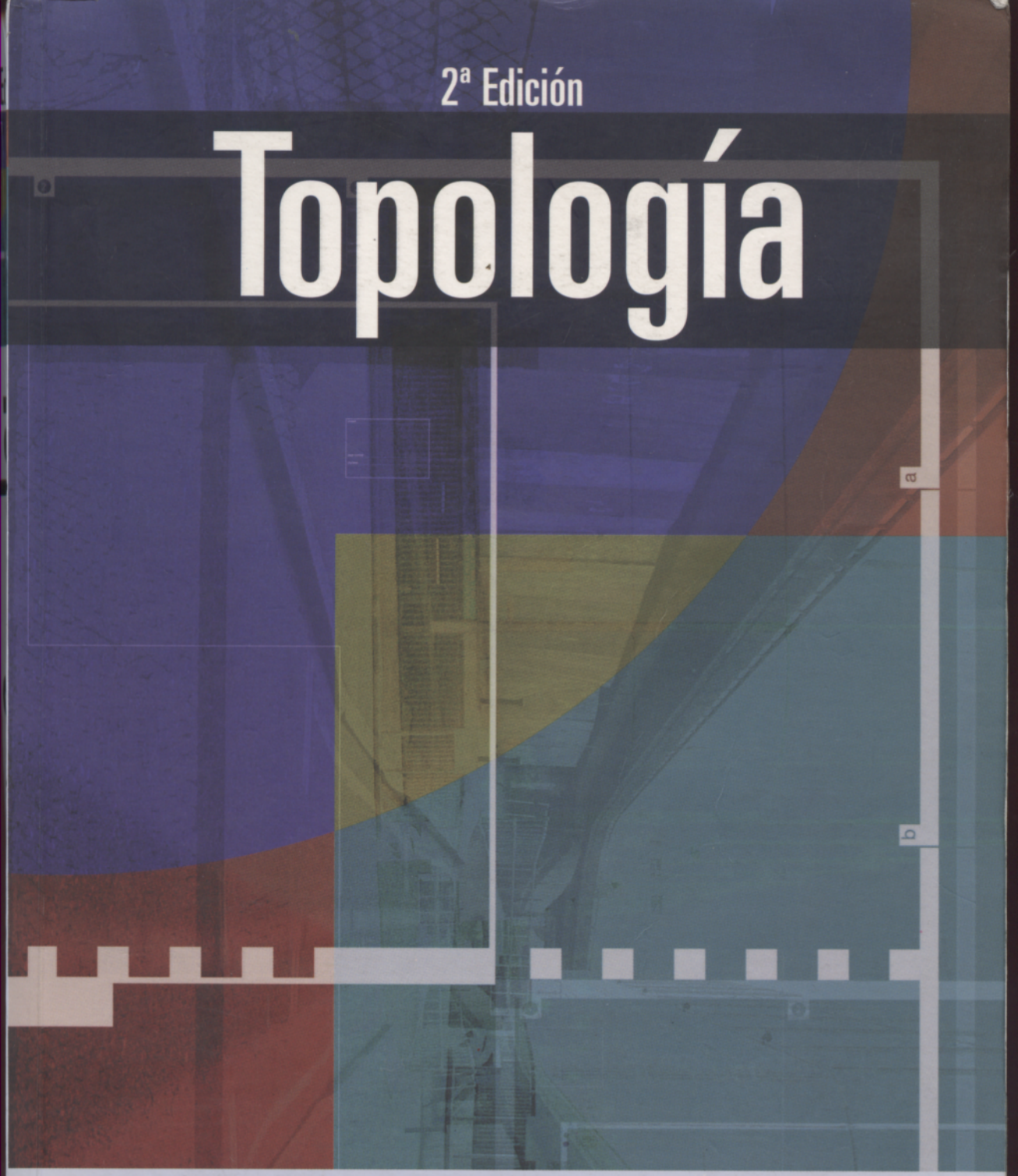
2ª Edición

Topología



Prentice Hall

James R. Munkres

Topología

Topología

2.ª edición

James R. Munkres

Massachusetts Institute of Technology

Traducción

Ángel Ferrández Izquierdo
Pascual Lucas Saorín
Miguel Ángel Meroño Bayo
M.ª de los Ángeles Hernández Cifre
José Antonio Pastor González
David Cegarra Hernández

Universidad de Murcia

Prentice Hall

Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo
San Juan • San José • Santiago • São Paulo • White Plains

Datos de catalogación bibliográfica

MUNKRES, J. R.
TOPOLOGÍA. 2.ª edición

PEARSON EDUCACIÓN, S. A., Madrid, 2002

ISBN: 84-205-3180-0
Materia: Topología 515.1

Formato 170 × 240 Páginas: 624

Todos los derechos reservados.
No está permitida la reproducción total o parcial de esta obra
ni su tratamiento o transmisión por cualquier medio o método,
sin autorización escrita de la Editorial.

DERECHOS RESERVADOS
© 2002 PEARSON EDUCACIÓN, S. A.
Núñez de Balboa, 120
28006 MADRID

PRENTICE HALL es un sello editorial autorizado de PEARSON EDUCACIÓN, S. A.

MUNKRES, J. R.
TOPOLOGÍA. 2.ª edición

ISBN: 84-205-3180-4
Depósito legal: M. 42.575-2001

Traducido de:
TOPOLOGY 2nd ed.
Copyright© 2000, by Prentice Hall, Inc.
ISBN: 0-13-181629-2

Edición en español
Equipo editorial:
Editora: Isabel Capella
Asistente editorial: Sonia Ayerra
Equipo de producción:
Director: José A. Clares
Técnico: José Hernán
Equipo de diseño: Mario Guindel, Yann Boix y Lía Sáenz
Impreso por: Gráficas Rógar, S. A.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Prentice Hall

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

Para Bárbara

Contenidos

Prólogo XI

Una nota para el lector XV

Parte I TOPOLOGÍA GENERAL

Capítulo 1 Teoría de conjuntos y lógica 3

1 Conceptos fundamentales 3
2 Funciones 16
3 Relaciones 23
4 Los enteros y los números reales 33
5 Productos cartesianos 40
6 Conjuntos finitos 44
7 Conjuntos numerables y no numerables 50
*8 El principio de definición recursiva 59
9 Conjuntos infinitos y el axioma de elección 64
10 Conjuntos bien ordenados 70
*11 El principio del máximo 77
*Ejercicios complementarios: el buen orden 82

Capítulo 2 Espacios topológicos y funciones continuas 85

12 Espacios topológicos 85
13 Base de una topología 88
14 La topología del orden 95
15 La topología producto sobre $X \times Y$ 98
16 La topología de subespacio 101

17 Conjuntos cerrados y puntos límite 105
18 Funciones continuas 116
19 La topología producto 128
20 La topología métrica 135
21 La topología métrica (continuación) 146
*22 La topología cociente 154
*Ejercicios complementarios: grupos topológicos 164

Capítulo 3 Conexión y compacidad 167
23 Espacios conexos 168
24 Subespacios conexos de la recta real 173
*25 Componentes y conexión local 181
26 Espacios compactos 186
27 Subespacios compactos de la recta real 196
28 Compacidad por punto límite 203
29 Compacidad local 207
*Ejercicios complementarios: redes 213

Capítulo 4 Axiomas de separación y numerabilidad 216
30 Los axiomas de numerabilidad 217
31 Los axiomas de separación 223
32 Espacios normales 228
33 El lema de Urysohn 236
34 El teorema de metrización de Urysohn 245
*35 El teorema de extensión de Tietze 250
*36 Embebimientos de variedades 256
*Ejercicios complementarios: revisión de lo básico 260

Capítulo 5 El teorema de Tychonoff 262
37 El teorema de Tychonoff 262
38 La compactificación de Stone-Čech 270

Capítulo 6 Paracompacidad y teoremas de metrización 277
39 Finitud local 278
40 El teorema de metrización de Nagata-Smirnov 283

41 Paracompacidad 288
42 El teorema de metrización de Smirnov 298

Capítulo 7 Espacios métricos completos y espacios de funciones 300
43 Espacios métricos completos 301
*44 Una curva que llena el espacio 310
45 Compacidad en espacios métricos 313
46 Convergencia puntual y convergencia compacta 321
47 El teorema de Ascoli 331

Capítulo 8 Espacios de Baire y teoría de la dimensión 335
48 Espacios de Baire 336
*49 Una función no diferenciable en ningún punto 342
50 Introducción a la teoría de la dimensión 347
*Ejercicios complementarios: espacios localmente euclídeos 361

Parte II TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

Capítulo 9 El grupo fundamental 365
51 Homotopía de caminos 366
52 El grupo fundamental 375
53 Espacios recubridores 381
54 El grupo fundamental del círculo 388
55 Retracciones y puntos fijos 395
*56 El teorema fundamental del álgebra 401
*57 El teorema de Borsuk-Ulam 404
58 Retractos de deformación y tipo de homotopía 408
59 El grupo fundamental de S^n 417
60 Los grupos fundamentales de algunas superficies 420

Capítulo 10 Teoremas de separación en el plano 427
61 El teorema de separación de Jordan 427
*62 Invariancia del dominio 433
63 El teorema de la curva de Jordan 437
64 Grafos embebidos en el plano 447

65 El número de rotación de una curva simple cerrada 452
66 La fórmula integral de Cauchy 457

Capítulo 11 El teorema de Seifert-van Kampen 462
67 Sumas directas de grupos abelianos 462
68 Productos libres de grupos 468
69 Grupos libres 478
70 El teorema de Seifert-van Kampen 483
71 El grupo fundamental de una unión por un punto de círculos 492
72 Añadiendo una 2-celda 497
73 Los grupos fundamentales del toro y del sombrero de asno 501

Capítulo 12 Clasificación de superficies 506
74 Grupos fundamentales de superficies 506
75 Homología de superficies 515
76 Cortar y pegar 518
77 El teorema de clasificación 523
78 Construcción de superficies compactas 532

Capítulo 13 Clasificación de espacios recubridores 539
79 Equivalencia de espacios recubridores 540
80 El espacio recubridor universal 547
*81 Transformaciones recubridoras 550
82 Existencia de espacios recubridores 558
*Ejercicios complementarios: propiedades topológicas y π_1 563

Capítulo 14 Aplicaciones a la teoría de grupos 566
83 Espacios recubridores de un grafo 566
84 El grupo fundamental de un grafo 571
85 Subgrupos de grupos libres 580

Bibliografía 583

Índice analítico 585

Prólogo

Este libro pretende servir como texto para un curso de introducción a la topología.

La topología, además del interés que tiene por sí misma, sirve para establecer los fundamentos para futuros estudios en análisis, geometría y topología algebraica. No existe un acuerdo general entre los matemáticos en cuanto al contenido de un primer curso de topología; existen muchos tópicos que son apropiados para un curso de tales características y no todos son igual de relevantes para los diferentes propósitos. En la elección del material considerado se ha tratado de establecer un equilibrio entre los diferentes puntos de vista.

Prerrequisitos. No se requieren conocimientos previos formales para estudiar la mayor parte de este libro. Ni siquiera se supone que el lector sepa mucho sobre teoría de conjuntos. Dicho esto, hay que apresurarse en añadir que salvo que el lector haya estudiado algo de análisis o "cálculo riguroso", mucha de la motivación para los conceptos introducidos en la primera parte del libro se perderá. Las cosas irán más suavemente si se ha tenido alguna experiencia con funciones continuas, conjuntos abiertos y cerrados, espacios métricos y cosas por el estilo, aunque ninguna de ellas se supondrá. En la Parte II suponemos cierta familiaridad con la teoría de grupos.

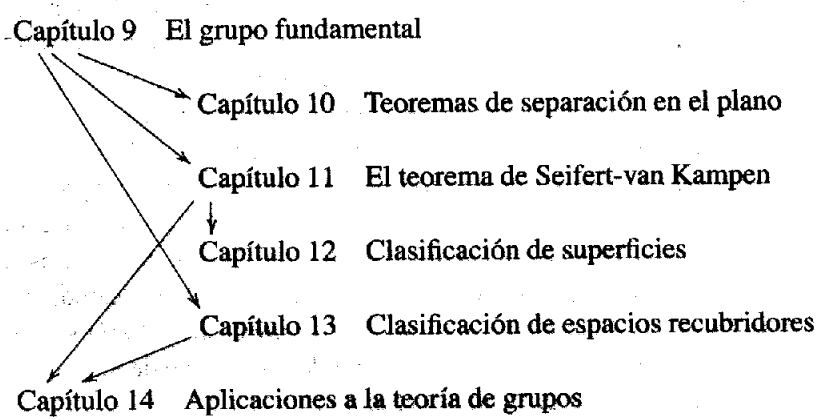
La mayoría de los estudiantes en un curso de topología tienen, por la propia experiencia del autor, algún conocimiento de los fundamentos de la matemática, que varía mucho de un estudiante a otro. Por tanto, comenzamos con un capítulo bastante minucioso sobre teoría de conjuntos y lógica. Se inicia con un nivel elemental y prepara el terreno a un nivel que podríamos llamar "semi-sofisticado". Se tratan aquellos tópicos (y sólo aquellos) que se necesitarán más tarde en el libro. La mayoría de los estudiantes estarán familiarizados con el material de las primeras secciones, pero muchos de ellos verán que su pericia desaparece alrededor de la mitad del capítulo. Cuánto tiempo y esfuerzo necesitará el instructor en este capítulo dependerá en gran medida de la sofisticación matemática y experiencia de los estudiantes. La habilidad para hacer los ejercicios con rapidez (y corrección) debería servir como un criterio razonable para determinar si el dominio del estudiante de teoría de conjuntos es suficiente para comenzar el estudio de topología.

Muchos estudiantes (e instructores) preferirían saltarse el material de fundamentos del Capítulo 1 y pasar al estudio de topología. Si se ignoran los fundamentos, se corre el riesgo de confusiones y errores posteriores. Lo que se *puede* hacer es considerar inicialmente solamente aquellas secciones que se necesitarán enseguida, posponiendo el resto hasta que haga falta. Las primeras siete secciones (sobre numerabilidad) se necesitan a lo largo del libro; habitualmente, alguna de ellas se recomienda de lectura, explicando en clase el resto. Las secciones 9 y 10, sobre el axioma de elección y el buen orden, no hacen falta hasta la discusión de la compacidad en el Capítulo 3. La sección 11, sobre el principio del máximo, se puede posponer aún más; se necesitará sólo para el teorema de Tychonoff (Capítulo 5) y el teorema sobre el grupo fundamental de un grafo lineal (Capítulo 14).

Cómo está organizado el libro. Este libro puede ser utilizado para diferentes cursos. Se ha intentado una organización tan flexible como ha sido posible, de manera que permita al instructor seguir sus propias preferencias.

La Parte I, formada por los primeros ocho capítulos, está dedicada a lo que ordinariamente se conoce como topología general. Los primeros cuatro capítulos tratan con el material que, en opinión del autor, deberían incluirse en cualquier curso de introducción a la topología, digno del nombre. Este puede ser considerado el "núcleo irreducible" de la asignatura, estudiando teoría de conjuntos, espacios topológicos, conexión, compacidad (considerando la compacidad de productos finitos) y los axiomas de numerabilidad y separación (incluyendo el teorema de metrización de Urysohn). Los restantes cuatro capítulos de la Parte I exploran tópicos adicionales; son esencialmente independientes entre sí, dependiendo únicamente del núcleo de los Capítulos 1-4. El instructor puede seleccionarlos en el orden que le parezca.

La Parte II constituye una introducción a la Topología Algebraica. Sólo depende del núcleo de los Capítulos 1-4. Esta parte del libro trata con cierta minuciosidad los conceptos de grupo fundamental y espacio recubridor, junto con sus muchas y variadas aplicaciones. Algunos capítulos de la Parte II son independientes entre sí; la dependencia entre ellos queda reflejada en el siguiente diagrama:



Algunas secciones del libro están señaladas con un asterisco; significa que se pueden omitir o posponer sin pérdida de continuidad. Lo mismo sucede con algunos teoremas. Toda dependencia de material posterior de estas secciones o teoremas señalados queda indicada, así como los resultados que se necesitan. Algunos ejercicios también dependen del material previamente señalado, aunque en tales casos la dependencia resulta obvia.

Conjuntos de ejercicios complementarios aparecen al final de varios de los capítulos. Ellos dan la oportunidad de explorar tópicos que se separan un poco de la línea principal del libro; un estudiante ambicioso podría servirse de uno de ellos para escribir un artículo independiente o un proyecto de investigación. La mayoría son bastante autocontenidos, pero el de grupos topológicos tiene como consecuencia un número de ejercicios adicionales sobre el tópico que aparecen en secciones posteriores del libro.

Posibles esquemas de cursos. La mayoría de los instructores que utilizan este texto para un curso de topología general desean cubrir los Capítulos 1-4, junto con el teorema de Tychonoff del Capítulo 5. Otros muchos también explicarán otros tópicos, por ejemplo, los siguientes: la compactificación de Stone-Čech (§38), los teoremas de metrización (Capítulo 6); la curva de Peano (§44), el teorema de Ascoli (§45 y/o §47) y la teoría de la dimensión (§50). El autor ha seguido, en diferentes cursos, cada una de estas posibles opciones.

Un curso de topología algebraica debería cubrir la mayoría de la Parte II.

Es también posible tratar ambos aspectos de topología en un sólo curso, a costa de no profundizar demasiado. Un esquema factible para un tal curso estaría formado por los Capítulos 1–3, seguido del 9; este último no depende del material del Capítulo 4. (Las secciones no señaladas con asterisco de los Capítulos 10 y 13 tampoco dependen del Capítulo 4.)

Comentarios a esta edición. El lector familiarizado con la primera edición de este libro no encontrará cambios sustanciales en la parte de esta nueva edición relativa a la topología general. El autor se ha limitado en gran medida a la "sintonización fina" del texto y los ejercicios. Sin embargo, el capítulo final de la primera edición, que trataba la topología algebraica, ha sido sustancialmente ampliado y reescrito, convirtiéndose en la Parte II de la nueva edición. Desde que apareció la primera edición, se ha generalizado la costumbre de ofrecer dos cursos de topología, el primero dedicado a la topología general y el segundo a la algebraica. Con objeto de ampliar el tratamiento de esta última, el autor ha intentado que esta revisión responda a las necesidades de un curso de tales características.

Agradecimientos. La mayoría de los topólogos con los que el autor ha estudiado, o cuyos libros ha leído, han contribuido, de una u otra manera, en este libro. Solamente

se citan a Edwin Moise, Raymond Wilder, Gail Young y Raoul Bott, pero existen otros muchos. Por sus provechosos comentarios relativos a este libro, el autor muestra su agradecimiento a Ken Brown, Russ McMillan, Robert Mosher y John Hemperly, así como a sus colegas George Whitehead y Kenneth Hoffman.

El tratamiento de la topología algebraica ha sido sustancialmente influenciado por el excelente libro de William Massey, [M], a quien el autor expresa su gratitud. Finalmente, también agradece a Adam Lewenberg de MacroTeX su extraordinaria habilidad y paciencia en la composición del texto y las figuras mágicas.

Pero sobre todo, sus más sinceros agradecimientos para sus estudiantes. El autor ha aprendido de ellos al menos tanto como ellos de él; sin ellos este libro sería muy diferente.

Una nota para el lector

Dos cosas requieren comentario: los ejercicios y los ejemplos.

Los problemas constituyen una parte crucial del aprendizaje de las matemáticas. Nadie puede aprender topología estudiando detenidamente las definiciones, teoremas y ejemplos resueltos en el texto. Parte de ellos deberían ser resueltos por uno mismo. El propósito de los ejercicios es dar esa oportunidad.

La dificultad de ellos varía, siendo habitualmente los primeros los más fáciles. Algunos son de verificación rutinaria, diseñados para poner a prueba si el lector ha comprendido las definiciones y ejemplos de la sección que les precede. Otros son de menor rutina. Algunos, por ejemplo, piden la generalización de un teorema del texto. Aunque el resultado obtenido puede ser interesante en sí mismo, el principal propósito de un ejercicio semejante es animar al lector a que trabaje con cuidado la demostración en cuestión, dominando sus ideas a fondo —más a fondo (se espera) que la simple memorización demandaría.

Algunos ejercicios están enunciados de una forma "abierta-cerrada". A menudo los estudiantes encuentran esta práctica decepcionante. Cuando se encuentran con un ejercicio que pregunta: "¿es normal todo espacio de Lindelöf regular?", ellos responden con desesperación: "¡no sé qué se supone que debo hacer! ¿Se supone que debo probarlo, o encontrar un contraejemplo, o qué?". Pero la matemática (más allá de los textos) es habitualmente como esto. Muy a menudo, todo matemático ha de trabajar con una conjetura o cuestión y no sabe cuál es la respuesta correcta. El lector debería tener alguna experiencia con una situación semejante.

Algunos ejercicios, que son más difíciles que el resto, están señalados con asteriscos. Pero ninguno llega a ser tan difícil como para que el mejor estudiante de la clase no lo pueda resolver.

Otra parte importante del dominio de cualquier asunto matemático consiste en la adquisición de un repertorio de ejemplos útiles. Por supuesto, uno debería llegar a conocer aquellos ejemplos destacados de cuyo estudio se deriva la propia teoría y sobre los cuales se apoyan las aplicaciones importantes. Pero también se debería tener a mano unos cuantos contraejemplos con los cuales poder someter a prueba conjeturas plausibles.

Ahora bien, al estudiar topología es fácil emplear demasiado tiempo trabajando con "extraños contraejemplos". Su construcción requiere ingenuidad y a menudo es divertido. Pero no son ellos el objeto de la topología. Afortunadamente, no se necesitan demasiados de tales contraejemplos en un primer curso; existe una lista corta y completa que bastará para nuestros propósitos. Son los siguientes:

$\mathbb{R}^J$ el producto de la recta real consigo mismo, con las topologías producto, uniforme y por cajas.

$\mathbb{R}_\ell$ la recta real con la topología que tiene los intervalos $[a, b)$ como elementos básicos.

S_Ω el conjunto bien ordenado no numerable minimal.

I_o^2 el cuadrado unidad cerrado con la topología del orden del diccionario.

Estos son los ejemplos que se deberían dominar y recordar, y que serán explotados continuamente.

Parte I

TOPOLOGÍA GENERAL

Capítulo 1

Teoría de conjuntos y lógica

Vamos a adoptar, como hacen la mayoría de los matemáticos, un punto de vista sencillo en lo referente a la teoría de conjuntos. Supondremos que lo que se entiende por un *conjunto* de objetos es algo intuitivamente claro, y procederemos sobre esa base sin analizar el concepto en su profundidad. Un análisis de este tipo corresponde propiamente a los fundamentos de las matemáticas y a la lógica matemática, y no es nuestro propósito iniciar el estudio de esos campos.

Los especialistas en lógica han analizado la teoría de conjuntos con gran detalle y han formulado axiomas para esta materia. Cada uno de sus axiomas expresa una propiedad de los conjuntos que los matemáticos suelen aceptar, y en conjunto los axiomas proporcionan un fundamento lo bastante amplio y fuerte como para que el resto de las matemáticas puedan ser construidas sobre ellos.

