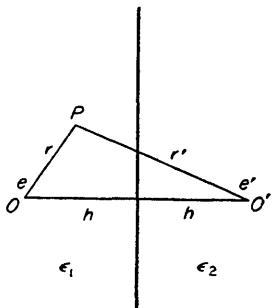


FIG. 10

Para $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ tenemos $e' = -e$, $\phi_2 = 0$, es decir, volvemos al resultado obtenido en el § 3 para el campo de una carga puntual cerca de un plano conductor.

La fuerza que actúa sobre la carga e («fuerza de la imagen») es igual a

$$F = \frac{ee'}{(2h)^2 \epsilon_1} = \left(\frac{e}{2h} \right)^2 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)};$$

$F > 0$ corresponde a repulsión.

2. El mismo problema para un hilo cargado rectilíneo de longitud infinita colocado paralelamente al plano de separación y a la distancia h del mismo.

Solución. Es del todo análoga a la solución de problema que precede, con la diferencia de que los potenciales del campo en uno y otro medio son

$$\phi_1 = -(2e/\epsilon_1) \ln r - (2e'/\epsilon_1) \ln r', \quad \phi_2 = -(2e''/\epsilon_2) \ln r,$$

donde e, e', e'' representan las cargas por unidad de longitud del hilo y de sus «imágenes», y r, r' las distancias en un plano perpendicular a los hilos. Para e', e'' se obtienen las mismas expresiones (1) y la fuerza que actúa sobre la unidad de longitud del hilo es

$$F = 2ee'/2h\epsilon_1 = e^2(\epsilon_1 - \epsilon_2)/h\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2).$$

3. Determinar el campo creado por un hilo cargado rectilíneo de longitud infinita colocado (en un medio cuya constante dieléctrica es ϵ_1) paralelamente a un cilindro (con $\epsilon = \epsilon_2$) de radio a y a una distancia b ($b > a$) de su eje*.

Solución. El campo en el medio 1 lo determinaremos como campo que crearía en el dieléctrico homogéneo ϵ_1 el hilo cargado real (que pasa por el punto O en la fig. 11) con una carga e por unidad

* El problema análogo para una carga puntual cerca de una esfera dieléctrica no puede resolverse en forma finita.

de longitud y dos hilos ficticios con cargas e' y $-e'$ que pasan por los puntos A y O' , respectivamente. El punto A se encuentra a la distancia $AO' = a^2/b$ del centro de la circunferencia; entonces para todos los puntos de la misma, la razón de las distancias r y r' a los puntos A y O , respectivamente, es constante $r'/r = a/b$ y, en consecuencia, resulta posible satisfacer las condiciones de contorno sobre dicha circunferencia. En cuanto al campo en el medio 2, lo consideraremos como campo que crearía en un medio homogéneo ϵ_2 la carga ficticia e'' sobre el hilo que pasa por O .

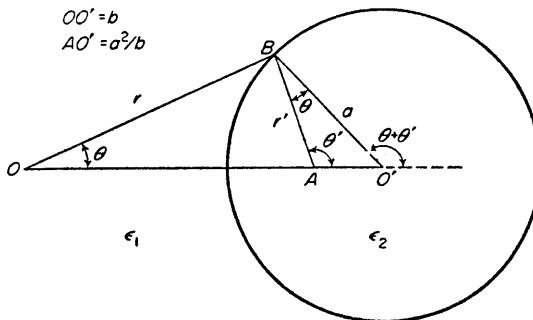


FIG. 11

Las condiciones de contorno sobre la superficie de separación conviene formularlas en términos del potencial $\phi(\mathbf{E} = -\text{grad } \phi)$ y del potencial vector \mathbf{A} (cf. § 3) determinado a partir de $\mathbf{D} = \text{rot } \mathbf{A}$ (de acuerdo con la ecuación $\text{div } \mathbf{D} = 0$). En un problema bidimensional, el vector \mathbf{A} está dirigido a lo largo del eje z (perpendicular al plano del dibujo). Las condiciones de continuidad de las componentes tangenciales de \mathbf{E} y de la componente normal de \mathbf{D} son equivalentes a las condiciones

$$\phi_1 = \phi_2, A_1 = A_2.$$

Para el campo de un hilo cargado se tiene, en coordenadas polares $r, \theta : \phi = -\frac{2e}{\epsilon} \ln r + \text{const}$,

$A = 2e\theta + \text{const}$ (cf. (3.18)). Por ello, las condiciones de contorno se escriben:

$$\frac{2}{\epsilon_1}(-e \ln r - e \ln r' + e' \ln a) = -\frac{2e''}{\epsilon_2} \ln r + \text{const},$$

$$2[e\theta + e'\theta' - e'(\theta + \theta')] = 2e''\theta,$$

(la notación utilizada para los ángulos se da en la figura 11; se ha aplicado la semejanza de los triángulos $OO'B$ y $BO'A$). De aquí se sigue $\epsilon_2(e+e') = \epsilon_1 e''$, $e-e' = e''$ y para e' , e'' se tienen de nuevo las expresiones (1) del problema 1.

La fuerza que actúa sobre la unidad de longitud del hilo cargado es paralela a OO' e igual a

$$F = eE = \frac{2ee'}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OO'} \right) = \frac{2e^2(\epsilon_1 - \epsilon_2)a^2}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)b(b^2 - a^2)}$$

($F > 0$ corresponde a repulsión).

4. El mismo problema si el hilo se encuentra en el interior de un cilindro cuya permitividad es $\epsilon_2(b < a)$.

Solución. El campo en el medio 2 lo determinaremos como campo del hilo real e (punto O en la fig. 12) y del hilo ficticio e' que pasa por el punto A , situado ahora fuera del cilindro. En cambio, el campo en el medio 1 se considerará como campo de los hilos con cargas e'' y $e-e''$ que pasan

por O y O' , respectivamente. Siguiendo el mismo procedimiento que en el problema anterior, obtendremos

$$e' = -e(\epsilon_1 - \epsilon_2)/(\epsilon_1 + \epsilon_2), \quad e'' = 2\epsilon_1 e/(\epsilon_1 + \epsilon_2).$$

El hilo se ve repelido por la superficie del cilindro (para $\epsilon_2 > \epsilon_1$) con una fuerza

$$F = \frac{2ee'}{\epsilon_2} \frac{1}{OA} = \frac{2e^2(\epsilon_2 - \epsilon_1)b}{\epsilon_2(\epsilon_1 + \epsilon_2)(a^2 - b^2)}.$$

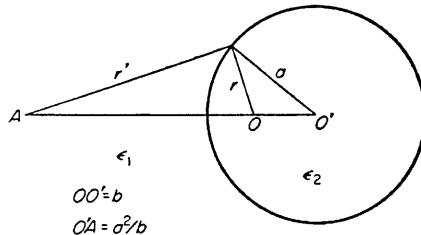


FIG. 12

5. Probar que el potencial del campo $\phi_A(\mathbf{r}_B)$ creado en el punto \mathbf{r}_B de un medio dieléctrico no homogéneo arbitrario por una carga puntual e que se encuentra en el punto \mathbf{r}_A , es igual al potencial $\phi_B(\mathbf{r}_A)$ que determina en el punto \mathbf{r}_A la misma carga colocada en el punto \mathbf{r}_B .

Solución. Los potenciales $\phi_A(\mathbf{r})$ y $\phi_B(\mathbf{r})$ satisfacen las ecuaciones

$$\operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} \phi_A) = -4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \quad \operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} \phi_B) = -4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B).$$

Multiplicando la primera por ϕ_B , la segunda por ϕ_A y restando miembro a miembro una de otra, se encuentra

$$\operatorname{div}(\phi_B \epsilon \operatorname{grad} \phi_A) - \operatorname{div}(\phi_A \epsilon \operatorname{grad} \phi_B) = -4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \phi_B(\mathbf{r}) + 4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B) \phi_A(\mathbf{r}).$$

La integración de esta igualdad en todo el espacio da la relación buscada:

$$\phi_A(\mathbf{r}_B) = \phi_B(\mathbf{r}_A).$$

§ 8. Elipsoide dieléctrico

La polarización de un elipsoide dieléctrico situado en un campo eléctrico homogéneo exterior posee ciertas características propias que prestan a este ejemplo un particular interés.

Consideremos ante todo un caso sencillo, el de una esfera dieléctrica en un campo exterior \mathbf{E} . Designemos por $\epsilon^{(i)}$ su constante dieléctrica, y por $\epsilon^{(e)}$ la constante dieléctrica del medio exterior dentro del cual se encuentra situada. Elijamos como origen de un sistema de coordenadas esféricas el centro de la esfera (contando el ángulo polar θ a partir de la dirección de \mathbf{E}) y busquemos para el potencial del campo fuera de la esfera una expresión de la forma

$$\phi^{(e)} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} + A \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} / r^3;$$

el primer término es el potencial del campo exterior aplicado, y el segundo término,

que tiende a cero en el infinito, da la variación buscada del potencial debido a la esfera (cf. la solución del problema 1, § 3). En cambio, para el potencial del campo en el interior de la esfera buscaremos una expresión de la forma

$$\phi^{(i)} = -B\mathbf{E} \cdot \mathbf{r};$$

es ésta la única función que satisface la ecuación de Laplace, que se conserva finita en el centro de la esfera y que depende tan sólo del vector constante \mathbf{E} , que es el único parámetro que interviene en el problema en cuestión.

Las constantes A y B se determinan por las condiciones de contorno sobre la superficie de la esfera. Pero se advierte desde luego que el campo en el interior de la misma $\mathbf{E}^{(i)} = B\mathbf{E}$ resulta ser homogéneo y difiere del campo \mathbf{E} impuesto tan sólo en el valor del módulo.

La condición de contorno de continuidad del potencial da

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{E}(1 - A/R^3),$$

(R es el radio de la esfera), y la condición de continuidad de la componente normal del desplazamiento eléctrico se escribe

$$\mathbf{D}^{(i)} = \epsilon^{(e)}\mathbf{E}(1 + 2A/R^3).$$

Eliminando entre estas dos igualdades la constante A , obtendremos

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^{(i)} + 2\epsilon^{(e)}\mathbf{E}^{(i)}) = \epsilon^{(e)}\mathbf{E} \quad (8.1)$$

o bien, substituyendo $\mathbf{D}^{(i)} = \epsilon^{(i)}\mathbf{E}^{(i)}$,

$$\mathbf{E}^{(i)} = 3\epsilon^{(e)}\mathbf{E}/(2\epsilon^{(e)} + \epsilon^{(i)}). \quad (8.2)$$

De manera del todo análoga se resuelve el problema de un cilindro dieléctrico de longitud infinita en un campo exterior perpendicular a su eje (cf. problema 2, § 3). El campo dentro del cilindro, al igual que dentro de la esfera en el ejemplo anterior, resulta ser homogéneo y satisface la condición

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^{(i)} + \epsilon^{(e)}\mathbf{E}^{(i)}) = \epsilon^{(e)}\mathbf{E}, \quad (8.3)$$

o bien

$$\mathbf{E}^{(i)} = 2\epsilon^{(e)}\mathbf{E}/(\epsilon^{(e)} + \epsilon^{(i)}). \quad (8.4)$$

Las relaciones (8.1) y (8.3), en las que no interviene la permitividad $\epsilon^{(i)}$ de la esfera o del cilindro de manera explícita, son particularmente importantes por el hecho de que su validez no está ligada con el carácter lineal de la dependencia entre \mathbf{E} y \mathbf{D} dentro del cuerpo; dichas relaciones se cumplen cualquiera que sea la forma de esta dependencia (en particular, para los cuerpos anisótropos). El mismo carácter presentan las relaciones análogas

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{E} \quad (8.5)$$

para un cilindro en un campo longitudinal y

$$\mathbf{D}^{(i)} = \epsilon^{(e)} \mathbf{E} \quad (8.6)$$

para una placa de caras paralelas en un campo perpendicular a ella; estas igualdades son, sin más, evidentes a partir de las condiciones de contorno.

La propiedad de crear en su interior un campo homogéneo cuando se le coloca en un campo homogéneo exterior resulta ser inherente, de manera general, a cualquier elipsoide, cualquiera que sea la razón de sus semiejes a, b, c . El problema de la polarización de un elipsoide dieléctrico se resuelve mediante coordenadas elipsoidales de manera parecida a como en el § 4 se resolvió el problema análogo para un elipsoide conductor.

Para el potencial del campo fuera de un elipsoide tomaremos de nuevo una expresión de la forma (4.22) $\phi'_e = \phi_0 F(\xi)$ con la función $F(\xi)$ dada por (4.23). En cambio, el potencial del campo dentro del mismo ϕ_i , no puede expresarse mediante una función de esta forma, dado que no cumple la condición de que el campo sea finito en todo el volumen interior al elipsoide. En efecto, consideremos la superficie $\xi = -c^2$, que representa una elipse en el plano xy interior al volumen del elipsoide. Para $\xi \rightarrow -c^2$ la integral (4.23) se comporta como $\sqrt{\xi + c^2}$. La intensidad del campo, es decir, el gradiente del potencial, se comportará, por consiguiente, como $(\xi + c^2)^{-1/2}$ y tenderá a infinito para $\xi = -c^2$. De esta manera, para representar el campo en el interior del elipsoide es sólo adecuada la solución $F(\xi) = \text{const}$, es decir, hay que buscar para ϕ_i una expresión de la forma

$$\phi_i = B\phi_0.$$

Vemos así que el potencial ϕ_i difiere del potencial del campo homogéneo ϕ_0 tan sólo en un factor constante. En otras palabras, el campo dentro del elipsoide será también homogéneo.

No nos detendremos en escribir aquí las fórmulas para el campo fuera del elipsoide, fórmulas que tienen poco interés. En cuanto al campo homogéneo en el interior del elipsoide, este campo se puede hallar sin escribir de hecho las condiciones de contorno, utilizando en vez de éstas algunos resultados que ya conocemos.

Supongamos primero que el elipsoide se encuentra en el vacío ($\epsilon^{(e)} = 1$). Entonces entre los vectores $\mathbf{E}'^{(i)}$, $\mathbf{D}^{(i)}$, \mathbf{E} (que tienen todos la misma dirección, la del eje x) debe existir una relación lineal del tipo

$$a\mathbf{E}_x + b\mathbf{D}_x = \mathbf{E}_x,$$

donde los coeficientes a, b dependen no de la permitividad $\epsilon^{(i)}$ del elipsoide, sino solamente de su forma. La existencia de esta relación se sigue de la estructura de las condiciones de contorno, como hemos comprobado ya antes en los ejemplos de la esfera y del cilindro.

Para determinar a y b observemos que, en el caso particular trivial en que $\epsilon^{(i)} = 1$, sería simplemente $\mathbf{E} = \mathbf{D} = \mathbf{E}$; de aquí se sigue $a+b = 1$. Otro caso particular que ya conocemos es el de un elipsoide conductor. En un conductor $\mathbf{E}^{(i)} = 0$ y aun-

que el desplazamiento $\mathbf{D}^{(i)}$ no tiene un significado físico inmediato, puede considerarse como una magnitud formal vinculada con el momento dipolar total del elipsoide por la igualdad

$$\mathbf{D} = 4\pi\mathbf{P} = 4\pi\mathcal{P}/V.$$

Según (4.26) será, en estas condiciones,

$$D_x = \mathfrak{E}_x/n^{(x)},$$

es decir, el coeficiente $b = n^{(x)}$ y, por lo tanto, $a = 1 - n^{(x)}$.

Así pues, llegamos a la siguiente igualdad*:

$$(1 - n^{(x)}) E^{(i)}_x + n^{(x)} D^{(i)}_x = \mathfrak{E}_x. \quad (8.7)$$

Exactamente las mismas relaciones, pero con otros coeficientes, valen para el campo a lo largo de los ejes y y z . Al igual que las fórmulas particulares (8.1) y (8.3), son correctas sea cual sea la forma de la dependencia entre \mathbf{E} y \mathbf{D} dentro del elipsoide.

Para la intensidad del campo dentro de un elipsoide se obtiene a partir de (8.7), haciendo $D_x^{(i)} = \epsilon^{(i)} E_x^{(i)}$:

$$E^{(i)}_x = \mathfrak{E}_x/[1 + (\epsilon^{(i)} - 1)n^{(x)}], \quad (8.8)$$

y el momento dipolar total del elipsoide vale

$$\mathcal{P}_x = VP_x = (\epsilon^{(i)} - 1)VE^{(i)}_x/4\pi = \frac{1}{3}abc(\epsilon^{(i)} - 1)\mathfrak{E}_x/[1 + (\epsilon^{(i)} - 1)n^{(x)}]. \quad (8.9)$$

Si el campo \mathfrak{E} tiene componentes no nulas respecto de los tres ejes, el campo en el interior del elipsoide será, como antes, homogéneo, pero, en general, no paralelo a \mathfrak{E} . Sin presuponer la elección del sistema de coordenadas, la relación (8.7) puede escribirse en el caso general en la forma

$$E^{(i)}_i + n_{ik}(D^{(i)}_k - E^{(i)}_k) = \mathfrak{E}_i. \quad (8.10)$$

El paso al caso de un medio con permitividad diferente de 1 se lleva a cabo simplemente substituyendo $\epsilon^{(i)}$ por $\epsilon^{(i)}/\epsilon^{(e)}$. Al hacerlo, la fórmula (8.7) toma la forma:

$$(1 - n^{(x)})\epsilon^{(e)}E^{(i)}_x + n^{(x)}D^{(i)}_x = \epsilon^{(e)}\mathfrak{E}_x. \quad (8.11)$$

Esta fórmula se puede aplicar, en particular, al campo dentro de una cavidad elipsoidal en un medio dieléctrico infinito; para ello hay que hacer $\epsilon^{(i)} = 1$.

* Ésta puede escribirse también en la forma

$$E^{(i)}_x = \mathfrak{E}_x - 4\pi n^{(x)}P_x.$$

La magnitud $4\pi n^{(x)}P_x$ se llama a veces *campo despolarizante*. Una fórmula análoga es válida para un elipsoide magnetizado en un campo magnético homogéneo exterior (véase § 27). Las magnitudes $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ se llaman entonces *coeficientes de desmagnetización*.

PROBLEMAS*

1. Determinar el momento de las fuerzas que actúan sobre un elipsoide de rotación en un campo eléctrico homogéneo.

Solución. De acuerdo con la fórmula general (16.13), el momento de las fuerzas que actúan sobre el elipsoide es $K = \mathcal{P} \times \mathbf{E}$, donde \mathcal{P} es el momento dipolar del elipsoide. En un elipsoide de rotación el vector \mathcal{P} se encuentra en el plano que pasa por el eje de simetría y es paralelo a la dirección de \mathbf{E} . El momento de las fuerzas, en cambio, resulta perpendicular a este plano y para su módulo el cálculo, mediante las fórmulas (8.9), da

$$K = \frac{(\epsilon - 1)^2 |1 - 3n| \mathbf{E}^2 V \sin 2\alpha}{8\pi[n\epsilon + 1 - n][(1 - n)\epsilon + 1 + n]},$$

donde α es el ángulo formado por \mathbf{E} y el eje de simetría del elipsoide, y n es el coeficiente de despolarización a lo largo de este eje (de modo que el coeficiente de despolarización en las direcciones perpendiculares al mismo son iguales a $\frac{1}{2}(1-n)$). El momento de las fuerzas tiene una dirección tal que tiende a hacer girar el eje de simetría de un elipsoide alargado ($n < 1/3$) o de uno achatado ($n > 1/3$) de modo que pase a ser paralelo o perpendicular al campo, respectivamente.

Para un elipsoide conductor ($\epsilon \rightarrow \infty$) tenemos

$$\mathbf{K} = \frac{|1 - 3n|}{8\pi n(1 - n)} V \mathbf{E}^2 \sin 2\alpha.$$

2. Una esfera de dieléctrico hueca (constante dieléctrica ϵ , radios interior y exterior b y a) se encuentra en un campo eléctrico exterior homogéneo \mathbf{E} . Determinar el campo en la cavidad de la esfera.

Solución. De manera análoga a como se procedió en el texto para una esfera maciza, buscemos para el potencial del campo en el vacío fuera de ella (región 1) y dentro de la cavidad (región 3) expresiones de la forma

$$\phi_1 = -\mathbf{E} \cos \theta (r - A/r^2), \quad \phi_3 = -B\mathbf{E} r \cos \theta,$$

respectivamente, y para el campo en la capa de dieléctrico (región 2), una del tipo

$$\phi_2 = -C\mathbf{E} \cos \theta (r - D/r^2),$$

donde A, B, C, D son constantes que se determinan a partir de las condiciones de continuidad de ϕ y de $\epsilon \partial \phi / \partial r$ en las fronteras 1-2 y 2-3. De esta manera, el campo $\mathbf{E}_3 = B\mathbf{E}$ dentro de la cavidad resulta ser homogéneo (en cambio, el campo \mathbf{E}_2 en el estrato esférico no es homogéneo). El cálculo de las constantes conduce al resultado:

$$\mathbf{E}_3 = 9\epsilon\mathbf{E}/[(\epsilon + 2)(2\epsilon + 1) - 2(\epsilon - 1)^2(b/a)^3].$$

3. El mismo problema para un cilindro hueco en un campo homogéneo transversal**.

Solución. Es análoga a la del problema anterior y conduce al resultado:

$$\mathbf{E}_3 = 4\epsilon\mathbf{E}/[(\epsilon + 1)^2 - (\epsilon - 1)^2(b/a)^2].$$

* En los problemas de este párrafo se supone que el elipsoide se encuentra en el vacío.

** En un campo longitudinal, la respuesta es evidente: $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}$.

§ 9. Permitividad de una mezcla

Si la substancia de que se trata es una mezcla finamente dispersa (emulsión, mezcla de polvos, etc.), es posible considerar el campo eléctrico promediado en un volumen que es grande comparado con las distancias a que se aprecia el carácter heterogéneo del medio. Con relación a este campo promediado, la mezcla es un medio homogéneo e isótropo y como tal puede caracterizarse por determinados valores efectivos de la permitividad que designaremos por ϵ_{mez} . Si $\bar{\mathbf{E}}$ y $\bar{\mathbf{D}}$ son la intensidad y el desplazamiento del campo promediados conforme se ha indicado, por la definición de ϵ_{mez} será

$$\bar{\mathbf{D}} = \epsilon_{mez} \bar{\mathbf{E}}. \quad (9.1)$$

Si todas las partículas de la mezcla son isótropas y las diferencias entre sus permitividades son pequeñas comparadas con los propios valores de ϵ , resulta posible calcular de forma general ϵ_{mez} con una precisión de hasta términos de segundo orden respecto de dichas diferencias.

Escribamos el valor local de la intensidad del campo en la forma $\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E}$, y el valor local de la permitividad, en la forma $\epsilon = \bar{\epsilon} + \delta\epsilon$, donde

$$\bar{\epsilon} = (1/V) \int \epsilon dV \quad (9.2)$$

se obtiene promediando en todo el volumen. Entonces el valor medio del desplazamiento será

$$\bar{\mathbf{D}} = (\bar{\epsilon} + \delta\epsilon)(\bar{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E}) = \bar{\epsilon}\bar{\mathbf{E}} + \delta\epsilon\bar{\mathbf{E}} \quad (9.3)$$

(dado que, por la definición de $\delta\epsilon$ y $\delta\mathbf{E}$, sus valores medios son iguales a cero). En la aproximación de orden cero es $\epsilon_{mez} = \bar{\epsilon}$; el primer término correctivo no nulo será, naturalmente, de segundo orden respecto de $\delta\epsilon$, como puede verse en (9.3).

De la ecuación no promediada $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, con una aproximación que se limita a los términos de primer orden, deducimos

$$\operatorname{div}[(\bar{\epsilon} + \delta\epsilon)(\bar{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E})] = \bar{\epsilon} \operatorname{div} \delta\mathbf{E} + \bar{\mathbf{E}} \cdot \operatorname{grad} \delta\epsilon = 0,$$

o bien, substituyendo aquí $\delta\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \delta\phi$,

$$\bar{\epsilon} \Delta \delta\phi = \bar{\mathbf{E}} \cdot \operatorname{grad} \delta\epsilon.$$

Aplicando a esta ecuación la operación grad , se obtendrá

$$\Delta \delta\mathbf{E} = -(1/\bar{\epsilon})(\bar{\mathbf{E}} \cdot \operatorname{grad}) \operatorname{grad} \delta\epsilon. \quad (9.4)$$

El promedio del producto $\delta\epsilon\delta\mathbf{E}$ en (9.3) lo efectuaremos en dos etapas. Ante todo, calcularemos el valor medio respecto del volumen de las partículas de una misma substancia, es decir, para un valor dado de $\delta\epsilon$. El valor medio así calculado de $\delta\mathbf{E}$ se obtiene fácilmente a partir de la ecuación (9.4). En efecto, dada la isotropía de la mezcla en conjunto, después de promediar los dos miembros de la igual-

dad (9.4), el operador $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}$ en el segundo miembro pasa a ser

$$\frac{1}{3} \delta_{ik} \Delta,$$

de modo que se obtiene

$$\Delta \bar{\mathbf{E}} = -(1/3\bar{\epsilon}) \bar{\mathbf{E}} \Delta \epsilon,$$

de donde

$$\bar{\mathbf{E}} \delta \epsilon = -(1/3\bar{\epsilon}) \bar{\mathbf{E}} \Delta \epsilon.$$

Multiplicando por $\delta \epsilon$ y calculando el último promedio para todas las componentes de la mezcla, obtendremos

$$\bar{\epsilon} \delta \bar{\mathbf{E}} = -(1/3\bar{\epsilon}) \bar{\mathbf{E}} (\bar{\delta \epsilon})^2.$$

Finalmente, substituyendo esta expresión en (9.3) y comparando con (9.1) se llega al resultado buscado:

$$\epsilon_{mez} = \bar{\epsilon} - (1/3\bar{\epsilon}) (\bar{\delta \epsilon})^2. \quad (9.5)$$

Esta fórmula puede presentarse también en otra forma si se observa que, con una precisión de segundo orden, se tiene

$$\bar{\epsilon}^{\frac{1}{3}} = (\bar{\epsilon} + \delta \epsilon)^{\frac{1}{3}} = \bar{\epsilon}^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{(\bar{\delta \epsilon})^2}{9\bar{\epsilon}^2} \right);$$

por lo tanto,

$$\epsilon_{mez}^{\frac{1}{3}} = \bar{\epsilon}^{\frac{1}{3}}. \quad (9.6)$$

Cabe decir, por lo tanto, que en la aproximación considerada resulta ser aditiva la raíz cúbica de ϵ .

PROBLEMA

Determinar la permitividad de una emulsión, de concentración pequeña, para una diferencia arbitraria entre las permitividades del medio (ϵ_1) y de la fase dispersa (ϵ_2).

Solución. En la integral

$$\frac{1}{V} \int (\mathbf{D} - \epsilon_1 \mathbf{E}) dV \equiv \bar{\mathbf{D}} - \epsilon_1 \bar{\mathbf{E}}$$

el integrando es diferente de cero únicamente dentro de las partículas de la emulsión. Por ello, es proporcional a la concentración volumétrica c de la misma y al calcularla se puede considerar que las partículas de la emulsión se encuentran en un campo exterior igual al campo promedio $\bar{\mathbf{E}}$. Suponiendo que las partículas son esféricas y utilizando la fórmula (8.2), obtendremos para el coeficiente de proporcionalidad entre $\bar{\mathbf{D}}$ y $\bar{\mathbf{E}}$:

$$\epsilon_{mez} = \epsilon_1 + 3c\epsilon_1(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_2 + 2\epsilon_1).$$

Esta fórmula es válida con una precisión de primer orden respecto de c . Para valores próximos de

ϵ_1 y ϵ_2 , coincide (dentro de una aproximación de primer orden respecto de c y de segundo respecto de $\epsilon_2 - \epsilon_1$) con el resultado que da para pequeños valores de c la fórmula (9.6).

§ 10. Relaciones termodinámicas para los dieléctricos en un campo eléctrico

La cuestión de cómo varían las propiedades termodinámicas debido a la existencia de un campo eléctrico no se plantea en el caso de los conductores. Dado que el campo eléctrico no existe dentro de un conductor, todas las variaciones de sus magnitudes termodinámicas se reducen, simplemente, a añadir a su energía total la energía del campo que crea en el espacio que lo rodea*. Esta cantidad no depende del estado termodinámico del cuerpo (en particular, de su temperatura) y así, por ejemplo, no se manifiesta en su entropía.

Por el contrario, un campo eléctrico penetra en el interior de un dieléctrico y ejerce así una profunda influencia sobre sus propiedades termodinámicas. Para estudiar estos efectos determinemos, en primer lugar, el trabajo realizado sobre un dieléctrico aislado térmicamente como consecuencia de una variación infinitesimal del campo en él.

El campo eléctrico en que se encuentra el dieléctrico hay que imaginarlo como determinado por ciertos conductores cargados externos, y la variación del campo se puede entonces considerar como resultado de una variación de las cargas de los conductores**. Para simplificar, supondremos que se tiene solamente un conductor con carga e y potencial ϕ . El trabajo que hay que realizar para aumentar su carga en la cantidad infinitesimal δe es igual a

$$\delta R = \phi \delta e; \quad (10.1)$$

éste es precisamente el trabajo mecánico que efectúa el campo dado sobre una carga δe al transportarla desde el infinito (donde el potencial del campo es igual a cero) hasta la superficie del conductor y que experimenta, en consecuencia, una diferencia de potencial igual a ϕ . Representemos δR en una forma que lo exprese en función del campo en el espacio que rodea al conductor y ocupado por el dieléctrico.

Si D_n es la proyección del vector desplazamiento eléctrico sobre la dirección de la normal a la superficie del conductor, exterior respecto del dieléctrico (e interior con relación al conductor), la densidad superficial de carga sobre el conductor es igual a $-D_n/4\pi$, de modo que

$$e = -\frac{1}{4\pi} \oint D_n df = -\frac{1}{4\pi} \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f}.$$

* Prescindimos aquí de la energía de enlace de la carga con la materia del conductor; esta energía se estudiará en el § 22.

** Las expresiones finales que obtendremos contienen solamente los valores del campo dentro del dieléctrico y no dependen así de cuál sea el origen del campo. Teniendo esto en cuenta, no será necesario mencionar de manera especial los casos en que el campo es creado no por conductores cargados, sino, por ejemplo, por cargas extrañas introducidas en el propio dieléctrico o bien por su polarización pirotécnica (véase § 13).

Teniendo en cuenta que el potencial ϕ es constante en toda la superficie del conductor, escribiremos

$$\delta R = \phi \delta e = -\frac{1}{4\pi} \oint \phi \delta \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = -\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div}(\phi \delta \mathbf{D}) dV.$$

La última integral a la derecha se extiende a todo el volumen exterior al conductor. Dado que el campo variado, al igual que el inicial, satisface las ecuaciones del campo, se tiene $\operatorname{div} \delta \mathbf{D} = 0$, y, por lo tanto,

$$\operatorname{div}(\phi \delta \mathbf{D}) = \phi \operatorname{div} \delta \mathbf{D} + \delta \mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} \phi = -\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}.$$

Obtenemos en definitiva de esta manera la importante fórmula que sigue:

$$\delta R = \int (\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} / 4\pi) dV. \quad (10.2)$$

Hay que subrayar que la integración en ella se extiende a todo el campo, en particular también a la región ocupada por el vacío si el medio dieléctrico no ocupa todo el espacio fuera del conductor.

El trabajo efectuado sobre un cuerpo aislado térmicamente no es sino la variación de la energía del mismo manteniendo constante su entropía. Por consiguiente, la expresión (10.2) que hemos hallado debe incluirse en la relación termodinámica que determina la variación infinitesimal de la energía total del cuerpo, que comprende también la energía del campo eléctrico. Designando esta energía por \mathcal{U} , tenemos, por lo tanto,

$$\delta \mathcal{U} = T \delta S + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV \quad (10.3)$$

(T es la temperatura y S la entropía del cuerpo)*. En consecuencia, para la energía libre total $\mathcal{F} = \mathcal{U} - TS**$ resulta

$$\delta \mathcal{F} = -S \delta T + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV. \quad (10.4)$$

Relaciones termodinámicas análogas pueden escribirse también para las magnitudes referidas a la unidad de volumen del cuerpo. Sean U , S y ρ la energía interna, la entropía y la masa por unidad de volumen del cuerpo. Como es sabido, la relación termodinámica ordinaria (cuando no existe campo) para la energía interna en el volumen dado se escribe:

$$dU = TdS + \zeta d\rho,$$

* En lo que concierne al volumen del cuerpo (cuya diferencial se suele incluir en la expresión de $\delta \mathcal{U}$), no hay que perder de vista que en un campo eléctrico el cuerpo pasa a ser, en general, no homogéneo y que, por ello, su volumen no caracteriza ya su estado.

** Sólo tiene sentido considerar esta magnitud en el caso en que la temperatura del cuerpo es constante en todo él.

donde ζ es el potencial químico de la substancia*. Cuando en un dieléctrico existe campo, hay que añadir a ella un término que procede del integrando en (10.3):

$$dU = T dS + \zeta d\rho + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}/4\pi. \quad (10.5)$$

Para la energía libre $F = U - TS$ de la unidad de volumen del dieléctrico tenemos, según esto,

$$dF = -SdT + \zeta d\rho + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}/4\pi. \quad (10.6)$$

Las relaciones así obtenidas constituyen la base de la termodinámica de los dieléctricos.

Vemos, por lo tanto, que las magnitudes U y F son los potenciales termodinámicos respecto de las variables S , ρ , \mathbf{D} y T , ρ , \mathbf{D} , respectivamente. En particular, se puede obtener la intensidad del campo derivando estos potenciales respecto de las componentes del vector \mathbf{D} :

$$\mathbf{E} = 4\pi(\partial U/\partial \mathbf{D})_{S,\rho} = 4\pi(\partial F/\partial \mathbf{D})_{T,\rho}. \quad (10.7)$$

La utilización de la energía libre resulta más conveniente desde este punto de vista, ya que su derivada debe calcularse manteniendo constante la temperatura, mientras que la energía interna hay que expresarla en función de la entropía, lo que es menos fácil.

Junto con U y F conviene introducir los potenciales termodinámicos en los que representan el papel de variables independientes las componentes del vector \mathbf{E} , y no las de \mathbf{D} . Tales son las magnitudes

$$\tilde{U} = U - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/4\pi, \quad \tilde{F} = F - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/4\pi, \quad (10.8)$$

para cuyas diferenciales tenemos

$$\begin{aligned} d\tilde{U} &= T dS + \zeta d\rho - \mathbf{D} \cdot d\mathbf{E}/4\pi, \\ d\tilde{F} &= -SdT + \zeta d\rho - \mathbf{D} \cdot d\mathbf{E}/4\pi. \end{aligned} \quad (10.9)$$

En particular, de aquí se sigue

$$\mathbf{D} = -4\pi(\partial \tilde{U}/\partial \mathbf{E})_{S,\rho} = -4\pi(\partial \tilde{F}/\partial \mathbf{E})_{T,\rho}. \quad (10.10)$$

Conviene hacer observar que la relación entre las magnitudes termodinámicas que hemos designado mediante letras con el símbolo \sim y sin él, coincide precisamente con la que ya se introdujo en el § 5 para la energía del campo electrostático

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 24. En vez de la densidad de masa se utilizó el número de partículas N por unidad de volumen, ligado con la densidad por la igualdad $\rho = Nm$ (m es la masa de una molécula); en relación con esto, las definiciones del potencial químico en este y en aquel libro difieren en un factor (el potencial químico se refiere ahora a la unidad de masa, y no a una partícula de materia).

El potencial químico lo designaremos aquí por la letra ζ en vez de la notación corriente μ ; designar la densidad de masa de la substancia por la misma letra ρ que la densidad de carga no puede conducir a confusión dado que estas magnitudes nunca figurarán juntas.

de los conductores en el vacío. En efecto, la integral $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV$ se puede transformar de manera exactamente análoga a como hicimos al principio del § 2, utilizando para ello la ecuación $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ en el volumen del dieléctrico y la condición de contorno $D_n = 4\pi\sigma$ sobre la superficie de los conductores:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV &= -\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{grad} \phi \cdot \mathbf{D} dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_a \int \phi_a D_n df = \sum_a \phi_a e_a. \end{aligned} \quad (10.11)$$

En consecuencia, por ejemplo, para la energía interna se tiene:

$$\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} - \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{4\pi} dV = \mathcal{U} - \sum_a \phi_a e_a, \quad (10.12)$$

lo que corresponde a la definición (5.5).

Es útil establecer también las fórmulas para variaciones infinitesimales de estas cantidades expresándolas en función de la carga y del potencial de los conductores (que son las fuentes del campo). Así, para la variación de la energía libre (a una temperatura dada), se tiene

$$(\delta \mathcal{F})_T = \delta R = \sum_a \phi_a \delta e_a. \quad (10.13)$$

Para la variación de \mathcal{F} obtendremos, en cambio,

$$(\delta \tilde{\mathcal{F}})_T = (\delta \mathcal{F})_T - \delta \sum_a \phi_a e_a = - \sum_a e_a \delta \phi_a. \quad (10.14)$$

Cabe decir que las magnitudes sin el símbolo \sim son potenciales termodinámicos respecto de las cargas de los conductores, y las magnitudes con el símbolo \sim , respecto de sus potenciales.

Como es sabido por termodinámica*, los diferentes potenciales termodinámicos poseen la propiedad de alcanzar en el estado de equilibrio térmico un mínimo con relación a las diferentes variaciones posibles del estado del cuerpo. Al formular estas condiciones de equilibrio en un campo eléctrico, es necesario indicar si se consideran las variaciones del estado manteniendo constantes las cargas o manteniendo constantes los potenciales de los conductores, que son las fuentes del campo. Así, \mathcal{F} y $\tilde{\mathcal{F}}$ poseen en el equilibrio un mínimo respecto de las variaciones del estado que tienen lugar a temperatura constante y para cargas constantes o potenciales constantes de los conductores, respectivamente (lo mismo vale para \mathcal{U} y $\tilde{\mathcal{U}}$ en el caso en que se mantenga constante la entropía del cuerpo).

Si en un cuerpo pueden ocurrir procesos que no tienen una relación directa con el campo eléctrico (por ejemplo, las reacciones químicas), la condición de equilibrio respecto de estos procesos viene determinada por el mínimo de F para temperatura

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 15.

y densidad dadas del cuerpo y del desplazamiento \mathbf{D} en él, o por el mínimo de \tilde{F} cuando son constantes la densidad, la temperatura y la intensidad del campo \mathbf{E} .

Hasta aquí no hemos hecho hipótesis alguna acerca de la dependencia de \mathbf{D} respecto de \mathbf{E} , de forma que todas las relaciones termodinámicas obtenidas conservan su validez sea cual sea el carácter de esta dependencia. Apliquémoslas ahora a un dieléctrico isótropo, con la dependencia lineal $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. En este caso la integración de las relaciones (10.5) y (10.6) da

$$\begin{aligned} U &= U_0(S, \rho) + D^2/8\pi\epsilon, \\ F &= F_0(T, \rho) + D^2/8\pi\epsilon, \end{aligned} \quad (10.15)$$

donde U_0 y F_0 se refieren al dieléctrico cuando no hay campo. De esta manera, en el caso considerado, la magnitud

$$D^2/8\pi\epsilon = \epsilon E^2/8\pi = ED/8\pi$$

representa la variación de la energía interna (para valores dados de la entropía y de la densidad), o la variación de la energía libre (para temperatura y densidad dadas) por unidad de volumen del medio dieléctrico, debidas a la existencia de un campo.

Las expresiones análogas para los potenciales \tilde{U} y \tilde{F} son:

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= U_0(S, \rho) - \epsilon E^2/8\pi, \\ \tilde{F} &= F_0(T, \rho) - \epsilon E^2/8\pi. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Vemos, pues, que las diferencias $U - U_0$ y $\tilde{U} - U_0$ difieren en este caso tan sólo en el signo, al igual que ocurría también para el campo eléctrico en el vacío (§ 5). En un medio dieléctrico, sin embargo, esta simple expresión es válida solamente cuando la relación entre \mathbf{D} y \mathbf{E} es lineal.

Escribamos también, para ulteriores referencias, las fórmulas que dan la densidad de entropía S y del potencial químico de la substancia ζ , fórmulas que se siguen de (10.15):

$$\begin{aligned} S &= - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{\rho, D} = S_0(T, \rho) + \frac{D^2}{8\pi\epsilon^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_\rho \\ &= S_0(T, \rho) + \frac{E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_\rho, \end{aligned} \quad (10.17)$$

$$\zeta = \left(\frac{\partial F}{\partial \rho} \right)_{T, D} = \zeta_0(T, \rho) - \frac{E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T. \quad (10.18)$$

Estas dos cantidades son diferentes de cero, naturalmente, tan sólo dentro del dieléctrico.

La energía libre total se obtiene integrando (10.15) en todo el espacio. Teniendo

en cuenta (10.11), resulta

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV / 8\pi = \frac{1}{2} \sum e_a \phi_a. \quad (10.19)$$

Esta última expresión coincide formalmente con la fórmula para la energía del campo electrostático de los conductores en el vacío. Al mismo resultado cabe llegar también de manera inmediata partiendo de la variación $\delta\mathcal{F}$ (10.13) correspondiente a una variación infinitesimal de las cargas de los conductores. En el presente caso, cuando la relación entre \mathbf{D} y \mathbf{E} es lineal, todas las ecuaciones del campo y las condiciones de contorno impuestas al mismo son lineales. Por ello, los potenciales de los conductores deben ser (como en el caso de un campo en el vacío) funciones lineales de sus cargas y la integración de la igualdad (10.13) conduce a (10.19).

Hay que subrayar que en todos estos razonamientos no se ha supuesto en modo alguno que el dieléctrico ocupe todo el espacio fuera de los conductores. Si efectivamente lo ocupa, cabe todavía ir más allá, utilizando los resultados expuestos al final de § 7, y afirmar lo que sigue. Para cargas dadas de los conductores, la introducción de un medio dieléctrico divide por ϵ tanto los potenciales de los conductores como la energía del campo (en comparación con los valores de estas cantidades para el campo en el vacío). En cambio, si se mantienen constantes los potenciales de los conductores, la energía del campo queda multiplicada por ϵ (junto con las cargas de los mismos).

PROBLEMA

Determinar la altura h que alcanza el nivel de un líquido introducido en un condensador plano vertical.

Solución. Para potenciales dados de las armaduras del condensador, \mathcal{F} debe ser mínima, magnitud ésta en la cual hay que incluir la energía $\rho gh^2/2$ de la columna de líquido en el campo de la gravedad. A partir de esta condición se obtiene fácilmente

$$h = (\epsilon - 1) E^2 / 8\pi \rho g.$$

§ 11. Energía libre total de un dieléctrico

La energía libre total \mathcal{F} (o la energía total interna \mathcal{U}), tal como se definió en el párrafo que precede, incluye también la energía del campo eléctrico exterior que polariza al dieléctrico. A la vez que esta magnitud, tiene sentido considerar la energía libre total de la que se excluye la energía del campo que existiría en todo el espacio de no haber el cuerpo. Designaremos la intensidad de este último por \mathfrak{E} . Entonces la energía libre «total», en el sentido indicado, es igual a la integral

$$\int (F - \mathfrak{E}^2 / 8\pi) dV, \quad (11.1)$$

donde F es la «densidad» de energía libre. Designaremos aquí esta magnitud con la misma letra \mathcal{F} que designaba en el § 10 a la integral $\int F dV$. Hay que subrayar que la diferencia entre las dos definiciones de \mathcal{F} se reduce a una cantidad que no

depende ni del estado termodinámico ni de las propiedades del dieléctrico y que, por ello, en modo alguno se refleja en las relaciones diferenciales termodinámicas básicas que valen para esta magnitud*.

Calculemos la variación de \mathcal{F} que resulta de una variación infinitesimal del campo que tiene lugar a temperatura constante y sin alterar el equilibrio termodinámico del medio.

Dado que $\delta F = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}$, tenemos

$$\delta \mathcal{F} = \int (\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} - \mathbf{G} \cdot \delta \mathbf{G}) dV / 4\pi.$$

Esta expresión se puede escribir también de manera idéntica en la forma

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} = & \int (\mathbf{D} - \mathbf{G}) \cdot \delta \mathbf{G} dV / 4\pi + \\ & + \int \mathbf{E} \cdot (\delta \mathbf{D} - \delta \mathbf{G}) dV / 4\pi - \int (\mathbf{D} - \mathbf{E}) \cdot \delta \mathbf{G} dV / 4\pi. \end{aligned} \quad (11.2)$$

En la primera integral haremos $\delta \mathbf{G} = -\text{grad } \delta \phi_0$ (donde ϕ_0 es el potencial del campo \mathbf{G}) y la transformaremos integrando por partes:

$$\int \text{grad} \delta \phi_0 \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{G}) dV = \oint \delta \phi_0 (\mathbf{D} - \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{f} - \int \delta \phi_0 \text{div}(\mathbf{D} - \mathbf{G}) dV.$$

Es fácil ver que las dos integrales en el segundo miembro de la igualdad se anulan. Para la integral de volumen esto se sigue desde luego de las ecuaciones $\text{div } \mathbf{D} = 0$ y $\text{div } \mathbf{G} = 0$ a las que satisfacen el desplazamiento en el dieléctrico y el campo en el vacío, respectivamente. La primera integral, por otra parte, se extiende a la superficie de los conductores que crean el campo y sobre una superficie infinitamente alejada. Esta última integral se reduce, como de ordinario, a cero, y sobre cada uno de los conductores se tiene $\delta \phi_0 = \text{const}$, de modo que

$$\oint \delta \phi_0 (\mathbf{D} - \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{f} = \delta \phi_0 \oint (\mathbf{D} - \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{f}.$$

Pero el campo \mathbf{G} , por definición, viene determinado exactamente por las mismas fuentes que el campo \mathbf{E} y el desplazamiento \mathbf{D} (es decir, por los mismos conductores con las cargas e totales dadas sobre ellos). En consecuencia, las dos integrales $\oint D_n d\mathbf{f}$ y $\oint G_n d\mathbf{f}$ son iguales a una misma cantidad, $4\pi e$, y su diferencia es nula.

De manera análoga cabe comprobar que es nulo también el segundo término en (11.2) (para ello hacemos en él $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ y aplicamos la misma transformación). En definitiva se obtiene

$$\delta \mathcal{F} = - \int (\mathbf{D} - \mathbf{E}) \cdot \delta \mathbf{G} dV / 4\pi = - \int \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{G} dV. \quad (11.3)$$

Obsérvese que en esta expresión la integral se extiende tan sólo al volumen ocupado por el medio dieléctrico, ya que fuera del cuerpo es $\mathbf{P} = 0$.

* Obsérvese que restar de F la cantidad $E^2/8\pi$ carecería de sentido, puesto que \mathbf{E} es el campo ya modificado por la presencia del dieléctrico y, por ello, en cualquier caso sería imposible considerar la diferencia $F - (E^2/8\pi)$ como densidad de energía libre del dieléctrico como tal.

Sin embargo, hay que subrayar que el integrando $\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{E}$ no puede interpretarse como variación de la «densidad» de energía libre del cuerpo de manera análoga a como se hizo en relación con las fórmulas (10.3) y (10.4). Ante todo, esta «densidad» debe existir incluso fuera del cuerpo, ya que su presencia altera el campo también en el espacio en torno. Es claro asimismo que la densidad de energía en cada punto del cuerpo sólo puede depender del campo que realmente existe en él, y no del campo que habría en dicho punto en ausencia del cuerpo.

Si el campo exterior \mathbf{E} es homogéneo, se tendrá

$$\delta \mathcal{F} = -\delta \mathbf{E} \cdot \int \mathbf{P} dV = -\mathcal{P} \cdot \delta \mathbf{E}, \quad (11.4)$$

donde \mathcal{P} es el momento dipolar eléctrico total del cuerpo. Por consiguiente, la identidad termodinámica para la energía libre se puede escribir en el presente caso en la forma

$$d\mathcal{F} = -\mathcal{P}dT - \mathcal{P} \cdot d\mathbf{E}. \quad (11.5)$$

El momento eléctrico total del cuerpo se puede obtener, en consecuencia, derivando la energía libre total:

$$\mathcal{P} = -(\partial \mathcal{F} / \partial \mathbf{E})_T. \quad (11.6)$$

Obsérvese que es posible llegar a la última fórmula de manera inmediata a partir de la fórmula estadística general

$$\overline{\partial \hat{\mathcal{H}} / \partial \lambda} = (\partial \mathcal{F} / \partial \lambda)_T,$$

donde $\hat{\mathcal{H}}$ es el hamiltoniano del cuerpo como sistema constituido por las partículas que lo forman y λ un parámetro cualquiera que caracterice las condiciones externas en que se halla el cuerpo*. Para un cuerpo que se encuentre en un campo homogéneo exterior \mathbf{E} , el hamiltoniano contiene el término $-\mathbf{E} \cdot \hat{\mathcal{P}}$, donde $\hat{\mathcal{P}}$ es el operador momento dipolar y, eligiendo \mathbf{E} como parámetro λ , obtendremos la fórmula buscada.

Si \mathbf{D} y \mathbf{E} están ligados entre sí por la relación lineal $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, de manera análoga se puede calcular en forma explícita no sólo la variación $\delta \mathcal{F}$, sino el propio valor de \mathcal{F} . Tenemos

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{E}^2) dV / 8\pi.$$

Esta expresión se escribe idénticamente en la forma

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \int (\mathbf{E} + \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{G}) dV / 8\pi - \int \mathbf{G} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{E}) dV / 8\pi.$$

El primer término del segundo miembro de la igualdad se anula, como puede comprobarse haciendo en él $\mathbf{E} + \mathbf{G} = -\text{grad}(\phi + \phi_0)$ y efectuando una transformación exactamente análoga a la realizada más arriba. Obtenemos en consecuencia:

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0(V, T) = -\frac{1}{2} \int \mathbf{G} \cdot \mathbf{P} dV. \quad (11.7)$$

* Véase vol. V, *Física estadística*, §§ 11, 15.

En particular, en un campo exterior homogéneo

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0(V, T) = -\frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}. \quad (11.8)$$

La última igualdad se podría obtener también mediante integración directa de la igualdad (11.3) si se tiene en cuenta que, en virtud del carácter lineal de todas las ecuaciones del campo (cuando $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$), el momento eléctrico \mathbf{P} debe ser función lineal de \mathbf{E} .

La dependencia lineal entre las componentes de \mathbf{P} y \mathbf{E} puede escribirse en la forma

$$P_i = V\alpha_{ik}E_k, \quad (11.9)$$

análogamente a como hicimos en el caso de los conductores (§ 2). Sin embargo, cuando no existen conductores la «polarizabilidad» del cuerpo dieléctrico depende no sólo de su forma, sino también de su constante dieléctrica. El carácter simétrico del tensor α_{ik} (carácter que hemos recordado ya en el § 2) se sigue inmediatamente de la relación (11.6); basta observar que la derivada segunda

$$\partial^2\mathcal{F}/\partial E_k \partial E_i = -\partial P_i/\partial E_k = -V\alpha_{ik}$$

no depende del orden de derivación.

La fórmula (11.7) se simplifica todavía más en el caso importante en que ϵ difiere poco de 1, es decir, cuando la susceptibilidad dieléctrica $\kappa = (\epsilon - 1)/4\pi$ es pequeña. En este caso, al calcular la energía se puede prescindir de la deformación del campo provocada por la presencia del cuerpo, esto es, hacer

$$\mathbf{P} = \kappa\mathbf{E} \approx \kappa\mathbf{E}.$$

Entonces

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = -\frac{1}{2}\kappa \int \mathbf{E}^2 dV, \quad (11.10)$$

donde la integral se extiende a todo el volumen del cuerpo. En un campo homogéneo, el momento dipolar $P = V\kappa E$, y la energía libre es

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = -\frac{1}{2}\kappa V\mathbf{E}^2. \quad (11.11)$$

En el caso general de dependencia arbitraria de \mathbf{D} respecto de \mathbf{E} no son aplicables las fórmulas sencillas (11.7) y (11.8). Para calcular \mathcal{F} puede ser entonces útil la fórmula

$$\mathcal{F} = \int \left(F - \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} \right) dV = \int \left[F - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi} - \frac{1}{2}\mathbf{P} \cdot \mathbf{E} \right] dV \quad (11.12)$$

cuya deducción es evidente después de efectuados los cálculos que preceden. También aquí el integrando (en la última integral) se anula fuera del cuerpo, de modo que la integración se extiende tan sólo al volumen ocupado por el mismo.

PROBLEMA

Obtener la fórmula que substituye a (11.7) para un cuerpo que se encuentra no en el vacío, sino en un medio de permeabilidad dieléctrica $\epsilon^{(e)}$.

Solución. Repitiendo para este caso las transformaciones realizadas en el texto, obtendremos

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot (\mathbf{D} - \epsilon^{(e)} \mathbf{E}) dV.$$

§ 12. Electrostricción de los dieléctricos isótropos

Para un dieléctrico sólido en un campo eléctrico es imposible introducir el concepto de presión tal como se hace para un cuerpo isótropo cuando no existe un campo, puesto que las fuerzas que actúan en él (que se determinarán en los §§ 15, 16) cambian de un punto a otro del mismo y son anisótropas incluso si el propio cuerpo es de por sí isótropo. Una determinación exacta de la deformación (de la llamada *electrostricción*) de un tal cuerpo exige resolver un problema complicado de la teoría de la elasticidad.

Con todo, el problema se simplifica considerablemente si tan sólo nos interesa la variación total del volumen del cuerpo. Conforme ya se indicó en el § 5, en estas condiciones se puede considerar que no varía la forma del cuerpo, es decir, cabe suponer que la deformación es una contracción o una dilatación uniforme.

Prescindiremos de las propiedades dieléctricas del medio exterior (por ejemplo, de la atmósfera) en que se encuentra el cuerpo considerado, es decir, supondremos que para él es $\epsilon = 1$. El papel del medio se reduce solamente a crear una presión uniforme que actúa sobre la superficie del cuerpo. Precisamente esta presión exterior es la que designaremos a continuación por p . Si \mathcal{F} es la energía libre total del cuerpo, según la conocida relación termodinámica se tendrá

$$p = -(\partial \mathcal{F} / \partial V)_T,$$

y, por lo tanto, en la expresión de la diferencial $d\mathcal{F}$ hay que añadir un término $-pdV$. Así, en un campo exterior homogéneo tenemos, en vez de (11.5),

$$d\mathcal{F} = -\mathcal{S}dT - p dV - \mathcal{P} \cdot d\mathbf{E}.$$

Introduzcamos el potencial termodinámico total del cuerpo de acuerdo con la definición termodinámica habitual:

$$\varphi p = \mathcal{F} + pV. \quad (12.1)$$

Para la diferencial de esta magnitud (en un campo exterior homogéneo) se tiene la igualdad

$$d\varphi p = -\mathcal{S}dT + Vdp - \mathcal{P} \cdot d\mathbf{E}. \quad (12.2)$$

La variación de las magnitudes termodinámicas en un campo eléctrico exterior

suelen ser relativamente pequeñas. Como es sabido*, una pequeña variación de la energía libre (para valores dados de T y V) y una pequeña variación del potencial termodinámico (para valores dados de T y p) son iguales entre sí. Por ello, junto con (11.8) se puede escribir la relación análoga

$$\varrho = \varrho_0 - \frac{1}{2} \mathfrak{E} \cdot \mathcal{P} \quad (12.3)$$

para el potencial termodinámico de un cuerpo en un campo homogéneo exterior. En ella ϱ_0 se refiere al cuerpo en ausencia del campo y para valores dados de p , T (mientras que \mathcal{F}_0 en (11.8) es la energía libre del cuerpo cuando no existe campo y para valores dados de V y T).

Expresando de manera explícita la dependencia del momento dipolar respecto de V y \mathfrak{E} según (11.9), podemos escribir también (12.3) en la forma

$$\varrho = \varrho_0(p, T) - \frac{1}{2} V \alpha_{ik} \mathfrak{E}_i \mathfrak{E}_k, \quad (12.4)$$

donde el término correctivo debe darse en función de la temperatura y de la presión de acuerdo con la ecuación de estado del cuerpo en ausencia de campo. Esta fórmula se simplifica particularmente en el caso en que la susceptibilidad dieléctrica de la materia es pequeña:

$$\varrho = \varrho_0(p, T) - \frac{1}{2} \kappa V \mathfrak{E}^2; \quad (12.5)$$

(cf. (11.11)).

La variación de volumen $V - V_0$ que se busca debida al campo exterior puede obtenerse ahora sin más que derivar ϱ respecto de la presión (manteniendo constantes T y \mathfrak{E}). Así, a partir de (12.5) se encuentra

$$V - V_0 = -\frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 [\partial(\kappa V)/\partial p]_T. \quad (12.6)$$

Esta magnitud puede ser positiva o negativa (en contraste con la electrostricción de los conductores, cuyo volumen siempre aumenta cuando se encuentran en un campo).

De manera análoga se puede calcular también la cantidad de calor Q que se absorbe en el dieléctrico al aplicar isotérmicamente un campo eléctrico exterior (manteniendo constante la presión exterior)**.

La derivación de $\varrho - \varrho_0$ respecto de la temperatura da la variación de entropía del cuerpo, y multiplicándola por T obtendremos la cantidad de calor buscada. Así, de (12.5) se sigue

$$Q = \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2 T [\partial(\kappa V)/\partial T]_p. \quad (12.7)$$

Los valores positivos de Q corresponden a absorción del calor.

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 15.

** Si, en cambio, el cuerpo está térmicamente aislado, el someterlo a la acción de un campo conduce a una variación de temperatura igual a $\Delta T = -Q/C_p$, donde C_p es la capacidad calorífica del cuerpo a presión constante.

PROBLEMAS

1. Determinar la variación de volumen y el efecto electrocalórico para un elipsoide dieléctrico en un campo eléctrico homogéneo paralelo a uno de sus ejes.

Solución. Según las fórmulas (12.3) y (8.9) tenemos

$$\varrho = \varrho_0 - \frac{V}{8\pi n\epsilon + 1 - n} \mathfrak{E}^2.$$

Para la variación de volumen se encuentra:

$$\frac{V - V_0}{V} = \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi n\epsilon + 1 - n} \left[\frac{1}{K} - \frac{1}{(n\epsilon + 1 - n)^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right)_T \right],$$

y para el efecto electrocalórico:

$$Q = \frac{TV\mathfrak{E}^2}{8\pi} \left[\frac{\epsilon - 1}{n\epsilon + 1 - n} \alpha + \frac{1}{(n\epsilon + 1 - n)^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p \right],$$

donde $\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$ es el coeficiente de compresibilidad del cuerpo y $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ su coeficiente de dilatación térmica.

En particular, para una placa circular planoparalela en un campo perpendicular a la misma es $n = 1$, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{V - V_0}{V} &= \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi} \left[\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{1}{K} - \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right)_T \right], \\ Q &= \frac{TV\mathfrak{E}^2}{8\pi} \left[\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \alpha + \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p \right]. \end{aligned}$$

Para la misma placa (o cualquier cuerpo cilíndrico) en un campo longitudinal es $n = 0$ y

$$\frac{V - V_0}{V} = \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi} \left[\frac{\epsilon - 1}{K} - \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right)_T \right], \quad Q = \frac{TV\mathfrak{E}^2}{8\pi} \left[(\epsilon - 1)\alpha + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p \right].$$

2. Determinar la diferencia entre la capacidad calorífica \mathcal{C}_ϕ de una placa circular planoparalela en un campo perpendicular a la misma, para una diferencia de potenciales constante entre sus caras, y la capacidad calorífica \mathcal{C}_D cuando el desplazamiento eléctrico es constante; en ambos casos se mantiene constante la presión exterior*.

Solución. Según los resultados del problema 1 la entropía de la placa circular es

$$\mathcal{S} = - \left(\frac{\partial \varrho}{\partial T} \right)_p \mathfrak{E} = \mathcal{S}_0(p, T) + \frac{V\mathfrak{E}^2}{8\pi} \left[\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \alpha + \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p \right].$$

La inducción del campo dentro de la placa coincide con el campo exterior: $D = \mathfrak{E}$. Por ello, para calcular la capacidad calorífica \mathcal{C}_D hay que derivar \mathcal{S} manteniendo constante \mathfrak{E} . La diferencia de potenciales entre las dos caras de la placa es $\phi = El = \mathfrak{E}l/\epsilon$, donde l es el grosor de la misma. En una contracción o dilatación uniforme del cuerpo, l varía proporcionalmente a $V^{1/3}$. Por consiguiente, para calcular la capacidad calorífica \mathcal{C}_ϕ hay que derivar \mathcal{S} manteniendo constante el producto $\mathfrak{E}V^{1/3}/\epsilon$. En definitiva, encontramos para la diferencia buscada:

$$\mathcal{C}_\phi - \mathcal{C}_D = \frac{TV\mathfrak{E}^2}{4\pi\epsilon} \left[(\epsilon - 1)\alpha + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p \right] \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p - \frac{1}{3}\alpha \right].$$

* \mathcal{C}_ϕ es la capacidad calorífica de la placa colocada entre las armaduras de un condensador plano conectado a un circuito de f.e.m. constante. En un condensador no conectado, con cargas constantes sobre las armaduras, la placa tendría una capacidad térmica \mathcal{C}_D .

3. Determinar el efecto electrocalórico en un dieléctrico homogéneo cuyo volumen total se mantiene constante.

Solución. Rigurosamente hablando, la densidad del cuerpo cambia cuando lo colocamos en un campo exterior (densidad que deja de ser constante en el mismo), incluso si su volumen total se mantiene constante. Sin embargo, al calcular la variación de la entropía total cabe prescindir de esta circunstancia y considerar constante la densidad ρ en todo el cuerpo*.

Según (10.17) la entropía total del cuerpo vale

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0(\rho, T) + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_\rho \int E^2 dV,$$

donde la integración se extiende a todo el volumen del mismo. La cantidad de calor absorbida resulta ser

$$Q = \frac{T}{8\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_\rho \int E^2 dV.$$

4. Determinar la diferencia $\mathcal{C}_\phi - \mathcal{C}_D$ (véase problema 2) cuando se conserva constante el volumen total de la placa.

Solución. Cuando se conserva constante el volumen de la placa (y por ello también su grosor) la derivación manteniendo fija la diferencia de potenciales es equivalente a la derivación para intensidad E constante. Utilizando la fórmula obtenida en el problema 3 para la entropía, obtendremos:

$$\mathcal{C}_E - \mathcal{C}_D = \frac{TVE^2}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_\rho^2.$$

5. Un condensador está formado por dos superficies conductoras, que se encuentran a una distancia h una de otra que es pequeña comparada con las dimensiones de las armaduras; el espacio entre éstas lo ocupa una substancia cuya permitividad es ϵ_1 . En el condensador se introduce una pequeña esfera de radio $a \ll h$ de permitividad ϵ_2 . Determinar la variación de la capacidad del condensador.

Solución. Supongamos que la bolita se introduce en el condensador de modo que la diferencia de potenciales ϕ entre sus armaduras permanezca constante. El papel de energía libre cuando son constantes los potenciales de los conductores lo representa $\tilde{\mathcal{F}}$. Cuando no hay la esferita, $\tilde{\mathcal{F}} = -\frac{C_0\phi^2}{2}$, donde C_0 es la capacidad inicial del condensador. Teniendo en cuenta que las dimensio-

nes de aquella son pequeñas, cabe considerar que ha sido introducida en un campo homogéneo de intensidad $E = \phi/h$, y que la variación de $\tilde{\mathcal{F}}$ es pequeña. Ahora bien, una pequeña variación de $\tilde{\mathcal{F}}$ cuando los potenciales se mantienen constantes, es igual a una pequeña variación de $\tilde{\mathcal{F}}$ cuando son constantes las cargas de las fuentes del campo. Mediante la fórmula obtenida en el problema del § 11 y la fórmula (8.2), obtendremos

$$\tilde{\mathcal{F}} = -\frac{1}{2}C_0\phi^2 - \frac{1}{2}a^3\epsilon^{(e)}(\epsilon^{(i)} - \epsilon^{(e)})\phi^2/(2\epsilon^{(e)} + \epsilon^{(i)})h^2,$$

de donde se sigue la capacidad buscada

$$C = C_0 + a^3\epsilon^{(e)}(\epsilon^{(i)} - \epsilon^{(e)})/(2\epsilon^{(e)} + \epsilon^{(i)})h^2.$$

* La variación de densidad $\delta\rho$ es una cantidad de segundo orden respecto de la intensidad del campo ($\sim E^2$) y la variación de la entropía total ligada con ella es una cantidad de cuarto orden. En efecto, el término lineal respecto de $\delta\rho$ en la variación de la entropía total es $\frac{\partial S_0}{\partial \rho} \int \delta\rho dV$; pero la integral $\int \delta\rho dV = 0$, debido a que se conserva constante la masa total del cuerpo.

§ 13. Propiedades dieléctricas de los cristales

En un medio dieléctrico anisótropo (monocristal) la relación lineal entre el desplazamiento y la intensidad del campo eléctrico tiene una forma más complicada que no se reduce a la de una mera proporcionalidad.

La forma más general de una dependencia de este tipo viene dada por una expresión de la forma

$$D_i = D_{0i} + \epsilon_{ik} E_k, \quad (13.1)$$

donde D_0 es un vector constante y el conjunto de cantidades ϵ_{ik} constituye un tensor de segundo orden llamado *tensor permeabilidad dieléctrica* o *permitividad* (o, más brevemente, *tensor dieléctrico*). El término independiente D_0 en la relación (13.1) no existe, sin embargo, en un cristal cualquiera. La mayoría de los tipos de simetría cristalográfica no admite la existencia de un tal vector constante (véase más adelante) y entonces tenemos simplemente

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k. \quad (13.2)$$

El tensor ϵ_{ik} es simétrico:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}. \quad (13.3)$$

Para ver que así es, basta aplicar la relación termodinámica (10.10) y observar que la derivada segunda

$$-4\pi \partial^2 \tilde{F} / \partial E_k \partial E_i = \partial D_i / \partial E_k = \epsilon_{ik}$$

no depende del orden de derivación.

Para la propia magnitud \tilde{F} tenemos (cuando se cumple (13.2)) la expresión

$$\tilde{F} = F_0 - \epsilon_{ik} E_i E_k / 8\pi. \quad (13.4)$$

La energía libre F es

$$F = \tilde{F} + E_i D_i / 4\pi = F_0 + \epsilon^{-1}{}_{ik} D_i D_k / 8\pi. \quad (13.5)$$

Al igual que cualquier otro tensor simétrico de segundo orden, el tensor ϵ_{ik} puede reducirse a la forma diagonal mediante una elección adecuada de los ejes de coordenadas. En general, por consiguiente, el tensor ϵ_{ik} viene determinado por tres cantidades independientes, a saber, por los tres valores principales $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$, $\epsilon^{(3)}$. Todas estas cantidades son siempre mayores que la unidad, de manera análoga a como $\epsilon > 1$ en un cuerpo isótropo (véase § 14).

Según sea el tipo de simetría del cristal, el número de valores principales del tensor ϵ_{ik} diferentes puede resultar también ser menor que tres*.

* Las propiedades del tensor simétrico ϵ_{ik} , bastante obvias, que se exponen a continuación se obtienen de manera muy simple utilizando la propiedad conocida por el álgebra tensorial según la cual a cada tensor simétrico de segundo orden se puede hacer corresponder el llamado «elipsoide tensorial», la longitud de cuyos semiejes es proporcional a los valores principales del tensor. La simetría del elipsoide corresponde en tal caso a la simetría del cristal necesariamente.

En los cristales de los sistemas triclinico, monoclinico y rómbico los tres valores propios son diferentes; estos cristales se llaman *cristales biáxicos**. En particular, para los cristales del sistema triclinico las direcciones de los ejes principales del tensor ϵ_{ik} no están ligadas de manera unívoca con ninguna dirección cristalográfica. En los cristales del sistema monoclinico queda determinada de antemano la dirección de uno de los ejes principales: debe coincidir con el eje de simetría de segundo orden o ser perpendicular al plano de simetría del cristal. En cambio, en los cristales del sistema rómbico están determinados cristalográficamente los tres ejes principales del tensor ϵ_{ik} .

Por otra parte, en los cristales de los sistemas tetragonal, romboédrico y hexagonal coinciden dos de los tres valores principales, de modo que se tienen en total sólo dos cantidades independientes; tales cristales se califican de *uniáxicos*. Uno de los ejes principales coincide en este caso con el eje cristalográfico de simetría de orden cuarto, tercero o sexto y la dirección de los otros dos ejes principales se puede elegir de manera arbitraria**.