Desgraciadamente es cierto que el uso descuidado de la teoría de conjuntos, confiando exclusivamente en la intuición, puede conducir a contradicciones. De hecho, una de las razones para la axiomatización de la teoría de conjuntos fue formular reglas para el tratamiento de los conjuntos que evitasen esas contradicciones. Aunque no trabajaremos con esos axiomas explícitamente, las reglas que seguimos en el manejo de conjuntos se derivan de ellos. En este libro se aprenderá a manejar conjuntos como un "aprendiz", observando cómo se tratan y trabajando con ellos. Si en algún momento se quiere estudiar la teoría de conjuntos más cuidadosamente y con gran detalle, entonces un curso de lógica o fundamentos será más adecuado.

§1 Conceptos fundamentales

Introducimos aquí las ideas básicas de la teoría de conjuntos y establecemos la terminología y la notación. También discutimos algunos puntos elementales de la lógica pues, en base a nuestra experiencia, se producen graves confusiones cuando no son conocidos de forma explícita.

Notación básica

Habitualmente utilizaremos las letras mayúsculas $A, B, \ldots$ para representar conjuntos, y las letras minúsculas para representar ***objetos*** o ***elementos*** pertenecientes a esos conjuntos. Si un objeto a pertenece a un conjunto A, expresaremos este hecho con la notación

$$a \in A.$$

Si a no pertenece a A, expresaremos esta situación escribiendo

$$a \notin A.$$

El símbolo de igualdad "=" se utiliza a lo largo de todo el libro para significar *identidad lógica*. De modo que cuando escribimos $a = b$ estamos queriendo decir que "a" y "b" son símbolos para el mismo objeto. Es la misma situación, por ejemplo, que en aritmética cuando uno escribe $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Análogamente, la ecuación $A = B$ establece que "A" y "B" son símbolos distintos para el mismo conjunto; esto es, A y B están formados precisamente por los mismos elementos.

Si a y b son objetos distintos, escribiremos $a \neq b$; si A y B son conjuntos diferentes, escribiremos $A \neq B$. Por ejemplo, si A es el conjunto de todos los números reales no negativos y B es el conjunto de los números reales positivos, entonces $A \neq B$ ya que el número 0 pertenece a A pero no a B.

Diremos que A es un ***subconjunto*** de B si cada elemento de A es también un elemento de B y expresaremos este hecho escribiendo

$$A \subset B.$$

Nada en esta definición impide que A sea diferente de B; de hecho, si $A = B$, es cierto que $A \subset B$ y que $B \subset A$. Si $A \subset B$ pero A es distinto de B, diremos que A es un ***subconjunto propio*** de B y escribiremos

$$A \subsetneq B.$$

Las relaciones $\subset$ y $\subsetneq$ se denominan ***inclusión*** e ***inclusión propia***, respectivamente. Si $A \subset B$, también se escribe $B \supset A$, y se lee "B **contiene a** A".

¿Cómo se puede especificar el contenido de un conjunto? Si el conjunto tiene únicamente unos pocos elementos, simplemente basta con enumerarlos escribiendo "A es el conjunto que contiene a los elementos a, b y c". Esta situación se escribe también

$$A = \{a, b, c\},$$

donde las llaves encierran la lista de elementos del conjunto.

De cualquier forma, la manera más común para especificar los elementos de un conjunto consiste en expresar alguna propiedad que dichos elementos verifiquen. Por

ejemplo, podemos tomar el conjunto de los números reales y construir el subconjunto B formado por todos los números enteros pares. En símbolos, esta situación se expresa

$$B = \{x \mid x \text{ es un entero par}\}.$$

Aquí las llaves significan: "el conjunto de", y la barra vertical sustituye a las palabras "tales que". La anterior igualdad se lee "B es el conjunto de los x tales que x es un entero par".

La unión de conjuntos y el significado de "o"

Dados dos conjuntos A y B, se puede construir un nuevo conjunto formado por los elementos de A junto con los elementos de B. Este conjunto se llama la ***unión*** de A y B y se representa por $A \cup B$. Formalmente, se define

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

En este punto debemos analizar detenidamente lo que queremos decir con "$x \in A$ o $x \in B$".

La palabra "o", en el español ordinario, es ambigua. El enunciado "P o Q" significa algunas veces "P o Q o ambos", y otras veces quiere decir "P o Q pero no ambos". Habitualmente, y a partir del contexto, decidimos la interpretación más apropiada. Por ejemplo, supongamos que estamos hablando con dos estudiantes de la manera siguiente:

> "Srta. Sánchez, todos los estudiantes matriculados en este curso han elegido la asignatura de álgebra lineal o la asignatura de análisis."
>
> "Sr. Marín, o consigue una puntuación de al menos 7 en el examen final o suspenderá la asignatura."

La Srta. Sánchez entiende perfectamente que todos los estudiantes se han matriculado en álgebra lineal o en análisis o en ambas asignaturas, y el Sr. Marín estaría completamente desolado si ambos enunciados pudieran cumplirse al mismo tiempo.

En matemáticas no podemos admitir esta ambigüedad. Debemos decidirnos por un significado u otro, pues de lo contrario reinaría la confusión. Los matemáticos han decidido utilizar la palabra "o" con el primer significado, de forma que la frase "P o Q" significará "P o Q o ambos simultáneamente". Si queremos indicar "P o Q pero no ambos" entonces debemos incluir explícitamente la frase "pero no ambos".

Con este significado, la ecuación que define $A \cup B$ no contiene ninguna ambigüedad; establece que $A \cup B$ está formado por los elementos x que pertenecen ya a A, ya a B, ya a ambos simultáneamente.

La intersección de conjuntos, el conjunto vacío y el significado de "si...entonces"

Dados dos conjuntos A y B, otra forma de construir un nuevo conjunto consiste en tomar la parte común de A y B. Este conjunto se llama ***intersección*** de A y B y se representa por $A \cap B$. Formalmente, se define

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Ahora bien, ¿qué ocurre cuando los conjuntos no tienen elementos en común? ¿Qué significa entonces el símbolo $A \cap B$? Para hacer frente a esta situación, necesitamos introducir un conjunto especial que llamaremos ***conjunto vacío***, el cual representaremos por $\varnothing$. El conjunto vacío, tal y como indica su nombre, es el conjunto "que no tiene elementos".

Utilizando esta notación, expresaremos el hecho de que A y B no tengan elementos en común escribiendo

$$A \cap B = \varnothing.$$

También diremos en esta situación que los conjuntos A y B son ***disjuntos***.

Algunos estudiantes pueden sorprenderse con la noción de "conjunto vacío". Podrán decir: "¿cómo puede existir un conjunto que no contiene nada?". El problema es similar al que surgió cuando se necesitó introducir el número 0. Es simplemente una cuestión formal que simplifica mucho el trabajo en matemáticas.

El conjunto vacío es solamente una convención y las matemáticas seguirían funcionando igual de bien sin la introducción de este concepto. Pero es un convenio *adecuado*, ya que nos proporciona una muy buena herramienta para trabajar y previene situaciones difíciles a la hora de demostrar determinados resultados. Sin esta convención, por ejemplo, se debería probar que dos conjuntos A y B tienen elementos en común antes de considerar la intersección de ambos $A \cap B$. Análogamente, la notación

$$C = \{x \mid x \in A \text{ y } x \text{ verifica una cierta propiedad}\}$$

no podría ser utilizada a menos que demostrásemos que realmente existen elementos en A verificando dicha propiedad. Es mucho más conveniente concluir directamente que $A \cap B$ y C podrían ser el conjunto vacío en ambos casos.

Al ser el conjunto vacío $\varnothing$ una mera convención, debemos establecer las relaciones de dicho conjunto con las operaciones que hemos introducido. Como $\varnothing$ es el conjunto que no tiene elementos, resulta evidente que no es posible escribir $x \in \varnothing$ para cualquier objeto x. Análogamente, las definiciones de unión e intersección nos llevan a que, dado un conjunto arbitrario A, se tiene

$$A \cup \varnothing = A \qquad \text{y} \qquad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

En cuanto a la inclusión de conjuntos, su relación con el conjunto vacío $\varnothing$ es algo más delicada. Dado un conjunto A, ¿estamos de acuerdo en que $\varnothing \subset A$? De

nuevo, debemos ser cuidadosos acerca de cómo las matemáticas utilizan el lenguaje ordinario. La expresión $\varnothing \subset A$ es una manera abreviada de escribir: "Cada elemento que pertenece al conjunto vacío también pertenece al conjunto A". Y de un modo más formal: "Para cada objeto x, si x pertenece al conjunto vacío, entonces x también pertenece al conjunto A".

¿Es esta afirmación verdadera o no? Unos podrían decir "sí" y otros decir "no". Nunca seremos capaces de elegir una respuesta utilizando argumentos lógicos, solamente por convenio se puede llegar a una conclusión. Ésta es una afirmación del tipo "si P entonces Q" y, en el hablar diario, el significado de la frase "si ... entonces" es ambiguo. Siempre entendemos cuando escuchamos esta frase que si P es verdad, entonces Q también lo es. A veces es eso únicamente lo que entendemos; sin embargo, en otras ocasiones, entendemos algo más: que si P es falso, entonces Q también debe ser falso. Normalmente, y en función del contexto, uno decide qué interpretación es la correcta.

La situación es análoga a la ambigüedad ya mencionada en el uso de la palabra "o". Supongamos que escuchamos estas dos frases:

> *"Si un estudiante matriculado para este curso no ha cogido la asignatura de álgebra lineal, entonces ha elegido la asignatura de análisis".*
>
> *"Si la nota final es mayor o igual que cinco, entonces aprobarás el examen".*

En la primera de ellas, se entiende que si un estudiante no se ha matriculado en álgebra lineal, entonces ha escogido análisis, y si se ha matriculado en álgebra, entonces puede o no haberse matriculado también en análisis (quizás estime que puede cursar ambas asignaturas simultáneamente). Sin embargo, la segunda frase admite una única interpretación: si la nota es mayor o igual que cinco, entonces aprobará el examen, y si la nota es menor que cinco entonces suspenderá (no cabe la posibilidad de aprobar con una nota tan baja).

De nuevo, en matemáticas no se puede tolerar esta ambigüedad, así que debemos elegir un significado para la construcción "si ... entonces". Los matemáticos han acordado siempre otorgar el significado de la primera frase a la construcción "si ... entonces", así, una afirmación del tipo "si P, entonces Q", significa que si P es verdadero, entonces Q también lo es, pero si P es falso, entonces Q puede ser tanto verdadero como falso.

Como un ejemplo, consideremos la siguiente afirmación acerca de los números reales:

$$\textit{Si } x > 0, \textit{ entonces } x^3 \neq 0.$$

Es una afirmación del tipo "si P entonces Q", donde P es la ***hipótesis*** "$x > 0$" mientras que Q es la ***conclusión*** "$x^3 \neq 0$". Se trata de una afirmación verdadera,

pues en el caso de que la hipótesis sea cierta y el número x verifique $x > 0$, entonces la conclusión $x^3 \neq 0$ también es cierta.

Otra afirmación relativa a los números reales es la siguiente:

$$\textit{Si } x^2 < 0, \textit{ entonces } x = 23;$$

en cada caso en el que la hipótesis sea cierta, la conclusión también lo será. Por supuesto, lo que ocurre es que no hay ningún caso en el que la hipótesis pueda verificarse. Una afirmación de esta clase se dice que es una ***verdad vacía***.

Volviendo ahora al tema del conjunto vacío y su relación con la inclusión, vemos que la inclusión $\varnothing \subset A$ se tiene para cualquier conjunto A. Escribir $\varnothing \subset A$ es lo mismo que decir "si $x \in \varnothing$, entonces $x \in A$", y esta afirmación es también una verdad vacía.

Contrarrecíproco y recíproco

Nuestra discusión de la expresión "si ... entonces" nos lleva a considerar otro punto de la lógica elemental que, en ocasiones, causa serias dificultades. Nos referimos a las relaciones que existen entre una *afirmación*, su *recíproco*, y su *contrarrecíproco*.

Dada una afirmación de la forma "si P, entonces Q", su ***contrarrecíproco*** se define como la afirmación "si Q no es cierto, entonces P no es cierto". Por ejemplo, el contrarrecíproco de la afirmación

$$\textit{Si } x > 0, \textit{ entonces } x^3 \neq 0$$

es la afirmación

$$\textit{Si } x^3 = 0, \textit{ entonces no es cierto que } x > 0.$$

Obsérvese que tanto la afirmación como el contrarrecíproco de la afirmación son verdaderos. Análogamente, la afirmación

$$\textit{Si } x^2 < 0, \textit{ entonces } x = 23$$

tiene como contrarrecíproco la afirmación

$$\textit{Si } x \neq 23, \textit{ entonces no es cierto que } x^2 < 0.$$

De nuevo, ambas son afirmaciones verdaderas sobre números reales.

Estos ejemplos pueden hacernos sospechar que existe alguna relación entre una afirmación y su contrarrecíproco. De hecho, esto es así; existen dos maneras distintas de decir precisamente lo mismo. Cada una de ellas es verdadera si, y sólo si, la otra también lo es; ambas afirmaciones son *lógicamente equivalentes*.

Este hecho no es difícil de comprobar. Introduzcamos primero alguna notación. Para abreviar la expresión "si P, entonces Q", escribiremos

$$P \Longrightarrow Q$$

lo cual se lee "P implica Q". El contrarrecíproco puede ser expresado como

$$(\text{no } Q) \Longrightarrow (\text{no } P),$$

donde "no Q" significa "Q no es verdadero". Ahora, la única manera por la cual la afirmación "$P \Rightarrow Q$" puede dejar de ser verdadera es que la hipótesis P sea verdadera mientras la conclusión Q es falsa. En cualquier otro caso, la afirmación es verdadera. Análogamente, la única forma por la cual la afirmación (no Q) $\Rightarrow$ (no P) puede ser falsa es cuando la hipótesis "no Q" es verdadera y la conclusión "no P" es falsa. Esto es lo mismo que decir que Q es falso y P es verdadero. Y esta es, precisamente, la situación en la cual la afirmación $P \Rightarrow Q$ deja de ser verdadera. De esta forma, vemos que ambas afirmaciones son bien ambas verdaderas, o bien ambas falsas, es decir, son lógicamente equivalentes. Así, aceptaremos una prueba de la afirmación "no $Q \Rightarrow$ no P" como una demostración de la afirmación "$P \Rightarrow Q$".

Existe otra afirmación que se puede formar a partir de la afirmación $P \Rightarrow Q$. Se trata de la afirmación

$$Q \Longrightarrow P$$

que se denomina ***recíproco*** de $P \Rightarrow Q$. Debemos ser cuidadosos para distinguir entre el recíproco de una afirmación y su contrarrecíproco. Mientras una afirmación y su contrarrecíproco son lógicamente equivalentes, la verdad de una afirmación no nos dice nada en absoluto acerca de la verdad o falsedad de su recíproco. Por ejemplo, la afirmación verdadera

$$\textit{Si } x > 0, \textit{ entonces } x^3 \neq 0$$

tiene como recíproco la afirmación

$$\textit{Si } x^3 \neq 0, \textit{ entonces } x > 0$$

la cual es falsa. Análogamente, la afirmación verdadera

$$\textit{Si } x^2 < 0, \textit{ entonces } x = 23$$

tiene como recíproco la afirmación

$$\textit{Si } x = 23, \textit{ entonces } x^2 < 0$$

que es falsa.

Si realmente ocurre que tanto la afirmación $P \Rightarrow Q$ como su recíproco $Q \Rightarrow P$ son verdaderos, entonces escribiremos

$$P \Longleftrightarrow Q$$

lo cual se lee "P es verdadero si, y sólo si, Q es verdadero".

Negación

Si uno quiere formar el contrarrecíproco de la afirmación $P \Rightarrow Q$, debe conocer cómo construir la afirmación "no P", es decir, la ***negación*** de P. En la mayor parte de

los casos el proceso de negar una afirmación no entraña dificultad, pero en ocasiones este proceso puede inducir a confusión cuando en las afirmaciones están involucradas expresiones como "para cada" o "al menos uno". Estas expresiones se denominan *cuantificadores lógicos*.

Para ilustrar esta situación, supongamos que X es un conjunto, A es un subconjunto de X y P es una afirmación acerca de los elementos de X. Consideremos la siguiente afirmación:

(*) *Para cada $x \in A$, la afirmación P es verdadera.*

¿Cómo se forma la negación de esta afirmación? Traslademos el problema al lenguaje de conjuntos. Supongamos que B representa el conjunto de todos los puntos x de X para los cuales P es verdadera. Entonces la afirmación (*) indica simplemente que A es un subconjunto de B. ¿Cuál es su negación? Obviamente es la afirmación de que A no es un subconjunto de B, esto es, la afirmación de que existe al menos un elemento de A que no pertenece a B. Escribiendo esta última expresión en lenguaje ordinario se tiene

Existe al menos un $x \in A$ para el cual la afirmación P no es cierta.

Por tanto, a la hora de formar la negación de (*), hay que reemplazar el cuantificador "para cada" por el cuantificador "existe al menos uno", y así construimos la negación de la afirmación P.

De un modo análogo, la negación de la afirmación

Existe al menos un $x \in A$ para el cual la afirmación Q es verdadera,

es la afirmación

Para todo $x \in A$ la afirmación Q no es verdadera.

La diferencia de dos conjuntos

Volvamos ahora a nuestra discusión acerca de los conjuntos. Existe otra operación con conjuntos que, en ocasiones, resulta muy útil. Se trata de la ***diferencia*** de dos conjuntos, que denotaremos por $A - B$, y que se define como el conjunto formado por aquellos elementos de A que no pertenecen a B. Formalmente,

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

En ocasiones, también se denomina ***complemento*** de B relativo a A, o el complemento de B en A.

Las tres operaciones de conjuntos que hemos definido quedan representadas esquemáticamente en la Figura 1.1.

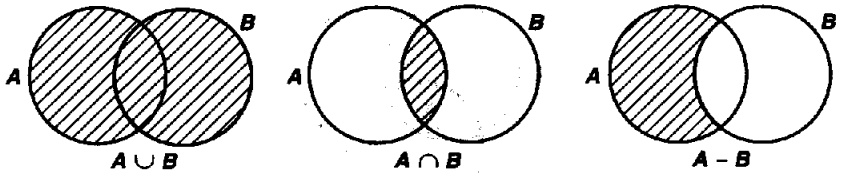


Figura 1.1

Reglas de la teoría de conjuntos

Dados varios conjuntos, podemos formar nuevos conjuntos aplicando las operaciones válidas de la teoría de conjuntos. Como en álgebra, se utilizan paréntesis para indicar en qué orden se están realizando las operaciones. Por ejemplo, $A \cup (B \cap C)$ representa la unión de los conjuntos A y $B \cap C$, mientras que $(A \cup B) \cap C$ representa la intersección de los conjuntos $A \cup B$ y C. En cada uno de los casos, el conjunto resultante es muy diferente tal y como muestra la Figura 1.2.

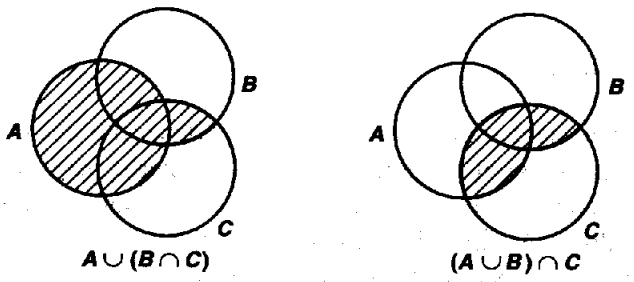


Figura 1.2

En ocasiones, combinaciones distintas de operaciones nos llevan al mismo conjunto; cuando eso ocurre, se tiene una regla de la teoría de conjuntos. Por ejemplo, es cierto que para tres conjuntos cualesquiera A, B y C la ecuación

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

se satisface. La ecuación está ilustrada en la Figura 1.3; la región sombreada representa el conjunto en cuestión tal y como se puede comprobar de forma intuitiva. Esta ecuación puede pensarse como una "ley distributiva" para las operaciones $\cap$ y $\cup$.

Otros ejemplos de reglas de la teoría de conjuntos incluyen la segunda "ley distributiva"

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap (A \cup C)$$

y las *leyes de DeMorgan*

$$\begin{aligned} A - (B \cup C) &= (A - B) \cap (A - C), \\ A - (B \cap C) &= (A - B) \cup (A - C). \end{aligned}$$

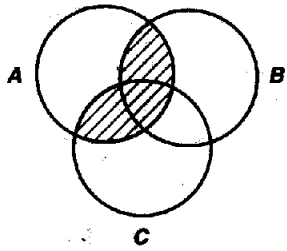


Figura 1.3

Dejamos como ejercicio la comprobación de estas reglas. Se pueden establecer otras reglas de la teoría de conjuntos, pero éstas que hemos mostrado son las más importantes. Las leyes de DeMorgan son más fáciles de recordar si se aprenden según la siguiente regla:

El complemento de la unión es la intersección de los complementos.
El complemento de la intersección es la unión de los complementos.

Colecciones de conjuntos

Los objetos pertenecientes a un conjunto deben pertenecer a una clase determinada. Así, podemos considerar el conjunto de todos los enteros pares, el conjunto de todas las personas con los ojos azules de España, el conjunto de todos los juegos de barajas del mundo... Algunos de estos conjuntos tienen un interés matemático muy limitado, lo admitimos, pero el tercer ejemplo ilustra una situación que todavía no habíamos mencionado: que los objetos pertenecientes a un conjunto bien pueden ser ellos mismos conjuntos a su vez, ya que un juego de barajas es un conjunto de un cierto número de cartas. Así, el conjunto de todos los juegos de barajas del mundo es también un conjunto cuyos elementos son conjuntos.

Podemos considerar entonces una nueva forma de construir nuevos conjuntos a partir de otros ya dados. Dado un conjunto A, consideramos conjuntos cuyos elementos sean subconjuntos de A. En particular, podemos considerar el conjunto de todos los subconjuntos de A. Este conjunto se representa mediante el símbolo $\mathcal{P}(A)$ y se denomina ***conjunto potencia*** de A (la razón se explicará más adelante).

Cuando tengamos un conjunto cuyos elementos sean a su vez conjuntos, nos referiremos a él como una ***colección*** de conjuntos y lo representaremos por una letra escrita en modo caligráfico, tal como $\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$. De esta forma, mantendremos una cierta coherencia cuando realicemos demostraciones donde aparezcan simultáneamente objetos, conjuntos de objetos y colecciones de conjuntos de objetos. Por ejemplo, podríamos usar $\mathcal{A}$ para representar la familia de todos los juegos de barajas del mundo, dejando la letra mayúscula normal A para denotar un juego de cartas y la letra minúscula a para representar una carta en concreto.

Debemos ser cautos en este tipo de cuestiones. Así, haremos una distinción entre el objeto a, el cual es un elemento del conjunto A, y el conjunto unipuntual $\{a\}$, que es un subconjunto de A. Para ilustrar esta diferencia de conceptos, si A es el conjunto $\{a, b, c\}$, entonces las afirmaciones

$$a \in A, \ \{a\} \subset A, \text{ y } \{a\} \in \mathcal{P}(A)$$

están correctamente expresadas, mientras que las afirmaciones $\{a\} \in A$ y $a \subset A$ son incorrectas.

Uniones arbitrarias e intersecciones

Ya hemos definido lo que entendemos por unión e intersección de dos conjuntos. No existe ninguna limitación para restringirnos a dos conjuntos, ya que podemos considerar la unión y la intersección de una cantidad arbitraria de conjuntos.

Dada una familia $\mathcal{A}$ de conjuntos, se define la ***unión*** de los elementos de $\mathcal{A}$ mediante la ecuación

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid x \in A \text{ para algún } A \in \mathcal{A}\}.$$

La ***intersección*** de los elementos de $\mathcal{A}$ se define como

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid x \in A \text{ para todo } A \in \mathcal{A}\}.$$

No existe ningún problema con estas definiciones cuando alguno de los elementos de la familia $\mathcal{A}$ es el conjunto vacío. Pero es un poco delicado decidir qué significan estas definiciones si permitimos que $\mathcal{A}$ sea la familia vacía. Aplicando literalmente las definiciones, vemos que ningún elemento x verifica la propiedad de la definición para la unión de los elementos de $\mathcal{A}$. Así, es razonable concluir que

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \varnothing$$

si $\mathcal{A}$ es la familia vacía. Por otro lado, cada x satisface (trivialmente) la propiedad de la definición para la intersección de los elementos de $\mathcal{A}$. La pregunta es: ¿cada x en qué conjunto? Si tenemos un conjunto grande X que se ha precisado al principio del argumento como nuestro "conjunto universal" y se consideran sólo subconjuntos de X, es razonable definir

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = X$$

cuando $\mathcal{A}$ es vacío. Sin embargo, no todos los matemáticos siguen este convenio. Para evitar dificultades, *no definiremos la intersección cuando $\mathcal{A}$ es vacío.*

Productos cartesianos

Existe todavía otra forma de construir nuevos conjuntos a partir de unos dados; lleva implícita la noción de un "par ordenado" de objetos. Cuando estudiamos geometría analítica, de lo primero que nos convencemos es de que tenemos que elegir un eje x y un eje y en el plano. Así, cada punto del plano se corresponde de manera única con un par ordenado (x, y) de números reales (de hecho, cuando se estudia geometría de manera más profunda, el plano se *define* como el conjunto de pares ordenados de números reales).

La noción de par ordenado se puede generalizar al caso de los conjuntos. Dados dos conjuntos A y B, definimos su producto cartesiano $A \times B$ como el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) para los cuales a es un elemento de A y b es un elemento de B. Formalmente,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Esta definición supone que el concepto de "par ordenado" ya es conocido. Puede considerarse aquí de un modo intuitivo, como la noción de "conjunto", o puede expresarse como una definición en términos de operaciones de conjuntos ya introducidas. Esta última sería la ecuación

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

que define el par ordenado (a, b) como una colección de conjuntos. Si $a \neq b$, esta definición nos dice que (a, b) es una colección de dos conjuntos, uno de los cuales es un conjunto unipuntual y el otro un conjunto con dos elementos. La *primera coordenada* del par ordenado se define como el único elemento que pertenece a ambos conjuntos, y la *segunda coordenada* como el elemento que pertenece sólo a uno de los dos conjuntos. Si $a = b$, entonces (a, b) es una colección conteniendo sólo un conjunto $\{a\}$, ya que $\{a, a\} = \{a\}$ en este caso. Su primera y segunda coordenadas son ambas iguales y coinciden con el elemento de este único conjunto.

En honor a la verdad, hay que decir que la mayoría de los matemáticos piensan en un par ordenado como un concepto primitivo más bien que como una colección de conjuntos.

Hagamos un comentario acerca de la notación. Es un hecho desafortunado que la notación (a, b) esté firmemente establecida en las matemáticas actuales, pero tiene dos significados. El primero, es el de un par ordenado de objetos, tal y como acabamos de discutir. El segundo significado proviene del análisis y nos es familiar a todos: si a y b son números reales, el símbolo (a, b) se utiliza para designar el intervalo de todos los números reales x verificando $a < x < b$. En la mayoría de los casos, esta situación no nos causará problemas, ya que se deducirá fácilmente del contexto cuál es el significado preciso. En cualquier situación proclive a confusión o ambigüedad, adoptaremos una notación distinta para el par ordenado (a, b), representándolo mediante el símbolo

$$a \times b.$$

Ejercicios

1. Compruebe las leyes distributivas para $\cup$ y $\cap$ y las leyes de DeMorgan.

2. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas para todos los conjuntos A, B, C y D. Si una doble implicación falla, determine si alguna de las dos posibles implicaciones se cumple. Si una igualdad falla, determine si el enunciado se vuelve verdadero al cambiar el símbolo "igual" por una de las dos inclusiones $\subset$ o $\supset$.

   (a) $A \subset B$ y $A \subset C \Leftrightarrow A \subset (B \cup C)$.
   (b) $A \subset B$ o $A \subset C \Leftrightarrow A \subset (B \cup C)$.
   (c) $A \subset B$ y $A \subset C \Leftrightarrow A \subset (B \cap C)$.
   (d) $A \subset B$ o $A \subset C \Leftrightarrow A \subset (B \cap C)$.
   (e) $A - (A - B) = B$.
   (f) $A - (B - A) = A - B$.
   (g) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.
   (h) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$.
   (i) $(A \cap B) \cup (A - B) = A$.
   (j) $A \subset C$ y $B \subset D \Rightarrow (A \times B) \subset (C \times D)$.
   (k) El recíproco de (j).
   (l) El recíproco de (j), suponiendo que A y B son no vacíos.
   (m) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.
   (n) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
   (o) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.
   (p) $(A - B) \times (C - D) = (A \times C - B \times C) - A \times D$.
   (q) $(A \times B) - (C \times D) = (A - C) \times (B - D)$.

3. (a) Escriba el contrarrecíproco y el recíproco del siguiente enunciado: "Si $x < 0$, entonces $x^2 - x > 0$", y determine cuál (si la hay) de las tres afirmaciones es cierta.
   (b) Haga lo mismo para el enunciado "Si $x > 0$, entonces $x^2 - x > 0$".

4. Sean A y B conjuntos de números reales. Escriba la negación de cada uno de los siguientes enunciados:

   (a) Para todo $a \in A$, se verifica que $a^2 \in B$.
   (b) Para al menos un $a \in A$, se verifica que $a^2 \in B$.
   (c) Para todo $a \in A$, se verifica que $a^2 \notin B$.
   (d) Para al menos un $a \notin A$, se verifica que $a^2 \in B$.

5. Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de conjuntos. Determine la veracidad de cada una de las siguientes afirmaciones o de sus recíprocos:

(a) $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ para al menos un $A \in \mathcal{A}$.
(b) $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$.
(c) $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ para al menos un $A \in \mathcal{A}$.
(d) $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

6. Escriba el contrarrecíproco de cada una de las afirmaciones del Ejercicio 5.

7. Dados los conjuntos A, B y C, exprese cada uno de los siguientes conjuntos en términos de A, B y C, utilizando los símbolos $\cup$, $\cap$ y $-$:

$$D = \{x \mid x \in A \text{ y } (x \in B \text{ o } x \in C)\},$$
$$E = \{x \mid (x \in A \text{ y } x \in B) \text{ o } x \in C\},$$
$$F = \{x \mid x \in A \text{ y } (x \in B \Rightarrow x \in C)\}.$$

8. Si un conjunto A tiene dos elementos, demuestre que $\mathcal{P}(A)$ tiene cuatro elementos. ¿Cuántos elementos tiene $\mathcal{P}(A)$ si A tiene un único elemento? ¿Tres elementos? ¿Ningún elemento? ¿Por qué $\mathcal{P}(A)$ se denomina el conjunto potencia de A?

9. Formule y demuestre las leyes de DeMorgan para uniones e intersecciones arbitrarias de conjuntos.

10. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Determine si cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es igual al producto cartesiano de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$.

(a) $\{(x, y) \mid x \text{ es un entero}\}$.
(b) $\{(x, y) \mid 0 < y \leq 1\}$.
(c) $\{(x, y) \mid y > x\}$.
(d) $\{(x, y) \mid x \text{ no es un entero e } y \text{ es un entero}\}$.
(e) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

§2 Funciones

El concepto de *función* ya ha sido visto muchas veces, por lo que apenas es necesario recordar lo importante que es para todas las matemáticas. En esta sección damos la definición matemática precisa y exploramos algunos de los conceptos asociados.

Normalmente, una función se concibe como una *regla* que asigna a cada elemento de un conjunto A un elemento de un conjunto B. En cálculo, una función está dada a menudo por una fórmula sencilla como $f(x) = 3x^2 + 2$, o quizá por una fórmula más complicada como

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k.$$

Incluso, a menudo no se mencionan explícitamente los conjuntos A y B, conviniendo en suponer que A es el conjunto de todos los números reales para los cuales la regla tiene sentido y que B es el conjunto de todos los números reales.

Sin embargo, conforme se profundiza en matemáticas se necesita ser más preciso sobre lo que es una función. Los matemáticos *conciben* las funciones de la forma que acabamos de describir, pero la definición que usan es más exacta. En primer lugar, damos la siguiente definición:

Definición. Una ***regla de asignación*** es un subconjunto r del producto cartesiano $C \times D$ de dos conjuntos, con la propiedad de que cada elemento de C aparece como la primera coordenada de *a lo sumo* un par ordenado de r.

Así, un subconjunto r de $C \times D$ es una regla de asignación si

$$[(c, d) \in r \text{ y } (c, d') \in r] \Rightarrow [d = d'].$$

Concebimos r como una forma de asignar al elemento c de C, el elemento d de D para el cual $(c, d) \in r$.

Dada una regla de asignación r, el ***dominio*** de r se define como el subconjunto de C formado por todas las primeras coordenadas de los elementos de r, y el ***conjunto imagen*** de r se define como el subconjunto de D formado por todas las segundas coordenadas de los elementos de r. Formalmente,

$$\text{dominio } r = \{c \mid \text{existe } d \in D \text{ tal que } (c, d) \in r\},$$
$$\text{imagen } r = \{d \mid \text{existe } c \in C \text{ tal que } (c, d) \in r\}.$$

Obsérvese que dada una regla de asignación r, su dominio y su imagen están completamente determinados.

Ahora podemos decir lo que es una función.

Definición. Una ***función*** f es una regla de asignación r, junto con un conjunto B que contiene al conjunto imagen de r. El dominio A de la regla r también se llama el ***dominio*** de la función f, el conjunto imagen de r también se llama el ***conjunto imagen*** de f, y el conjunto B se llama el ***rango*** de f.†

Si f es una función con dominio A y rango B, expresamos este hecho escribiendo

$$f : A \longrightarrow B$$

†Los analistas tienden a utilizar la palabra "rango" para describir lo que hemos denominado el "conjunto imagen" de f. Evitan dar un nombre al conjunto B.

que se lee "f es una función de A a B", o "f es una aplicación de A a B", o simplemente "f aplica A en B". Algunas veces se visualiza f como una transformación geométrica que físicamente lleva los puntos de A en puntos de B.

Si $f : A \to B$ y si a es un elemento de A, representamos por $f(a)$ el único elemento de B que la regla que determina f asigna a a; se llama el ***valor*** de f en a, o a veces la ***imagen*** de a por f. Formalmente, si r es la regla de la función f, entonces $f(a)$ representa el único elemento de B tal que $(a, f(a)) \in r$.

Utilizando esta notación, se pueden volver a definir las funciones casi como se hizo antes, sin ninguna pérdida de rigor. Por ejemplo, se puede escribir (representando por $\mathbb{R}$ a los números reales)

> "Sea f la función cuya regla es $\{(x, x^3 + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ y cuyo rango es $\mathbb{R}$",

o se puede escribir igualmente

> "Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = x^3 + 1$".

Ambas frases especifican exactamente la misma función. Pero la frase "sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = x^3 + 1$" no es en absoluto apropiada para definir una función porque no especifica ni el dominio ni el rango de f.

Definición. Si $f : A \to B$ y si A_0 es un subconjunto de A, definimos la ***restricción*** de f a A_0 como la función que aplica A_0 en B cuya regla es

$$\{(a, f(a)) \mid a \in A_0\}.$$

Se denota por $f \mid A_0$, que se lee "f restringida a A_0."

EJEMPLO 1. Sean $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $\bar{\mathbb{R}}_+$ los reales no negativos. Considérense las funciones

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \text{definida por} & f(x) = x^2, \\ g : \bar{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \mathbb{R} & \text{definida por} & g(x) = x^2, \\ h : \mathbb{R} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ & \text{definida por} & h(x) = x^2, \\ k : \bar{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ & \text{definida por} & k(x) = x^2. \end{array}$$

La función g es distinta de la función f porque sus reglas son subconjuntos distintos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; es la restricción de f al conjunto $\bar{\mathbb{R}}_+$. La función h también es distinta de f, aunque sus reglas sean el mismo conjunto, porque el rango especificado por h es distinto del rango especificado por f. La función k es distinta de todas éstas. Estas funciones están representadas en la Figura 2.1.

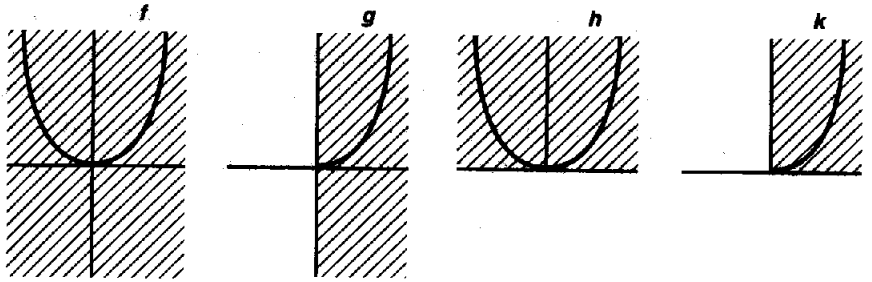


Figura 2.1

Restringir el dominio de una función y cambiar su rango son dos maneras de formar una nueva función a partir de una antigua. Otra manera es formar la composición de dos funciones.

Definición. Dadas las funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, definimos la ***composición*** $g \circ f$ de f y g como la función $g \circ f : A \to C$ definida por la ecuación $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Formalmente, $g \circ f : A \to C$ es la función cuya regla es

$$\{(a, c) \mid \text{ para algún } b \in B, f(a) = b \text{ y } g(b) = c\}.$$

A menudo imaginamos la composición $g \circ f$ implicando un movimiento físico del punto a al punto $f(a)$, y luego al punto $g(f(a))$, tal y como se ilustra en la Figura 2.2.

Obsérvese que $g \circ f$ se define sólo cuando el rango de f *es igual* al dominio de g.

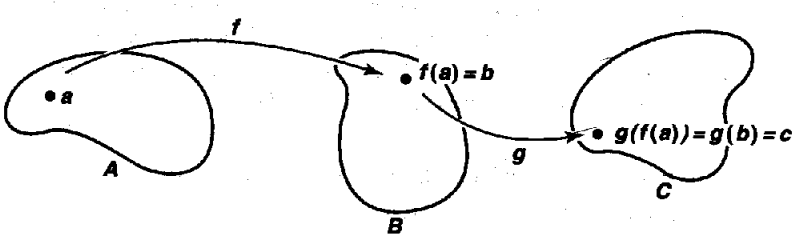


Figura 2.2

EJEMPLO 2. La composición de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x^2 + 2$ y la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 5x$ es la función $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 + 2) = 5(3x^2 + 2).$$

En este caso también se puede formar la composición $f \circ g$ que es una función bastante distinta, $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y viene dada por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x) = 3(5x)^2 + 2.$$

Definición. Se dice que una función $f : A \to B$ es ***inyectiva*** (o ***uno-a-uno***) si para cada par de puntos distintos de A, sus imágenes por f son distintas. Se dice que es ***sobreyectiva*** (o que f aplica A ***sobre*** B) si cada elemento de B es la imagen por la función f de algún elemento de A. Si f es a la vez inyectiva y sobreyectiva, se dice que es ***biyectiva*** (o se llama una ***correspondencia uno-a-uno***).

Más formalmente, f es inyectiva si

$$[f(a) = f(a')] \Rightarrow [a = a']$$

y f es sobreyectiva si

$$[b \in B] \Rightarrow [b = f(a) \text{ para al menos un } a \in A].$$

La inyectividad de f sólo depende de la regla de f; la sobreyectividad depende también del rango de f. Se puede comprobar que la composición de dos funciones inyectivas es inyectiva, y la composición de dos funciones sobreyectivas es sobreyectiva; se sigue entonces que la composición de dos funciones biyectivas es biyectiva.

Si f es biyectiva, existe una función de B a A llamada la ***inversa*** de f. Se representa por f^{-1} y se define haciendo que $f^{-1}(b)$ sea ese único elemento a de A para el cual $f(a) = b$. Dado $b \in B$, el hecho de que f sea sobreyectiva implica que *existe* tal elemento $a \in A$; el hecho de que f sea inyectiva implica que ese elemento a es *único*. Es fácil ver que si f es biyectiva, f^{-1} también es biyectiva.

EJEMPLO 3. Considérense de nuevo las funciones f, g, h y k de la Figura 2.1. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva. Su restricción g a los reales no negativos es inyectiva pero no sobreyectiva. La función $h : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ obtenida a partir de f cambiando el rango es sobreyectiva pero no inyectiva. La función $k : \bar{\mathbb{R}}_+ \to \bar{\mathbb{R}}_+$ obtenida a partir de f restringiendo el dominio y cambiando el rango es tanto inyectiva como sobreyectiva, de modo que tiene inversa. Su inversa es, por supuesto, lo que normalmente llamamos la *función raíz cuadrada*.

Un criterio útil para demostrar que una función dada f es biyectiva es el siguiente, cuya demostración se deja para los ejercicios.

Lema 2.1. *Sea $f : A \to B$. Si existen funciones $g : B \to A$ y $h : B \to A$ tales que $g(f(a)) = a$ para todo a de A y $f(h(b)) = b$ para todo b de B, entonces f es biyectiva y $g = h = f^{-1}$.*

Definición. Sea $f : A \to B$. Si A_0 es un subconjunto de A, representamos por $f(A_0)$ el conjunto de todas las imágenes de puntos de A_0 por la función f. Este conjunto se llama ***imagen*** de A_0 por f. Formalmente,

$$f(A_0) = \{b \mid b = f(a) \text{ para al menos un } a \in A_0\}.$$

Por otra parte, si B_0 es un subconjunto de B, denotamos por $f^{-1}(B_0)$ el conjunto de todos los elementos de A cuyas imágenes por f están en B_0; se llama ***preimagen*** de B_0 por f (o la "anti-imagen", o la "imagen inversa" de B_0). Formalmente,

$$f^{-1}(B_0) = \{a \mid f(a) \in B_0\}.$$

Por supuesto, puede que no exista ningún punto a de A cuya imagen esté en B_0, y en ese caso, $f^{-1}(B_0)$ es vacío.

Obsérvese que si $f : A \to B$ es biyectiva y $B_0 \subset B$, tenemos dos significados para la notación $f^{-1}(B_0)$. Se puede tomar para representar la *preimagen* de B_0 por la función f o para denotar la *imagen* de B_0 por la función $f^{-1} : B \to A$. Sin embargo, estos dos significados dan exactamente el mismo subconjunto de A, así que, de hecho, no hay ambigüedad alguna.

Es necesario cierta precaución si se quiere usar correctamente la notación de f y f^{-1}. Por ejemplo, la operación f^{-1}, cuando se aplica a subconjuntos de B, se comporta muy bien; conserva las inclusiones, las uniones, las intersecciones y las diferencias de conjuntos. Usaremos este hecho frecuentemente. Pero la operación f, cuando se aplica a subconjuntos de A, sólo conserva las inclusiones y las uniones. Véanse los Ejercicios 2 y 3.

Obsérvese que no es cierto, en general, que $f^{-1}(f(A_0)) = A_0$ y $f(f^{-1}(B_0)) = B_0$ (véase el ejemplo siguiente). Las reglas relevantes, que dejamos para que se comprueben, son las siguientes: si $f : A \to B$ y si $A_0 \subset A$ y $B_0 \subset B$, entonces

$$A_0 \subset f^{-1}(f(A_0)) \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0.$$

La primera inclusión es una igualdad si f es inyectiva, y la segunda inclusión es una igualdad si f es sobreyectiva.

EJEMPLO 4. Considérese la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x^2 + 2$ (Figura 2.3). Representamos por $[a, b]$ el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$. Entonces

$$f^{-1}(f([0,1])) = f^{-1}([2,5]) = [-1,1] \text{ y}$$

$$f(f^{-1}([0,5])) = f([-1,1]) = [2,5].$$

Ejercicios

1. Sea $f : A \to B$. Sean $A_0 \subset A$ y $B_0 \subset B$.

(a) Demuestre que $A_0 \subset f^{-1}(f(A_0))$ y que se da la igualdad si f es inyectiva.

(b) Demuestre que $f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$ y que se da la igualdad si f es sobreyectiva.

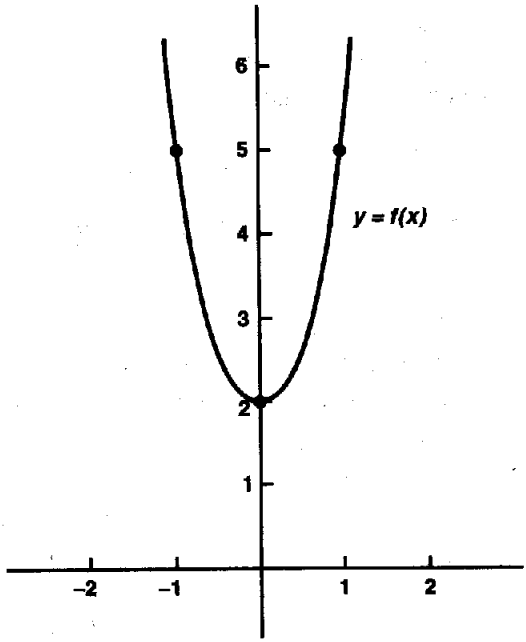


Figura 2.3

2. Sea $f : A \to B$ y sean $A_i \subset A$ y $B_i \subset B$ para $i = 0, 1$. Demuestre que f^{-1} conserva las inclusiones, las uniones, las intersecciones y las diferencias de conjuntos:

(a) $B_0 \subset B_1 \Rightarrow f^{-1}(B_0) \subset f^{-1}(B_1)$.
(b) $f^{-1}(B_0 \cup B_1) = f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$.
(c) $f^{-1}(B_0 \cap B_1) = f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)$.
(d) $f^{-1}(B_0 - B_1) = f^{-1}(B_0) - f^{-1}(B_1)$.