Finalmente, en los cristales del sistema cúbico son iguales los tres valores principales del tensor ϵ_{ik} y las direcciones de los ejes principales son por completo arbitrarias***. Esto significa que el tensor ϵ_{ik} tiene la forma $\epsilon \delta_{ik}$, es decir, viene determinado por un escalar ϵ . En otras palabras, en relación con sus propiedades dieléctricas los cristales de simetría cúbica no difieren de los cuerpos isótropos.

Pasemos ahora a examinar las propiedades dieléctricas típicas de los cristales que contienen el término constante D_0 en (13.1). La presencia de este término significa que el dieléctrico se polariza espontáneamente, incluso cuando no existe el campo eléctrico exterior; tales cuerpos se llaman *piroeléctricos*. El valor de esta polarización espontánea, sin embargo, es de hecho siempre muy pequeño (comparado con el de los campos moleculares). Esta circunstancia está vinculada con el hecho de que valores grandes de D_0 conducirían a la existencia de campos intensos dentro del cuerpo, lo que siempre es desfavorable desde el punto de vista energético y, por ello, no podría corresponder al equilibrio termodinámico. El que D_0 sea pequeño asegura al mismo tiempo la legitimidad del desarrollo de D en potencias de E , desarrollo cuyos dos primeros términos forman precisamente la expresión (13.1).

Las magnitudes termodinámicas de un cuerpo piroeléctrico se encuentran integrando la igualdad

$$-4\pi \partial \tilde{F} / \partial E_i = D_i = D_{0i} + \epsilon_{ik} E_k,$$

de donde

$$\tilde{F} = F_0 - \epsilon_{ik} E_i E_k / 8\pi - E_i D_{0i} / 4\pi. \quad (13.6)$$

* Este término está vinculado con las propiedades ópticas de los cristales (véanse §§ 78 y 79).

** El elipsoide tensorial degeneral en este caso en un elipsoide de rotación simétrico respecto del eje longitudinal. Hay que subrayar que para las propiedades físicas de un cristal, determinadas por un tensor simétrico de segundo orden, la existencia de un eje de simetría de tercer orden es ya equivalente a la isotropía total en un plano perpendicular a dicho eje.

*** El elipsoide tensorial degenera aquí en una esfera.

La energía libre es

$$\begin{aligned} F &= \tilde{F} + E_i D_i / 4\pi = F_0 + \epsilon_{ik} E_i E_k / 8\pi \\ &= F_0 + \epsilon^{-1}_{ik} (D_i - D_{0i})(D_k - D_{0k}) / 8\pi. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Obsérvese que en F desaparece el término que encontramos en \tilde{F} lineal respecto de E_i^* .

La energía libre total de un piroeléctrico se puede calcular según la fórmula (11.12), substituyendo en ella (13.7) y (13.1). Cuando no existe campo exterior, $\mathbf{E} = 0$, se tiene el sencillo resultado

$$F = \int [F_0 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 / 8\pi)] dV. \quad (13.8)$$

Es notable que la energía libre de un piroeléctrico, cuando no existe campo exterior, depende (como el campo \mathbf{E}) no sólo de su volumen, sino también de su forma.

Conforme se hizo ya notar, el fenómeno de la piezoelectricidad no es posible para cualquier simetría del cristal. Dado que en una transformación de simetría arbitraria deben conservarse invariables todas las propiedades de un cristal, es claro que sólo puede ser piroeléctrico un cristal en el que existe una dirección orientada que se conserva constante (en particular, que no cambia en la de sentido opuesto) en todas las transformaciones de simetría; en esta dirección precisamente se encontrará el vector constante \mathbf{D}_0 .

Esta condición la cumplen solamente aquellos grupos de simetría que se componen de un solo eje junto con planos de simetría que pasan por el mismo. En particular, es evidente que no pueden ser piroeléctricos los cristales que poseen un centro de simetría. Veamos en cuáles de entre las 32 clases cristalográficas se manifiesta la piezoelectricidad:

Sistema triclinico: C_1

Sistema monoclínico: C_s , C_2

Sistema rómbico: C_{2v}

Sistema tetragonal: C_4 , C_{4v}

Sistema romboédrico: C_3 , C_{3v}

Sistema hexagonal: C_6 , C_{6v} .

Naturalmente, no existen cristales piroeléctricos entre las clases del sistema cúbico. En un cristal de la clase C_1 la dirección del vector piroeléctrico \mathbf{D}_0 no está ligada con ninguna dirección cristalográfica privilegiada, y en un cristal de la clase C_s debe estar situado en el plano de simetría. En cambio, en todas las restantes clases a que nos hemos referido más arriba, la dirección de \mathbf{D}_0 coincide con la del eje de simetría.

* Hay que hacer notar que en estas fórmulas prescindimos, en realidad, del efecto piezoelectrónico (es decir, de la influencia de las tensiones internas sobre las propiedades eléctricas del cuerpo, véase § 17). En consecuencia, y rigurosamente hablando, dichas fórmulas son aplicables solamente en el caso de campos homogéneos en el volumen del cuerpo, cuando las tensiones en él pueden no existir.

Hay que señalar que, en condiciones ordinarias, los cristales piroeléctricos carecen de momento dipolar eléctrico total, a pesar de que en ellos la polarización no es igual a cero. La razón de que así ocurra estriba en que dentro de un dieléctrico polarizado espontáneamente se tiene una intensidad no nula del campo E . Gracias a que, efectivamente, la muestra posee de ordinario una cierta conductibilidad, que aunque pequeña no es, con todo, igual a cero, la existencia del campo provoca la aparición de una corriente que durará hasta que las cargas libres que se forman sobre la superficie del cuerpo hagan desaparecer el campo en la muestra. Al mismo efecto conducen los iones que se depositan sobre la superficie de la muestra procedentes del aire. En la práctica, las propiedades piroeléctricas se observan al calentar el cuerpo, cuando el valor de su polarización espontánea cambia y se pone de manifiesto esta variación.

PROBLEMAS

- Determinar el campo creado por una esfera piroeléctrica en el vacío.

Solución. Dentro de la esfera se tiene un campo homogéneo en el cual la intensidad y el desplazamiento están ligados por la relación $2E = -D$ (como se sigue de (8.1) para $\mathbf{G} = 0$, es decir, en ausencia de un campo exterior superpuesto). Substituyendo en (13.1), obtendremos la ecuación

$$2E_i + \epsilon_{ik}E_k = -D_{0i}.$$

Elijamos los ejes de coordenadas a lo largo de los ejes principales del tensor ϵ_{ik} . Se obtiene entonces a partir de dicha ecuación

$$E_i = -D_{0i}/(2 + \epsilon^{(i)}).$$

La polarización de la esfera vale

$$P_i = (D_i - E_i)/4\pi = 3D_{0i}/4\pi(2 + \epsilon^{(i)}).$$

El campo fuera de la misma es el campo de un dipolo eléctrico con momento eléctrico $\mathcal{P} = PV$.

- Determinar el campo de una carga puntual en un medio anisótropo homogéneo*.

Solución. El campo de la carga puntual viene dado por la ecuación $\text{div } \mathbf{D} = 4\pi e\delta(\mathbf{r})$ (la carga se encuentra en el origen de coordenadas). En un medio anisótropo se tiene $D_i = \epsilon_{ik}E_k = -\epsilon_{ik}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}$; eligiendo los ejes x, y, z a lo largo de los ejes principales del tensor ϵ_{ik} , obtendremos para el potencial la ecuación

$$\epsilon^{(x)}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \epsilon^{(y)}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \epsilon^{(z)}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -4\pi e\delta(x)\delta(y)\delta(z).$$

Mediante la introducción de nuevas variables definidas por

$$x' = x/\sqrt{\epsilon^{(x)}}, \quad y' = y/\sqrt{\epsilon^{(y)}}, \quad z' = z/\sqrt{\epsilon^{(z)}}, \quad (1)$$

dicha ecuación se reduce a la forma

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z'^2} = -\frac{4\pi e}{\sqrt{(\epsilon^{(x)}\epsilon^{(y)}\epsilon^{(z)})}}\delta(x')\delta(y')\delta(z'),$$

* En los problemas 2-5 se supone que la anisotropía dieléctrica del medio no es piroeléctrica.

que formalmente difiere de la ecuación para el campo en el vacío tan sólo en la substitución de ϵ por $e/\sqrt{\epsilon^{(x)} \epsilon^{(y)} \epsilon^{(z)}}$. Por consiguiente,

$$\phi = \frac{e'}{r'} = \frac{e}{\sqrt{(\epsilon^{(x)} \epsilon^{(y)} \epsilon^{(z)})}} \left[\frac{x^2}{\epsilon^{(x)}} + \frac{y^2}{\epsilon^{(y)}} + \frac{z^2}{\epsilon^{(z)}} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

En notación tensorial, sin presuponer cuál es el sistema de coordenadas elegido, tenemos

$$\phi = e/\sqrt{(|\epsilon| \epsilon^{-1}{}_{ik} x_i x_k)},$$

donde $|\epsilon|$ es el determinante del tensor ϵ_{ik} .

3. Determinar la capacidad de una esfera conductora (de radio a) que se encuentra en el interior de un medio dieléctrico anisótropo.

Solución. Mediante la transformación indicada en el problema que precede, la determinación del campo de una esfera con carga e en un medio anisótropo se reduce a determinar el campo en el vacío creado por la carga e' distribuida sobre la superficie del elipsoide

$$\epsilon_{ik} x'{}^i x'{}^k = \epsilon^{(x)} x'^2 + \epsilon^{(y)} y'^2 + \epsilon^{(z)} z'^2 = a^2.$$

Aplicando la fórmula (4.14) para el potencial del campo de un elipsoide, obtendremos para la capacidad buscada

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\sqrt{(\epsilon^{(x)} \epsilon^{(y)} \epsilon^{(z)})}} \int_0^\infty \left[\left(\xi + \frac{a^2}{\epsilon^{(x)}} \right) \left(\xi + \frac{a^2}{\epsilon^{(y)}} \right) \left(\xi + \frac{a^2}{\epsilon^{(z)}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} d\xi.$$

4. Determinar el campo en una placa anisótropa planoparalela que se encuentra en un campo homogéneo exterior \mathbf{E} .

Solución. De la condición de continuidad de la componente tangencial de la intensidad se deduce que

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + A \mathbf{n},$$

donde \mathbf{E}_0 es la intensidad del campo homogéneo dentro de la placa, \mathbf{n} el vector unitario normal a su superficie y A una constante. Esta última se determina a partir de la condición de continuidad de la componente normal del desplazamiento: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0$, o bien

$$n_i \epsilon_{ik} E_k = n_i \epsilon_{ik} E_0 + A \epsilon_{ik} n_i n_k = E_0 n_i.$$

De aquí se sigue

$$A = -(\epsilon_{ik} - \delta_{ik}) n_i E_0 / \epsilon_{im} n_i n_m.$$

5. Determinar el momento de las fuerzas que actúan sobre una esfera dieléctrica anisótropa que se encuentra (en el vacío) en un campo homogéneo exterior \mathbf{E} .

Solución. Según (8.2) tenemos para la intensidad del campo dentro de la esfera

$$E_x = 3E_0/(\epsilon^{(x)} + 2),$$

(y análogamente para E_y , E_z), habiendo elegido los ejes x , y , z , a lo largo de los ejes principales del tensor ϵ_{ik} . De aquí se sigue para las componentes del momento dipolar de una esfera (de radio a):

$$\mathcal{P}_x = \frac{4}{3} \pi a^3 P_x = \frac{\epsilon^{(x)} - 1}{\epsilon^{(x)} + 2} a^3 E_x, \text{ etc.}$$

En cuanto a la componente del momento de las fuerzas que actúan sobre la esfera, se tiene

$$K_z = (\mathcal{P} \times \mathbf{E})_z = 3a^3 E_x E_y (\epsilon^{(x)} - \epsilon^{(y)})/(\epsilon^{(x)} + 2)(\epsilon^{(y)} + 2),$$

y análogamente para K_x , K_y .

6. En un medio anisótropo infinito existe una cavidad esférica. Expresar el campo en ella en función del campo homogéneo $E^{(e)}$ en el medio lejos de la misma.

Solución. Mediante la transformación (1) del problema 2 la ecuación para el potencial del campo en el medio se reduce a la ecuación de Laplace para el campo en el vacío. La ecuación para el potencial del campo en la cavidad se transforma, por el contrario, en la ecuación que corresponde al potencial en un medio con constantes dieléctricas $1/\epsilon^{(x)}, 1/\epsilon^{(y)}, 1/\epsilon^{(z)}$. Además, la esfera (de radio a) se transforma en un elipsoide con semiejes $a/\sqrt{\epsilon^{(x)}}, a/\sqrt{\epsilon^{(y)}}, a/\sqrt{\epsilon^{(z)}}$. Sean $n^{(x)}, n^{(y)}, n^{(z)}$ los coeficientes de despolarización de este elipsoide (determinados por las fórmulas (4.25)). Aplicando al campo de este elipsoide la fórmula (8.7), obtendremos la relación

$$(1-n^{(x)}) \frac{\partial \phi^{(t)}}{\partial x'} + \frac{n^{(x)}}{\epsilon^{(x)}} \frac{\partial \phi^{(t)}}{\partial x'} = \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x'}$$

(y las analogas a lo largo de los ejes y' y z'). Volviendo a las coordenadas primitivas, se tiene $\partial \phi / \partial x' = \sqrt{\epsilon^{(x)}} \partial \phi / \partial x = \sqrt{\epsilon^{(x)}} E_x$, de modo que para el campo en la cavidad queda finalmente

$$E^{(t)x} = \frac{\epsilon^{(x)}}{\epsilon^{(x)} - n^{(x)}(\epsilon^{(x)} - 1)} E^{(e)x}.$$

§ 14. Carácter positivo de la susceptibilidad eléctrica

Para determinar el carácter de la dependencia de las magnitudes termodinámicas de un dieléctrico en un campo con relación a su constante dieléctrica, consideremos el problema formal de la variación de la componente eléctrica de la energía libre total del cuerpo cuando ϵ experimente una variación infinitesimal.

Para un dieléctrico isótropo (pero no necesariamente homogéneo) tenemos, según (10.19),

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \int (D^2 / 8\pi\epsilon) dV.$$

Al variar ϵ , varía también el desplazamiento del campo. Por lo tanto, la variación considerada de la energía libre es igual a

$$\delta\mathcal{F} = \int \frac{\mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{D}}{4\pi\epsilon} dV - \int \frac{D^2}{8\pi\epsilon^2} \delta\epsilon dV = \int \frac{\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}}{4\pi} dV - \int \frac{E^2}{8\pi} \delta\epsilon dV.$$

El primer término en el último miembro de la igualdad coincide con la expresión (10.2) del trabajo realizado en una variación infinitamente pequeña de las fuentes del campo (de las cargas de los conductores). Pero en el presente caso consideramos el cambio del campo cuando se conservan fijas sus fuentes; en consecuencia, este término se anula y obtenemos

$$\delta\mathcal{F} = - \int \delta\epsilon (E^2 / 8\pi) dV. \quad (14.1)$$

De esta fórmula se sigue, en primer lugar, el siguiente resultado importante: cualquier aumento de la constante dieléctrica del medio, sea cual sea la porción del mismo en que se produzca (manteniendo constantes las fuentes del campo), conduce a una disminución de su energía libre total. En particular, cabe afirmar

que la energía libre disminuye siempre al introducir en el medio dieléctrico conductores no cargados, dado que estos últimos pueden considerarse (en electrostática) como cuerpos en que ϵ es infinitamente grande. Esta proposición generaliza el teorema enunciado en el § 2 acerca de la disminución de la energía de un campo electrostático en el vacío cuando se introduce en él un conductor no cargado.

Por otra parte, se puede utilizar la fórmula (14.1) para demostrar la propiedad ya recordada en el § 7 de que la constante dieléctrica de un cuerpo cualquiera es mayor que la unidad (es decir, que la susceptibilidad eléctrica $(\epsilon - 1)/4\pi$ es positiva). Para ello es necesario demostrar antes, independientemente, que la variación total de la energía libre de un dieléctrico cuando se introduce en un campo electrostático es negativa*. La demostración puede basarse en la teoría termodinámica de perturbaciones, considerando la variación de la energía libre del cuerpo como resultado de una perturbación de sus niveles de energía cuánticos debida al campo eléctrico. Según esta teoría se tiene**

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \bar{V}_{nn} - \frac{1}{2} \sum_n \sum_m \frac{|V_{nm}|^2 (w_m - w_n)}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} - \frac{1}{2kT} \overline{(V_{nn} - \bar{V}_{nn})^2}. \quad (14.2)$$

$E_n^{(0)}$ son aquí los niveles no perturbados, V_{mn} los elementos de matriz de la energía de perturbación y el trazo significa el promedio estadístico realizado según la distribución de Gibbs

$$w_n = \exp \{(\mathcal{F}_0 - E_n^{(0)})/kT\}.$$

El término \bar{V}_{nn} en la fórmula (14.2), lineal respecto del campo, es nulo salvo en los cuerpos piroeléctricos. En cambio, la variación de la energía libre que nos interesa, y que es cuadrática respecto del mismo, viene dada por los restantes términos de esta fórmula. En la forma en que se han escrito aquí, su carácter negativo es evidente.

Pero si de manera formal se considera la variación de la energía libre como resultado de un cambio gradual de la constante dieléctrica en el volumen del cuerpo, desde el valor 1 hasta el valor dado ϵ , de la fórmula (14.1) se sigue que $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0$ será negativo únicamente si $\epsilon > 1$, con lo que queda demostrado lo dicho anteriormente.

Exactamente de la misma manera se demuestran las desigualdades $\epsilon^{(i)} > 1$ para los valores principales del tensor ϵ_{ik} de un medio dieléctrico anisótropo. Para ello basta evidentemente considerar la energía de un campo dirigido a lo largo de cada uno de los tres ejes principales.

La energía libre total disminuye, en particular, cuando una carga cualquiera se lleva al cuerpo dieléctrico desde el infinito (lo que se puede interpretar como aumento de ϵ en un cierto volumen del campo en torno de la carga). Para deducir

* Nos referimos a una variación proporcional al cuadrado del campo. Recordaremos que, en los cuerpos piroeléctricos, la variación de la energía libre contiene también un término lineal respecto del campo, término que aquí carece de interés.

** Véase *Física estadística*, § 32, fórmulas (32.5) y (32.6); la fórmula que aquí damos difiere de aquéllas tan sólo en la manera como se ha escrito.

de aquí que toda carga es atraída hacia el dieléctrico sería necesario demostrar aún, estrictamente hablando, que F no puede alcanzar un mínimo, cualquiera que sea la distancia finita no nula entre la carga y el cuerpo. No nos detendremos aquí a demostrar esta proposición, tanto más cuanto que la aparición de fuerzas atractivas entre una carga y un dieléctrico se puede considerar como un resultado bastante evidente de la interacción de esta carga con el momento dipolar del dieléctrico polarizado por ella.

Consecuencia inmediata de la fórmula (14.1) es la relativa a la dirección del movimiento del cuerpo dieléctrico en un campo eléctrico casi homogéneo, es decir, en un campo que se puede considerar constante en la región ocupada por el cuerpo. En este caso E^2 puede sacarse fuera del símbolo de integración y la diferencia $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0$ es una cantidad negativa proporcional a E^2 . Tendiendo a ocupar la posición en la que su energía libre será mínima, el cuerpo se desplazará, por consiguiente, en la dirección orientada en que aumenta E .

§ 15. Fuerzas eléctricas en un dieléctrico líquido

El problema de calcular las fuerzas (llamadas a veces fuerzas *ponderomotrices*) que actúan sobre los dieléctricos en un campo eléctrico no homogéneo arbitrario, es bastante complicado y exige considerar separadamente los líquidos (o gases) y los sólidos. Empezaremos con el caso más simple, que es el de los dieléctricos líquidos.

Designaremos por $\mathbf{f} dV$ la fuerza que actúa sobre el elemento de volumen del medio dV ; el vector \mathbf{f} puede llamarse *densidad* (volumétrica) *de fuerza*.

Como es sabido, las fuerzas que actúan sobre un volumen finito de un cuerpo pueden reducirse a fuerzas aplicadas a la superficie de este volumen*. Esta circunstancia resulta ser consecuencia de la ley de conservación del impulso. La fuerza que actúa sobre la materia en el volumen dV coincide con la variación de su impulso por unidad de tiempo. Esta variación debe ser igual a la cantidad de impulso que penetra durante el mismo tiempo en este volumen a través de su superficie. Si designamos el tensor flujo de impulso por σ_{ik} , se tendrá

$$\int f_i dV = \oint \sigma_{ik} df_k, \quad (15.1)$$

donde la integración en el segundo miembro de la igualdad se extiende a la superficie del volumen V . El tensor σ_{ik} se llama *tensor de tensiones*. Es evidente que

$$\sigma_{ik} df_k = \sigma_{ik} n_k df$$

es la i -ésima componente de la fuerza que actúa sobre el elemento de superficie df (\mathbf{n} es el vector unitario normal a la superficie exterior al volumen dado).

* Véase vol. VII *Teoría de la elasticidad*, § 2.

De manera análoga, a una integral de superficie se reduce también el momento total de las fuerzas que actúan en el volumen en cuestión, con lo que queda asegurado el que se cumpla la ley de conservación del momento cinético. Como es sabido, la posibilidad de esta reducción se debe a la simetría del tensor de tensiones ($\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$). Esta última propiedad expresa, por consiguiente, la conservación de dicho momento.

Transformando la integral de superficie en (15.1) en una integral de volumen, obtendremos

$$\int f_i dV = \int (\partial \sigma_{ik} / \partial x_k) dV,$$

y de aquí se sigue, dado que el volumen de integración es arbitrario,

$$f_i = \partial \sigma_{ik} / \partial x_k. \quad (15.2)$$

Ésta es la conocida fórmula que expresa las fuerzas volumétricas en función del tensor de tensiones.

Pasemos ahora al cálculo de dicho tensor. Cada pequeña porción de superficie se puede considerar como plana, y las propiedades del cuerpo, al igual que las del campo eléctrico cerca de la misma, como propiedades homogéneas. Por ello, para simplificar el razonamiento podemos considerar, sin limitar la generalidad del mismo, una placa de materia planoparalela homogénea (por su composición, densidad y temperatura) de grosor h que se encuentra en un campo eléctrico de dirección arbitraria, pero homogéneo*. Cabe imaginar este campo como creado por planos conductores superpuestos a las superficies de la capa y que llevan consigo las correspondientes distribuciones de cargas.

Siguiendo el método general de determinación de las fuerzas, sometamos uno de los planos conductores («el superior») a un desplazamiento virtual paralelo de valor infinitamente pequeño ξ ; la dirección de ξ es arbitraria y no coincide necesariamente con la dirección de la normal n . Supondremos que el potencial del conductor (en cada uno de sus puntos) se conserva constante en el desplazamiento y que la deformación homogénea de la capa de dieléctrico provocada por este desplazamiento es isoterma.

Sobre la unidad de área de superficie actúa, de la parte del propio cuerpo (de la capa), una fuerza $-\sigma_{ik} n_k$. En el desplazamiento virtual esta fuerza efectúa un trabajo $-\sigma_{ik} n_k \xi_i$. Por otra parte, el trabajo realizado en la deformación isoterma y manteniendo constantes los potenciales de los conductores es igual a la disminución de la cantidad $\int \tilde{F} dV$, o bien (por unidad de área de la superficie de la capa) de la cantidad $h \tilde{F}$. De esta manera

$$\sigma_{ik} \xi_i n_k = \delta(h \tilde{F}) = h \delta \tilde{F} + \tilde{F} \delta h. \quad (15.3)$$

* Con ello prescindimos en el tensor de tensiones de términos que podrían depender de los gradientes de la temperatura, del campo, etc. Estos términos, sin embargo, son términos extraordinariamente pequeños comparados con los que no contienen derivadas, en el mismo sentido en que son pequeños los términos que las contienen y que podrían existir en la dependencia de \mathbf{D} respecto de \mathbf{E} .

Las magnitudes termodinámicas de un líquido dependen (para valores dados de la temperatura y de la intensidad del campo) tan sólo de su densidad; las deformaciones que no varían esta última (deformaciones de cizalla), no repercuten en el estado termodinámico. Por consiguiente, para una variación isotérmica $\delta\tilde{F}$ en un líquido, escribiremos

$$\begin{aligned}\delta\tilde{F} &= \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\mathbf{E}}\right)_{T,\rho} \cdot \delta\mathbf{E} + \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\rho}\right)_{\mathbf{E},T} \delta\rho \\ &= -\frac{\mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{E}}{4\pi} + \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\rho}\right)_{\mathbf{E},T} \delta\rho.\end{aligned}\quad (15.4)$$

La variación de densidad de la capa de materia está ligada con la variación de su grosor por la relación $\delta\rho = -\rho \frac{\delta h}{h}$. En cuanto a la variación del campo, ésta se calcula como sigue.

A un punto dado del espacio (con vector posición \mathbf{r}) va a parar, en el desplazamiento, la materia que se encontraba en el punto $\mathbf{r}-\mathbf{u}$, donde \mathbf{u} es el vector desplazamiento de las partículas en el volumen de la capa. Dado que en las condiciones consideradas (deformación homogénea y constancia del potencial sobre los planos conductores) cada partícula de materia cambia de posición arrastrando consigo el valor de su potencial, la variación de este último en el punto dado del espacio vale

$$\delta\phi = \phi(\mathbf{r}-\mathbf{u}) - \phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{u} \cdot \text{grad } \phi = \mathbf{u} \cdot \mathbf{E},$$

donde \mathbf{E} es el campo homogéneo dentro de la capa no deformada. Pero puesto que la deformación es homogénea, tenemos

$$\mathbf{u} = z\xi/h, \quad (15.5)$$

donde z es la distancia contada a partir de la superficie inferior. Por lo tanto, la variación de la intensidad del campo será

$$\delta\mathbf{E} = -\mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \xi)/h. \quad (15.6)$$

Substituyendo en (15.4) todas las expresiones obtenidas y teniendo también en cuenta que $\delta h = \xi_z = \xi \cdot \mathbf{n}$, obtendremos

$$\begin{aligned}\sigma_{ik}\xi_i n_k &= \frac{1}{4\pi}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D})(\xi \cdot \mathbf{E}) - \xi \cdot \mathbf{n} \rho \frac{\partial\tilde{F}}{\partial\rho} + \xi \cdot \mathbf{n} \tilde{F} \\ &= \left\{ \frac{E_i D_k}{4\pi} - \rho \frac{\partial\tilde{F}}{\partial\rho} \delta_{ik} + \tilde{F} \delta_{ik} \right\} \xi_i n_k.\end{aligned}$$

A partir de aquí se obtiene finalmente la siguiente expresión del tensor de tensiones

$$\sigma_{ik} = [\tilde{F} - \rho(\partial\tilde{F}/\partial\rho)_{\mathbf{E},T}] \delta_{ik} + E_i D_k / 4\pi. \quad (15.7)$$

En medios isótropos, que son precisamente los que aquí consideramos, las direcciones de \mathbf{E} y \mathbf{D} coinciden. Por ello $E_i D_k = E_k D_i$ y el tensor (15.7) resulta simétrico, como debía ser.

Cuando la relación lineal es de la forma $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, se tiene

$$\tilde{\mathbf{F}} = F_0(\rho, T) - \epsilon E^2 / 8\pi \quad (15.8)$$

(véase (10.16)). F_0 es la energía libre por unidad de volumen de la materia cuando no existe campo. Según una conocida relación termodinámica, la derivada de la energía libre de la unidad de masa de materia respecto del volumen específico es la presión:

$$\left[\frac{\partial}{\partial(1/\rho)} \left(\frac{F_0}{\rho} \right) \right]_T = F_0 - \rho \left(\frac{\partial F_0}{\partial \rho} \right)_T = -p_0;$$

$p_0 = p_0(\rho, T)$ es aquella presión que se tendría en el medio de no existir el campo y para valores dados de ρ y T . En consecuencia, al substituir (15.8) en (15.7) se obtendrá

$$\sigma_{ik} = -p_0(\rho, T) \delta_{ik} - \frac{E^2}{8\pi} \left[\epsilon - \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \right] \delta_{ik} + \frac{\epsilon E_i E_k}{4\pi}. \quad (15.9)$$

En el vacío, esta expresión pasa a ser el conocido tensor maxwelliano de tensiones del campo eléctrico*:

$$\sigma_{ik} = (E_i E_k - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ik}) / 4\pi.$$

Las fuerzas con que actúan sobre la superficie de separación dos medios diferentes en contacto, deben ser iguales y opuestas: $\sigma_{ik} n_k = -\sigma'_{ik} n'_k$, donde las cantidades con apóstrofo y sin él se refieren a uno y otro medio. Los vectores normales \mathbf{n} y \mathbf{n}' poseen sentidos opuestos, de modo que cabe escribir

$$\sigma_{ik} n_k = \sigma'_{ik} n_k. \quad (15.10)$$

Sobre la frontera de dos medios isótropos la igualdad de las componentes tangenciales de las fuerzas se cumple idénticamente. En efecto, substituyendo (15.7) en (15.10) y tomando la componente tangencial, obtendremos

$$\mathbf{E}_t D_n = \mathbf{E}'_t D'_n.$$

Pero esta igualdad queda ya satisfecha en virtud de las condiciones de contorno relativas a la continuidad de \mathbf{E}_t y D_n . En cambio, la condición de que sean iguales las componentes normales de las fuerzas proporciona una condición no trivial que se impone a la diferencia de presiones entre un medio y otro.

Consideremos, por ejemplo, la frontera entre un líquido y la atmósfera (para esta última cabe hacer $\epsilon = 1$). Caracterizando con un apóstrofo las cantidades que se refieren a la atmósfera y utilizando para σ_{ik} la fórmula (15.9), se obtiene

$$-p_0(\rho, T) + \frac{E^2}{8\pi} \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T + \frac{\epsilon}{8\pi} (E_n^2 - E_t^2) = -p_{\text{atm}} + \frac{1}{8\pi} (E'_n{}^2 - E'_t{}^2).$$

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 33.

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno $E_t = E'_t$, $D_n = \epsilon E_n = D'_n = E'_n$, escribiremos esta igualdad en la forma

$$p_0(\rho, T) - p_{\text{atm}} = \frac{\rho E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T - \frac{\epsilon - 1}{8\pi} (\epsilon E_n^2 + E_t^2). \quad (15.11)$$

Esta relación hay que interpretarla como ecuación que determina la densidad ρ del líquido cerca de su superficie debida al campo eléctrico en él.

Determinemos ahora las fuerzas volumétricas que actúan en un medio dieléctrico. Derivando según (15.2) la expresión (15.9), obtendremos

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[-p_0 + \frac{E^2}{8\pi} \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{E^2}{8\pi} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} + \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial}{\partial x_i} E^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} (E_i D_k) \right].$$

Teniendo en cuenta la ecuación $\text{div } \mathbf{D} \equiv \partial D_k / \partial x_k = 0$, la expresión entre paréntesis en el último término se reduce a la suma

$$-\epsilon E_k \frac{\partial E_k}{\partial x_i} + D_k \frac{\partial E_i}{\partial x_k} = -D_k \left(\frac{\partial E_k}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_k} \right),$$

que se anula debido a que $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. Así, pues, se tiene

$$\mathbf{f} = -\text{grad } p_0(\rho, T) + \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left[E^2 \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{E^2}{8\pi} \text{grad } \epsilon. \quad (15.12)$$

Si en el dieléctrico existen cargas extrañas con densidad volumétrica ρ_{ex} , a la fuerza \mathbf{f} se añade todavía el término

$$\mathbf{E} \cdot \text{div } \mathbf{D} / 4\pi;$$

dado que $\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{ex}}$, este término es igual a

$$\rho_{\text{ex}} \mathbf{E}; \quad (15.13)$$

sin embargo, no debe pensarse que este resultado sea de suyo evidente (cf. el problema 3 del § 16).

En un gas, conforme se indicó ya en el § 7, cabe considerar la diferencia $\epsilon - 1$ como proporcional a la densidad. Entonces es $\rho \partial \epsilon / \partial \rho = \epsilon - 1$ y la fórmula (15.12) toma la forma más sencilla:

$$\mathbf{f} = -\text{grad } p_0 + \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \text{grad } E^2. \quad (15.14)$$

La fórmula (15.12) es válida tanto para medios homogéneos como para medios no homogéneos respecto de su composición. En un medio no homogéneo, ϵ es función no sólo de ρ y T , sino también de la concentración de la mezcla, que varía de un punto a otro del medio. En cambio, en un medio de composición homogénea ϵ

es función solamente de ρ , T y $\text{grad } \epsilon$ puede escribirse explícitamente

$$\text{grad } \epsilon = (\partial \epsilon / \partial T)_{\rho} \text{ grad } T + (\partial \epsilon / \partial \rho)_T \text{ grad } \rho.$$

En estas condiciones, (15.12) pasa a ser

$$\mathbf{f} = -\text{grad } p_0(\rho, T) + \frac{\rho}{8\pi} \text{ grad} \left[E^2 \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_{\rho} \text{ grad } T. \quad (15.15)$$

Si también la temperatura es constante en el cuerpo, se anula el tercer término, y en el primero puede substituirse ∇p_0 por $\rho \nabla \zeta_0$ (según la conocida identidad termodinámica relativa al potencial químico en ausencia del campo: $\rho d\zeta_0 = dp_0 - S_0 dT$) con lo cual

$$\mathbf{f} = -\rho \text{ grad} \left[\zeta_0 - \frac{E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \right]. \quad (15.16)$$

Pero la expresión entre paréntesis no es sino el potencial químico de la materia en el campo eléctrico (véase (10.18)), de modo que

$$\mathbf{f} = -\rho \text{ grad } \zeta.$$

En particular, la condición de equilibrio mecánico $\mathbf{f} = 0$ en el caso de temperatura constante es:

$$\zeta = \zeta_0 - (E^2 / 8\pi)(\partial \epsilon / \partial \rho)_T = \text{const}, \quad (15.17)$$

de acuerdo con la condición termodinámica general de equilibrio*. De ordinario esta condición puede escribirse en una forma todavía más simple. La variación de densidad del medio bajo la acción del campo es proporcional a E^2 . Por consiguiente, si cuando no existe campo el medio es homogéneo respecto de su densidad, también cuando el campo exista cabe hacer $\rho = \text{const}$ en los dos últimos términos de (15.15); tener en cuenta la variación de ρ en las fórmulas que presuponen la relación lineal $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, representaría ir más allá de la precisión admitida. Entonces, igualando a cero el valor de \mathbf{f} dado por (15.15), obtendremos en el caso de temperatura constante la condición de equilibrio en la forma

$$p_0(\rho, T) - (\rho E^2 / 8\pi)(\partial \epsilon / \partial \rho)_T = \text{const}, \quad (15.18)$$

que difiere de (15.17) en que, en vez de ζ , aparece en ella p_0/ρ .

§ 16. Fuerzas eléctricas en los sólidos

Las propiedades dieléctricas de un sólido varían no sólo al cambiar su densidad (como en el caso de un líquido), sino también en las deformaciones que no la modifican (cizallamientos). Consideraremos en primer lugar los cuerpos que son isótropos

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 25.

en ausencia del campo. La deformación rompe, en general, la isotropía del cuerpo; como resultado de ello pasan a ser también anisótropas sus propiedades dieléctricas y la permitividad escalar ϵ se ve substituida por el tensor dieléctrico (tensor permitividad) ϵ_{ik} .

El estado de un cuerpo poco deformado se describe, como es sabido, por el tensor de deformación

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right),$$

donde $\mathbf{u}(x, y, z)$ es el vector desplazamiento de los puntos del cuerpo. Teniendo en cuenta que estas cantidades son pequeñas, en la variación de las componentes ϵ_{ik} basta limitarnos únicamente a los términos de primer orden de magnitud respecto de u_{ik} . De acuerdo con esto, representaremos el tensor dieléctrico del cuerpo deformado como sigue:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_0 \delta_{ik} + a_1 u_{ik} + a_2 u_{il} \delta_{ik}. \quad (16.1)$$

ϵ_0 es aquí la permeabilidad dieléctrica del cuerpo no deformado y los dos términos siguientes (que contienen las dos constantes escalares a_1, a_2) representan la forma más general de un tensor de segundo orden que se puede construir de manera lineal a partir de las componentes del tensor u_{ik} .

Veamos ahora en qué punto debe modificarse el razonamiento expuesto en el párrafo que precede. Dado que en un sólido $\tilde{\mathbf{F}}$ depende de todas las componentes del tensor de deformación, en vez de (15.4) hay que escribir

$$\delta \tilde{\mathbf{F}} = -\mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E} / 4\pi + (\partial \tilde{\mathbf{F}} / \partial u_{ik}) \delta u_{ik}.$$

En el desplazamiento virtual considerado, el vector \mathbf{u} viene dado por la fórmula (15.5), de modo que el tensor de deformación es

$$u_{ik} = (\xi_i n_k + \xi_k n_i) / 2h.$$

Substituyendo este valor en $\delta \tilde{\mathbf{F}}$ y teniendo en cuenta la simetría del tensor u_{ik} (y, por consiguiente, también la de las derivadas $\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial u_{ik}}$), se obtendrá

$$\delta \tilde{\mathbf{F}} = -\mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E} / 4\pi + (\xi_i n_k / h) \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial u_{ik}}. \quad (16.2)$$

Está claro ahora que para el tensor de tensiones obtendremos, en lugar de (15.7), la expresión siguiente*:

$$\sigma_{ik} = \tilde{\mathbf{F}} \delta_{ik} + (\partial \tilde{\mathbf{F}} / \partial u_{ik})_{T, E} + E_i D_k / 4\pi. \quad (16.3)$$

* En esta fórmula la magnitud $\tilde{\mathbf{F}}$, al igual que en todo lo que precede, es la energía libre referida a la unidad de volumen del cuerpo. Sin embargo, en teoría de la elasticidad se adopta de ordinario una definición algo distinta: las magnitudes termodinámicas se refieren a la cantidad de materia contenida en la unidad de volumen del cuerpo no deformado, materia que después de la deformación puede ocupar otro volumen. Es fácil pasar de una definición a la otra expresando la variación relativa de volumen debida a la

La fórmula (16.3) es aplicable cualquiera que sea la dependencia de \mathbf{D} respecto de \mathbf{E} . Para un cuerpo no piroeléctrico (y no piezoelectrico), en el cual $D_i = \epsilon_{ik}E_k$, $\tilde{\mathbf{F}}$ viene dada por la fórmula (13.4) y para las derivadas que necesitamos se obtiene

$$\partial\tilde{\mathbf{F}}/\partial u_{ik} = \partial F_0/\partial u_{ik} - (a_1 E_i E_k + a_2 E^2 \delta_{ik})/8\pi.$$

Hecho esto, en (16.3) haremos en todos los términos $\epsilon_{ik} = \epsilon_0 \delta_{ik}$ con lo que se encuentra la siguiente fórmula para el tensor de tensiones:

$$\sigma_{ik} = \sigma^{(0)}_{ik} + (2\epsilon_0 - a_1)E_i E_k/8\pi - (\epsilon_0 + a_2)E^2 \delta_{ik}/8\pi. \quad (16.4)$$

$\sigma_{ik}^{(0)}$ es el tensor de tensiones en ausencia de campo eléctrico, determinado por los módulos de rigidez y de compresión según las fórmulas ordinarias de teoría de la elasticidad.

Pasemos ahora a los cálculos análogos correspondientes a sólidos anisótropos*. Los cambios que, al hacerlo, hay que introducir en el razonamiento expuesto anteriormente se limitan a lo que sigue. En una deformación virtual de una capa de materia, sus ejes cristalográficos experimentan una rotación, en virtud de la cual cambian sus orientaciones respecto del campo eléctrico. Dada la anisotropía de las capas dieléctricas de un cristal, esta circunstancia conduce a una variación suplementaria de $\tilde{\mathbf{F}}$ que no se tuvo en cuenta en (16.2). Al calcular esta variación es indiferente suponer que los ejes del cristal giran de un cierto ángulo $\delta\phi$ respecto del campo \mathbf{E} , o que éste gira respecto de los ejes de un ángulo $-\delta\phi$; el segundo procedimiento es más cómodo. De esta manera, a la variación del campo (15.6), hay que añadir la variación de \mathbf{E} al girar $-\delta\phi$

$$\delta\mathbf{E} = -\mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\xi})/h - \delta\phi \times \mathbf{E}.$$

El ángulo $\delta\phi$ está ligado con el vector corrimiento \mathbf{u} en la deformación por $\delta\phi = (\frac{1}{2}) \operatorname{rot} \mathbf{u}$ (esta igualdad se obtiene fácilmente observando que en una rotación del cuerpo de ángulo $\delta\phi$ sus puntos se desplazan en $\mathbf{u} = \delta\phi \times \mathbf{r}$). Substituyendo aquí la expresión de \mathbf{u} dada por (15.5), obtendremos

$$\delta\phi = \operatorname{rot} z\boldsymbol{\xi}/2h = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\xi}/2h,$$

y luego

$$\delta\mathbf{E} = -\mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\xi})/h + \mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\xi})/2h = -[\mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})]/2h.$$

El primer término en (16.2) toma la forma

$$-\frac{1}{4\pi} \mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{E} = \frac{1}{8\pi h} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D})(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{E}) + (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})] = \frac{1}{4\pi h} \boldsymbol{\xi}_i n_k \cdot \frac{1}{2} (E_i D_k + E_k D_i).$$

Deformación en función del tensor u_{ik} (teniendo en cuenta la presencia en (16.3) de la derivada respecto de u_{ik} , esta operación hay que efectuarla con una precisión de hasta los términos de segundo orden). Como resultado, los dos primeros términos de (16.3) se reducen a un término de la forma $\partial\tilde{\mathbf{F}}/\partial u_{ik}$, de acuerdo con la fórmula habitual de la teoría de la elasticidad.

* Veremos en el § 17 que, para determinados tipos de simetría, el fenómeno de la electrostricción en los cristales puede diferir esencialmente de la electrostricción de los cuerpos isotropos. Tales cristales se califican de *piezoelectricos*. Sin embargo, trataremos aquí tan sólo de los cristales no piezoelectricos.

Resulta así evidente que el producto $E_i D_k$ debe ser substituido en (16.3) por la semisuma que aparece aquí entre paréntesis:

$$\sigma_{ik} = \tilde{F} \delta_{ik} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_{ik}} + \frac{1}{8\pi} (E_i D_k + E_k D_i). \quad (16.5)$$

Obsérvese que la expresión obtenida resulta automáticamente simétrica respecto de los índices i y k , como debía ser.

En lo que concierne al tensor dieléctrico del cristal deformado, en vez de la expresión (16.1) con dos constantes escalares tendremos, en el caso general, una expresión de la forma

$$\epsilon_{ik} = \epsilon^{(0)}_{ik} + a_{iklm} u_{lm}, \quad (16.6)$$

donde a_{iklm} es un tensor constante de cuarto orden, simétrico respecto de los pares de índices i, k y l, m (pero no simétrico respecto de la permutación del par i, k con el par l, m). El número de componentes independientes no nulas de este tensor depende de la simetría del cristal, precisamente de su clase cristalográfica.

No nos detendremos a escribir aquí la fórmula para el tensor de tensiones (análoga a (16.4)) que se obtiene aplicando (16.6).

Las fórmulas obtenidas determinan las tensiones en el interior de un dieléctrico sólido. Sin embargo, no son necesarias si queremos determinar la fuerza total \mathbf{F} o el momento total \mathbf{K} de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y debidas al campo exterior. Consideremos un cuerpo sumergido en un medio líquido (o gaseoso) y que se mantiene inmóvil en el mismo. La fuerza total que actúa sobre él es igual a la integral $\oint \sigma_{ik} n_k d\mathbf{f}$, extendida a su superficie. En virtud de la continuidad de las fuerzas $\sigma_{ik} n_k$, es indiferente que el cálculo de esta integral se efectúe mediante los valores σ_{ik} de (16.4) o a partir de la fórmula (15.9) que se refiere al medio que rodea al cuerpo. Supongamos que este medio se encuentra en equilibrio mecánico y térmico. Entonces el cálculo se simplifica todavía más si se tiene en cuenta la condición de equilibrio (15.18). En virtud de esta condición, una parte del tensor de tensiones (15.9) resulta ser una compresión (o expansión) igual en todas direcciones y constante en todo el medio, fuerza que no contribuye en modo alguno ni a la fuerza \mathbf{F} ni al momento de las fuerzas \mathbf{K} totales que actúan sobre el cuerpo. Para calcular estas últimas, por lo tanto, cabe escribir σ_{ik} simplemente en la forma

$$\sigma_{ik} = (\epsilon/4\pi)(E_i E_k - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ik}) \quad (16.7)$$

donde \mathbf{E} es el campo en el líquido y ϵ su permitividad; esta expresión difiere del tensor de tensiones maxwelliano del campo eléctrico en el vacío tan sólo en el factor ϵ . Así pues:

$$\mathbf{F} = (\epsilon/4\pi) \oint [\mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{2} E^2 \mathbf{n}] d\mathbf{f}, \quad (16.8)$$

$$\mathbf{K} = (\epsilon/4\pi) \oint [\mathbf{r} \times \mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{2} E^2 \mathbf{r} \times \mathbf{n}] d\mathbf{f}. \quad (16.9)$$

Haremos observar también que, dado que el líquido se encuentra en equilibrio, en estas fórmulas se puede calcular la integral extendiéndola a cualquier superficie cerrada que contenga al cuerpo en su interior (pero, claro está, que no encierre dentro de sí ninguno de los cuerpos cargados que son las fuentes del campo).

El cálculo de la fuerza total que actúa sobre un dieléctrico en un campo eléctrico (en el vacío) cabe abordarlo también desde otro punto de vista, a saber, expresándola no en función del campo que existe de hecho, sino del campo \mathbf{E} que crearían las fuentes dadas si no existiera el dieléctrico; éste es precisamente el «campo exterior» en que se introduce el cuerpo. En todo esto se supone que la distribución de las cargas que crean el campo no cambia al introducir el cuerpo en el mismo. Esta condición puede no cumplirse en la práctica, por ejemplo, si las cargas están distribuidas sobre la superficie de un conductor extenso y el dieléctrico se lleva a una distancia finita del mismo.

En una traslación virtual del cuerpo como un todo a lo largo de una distancia infinitamente pequeña \mathbf{u} , la energía libre total del mismo cambia, de acuerdo con (11.3), en el valor

$$\delta\mathcal{F} = - \int \mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{E} dV,$$

donde

$$\delta\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{u}) - \mathbf{E}(\mathbf{r}) = (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{E}$$

es la variación del campo en un punto dado \mathbf{r} del cuerpo. Dado que $\mathbf{u} = \text{const}$ y que $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, tenemos

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{E} = \mathbf{P} \cdot \text{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{P} \cdot \text{grad})\mathbf{E},$$

de modo que

$$\delta\mathcal{F} = -\mathbf{u} \cdot \int (\mathbf{P} \cdot \text{grad})\mathbf{E} dV.$$

Por otra parte, $\delta\mathcal{F} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}$ y llegamos así a la fórmula siguiente para la fuerza buscada*:

$$\mathbf{F} = \int (\mathbf{P} \cdot \text{grad})\mathbf{E} dV. \quad (16.10)$$

De manera análoga es posible determinar el momento total de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Sin detenernos en efectuar los cálculos correspondientes, daremos el resultado:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{P} \times \mathbf{E} dV + \int \mathbf{r} \times (\mathbf{P} \cdot \text{grad})\mathbf{E} dV. \quad (16.11)$$

* Hay que subrayar, sin embargo, que el integrando en esta integral no puede interpretarse en ningún caso como densidad volumétrica de fuerza. Ello es así porque las fuerzas locales en un dieléctrico están determinadas no sólo por el campo \mathbf{E} , sino también por los propios campos internos, campos que, en virtud de la ley de conservación del impulso, no proporcionan contribución alguna a la fuerza total, pero que influyen sobre la distribución de las fuerzas en el volumen del cuerpo.

En un campo cuasihomogéneo, que se puede considerar constante a distancias que son del orden de las dimensiones del cuerpo, la fórmula (16.10) da en primera aproximación

$$\mathbf{F} = (\int \mathbf{P} dV \cdot \text{grad}) \mathbf{E} = (\mathcal{P} \cdot \text{grad}) \mathbf{E}, \quad (16.12)$$

donde \mathcal{P} es el momento dipolar total del dieléctrico polarizado. Esta fórmula, claro está, podría obtenerse también derivando directamente \mathcal{F} en (11.8). En la fórmula (16.11) prescindimos en primera aproximación del segundo término comparado con el primero y llegamos así a la conclusión natural de que

$$\mathbf{K} = \mathcal{P} \times \mathbf{E}. \quad (16.13)$$

PROBLEMAS

1. Una esfera dieléctrica (de radio a) que se encuentra en un campo homogéneo exterior \mathbf{E} está dividida en dos mitades por un plano perpendicular a la dirección del campo. Determinar la fuerza de atracción entre los dos hemisferios.

Solución. Imaginemos que los dos hemisferios están separados por un estrato hueco de espesor infinitesimal y determinemos la fuerza mediante la fórmula (16.8) (con $\epsilon = 1$) efectuando en ella la integración sobre la superficie de un hemisferio y tomando para \mathbf{E} la intensidad del campo en el vacío cerca de la misma. Según (8.2), el campo dentro de la esfera es homogéneo e igual a $\mathbf{E}^{(i)} = 3\mathbf{E}/(2+\epsilon)$ (ϵ es la constante dieléctrica de la esfera). El campo en el estrato es perpendicular a la superficie e igual a

$$\mathbf{E} = \mathbf{D}^{(i)} = 3\epsilon\mathbf{E}/(2+\epsilon).$$

En cambio, sobre la superficie exterior de la esfera se tiene

$$E_r = D^{(i)}_r = \frac{3\epsilon}{2+\epsilon} \mathbf{E} \cos \theta, \quad E_\theta = E^{(i)}_\theta = -\frac{3}{\epsilon+2} \mathbf{E} \sin \theta,$$

donde θ es el ángulo que forman el vector posición y el campo \mathbf{E} .

El cálculo de la integral conduce a una fuerza de atracción igual a*

$$F = 9(\epsilon-1)^2 a^2 \mathbf{E}^2 / 16(\epsilon+2)^2.$$

2. Determinar el cambio en la forma de una esfera dieléctrica en un campo eléctrico exterior homogéneo.

Solución. La solución es por completo análoga a la del problema 4 del § 5. Al determinar el cambio en la forma se supone que el volumen de la esfera no varía** Para la parte elástica de la energía libre tenemos la misma expresión que en el problema 4 del § 5. La parte eléctrica viene dada por la igualdad

$$-\frac{1}{2} \mathcal{P} \cdot \mathbf{E} = -\frac{V}{8\pi} \frac{\epsilon^{(x)} - 1}{1 + n(\epsilon^{(x)} - 1)} \mathbf{E}^2,$$

* La coincidencia del límite de esta expresión para $\epsilon \rightarrow \infty$ con el resultado del problema 3 del § 5 para una esfera conductora es pura coincidencia (en realidad, incluso el signo de estas fuerzas es diferente). La no-equivalencia física de estos dos casos es clara, dado que en el estrato intermedio entre los hemisferios conductores (que se encuentran a un mismo potencial) no hay campo, y en el problema en cuestión sí lo hay.

** El cambio de volumen se determina en el problema 1 del § 12.

donde, según (16.1), la permitividad a lo largo del eje x vale

$$\epsilon^{(x)} = \epsilon_0 + a_1 u_{xx} = \epsilon_0 + \frac{2}{3} a_1 (u_{xx} - u_{yy}) = \epsilon_0 + \frac{2}{3} a_1 (a - b) / R.$$

De la condición de mínimo de la energía libre total se sigue

$$\frac{a-b}{R} = \frac{9\epsilon^2}{40\pi\mu} \frac{(\epsilon_0-1)^2 + 5a_1}{(\epsilon_0+2)^2}.$$

Cuando $\epsilon_0 \rightarrow \infty$, esta expresión tiende al resultado correspondiente a una esfera conductora.

3. Determinar las fuerzas volumétricas en un dieléctrico sólido isótropo cuando existen en él cargas extrañas; el cuerpo se supone homogéneo.

Solución. Suponiendo constantes ϵ_0 , a_1 , a_2 y aplicando las ecuaciones rot $\mathbf{E} = 0$, div $\mathbf{D} \cong \epsilon_0$ div $\mathbf{E} = 4\pi\rho_{ex}$, a partir de (16.4) obtendremos

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma^{(0)ik}}{\partial x_k} - \frac{1}{8\pi} (\frac{1}{2}a_1 + a_2) \frac{\partial E^2}{\partial x_i} + \left(1 - \frac{a_1}{2\epsilon_0}\right) \rho_{ex} E_i.$$

§ 17. Cuerpos piezoelectrinos

Las tensiones internas que aparecen en un dieléctrico isótropo que se encuentra en un campo eléctrico constituyen un efecto que es cuadrático respecto del campo. Este mismo efecto se presenta también en los cristales pertenecientes a toda una serie de clases cristalográficas. Pero para determinados tipos de simetría, las propiedades de electrostricción de los cristales tienen un carácter esencialmente distinto. Las tensiones internas que aparecen en estos cuerpos (llamados *cuerpos piezoelectrinos*) y debidas a un campo eléctrico son proporcionales a la primera potencia del campo. Recíprocamente, se presenta también el efecto contrario, es decir, la deformación de un cuerpo piezoelectrino va acompañado de la aparición en él de un campo proporcional al valor de la deformación.

Dado que en un cuerpo piezoelectrino nos interesa solamente el efecto fundamental, que es lineal, podemos prescindir en la fórmula general (16.5) de los términos de segundo grado respecto del campo. Entonces

$$\sigma_{ik} = \tilde{F} \delta_{ik} + (\partial \tilde{F} / \partial u_{ik})_{T,E}.$$

En este párrafo utilizaremos las magnitudes termodinámicas referidas a la cantidad de materia contenida en la unidad de volumen del cuerpo no deformado (véase la nota en la pág. 83). Entendiendo \tilde{F} en este sentido, tendremos simplemente

$$\sigma_{ik} = (\partial \tilde{F} / \partial u_{ik})_{T,E}. \quad (17.1)$$

Análogamente, la relación termodinámica para la diferencial $d\tilde{F}$ será

$$d\tilde{F} = -S dT + \sigma_{ik} du_{ik} - \mathbf{D} \cdot d\mathbf{E} / 4\pi. \quad (17.2)$$

Acerca del último término, es necesario hacer la siguiente observación: en la forma en que aquí aparece, este término (que procede de (10.9)) se refiere, estrictamente hablando, a la unidad de volumen del cuerpo deformado. Al no tener en cuenta esto, cometimos un error que, sin embargo, en el presente caso (para un cuerpo piezoeléctrico) es una cantidad de un orden de pequeñez mayor que el de los restantes términos en (17.2).

Las componentes del tensor u_{ik} representan en (17.2) el papel de variables independientes. En algunos casos puede ser conveniente utilizar, en vez de estas variables, las componentes σ_{ik} . Para ello hay que introducir el potencial termodinámico definido por

$$\tilde{\Phi} = \tilde{F} - u_{ik}\sigma_{ik}. \quad (17.3)$$

Para la diferencial de esta magnitud tendremos

$$d\tilde{\Phi} = -SdT - u_{ik}d\sigma_{ik} - \mathbf{D} \cdot d\mathbf{E}/4\pi. \quad (17.4)$$

Hay que subrayar que la introducción del potencial termodinámico $\tilde{\Phi}$ en la electrodinámica de acuerdo con las fórmulas (17.3) y (17.4), está vinculada con la validez de la relación (17.1) y, por ello, es sólo posible en el caso de los cuerpos piezoeléctricos.

Una vez definidas las magnitudes termodinámicas necesarias, pasemos a describir las propiedades piezoeléctricas de los cristales. Si se eligen como variables independientes las magnitudes σ_{ik} y E_k , hay que considerar el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} como función de las mismas, y en el desarrollo de esta función hemos de conservar los términos de primer orden respecto de aquéllas. Los términos lineales en el desarrollo de las componentes de un vector en potencias de las componentes de un tensor de segundo orden pueden escribirse, en el caso más general, en la forma $4\pi\gamma_{i,kl}\sigma_{kl}$, donde el conjunto de las constantes $\gamma_{i,kl}$ constituye un tensor de tercer orden (el factor 4π se ha introducido por conveniencia). Dado que el tensor σ_{kl} es simétrico respecto de sus índices, es claro que también el tensor $\gamma_{i,kl}$ se puede considerar simétrico con relación a los dos índices correspondientes:

$$\gamma_{i,kl} = \gamma_{i,lk}. \quad (17.5)$$

Para mayor claridad, sepáramos del primer índice mediante una coma el par de índices simétrico k, l . Llamaremos al tensor $\gamma_{i,kl}$ tensor piezoeléctrico. Dado este tensor, quedan completamente determinadas las propiedades piezoeléctricas de un cristal.

Sumando los términos piezoeléctricos a la expresión (13.1) del desplazamiento eléctrico en un cristal, escribiremos

$$D_i = D_{0i} + \epsilon_{ik}E_k + 4\pi\gamma_{i,kl}\sigma_{kl}. \quad (17.6)$$

Los correspondientes términos adicionales aparecen también en las magnitudes termodinámicas. En un cristal no piezoeléctrico, cuando no existe un campo, el

potencial termodinámico es

$$\tilde{\Phi} = \Phi = \Phi_0 - \frac{1}{2} \mu_{iklm} \sigma_{ik} \sigma_{lm},$$

donde Φ_0 se refiere al cuerpo no deformado y el segundo término representa la energía elástica ordinaria, que viene determinada por el tensor de constantes elásticas μ_{iklm} . Para un piezoelectrónico, en cambio, tendremos

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 - \frac{1}{2} \mu_{iklm} \sigma_{ik} \sigma_{lm} - \epsilon_{ik} E_i E_k / 8\pi - E_i D_{0i} / 4\pi - \gamma_{ik} E_i \sigma_{ik}. \quad (17.7)$$

La forma de los últimos tres términos se determina teniendo en cuenta que las derivadas de $\tilde{\Phi}$ respecto de E_i (para valores dados de las tensiones internas y de la temperatura), calculadas según la fórmula

$$D_i = -4\pi \partial \tilde{\Phi} / \partial E_i,$$

deben conducir a las expresiones (17.6).

Conocido $\tilde{\Phi}$, se puede obtener a partir de (17.4) una fórmula que expresa el tensor de deformación en función de las tensiones σ_{ik} y del campo \mathbf{E} :

$$u_{ik} = -(\partial \tilde{\Phi} / \partial \sigma_{ik})_{T, \mathbf{E}} = \mu_{iklm} \sigma_{lm} + \gamma_{ik} E_i. \quad (17.8)$$

Hay que hacer notar que la interpretación de las magnitudes μ_{iklm} y ϵ_{ik} como constantes elásticas y permitividad en el caso de un piezoelectrónico es, en cierto sentido, un puro convenio. De acuerdo con la definición que hemos adoptado, dan la dependencia de la deformación respecto de las tensiones elásticas, para una intensidad dada del campo, y la dependencia del desplazamiento eléctrico respecto de dicha intensidad, para valores dados de las tensiones, respectivamente. Pero si la deformación tiene lugar para un desplazamiento dado del campo, o bien si consideramos la dependencia del primero respecto de la intensidad para una deformación dada, el papel de los coeficientes elásticos y de la permitividad lo representarán otras magnitudes que pueden expresarse (si bien de manera bastante complicada) en función de las componentes de los tensores μ , ϵ y γ .

La determinación del campo en un cuerpo piezoelectrónico debe efectuarse junto con la determinación de su deformación y constituye un problema a la vez de electrostática y de teoría de la elasticidad. En efecto, debe buscarse una solución común a las ecuaciones electrostáticas

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (17.9)$$

* El tensor μ_{iklm} determina la relación existente entre las tensiones y las deformaciones:
 $u_{ik} = -\partial \Phi / \partial \sigma_{ik} = \mu_{iklm} \sigma_{lm}$.

En la Teoría de la elasticidad (vol. VII, § 10), escribimos la dependencia inversa
 $\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm}$

Es claro que todas las propiedades de simetría del tensor μ_{iklm} coinciden completamente con las propiedades de simetría del tensor λ_{iklm} .

En la energía libre F , la energía elástica aparece con el signo más:

$$F_{el} = \frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm}.$$

En cambio, el potencial termodinámico se obtiene a partir de F restando $\sigma_{ik} u_{ik}$ y, por consiguiente,

$$\Phi_{el} = F_{el} - \sigma_{ik} u_{ik} = -\frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm} = -\frac{1}{2} \mu_{iklm} \sigma_{ik} \sigma_{lm}.$$

con \mathbf{D} dado por (17.6), y a las ecuaciones del equilibrio elástico

$$\partial\sigma_{ik}/\partial x_k = 0, \quad (17.10)$$

con las correspondientes condiciones de contorno sobre la superficie del cuerpo y teniendo en cuenta la relación entre σ_{ik} y la deformación dada por las fórmulas (17.8). En el caso general, este planteo del problema resulta muy complicado.

Sin embargo, el problema se simplifica considerablemente para un cuerpo de forma elipsoidal cuya superficie es libre (es decir, a la cual no se aplica ninguna fuerza mecánica exterior). En este caso (§ 8) el campo en el interior del cuerpo, y en consecuencia también su deformación, son homogéneos y todas las tensiones elásticas $\sigma_{ik} = 0$.

Finalmente, consideremos la cuestión que plantea el determinar qué tipos de simetría cristalográfica son susceptibles de presentar efectos piezoelectrinos. En otras palabras, se trata de ver qué limitaciones imponen las condiciones de simetría a las componentes del tensor $\gamma_{i,kl}$. En el caso general este tensor (que es simétrico respecto de los índices k y l) tiene 18 componentes no nulas independientes, pero de hecho el número de componentes independientes suele ser considerablemente menor.

En todas las transformaciones de simetría de un cristal dado, las componentes de su tensor $\gamma_{i,kl}$ deben conservarse invariables. De aquí se sigue desde luego que, en cualquier caso, no puede ser piezoelectrino un cuerpo que posea un centro de simetría; en particular, naturalmente, ningún cuerpo isótropo puede serlo. En efecto, en la simetría respecto de dicho centro (cambio de signo de las tres coordenadas) cambian de signo todas las componentes de un tensor de tercer orden.

De las 32 clases cristalográficas, sólo 20 en total pueden presentar efectos piezoelectrinos. A éstas pertenecen, ante todo, las 10 clases de que se habló en el § 13, clases en las que se dan también los efectos piroeléctricos (todos los cuerpos piroeléctricos son también piezoelectrinos). Además, son piezoelectrinos los cristales de las siguientes 10 clases:

sistema rómbico: D_2

sistema tetragonal: D_4 , D_{2d} , S_4

sistema romboédrico: D_3

sistema hexagonal: D_6 , C_{3h} , D_{3h}

sistema cúbico: T , T_d .

Las componentes no nulas del tensor piezoelectrónico para cada clase se dan en los problemas de este párrafo.

PROBLEMAS

1. Determinar las componentes no nulas del tensor $\gamma_{i,kl}$ para las clases cristalinas no piroeléctricas susceptibles de ser piezoelectrinas.

Solución. La clase D_2 tiene tres ejes de simetría de segundo orden perpendiculares entre sí que elegiremos como ejes x , y , z . Los giros de 180° en torno de estos ejes cambian los signos de cada

dos de las tres coordenadas. Dado que las componentes $\gamma_{i,kl}$ se transforman como los productos $x_i x_k x_l$, sólo pueden ser diferentes de cero aquellas componentes cuyos tres índices son todos diferentes:

$$\gamma_{x,yz}, \gamma_{z,xy}, \gamma_{y,zx}.$$

Las restantes componentes no nulas son iguales a éstas en virtud de la propiedad $\gamma_{i,kl} = \gamma_{i,lk}$. De acuerdo con esto, la parte piezoelectrónica del potencial termodinámico* es

$$\tilde{\Phi}_{\text{pie}} = -2(\gamma_{x,yz} E_x \sigma_{yz} + \gamma_{y,zx} E_y \sigma_{xz} + \gamma_{z,xy} E_z \sigma_{xy}). \quad (1)$$

La clase D_{2d} se obtiene añadiendo a los ejes de la clase D_2 dos planos de simetría más, planos que pasan por uno de los ejes (digamos, por el eje z) y que dividen en dos el ángulo formado por los ejes x y y . La reflexión sobre uno de estos planos equivale a la transformación $x \rightarrow y, y \rightarrow x, z \rightarrow z$. Por ello, las componentes $\gamma_{i,kl}$ que difieren en la permutación de los índices x e y deben ser iguales, de modo que de los tres coeficientes en (1) solamente dos se conservan independientes:

$$\gamma_{z,xy}, \gamma_{x,yz} = \gamma_{y,zx}.$$

La clase T se obtiene a partir de la clase D_2 añadiendo cuatro ejes diagonales de simetría de tercer orden, la rotación en torno de los cuales equivale a la permutación circular de los ejes x, y, z , por ejemplo: $x \rightarrow z, y \rightarrow x, z \rightarrow y$. Por ello, pasan a ser iguales los tres coeficientes en (1):

$$\gamma_{x,yz} = \gamma_{z,xy} = \gamma_{y,zx}.$$

El mismo resultado se obtiene para la clase cúbica T_d .

La clase D_4 posee un eje de simetría de cuarto orden (eje z) y cuatro ejes de segundo orden que se encuentran en el plano xy . Además de los ejes de simetría de la clase D_2 , basta considerar aquí la rotación de 90° en torno del eje z , es decir, la transformación $x \rightarrow y, y \rightarrow -x, z \rightarrow z$. En virtud de ésta, uno de los coeficientes en (1) se anula ($\gamma_{z,xy} = -\gamma_{z,yx} = -\gamma_{z,zy}$, de donde $\gamma_{z,xy} = 0$), y los otros dos difieren tan sólo en el signo: El mismo resultado se obtiene para la clase D_6 .

La clase S_4 contiene las transformaciones $x \rightarrow y, y \rightarrow -x, z \rightarrow -z$ y $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$. Las componentes diferentes de cero son

$$\gamma_{z,xy}, \gamma_{x,yz} = \gamma_{y,zx}, \gamma_{z,xx} = -\gamma_{z,yy}, \gamma_{x,zz} = -\gamma_{y,zy}.$$

Eligiendo convenientemente las direcciones de los ejes x, y , una de estas cantidades puede reducirse a cero.

La clase D_3 posee un eje de simetría de tercer orden (eje z) y tres ejes de simetría de segundo orden en el plano xy , uno de los cuales elegiremos como eje x . Para hallar las limitaciones que impone la existencia de un eje de tercer orden, conviene aplicar una transformación formal introduciendo las «coordenadas» complejas

$$\xi = x + iy, \eta = x - iy;$$

la coordenada z la conservaremos sin modificación alguna. A estas nuevas coordenadas refiramos también el tensor $\gamma_{i,kl}$. Los subíndices que caracterizan a sus componentes toman ahora los valores ξ, η, z . En una rotación de 120° alrededor del eje z , estas «coordenadas» se transforman de acuerdo con

$$\xi \rightarrow \xi e^{2\pi i/3}, \eta \rightarrow \eta e^{-2\pi i/3}, z \rightarrow z.$$

Las únicas componentes que, en estas condiciones, se conservan invariables y, por consiguiente, pueden ser diferentes de cero son las siguientes: $\gamma_{z,\xi\xi}, \gamma_{\eta,z\xi}, \gamma_{\xi,\xi\eta}, \gamma_{\xi,\xi\xi}, \gamma_{\eta,\eta\eta}$. En cambio, una rotación de 180° en torno del eje x conduce a la transformación $x \rightarrow x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$.