Demuestre que f conserva solamente las inclusiones y las uniones:

(e) $A_0 \subset A_1 \Rightarrow f(A_0) \subset f(A_1)$.
(f) $f(A_0 \cup A_1) = f(A_0) \cup f(A_1)$.
(g) $f(A_0 \cap A_1) \subset f(A_0) \cap f(A_1)$. Demuestre que se da la igualdad si f es inyectiva.
(h) $f(A_0 - A_1) \supset f(A_0) - f(A_1)$. Demuestre que se da la igualdad si f es inyectiva.

3. Demuestre que (b), (c), (f) y (g) del Ejercicio 2 se verifican para uniones e intersecciones arbitrarias.

4. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$.

(a) Si $C_0 \subset C$, demuestre que $(g \circ f)^{-1}(C_0) = f^{-1}(g^{-1}(C_0))$.

(b) Si f y g son inyectivas, demuestre que $g \circ f$ es inyectiva.

(c) Si $g \circ f$ es inyectiva, ¿qué se puede decir sobre la inyectividad de f y de g?

(d) Si f y g son sobreyectivas, demuestre que $g \circ f$ es sobreyectiva.

(e) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, ¿qué se puede decir sobre la sobreyectividad de f y de g?

(f) Resuma las respuestas (b)-(e) en forma de teorema.

5. En general, representamos la ***función identidad*** de un conjunto C por i_C. Es decir, definimos $i_C : C \to C$ como la función dada por la regla $i_C(x) = x$ para todo $x \in C$. Dada $f : A \to B$, decimos que una función $g : B \to A$ es una ***inversa por la izquierda*** de f si $g \circ f = i_A$, y decimos que $h : B \to A$ es una ***inversa por la derecha*** de f si $f \circ h = i_B$.

(a) Demuestre que si f tiene una inversa por la izquierda, f es inyectiva, y si f tiene una inversa por la derecha, f es sobreyectiva.

(b) Dé un ejemplo de una función que tenga inversa por la izquierda pero no inversa por la derecha.

(c) Dé un ejemplo de una función que tenga inversa por la derecha pero no inversa por la izquierda.

(d) ¿Puede tener una función más de una inversa por la izquierda? ¿Y más de una inversa por la derecha?

(e) Demuestre que si f tiene tanto una inversa por la izquierda g como una inversa por la derecha h, entonces f es biyectiva y $g = h = f^{-1}$.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = x^3 - x$. Restringiendo adecuadamente el dominio y el rango de f, obtenga a partir de f una función biyectiva g. Dibuje las gráficas de g y g^{-1} (hay diferentes elecciones posibles para g).

§3 Relaciones

Un concepto que es, en cierto sentido, más general que el de función es el concepto de *relación*. En esta sección, definimos lo que los matemáticos entienden por una relación y consideramos dos tipos de relaciones que se presentan con gran frecuencia en matemáticas: *relaciones de equivalencia* y *relaciones de orden*. Las relaciones de orden se usarán en todo el libro, mientras que las relaciones de equivalencia no se utilizarán hasta la sección §22.

Definición. Una ***relación*** en un conjunto A es un subconjunto C del producto cartesiano $A \times A$.

Si C es una relación en A, usamos la notación xCy para expresar lo mismo que $(x, y) \in C$. Se leerá "x está en la relación C con y".

Una regla de asignación r de una función $f : A \to A$ es también un subconjunto de $A \times A$. Pero es un subconjunto de una clase muy especial: a saber, de una clase tal que cada elemento de A aparece como la primera coordenada de un elemento de r exactamente una vez. *Cualquier* subconjunto de $A \times A$ es una relación en A.

EJEMPLO 1. Sea P el conjunto de todas las personas del mundo y definimos $D \subset P \times P$ mediante la ecuación

$$D = \{(x, y) \mid x \text{ es un descendiente de } y\}.$$

Entonces D es una relación en el conjunto P. Las afirmaciones "x está en la relación D con y" y "x es un descendiente de y" significan exactamente lo mismo, esto es, que $(x, y) \in D$. Otras dos relaciones en P son las siguientes:

$$S = \{(x, y) \mid x \text{ tiene un antepasado que también es antepasado de } y\},$$
$$H = \{(x, y) \mid \text{ los padres de } x \text{ son los padres de } y\}.$$

Podemos llamar a S la "relación de sangre" (juego de palabras intencionado) y podemos llamar a H la "relación de hermano". Estas tres relaciones tienen propiedades bastante diferentes. Por ejemplo, la relación de sangre es simétrica (si x tiene relación de sangre con y, entonces y tiene relación de sangre con x), mientras que la relación de descendencia no lo es. Consideraremos de nuevo estas relaciones dentro de poco.

Relaciones de equivalencia y particiones

Una ***relación de equivalencia*** en un conjunto A es una relación C que verifica las siguientes tres propiedades:

(1) (Reflexividad) xCx para todo $x \in A$.

(2) (Simetría) si xCy, entonces yCx.

(3) (Transitividad) si xCy e yCz, entonces xCz.

EJEMPLO 2. Entre las relaciones definidas en el Ejemplo 1, la relación de descendencia D no es reflexiva ni simétrica, mientras que la relación de sangre S no es transitiva (yo no tengo relación de sangre con mi mujer, aunque mis hijos sí la tienen). La relación de hermano es, sin embargo, una relación de equivalencia, como se puede comprobar.

No hay ninguna razón por la que se deba utilizar una letra mayúscula —ni de hecho una letra de cualquier tipo— para representar una relación, aunque *sea* un conjunto. Otro símbolo lo hará exactamente igual de bien. Un símbolo que se utiliza frecuentemente para representar una relación de equivalencia es el símbolo "tilde" $\sim$. Enunciadas con esta notación, las propiedades de una relación de equivalencia se convierten en

(1) $x \sim x$ para todo $x \in A$.

(2) Si $x \sim y$, entonces $y \sim x$.

(3) Si $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces $x \sim z$.

Existen otros muchos símbolos que se han ideado para representar relaciones de equivalencia particulares; nos encontraremos con algunos de ellos en las páginas de este libro.

Dada una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto A y un elemento x de A, definimos un cierto subconjunto E de A, llamado ***clase de equivalencia*** determinada por x, mediante la ecuación

$$E = \{y \mid y \sim x\}.$$

Obsérvese que la clase de equivalencia E determinada por x contiene a x, puesto que $x \sim x$. Las clases de equivalencia tienen la siguiente propiedad:

Lema 3.1. *Dos clases de equivalencia E y E' son ya disjuntas ya iguales.*

Demostración. Sea E la clase de equivalencia determinada por x y E' la clase de equivalencia determinada por x'. Supongamos que $E \cap E'$ no es vacío; sea y un punto de $E \cap E'$ (véase la Figura 3.1). Demostremos que $E = E'$.

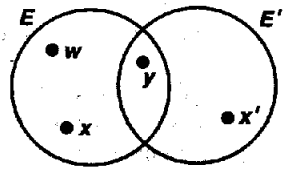


Figura 3.1

Por definición, tenemos $y \sim x$ e $y \sim x'$. La simetría nos permite concluir que $x \sim y$ e $y \sim x'$; por la transitividad se deduce que $x \sim x'$. Si ahora w es cualquier punto de E, se tiene $w \sim x$ por definición; aplicando de nuevo la transitividad se tiene que $w \sim x'$. Concluimos que $E \subset E'$.

La simetría de la situación nos permite deducir también que $E' \subset E$, y por tanto, $E = E'$. ■

Dada una relación de equivalencia en un conjunto A, representamos por $\mathcal{E}$ la familia de todas las clases de equivalencia determinadas por esta relación. El lema anterior demuestra que elementos distintos de $\mathcal{E}$ son disjuntos. Además, la unión de los elementos de $\mathcal{E}$ es igual a todo A ya que cada elemento de A pertenece a una clase de equivalencia. La familia $\mathcal{E}$ es un ejemplo particular de lo que se llama una partición de A:

Definición. Una ***partición*** de un conjunto A es una familia de subconjuntos disjuntos no vacíos de A cuya unión es todo A.

Estudiar relaciones de equivalencia en un conjunto A y estudiar particiones de A es realmente lo mismo. Dada una partición $\mathcal{D}$ de A, hay exactamente una relación de equivalencia en A a partir de la cual se deriva.

La demostración no es difícil. Para probar que la partición $\mathcal{D}$ proviene de alguna relación de equivalencia, definimos una relación C en A haciendo xCy si x e y pertenecen al mismo elemento de $\mathcal{D}$. La simetría de C es obvia; la reflexividad se deduce del hecho de que la unión de los elementos de $\mathcal{D}$ es igual a todo A; la transitividad se sigue del hecho de que elementos distintos de $\mathcal{D}$ son disjuntos. Es sencillo comprobar que la colección de las clases de equivalencia determinadas por C es precisamente la familia $\mathcal{D}$.

Para demostrar que existe una única relación, suponemos que C_1 y C_2 son dos relaciones de equivalencia en A que dan lugar a la misma familia de clases de equivalencia $\mathcal{D}$. Dado $x \in A$, demostramos que yC_1x si y sólo si yC_2x, de lo que se deduce que $C_1 = C_2$. Sea E_1 la clase de equivalencia determinada por x respecto a la relación C_1; sea E_2 la clase de equivalencia determinada por x respecto a la relación C_2. Entonces E_1 es un elemento de $\mathcal{D}$, y por tanto debe ser igual al único elemento D de $\mathcal{D}$ que contiene a x. Análogamente, E_2 debe ser igual a D. Ahora por definición, E_1 está formado por todos los y tales que yC_1x y E_2 está formado por todos los y tales que yC_2x. Como $E_1 = D = E_2$, el resultado queda demostrado.

EJEMPLO 3. Definimos dos puntos del plano como equivalentes si están a la misma distancia del origen. La reflexividad, simetría y transitividad se cumplen trivialmente. La colección $\mathcal{E}$ de las clases de equivalencia está formada por todas las circunferencias centradas en el origen, junto con el conjunto cuyo único elemento es el origen.

EJEMPLO 4. Definimos dos puntos del plano como equivalentes si tienen la misma coordenada y. La familia de las clases de equivalencia es la colección de todas las rectas del plano paralelas al eje x.

EJEMPLO 5. Sea $\mathcal{L}$ la familia de todas las rectas del plano paralelas a la recta $y = -x$. Entonces $\mathcal{L}$ es una partición del plano, ya que cada punto está, exactamente, en una de esas rectas. La partición $\mathcal{L}$ proviene de la relación de equivalencia en el plano definida por: dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) son equivalentes si $x_0 + y_0 = x_1 + y_1$.

EJEMPLO 6. Sea $\mathcal{L}'$ la familia de *todas* las rectas del plano. Entonces $\mathcal{L}'$ no es una partición del plano, ya que elementos distintos de $\mathcal{L}'$ no van a ser necesariamente disjuntos; dos rectas se pueden cortar sin ser iguales.

Relaciones de orden

Una relación C en un conjunto A se denomina ***relación de orden*** (***orden simple***, u ***orden lineal***) si tiene las siguientes propiedades:

(1) (Comparabilidad) para cualesquiera x e y de A tales que $x \neq y$, xCy o yCx.

(2) (No reflexividad) ningún x de A verifica la relación xCx.

(3) (Transitividad) si xCy e yCz, entonces xCz.

Obsérvese que la propiedad (1) no excluye por sí misma la posibilidad de que para algunos pares de elementos x e y de A, se verifiquen ambas relaciones xCy e yCx (puesto que "o" significa "lo uno o lo otro, o ambos"). Pero las propiedades (2) y (3) combinadas sí excluyen esta posibilidad, porque si se dieran ambas xCy e yCx, la transitividad implicaría que xCx, contradiciendo la no reflexividad.

EJEMPLO 7. Consideremos la relación en la recta real consistente en todos los pares (x, y) de números reales tales que $x < y$. Es una relación de orden, llamada la "relación de orden usual", en la recta real. Una relación de orden menos conocida en la recta real es la siguiente: definimos xCy si $x^2 < y^2$, o si $x^2 = y^2$ y $x < y$. Se puede comprobar que ésta es una relación de orden.

EJEMPLO 8. Consideramos de nuevo las relaciones entre las personas dadas en el Ejemplo 1. La relación de sangre S no satisface ninguna de las propiedades de una relación de orden y la relación de hermano H sólo verifica (3). La relación de descendencia D funciona algo mejor, ya que satisface (2) y (3); sin embargo, la comparabilidad aún falla. Las relaciones que verifican (2) y (3) aparecen con la suficiente frecuencia en matemáticas como para que se les dé un nombre especial. Se llaman relaciones de *orden parcial estricto*; las consideraremos más adelante (véase §11).

Así como la tilde, $\sim$, es el símbolo genérico para una relación de equivalencia, el símbolo "menor que", $<$, se utiliza generalmente para representar una relación de orden. Establecida esta notación, las propiedades de una relación de orden se convierten en

(1) Si $x \neq y$, entonces $x < y$ o $y < x$.

(2) Si $x < y$, entonces $x \neq y$.

(3) Si $x < y$ e $y < z$, entonces $x < z$.

Utilizaremos la notación $x \leq y$ para representar el enunciado "bien $x < y$, bien $x = y$", y usaremos $y > x$ para decir "$x < y$". Escribiremos $x < y < z$ cuando queramos decir "$x < y$ e $y < z$".

Definición. Si X es un conjunto y $<$ es una relación de orden en X, y si $a < b$, utilizamos la notación (a, b) para representar el conjunto

$$\{x \mid a < x < b\}$$

y se denomina ***intervalo abierto*** de X. Si este conjunto es vacío, a se denomina ***inmediato predecesor*** de b, y b ***inmediato sucesor*** de a.

Definición. Supongamos que A y B son dos conjuntos con relaciones de orden $<_A$ y $<_B$, respectivamente. Decimos que A y B tienen el mismo ***tipo de orden*** si existe

una correspondencia biyectiva entre ellos que preserva el orden, esto es, si existe una función biyectiva $f : A \to B$ tal que

$$a_1 <_A a_2 \Longrightarrow f(a_1) <_B f(a_2).$$

EJEMPLO 9. El intervalo $(-1, 1)$ de los números reales tiene el mismo tipo de orden que el propio conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, ya que la función $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

es una correspondencia biyectiva que conserva el orden, como se puede comprobar. Está dibujada en la Figura 3.2.

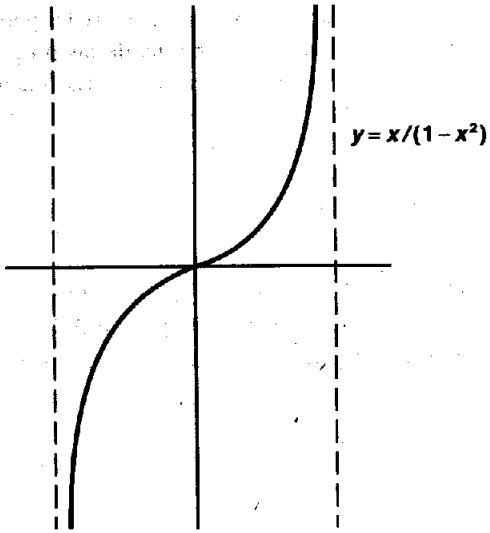


Figura 3.2

EJEMPLO 10. El subconjunto $A = \{0\} \cup (1, 2)$ de $\mathbb{R}$ tiene el mismo tipo de orden que el subconjunto

$$[0, 1) = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$$

de $\mathbb{R}$. La función $f : A \to [0, 1)$ definida por

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(x) &= x - 1 \quad \text{para } x \in (1, 2) \end{aligned}$$

es la correspondencia que preserva el orden que se necesita.

Una forma interesante de definir una relación de orden, que nos será útil posteriormente en algunos ejemplos, es la siguiente:

Definición. Supongamos que A y B son dos conjuntos con relaciones de orden $<_A$ y $<_B$, respectivamente. Definimos una relación de orden $<$ en $A \times B$ mediante

$$a_1 \times b_1 < a_2 \times b_2$$

si $a_1 <_A a_2$, o si $a_1 = a_2$ y $b_1 <_B b_2$. Se denomina ***relación de orden del diccionario*** sobre $A \times B$.

Comprobar que ésta es una relación de orden conlleva estudiar varios casos por separado; esto se deja como ejercicio.

La razón por la que se ha elegido esta terminología es bastante evidente. La regla que define $<$ es la misma regla utilizada para ordenar las palabras en el diccionario. Dadas dos palabras, se comparan sus primeras letras y se ordenan las palabras de acuerdo al orden en el cual esas primeras letras aparecen en el alfabeto. Si las primeras letras son iguales, se comparan las segundas letras, y se ordenan en consecuencia. Y así sucesivamente.

EJEMPLO 11. Consideramos el orden del diccionario sobre el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En este orden, el punto p es menor que cualquier otro punto que se sitúe sobre él en la recta vertical que pasa por p, y también es menor que todo punto situado a la derecha de dicha recta vertical.

EJEMPLO 12. Consideremos el conjunto $[0, 1)$ de números reales y el conjunto $\mathbb{Z}_+$ de los enteros positivos, ambos con sus órdenes usuales; damos a $\mathbb{Z}_+ \times [0, 1)$ el orden del diccionario. Este conjunto tiene el mismo tipo de orden que el conjunto de los reales no negativos. La función

$$f(n \times t) = n + t - 1$$

es la correspondencia biyectiva que preserva el orden que se necesita. Por otro lado, el conjunto $[0, 1) \times \mathbb{Z}_+$ con el orden del diccionario tiene realmente un tipo de orden distinto; por ejemplo, todo elemento de este conjunto ordenado tiene un inmediato sucesor. Estos conjuntos aparecen representados en la Figura 3.3.

Una de las propiedades de los números reales que quizá ya se haya visto es la "propiedad del supremo". Se puede definir esta propiedad para un conjunto ordenado arbitrario. En primer lugar, necesitamos algunas definiciones preliminares.

Supongamos que A es un conjunto ordenado por la relación $<$. Sea A_0 un subconjunto de A. Decimos que un elemento b es el ***máximo*** de A_0 si $b \in A_0$ y si $x \leq b$ para todo $x \in A_0$. Análogamente, decimos que a es el ***mínimo*** de A_0 si $a \in A_0$ y si $a \leq x$ para todo $x \in A_0$. Es fácil ver que un conjunto tiene, a lo sumo, un máximo y un mínimo.

Decimos que el subconjunto A_0 de A está ***acotado superiormente*** si existe un elemento b de A tal que $x \leq b$ para todo $x \in A_0$; el elemento b se denomina ***cota superior*** para A_0. Si el conjunto de todas las cotas superiores de A_0 tiene un mínimo,

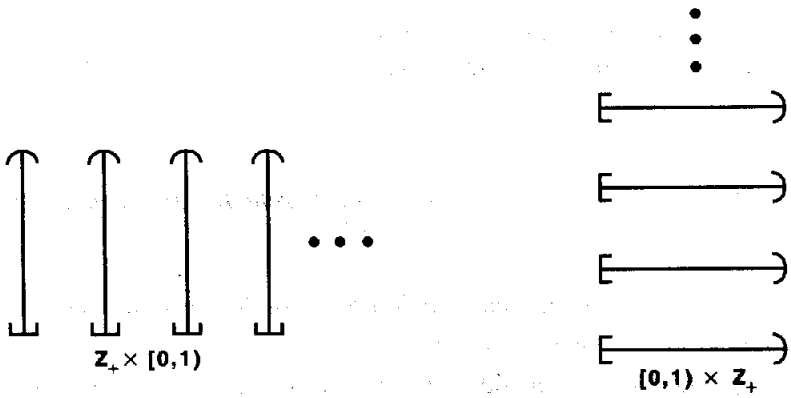


Figura 3.3

ese elemento se denomina el ***extremo superior*** o ***supremo*** de A_0. Se representa por $\sup A_0$; éste puede pertenecer o no a A_0. Si pertenece, es el máximo de A_0.

Análogamente, A_0 está ***acotado inferiormente*** si existe un elemento a de A tal que $a \leq x$ para todo $x \in A_0$; el elemento a se denomina ***cota inferior*** para A_0. Si el conjunto de todas las cotas inferiores de A_0 tiene un máximo, ese elemento se denomina ***extremo inferior*** o ***ínfimo*** de A_0. Se representa por $\inf A_0$; éste puede pertenecer o no a A_0. Si pertenece, es el mínimo de A_0.

Ahora podemos definir la propiedad del supremo.

Definición. Un conjunto ordenado A se dice que tiene la ***propiedad del supremo*** si todo subconjunto no vacío A_0 de A que esté acotado superiormente tiene supremo. Análogamente, se dice que el conjunto A tiene la ***propiedad del ínfimo*** si todo subconjunto no vacío A_0 de A que esté acotado inferiormente tiene ínfimo.

Dejamos para los ejercicios el demostrar que A tiene la propiedad del supremo si, y sólo si, tiene la propiedad del ínfimo.

EJEMPLO 13. Consideremos el conjunto $A = (-1, 1)$ de números reales con el orden usual. Suponiendo el hecho de que los números reales tienen la propiedad del supremo, se deduce que el conjunto A tiene la propiedad del supremo. Para ello, dado cualquier subconjunto de A que tenga una cota superior *en* A, se tiene que su supremo (en los números reales) debe estar en A. Por ejemplo, el subconjunto $\{-1/2n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ de A, aunque no tiene un máximo, tiene un supremo en A, el número 0.

Por otro lado, el conjunto $B = (-1, 0) \cup (0, 1)$ no tiene la propiedad del supremo. El subconjunto $\{-1/2n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ de B está acotado superiormente por cualquier elemento de $(0, 1)$, pero no tiene un supremo en B.

Ejercicios

Relaciones de equivalencia

1. Decimos que dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) del plano son equivalentes si $y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2$. Compruebe que es una relación de equivalencia y describa las clases de equivalencia.

2. Sea C una relación sobre un conjunto A. Si $A_0 \subset A$, definimos la ***restricción*** de C a A_0 como la relación $C \cap (A_0 \times A_0)$. Demuestre que la restricción de una relación de equivalencia es una relación de equivalencia.

3. Aquí hay una "demostración" de que toda relación C que es a la vez simétrica y transitiva es también reflexiva: "Como C es simétrica, aCb implica bCa. Como C es transitiva, aCb y bCa implican aCa, como se quería demostrar". Encuentre el fallo en este argumento.

4. Sea $f : A \to B$ una función sobreyectiva. Definimos una relación en A mediante $a_0 \sim a_1$ si
$$f(a_0) = f(a_1).$$
   (a) Demuestre que es una relación de equivalencia.
   (b) Sea A^* el conjunto de las clases de equivalencia. Demuestre que existe una correspondencia biyectiva entre A^* y B.

5. Sean S y S' los siguientes subconjuntos del plano:
$$S = \{(x, y) \mid y = x + 1 \text{ y } 0 < x < 2\}, \quad S' = \{(x, y) \mid y - x \text{ es un entero}\}.$$
   (a) Demuestre que S' es una relación de equivalencia sobre la recta real y que $S' \supset S$. Describa las clases de equivalencia de S'.
   (b) Demuestre que dada cualquier colección de relaciones de equivalencia sobre un conjunto A, su intersección es una relación de equivalencia sobre A.
   (c) Describa la relación de equivalencia T sobre la recta real que es la intersección de todas las relaciones de equivalencia sobre la recta real que contienen a S. Describa las clases de equivalencia de T.