* Para evitar interpretaciones erróneas recordaremos que si se calculan las componentes del tensor de deformación u_{ik} derivando directamente la expresión concreta de Φ respecto de σ_{ik} , las derivadas respecto de las componentes σ_{ik} con $i \neq k$ darán un valor doble de las correspondientes componentes u_{ik} (cf. vol. VII, Teoría de la elasticidad, nota al final del problema del § 10).

o bien, en «coordenadas» $\xi, \eta, z : \xi \rightarrow \eta, \eta \rightarrow \xi, z \rightarrow -z$. Entonces $\gamma_{z,\eta\xi}$ y $\gamma_{z,z\xi}$ cambian de signo y, por lo tanto, deben anularse, mientras que el resto de las componentes antes citadas se transforman entre sí dos a dos, lo que conduce a las igualdades $\gamma_{\eta,\xi\xi} = -\gamma_{\xi,\eta\eta}, \gamma_{\xi,\xi\xi} = \gamma_{\eta,\eta\eta}$. Para escribir la expresión de Φ_{pie} hay que formar la suma $-\gamma_{i,kl}E_i\sigma_{kl}$ en la cual los índices toman los valores ξ, η, z :

$$\tilde{\Phi}_{\text{pie}} = -2\gamma_{\eta,z\xi}(E_\eta\sigma_{z\xi} - E_\xi\sigma_{z\eta}) - \gamma_{\xi,\xi\xi}(E_\xi\sigma_{\xi\xi} + E_\eta\sigma_{\eta\eta}).$$

Aquí hay que expresar aún las componentes E_i y σ_{ik} , dadas en función de las «coordenadas» ξ, η, z , en términos de las componentes relativas a las coordenadas iniciales x, y, z . Es fácil hacerlo aplicando la propiedad de que las componentes de un tensor se transforman como los productos de las correspondientes coordenadas. En consecuencia, por ejemplo, de

$$\xi^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

se sigue que

$$\sigma_{\xi\xi} = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy}.$$

Obtenemos así en definitiva

$$\tilde{\Phi}_{\text{pie}} = 2a(E_y\sigma_{zx} - E_x\sigma_{zy}) + b[2E_y\sigma_{xy} - E_x(\sigma_{xz} - \sigma_{yy})], \quad (2)$$

donde $a = 2i\gamma_{\eta,z\xi}$, $b = 2\gamma_{\xi,\xi\xi}$ son constantes reales. Las relaciones entre las componentes $\gamma_{i,kl}$ expresadas en función de las coordenadas x, y, z son, como puede verse en (2)*:

$$\gamma_{y,zx} = -\gamma_{x,zy} \equiv a, \quad \gamma_{y,xy} = -\gamma_{x,zx} = \gamma_{x,yy} \equiv b.$$

La clase D_{3h} se obtiene añadiendo a la clase D_3 un plano de simetría perpendicular al eje de tercer orden (plano xy). La reflexión sobre este plano equivale a cambiar el signo de z y, por ello, también $\gamma_{\eta,z\xi} = 0$, de modo que en (2) queda sólo el término con el coeficiente b .

La clase C_{3h} posee, junto con un eje de tercer orden, un plano de simetría perpendicular al mismo. La reflexión en dicho plano equivale a cambiar el signo de z y, en consecuencia, deben ser iguales a cero todas las componentes $\gamma_{i,kl}$ entre cuyos índices aparece z un número impar de veces. Teniendo en cuenta también las limitaciones antes consideradas que impone un eje de simetría de tercer orden, se encuentra que sólo dos componentes son diferentes de cero, $\gamma_{\eta,\eta\eta}$ y $\gamma_{\xi,\xi\xi}$. Estas cantidades deben ser conjugado-complejas entre sí a fin de que Φ sea real. Haciendo $2\gamma_{\eta,\eta\eta} = a + ib$, $2\gamma_{\xi,\xi\xi} = a - ib$, obtendremos

$$\tilde{\Phi}_{\text{pie}} = a[2E_y\sigma_{xy} - E_x(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})] + b[2E_x\sigma_{xy} + E_y(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})]. \quad (3)$$

Mediante una elección adecuada de las direcciones de los ejes x, y , se pueden reducir a cero a o b .

2. El mismo problema para las clases susceptibles de presentar efectos piroeléctricos.

Solución. Tomemos como eje z el eje de simetría de segundo, tercero, cuarto o sexto orden, y en la clase C_s , el perpendicular al plano de simetría. En las clases C_{nv} el plano xz coincide con uno de los planos de simetría. Mediante una elección adecuada de los ejes, en la clase C_1 se pueden anular aún tres componentes, y la elección de los ejes x, y en la clase C_s , C_n permite anular una componente.

A continuación se indican todas las componentes no nulas de $\gamma_{i,kl}$ para cada una de las clases.

Clase C_1 : todas las $\gamma_{i,kl}$.

Clase C_s : todas las componentes que no contienen el índice z o lo contienen dos veces.

Clase C_{2v} : $\gamma_{z,zx}, \gamma_{z,yy}, \gamma_{z,zz}, \gamma_{x,zx}, \gamma_{y,yz}$.

Clase C_2 : igual que en la clase C_{2v} y, además, $\gamma_{x,yz}, \gamma_{y,zx}, \gamma_{z,xy}$.

Clase C_{4v} : $\gamma_{z,zx} = \gamma_{z,yy}, \gamma_{z,zz}, \gamma_{x,zx} = \gamma_{y,yz}$.

Clase C_4 : las mismas que en C_{4v} y, además, $\gamma_{x,yz} = -\gamma_{y,zx}$.

* En coordenadas no ortogonales, cual lo son las coordenadas ξ, η, z , hay que distinguir, como es sabido, entre las componentes covariantes y contravariantes de los tensores. Esta circunstancia debería tenerse en cuenta también al pasar a las coordenadas originales x, y, z . Sin embargo, evitamos el hacerlo obteniendo la relación que buscamos entre las diferentes componentes de $\gamma_{i,kl}$ en el sistema x, y, z directamente a partir de la forma de la combinación escalar (2).

Clase C_{3v} : $\gamma_{z,zz} = \gamma_{y,yz}$, $\gamma_{x,xz} = -\gamma_{z,yy} = -\gamma_{y,xy}$, $\gamma_{z,xx} = \gamma_{z,yy}$.

Clase C_3 : las mismas que en la clase C_{3v} y, además, $\gamma_{x,yz} = -\gamma_{y,zx}$, $\gamma_{y,xx} = -\gamma_{y,yy} = \gamma_{x,xy}$.

Clase C_{6v} : $\gamma_{z,zz} = \gamma_{y,yz}$, $\gamma_{x,xz} = \gamma_{z,yy}$.

Clase C_6 : las mismas que en la clase C_{6v} y, además, $\gamma_{x,yz} = -\gamma_{y,zx}$.

3. Determinar el módulo de Young (el coeficiente de proporcionalidad entre la tracción y el alargamiento relativo) para una placa planoparalela constituida por un cuerpo piezoelectrónico no-piroeléctrico en los siguientes casos: a) de la placa tiran las armaduras de un condensador en cortocircuito, b) de la placa tiran las armaduras de un condensador no cargado, c) la placa se extiende paralelamente a su plano en ausencia de un campo exterior.

Solución. a) En este caso la intensidad del campo dentro de la placa es $E = 0$. La única componente diferente de cero del tensor σ_{ik} es la tensión σ_{zz} (el eje z es perpendicular al plano de la placa*). De (17.8) se sigue $u_{zz} = \mu_{zzzz} \sigma_{zz}$, de donde resulta para el módulo de Young E :

$$E = 1/\mu_{zzzz}.$$

b) En este caso en la placa se tiene $E_x = E_y = 0$, $D_z = 0$. De (17.6) y (17.8) se sigue

$$D_z = \epsilon_{zz} E_z + 4\pi \gamma_{z,zz} \sigma_{zz} = 0, \quad u_{zz} = \mu_{zzzz} \sigma_{zz} + \gamma_{z,zz} E_z.$$

Eliminando entre estas dos ecuaciones E_z , se encuentra

$$1/E = \mu_{zzzz} - 4\pi \gamma_{z,zz}^2 / \epsilon_{zz}.$$

c) En este caso también $E_x = E_y = 0$, $D_z = 0$, mientras que la tensión puede suponerse aplicada a lo largo del eje x . Tenemos

$$D_z = \epsilon_{zz} E_z + 4\pi \gamma_{z,xx} \sigma_{xx} = 0, \quad u_{xx} = \mu_{xxxx} \sigma_{xx} + \gamma_{z,xx} E_z.$$

Eliminando E_z , se obtendrá

$$1/E = \mu_{xxxx} - 4\pi \gamma_{z,xx}^2 / \epsilon_{zz}.$$

4. Hallar la ecuación que determina la velocidad del sonido en un medio piezoelectrónico.

Solución. En este problema resulta más conveniente utilizar como variables independientes las magnitudes u_{ik} , en vez de las σ_{ik} . Escribamos \tilde{F} en la forma

$$\tilde{F} = F_0 + \frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm} - \frac{1}{8\pi} \epsilon_{ik} E_i E_k - \frac{1}{4\pi} E_i D_{0i} + \beta_{i,kl} E_i u_{ki},$$

donde

$$\beta_{i,kl} = -\lambda_{klik'l'} \gamma_{i,k'l'},$$

por lo que

$$\sigma_{ik} = \partial \tilde{F} / \partial u_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm} + \beta_{i,ik} E_i.$$

Las ecuaciones del movimiento de la teoría de la elasticidad son

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} + \beta_{i,ik} \frac{\partial E_i}{\partial x_k},$$

donde \mathbf{u} es el vector desplazamiento ligado con u_{ik} por la igualdad

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

La ecuación $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ da

$$\epsilon_{ik} \frac{\partial E_k}{\partial x_i} - 4\pi \beta_{i,kl} \frac{\partial u_{kl}}{\partial x_i} = 0,$$

* No se supone que coincida con alguna de las direcciones cristalográficas privilegiadas.

y la intensidad del campo la expresaremos en función de su potencial:

$$\mathbf{E}_i = -\partial\phi/\partial x_i,$$

con lo que queda satisfecha la ecuación $\text{rot } \mathbf{E} = 0$.

En una onda acústica plana \mathbf{u} y ϕ son proporcionales a $e^{i(k_r r - \omega t)}$ y de las ecuaciones antes escritas se sigue

$$\omega^2 u_i = \lambda_{iklm} k_k k_l u_m - \beta_{i,ik} k_k k_l \phi,$$

$$\epsilon_{ik} k_k k_l \phi + 4\pi \beta_{i,ik} k_k k_l u_i = 0.$$

Eliminando entre ellas ϕ , escribiremos la condición de compatibilidad de las ecuaciones que se obtienen para u_i en la forma

$$|\omega^2 \delta_{ik} - \lambda_{iklm} k_k k_m - 4\pi(\beta_{i,mik} k_m)(\beta_{p,qk} k_p k_q)/\epsilon_{rs} k_r k_s| = 0.$$

Para cada dirección dada del vector de onda \mathbf{k} , esta ecuación determina tres velocidades de fase, en general diferentes, para la propagación del sonido ω/k . La complicada dependencia de la velocidad respecto de la dirección de la onda constituye una propiedad característica de los medios piezoelectrómicos.

§ 18. Desigualdades termodinámicas

Según las fórmulas del § 10, la energía libre total se representa en forma de integral

$$\mathcal{F} = \int F(T, \rho, \mathbf{D}) dV, \quad (18.1)$$

extendida a todo el espacio. Supondremos que la función $\mathbf{D}(x, y, z)$ que aparece en el integrando está sometida únicamente a la condición de cumplir la ecuación

$$\text{div } \mathbf{D} = 0 \quad (18.2)$$

dentro del dieléctrico, y la condición

$$\oint \phi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi e \quad (18.3)$$

sobre la superficie de un conductor que posee una carga dada; mediante estas igualdades se establece la relación del campo con sus fuentes. Por lo demás, consideraremos la función $\mathbf{D}(x, y, z)$ como arbitraria y, en particular, no le imponemos de antemano la condición de que satisfaga a la segunda ecuación del campo $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ (donde $\mathbf{E} = 4\pi\partial F/\partial\mathbf{D}$), ni la condición de contorno $\phi = \text{const}$ sobre la superficie de los conductores. Demostraremos que estas últimas ecuaciones pueden obtenerse entonces a partir de la condición de que sea mínima la integral (18.1) respecto de las variaciones de la función $\mathbf{D}(x, y, z)$ que satisfacen a las ecuaciones (18.2) y (18.3). Hay que subrayar que la posibilidad de proceder de esta manera no es evidente a priori, ya que las distribuciones del campo que intervienen en la determinación del mínimo de la integral (18.1) no corresponden a estados físicamente posibles (tales distribuciones no satisfacen todas las ecuaciones del campo); en la condición termodinámica de mínimo de la energía libre, en cambio, se comparan entre sí únicamente estados diferentes físicamente posibles.

El problema de hallar el mínimo de la integral (18.1), supuesto que se cumplan las condiciones suplementarias (18.2) y (18.3), se resuelve mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. Siguiendo este método, multiplicaremos la variación de la condición (18.2) por una función, de momento indeterminada, de las coordenadas (designémosla por $-\phi/4\pi$), y la variación de la condición (18.3) por un factor constante indeterminado (que llamaremos $\phi_0/4\pi$), igualando luego a cero la suma de las variaciones

$$\int \delta F dV - \frac{1}{4\pi} \int \phi \operatorname{div} \delta \mathbf{D} dV + \frac{\phi_0}{4\pi} \int \delta \mathbf{D} \cdot df = 0.$$

En el primer término hagamos*

$$\delta F = (\partial F / \partial \mathbf{D})_{T, \rho} \cdot \delta \mathbf{D} = \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} / 4\pi,$$

y el segundo lo transformamos integrando por partes:

$$\int \phi \operatorname{div} \delta \mathbf{D} dV = \oint \phi \delta \mathbf{D} \cdot df - \int \delta \mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} \phi dV.$$

En definitiva obtenemos

$$\int (\mathbf{E} + \operatorname{grad} \phi) \cdot \delta \mathbf{D} dV + \oint (\phi_0 - \phi) \delta \mathbf{D} \cdot df = 0.$$

De aquí se sigue que en todo el volumen debe ser $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$ (y, en consecuencia, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$) y que sobre la superficie del conductor se tiene $\phi = \phi_0 = \text{const}$. Estas son precisamente las ecuaciones correctas para la intensidad del campo, y el factor de Lagrange ϕ resulta ser su potencial.

De manera análoga se puede demostrar que las ecuaciones relativas al desplazamiento eléctrico se obtienen a partir de la condición de que sea mínima la integral

$$\tilde{\mathcal{F}} = \int \tilde{F}(T, \rho, \mathbf{E}) dV$$

en la que se varía la función $\mathbf{E}(x, y, z)$ con las condiciones suplementarias de que sea $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$ y $\phi = \text{const}$ sobre la superficie del conductor. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathcal{F}} &= \int (\partial \tilde{F} / \partial \mathbf{E}) \cdot \delta \mathbf{E} dV = \int \mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} \delta \phi dV / 4\pi \\ &= \oint \delta \phi \mathbf{D} \cdot df / 4\pi - \int \delta \phi \operatorname{div} \mathbf{D} dV / 4\pi = 0. \end{aligned}$$

La primera integral es igual a cero, puesto que $\delta \phi = 0$ sobre la superficie, y de la segunda se sigue, teniendo en cuenta que $\delta \phi$ es arbitraria en el volumen, la ecuación buscada $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$.

* La energía libre presenta un mínimo para una temperatura dada. La variación debe efectuarse respecto de dos magnitudes independientes: \mathbf{D} y ρ . Nos interesa aquí tan sólo el resultado de la variación respecto de \mathbf{D} . La variación de la integral (18.1) respecto de la densidad (con la condición suplementaria de que sea constante la masa del cuerpo, es decir, la integral $\int \rho dV$), en cambio, da una de las condiciones ordinarias del equilibrio térmico, a saber, la constancia del potencial químico ζ .

Si el cuerpo no se encuentra en un campo eléctrico exterior (en particular, si no existen conductores cargados), puede resultar posible formular la condición de equilibrio termodinámico como condición de mínimo absoluto (incondicional) de la energía libre total (18.1). Esta condición se reduce a la condición de que sea mínima la densidad de energía libre F en tanto que función de la variable independiente \mathbf{D} :

$$\partial F / \partial \mathbf{D} = \mathbf{E} / 4\pi = 0,$$

es decir, la intensidad del campo debe ser nula en todo el espacio. Si en estas condiciones se puede hallar una distribución del desplazamiento eléctrico que satisfaga la condición $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, el estado que así se encuentra corresponderá al equilibrio termodinámico*.

Igualando a cero la variación primera de la energía libre, encontramos tan sólo condiciones necesarias, pero no suficientes, para que aquella sea mínima. La determinación de condiciones suficientes exige investigar la variación segunda. Estas condiciones adoptan la forma de determinadas desigualdades (las llamadas *desigualdades termodinámicas*) y, como es sabido, son condiciones que permiten asegurar el carácter estable de un estado del cuerpo**.

Cuando el vínculo entre \mathbf{D} y \mathbf{E} es lineal, todas las relaciones se simplifican considerablemente y la desigualdad termodinámica que nos interesa (ligada con las propiedades dieléctricas del cuerpo) pasa a ser evidente. La energía libre total vale

$$F_0 + \int (D^2 / 8\pi\epsilon) dV.$$

Está claro que esta energía puede presentar un mínimo tan sólo si $\epsilon > 0$; en el caso contrario sería posible disminuir indefinidamente el valor de la integral sin más que atribuir al desplazamiento \mathbf{D} un valor arbitrariamente grande. De esta manera, nada esencialmente nuevo obtenemos en este caso, puesto que ya sabemos que la permitividad debe ser, en efecto, no tan sólo positiva, sino también mayor que la unidad (véase § 14).

En cambio, en el caso general en que la relación entre \mathbf{D} y \mathbf{E} es arbitraria hay que considerar la variación segunda de la integral (18.1), variando precisamente a la vez \mathbf{D} y ρ (manteniendo constante tan sólo la temperatura). En un cuerpo isótropo $F(T, \rho, \mathbf{D})$ depende únicamente del módulo del vector \mathbf{D} , si bien se varían sus tres componentes independientemente. Elijamos la dirección del vector \mathbf{D} antes de la variación según el eje z . Entonces, el cambio en el módulo del vector \mathbf{D} se expresa en función de las variaciones de sus componentes, con una precisión que alcanza los términos de segundo orden, mediante la igualdad

$$\delta D = \delta D_z + (\delta D_x)^2 / 2D + (\delta D_y)^2 / 2D.$$

* Estamos considerando aquí cuerpos en los cuales puede ser $\mathbf{D} \neq 0$ a la vez que $\mathbf{E} = 0$ (véase el párrafo siguiente). En el caso contrario tendríamos, simplemente, el resultado trivial $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{D} = 0$ en todo el espacio.

** Véase vol. V. *Física estadística*, § 21.

Las variaciones primera y segunda de la integral (18.1) se obtienen a la vez en la expresión

$$\int \left\{ \frac{\partial F}{\partial D} \delta D + \frac{\partial F}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial D^2} (\delta D)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial D \partial \rho} \delta D \delta \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} (\delta \rho)^2 \right\} dV.$$

Substituyendo aquí δD por su valor y reuniendo los términos de segundo orden, se encuentra la variación segunda:

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{2D} \frac{\partial F}{\partial D} [(\delta D_x)^2 + (\delta D_y)^2] dV + \\ & + \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial D^2} (\delta D_z)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial D \partial \rho} \delta D_z \delta \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} (\delta \rho)^2 \right\} dV. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Los dos términos aquí escritos son independientes el uno del otro. El primero de ellos es positivo si $\frac{1}{D} \frac{\partial F}{\partial D} > 0$. Pero $\partial F / \partial \mathbf{D} = \mathbf{E}/4\pi$, de modo que la derivada $\partial F / \partial D$ es positiva o negativa según que el vector \mathbf{D} sea paralelo o antiparalelo al vector \mathbf{E} . Así pues, las direcciones orientadas de los vectores \mathbf{D} y \mathbf{E} deben ser las mismas.

Las condiciones para que el segundo término en (18.4) sea positivo se reducen a las desigualdades

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} > 0, \quad (18.5)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial D^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial D} \right)^2 > 0. \quad (18.6)$$

Dado que $\partial F / \partial \rho = \zeta$, $\partial F / \partial D = E/4\pi$, de la primera de ellas se deduce

$$(\partial \zeta / \partial \rho)_{D,T} > 0, \quad (18.7)$$

y la segunda se puede escribir también en forma de jacobiano:

$$\frac{\partial(\partial F / \partial D, \partial F / \partial \rho)}{\partial(D, \rho)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(E, \zeta)}{\partial(D, \rho)} > 0.$$

Pasando de las variables D, ρ a las variables D, ζ , se tiene

$$\frac{\partial(E, \zeta)}{\partial(D, \rho)} = \frac{\partial(E, \zeta)}{\partial(D, \zeta)} \frac{\partial(D, \zeta)}{\partial(D, \rho)} = \left(\frac{\partial E}{\partial D} \right)_\zeta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right)_D > 0;$$

en virtud de (18.7), esta desigualdad equivale a la condición

$$(\partial E / \partial D)_{\zeta, T} > 0. \quad (18.8)$$

Hemos obtenido así las desigualdades termodinámicas que buscábamos. Cuando

no existe campo la desigualdad (18.7) pasa a ser la condición ordinaria de que sea positiva la compresibilidad isotérmica $(\partial p/\partial \rho)_T > 0^*$. En cambio, la desigualdad (18.8) da $\epsilon > 0$, de modo que cuando $E \rightarrow 0$ el desplazamiento $D \rightarrow \epsilon E$.

De las dos desigualdades (18.5) y (18.6), la segunda es la más restrictiva; puede quedar violada antes que la primera, mientras que es imposible que ocurra lo contrario. La igualdad

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial D^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial D} \right)^2 = \frac{\partial(E, \zeta)}{\partial(D, \rho)} = 0$$

corresponde al llamado *estado crítico***. Esta condición es más conveniente escribirla en otra forma multiplicándola por el factor diferente de cero $\partial(D, \rho)/\partial(E, \rho)$:

$$\partial(E, \zeta)/\partial(E, \rho) = (\partial \zeta / \partial \rho)_{E,T} = 0. \quad (18.9)$$

La determinación de las condiciones suplementarias de estabilidad del estado crítico de una substancia exige investigar las variaciones tercera y cuarta, problema en que no nos detendremos aquí. Tan sólo indicaremos que ello conduce a los resultados

$$(\partial^2 \zeta / \partial \rho^2)_{E,T} = 0, \quad (18.10)$$

$$(\partial^3 \zeta / \partial \rho^3)_{E,T} > 0, \quad (18.11)$$

análogos a los que son válidos en ausencia del campo eléctrico.

PROBLEMA

Determinar el desplazamiento del punto crítico de una substancia dieléctrica en un campo eléctrico.

Solución. Substituyendo en (18.9) la expresión de ζ dada por (10.18), encontramos

$$(\partial \zeta_0 / \partial \rho)_T - (E^2 / 8\pi)(\partial^2 \epsilon / \partial \rho^2)_T = 0.$$

Para el potencial químico cuando $E = 0$ se tiene $\left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial \rho} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T$ (ver nota* al pie de la pág.) donde $p = p(\rho, T)$ debe interpretarse como ecuación de estado de la materia cuando no existe campo. Así, pues,

$$(\partial p / \partial \rho)_T = (\rho E^2 / 8\pi)(\partial^2 \epsilon / \partial \rho^2)_T.$$

* Recordemos que, cuando no existe campo, ζ es el potencial termodinámico por unidad de masa de materia y, según las relaciones termodinámicas ordinarias, su diferencial $d\zeta = \frac{1}{\rho} dp - \frac{S}{\rho} dT$, de modo que $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T$. En el razonamiento expuesto hemos dejado de lado la segunda de las desigualdades termodinámicas ordinarias, la que expresa que la capacidad calorífica es positiva.

** Véase vol. V, *Física estadística*, § 83.

Si no hay campo eléctrico, el punto crítico viene determinado por la igualdad $(\partial p/\partial \rho)_T = 0$, a la vez que para su estabilidad debe ser también $(\partial^2 p/\partial \rho^2)_T = 0$. Tenemos, por lo tanto,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \approx \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \Delta \rho + \frac{\partial^2 p}{\partial \rho \partial T} \Delta T \approx \frac{\partial^2 p}{\partial \rho \partial T} \Delta T,$$

donde ΔT , $\Delta \rho$ son las variaciones de la temperatura crítica y de la densidad (variaciones que, como confirma el resultado final, son del mismo orden de pequeñez). Finalmente, para la variación de la temperatura se obtiene

$$\Delta T = \frac{\rho E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2} \right)_T / \frac{\partial^2 p}{\partial \rho \partial T}.$$

El desplazamiento de la presión crítica en función de ΔT se determina por

$$\Delta p = (\partial p/\partial T)_\rho \Delta T.$$

En cambio, en lo que concierne a la variación $\Delta \rho$, para determinarla es necesario utilizar de manera análoga la igualdad (18.10).

§ 19. Medios ferroeléctricos

Entre las diferentes modificaciones cristalográficas de una misma substancia cabe encontrar tanto las piroeléctricas como las no piroeléctricas. Si el paso entre dos de tales modificaciones tiene lugar mediante un cambio de fase de segunda especie, cerca del punto en que se produce la transición la substancia muestra toda una serie de propiedades características que la distinguen de los piroeléctricos ordinarios. Estas propiedades se califican de *ferroeléctricas*.

En un cristal piroeléctrico ordinario el cambio de la dirección de polarización espontánea está vinculado con la necesidad de una reconstrucción profunda de la red cristalina. Incluso si el resultado final de dicha reconstrucción fuese favorable desde el punto de vista energético, bien puede ocurrir que el que tenga lugar resulte imposible debido al hecho de que exigiría saltar «barreras energéticas» muy altas.

En un cuerpo ferroeléctrico, en cambio, la situación es fundamentalmente otra, debido a que cerca del punto de cambio de fase de segunda especie (del punto de Curie) la disposición de los átomos en la red cristalina de la fase piroeléctrica difiere relativamente muy poco de su disposición en la red no piroeléctrica (en virtud de lo cual es también pequeña la polarización espontánea). Por esta causa, un cambio en la dirección de la polarización espontánea exige, en tal caso, únicamente una reestructuración más bien pequeña de la red (un pequeño desplazamiento de los átomos) y puede producirse de manera relativamente fácil.

El carácter concreto de las propiedades ferroeléctricas de un cuerpo dependen de modo esencial de su simetría cristalográfica. La dirección de polarización espontánea de la fase piroeléctrica (que llamaremos *eje ferroeléctrico*) viene determinada de antemano por la propia estructura de la fase no piroeléctrica al otro lado del punto de Curie. En algunos casos esta determinación es unívoca, en el sentido de que el eje ferroeléctrico se manifiesta solamente en una dirección cristalográfica del todo determinada; la dirección de la polarización espontánea viene fijada en este caso salvo el signo, puesto que en la fase no piroeléctrica las dos direcciones de sen-

tidos opuestos paralelas al eje ferroeléctrico deben ser del todo equivalentes (en el caso contrario, también esta modificación cristalográfica poseería características piroeléctricas). En cambio, en otros casos, la simetría de la fase no piroeléctrica puede ser tal que admite la aparición de una polarización espontánea en una cualquiera de varias direcciones cristalográficas equivalentes*.

La teoría cuantitativa de la ferroelectricidad puede desarrollarse en correspondencia con la teoría general de los cambios de fase de segunda especie**; así procedió V. L. GINZBURG (1945).

Como base de los razonamientos que seguirán más adelante, expondremos algunas consideraciones relativas a la estabilidad termodinámica de los estados. Desde este punto de vista, la transición se caracteriza por el hecho de que, a un lado de la misma, el estado con $D = 0$ puede ser estable, mientras que al otro lado es siempre inestable y, en consecuencia, debe aparecer un desplazamiento eléctrico diferente de cero (incluso para un campo E igual a cero). Para concretar, supondremos a continuación que la fase piroeléctrica ($D \neq 0$) corresponde a temperaturas $T < \Theta$ (Θ es el punto de transición); sin embargo, hay que subrayar que esta disposición de las fases, si bien es la más frecuente, en modo alguno es necesaria: en la naturaleza se observa también el caso opuesto.

Dado que nos interesan, ante todo, las propiedades dieléctricas de la materia, supondremos en primer lugar que no hay tensiones internas en el cuerpo. Para determinar las condiciones de estabilidad cabe partir de la condición de que sea mínimo (para un valor dado de la temperatura y tensiones constantes iguales a cero) el potencial termodinámico total del cuerpo. Como vimos en el § 18, dicha condición se reduce a la de que sea positiva la variación segunda del potencial termodinámico por unidad de volumen Φ . Para los estados en que el desplazamiento difiere poco de cero, el papel de variación segunda de Φ lo representa simplemente la expresión

$$\Phi - \Phi_0 = (1/8\pi)\epsilon^{-1}_{ik}D_iD_k.$$

Si se eligen los ejes de coordenadas de forma que coincidan con los ejes principales del tensor ϵ_{ik} , se tendrá

$$\Phi - \Phi_0 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{\epsilon^{(x)}} D_x^2 + \frac{1}{\epsilon^{(y)}} D_y^2 + \frac{1}{\epsilon^{(z)}} D_z^2 \right). \quad (19.1)$$

* Un ejemplo del primer tipo lo ofrece la sal de Seignette, cuya fase no piroeléctrica presenta simetría rómica. El eje ferroeléctrico aparece en ella (en el punto de Curie) en una dirección cristalgráfica bien determinada (uno de los ejes de segundo orden), pasando a ser monoclinica la propia red.

Un ejemplo del segundo tipo es el del titanato de bario. Su modificación no piroeléctrica posee una red cúbica y puede ser ferroeléctrico cualquiera de sus tres ejes cúbicos. Una vez que en el punto de Curie se presenta la polarización espontánea, estas tres direcciones, naturalmente, dejan de ser equivalentes: tan sólo sigue siendo eje de cuarto orden el eje ferroeléctrico y la red se transforma en tetragonal.

** Véase vol. V, *Física estadística*, cap. XIV. La exposición que sigue, sin embargo, se ajusta a un esquema que difiere del habitual.

Mientras los tres coeficientes $\frac{1}{\epsilon^{(i)}}$ sean positivos, el estado con $\mathbf{D} = 0$ satisface las condiciones de estabilidad (es decir, puede corresponder a un mínimo de Φ). Así pues, la fase piroeléctrica puede aparecer tan sólo si cambia de signo uno de estos coeficientes. El cambio de fase de segunda especie se determina así por la condición de que este coeficiente se anule.

En estas condiciones, pasa a ser ferroeléctrico el eje para el cual $1/\epsilon^{(i)}$ toma el valor cero. Aquí son posibles varios casos, según sea la simetría de la fase no piroeléctrica. Si esta simetría es tal que $\epsilon^{(x)} \neq \epsilon^{(y)} \neq \epsilon^{(z)}$, se anula uno sólo de los coeficientes (19.1) y la posición del eje ferroeléctrico queda fijada únicamente. Si $\epsilon^{(x)} = \epsilon^{(y)} = \epsilon^{(z)}$ (para lo cual es necesario que la simetría sea cúbica), los tres coeficientes se anulan simultáneamente y el eje ferroeléctrico puede aparecer en diferentes direcciones (véase más adelante). Finalmente, si en virtud de la simetría $\epsilon^{(x)} = \epsilon^{(y)} \neq \epsilon^{(z)}$, pueden anularse o bien un coeficiente o bien dos de ellos a la vez en (19.1).

Consideremos primero el caso en que el eje ferroeléctrico queda fijado únicamente, eje que tomaremos como eje z . Las propiedades dieléctricas del cristal en las direcciones de los ejes x e y no presentan en tal caso ninguna anomalía y para estudiar las propiedades a lo largo del eje z basta considerar en el potencial termodinámico solamente los términos que contienen D_z .

La expresión (19.1) constituye esencialmente los primeros términos del desarrollo de Φ en potencias de D . Dado que cerca del punto de transición $1/\epsilon^{(z)}$ es pequeño, en esta región, junto con el término cuadrático, es necesario tener en cuenta también el término siguiente del desarrollo respecto de D_z . No puede haber términos con potencias impares en dicho desarrollo, puesto que cambiarían de signo (y con ello cambiaría el valor de Φ) al cambiar D_z por $-D_z$, mientras que los dos sentidos a lo largo del eje z son equivalentes en este caso. Por ello, el término que sigue al de segundo orden es un término proporcional a D_z^4 :

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{8\pi\epsilon^{(z)}} D_z^2 + \frac{B}{16\pi} D_z^4.$$

Para que el estado con $D_z = 0$ pueda ser estable en el propio punto $T = \Theta$ es necesario, evidentemente, que el coeficiente B sea positivo en este punto y, por consiguiente, también en un cierto entorno del mismo. Cerca del punto de transición, $1/\epsilon^{(z)}$ puede desarrollarse en potencias de la diferencia $T - \Theta$; el primer término del desarrollo es de la forma $a(T - \Theta)$ con el coeficiente a positivo (de manera que sea $1/\epsilon^{(z)} > 0$ para $T > \Theta$). Así pues,

$$\epsilon^{(z)} = 1/\alpha(T - \Theta), \quad (19.2)$$

y el potencial electrodinámico es

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\alpha(T - \Theta)}{8\pi} D_z^2 + \frac{B}{16\pi} D_z^4. \quad (19.3)$$

Las fórmulas que acabamos de escribir bastan para explicar todas las propiedades que nos interesan de un ferroeléctrico cerca del punto de transición. Ante todo, según la fórmula $E_z = 4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial D_z}$ encontramos

$$E_z = \alpha(T - \Theta)D_z + BD_z^3. \quad (19.4)$$

Ésta es la relación fundamental que determina la que existe entre el campo y el desplazamiento en un ferroeléctrico.

Cuando $T > \Theta$ (en la fase no piroeléctrica), D_z se anula a la vez que E_z . Cuando E_z crece (para un valor dado de $T - \Theta$), el desplazamiento crece al principio según una ley lineal ($D_z = E_z/a(T - \Theta)$), mas para valores de E_z suficientemente grandes lo hace según la ley $D_z = (E_z/B)^{1/3}$. El coeficiente de proporcionalidad $\epsilon^{(z)}$ en la ley lineal es la permitividad de la fase no piroeléctrica. Cuando $T \rightarrow \Theta$, dicha constante crece tiendiendo a infinito de manera inversamente proporcional a la diferencia $T - \Theta$; sin embargo, al mismo tiempo tiende a desaparecer el dominio en que se observa la ley lineal.

Cuando $T < \Theta$ (fase piroeléctrica), el valor $D_z = 0$ no puede nunca corresponder a un estado estable. Si $E_z = 0$, el desplazamiento posee un valor no nulo, que, según (19.4), es igual a

$$D_z = D_{z0} = \pm \sqrt{[\alpha(\Theta - T)/B]}. \quad (19.5)$$

Por lo tanto, la polarización espontánea $P_{z0} = D_{z0}/4\pi$ de un ferroeléctrico disminuye proporcionalmente a $\sqrt{\Theta - T}$ al acercarnos al punto de Curie.

La «constante dieléctrica» de la fase piroeléctrica puede definirse como el valor de la derivada dD_z/dE_z para $E_z = 0$. De (19.4) se deduce

$$1 = [-\alpha(\Theta - T) + 3BD_z^2]dD_z/dE_z;$$

substituyendo aquí (19.5), obtendremos

$$dD_z/dE_z = 1/2\alpha(\Theta - T) \text{ para } E_z = 0.$$

Para valores de E_z suficientemente pequeños, la relación entre D_z y E_z toma la forma

$$D_z - D_{z0} = E_z/2\alpha(\Theta - T). \quad (19.6)$$

La comparación de (19.2) y (19.6) prueba que la «constante dieléctrica» de la fase piroeléctrica es la mitad del valor correspondiente a la fase no piroeléctrica a igual distancia del punto de Curie.

Derivando Φ dado por (19.3) respecto de la temperatura, encontramos la entropía

$$S = -(\partial \Phi / \partial T)_D = S_0 - \alpha D_z^2 / 8\pi.$$

(Se puede prescindir aquí del término de cuarto orden, ya que no se anula el término de segundo.) En la fase no piroeléctrica, cuando $E_z = 0$ también es $D_z = 0$, de modo que $S = S_0$. En cambio, para la fase piroeléctrica, substituyendo el valor de D_z

dado por (19.5), se encuentra

$$S = S_0 - \alpha^2(\Theta - T)/8\pi B.$$

De aquí se sigue para la capacidad calorífica de esta fase en el propio punto de transición

$$C_p = T \partial S / \partial T = C_{p0} + \alpha^2 \Theta / 8\pi B, \quad (19.7)$$

donde C_{p0} es la capacidad calorífica de la fase no piroeléctrica en el mismo punto. Así pues, si la transición desde una fase ferroeléctrica a otra se produce siendo $E_z = 0$, dicha transición va acompañada de una discontinuidad de la capacidad calorífica, al igual que en los cambios de fase ordinarios de segunda especie. En estas condiciones, se tiene $C_p > C_{p0}$, esto es, cuando aparece la piroelectricidad la capacidad calorífica aumenta.

Volvamos al estudio de la ecuación (19.4) en la fase piroeléctrica (es decir, cuando $T < \Theta$). En la figura 13 se ha representado como ejemplo la forma de una gráfica de la función $D_z(E_z)$ determinada por esta ecuación. Vemos, en primer lugar, que el arco de curva CC' (representado en la fig. 13 por trazos) no corresponde nunca a estados estables que puedan presentarse en la naturaleza. Sobre él se tiene

$$\partial E_z / \partial D_z = 4\pi \partial^2 \Phi / \partial D_z^2 < 0,$$

mientras que la condición de que sea positiva la variación segunda del potencial termodinámico exige que el signo de esta derivada sea precisamente el opuesto. Las ordenadas de los puntos C y C' se determinan por la igualdad $\partial E_z / \partial D_z = 0$ y llegamos a la conclusión de que los valores posibles de $|D_z|$ en la fase piroeléctrica están inferiormente acotados por la condición

$$D_z^2 > \alpha(\Theta - T)/3B. \quad (19.8)$$

Si se consideran los estados de un ferroeléctrico para un valor dado de E_z , en el segmento determinado por las abscisas de los puntos C y C' se conserva la dualidad en el valor posible de D_z y se plantea la cuestión acerca del sentido físico de estas dos posibilidades. Para verlo imaginaremos que la substancia ferroeléctrica está constituida por una placa homogénea planoparalela (con el eje ferroeléctrico perpendicular al plano de la placa) que se encuentra entre las armaduras de un condensador mantenidas a potenciales dados, es decir, de forma que se cree un campo homogéneo de intensidad dada $E = E_z$.

Para potenciales dados de los conductores, la condición de estabilidad exige que sea mínimo el potencial termodinámico $\tilde{\Phi} = \Phi - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$. En particular, cuando

$\mathbf{E} = 0$ se tienen dos estados que difieren en el signo de D_z (puntos A y A' sobre la curva de la fig. 13), pero que corresponden a un mismo valor exactamente de $\tilde{\Phi} (= \Phi)$. Estos dos estados, en consecuencia, son estables en igual grado, es decir, constituyen dos «fases» que pueden existir simultáneamente en contacto una con otra.

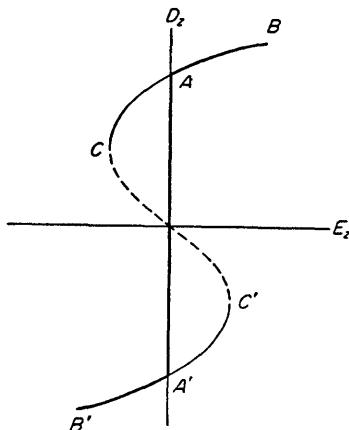


FIG. 13

Ya de aquí resulta claro que los arcos AC y $A'C'$ sobre la curva corresponden a estados que no son absolutamente estables, sino tan sólo metaestables. No cuesta comprobar, también de manera inmediata, que los valores de $\tilde{\Phi}$ sobre los arcos AC y $A'C'$ son efectivamente mayores que los correspondientes sobre las ramas $A'B'$ y AB para los mismos valores de E_z . Las ordenadas de los puntos A y A' vienen dadas por la fórmula (19.5). De esta manera, la región de metaestabilidad se encuentra en el intervalo

$$\alpha(\Theta - T)/3B < D_z^2 < \alpha(\Theta - T)/B, \quad (19.9)$$

La existencia de dos «fases» con $E = 0$ es muy importante, puesto que conduce a la posibilidad de que se descomponga un cuerpo ferroeléctrico en una serie de regiones separadas (o *dominios*) que difieren en los sentidos de la polarización. Sobre las superficies de separación entre estas regiones deben cumplirse las condiciones de continuidad de la componente normal de D y de la componente tangencial de E . La segunda de éstas queda satisfecha idénticamente (porque en cualquier caso $E = 0$). En cambio, de la primera se sigue que las fronteras entre dominios deben ser paralelas al eje z .

Las formas y dimensiones concretas de los dominios se determinan por la condición de que sea mínimo el potencial termodinámico total del cuerpo*.

Si no interesan los detalles de esta estructura y se consideran porciones del cuerpo grandes comparadas con las dimensiones de los dominios, cabe introducir el desplazamiento \bar{D} promediado en un volumen de dichas porciones. Su componente \bar{D}_z puede, evidentemente, tomar valores en un intervalo entre las ordenadas de los

* Esta cuestión relativa a las substancias ferroeléctricas ha sido muy poco investigada todavía.

puntos A y A' en la figura 13, es decir,

$$-\sqrt{[\alpha(\Theta - T)/B]} < D_z < \sqrt{[\alpha(\Theta - T)/B]}. \quad (19.10)$$

En otras palabras, si en el diagrama de la figura 13 se entiende por D_z el valor del desplazamiento promediado en el sentido indicado, a la región de la estructura en dominios corresponderá el segmento vertical AA' y la curva representada de trazo continuo $BAA'B'$ da todos los estados estables del cuerpo.

Un ferroeléctrico debe poseer una estructura en dominios, en particular, cuando no se encuentra en un campo eléctrico exterior. En efecto, vimos en el § 18 que las condiciones de equilibrio termodinámico en ausencia de un campo exterior se reducen a las condiciones de mínimo absoluto de Φ considerado como función de \mathbf{D} ; además, debe ser en todas partes $\mathbf{E} = 0^*$.

Pasemos a los ferroeléctricos que pertenecen al sistema cúbico (en la fase no piroeléctrica). La simetría cúbica exige que sea $\epsilon^{(x)} = \epsilon^{(y)} = \epsilon^{(z)} \equiv \epsilon$ y admite dos invariantes independientes de cuarto orden formados a partir de las componentes del vector \mathbf{D} y para los que, por ejemplo, cabe elegir

$$D_x^4 + D_y^4 + D_z^4 \quad \text{y} \quad D_x^2 D_y^2 + D_x^2 D_z^2 + D_y^2 D_z^2.$$

Por lo tanto, el desarrollo del potencial termodinámico tendrá la forma

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_0 + \alpha(T - \Theta)(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)/8\pi + B(D_x^4 + D_y^4 + D_z^4)/16\pi + \\ + C(D_x^2 D_y^2 + D_x^2 D_z^2 + D_y^2 D_z^2)/8\pi, \end{aligned} \quad (19.11)$$

donde, por las mismas razones que antes, hemos hecho $\frac{1}{\epsilon} = \alpha(T - \Theta)$; a , B , C son constantes.

Sin embargo, no hay que perder de vista que la simetría cúbica puede admitir también un invariante de tercer orden $D_x D_y D_z$ (para las clases cristalográficas cúbicas T y T_d , que no poseen un centro de simetría). En tales casos el estado con $\mathbf{D} = 0$, evidentemente, no podría satisfacer la condición de estabilidad (no puede corresponder a un mínimo de Φ), de modo que la existencia del punto de Curie es del todo imposible. Por consiguiente, una transición ferroeléctrica únicamente es posible en las clases O , T_h , O_h del sistema cúbico, lo que se ha supuesto ya en el desarrollo (19.11).

La suma de los términos de cuarto orden en (19.11) debe ser una expresión definida positiva. Para ello ha de tenerse

$$B > 0, \quad C > -B. \quad (19.12)$$

* Hay que subrayar que se trata aquí del equilibrio termodinámico total. Este equilibrio se alcanza en los ferroeléctricos, pero nunca puede tener lugar en los piroeléctricos ordinarios debido a la dificultad, que hemos recordado más arriba, de reorientación de su polarización (y, en consecuencia, de la formación de dominios).

La polarización espontánea de un ferroeléctrico cuando no existe campo exterior se determina, conforme se hizo ya notar más arriba, por la condición de que sea un mínimo absoluto Φ como función de \mathbf{D} . En particular, dado que el término de segundo orden en (19.11) no depende de la dirección de \mathbf{D} , la dirección de la polarización espontánea se determina por la condición de que sean mínimos los términos de cuarto orden para un valor absoluto dado de \mathbf{D} . Son entonces posibles dos casos. Si $C > B$, al mínimo de Φ corresponde una dirección de \mathbf{D} a lo largo de los ejes x , y , z , es decir, a lo largo de cualquiera de las tres aristas del cubo (las direcciones cristalográficas [001], [010], [100]). Pero si $C < B$, Φ alcanza el mínimo cuando \mathbf{D} está dirigido a lo largo de cualquiera de las cuatro diagonales espaciales del cubo (direcciones cristalográficas [111], [$\bar{1}\bar{1}1$], etc.), es decir, cuando

$$D_x^2 = D_y^2 = D_z^2 = \frac{1}{3}D^2.$$

En el primer caso la fase piroeléctrica polarizada espontáneamente del ferroeléctrico posee simetría tetragonal, y en el segundo, simetría romboédrica.

Consideremos más detenidamente, por ejemplo, el primer caso ($C > B$) y eliminamos como eje z la dirección de la polarización espontánea por debajo del punto de Curie. El módulo de la polarización espontánea viene determinado por el mínimo de la expresión

$$-\alpha(\Theta - T)D^2/8\pi + BD^4/16\pi,$$

de donde

$$D_0^2 = \alpha(\Theta - T)/B. \quad (19.13)$$

La «permitividad» por debajo de dicho punto, naturalmente, es diferente a lo largo del eje z y a lo largo de los ejes x , y . Si el campo E es pequeño, son también pequeñas D_x , D_y y $D_z - D_0$. Derivando la expresión (19.11), tenemos entonces

$$\begin{aligned} E_z &= 4\pi\partial\Phi/\partial D_z = -\alpha(\Theta - T)D_z + BD_z^3 \cong 2BD_0^2(D_z - D_0), \\ E_x &= 4\pi\partial\Phi/\partial D_x \cong [CD_0^2 - \alpha(\Theta - T)]D_x, \text{ de donde} \\ D_z - D_0 &= E_z/2\alpha(\Theta - T), \\ D_x &= BE_x/\alpha(\Theta - T)(C - B). \end{aligned} \quad (19.14)$$

Por encima del punto de Curie la permitividad de un ferroeléctrico cúbico es la misma en todas direcciones e igual a

$$\epsilon = 1/\alpha(T - \Theta). \quad (19.15)$$

Finalmente, consideremos brevemente las propiedades elásticas de los ferroeléctricos.

Según sea su clase cristalográfica, la fase no piroeléctrica de un ferroeléctrico, igual puede poseer que no poseer propiedades piezoeléctricas*. En particular, pre-

* La fase no piroeléctrica de un ferroeléctrico posee propiedades piezoeléctricas si pertenece a ocho de las diez clases de que se habló en la pág. 91: D_2 , D_4 , D_{2d} , S_4 , D_3 , D_6 , C_{3h} , D_{3h} .

sentan especial interés aquellos cristales piezoelectricos cuya simetría admite una relación piezoelectrica entre las deformaciones y la polarización a lo largo del eje ferroeléctrico. Entre ellos encontramos las clases cristalográficas D_2 , D_{2d} , S_4 ; en estos tres casos la inducción D_z a lo largo del eje ferroeléctrico aparece en la parte piezoelectrica del potencial termodinámico en forma del término*

$$-\lambda_{z,xy} D_z \sigma_{xy}.$$

En cambio, la componente σ_{xy} interviene en la expresión de la energía elástica de los cristales de la simetría indicada en forma del término

$$-\mu_{xyxy} \sigma_{xy}^2.$$

Así pues, para el potencial termodinámico cerca del punto de Curie se tiene (para abreviar, utilizamos la notación $\lambda_{z,xy} = \lambda$, $\mu_{xyxy} = \mu$)

$$\Phi = \Phi_0 + \alpha(T - T_0)D_z^2/8\pi + BD_z^4/16\pi - \lambda D_z \sigma_{xy} - \mu \sigma_{xy}^2. \quad (19.16)$$

No nos interesan los términos que contienen las restantes componentes, dado que no conducen a anomalía alguna de las propiedades piezoelectricas cerca del punto de Curie.

Derivando Φ respecto de D_z y respecto de σ_{xy} , obtendremos el campo E_z y la deformación u_{xy} **:

$$E_z = 4\pi \partial \Phi / \partial D_z = \alpha(T - T_0)D_z + BD_z^3 - 4\pi \lambda \sigma_{xy}, \quad (19.17)$$

$$u_{xy} = \frac{1}{2}\lambda D_z + \mu \sigma_{xy}. \quad (19.18)$$

En la región no piroeléctrica y para un campo E débil, cabe prescindir en (19.17) del término que contiene D_z^3 :

$$E_z = \alpha(T - T_0)D_z - 4\pi \lambda \sigma_{xy}.$$

Substituyendo aquí el valor de D_z dado por (19.18), obtendremos

$$u_{xy} = \frac{\lambda}{2\alpha(T - T_0)} E_z + \left[\mu + \frac{2\pi\lambda^2}{\alpha(T - T_0)} \right] \sigma_{xy}.$$

El coeficiente de σ_{xy} en esta fórmula representa el papel de módulo elástico para aquellas deformaciones en las que se conserva constante la intensidad del campo E_z , mientras que μ en la fórmula (19.18) es el módulo elástico para la deformación cuando es constante el desplazamiento D_z . Podemos escribir, por ello,

$$\mu^{(E)} = \mu^{(D)} + 2\pi\lambda^2/\alpha(T - T_0), \quad (19.19)$$

* Dado que aquí utilizamos el potencial Φ , y no el $\tilde{\Phi}$ como en el § 17, tampoco el tensor piezoelectrico $\lambda_{i,kl}$ coincide con el tensor $\gamma_{i,kl}$ antes introducido. Con todo, las propiedades de simetría de estos tensores son, claro está, las mismas.

** Acerca de la derivación respecto de las componentes u_{ik} , véase la nota en el § 17, problema 1.

donde los índices superiores indican el carácter de la deformación. Vemos así que ambos coeficientes se comportan cerca del punto de Curie de manera totalmente distinta: mientras que $\mu^{(D)}$ es una cantidad finita constante, el módulo $\mu^{(E)}$ crece sin límites al acercarnos al punto de Curie.

La fórmula (19.18) pone de manifiesto que en la región piroeléctrica la polarización espontánea conduce a una determinada deformación del cuerpo. Cuando no existen tensiones internas y para una intensidad del campo E nula, la deformación u_{xy} es proporcional a D_{z0} , es decir, según (19.5), proporcional a $\sqrt{\Theta - T}$.

Si la simetría (por ejemplo cúbica) de la fase no piroeléctrica de un ferroeléctrico no admite un efecto piezoeléctrico lineal (respecto de D), los primeros términos no nulos del desarrollo del potencial termodinámico en potencias de σ_{ik} y D son cuadráticos respecto de las componentes D_i , es decir, tienen la forma

$$-\gamma_{iklm} D_i D_k \sigma_{lm}, \quad (19.20)$$

donde γ_{iklm} es un tensor de cuarto orden, simétrico con relación a los pares de índices i, k y l, m .

Cabe dudar de la validez de aplicar la expresión (19.20) al potencial termodinámico, puesto que en el § 17 se indicó que esto último se puede utilizar solamente con la condición de que se prescinda de los efectos cuadráticos. Sin embargo, un ferroeléctrico constituye en este sentido una excepción, dado que (cerca del punto de Curie) la intensidad E es pequeña comparada con el desplazamiento D^* . La introducción del potencial termodinámico supone el prescindir de cantidades del orden de EDu_{ik} (o bien, lo que es lo mismo, del de $ED\sigma_{ik}$); la expresión (19.20), en cambio, es del orden de $D^2\sigma_{ik}$.

* Esto se ve, por ejemplo, en la fórmula (19.4): el primer término en el segundo miembro de la igualdad contiene la pequeña cantidad $T - \Theta$, y el segundo término, una cantidad de tercer orden respecto de D .

CAPÍTULO III

CORRIENTE CONTINUA

§ 20. Densidad de corriente y conductibilidad

Del estudio de los campos eléctricos creados por cargas en reposo, pasamos ahora a considerar el movimiento estacionario de las cargas en conductores (corriente eléctrica continua).

Designaremos la densidad media de flujo de cargas por j ; esta magnitud se llama *densidad de corriente eléctrica**. En una corriente continua la distribución espacial de j no depende del tiempo y obedece a la ecuación

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (20.1)$$

que expresa el carácter constante de la carga media total que se encuentra en una parte arbitraria de volumen del conductor.

El campo eléctrico creado en el interior de un conductor por el que circula una corriente continua es también constante en el tiempo y, por ello, satisface la ecuación

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (20.2)$$

es decir, deriva de un potencial.

A las ecuaciones (20.1) y (20.2) debe añadirse todavía una ecuación que ligue entre sí las magnitudes j y \mathbf{E} . Esta relación depende de la propiedad del material del conductor. En la inmensa mayoría de casos, cabe considerarla lineal (*ley de Ohm*).

Si el conductor es homogéneo e isotropo, la dependencia lineal se reduce a una mera proporcionalidad

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (20.3)$$

El coeficiente σ depende de la naturaleza y estado del conductor; recibe el nombre de *coeficiente de conductibilidad eléctrica*, o, simplemente, el de *conductibilidad del cuerpo*.

En un conductor homogéneo es $\sigma = \text{const}$ y la substitución de (20.3) en (20.1)

* En este capítulo no consideraremos el campo magnético creado por la corriente y, en consecuencia, no se tiene en cuenta la reacción de este campo sobre la corriente. Tener en cuenta esta influencia exige precisar la definición de densidad de corriente, lo que se hará en el § 29.

da $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. En este caso, por lo tanto, el potencial del campo eléctrico satisface la ecuación de Laplace $\Delta\phi = 0$.

Sobre la superficie de separación de dos medios conductores, la componente normal de la densidad de corriente ha de ser continua, evidentemente. Además, según la condición general de continuidad de la componente tangencial del campo (condición que se sigue de la ecuación $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, cf. (1.7) y (6.9)), debe ser continua la razón j_t/σ . De esta manera, las condiciones de contorno para la densidad de corriente se escriben:

$$j_{n1} = j_{n2}, \quad \mathbf{j}_{n1}/\sigma_1 = \mathbf{j}_{n2}/\sigma_2, \quad (20.4)$$

o bien para la intensidad del campo

$$\sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}, \quad \mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}. \quad (20.5)$$

En cambio, sobre la frontera entre un conductor y un medio no conductor tenemos simplemente $j_n = 0$ o $E_n = 0^*$.

El campo eléctrico que mantiene la corriente efectúa sobre las partículas cargadas (portadoras de la corriente) que se mueven en el conductor, un trabajo mecánico; el trabajo realizado en 1 s por unidad de volumen es igual, evidentemente, al producto $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. Este trabajo se disipa en la materia de que está constituido el conductor transformándose en calor. Por consiguiente, la cantidad de calor que se libera en 1 s y en 1 cm^3 de conductor homogéneo es igual a

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = j^2/\sigma \quad (20.6)$$

(ley de Joule-Lenz).

La producción de calor conduce a un aumento de la entropía del cuerpo. Cuando se libera la cantidad de calor $dQ = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV$, la entropía del elemento de volumen dado aumenta en dQ/T . Por ello, la velocidad de variación de la entropía total del cuerpo es igual a

$$dS/dt = \int (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}/T) dV. \quad (20.7)$$

En virtud de la ley de crecimiento de la entropía, esta derivada debe ser positiva. Substituyendo en ella $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, vemos que de esta condición cabe deducir que la conductibilidad σ es positiva.

En general, las direcciones de los vectores \mathbf{j} y \mathbf{E} no coinciden en un cuerpo anisótropo (monocristal) y la relación lineal entre ellos se expresa por fórmulas del tipo

$$\mathbf{j}_i = \sigma_{ik} \mathbf{E}_k, \quad (20.8)$$

* Hay que hacer notar que las ecuaciones $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div} (\sigma \mathbf{E}) = 0$ y las condiciones de contorno (20.5) ponen de manifiesto la analogía formal con las ecuaciones del campo electrostático en los dieléctricos, de las que difieren tan sólo en la substitución de ϵ por σ . Esta circunstancia permite hallar la solución de diferentes problemas relativos a la distribución de corriente en un medio conductor ilimitado a partir directamente de las soluciones de los problemas electrostáticos análogos. Cuando existen fronteras entre un conductor y un medio no conductor esta analogía a nada conduce, puesto que en electrostática no hay ningún medio con $\epsilon = 0$.

donde las magnitudes σ_{ik} constituyen un tensor de segundo orden simétrico (véase más adelante), llamado *tensor conductibilidad*.

Es necesario hacer aquí la observación siguiente. La simetría de un cristal podría admitir de suyo la existencia de un término independiente en la relación lineal entre j y E , es decir, una fórmula del tipo

$$j_i = \sigma_{ik}E_k + j_i^{(0)},$$

con un vector constante $j^{(0)}$. La existencia de un tal término significaría que el conductor es «piroeléctrico», esto es, que en ausencia de corriente ($j = 0$) existiría en él un campo diferente de cero. En realidad, sin embargo, esto es imposible en virtud de la ley de crecimiento de la entropía: un término $j^{(0)} \cdot E$ en el integrando de la expresión (20.7) podría tener, evidentemente, cualquier signo, con lo cual \mathcal{S} no podría ser una magnitud definida positiva.

De manera análoga a como en un medio isótropo la condición $\mathcal{S} > 0$ conduce a que σ sea positiva, también para un cuerpo anisótropo se sigue de esta condición que los valores principales del tensor σ_{ik} son positivos.

La dependencia del número de componentes independientes del tensor σ_{ik} respecto de la simetría del cristal es la misma que en el caso de un tensor simétrico cualquiera de segundo orden (véase § 13): en los cristales biáxicos los tres valores principales son diferentes, en los uniáxicos, dos de ellos son iguales, y en los cúbicos, los tres coinciden, es decir, un cristal cúbico se comporta, en relación con sus propiedades de conductibilidad, como si fuera un cuerpo isótropo.

La simetría del tensor conductibilidad

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \quad (20.9)$$

resulta ser consecuencia del llamado principio de *simetría de los coeficientes cinéticos*. Una formulación de este principio general, que se debe a L. Onsager, cómoda para su aplicación aquí y más adelante (en los §§ 25-26), es la siguiente*.

Sean x_1, x_2, \dots ciertas magnitudes que caracterizan el estado del cuerpo en cada uno de sus puntos. Introduzcamos junto con ellas las magnitudes

$$X_a = -\partial S / \partial x_a, \quad (20.10)$$

donde S es la entropía de la unidad de volumen del cuerpo y la derivada se toma suponiendo constante la energía de este volumen. En un estado próximo al de equilibrio, las magnitudes x_a difieren poco de los valores que toman en dicho estado, y las cantidades X_a son pequeñas. En estas condiciones, en el cuerpo tendrán lugar procesos que tienden a llevarlo al estado de equilibrio. Acerca de las velocidades de cambio de las cantidades x_a en tales procesos, cabe por lo general afirmar que en cada uno de los puntos del cuerpo son funciones tan sólo de los valores de las magnitudes x_a (o X_a) en aquellos mismos puntos. Desarrollando estas funciones

* Véase vol. V, *Física Estadística*, § 122 y vol. VI, *Hidrodinámica*, § 58.

en serie de potencias de X_a y limitándonos a los términos lineales, obtendremos relaciones de la forma

$$\frac{\partial x_a}{\partial t} = - \sum_b \gamma_{ab} X_b. \quad (20.11)$$

Se puede afirmar entonces que los coeficientes γ_{ab} (los llamados *coeficientes cinéticos*) son simétricos respecto de los índices a y b :

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba}. \quad (20.12)$$

Para la utilización práctica de este principio es necesario, una vez elegidas de una u otra manera las magnitudes x_a (o directamente sus derivadas \dot{x}_a), determinar las correspondientes X_a . Este problema puede resolverse ordinariamente de manera muy simple mediante la fórmula que determina la velocidad de variación con el tiempo de la entropía total del cuerpo:

$$\frac{dS}{dt} = - \int \sum_a X_a \frac{\partial x_a}{\partial t} dV, \quad (20.13)$$

donde la integración se extiende a todo el volumen del mismo.

En el presente caso, para el movimiento de la corriente en el conductor tenemos para aquella velocidad la fórmula (20.7). Comparándola con (20.13), vemos que si para las magnitudes \dot{x}_a se eligen las componentes del vector densidad de corriente j , las correspondientes magnitudes X_a serán las componentes del vector $-E/T$. Por otra parte, la comparación de las fórmulas (20.8) y (20.11) muestra que el papel de coeficientes cinéticos lo representan, en estas condiciones, las componentes del tensor conductibilidad multiplicadas por T , cuya simetría se sigue así inmediatamente a partir de las relaciones generales (20.12).

PROBLEMAS

1. En un medio conductor se ha introducido un sistema de electrodos que se mantienen a potenciales constantes ϕ_a . De cada uno de ellos sale una corriente J_a . Determinar el calor total de Joule liberado en el medio en 1 segundo.

Solución. El calor buscado Q viene dado por la integral

$$Q = \int j \cdot E dV = - \int j \cdot \text{grad } \phi dV = - \int \text{div}(j\phi) dV,$$

extendida a todo el volumen del medio. Transformemos esta integral en una integral de superficie, teniendo en cuenta que sobre la frontera exterior del medio es $j_n = 0$ y que sobre la superficie de los electrodos se tiene $\phi = \text{const} = \phi_a$. El resultado que se obtiene es

$$Q = \sum \phi_a J_a.$$

2. Determinar la distribución de potencial en una esfera conductora en la que una corriente J penetra por un polo y sale por el polo opuesto.

Solución. Cerca de los polos O y O' (fig. 14) el potencial debe tener, respectivamente, la forma

$$\phi = J/2\pi\sigma R_1 \quad y \quad \phi = -J/2\pi\sigma R_2$$

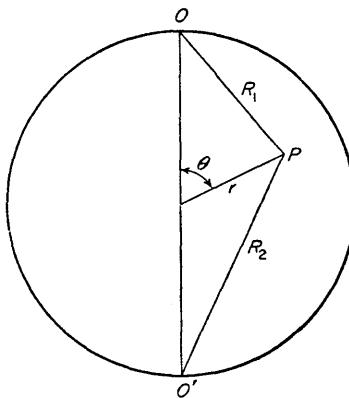


FIG. 14

donde R_1 , R_2 son las distancias a los polos. Estas funciones satisfacen la ecuación de Laplace, y las integrales $-\sigma \int \nabla \phi \cdot d\mathbf{f}$ extendidas a hemisferios infinitamente pequeños en torno de los puntos O O' son iguales a $\pm J$. Busquemos para el potencial en un punto cualquiera P de la esfera una expresión de la forma

$$\phi = \frac{J}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \psi \right),$$

donde ψ es una solución de la ecuación de Laplace que carece de polos dentro de la esfera y sobre su superficie. Por razones de simetría es evidente que ψ (al igual que ϕ) es función solamente de las coordenadas esféricas r y θ .

Sobre la superficie de la esfera ($r = a$) debe ser $\partial\phi/\partial r = 0$. Efectuando la derivación, deducimos de aquí para ψ la siguiente condición de contorno:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \text{ para } r = a.$$

Si $f(r, \theta)$ es una solución cualquiera de la ecuación de Laplace, también la función $\int_0^r \frac{f(r, \theta)}{r} dr$ es una solución*. Comparando con la condición de contorno escrita, es fácil concluir que a ésta satisface la solución

$$\psi = \frac{1}{2} \int_0^r \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{dr}{r}.$$

Substituyendo $R_{1,2} = \sqrt{a^2 + r^2 \mp 2ar \cos \theta}$ y efectuando la integración, obtenemos en definitiva

$$\phi = \frac{J}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2a} \left(\operatorname{arsenh} \frac{a+r \cos \theta}{r \sin \theta} - \operatorname{arsenh} \frac{a-r \cos \theta}{r \sin \theta} \right) \right).$$

* Es fácil ver que así es, ya sea por comprobación directa, o basándose en que cualquier solución $f(r, \theta)$ de la ecuación de Laplace que dependa solamente de las variables r , θ , puede representarse en la forma

$$f = \sum c_n r^n P_n(\cos \theta),$$

donde las c_n son constantes y los P_n son polinomios de Legendre.

3. Probar que la distribución de corriente en un medio conductor corresponde a un mínimo de la disipación de energía.

Solución. Se trata del mínimo de la integral $\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV = \int (j^2/\sigma) dV$ cuando se cumple la condición $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ que expresa la conservación de la carga. Variando respecto de \mathbf{j} la integral

$$\int [(j^2/\sigma) - 2\phi \operatorname{div} \mathbf{j}] dV,$$

(2ϕ es el factor indeterminado de Lagrange) e igualando a cero la variación, obtendremos la ecuación $\mathbf{j} = -\sigma \nabla \phi$, o bien

$$\operatorname{rot} (\mathbf{j}/\sigma) = 0,$$

que coincide con las ecuaciones (20.2) y (20.3).

§ 21. Efecto Hall

Si un conductor se encuentra en un campo magnético exterior \mathbf{H} , la relación entre la densidad de corriente y la intensidad del campo eléctrico viene dada, como antes, por las igualdades

$$j_i = \sigma_{ik} E_k,$$

pero las componentes del tensor conductibilidad σ_{ik} son funciones de \mathbf{H} y, lo que es particularmente importante, ya no son simétricas respecto de los índices i, k . La simetría de este tensor se demostró en el § 20 partiendo del principio de simetría de los coeficientes cinéticos. Pero en un campo magnético, como es sabido, la formulación de este principio cambia un poco: a la vez que se permudan los índices en los coeficientes cinéticos, debe cambiarse también el sentido del campo magnético*. En consecuencia, para las componentes del tensor $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ tendremos ahora las igualdades

$$\sigma_{ik}(\mathbf{H}) = \sigma_{ki}(-\mathbf{H}). \quad (21.1)$$

Las magnitudes $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ y $\sigma_{ki}(\mathbf{H})$ no son ya iguales entre sí.

Como cualquier tensor de segundo orden, el tensor σ_{ik} puede descomponerse en una parte simétrica y una antisimétrica, que designaremos por s_{ik} y a_{ik} :

$$\sigma_{ik} = s_{ik} + a_{ik}. \quad (21.2)$$

Por definición,

$$s_{ik}(\mathbf{H}) = s_{ki}(\mathbf{H}), \quad a_{ik}(\mathbf{H}) = -a_{ki}(\mathbf{H}), \quad (21.3)$$

y de (21.1) se sigue que

$$\begin{aligned} s_{ik}(\mathbf{H}) &= s_{ki}(-\mathbf{H}) = s_{ik}(-\mathbf{H}), \\ a_{ik}(\mathbf{H}) &= a_{ki}(-\mathbf{H}) = -a_{ik}(-\mathbf{H}). \end{aligned} \quad (21.4)$$

Así, pues, las componentes del tensor s_{ik} son funciones pares del campo magnético, y las del tensor a_{ik} , funciones impares.

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 122.

Es sabido que todo tensor antisimétrico de segundo orden a_{ik} es equivalente a un cierto vector axil (su dual) cuyas componentes son

$$a_x = a_{yz}, \quad a_y = -a_{xz}, \quad a_z = a_{xy}. \quad (21.5)$$

Mediante este vector, las componentes del producto $a_{ik} E_k$ se pueden escribir en forma de componentes del producto vectorial $\mathbf{E} \times \mathbf{a}$:

$$j_i = \sigma_{ik} E_k = s_{ik} E_k + (\mathbf{E} \times \mathbf{a})_i. \quad (21.6)$$

El calor de Joule producido por el paso de la corriente se determina por el producto $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. En virtud de la ortogonalidad de los vectores $\mathbf{E} \times \mathbf{a}$ y \mathbf{E} , su producto escalar se anula, de modo que

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = s_{ik} E_i E_k, \quad (21.7)$$

o sea, el calor de Joule viene determinado (para un campo dado \mathbf{E}) sólo por la parte simétrica del tensor conductibilidad.

La mayor parte de los campos magnéticos exteriores pueden considerarse débiles; según esto, es posible desarrollar las componentes del tensor conductibilidad en potencias del campo. Teniendo en cuenta que la función $\mathbf{a}(\mathbf{H})$ es impar, en el desarrollo de este vector intervendrán solamente términos de grado impar. Los primeros términos del desarrollo son lineales respecto del campo, es decir, tienen la forma

$$a_i = \alpha_{ik} H_k. \quad (21.8)$$

Los vectores \mathbf{a} y \mathbf{H} son ambos axiles; por lo tanto, las componentes a_{ik} constituyen un tensor ordinario (polar). En el desarrollo de las funciones pares $s_{ik}(\mathbf{H})$, en cambio, intervienen tan sólo términos de grado par. El primer término del desarrollo es la conductibilidad $\sigma_{0,ik}$ en ausencia de campo, y los términos correctivos siguientes son cuadráticos respecto del campo:

$$s_{ik} = \sigma_{0,ik} + \beta_{iklm} H_l H_m. \quad (21.9)$$

El tensor β_{iklm} es simétrico tanto respecto de los índices i, k , como de los índices l, m .