Relaciones de orden

6. Definimos una relación en el plano por
$$(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$$
si ya $y_0 - x_0^2 < y_1 - x_1^2$, ya $y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2$ y $x_0 < x_1$. Demuestre que ésta es una relación de orden sobre el plano, y descríbala geométricamente.

7. Demuestre que la restricción de una relación de orden es una relación de orden.

8. Compruebe que la relación definida en el Ejemplo 7 es una relación de orden.

9. Compruebe que el orden del diccionario es una relación de orden.

10. (a) Demuestre que la aplicación $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ del Ejemplo 9 conserva el orden.

(b) Demuestre que la ecuación $g(y) = 2y/[1 + (1 + 4y^2)^{1/2}]$ define una función $g : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ que es, a la vez, una inversa por la izquierda y por la derecha de f.

11. Demuestre que un elemento en un conjunto ordenado tiene, a lo sumo, un inmediato sucesor y un inmediato predecesor. Demuestre que un subconjunto de un conjunto ordenado tiene, a lo sumo, un mínimo y, a lo sumo, un máximo.

12. Sea $\mathbb{Z}_+$ el conjunto de los enteros positivos. Considere las siguientes relaciones de orden en $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$:

(i) El orden del diccionario.

(ii) $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$ si ya $x_0 - y_0 < x_1 - y_1$, ya $x_0 - y_0 = x_1 - y_1$ e $y_0 < y_1$.

(iii) $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$ si ya $x_0 + y_0 < x_1 + y_1$, ya $x_0 + y_0 = x_1 + y_1$ e $y_0 < y_1$.

Con estas relaciones de orden, ¿qué elementos tienen inmediato predecesor? ¿Tiene el conjunto un mínimo? Demuestre que los tres tipos de órdenes son distintos.

13. Demuestre lo siguiente:
Teorema. Si un conjunto ordenado A tiene la propiedad del supremo, entonces tiene la propiedad del ínfimo.

14. Si C es una relación en un conjunto A, se define una nueva relación D en A mediante $(b, a) \in D$ si $(a, b) \in C$.

(a) Demuestre que C es simétrica si, y sólo si, $C = D$.

(b) Demuestre que si C es una relación de orden, D también es una relación de orden.

(c) Demuestre el recíproco del teorema del Ejercicio 13.

15. Asumamos que la recta real tiene la propiedad del supremo.

(a) Demuestre que los conjuntos

$$[0, 1] = \{x \mid 0 \le x \le 1\},$$
$$[0, 1) = \{x \mid 0 \le x < 1\}$$

tienen la propiedad del supremo.

(b) ¿Tiene el conjunto $[0, 1] \times [0, 1]$ con el orden del diccionario la propiedad del supremo? ¿Qué ocurre con $[0, 1] \times [0, 1)$? ¿Y con $[0, 1) \times [0, 1]$?

§4 Los enteros y los números reales

Hasta ahora hemos estado discutiendo lo que podrían llamarse los *fundamentos lógicos* para nuestro estudio de la topología —los conceptos elementales de la teoría de conjuntos—. Ahora hacemos un cambio radical a lo que podríamos llamar *fundamentos matemáticos* de nuestro estudio —los enteros y el sistema de números reales—. Ya los hemos utilizado de una manera informal, en los ejemplos y ejercicios de las secciones anteriores. Ahora deseamos tratarlos más formalmente.

Una forma de establecer estos fundamentos es *construir* el sistema de números reales, utilizando únicamente los axiomas de la teoría de conjuntos —construirlos con las manos desnudas, por decirlo de alguna forma—. Esta manera de aproximar el tema conlleva un buen reparto de tiempo y esfuerzo, y es de mayor interés lógico que matemático.

Una segunda forma sería simplemente asumir un conjunto de axiomas para los números reales y trabajar desde esos axiomas. En la presente sección esbozaremos esta aproximación a los números reales. Concretamente, daremos un conjunto de axiomas para dichos números e indicaremos cómo las propiedades más conocidas de los números reales y enteros se deducen de ellos. Pero dejaremos la mayoría de las demostraciones como ejercicios. Si el lector ya ha estudiado todo esto con anterioridad, nuestra descripción refrescará su memoria. En caso contrario, puede interesarle trabajar con detalle todos los ejercicios, para así conocer los fundamentos matemáticos.

En primer lugar necesitamos una definición de la teoría de conjuntos.

Definición. Una ***operación binaria*** en un conjunto A es una función f que aplica $A \times A$ en A.

Cuando se trabaja con una operación binaria f en un conjunto A, usualmente utilizamos una notación diferente a la notación funcional estándar introducida en §2. En lugar de representar el valor de la función f en el punto (a, a') por $f(a, a')$, escribiremos el símbolo que representa dicha función *entre* las dos coordenadas del punto en cuestión, escribiendo así el valor de la función en (a, a') como afa'. Más aún (como en el caso de las relaciones), es más común utilizar otros símbolos distintos a las letras para representar una operación. Los utilizados con mayor frecuencia son la suma $+$, los símbolos para el producto, $\cdot$ y $\circ$, y el asterisco $*$; sin embargo, existen otros muchos.

Hipótesis

Supongamos que existen un conjunto $\mathbb{R}$, llamado el conjunto de los ***números reales***, dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$ sobre $\mathbb{R}$, llamadas operaciones suma y multiplica-

ción respectivamente, y una relación de orden $<$ sobre $\mathbb{R}$, tales que se cumplen las siguientes propiedades:

Propiedades algebraicas

(1) $(x+y)+z = x+(y+z)$,
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ para todo x, y, z en $\mathbb{R}$.

(2) $x+y = y+x$,
$x \cdot y = y \cdot x$ para todo x, y en $\mathbb{R}$.

(3) Existe un único elemento de $\mathbb{R}$ llamado ***cero***, representado por 0, de forma que $x+0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Existe un único elemento de $\mathbb{R}$ llamado ***uno***, distinto de 0 y representado por 1, tal que $x \cdot 1 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(4) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $x+y = 0$.
Para cada $x \in \mathbb{R}$ distinto de 0 existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot y = 1$.

(5) $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Una propiedad mixta algebraica y de orden

(6) Si $x > y$, entonces $x+z > y+z$.
Si $x > y$ y $z > 0$, entonces $x \cdot z > y \cdot z$.

Otras propiedades

(7) La relación de orden $<$ verifica la propiedad del supremo.

(8) Si $x < y$, existe un elemento z tal que $x < z$ y $z < y$.

De las propiedades (1)-(5) se deducen las conocidas "leyes del álgebra". Dado x, se representa por $-x$ el número y tal que $x+y = 0$; se denomina ***opuesto*** de x. Se define la ***operación sustracción*** mediante la relación $z - x = z + (-x)$. Análogamente, dado $x \neq 0$, se representa por $1/x$ el número y tal que $x \cdot y = 1$; se denomina ***inverso*** de x. Así, definimos el ***cociente*** z/x mediante la fórmula $z/x = z \cdot (1/x)$. Las leyes usuales de los signos y las reglas para la suma y la multiplicación de fracciones se deducen como teoremas. Estas leyes del álgebra aparecen enumeradas en el Ejercicio 1 al final de la sección. Frecuentemente, representaremos $x \cdot y$ simplemente por xy.

Cuando se une la propiedad (6) a las propiedades (1)-(5), se pueden demostrar las conocidas "leyes de las desigualdades", como por ejemplo:

$$\text{Si } x > y \text{ y } z < 0, \text{ entonces } x \cdot y < y \cdot z.$$

$$-1 < 0 \text{ y } 0 < 1.$$

Las leyes de las desigualdades aparecen recogidas en el Ejercicio 2.

Decimos que un número es ***positivo*** si $x > 0$, y ***negativo*** si $x < 0$. Representaremos los reales positivos por $\mathbb{R}_+$ y los reales no negativos (por razones que se

explicarán posteriormente) por $\bar{\mathbb{R}}_+$. Las propiedades (1)-(6) son conocidas en el álgebra moderna. Cualquier conjunto con dos operaciones binarias verificando (1)-(5) se denomina ***cuerpo***; si el cuerpo tiene una relación de orden que satisface (6), se denomina ***cuerpo ordenado***.

Por otro lado, las propiedades (7) y (8) son propiedades conocidas en topología. Éstas implican sólo a la relación de orden; cualquier conjunto con una relación de orden verificando (7) y (8) se denomina ***continuo lineal***.

Ahora bien, cuando a los axiomas correspondientes a un cuerpo ordenado [propiedades (1)-(6)] se unen los axiomas relativos a un continuo lineal [propiedades (7) y (8)], la lista resultante contiene algunas redundancias. En particular, la propiedad (8) se puede obtener como una consecuencia de las demás; dados $x < y$ se demuestra que $z = (x + y)/(1 + 1)$ verifica los requisitos de (8). Por lo tanto, en el tratamiento estándar de los números reales, se toman como axiomas las propiedades (1)-(7), convirtiéndose la propiedad (8) en un teorema. Nosotros hemos incluido (8) en nuestra lista simplemente para enfatizar el hecho de que ésta y el principio del supremo son las dos propiedades fundamentales de la relación de orden para $\mathbb{R}$. De estas dos se pueden deducir muchas de las propiedades topológicas de $\mathbb{R}$, como se verá en el Capítulo 3.

Ahora bien, no hay nada en esta lista, tal y como aparece, que nos diga qué es un entero. Vamos a definir ahora los *enteros*, utilizando únicamente las propiedades (1)-(6).

Definición. Se dice que un subconjunto A de los números reales es ***inductivo*** si contiene el número 1, y si para todo x de A, el número $x + 1$ también está en A. Sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$. Entonces, el conjunto $\mathbb{Z}_+$ de los ***enteros positivos*** se define de la forma

$$\mathbb{Z}_+ = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Obsérvese que el conjunto $\mathbb{R}_+$ de los números reales positivos es inductivo, pues contiene el 1, y la afirmación $x > 0$ implica $x + 1 > 0$. Por lo tanto, $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{R}_+$, y de esta forma los elementos de $\mathbb{Z}_+$ son efectivamente positivos, tal y como la elección de la terminología sugiere. De hecho, se comprueba fácilmente que 1 es el elemento más pequeño de $\mathbb{Z}_+$, ya que el conjunto de todos los números reales x para los cuales $x \geq 1$ es inductivo.

Las propiedades básicas de $\mathbb{Z}_+$, las cuales se deducen inmediatamente de la definición, son las siguientes:

(1) $\mathbb{Z}_+$ es inductivo.

(2) (Principio de inducción). Si A es un conjunto inductivo de enteros positivos, entonces $A = \mathbb{Z}_+$.

Vamos a definir el conjunto $\mathbb{Z}$ de los ***enteros*** como el conjunto formado por los enteros positivos $\mathbb{Z}_+$, el número 0, y los negativos de los elementos de $\mathbb{Z}_+$. Se demuestra que la suma, la diferencia y el producto de dos enteros son enteros, pero el cociente no tiene por qué ser necesariamente un entero. El conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los cocientes de los enteros se denomina el conjunto de los ***números racionales***.

Se puede demostrar también que, dado el entero n, no existe ningún entero a tal que $n < a < n + 1$.

Si n es un entero positivo, utilizaremos el símbolo S_n para representar el conjunto de todos los enteros positivos menores que n; lo llamaremos una ***sección*** de los enteros positivos. El conjunto S_1 es vacío y S_{n+1} representa el conjunto de los enteros positivos entre 1 y n inclusive. También emplearemos la notación

$$\{1, \ldots, n\} = S_{n+1}$$

para el conjunto anterior.

Vamos a demostrar ahora dos propiedades de los enteros positivos que pueden ser no demasiado conocidas, pero que son bastante útiles. Se pueden considerar como versiones alternativas del principio de inducción.

Teorema 4.1 (Principio del buen orden). *Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_+$ tiene un mínimo.*

Demostración. En primer lugar vamos a demostrar que, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, se verifica la siguiente afirmación: *Todo subconjunto no vacío de $\{1, \ldots, n\}$ tiene un mínimo.*

Sea A el conjunto de todos los enteros positivos n para los cuales se cumple dicha afirmación. Entonces A contiene al 1, ya que si $n = 1$, el único subconjunto no vacío de $\{1, \ldots, n\}$ es el propio conjunto $\{1\}$. Por tanto, suponiendo que A contiene a n, vamos a demostrar que también contiene a $n + 1$. Sea C un subconjunto no vacío del conjunto $\{1, \ldots, n + 1\}$. Si C está formado únicamente por $n + 1$, entonces dicho elemento es el menor elemento de C. En caso contrario, consideremos el conjunto $C \cap \{1, \ldots, n\}$, que es no vacío. Como $n \in A$, este conjunto tiene un mínimo, que automáticamente será también el mínimo de C. Así A es inductivo, y podemos concluir que $A = \mathbb{Z}_+$; por tanto, la afirmación es cierta para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Ahora vamos a demostrar el teorema. Supongamos que D es un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_+$. Elijamos un elemento $n \in D$. Entonces, el conjunto $A = D \cap \{1, \ldots, n\}$ es no vacío, y A tendrá un mínimo k. El elemento k será también el mínimo de D. ■

Teorema 4.2 (Principio de inducción fuerte). *Sea A un conjunto de enteros positivos. Supongamos que para cada entero positivo n, la afirmación $S_n \subset A$ implica $n \in A$. Entonces $A = \mathbb{Z}_+$.*

Demostración. Si A es distinto de $\mathbb{Z}_+$, sea n el menor entero positivo que no pertenece a A. Entonces, todo entero positivo menor que n está en A, y por tanto $S_n \subset A$. Nuestra hipótesis implica que $n \in A$, lo cual es una contradicción. ■

En todo lo que se ha hecho hasta ahora se han utilizado únicamente los axiomas para un cuerpo ordenado, propiedades (1)-(6) de los números reales. ¿En qué punto se necesita (7), el axioma del supremo?

Para una cosa, se necesita el axioma del supremo para demostrar que el conjunto $\mathbb{Z}_+$ de los enteros positivos no tiene ninguna cota superior en $\mathbb{R}$. Ésta es la ***propiedad arquimediana*** de la recta real. Para demostrarlo, suponemos que existe una cota superior para $\mathbb{Z}_+$, con lo que llegaremos a una contradicción. Si $\mathbb{Z}_+$ tiene una cota superior, debe tener un supremo b. Existe un $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n > b - 1$, pues en caso contrario $b-1$ sería una cota superior de $\mathbb{Z}_+$ más pequeña que b. Por tanto, $n+1 > b$, contradiciendo el hecho de que b es cota superior de $\mathbb{Z}_+$.

El axioma del supremo se utiliza también para demostrar otras muchas cosas de $\mathbb{R}$. Por ejemplo, se usa para probar que $\mathbb{R}$ tiene la propiedad del ínfimo. También se utiliza para demostrar la existencia de una única raíz cuadrada positiva $\sqrt{x}$ para cada número real positivo. Este hecho permite comprobar la existencia de números reales que no son racionales; el número $\sqrt{2}$ es un sencillo ejemplo.

Utilizamos el símbolo 2 para representar $1+1$, el símbolo 3 para denotar $2+1$, y así sucesivamente todos los símbolos estándar que representan los enteros positivos. Es un hecho que este procedimiento asigna, a cada entero positivo, un único símbolo, pero no encierra interés y no lo demostraremos aquí.

Las demostraciones de estas propiedades relativas a los enteros y a los números reales, junto con otras propiedades que necesitaremos posteriormente, están esbozadas en los ejercicios que se presentan a continuación.

Ejercicios

1. Demuestre las siguientes "leyes del álgebra" para $\mathbb{R}$, utilizando únicamente los axiomas (1)-(5):

(a) Si $x + y = x$, entonces $y = 0$.

(b) $0 \cdot x = 0$. [*Indicación*: calcule $(x + 0) \cdot x$.]

(c) $-0 = 0$.

(d) $-(-x) = x$.

(e) $x(-y) = -(xy) = (-x)y$.

(f) $(-1)x = -x$.

(g) $x(y - z) = xy - xz$.

(h) $-(x + y) = -x - y$; $-(x - y) = -x + y$.

(i) Si $x \neq 0$ y $x \cdot y = x$, entonces $y = 1$.
(j) $x/x = 1$ si $x \neq 0$.
(k) $x/1 = x$.
(l) $x \neq 0$ e $y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$.
(m) $(1/y)(1/z) = 1/(yz)$ si $y, z \neq 0$.
(n) $(x/y)(w/z) = (xw)/(yz)$ si $y, z \neq 0$.
(o) $(x/y) + (w/z) = (xz + wy)/(yz)$ si $y, z \neq 0$.
(p) $x \neq 0 \Rightarrow 1/x \neq 0$.
(q) $1/(w/z) = z/w$ si $w, z \neq 0$.
(r) $(x/y)/(w/z) = (xz)/(yw)$ si $y, w, z \neq 0$.
(s) $(ax)/y = a(x/y)$ si $y \neq 0$.
(t) $(-x)/y = x/(-y) = -(x/y)$ si $y \neq 0$.

2. Demuestre las siguientes "leyes de las desigualdades" para $\mathbb{R}$, utilizando los axiomas (1)-(6) junto con los resultados del Ejercicio 1:

(a) $x > y$ y $w > z \Rightarrow x + w > y + z$.
(b) $x > 0$ e $y > 0 \Rightarrow x + y > 0$ y $x \cdot y > 0$.
(c) $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$.
(d) $x > y \Leftrightarrow -x < -y$.
(e) $x > y$ y $z < 0 \Rightarrow xz < yz$.
(f) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$, donde $x^2 = x \cdot x$.
(g) $-1 < 0 < 1$.
(h) $xy > 0 \Leftrightarrow x$ e y son ambos positivos o ambos negativos.
(i) $x > 0 \Rightarrow 1/x > 0$.
(j) $x > y > 0 \Rightarrow 1/x < 1/y$.
(k) $x < y \Rightarrow x < (x + y)/2 < y$.

3. (a) Demuestre que si $\mathcal{A}$ es una colección de conjuntos inductivos, entonces la intersección de los elementos de $\mathcal{A}$ también es un conjunto inductivo.
(b) Demuestre las propiedades básicas (1) y (2) de $\mathbb{Z}_+$.

4. (a) Demuestre por inducción que dado $n \in \mathbb{Z}_+$, todo subconjunto no vacío de $\{1, \ldots, n\}$ tiene un mayor elemento.
(b) Explique por qué no se puede deducir de (a) que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_+$ tiene un mayor elemento.

5. Demuestre las siguientes propiedades de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_+$:

(a) $a, b \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}_+$. [*Indicación*: demuestre que dado $a \in \mathbb{Z}_+$, el conjunto $X = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ y } a + x \in \mathbb{Z}_+\}$ es inductivo.]
(b) $a, b \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Z}_+$.

(c) Demuestre que $a \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a - 1 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. [*Indicación*: sea $X = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ y } x - 1 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}\}$; demuestre que X es inductivo.]

(d) $c, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow c + d \in \mathbb{Z}$ y $c - d \in \mathbb{Z}$. [*Indicación*: demuéstrelo en primer lugar para $d = 1$.]

(e) $c, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow c \cdot d \in \mathbb{Z}$.

6. Sea $a \in \mathbb{R}$. Defina inductivamente

$$\begin{aligned} a^1 &= a, \\ a^{n+1} &= a^n \cdot a \end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{Z}_+$ (véase §7 para el estudio del proceso de la definición inductiva).

Demuestre que si $n, m \in \mathbb{Z}_+$ y $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} a^n a^m &= a^{n+m}, \\ (a^n)^m &= a^{nm}, \\ a^m b^m &= (ab)^m. \end{aligned}$$

Estas relaciones se denominan ***leyes de los exponentes***. [*Indicación*: para un n fijo, demuestre las fórmulas por inducción sobre m.]

7. Sea $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Definimos $a^0 = 1$, y para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, $a^{-n} = 1/a^n$. Demuestre que las leyes de los exponentes se verifican para $a, b \neq 0$ y $n, m \in \mathbb{Z}$.

8. (a) Demuestre que $\mathbb{R}$ tiene la propiedad del ínfimo.

(b) Demuestre que $\inf\{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\} = 0$.

(c) Demuestre que dado a con $0 < a < 1$, $\inf\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}_+\} = 0$. [*Indicación*: sea $h = (1 - a)/a$. Demuestre que $(1 + h)^n \geq 1 + nh$.]

9. (a) Demuestre que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$ acotado superiormente tiene un máximo.

(b) Si $x \notin \mathbb{Z}$, demuestre que existe exactamente un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n < x < n + 1$.

(c) Si $x - y > 1$, demuestre que existe al menos un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $y < n < x$.

(d) Si $y < x$, demuestre que existe un número racional z tal que $y < z < x$.

10. Demuestre, como se indica a continuación, que todo número positivo a tiene exactamente una raíz cuadrada positiva:

(a) Demuestre que si $x > 0$ y $0 \leq h < 1$, entonces

$$\begin{aligned} (x + h)^2 &\leq x^2 + h(2x + 1), \\ (x - h)^2 &\geq x^2 - h(2x). \end{aligned}$$

(b) Sea $x > 0$. Demuestre que si $x^2 < a$, entonces $(x+h)^2 < a$ para algún $h > 0$, y que si $x^2 > a$, entonces $(x-h)^2 > a$ para algún $h > 0$.

(c) Dado $a > 0$, sea B el conjunto de todos los números reales x tales que $x^2 < a$. Demuestre que B está acotado superiormente y que contiene, al menos, un número positivo. Sea $b = \sup B$; demuestre que $b^2 = a$.

(d) Demuestre que si b y c son positivos y $b^2 = c^2$, entonces $b = c$.

11. Dado $m \in \mathbb{Z}$, decimos que m es ***par*** si $m/2 \in \mathbb{Z}$, y que m es ***impar*** en caso contrario.

(a) Demuestre que si m es impar, $m = 2n+1$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. [*Indicación*: elija n de forma que $n < m/2 < n+1$.]

(b) Demuestre que si p y q son impares, también lo son $p \cdot q$ y p^n, para cualquier $n \in \mathbb{Z}_+$.

(c) Demuestre que si $a > 0$ es un número racional, entonces $a = m/n$ para ciertos $m, n \in \mathbb{Z}_+$, donde m y n no pueden ser a la vez pares. [*Indicación*: sea n el menor elemento del conjunto $\{x \mid x \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } x \cdot a \in \mathbb{Z}_+\}$.]

(d) *Teorema:* $\sqrt{2}$ *es irracional.*

§5 Productos cartesianos

Ya hemos definido lo que se entiende por producto cartesiano $A \times B$ de dos conjuntos. Ahora vamos a introducir productos cartesianos más generales.

Definición. Sea $\mathcal{A}$ una colección no vacía de conjuntos. Una ***función indexante*** para $\mathcal{A}$ es una función sobreyectiva f de un conjunto J, denominado ***conjunto de índices***, en $\mathcal{A}$. La familia $\mathcal{A}$, junto con la función indexante f, se denomina ***familia indexada de conjuntos***. Dado $\alpha \in J$, representaremos el conjunto $f(\alpha)$ por A_α. Y denotaremos la familia indexada, propiamente dicha, mediante

$$\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$$

que se lee como "la familia de todos los A_α, cuando α recorre J". En ocasiones, escribiremos simplemente $\{A_\alpha\}$, si no ofrece dudas cuál es el conjunto de índices.