De esta manera el efecto principal, lineal respecto del campo, de la influencia del campo magnético está representado por el término $\mathbf{E} \times \mathbf{a}$ (*efecto Hall*). Este efecto, conforme vemos, consiste en la aparición de una corriente perpendicular al campo eléctrico y cuyo módulo es proporcional a la intensidad del campo magnético. Sin embargo, no hay que perder de vista que, en el caso general de un medio anisótropo cualquiera, la corriente de Hall no es la única perpendicular a \mathbf{E} ; componentes de este tipo puede también tenerlas la corriente $s_{ik} E_k$, que no es la de Hall.

El efecto Hall presenta también otro aspecto cuando se consideran las fórmulas recíprocas que expresan el campo \mathbf{E} en función de la densidad de corriente:

$$E_i = \sigma^{-1}_{ik} j_k.$$

El tensor inverso σ_{ik}^{-1} , al igual que el directo, puede descomponerse en una parte simétrica (que designaremos por ρ_{ik}) y una antisimétrica, equivalente ésta a un cierto vector axil \mathbf{b} :

$$E_i = \rho_{ik} j_k + (\mathbf{j} \times \mathbf{b})_i. \quad (21.10)$$

El tensor ρ_{ik} y el vector \mathbf{b} poseen las mismas propiedades que s_{ik} y \mathbf{a} . En particular, en los campos débiles el vector \mathbf{b} es lineal respecto del campo magnético. En las fórmulas (21.10) el efecto Hall viene representado por el término $\mathbf{j} \times \mathbf{b}$, es decir, se traduce en la aparición de un campo eléctrico perpendicular a la corriente y cuyo valor absoluto es proporcional al campo magnético (y a la corriente \mathbf{j}).

Todas las igualdades que acabamos de escribir se simplifican considerablemente si el conductor es isótropo. En este caso, por razones de simetría es evidente que el vector \mathbf{b} (o el \mathbf{a}) sólo puede estar dirigido a lo largo del campo magnético. Las únicas componentes no nulas del tensor ρ_{ik} son $\rho_{xx} = \rho_{yy} = \rho_{zz}$, donde se ha elegido el eje z de modo que coincida con la dirección (orientada) del campo. Representando estas dos cantidades por ρ_{\perp} y ρ_{\parallel} y eligiendo el plano xz de modo que pase por la dirección de la corriente, tendremos

$$E_x = \rho_{\perp} j_x, \quad E_y = -bj_x, \quad E_z = \rho_{\parallel} j_z. \quad (21.11)$$

Vemos así que en un conductor isótropo el campo de Hall es el único campo eléctrico perpendicular a la vez a la corriente y al campo magnético.

En campos magnéticos débiles la relación entre los vectores \mathbf{b} y \mathbf{H} viene dada (en un cuerpo isótropo) simplemente por la igualdad

$$\mathbf{b} = -R\mathbf{H} \quad (21.12)$$

La constante R (llamada *constante de Hall*) lo mismo puede ser positiva que negativa. En lo que concierne a los términos cuadráticos respecto de \mathbf{H} en la dependencia entre \mathbf{E} y \mathbf{j} (que intervienen a través del tensor ρ_{ik}), su forma es evidente por el hecho de que los únicos vectores que se pueden formar a partir de \mathbf{j} y \mathbf{H} (lineales respecto de \mathbf{j} y cuadráticos con relación a \mathbf{H}) son los vectores $\mathbf{H}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{H})$ y $\mathbf{H}^2\mathbf{j}$. Por consiguiente, la forma general de la dependencia entre \mathbf{E} y \mathbf{j} en un cuerpo isótropo, teniendo en cuenta los términos cuadráticos respecto de \mathbf{H} , viene dada por la fórmula

$$\mathbf{E} = \rho_0 \mathbf{j} + R\mathbf{H} \times \mathbf{j} + \beta_1 H^2 \mathbf{j} + \beta_2 (\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{H}. \quad (21.13)$$

PROBLEMA

Expresar las componentes del tensor inverso σ_{ik}^{-1} en función de las componentes de s_{ik} y de \mathbf{a} .

Solución. La manera más simple de efectuar los cálculos consiste en elegir el sistema de coordenadas x, y, z en el cual el tensor s_{ik} se reduce a sus ejes principales, hecho lo cual, de la forma de las expresiones obtenidas es fácil deducir su forma general en un sistema de coordenadas arbitrario. El determinante del tensor es:

$$|\sigma| = \begin{vmatrix} s_{xx} & a_z & -a_y \\ -a_z & s_{yy} & a_x \\ a_y & -a_x & s_{zz} \end{vmatrix} = s_{xx}s_{yy}s_{zz} + s_{xx}a_x^2 + s_{yy}a_y^2 + s_{zz}a_z^2.$$

Es evidente que en el caso general

$$|\sigma| = |s| + s_{ik}a_i a_k.$$

Formando también los menores de este determinante, se encuentran las componentes del tensor inverso

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}_{xx} &= \rho_{xx} = (s_{yy}s_{zz} + a_x^2)/|\sigma|, \\ \sigma^{-1}_{xy} &= \rho_{xy} + b_z = (a_x a_y - a_z s_{zz})/|\sigma|, \dots\end{aligned}$$

Las expresiones generales que se reducen a éstas para el sistema de coordenadas elegido, son

$$\rho_{ik} = \{s^{-1}_{ik}|s| + a_i a_k\}/|\sigma|, \quad b_i = -s_{ik} a_k/|\sigma|.$$

con lo que queda resuelto el problema planteado.

§ 22. Diferencia de potenciales de contacto

Para separar de un conductor una partícula cargada a través de la superficie del mismo es necesario realizar un determinado trabajo. Se llama *trabajo de extracción* el trabajo que ha de efectuarse sobre una partícula si su separación se realiza de manera termodinámicamente reversible. Esta cantidad es siempre positiva, como se sigue inmediatamente del hecho de que una carga puntual es atraída hacia cualquier cuerpo neutro, en particular hacia todo conductor (véase § 14). En lo que sigue convendrá referir este trabajo a la unidad de carga (positiva); el signo del «potencial de extracción» W definido de esta manera coincide con el signo de la carga de la partícula que se separa.

El trabajo de extracción depende tanto de la naturaleza del conductor (y de su estado termodinámico, de la temperatura, de la densidad) como de la especie de partícula cargada. Por ejemplo, para un mismo metal el trabajo de extracción es diferente al separar una carga en forma de electrón de conducción y en la separación de un ion de su superficie. Es necesario subrayar también que el trabajo de extracción es una magnitud característica de la superficie del conductor, y no de sus propiedades volumétricas. Por ello, dicho trabajo depende también, por ejemplo, del método de tratamiento y del grado de «contaminación» de la superficie. Si el conductor es un monocrystal, el trabajo de extracción es también diferente para sus diferentes caras.

A fin de explicar la naturaleza física de la dependencia del trabajo de extracción respecto de las propiedades de la superficie, estableceremos su relación con la estructura eléctrica de la capa superficial de la materia. Designando por $\rho(x)$ la densidad de carga *no promediada* respecto de un elemento físicamente infinitesimal a lo largo del eje x (perpendicular al plano de la capa), escribamos la ecuación de Poisson en dicho estrato superficial:

$$d^2\phi/dx^2 = -4\pi\rho.$$

Supongamos que el dominio ocupado por el conductor corresponde a $x < 0$. Integrando una vez, obtendremos

$$\frac{d\phi}{dx} = -4\pi \int_{-\infty}^x \rho dx,$$

hecho lo cual la integración siguiente la efectuaremos por partes:

$$\phi - \phi(-\infty) = -4\pi x \int_{-\infty}^x \rho dx + 4\pi \int_{-\infty}^x x\rho dx.$$

Cuando $x \rightarrow \infty$ la integral $\int_{-\infty}^x \rho dx$ tiende rápidamente a cero (en virtud del carácter eléctricamente neutro de la superficie de un conductor no cargado). Por consiguiente,

$$\phi(+\infty) - \phi(-\infty) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} x\rho dx.$$

La integral que aparece en el segundo miembro de la igualdad representa el momento dipolar de las cargas distribuidas cerca de la superficie del cuerpo. Esta distribución posee el carácter de una «doble capa», en la cual las cargas de signos opuestos están separadas de manera que el momento dipolar del sistema es diferente de cero. La estructura de una doble capa, naturalmente, depende de las propiedades de la superficie (de su dirección cristalográfica, de las impurezas, etc.). Por otra parte, la diferencia de los potenciales de extracción correspondientes a las distintas superficies de un conductor dado viene determinada por la diferencia de sus momentos dipolares.

Si dos conductores distintos se ponen en contacto, entre ellos puede tener lugar un intercambio de partículas cargadas. En este caso, las cargas pasarán del cuerpo con trabajo de extracción menor al cuerpo en que dicho trabajo es mayor, hasta que entre ambos conductores se establezca una diferencia de potenciales que impida el paso de las cargas. Ésta es la llamada *diferencia de potenciales de contacto*.

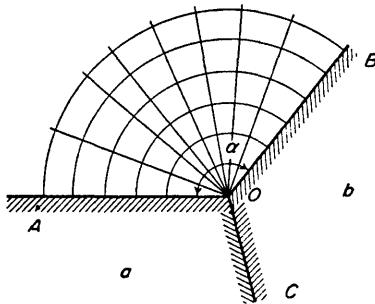


FIG. 15

En la figura 15 se representa un corte transversal de dos conductores en contacto (a y b) cerca de sus superficies libres AO y OB . Los potenciales de estas superficies los designaremos por ϕ_a y ϕ_b , respectivamente. La diferencia de potenciales de contacto es $\phi_{ab} = \phi_b - \phi_a$. La relación cuantitativa entre esta diferencia y los trabajos de extracción se establece mediante la condición de equilibrio termodiná-

mico. Consideremos el trabajo que hay que realizar sobre una partícula de carga e para separarla del conductor a a través de la superficie AO , llevándola luego a la superficie OB , y finalmente, introduciéndola en el conductor b ; en un estado de equilibrio termodinámico este trabajo debe ser igual a cero*. Los trabajos realizados sobre la partícula en cada una de las tres etapas indicadas del camino son iguales a eW_a , $e(\phi_b - \phi_a)$ y $-eW_b$, respectivamente. Igualando su suma a cero, se encuentra la relación buscada

$$\phi_{ab} = W_b - W_a. \quad (22.1)$$

De esta manera, la diferencia de potenciales de contacto entre superficies libres vecinas de dos conductores adyacentes es igual a la diferencia de sus trabajos de extracción.

La existencia de una diferencia de potenciales de contacto conduce a la aparición de un campo eléctrico en el espacio exterior a los conductores. No es difícil determinar este campo cerca del lugar de contacto. En un pequeño dominio próximo a la línea de contacto (punto O de la fig. 15) es posible considerar como planos las caras que se cortan de los conductores. El potencial del campo fuera de los conductores satisface la ecuación

$$\Delta\phi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0,$$

(r, θ son las coordenadas polares con origen en el punto O) y sobre los lados AO y OB debe tomar valores constantes dados. Lo que nos interesa es la solución que contiene la menor potencia de r : ésta representará el término dominante del desarrollo del potencial en potencias de la distancia r , que es pequeña. Esta solución es la $\phi = \text{const} \cdot \theta$. Contando el ángulo θ a partir del lado AO y conviniendo en tomar para su potencial el valor cero, obtendremos

$$\phi = \phi_{ab}\theta/\alpha, \quad (22.2)$$

donde α es el ángulo AOB . Así pues, las líneas equipotenciales (en el plano del dibujo) son semirrayos que divergen a partir del punto O . Las correspondientes líneas de fuerza constituyen una familia de arcos de circunferencia con centro en el punto O . La intensidad del campo es igual a

$$E = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\phi_{ab}}{\alpha} \frac{1}{r}; \quad (22.3)$$

es decir, disminuye en razón inversa a la distancia al punto O .

Conforme ya se indicó, las diferencias de potencial de «contacto» existen también entre diferentes caras de un monocrystal metálico. En consecuencia, un campo

* Claro está, en realidad el paso de una partícula de un conductor al otro se puede realizar solamente a través de sus superficies de contacto y no a través del espacio adyacente. Sin embargo, podemos apoyarnos en el hecho de que el trabajo en esta transición no depende del camino seguido.

eléctrico del tipo que acabamos de describir debe presentarse también cerca de las aristas de un cristal*.

Si toda una serie de conductores metálicos (que se encuentran a igual temperatura) se unen formando una sucesión, la diferencia de potenciales entre los conductores extremos es igual (como se sigue fácilmente de la fórmula fundamental (22.1)), simplemente, a la diferencia de sus trabajos de extracción, como en el caso de dos conductores en contacto directo. En particular, si en ambos extremos de la cadena se encuentran metales iguales, la diferencia de potencial entre ellos será igual a cero. Esta circunstancia, por otra parte, es del todo evidente a priori: si entre conductores idénticos existiera una diferencia de potencial, al cerrar la cadena aparecería en ellos una corriente, contradiciendo así el segundo principio de la termodinámica.

§ 23. Elementos galvánicos

La observación que se ha hecho al final del párrafo que precede pierde su fuerza si de la cadena forman parte conductores con portadores de corriente de naturaleza distinta (metales y disoluciones de electrólitos). En relación con la diferencia de los trabajos de extracción de un mismo conductor respecto de diferentes partículas cargadas (electrones e iones), la suma de todas las diferencias de potenciales de contacto en la cadena es ahora diferente de cero, incluso cuando los conductores en uno y otro extremo son iguales. Esta suma se llama *fuerza electromotriz* (*f.e.m.*) que actúa en la cadena; esta fuerza no es sino la diferencia de potenciales entre dos conductores iguales que se encuentran en los extremos de un circuito abierto. Al cerrar el circuito aparece en él una corriente; en este fenómeno se basa la operación de los llamados *elementos galvánicos*. La fuente de energía que mantiene el paso de la corriente por el circuito es, en este caso, la transformación química que tiene lugar en el elemento.

Al recorrer una línea cerrada cualquiera situada en el interior del circuito cerrado, el potencial del campo debe volver, claro está, a su valor de partida, es decir, su variación total es nula. Consideremos, por ejemplo, un contorno situado sobre la superficie de los conductores. Al pasar de un conductor al otro el potencial experimenta un salto ϕ_{ab} . En cambio, la caída de potencial a lo largo de una línea en cada conductor cuando existe una corriente J (corriente total a través de la sección) es igual a RJ , donde R es la resistencia del conductor. Por ello, la variación total del potencial a lo largo del circuito vale

$$\Sigma\phi_{ab} - \Sigma JR.$$

Igualando esta expresión a cero, observando que la corriente J es constante a lo largo de todo el circuito y que la suma $\Sigma\phi_{ab}$ es la fuerza electromotriz \mathcal{E} , se encuentra

$$J\Sigma R = \mathcal{E}, \quad (23.1)$$

* En las condiciones reales, todos estos campos de ordinario quedan compensados por el campo de iones de la atmósfera que se «adhieren» a la superficie.

de modo que la corriente que se origina en el circuito con un elemento galvánico es igual a la f.e.m. dividida por la resistencia total de todos los conductores en el circuito (incluida también, claro está, la resistencia interna del propio elemento).

Aunque la f.e.m. de un elemento galvánico puede expresarse también como suma de diferencias de potenciales de contacto, sin embargo es muy importante subrayar que, en realidad, se trata de una magnitud termodinámica, determinada exclusivamente por los estados volumétricos de los conductores y por completo independiente de las propiedades de sus superficies de separación. Esto está claro ya por el simple hecho de que \mathcal{E} no es sino el trabajo (referido a la unidad de carga) que habría de realizar sobre una partícula cargada para hacerle recorrer de manera reversible la totalidad del circuito cerrado.

Para ilustrar esta circunstancia consideremos un elemento galvánico constituido por dos electrodos metálicos (metales *A* y *B*) sumergidos en una solución de electrólitos *AX* y *BX* (*X*⁻ es un anión cualquiera). Sean ζ_A y ζ_B los potenciales químicos de los metales *A* y *B*, y ζ_{AX} y ζ_{BX} los potenciales químicos de los electrólitos en la solución*. Llevar la carga elemental *e* a lo largo del circuito cerrado significa hacer pasar el ion *A*⁺ del electrodo *A* a la solución, hacer pasar el ion *B*⁺ de la solución al electrodo *B*, compensándose en este proceso la variación de las cargas de los electrodos por el paso de un electrón del electrodo *A* al electrodo *B* a lo largo de la parte exterior del circuito. El resultado de estos procesos se reduce a que el electrodo *A* pierde un átomo neutro, mientras que el *B* lo adquiere, y que en la solución de electrólito una molécula *BX* se substituye por una *AX*. Dado que el trabajo realizado en un proceso reversible (a temperatura y presión constantes) es igual a la variación del potencial termodinámico del sistema, encontramos la relación

$$e\mathcal{E}_{AB} = (\zeta_B - \zeta_{BX}) - (\zeta_A - \zeta_{AX}), \quad (23.2)$$

que expresa la f.e.m. del elemento en función de las propiedades volumétricas de los electrodos y de la solución de electrólito.

La expresión (23.2) permite deducir también la siguiente conclusión. Si en la solución se encuentran tres electrólitos (*AX*, *BX*, *CX*) y en ella se han sumergido electrodos metálicos *A*, *B*, *C*, la f.e.m. entre cada dos de ellos está ligada por la relación

$$\mathcal{E}_{AB} + \mathcal{E}_{BC} = \mathcal{E}_{AC}. \quad (23.3)$$

Mediante las relaciones termodinámicas generales es posible establecer la relación entre la f.e.m. de un elemento galvánico y el efecto térmico que acompaña al paso de la corriente por el circuito, paso que en las condiciones reales tiene lugar, naturalmente, de manera irreversible. Sea *Q* la cantidad de calor liberada (tanto en el propio elemento como en la parte exterior del circuito) al pasar la unidad de carga; *Q* no es sino el calor termodinámico de la reacción que tiene lugar dentro

* En este párrafo se adopta como definición del potencial químico la ordinaria, es decir, aquella en la que dicho potencial se refiere a una partícula.

del elemento galvánico al pasar la corriente. Según la conocida fórmula de termodinámica*, dicho calor está ligado con el trabajo \mathcal{E} por la igualdad siguiente:

$$Q = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\mathcal{E}}{T} \right). \quad (23.4)$$

La definición de la derivada parcial, que aquí aparece, respecto de la temperatura depende de en qué condiciones tiene lugar el proceso; así, si el paso de la corriente se efectúa a presión constante (como ocurre de ordinario), la derivación se efectúa a presión constante.

§ 24. Electrocapilaridad

La existencia de cargas en la frontera entre dos medios conductores influye sobre su tensión superficial; este fenómeno se llama *electrocapilaridad*. De hecho, se trata aquí de dos medios líquidos, de ordinario la frontera entre un metal líquido (mercurio) y una solución de electrolito.

Designaremos por ϕ_1 y ϕ_2 los potenciales de los dos conductores y por e_1 y e_2 las cargas de uno y otro distribuidas por la superficie de contacto. Estas últimas son iguales en valor absoluto y de signos opuestos, formando así una «doble capa» sobre dicha superficie.

Para la diferencia de potencial $\tilde{\varphi}$ del sistema de dos conductores, teniendo en cuenta su superficie de separación, y para valores dados de la presión y la temperatura, tenemos

$$d\tilde{\varphi} = \alpha dS - e_1 d\phi_1 - e_2 d\phi_2. \quad (24.1)$$

El término αdS es el trabajo de variación reversible del área S de la superficie de separación (α es el coeficiente de tensión superficial)**.

En vez del potencial termodinámico $\tilde{\varphi}$ de (24.1) cabe escribir solamente su «parte superficial» $\tilde{\varphi}_s$, ya que la parte volumétrica es en todo caso constante para una presión y temperatura dadas y no nos interesa aquí. Haciendo $e_1 = -e_2 \equiv e$ e introduciendo la diferencia de potenciales $\phi = \phi_1 - \phi_2$, escribiremos (24.1) en la forma

$$d\tilde{\varphi}_s = \alpha dS - e d\phi. \quad (24.2)$$

De aquí se sigue que

$$(\partial \tilde{\varphi}_s / \partial S)_\phi = \alpha, \quad (24.3)$$

donde α se expresa en función de ϕ . Integrando esta igualdad, se encuentra que $\tilde{\varphi}_s = \alpha S$. Substituyendo este resultado en (24.2), obtendremos $d(\alpha S) = \alpha dS - e d\phi$ o $S d\alpha = -e d\phi$, de donde

$$\sigma = -(\partial \alpha / \partial \phi)_{p,T}, \quad (24.4)$$

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 105.

** Véase vol V, *Física estadística*, § 142.

igualdad en la que $\sigma = e/S$ es la carga por cm^2 de la superficie. La relación (24.4) (obtenida por primera vez por G. Lippmann y J. W. Gibbs) constituye la fórmula fundamental de la teoría de los fenómenos electrocapilares.

En un estado de equilibrio el potencial termodinámico $\tilde{g}\phi$ debe ser mínimo para valores dados de los potenciales eléctricos de los conductores. Considerándolo como función de las cargas superficiales e , escribamos las condiciones necesarias de mínimo:

$$\frac{\partial \tilde{g}\phi_s}{\partial e} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{g}\phi_s}{\partial e^2} > 0, \quad (24.5)$$

donde se supone que las derivadas se toman para área S constante. Para calcularlas expresaremos $\tilde{g}\phi_s$ en función del potencial termodinámico $g\phi_s = g\phi_s(e)$:

$$\tilde{g}\phi_s = g\phi_s(e) - e_1\phi_1 - e_2\phi_2 = g\phi_s(e) - e\phi. \quad (24.6)$$

La condición de que la derivada primera sea igual a cero da

$$\frac{\partial \tilde{g}\phi_s}{\partial e} = \frac{\partial g\phi_s}{\partial e} - \phi = 0,$$

y la de que la segunda derivada sea positiva toma la forma

$$\frac{\partial^2 \tilde{g}\phi_s}{\partial e^2} = \frac{\partial^2 g\phi_s}{\partial e^2} = \frac{\partial \phi}{\partial e} = \frac{1}{S} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} > 0,$$

o bien

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \phi} > 0. \quad (24.7)$$

Era natural esperar esta condición, puesto que la doble capa en la superficie puede considerarse como un «condensador» de capacidad $\partial e / \partial \phi$.

Derivando la igualdad (24.4) respecto de ϕ y aplicando (24.7), se encuentra que

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \phi^2} < 0. \quad (24.8)$$

Esto significa que el punto en el cual $\frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = -\sigma = 0$ es un máximo de la curva que da α en función de ϕ .

§ 25. Fenómenos termoeléctricos

La condición de que no exista corriente en un metal queda reducida a la de equilibrio termodinámico respecto de los electrones de conductibilidad. Esta condición, como es sabido, no sólo exige la constancia de la temperatura (en todo el cuerpo), sino también la constancia de la suma $e\phi + \zeta_0$, donde ζ_0 es el potencial químico de los electrones de conducción en el metal (para $\phi = 0$)*. Si se trata de un

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 25; entendemos aquí por ζ el potencial químico referido, como de ordinario, a una partícula (a un electrón).

metal que no es homogéneo en su composición, ζ_0 cambia de un punto a otro del mismo incluso si la temperatura es constante. Por consiguiente, la constancia del potencial eléctrico ϕ en modo alguno conduce en este caso a que no exista corriente en el metal, a pesar de que el campo $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ es igual a cero. Esta circunstancia hace inconveniente la definición ordinaria de ϕ (como valor medio del potencial real) si queremos incluir en el análisis también los conductores no homogéneos.

Es natural adoptar como nueva definición del potencial la suma $\phi + \zeta_0/e$, que designaremos en lo que sigue simplemente por ϕ^* . En un metal homogéneo este cambio se reduce a añadir al potencial una constante no esencial. De acuerdo con esto, la «intensidad del campo» $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ (que utilizaremos también) coincide con la intensidad media real únicamente en un metal homogéneo, y en el caso general difiere de ella en el gradiente de una cierta función de estado.

Según esta definición, la corriente se anula junto con el campo en el estado de equilibrio termodinámico (con relación a los electrones de conducción) y la relación entre \mathbf{j} y \mathbf{E} vendrá dada por la fórmula $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ ($j_i = \sigma_{ik}E_k$) incluso en un metal de composición no homogénea.

Consideremos ahora un metal calentado de manera no uniforme, en el cual, en cualquier caso, no existe por lo tanto equilibrio termodinámico (electrónico). Entonces el campo \mathbf{E} difiere de cero incluso cuando la corriente es nula. En general, cuando no son nulas ni la densidad de corriente \mathbf{j} ni el gradiente de la temperatura ∇T , la relación entre estas magnitudes y la intensidad del campo se puede escribir en la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma + \alpha \nabla T. \quad (25.1)$$

Aquí σ es la conductibilidad ordinaria y α una magnitud que caracteriza las propiedades eléctricas del metal. Para simplificar suponemos que la materia es isótropa (o que presenta simetría cúbica) y, de acuerdo con esto, escribiremos los coeficientes de proporcionalidad como magnitudes escalares. La dependencia lineal entre \mathbf{E} y ∇T representa solamente, claro está, el primer término de un desarrollo, lo que es una aproximación suficiente si el gradiente de la temperatura es pequeño (condición que de hecho siempre se cumple).

La misma fórmula (25.1), escrita en la forma

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} - \alpha \nabla T), \quad (25.2)$$

muestra que cuando un metal se calienta de manera no uniforme puede circular una corriente por él incluso para un campo \mathbf{E} nulo.

Junto con la densidad de corriente eléctrica \mathbf{j} consideraremos también la densidad de flujo de energía, que designaremos por \mathbf{q} . Ante todo, de este flujo hay que separar la cantidad $\phi\mathbf{j}$ ligada simplemente con el hecho de que cada partícula car-

* Esta definición puede formularse también de otra manera: el nuevo valor $e\phi$ es la variación de energía libre al añadir (isotérmicamente) al metal un electrón; en otras palabras, $\phi = \partial F/\partial\rho$, donde F es la energía libre del metal, y ρ la carga de los electrones de conducción referidos a la unidad de volumen.

gada (electrón) lleva consigo una energía $e\phi$. La diferencia $\mathbf{q} - \phi\mathbf{j}$, sin embargo, ya no depende del potencial en sí y puede representarse, en el caso general, como función lineal de los gradientes $\nabla\phi = -\mathbf{E}$ y ∇T , de manera análoga a la fórmula (25.2) para la densidad de corriente. Por el momento escribiremos esta fórmula en la forma

$$\mathbf{q} - \phi\mathbf{j} = \beta\mathbf{E} - \gamma \operatorname{grad} T.$$

El principio de simetría de los coeficientes cinéticos permite vincular el coeficiente β con el coeficiente α en la expresión (25.2).

Para ello calculemos la velocidad de variación de la entropía total del conductor. La cantidad de calor liberada por unidad de tiempo y por unidad de volumen del cuerpo es $-\operatorname{div} \mathbf{q}$. Podemos escribir, en consecuencia,

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = - \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{T} dV.$$

Además, aplicando la ecuación $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, escribamos

$$\frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{T} = \frac{1}{T} \{ \operatorname{div}(\mathbf{q} - \phi\mathbf{j}) + \operatorname{div} \phi\mathbf{j} \} = \frac{1}{T} \operatorname{div}(\mathbf{q} - \phi\mathbf{j}) - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}}{T}.$$

Integremos por partes la integral del primer término; el resultado que se obtiene es

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}}{T} dV - \int \frac{(\mathbf{q} - \phi\mathbf{j}) \cdot \operatorname{grad} T}{T^2} dV. \quad (25.3)$$

Esta fórmula prueba que si se elige como magnitudes $\partial x_a / \partial t$ (véase § 20) las componentes de los vectores \mathbf{j} y $\mathbf{q} - \phi\mathbf{j}$, las correspondientes magnitudes X_a serán las componentes de los vectores $-\mathbf{E}/T$ y $\nabla T/T^2$. Según esto, en las igualdades

$$\mathbf{j} = \sigma T \frac{\mathbf{E}}{T} - \sigma \alpha T^2 \frac{\operatorname{grad} T}{T^2},$$

$$\mathbf{q} - \phi\mathbf{j} = \beta T \frac{\mathbf{E}}{T} - \gamma T^2 \frac{\operatorname{grad} T}{T^2},$$

deben ser iguales los coeficientes $\sigma \alpha T^2$ y βT .

Así pues, $\beta = \sigma \alpha T$ y tenemos

$$\mathbf{q} - \phi\mathbf{j} = \sigma \alpha T \mathbf{E} - \gamma \operatorname{grad} T.$$

Finalmente, expresando aquí \mathbf{E} en función de \mathbf{j} y ∇T según (25.1), obtendremos la siguiente igualdad:

$$\mathbf{q} = (\phi + \alpha T)\mathbf{j} - \kappa \operatorname{grad} T, \quad (25.4)$$

donde se ha hecho $\kappa = \gamma - T \alpha^2 \sigma$. La magnitud κ no es sino el coeficiente ordinario

de conductibilidad térmica determinado por el flujo de calor cuando no existe corriente eléctrica.

Hay que señalar que la condición de que sea positiva la derivada $d\mathcal{S}/dt$ no impone ninguna limitación nueva a los coeficientes termoeléctricos. Cuando se substituyen (25.1) y (25.4) en (25.3) se obtiene

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \int \left(\frac{j^2}{\sigma T} + \frac{\kappa(\text{grad } T)^2}{T^2} \right) dV > 0, \quad (25.5)$$

de donde se sigue únicamente que los coeficientes de conductibilidad térmica y eléctrica deben ser positivos.

En las fórmulas que preceden se ha supuesto implícitamente que el hecho de que la presión (o la densidad) no sea uniforme para un valor constante de la temperatura no puede conducir a que aparezca un campo (o una corriente) en el conductor; basándose en esto, en (25.2) y (25.4) no se ha escrito ningún término proporcional a ∇p . En realidad, la existencia de tales términos estaría en contradicción con la ley de crecimiento de la entropía: en el integrando de la expresión (25.5) aparecerían términos con los productos de signo variable $\mathbf{j} \cdot \nabla p$ y $\nabla T \cdot \nabla p$, de lo que resultaría que la integral no podría ser definida positiva.

Las relaciones (25.1) y (25.4) ponen de manifiesto diferentes efectos termoeléctricos. Consideremos el calor $-\text{div } \mathbf{q}$ liberado por segundo y en la unidad de volumen del conductor. Derivando la expresión (25.4), se encuentra

$$\begin{aligned} Q &= -\text{div } \mathbf{q} \\ &= \text{div}(\kappa \text{ grad } T) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{j} \cdot \text{grad } (\alpha T), \end{aligned}$$

o bien, substituyendo aquí (25.1),

$$Q = \text{div}(\kappa \text{ grad } T) + \frac{j^2}{\sigma} - T \mathbf{j} \cdot \text{grad } \alpha. \quad (25.6)$$

El primer término de la suma en el segundo miembro está ligado con la conductibilidad puramente térmica, mientras que el segundo, proporcional al cuadrado de la corriente, se puede llamar calor de Joule. Nos interesa aquí el tercer término, término que da los efectos específicamente termoeléctricos.

Supongamos que el conductor es de composición homogénea. Entonces la variación de la cantidad α se debe solamente al gradiente de la temperatura y se puede escribir $\nabla \alpha = \frac{da}{dT} \nabla T$; si, como suele ocurrir, la presión es constante en todo el cuerpo, hay que entender por da/dT la derivada $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_p$. Por lo tanto, la liberación de calor que nos interesa (que constituye el llamado *efecto Thomson*) es igual a

$$\rho \mathbf{j} \cdot \text{grad } T, \quad \text{donde } \rho = -T \frac{d\alpha}{dT}. \quad (25.7)$$

La magnitud ρ se llama *coeficiente de Thomson*. Obsérvese que este efecto es proporcional a la primera potencia de la corriente, no a su cuadrado como ocurría en el calor de Joule. Por ello, cambia de signo al cambiar el sentido de la corriente. El coeficiente ρ puede ser positivo o negativo. Si $\rho > 0$, el calor de Thomson es positivo (es decir, se libera calor) al circular la corriente en el sentido de las temperaturas crecientes, mientras que si la corriente circula en el sentido opuesto, se absorbe calor; cuando $\rho < 0$, el fenómeno ocurre al revés.

Otro efecto térmico (el llamado *efecto Peltier*) aparece al pasar una corriente por la superficie de contacto (unión) de dos metales distintos. Sobre dicha superficie son continuas la temperatura, el potencial y también las componentes normales de los vectores densidad de corriente y densidad de flujo de energía. Designando con los índices 1 y 2 los valores de las magnitudes relativas a uno y otro metal e igualando los valores de las componentes normales de \mathbf{q} (25.4) a uno y otro lado de la superficie de contacto, obtendremos, teniendo en cuenta la continuidad de ϕ , T , j_x :

$$[-\kappa \partial T / \partial x]_1^2 = -j_x T(\alpha_2 - \alpha_1),$$

supuesto el eje x dirigido en el sentido de la normal a la superficie. Si la parte positiva del eje x corresponde al paso del metal 1 al metal 2, la expresión que aparece en el primer miembro de la igualdad es la cantidad de calor que se toma por conductibilidad térmica en 1 s por 1 cm^2 de superficie de contacto. Esta cantidad de calor se compensa por el calor liberado en el contacto y viene dada por la expresión que aparece en el segundo miembro de la igualdad. Por consiguiente, la cantidad de calor emitida por unidad de superficie de contacto (en 1 s) es igual a

$$j\Pi_{12}, \text{ donde } \Pi_{12} = -T(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (25.8)$$

La magnitud Π_{12} se llama *coeficiente de Peltier*. Al igual que el efecto Thomson este efecto es proporcional a la primera potencia de la corriente y cambia de signo cuando se invierte el sentido de la misma. Obsérvese que el coeficiente de Peltier es aditivo, lo que se expresa por la igualdad $\Pi_{13} = \Pi_{12} + \Pi_{23}$, donde los índices 1, 2, 3 se refieren a tres metales distintos.

La comparación de las fórmulas (25.7) y (25.8) pone de manifiesto que los coeficientes de Thomson y de Peltier están ligados por la igualdad

$$\rho_2 - \rho_1 = T \frac{d}{dT} \left(\frac{\Pi_{12}}{T} \right). \quad (25.9)$$

Consideremos ahora un circuito abierto con dos uniones, siendo el mismo el metal de los dos conductores extremos (metal 1, fig. 16). Supongamos que las dos superficies de contacto (puntos b y c) se encuentran a diferentes temperaturas T_1 y T_2 y que las temperaturas de los dos extremos del circuito (puntos a y d) son iguales entre sí. Entonces entre estos extremos existe una diferencia de potenciales llamada *fuerza termoelectromotriz*; designémosla por \mathcal{E}_T . Para calcularla hagamos en (25.1)

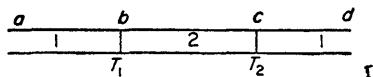


FIG. 16

$\mathbf{j} = 0$ e integremos el campo $\mathbf{E} = \alpha \nabla T$ a lo largo de todo el circuito (eje x):

$$\mathcal{E}_T = \int_a^d \alpha \frac{dT}{dx} dx = \int_a^d \alpha dT.$$

La integración desde a hasta b y desde c hasta d significa integrar respecto de la temperatura desde T_2 a T_1 en el primer metal, e integrar desde b a c equivale a integrar respecto de T entre los límites T_1 y T_2 en el segundo metal. Encontramos, por lo tanto,

$$\mathcal{E}_T = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_2 - \alpha_1) dT. \quad (25.10)$$

Comparando con (25.8), vemos que la fuerza termoelectromotriz está ligada con el coeficiente de Peltier por la relación siguiente:

$$\mathcal{E}_T = - \int_{T_1}^{T_2} \frac{\Pi_{12}}{T} dT. \quad (25.11)$$

Las fórmulas (25.9) y (25.11) se llaman *relaciones de Thomson*.

Para terminar este párrafo escribamos las fórmulas que dan la corriente y el flujo de calor en un conductor anisótropo. Estas fórmulas se deducen mediante el principio de simetría de los coeficientes cinéticos de manera exactamente análoga a como se obtuvieron las fórmulas (25.1) y (25.4) y resultan ser:

$$\begin{aligned} E_i &= \sigma^{-1} \epsilon_{ijk} + \alpha_{ik} \partial T / \partial x_k, \\ q_i - \phi_j &= T \alpha_{kij} - \kappa_{ik} \partial T / \partial x_k. \end{aligned} \quad (25.12)$$

Aquí $\sigma^{-1} \epsilon_{ijk}$ es el tensor inverso del tensor conductibilidad σ_{ik} ; los tensores σ_{ik} y κ_{ik} son simétricos. En cambio, el tensor termoeléctrico α_{ik} es en general no simétrico.

PROBLEMA

Hallar las relaciones que ligan los coeficientes de los distintos efectos termogalvanomagnéticos, es decir, de los efectos que aparecen al pasar una corriente cuando existen simultáneamente un campo eléctrico, uno magnético y un gradiente de temperatura.

Solución. El estudio es por completo análogo al que se ha efectuado en el texto para los fenómenos termoeléctricos. En el presente caso conviene llevarlo a cabo directamente en forma tensorial,

aplicable también a los conductores anisótropos. Escribamos la densidad de corriente eléctrica \mathbf{j} y el flujo de calor \mathbf{q} en la forma

$$\begin{aligned} j_i &= a_{ik} \frac{E_k}{T} + b_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{T} \right), \\ q_i - \phi j_i &= c_{ik} \frac{E_k}{T} + d_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{T} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

donde todos los coeficientes son funciones del campo magnético. Según el principio de simetría de los coeficientes cinéticos tenemos

$$\begin{aligned} a_{ik}(\mathbf{H}) &= a_{ki}(-\mathbf{H}), & d_{ik}(\mathbf{H}) &= d_{ki}(-\mathbf{H}), \\ b_{ik}(\mathbf{H}) &= c_{ki}(-\mathbf{H}). \end{aligned} \quad (2)$$

Expresando mediante (1) \mathbf{E} y $\mathbf{q} - \phi \mathbf{j}$ en función de \mathbf{j} y ∇T , obtendremos

$$\begin{aligned} E_i &= \sigma^{-1} \epsilon_{ijk} j_k + \alpha_{ik} \partial T / \partial x_k, \\ q_i - \phi j_i &= \beta_{ik} j_k - \kappa_{ik} \partial T / \partial x_k, \end{aligned} \quad (3)$$

donde los tensores σ^{-1} , α , β , κ son determinadas funciones de los tensores a , b , c , d y poseen las siguientes propiedades de simetría, consecuencia de las relaciones (2):

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} \epsilon_{ik}(\mathbf{H}) &= \sigma^{-1} \epsilon_{ki}(-\mathbf{H}), \\ \kappa_{ik}(\mathbf{H}) &= \kappa_{ki}(-\mathbf{H}), & \beta_{ik}(\mathbf{H}) &= T \alpha_{ki}(-\mathbf{H}). \end{aligned} \quad (4)$$

Éstas son precisamente las relaciones buscadas en su forma más general. Constituyen una generalización de las relaciones que hallamos en el § 25, para el caso en que no existe campo magnético, y en el § 21, para aquel en que no hay gradiente de temperatura.

Para un conductor isótropo en un campo magnético débil se obtendrá, con una precisión que alcanza a los términos de primer orden en \mathbf{H} ,

$$\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma + \alpha \operatorname{grad} T + R \mathbf{H} \times \mathbf{j} + N \mathbf{H} \times \operatorname{grad} T, \quad (5)$$

$$\mathbf{q} - \phi \mathbf{j} = \alpha T \mathbf{j} - \kappa \operatorname{grad} T + N T \mathbf{H} \times \mathbf{j} + L \mathbf{H} \times \operatorname{grad} T. \quad (6)$$

Aquí, σ , κ son los coeficientes ordinarios de conductibilidad eléctrica y térmica, α es el coeficiente termoeléctrico que aparece en (25.1), R representa el coeficiente de Hall y N , L son coeficientes nuevos. El término $N \mathbf{H} \times \nabla T$ se puede considerar como influencia del campo magnético sobre la fuerza electromotriz (*efecto Nernst*), y el término $L \mathbf{H} \times \nabla T$, como influencia del campo magnético sobre la conductibilidad térmica (*efecto Leduc-Righi*).

Sobre la frontera entre dos medios son continuas las componentes de los vectores \mathbf{j} y \mathbf{q} , y, por consiguiente, también las del vector

$$-\kappa \operatorname{grad} T + \alpha T \mathbf{j} + N T \mathbf{H} \times \mathbf{j} + L \mathbf{H} \times \operatorname{grad} T.$$

El término $N T \mathbf{H} \times \mathbf{j}$ representa la influencia del campo magnético sobre el efecto Peltier (*efecto Ettingshausen*)

La cantidad de calor liberada por segundo en la unidad de volumen del conductor es $Q = -\operatorname{div} \mathbf{q}$. En esta igualdad hay que substituir el valor de \mathbf{q} dado por (6), reemplazando luego $-\nabla \phi = \mathbf{E}$ por la expresión que se deduce de (5). Si el conductor es de composición homogénea, las magnitudes α , N , L , ... son funciones solamente de la temperatura, de modo que sus gradientes resultan proporcionales a ∇T . En este cálculo se prescinde de todos los términos de segundo orden respecto de \mathbf{H} y, dentro de esta aproximación, cabe tomar $\operatorname{rot} (\mathbf{j}/\sigma) \cong \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$. Además, observemos que para un campo exterior \mathbf{H} (cuyas fuentes se encuentran fuera del conductor considerado) se tiene $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ *. Finalmente, como siempre que se trata de una corriente continua, es $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$.

* Con esto prescindimos de un efecto muy débil, a saber, de la influencia del campo magnético propio de las corrientes consideradas sobre el calor liberado.

Teniendo en cuenta todo esto, se obtiene como resultado del cálculo:

$$Q = \frac{j^2}{\sigma} + \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) - T \mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \alpha + \frac{1}{\sigma T} \frac{d}{dT} (\sigma N T^2) \mathbf{j} \times \mathbf{H} \cdot \operatorname{grad} T.$$

El último término representa la variación del efecto Thomson debida a la existencia de un campo magnético.

§ 26. Fenómenos de difusión eléctrica

La existencia de la difusión conduce a que se manifiesten en las soluciones de electrolitos fenómenos específicos que no se observan en los conductores sólidos.

Supondremos, para simplificar, que la temperatura es constante en toda la solución. Con ello limitamos el análisis a los fenómenos de difusión puramente eléctrica, no complicados por efectos termoeléctricos.

En vez de la presión p y la concentración c de la solución conviene utilizar como variables independientes la presión y el potencial químico ζ . Este último se define aquí como derivada del potencial termodinámico de la unidad de masa de la solución respecto de su concentración c (para valores constantes de p y T), entendiendo por concentración la razón de la masa de electrólito a la masa total del líquido en el elemento de volumen dado*. Recordaremos que la constancia del potencial químico constituye (junto con la constancia de la presión y la temperatura) una de las condiciones de equilibrio termodinámico.

La definición de potencial del campo eléctrico dada en el § 25 debe modificarse un poco en el presente caso, puesto que los elementos portadores de la corriente son ahora, no los electrones de conducción, sino los iones del electrólito disuelto. Más precisamente, una definición adecuada (cf. la nota de la pág. 126) la proporciona la fórmula $\phi = (\partial \Phi / \partial \rho)_c$, donde Φ es el potencial termodinámico, y ρ , la suma de las cargas de los iones que se encuentran en la unidad de volumen de la solución (después de derivar, es necesario, naturalmente, hacer $\rho = 0$, teniendo en cuenta que la solución es eléctricamente neutra). La derivada se calcula para una concentración mísica constante, es decir, para una suma dada de las masas de los iones de ambos signos por unidad de volumen.

Cuando existe un gradiente de potencial químico, en la expresión de la densidad de corriente aparece un término más que es proporcional a dicho gradiente:

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} - \beta \operatorname{grad} \zeta), \quad (26.1)$$

* Los potenciales químicos ordinarios se definen por las igualdades $\zeta_1 = \partial \Phi / \partial n_1$, $\zeta_2 = \partial \Phi / \partial n_2$, donde Φ es el potencial termodinámico de 1 g de solución y n_1 , n_2 son los números de partículas de la substancia disuelta y del disolvente en esta cantidad de materia. Los números n_1 y n_2 están ligados por la relación $n_1 m_1 + n_2 m_2 = 1$ (m_1 , m_2 son las masas de las partículas de una y otra especie), y la concentración $c = n_1 m_1$. Así, pues, tenemos para el potencial químico introducido aquí:

$$\zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial c} = \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \frac{\partial n_1}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} \frac{\partial n_2}{\partial c} = \frac{\zeta_1}{m_1} - \frac{\zeta_2}{m_2},$$

análogo al término suplementario en (25.2). En lo que sigue comprobaremos que, para un gradiente dado del potencial químico (y de la temperatura), \mathbf{j} no puede depender del gradiente de la presión y que por consiguiente, no existe en la expresión (26.1) un término en ∇p^* .

Junto con la corriente eléctrica es necesario considerar también el transporte de masa de electrólito que tiene lugar simultáneamente. Hay que tener en cuenta, además, que el paso de la corriente por la solución puede ir acompañado de movimientos macroscópicos del líquido. La densidad de flujo de masa de electrólito transportado por este movimiento junto con todo el líquido es igual a ρcv (v es la velocidad y ρ la densidad de la solución). Además, el electrólito se transporta también en un proceso de difusión molecular. La densidad de este flujo de difusión la designaremos por \mathbf{i} , de modo que la densidad total de flujo es $\rho cv + \mathbf{i}$. Los procesos irreversibles de difusión determinan un aumento adicional de entropía; la velocidad de variación de la entropía total viene determinada por la fórmula**

$$\frac{dS}{dt} = \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}}{T} dV - \int \frac{\mathbf{i} \cdot \text{grad } \zeta}{T} dV. \quad (26.2)$$

Al igual que la densidad de corriente eléctrica, el flujo debido a difusión puede escribirse como combinación lineal de \mathbf{E} y $\nabla \zeta \sigma$, lo que es lo mismo, de \mathbf{j} y $\nabla \zeta$. Teniendo en cuenta la simetría de los coeficientes cinéticos, uno de los coeficientes en esta expresión puede vincularse con el coeficiente β en la fórmula (26.1) de manera exactamente análoga a como se hizo en el párrafo que precede para \mathbf{j} y $\mathbf{q} - \phi \mathbf{j}$. El resultado que se obtiene es:

$$\mathbf{i} = -\frac{\rho D}{(\partial \zeta / \partial c)_{p,T}} \text{grad } \zeta + \beta \mathbf{j}. \quad (26.3)$$

El coeficiente de $\nabla \zeta$ lo expresaremos aquí en función del coeficiente ordinario de difusión***.

La imposibilidad de que en las expresiones (26.1) y (26.3) aparezcan términos proporcionales al gradiente de la presión se sigue de nuevo (como en el párrafo precedente) de la ley de crecimiento de la entropía: tales términos darían lugar a que la derivada de la entropía total (26.2) no fuese una magnitud definida positiva.

Las fórmulas (26.1) y (26.3) resumen todos los fenómenos de difusión; no nos entretendremos aquí en un estudio más detallado.

* Hay que subrayar, sin embargo, que para un gradiente dado de la concentración, \mathbf{j} sí depende del gradiente de la presión:

$$\text{grad } \zeta = (\partial \zeta / \partial c)_{p,T} \text{grad } c + (\partial \zeta / \partial p)_{c,T} \text{grad } p.$$

** Cómo deducir el segundo término de esta fórmula puede verse en el vol. VI, *Hidrodinámica*, § 57.

*** Cuando $\mathbf{j} = 0$ y para una presión constante (y una temperatura asimismo constante), se tiene $\mathbf{j} = -\rho D \nabla c$.

PROBLEMA

Dos placas paralelas planas (de un mismo metal A) se sumergen en una solución de electrólito AX . Hallar la dependencia de la densidad de corriente respecto de la diferencia de potenciales aplicada a las placas.

Solución. Al pasar la corriente se disuelve metal de un electrodo y se deposita sobre el otro. En este proceso, el disolvente (agua) se encuentra en reposo y por la solución pasa un flujo de masa de metal con una densidad $\rho v = jm/e$ (j es la densidad de corriente eléctrica, m y e la masa y la carga de los iones A^+)*. Por otra parte, este flujo viene dado por la expresión $i + \rho vc$, con i dada por (26.3); suponiendo que la presión es constante en todo el líquido**, obtendremos la ecuación

$$\rho D \frac{dc}{dx} = \left[\beta - \frac{m}{e}(1-c) \right] j \quad (1)$$

(x es la coordenada en la dirección normal a los electrodos). Dado que $j = \text{const}$ en la solución, de aquí se sigue que

$$jl = \int_{c_1}^{c_2} \frac{\rho D dc}{\beta - m(1-c)/e}, \quad (2)$$

donde c_1, c_2 son las concentraciones en las superficies de las placas y l , la distancia entre ellas.

La manera más simple de determinar la diferencia de potenciales \mathcal{E} entre las placas para una disipación total de energía Q (en 1 s) se basa en tener en cuenta que debe ser igual (referida a 1 cm^2 de superficie de las placas) a $j\mathcal{E}$. Según (26.1), (26.2) tenemos

$$Q = T \frac{d\mathcal{S}}{dt} = \int \left\{ \frac{j^2}{\sigma} + \rho D \frac{\partial \zeta}{\partial c} \left(\frac{dc}{dx} \right)^2 \right\} dx = j\mathcal{E},$$

y, aplicando (1), se obtiene

$$\mathcal{E} = \int_{c_1}^{c_2} \frac{\rho D dc}{\sigma(\beta - m(1-c)/e)} + \int_{c_1}^{c_2} \frac{\partial \zeta}{\partial c} \left[\beta - \frac{m}{e}(1-c) \right] dc. \quad (3)$$

Las fórmulas (2) y (3) resuelven (en forma implícita) el problema planteado.

Si la corriente j es pequeña, también será pequeña la diferencia de concentraciones $c_2 - c_1$. Substituyendo las integrales por los productos de los integrandos por $c_2 - c_1$, resulta para la resistencia específica efectiva de la solución

$$\frac{\mathcal{E}}{lj} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\rho D} \frac{\partial \zeta}{\partial c} \left[\beta - \frac{m}{e}(1-c) \right]^2.$$

El primer término en (3) da la caída de potencial $\left(\int \frac{dx}{\sigma} \right)$ debida al paso de la corriente. El segundo término, en cambio, es la fuerza electromotriz determinada por la diferencia de concentraciones en la solución (en un cierto sentido, análoga a la fuerza termoelectromotriz). Esta última expresión es independiente de las condiciones del problema unidimensional concreto de que aquí se trata y constituye una expresión general para la f.e.m. de un «elemento de concentración».

* Recordaremos que la velocidad hidrodinámica v en una solución se define de modo que ρv es el impulso por unidad de volumen del líquido (véase vol. VI, *Hidrodinámica*, § 57). Por ello, el hecho de que, en este caso, se mueve (relativamente a los electrodos) tan sólo el metal disuelto, carece de importancia en el cálculo de ρv .

** Tener en cuenta la variación de presión provocada por el movimiento del líquido conduciría únicamente a pequeñas cantidades de orden superior.

CAPÍTULO IV

CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE

§ 27. Campo magnético constante

Un campo magnético constante en los medios materiales se representa por dos ecuaciones de Maxwell que se obtienen promediando las ecuaciones microscópicas

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}. \quad (27.1)$$

El valor medio del campo magnético se suele llamar *inducción magnética* y se representa por \mathbf{B} :

$$\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{B}. \quad (27.2)$$

De acuerdo con esto, el resultado de promediar la primera de las ecuaciones (27.1) se escribe en la forma

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (27.3)$$

En cuanto a la segunda ecuación, la derivada respecto del tiempo desaparece al promediar, puesto que el campo medio se supone constante, de modo que tenemos

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = (4\pi/c) \bar{\rho \mathbf{v}}. \quad (27.4)$$

El valor de la densidad microscópica de corriente, en general, es diferente de cero tanto en los conductores como en los dieléctricos. La diferencia entre estas dos categorías de cuerpos estriba solamente en que en los dieléctricos se tiene siempre

$$\int \bar{\rho \mathbf{v}} \cdot d\mathbf{f} = 0, \quad (27.5)$$

donde la integral se extiende a toda la superficie de una sección transversal cualquiera del cuerpo; en los conductores esta integral, en cambio, puede ser no nula. Supondremos en primer lugar que en el cuerpo (si se trata de un conductor) no existe corriente total, es decir, que vale la relación (27.5).

El hecho de que la integral (27.5) sea igual a cero para una sección cualquiera del cuerpo significa que el vector $\bar{\rho \mathbf{v}}$ puede escribirse en forma de rotacional de un cierto vector, que se suele designar por $c\mathbf{M}$:

$$\bar{\rho \mathbf{v}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad (27.6)$$

donde la magnitud \mathbf{M} es diferente de cero tan sólo dentro del cuerpo (cf. los razonamientos análogos en el § 6). En efecto, integrando sobre una superficie limitada por un contorno que rodee al cuerpo y situado por completo fuera del mismo, obtendremos

$$\int \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = c \int \operatorname{rot} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{f} = c \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

El vector \mathbf{M} se llama *imanación* del cuerpo. Introduciendo este vector en la ecuación (27.4), resulta

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad (27.7)$$

donde el vector \mathbf{H} está ligado con la inducción magnética \mathbf{B} por la relación

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \quad (27.8)$$

que es análoga a la que existe entre el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} y el campo eléctrico \mathbf{E} . Aunque el vector \mathbf{H} , por analogía con \mathbf{E} , se suele llamar «intensidad» del *campo magnético*, hay que recordar que, en realidad, el verdadero valor medio de la intensidad es \mathbf{B} y no \mathbf{H} .

Para poner en claro el sentido físico de la magnitud \mathbf{M} , consideremos el momento magnético total determinado por todas las partículas cargadas que se mueven en el interior del cuerpo. Por definición de momento magnético*, éste es igual a la integral

$$\int \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV / 2c = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \operatorname{rot} \mathbf{M} dV.$$

Dado que $\rho \mathbf{v} \equiv 0$ fuera del cuerpo, la integral puede extenderse a cualquier volumen que contenga al cuerpo en su interior. Transformémosla luego como sigue

$$\int \mathbf{r} \times \operatorname{rot} \mathbf{M} dV = - \oint \mathbf{r} \times (\mathbf{M} \times d\mathbf{f}) - \int (\mathbf{M} \times \operatorname{grad} f) \times \mathbf{r} dV.$$

La integral sobre la superficie situada fuera del cuerpo es igual a cero. En el segundo término tenemos

$$(\mathbf{M} \times \operatorname{grad} f) \times \mathbf{r} = -\mathbf{M} \operatorname{div} \mathbf{r} + \mathbf{M} = -2\mathbf{M}.$$

Así pues, en definitiva, resulta

$$\frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV = \int \mathbf{M} dV. \quad (27.9)$$

Vemos, por consiguiente, que el vector imanación representa el momento magnético de la unidad de volumen del cuerpo**.

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 44.

** Únicamente después de establecer esta correspondencia la magnitud \mathbf{M} queda por completo determinada. Las igualdades (27.6) dentro del cuerpo y la $\mathbf{M} = 0$ fuera de él, en cambio, no determinan por sí solas todavía esta magnitud de manera unívoca: en un dominio interior del cuerpo cabría sumar a \mathbf{M} un vector arbitrario de la forma $\operatorname{grad} f$ sin que dejara de cumplirse la igualdad (27.6) (cf. la observación análoga que se hizo al tratar de la polarización eléctrica en la pág. 44).

A las ecuaciones (27.3) y (27.7) hay que añadir una relación que ligue las magnitudes \mathbf{H} y \mathbf{B} entre sí; únicamente después de haberlo hecho es completo el sistema de ecuaciones. Así, en los cuerpos no-ferromagnéticos en campos magnéticos no demasiado intensos, \mathbf{B} y \mathbf{H} están ligados entre sí por una relación lineal. En el caso de cuerpos isótropos, la relación lineal se reduce a la mera proporcionalidad

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (27.10)$$

El coeficiente μ se llama *permeabilidad magnética* (o, simplemente, *permeabilidad*) y el coeficiente de proporcionalidad

$$\chi = (\mu - 1)/4\pi \quad (27.11)$$

en la relación $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$, *susceptibilidad magnética*.

En contraste con la constante dieléctrica (permitividad) ϵ , que en todos los cuerpos es mayor que 1, la permeabilidad igual puede ser mayor o menor que la unidad. Cabe sólo afirmar que siempre es $\mu > 0$ (la razón de esta diferencia entre μ y ϵ véase en el § 31; la demostración de la desigualdad $\mu > 0$ se dará en el § 30). Según esto, la susceptibilidad magnética χ puede ser positiva o negativa.

Otra diferencia cuantitativa consiste en que la susceptibilidad magnética de la inmensa mayoría de cuerpos es muy pequeña comparada con su susceptibilidad eléctrica. Esta diferencia se debe a que la magnetización de un material (no-ferromagnético) constituye un efecto relativista de segundo orden respecto de $\frac{v}{c}$ (v representa la velocidad de los electrones en los átomos*).

De las ecuaciones $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ se sigue (cf. § 6) que en la frontera entre dos medios diferentes deben cumplirse las condiciones

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}. \quad (27.12)$$

Este sistema de ecuaciones y de condiciones de contorno coincide formalmente con el que determina el campo electrostático en los dieléctricos cuando no hay cargas libres y difiere de éste únicamente en la substitución de \mathbf{E} y \mathbf{D} por \mathbf{H} y \mathbf{B} , respectivamente. Teniendo en cuenta la ecuación $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, se puede buscar \mathbf{H} en la forma $\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \psi$ y para el potencial ψ se obtendrán precisamente las mismas ecuaciones que para el potencial electrostático. La solución de toda una serie de problemas estudiados en el Cap. II para el campo electrostático son aplicables inmediatamente al campo magnético constante. En particular, las fórmulas obtenidas en el § 8 para un elipsoide dieléctrico en un campo eléctrico homogéneo son por completo válidas (con los correspondientes cambios en el significado de los símbolos) para un elipsoide magnético que se encuentra en un campo magnético homogéneo.

* Una primera vez la razón v/c aparece, junto con \mathbf{H} , en el hamiltoniano correspondiente a la interacción del cuerpo con el campo magnético, y una segunda vez, a través de los momentos magnéticos elementales atómicos o moleculares.

La componente tangencial de la inducción magnética, en contraste con su componente normal, experimenta un salto en la superficie de separación de dos medios. El valor de esta discontinuidad puede vincularse con la densidad de las corrientes que circulan por la superficie. Para ello integremos los dos miembros de la ec. (27.4) a lo largo de un pequeño segmento Δl que atraviesa la superficie de separación en la dirección de la normal. Hagamos tender luego a cero la longitud Δl ; la integral $\int \rho \mathbf{v} dl$, sin embargo, puede tender, con todo, a un valor no nulo. El valor así determinado

$$\mathbf{g} = \int \rho \mathbf{v} dl \quad (27.13)$$

puede llamarse *densidad de corriente superficial*; esta densidad determina la carga que pasa por unidad de tiempo a través de la unidad de longitud de una línea trazada sobre la superficie. En un punto dado de ésta, elijamos el eje y en la dirección (orientada) de \mathbf{g} , y el sentido de la normal dirigida del medio 1 al medio 2, como eje x . Entonces la integración de la ecuación (27.4) da

$$\int \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) dx = \frac{4\pi}{c} g_y = \frac{4\pi}{c} g.$$

Puesto que B_x es continua, la derivada $\partial B_x / \partial z$ es finita y, por ello, su integral tiende a cero cuando tiende a cero la longitud del segmento Δl . En cambio, la integral de $\partial B_z / \partial x$ da la diferencia de valores B_z a uno y otro lado de la superficie. Así pues,

$$B_{2z} - B_{1z} = -4\pi g/c.$$

Esta igualdad se puede escribir en forma vectorial:

$$4\pi \mathbf{g}/c = \mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 4\pi \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1), \quad (27.14)$$

donde \mathbf{n} es el vector unidad de la normal dirigida hacia el interior del medio 2; en la última transformación se ha tenido en cuenta que la componente tangencial de \mathbf{H} es continua.

§ 28. Simetría magnética de los cristales

Entre las propiedades eléctricas y magnéticas de los cristales existe una profunda diferencia debida a la diversidad de comportamiento de las cargas y de las corrientes con relación al cambio de sentido del tiempo.

Como es sabido, dada la invariancia de las ecuaciones del movimiento respecto del cambio de signo del tiempo, la substitución formal de t por $-t$ aplicada a cualquier estado de equilibrio termodinámico de un cuerpo debe conducir a un estado que es también uno de los posibles estados de equilibrio. En relación con esto se presentan dos posibilidades: los estados que se transforman entre sí al substituir t por $-t$ coinciden o no coinciden.

En este párrafo designaremos por $\rho(x, y, z)$ y $\mathbf{j}(x, y, z)$ la densidad real (microscópica) de carga y la densidad de corriente en cada punto de un cristal, promediada una y otra solamente respecto del tiempo (pero no en volúmenes «físicamente infinitesimales» como se hace en la teoría macroscópica). Son estas funciones precisamente las que determinan la estructura eléctrica y magnética del cristal, respectivamente.

La substitución de t por $-t$ cambia el signo de \mathbf{j} . Si como resultado de esta transformación el estado del cuerpo no cambia, esto significa que $\mathbf{j} = -\mathbf{j}$, es decir, que $\mathbf{j} = 0$. Por lo tanto, se tiene así una causa en virtud de la cual pueden existir cuerpos con una función $\mathbf{j}(x, y, z)$ rigurosamente igual a cero. Junto con la densidad de corriente, en tales cuerpos se anulan los valores medios (temporales) del campo magnético y de los momentos magnéticos en cada punto del cuerpo (claro está, se trata en todo eso de estados de un cuerpo cuando no existe campo magnético exterior). De ellos cabe decir que no poseen ninguna «estructura magnética». De hecho, a esta categoría pertenecen la mayor parte de cuerpos.

La densidad de cargas ρ , por el contrario, no cambia en absoluto al aplicar la transformación $t \rightarrow -t$. No hay, pues, razón alguna en virtud de la cual esta función deba anularse idénticamente. En otras palabras, no existen cristales sin «estructura eléctrica». En esto consiste la diferencia esencial entre las propiedades magnéticas y eléctricas de los cristales que hemos recordado al principio.

Consideremos los cristales en los que la substitución de t por $-t$ cambia el estado de los mismos y en los que, por ello, $\mathbf{j} \neq 0$. Al referirnos a estos cuerpos, diremos que se trata de cuerpos con «estructura magnética».

Observemos ante todo que si bien \mathbf{j} no es igual a cero, no puede haber ninguna corriente total (en el estado de equilibrio del cuerpo), es decir, la integral $\int \mathbf{j} dV$ extendida a una celda elemental debe anularse siempre*. De no ser así esta corriente crearía un campo magnético macroscópico y el cristal poseería energía magnética (por unidad de volumen) que crecería rápidamente al aumentar el tamaño del cuerpo. Teniendo en cuenta la desventaja energética de tal estado, éste no puede, evidentemente, corresponder al equilibrio termodinámico.

Al mismo tiempo, las corrientes \mathbf{j} pueden crear un momento magnético macroscópico no nulo, es decir, la integral $\int \mathbf{r} \times \mathbf{j} dV$ (de nuevo extendida al volumen de una celda elemental) puede ser diferente de cero. De acuerdo con esto, entre los cuerpos en los cuales $\mathbf{j} \neq 0$ cabe distinguir dos tipos: los cuerpos con momento magnético macroscópico no nulo y aquellos otros en los que dicho momento es igual a cero. Los primeros se llaman *ferromagnéticos*, los segundos, *antiferromagnéticos*.

La simetría de la distribución de corrientes \mathbf{j} puede representarse, evidentemente, como simetría de la distribución y de las orientaciones de los momentos magnéticos de los átomos individuales en el cristal. Si $\mathbf{j} = 0$, ello significa que todos estos

* Hay que subrayar que la celda de la que aquí se habla es la verdadera celda elemental, cuya definición supone la estructura magnética del cristal, celda que puede no coincidir con la puramente cristalográfica y basada en la noción de simetría de la distribución de las cargas en la red.

momentos cambian su orientación con el tiempo de manera totalmente desordenada, de modo que el valor medio de cada uno de ellos se anula. En un cristal ferromagnético los momentos atómicos están orientados preferentemente en una dirección, originando un momento total distinto de cero en cada celda elemental. Finalmente, en un cuerpo antiferromagnético, los momentos atómicos medios son diferentes de cero, es decir, si están orientados, pero de tal forma que en cada celda se compensan recíprocamente.

Se plantea ahora la cuestión de cuáles son los tipos posibles (grupos de simetría) de una distribución de corrientes $j(x, y, z)$. Esta simetría está constituida, ante todo, por los elementos ordinarios —rotaciones, reflexiones y traslaciones— con lo cual entre los posibles grupos de simetría de j se tienen, en cualquier caso, los 230 grupos espaciales cristalográficos ordinarios. Sin embargo, con éstos no se agota, ni de lejos, la lista de los grupos que buscamos. Como se indicó ya, la sustitución de t por $-t$ cambia el signo del vector j . Debido a esto aparece un nuevo elemento posible de simetría, a saber, la simetría respecto de la transformación que consiste en cambiar los sentidos de todas las corrientes; designemos, como se suele hacer, esta transformación por R . Si la distribución de corrientes posee el elemento de simetría R , esto significa que $j = -j$, es decir, que $j = 0$ y el cuerpo carece de estructura magnética. Una función $j(x, y, z)$ diferente de cero puede, sin embargo, ser simétrica respecto de diferentes combinaciones de la transformación R con los otros elementos de simetría —rotaciones, reflexiones y traslaciones. Así pues, el problema de determinar los tipos posibles de simetría de una distribución de corrientes (los *grupos espaciales magnéticos*) consiste en construir todos los posibles grupos formados tanto a partir de las transformaciones que se tienen en los grupos espaciales ordinarios, como a partir de aquellas que se obtienen por combinación de las transformaciones del tipo ordinario con la transformación R .

Si se da la simetría de la distribución de corrientes, con ella quedará determinada también la simetría cristalográfica de la distribución de las partículas en el cristal, que coincide con la simetría de la función $\rho(x, y, z)$. Ésta vendrá definida por el grupo espacial que se obtiene a partir del grupo de simetría de j si se considera formalmente que la transformación R es la identidad (a la cual se reduce cuando se aplica a la función ρ).

El conocimiento del grupo completo de simetría de la función $j(x, y, z)$, sin embargo, no es necesario si nos interesan únicamente las propiedades macroscópicas del cuerpo. Estas propiedades dependen tan sólo de la dirección en el cristal, y la simetría de traslación de la red cristalina en nada las afecta. Desde el puro punto de vista de la estructura cristalográfica, la «simetría de las direcciones» en un cristal viene dada, como es sabido, por las 32 clases cristalográficas. Éstas son los grupos de simetría formados a partir solamente de las rotaciones y de las reflexiones puras; dichas clases resultan de los grupos espaciales si en éstos se consideran todas las traslaciones como equivalentes a la transformación idéntica y los ejes helicoidales y los planos de deslizamiento se toman como simples ejes y planos de simetría.

En cambio, desde el punto de vista de las propiedades magnéticas, la simetría macroscópica debe clasificarse en grupos formados a partir de rotaciones, reflexiones y sus combinaciones con el elemento R . Estos grupos se pueden llamar *clases cristalográficas magnéticas*, y la relación que los liga con los grupos espaciales magnéticos es la misma que la existente entre las clases cristalográficas ordinarias y los grupos espaciales ordinarios.

Entre dichas clases figuran, ante todo, las 32 clases ordinarias, completadas con el elemento R , y las mismas 32 clases sin dicho elemento. Las primeras, en particular, son los grupos de simetría macroscópica de todos los cuerpos que no presentan estructura magnética, pero estas mismas clases de simetría pueden poseerlas también los cuerpos con estructura magnética. Para que así ocurra es necesario que en el grupo espacial magnético de simetría de este cuerpo el propio elemento R figure no solo, sino únicamente en combinación con traslaciones.