Obsérvese que, aunque es necesario que una función indexante sea sobreyectiva, no se necesita que sea *inyectiva*. A_α y A_β pueden ser el mismo conjunto de $\mathcal{A}$, incluso si $\alpha \neq \beta$.

Una forma de usar funciones indexantes es dar una nueva notación para uniones e intersecciones arbitrarias de conjuntos. Supongamos que $f : J \to \mathcal{A}$ es una función indexante para $\mathcal{A}$; representemos $f(\alpha)$ por A_α. Entonces, definimos

$$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \{x \mid \text{ al menos para un } \alpha \in J,\ x \in A_\alpha\}$$

y

$$\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \{x \mid \text{ para todo } \alpha \in J,\ x \in A_\alpha\}.$$

Éstas son simplemente nuevas notaciones para conceptos que ya han sido previamente definidos; se puede ver de inmediato (utilizando la sobreyectividad de la función indexante) que la primera representa la unión de todos los elementos de $\mathcal{A}$ y la segunda representa la intersección de todos los elementos de $\mathcal{A}$.

Dos conjuntos de índices utilizados especialmente son el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ de los enteros positivos desde 1 hasta n y el conjunto $\mathbb{Z}_+$ de todos los enteros positivos. Para estos conjuntos de índices vamos a introducir algunas notaciones especiales. Si una colección de conjuntos está indexada por el conjunto $\{1, \ldots, n\}$, representaremos la familia indexada mediante los símbolos $\{A_1, \ldots A_n\}$, y denotaremos, respectivamente, la unión y la intersección de los miembros de esta familia por

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n \quad \text{y} \quad A_1 \cap \cdots \cap A_n.$$

En el caso de que el conjunto de índices sea $\mathbb{Z}_+$, representaremos la familia indexada por $\{A_1, A_2, \ldots\}$, y la unión e intersección por

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \quad \text{y} \quad A_1 \cap A_2 \cap \cdots.$$

Definición. Sea m un entero positivo. Dado un conjunto X, definimos una ***m-upla*** de elementos de X como una función

$$\mathbf{x} : \{1, \ldots m\} \to X.$$

Si $\mathbf{x}$ es una m-upla, con frecuencia representaremos el valor de $\mathbf{x}$ en i por x_i en lugar de $\mathbf{x}(i)$, y lo llamaremos la i-ésima ***coordenada*** de $\mathbf{x}$. Además, denotaremos la propia función $\mathbf{x}$ mediante la expresión

$$(x_1, \ldots x_m).$$

Ahora, sea $\{A_1, \ldots, A_m\}$ una familia indexada con el conjunto $\{1, \ldots, m\}$. Sea $X = A_1 \cup \cdots \cup A_m$. Definimos el ***producto cartesiano*** de esta familia indexada, y lo representaremos por

$$\prod_{i=1}^{m} A_i \quad \text{o} \quad A_1 \times \cdots \times A_m,$$

como el conjunto de todas las m-uplas $(x_1, \ldots, x_m)$ de elementos de X, tal que $x_i \in A_i$ para cada i.

EJEMPLO 1. En este momento tenemos dos definiciones para el símbolo $A \times B$. Una primera definición es, desde luego, la establecida anteriormente, según la cual $A \times B$ representa el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$. La segunda definición, que acabamos de ver, define $A \times B$ como el conjunto de todas las funciones $\mathbf{x}:\{1,2\} \to A \cup B$ tales que $\mathbf{x}(1) \in A$ y $\mathbf{x}(2) \in B$. Es obvia la existencia de una correspondencia biyectiva entre estos dos conjuntos, bajo la cual el par ordenado (a, b) corresponde a la función $\mathbf{x}$ definida por $\mathbf{x}(1) = a$ y $\mathbf{x}(2) = b$. Ya que frecuentemente representamos esta función $\mathbf{x}$ en "notación de upla" mediante el símbolo (a, b), la notación en sí misma sugiere la correspondencia. Así para el producto cartesiano de dos conjuntos, la definición más general de producto cartesiano se reduce esencialmente a la dada en primer lugar.

EJEMPLO 2. ¿En qué se diferencia el producto cartesiano $A \times B \times C$ de los productos cartesianos $A \times (B \times C)$ y $(A \times B) \times C$? En muy poco. Existen correspondencias biyectivas obvias entre estos conjuntos, que indicamos a continuación:

$$(a, b, c) \longleftrightarrow (a, (b, c)) \longleftrightarrow ((a, b), c).$$

Definición. Dado un conjunto X, definimos una ***ω-upla*** de elementos de X como una función

$$\mathbf{x} : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow X;$$

también llamaremos a tal función una ***sucesión***, o ***sucesión infinita***, de elementos de X. Si $\mathbf{x}$ es una ω-upla, frecuentemente representaremos el valor de $\mathbf{x}$ en i por x_i, en lugar de $\mathbf{x}(i)$, y lo llamaremos la i-ésima ***coordenada*** de $\mathbf{x}$. Denotaremos la propia función $\mathbf{x}$ mediante el símbolo

$$(x_1, x_2, \dots) \quad \text{o} \quad (x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}.$$

Sea ahora $\{A_1, A_2, \dots\}$ una familia de conjuntos, indexada con los enteros positivos; sea X la unión de todos los conjuntos de esta familia. El ***producto cartesiano*** de esta familia indexada de conjuntos, representado por

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}_+} A_i \quad \text{o} \quad A_1 \times A_2 \times \cdots,$$

se define como el conjunto de todas las ω-uplas $(x_1, x_2, \dots)$ de elementos de X tales que $x_i \in A_i$ para cada i.

No hay nada en estas definiciones que requiera que los conjuntos A_i sean distintos entre sí. De hecho, podrían ser todos iguales al mismo conjunto X. En ese caso, el producto cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_m$ es simplemente el conjunto de *todas* las m-uplas de elementos de X, lo cual representaremos por X^m. Análogamente, el producto $A_1 \times A_2 \times \cdots$ sería, en este caso, el conjunto de todas las ω-uplas de elementos de X, denotándose entonces por X^ω.

Posteriormente definiremos el producto cartesiano de una familia indexada *arbitraria* de conjuntos.

EJEMPLO 3. Si $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales, entonces $\mathbb{R}^m$ representa el conjunto de todas las m-uplas de números reales; éste es denominado frecuentemente ***m-espacio euclídeo*** (a pesar de que Euclides nunca lo reconocería). Análogamente, $\mathbb{R}^\omega$ se denomina a veces "espacio euclídeo infinito-dimensional", que es el conjunto de todas las ω-uplas $(x_1, x_2, \dots)$ de números reales, esto es, el conjunto de todas las funciones $\mathbf{x}\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$.

Ejercicios

1. Demuestre que existe una correspondencia biyectiva entre $A \times B$ y $B \times A$.

2. (a) Demuestre que si $n > 1$, existe una correspondencia biyectiva entre

$$A_1 \times \cdots \times A_n \quad \text{y} \quad (A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n.$$

(b) Dada una familia indexada $\{A_1, A_2, \dots\}$, sea $B_i = A_{2i-1} \times A_{2i}$ para cada entero positivo i. Demuestre que existe una correspondencia biyectiva entre $A_1 \times A_2 \times \cdots$ y $B_1 \times B_2 \times \cdots$.

3. Sean $A = A_1 \times A_2 \times \cdots$ y $B = B_1 \times B_2 \times \cdots$.

(a) Demuestre que si $B_i \subset A_i$ para todo i, entonces $B \subset A$ (estrictamente hablando, si tenemos una función que aplica el conjunto de índices $\mathbb{Z}_+$ en la unión de los conjuntos B_i, debemos cambiar su rango antes de considerarla como una función que aplica $\mathbb{Z}_+$ en la unión de los A_i. Ignoraremos este detalle técnico cuando trabajemos con productos cartesianos).

(b) Demuestre que se verifica el recíproco de (a) si B es no vacío.

(c) Demuestre que si A es no vacío, cada A_i es no vacío. ¿Es cierto el recíproco? (Volveremos a considerar esta cuestión en los ejercicios de §19).

(d) ¿Cuál es la relación entre el conjunto $A \cup B$ y el producto cartesiano de los conjuntos $A_i \cup B_i$? ¿Cuál es la relación entre el conjunto $A \cap B$ y el producto cartesiano de los conjuntos $A_i \cap B_i$?

4. Sean $m, n \in \mathbb{Z}_+$ y $X \neq \varnothing$.

(a) Si $m \leq n$, encuentre una aplicación inyectiva $f : X^m \to X^n$.

(b) Encuentre una aplicación biyectiva $g : X^m \times X^n \to X^{m+n}$.

(c) Encuentre una aplicación inyectiva $h : X^n \to X^\omega$.

(d) Encuentre una aplicación biyectiva $k : X^n \times X^\omega \to X^\omega$.

(e) Encuentre una aplicación biyectiva $l : X^\omega \times X^\omega \to X^\omega$.

(f) Si $A \subset B$, encuentre una aplicación inyectiva $m : (A^\omega)^n \to B^\omega$.

5. ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^\omega$ puede expresarse como el producto cartesiano de subconjuntos de $\mathbb{R}$?

(a) $\{\mathbf{x} \mid x_i \text{ es un entero para todo } i\}$.

(b) $\{\mathbf{x} \mid x_i \geq i$ para todo $i\}$.

(c) $\{\mathbf{x} \mid x_i$ es un entero para todo $i \geq 100\}$.

(d) $\{\mathbf{x} \mid x_2 = x_3\}$.

§6 Conjuntos finitos

Conjuntos finitos y conjuntos infinitos, conjuntos numerables y conjuntos no numerables, éstos son algunos de los tipos de conjuntos que han podido aparecer hasta ahora. No obstante, los estudiaremos en esta sección y en la siguiente, no sólo para estar seguros de que se han comprendido a fondo, sino también para aclarar algunos puntos concretos que aparecerán posteriormente. En primer lugar, consideraremos los conjuntos finitos.

Recuérdese que si n es un entero positivo, utilizamos S_n para representar el conjunto de enteros positivos menores que n; S_n se denomina una *sección* de los enteros positivos. Los conjuntos S_n son los prototipos de lo que llamamos los conjuntos finitos.

Definición. Se dice que un conjunto es ***finito*** si existe una correspondencia biyectiva entre A y alguna sección de los enteros positivos. Esto es, A es finito si es vacío o si existe una biyección

$$f : A \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$$

para algún entero positivo n. En el primer caso decimos que A tiene ***cardinal 0*** y en el segundo caso decimos que A tiene ***cardinal n***.

Por ejemplo, el propio conjunto $\{1, \ldots, n\}$ tiene cardinal n, ya que está en correspondencia biyectiva consigo mismo por la función identidad.

Ahora observemos cuidadosamente: *todavía no hemos demostrado que el cardinal de un conjunto finito está únicamente determinado por el conjunto*. Desde luego, es evidente que el conjunto vacío debe tener cardinal cero. Pero hasta donde nosotros conocemos, podrían existir correspondencias biyectivas de un conjunto no vacío dado A con dos conjuntos distintos $\{1, \ldots, n\}$ y $\{1, \ldots, m\}$. Esta posibilidad puede parecer ridícula, ya que es como decir que es posible para dos personas contar las canicas que hay en una caja y regresar con dos respuestas diferentes, *ambas correctas*. Nuestra experiencia en la vida diaria nos sugiere que esto es imposible, y de hecho esto es fácil de probar cuando n es un número pequeño como 1, 2 ó 3. Pero una demostración directa cuando n vale 5 millones sería algo imposible.

Incluso las demostraciones empíricas serían difíciles para un valor tan elevado de n. Se podría, por ejemplo, construir un experimento tomando un vagón de mercancías lleno de canicas, y contratando 10 personas diferentes para que las contasen de forma independiente. Si uno piensa en los problemas físicos que esto implica, parece que

los contadores no llegarían a la misma respuesta. Desde luego, la conclusión que se podría obtener es que al menos una persona comete un error. Pero eso supondría asumir la inexactitud del resultado que uno estaba intentando demostrar empíricamente. Una explicación alternativa podría ser la existencia de correspondencias biyectivas entre el conjunto dado de canicas y dos secciones diferentes de los enteros positivos.

En la vida real aceptamos la primera explicación. Simplemente confiamos en que nuestra experiencia en contar comparativamente pequeños conjuntos de objetos, demuestra una verdad que se verifica también para conjuntos arbitrariamente grandes.

Sin embargo, en las matemáticas (al contrario que en la vida real) no se pueden hacer estos actos de fe. Si se formula en términos de la existencia de una correspondencia biyectiva en lugar del acto físico de contar, es posible una demostración matemática. Demostraremos brevemente que si $n \neq m$, no existen funciones biyectivas que apliquen un conjunto dado A en ambos conjuntos $\{1, \ldots, n\}$ y $\{1, \ldots, m\}$.

Hay un gran número de hechos "intuitivamente obvios" sobre conjuntos finitos que son demostrables matemáticamente; demostraremos algunos de ellos en esta sección y dejaremos el resto como ejercicios. La siguiente es una propiedad sencilla para empezar:

Lema 6.1. *Sea n un entero positivo. Sean A un conjunto y a_0 un elemento de A. Entonces existe una correspondencia biyectiva f entre el conjunto A y el conjunto $\{1, \ldots, n+1\}$ si, y solamente si, existe una correspondencia biyectiva del conjunto $A - \{a_0\}$ con $\{1, \ldots, n\}$.*

Demostración. Hay dos implicaciones que demostrar. Supongamos, en primer lugar, que existe una correspondencia biyectiva

$$g : A - \{a_0\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}.$$

Definimos entonces una función $f : A \longrightarrow \{1, \ldots, n+1\}$ de la forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \qquad \text{si } x \in A - \{a_0\} \\ f(a_0) &= n+1. \end{aligned}$$

Es inmediato ver que f es biyectiva.

Para probar el recíproco, supongamos que existe una correspondencia biyectiva

$$f : A \longrightarrow \{1, \ldots, n+1\}.$$

Si f asocia a_0 al número $n+1$, todo es especialmente sencillo; en ese caso, la restricción $f \mid A - \{a_0\}$ nos da la correspondencia biyectiva buscada entre $A - \{a_0\}$ y $\{1, \ldots, n\}$.

En caso contrario, sea $f(a_0) = m$, y sea a_1 el punto de A tal que $f(a_1) = n+1$. Entonces $a_1 \neq a_0$. Definimos una nueva función

$$h : A \longrightarrow \{1, \ldots, n+1\}$$

mediante

$$\begin{aligned} h(a_0) &= n+1, \\ h(a_1) &= m, \\ h(x) &= f(x) \quad \text{para } x \in A - \{a_0\} - \{a_1\}. \end{aligned}$$

Véase la Figura 6.1. Es fácil ver que h es una biyección.

Retomemos de nuevo el caso sencillo; la restricción $h \mid A - \{a_0\}$ es la biyección buscada entre $A - \{a_0\}$ y $\{1, \ldots, n\}$. ■

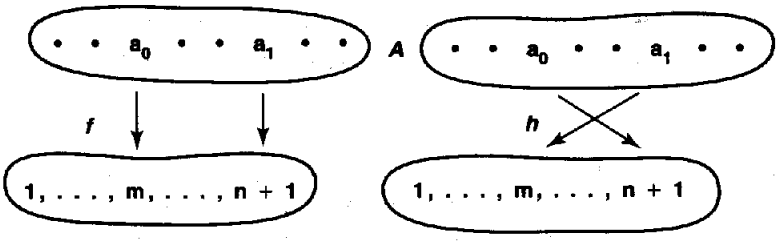


Figura 6.1

Del lema anterior se pueden obtener una serie de consecuencias útiles:

Teorema 6.2. *Sea A un conjunto; supongamos que existe una biyección $f : A \to \{1, \ldots, n\}$ para algún $n \in \mathbb{Z}_+$. Sea B un subconjunto propio de A. Entonces no existe biyección alguna $g : B \to \{1, \ldots n\}$, pero (si $B \neq \varnothing$) sí existe una biyección $h : B \to \{1, \ldots, m\}$ para algún $m < n$.*

Demostración. El caso en que $B = \varnothing$ es trivial, ya que no puede existir una biyección entre el conjunto vacío B y el conjunto no vacío $\{1, \ldots, n\}$.

Demostraremos el teorema "por inducción". Sea C el subconjunto de $\mathbb{Z}_+$ formado por aquellos enteros n para los cuales el teorema es cierto. Vamos a ver que C es inductivo. Así concluiremos que $C = \mathbb{Z}_+$ y, por tanto, el teorema es cierto para todos los enteros positivos n.

En primer lugar demostraremos el resultado para $n = 1$. En este caso A está formado por un único elemento $\{a\}$ y su único subconjunto propio B es el conjunto vacío.

Supongamos ahora que el teorema es cierto para n; vamos a ver que también lo es para $n+1$. Sea $f : A \to \{1, \ldots, n+1\}$ una biyección y sea B un subconjunto

propio no vacío de A. Elegimos un elemento a_0 de B y un elemento a_1 de $A - B$. Aplicando el lema anterior, podemos deducir que existe una biyección

$$g : A - \{a_0\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}.$$

Por otro lado, $B - \{a_0\}$ es un subconjunto propio de $A - \{a_0\}$, ya que a_1 pertenece a $A - \{a_0\}$ y no a $B - \{a_0\}$. Como el teorema se supone cierto para el entero n, podemos concluir lo siguiente:

(1) No existe ninguna biyección $h : B - \{a_0\} \to \{1, \ldots, n\}$.

(2) Bien $B - \{a_0\} = \varnothing$, bien existe una biyección

$$k : B - \{a_0\} \longrightarrow \{1, \ldots, p\} \quad \text{para algún } p < n.$$

El lema anterior, junto con (1), implica que no existe ninguna biyección entre B y $\{1, \ldots, n+1\}$. Esto completa la primera mitad del resultado al que queremos llegar. Para demostrar la segunda parte, obsérvese que si $B - \{a_0\} = \varnothing$, existe una biyección entre B y el conjunto $\{1\}$, mientras que si $B - \{a_0\} \neq \varnothing$, podemos aplicar el lema anterior, junto con (2), para concluir que existe una biyección entre B y $\{1, \ldots, p+1\}$. En cualquiera de los casos, va a existir una biyección de B con $\{1, \ldots, m\}$ para algún $m < n+1$, tal y como se buscaba. El principio de inducción demuestra ahora que el teorema es cierto para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. ■

Corolario 6.3. *Si A es un conjunto finito, no existe ninguna biyección de A con un subconjunto propio de sí mismo.*

Demostración. Supongamos que B es un subconjunto propio de A y que $f : A \to B$ es una biyección. Por hipótesis, existe una biyección $g : A \to \{1, \ldots, n\}$ para algún n. La composición $g \circ f^{-1}$ es, por tanto, una biyección entre B y $\{1, \ldots, n\}$. Esto contradice el teorema anterior. ■

Corolario 6.4. *$\mathbb{Z}_+$ no es finito.*

Demostración. La función $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+ - \{1\}$ definida por $f(n) = n + 1$ es una biyección entre $\mathbb{Z}_+$ y un subconjunto propio de sí mismo. ■

Corolario 6.5. *El cardinal de un conjunto finito A está unívocamente determinado por A.*

Demostración. Sea $m < n$. Supongamos que existen biyecciones

$$f : A \longrightarrow \{1, \ldots, n\},$$
$$g : A \longrightarrow \{1, \ldots, m\}.$$

Entonces, la composición

$$g \circ f^{-1} : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, m\}$$

es una biyección de un conjunto finito $\{1, \ldots, n\}$ con un subconjunto propio de sí mismo, contradiciendo el corolario que acabamos de probar. ■

Corolario 6.6. *Si B es un subconjunto de un conjunto finito A, entonces B es finito. Si B es un subconjunto propio de A, entonces el cardinal de B es menor que el cardinal de A.*

Corolario 6.7. *Sea B un conjunto no vacío. Son equivalentes:*

(1) B es finito.

(2) Existe una función sobreyectiva de una sección de los enteros positivos en B.

(3) Existe una función inyectiva de B en una sección de los enteros positivos.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Ya que B es no vacío, existe, para algún n, una función biyectiva $f : \{1, \ldots, n\} \to B$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Si $f : \{1, \ldots, n\} \to B$ es sobreyectiva, definimos $g : B \to \{1, \ldots, n\}$ mediante la ecuación

$$g(b) = \text{ mínimo de } f^{-1}(\{b\}).$$

Como f es sobreyectiva, el conjunto $f^{-1}(\{b\})$ es no vacío; entonces, el principio del buen orden de $\mathbb{Z}_+$ nos asegura que $g(b)$ está definido unívocamente. La aplicación g es inyectiva, ya que si $b \neq b'$, los conjuntos $f^{-1}(\{b\})$ y $f^{-1}(\{b'\})$ son disjuntos y, por tanto, sus mínimos deben ser distintos.

(3) $\Rightarrow$ (1). Si $g : B \to \{1, \ldots, n\}$ es inyectiva, cambiando el rango de g obtenemos una biyección entre B y un subconjunto de $\{1, \ldots, n\}$. Del corolario anterior se deduce que B es finito. ■

Corolario 6.8. *Las uniones finitas y los productos cartesianos finitos de conjuntos finitos son finitos.*

Demostración. Demostraremos primero que si A y B son conjuntos finitos, también lo es $A \cup B$. El resultado es trivial si A o B es vacío. En caso contrario, existirán biyecciones $f : \{1, \ldots, m\} \to A$ y $g : \{1, \ldots, n\} \to B$ para determinados m

. Definimos entonces una función $h : \{1, \ldots, m+n\} \to A \cup B$ de la forma $) = f(i)$ si $i = 1, 2, \ldots, m$ y $h(i) = g(i-m)$ si $i = m+1, \ldots, m+n$. Es fácil que h es sobreyectiva, de lo que se deduce que $A \cup B$ es finito.

Ahora demostraremos por inducción que la finitud de los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, plica que su unión también es finita. El resultado es trivial para $n = 1$. Supongamos e es cierto para $n-1$. Entonces, $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ es la unión de dos conjuntos finitos $\cup \cdots \cup A_{n-1}$ y A_n, y no hay más que aplicar el resultado demostrado en el párrafo erior.

Demostremos ahora que el producto cartesiano de dos conjuntos finitos A y B nbién es finito. Dado $a \in A$, el conjunto $\{a\} \times B$ es finito, estando en correspon- ncia biyectiva con B. Pero $A \times B$ no es más que la unión de estos conjuntos, ya e hay sólo un número finito de ellos, $A \times B$ es una unión finita de conjuntos finitos, or tanto finito.

Para probar que el producto $A_1 \times \cdots \times A_n$ es finito si cada A_i lo es, se procede inducción. ■

ercicios

. (a) Haga una lista de todas las aplicaciones inyectivas

$$f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}.$$

Demuestre que ninguna es biyectiva (esto constituye una demostración *directa* de que un conjunto A con cardinal tres no tiene cardinal cuatro).

(b) ¿Cuántas aplicaciones inyectivas

$$f : \{1, \ldots, 8\} \longrightarrow \{1, \ldots, 10\}$$

existen? (Aquí se puede ver por qué uno no desearía intentar demostrar *directamente* que no existe ninguna correspondencia biyectiva entre estos dos conjuntos).

. Demuestre que si B no es finito y $B \subset A$, entonces A no es finito.

. Sea X el conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$. Encuentre una correspondencia biyectiva entre X^ω y un subconjunto propio de sí mismo.

. Sea A un conjunto finito, no vacío, simplemente ordenado.

(a) Demuestre que A tiene un máximo. [*Indicación*: proceda por inducción sobre el cardinal de A.]

(b) Demuestre que A tiene el tipo de orden de una sección de los enteros positivos.

5. Si $A \times B$ es finito, ¿se deduce que A y B también lo son?
6. (a) Sea $A = \{1, \ldots, n\}$. Demuestre que existe una biyección entre $\mathcal{P}(A)$ y el producto cartesiano X^n, donde X es el conjunto de dos elementos $X = \{0, 1\}$.
   (b) Demuestre que si A es finito, entonces $\mathcal{P}(A)$ es finito.
7. Si A y B son finitos, demuestre que el conjunto de todas las funciones $f : A \to B$ es finito.

§7 Conjuntos numerables y no numerables

Así como las secciones de los enteros positivos son los prototipos para los conjuntos finitos, el conjunto de todos los enteros positivos es el prototipo de lo que llamaremos conjuntos *infinito-numerables*. En esta sección estudiaremos dichos conjuntos y además construiremos algunos conjuntos que no son ni finitos ni infinito-numerables. Este estudio nos conducirá a un debate sobre lo que se entiende por proceso de "definición inductiva".

Definición. Un conjunto A se dice ***infinito*** si no es finito. Se dice que es ***infinito-numerable*** si existe una correspondencia biyectiva

$$f : A \longrightarrow \mathbb{Z}_+.$$

EJEMPLO 1. El conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros es infinito-numerable. Se puede ver fácilmente que la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_+$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n > 0 \\ -2n+1 & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$

es una biyección.

EJEMPLO 2. El producto $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ es infinito-numerable. Si representamos los elementos del producto $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ por los puntos con coordenadas enteras del primer cuadrante, entonces la parte de la izquierda de la Figura 7.1 sugiere cómo "contar" los puntos, esto es, cómo ponerlos en correspondencia biyectiva con los enteros positivos. Un dibujo no es, desde luego, una demostración, pero esta figura sugiere dicha demostración. En primer lugar definimos una biyección $f : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to A$, donde A es el subconjunto de $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ formado por todos los pares (x, y) para los cuales $y \leq x$, mediante la ecuación

$$f(x, y) = (x + y - 1, y).$$

Entonces, construimos una biyección de A con los enteros positivos, definiendo $g : A \to \mathbb{Z}_+$ por la fórmula

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(x-1)x + y.$$

Dejamos al lector la demostración de que f y g son biyecciones.

Posteriormente se dará otra demostración de que $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ es infinito-numerable.

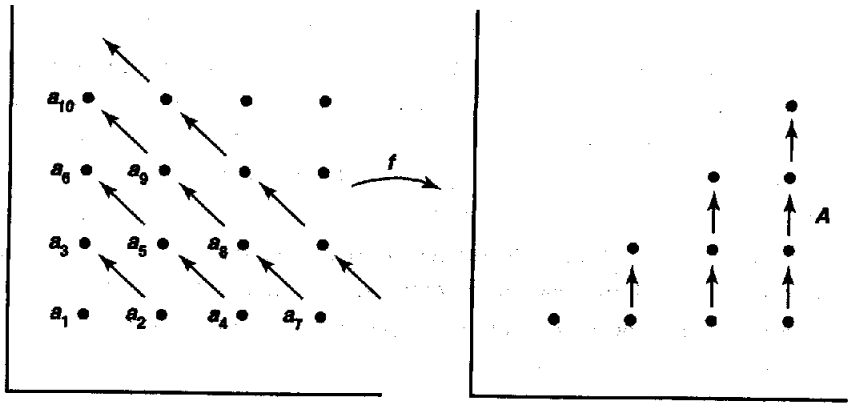


Figura 7.1

Definición. Se dice que un conjunto es ***numerable*** si es ya finito, ya infinito-numerable. Un conjunto que no es numerable se dice ***no numerable***.

Existe un criterio muy útil para demostrar que un conjunto es numerable. Es el siguiente:

Teorema 7.1. *Sea B un conjunto no vacío. Entonces son equivalentes:*

(1) B es numerable.

(2) Existe una función sobreyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to B$.

(3) Existe una función inyectiva $g : B \to \mathbb{Z}_+$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que B es numerable. Si B es infinito-numerable, existe una biyección $f : \mathbb{Z}_+ \to B$ por definición, y el resultado es directo. Si B es finito, existe una biyección $h : \{1, \ldots, n\} \to B$ para algún $n \geq 1$ (recordemos que $B \neq \varnothing$). Podemos entonces extender h a una aplicación sobreyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to B$ definiendo

$$f(i) = \begin{cases} h(i) & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ h(1) & \text{si } i > n. \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $f : \mathbb{Z}_+ \to B$ una función sobreyectiva. Definimos $g : B \to \mathbb{Z}_+$ mediante la ecuación

$$g(b) = \text{mínimo de } f^{-1}(\{b\}).$$

Como f es sobreyectiva, $f^{-1}(\{b\})$ es no vacío y, por tanto, g está bien definida. La aplicación g es inyectiva, ya que si $b \neq b'$, los conjuntos $f^{-1}(\{b\})$ y $f^{-1}(\{b'\})$ son disjuntos y, por tanto, sus mínimos son distintos.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea $g : B \to \mathbb{Z}_+$ una aplicación inyectiva; queremos probar que B es numerable. Cambiando el rango de g, podemos obtener una biyección de B con un subconjunto de $\mathbb{Z}_+$. Así, para demostrar el resultado, es suficiente probar que todo subconjunto de $\mathbb{Z}_+$ es numerable. Por tanto, sea C un subconjunto de $\mathbb{Z}_+$.

Si C es finito, es numerable por definición. Así pues, lo que necesitamos demostrar es que todo subconjunto infinito C de $\mathbb{Z}_+$ es infinito-numerable. Esta afirmación es ciertamente plausible. Los elementos de C pueden ordenarse fácilmente en una sucesión infinita; simplemente se tomaría el conjunto $\mathbb{Z}_+$ con su orden usual, "borrando" los elementos de $\mathbb{Z}_+$ que no están en C.

La viabilidad de este argumento puede hacer que se pase por alto su informalidad. Proporcionar una demostración formal requiere una cierta atención y cuidado. Establecemos este resultado como un lema aparte, que damos a continuación. ■

Lema 7.2. *Si C es un subconjunto infinito de $\mathbb{Z}_+$, entonces C es infinito-numerable.*

Demostración. Definimos una biyección $h : \mathbb{Z}_+ \to C$, por inducción: sea $h(1)$ el mínimo de C, que existe porque todo subconjunto no vacío C de $\mathbb{Z}_+$ tiene un mínimo. Entonces, suponiendo que $h(1), \ldots, h(n-1)$ están definidos, construimos

$$h(n) = \text{mínimo de } [C - h(\{1, \ldots, n-1\})].$$

El conjunto $C - h(\{1, \ldots, n-1\})$ es no vacío; si lo fuese, $h : \{1, \ldots, n-1\} \to C$ sería sobreyectiva, y por tanto C finito (por el Corolario 6.7). Luego $h(n)$ está bien definida. Por inducción tenemos definida $h(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Demostrar que h es inyectiva es sencillo. Dado $m < n$, obsérvese que $h(m)$ pertenece al conjunto $h(\{1, \ldots, n-1\})$, mientras que $h(n)$, por definición, no pertenece. Por tanto, $h(n) \neq h(m)$.

Para demostrar que h es sobreyectiva, sea c un elemento de C; vamos a ver que c se encuentra en el conjunto imagen de h. En primer lugar, observemos que $h(\mathbb{Z}_+)$ no puede estar contenido en el conjunto finito $\{1, \ldots, c\}$, ya que $h(\mathbb{Z}_+)$ es infinito (por ser h inyectiva). Por lo tanto, existe un n en $\mathbb{Z}_+$ tal que $h(n) > c$. Sea m el menor elemento de $\mathbb{Z}_+$ tal que $h(m) \geq c$. Entonces, para todo $i < m$, se tiene que $h(i) < c$. Luego c no pertenece al conjunto $h(\{1, \ldots, m-1\})$. Ya que $h(m)$ se ha definido como el mínimo del conjunto $C - h(\{1, \ldots, m-1\})$, se tiene ahora que $h(m) \leq c$. Uniendo ambas desigualdades, obtenemos $h(m) = c$, como se quería demostrar.

■

Hay un punto en la demostración anterior en el que hemos estirado un poco los principios de la lógica. Concretamente cuando se dice que "utilizando el principio de inducción" se ha definido la función h para todos los enteros positivos n. Puede que el lector haya visto argumentos de este tipo utilizados en otras ocasiones, sin que haya

cuestionado su legitimidad. En este libro ya hemos usado este tipo de argumentos, en los ejercicios de §4, cuando definíamos a^n.

Pero aquí aparece un problema. Después de todo, el principio de inducción sólo establece que si A es un conjunto inductivo de enteros positivos, entonces $A = \mathbb{Z}_+$. Para utilizar el principio y demostrar un teorema "por inducción", uno comienza la demostración con la afirmación "sea A el conjunto de todos los enteros positivos n para los cuales el teorema es cierto", y entonces continúa adelante para probar que A es inductivo, así que A debe ser todo $\mathbb{Z}_+$.

En el teorema anterior, sin embargo, no estamos demostrando realmente un teorema por inducción, sino definiendo algo por inducción. ¿Cómo deberíamos entonces comenzar la demostración? ¿Podemos empezarla diciendo "sea A el conjunto de todos los enteros n para los cuales la función h está definida"? Pero eso es estúpido, ya que el símbolo h no tiene ningún *significado* al principio de la demostración. Sólo adquiere un sentido en el transcurso de la prueba. Por tanto, se necesita algo más.

Lo que se requiere es otro principio, que llamaremos ***principio de definición recursiva***. En la demostración del teorema anterior queremos asegurar lo siguiente:

> Dado el subconjunto infinito C de $\mathbb{Z}_+$, existe una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to C$ verificando la fórmula:

$$(*) \qquad \begin{aligned} h(1) &= \text{mínimo de } C, \\ h(i) &= \text{mínimo de } [C - h(\{1, \ldots, i-1\})] \quad \text{para todo } i > 1. \end{aligned}$$

La expresión $(*)$ se denomina ***fórmula de recursión*** para h, que define la función *h en términos de sí misma*. Una definición dada por este tipo de fórmulas se llama ***definición recursiva***.

Ahora bien, es posible encontrarse con dificultades lógicas cuando se intenta definir algo recursivamente. No todas las fórmulas recursivas tienen sentido. Por ejemplo, la fórmula recursiva

$$h(i) = \text{ menor elemento de } [C - h(\{1, \ldots, i+1\})]$$

es contradictoria en sí misma, y aunque $h(i)$ es necesariamente un elemento del conjunto $h(\{1, \ldots, i+1\})$, esta fórmula afirma que no pertenece al conjunto. Otro ejemplo es la clásica paradoja

> Supongamos que el barbero de Sevilla afeita a todos los hombres de Sevilla que no se afeitan a sí mismos. ¿Quién afeitará al barbero?

En este enunciado el barbero aparece dos veces, una vez en la frase "el barbero de Sevilla", y otra como un elemento del conjunto "hombres de Sevilla"; esta definición de quién afeitará al barbero es recursiva. Pero también es contradictoria.

Algunas fórmulas recursivas, sin embargo, tienen sentido. Concretamente, se tiene el siguiente principio:

Principio de definición recursiva. *Sea A un conjunto. Si tenemos una fórmula que define $h(1)$ como un único elemento de A, y que para $i > 1$ define $h(i)$ unívocamente como un elemento de A en función de los valores de h para los enteros positivos menores que i, esta fórmula determina una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to A$.*

Este principio es el que realmente utilizamos en la demostración del Lema 7.2. Se puede simplemente aceptar y creer si se prefiere. Sin embargo, puede ser demostrado rigurosamente, utilizando el principio de inducción. Lo formularemos con mayor precisión en la próxima sección, indicando cómo se demuestra. Los matemáticos rara vez se refieren a este principio de forma específica. Es mucho más probable que escriban una demostración como la de nuestro anterior Lema 7.2, una demostración en la cual recurren al "principio de inducción" para definir una función, cuando lo que realmente están utilizando es el principio de definición recursiva. Evitaremos una pedantería excesiva en este libro siguiendo su ejemplo.

Corolario 7.3. *Un subconjunto de un conjunto numerable es numerable.*

Demostración. Supongamos que $A \subset B$, siendo B numerable. Existe una aplicación inyectiva f de B en $\mathbb{Z}_+$; la restricción de f en A es una inyección de A en $\mathbb{Z}_+$. ■

Corolario 7.4. *El conjunto $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ es infinito-numerable.*

Demostración. En vista del Teorema 7.1, es suficiente construir una aplicación inyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$. Definimos f mediante la ecuación

$$f(n, m) = 2^n 3^m.$$

Es fácil ver que f es inyectiva. Para ello supongamos que $2^n 3^m = 2^p 3^q$. Si $n < p$, entonces $3^m = 2^{p-n} 3^q$, contradiciendo el hecho de que 3^m es impar para todo m. Por lo tanto, $n = p$. Como consecuencia, $3^m = 3^q$. Entonces, si $m < q$, se sigue que $1 = 3^{q-m}$, otra contradicción. Luego $m = q$. ■

EJEMPLO 3. El conjunto $\mathbb{Q}_+$ de los números positivos racionales es infinito-numerable. Para demostrarlo, definimos una aplicación sobreyectiva $g : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}_+$ mediante la ecuación

$$g(n, m) = m/n.$$

Como $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ es numerable, existe otra aplicación sobreyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$. Entonces, la composición $g \circ f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}_+$ es también sobreyectiva, y por tanto $\mathbb{Q}_+$ es numerable. Y, desde luego, $\mathbb{Q}_+$ es infinito ya que contiene a $\mathbb{Z}_+$.

Dejamos como un ejercicio demostrar que el conjunto $\mathbb{Q}$ de *todos* los números racionales es infinito-numerable.

Teorema 7.5. *La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.*

Demostración. Sea $\{A_n\}_{n\in J}$ una familia indexada de conjuntos numerables, donde el conjunto de índices J es bien $\{1,\ldots,N\}$ o bien $\mathbb{Z}_+$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que cada conjunto A_n es no vacío.

Como cada A_n es numerable, podemos elegir, para cada n, una función sobreyectiva $f_n : \mathbb{Z}_+ \to A_n$. Análogamente, es posible encontrar otra aplicación sobreyectiva $g : \mathbb{Z}_+ \to J$. Ahora definimos

$$h : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to \bigcup_{n\in J} A_n$$

mediante la ecuación

$$h(k,m) = f_{g(k)}(m).$$

Es fácil ver que h así definida es sobreyectiva. Ya que $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ está en correspondencia biyectiva con $\mathbb{Z}_+$, la numerabilidad de la unión se deduce del Teorema 7.1.

■

Teorema 7.6. *El producto finito de conjuntos numerables es numerable.*

Demostración. En primer lugar demostraremos que el producto de dos conjuntos numerables A y B es numerable. El resultado es trivial si A o B es vacío. En caso contrario, elegimos aplicaciones sobreyectivas $f : \mathbb{Z}_+ \to A$ y $g : \mathbb{Z}_+ \to B$. Entonces, la función $h : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to A \times B$ definida mediante la ecuación $h(n,m) = (f(n), g(m))$ es sobreyectiva, y por tanto $A \times B$ es numerable.

En general, procedemos por inducción. Suponiendo que $A_1 \times \cdots \times A_{n-1}$ es numerable si cada A_i es numerable, demostraremos esta afirmación para el producto $A_1 \times \cdots \times A_n$. En primer lugar, obsérvese que existe una correspondencia biyectiva

$$g : A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow (A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n$$

definida por la ecuación

$$g(x_1,\ldots,x_n) = ((x_1,\ldots,x_{n-1}), x_n).$$

Como el conjunto $A_1 \times \cdots \times A_{n-1}$ es numerable por hipótesis de inducción, y A_n es numerable por hipótesis, el producto de esos dos conjuntos es numerable, como se ha demostrado previamente. Concluimos, pues, que $A_1 \times \cdots \times A_n$ es también numerable. ■

Es muy tentador asegurar que los productos numerables de conjuntos numerables deberían ser también numerables, pero esto no es cierto:

Teorema 7.7. *Sea X el conjunto de dos elementos $\{0,1\}$. Entonces, el conjunto X^ω es no numerable.*

Demostración. Vamos a demostrar que cualquier función

$$g : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow X^\omega$$

no es sobreyectiva. Para ello, representemos $g(n)$ de la siguiente forma:

$$g(n) = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nm}, \ldots)$$

donde cada x_{ij} es 0 ó 1. Entonces definimos un elemento $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ de X^ω mediante

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{nn} = 1 \\ 1 & \text{si } x_{nn} = 0. \end{cases}$$

(Si escribimos los números x_{ni} en una matriz rectangular, los elementos particulares x_{nn} aparecen como las entradas diagonales de esta matriz; elegimos $\mathbf{y}$ para que su n-ésima coordenada *difiera* del elemento de la diagonal x_{nn}.)

Ahora bien, $\mathbf{y}$ es un elemento de X^ω, e $\mathbf{y}$ no pertenece a la imagen de g; dado n, el punto $g(n)$ y el punto $\mathbf{y}$ se diferencian en, al menos, una coordenada, digamos la n-ésima. Por lo tanto, g no es sobreyectiva. ■

El producto cartesiano $\{0,1\}^\omega$ es un ejemplo de un conjunto no numerable. Otro ejemplo sería el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$, como se puede deducir del siguiente teorema:

Teorema 7.8. *Sea A un conjunto. No existe ninguna aplicación inyectiva $f : \mathcal{P}(A) \to A$, y no existe ninguna aplicación sobreyectiva $g : A \to \mathcal{P}(A)$.*

Demostración. En general, si B es un conjunto no vacío, la existencia de una aplicación inyectiva $f : B \to C$ implica la existencia de una aplicación sobreyectiva $g : C \to B$; basta definir $g(c) = f^{-1}(c)$ para cada c en el conjunto imagen de f, y definir g arbitrariamente en el resto del conjunto C.

Por lo tanto, es suficiente demostrar que dada una aplicación $g : A \to \mathcal{P}(A)$, esta aplicación g no es sobreyectiva. Para cada $a \in A$, la imagen $g(a)$ de a es un subconjunto de A, el cual puede o no contener al propio punto a. Sea B el subconjunto de A formado por todos esos puntos a tales que $g(a)$ no contiene a a,

$$B = \{a \mid a \in A - g(a)\}.$$

Ahora bien, B podría ser vacío, o quizá todo el conjunto A, pero esto no importa. Se puede asegurar que B es un subconjunto de A que no está contenido en la imagen

de g. Para ver esto, supongamos que $B = g(a_0)$ para algún $a_0 \in A$. Hacemos la siguiente pregunta: ¿pertenece a_0 a B, o no? Por definición de B,

$$a_0 \in B \Longleftrightarrow a_0 \in A - g(a_0) \Longleftrightarrow a_0 \in A - B.$$

En cualquier caso, obtenemos una contradicción. ■

Se ha demostrado ya la existencia de conjuntos no numerables. Pero todavía no hemos mencionado el conjunto no numerable más conocido de todos —el conjunto de los números reales—. Probablemente se conozca la demostración de que $\mathbb{R}$ no es numerable. Si se asume que todo número real se puede representar de forma única por un decimal infinito (con la condición de que esta representación no puede acabar en una cadena infinita de nueves), entonces la no numerabilidad de los reales se puede demostrar mediante una variación del método de la diagonal utilizado en la demostración del Teorema 7.7. Pero esta prueba no es del todo satisfactoria. Una razón es que la representación decimal infinita de un número real no es en absoluto una consecuencia elemental de los axiomas, sino que requiere mucho trabajo demostrarla. Otra razón es que, de hecho, la no numerabilidad de $\mathbb{R}$ no depende de la expansión decimal infinita de $\mathbb{R}$, o incluso de cualquiera de las propiedades algebraicas de estos números. Demostraremos que $\mathbb{R}$ es no numerable utilizando exclusivamente sus propiedades de orden, en un capítulo posterior.

Ejercicios

1. Demuestre que $\mathbb{Q}$ es infinito-numerable.
2. Demuestre que las aplicaciones f y g de los Ejemplos 1 y 2 son biyecciones.
3. Sea X el conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$. Demuestre que existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ y el producto cartesiano X^ω.
4. (a) Un número real se dice que es ***algebraico*** (sobre los racionales) si satisface alguna ecuación polinómica de grado positivo

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

con coeficientes racionales a_i. Suponiendo que cada ecuación polinómica tiene sólo una cantidad finita de raíces, demuestre que el conjunto de los números algebraicos es numerable.

(b) Un número real se dice ***trascendente*** si no es algebraico. Suponiendo que los reales son no numerables, demuestre que los números trascendentes son no numerables. (Es un hecho algo sorprendente que sólo dos números trascendentes nos sean familiares: e y π. Incluso probar que esos dos números son trascendentes no es algo en absoluto trivial.)

5. Determine si cada uno de los siguientes conjuntos es o no numerable. Justifique la respuesta.

(a) El conjunto A de todas las funciones $f : \{0, 1\} \to \mathbb{Z}_+$.

(b) El conjunto B_n de todas las funciones $f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}_+$.

(c) El conjunto $C = \cup_{n \in \mathbb{Z}_+} B_n$.

(d) El conjunto D de todas las funciones $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$.

(e) El conjunto E de todas las funciones $f : \mathbb{Z}_+ \to \{0, 1\}$.

(f) El conjunto F de todas las funciones $f : \mathbb{Z}_+ \to \{0, 1\}$ que son "finalmente cero". [Se dice que f es ***finalmente cero*** si existe un entero positivo N tal que $f(n) = 0$ para todo $n \geq N$.]

(g) El conjunto G de todas las funciones $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ que son finalmente uno.

(h) El conjunto H de todas las funciones $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ que son finalmente constante.

(i) El conjunto I de todos los subconjuntos de dos elementos de $\mathbb{Z}_+$.

(j) El conjunto J de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}_+$.