Además, se tienen 58 clases en las cuales el elemento R aparece tan sólo en combinación con rotaciones o reflexiones. Cada una, si se substituye en ella la operación R por la transformación idéntica, se convierte en una de las clases cristalográficas ordinarias*.

Es necesario observar que la aparición de una estructura magnética (ferro o antiferromagnética) está siempre ligada con interacciones relativamente débiles**. Por ello, la estructura cristalográfica de un cuerpo magnético representa sólo una pequeña alteración respecto de la estructura de la fase no-magnética, a partir de la cual la fase magnética suele resultar al disminuir la temperatura. En este respecto las substancias ferromagnéticas, en particular, difieren de los cuerpos ordinarios piroeléctricos, pero son análogas a los ferroeléctricos.

Si se especifica la clase cristalográfica magnética, queda con ello determinado el carácter de todas las propiedades magnéticas de un cuerpo. La más importante de éstas es la existencia o no existencia de un momento magnético macroscópico, es decir, de la imanación espontánea (sin campo exterior). El momento magnético M es una magnitud vectorial que en las rotaciones y en las reflexiones se comporta como un vector axil (producto vectorial de dos vectores polares), y que cambia

* Estas clases son isomorfas respecto de los grupos de simetría, descubiertos por A. V. Shubnikov, de las figuras geométricas (poliedros) con caras pintadas de dos colores (según la terminología de Shubnikov, los «grupos de polaridad mezclada»). Al elemento R corresponde la operación de cambiar el color de una cara. (Véase A. V. Shubnikov, *Simmetriia i antisimmetriia konechnyj figur* (Simetría y antisimetría de las figuras finitas) Izd. AN SSSR, Moscú, 1951). Una deducción directa de estas clases en tanto que grupos de simetría de las propiedades magnéticas de los cuerpos se debe a B. A. Tavger y V. M. Zaitsev (Zh. ETF, 30, 564, 1956).

Se tienen en total 1651 grupos magnéticos espaciales; la manera de obtenerlos (como grupos de Shubnikov) puede verse en N. V. Belov, N. N. Neronova y T. S. Smirnova, Trudy Instituta Kristallografiia 11, 33, 1955; A. M. Zamorzaev, Kristallografiia 2, 15, 1957; Soviet Physics: Crystallography 2, 10, 1958.

** De ordinario la interacción de intercambio entre los momentos magnéticos de los átomos conduce a la saturación de los enlaces de valencia y a la formación de estructuras no-magnéticas. La aparición de una estructura magnética resulta solamente de la interacción de intercambio, relativamente débil, de los electrones d y f muy próximos al núcleo en los átomos de los elementos en los grupos de transición del sistema de Mendeleev.

de signo al aplicarle la operación R . Un cristal poseerá la imanación espontánea si en él existe por lo menos una dirección tal que el vector M que la posee y que tenga las propiedades antes indicadas se conserva invariante en todas las transformaciones de la clase cristalográfica magnética dada.

De nuevo subrayaremos la diferencia respecto de las propiedades eléctricas (esta vez, macroscópicas). El carácter de estas últimas viene completamente determinado por una clase cristalográfica ordinaria. En particular, para que un cuerpo sea piroeléctrico es suficiente que su clase cristalográfica admita la existencia de un vector polar P (el momento eléctrico). Al mismo tiempo, sería del todo incorrecto llegar a la conclusión de que existe o no un momento magnético macroscópico basándose en el comportamiento del vector axil M respecto de las transformaciones de la clase cristalográfica (no-magnética) del cuerpo dado.

Para ilustrar esta situación consideremos una red tetragonal formada por átomos idénticos con momentos magnéticos paralelos al eje tetagonal*. Su clase cristalográfica magnética contiene un eje de cuarto orden $C_4^{(z)}$, dos ejes de segundo orden combinados con la operación R ($C_2^{(x)} R$ y $C_2^{(y)} R$), un plano de simetría $\sigma_h^{(z)}$ perpendicular al eje z y dos planos de simetría combinados con $R(\sigma_v^{(x)} R, \sigma_v^{(y)} R)$. Este grupo admite la existencia de un vector M dirigido a lo largo del eje tetagonal. En cuanto a la clase cristalográfica de simetría, ésta se obtiene a partir de la anterior si se substituye R por la unidad, es decir, resulta ser la clase D_{4h} . Esta clase no admite la existencia de un vector axil M (puesto que sus componentes M_x, M_y, M_z cambiarían de signo en la reflexión en los planos $\sigma^{(z)}, \sigma^{(x)}, \sigma^{(y)}$, respectivamente).

Las propiedades de los cuerpos con momento magnético macroscópico espontáneo no nulo (cuerpos ferromagnéticos) se estudiarán detenidamente en el Cap. V. Para todos los demás cristales, la relación entre B y H viene dada (para campos no demasiado intensos) por relaciones lineales

$$B_i = \mu_{ik} H_k, \quad (28.1)$$

que no contienen un término constante independiente. El tensor permeabilidad μ_{ik} es simétrico. Este hecho se sigue de las relaciones termodinámicas que se deducirán en el § 30, exactamente de la misma manera como en el § 13 se demostró la simetría del tensor ϵ_{ik} .

Recordaremos todavía dos fenómenos que, en principio, pueden presentarse. Uno de ellos es el *piezomagnetismo*, que se traduce en la existencia de una relación lineal entre el campo magnético en el cuerpo y la deformación (fenómeno análogo al que se presenta en los materiales piezoelectrinos, véase § 17). El otro es consecuencia de una relación lineal entre los campos magnético y eléctrico en una substancia, relación que conduciría, por ejemplo, a que un campo eléctrico produjera una imanación de la materia proporcional al mismo**. Ambos fenómenos

* Tal como, por ejemplo, la red de la fase ferromagnética del hierro. Desde el punto de vista cristalográfico, constituye una pequeña modificación (a lo largo de uno de los ejes de cuarto orden) de la red cúbica.

** Efectos cuadráticos de este tipo deben existir, en principio, incluso en los cuerpos isótropos, pero carecen de interés dada su insignificancia.

son posibles en determinadas clases de simetría cristalográfica magnética*.

§ 29. Campo magnético de las corrientes continuas

Si por un conductor circula una corriente total diferente de cero, la densidad de corriente media en él puede representarse como suma

$$\rho \mathbf{v} = c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \mathbf{j}.$$

El primer término, ligado con la imanación del medio, no contribuye a la corriente total, de modo que el transporte de carga neto a través de una sección transversal del cuerpo viene determinado por la integral $\int j \cdot d\mathbf{f}$ del segundo término solamente. La magnitud j se llama *densidad de corriente de conducción***. Precisamente a ésta se refiere todo lo dicho en el § 20; en particular, la energía disipada por unidad de volumen en la unidad de tiempo es igual a $E \cdot j$.

La distribución de la corriente j en el volumen de un conductor se determina por las ecuaciones de que se trató en el § 20, ecuaciones en las cuales no aparece el campo magnético creado por estas mismas corrientes (a condición de que se prescinda de la influencia del campo sobre las propiedades de conductibilidad del metal en sí). Por ello, el problema de determinar el campo magnético de las corrientes debe resolverse para una distribución dada de estas últimas. Las ecuaciones de este campo difieren de las obtenidas en el § 27 en que el valor cero del segundo miembro

de (27.7) se substituye por $\frac{4\pi}{c} j$:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (29.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi j}{c}. \quad (29.2)$$

La densidad de corriente de conducción j , proporcional a la intensidad del campo eléctrico, es una cantidad acotada que en ningún punto toma el valor infinito, en particular tampoco sobre la superficie de separación de dos medios. Precisamente por esto la existencia de un segundo miembro en la ecuación (29.2) no se refleja en la condición de contorno que impone la continuidad de la componente tangencial de \mathbf{H} .

Para resolver las ecuaciones (29.1) y (29.2) conviene introducir el llamado *potencial vector* \mathbf{A} , haciendo

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (29.3)$$

* Algunos ejemplos pueden verse en I. E. Dzialoshinskii, ZhETF, 33, 807 (1957); 37, 881 (1959).

** En cuanto a la magnitud $c \operatorname{rot} \mathbf{M}$, a veces se le llama *densidad de corriente molecular*. Esta terminología, sin embargo, no corresponde por completo a la imagen puramente física del movimiento de las cargas en un conductor. Así, en un metal contribuyen a la imanación \mathcal{M} no sólo los electrones que se mueven dentro de los átomos, sino también los electrones de conducción.

como resultado de lo cual la ecuación (29.1) queda satisfecha idénticamente. El potencial vector no está todavía determinado únicamente por la igualdad (29.3). Cabe sumarle un vector arbitrario de la forma $\text{grad } f$ sin que deje de cumplirse (29.3). Debido a esta indeterminación es posible imponer a \mathbf{A} una condición suplementaria, para la que elegiremos la siguiente

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (29.4)$$

La ecuación a que satisface \mathbf{A} se obtiene substituyendo (29.3) en (29.2). Cuando la relación entre \mathbf{B} y \mathbf{H} es lineal, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, se tiene

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) = 4\pi \mathbf{j}/c. \quad (29.5)$$

En esta forma la ecuación es válida para cualquier medio, homogéneo o no.

En un medio homogéneo $\mu = \text{const}$ y dado que $\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A}$, la ecuación (29.5) toma la forma

$$\Delta \mathbf{A} = -4\pi \mu \mathbf{j}/c. \quad (29.6)$$

Pero si se trata del conjunto de dos o más medios en contacto, cada uno de los cuales posee su permeabilidad μ , la ecuación general (29.5) se reduce a una ecuación de la forma (29.6) dentro de cada uno de los cuerpos homogéneos, mientras que en sus fronteras debe cumplirse la condición de continuidad de la componente tangencial del vector $(1/\mu) \text{rot } \mathbf{A}$. Además, ha de ser continua la componente tangencial del propio vector \mathbf{A} , dado que su discontinuidad significaría que existe sobre la frontera una inducción \mathbf{B} infinita.

Las ecuaciones del campo se simplifican en el caso del problema bidimensional de determinar el campo magnético en un medio ilimitado, supuesto homogéneo en una dirección (que tomaremos como dirección del eje z) y admitiendo que las corrientes que crean dicho campo son paralelas al eje z , de modo que su densidad $j_z = j$ es función solamente de x , y . Haremos la hipótesis plausible (confirmada luego por el resultado) de que el potencial vector del campo es asimismo paralelo al eje z , $A_z = A(x, y)$, (la condición (29.4) queda entonces satisfecha automáticamente) con lo que el campo magnético lo es al plano x , y . Designando por \mathbf{k} el versor correspondiente al eje z , tenemos

$$\text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } A \mathbf{k} = \text{grad } A \times \mathbf{k},$$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) = \text{rot} \left(\frac{\text{grad } A}{\mu} \times \mathbf{k} \right) = -\mathbf{k} \text{div} \frac{\text{grad } A}{\mu}.$$

Por consiguiente, la ecuación (29.5) puede escribirse en la forma

$$\text{div} \frac{\text{grad } A}{\mu} = -\frac{4\pi}{c} j(x, y), \quad (29.7)$$

es decir, obtenemos de hecho una ecuación para la magnitud escalar $A(x, y)$. En el caso de un medio «homogéneo a trozos», (29.7) se reduce a la ecuación

$$\Delta A = -4\pi\mu j(x, y)/c, \quad (29.8)$$

con la condición de contorno de que sean continuas A y $\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial n}$ sobre cada superficie de separación*.

El campo magnético se determina de manera del todo elemental si la distribución de corrientes es simétrica respecto del eje z : $j_z = j(r)$ (r es la distancia al eje z). Evidentemente, en este caso las líneas de fuerza magnéticas son las circunferencias $r = \text{const}$. El módulo del campo se determina directamente a partir de la fórmula

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot df, \quad (29.9)$$

que es la forma integral de la ecuación (29.2). Por lo tanto,

$$H(r) = 2J(r)/cr, \quad (29.10)$$

donde $J(r)$ es la corriente total que atraviesa el círculo $r = \text{const}$.

También es posible reducir la ecuación vectorial (29.5) a una sola ecuación escalar cuando se trata de una distribución de corrientes circulares que presenta simetría axial, es decir, cuando en un sistema de coordenadas cilíndricas r, ϕ, z dicha distribución tiene la forma

$$j_r = j_z = 0, \quad j_\phi = j(r, z).$$

Para el potencial vector buscaremos una expresión del tipo $A_r = A_z = 0$, $A_\phi = A(r, z)$. En estas condiciones, las componentes de la inducción $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ son

$$B_r = -\partial A/\partial z, \quad B_z = (1/r)\partial(rA)/\partial r, \quad B_\phi = 0,$$

y la componente- ϕ de la ecuación (29.2) da

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} [rA] \right) = -\frac{4\pi}{c} j(r, z). \quad (29.11)$$

Las ecuaciones del campo magnético creado por las corrientes se pueden resolver de manera general en el caso importante en el que es posible prescindir de las

* Hay que observar que el problema bidimensional relativo a un campo magnético constante resulta ser equivalente al problema plano de electrostática que plantea la determinación del campo eléctrico creado por cargas extrañas distribuidas en un medio dieléctrico con densidad $\rho_{ex}(x, y)$. Este último problema exige resolver la ecuación

$$\text{div}(\epsilon \text{ grad } \phi) = -4\pi\rho_{ex},$$

(ϕ es el potencial del campo), que difiere de (29.7) tan sólo en la substitución de A , j/c , μ por ϕ , ρ_{ex} , $1/\epsilon$, respectivamente. También coinciden las condiciones de contorno para A y para ϕ . Sin embargo, hay una diferencia en la determinación de \mathbf{E} y \mathbf{B} , respectivamente, a partir de ϕ o de A . Los vectores $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ y $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ en cada punto son iguales en módulo, pero perpendiculares entre sí.

propiedades magnéticas del medio, es decir, cuando cabe hacer $\mu \equiv 1$. El potencial vector cumple entonces en todo el espacio la ecuación:

$$\Delta \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{j}/c$$

sin que exista condición de contorno alguna sobre las superficies de separación de los diversos medios (incluida la superficie del conductor por el que circula la corriente). Como es sabido, la solución de esta ecuación que se anula en el infinito es*,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}}{R} dV, \quad (29.12)$$

donde R es la distancia del punto en que se calcula \mathbf{A} (punto de observación) hasta el elemento de volumen dV . Al aplicar la operación rot a esta expresión hay que recordar que la derivación de \mathbf{j}/R bajo el signo de integral debe efectuarse respecto de las coordenadas del punto de observación, coordenadas de las que no depende \mathbf{j} , de modo que

$$\text{rot } (\mathbf{j}/R) = \text{grad } (1/R) \times \mathbf{j} = -\mathbf{R} \times \mathbf{j}/R^3,$$

donde el vector posición \mathbf{R} tiene su origen en dV y su extremo en el punto de observación. De esta manera,

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{R}}{R^3} dV. \quad (29.13)$$

Si el conductor por el que circula la corriente es suficientemente delgado (un alambre fino) y si sólo nos interesa el campo en el espacio que lo rodea, cabe prescindir de su grosor. En lo que sigue consideraremos frecuentemente esas llamadas *corrientes lineales*. La integración en el volumen del conductor se substituye en tal caso por una integración a lo largo del mismo. Más precisamente, las fórmulas para las corrientes lineales se obtienen a partir de las fórmulas relativas a las corrientes volumétricas substituyendo en estas últimas

$$\mathbf{j} dV \rightarrow J dl,$$

donde J es la corriente total que circula por el conductor. Así, de las fórmulas (29.12) y (29.13) se deduce

$$\mathbf{A} = \frac{J}{c} \oint \frac{dl}{R}, \quad \mathbf{H} = \frac{J}{c} \oint \frac{dl \times \mathbf{R}}{R^3}. \quad (29.14)$$

La segunda de estas fórmulas expresa la *ley de Biot y Savart*.

Estas simples fórmulas para el campo magnético de las corrientes lineales no dependen ni tan sólo de la condición de que sea $\mu = 1$. Dado que prescindimos del grosor del conductor, no es necesario imponer condición de contorno alguna sobre su superficie y las propiedades magnéticas del material que lo forma carecen en ab-

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 43.

sólido de importancia (puede incluso tratarse de una substancia ferromagnética). La solución de la ecuación (29.6) para el campo en el medio que rodea al conductor será, por lo tanto,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu J}{c} \int \frac{dl}{R}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu J}{c} \int \frac{dl \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad (29.15)$$

cualquiera que sea el valor de la permeabilidad del medio. Así pues, la presencia del medio conduce únicamente a multiplicar por μ la inducción, mientras que en nada varía la intensidad del campo, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$.

El problema de determinar el campo magnético de las corrientes lineales puede resolverse también como problema de la teoría del potencial. Dado que prescindimos del volumen de los conductores, se trata de hecho de determinar el campo en un dominio en el que no existen corrientes (con excepción tan sólo de ciertas líneas singulares, esto es, de las corrientes lineales). Pero cuando no existen corrientes, un campo magnético constante deriva de un potencial escalar que satisface (en un medio homogéneo) la ecuación de Laplace. Entre el potencial de un campo magnético y el potencial de un campo electrostático existe, sin embargo, una diferencia esencial. El potencial de un campo eléctrico es siempre una función uniforme, lo que es consecuencia de que $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ en todo el espacio (en particular, allí donde se encuentran cargas) y, por consiguiente, la variación del potencial a lo largo de un contorno cerrado arbitrario (es decir, la circulación de \mathbf{E} a lo largo de dicho contorno) es igual a cero. En cambio, la circulación del campo magnético a lo largo de un contorno que rodee a una corriente lineal no es nula, sino que es igual a $4\pi J/c$. Por consiguiente, el valor del potencial cambia en esta cantidad cada vez que se rodea una línea de corriente, es decir, el potencial del campo magnético es una función multiforme.

Si un sistema de corrientes se encuentra limitado en una región finita del espacio (y $\mu = 1$ tanto en los conductores como en el medio), lejos de él el potencial vector del campo magnético tiene la forma

$$\mathbf{A} = \mathcal{M} \times \mathbf{R}/R^3, \quad (29.16)$$

donde

$$\mathcal{M} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{j} dV/2c \quad (29.17)$$

es el momento magnético total del sistema*.

En el caso de una corriente lineal esta expresión toma la forma

$$\mathcal{M} = J \oint \mathbf{r} \times dl/2c,$$

* Véase vol. II, *Teoría clásica de los campos*, § 44. En la demostración desarrollada allí se utilizó de modo explícito un modelo en que las corrientes son el resultado del movimiento de partículas cargadas individuales. Dicha demostración, naturalmente, tiene carácter general, pero la fórmula (29.16) se puede obtener también por consideraciones puramente macroscópicas (véase el problema 4 de este párrafo).

y puede transformarse en una integral extendida a una superficie limitada por el contorno definido por la corriente. El producto $d\mathbf{f} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{l}$ es igual en módulo al área del elemento triangular de superficie construido con los vectores \mathbf{r} y $d\mathbf{l}$. En cuanto al vector integral $\int d\mathbf{f}$, éste no depende de cuál sea precisamente la superficie a la que se extiende (con tal que esté limitada por el contorno dado). Por lo tanto, el momento magnético de una corriente lineal cerrada es igual a

$$\mathcal{M} = J \int d\mathbf{f}/c. \quad (29.18)$$

En particular, para una corriente lineal cerrada plana el momento magnético es igual, simplemente, a JS/c , donde S es el área de la porción de superficie limitada por la corriente.

Para terminar este párrafo, examinemos la cuestión que plantea el flujo de energía en un conductor. La energía disipada en un conductor (en forma de calor de Joule) procede de la energía del campo electromagnético. En el caso estacionario, la «ecuación de continuidad» que expresa la ley de conservación de la energía tiene la forma

$$-\operatorname{div} \mathbf{S} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad (29.19)$$

donde \mathbf{S} es la densidad de flujo de energía. Ésta viene dada dentro del conductor por la expresión

$$\mathbf{S} = c \mathbf{E} \times \mathbf{H}/4\pi, \quad (29.20)$$

que coincide formalmente con la que da el vector de Poynting para el campo en el vacío. Es fácil comprobarlo de manera directa: el cálculo de $\operatorname{div} \mathbf{S}$ utilizando las ecuaciones $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ y (29.2) conduce a (29.19).

Con independencia de esta demostración, la fórmula (29.20) se sigue de la condición evidente de continuidad de la componente normal de \mathbf{S} sobre la superficie de un cuerpo, si a la vez se tienen en cuenta la continuidad de \mathbf{E}_t y \mathbf{H}_t y el hecho de que la fórmula (29.20) es válida en el vacío, fuera del cuerpo.

PROBLEMAS*

- Determinar el potencial escalar del campo magnético de una corriente lineal cerrada.

Solución. Transformando la integral de contorno en una integral de superficie extendida a una superficie limitada por aquél, obtendremos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{J}{c} \oint \frac{d\mathbf{l}}{R} = \frac{J}{c} \int d\mathbf{f} \times \operatorname{grad} \frac{1}{R}, \\ \mathbf{B} &= \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\frac{J}{c} \int (d\mathbf{f} \cdot \operatorname{grad}) \operatorname{grad} \frac{1}{R} \end{aligned}$$

* En los problemas 1-4 se supone $\mu = 1$.

(en las transformaciones hay que tener en cuenta que $\Delta \frac{1}{R} = 0$). Comparando con $\mathbf{B} = -\operatorname{grad} \phi$ se encuentra que el potencial escalar es

$$\phi = \frac{J}{c} \int d\mathbf{f} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{R} = -\frac{J}{c} \int \frac{d\mathbf{f} \cdot \mathbf{R}}{R^3}.$$

La integral que aquí aparece representa, geométricamente, el ángulo sólido Ω que subtende el contorno desde el punto de observación del campo. El carácter multiforme del potencial, que hemos señalado en el texto, se traduce en que cuando el punto de observación describe una trayectoria cerrada que rodea al conductor, el ángulo Ω , que alcanza el valor 2π , cambia de signo y pasa a ser igual a -2π .

2. Determinar el campo magnético de una corriente circular lineal (de radio a).

Solución. · Elijamos como origen de un sistema de coordenadas cilíndricas r, ϕ, z el centro de la circunferencia, contando el ángulo ϕ a partir del plano que pasa por el eje z y por el punto de observación del campo. El potencial vector tiene una sola componente no nula $A_\phi = A(r, z)$ y de acuerdo con la fórmula (29.14) escribiremos

$$\begin{aligned} A_\phi &= \frac{J}{c} \oint \frac{\cos \phi \, dl}{R} \\ &= \frac{2J}{c} \int_0^\pi \frac{a \cos \phi \, d\phi}{\sqrt{(a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos \phi)}} \end{aligned}$$

Introduciendo una nueva variable θ definida por $\phi = \pi + 2\theta$, esta expresión puede llevarse a la forma

$$A_\phi = \frac{4J}{ck} \sqrt{\frac{a}{r}} [(1 - \frac{1}{2}k^2)K - E],$$

donde

$$k^2 = 4ar/[(a+r)^2 + z^2],$$

y K y E son las integrales elípticas completas de primera y segunda especie:

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \theta)}}, \quad E = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \theta)} \, d\theta.$$

Para las componentes de la inducción se encuentra:

$$\begin{aligned} B_\phi &= 0, \\ B_r &= -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} = \frac{J}{cr\sqrt{[(a+r)^2 + z^2]}} \left[-K + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right], \\ B_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = \frac{J}{c} \frac{2}{\sqrt{[(a+r)^2 + z^2]}} \left[K + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right]. \end{aligned}$$

Hemos utilizado aquí las fórmulas

$$\frac{\partial K}{\partial k} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}, \quad \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{E-K}{k}$$

cuya validez es fácil comprobar. Sobre el eje ($r = 0$)

$$B_r = 0, \quad B_z = 2\pi a^2 J / c(a^2 + z^2)^{3/2},$$

igualdades que es posible obtener directamente mediante un cálculo elemental.

3. Determinar el campo magnético en una cavidad cilíndrica longitudinal practicada en un conductor cilíndrico (de longitud infinita) a lo largo del cual circula una corriente distribuida uniformemente en toda su sección (fig. 17).

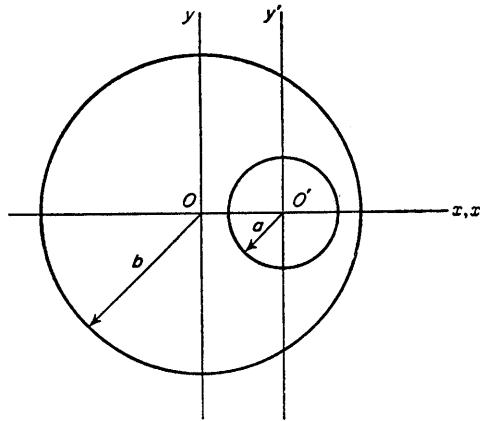


FIG. 17

Solución. Si no existiera la perforación, el campo dentro del cilindro sería igual a

$$H'_x = -2\pi jy/c, H'_y = 2\pi jx/c$$

(la notación correspondiente a las diferentes dimensiones y a los ejes de coordenadas se da en la figura).

Si por el cilindro interior circula una corriente de densidad $-j$, ésta determinaría en el mismo punto de observación un campo

$$H''_x = 2\pi jy'/c, H''_y = -2\pi jx'/c.$$

El campo que se busca en el hueco cilíndrico se obtiene componiendo estos dos campos. Observando que $x-x' = OO' = h$, $y = y'$, se encuentra

$$H_x = 0, H_y = 2\pi jh/c = 2hJ/(b^2-a^2)c,$$

es decir, el campo es homogéneo en la dirección del eje y .

4. Partiendo de la fórmula (29.12), deducir la fórmula (29.16) para el potencial vector de un campo lejos de las corrientes.

Solución. Hagamos $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, donde \mathbf{R}_0 y \mathbf{r} son los vectores posición desde el origen de coordenadas, situado en un punto cualquiera del dominio ocupado por las corrientes, al punto de observación y al elemento de volumen dV , respectivamente. Desarrollando el integrando en potencias de \mathbf{r} teniendo en cuenta que $\int \mathbf{j} dV = 0$, obtendremos

$$A_i \cong (R_k/cR^3) \int x_k j_i dV.$$

(hemos prescindido del subíndice 0 en R). Integrando por partes la identidad

$$\int x_i x_k \operatorname{div} \mathbf{j} dV = 0$$

obtendremos

$$\int (j_i x_k + j_k x_i) dV = 0.$$

Por lo tanto, cabe escribir A_i también en la forma

$$A_i = (R_k/2cR^3) \int (x_k j_i - x_i j_k) dV,$$

que coincide con (29.16).

5. Determinar el campo magnético creado por una corriente lineal en un medio anisótropo por sus propiedades magnéticas (A. S. Viglin).

Solución. En un medio anisótropo que rodea a un conductor tenemos

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu_{ik} \partial H_k / \partial x_i = 0, \quad (1)$$

donde μ_{ik} es el tensor permeabilidad del medio. En vez de introducir el potencial vector según la fórmula $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, emplearemos aquí otro vector, \mathbf{C} , definido por la fórmula

$$H_i = e_{ikl} \mu_{km} \partial C_l / \partial x_m, \quad (2)$$

(e_{ikl} es el tensor unidad antisimétrico); la ecuación (1) queda también satisfecha idénticamente por la expresión (2). Al vector \mathbf{C} así definido se puede imponer todavía una condición suplementaria:

$$\operatorname{div} \mathbf{C} \equiv \partial C_i / \partial x_i = 0. \quad (3)$$

Substituyendo (2) en la ecuación $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$, se encuentra

$$e_{ikl} \partial H_l / \partial x_k = -\mu_{kp} \partial^2 C_l / \partial x_k \partial x_p = 4\pi j_i / c$$

(en la transformación se ha utilizado la igualdad

$$e_{ikl} e_{ilm} = \delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km}$$

y la condición (3)). La ecuación obtenida de este modo para el vector \mathbf{C} coincide en su forma con la ecuación del potencial de un campo eléctrico creado por cargas en un medio anisótropo (problema (2 § 13)). Su solución tiene la forma

$$\mathbf{C} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j} dV}{\sqrt{(|\mu| \mu^{-1}{}_{ik} R_i R_k)}},$$

($|\mu|$ es el determinante del tensor μ_{ik} , \mathbf{R} el vector posición desde el punto de observación al elemento dV). Pasando a una corriente lineal, resulta finalmente

$$\mathbf{C} = \frac{J}{c \sqrt{|\mu|}} \oint \frac{d\mathbf{l}}{\sqrt{(\mu^{-1}{}_{ik} R_i R_k)}}.$$

§ 30. Relaciones termodinámicas en un campo magnético

En su forma final, conforme veremos, las relaciones termodinámicas para una substancia magnética en un campo magnético son muy parecidas a las relaciones análogas para un dieléctrico en un campo eléctrico. La manera de deducirlas, sin embargo, difiere esencialmente de la adoptada en el § 10. Esta diferencia se debe, en último término, a que el campo magnético, en contraste con el eléctrico, no efectúa trabajo sobre las cargas que se mueven en él (dado que la fuerza que actúa sobre una carga es perpendicular a su velocidad). Por ello, para calcular la variación de energía del medio cuando se introduce en él un campo magnético hay que considerar los campos eléctricos inducidos al cambiar el campo magnético y determinar el trabajo realizado por ellos sobre las corrientes (fuentes del campo magnético).

Es necesario, por consiguiente, aplicar la ecuación que determina la relación que existe entre un campo eléctrico y uno magnético variable. Esta ecuación,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (30.1)$$

es resultado directo de promediar la ecuación microscópica (1.3).

Durante el tiempo δt el campo **E** realiza sobre las corrientes **j** un trabajo igual a

$$\delta t \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV.$$

Esta misma cantidad, tomada con signo cambiado, es el trabajo δR efectuado «sobre el campo» por la fuerza electromotriz externa, que es la fuente que mantiene la circulación de las corrientes. Haciendo $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}$, obtendremos

$$\begin{aligned}\delta R &= -\delta t \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} dV \\ &= \delta t \frac{c}{4\pi} \int \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV - \delta t \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} dV.\end{aligned}$$

La primera integral, transformada en una integral extendida a una superficie infinitamente alejada, se anula. En la segunda integral substituyamos en vez de $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ la expresión (30.1), e introduciendo el cambio de la inducción magnética $\delta \mathbf{B} = \delta t \partial \mathbf{B} / \partial t$, obtenemos en definitiva

$$\delta R = \int \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} dV / 4\pi. \quad (30.2)$$

Por su aspecto, esta fórmula es del todo análoga a la expresión (10.2) para el trabajo en una variación infinitesimal del campo eléctrico. Hay que observar, sin embargo, que la analogía física entre estas dos fórmulas no es en realidad tan profunda, puesto que **H**, en contraste con **E**, no es el valor medio de la intensidad microscópica del campo.

Después de obtener la fórmula (30.2), todas las relaciones termodinámicas para una substancia magnética en un campo magnético pueden escribirse de manera por completo análoga a como se escribieron en el § 10 para un dieléctrico en un campo eléctrico; basta substituir en ellas los símbolos **E** y **D** por **H** y **B**, respectivamente. Con vistas a futuras referencias, escribiremos algunas de estas fórmulas. Para las diferenciales de las energías totales libre e interna se tiene:

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{F} &= -\mathcal{S} \delta T + \int \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} dV / 4\pi, \\ \delta \mathcal{U} &= T \delta \mathcal{S} + \int \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} dV / 4\pi,\end{aligned} \quad (30.3)$$

y para estas mismas magnitudes referidas a la unidad de volumen:

$$\begin{aligned}dF &= -S dT + \zeta d\rho + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} / 4\pi, \\ dU &= T dS + \zeta d\rho + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} / 4\pi.\end{aligned} \quad (30.4)$$

Junto con F , U necesitaremos también los potenciales termodinámicos

$$\tilde{U} = U - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} / 4\pi, \quad \tilde{F} = F - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} / 4\pi, \quad (30.5)$$

para los que

$$\begin{aligned} d\tilde{F} &= -SdT + \zeta d\rho - \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} / 4\pi, \\ d\tilde{U} &= TdS + \zeta d\rho - \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} / 4\pi. \end{aligned} \quad (30.6)$$

En el caso de la relación lineal $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, se pueden escribir las expresiones de todas estas magnitudes en forma finita:

$$\begin{aligned} U &= U_0(S, \rho) + B^2 / 8\pi\mu, & F &= F_0(T, \rho) + B^2 / 8\pi\mu, \\ \tilde{U} &= U_0(S, \rho) - \mu H^2 / 8\pi, & \tilde{F} &= F_0(T, \rho) - \mu H^2 / 8\pi. \end{aligned} \quad (30.7)$$

El trabajo δR (o lo que es lo mismo, la variación δF a temperatura constante) cabe expresarlo en otra forma, a saber, en función de la densidad de corriente j y del potencial vector del campo magnético. Para esto supondremos $\delta\mathbf{B} = \text{rot } \delta\mathbf{A}$ y escribiremos

$$\begin{aligned} (\delta\mathcal{F})_T &= \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \text{rot } \delta\mathbf{A} dV \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int \text{div}(\mathbf{H} \times \delta\mathbf{A}) dV + \frac{1}{4\pi} \int \delta\mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{H} dV. \end{aligned}$$

De nuevo la primera integral se anula y la segunda da

$$(\delta\mathcal{F})_T = \int \mathbf{j} \cdot \delta\mathbf{A} dV / c. \quad (30.8)$$

Mediante una transformación análoga es posible obtener

$$(\delta\tilde{\mathcal{F}})_T = - \int \mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{j} dV / c. \quad (30.9)$$

Conviene observar que en el formalismo matemático de la electrodinámica macroscópica, las corrientes, fuentes del campo magnético, representan un papel análogo al de los potenciales (y no al de las cargas) de las fuentes del campo eléctrico. Esta regla queda claramente de manifiesto al comparar las fórmulas (30.8) y (30.9) con las fórmulas correspondientes en un campo eléctrico:

$$(\delta\mathcal{F})_T = \int \phi \delta\rho dV, \quad (\delta\tilde{\mathcal{F}})_T = - \int \rho \delta\phi dV \quad (30.10)$$

(véase (10.13), (10.14)). Vemos, pues, que las cargas y los potenciales aparecen en estas fórmulas en un orden que es el opuesto en comparación con el de las corrientes y los potenciales en las fórmulas (30.8), (30.9).

Dada la coincidencia formal completa de las relaciones termodinámicas (expresadas en función de la intensidad del campo y de la inducción) para los campos

eléctrico y magnético, las desigualdades termodinámicas obtenidas en el § 18 se aplican directamente también al campo magnético. Vimos, en particular, que de ellas se sigue la desigualdad $\epsilon > 0$. En el caso eléctrico esta desigualdad carecía de interés, dado que es menos restrictiva que la condición $\epsilon > 1$ que se sigue a partir de otros razonamientos. Pero en el caso magnético la desigualdad análoga

$$\mu > 0$$

es muy importante, ya que constituye la única limitación que se impone a los valores posibles de la permeabilidad.

§ 31. Energía libre total de una substancia magnética

En el § 11 se obtuvieron expresiones para la energía libre total \mathcal{F} de un dieléctrico en un campo eléctrico. Una de las propiedades termodinámicas de esta magnitud consiste en que su variación determina el trabajo efectuado por el campo eléctrico sobre el cuerpo cuando se mantienen constantes las fuentes que crean este campo (las cargas). En un campo magnético, el correspondiente papel lo representa, en cambio, la energía libre \mathcal{F} , puesto que si se dan las fuentes del campo (las corrientes), es precisamente su variación la que da el trabajo realizado sobre el cuerpo.

El razonamiento que sigue a continuación es por completo análogo al que se desarrolló en el § 11. La magnitud «total» \mathcal{F} la definimos por

$$\mathcal{F} = \int \left(F + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} \right) dV, \quad (31.1)$$

donde \mathfrak{H} es el campo magnético que crearían las fuentes dadas si no hubiera el medio magnetizable. El signo $+$ en el paréntesis (en vez del signo $-$ en (11.1)) se debe a que el valor de \mathcal{F} para el campo magnético en el vacío es $-\int \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} dV$ (véase (30.7)). La integración en (31.1) se extiende a todo el espacio, incluido el volumen ocupado por los conductores por los que circulan las corrientes que crean el campo*.

Calculemos la variación de \mathcal{F} (para una temperatura dada y sin perturbar el equilibrio termodinámico del medio) cuando se varía infinitamente poco el campo.

Dado que $\delta\mathcal{F} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{H}$, tenemos

$$\delta\mathcal{F} = - \int (\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{H} - \mathfrak{H} \cdot \delta\mathfrak{H}) dV/4\pi$$

$$= - \int (\mathbf{H} - \mathfrak{H}) \cdot \delta\mathfrak{H} dV/4\pi - \int \mathbf{B} \cdot (\delta\mathbf{H} - \delta\mathfrak{H}) dV/4\pi - \int (\mathbf{B} - \mathbf{H}) \cdot \delta\mathfrak{H} dV/4\pi. \quad (31.2)$$

* En el § 11 supusimos que la integración en (11.1) se extiende a todo el espacio, excluido el volumen que ocupan los conductores cargados que crean el campo. En dicho caso fue posible proceder así porque dentro de un conductor cargado no existe campo eléctrico. En cambio, sí existe un campo magnético dentro de los conductores por los que circulan corrientes y es imposible prescindir de él en los cálculos de la energía libre total.

Introduciendo el potencial vector \mathfrak{A} del campo \mathfrak{H} , escribiremos en el primer término

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} - \mathfrak{H}) \cdot \delta \mathfrak{H} &= (\mathbf{H} - \mathfrak{H}) \cdot \operatorname{rot} \delta \mathfrak{A} \\ &= \operatorname{div} [\delta \mathfrak{A} \cdot (\mathbf{H} - \mathfrak{H})] + \delta \mathfrak{A} \cdot \operatorname{rot} (\mathbf{H} - \mathfrak{H}). \end{aligned}$$

Pero los campos \mathbf{H} y \mathfrak{H} son, por definición, los creados por el mismo sistema de corrientes \mathbf{j} cuya distribución en el volumen de los conductores no depende (véase § 29) del campo creado por ellas mismas, es decir, es independiente de que existan o no substancias magnéticas en el espacio en torno. Por ello, \mathbf{H} y \mathfrak{H} satisfacen las mismas ecuaciones $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$, $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$, de forma que $\operatorname{rot} (\mathbf{H} - \mathfrak{H}) = 0$.

En cuanto a la integral de $\operatorname{div} [\delta \mathfrak{A} \cdot (\mathbf{H} - \mathfrak{H})]$, ésta se transforma en una integral extendida a una superficie infinitamente alejada y se reduce a cero.

De modo análogo es fácil comprobar que es también igual a cero el segundo término de (31.2), de modo que

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathcal{F}} &= - \int (\mathbf{B} - \mathbf{H}) \cdot \delta \mathfrak{H} dV / 4\pi \\ &= - \int \mathbf{M} \cdot \delta \mathfrak{H} dV. \end{aligned} \quad (31.3)$$

De esta manera hemos obtenido para $\delta \tilde{\mathcal{F}}$ una expresión exactamente análoga a la expresión (11.3) para $\delta \mathcal{F}$ en el caso de un campo eléctrico. En particular, de un campo magnético exterior homogéneo se tiene para $d \tilde{\mathcal{F}}$ una expresión que es análoga a la (11.5):

$$d \tilde{\mathcal{F}} = - \mathcal{S} dT - \mathcal{M} \cdot d \mathfrak{H}, \quad (31.4)$$

donde \mathcal{M} es el momento magnético total del cuerpo.

Sin repetir los cálculos que seguirían, escribiremos las fórmulas finales por analogía con las fórmulas del § 11. En el caso de que valga la relación lineal $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, se tiene

$$\tilde{\mathcal{F}} - \mathcal{F}_0(V, T) = - \int \frac{1}{2} \mathfrak{H} \cdot \mathbf{M} dV. \quad (31.5)$$

En particular, en un campo exterior homogéneo

$$\tilde{\mathcal{F}} - \mathcal{F}_0(V, T) = - \frac{1}{2} \mathfrak{H} \cdot \mathcal{M}. \quad (31.6)$$

En el caso general de una dependencia arbitraria de \mathbf{B} respecto de \mathbf{H} , para el cálculo de $\tilde{\mathcal{F}}$ puede utilizarse la fórmula

$$\tilde{\mathcal{F}} = \int \left(\tilde{\mathcal{F}} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi} - \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathfrak{H} \right) dV = \int \left(F - \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi} - \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathfrak{H} \right) dV. \quad (31.7)$$

En el § 11 se dieron también las fórmulas simplificadas correspondientes al caso de susceptibilidad eléctrica pequeña. El caso análogo para un campo magnético es particularmente importante debido a que, conforme se recordó, la susceptibilidad magnética de la mayoría de los cuerpos es pequeña. En estas condiciones se tiene

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = -\frac{1}{2}\chi \int \mathfrak{H}^2 dV. \quad (31.8)$$

Para un campo magnético cabe obtener también resultados análogos a los del § 14. Se trata de la variación de las magnitudes termodinámicas de una substancia magnética cuando se modifica infinitamente poco su permeabilidad magnética μ ; las fuentes del campo se suponen constantes. Por todo lo dicho más arriba, está claro que en vez de la variación de \mathcal{F} (como en el § 14) hay que considerar ahora la variación de $\tilde{\mathcal{F}}$. No repetiremos aquí el razonamiento, que es análogo al que condujo a la fórmula (14.1). El resultado a que se llega es precisamente el mismo:

$$\delta\tilde{\mathcal{F}} = - \int \delta\mu H^2 dV / 8\pi. \quad (31.9)$$

En el § 14, y basándonos en esta fórmula, se dedujo que la susceptibilidad eléctrica de la materia es positiva. En el caso de una substancia magnética, sin embargo, no cabe llegar a tal conclusión, y la susceptibilidad magnética puede ser positiva o negativa. La causa de esta diferencia esencial estriba en que el hamiltoniano del sistema de las cargas en movimiento en un campo magnético contiene junto a términos lineales respecto del campo (como en el caso eléctrico), términos cuadráticos. Por ello, al determinar la variación de la energía libre de un cuerpo en un campo magnético mediante la teoría de perturbaciones según la fórmula (14.2), contribuirán a la misma no sólo los términos de segunda aproximación, sino también los términos de primera. En estas condiciones es imposible llegar a conclusión alguna acerca del signo de la variación; en los cuerpos paramagnéticos es positiva, y en los diamagnéticos, negativa.

En el párrafo 14 se llegó a ciertas conclusiones relativas a la dirección del movimiento de los cuerpos en un campo eléctrico. Conclusiones análogas se siguen también de la fórmula (31.9). Sin embargo, teniendo en cuenta que μ puede ser mayor o menor que 1, la dirección del movimiento de los cuerpos en un campo magnético no es la misma para todos. Así, en un campo cuasihomogéneo los cuerpos paramagnéticos ($\mu > 1$) se desplazan en el sentido en que aumenta la intensidad del campo, mientras que los cuerpos diamagnéticos ($\mu < 1$) se mueven en el sentido en que disminuye H .

§ 32. Energía de un sistema de corrientes

Consideremos un sistema de conductores por los que circulan corrientes. Se supondrá que ni los propios conductores, ni el medio en que se encuentran son ferromagnéticos, de modo que en todo el espacio es $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Según el § 30, la energía

libre total del sistema se expresa en función del campo magnético creado por las corrientes mediante la igualdad

$$\mathcal{F} = \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV / 8\pi. \quad (32.1)$$

Se ha prescindido aquí del valor \mathcal{F}_0 , que es constante (para una temperatura dada de los cuerpos) y nada tiene que ver con las corrientes. La integración en (32.1) se extiende a todo el espacio, tanto al interior como al exterior de los cuerpos.

Esta misma energía se puede expresar también en función de las corrientes mediante la integral

$$\mathcal{F} = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV / 2c \quad (32.2)$$

(cf. el paso de (30.2) a (30.8)). La integración se extiende aquí solamente al volumen de los conductores, puesto que fuera de ellos es $\mathbf{j} = 0$.

En virtud del carácter lineal de las ecuaciones del campo, el campo magnético puede representarse como suma de los campos que crearían cada una de las corrientes por separado si por los demás conductores no circulara corriente: $\mathbf{H} = \sum \mathbf{H}_a$. Entonces la energía libre total (32.1) toma la forma

$$\mathcal{F} = \sum_a \mathcal{F}_{aa} + \sum_{a>b} \mathcal{F}_{ab}, \quad (32.3)$$

donde

$$\mathcal{F}_{aa} = \int \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{B}_a dV / 8\pi, \quad \mathcal{F}_{ab} = \int \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{B}_b dV / 4\pi \quad (32.4)$$

(al hacer $\mathcal{F}_{ab} = \mathcal{F}_{ba}$ se ha tenido en cuenta que $\mathbf{H}_a \cdot \mathbf{B}_b = \mu \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{H}_b = \mathbf{H}_b \cdot \mathbf{B}_a$, donde μ es la permeabilidad magnética en cada punto del espacio). La magnitud \mathcal{F}_{aa} se puede llamar *energía libre propia* de la corriente en el a -ésimo conductor, y \mathcal{F}_{ab} , la *energía de interacción* de los conductores a y b . No hay que perder de vista, dicho sea de paso, que esta terminología tiene un sentido literal solamente si se prescinde de las propiedades magnéticas tanto de los propios conductores como del medio. En el caso contrario, el campo (y, por consiguiente, también la energía) de cada corriente depende también de la posición y de la permeabilidad de los demás conductores.

Las magnitudes (32.4) se pueden expresar asimismo en función de las corrientes \mathbf{j}_a en cada uno de los conductores, y de acuerdo con la fórmula (32.2) se tiene:

$$\mathcal{F}_{aa} = \int \mathbf{j}_a \cdot \mathbf{A}_a dV_a / 2c, \quad \mathcal{F}_{ab} = \int \mathbf{j}_a \cdot \mathbf{A}_b dV_a / c = \int \mathbf{j}_b \cdot \mathbf{A}_a dV_b / c. \quad (32.5)$$

La integral en \mathcal{F}_{aa} se extiende aquí únicamente al volumen del a -ésimo conductor y \mathcal{F}_{ab} se representa por una cualquiera de las dos expresiones, en las que la integración se extiende al volumen del conductor a o b , respectivamente.

Para una ley dada de distribución de la densidad de corriente en el volumen del conductor, el valor de \mathcal{F}_{aa} depende solamente de la intensidad total de la corriente J_a que atraviesa una sección transversal del mismo. En estas condiciones, a J_a serán

proporcionales tanto la densidad \mathbf{j} como el campo creado por la corriente. En consecuencia, la integral \mathcal{F}_{aa} será proporcional a J_a^2 . Se suele escribir en la forma

$$\mathcal{F}_{aa} = L_{aa} J_a^2 / 2c^2, \quad (32.6)$$

donde L_{aa} es el llamado *coeficiente de autoinducción* (o *autoinductancia*) del conductor. De manera análoga, la energía de interacción de dos corrientes es proporcional al producto $J_a J_b$:

$$\mathcal{F}_{ab} = L_{ab} J_a J_b / c^2. \quad (32.7)$$

La magnitud L_{ab} se llama *coeficiente de inducción mutua* (o *inductancia mutua*) de los conductores. Así pues, la energía libre total del sistema de corrientes vale

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2c^2} \sum_a L_{aa} J_a^2 + \frac{1}{c^2} \sum_{a>b} L_{ab} J_a J_b = \frac{1}{2c^2} \sum_a \sum_b L_{ab} J_a J_b. \quad (32.8)$$

La condición de que esta forma cuadrática sea definida positiva impone toda una serie de limitaciones a los valores de los coeficientes. En particular, todos los $L_{aa} > 0$, y

$$L_{aa} L_{bb} > L_{ab}^2.$$

El cálculo de la energía de las corrientes en el caso general de conductores cualesquiera que ocupan un volumen exige la resolución completa de las ecuaciones del campo y plantea un difícil problema. Éste se simplifica si la permeabilidad de los conductores y del medio se pueden tomar iguales a la unidad. Obsérvese que, en estas condiciones, la energía de las corrientes deja por completo de depender del estado termodinámico (en particular de la temperatura) de los cuerpos y que, por ello, en todas las fórmulas que preceden es posible hablar con igual derecho tanto de energía libre como de energía, simplemente.

Para $\mu = 1$ el potencial vector del campo creado por las corrientes \mathbf{j} viene dado por la fórmula (29.12). Por lo tanto, para la energía propia del conductor obtenemos

$$\mathcal{F}_{aa} = \frac{1}{2c^2} \int \int \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}'}{R} dV dV', \quad (32.9)$$

donde ambas integrales se extienden al volumen del conductor dado y R es la distancia entre dV y dV' . De manera análoga, la energía de interacción de dos conductores se escribe

$$\mathcal{F}_{ab} = \frac{1}{c^2} \int \int \frac{\mathbf{j}_a \cdot \mathbf{j}_b}{R} dV_a dV_b, \quad (32.10)$$

donde dV_a y dV_b son elementos de volumen de cada uno de los conductores.

De manera particularmente simple se calcula la energía de interacción de dos corrientes lineales. El paso de las corrientes volumétricas a las lineales en la fórmula

mula (32.10) se lleva a cabo substituyendo $\mathbf{j}_a dV_a$ y $\mathbf{j}_b dV_b$ por $J_a dl_a$ y $J_b dl_b$, respectivamente, y encontramos así que el coeficiente de inducción mutua es

$$L_{ab} = \oint \oint dl_a \cdot dl_b / R.$$

En esta aproximación, por consiguiente, L_{ab} depende tan sólo de la forma, de las dimensiones y de la posición relativa de los dos circuitos y es independiente de la distribución de la corriente por la sección de los conductores. Hay que subrayar que para obtener esta simple fórmula en el caso de los conductores lineales no es necesario ni tan sólo suponer que en todo el espacio es $\mu = 1$. En la aproximación en la que prescindimos del grosor de los conductores, las propiedades magnéticas del material que los constituye no influyen en absoluto sobre el campo creado por ellos y, por lo tanto, tampoco sobre su energía mutua. Por otra parte, si la permeabilidad μ del medio que rodea al conductor es diferente de 1, según (29.15) ella multiplica simplemente por μ el potencial vector (y con él también la inducción) del campo magnético. Por el mismo factor queda multiplicado también, en consecuencia, el coeficiente de inducción mutua, de modo que será

$$L_{ab} = \mu \oint \oint dl_a \cdot dl_b / R. \quad (32.11)$$

En lo que concierne al coeficiente de autoinducción de los conductores lineales, su cálculo presenta dificultades considerablemente mayores; esta cuestión se estudiará en el párrafo siguiente.

La energía total de un sistema de corrientes lineales puede escribirse aún de otra manera. Para ello volvamos a la integral (32.2), que para las corrientes lineales toma la forma

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2c} \sum_a J_a \oint A \cdot dl_a, \quad (32.12)$$

donde A es el potencial vector del campo total en el elemento dl_a del a -ésimo conductor. El error principal que nos permitimos al pasar de (32.2) a (32.12) consiste en prescindir de la variación del campo (incluido el campo propio de la corriente dada) en la sección transversal del conductor. Cada una de las integrales curvilíneas que aparecen en (32.12) se transforma en una integral de superficie:

$$\oint A \cdot dl_a = \int \text{rot } A \cdot df_a = \int B \cdot df_a,$$

es decir, representa el flujo de inducción magnética (o, como suele decirse, el *flujo magnético*) a través del circuito de la a -ésima corriente. Designaremos este flujo por Φ_a . De esta manera,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2c} \sum_a J_a \Phi_a. \quad (32.13)$$

De modo análogo se expresa en función del flujo magnético la energía libre \mathcal{F} de una corriente lineal J colocada en un campo magnético exterior, es decir, la energía en la que no se incluye la energía propia de las fuentes del campo. Evidentemente,

$$\mathcal{F} = J\Phi/c, \quad (32.14)$$

donde Φ es el flujo del campo exterior a través del circuito de la corriente J . Si dicho campo es homogéneo (y en el medio se tiene $\mu = 1$), será $\Phi = \mathfrak{H} \cdot \int df$. Introduciendo el momento magnético de la corriente según (29.18), obtendremos $\mathcal{F} = \mathcal{M} \cdot \mathfrak{H}$.

Conocida la energía del sistema de corrientes en función de sus dimensiones, de su forma y de su posición relativa, es posible determinar las fuerzas que actúan sobre los conductores sin más que derivar respecto de las correspondientes coordenadas. Sin embargo, se plantea al hacerlo la cuestión de cuáles sean las características de las corrientes que hay que suponer constantes en la derivación. Lo más conveniente es efectuar el cálculo en el supuesto de que las corrientes son constantes. Pero en este caso el papel de energía libre lo representa la magnitud \mathcal{F} . Por ello, la fuerza generalizada F_q que actúa «a lo largo de» la coordenada generalizada q es

$$F_q = -(\partial \mathcal{F} / \partial q)_{J,T}.$$

Los subíndices en la derivada significan que al derivar se han supuesto constantes las intensidades de la corriente y la temperatura de los cuerpos. Dado que en la energía libre prescindimos de la parte constante que no depende de las corrientes, \mathcal{F} y \mathcal{F} difieren tan sólo en el signo, de modo que

$$F_q = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}\right)_J = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}\right)_J = \frac{1}{2c^2} \sum_{a,b} J_a J_b \frac{\partial L_{ab}}{\partial q} \quad (32.15)$$

(prescindimos del índice T en las derivadas, aquí y en lo que sigue, para abbreviar).

En particular, las fuerzas que actúan sobre un conductor debidas a su propio campo magnético se determinan mediante la fórmula

$$F_q = \frac{1}{2c^2} J^2 \frac{\partial L}{\partial q}, \quad (32.16)$$

donde L es la autoinducción del conductor. El carácter de la acción de estas fuerzas resulta evidente en virtud de las consideraciones que siguen. Para un valor dado de la intensidad de la corriente (y de la temperatura), la magnitud \mathcal{F} tiende a un mínimo. Dado que, en el caso presente, es $\mathcal{F} = -LJ^2/2c^2$, esto significa que las fuerzas que actúan sobre el conductor tenderán a aumentar su coeficiente de autoinducción. Pero éste, como magnitud que tiene las dimensiones de una longitud, es proporcional al tamaño del conductor. Así pues, éste aumenta bajo la acción del campo magnético.

Para una corriente en un campo magnético exterior tenemos*:

$$\tilde{\mathcal{F}} = -\mathcal{F} = -\mathcal{M} \cdot \mathbf{H}. \quad (32.17)$$

En todas las fórmulas que preceden relativas a la energía se supone que la relación entre la inducción y la intensidad del campo magnético es lineal. En el caso general de una relación arbitraria, cabe establecer relaciones diferenciales análogas. La variación de la energía libre cuando se cambia infinitamente poco el campo (manteniendo constante la temperatura) es, según (30.8),

$$\delta\mathcal{F} = \oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} dV/c$$

o bien, para un sistema de corrientes lineales

$$\delta\mathcal{F} = \frac{1}{c} \sum_a J_a \oint \delta\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_a.$$

Procediendo luego de igual modo que al pasar de (32.12) a (32.13), obtendremos

$$\delta\mathcal{F} = \frac{1}{c} \sum_a J_a \delta\Phi_a. \quad (32.18)$$

De manera análoga, a partir de (30.9) se encuentra

$$\delta\tilde{\mathcal{F}} = -\frac{1}{c} \sum_a \Phi_a \delta J_a. \quad (32.19)$$

Cabe decir, por lo tanto, que, para un sistema de corrientes lineales, \mathcal{F} es el potencial termodinámico respecto de los flujos magnéticos, y $\tilde{\mathcal{F}}$, respecto de las intensidades de las corrientes, estando ligados estos dos potenciales entre sí por la igualdad

$$\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}} - \frac{1}{c} \sum_a J_a \Phi_a. \quad (32.20)$$

Así pues, cualesquiera que sean las propiedades magnéticas del material, son válidas las igualdades termodinámicas

$$J_a/c = \partial\mathcal{F}/\partial\Phi_a, \quad \Phi_a/c = -\partial\tilde{\mathcal{F}}/\partial J_a. \quad (32.21)$$

Si se aplican estas fórmulas al caso de una relación lineal, cuando \mathcal{F} viene dado por la fórmula (32.8), se obtendrá

$$\Phi_a = \frac{1}{c} \sum_b L_{ab} J_b. \quad (32.22)$$

* El hecho de que aquí, en comparación con la fórmula (31.6), no aparezca el factor $1/2$ se debe a que el momento magnético de la corriente en (32.17) es una cantidad constante, independiente del campo, mientras que el momento magnético en (31.6) se produce sólo debido a la acción del campo.

En consecuencia, las inductancias resultan ser los coeficientes de proporcionalidad entre los flujos magnéticos y las intensidades de las corrientes que determinan el campo magnético. El producto $L_{ab}J_b/c$ es el flujo magnético creado por la corriente J_b ($b \neq a$) a través del circuito de la corriente J_a , y $L_{aa}J_a/c$, el flujo a través del mismo circuito determinado por la propia corriente J_a .

§ 33. Autoinductancia de los conductores lineales

Al calcular el coeficiente de autoinducción de un conductor lineal es imposible prescindir por completo de su grosor, en contraste con lo que hicimos al calcular la inductancia mutua de dos conductores. Si procediéramos del mismo modo, a partir de (32.9) obtendríamos la autoinducción en la forma

$$L = \oint dl \cdot dl' / R,$$

donde ambas integrales se extienden a un mismo contorno; pero esta integral diverge logarítmicamente cuando $R \rightarrow 0$.

El valor exacto de la autoinductancia de un conductor depende de la distribución de corrientes en él, distribución que puede ser diferente según sea la manera como se excita la corriente, es decir, de cómo se le aplica la fuerza electromotriz. Pero, con un grado bastante elevado de precisión, la autoinducción de un conductor lineal resulta ser independiente de la ley de distribución de la corriente en una sección transversal del mismo*.

Representemos la autoinducción como suma $L = L_e + L_i$, donde L_e y L_i están ligadas con la energía del campo magnético fuera y dentro del conductor, respectivamente. En un conductor lineal, la parte más importante de la autoinducción está constituida por la componente «exterior» L_e , lo que se debe a que la mayor parte de la energía magnética de un circuito lineal cerrado está localizada en el campo fuera del conductor a distancias que son grandes en comparación con su grosor. En efecto, la energía por unidad de longitud de un alambre rectilíneo de longitud infinita viene dada por la integral

$$(\mu_e/8\pi) \int H^2 \cdot 2\pi r dr = (\mu_e/8\pi) \int (2J/cr)^2 \cdot 2\pi r dr = (\mu_e J^2/c^2) \int dr/r$$

(r es la distancia a partir del eje del alambre y μ_e es la permeabilidad del medio exterior). Esta integral diverge logarítmicamente para valores grandes de r . En el caso de un circuito lineal cerrado esta divergencia, claro está, desaparece: la integral «se corta» a distancias que son del orden de magnitud de las dimensiones del circuito. Obtendremos un valor aproximado de la energía multiplicando la integral

* Más exactamente, de las distribuciones en las que la densidad de corriente se mantiene prácticamente constante a distancias comparables con el grosor a del alambre. Pero si la distribución es tal que la densidad de corriente varía apreciablemente a distancias pequeñas en comparación con a (como ocurre, por causas especiales, en el llamado *efecto pelicular* o en los superconductores), varía la autoinductancia del conductor.

que precede por la longitud total l del conductor y tomando como límite superior el valor l , y como límite inferior, el radio a del alambre:

$$(\mu_e J^2 l/c^2) \ln(l/a).$$

De aquí se sigue para la autoinductancia

$$L = 2\mu_e l \ln(l/a). \quad (33.1)$$

Esta expresión posee, como suele decirse, una *precisión logarítmica*; su error relativo es del orden de magnitud de $1/\ln(l/a)$ y la razón l/a se supone suficientemente grande como para que también su logaritmo sea un número grande*.

Un caso particular de conductores lineales es el de los *solenoides*, en los que un alambre se arrolla en hélice con espiras consecutivas muy próximas entre sí. Prescindiendo del grosor del hilo y de las distancias entre cada dos espiras, obtendremos simplemente una superficie conductora cilíndrica por la que circula una corriente «superficial». La ecuación $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ dentro del alambre se substituye aquí simplemente por la condición de contorno

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 4\pi \mathbf{g}/c, \quad (33.2)$$

donde \mathbf{g} es la densidad de corriente superficial, \mathbf{H}_1 y \mathbf{H}_2 la intensidad del campo a uno y otro lado de la superficie del solenoide y \mathbf{n} es la normal orientada hacia el medio 2 (cf. la deducción de la fórmula (27.14)).

Si el solenoide es un cilindro infinito, el campo que crea se determina de manera muy simple. Las corrientes superficiales son circulares y su densidad $g = nJ$, donde J es la corriente que circula por el alambre y n es el número de espiras por unidad de longitud del solenoide. El campo fuera del cilindro es igual a cero y en su interior se tiene un campo homogéneo dirigido a lo largo del eje del cilindro e igual a

$$\mathbf{H} = 4\pi n J/c.$$

En efecto, dicho campo satisface evidentemente las ecuaciones $\text{div } \mathbf{H} = 0$, $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ en todo el espacio exterior a la superficie conductora y también la condición de contorno (33.2) sobre la misma.

De acuerdo con esto, la energía del campo referida a la unidad de longitud del cilindro es

$$\mu_e H^2 \pi b^2 / 8\pi = 2\pi^2 n^2 b^2 \mu_e J^2 / c^2$$

(b es el radio del cilindro, μ_e se refiere al medio dentro del solenoide). Prescindiendo de las deformaciones del campo en los extremos, se puede aplicar esta fórmula

* Lo dicho anteriormente acerca de la independencia de la autoinducción respecto de la distribución de la corriente se refiere, en realidad, no sólo a la expresión aproximada (33.1), sino también a la aproximación siguiente, en la que se tienen en cuenta términos que no contienen un logaritmo grande (lo que equivale a multiplicar el argumento l/a del logaritmo por un cierto coeficiente); véanse los problemas de este párrafo.

también a un solenoide de longitud grande (en comparación con b), pero finita, h . Entonces para la autoinductancia se obtiene

$$L = 4\pi^2 n^2 b^2 h \mu_e = 2\pi \mu_e n b l, \quad (33.3)$$

donde $l = 2\pi bnh$ es la longitud total del alambre en el solenoide. El aumento de la autoinducción de éste comparada con la autoinducción de un hilo no arrollado de igual longitud (cf. (33.3) con (33.1)) es una consecuencia natural de la inducción mutua entre espiras próximas.

PROBLEMAS*

1. Determinar la autoinductancia de un circuito cerrado de alambre cuya sección es circular.

Solución. El campo magnético dentro del hilo se puede suponer igual al que existe dentro de un cilindro rectilíneo infinito:

$$H = 2Jr/ca^2$$

(r es la distancia al eje del alambre y a su radio). De aquí se deduce la parte interior de la autoinducción:

$$L_e = \frac{2c^2}{J^2} \frac{\mu_e}{8\pi} \int H^2 dV = \frac{1}{2} l \mu_e, \quad (1)$$

donde l es la longitud del circuito.

Para el cálculo de L_e , observemos que el campo fuera de un hilo fino no depende de la distribución de la corriente en su sección. En particular, la energía \mathcal{F}_e del campo magnético exterior no cambia si se supone que la corriente circula solamente por la superficie del alambre. Pero entonces dentro de éste será $H = 0$ y cabe calcular la energía \mathcal{F}_e como energía total de acuerdo con la fórmula (32.2).

En virtud de la hipótesis de que las corrientes están distribuidas por la superficie, la integral en esta fórmula se reduce de hecho a una integral a lo largo de una línea que coincide con el eje del hilo, de modo que la parte exterior de la autoinductancia es

$$L_e = \frac{2c^2}{J^2} \frac{J}{2c} \oint [A]_{r=a} \cdot dl,$$

donde el valor de A en el integrando se toma sobre la superficie del conductor. Al pasar a esta fórmula se ha tenido también en cuenta que, en la aproximación considerada, el campo es constante a lo largo del perímetro circular de una sección del alambre.

Después de reducir el problema al cálculo de $[A]_{r=a}$, hagamos otra hipótesis acerca de la distribución de la corriente: supongamos que la corriente total J circula a lo largo del eje del hilo. El valor del campo sobre la superficie del alambre, en la aproximación considerada, no difiere del valor anterior (dicho valor no cambiaría en absoluto en el caso de un conductor rectilíneo de sección circular). Entonces, según la fórmula (29.14), tenemos

$$[A]_{r=a} = \frac{J}{c} \left[\oint \frac{dl}{R} \right]_{r=a},$$

donde R es la distancia del elemento dl de eje del conductor a un punto dado de su superficie. Descompongamos la integral en dos partes, en las que $R > \Delta$ y $R < \Delta$, respectivamente, donde Δ es una cierta longitud pequeña comparada con las dimensiones del circuito, pero grande en compara-

* En los problemas 1-6 se supone que la permeabilidad del medio es $\mu_e = 1$.

ción con el radio a del hilo*. En la integral, en el dominio $R > \Delta$ cabe prescindir de a y entender por R simplemente la distancia entre dos puntos del circuito. En cuanto a la integral relativa al dominio $R < \Delta$, se puede considerar que es un vector dirigido según la tangente al circuito en dicho punto. Designando el vector unidad en esta dirección por t , haremos

$$\left[\int_{R<\Delta} \frac{dl}{R} \right]_{r=a} \cong t \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{dl}{\sqrt{(a^2 + l^2)}} = 2t \operatorname{arsenh}(\Delta/a) \\ \cong 2t \ln(2\Delta/a).$$

Esta expresión se puede escribir también en forma de integral

$$\int_{\Delta > R > ia} \frac{dl/R}{},$$

donde R representa de nuevo la distancia entre puntos del circuito. Así pues, sumando con la integral extendida al dominio $R > \Delta$, obtendremos la expresión

$$[\mathbf{A}]_{r=a} = \frac{J}{c} \int_{R>ia} \frac{dl}{R},$$

en la que, como debía ser, no aparece ya el parámetro arbitrario Δ .

De esta manera se tiene en definitiva

$$\mathbf{L}_e = \iint_{R>ia} \frac{dl \cdot dl'}{R}. \quad (2)$$

La integración se extiende aquí a todos los pares de puntos del contorno separados por una distancia mayor que $a/2$.

2. Determinar la autoinductancia de un anillo de alambre fino (de radio b) formado por un conductor de sección circular (radio a).

Solución. El integrando que aparece en la fórmula (2) del problema 1 depende únicamente del ángulo central ϕ que subtienende la cuerda R del anillo, siendo $R = 2b \operatorname{sen}(\phi/2)$ y $dl \cdot dl' = dl \cdot dl' \cos \phi$. Por ello, tenemos

$$L_e = 2 \int_{\phi_0}^{\pi} \frac{\cos \phi \cdot 2\pi b \cdot b d\phi}{2b \operatorname{sen} \frac{1}{2}\phi} = 4\pi b [-\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2}\phi_0 - 2 \cos \frac{1}{2}\phi_0].$$

El límite inferior de integración se determina a partir de $2b \operatorname{sen} \frac{\phi_0}{2} = \frac{a}{2}$, de donde $\phi_0 \cong a/2b$.

Substituyendo este valor y sumando con $L_i = \pi b \mu_i$, obtendremos, dentro de la precisión requerida,

$$L = 4\pi b [\ln(8b/a) - 2 + \frac{1}{4}\mu_i].$$

En particular, para $\mu_i = 1$

$$L = 4\pi b [\ln(8b/a) - (7/4)].$$

3. Determinar la extensión de un anillo de alambre (con $\mu_i = 1$) bajo la acción del campo magnético de la corriente que circula por él.

Solución. Las tensiones internas que actúan a lo largo del eje del hilo y perpendicularmente al

* Un método análogo se aplicó en el problema 4 del § 2 para el cálculo de la capacidad de un anillo de sección pequeña.

mismo se determinan, de acuerdo con (32.16), por las fórmulas

$$\pi a^2 \sigma_1 = \frac{J^2}{2c^2} \frac{\partial L}{\partial(2\pi b)}, \quad 2\pi ab\sigma_\perp = \frac{J^2}{2c^2} \frac{\partial L}{\partial a}.$$

Substituyendo L por el valor que resulta del problema anterior, obtendremos

$$\sigma_1 = \frac{J^2}{\pi a^2 c^2} \left[\ln \frac{8b}{a} - \frac{3}{4} \right], \quad \sigma_\perp = -\frac{J^2}{a^2 c^2}.$$

De aquí se sigue el alargamiento relativo del anillo*

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{1}{E} (\sigma_1 - 2\sigma_\perp) = \frac{J^2}{\pi a^2 c^2 E} \left(\ln \frac{8b}{a} - \frac{3}{4} + 2\pi\sigma \right)$$

(E es el módulo de Young y σ el coeficiente de Poisson del alambre).

4. Determinar la autoinductancia por unidad de longitud de un sistema constituido por dos hilos rectilíneos paralelos (con $\mu_i = 1$) de sección circular (de radios a y b), que se encuentran a una distancia h entre ejes, cuando por ellos circulan corrientes iguales y opuestas de intensidad J (figura 18).

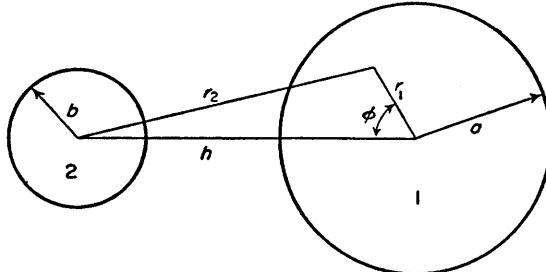


FIG. 18

Solución. El potencial vector del campo magnético de cada una de las corrientes está dirigido paralelamente a los ejes de los hilos y, por lo tanto, los potenciales vectores de ambos campos se suman algebraicamente. Para el campo magnético del alambre 1, con una corriente distribuida homogéneamente $+J$, tenemos (en coordenadas cilíndricas)

$$A_z = \frac{J}{c} \left(C - \frac{r^2}{a^2} \right) \text{ para } r < a,$$

$$A_z = \frac{J}{c} \left(C - 1 - 2 \ln \frac{r}{a} \right) \text{ para } r > a,$$

donde C es una constante arbitraria; sobre la superficie del hilo, A_z es continua. Fórmulas análogas se obtienen para el campo del hilo 2 substituyendo a por b y cambiando el signo de J . La integral de superficie extendida a una sección transversal del alambre 1 en la fórmula (32.2) da

$$\begin{aligned} & \frac{J^2}{2c^2 \pi a^2} \int \left\{ \left(C - \frac{r_1^2}{a^2} \right) - \left(C - 1 - 2 \ln \frac{r_2}{b} \right) \right\} d\Gamma_1 \\ &= \frac{J^2}{2c^2 \pi a^2} \iint_0^{2\pi} \left\{ 1 - \frac{r_1^2}{a^2} + \ln \frac{h^2 + r_1^2 - 2hr_1 \cos \phi}{b^2} \right\} r_1 d\phi dr_1 = \frac{J^2}{2c^2} \left(\frac{1}{2} + 2 \ln \frac{h}{b} \right). \end{aligned}$$

* Véase vol. VII, *Teoría de la elasticidad*, § 5.

A su vez, la integración sobre una sección del hilo 2 conduce a la misma expresión con a en vez de b . Por consiguiente, la autoinductancia del sistema de los dos hilos por unidad de longitud vale

$$L = 1 + 2 \ln(h^2/ab).$$

5. Determinar la autoinductancia de un solenoide toroidal.

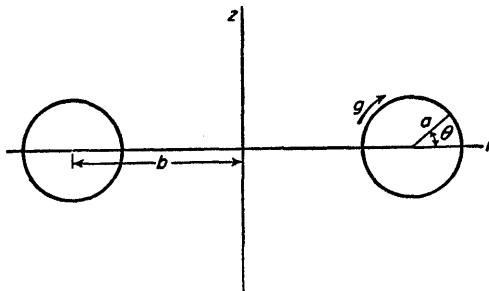


FIG. 19

Solución. Consideremos el solenoide como una superficie conductora toroidal por la que circulan corrientes superficiales de densidad

$$g = NJ/2\pi r,$$

(N es el número total de espiras del conductor, J es la corriente que circula por él; las coordenadas y dimensiones se indican en la figura 19). El campo magnético fuera del solenoide es $\mathbf{H}_e = 0$ y dentro de él

$$H_{tr} = H_{tz} = 0, \quad H_{t\phi} = 2N\bar{J}/cr$$

(r, z, ϕ son las coordenadas cilíndricas). En efecto, esta solución satisface las ecuaciones $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ y la condición de contorno (33.2)*. La energía del campo magnético dentro del solenoide vale

$$\int (H_t^2/8\pi) dV = (N^2 J^2/c^2) \oint dz/dr/r.$$

La integración se extiende a lo largo del contorno de la sección del toro y se lleva a cabo fácilmente introduciendo el ángulo θ definido por $z = a \sin \theta$, $r = b + a \cos \theta$. El resultado que se obtiene para la autoinductancia es

$$L = 4\pi N^2 [b - \sqrt{(b^2 - a^2)}].$$

6. Determinar la corrección de primer orden respecto de l/h a la expresión (33.3) (con $\mu_e = 1$) para la autoinductancia de un solenoide cilíndrico ligada con la deformación del campo cerca de sus extremos.

Solución. La autoinducción del solenoide se calcula como integral doble extendida a su superficie:

$$L = \frac{1}{J^2} \iint \frac{\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2}{R} df_1 df_2,$$

donde \mathbf{g} es la densidad de corriente superficial ($g = nJ$). En coordenadas cilíndricas,

$$L = 2\pi b^2 n^2 \iint \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi d\phi dz_1 dz_2}{\sqrt{[(z_2 - z_1)^2 + 4b^2 \sin^2 \frac{1}{2}\phi]}} = 8\pi b^2 n^2 \iint \int_0^h \int_0^\pi \frac{(h - \zeta) \cos \phi d\phi d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 + 4b^2 \sin^2 \frac{1}{2}\phi)}}$$

* Ésta es válida también para un solenoide toroidal de sección arbitraria, no necesariamente circular.

(ϕ es el ángulo formado por los planos diamatrales que pasan por df_1 y df_2 ; además, $\zeta = z_2 - z_1$). Integrando respecto de ζ , obtendremos para $h \gg b$:

$$L \cong 8\pi b^2 n^2 \int_0^\pi \left[h \ln \frac{h}{b \sin \frac{1}{2}\phi} - h + 2b \sin \frac{1}{2}\phi \right] \cos \phi d\phi,$$

y finalmente

$$L = 4\pi^2 b^2 n^2 [h - 8b/3\pi].$$

7. Determinar el factor por el que se multiplica la autoinductancia de un circuito lineal plano si se le coloca sobre la superficie frontera plana de un medio semi-infinito cuya permeabilidad magnética es μ_e . Se prescinde de la parte interior de la autoinducción del hilo.

Solución. Es evidente, por razones de simetría, que si no existiera el medio, el campo magnético de la corriente sería simétrico respecto del plano del circuito y que las líneas de fuerza magnéticas atravesarían esta superficie normalmente a la misma; llamémos H_0 a este campo. Las ecuaciones del campo y las condiciones de contorno sobre la superficie del medio semiinfinito quedan satisfechas si hacemos en el semiespacio vacío $H = \frac{2\mu_e}{\mu_e + 1} H_0$, y en el medio, $B = \mu_e H = \frac{2\mu_e}{\mu_e + 1} H_0$.

En efecto, con esto queda asegurada la continuidad de B_n y H_t sobre el plano frontera, y la circulación de H a lo largo de cualquier línea de fuerza será igual a la circulación de H_0 correspondiente al mismo camino. De aquí se concluye fácilmente que, al introducir el medio, la energía total del campo y, por consiguiente, la autoinducción del circuito queda multiplicada por

$$2\mu_e/(\mu_e + 1).$$

§ 34. Fuerzas en un campo magnético

Para determinar las fuerzas que actúan sobre una substancia en un campo magnético apenas tendremos necesidad de efectuar nuevos cálculos dada la completa analogía con el caso eléctrico. Esta analogía se debe, ante todo, a que las expresiones de las magnitudes termodinámicas en un campo magnético difieren de las expresiones correspondientes a un campo eléctrico tan sólo en la substitución de las letras E , D por H , B , respectivamente. Al calcular el tensor de tensiones en el § 15 se aplicó la propiedad de que el campo eléctrico deriva de un potencial, lo que es consecuencia de la ecuación $\text{rot } E = 0$. El campo magnético, en cambio, satisface la ecuación

$$\text{rot } H = 4\pi j/c, \quad (34.1)$$

que se reduce a $\text{rot } H = 0$ únicamente cuando no hay corriente de conducción. Pero cuando se calcula el tensor de tensiones, hay que suponer en cualquier caso $j = 0$. Dado que j depende de las derivadas del campo magnético, tener en cuenta las corrientes en el cálculo de las tensiones significaría introducir en el tensor de tensiones σ_{ik} las pequeñísimas correcciones debidas al carácter no-homogéneo del campo (cf. la nota de la pág. 78).

De esta manera, todas las fórmulas obtenidas en los §§ 15 y 16 para el tensor

de tensiones se aplican inmediatamente a un campo magnético. Así, en un medio líquido y para el que $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, tenemos

$$\sigma_{ik} = -p_0(\rho, T)\delta_{ik} - \frac{H^2}{8\pi} \left[\mu - \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T \right] \delta_{ik} + \frac{\mu H_i H_k}{4\pi}. \quad (34.2)$$

Las fuerzas de volumen se calculan a partir de aquí mediante la fórmula $f_i = \partial \sigma_{ik} / \partial x_k$. Si el medio es un conductor por el que circula una corriente, el cálculo difiere del que se llevó a cabo en el § 15 en que, en vez de la ecuación $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, tenemos la ecuación (34.1).

Derivando (34.2) y teniendo en cuenta a la vez la igualdad $\text{div } \mathbf{B} = \text{div}(\mu\mathbf{H}) = 0$, se encuentra

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & -\text{grad } p_0 + \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left[H^2 \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{H^2}{8\pi} \text{grad} \mu - \\ & - \frac{\mu}{8\pi} \text{grad} H^2 + \frac{\mu}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \text{grad}) \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Pero, según una conocida fórmula del análisis vectorial,

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} \cdot \text{grad}) \mathbf{H} &= \frac{1}{2} \text{grad} H^2 - \mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H} \\ &= \frac{1}{2} \text{grad} H^2 + 4\pi \mathbf{j} \times \mathbf{H}/c, \end{aligned}$$

y en definitiva resulta

$$\mathbf{f} = -\text{grad } p_0 + \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left[H^2 \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{H^2}{8\pi} \text{grad} \mu + \frac{\mu}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}. \quad (34.3)$$

Al comparar con la fórmula análoga (15.12) se observa que se añade aquí un término más (el último). Sin embargo, no sería correcto pensar que la aparición de este término significa la posibilidad física de separar de los demás efectos en \mathbf{f} una fuerza vinculada con la corriente de conducción. Ello es así porque, en virtud de la ecuación (34.1), la corriente \mathbf{j} es inseparable de la no homogeneidad del campo, y las derivadas de éste respecto de las coordenadas intervienen también en los demás términos de (34.3). Para una permeabilidad de la materia apreciablemente distinta de 1, todos los términos de (34.3), en general, son del mismo orden de magnitud.

Pero si, como suele ocurrir, μ es próximo a la unidad, cuando existe una corriente de conducción el último término en (34.3) representa la contribución principal a la fuerza, comparadas con la cual las de los demás términos constituyen tan sólo una pequeña corrección carente de importancia. Entonces, al calcular las fuerzas se puede suponer $\mu = 1$ y tenemos simplemente

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{H}/c \quad (34.4)$$

(el término $-\nabla p_0$ aquí y en lo que sigue no nos interesa y prescindimos de él). Cuando $\mu = 1$, las propiedades de la materia no influyen en modo alguno sobre los fenó-

menos magnéticos y la expresión (34.4) de la fuerza es válida en igual medida para conductores tanto líquidos como sólidos. La fuerza total que actúa en un campo magnético sobre un conductor por el que circula corriente viene dada por la integral

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{j} \times \mathbf{H} dV/c. \quad (34.5)$$

La fórmula (34.4) se puede obtener, claro está, de una manera muy sencilla y directa basándonos en la conocida expresión de la fuerza de Lorentz. La fuerza macroscópica que actúa sobre un cuerpo en reposo en un campo magnético no es sino el valor medio de las fuerzas de Lorentz que el campo microscópico \mathbf{h} ejerce sobre las partículas cargadas que constituyen el cuerpo:

$$\mathbf{f} = \overline{\rho \mathbf{v} \times \mathbf{h}}/c.$$

Pero si $\mu = 1$, el campo \mathbf{h} coincide con el campo promedio \mathbf{H} , y el valor medio de $\rho \mathbf{v}$, con la corriente de conducción total.

Cuando un conductor se mueve, las fuerzas (34.4) realizan sobre él un cierto trabajo mecánico. A primera vista puede parecer que ello está en contradicción con el hecho de que las fuerzas de Lorentz no efectúan trabajo alguno sobre las cargas en movimiento. En realidad, claro está, no existe contradicción ninguna, puesto que en un conductor que se mueve contribuyen al trabajo de las fuerzas de Lorentz no solamente el trabajo mecánico, sino también el trabajo de las fuerzas electromotrices inducidas en el conductor debido a su movimiento. Estos dos trabajos son iguales en valor absoluto y de signo opuesto (véase la nota de la pág. 245).

En la expresión (34.4), \mathbf{H} es el valor real del campo magnético creado por las fuentes externas y por las propias corrientes sobre las que actúa esta fuerza. Sin embargo, al calcular la fuerza total de acuerdo con (34.5), cabe tomar para \mathbf{H} solamente el campo exterior \mathbf{h} en el que se introduce el conductor por el que circula una corriente. El campo propio creado por el conductor en cuestión no puede contribuir a la fuerza total que actúa sobre él, en virtud de la ley de conservación del impulso.

El cálculo de las fuerzas es particularmente sencillo para un conductor lineal. Las propiedades magnéticas del material que lo constituye carecen totalmente de importancia, y si en el medio se tiene $\mu = 1$, la fuerza total que actúa sobre él viene dada por la integral curvilínea

$$\mathbf{F} = J \oint \mathbf{dl} \times \mathbf{h}/c. \quad (34.6)$$

Esta expresión puede escribirse también como integral extendida a una superficie limitada por el circuito de la corriente. Substituyendo, de acuerdo con el teorema de Stokes, $d\mathbf{l}$ por el operador $d\mathbf{f} \times \nabla$, obtendremos

$$\oint d\mathbf{l} \times \mathbf{h} = \iint (\mathbf{df} \times \mathbf{grad}) \times \mathbf{h}.$$

Escribamos ahora

$$\begin{aligned} (\mathbf{df} \times \mathbf{grad}) \times \mathbf{h} &= - \mathbf{df} \operatorname{div} \mathbf{h} + \mathbf{grad}(\mathbf{df} \cdot \mathbf{h}) \\ &= - \mathbf{df} \operatorname{div} \mathbf{h} + \mathbf{df} \times \operatorname{rot} \mathbf{h} + (\mathbf{df} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Pero $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, y en el espacio fuera de las corrientes es también $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$. Así pues,

$$\mathbf{F} = J \int (\mathbf{df} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{H} / c. \quad (34.7)$$

En particular, en un campo exterior cuasihomogéneo se puede sacar \mathbf{H} junto con el operador ∇ fuera del signo de integración. Introduciendo también el momento magnético de la corriente según (29.18), llegamos al resultado del todo natural:

$$\mathbf{F} = (\mathcal{M} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{H}. \quad (34.8)$$

Dado que en esta expresión \mathcal{M} es una constante, \mathbf{F} puede escribirse también en la forma

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}(\mathcal{M} \cdot \mathbf{H}) \quad (34.9)$$

(lo que está de acuerdo con la expresión (32.17) para la energía de una corriente). En cuanto al momento de las fuerzas que actúan sobre la corriente en un campo cuasihomogéneo, es fácil comprobar que es igual a la expresión ordinaria

$$\mathbf{K} = \mathcal{M} \times \mathbf{H}. \quad (34.10)$$

PROBLEMA

Determinar la fuerza que actúa sobre un hilo rectilíneo por el que circula una corriente J y colocado paralelamente a un cilindro circular de longitud infinita (con permeabilidad μ) de radio a y a la distancia b de su eje.

Solución. Teniendo en cuenta la correspondencia señalada en la página 145 entre los problemas planos electrostático y magnetostático, el campo de la corriente se determina cambiando las notaciones en la solución del problema 3 del § 7. El campo en el espacio en torno del cilindro coincide con el campo que crearían en el vacío la corriente J y las corrientes $+J'$ y $-J'$ que circulan por los puntos A y O' respectivamente (véase fig. 11), siendo

$$J' = (\mu - 1)J/(\mu + 1).$$

El campo en el interior del cilindro coincide con el campo que crearía una corriente

$$J'' = 2J/(\mu + 1)$$

que circulase por el punto O . La fuerza que actúa sobre la unidad de longitud del conductor es

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = JB/c &= \frac{2JJ'}{c^2} \left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OO'} \right) \\ &= \frac{2J^2 a^2 (\mu - 1)}{b(b^2 - a^2)(\mu + 1)c^2}. \end{aligned}$$

De manera análoga se encuentra (véase el problema 4 del § 7) que un conductor lineal situado dentro de una cavidad cilíndrica en un medio magnético es atraido hacia la parte más próxima de la superficie de la misma por una fuerza

$$F = 2J^2 b (\mu - 1) / (a^2 - b^2)(\mu + 1)c^2.$$

§ 35. Fenómenos giromagnéticos

La posibilidad de imanar cuerpos no ferromagnéticos sin aplicarles un campo magnético exterior está fuertemente limitada por la condición de invariancia respecto del cambio de signo del tiempo. La polarización eléctrica de muchos cuerpos puede conseguirse, por ejemplo, sin un campo eléctrico exterior mediante deformación (medios piezoelectríficos). En cambio, el «piezomagnetismo», si realmente se produce, sólo puede manifestarse como un fenómeno muy raro (véase el final del § 28) y, en cualquier caso, está excluido en los cuerpos que carecen de estructura magnética.

La imanación sin un campo magnético exterior exige, en general, que el cuerpo se ponga en movimiento. A nada puede conducir una traslación uniforme, por descontado, en virtud del principio de relatividad de Galileo. En cambio, una rotación uniforme provoca una imanación que depende linealmente de la velocidad angular Ω (*efecto Barnett*); esta relación entre los vectores Ω y M es posible porque ambos cambian de signo al invertir el sentido del tiempo. Pero dado que uno y otro son vectores axiles, dicha dependencia puede darse incluso en un cuerpo isotrópico (caso en que se reduce a la mera proporcionalidad entre Ω y M).

Junto con este efecto debe existir también el efecto inverso: un cuerpo suspendido libremente comienza a girar al ser imanado (*efecto Einstein-de Haas*). Entre ambos efectos se tiene una simple relación termodinámica. Ésta puede obtenerse de la siguiente manera.

Como es sabido*, el potencial termodinámico respecto de la velocidad angular (para una temperatura y un volumen del cuerpo dados) es la energía libre \tilde{F}' del cuerpo en el sistema de coordenadas que gira con el mismo. En particular, el momento cinético L del cuerpo es igual a

$$L = -\partial \tilde{F}' / \partial \Omega. \quad (35.1)$$

Los fenómenos giromagnéticos se representan introduciendo en la energía libre una expresión adicional que corresponde al primer término de su desarrollo en potencias de Ω y de la imanación M en cada punto del cuerpo. Este término, en el que aparecen tanto Ω como M , es lineal respecto de Ω y de M , es decir, tiene la forma

$$\tilde{F}'_{\text{giro}} = -\int \lambda_{ik} \Omega_i M_k dV = -\lambda_{ik} \Omega_i M_k, \quad (35.2)$$

donde λ_{ik} es un tensor constante, en general no simétrico.

Según (35.1) y (35.2), el momento cinético que adquiere el cuerpo como resultado de su imanación está ligado con su momento magnético total por la relación

$$L_{\text{giro},i} = \lambda_{ik} M_k.$$

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 26.

De ordinario, en vez de λ_{ik} se utiliza el tensor inverso, definido por

$$g_{ik} = (2mc/e)\lambda^{-1}_{ik}$$

(e y m son la carga y la masa del electrón); las magnitudes sin dimensiones g_{ik} se llaman *coeficientes giromagnéticos*. Entonces es

$$\mathcal{M}_i = (e/2mc)g_{ik}L_{giro,k}. \quad (35.3)$$

Por otra parte, la expresión (35.2) prueba que, en relación con su influencia sobre las propiedades magnéticas, la rotación del cuerpo equivale a la acción de un campo exterior de intensidad $\mathfrak{H}_i = \lambda_{ki}\Omega_k$, o bien

$$\mathfrak{H}_i = (2mc/e)g^{-1}_{ki}\Omega_k. \quad (35.4)$$

Tenemos así la posibilidad, en principio, de calcular la imanación provocada por una rotación. Así, si la susceptibilidad magnética del cuerpo χ_{ik} es pequeña, el momento magnético que adquiere no depende de su forma y es igual a

$$\mathcal{M}_i = \chi_{ik}\mathfrak{H}_k = (2mc/e)\chi_{ik}g^{-1}_{ik}\Omega_i.$$

Las fórmulas (35.3) y (35.4) corresponden a los efectos Einstein-de Haas y Barnett, respectivamente. Vemos pues que ambos efectos están determinados precisamente por un mismo tensor, el g_{ik} .

CAPÍTULO V

FERROMAGNETISMO

§ 36. Cuerpos ferromagnéticos cerca del punto de Curie

Entre las propiedades magnéticas de las substancias ferromagnéticas y las propiedades eléctricas de los cuerpos ferroeléctricos existe una íntima analogía. Tanto unos como otros poseen, en volúmenes macroscópicos, una polarización espontánea, magnética o eléctrica. La desaparición de la polarización al cambiar la temperatura tiene lugar, en ambos casos, para un valor de ésta que corresponde a un cambio de fase de segunda especie (se produce en el *punto de Curie*).

Al mismo tiempo, entre los fenómenos ferromagnéticos y los ferroeléctricos hay también diferencias importantes debidas al carácter diferente de las fuerzas microscópicas de interacción que conducen a que se establezca la polarización espontánea. En los ferroeléctricos, la interacción de las moléculas en la red cristalina es esencialmente anisótropa, por lo que el vector polarización espontánea está ligado de manera relativamente rígida con determinadas direcciones en el cristal. En cambio, la aparición de una polarización espontánea en las substancias ferromagnéticas se debe fundamentalmente a la interacción de intercambio de los átomos, que no depende en general de la dirección del momento magnético total respecto de la red*. Ciento es que, junto con la interacción de intercambio, existe también una interacción magnética directa entre los momentos magnéticos atómicos. Esta interacción, sin embargo, representa un efecto del orden de v^2/c^2 (v son las velocidades atómicas), dado que los propios momentos magnéticos de los átomos contienen un factor v/c . A este tipo de interacciones pertenece también la interacción de los momentos magnéticos de los átomos con el campo eléctrico de la red cristalina. Todas estas interacciones (que se pueden calificar de *relativistas* por la presencia en ellas del factor $1/c^2$) son débiles comparadas con la interacción de intercambio y, de esta manera,

* La interacción de intercambio constituye, como es sabido, un efecto típicamente cuántico que resulta del tipo de simetría de las funciones de onda del sistema de partículas respecto de sus permutaciones. La simetría de permutación de las funciones de onda, y con ella también la interacción de intercambio, depende solamente del spin total del sistema, pero no de su dirección (véase vol. III, *Mecánica cuántica*, § 86). El papel que representa la interacción de intercambio en las substancias ferromagnéticas fue señalado por vez primera por Ia. I. Frenkel', Ia. G. Dorfman y W. Heisenberg (1928).

pueden conducir sólo a una relativamente pequeña dependencia de la energía del cristal respecto de la dirección de imanación*.

En consecuencia, la imanación de un cuerpo ferromagnético es una magnitud que se conserva en primera aproximación, es decir, respecto de la interacción fundamental (la de intercambio). Esta circunstancia atribuye un más profundo sentido físico a la teoría termodinámica que se expone a continuación y en la que la imanación M se considera como una variable independiente cuyo valor real (en función de la temperatura, del campo, etc.) viene determinado por las correspondientes condiciones de equilibrio térmico.

Designemos por Φ_0 el potencial termodinámico por unidad de volumen cuando $H = 0$, considerado como función de la variable independiente M (a la vez que de las otras variables termodinámicas). Prescindiremos por el momento de las interacciones relativistas, es decir, consideraremos solamente la interacción fundamental, la de intercambio. Entonces Φ_0 puede ser sólo función del módulo del vector M , no de su dirección.

Para hallar las magnitudes termodinámicas cuando H es diferente de cero partiremos de la relación

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial H} = -B/4\pi = -(H + 4\pi M)/4\pi.$$

Integrándola para un valor dado de la variable independiente M (y teniendo en cuenta que para $H = 0$ es $\tilde{\Phi} = \Phi = \Phi_0$), obtendremos

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0(M) - M \cdot H - H^2/8\pi. \quad (36.1)$$

Para el potencial Φ se sigue de aquí

$$\begin{aligned} \Phi &= \tilde{\Phi} + H \cdot B/4\pi = \Phi_0 + H^2/8\pi \\ &= \Phi_0 + (B - 4\pi M)^2/8\pi. \end{aligned} \quad (36.2)$$

Cuando se prescinde de la anisotropía magnética de la substancia ferromagnética, las direcciones de los vectores M y H coinciden, naturalmente; por ello, en las fórmulas (36.1) y (36.2) se puede escribir en vez de los vectores sus módulos.

Cerca del punto de Curie la imanación M es pequeña. Siguiendo la teoría general de los cambios de fase de segunda especie** desarrollemos $\Phi_0(M)$ en serie de potencias de esta pequeña cantidad. El desarrollo de una función isótropa en potencias de la magnitud vectorial M puede contener solamente términos de grado par:

$$\tilde{\Phi} = \Phi_{00} + \frac{1}{2}aM^2 + \frac{1}{4}bM^4 - MH - H^2/8\pi, \quad (36.3)$$

* El orden de magnitud de la razón de las interacciones relativistas a la de intercambio se caracteriza por el cociente

$$U_{\text{aniso}}/N\Theta,$$

donde U_{aniso} es la llamada *energía de anisotropía magnética* por unidad de volumen de la substancia (véase el párrafo siguiente), N es el número de átomos por cm^3 y Θ la temperatura del punto de Curie. De ordinario, es del orden de 10^{-4} a 10^{-5} .

** Véase vol. V, *Física estadística*, cap. 14.

donde Φ_{00} , a , b son funciones únicamente de la temperatura (y de la presión).

El punto de Curie $T = \Theta$ viene determinado por la anulación del coeficiente a , siendo $a > 0$ para $T > \Theta$ y $a < 0$ para $T < \Theta^*$. Cerca del punto de Curie la función $a(T)$ se puede desarrollar en potencias de la diferencia $T - \Theta$, es decir, cabe escribir

$$a = \alpha(T - \Theta), \quad (36.4)$$

donde α es una magnitud positiva independiente de la temperatura. El coeficiente b es positivo cerca del punto de Curie y puede substituirse por su valor para $T = \Theta$.

Cuando $H = 0$, al mínimo del potencial termodinámico por encima del punto de Curie, donde $a > 0$, corresponde $M = 0$, esto es, no hay polarización espontánea. Por debajo de dicho punto, el valor M viene determinado por la condición

$$\partial\tilde{\Phi}/\partial M = [\alpha(T - \Theta) + bM^2]M = 0.$$

Al mínimo de Θ corresponde la anulación de la expresión entre paréntesis rectos, de donde

$$M = \sqrt{[\alpha(\Theta - T)/b]}. \quad (36.5)$$

Así, pues, al acercarnos al punto de Curie la imanación espontánea disminuye proporcionalmente a $\sqrt{\Theta - T}$.

Como en todo cambio de fase de segunda especie, la transición en el punto de Curie (para $H = 0$) va acompañada de un salto en el valor de la capacidad calorífica. Prescindiendo de potencias superiores de M , tenemos para la entropía:

$$S = -\partial\tilde{\Phi}/\partial T = S_{00} - \frac{1}{2}M^2\partial a/\partial T = S_{00} - \frac{1}{2}\alpha M^2.$$

En la fase no-ferromagnética es $M = 0$ y $S = S_{00}$, y en la fase ferromagnética M se determina por la fórmula (36.5), de modo que

$$S = S_{00} + \alpha^2(T - \Theta)/2b.$$

De aquí resulta para el salto en el valor de la capacidad calorífica $C_p = T \frac{\partial S}{\partial T}$,

$$\Delta C_p = \alpha^2\Theta/2b. \quad (36.6)$$

Supongamos ahora que $H \neq 0$. La condición $\partial\tilde{\Phi}/\partial M = 0$, que determina la imanación, se escribe:

$$\alpha(T - \Theta)M + bM^3 = H. \quad (36.7)$$

Determinemos la susceptibilidad a partir de

$$\chi = (\partial M/\partial H)_{H=0}.$$

* Esta distribución de las fases con relación a la temperatura se presenta en todos los cuerpos ferromagnéticos conocidos, si bien no constituye una necesidad termodinámica.

De (36.7) se deduce

$$\frac{\partial M}{\partial H}[\alpha(T-\Theta)+3bM^2] = 1.$$

Por encima del punto de Curie es $M = 0$ cuando $H = 0$, de modo que

$$\chi = 1/\alpha(T-\Theta), \quad (36.8)$$

es decir, aparece el paramagnetismo con una susceptibilidad inversamente proporcional a $T-\Theta$ (*ley de Curie-Weiss*).

Por debajo del punto de Curie y cuando $H = 0$, M viene dada por la fórmula (36.5) y obtenemos

$$\chi = 1/2\alpha(\Theta-T). \quad (36.9)$$

Hay que recordar que esta magnitud no representa aquí la susceptibilidad en el sentido ordinario de la palabra (es decir, el coeficiente de proporcionalidad entre M y H), puesto que $M \neq 0$ incluso cuando $H = 0$ *.

De hecho, la susceptibilidad (36.9) puede alcanzar valores del orden de la unidad únicamente en la inmediata vecindad del punto de Curie. Prescindiendo de esta región, que presenta poco interés, podemos suponer que la imanación M sólo cambia muy poco por la acción del campo magnético y puede considerarse, para una temperatura dada, como una cantidad constante, lo que admitiremos en los párrafos que siguen.

También en relación con esto cabe señalar una diferencia más entre las substancias ferromagnéticas y las ferroeléctricas, en las que $\partial P/\partial E$, en general, no es pequeña ni aun lejos del punto de Curie. La causa de esto reside nuevamente en el hecho de que los momentos magnéticos atómicos son pequeños comparados con los momentos dipolares eléctricos de las moléculas.

§ 37. Energía de anisotropía magnética

Como hemos señalado ya, la anisotropía de las propiedades magnéticas de una substancia ferromagnética se debe a las interacciones relativistas, comparativamente débiles, entre sus átomos. En la teoría macroscópica esta anisotropía se representa mediante la introducción en el potencial termodinámico de los correspondientes términos, es decir, de la llamada *energía de anisotropía magnética* que depende de la dirección de imanación.

El cálculo de la energía de anisotropía a partir de la teoría microscópica exigiría una aplicación de la teoría cuántica de perturbaciones, en la cual el papel de per-

* Desde el punto de vista cuantitativo, las fórmulas (36.8), (36.9) son válidas en la región en que $\chi \gtrsim 1$ solamente para los cristales del sistema cúbico. Para los cristales uníxicos, debería también tenerse en cuenta la llamada *energía de anisotropía* (véase § 37), la cual en este caso es proporcional a M^2 y para valores de M muy pequeños es comparable e incluso supera el valor del término $aM^2/2$ en (36.3).

turbación de la energía lo representarían los términos que en el hamiltoniano del cristal corresponden a las interacciones relativistas. Pero la forma general de las expresiones buscadas puede establecerse también sin efectuar estos cálculos, basándose en simples consideraciones de simetría.

El hamiltoniano de las interacciones relativistas contiene términos de determinados grados respecto de los operadores correspondientes a los vectores spin de los electrones, precisamente de grados primero y segundo (las llamadas interacciones *spin-órbita* y *spin-spin*). Por ello, al aplicar la teoría de perturbaciones, la energía de anisotropía se obtiene automáticamente en forma de desarrollo en potencias de los cosenos directores del vector imanación. Por otra parte, la energía de anisotropía U_{aniso} , al igual que el propio potencial Φ , es invariante respecto del cambio de sentido del tiempo, mientras que la imanación \mathbf{M} cambia con ello de signo. De aquí se sigue que la energía de anisotropía debe ser función par de los cosenos directores del vector \mathbf{M} . Por consiguiente, en la primera aproximación no nula de la teoría de perturbaciones obtendremos una expresión de la forma

$$U_{\text{aniso}} = \frac{1}{2}\beta_{ik}M_iM_k, \quad (37.1)$$

donde β_{ik} es un tensor simétrico de segundo orden sin dimensiones cuyas componentes son funciones de la temperatura. Cerca del punto de Curie, la expresión (37.1) puede considerarse también como primer término del desarrollo de la energía de anisotropía en potencias del vector \mathbf{M} , que en este dominio de temperaturas resulta ser una cantidad pequeña (hay que subrayar, sin embargo, que esta interpretación sería incorrecta para otras temperaturas). De aquí se deduce que cuando $T \rightarrow 0$ las magnitudes β_{ik} tienden a valores finitos no nulos.

En los cristales monoáxicos y biáxicos un tensor simétrico de segundo orden tiene dos y tres componentes independientes, respectivamente. Sin embargo, en el presente caso hay que tener aún en cuenta que una combinación cuadrática, precisamente la $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = M^2$, es independiente de la dirección del vector \mathbf{M} y, en consecuencia, puede ser excluida de la energía de anisotropía. Por lo tanto, la expresión (37.1) para los cristales uniáxicos y biáxicos contiene en total uno y dos coeficientes, respectivamente.

Así, para los cristales uniáxicos la energía de anisotropía se puede escribir en la forma

$$U_{\text{aniso}} = \frac{1}{2}\beta(M_x^2 + M_y^2) = \frac{1}{2}\beta M^2 \operatorname{sen}^2\theta, \quad (37.2)$$

donde θ es el ángulo formado por \mathbf{M} y el eje z , elegido éste paralelamente al eje principal de simetría del cristal. Si la constante β es positiva, la energía de anisotropía es mínima para una imanación a lo largo del eje z ; este eje será, como suele decirse, la *dirección de imanación fácil*.

Pero si $\beta < 0$, la dirección de imanación fácil se encontrará en el plano xy ; es natural, en este caso, escribir la energía de anisotropía en la forma

$$U_{\text{aniso}} = \frac{1}{2}|\beta|M_z^2, \quad (37.3)$$

equivalente a (37.2), pero en la que, de nuevo, a la dirección de imanación fácil corresponde $U_{\text{aniso}} = 0^*$. La expresión (37.3) es isótropa en el plano xy . En consecuencia, la dirección de imanación fácil viene determinada en este caso por términos de orden superior (véase el problema 1 de este párrafo).

Consideremos la relación existente entre la imanación de un cuerpo ferromagnético uniáxico y el campo magnético en él, suponiendo, para concretar, que $\beta > 0^{**}$. Recordemos que el módulo de M es, por hipótesis, independiente de H , de modo que se trata solamente de las rotaciones de este vector. Por razones de simetría, es evidente que el vector M se encontrará en el plano que pasa por el eje z y es paralelo a la dirección de H (en tanto que no se tienen en cuenta en la energía de anisotropía términos de orden superior que son anisótropos en el plano xy); elijamos este plano como plano xz . El potencial termodinámico, incluida la energía de anisotropía, es igual a***

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} &= \Phi_0(M) + \frac{1}{2}\beta M_x^2 - \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} - H^2/8\pi \\ &= \Phi_0(M) + \frac{1}{2}\beta M^2 \operatorname{sen}^2 \theta - M(H_x \operatorname{sen} \theta + H_z \cos \theta) - H^2/8\pi.\end{aligned}\quad (37.4)$$

La dependencia de M respecto de H se determina por la condición de equilibrio $\partial\tilde{\Phi}/\partial\theta = 0$, de donde

$$\beta M \operatorname{sen} \theta \cos \theta = H_x \cos \theta - H_z \operatorname{sen} \theta. \quad (37.5)$$

Respecto de la incógnita $\xi = \operatorname{sen} \theta$, (37.5) es una ecuación algebraica de cuarto grado

$$(\beta M \xi - H_x)^2 (1 - \xi^2) = H_z^2 \xi^2,$$

en la que los coeficientes de las potencias impares de ξ no son nulos. Esta ecuación posee dos o cuatro raíces reales (todas ellas < 1). Dado que estas raíces corresponden a extremos de la función $\tilde{\Phi}(\theta)$, está claro que en el primer caso dicha función posee un solo mínimo y un solo máximo, y en el segundo, dos mínimos y dos máximos. En otras palabras, a un valor dado del campo H corresponde en el primer caso una dirección de imanación. En el segundo caso, en cambio, para un H dado son posibles dos direcciones diferentes de M de las cuales una (que corresponde al menor de los mínimos de $\tilde{\Phi}$) es del todo estable termodinámicamente, y la segunda (que corresponde al mayor de los mínimos de $\tilde{\Phi}$), termodinámicamente metaestable.

* El cobalto hexagonal constituye un ejemplo de substancia ferromagnética uniáxica. En él, β cambia de signo a una temperatura $\sim 200^\circ\text{C}$, siendo $\beta < 0$ y $\beta > 0$, respectivamente, por encima y por debajo de este punto. A la temperatura ambiente, $\beta = 4,2$.

** Nos referimos precisamente a este caso cuando se trate de cristales uniáxicos.

*** En el estudio que sigue utilizamos para la energía de anisotropía la expresión (37.2). Hay que señalar, sin embargo, que el desarrollo del que (37.2) es precisamente el primer término suele presentar una convergencia más bien mala en los casos reales. Por ello, para una descripción cuantitativa satisfactoria de los fenómenos es necesario tener en cuenta también el término de orden siguiente (de cuarto orden; para un cristal hexagonal, es proporcional a $\operatorname{sen}^4 \theta$).

Uno u otro caso se presenta según sean los valores de H_x y H_z . Si se varían estos parámetros de modo continuo, se pasa de un caso al otro cuando uno de los máximos se confunde con uno de los mínimos. La curva $\tilde{\Phi}(\theta)$ presenta entonces un punto de inflexión en vez de un extremo, es decir, junto con $\partial\tilde{\Phi}/\partial\theta$ se anula también la derivada segunda $\partial^2\tilde{\Phi}/\partial\theta^2$. Escribiendo la ecuación (37.5) en la forma

$$\frac{H_x}{\sin\theta} - \frac{H_z}{\cos\theta} = \beta M$$

y derivándola una vez más respecto de θ , obtendremos

$$H_x/\sin^3\theta = -H_z/\cos^3\theta.$$

Eliminando θ entre estas dos ecuaciones, se encuentra

$$H_x^{2/3} + H_z^{2/3} = (\beta M)^{2/3}. \quad (37.6)$$

En el plano H_x, H_z la ecuación (37.6) define una curva cerrada cuya forma se representa en la figura 20. Esta curva divide el plano H_x, H_z en dos partes tales que en una de ellas es posible la existencia de estados metaestables, mientras que en la otra no es posible. Sin necesidad de analizar más el asunto, es evidente que el dominio en que son imposibles los estados metaestables es el exterior a la curva, lo que es consecuencia directa de que para $H \rightarrow \infty$ sólo puede ser estable una dirección de M , a saber, la paralela al campo H .

La existencia de estados metaestables conduce a la posibilidad de que aparezcan los llamados fenómenos de *histéresis*, que se traducen en un cambio irreversible del estado de un cuerpo ferromagnético al variar el campo magnético exterior. Por ello, la curva representada en la figura 20 es la «frontera absoluta» de la histéresis; para valores del campo que se encuentran fuera de esta curva la histéresis es imposible en cualquier caso*.

Los estados en los que el campo H es perpendicular al eje de imanación fácil ($H_x = H$, $H_z = 0$) exigen un análisis especial. El potencial termodinámico es

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 - \frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{2}\beta M^2 \sin^2\theta - HM \sin\theta. \quad (37.7)$$

Si $H > \beta M$, la función $\tilde{\Phi}$ presentará solamente un mínimo, precisamente para $\theta = \pi/2$, es decir, la imanación está dirigida en el sentido del campo. Pero si $H < \beta M$, la función $\tilde{\Phi}$ tiene un mínimo en

$$M_x = M \sin\theta = H/\beta, \quad (37.8)$$

* En todo lo expuesto en este párrafo nos limitamos a considerar solamente los estados de equilibrio termodinámico de los ferromagnéticos y, de acuerdo con esto, los procesos reversibles que se producen en ellos. En particular, ignoramos por completo el mecanismo de los fenómenos de histéresis que pueden estar ligados con defectos del cristal, tensiones internas en la muestra, carácter polícrystalino de la misma y otras causas análogas.

al que corresponden dos posibles posiciones del vector \mathbf{M} (ángulos θ y $\pi-\theta$) simétricas respecto del eje x . Así pues, en este caso se tienen dos estados de equilibrio, ambos con valores iguales de Φ y, en consecuencia, estables en igual grado.

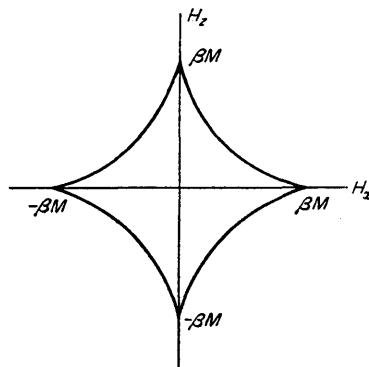


FIG. 20

Esta circunstancia es muy importante, ya que conduce a que puedan existir dos «fases» en contacto en las que la intensidad del campo \mathbf{H} es la misma, mientras que es diferente la imanación \mathbf{M} (y, por lo tanto, también la inducción \mathbf{B}). Como resultado de ello surge una nueva posibilidad de disminución del potencial termodinámico total del cuerpo: su volumen puede descomponerse en una serie de dominios individuales en cada uno de los cuales la imanación presenta una de las dos orientaciones admisibles; estos dominios se llaman *dominios de imanación espontánea* o, simplemente, *dominios*. La determinación práctica de la estructura de equilibrio termodinámico de una substancia ferromagnética exige considerar el cuerpo en conjunto, teniendo en cuenta su forma y dimensiones concretas; volvemos a tratar de esta cuestión en el § 39.

Consideremos una porción del cuerpo pequeña comparada con su volumen total, pero grande en comparación con las dimensiones de los dominios. El campo H_x se puede considerar constante en toda esta porción, y por $\bar{\mathbf{M}}$ y $\bar{\mathbf{B}}$ designamos los valores de \mathbf{M} y \mathbf{B} promediados en dicho volumen. Junto con H_x es también constante la componente transversal $M_x = H_x/\beta$ de la imanación. En cambio, la componente longitudinal M_z en diferentes dominios difiere en el signo, de modo que su valor medio en ningún caso supera a $|M_z|$. Teniendo también en cuenta que en todo el volumen es $H_z = 0$, para la inducción media se tiene:

$$\bar{B}_x = H_x \left(1 + \frac{4\pi}{\beta}\right), \quad \bar{B}_z < 4\pi \sqrt{\left(M^2 - \frac{H_x^2}{\beta^2}\right)}. \quad (37.9)$$

Mediante estas fórmulas se determina el intervalo de valores de la inducción media que corresponde a la estructura en dominios de una substancia ferromagnética uniaxica.

Pasemos a los cristales ferromagnéticos del sistema cúbico. Sus propiedades difieren esencialmente de las propiedades de los cristales uniaxiales (y biaxiales). La razón de ello consiste en que la única combinación de segundo grado que es invariantes respecto de las transformaciones de simetría cúbica y que es posible formar a partir de las componentes del vector \mathbf{M} es la suma $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$, que no depende de la dirección de \mathbf{M} . Por consiguiente, el primer término no nulo en el desarrollo de la energía de anisotropía de un cristal cúbico no es un término de segundo grado, sino de cuarto. A esto se debe el que los efectos de la anisotropía magnética en los cristales cúbicos sea, en general, más débil que en los cristales uniaxiales y biaxiales.

La simetría cúbica admite dos invariantes de cuarto grado formados a partir de las componentes del vector \mathbf{M} :

$$M_x^2 M_y^2 + M_x^2 M_z^2 + M_y^2 M_z^2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}(M_x^4 + M_y^4 + M_z^4).$$

Estos invariantes, sin embargo, no son en este caso independientes, puesto que su suma es la magnitud $\frac{1}{2}(M_x^2 + M_y^2 + M_z^2)^2$, que no depende de la dirección. Por consiguiente, la energía de anisotropía de un cuerpo ferromagnético del sistema cúbico contiene (dentro de la aproximación considerada*) solamente una constante y puede escribirse en la forma

$$U_{\text{aniso}} = \beta(M_x^2 M_y^2 + M_x^2 M_z^2 + M_y^2 M_z^2), \quad (37.10)$$

o bien, de manera equivalente,

$$U_{\text{aniso}} = -\frac{1}{2}\beta(M_x^4 + M_y^4 + M_z^4). \quad (37.11)$$

Cuando $\beta > 0^{**}$ la energía de anisotropía alcanza valores mínimos iguales para tres orientaciones del vector \mathbf{M} —paralelamente a las tres aristas del cubo (ejes x , y , z ; direcciones cristalográficas [100], [010], [001]). Así pues, en este caso el cristal posee tres ejes de imanación fácil equivalentes:

En cambio, si $\beta < 0^{***}$ la energía de anisotropía es mínima para $M_x^2 = M_y^2 = M_z^2 = \frac{1}{3}M^2$, es decir, cuando el vector \mathbf{M} está dirigido en el sentido de cualquiera de las cuatro diagonales espaciales del cubo (direcciones cristalográficas [111], [$\bar{1}$ 11], etc.). Éstas son, pues, las direcciones de imanación fácil en este caso.

Hay que hacer notar que un cristal cúbico ferromagnético, imanado espontáneamente a lo largo de cualquiera de sus ejes de imanación fácil, pierde, estrictamente hablando, la simetría cúbica (debido a lo cual tiene lugar un desplazamiento de los átomos, es decir, una distorsión de la red cristalina). Un cristal imanado en el sentido de una de las aristas del cubo se convierte en ligeramente tetragonal, y en la imanación a lo largo de una diagonal espacial, en romboédrico. Desde este

* En la aproximación siguiente aparecen términos de sexto grado. Al calcular el número de invariantes de dicho grado independientes, deben excluirse tanto la magnitud M^6 , que es independiente de la dirección, como las expresiones que difieren de los invariantes de cuarto orden tan sólo en el factor M^2 . En definitiva, queda en total un único invariante, para el cual cabe elegir $M_x^2 M_y^2 M_z^2$.

** Este caso se presenta, por ejemplo, en el hierro.

*** Por ejemplo, en el níquel.

punto de vista, los cristales del sistema cúbico difieren de los cristales uniáxicos con una dirección de imanación fácil dirigida en el sentido del eje principal de simetría; es evidente que la imanación en esta dirección no cambia la simetría del cristal.

El estudio de la dependencia de \mathbf{M} respecto de \mathbf{H} para un cristal cúbico puede efectuarse, en principio, de manera análoga a como se procedió anteriormente en el caso de un cristal uniáxico. Sin embargo, debido a la gran complejidad de las ecuaciones, obtener fórmulas analíticas explícitas resulta aquí imposible y no nos detendremos más en considerar esta cuestión.

PROBLEMAS

- Escribir los términos de orden siguiente (después del segundo) en el desarrollo de U_{aniso} para un cristal uniáxico, términos que conducen a anisotropía en el plano xy .

Solución. El problema se reduce a determinar las combinaciones del menor grado par independientes formadas a partir de las componentes del vector \mathbf{M} e invariantes respecto de las transformaciones de simetría del cristal dado y que no contienen M_x y M_y en la forma de suma $M_x^2 + M_y^2$. En la simetría tetragonal se tiene una de estas combinaciones, para la cual puede elegirse

$$M_x^2 M_y^2$$

(la combinación $\frac{1}{2} (M_x^4 + M_y^4)$, junto con la que precede, da la suma $\frac{1}{2} (M_x^2 + M_y^2)^2$ y, por ello, no es independiente).

En la simetría hexagonal la anisotropía en el plano xy aparece solamente en los términos de sexto grado; como combinación invariante de este orden independiente cabe elegir:

$$\frac{1}{6i} [(M_x + iM_y)^6 - (M_x - iM_y)^6] = 2M_x M_y \left(M_x^4 - \frac{10}{3} M_x^2 M_y^2 + M_y^4 \right).$$

La simetría romboédrica admite también este término de sexto orden y a la vez una combinación independiente de cuarto orden, por ejemplo

$$\frac{1}{2} M_z [(M_x + iM_y)^3 + (M_x - iM_y)^3] = M_x M_z (M_x^2 - 3M_y^2).$$

Sin embargo, determinar la dirección de imanación fácil en el plano xy exige (debido a que M_z es pequeña) tener en cuenta al mismo tiempo los términos de cuarto y de sexto orden.

- Un cristal ferromagnético uniáxico tiene la forma de un elipsoide de revolución (con el eje de imanación fácil coincidente con el de rotación) y se encuentra en un campo magnético exterior. Determinar el intervalo de valores de \mathfrak{H} para los que el cuerpo presentará una estructura en dominios.

Solución. De acuerdo con las propiedades generales de los cuerpos en forma de elipsoide que se encuentran en un campo magnético exterior (§ 8), los valores medios de la inducción $\bar{\mathbf{B}}$ y del campo $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ relativos a la estructura en dominios están ligados con \mathfrak{H} por la relación

$$n\bar{B}_z + (1-n)H_z = \mathfrak{H}_z, \quad \frac{1}{2}(1-n)\bar{B}_x + \frac{1}{2}(1+n)H_x = \mathfrak{H}_x,$$

donde n es el coeficiente de desimanación a lo largo del eje principal del elipsoide (z). Haciendo $H_z = 0$ y utilizando la fórmula (37.9), obtendremos

$$H_x = \frac{\mathfrak{H}_x}{1 + 2\pi(1-n)/\beta}, \quad \bar{B}_z = \frac{\mathfrak{H}_z}{n} < 4\pi \sqrt{\left(M^2 - \frac{H_x^2}{\beta^2}\right)}.$$

Eliminando H_x , se encuentra la desigualdad buscada

$$\frac{\mathfrak{H}_x^2}{(4\pi n)^2} + \frac{\mathfrak{H}_z^2}{[\beta + 2\pi(1-n)]^2} < M^2$$

que determina el intervalo de existencia de una estructura en dominios.

3. Para un cuerpo policristalino en un campo magnético intenso ($H \gg 4\pi M$), determinar la imanación promediada respecto de los cristalitos supuesto que éstos poseen simetría uníaxica.

Solución. En un cristalito, sean θ y φ los ángulos formados por su dirección de imanación fácil y los vectores \mathbf{M} y \mathbf{H} , respectivamente. Es desde luego evidente que, en un campo intenso, la dirección de \mathbf{M} será próxima a la de \mathbf{H} , es decir el ángulo $\vartheta = \theta - \varphi$ es pequeño. Haciendo en (37.4) $\mathbf{M} \cdot \mathbf{H} = MH \cos(\theta - \varphi)$ e igualando a cero la derivada $\partial \tilde{\Phi} / \partial \theta$, se obtiene

$$\vartheta \cong \sin \vartheta = -(\beta M/H) \sin \theta \cos \theta.$$

La imanación media está dirigida, evidentemente, a lo largo de \mathbf{H} y su módulo vale:

$$\bar{M} = M \overline{\cos \vartheta} = M(1 - \frac{1}{2}\overline{\vartheta^2}) = M \left(1 - \frac{\beta^2 M^2}{2H^2} \overline{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}\right)$$

donde el trazo significa que se ha promediado respecto de los cristalitos. Suponiendo que todas las direcciones de los ejes de imanación fácil de éstos son igualmente probables, obtendremos

$$\bar{M} = M \left(1 - \frac{\beta^2 M^2}{15H^2}\right).$$

Así pues, la imanación media tiende a la saturación de acuerdo con la ley $\bar{M} - M \sim 1/H^2$.

4. El mismo problema para cristalitos de simetría cúbica.

Solución. Las condiciones de que sea mínima la expresión

$$-\frac{1}{2}\beta(M_x^4 + M_y^4 + M_z^4) - (H_x M_x + H_y M_y + H_z M_z),$$

con la condición suplementaria $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = \text{const}$, conducen a

$$2\beta M_x^3 + H_x = \lambda M_x, \quad 2\beta M_y^3 + H_y = \lambda M_y, \quad 2\beta M_z^3 + H_z = \lambda M_z,$$

donde λ es el factor indeterminado de Lagrange. Para valores de H grandes se sigue de aquí

$$M_x \cong \frac{1}{\lambda} H_x + \frac{1}{\lambda^4} 2\beta H_x^3 + \dots, \text{ etc.,}$$

y sumando los cuadrados de estas igualdades encontramos $M^2 \cong H^2/\lambda^2$, es decir, $\lambda \cong H/M$. El ángulo ϑ formado por \mathbf{M} y \mathbf{H} se deduce de

$$\begin{aligned} \vartheta^2 &\cong \sin^2 \vartheta = \frac{(\mathbf{M} \times \mathbf{H})^2}{M^2 H^2} \\ &= \frac{4\beta^2 M^6}{H^{10}} \sum H_x^2 H_y^2 (H_x^2 - H_y^2)^2, \end{aligned}$$

donde la suma se extiende a las permutaciones cíclicas de los subíndices x, y, z . Promediar esta expresión respecto de las orientaciones de los cristalitos, equivale a promediar con relación a las direcciones del vector \mathbf{H} . Este último promedio se efectúa integrando respecto de los ángulos que determinan la dirección de \mathbf{H} , obteniéndose el resultado*:

$$\bar{M} = M(1 - \frac{1}{2}\overline{\vartheta^2}) = M \left(1 - \frac{8\beta^2 M^6}{105H^2}\right).$$

* Para un cristal cúbico existe también un intervalo de valores del campo en el que MH es grande comparado con la energía de anisotropía, pero pequeño en comparación con $4\pi M^2$. La fórmula obtenida aquí no es entonces aplicable, puesto que al deducirla no se tuvieron en cuenta los campos que aparecen en el cuerpo como resultado de la diversa orientación de las imanaciones en los diferentes cristalitos. Un estudio más preciso conduce también en este caso a la ley $1/H^2$, pero con otro coeficiente. No examinaremos esta cuestión más detenidamente, puesto que estos resultados discrepan, por razones no claras actualmente, de los datos experimentales.

§ 38. Magnetostricción de los cuerpos ferromagnéticos

El cambio de la imanación de un ferromagnético en un campo magnético conduce a su deformación (*magnetostricción*). Este fenómeno puede deberse tanto a las interacciones de intercambio en el cuerpo, como a las relativistas. Dado que la energía de intercambio depende sólo del valor absoluto de la imanación, únicamente variará si cambia la cantidad M en el campo magnético. Aunque este último cambio, en general, es relativamente muy pequeño, la propia energía de intercambio, por otra parte, es grande comparada con la energía de anisotropía. Por ello, los efectos de magnetostricción debidos a ambos tipos de interacción pueden resultar comparables.

Esta situación se presenta en los cristales uniáxicos. Deformaciones apreciables, resultado de una variación en la dirección de M , tienen lugar en campos $H \sim \beta M$; en cambio, la variación de la cantidad M llega a ser considerable para campos $H \sim 4\pi M$. Esos dos intervalos prácticamente coinciden y, en consecuencia, al estudiar la magnetostricción de los cuerpos ferromagnéticos uniáxicos es necesario, en general, tener en cuenta ambos efectos a la vez. No nos entretendremos aquí en obtener las correspondientes fórmulas, que son bastante complejas.

En los cristales cúbicos la situación es otra debido a que la energía de anisotropía es relativamente pequeña (en tanto que cantidad de cuarto orden). La magnetostricción, que se debe en esencia en este caso al cambio en la dirección de M , se presenta ya en campos hasta cierto punto débiles en los que cabe prescindir por completo de la variación del valor absoluto de M . Consideraremos estos efectos.

El cambio de la energía de interacción relativista en un cuerpo deformado se representa introduciendo en el potencial termodinámico Φ términos magnetoelásticos adicionales que dependen de las componentes del tensor de tensiones elásticas σ_{ik} y de la dirección del vector M (N. S. Akulov, 1928). Los primeros términos de este tipo no nulos son lineales respecto de σ_{ik} y cuadráticos en los cosenos directores del vector M (esto último, de nuevo, en virtud de la simetría respecto del cambio de sentido del tiempo). En el caso general tenemos, por consiguiente, para la energía magnetoelástica una expresión de la forma

$$U_{m-el} = -\lambda_{iklm}\sigma_{ik}M_lM_m, \quad (38.1)$$

donde λ_{iklm} es un tensor de cuarto orden, simétrico respecto de los pares de subíndices i, k y l, m (pero no respecto de la permutación del par i, k con el par l, m). Cerca del punto de Curie, donde el desarrollo en potencias de los cosenos directores del vector M equivale a un desarrollo en potencias de sus componentes, las magnitudes λ_{iklm} tienden a comportarse como constantes.

Al contar el número de componentes independientes del tensor λ_{iklm} no hay que perder de vista que los términos en (38.1) que contienen las componentes de M en la combinación $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$ son independientes de la dirección de M y, en consecuencia, pueden ser excluidos de la energía magnetoelástica*. Teniendo

* La relativa arbitrariedad que resulta como consecuencia de esto en la elección de λ_{iklm} , traduce simplemente el carácter convencional que cobra el elegir la dirección de M respecto de la cual (cuando no existen fuerzas mecánicas externas aplicadas) consideramos que el cristal no está deformado.

esto en cuenta se llega a la conclusión de que, en un cristal cúbico, la energía magnetoelástica contiene dos coeficientes independientes; resulta conveniente escribirla en la forma

$$U_{\text{m-el}} = -\lambda_1(\sigma_{xx}M_x^2 + \sigma_{yy}M_y^2 + \sigma_{zz}M_z^2) - 2\lambda_2(\sigma_{xy}M_xM_y + \sigma_{xz}M_xM_z + \sigma_{yz}M_yM_z). \quad (38.2)$$

El tensor de deformación se obtiene derivando $\tilde{\Phi}$ respecto de las correspondientes componentes σ_{ik} :

$$u_{ik} = -\partial\tilde{\Phi}/\partial\sigma_{ik},$$

donde en $\tilde{\Phi}$ hay que incluir también (con signo opuesto; véase la nota de la pág. 90) la energía elástica ordinaria. En un cristal cúbico esta última contiene tres coeficientes elásticos independientes y es de la forma

$$U_{\text{el}} = \frac{1}{2}k_1(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) + k_2(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz}) + k_3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2). \quad (38.3)$$

Para el tensor de deformación se obtiene*

$$\begin{aligned} u_{xx} &= k_1\sigma_{xx} + k_2(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \lambda_1M_x^2, \\ u_{xy} &= k_3\sigma_{xy} + \lambda_2M_xM_y \end{aligned} \quad (38.4)$$

(y análogamente para las demás componentes).

Estas fórmulas ponen de manifiesto todos los efectos de magnetostricción (en el intervalo de intensidades del campo considerado). En particular, si no existen tensiones internas, las fórmulas

$$u_{xx} = \lambda_1M_x^2, \quad u_{xy} = \lambda_2M_xM_y, \quad \text{etc.}$$

determinan el cambio de la deformación cuando varía la dirección de imanación. Recordemos que el valor de la deformación es, en cierto sentido, resultado de un convenio debido a la arbitrariedad en la elección de aquella dirección de \mathbf{M} para la cual se admite que no existe deformación.

Consideremos ahora la magnetostricción en campos tan intensos ($H \gg 4\pi M$) que la energía de anisotropía carece de importancia y desaparece ya la estructura en dominios, de modo que la dirección de \mathbf{M} se puede considerar que coincide con la de \mathbf{H} .

Debido a que se prescinde de la energía de anisotropía, la simetría concreta del cristal ya no cuenta, con lo cual las fórmulas que siguen a continuación son aplicables en igual medida a cualquier substancia ferromagnética.

Supongamos que un cuerpo se encuentra en un campo magnético exterior homogéneo \mathfrak{H} . Su potencial termodinámico total $\tilde{\varphi}$ ** viene dado por la fórmula

$$\tilde{\varphi} = -\mathcal{M} \cdot \mathfrak{H} = -MV\mathfrak{H}, \quad (38.5)$$

* Al derivar $\tilde{\Phi}$ hay que tener en cuenta la observación hecha en la pág. 92.

** Para $\tilde{\varphi}$ se adopta aquí la definición de que ya se habló en el § 12. Es imposible aplicarla únicamente cuando existe una importante deformación no homogénea del cuerpo.

donde $\mathcal{M} = MV$ es el momento magnético total del cuerpo imanado homogéneamente en la dirección del campo; hemos prescindido aquí del término $\tilde{g}\tilde{o}_0$ que no depende de éste. El tensor de deformación, promediado en el volumen del cuerpo, es

$$\bar{u}_{ik} = -(1/V) \partial \tilde{g}\tilde{o} / \partial \sigma_{ik},$$

de donde

$$\bar{u}_{ik} = \frac{\mathfrak{H}}{V} \frac{\partial(MV)}{\partial \sigma_{ik}}. \quad (38.6)$$

Por consiguiente, la deformación queda determinada por la dependencia de la imanación respecto de las tensiones internas.

Para una simetría cúbica del cristal, cualquier tensor de segundo orden simétrico que caracterice sus propiedades se reduce a un escalar multiplicado por δ_{ik} . Esto vale también para el tensor $\partial(VM)/\partial\sigma_{ik}$, de modo que la deformación debida a magnetostricción queda limitada en este caso a una dilatación o contracción uniformes.

Si tan sólo nos interesa la variación δV del volumen total del cuerpo, ésta se puede obtener simplemente derivando $\tilde{g}\tilde{o}$ respecto de la presión:

$$\delta V = \partial \tilde{g}\tilde{o} / \partial p = -\mathfrak{H} \partial(MV) / \partial p, \quad (38.7)$$

donde por p hay que entender una presión uniforme aplicada a la superficie del mismo.

PROBLEMA

Determinar el cambio de volumen por magnetostricción de un elipsoide ferromagnético en un campo exterior $\mathfrak{H} \sim 4\pi M$ paralelo a uno de sus ejes; se supone que la substancia ferromagnética pertenece al sistema cúbico*.

Solución. Prescindiendo de la energía de anisotropía, la región en que existe una estructura en dominios se determina por la desigualdad $\bar{B} < 4\pi M$ cuando $H = 0$ (el trazo significa el promedio en el volumen del cuerpo; cf. § 37). En un elipsoide $n\bar{B} + (1-n)\bar{H} = \mathfrak{H}$, y haciendo $H = 0$ se encuentra que la estructura en dominios se presenta cuando

$$\mathfrak{H} < 4\pi n M.$$

Dado que $n\bar{B} = 4\pi n M = \mathfrak{H}$, la imanación media vale

$$\bar{M} = \mathfrak{H}/4\pi n.$$

De aquí se sigue para el potencial termodinámico

$$\tilde{g}\tilde{o} = -V \int_0^{\mathfrak{H}} \bar{M} d\mathfrak{H} = -\mathfrak{H}^2 V / 8\pi n. \quad (1)$$

Si $\mathfrak{H} > 4\pi n M$, el elipsoide se imana por completo en la dirección del campo: $\bar{M} = M$. Entonces

$$\tilde{g}\tilde{o} = -M\mathfrak{H} V + 2\pi M^2 V n \quad (2)$$

* En un ferromagnético uniáxico y para $\mathfrak{H} \sim 4\pi M$ habría que tener en cuenta la energía de anisotropía, lo que no es necesario hacer en el caso de un cristal cúbico.

(cuando $\mathfrak{H} = 4\pi Mn$ las expresiones (1) y (2) coinciden).

La variación de volumen buscada se obtiene derivando $\tilde{\rho}$ respecto de la presión:

$$\delta V = - \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi n} \frac{\partial V}{\partial p} \text{ para } \mathfrak{H} < 4\pi nM,$$

$$\delta V = -\mathfrak{H} \frac{\partial(MV)}{\partial p} + 2\pi n \frac{\partial(M^2V)}{\partial p} \text{ para } \mathfrak{H} > 4\pi nM.$$

Cuando $\mathfrak{H} \gg 4\pi nM$, volvemos a la fórmula (38.7) obtenida en el texto.

§ 39. Estructura en dominios de los ferromagnéticos

Conforme se ha indicado ya en el § 37, existe un amplio conjunto de estados en los que una substancia ferromagnética debe poseer la llamada *estructura en dominios*, es decir, ha de descomponerse en toda una serie de regiones en las que la imanación tiene direcciones distintas*. Esto vale, en particular, para un cuerpo ferromagnético que no se encuentra en un campo magnético exterior.

Algunas conclusiones acerca de la forma de las superficies de separación entre dominios pueden deducirse directamente de las condiciones de contorno para el campo magnético. Dado que el campo \mathbf{H} es el mismo en dominios contiguos, la condición de continuidad de la componente normal B_n de la inducción se reduce a la condición de que sea continua M_n . En los cristales uniáxicos, la imanación posee signos opuestos de M_z en dominios diferentes, mientras son iguales M_x y M_y . En estas condiciones, la continuidad de M_n significa que la superficie de separación debe ser paralela al eje z , es decir, al eje de imanación fácil.

Consideremos, en primer lugar, las propiedades de las superficies frontera, prescindiendo de su dependencia respecto de la forma concreta de los dominios. Estas fronteras son, en realidad, capas de transición relativamente delgadas en las que la dirección de la imanación varía de modo continuo al pasar de la dirección en uno de los dominios a la correspondiente en el otro. La «anchura» de esta capa y la marcha de la variación de \mathbf{M} en ella vienen determinadas por las condiciones de equilibrio termodinámico. Hay que tener en cuenta la energía adicional debida a la no-homogeneidad de la imanación. La contribución mayor a esta «energía de no-homogeneidad» la da la interacción de intercambio. Desde el punto de vista macroscópico esta energía puede expresarse en función de las derivadas de \mathbf{M} respecto de las coordenadas. Cabe proceder así, de manera general, si el gradiente de la dirección de \mathbf{M} es relativamente pequeño; esta condición significa que un cambio notable en la dirección de los momentos magnéticos se produce solamente a distancias que son grandes comparadas con las distancias interatómicas. Es evidente que esta condición se cumple en el presente caso, puesto que una diferencia considerable entre las direcciones de los momentos magnéticos de átomos vecinos

* El primero en introducir el concepto de dominios fue P. Weiss (1907). La teoría termodinámica de los dominios la establecieron L. D. Landau y E. M. Lifshitz (1935).

conduciría a un aumento muy grande de la energía de intercambio y, por consiguiente, sería desventajoso termodinámicamente.

Designemos la densidad de «energía de no homogeneidad» por $U_{\text{no-ho}}$. Los términos mayores en su desarrollo en potencias de las derivadas de diferentes órdenes de las componentes de \mathbf{M} son términos cuadráticos respecto de las derivadas primas (no pueden haber términos lineales en virtud de la simetría respecto del cambio de sentido del tiempo). Además, debido a que su origen son las interacciones de intercambio, $U_{\text{no-ho}}$ no puede depender de la dirección absoluta de \mathbf{M} en un punto dado del cristal. La expresión más general que satisface estas condiciones es

$$U_{\text{no-ho}} = \frac{1}{2} \alpha_{ik} \frac{\partial M_i}{\partial x_k} \frac{\partial M_i}{\partial x_k}, \quad (39.1)$$

donde α_{ik} es un tensor simétrico. Esta forma cuadrática (respecto de las derivadas) debe ser, además, definida positiva. En un cristal uníáxico el tensor α_{ik} posee dos componentes independientes y la energía de no-homogeneidad tiene la forma

$$U_{\text{no-ho}} = \frac{1}{2} \alpha_1 \left[\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \alpha_2 \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \right)^2, \quad (39.2)$$

donde α_1 y α_2 son positivos. En un cristal cúbico se tiene, además, $\alpha_1 = \alpha_2$.

Respecto de la expresión (39.1) hay que hacer la siguiente observación. Un sentido termodinámico real lo posee no la propia magnitud $U_{\text{no-ho}}$, sino su integral extendida al volumen del cuerpo. Por esto no es necesario incluir en $U_{\text{no-ho}}$ los términos que contienen los productos de las componentes de \mathbf{M} por sus derivadas segundas respecto de las coordenadas, a pesar de que tales términos son también formalmente del mismo orden de magnitud que (39.1). La razón de ello estriba en que, al integrar en el volumen considerado, se transforman en productos de derivadas primas, es decir, quedan incluidos en la misma expresión (39.1)*.

Consideremos, por ejemplo, la frontera de separación entre dominios en un cristal uníáxico, suponiendo que el vector \mathbf{M} es paralelo (o antiparalelo) al eje de imanación fácil (eje z); así ocurre, en particular, cuando no existe campo magnético exterior.

La estructura de la capa de transición viene determinada por la condición de que sea mínima su energía libre total**. De un lado, la energía de intercambio tiende a aumentar el grosor de la capa (es decir, a que la dirección de \mathbf{M} en ella varie de manera más lenta). En sentido opuesto, en cambio, actúa la energía de anisotropía, puesto que cualquier desviación de \mathbf{M} respecto de la dirección de imanación fácil la aumenta.

* La simetría del cristal puede admitir la existencia de términos que contienen productos de las derivadas $\partial M_i / \partial x_i$ por las propias componentes M_i . Sin embargo, tales términos, al integrar en el volumen del cuerpo, darían lugar a expresiones que dependen solamente de las propiedades de su superficie.

** Aquí es más correcto hablar de energía libre total, y no de potencial termodinámico total, teniendo en cuenta la posibilidad de una deformación notablemente no homogénea en la capa.

Elijamos el eje x de modo que sea perpendicular al plano de la capa; la dirección de \mathbf{M} depende solamente de esta coordenada. La rotación del vector \mathbf{M} a través de la capa debe producirse en el plano yz , es decir, en todos los puntos $M_x = 0$. Esto se ve fácilmente en virtud del simple razonamiento que sigue. Las energías de no-homogeneidad y de anisotropía no dependen en modo alguno de cuál sea el plano en que tiene lugar la rotación de la imanación. Pero si existiera una componente M_x diferente de cero, ello conduciría inevitablemente a la aparición de un campo magnético, lo que, claro está, sería desventajoso desde el punto de vista termodinámico, pues supondría una energía magnética suplementaria debida a aquél. En efecto, en el volumen ocupado por los dominios es $M_x = 0$, y si en la capa de transición fuese $M_x \neq 0$, también sería diferente de cero la $\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{\partial M_x}{\partial x}$; pero dado que $\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \mathbf{H} + 4\pi \operatorname{div} \mathbf{M} = 0$, junto con $\operatorname{div} \mathbf{M} \neq 0$ debiera ser también $\operatorname{div} \mathbf{H} \neq 0$, es decir, se tendría $\mathbf{H} \neq 0$.

Sea θ el ángulo formado por \mathbf{M} y el eje z . Entonces las componentes de \mathbf{M} serán:

$$M_x = 0, \quad M_y = M \sin \theta, \quad M_z = M \cos \theta.$$

La suma de las energías de no-homogeneidad y de anisotropía viene dada por la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\frac{1}{2}\alpha_1(M_y'^2 + M_z'^2) + \frac{1}{2}\beta M_y^2] dx = \frac{1}{2}M^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1\theta'^2 + \beta \sin^2 \theta) dx \quad (39.3)$$

(el símbolo $'$) representa la derivación respecto de x). Los demás términos en la energía libre son independientes de la estructura de la capa y, por consiguiente, cabe prescindir de ellos aquí. Para determinar la función $\theta(x)$ que hace mínima esta integral, escribamos la ecuación de Euler correspondiente

$$\alpha_1\theta'' - \beta \sin \theta \cos \theta = 0,$$

de la cual

$$\theta'^2 - (\beta/\alpha_1) \sin^2 \theta = \text{const}$$

es una integral primera.

Suponiendo que el grosor de la capa de transición es pequeño comparado con la anchura de los propios dominios, podemos escribir las condiciones de contorno para esta ecuación en la forma:

$$\begin{aligned} \theta &= 0 \text{ para } x = -\infty, & \theta &= \pi \text{ para } x = +\infty, \\ \theta' &= 0 \text{ para } x = \pm \infty & (\text{para } \theta = 0 \text{ o } \pi). \end{aligned} \quad (39.4)$$

Estas expresan el hecho de que los dominios contiguos están imanados en sentidos opuestos. Se tiene entonces $\text{const} = 0$, e integrando la ecuación

$$\theta'^2 = (\beta/\alpha_1) \sin^2 \theta,$$

se obtiene

$$\cos \theta = - \operatorname{tgh} [x\sqrt{(\beta/\alpha_1)}], \quad (39.5)$$

con lo que queda determinado cómo varía la dirección de imanación en la capa de transición. Su «anchura» es $\delta \sim \sqrt{\alpha_1/\beta}$.

Substituyendo (39.5) en (39.3), obtendremos

$$\beta M^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^2[x\sqrt{(\beta/\alpha_1)}]},$$

o bien, efectuando la integración,

$$2M^2\sqrt{(\alpha_1\beta)}. \quad (39.6)$$

Si se considera la frontera de separación entre dominios como una superficie geométrica, la magnitud (39.6) es la «tensión superficial» que hay que atribuirle para tener en cuenta la energía necesaria en la formación de dicha frontera.

La forma y el tamaño de los dominios en equilibrio termodinámico se determinan por la condición de que sea mínimo el potencial termodinámico total. Tanto una como otro dependen considerablemente de la forma y de las dimensiones concretas del cuerpo. En el caso más simple de una substancia ferromagnética cuya forma es la de una placa planoparalela, los dominios pueden adoptar, en principio, la forma de capas paralelas o de «filamentos» que atraviesan el cuerpo desde una de sus caras hasta la otra. Para concretar, en lo que sigue nos referiremos a capas*.

La aparición de cada nueva frontera entre dominios conduce a un aumento de la energía total de «tensión superficial». Este factor, por consiguiente, tiende a disminuir el número de dominios, es decir, a aumentar su grosor.

En sentido opuesto actúa la energía adicional que se produce cerca de la superficie exterior del cuerpo con la que están en contacto los dominios. En el cuerpo, el campo magnético $\mathbf{H} = 0$; igual a cero es también la energía de anisotropía, puesto que el vector \mathbf{M} se encuentra en las direcciones de imanación fácil. Pero cerca de la superficie cambia la situación.

En el caso límite en que el coeficiente β de la energía de anisotropía es grande, las capas deberán aparecer hacia la superficie del cuerpo sin que varien las direcciones de \mathbf{M} (fig. 21 a; en la figura se supone, para concretar, que la superficie del cuerpo es perpendicular a la dirección de imanación fácil). Pero entonces cerca de la superficie existe un campo magnético que penetra en el espacio en torno y hacia el interior del cuerpo, hasta una distancia que es del orden de magnitud del grosor de las capas a .

Por el contrario, en el caso opuesto de valores de β pequeños, resulta más ventajosa una distribución de la imanación en la que se excluye la aparición de un campo magnético y \mathbf{M} se desvía de la dirección de imanación fácil. Cuando $\mathbf{H} = 0$ debe ser $\operatorname{div} \mathbf{B} = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{M} = 0$ y sobre todas las fronteras de los dominios, al igual que en la superficie libre del cuerpo, la componente M_n debe ser continua.

* La estructura estratificada de los dominios se presenta, al parecer, en la mayoría de los casos.

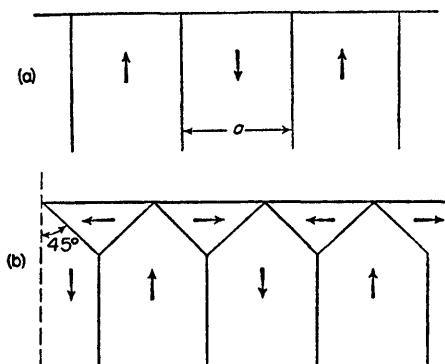


FIG. 21

Esto se consigue mediante la formación de «dominios de cierre» cuya sección es triangular (fig. 21 b) y en los cuales la imanación resulta paralela a la superficie del cuerpo. El volumen total de estas regiones, y con él también la energía de anisotropía en ellas, es proporcional al grosor de las capas a .

Así pues, en todos los casos la salida de los dominios a la superficie conduce a la aparición de una energía suplementaria tanto mayor cuanto mayor es la anchura de los dominios. Por ello, este efecto actúa en el sentido de «adelgazar» los dominios.

La anchura real de los dominios viene determinada por el juego de estas dos tendencias opuestas. Supongamos, por ejemplo, que los dominios (en una placa) tienen la forma de capas planoparalelas de grosor constante. El número de dominios es proporcional a $1/a$ y la energía de tensión superficial sobre la superficie de separación entre ellos es proporcional a su área total, es decir, $\sim L/a$, donde L es la longitud del cuerpo en la dirección de los dominios (es decir, el grosor de la placa). La «energía de salida» de los dominios a la superficie de la placa, en cambio, es proporcional a a . La suma de estas dos energías, como función de a , es mínima para un cierto valor de a proporcional a \sqrt{L} .

Por lo tanto, el grosor de los dominios crece al aumentar las dimensiones del cuerpo. Pero la ley cuantitativa $a \sim L^{1/2}$ de este crecimiento, ligada con la hipótesis de que sea constante el grosor de los dominios, no puede ser correcta, evidentemente, para valores arbitrarios de L . La razón de ello estriba en que el grosor de los dominios al salir a la superficie del cuerpo no puede superar un cierto valor límite a_k que depende de las propiedades de la propia substancia ferromagnética, pero no de la forma y del tamaño del cuerpo como un todo. Aquel valor viene determinado por el momento en que, a medida que aumenta a , pasa a ser termodinámicamente favorable el «desdoblamiento» del dominio cerca de la superficie del cuerpo a una profundidad $\sim a$. Dicho momento se presenta inevitablemente, puesto que la «energía de salida» de un dominio crece como a^2 y la energía suplementaria de tensión superficial, que aparece al descomponerse el dominio, tan sólo como a .

Llegamos así a la conclusión de que a medida que aumentan las dimensiones del cuerpo, y con ellas también el grosor de los dominios, debe tener lugar una «ramificación» progresiva de los dominios al acercarse a la superficie del cuerpo (E. M. Lifshitz, 1944). No nos entretendremos en seguir estudiando aquí las posibilidades que se presentan entonces y que no han sido explicadas todavía*.

En cambio, a medida que disminuyen las dimensiones del cuerpo, la formación de dominios llega a ser en último término por completo desventajosa termodinámicamente, con lo cual las partículas ferromagnéticas suficientemente pequeñas constituyen formaciones de «un solo dominio» homogéneamente imanadas. El criterio que da sus dimensiones L se obtiene comparando la energía magnética de una partícula imanada homogéneamente con la «energía de no-homogeneidad» que aparecería si se diera una falta considerable de homogeneidad en la distribución de la imanación en su volumen. La primera es del orden de magnitud de M^2V , y la segunda del de aM^2V/L^2 . Por ello, la condición de que exista un solo dominio es

$$L^2 \ll a. \quad (39.7)$$

El potencial termodinámico de una partícula imanada homogéneamente en ausencia de un campo magnético exterior se halla haciendo en la fórmula

$$\tilde{g} = \int \left[\tilde{\Phi} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi} - \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{M} \right] dV$$

(cf. (31.7)) $\mathbf{H} = 0$ y substituyendo en vez de $\tilde{\Phi}$ la suma de la expresión (36.1) y de la energía de anisotropía U_{aniso} :

$$\tilde{g} = VU_{\text{aniso}} - \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \int \mathbf{H} dV \quad (39.8)$$

(hemos prescindido de la constante \tilde{g}_0 que carece de importancia). Dado el carácter lineal de la relación entre \mathbf{M} y \mathbf{H} , el segundo término es una expresión cuadrática en las componentes de \mathbf{M} :

$$\tilde{g} = VU_{\text{aniso}} + \frac{1}{2} Va_{ik}M_iM_k, \quad (39.9)$$

donde el tensor simétrico a_{ik} depende solamente de la forma de la partícula. Así, si la forma de ésta es la de un elipsoide, \mathbf{H} es constante en todo su volumen y está ligado con \mathbf{M} (cuando $\mathbf{H} = 0$) por la relación

$$H_i + n_{ik}(B_k - H_k) = H_i + 4\pi n_{ik}M_k = 0$$

(cf. (8.10)). Por consiguiente, en este caso las magnitudes a_{ik} se expresan en función de las componentes del tensor de los coeficientes de desimanación de acuerdo con

$$a_{ik} = 4\pi n_{ik}.$$

* Véase S. V. Vonsovskii, Ia. S. Shour, Ferromagnetizm (Ferromagnetismo) Moscou, 1948; C. Kittel, Reviews of Modern Physics. 21, 541, 1949; E. M. Lifshitz, ZhETF, 15, 97, 1945.

La dirección de imanación de una partícula en un campo magnético exterior \mathbf{H} se determina por la condición de que sea mínimo $\tilde{\varphi}$, al que hay que añadir ahora el término $-V\mathbf{H} \cdot \mathbf{M}$. Para un cristal cúbico basta escribir

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{2}Va_{ik}M_iM_k - V\mathbf{H} \cdot \mathbf{M}, \quad (39.10)$$

sin tener en cuenta la energía de anisotropía. En los cuerpos ferromagnéticos uniáxicos (o biáxicos) esta última, en cambio, es una cantidad del mismo orden que los restantes términos. Escribiéndola en la forma (37.1), tenemos:

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{2}V(a_{ik} + \beta_{ik})M_iM_k - V\mathbf{H} \cdot \mathbf{M}. \quad (39.11)$$

El problema así planteado coincide, desde el punto de vista matemático, con el estudiado en el § 37 acerca de la dependencia del valor local de \mathbf{M} respecto del campo local \mathbf{H} , problema del que difiere tan sólo en la substitución de \mathbf{H} por \mathbf{H} y de β_{ik} por a_{ik} o bien por $a_{ik} + \beta_{ik}$.

PROBLEMAS

1. Determinar el coeficiente de «tensión superficial» en la frontera entre dominios para un cristal del sistema cúbico. La superficie de separación forma un ángulo χ con el plano (100) (plano yz), y los dominios están imanados a lo largo del eje [001] de imanación fácil (eje z).

Solución. Junto con los ejes cristalográficos x, y, z , introduzcamos un sistema de coordenadas x', y', z' tal que los ejes z y z' coincidan y los planos $y'z'$ e yz formen un ángulo igual a χ . La necesidad de evitar la aparición de un campo magnético notable tiende a mantener (como en un cristal uniáxico) el vector \mathbf{M} en el plano $y'z'$ en la capa de transición. Sin embargo, la existencia de la anisotropía magnética en el plano $x'y'$ aparta un poco a \mathbf{M} del plano $y'z'$. Con todo, teniendo en cuenta que la energía de anisotropía en un cristal cúbico es pequeña, la componente $M_{x'}$ será a su vez pequeña y cabe prescindir de ella conservando una aproximación suficiente. Entonces

$$M_{x'} = 0, M_{y'} = M \operatorname{sen} \theta, M_{z'} = M \cos \theta,$$

(θ es el ángulo formado por \mathbf{M} y el eje z) o bien, en el sistema x, y, z ,

$$M_x = M \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \chi, M_y = M \operatorname{sen} \theta \cos \chi, M_z = M \cos \theta.$$

Para la suma de las energías de no-homogeneidad y anisotropía en la capa de transición obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2}\alpha M^2 \left(\frac{d\theta}{dx'} \right)^2 + \beta M^4 (\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \chi + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^4 \theta \operatorname{sen}^2 2\chi) \right\} dx'. \quad (1)$$

Determinando el mínimo de esta integral con las mismas condiciones de contorno (39.4), se obtendrá

$$\operatorname{senh} x' \sqrt{(2\beta M^2/\alpha)} = - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{sen} 2\chi}. \quad (2)$$

Substituyendo en (1) y efectuando la integración, resulta para la tensión superficial buscada el valor

$$M^3 \sqrt{(2\alpha\beta)} \left\{ 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 2\chi}{2\sqrt{(4 - \operatorname{sen}^2 2\chi)}} \operatorname{arcosh} \frac{2}{|\operatorname{sen} 2\chi|} \right\}. \quad (3)$$

La fórmula (3) es aplicable cualquiera que sea el valor del ángulo χ . Pero la ecuación (2) relativa

a la estructura de la capa de transición deja de ser aplicable cuando $\chi \cong 0$ o $\frac{\pi}{2}$. En este caso, una anchura no nula de la capa de transición se obtiene solamente cuando en ella se tiene en cuenta la magnetostricción.

2. Determinar la energía del campo magnético cerca de la superficie de un cuerpo ferromagnético en el cual los dominios planoparalelos perpendiculares a la misma salen sin que cambie la dirección de su imanación (fig. 21 a).

Solución. El problema de determinar el campo magnético cerca de una superficie de tales características es equivalente al problema electrostático de determinar el campo creado por un plano dividido en bandas cargadas positiva y negativamente con una densidad superficial $\sigma = \pm M$.

Tomemos como plano $z = 0$ la superficie de dicho cuerpo y elijamos el eje x en una dirección perpendicular al plano de los dominios. La «densidad superficial de carga» $\sigma(x)$ es una función periódica de período $2a$ (a es la anchura de un dominio) igual en uno de los períodos a

$$\sigma = -M \text{ para } -a < x < 0, \sigma = +M \text{ para } 0 < x < a.$$

Su desarrollo en serie de Fourier es

$$\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a}, \quad c_n = 4M/(2n+1)\pi.$$

El potencial del campo satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0;$$

tomemos para él una expresión de la forma

$$\phi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a} e^{\mp(2n+1)\pi z/a}$$

(los dos signos en el exponente corresponden a los semiespacios $z > 0$ y $z < 0$). Los coeficientes b_n se determinan por la condición de contorno

$$-[\partial \phi / \partial z]_{z=0+} + [\partial \phi / \partial z]_{z=0-} = 4\pi \sigma,$$

de donde

$$b_n = 2ac_n/(2n+1).$$

La energía del campo se puede calcular como integral $\frac{1}{2} \int \sigma \phi \, df$ extendida a la «superficie cargada». Refiriendo la energía a 1 cm² de superficie, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} [\sigma \phi]_{z=0} \, dx &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} c_n b_n \\ &= \frac{8aM^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}. \end{aligned}$$

La suma que aquí aparece es igual a 1,052, por lo que dicha energía es

$$0,852 aM^2.$$

§ 40. Punto de Curie antiferromagnético

La transición de un cuerpo del estado antiferromagnético al estado paramagnético se produce de ordinario, como también en los cuerpos ferromagnéticos, en un cambio de fase de segunda especie. Dado que no existe magnetización espontánea ni en el estado antiferromagnético ni en el paramagnético, la variación de las propiedades magnéticas macroscópicas de la materia al pasar por el punto de Curie antiferromagnético afecta solamente a su susceptibilidad magnética. De acuerdo con las propiedades generales de los cambios de estado de segunda especie, las propias componentes del tensor μ_{ik} son continuas en el punto de transición, mientras que sus derivadas primeras respecto de la temperatura experimentan un salto.

Un estudio cuantitativo de las transiciones antiferromagnéticas debe efectuarse acudiendo a la teoría general de los cambios de fase de segunda especie. Los parámetros respecto de los cuales hay que desarrollar el potencial termodinámico cerca del punto de transición son, en este caso (según sea la simetría magnética concreta de la red), ciertas combinaciones lineales de los momentos magnéticos medios m_1, m_2, \dots en los diferentes nudos de la celda elemental. Al acercarnos al punto de transición, todos estos parámetros tienden, como siempre, a cero proporcionalmente a $1/\Theta - T$.

El potencial termodinámico de una substancia antiferromagnética puede tener términos de diferente origen vinculados a las interacciones de los momentos magnéticos, tanto las de intercambio como las «relativistas» (cf. el principio del § 36). Los primeros contienen aquellas combinaciones de los momentos m_1, m_2, \dots que sólo dependen de su orientación relativa, pero no de la orientación general respecto de la red cristalográfica. En cambio, los segundos dependen de la dirección cristalográfica de los momentos, es decir, conducen a una anisotropía magnética del cristal.

Como en el caso de los cuerpos ferromagnéticos, la fuerte interacción de intercambio es el factor fundamental que establece una distribución ordenada de los momentos magnéticos en una substancia antiferromagnética. Las interacciones relativistas, por su parte, conducen a una anisotropía cristalográfica de sus propiedades magnéticas.

Existen determinados tipos de simetría magnética que permiten la existencia del ferromagnetismo pero en los que, a la vez, el carácter de la interacción de intercambio es tal que no conduce por si sola al ferromagnetismo. En estos casos la magnetización espontánea se produce únicamente como resultado de las interacciones relativistas y es, en consecuencia, muy pequeña. Un cuerpo de estas características es un cuerpo antiferromagnético en el que, sin embargo, la distribución de momentos magnéticos difiere ligeramente de la correspondiente a un antiferromagnético, de tal manera que en determinada dirección los momentos magnéticos no se compensan totalmente (I. E. Dzialoshinskiĭ, 1957)*. La razón del valor del «mo-

* Véase ZhETF, 32, 1547, 1957.

mento ferromagnético» al valor que tendría en el caso de una ordenación ferromagnética pura es del orden de magnitud de la razón de la densidad de energía relativista a la de intercambio ($\sim 10^{-3}\text{-}10^{-5}$).

En campos magnéticos suficientemente intensos, la estructura antiferromagnética de un cristal no puede ser termodinámicamente estable; en este caso, la orientación paralela de todos los momentos a lo largo del campo es ventajosa desde el punto de vista energético. Este cambio de orientación está ligado de ordinario con una variación (disminución) de la celda elemental de estructura magnética de la red y, como en cualquier cambio de las propiedades de simetría, puede ocurrir solamente en un determinado punto de cambio de fase; en la mayor parte de casos, este punto será un punto de transición de segunda especie. El «campo crítico» H_{cr} que destruye el antiferromagnetismo es una función de la temperatura que se anula para $T = \Theta$, donde Θ es el punto de transición en ausencia del campo. Así pues, en el diagrama TH el dominio de existencia de la fase antiferromagnética está limitado por una determinada curva.

CAPÍTULO VI

SUPERCONDUCTIBILIDAD

§ 41. Propiedades magnéticas de los superconductores

Muchos metales a temperaturas próximas al cero absoluto pasan a un estado especial cuya propiedad más notable (descubierta por Kamerlingh Onnes en 1911) es la llamada *superconductibilidad*, que consiste en la desaparición total de resistencia eléctrica a una corriente continua. La aparición de la superconductibilidad se produce a una temperatura determinada para cada metal, a saber, en el llamado *punto de transición a la superconductibilidad*.

La ausencia de resistencia eléctrica, sin embargo, no es en realidad una propiedad fundamental de un superconductor. Los cambios más profundos al pasar al estado superconductor se producen en las propiedades magnéticas del metal; las variaciones en las propiedades eléctricas son, conforme veremos, consecuencias inevitables de estos cambios.

Las propiedades magnéticas de un metal superconductor se pueden describir de la siguiente manera. Un campo magnético nunca penetra en el interior de un superconductor; dado que la intensidad promedia del campo magnético en el medio es, por definición, la inducción magnética \mathbf{B} , se puede decir también que en el interior de un superconductor se tiene siempre

$$\mathbf{B} = 0 \quad (41.1)$$

(W. Meissner y R. Ochsenfeld, 1933). Esta propiedad se presenta con independencia de en qué condiciones tuvo lugar, de hecho, la transición al estado superconductor. Así, si el enfriamiento de la muestra se produce en un campo magnético, en el momento de la transición las líneas de fuerza magnéticas «son expulsadas» del cuerpo*.

Hay que subrayar, sin embargo, que la igualdad $\mathbf{B} = 0$ no corresponde a una fina capa superficial del cuerpo. Muestra la experiencia que el campo magnético

* Debemos señalar que solamente los superconductores «puros», es decir, los elementos metálicos y los compuestos químicos que los contienen en ciertas proporciones, presentan estas propiedades. Estudiaremos únicamente substancias de este tipo. En las aleaciones superconductoras, el efecto Meissner no es completo y el campo magnético puede penetrar en el superconductor, aunque no hay todavía ninguna resistencia eléctrica.

La demostración que sigue según la cual la anulación de \mathbf{B} implica que la resistencia sea cero debe tomarse como prueba de que esta ecuación es una condición suficiente, pero no necesaria, para que se anule la resistencia.

penetra en el superconductor hasta una determinada profundidad, que es grande comparada con las distancias interatómicas (frecuentemente del orden de 10^{-5} cm) y depende del metal de que se trate y de la temperatura. Por esta misma razón, la igualdad $\mathbf{B} = 0$ no se cumple en láminas metálicas delgadas o en las partículas coloidales, cuyo espesor o dimensiones es del orden de magnitud de la «profundidad de penetración».

En lo que sigue consideraremos solamente superconductores de dimensiones suficientemente grandes como para que se pueda prescindir del hecho de que el campo magnético penetra en una delgada capa superficial.

Conforme sabemos, sobre la frontera común a dos medios cualesquiera la componente normal de la inducción debe ser continua (esta condición es consecuencia de la ecuación $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, que siempre se cumple). Dado que dentro del superconductor se tiene $\mathbf{B} = 0$, sobre su superficie la componente normal del campo exterior debe ser también igual a cero, es decir, el campo fuera de un superconductor es siempre tangente a su superficie; las líneas de fuerza magnéticas se ciñen al superconductor.

Teniendo en cuenta esta circunstancia es fácil hallar las fuerzas que actúan sobre un superconductor que se encuentra en un campo magnético. De manera análoga a como procedimos en el § 5 para un conductor ordinario en un campo eléctrico, calcularemos la fuerza (referida a 1 cm^2 de superficie) mediante la expresión $\sigma_{ik}n_k$, donde

$$\sigma_{ik} = (H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik}) / 4\pi$$

es el tensor de Maxwell de tensiones para el campo magnético en el vacío. Dado que, en el presente caso, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_e = 0$ (\mathbf{H}_e es el campo fuera del cuerpo en su superficie), obtendremos

$$\mathbf{F}_s = -H_e^2 \mathbf{n} / 8\pi, \quad (41.2)$$

es decir, sobre la superficie del cuerpo actúa una presión cuyo valor es igual a la densidad de energía del campo.

Según la ecuación (27.4)

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi \rho \overline{\mathbf{v}} / c, \quad (41.3)$$

y de la igualdad $\mathbf{B} = 0$ se sigue que dentro del superconductor la densidad media de corriente es también igual a cero en cualquier punto. En otras palabras, en un superconductor es imposible que existan corrientes macroscópicas volumétricas. En relación con esto haremos notar que en un superconductor carece de sentido separar de $\overline{\rho \mathbf{v}}$ la corriente de conducción como se hace en el caso de los conductores ordinarios. Por esta misma razón carece de sentido físico el introducir en la teoría considerada la imanación \mathbf{M} , y con ella también el vector \mathbf{H} .

Así pues, cualquier corriente eléctrica que circule en un superconductor es una corriente superficial. La densidad superficial de corriente g se determina, según (27.14), por la discontinuidad de la componente tangencial de la inducción en la

superficie del cuerpo. Dado que dentro de un superconductor es $\mathbf{B} = 0$, mientras que fuera de él \mathbf{B} y \mathbf{H} coinciden, se tendrá

$$\mathbf{g} = c\mathbf{n} \times \mathbf{H}_e / 4\pi. \quad (41.4)$$

Por si sola, la existencia de corrientes superficiales no constituye una peculiaridad característica de los superconductores únicamente. Tales corrientes aparecen también en un cuerpo imanado cualquiera, donde su densidad es

$$\mathbf{g} = c\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_e - \mathbf{B}) / 4\pi.$$

Dado que sobre la superficie de un cuerpo normal (no superconductor) son continuas las componentes tangenciales del vector $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$, tenemos $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_e = \frac{1}{\mu}(\mathbf{n} \times \mathbf{B})$, de modo que la expresión para \mathbf{g} puede escribirse en la forma

$$\mathbf{g} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{n} \times \mathbf{B}) \frac{1-\mu}{\mu}. \quad (41.5)$$

La diferencia principal entre los cuerpos superconductores y los ordinarios se pone de manifiesto, sin embargo, al considerar la corriente total que atraviesa una sección transversal del cuerpo. En un cuerpo no superconductor las corrientes superficiales se compensan siempre entre sí, de modo que la corriente total es nula. Esta compensación queda asegurada por la condición (41.5) que liga la densidad de corriente \mathbf{g} con la inducción magnética dentro del cuerpo y, mediante ella, las corrientes \mathbf{g} en diferentes puntos de la superficie. En los superconductores la condición (41.5) pierde su sentido. En efecto, el paso de un cuerpo ordinario con una permeabilidad magnética μ a un superconductor significa, formalmente, que hay que hacer a la vez $B \rightarrow 0$ y $\mu \rightarrow 0$. Pero en estas condiciones, el segundo miembro de la igualdad (41.5) pasa a ser indeterminado, con lo cual no existe en esencia ninguna condición que limite los valores posibles de la corriente.

Llegamos así al importante resultado de que las corrientes que fluyen por la superficie de un superconductor pueden dar lugar a una corriente total no nula que circule por la misma. Naturalmente, esto es sólo posible en cuerpos multiplemente conexos (por ejemplo, en un anillo) o bien en un superconductor simplemente conexo que es parte de un circuito cerrado con la fuente de fuerza electromotriz necesaria para mantener la corriente en las partes no superconductoras del circuito.

Es muy importante que la circulación estacionaria de una corriente total por un superconductor resulta ser posible sin que exista campo eléctrico. Esto significa que no va acompañada de disipación de energía, para compensar la cual sería necesario el trabajo de un campo exterior. Esta propiedad de un superconductor puede describirse también diciendo que no existe en él resistencia eléctrica, que resulta ser, por consiguiente, una consecuencia necesaria de sus propiedades magnéticas.

§ 42. Corrientes en superconductores

Consideremos con mayor detenimiento algunas propiedades de los superconductores dependientes de su forma.

Si el superconductor es un cuerpo simplemente conexo, cuando no existe un campo magnético exterior es absolutamente imposible que existan en él corrientes superficiales estacionarias.

Es fácil convencerse de que así es por las siguientes consideraciones. Las corrientes superficiales crearían en el espacio que rodea al cuerpo un campo magnético constante nulo en el infinito. Como cualquier campo magnético constante en el vacío, este campo derivaría de un potencial y, además, en virtud de las condiciones de contorno la derivada normal $\partial\phi/\partial n$ del potencial debería anularse sobre la superficie del superconductor. Pero por la teoría del potencial se sabe que si $\partial\phi/\partial n = 0$ sobre la superficie de un cuerpo simplemente conexo y en el infinito, se tendrá $\phi = 0$ en todo el espacio (fuera del cuerpo). En consecuencia, un campo magnético de estas características no puede existir, y con él tampoco las corrientes superficiales.

En cambio, un campo magnético exterior induce corrientes sobre la superficie de un superconductor simplemente conexo, lo que se puede interpretar como aparición de un determinado momento magnético en el cuerpo como un todo. Es fácil calcular esta «imanación» para un superconductor en forma de elipsoide*.

Sea \mathbf{H} un campo exterior paralelo a uno de los ejes principales del elipsoide. Para el campo magnético dentro de un elipsoide no superconductor se cumple la igualdad

$$(1-n)\mathbf{H} + n\mathbf{B} = \mathbf{H}$$

donde n es el coeficiente de desimanación a lo largo del eje dado (véase (8.7)). En un superconductor la «intensidad» \mathbf{H} carece de sentido físico, conforme ya se indicó, y junto con ella pierde también su significación ordinaria la imanación

$$\mathbf{M} = (\mathbf{B} - \mathbf{H})/4\pi.$$

Con todo, en el presente caso conviene introducir \mathbf{H} y \mathbf{M} de manera puramente formal como magnitudes auxiliares que sirven para calcular el momento magnético total $\mathcal{M} = MV$ (V es el volumen del elipsoide), que conserva su significado físico literal. Haciendo para el elipsoide superconductor $\mathbf{B} = 0$, se encuentra

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}/(1-n), \quad (42.1)$$

y, por consiguiente,

$$\mathcal{M} = -V\mathbf{H}/4\pi = -V\mathbf{H}/4\pi(1-n). \quad (42.2)$$

En particular, para un largo cilindro en un campo longitudinal es $n = 0$, de modo

* En todo este párrafo se supone que el campo magnético no supera aquellos valores para los que se produce la desaparición del estado superconductor (véase, § 43).

que $\mathbf{H} = \mathfrak{H}$ y $\mathcal{M} = -V\mathfrak{H}/4\pi$ (*). Estos valores de \mathcal{M} son los mismos que se tendrían si el cuerpo poseyera una susceptibilidad diamagnética de volumen $-1/4\pi$.

El campo magnético H_e fuera del elipsoide sobre la superficie del mismo es tangente a ésta en todos sus puntos, y en consecuencia, su valor se determina directamente por la condición de continuidad de las componentes tangenciales de \mathbf{H} . Dentro del elipsoide se tiene $\mathbf{H} = \mathfrak{H}/(1-n)$; proyectando este vector sobre el plano tangente, obtenemos

$$(1-n)H_e = \mathfrak{H} \operatorname{sen} \theta, \quad (42.3)$$

donde θ es el ángulo formado por el campo exterior \mathfrak{H} y la normal a la superficie del elipsoide en el punto dado. El mayor valor lo toma H_e sobre el ecuador del elipsoide, en el cual es igual a $\mathfrak{H}/(1-n)$.

Insistiremos una vez más en que entre las corrientes que determinan la «imanación» de un superconductor y las que crean una corriente total en él no hay ninguna diferencia esencial: su naturaleza física es la misma. Esta importante circunstancia permite, en particular, determinar inmediatamente los coeficientes giromagnéticos de un superconductor cualquiera. En efecto, la densidad de impulso de las partículas (los electrones) que crean las corrientes «imanadoras», difiere de la densidad de estas corrientes tan sólo en el factor m/e (e y m son la carga y la masa del electrón). Con vistas a determinar los coeficientes giromagnéticos (véase (35.3)) de aquí se sigue sin más que en un superconductor se tiene siempre

$$g_{ik} = \delta_{ik}.$$

Pasemos a los superconductores múltiplemente conexos. Sus propiedades difieren de las propiedades de los cuerpos simplemente conexos, sobre todo porque para ellos no vale la conclusión a que llegamos acerca de la imposibilidad de un flujo estacionario de corrientes superficiales cuando no existe un campo magnético exterior. Además, las corrientes superficiales no tienen ahora por qué compensarse mutuamente y pueden conducir a un flujo estacionario en el cuerpo de una corriente total de «superconducción» incluso cuando no existen fuerzas electromotrices aplicadas desde el exterior.

Consideremos un cuerpo doblemente conexo (un anillo) sin que exista campo magnético exterior y veamos cómo su estado queda por completo determinado dando la corriente total que fluye por él, J . También el problema de determinar el campo creado por el anillo puede resolverse como problema de teoría del potencial, salvo que el potencial ϕ será ahora una función multivalente que cambia en $4\pi J/c$ al recorrer un camino cerrado cualquiera que atraviese la abertura del anillo (cf. § 29). Para plantear el problema de manera matemáticamente correcta, hay que efectuar un «corte» en el espacio por una superficie cualquiera que cierre la abertura del

* Estas relaciones para un cilindro son consecuencia inmediata de la condición de continuidad de \mathbf{H} y, por ello, valen para un cilindro cuya sección transversal tenga una forma cualquiera (no necesariamente circular).

anillo. El problema consiste entonces en resolver la ecuación de Laplace con la condición de contorno $\partial\phi/\partial n = 0$ sobre la superficie del anillo, $\phi = 0$ en el infinito y $\phi_2 - \phi_1 = 4\pi J/c$ sobre la superficie del corte, donde ϕ_1 y ϕ_2 son los valores del potencial en una y otra cara de la misma. Este problema, como se sabe por teoría del potencial, posee una solución única (independiente de la forma de la superficie de corte elegida). Ahora bien, la distribución del campo cerca de la superficie del anillo permite determinar a su vez únicamente la distribución de las corrientes superficiales en él.

Junto con la distribución de las corrientes pasa a ser una cantidad bien determinada el coeficiente de autoinducción del anillo superconductor. Desde este punto de vista, se tiene una diferencia esencial respecto de los conductores ordinarios, en los que la distribución de corrientes, y con ella también el valor exacto de la autoinductancia, depende del procedimiento utilizado para excitar la corriente (§ 33) *.

En el § 32 se introdujo el concepto de flujo magnético Φ a través de un circuito conductor lineal y se demostró que $\Phi = LJ/c$, donde L es la autoinducción del conductor. En el caso de un anillo superconductor, en cambio, el concepto de flujo magnético tiene también sentido cualquiera que sea el grosor del anillo, es decir, éste no tiene por qué ser pequeño. En efecto, en virtud del carácter tangencial del campo magnético su flujo a través de una parte cualquiera de superficie del propio anillo es igual a cero; en consecuencia, el valor del flujo magnético a través de una superficie que cierra la abertura del anillo superconductor no depende de la elección de esta superficie.

Además, sigue valiendo también la fórmula

$$\Phi = LJ/c \quad (42.4)$$

con la autoinductancia L determinada, como antes, por la energía total del campo magnético de la corriente. La energía total del campo magnético del superconductor viene dada por la integral $\int \frac{H^2}{8\pi} dV$ extendida a todo el interior del cuerpo. Efectuando, como se ha indicado más arriba, un «corte» del espacio por una cierta superficie C , introduciremos el potencial del campo y se escribirá

$$\begin{aligned} \int H^2 dV/8\pi &= - \int \mathbf{H} \cdot \nabla \phi dV/8\pi \\ &= \int \phi \operatorname{div} \mathbf{H} dV/8\pi - \oint H_n \phi df/8\pi. \end{aligned}$$

* La autoinductancia de un fino anillo superconductor (de radio b), cuya sección es un círculo de radio a , coincide con la parte exterior de la autoinducción de un anillo no superconductor y viene dada por la fórmula

$$L = 4\pi b [\ln(8b/a) - 2]$$

(véase el problema 2, § 33).

V. A. Fok dio la solución exacta del problema de una corriente superconductora circular (*Phys. Zs. d. Sowjetunion* 1, 215, 1932).

La primera integral es igual a cero, ya que $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$. En cuanto a la segunda integral, ésta se extiende a una superficie infinitamente lejana, a la superficie del anillo y a ambas caras de la superficie del corte; sobre las dos primeras el integrando se anula, con lo que queda

$$\begin{aligned}\int H^2 dV/8\pi &= \oint_C H_n(\phi_2 - \phi_1) df/8\pi \\ &= (J/2c) \oint_C H_n df = J\Phi/2c,\end{aligned}$$

donde Φ es el flujo magnético a través de la superficie C . Comparando esta expresión con $LJ^2/2c^2$ (por definición de autoinductancia), obtendremos la igualdad buscada (42.4).

Si el anillo se encuentra en un campo magnético exterior, el flujo magnético total Φ es suma del flujo propio LJ/c y del flujo Φ_e del campo exterior. Una propiedad muy importante de un anillo superconductor consiste en que, para una variación arbitraria del campo exterior y de la corriente, el flujo magnético total a través del anillo se mantiene constante:

$$LJ/c + \Phi_e = \text{constante} \equiv \Phi_0. \quad (42.5)$$

Esto se sigue inmediatamente de la forma integral de la ecuación de Maxwell en el espacio exterior al cuerpo:

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f} = - \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Si se efectúa la integración sobre la superficie C que cierra la abertura del anillo, el contorno de integración en el segundo miembro de la igualdad será una línea que pasa por la superficie del mismo. Pero sobre la superficie de un superconductor la componente tangencial \mathbf{E} es igual a cero (ya que dentro de un superconductor $\mathbf{E} = 0$, y \mathbf{E}_t es continua sobre la superficie). Por ello, el primer miembro de la igualdad se anula y encontramos que $d\Phi/dt = 0$.

La ecuación (42.5) determina la variación de la corriente en el anillo correspondiente a una variación del campo exterior. Así, si el anillo se llevara al estado superconductor en un campo exterior de flujo Φ_0 , y luego este campo se desconectara, en el anillo se induciría una corriente estacionaria igual a $J = c\Phi_0/L$.

El flujo magnético en un anillo superconductor no solamente es constante cuando se varía el campo exterior, sino también para una variación cualquiera de la forma del anillo o por su desplazamiento en el espacio*. Esta situación puede describirse diciendo que las líneas de fuerza no pueden nunca atravesar la superficie de un

* La demostración de lo que aquí se afirma se sigue inmediatamente de la relación entre la fuerza electromotriz de inducción y las variaciones del flujo magnético a través del circuito cuando éste se desplaza (§ 49).

superconductor y, por ello, no pueden «escapar» de la abertura del anillo.

Los resultados expuestos se generalizan inmediatamente al caso de los cuerpos superconductores con un grado de conexión arbitrario, en particular a un conjunto cualquiera de anillos. El estado de un sistema cuyo orden de conexión sea n y en ausencia de un campo exterior está por completo determinado dando los $n-1$ valores de las corrientes totales J_a . En cuanto a la relación (42.5), su generalización es el sistema de ecuaciones

$$\sum_b L_{ab} J_b + \Phi_{e,a} = \Phi_{0,a}. \quad (42.6)$$

Estas ecuaciones valen no solamente para una variación cualquiera de un campo exterior, sino también para cambios en la forma o en la posición relativa de los cuerpos.

PROBLEMA

Determinar el momento magnético de un disco superconductor en un campo magnético perpendicular al plano del mismo*.

Solución. El problema de un superconductor en un campo magnético constante coincide formalmente con el problema de electrostática correspondiente a un dieléctrico con permitividad $\epsilon = 0$. Considerando el disco como límite de un elipsoide de rotación cuando $c \rightarrow 0$ (cf. el problema 4 del § 4) y aplicando la fórmula (8.9) con el correspondiente cambio de notación (el campo \mathfrak{H} dirigido a lo largo del eje z), obtendremos

$$\mathcal{M} = -2a^3 \mathfrak{H} / 3\pi.$$

§ 43. El campo crítico

Un superconductor cilíndrico que se encuentra en un campo magnético longitudinal posee una energía magnética adicional

$$-\frac{1}{2} \mathfrak{H} \cdot \mathcal{M} = \mathfrak{H}^2 V / 8\pi.$$

Por el contrario, en el estado normal (no superconductor) la energía total del cilindro prácticamente no variaría al conectar el campo exterior (prescindimos, aquí y en lo que sigue, del dia- o paramagnetismo de los metales no superconductores, es decir, suponemos que se tiene $\mu = 1$). Ya simplemente por esto está claro que, en campos magnéticos suficientemente intensos, el estado superconductor de un metal ha de resultar termodinámicamente menos ventajoso que el estado normal y, en consecuencia, debe tener lugar, como suele decirse, la destrucción de la superconductibilidad.

El valor de la intensidad del campo magnético longitudinal para el que desapa-

* Este problema se estudia aquí sobre todo con vistas a las aplicaciones a otro caso (véase probl. 2, § 75). Para un disco superconductor sólo cabe hablar, de hecho, de campos magnéticos muy débiles, ya que en estas condiciones se produce fácilmente la desaparición de la superconductibilidad (véase § 43).

rece la superconductibilidad en un cuerpo cilíndrico depende del metal de que se trate y también de su temperatura (y de su presión). Este valor se llama *campo crítico* (H_{cr}) y resulta ser una de las características más importantes de un superconductor*.

La destrucción de la superconductibilidad en un cilindro cuando el campo alcanza el valor crítico tiene lugar en todo el volumen, lo que se debe a la homogeneidad del campo en toda la superficie de dicho cuerpo. En cambio, en cuerpos de otra forma la desaparición de la superconductibilidad resulta ser un proceso más complicado, en el cual el volumen ocupado por la materia en estado normal crece gradualmente en todo un intervalo de valores de \mathfrak{H} (de ello hablaremos más detenidamente en el párrafo que sigue).

Así pues, a cualquier temperatura (por debajo del punto de transición) un metal puede existir tanto en el estado superconductor (s) como en el estado normal (n). Designemos por $\mathcal{F}_{s0}(V, T)$ y $\mathcal{F}_n(V, T)$ las energías libres totales del cuerpo superconductor y normal cuando no hay campo magnético exterior; estas magnitudes, características del material de que se trate, dependen, naturalmente, tan sólo del volumen, pero no de la forma del cuerpo. La energía libre en el estado n no cambia en absoluto al aplicar un campo exterior (por esto precisamente no hemos añadido el subíndice 0 a \mathcal{F}_n). En el estado s , en cambio, un campo magnético altera esencialmente la energía libre. Para un cilindro superconductor y valores dados de T y V , la energía libre en un campo exterior longitudinal \mathfrak{H} es igual a

$$\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{s0}(V, T) + \mathfrak{H}^2 V / 8\pi. \quad (43.1)$$

De aquí se pueden deducir todas las demás magnitudes termodinámicas. Derivando (43.1) respecto del volumen, encontramos la presión que actúa sobre el cuerpo

$$p = p_0(V, T) - \mathfrak{H}^2 V / 8\pi, \quad (43.2)$$

donde $p_0(V, T)$ es la presión (para valores dados de V y T) en ausencia de campo. La igualdad (43.2) determina la dependencia que existe entre p , V y T , es decir, representa la ecuación de estado de un cilindro superconductor que se encuentra en un campo magnético exterior. Vemos que el volumen $V(p, T)$ cuando existe dicho campo es el mismo que encontraríamos si no hubiese campo magnético, pero se aplicase una presión $p + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}$. Este resultado concuerda, naturalmente, con la

fórmula (41.2) para la fuerza que actúa sobre la superficie de un superconductor en un campo magnético.

* La transición brusca del estado superconductor al normal tiene lugar solamente en superconductores «puros» (véase la nota en la pág. 199), que son los únicos que consideramos. En las aleaciones, en cambio, la desaparición de la superconductibilidad y la penetración del campo magnético en la muestra se produce de manera gradual en todo un intervalo de intensidades del campo relativamente amplio, de modo que el campo crítico, en el sentido que se le atribuye en el texto, no existe en ellos.

El potencial termodinámico* de un cilindro superconductor es igual a

$$\wp_s = \mathcal{F}_s + pV = \mathcal{F}_{s0}(V, T) + p_0V,$$

donde el volumen V debe expresarse en función de p y T según (43.2). Por ello cabe escribir $\wp_s(p, T)$ en la forma siguiente:

$$\wp_s(p, T) = \wp_{s0}\left(p + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, T\right), \quad (43.3)$$

donde $\wp_{s0}(p, T)$ es el potencial termodinámico cuando no existe campo. Derivando esta igualdad respecto de T y de p obtendremos relaciones análogas para la entropía y el volumen:

$$\mathcal{S}_s(p, T) = \mathcal{S}_{s0}\left(p + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, T\right), \quad (43.4)$$

$$V_s(p, T) = V_{s0}\left(p + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, T\right). \quad (43.5)$$

Podemos ahora escribir la condición que determina el campo crítico. El paso del cilindro del estado s al n se producirá cuando (para valores dados de p y T) \wp_n llegue a ser menor que \wp_s . Ahora bien, en el momento de la transición debe tenerse $\wp_s = \wp_n$, es decir,

$$\wp_{s0}\left(p + \frac{H_{cr}^2}{8\pi}, T\right) = \wp_n(p, T). \quad (43.6)$$

Esta igualdad es una relación termodinámica exacta**. De ordinario, la variación del potencial termodinámico en un campo magnético representa una pequeña corrección a $\wp_{s0}(p, T)$. Entonces el segundo miembro de la ecuación (43.6) puede desarrollarse en serie y los primeros términos del desarrollo dan:

$$\wp_{s0}(p, T) + \frac{H_{cr}^2}{8\pi}V_{s0}(p, T) = \wp_n(p, T), \quad (43.7)$$

donde

$$V_{s0}(p, T) = \partial \wp_{s0}(p, T) / \partial p$$

es el volumen del cilindro superconductor en ausencia de campo. De esta manera, en esta aproximación cabe decir que el potencial termodinámico de la materia (referido a la unidad de volumen) en el estado normal es $H_{cr}^2/8\pi$ veces mayor que en el superconductor.

Designemos por $T_{cr} = T_{cr}(p)$ la temperatura de transición cuando no hay campo magnético. Muestra la experiencia que la transición en este punto es un cambio

* La definición de \wp es aquí la misma que en el § 12.

** Efectuamos aquí los cálculos con una precisión mayor que la que se suele exigir, con vistas a poner de manifiesto de manera más clara la relación mutua entre las diferentes magnitudes termodinámicas.

de fase de segunda especie. Por consiguiente, la anulación de $H_{\text{cr}}(T)$ en $T = T_{\text{cr}}$, en particular, debe producirse de manera continua. Por la teoría general de los cambios de fase de segunda especie se sabe* que la variación del potencial termodinámico cerca del punto de transición es proporcional al cuadrado de la diferencia de temperaturas $T - T_{\text{cr}}$. De (43.7) cabe concluir, por lo tanto, que cerca de T_{cr} el campo crítico varía linealmente con la temperatura

$$H_{\text{cr}} = \text{const} \times (T_{\text{cr}} - T). \quad (43.8)$$

Derivemos los dos miembros de la igualdad (43.6) respecto de la temperatura a lo largo de la curva que expresa H_{cr} en función de T (para una presión dada). Teniendo en cuenta al hacerlo las fórmulas (43.4), (43.5), se obtendrá

$$\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_s = -V_s \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{H_{\text{cr}}^2}{8\pi} \right), \quad (43.9)$$

donde todas las magnitudes $\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_s, V_s$ se refieren al momento de la transición entre ambos estados del cuerpo (es decir, al campo $H = H_{\text{cr}}$). Multiplicando esta diferencia por T , obtendremos el calor de transición

$$Q = T(\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_s) = -\frac{V_s H_{\text{cr}} T}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{\text{cr}}}{\partial T} \right)_p. \quad (43.10)$$

Cuando ésta se produce en el punto $T = T_{\text{cr}}$ (es decir, en ausencia de campo magnético), esta magnitud se anula junto con H_{cr} de acuerdo con el hecho de que se tiene aquí un cambio de fase de segunda especie. En cambio, una transición que tiene lugar cuando $T < T_{\text{cr}}$ (en un campo magnético) va acompañada de absorción o emisión de calor, es decir, constituye un cambio de fase de primera especie. Muestra la experiencia que H_{cr} crece con monotonía al disminuir la temperatura en todo el intervalo de T_{cr} a 0. En consecuencia, la derivada dH_{cr}/dT es siempre negativa y por (43.10) se ve que $Q > 0$, es decir, el calor se absorbe en la transición (isotérmica) del estado superconductor al normal.

Según el teorema de Nernst, la entropía de un cuerpo cualquiera debe anularse para $T \rightarrow 0$. Por lo tanto, de (43.9) se sigue que cuando $T = 0$ debe ser $\partial H_{\text{cr}}/\partial T = 0$, esto es, que la curva $H_{\text{cr}} = H_{\text{cr}}(T)$ corta al eje H formando ángulo recto.

Derivemos la diferencia $\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_s$ (43.9) una vez más respecto de la temperatura, utilizando de nuevo al hacerlo las igualdades (43.4), (43.5). Teniendo también en cuenta que $\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial p} \right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$, resulta en definitiva

$$\frac{\partial \mathcal{S}_n}{\partial T} - \frac{\partial \mathcal{S}_s}{\partial T} = -V_s \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left(\frac{H_{\text{cr}}^2}{8\pi} \right) - 2 \frac{\partial V_s}{\partial T} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{H_{\text{cr}}^2}{8\pi} \right) - \frac{\partial V_s}{\partial p} \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{H_{\text{cr}}^2}{8\pi} \right) \right]^2. \quad (43.11)$$

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 138.

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por T , obtendremos la diferencia de capacidades caloríficas (a presión constante) de las dos fases. Los términos que contienen el coeficiente de dilatación térmica y el coeficiente de compresibilidad de la substancia son de ordinario muy pequeños comparados con los restantes términos; prescindiendo de ellos, queda

$$\mathcal{C}_s - \mathcal{C}_n = \frac{V_s T}{4\pi} H_{\text{cr}} \frac{\partial^2 H_{\text{cr}}}{\partial T^2} + \frac{V_s T}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{\text{cr}}}{\partial T} \right)^2. \quad (43.12)$$

Esta fórmula puede obtenerse también derivando directamente la relación aproximada (43.7). En esta aproximación la diferencia entre V_s y V_{s0} carece de importancia; también es posible considerar iguales entre sí \mathcal{C}_s y \mathcal{C}_{s0} .

Cuando $T = T_{\text{cr}}$, el primer término en (43.12) se anula y obtenemos la siguiente fórmula que liga el salto de la capacidad calorífica en el cambio de fase de segunda especie, cuando no existe un campo magnético exterior, con la dependencia de H_{cr} respecto de la temperatura:

$$\mathcal{C}_s - \mathcal{C}_n = \frac{V_s T}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{\text{cr}}}{\partial T} \right)^2 \quad (43.13)$$

(A. J. Rutgers, 1933). Se sigue de aquí, en particular, que en este caso $\mathcal{C}_s > \mathcal{C}_n$. Si se disminuye la temperatura (es decir, cuando el campo magnético destruye la superconductibilidad), la diferencia $\mathcal{C}_s - \mathcal{C}_n$ cambia de signo debido a que la diferencia $\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_s$, que se anula en $T = 0$ y en $T = T_{\text{cr}}$, debe pasar por un máximo en este intervalo.

De manera análoga es posible considerar los efectos vinculados con la variación de volumen en la transición. Para ello derivemos la ecuación (43.6) respecto de la presión a lo largo de la curva que da la correspondencia de H_{cr} respecto de p (para una temperatura dada); esto conduce a:

$$V_n = V_s \frac{\partial}{\partial p} \left(p + \frac{H_{\text{cr}}^2}{8\pi} \right)$$

o bien

$$V_n - V_s = \frac{V_s H_{\text{cr}}}{4\pi} \frac{\partial H_{\text{cr}}}{\partial p}, \quad (43.14)$$

con lo que también se determina la variación del volumen en el momento de la transición*. En el punto $T = T_{\text{cr}}$ esta diferencia, al igual que la diferencia de entropías, se anula. En cambio, la transición a temperaturas $T < T_{\text{cr}}$ va acompañada de variación del volumen, variación que puede tener uno u otro signo según sea el de la derivada $(\partial H_{\text{cr}} / \partial p)_T$. Para $T = T_{\text{cr}}$ no hay variación de volumen, pero se tiene

* Esta diferencia hay que distinguirla, por descontado, de la variación de volumen (magnetostricción) de un superconductor cuando el campo varía de cero a H_{cr} . Dicha variación puede obtenerse a partir de (43.5):

$$V_s(p, T) - V_{s0}(p, T) \cong (H_{\text{cr}}^2 / 8\pi) (\partial V_s / \partial p)_T.$$

un salto del coeficiente de compresibilidad que es fácil determinar derivando la igualdad (43.14).

Obsérvese que si en (43.14) se substituye

$$\left(\frac{\partial H_{\text{cr}}}{\partial p}\right)_T = - \left(\frac{\partial H_{\text{cr}}}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{H_{\text{cr}}}$$

(igualdad que se obtiene derivando la ecuación $H_{\text{cr}}(p, T) = \text{const}$), se obtendrá la «ecuación de Clapeyron-Clausius»:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{H_{\text{cr}}} = \frac{Q}{T(V_n - V_s)}, \quad (43.15)$$

donde la derivada $(\partial p / \partial T)_{H_{\text{cr}}}$ determina la variación de la presión necesaria para que el campo exterior aplicado se conserve precisamente crítico al variar la temperatura.

El concepto de campo crítico H_{cr} tiene un sentido físico considerablemente más amplio del que se refleja en su definición basada en el comportamiento de un cilindro superconductor. La igualdad $H = H_{\text{cr}}$ es una condición de equilibrio que debe cumplirse en cada punto de la superficie de separación entre las fases normal (n) y superconductora (s) de la materia en un mismo cuerpo. Esto resulta ya evidente en virtud de las simples consideraciones que siguen. Si un cilindro se encuentra en un campo magnético longitudinal, igual precisamente a H_{cr} , tanto las condiciones de contorno para el campo magnético, como las condiciones de estabilidad termodinámica se cumplen en igual medida para todos los estados en los que una parte cilíndrica interior arbitraria del volumen de la muestra se encuentra en el estado superconductor, y el resto de la muestra, en el estado normal. Con esto, entre ambas el campo es $H = H_{\text{cr}}$. Por lo tanto, la superficie de separación sobre la que $H = H_{\text{cr}}$ se encuentra en «equilibrio indiferente» en relación al lugar en que se halla. Ésta es precisamente una propiedad que caracteriza el equilibrio de fases.

En un campo magnético variable la frontera entre las fases superconductora y normal se desplaza. La cinética de este desplazamiento constituye un proceso bastante complejo cuyo estudio exige la resolución simultánea de las ecuaciones electrodinámicas y de la ecuación de transmisión de calor, teniendo en cuenta el que se libera en el cambio de fase. Sin detenernos aquí en este análisis*, nos limitaremos a indicar la condición de contorno que debe cumplirse sobre la frontera en movimiento entre las fases s y n .

Para deducirla consideremos un sistema de coordenadas K' que se mueve con la velocidad \mathbf{v} de desplazamiento de la frontera entre fases. Según una conocida fórmula de transformación de los campos, el campo eléctrico \mathbf{E}' en el sistema K' se expresa en función de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} en el sistema en reposo K mediante la igualdad

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$$

* Un análisis completo de esta cuestión lo efectuó I. M. Lifshitz (ZhETF 20, 834, 1950; DAN SSSR 90, 363, 1953).

(véase (49.1)). Dado que en el sistema K' la superficie de separación se encuentra en reposo, sobre ella es válida la condición ordinaria de continuidad de la componente tangencial de \mathbf{E}' , es decir, de la magnitud

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}' = \mathbf{n} \times \mathbf{E} - v\mathbf{B}/c$$

(\mathbf{n} es el vector unidad normal a la superficie y dirigido en el sentido de la velocidad v). En la fase superconductora se tiene $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, y en la normal, $B = H_{cr}$ (sobre la frontera). Encontramos, por consiguiente, que en la superficie de separación en movimiento aparece un campo eléctrico tangencial que es perpendicular al magnético y cuyo módulo vale

$$E = vH_{cr}/c. \quad (43.16)$$

§ 44. El estado intermedio

Si un cuerpo superconductor de forma cualquiera se encuentra en un campo magnético exterior, la intensidad \mathfrak{H} del cual se aumenta progresivamente, se alcanza al final un momento en que en cualquier punto de la superficie del cuerpo el módulo del campo alcanza el valor crítico H_{cr} , a la vez que el propio \mathfrak{H} es todavía menor que H_{cr} . Así, sobre la superficie de un elipsoide (en un campo \mathfrak{H} dirigido a lo largo de uno de sus ejes) el campo presenta un valor máximo sobre el ecuador (véase (42.3)); alcanza allí el valor H_{cr} para $\mathfrak{H} = H_{cr}(1-n)$.

Si se sigue aumentando \mathfrak{H} , el cuerpo no puede ya encontrarse todo él en el estado superconductor. Por otra parte, tampoco puede pasar por completo al estado normal, puesto que en tal caso el campo sería igual a \mathfrak{H} en todo el volumen. Por ello, debe tener lugar una destrucción parcial de la superconductibilidad.

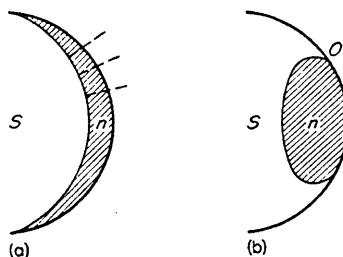


FIG. 22

A primera vista cabría imaginar que esta desaparición se produce como sigue. A medida que aumenta \mathfrak{H} , la superconductibilidad se destruye en una parte que crece gradualmente del volumen del cuerpo, a la vez que disminuye la parte que se conserva superconductora; el cuerpo en conjunto pasa al estado normal cuando $\mathfrak{H} = H_{cr}$. Sin embargo, es fácil ver que tales estados del cuerpo son termodinámicamente inestables. Recordaremos para ello que sobre la superficie de separación

entre las fases superconductora y normal el campo magnético es tangente a la superficie (e igual a H_{cr} en módulo). En otras palabras, las líneas de fuerza del campo se encuentran sobre dicha superficie. Si la frontera presenta su convexidad hacia la fase normal, las superficies equipotenciales del campo, perpendiculares a sus líneas de fuerza, divergirán hacia el interior del dominio normal (conforme se indica en la fig. 22 a, por las líneas de puntos). Pero en el sentido en que divergen las superficies equipotenciales, el módulo del campo disminuye, de modo que en la región rayada se tendría $H < H_{cr}$, lo que contradice la hipótesis de que existía aquí el estado normal. Pero si la frontera de la fase superconductora es cóncava, las líneas de fuerza que la ocupan presentarán un retroceso al alcanzar la superficie libre del dominio superconductor (punto O en la fig. 22 b), a la que también es tangente el campo. Ahora bien, en un punto de retroceso de una línea de fuerza el campo se hace infinito, lo que de nuevo se encuentra en contradicción con las condiciones de contorno sobre la superficie de un superconductor.

Las consideraciones expuestas constituyen, esencialmente, otro aspecto de la misma situación que lleva a la aparición de la estructura en dominios en las substancias ferromagnéticas y ferroeléctricas. También aquí las condiciones de estabilidad termodinámica conducen a que, después de que el campo magnético alcanza el valor H_{cr} , aunque sólo sea en un punto de la superficie del cuerpo, éste se subdivide en un gran número de capas delgadas, alternativamente normales y superconductoras (L. Landau, 1937). Este estado peculiar de un superconductor se califica de *intermedio*. A medida que aumenta \mathfrak{H} , el volumen total de las capas normales crece, hasta que para $\mathfrak{H} = H_{cr}$ el cuerpo pasa por completo al estado normal.

Hay que subrayar que, en el caso general de un cuerpo de forma arbitraria, no todo su volumen se encuentra necesariamente en el estado intermedio. En él pueden coexistir también dominios en el estado puramente superconductor y en el puramente normal, pero únicamente en contacto con el dominio del estado intermedio, no en contacto directo entre sí. En relación con esto, un caso muy simple es el que hemos recordado antes de un cuerpo en forma de elipsoide. En un campo paralelo a su eje el estado intermedio se presenta en el intervalo

$$H_{cr}(1-n) < \mathfrak{H} < H_{cr}, \quad (44.1)$$

encontrándose en este estado todo el volumen del elipsoide*.

La forma y dimensiones de las capas s y n que se hallan en el estado intermedio vienen determinadas por las condiciones de equilibrio termodinámico del cuerpo en conjunto, de modo análogo a como se determina la forma de los dominios en las substancias ferromagnéticas (§ 39). Como allí, el grosor que alcanzan las capas es

* Así, para una esfera, $n = \frac{1}{3}$ y el dominio del estado intermedio se extiende en el intervalo $\frac{2}{3} H_{cr} < \mathfrak{H} < H_{cr}$. Para un cilindro en un campo transversal, $n = \frac{1}{2}$, y el intervalo del estado intermedio es $\frac{1}{2} H_{cr} < \mathfrak{H} < H_{cr}$. En cambio, en un campo longitudinal no existe estado intermedio para un cilindro, $n = 0$, y el estado superconductor desaparece por completo para $\mathfrak{H} = H_{cr}$. Finalmente, para una placa planoparalela en un campo transversal es $n = 1$ y la placa se encuentra en el estado intermedio para cualquier campo tal que $\mathfrak{H} < H_{cr}$.

el resultado de dos tendencias opuestas. La «tensión superficial» sobre las fronteras de las fases n y s tiende a disminuir el número de capas, esto es, a aumentar su grosor. En sentido opuesto actúa la «energía de salida» de las capas en la superficie libre del cuerpo. El grosor de las capas crece al aumentar las dimensiones del cuerpo y, en consecuencia (por las mismas razones que en el caso de los dominios ferromagnéticos) tiene que tener lugar al final su ramificación cerca de la superficie del cuerpo*.

El estado intermedio es susceptible también de una descripción como promedio, si lo que interesa son porciones del cuerpo grandes comparadas con el grosor de las capas (R. E. Peierls y F. London, 1936). En esta descripción se admite que dentro del cuerpo existe un campo magnético cuya inducción es \bar{B} y que toma valores comprendidos entre cero (en el estado puramente superconductor) y H_{cr} (en el estado puramente normal). Atribuyendo a la materia en el estado intermedio una inducción diferente de cero, debemos atribuirle también un determinado valor de la «intensidad» magnética \bar{H} . Para determinar la relación entre estos dos valores hay que tener en cuenta la verdadera estructura del estado intermedio.

El campo magnético en una capa normal es igual a H_{cr} sobre la frontera con un superconductor y, en virtud de la hipótesis de que las capas son delgadas, se puede considerar que el campo tiene este valor también en todo el volumen de la capa. En cambio, en las capas superconductoras es $B = 0$. Por ello, promediando el campo magnético en un volumen grande en comparación con el grosor de las capas, se encuentra para el valor medio de la inducción $\bar{B} = x_n H_{cr}$, donde x_n es la parte del volumen que se encuentra en el estado normal. Determinemos ahora el potencial termodinámico de la unidad de volumen tomando como origen el valor correspondiente al estado superconductor puro. Cuando no existe campo magnético, la unidad de volumen de la fase normal posee un potencial termodinámico en exceso $H_{cr}^2/8\pi$ **. Cuando existe campo magnético, a este valor se añade todavía la energía magnética, de modo que obtenemos en total $H_{cr}^2/4\pi$. El potencial termodinámico medio de la unidad de volumen en el estado intermedio es igual, por consiguiente, a

$$\Phi = x_n H_{cr}^2/4\pi = H_{cr} \bar{B}/4\pi. \quad (44.2)$$

De acuerdo con la regla general, la dependencia entre \bar{B} y \bar{H} se obtiene a partir de la relación termodinámica

$$\bar{H} = 4\pi \partial \Phi / \partial \bar{B}.$$

* Para el cálculo del grosor de las capas no ramificadas, véase el problema 2 de este párrafo. El cálculo de un modelo con capas múltiplamente ramificadas puede verse en L. Landau, ZhETF 13, 377, 1943.

La cuestión de la relación mutua entre ambos modelos se estudia en el artículo de E. M. Lifshitz y Ju. V. Sharvin, DAN SSSR 79, 783, 1951.

En determinadas condiciones (campos exteriores próximos a cero o a H_{cr}) puede resultar termodinámicamente más ventajosa no la estructura estratificada, sino la «filamentosa». Véase E. R. Andrew, Proc. Roy. Soc. A194, 98, 1948.

** Prescindimos aquí de todos los efectos de estricción. En estas condiciones se podría hablar, en vez de variación de potencial termodinámico, de la variación de la energía libre, que coincide con la primera.

En el presente caso encontramos que el vector \bar{H} es paralelo al \bar{B} y que su módulo vale

$$\bar{H} = H_{\text{cr}}. \quad (44.3)$$

es decir, tiene un valor constante independiente del módulo de la inducción.

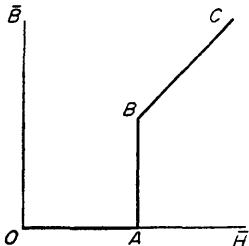


FIG. 23

Si se representa gráficamente la dependencia de B respecto de H (fig. 23), al estado superconductor corresponderá el segmento OA del eje de abscisas, y al normal, la recta BC ($B = \bar{H}$). En cuanto al segmento vertical AB ($H = H_{\text{cr}}$), éste corresponde al estado intermedio.

Sea n el vector unitario asociado a las líneas de fuerza del campo magnético promedio. Haciendo $\bar{H} = H_{\text{cr}}n$ y substituyendo en la ecuación $\text{rot } \bar{H} = 0$ (que es válida cuando no existe corriente volumétrica), se encuentra que $\text{rot } n = 0$. Por otra parte, dado que $n^2 = 1$, se tendrá

$$\text{grad } n^2 = 2(n \cdot \text{grad})n + 2n \times \text{rot } n = 0,$$

de donde se sigue que también $(n \cdot \bar{V})n = 0$. Pero esto significa que la dirección del vector n es constante. Así pues, las líneas de fuerza del campo promedio son rectas.

Aplicaremos los resultados obtenidos a un elipsoide que se encuentra en el estado intermedio. Para un campo homogéneo en el interior del elipsoide, vale la relación

$$(1-n)\bar{H} + n\bar{B} = \mathfrak{H}$$

que es correcta cualquiera que sea la dependencia de B respecto de H . Haciendo aquí $H = H_{\text{cr}}$ se obtendrá

$$\bar{B} = \frac{\mathfrak{H}}{n} - \frac{1-n}{n}H_{\text{cr}}. \quad (44.4)$$

Por consiguiente, la inducción media en el elipsoide cambia con la intensidad del campo exterior según una ley lineal, desde cero para $\mathfrak{H} = (1-n)H_{\text{cr}}$ hasta H_{cr} para $\mathfrak{H} = H_{\text{cr}}$.

Escribamos también la expresión del potencial termodinámico total $\tilde{\phi}$ de un elipsoide en el estado intermedio. Para esto partiremos de la fórmula general

$$\tilde{\phi} = \int \left[\Phi - \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi} - \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{H}) \cdot \mathfrak{H}}{8\pi} \right] dV$$

(cf. (31.7)), también válida para cualquier dependencia de \mathbf{B} con relación a \mathbf{H} . Substituyendo aquí los valores Φ , H , B dados por (44.2)–(44.4), resulta

$$\tilde{\rho}_i = \frac{V}{8\pi} \left[H_{cr}^2 - \frac{1}{n} (H_{cr} - \mathfrak{H})^2 \right] \quad (44.5)$$

(V es el volumen del elipsoide); este valor se cuenta a partir del potencial termodinámico de un elipsoide puramente superconductor en ausencia de campo magnético. Para un elipsoide superconductor en un campo exterior \mathfrak{H} tenemos, en cambio,

$$\tilde{\rho}_s = -\frac{1}{2} \mathcal{M} \cdot \mathfrak{H} = V \mathfrak{H}^2 / 8\pi(1-n),$$

(según (31.6) y (42.2)). Esas dos expresiones se igualan, como debía ser, cuando $\mathfrak{H} = H_{cr}(1-n)$.

Para terminar subrayaremos que la bondad del modelo «promediado» expuesto aquí para el estado intermedio no es de hecho muy satisfactoria, debido al valor relativamente grande del grosor de las capas. Por esta misma razón, este modelo no reproduce algunos fenómenos vinculados con las propiedades peculiares de la estructura en capas. Entre ellos se incluye el hecho de que la transición del estado superconductor al intermedio cuando aumenta el campo exterior tiene lugar, en realidad, no precisamente cuando $\mathfrak{H} = (1-n)H_{cr}$, sino algo después. El origen de este «retardo» es el siguiente. La transición al estado intermedio se produce cuando este estado pasa a ser termodinámicamente estable, es decir, cuando se tiene $\tilde{\rho}_i < \tilde{\rho}_s$. Pero la estructura en capas, junto con la energía puramente «volumétrica» (44.5) que se le atribuye en el modelo de promedio, posee también asociada la energía adicional que determina la existencia de fronteras entre capas y la ligada con las variaciones de su forma cerca de la superficie del cuerpo. Esta circunstancia conduce también a un cierto desplazamiento del punto de transición hacia campos más intensos*.

PROBLEMAS

- Determinar la capacidad calorífica de un elipsoide en el estado intermedio.

Solución. La entropía, y, por lo tanto, la capacidad calorífica, se encuentra derivando el potencial termodinámico (44.5) respecto de la temperatura. Prescindiendo de los términos que contienen el coeficiente de dilatación térmica del cuerpo, obtendremos

$$\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_s = \frac{VT}{4\pi n} [(1-n)(H_{cr}'^2 + H_{cr}H_{cr}''') - \mathfrak{H}H_{cr}''']$$

(el apóstrofo significa derivación respecto de T); \mathcal{C}_s es la capacidad calorífica del cuerpo en el estado superconductor (prescindimos aquí de su pequeña dependencia respecto de \mathfrak{H}). Vemos así que al variar \mathfrak{H} (manteniendo constante la temperatura), en el punto $\mathfrak{H} = (1-n)H_{cr}$ la capacidad calorífica

* Acerca de esto, véase la literatura indicada en la pág. 214.

fica experimenta un salto desde \mathcal{C}_s a

$$\mathcal{C}_s + \frac{VT(1-n)}{4\pi n} H_{cr}'^2,$$

variando luego linealmente con \mathfrak{H} hasta el valor

$$\mathcal{C}_s - \frac{VT}{4\pi} (H_{cr}'^2 + H_{cr} H_{cr}') + \frac{VT}{4\pi n} H_{cr}'^2 = \mathcal{C}_n + \frac{VT}{4\pi n} H_{cr}'^2$$

(para $\mathfrak{H} = H_{cr}$), desde el cual cae hasta el valor \mathcal{C}_n .

2. Determinar la forma y dimensiones de las capas n y s para una placa planoparalela en el estado intermedio en un campo magnético exterior \mathfrak{H} perpendicular a la misma; las capas se suponen no ramificadas (*L. Landau, 1937*).

Solución. Los dominios de las fases n y s son capas dispuestas a lo largo del campo y su carácter plano-paralelo se conserva salvo cerca de la superficie de la placa.

Las líneas de fuerza del campo magnético (líneas de trazos en la fig. 24) atraviesan solamente las capas n , mientras las fronteras de las capas s son también líneas de fuerza (en virtud de la condición $B_n = 0$ que se cumple sobre ellas). Teniendo también en cuenta que sobre la frontera de las fases n y s ha de tenerse $H = H_{cr}$, escribamos las siguientes condiciones sobre las fronteras de una capa s :

$$\begin{aligned} &\text{sobre el segmento } BC: H_x = 0, \\ &\text{sobre } BA \text{ y } CD: H_x^2 + H_y^2 = H_{cr}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

(los ejes de coordenadas se han elegido conforme se indica en la figura 24). Lejos de la placa el campo \mathbf{H} debe coincidir con el campo exterior \mathfrak{H} , es decir,

$$\text{para } x \rightarrow -\infty \quad H_x = \mathfrak{H}, \quad H_y = 0. \quad (2)$$

Introduzcamos los potenciales escalar y vector del campo de acuerdo con las fórmulas

$$H_x = -\partial\phi/\partial x = \partial A/\partial y, \quad H_y = -\partial\phi/\partial y = -\partial A/\partial x,$$

y el potencial complejo $w = \phi - iA$ (cf. § 3, sec. 3).

A lo largo de cada línea de fuerza se tiene $A = \text{const.}$. Hagamos $A = 0$ sobre la línea de fuerza que alcanza el punto O y que luego se bifurca en las líneas OCD y OBA formando la frontera de una de las capas s . La diferencia de los valores A sobre las fronteras de dos capas s consecutivas es igual al flujo del campo magnético a lo largo del segmento $a = a_s + a_n$, es decir, es igual a $\mathfrak{H}a$. Por consiguiente, los valores de A sobre las fronteras de todas las capas s serán múltiplos enteros de $\mathfrak{H}a$. Introduciendo también la «intensidad compleja»

$$\eta = H_x - iH_y = -dw/dz, \quad z = x + iy,$$

escribiremos las condiciones (1) en la forma

$$\begin{aligned} &\text{sobre } BC: \quad \operatorname{Re}\eta = 0, \\ &\text{sobre } BA \text{ y } CD: \quad |\eta| = H_{cr}. \end{aligned} \quad (3)$$

Introduzcamos una nueva variable

$$\zeta = \exp(-2\pi w/\mathfrak{H}a) - 1 \quad (4)$$

y consideremos η como función de ζ . Sobre todas las líneas de fuerza en la frontera (junto con sus prolongaciones fuera de la placa) la magnitud ζ es real: $\zeta = \exp(-2\pi\phi/\mathfrak{H}a) - 1$.

Dado que ϕ está determinado salvo una constante, se puede elegir arbitrariamente el valor de ϕ en un punto. Hagamos $\phi = 0$ en el punto O . Entonces también en este punto será $\zeta = 0$. Sobre la línea de fuerza fronteriza considerada, lejos de la placa es $\zeta = -1$ (puesto que para $x \rightarrow -\infty$ tenemos $\phi \rightarrow -\mathfrak{H}x \rightarrow +\infty$). Llamaremos ζ_0 el valor de ζ en el punto B (o C), donde la línea de

fuerza penetra en la placa. Sobre las ramas CD y BA , ζ varía de ζ_0 a ∞ . Entonces las condiciones (1) y (3) se pueden escribir en la forma

$$\text{para } \zeta = -1 \quad \eta = H, \quad (5)$$

$$\text{para } 0 < \zeta < \zeta_0 \quad \operatorname{Re} \eta = 0, \quad (6)$$

$$\text{para } \zeta_0 < \zeta \quad |\eta| = H_{\text{cr}}.$$

Además, la función $\eta(\zeta)$ debe ser finita para todo ζ .

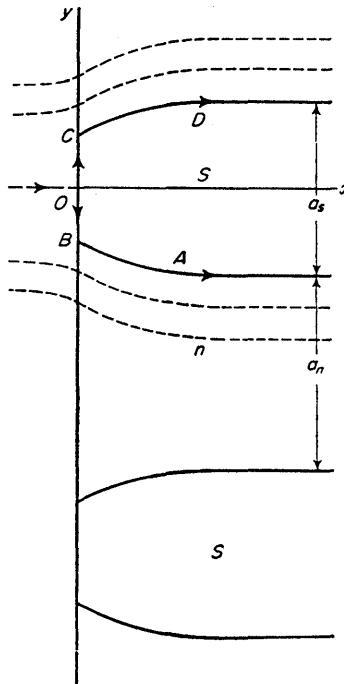


FIG. 24

La función

$$\eta = H_{\text{cr}} \left[\sqrt{\left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right)} - \sqrt{\left(-\frac{\zeta_0}{\zeta}\right)} \right]. \quad (7)$$

cumple las condiciones (6). Para valores reales negativos de ζ ambas raíces son reales y se toman con los signos con que aquí aparecen. Cuando $0 < \zeta < \zeta_0$, las dos raíces son imaginarias, tomándose las raíces

$$\eta = \mp i H_{\text{cr}} \left[\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} - \sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{\zeta} - 1\right)} \right],$$

con los signos — o + sobre los segmentos OC y OB , respectivamente. Para $\zeta > \zeta_0$ hay que escribir

$$\eta = H_{\text{cr}} \left[\sqrt{\left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right)} \mp i \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} \right],$$

con los signos — y + sobre *CD* y *BA*, respectivamente. El valor ζ_0 se determina a partir de la condición (5) y es igual a

$$\zeta_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{h} - h \right)^2, \quad (8)$$

donde se ha introducido la notación $h = \mathfrak{H}/H_{\text{cr}}$.

La forma de la capa, es decir, la ecuación de la línea de fuerzas fronteriza, se obtiene integrando la igualdad $dz = -dw/\eta$ para ζ real:

$$z = - \int \frac{dw}{\eta} = \frac{ah}{2\pi} \int \frac{d\zeta}{\eta(\zeta+1)}.$$

Substituyendo aquí $\eta(\zeta)$, separando las partes real e imaginaria y eligiendo las constantes de integración como corresponde, se obtendrá la siguiente ecuación paramétrica de la línea *CD*:

$$\begin{aligned} x &= \frac{ah}{2\pi} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \sqrt{\left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta+1}} \\ &= \frac{ah}{\pi} \left[\operatorname{arcosh} \sqrt{\frac{\zeta}{\zeta_0}} - \sqrt{(\zeta_0+1)} \operatorname{arcosh} \sqrt{\frac{\zeta(\zeta_0+1)}{\zeta_0(\zeta+1)}} \right], \\ y &= Y - \frac{ah}{2\pi} \int_{\zeta_0}^{\infty} \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta+1} = Y - \frac{ah}{\pi} \sqrt{\zeta_0} (\frac{1}{4}\pi - \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta}) \end{aligned} \quad (9)$$

($Y = \frac{a_s}{2}$ es el valor de la coordenada *y* para $x \rightarrow \infty$; véase la fig. 24).

El período *a* de la estructura en capas está ligado con los grosores a_s y a_n de las capas *s* y *n* por las igualdades $a = a_s + a_n$, $a\mathfrak{H} = a_n H_{\text{cr}}$. La segunda de ellas es consecuencia de la continuidad del flujo magnético que atraviesa por completo las capas *n*. De aquí se sigue

$$a_s = a(1-h), \quad a_n = ah.$$

El período *a* se determina por la condición de mínimo del potencial termodinámico total de la placa. La existencia de una «tensión superficial» sobre la frontera de las fases *n* y *s* conduce a un término

$$g\varphi_1 = 2l\Delta \cdot H_{\text{cr}}^2 / 8\pi a$$

en el potencial termodinámico referido a 1 cm² de superficie de la placa. Aquí *l* es el grosor de la placa y se ha designado por $H_{\text{cr}}^2 \Delta / 8\pi$ el coeficiente de tensión superficial (Δ tiene las dimensiones de una longitud). Al calcular esta parte de la energía se puede prescindir, naturalmente, de la curvatura de las capas cerca de la superficie de la placa.

La «energía de salida» de las capas cerca de la superficie de la placa se puede representar como suma de dos términos. En primer lugar, el propio aumento del volumen de las capas *n* comparado con el volumen que ocuparían si se conservara la forma planoparalela en toda la extensión del cuerpo conduce a una energía adicional

$$g\varphi_2 = \frac{4}{a} \int_0^{\infty} (Y-y) dx \frac{H_{\text{cr}}^2}{8\pi}$$

(el factor 4 tiene en cuenta la existencia de cuatro ángulos, tales como *B* y *C* en la figura 24, sobre las dos caras de cada una de las $1/a$ capas *s*).

En segundo lugar, la salida de las capas en la superficie de la placa cambia la energía del sistema en el campo exterior, es decir, la energía $-(\frac{1}{2})\mathcal{M} \cdot \mathfrak{H}$. El momento magnético de la placa viene determinado por las corrientes en las superficies de las capas *s*. Cuando la componente tangencial de la inducción cambia en forma discontinua desde *H* hasta cero, la densidad superficial de corrientes es $g = \pm cH/4\pi$. Por ello, sobre la unidad de longitud del eje *z* y por cada superficie frontera de

capas s aparece un momento magnético:

$$-\int_{OC}^{} \frac{H}{4\pi} y \, ds, \quad ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

Si la capa no emergiese a la superficie, no existiría el segmento OC , y sobre CD se tendría $y = Y$. En consecuencia, el exceso del momento magnético para cada uno de los cuatro ángulos es igual a

$$-\int_{OC}^{} \frac{H}{4\pi} y \, ds + \int_0^{\infty} \frac{H_{cr}}{4\pi} Y \, dx.$$

De acuerdo con esto, el exceso de energía será

$$\begin{aligned} \varrho \varphi_3 &= -\frac{1}{2} \mathfrak{H} \cdot \frac{4}{a} \left[\int_0^{\infty} \frac{H_{cr}}{4\pi} Y \, dx - \int_{OC}^{} \frac{H}{4\pi} y \, ds \right] \\ &= \frac{\mathfrak{H}}{2\pi a} \left[H_{cr} \int_{CD}^{} (-Y \, dx + y \, ds) + \int_{OC}^{} H_y \, dy \right]. \end{aligned}$$

Las coordenadas x e y , expresadas en función de ζ , son proporcionales a a . Por consiguiente, todas las integrales en $\varrho \varphi_2 + \varrho \varphi_3$ son proporcionales a a^2 , de modo que esta parte del potencial termodinámico es proporcional a a . En cuanto a la suma $\varrho \varphi_1 + \varrho \varphi_2 + \varrho \varphi_3$ es, por consiguiente*,

$$\varrho \varphi = \frac{H_{cr}^2}{4\pi} \left[\frac{l\Delta}{a} + af(h) \right].$$

La condición de que sea mínima da

$$a = \sqrt{[l\Delta/f(h)]}.$$

Obsérvese que en las capas n , cerca de la superficie de la capa, el campo magnético puede ser considerablemente menor que H_{cr} , es decir, se tiene aquí una situación que corresponde a la representada en la figura 22 a. Su desventaja termodinámica queda compensada, en el presente caso, por la energía de tensión superficial que impide la disminución ulterior del espesor de las capas.

* Las integrales $\varrho \varphi_2$ y $\varrho \varphi_3$ no se expresan en términos de funciones elementales. La función $f(h)$ aparece tabulada en el artículo de E. Lifshitz y Iu. Sharvin (véase la nota en la pág. 214).

CAPÍTULO VII

CAMPO ELECTROMAGNÉTICO CUASIFESTACIONARIO

§ 45. Corrientes de Foucault

Hasta aquí hemos considerado solamente campos eléctricos y magnéticos constantes, y la ecuación de Maxwell

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (45.1)$$

la utilizamos (en el § 30) solamente como elemento auxiliar para deducir la expresión de la energía del campo magnético.

El carácter de los campos electromagnéticos variables en medios materiales depende fundamentalmente de la naturaleza de estos medios y del orden de magnitud de la frecuencia de los campos. En este párrafo consideraremos fenómenos que tienen lugar en conductores tridimensionales situados en un campo magnético variable exterior. Supondremos que la velocidad de variación del campo no es muy grande, viniendo limitada por toda una serie de condiciones que se formularán más adelante. Los campos electromagnéticos y las corrientes que satisfacen estas condiciones se califican de *cuasiestacionarios*.

En primer lugar admitiremos que la longitud de onda $\lambda \sim c/\omega$, que corresponde (en el vacío o en un medio dieléctrico que rodea al conductor) a una frecuencia del campo ω , es grande comparada con las dimensiones del cuerpo l :

$$\omega \ll c/l.$$

Entonces la distribución del campo magnético fuera del conductor se puede representar en cada instante por las ecuaciones del *campo estático*

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad (45.2)$$

prescindiendo de todos los efectos ligados con la velocidad finita de propagación de las perturbaciones electromagnéticas. Claro está que solamente es posible prescindir de dichos efectos a distancias no demasiado grandes del cuerpo (pequeñas respecto de λ), lo que en cualquier caso es suficiente con vistas a determinar el campo en su interior.

En cuanto al sistema completo de ecuaciones del campo dentro del conductor,

está formado por la ecuación (45.1) y las ecuaciones*:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (45.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi\sigma\mathbf{E}/c. \quad (45.4)$$

La segunda de estas ecuaciones se dedujo, a decir verdad, para corrientes y campos magnéticos constantes. Por ello es necesario indicar criterios que permitan utilizar, con precisión suficiente, esta ecuación en el caso de campos variables. En la ecuación (45.4) es esencial que la relación entre la corriente y la intensidad del campo eléctrico venga dada por la igualdad $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, con un valor constante de σ correspondiente al caso estacionario. Esto ocurre si el período de variación del campo eléctrico es grande comparado con los tiempos característicos del mecanismo microscópico de conductibilidad. Para metales típicos (a la temperatura ambiente) las frecuencias límite admisibles por esta condición se encuentran en el dominio del espectro correspondiente al infrarrojo**.

Sin embargo, hay además otra condición que limita en el presente caso la aplicabilidad de las ecuaciones. Tratándose de ecuaciones macroscópicas, suponen que las longitudes de los libres caminos medios de los electrones son pequeñas comparadas con las distancias a las que varía apreciablemente el campo. Volveremos a considerar esta condición más adelante.

En las ecuaciones (45.1) y (45.4) \mathbf{E} es la intensidad del campo eléctrico inducido que resulta como consecuencia de variar el campo magnético. Cuando se conoce \mathbf{H} , el campo \mathbf{E} se determina directamente por la ecuación (45.4). La ecuación para \mathbf{H} , en cambio, se obtiene eliminando \mathbf{E} entre (45.1) y (45.4):

$$\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = - \operatorname{rot} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{H}}{\sigma}. \quad (45.5)$$

En un medio homogéneo de conductibilidad σ y de permeabilidad μ constantes, el factor $1/\sigma$ se puede sacar fuera del signo rot , y de acuerdo con (45.3) tenemos $\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$. En consecuencia, $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}$, y obtenemos la ecuación

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (45.6)$$

* En un cuerpo anisótropo, en vez de $\sigma\mathbf{E}$, en el segundo miembro de la ecuación (45.4) debe figurar el vector de componentes $\sigma_{ik}\mathbf{E}_k$.

** Para malos conductores (por ejemplo, los semiconductores) la aplicabilidad de la ecuación (45.4) exige que se cumpla todavía otra condición, que acaso resulte ser aún más restrictiva. En tales cuerpos puede tener sentido introducir juntas las constantes de conductibilidad y dieléctrica. Entonces al segundo miembro de la ecuación (45.4) se añade el término $-(\epsilon/c)\partial\mathbf{E}/\partial t$, y la condición de que éste sea pequeño comparado con $(4\pi/c)\sigma\mathbf{E}$ es $\sigma/\omega \gg \epsilon$. En cambio, para los buenos conductores, los metales, se tiene de hecho $\sigma/\omega \gg 1$ en todo el dominio de frecuencias para las que todavía cabe hablar de conductibilidad constante (véase también la nota en la pág. 225).

Junto con la ecuación $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, constituye un sistema completo que basta para determinar el campo magnético. Obsérvese que la ecuación (45.6) tiene la forma de la ecuación de propagación del calor, representando el papel de «coeficiente de conductibilidad térmica», χ , la constante $c^2/4\pi\sigma\mu$.

Las condiciones de contorno para el campo magnético sobre la superficie del conductor son evidentes por la propia forma de las ecuaciones y, como antes, se escriben:

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad \mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}. \quad (45.7)$$

La expresión en el segundo miembro de la ecuación (45.4) no influye sobre la segunda de estas condiciones en virtud de su carácter finito. Cuando $\mu = 1$ se puede escribir, simplemente*,

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2. \quad (45.8)$$

La continuidad de \mathbf{H}_t conduce a la continuidad de $(\operatorname{rot} \mathbf{H})_n$, y de acuerdo con la ecuación (45.4), a la de $(\sigma \mathbf{E})_n$. Pero fuera de un conductor es $\sigma = 0$ con lo que llegamos a la conclusión de que sobre la superficie será

$$\mathbf{E}_{n,i} = 0,$$

donde el índice (*i*) distingue el campo dentro del conductor. Junto con E_n se anula también $j_n = \sigma E_n$. Así pues, el sistema de ecuaciones considerado conduce automáticamente a la anulación (sobre la superficie del conductor) de la componente normal de la densidad de corriente. En otras palabras, en esta aproximación la existencia de un campo magnético variable no puede conducir a que aparezcan cargas libres sobre la superficie del conductor.

La condición de contorno (45.8) no basta para una formulación completa del problema si el conductor es un cuerpo compuesto constituido por secciones de diferente conductibilidad. Sobre las fronteras de separación de dichas secciones, junto con la continuidad de \mathbf{H} es necesario tener también en cuenta la condición de continuidad de \mathbf{E}_t ; para un campo magnético esta condición significa que

$$(\operatorname{rot} \mathbf{H})_{t1}/\sigma_1 = (\operatorname{rot} \mathbf{H})_{t2}/\sigma_2. \quad (45.9)$$

Establecidas las ecuaciones fundamentales, pasemos a estudiar la naturaleza de los campos variables caracterizados por las mismas.

Supongamos que el conductor se encuentra en un campo magnético y que la fuente de éste se desconecta en determinado instante. El campo en el conductor

* Para los cuerpos ordinarios dia- o paramagnéticos, μ es muy próximo a 1, y tener en cuenta μ en las fórmulas que siguen significaría una precisión excesiva carente de sentido. Valores de μ apreciablemente distintos de 1 pueden presentarse en los metales ferromagnéticos, cuyas propiedades magnéticas (en campos magnéticos suficientemente débiles) se pueden describir mediante una constante de permeabilidad grande. En estas substancias, sin embargo, se produce, ya relativamente pronto, la dispersión de μ (que se traduce en su dependencia respecto de la frecuencia ω) que va acompañada de una disminución de μ que alcanza prácticamente el valor 1. Teniendo en cuenta estas circunstancias, en este capítulo supondremos $\mu = 1$.

(y en torno del mismo) no se anula en dicho instante y la marcha de su atenuación con el tiempo viene determinada por la ecuación (45.6). Para resolver un problema de este tipo hay que proceder, de acuerdo con los métodos generales de la física matemática, de la siguiente manera. Busquemos soluciones de la ecuación (45.6) que sean de la forma

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m(x, y, z)e^{-\gamma_m t},$$

con valores γ_m constantes. Para las funciones $\mathbf{H}_m(x, y, z)$ obtenemos ecuaciones

$$(c^2/4\pi\sigma)\Delta\mathbf{H}_m = -\gamma_m\mathbf{H}_m. \quad (45.10)$$

Para una forma dada del conductor, estas ecuaciones tienen soluciones no nulas (que satisfagan las condiciones de contorno necesarias) tan sólo para determinados valores de γ_m , que constituyen el conjunto de sus «valores propios». Todos estos valores son reales y positivos*, y las funciones que les corresponden $\mathbf{H}_m(x, y, z)$ forman un sistema completo de funciones vectoriales ortogonales. Sea $\mathbf{H}_0(x, y, z)$ la distribución del campo en el instante inicial. Desarrollándola en serie de funciones \mathbf{H}_m ,

$$\mathbf{H}_0(x, y, z) = \sum_m c_m \mathbf{H}_m(x, y, z),$$

obtendremos la solución del problema de amortiguamiento del campo en la forma

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \sum_m c_m e^{-\gamma_m t} \mathbf{H}_m(x, y, z). \quad (45.11)$$

La rapidez del amortiguamiento viene determinada fundamentalmente por el término de la suma que corresponde al menor de los γ_m ; sea éste γ_1 . El «tiempo de amortiguamiento» del campo se puede definir por $\tau = 1/\gamma_1$. El orden de magnitud de este tiempo resulta evidente por la propia ecuación (45.10). Dado que $\Delta\mathbf{H} \sim \frac{\mathbf{H}}{l^2}$

(donde l es la dimensión del conductor), se tendrá

$$\tau \sim 4\pi\sigma l^2/c^2. \quad (45.12)$$

Otro tipo de problemas está ligado con el comportamiento de los conductores que se encuentran en un campo magnético variable exterior de frecuencia dada ω . El campo magnético, que penetra en el interior del conductor, induce en él un campo eléctrico variable y éste a su vez determina la aparición de corrientes (llamadas

* Esto puede verse fácilmente como sigue. Para evitar la necesidad de tener en cuenta las condiciones de contorno sobre la superficie del cuerpo, partiremos de la ecuación (45.5), imaginando que σ se anula de manera continua fuera del mismo. Multiplicando los dos miembros de la ecuación

$$-4\pi\gamma_m\mathbf{H}_m/c^2 = -\operatorname{rot} [(1/\sigma) \operatorname{rot} \mathbf{H}_m]$$

por \mathbf{H}_m^* e integrando en todo el espacio, obtendremos

$$\frac{4\pi}{c^2} \gamma_m \int |\mathbf{H}_m|^2 dV = \int \mathbf{H}_m^* \cdot \operatorname{rot} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{H}_m}{\sigma} dV = \int \frac{1}{\sigma} |\operatorname{rot} \mathbf{H}_m|^2 dV,$$

expresión en la que resulta evidente que γ_m es real y positivo.

(corrientes de Foucault). Una idea general del carácter de la penetración del campo en el conductor puede obtenerse ya partiendo de la analogía antes indicada entre la ecuación (45.6) y la ecuación de transmisión del calor. Por la teoría de la transmisión del calor sabemos que una magnitud que satisface a dicha ecuación «se propaga» en el espacio a una distancia del orden de $\sqrt{\chi t}$ en un intervalo de tiempo t . En consecuencia, podemos concluir sin más que el campo magnético «penetra» en el interior del conductor hasta una distancia δ que es del orden de

$$\delta \sim \sqrt{(c^2/\sigma\omega)}.$$

Lo mismo vale, claro está, para el campo eléctrico y las corrientes inducidas por el mismo.

En un campo variable de frecuencia ω todas las magnitudes dependen del tiempo según el factor $e^{-i\omega t}$. La ecuación (45.6) adopta entonces la forma

$$\Delta \mathbf{H} = -4\pi i\sigma\omega \mathbf{H}/c^2. \quad (45.13)$$

Consideremos dos casos límite. Si la *profundidad de penetración* δ es grande comparada con las dimensiones del cuerpo (bajas frecuencias), en primera aproximación se puede substituir el segundo miembro de la ecuación (45.13) por cero. Entonces la distribución del campo magnético en cada instante será la misma que la correspondiente al caso estacionario para un valor dado del campo exterior lejos del cuerpo. Designemos esta solución por \mathbf{H}_{est} ; ésta no depende de la frecuencia (más exactamente, la contiene solamente en el factor dependiente del tiempo $e^{-i\omega t}$). En cuanto al campo eléctrico inducido, éste aparece tan sólo en la aproximación siguiente respecto de ω , ya que en el caso estacionario no existiría. Esto corresponde al hecho de que, al calcular \mathbf{E} en función de \mathbf{H} según la ecuación (45.4), el resultado que obtendríamos sería cero, puesto que $\text{rot } \mathbf{H}_{\text{est}} = 0$. En consecuencia, para calcular \mathbf{E} hay que recurrir a la ecuación (45.1), según la cual

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mathbf{H}_{\text{est}}/c. \quad (45.14)$$

Esta ecuación, junto con $\text{div } \mathbf{E} = 0$ (ecuación que se sigue de (45.4) para un valor de σ constante en el cuerpo), determina por completo la distribución del campo eléctrico. Obsérvese que ésta resulta proporcional a la frecuencia ω .

Pasemos al caso límite opuesto, en el que $\delta \ll l$ (frecuencias altas). La condición de aplicabilidad de las ecuaciones macroscópicas del campo, que hemos recordado al principio del párrafo, exige que δ sea, en cualquier caso, grande comparada con el libre camino medio de los electrones de conducción*.

Cuando $\delta \ll l$ el campo magnético penetra sólo en un delgado estrato superficial del conductor. Para calcular el campo fuera de éste cabe prescindir del grosor de dicho estrato, es decir, suponer que el campo magnético no penetra en el interior

* Esta condición precisamente es la que primero se viola, de hecho, en los metales (al aumentar la frecuencia). En cambio, la condición $\omega \ll 1/\tau$, donde τ es el tiempo de recorrido libre, puede resultar más restrictiva para los semiconductores de pequeña conductibilidad.

del cuerpo. En este sentido, un conductor en un campo magnético de alta frecuencia se comporta de la misma manera que un superconductor en un campo constante, y para calcular el campo fuera del mismo hay que resolver el correspondiente problema estacionario para un superconductor que tenga la misma forma.

El estudio de la verdadera distribución del campo en la capa superficial del conductor puede efectuarse de manera general considerando pequeñas porciones de la superficie como planos. Se trata entonces de resolver la ecuación (45.13) para un medio conductor limitado por una superficie plana fuera de la cual el campo tiene un valor dado, que designaremos por $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$. Este vector se obtiene de la manera antes indicada como resultado de resolver el problema exterior para un medio semi-infinito y es paralelo a la superficie del conductor. En virtud de la condición de contorno (45.8), el campo magnético en la superficie del conductor es también igual a $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$.

Elijamos como plano xy la superficie del conductor, y el eje z tal que el medio conductor ocupe el semiespacio $z > 0$. Teniendo en cuenta el carácter homogéneo de las condiciones del problema respecto de las direcciones x e y , el campo buscado \mathbf{H} depende solamente de la coordenada z (y del tiempo). Por ello tenemos $\operatorname{div} \mathbf{H} = \partial H_z / \partial z = 0$, y dado que sobre la frontera es $H_z = 0$, también en todo el espacio será $H_z = 0$. Según (45.13), para \mathbf{H} vale la ecuación

$$\partial^2 \mathbf{H} / \partial z^2 + k^2 \mathbf{H} = 0,$$

donde

$$k = \sqrt{(4\pi i\omega/c^2)} = (1+i)\sqrt{(2\pi\sigma\omega)/c}.$$

La solución de esta ecuación que se anula lejos de la superficie ($z \rightarrow \infty$) es proporcional a e^{ikz} .

Teniendo en cuenta también la condición de contorno en $z=0$, se obtendrá

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-z/\delta} e^{iz/\delta - i\omega t} \quad (45.15)$$

donde la profundidad de penetración δ viene determinada por

$$\delta = c / \sqrt{(2\pi\sigma\omega)} \quad y \quad k = (1+i)/\delta. \quad (45.16)$$

En cuanto al campo eléctrico, éste se determina ahora mediante la ecuación (45.4). Introduciendo el vector unitario \mathbf{n} correspondiente al eje z , resulta

$$\mathbf{E} = \sqrt{(\omega/8\pi\sigma)(1-i)} \mathbf{H} \times \mathbf{n}. \quad (45.17)$$

Obsérvese que $\mathbf{E} \sim (\delta/\lambda) \mathbf{H}$.

Si el campo $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$ está «linealmente polarizado», mediante una elección adecuada del origen del tiempo se puede conseguir que \mathbf{H}_0 sea real. Elijamos entonces la dirección de este vector como dirección del eje y . Separando en (45.16) y en (45.17) la parte real, se obtiene

$$\mathbf{H} = H_y = H_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right), \quad \mathbf{E} = E_x = H_0 \sqrt{(\omega/4\pi\sigma)} e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t - \frac{1}{4}\pi\right). \quad (45.18)$$

Junto con el campo eléctrico, de acuerdo con esta misma ley se distribuirá la densidad de corriente de Foucault $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$.

La aparición de corrientes de Foucault va acompañada de disipación de la energía del campo, que se emite en forma de calor de Joule. La energía media (respecto del tiempo) Q disipada en el conductor en 1 s vale

$$Q = \int \mathbf{j} \cdot \overline{\mathbf{E}} dV = \int \sigma \overline{\mathbf{E}}^2 dV.$$

Es posible calcularla también como cantidad media de energía del campo que penetra dentro del conductor en 1 s, es decir, como integral

$$Q = \oint \overline{\mathbf{S}} \cdot d\mathbf{f} = (c/4\pi) \oint \overline{\mathbf{E}} \times \overline{\mathbf{H}} \cdot d\mathbf{f}, \quad (45.19)$$

extendida a la superficie del mismo*.

Hemos visto ya que, en el caso límite $\delta \gg l$, la amplitud del campo magnético dentro de un conductor no depende de la frecuencia, mientras que la amplitud del campo eléctrico es proporcional a ω . En consecuencia, la disipación de energía Q para frecuencias bajas es proporcional a ω^2 .

En cambio, cuando $\delta \ll l$ el campo magnético y el campo eléctrico sobre la superficie del conductor vienen dados por las fórmulas (45.15) y (45.17) con $z = 0$. El vector de Poynting es normal a la superficie y su valor medio resulta ser

$$\bar{S} = (c/16\pi) \sqrt{(\omega/2\pi\sigma)} |\mathbf{H}_0|^2,$$

fórmula en la que la variación de \mathbf{H}_0 sobre la superficie se determina de la manera antes indicada resolviendo el problema correspondiente al campo fuera de un superconductor de la misma forma. La disipación de la energía vale

$$Q = \frac{c}{16\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}} \oint |\mathbf{H}_0|^2 d\mathbf{f}. \quad (45.20)$$

Obsérvese que para grandes frecuencias es proporcional a $\sqrt{\omega}$.

La energía disipada puede también expresarse en función del momento magnético total \mathcal{M} que adquiere el conductor en el campo magnético. En un campo periódico, el momento magnético es también una función periódica del tiempo de igual

* Si dos magnitudes cualesquiera $a(t)$ y $b(t)$ se escriben en forma compleja (proporcional a $e^{-i\omega t}$), al formar su producto es necesario, claro está, separar previamente la parte real. Pero si nos interesa solamente el valor medio de este producto (respecto del tiempo), este valor medio se puede calcular en la forma

$$\frac{1}{T} \operatorname{Re} ab^*.$$

En efecto, los términos que contienen los factores $e^{\pm 2i\omega t}$ se anulan al efectuar el promedio y, en consecuencia,

$$\frac{1}{T} \overline{(a+a^*)(b+b^*)} = \frac{1}{T} (ab^* + a^*b).$$

En particular, cabe obtener \bar{S} como parte real del «vector de Poynting complejo», según la fórmula

$$\bar{S} = \operatorname{Re} \left[\frac{c}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right]. \quad (45.19a)$$

frecuencia. Según la fórmula (31.4), la variación de energía libre del cuerpo con el tiempo viene dada por la derivada

$$-\mathcal{M} \cdot d\mathfrak{H}/dt,$$

donde \mathfrak{H} es el campo homogéneo exterior en el que se encuentra el conductor.

Esta expresión no nos da todavía, de manera inmediata, la disipación que se trata de determinar, puesto que la variación de energía del cuerpo no sólo es debida a la cesión de energía, sino también a su migración periódica entre el cuerpo y el campo que lo rodea. Ahora bien, si se efectúa el promedio respecto del tiempo, esta última parte desaparece y, por lo tanto, la energía media disipada por unidad de tiempo es

$$Q = -\overline{\mathcal{M} \cdot d\mathfrak{H}/dt}. \quad (45.21)$$

Si \mathcal{M} y \mathfrak{H} se expresan en forma compleja, se tendrá $\dot{\mathfrak{H}} = -i\omega \mathfrak{H}$ y cabe calcular Q mediante la fórmula

$$Q = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(i\omega \mathcal{M} \cdot \mathfrak{H}^*) = \frac{1}{2}\omega \operatorname{Im}(\mathcal{M} \cdot \mathfrak{H}^*) \quad (45.22)$$

(acerca de la aparición aquí del factor $\frac{1}{2}$, véase la nota en la pág. 227).

Las componentes del momento magnético \mathcal{M} son funciones lineales del campo exterior:

$$\mathcal{M}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{H}_k, \quad (45.23)$$

donde los coeficientes sin dimensiones $\alpha_{ik}(\omega)$ dependen de la forma del cuerpo y de su orientación en el campo exterior (pero no de su volumen V); suponemos que en esta fórmula \mathcal{M} y \mathfrak{H} se han expresado en forma compleja, de modo que también las magnitudes α_{ik} serán, en general, complejas. El tensor $V\alpha_{ik}$ puede llamarse *tensor de polarizabilidad magnética* del cuerpo en conjunto. Este tensor es simétrico*:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \quad (45.24)$$

Aplicando esta propiedad, cabe escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \cdot \mathfrak{H}^* &= V\alpha_{ik}\mathfrak{H}_i^*\mathfrak{H}_k = \frac{1}{2}V\alpha_{ik}(\mathfrak{H}_i^*\mathfrak{H}_k + \mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_k^*) \\ &= V\alpha_{ik} \operatorname{Re}(\mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_k^*). \end{aligned}$$

Si, además, las magnitudes complejas α_{ik} se representan en la forma

$$\alpha_{ik}' + i\alpha_{ik}'',$$

para la energía disipada (45.22) obtendremos

$$Q = \frac{1}{2}V\omega\alpha_{ik}'' \operatorname{Re}(\mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_k^*). \quad (45.25)$$

* Véase vol. V, *Física estadística*, § 127.

Así pues, la disipación de energía se determina por la parte imaginaria de la polarizabilidad magnética del cuerpo. Vimos más arriba que para bajas frecuencias Q es proporcional a ω^2 , y para frecuencias altas, a $1/\omega$. Podemos así concluir que las magnitudes a''_{ik} , en estos dos casos límite, son proporcionales a ω y a $\omega^{-1/2}$, respectivamente. Anulándose tanto para $\omega \rightarrow 0$ como para $\omega \rightarrow \infty$, pasan por un máximo en este intervalo.

El momento magnético de un conductor en un campo magnético variable se debe esencialmente a las corrientes de conducción que aparecen en el cuerpo; es diferente de cero incluso para $\mu = 1$, es decir, cuando el momento estático se anula. Este último ha de obtenerse a partir de $\mathcal{M}(\omega)$ en el límite en que $\omega \rightarrow 0$. De aquí se sigue que la parte real de la polarizabilidad magnética a'_{ik} tiende, cuando $\omega \rightarrow 0$, al valor constante (a cero si $\mu = 1$) que corresponde a la imanación en un campo constante. En cambio, si $\omega \rightarrow \infty$, cuando el campo magnético no penetra en el interior del cuerpo, las magnitudes a'_{ik} tienden a otro límite constante, que corresponde a la imanación estática de un superconductor de igual forma.

PROBLEMAS

- Determinar la polarizabilidad magnética de una esfera conductora isótropa de radio a en un campo exterior periódico homogéneo.

Solución. El campo \mathbf{H}_i dentro de la esfera satisface las ecuaciones

$$\Delta \mathbf{H}_i + k^2 \mathbf{H}_i = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}_i = 0, \quad k = (1+i)/\delta.$$

Tomemos para él una expresión de la forma $\mathbf{H}_i = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, donde \mathbf{A} satisface la ecuación $\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0$: dado que \mathbf{H} es axil, \mathbf{A} es un vector polar. Teniendo en cuenta la simetría de la esfera, el único vector constante del cual puede depender la solución buscada es el campo exterior \mathfrak{H} . Designemos por f la solución con simetría esférica de la ecuación escalar $\Delta f + k^2 f = 0$:

$$f = (1/r) \operatorname{sen} kr.$$

Entonces el vector polar \mathbf{A} , que satisface la ecuación vectorial $\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0$ y que depende linealmente del vector constante axil \mathfrak{H} , se puede escribir en la forma

$$\mathbf{A} = \beta \operatorname{rot} (f \mathfrak{H})$$

(β es una constante). De acuerdo con esto, buscaremos para \mathbf{H}_i una expresión de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i &= \beta \operatorname{rot} \operatorname{rot} (f \mathfrak{H}) \\ &= \beta \left(\frac{f'}{r} + k^2 f \right) \mathfrak{H} - \beta \left(\frac{3f'}{r} + k^2 f \right) (\mathbf{n} \cdot \mathfrak{H}) \mathbf{n}, \end{aligned}$$

donde \mathbf{n} es el versor del vector posición \mathbf{r} (la derivada segunda f'' se elimina mediante la ecuación $\Delta f + k^2 f = 0$).

El campo \mathbf{H}_e fuera de la esfera satisface las ecuaciones $\operatorname{rot} \mathbf{H}_e = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{H}_e = 0$. Tomemos para él $\mathbf{H}_e = -\operatorname{grad} \phi + \mathfrak{H}$, donde ϕ satisface la ecuación $\Delta \phi = 0$ y se anula en el infinito. Esta función ϕ , que depende linealmente del vector constante \mathfrak{H} , tiene la forma

$$\phi = -V\alpha \mathfrak{H} \cdot \operatorname{grad} (1/r)$$

($V = 4\pi a^3/3$). Así pues, buscaremos \mathbf{H}_e entre las expresiones del tipo

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_e &= V\alpha \operatorname{grad} [(\mathfrak{H} \cdot \operatorname{grad})(1/r)] + \mathfrak{H} \\ &= \frac{V\alpha}{r^3} [3(\mathbf{n} \cdot \mathfrak{H})\mathbf{n} - \mathfrak{H}] + \mathfrak{H}. \end{aligned}$$

Evidentemente, $aV\mathbf{H}$ es el momento magnético de la esfera, de modo que $V\alpha$ resulta ser su polarizabilidad magnética (en virtud de la simetría de la esfera, el tensor α_{ik} se reduce a un escalar $\alpha_{ik} = \alpha\delta_{ik}$).

Sobre la superficie de la esfera ($r = a$) son continuas todas las componentes de \mathbf{H} . Igualando por separado las componentes paralelas y perpendiculares a \mathbf{n} , obtendremos dos ecuaciones que determinan α y β . Para la polarizabilidad (referida a la unidad de volumen), que es lo que nos interesa, se obtiene:

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha' + i\alpha'' = -\frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{3}{a^2 k^2} + \frac{3}{ak} \operatorname{ctg} ak \right], \\ \alpha'' &= -\frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{3\delta}{2a} \frac{\operatorname{senh}(2a/\delta) - \operatorname{sen}(2a/\delta)}{\cosh(2a/\delta) - \cos(2a/\delta)} \right], \\ \alpha' &= -\frac{9\delta^2}{16\pi a^2} \left[1 - \frac{a}{\delta} \frac{\operatorname{senh}(2a/\delta) + \operatorname{sen}(2a/\delta)}{\cosh(2a/\delta) - \cos(2a/\delta)} \right].\end{aligned}$$

En el caso límite de bajas frecuencias ($\delta \gg a$),

$$\begin{aligned}\alpha' &= -\frac{1}{105\pi} \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 = -\frac{4\pi}{105} \frac{a^4 \sigma^2 \omega^2}{c^4}, \\ \alpha'' &= \frac{1}{20\pi} \left(\frac{a}{\delta} \right)^2 = \frac{a^2 \sigma \omega}{10c^2}.\end{aligned}$$

En cambio, para frecuencias elevadas ($\delta \ll a$),

$$\begin{aligned}\alpha' &= -\frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{3\delta}{2a} \right] = -\frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{3c}{2a\sqrt{(2\pi\sigma\omega)}} \right], \\ \alpha'' &= \frac{9}{16\pi} \frac{\delta}{a} = \frac{9c}{16\pi a \sqrt{(2\pi\sigma\omega)}}.\end{aligned}$$

El valor límite $V\alpha' = -a^3/2$ corresponde al momento magnético de una esfera superconductora, mientras que el valor α'' podría hallarse mediante la fórmula (45.20) utilizando la fórmula (42.3) para el campo en la superficie de una esfera superconductora.

2. Lo mismo para un cilindro conductor (de radio a) en un campo magnético periódico homogéneo perpendicular a su eje.

Solución. El problema constituye la «analogía bidimensional» del problema 1; en lo que sigue, todas las operaciones vectoriales son operaciones bidimensionales en un plano perpendicular al eje del cilindro y \mathbf{r} es el vector posición en este plano. Para el campo en el interior del cilindro, elegiremos una expresión de la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_i &= \beta \operatorname{rot} \operatorname{rot} (f \mathbf{H}) \\ &= \beta \left(\frac{f'}{r} + k^2 f \right) \mathbf{H} - \beta \left(\frac{2f'}{r} + k^2 f \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{n},\end{aligned}$$

donde $f = J_0(kr)$ es la solución simétrica de la ecuación bidimensional $\Delta f + k^2 f = 0$ que es finita para $r = 0$. En cuanto al campo fuera del cilindro, tomaremos para él

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_e &= -2V\alpha \operatorname{grad} [(\mathbf{H} \cdot \operatorname{grad}) \ln r] + \mathbf{H} \\ &= \frac{2V\alpha}{r^2} [2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{n} - \mathbf{H}] + \mathbf{H}\end{aligned}$$

($V = \pi a^2$). El momento magnético por unidad de longitud del cilindro es $V\alpha \mathbf{H}$ (véase problema 2, § 3). De la condición $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_e$ para $r = a$, al igual que en el problema 1, obtendremos

$$\alpha = -\frac{1}{2\pi} \left[1 - \frac{2}{ka} \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \right]$$

(se ha utilizado la igualdad $J_0'(kr) = -kJ_1(kr)$).

Cuando $\delta \gg a$, desarrollando las funciones de Bessel en potencias de ka , resulta

$$\alpha' = -\frac{1}{24\pi} \left(\frac{a}{\delta}\right)^4 = -\frac{\pi a^4 \sigma^2 \omega^2}{6c^4},$$

$$\alpha'' = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{a}{\delta}\right)^2 = \frac{a^2 \sigma \omega}{4c^2}.$$

Cuando $\delta \ll a$, utilizaremos la expresión asintótica de las funciones de Bessel, con lo que se encuentra

$$\begin{aligned}\alpha' &= -\frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{\delta}{a}\right) = -\frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{c}{a\sqrt{(2\pi\sigma\omega)}}\right), \\ \alpha'' &= \frac{1}{2\pi} \frac{\delta}{a} = \frac{c}{2\pi a \sqrt{(2\pi\sigma\omega)}}.\end{aligned}$$

3. Lo mismo para un cilindro en un campo magnético paralelo a su eje.

Solución. El campo magnético es paralelo al eje del cilindro en todo el espacio. Fuera del cilindro $\mathbf{H}_e = \mathbf{H}$, y dentro de él $\mathbf{H}_i = f \mathbf{H}$ donde f es la solución simétrica de la ecuación bidimensional $\Delta f + k^2 f = 0$, que toma el valor 1 en $r = a$:

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H} J_0(kr)/J_0(ka).$$

Las corrientes de Foucault en un cilindro son circulares (es decir, \mathbf{j} tiene únicamente la componente j_ϕ en coordenadas cilíndricas) y se determinan a partir del campo $H_z = H$ mediante la igualdad $4\pi j/c = -\partial H/\partial r$.

El momento magnético del cilindro por unidad de longitud $M = \pi a^2 a \mathbf{H}$ determinado por las corrientes de conducción está dirigido a lo largo del eje y es igual a

$$(1/2c) \int j_r dV = -\frac{1}{4} \int (\partial H / \partial r) r^2 dr;$$

Calculando la integral, se obtiene

$$\alpha = -\frac{1}{4\pi} \left[1 - \frac{2}{ka} \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \right].$$

Así pues, la polarizabilidad longitudinal del cilindro es la mitad de la polarizabilidad transversal que hallamos en el problema 2.

4. Determinar el menor de los coeficientes de amortiguamiento del campo magnético en una esfera conductora.

Solución. Entre las soluciones de las ecuaciones (45.10) correspondientes a una esfera se tienen funciones de diferente simetría. La más simétrica sería la solución que viene determinada dando un escalar constante arbitrario. Sin embargo, dicha solución no puede existir por la siguiente razón:

debiera poseer simetría esférica, $\mathbf{H} = H_r(r)$, y en virtud de la ecuación $\operatorname{div} \mathbf{H} = 1/r \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rH) = 0$

(que vale tanto dentro como fuera de la esfera) sería $H = \text{const}/r$. Pero esta función no satisface la condición de ser finita en el centro de la esfera.

Al menor valor γ corresponde una de las soluciones que vienen determinadas dando un vector constante arbitrario. La forma de estas soluciones coincide, evidentemente, con la que hallamos en el problema 1, salvo la única diferencia de que en el campo \mathbf{H}_e hay que suprimir el término constante, puesto que en el infinito ha de ser $\mathbf{H} = 0$. Además, k es ahora una cantidad real ($k^2 = 4\pi\sigma\gamma/c^2$) y el vector \mathbf{H} representa el papel de vector constante arbitrario. De la condición de contorno $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_e$ para $r = a$ se deducen dos ecuaciones que, por eliminación entre ellas de α y β , permiten hallar $\sin ka = 0$. La menor raíz no nula de esta ecuación es $ka = \pi$, de modo que el valor γ mínimo es

$$\gamma = \pi c^2 / 4\sigma a^2.$$

§ 46. Efecto pelicular

Consideremos la distribución de la densidad de corriente en la sección de un conductor por el que circula una corriente total variable diferente de cero. Basándonos en los resultados obtenidos en el párrafo que precede, podemos esperar que, al aumentar la frecuencia, la corriente se concentrará fundamentalmente cerca de la superficie del conductor. Este fenómeno se llama *efecto pelicular*.

La solución exacta del problema que plantea el efecto pelicular depende, en general, no sólo de la forma del conductor, sino también de la manera de excitar las corrientes en él, es decir, de la naturaleza del campo magnético variable exterior que induce la corriente. Sin embargo, existe un caso importante en el que la distribución de la corriente se puede considerar independiente del procedimiento adoptado para excitarla. Se trata de la corriente en un conductor cuyo grosor es pequeño comparado con su longitud.

Al calcular la distribución de la corriente en la sección de un conductor fino, éste se puede suponer rectilíneo. Entonces el campo eléctrico es paralelo al eje del conductor y el vector magnético \mathbf{H} se encuentra en un plano perpendicular al eje.

Consideremos un conductor de sección circular. Este caso es particularmente simple debido a que el campo fuera del conductor es evidente a priori. En efecto, en virtud de la simetría, sobre la superficie del conductor $\mathbf{E} = \text{const}$ (en cada instante). Pero para esta condición de contorno las ecuaciones $\text{div } \mathbf{E} = 0$, $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ tienen fuera del conductor solamente la solución $\mathbf{E} = \text{const}$ en todo el espacio. Por causas análogas, también el campo magnético en torno del conductor será el mismo que existiría cuando por él circula una corriente constante igual al valor instantáneo dado de la corriente variable.

Dentro del conductor el campo eléctrico satisface la ecuación

$$\Delta \mathbf{E} = (4\pi\sigma/c^2)\partial \mathbf{E}/\partial t,$$

que coincide con la ecuación (45.6) para \mathbf{H} (se obtiene eliminando \mathbf{H} entre las ecuaciones (45.1) y (45.4) de igual manera como se obtuvo la ecuación (45.6) eliminando \mathbf{E}). En un sistema de coordenadas cilíndricas cuyo eje z coincide con el eje del conductor, el campo \mathbf{E} tiene sólo la componente z y depende únicamente de la coordenada r . Para un campo periódico de frecuencia ω se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) + k^2 E = 0, \quad k = \frac{\sqrt{(2i)}}{\delta} = \frac{1+i}{\delta}, \quad (46.1)$$

donde δ es la profundidad de penetración (45.16) introducida en el párrafo anterior. La solución de esta ecuación que se conserva finita para $r = 0$ es

$$E = E_z = \text{const} \times J_0(kr)e^{-i\omega t} \quad (46.2)$$

(J_0 es una función de Bessel). De acuerdo con la misma ley se distribuye la densidad de corriente $j = \sigma E$.

En cuanto al campo magnético $H_\phi = H$, éste se encuentra a partir del eléctrico de acuerdo con la ecuación (45.1):

$$i\omega H_\phi/c = (\text{rot } \mathbf{E})_\phi = -\partial E_z/\partial r. \quad (46.3)$$

Teniendo en cuenta que $J_0'(u) = -J_1(u)$, obtendremos

$$H = H_\phi = -\text{constante} \times i\sqrt{(4\pi\sigma i/\omega)} J_1(kr) e^{-i\omega t}, \quad (46.4)$$

con la misma constante que en (46.2). Es fácil determinar ésta partiendo de la condición de que sobre la superficie del conductor ha de ser $H = 2I/ca$, donde a es su radio, $e I$ la corriente total que lo recorre.

En el caso límite de frecuencias bajas ($a/\delta \ll 1$), en toda la sección del conductor cabe limitarse a los primeros términos del desarrollo de la función de Bessel:

$$\begin{aligned} E_z &= \text{constante} \times \left[1 - \frac{1}{2}i(r/\delta)^2 - \frac{1}{16}(r/\delta)^4 \right] e^{-i\omega t}, \\ H_\phi &= \text{constante} \times \frac{2\pi\sigma}{c} r \left[1 - \frac{1}{4}i(r/\delta)^2 - \frac{1}{48}(r/\delta)^4 \right] e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (46.5)$$

La amplitud E , y con ella también la amplitud de densidad de corriente, crece con la distancia al eje proporcionalmente a $\left[1 + \left(\frac{r}{2\delta} \right)^4 \right]$.

En el caso límite opuesto de altas frecuencias ($a/\delta \gg 1$), en la mayor parte de la sección del conductor cabe utilizar la conocida fórmula asintótica

$$J_0[u\sqrt{(2i)}] \sim u^{-\frac{1}{2}} e^{(1-i)u}, \quad (46.6)$$

que es aplicable para grandes valores del argumento de la función de Bessel. Conservando solamente el factor exponencial rápidamente variable, obtendremos

$$\begin{aligned} E_z &= \text{constante} \times e^{-(a-r)/\delta} e^{i(a-r)/\delta - i\omega t}, \\ H_\phi &= \text{constante} \times (1+i) \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} e^{-(a-r)/\delta} e^{i(a-r)/\delta - i\omega t}. \end{aligned} \quad (46.7)$$

Estas fórmulas, naturalmente, coinciden con las fórmulas (45.15) a (45.17) que son aplicables cerca de la superficie de un conductor de forma cualquiera si el efecto pelicular es intenso.

En el caso de un conductor de sección no circular, el cálculo exacto del efecto pelicular plantea un problema considerablemente más complicado, puesto que exige determinar el campo a la vez, tanto en el interior, como en el exterior del conductor. Sólo en el caso límite de un efecto pelicular intenso es de nuevo posible simplificar el problema, puesto que el campo fuera del conductor puede determinarse a priori como campo estático en torno de un superconductor de igual forma (§ 45).

§ 47. Resistencia compleja

Hasta aquí, mientras la frecuencia de la corriente variable se ha supuesto suficientemente pequeña, el valor instantáneo de la intensidad de la corriente $J(t)$ en un circuito lineal se determina por el valor de la fuerza electromotriz $\mathcal{E}(t)$ en el mismo instante de acuerdo con

$$\mathcal{E}(t) = R J(t), \quad (47.1)$$

donde R es la resistencia del conductor a una corriente constante.

Mas para frecuencias arbitrarias no hay razón alguna para esperar que exista ligamen directo entre los valores de \mathcal{E} y J en, precisamente, el mismo instante. Sólo cabe afirmar que el valor $J(t)$ debe depender linealmente de los valores de $\mathcal{E}(t)$ en todos los instantes anteriores. Representemos simbólicamente este ligamen en la forma $J = \hat{Z}^{-1}\mathcal{E}$, o bien, para la correspondencia inversa

$$\mathcal{E} = \hat{Z}J, \quad (47.2)$$

donde \hat{Z} es un cierto operador lineal*. Si las funciones $\mathcal{E}(t)$ y $J(t)$ se desarrollan en integrales de Fourier, para cada una de sus componentes «monocromáticas» (que dependen del tiempo a través del factor $e^{-i\omega t}$) el resultado de aplicar el operador \hat{Z} se reduce, en virtud del carácter lineal de este último, a multiplicar por una cierta magnitud Z que depende del valor de la frecuencia:

$$\mathcal{E} = Z(\omega)J. \quad (47.3)$$

La función $Z(\omega)$ es, en general, compleja. Ha recibido el nombre de *resistencia compleja* o *impedancia* del conductor.

De la comparación de (47.3) con (47.1) resulta claro que la resistencia ordinaria R es el término de grado cero del desarrollo de la función $Z(\omega)$ en potencias de ω . Para determinar el término siguiente hay que tener en cuenta, junto con R , también la autoinductancia L del conductor**.

Consideremos un circuito lineal en el que actúa una fuerza electromotriz variable $\mathcal{E}(t)$. Por definición de ésta, el trabajo efectuado en 1 s por el campo eléctrico sobre las cargas que se mueven en el conductor viene dado por el producto $\mathcal{E}J$. Este trabajo se transforma en parte en calor de Joule, y en parte se gasta en cambiar la energía del campo magnético de la corriente. Por la propia definición de R y L , el calor de Joule liberado en el conductor en 1 s es RJ^2 y la energía magnética de la corriente vale $LJ^2/2c^2$. La ley de conservación de la energía se expresa así por la ecuación

$$\mathcal{E}J = RJ^2 + \frac{d}{dt} \frac{LJ^2}{2c^2} = RJ^2 + \frac{1}{c^2} LJ \frac{dJ}{dt},$$

* No nos detendremos aquí a considerar las propiedades generales de este operador, dado que son por completo análogas a las del operador $\hat{\epsilon}$, que se expondrán detalladamente en los §§ 58 y 62.

** Aquí y en lo que sigue, entendemos por R y L los valores correspondientes a una corriente continua.

o bien

$$\mathcal{E} = RJ + \frac{1}{c^2} L \frac{dJ}{dt}. \quad (47.4)$$

Al operar con las expresiones cuadráticas ($\mathcal{E}J, J^2$), hay que escribir \mathcal{E} y J como funciones reales. Pero una vez obtenida la ecuación lineal (47.4), cabe pasar a componentes monocromáticas en la representación compleja: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$, $J = J_0 e^{-i\omega t}$. La ecuación (47.4) se reduce entonces a la relación algebraica

$$\mathcal{E} = \left(R - \frac{i}{c^2} \omega L \right) J,$$

de donde

$$Z = R - \frac{i}{c^2} \omega L. \quad (47.5)$$

Separando en la igualdad $J = \mathcal{E}/Z$ la parte real, obtendremos

$$J(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2/c^4)}} \cos(\omega t - \phi), \quad \operatorname{tg} \phi = \omega L/c^2 R, \quad (47.6)$$

lo que permite determinar la amplitud de la corriente y la diferencia de fase entre la corriente y la fuerza electromotriz.

La parte real de la expresión (47.5) coincide con la resistencia R que determina la disipación de energía en el circuito. Es fácil ver que también en el caso general de una dependencia arbitraria $Z(\omega)$ se tiene una relación análoga entre $\operatorname{Re} Z$ y la energía disipada (para una intensidad dada de la corriente).

Promediando respecto del tiempo la potencia $\mathcal{E}J$ requerida para mantener en el circuito la corriente periódica, hallamos aquella parte de dicha potencia que continuamente se gasta en compensar las pérdidas por disipación. De esta manera, la energía Q disipada por segundo en el circuito vale:

$$Q = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathcal{E}J^*),$$

donde \mathcal{E} y J se expresan en forma compleja (cf. la nota en la pág. 227). Substituyendo aquí $\mathcal{E} = ZJ$ y designando las partes real e imaginaria de Z por Z' y Z'' , respectivamente*,

$$Z = Z' + iZ'', \quad (47.7)$$

obtendremos

$$Q = \frac{1}{2} Z' |J|^2$$

o bien, mediante la función real $J(t)$,

$$Q = Z'(\omega) \bar{J}^2, \quad (47.8)$$

* Llamadas a veces resistencia *activa* y *reactiva* o, más generalmente, *resistencia* y *reactancia*.

con lo que queda establecida la relación buscada.

Obsérvese que, por ser Q una magnitud definida positiva, también Z' será siempre positiva:

$$Z' > 0. \quad (47.9)$$

Calculemos $Z(\omega)$ para un conductor de sección circular en el caso de frecuencias cualesquiera*, esto es, sin prescindir al hacerlo del efecto pelicular. Utilizaremos de nuevo para ello la ley de conservación de la energía, si bien en otra forma.

Descompongamos la potencia $\mathcal{E}J$ (\mathcal{E} y J son expresiones reales) en dos términos, uno de los cuales representa ahora la variación de la energía del campo magnético fuera del conductor, y la otra, la energía total absorbida en el interior de éste (tanto en la variación de la energía del campo en él, como en la liberación de calor). La segunda parte se puede calcular como flujo total de energía que penetra por segundo en el conductor a través de su superficie. Obtendremos así

$$\mathcal{E}J = \frac{d}{dt} \left(\frac{L_e J^2}{2c^2} \right) + \frac{cEH}{4\pi} \cdot 2\pi a l = \frac{L_e}{c^2} J \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{2} cEHal,$$

donde L_e es la parte exterior de la autoinducción del conductor, E y H las intensidades de los campos eléctrico y magnético sobre su superficie, a su radio y l su longitud. El campo H está ligado con la corriente J por la igualdad $H = 2J/ca$. Por consiguiente, dividiendo la igualdad por J , obtendremos

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c^2} L_e \frac{dJ}{dt} + El.$$

Esta ecuación es lineal y cabe, por lo tanto, pasar a la representación compleja de las magnitudes. Entonces

$$\mathcal{E} = ZJ = -\frac{i\omega L_e}{c^2} J + El,$$

de donde

$$Z = -\frac{i\omega}{c^2} L_e + \frac{El}{J} = -\frac{i\omega}{c^2} L_e + \frac{2El}{caH}. \quad (47.10)$$

Para frecuencias arbitrarias hay que substituir aquí las expresiones de E y H dadas por (46.2) y (46.4):

$$Z = -\frac{i\omega}{c^2} L_e + \frac{1}{2} Rka \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)} \quad (47.11)$$

($R = l/\pi a^2 \sigma$). Si el efecto pelicular es débil, aplicaremos los desarrollos (46.5); efectuando el cálculo con una precisión que alcanza los términos del orden de $(a/\delta)^4$

* Pero, claro está, tales que se cumplen las condiciones de cuasiestacionariedad.

y separando la parte real, resulta

$$Z' = R \left[1 + \frac{1}{48} \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 \right] = R \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\pi \sigma \omega a^2}{c^2} \right)^2 \right]. \quad (47.11a)$$

En el caso opuesto de un efecto pelicular intenso, mediante las expresiones (46.7) se obtiene

$$\begin{aligned} Z' &= Ra/2\delta = (l/ca)\sqrt{(\omega/2\pi\sigma)}, \\ Z'' &= -\frac{\omega}{c^2} \left[L_e + \frac{2\delta}{a} L_i \right] = -\frac{\omega}{c^2} \left[L_e + \frac{lc}{a\sqrt{(2\pi\sigma\omega)}} \right]. \end{aligned} \quad (47.12)$$

Por (47.11a) se ve que podemos hacer $Z' = R$ si

$$(\pi \sigma \omega a^2 / c^2)^2 \ll 12.$$

Al mismo tiempo

$$Z''/Z' = \omega L/c^2 R = (\pi \sigma \omega a^2 / c^2) 2 \ln(l/a)$$

(L se toma de (33.1)). Comparando con la desigualdad que precede, vemos que la región de frecuencias en la que es necesario utilizar la expresión (47.5), sin que se pueda prescindir en ella de la autoinducción, depende de la razón l/a y es relativamente estrecha.

En la práctica, sin embargo, el caso más importante es aquel en que la autoinducción del circuito se debe fundamentalmente a los carretes incluidos en el mismo, que poseen una autoinductancia elevada respecto de la de un conductor no arrollado (véase § 33). En tales circuitos el intervalo de frecuencias en el que debe aplicarse la fórmula (47.5) (es decir, la ecuación (47.4) con R y L constantes) es bastante amplio.

Consideremos un circuito que se encuentra en un campo magnético variable exterior \mathbf{H}_e , cuyo origen puede ser cualquiera. Designaremos por \mathbf{E}_e el campo eléctrico que induciría el campo variable \mathbf{H}_e si no existieran conductores. Tanto \mathbf{H}_e como \mathbf{E}_e varían muy poco en la sección de un conductor delgado (en contraste con el campo propio de las corrientes que pasan por el mismo). Por ello es posible considerar la circulación de \mathbf{E}_e a lo largo del circuito de la corriente sin precisar por dónde pasa precisamente este contorno dentro del conductor. Esta circulación no es sino la fuerza electromotriz \mathcal{E} inducida en el circuito por el campo magnético variable exterior. Según la forma integral de la ecuación de Maxwell, se tiene

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{H}_e \cdot df = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_e}{dt}, \quad (47.13)$$

donde Φ_e es el flujo del campo exterior a través del circuito considerado. Substituyendo esta expresión en la ecuación (47.4), obtendremos

$$RJ + \frac{1}{c^2} L \frac{dJ}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_e}{dt}. \quad (47.14)$$

Si pasamos el término que contiene la autoinducción al segundo miembro de la igualdad, esta ecuación se escribe en la forma

$$RJ = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_e}{dt} - \frac{L}{c^2} \frac{dJ}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt},$$

donde $\Phi = \Phi_e + \frac{1}{c} LJ$ es el flujo magnético total, el debido tanto al campo magnético exterior como al campo propio de la corriente. En esta forma la ecuación expresa la ley de Ohm para el circuito en conjunto, es decir, la igualdad entre RJ y la fuerza electromotriz total en el circuito.

La formulación de la ecuación (47.14) como expresión de la ley de Ohm permite generalizarla al caso en que, en el curso del tiempo, cambia también la forma del propio circuito conductor. En tal caso será también función del tiempo la autoinductancia L y en vez de (47.14) habrá que escribir

$$RJ = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (LJ) - \frac{1}{c} \frac{d\Phi_e}{dt}. \quad (47.15)$$

Sin embargo, al deducir (47.15) de la ley de conservación de la energía sería necesario tener en cuenta, además, el trabajo gastado en la deformación del conductor.

Si se tiene un cierto número de circuitos colocados próximos entre sí y por los que circulan corrientes J_a , para cada uno de ellos el papel de Φ_e en la ecuación (47.14) lo representa la suma de los flujos magnéticos de los demás circuitos (y del campo exterior, si éste existe). El flujo magnético debido a la corriente J_b a través del circuito de la corriente J_a , es $L_{ab}J_b/c$, donde L_{ab} es la inductancia mutua de los dos circuitos. Obtenemos así el siguiente sistema de ecuaciones para la corriente variable en los circuitos:

$$R_a J_a + \frac{1}{c^2} \sum_b L_{ab} \frac{dJ_b}{dt} = \mathcal{E}_a. \quad (47.16)$$

La suma respecto de b incluye también el término de autoinducción ($b = a$), y \mathcal{E}_a es la fuerza electromotriz determinada en el circuito a -ésimo por las fuentes exteriores al sistema de corrientes considerado.

Para corrientes periódicas (monocromáticas) el sistema de ecuaciones diferenciales (47.16) se reduce al sistema de ecuaciones algebraicas

$$\sum_b Z_{ab} J_b = \mathcal{E}_a, \quad (47.17)$$

donde las magnitudes

$$Z_{ab} = \delta_{ab} R_a - \frac{i\omega}{c^2} L_{ab} \quad (47.18)$$

constituyen la *matriz impedancia*. Análogamente a (47.5), las expresiones (47.18) constituyen los primeros términos del desarrollo de las funciones $Z_{ab}(\omega)$ en potencias de la frecuencia.