6. Decimos que dos conjuntos A y B ***tienen el mismo cardinal*** si existe una biyección entre A y B.

(a) Demuestre que si $B \subset A$ y existe una función inyectiva

$$f : A \longrightarrow B,$$

entonces A y B tienen el mismo cardinal. [*Indicación*: defina $A_1 = A$, $B_1 = B$ y, para $n > 1$, $A_n = f(A_{n-1})$ y $B_n = f(B_{n-1})$ (de nuevo definición recursiva). Obsérvese que $A_1 \supset B_1 \supset A_2 \supset B_2 \supset A_3 \supset \cdots$. Defina una biyección $h : A \to B$ mediante la regla

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A_n - B_n \text{ para algún } n \\ x & \text{en caso contrario.]} \end{cases}$$

(b) *Teorema (Schroeder-Bernstein). Si existen aplicaciones inyectivas $f : A \to B$ y $g : C \to A$, entonces A y C tienen el mismo cardinal.*

7. Demuestre que los conjuntos D y E del Ejercicio 5 tienen el mismo cardinal.

8. Sea X el conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$; sea $\mathcal{B}$ el conjunto de los subconjuntos numerables de X^ω. Demuestre que X^ω y $\mathcal{B}$ tienen el mismo cardinal.

9. (a) A la fórmula

$$(*) \qquad \begin{aligned} h(1) &= 1, \\ h(2) &= 2, \\ h(n) &= [h(n+1)]^2 - [h(n-1)]^2 \quad \text{para } n \geq 2 \end{aligned}$$

no se le puede aplicar el principio de definición recursiva. Demuestre que, no obstante, existe una función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ que satisface dicha fórmula. [*Indicación*: reformule $(*)$ de modo que el principio sea aplicable, e imponga que h sea positiva.]

(b) Demuestre que la fórmula $(*)$ del apartado (a) no determina h unívocamente. [*Indicación*: si h es una función positiva que verifica $(*)$, sea $f(i) = h(i)$ para $i \neq 3$, y sea $f(3) = -h(3)$.]

(c) Demuestre que no existe ninguna función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ verificando la fórmula

$$\begin{aligned} &h(1) = 1, \\ &h(2) = 2, \\ &h(n) = [h(n+1)]^2 + [h(n-1)]^2 \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

*§8 El principio de definición recursiva

Antes de considerar la forma general del principio de definición recursiva, lo demostraremos primero para un caso específico, el del Lema 7.2. Esto debería ayudarnos a entender la idea subyacente de la demostración mucho más claramente cuando veamos el caso general.

Así, dado el subconjunto infinito C de $\mathbb{Z}_+$, consideremos la siguiente fórmula recursiva para una función $h : \mathbb{Z}_+ \to C$:

$$(*) \qquad \begin{aligned} &h(1) = \text{mínimo de } C, \\ &h(n) = \text{mínimo de } [C - h(\{1, \ldots, i-1\})] \quad \text{para } i > 1. \end{aligned}$$

Demostraremos que existe una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to C$ verificando esta fórmula de recursión.

El primer paso consiste en demostrar que existen funciones definidas sobre *secciones* $\{1, \ldots, n\}$ de $\mathbb{Z}_+$ que satisfacen $(*)$.

Lema 8.1. *Dado $n \in \mathbb{Z}_+$, existe una función*

$$f : \{1, \ldots, n\} \to C$$

que satisface $(*)$ para todo i de su dominio.

Demostración. Lo significativo de este lema es que es un resultado que depende de n y, por tanto, es posible demostrarlo por inducción. Sea A el conjunto de todos los n para los cuales el lema se verifica. Demostremos que A es inductivo. Entonces se deducirá que $A = \mathbb{Z}_+$.

El lema es cierto para $n = 1$, ya que la función $f : \{1\} \to C$ definida por la ecuación

$$f(1) = \text{mínimo de } C$$

verifica $(*)$.

Supongamos que el resultado es cierto para $n-1$, y vamos a demostrarlo para n. Por hipótesis, existe una función $f' : \{1, \ldots, n-1\} \to C$ que satisface $(*)$ para todo i de su dominio. Definimos $f : \{1, \ldots, n\} \to C$ mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} f(i) &= f'(i) \quad \text{para } i \in \{1, \ldots, n-1\}, \\ f(n) &= \text{mínimo de } [C - f'(\{1, \ldots, n-1\})]. \end{aligned}$$

Como C es infinito, f' no es sobreyectiva, por lo tanto el conjunto $C - f'(\{1, \ldots, n-1\})$ es no vacío, y $f(n)$ está bien definida. Obsérvese que esta definición es admisible, ya que no define a f en términos de *sí misma*, sino de la función dada f'.

Es fácil ver que f verifica $(*)$ para todo i de su dominio. La función f satisface $(*)$ si $i \leq n-1$ porque coincide con f'. Y f verifica $(*)$ si $i = n$ ya que, por definición,

$$f(n) = \text{mínimo de } [C - f'(\{1, \ldots, n-1\})] \text{ y}$$

$$f'(\{1, \ldots, n-1\}) = f(\{1, \ldots, n-1\}).$$

■

Lema 8.2. *Supongamos que $f : \{1, \ldots, n\} \to C$ y $g : \{1, \ldots, m\} \to C$ verifican $(*)$ para todo i de sus respectivos dominios. Entonces $f(i) = g(i)$ para todo i de ambos dominios.*

Demostración. Supongamos que no es así. Sea i el *menor* entero para el cual $f(i) \neq g(i)$. Este entero i no puede ser 1, ya que

$$f(1) = \text{mínimo de } C = g(1)$$

por $(*)$. Ahora, para todo $j < i$, se tiene que $f(j) = g(j)$. Como f y g verifican $(*)$,

$$\begin{aligned} f(i) &= \text{mínimo de } [C - f(\{1, \ldots, i-1\})], \\ g(i) &= \text{mínimo de } [C - g(\{1, \ldots, i-1\})]. \end{aligned}$$

Ya que $f(\{1, \ldots, i-1\}) = g(\{1, \ldots, i-1\})$, se tiene que $f(i) = g(i)$, lo que contradice la elección de i. ■

Teorema 8.3. *Existe una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to C$ verificando $(*)$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$.*

Demostración. Por el Lema 8.1 existe, para cada n, una función que aplica el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ en C y que verifica $(*)$ para todo i de su dominio. Dado n, el Lema 8.2 demuestra que esta función es única; dos funciones de este tipo teniendo el mismo dominio deben ser iguales. Sea $f_n : \{1, \ldots, n\} \to C$ esta única función.

Ahora viene el paso crucial. Elegimos una función $h : \mathbb{Z}_+ \to C$ definiendo su regla como la *unión* U de las reglas de las funciones f_n. La regla de f_n es un subconjunto de $\{1, \ldots, n\} \times C$, por lo que U es un subconjunto de $\mathbb{Z}_+ \times C$. Tenemos que demostrar que U es la regla de una función $h : \mathbb{Z}_+ \to C$.

Esto es, debemos probar que cada elemento i de $\mathbb{Z}_+$ aparece como la primera coordenada de, exactamente, un elemento de U. Esto es sencillo. El entero i pertenece al dominio de f_n si, y solamente si, $n > i$. Por lo tanto, el conjunto de elementos de U que tienen a i como primera coordenada es precisamente el conjunto de todos los pares de la forma $(i, f_n(i))$, para $n \geq i$. Ahora bien, el Lema 8.2 nos asegura que $f_n(i) = f_m(i)$ si $n, m \geq i$. Luego todos estos elementos de U son iguales, esto es, existe un único elemento de U que tiene a i como su primera coordenada.

Demostrar que h verifica $(*)$ es también sencillo; es una consecuencia de los siguientes hechos:

$$h(i) = f_n(i) \quad \text{para } i \leq n,$$
$$f_n \text{ verifica } (*) \text{ para todo } i \text{ de su dominio.}$$

La demostración de la unicidad es una copia de la demostración del Lema 8.2. ■

Ahora formularemos el principio general de definición recursiva. No hay nuevas ideas implicadas en su demostración, así que quedará como un ejercicio.

Teorema 8.4 (Principio de definición recursiva). *Sean A un conjunto y a_0 un elemento de A. Supongamos que ρ es una función que asigna, a cada función f que aplica una sección no vacía de los enteros positivos en A, un elemento de A. Entonces existe una única función*

$$h : \mathbb{Z}_+ \to A$$

tal que

$$(*) \qquad \begin{aligned} &h(1) = a_0, \\ &h(i) = \rho(h \mid \{1, \ldots, i-1\}) \quad \textit{para } i > 1. \end{aligned}$$

La fórmula $(*)$ se denomina ***fórmula recursiva*** para h. Ésta especifica $h(1)$, y expresa el valor de h en $i > 1$ en función de los valores de h en los enteros positivos menores que i.

EJEMPLO 1. Demostremos que el Teorema 8.3 es un caso particular de este teorema. Dado el subconjunto infinito C de $\mathbb{Z}_+$, sea a_0 el mínimo de C, y definamos ρ mediante la ecuación

$$\rho(f) = \text{ mínimo de } [C - (\text{conjunto imagen de } f)].$$

Como C es infinito y f es una función que lleva un conjunto finito a C, el conjunto imagen de f no es todo C, por lo que ρ está bien definida. Por el Teorema 8.4 existe una función $h : \mathbb{Z}_+ \to C$ tal que $h(1) = a_0$, y para $i > 1$,

$$\begin{aligned} h(i) &= \rho(h \mid \{1, \ldots, i-1\}) \\ &= \text{ mínimo de } [C - (\text{conjunto imagen de } h \mid \{1, \ldots, i-1\})] \\ &= \text{ mínimo de } [C - h(\{1, \ldots, i-1\})] \end{aligned}$$

como se quería demostrar.

EJEMPLO 2. Dado $a \in \mathbb{R}$, "definimos" a^n, en los ejercicios de §4, mediante la fórmula de recursión

$$\begin{aligned} a^1 &= a, \\ a^n &= a^{n-1} \cdot a. \end{aligned}$$

Queremos utilizar el Teorema 8.4 para definir rigurosamente una función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ de forma que $h(n) = a^n$. Para aplicar este teorema, representamos por a_0 el elemento a de $\mathbb{R}$, y definimos ρ mediante la ecuación $\rho(f) = f(m) \cdot a$, donde $f : \{1, \ldots, m\} \to \mathbb{R}$. Entonces existe una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} h(1) &= a_0, \\ h(i) &= \rho(h \mid \{1, \ldots, i-1\}) \quad \text{para } i > 1. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que $h(1) = a$, y $h(i) = h(i-1) \cdot a$ para $i > 1$. Si representamos $h(i)$ mediante a^i, tenemos

$$\begin{aligned} a^1 &= a, \\ a^i &= a^{i-1} \cdot a, \end{aligned}$$

como se quería demostrar.

Ejercicios

1. Sea $(b_1, b_2, \ldots)$ una sucesión infinita de números reales. La suma $\sum_{k=1}^{n} b_k$ se define por inducción de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} b_k &= b_1 && \text{para } n = 1, \\ \sum_{k=1}^{n} b_k &= (\sum_{k=1}^{n-1} b_k) + b_n && \text{para } n > 1. \end{aligned}$$

Sea A el conjunto de los números reales y elija ρ de forma que se aplique el Teorema 8.4 para definir esta suma rigurosamente. En ocasiones representaremos la suma $\sum_{k=1}^{n} b_k$ mediante $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

2. Sea $(b_1, b_2, \ldots)$ una sucesión infinita de números reales. Definimos el producto $\prod_{k=1}^{n} b_k$ mediante las ecuaciones

$$\prod_{k=1}^{1} b_k = b_1$$
$$\prod_{k=1}^{n} b_k = (\prod_{k=1}^{n-1} b_k) \cdot b_n \quad \text{para } n > 1.$$

Utilice el Teorema 8.4 para definir este producto rigurosamente. En ocasiones representaremos el producto $\prod_{k=1}^{n} b_k$ mediante $b_1 b_2 \cdots b_n$.

3. Obtenga las definiciones de a_n y $n!$ para $n \in \mathbb{Z}_+$ como casos particulares del Ejercicio 2.

4. Los *números de Fibonacci* de la teoría de números se definen recursivamente mediante la fórmula

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1,$$
$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \lambda_{n-2} \quad \text{para } n > 2.$$

Defínalos rigurosamente utilizando el Teorema 8.4.

5. Demuestre que existe una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ verificando la fórmula

$$h(1) = 3,$$
$$h(i) = [h(i-1) + 1]^{1/2} \quad \text{para } i > 1.$$

6. (a) Demuestre que no existe ninguna función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ verificando la fórmula

$$h(1) = 3,$$
$$h(i) = [h(i-1) - 1]^{1/2} \quad \text{para } i > 1.$$

Explique por qué este ejemplo no viola el principio de definición recursiva.

(b) Considere la fórmula de recursión

$$h(1) = 3,$$
$$h(i) = \left\{ \begin{array}{ll} [h(i-1) - 1]^{1/2} & \text{si } h(i-1) > 1 \\ 5 & \text{si } h(i-1) \leq 1 \end{array} \right\} \quad \text{para } i > 1.$$

Demuestre que existe una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ verificando esta fórmula.

7. Demuestre el Teorema 8.4.

8. Verifique la siguiente versión del principio de definición recursiva:
Sea A un conjunto. Sea ρ una función que asigna, a cada función f que aplica una sección S_n de $\mathbb{Z}_+$ en A, un elemento $\rho(f)$ de A. Entonces existe una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to A$ tal que $h(n) = \rho(h \mid S_n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

§9 Conjuntos infinitos y el axioma de elección

Ya hemos obtenido varios criterios para que un conjunto sea infinito. Sabemos, por ejemplo, que un conjunto A es infinito si tiene un subconjunto infinito-numerable o si existe una biyección entre A y un subconjunto propio de sí mismo. Pues bien, cualquiera de estas dos propiedades es suficiente para caracterizar conjuntos infinitos. Probaremos esto ahora. La demostración nos conducirá a un debate sobre un punto de lógica que todavía no hemos mencionado, el axioma de elección.

Teorema 9.1. *Sea A un conjunto. Son equivalentes:*

(1) Existe una función inyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to A$.

(2) Existe una biyección de A con un subconjunto propio de sí mismo.

(3) A es infinito.

Demostración. Probaremos las implicaciones (1)⇒(2)⇒(3)⇒(1).

Para probar (1)⇒(2), suponemos que existe una función inyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to A$. Representemos por B el conjunto imagen $f(\mathbb{Z}_+)$, y denotemos $f(n)$ por a_n. Como f es inyectiva, $a_n \neq a_m$ si $n \neq m$. Definimos

$$g : A \longrightarrow A - \{a_1\}$$

mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} g(a_n) &= a_{n+1} \quad \text{para } a_n \in B, \\ g(x) &= x \qquad\quad \text{para } x \in A - B. \end{aligned}$$

La aplicación g está indicada de forma esquemática en la Figura 9.1, y se puede ver fácilmente que es una biyección.

La implicación (2)⇒(3) es el recíproco del Corolario 6.3, por lo tanto ya está demostrada. Para probar (3)⇒(1), suponemos que A es infinito y construimos "por inducción" una función inyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to A$.

En primer lugar, ya que el conjunto A es no vacío, podemos elegir un punto a_1 de A, y definimos $f(1)$ como el punto así elegido.

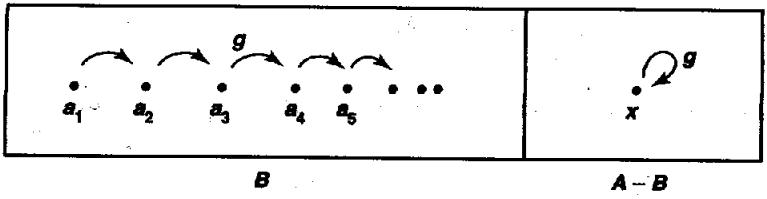


Figura 9.1

Entonces, suponiendo que tenemos definidos $f(1), \ldots, f(n-1)$, queremos definir $f(n)$. El conjunto $A - f(\{1, \ldots, n-1\})$ no es vacío, pues si lo fuese, la aplicación $f : \{1, \ldots, n\} \to A$ sería sobreyectiva y A finito. Por lo tanto, podemos elegir un elemento del conjunto $A - f(\{1, \ldots, n-1\})$ y definir $f(n)$ como este elemento. "Utilizando el principio de inducción", hemos definido f para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Es fácil ver que f es inyectiva. Para ello, supongamos que $m < n$. Entonces, $f(m)$ pertenece al conjunto $f(\{1, \ldots, n-1\})$, mientras que $f(n)$, por definición, no pertenece. Por tanto, $f(n) \neq f(m)$. ■

Intentemos reformular esta demostración por "inducción" más cuidadosamente, de forma que hagamos explícito el uso del principio de definición recursiva.

Dado el conjunto infinito A, intentamos definir $f : \mathbb{Z}_+ \to A$ recursivamente mediante la fórmula

$$(*) \qquad \begin{aligned} f(1) &= a_1, \\ f(i) &= \text{ un elemento arbitrario de } [A - f(\{1, \ldots, i-1\})] \quad \text{para } i > 1. \end{aligned}$$

Sin embargo, en absoluto ésta es una fórmula recursiva aceptable, ya que no define $f(i)$ *unívocamente* en términos de $f \mid \{1, \ldots, i-1\}$.

A este respecto, esta fórmula difiere notablemente de la fórmula de recursión que consideramos en la demostración del Lema 7.2. Allí teníamos un subconjunto infinito C de $\mathbb{Z}_+$, y definíamos h de la forma

$$\begin{aligned} h(1) &= \text{ mínimo de } C, \\ h(i) &= \text{ mínimo de } [C - h(\{1, \ldots, i-1\})] \quad \text{para } i > 1. \end{aligned}$$

Esta fórmula define $h(i)$ unívocamente en términos de $h \mid \{1, \ldots, i-1\}$.

Otro modo de ver que $(*)$ no es una fórmula recursiva válida es observar que, si lo fuese, el principio de definición recursiva implicaría que existe una *única* función $f : \mathbb{Z}_+ \to A$ verificando $(*)$. Pero $(*)$ nunca determinará f de forma única. En efecto, esta "definición" de f implica infinitas y arbitrarias elecciones.

Lo que estamos diciendo es que la demostración que hemos dado para el Teorema 9.1 no es realmente una demostración. De hecho, en base a las propiedades de la

teoría de conjuntos que hemos debatido hasta ahora, no es *posible* demostrar este teorema. Se necesita algo más.

Anteriormente, describimos determinados métodos posibles para conjuntos específicos:

(1) Definir un conjunto listando sus elementos, o tomar un conjunto dado A y especificar un subconjunto B dando una propiedad que los elementos de B tienen que verificar.

(2) Tomar uniones o intersecciones de los elementos de una colección dada de conjuntos, o tomar la diferencia de dos conjuntos.

(3) Tomar el conjunto de todos los subconjuntos de uno dado.

(4) Tomar productos cartesianos de conjuntos.

Ahora bien, la regla de la función f es realmente un conjunto, un subconjunto de $\mathbb{Z}_+ \times A$. Por lo tanto, para demostrar la existencia de la función f, debemos construir el subconjunto apropiado de $\mathbb{Z}_+ \times A$, utilizando los métodos permitidos para construir conjuntos. Los métodos ya dados, simplemente no son adecuados para este propósito. Necesitamos una nueva forma de asegurar la existencia de un conjunto. Por lo tanto, añadimos a la lista de los métodos permitidos para formar conjuntos el siguiente:

Axioma de elección. *Dada una colección $\mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos no vacíos, existe un conjunto C formado exactamente por un elemento de cada elemento de $\mathcal{A}$, esto es, un conjunto C tal que C está contenido en la unión de los elementos de $\mathcal{A}$, y que para cada $A \in \mathcal{A}$, el conjunto $C \cap A$ contiene un único elemento.*

El conjunto C puede verse como el que se ha obtenido eligiendo un solo elemento de cada uno de los conjuntos de $\mathcal{A}$.

El axioma de elección parece ciertamente una afirmación bastante inocente. Y, de hecho, la mayoría de los matemáticos hoy en día lo aceptan como parte de la teoría de conjuntos en la cual basan sus matemáticas. Pero en años anteriores se desató una gran controversia alrededor de esta afirmación particular de la teoría de conjuntos, ya que hay teoremas que se pueden demostrar con su ayuda y que algunos matemáticos eran reacios a aceptar. Un ejemplo es el teorema del buen orden, que discutiremos brevemente. De momento, utilizaremos simplemente el axioma de elección para resolver la dificultad que mencionamos en la demostración anterior. En primer lugar, probaremos una sencilla consecuencia del axioma de elección.

Lema 9.2 (Existencia de una función de elección). *Dada una familia $\mathcal{B}$ de conjuntos no vacíos (no necesariamente disjuntos), existe una función*

$$c : \mathcal{B} \longrightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

tal que $c(B)$ es un elemento de B, para cada $B \in \mathcal{B}$.

La función c se denomina ***función de elección*** para la familia $\mathcal{B}$.

La diferencia entre este lema y el axioma de elección radica en que en este lema no se requiere que los conjuntos de la familia $\mathcal{B}$ sean disjuntos. Por ejemplo, se puede permitir que $\mathcal{B}$ sea la familia de *todos* los subconjuntos no vacíos de un conjunto dado.

Demostración. Dado un elemento B de $\mathcal{B}$, definimos un conjunto B' de la siguiente forma:

$$B' = \{(B, x) \mid x \in B\}.$$

Esto es, B' es la familia de todos los pares ordenados, donde la primera coordenada del par ordenado es el conjunto B y la segunda coordenada es un elemento de B. El conjunto B' es un subconjunto del producto cartesiano

$$\mathcal{B} \times \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

Como B contiene al menos un elemento x, el conjunto B' contiene al menos a (B, x), luego no es vacío.

Ahora bien, aseguramos que si B_1 y B_2 son dos conjuntos distintos en $\mathcal{B}$, entonces los correspondientes conjuntos B_1' y B_2' son disjuntos. Un típico elemento de B_1' sería un par de la forma (B_1, x_1) y para B_2 sería (B_2, x_2). Dos de tales elementos no pueden ser iguales, ya que sus primeras coordenadas son diferentes. Ahora construyamos la familia

$$\mathcal{C} = \{B' \mid B \in \mathcal{B}\}$$

que es una colección de subconjuntos disjuntos no vacíos de

$$\mathcal{B} \times \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

Por el axioma de elección, existe un conjunto c formado exactamente por un elemento de cada elemento de $\mathcal{C}$. Afirmamos que c es la regla para la función de elección buscada.

En primer lugar, c es un subconjunto de

$$\mathcal{B} \times \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

En segundo lugar, c contiene exactamente un elemento de cada conjunto B', por lo que para cada $B \in \mathcal{B}$, el conjunto c contiene exactamente un par ordenado (B, x) cuya primera coordenada es B. Así c es, en efecto, la regla para una función que va de la familia $\mathcal{B}$ al conjunto $\cup_{B \in \mathcal{B}} B$. Finalmente, si $(B, x) \in c$, entonces x pertenece a B, y por lo tanto $c(B) \in B$, como se quería demostrar. ■

Una segunda demostración del Teorema 9.1. Utilizando este lema, se puede hacer la demostración del Teorema 9.1 más precisa. Dado el conjunto infinito A, queremos construir una función inyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to A$. Formemos la familia $\mathcal{B}$ de todos los subconjuntos no vacíos de A. El lema inmediatamente anterior asegura la existencia de una función de elección para $\mathcal{B}$, esto es, una función

$$c : \mathcal{B} \longrightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = A$$

tal que $c(B) \in B$ para cada $B \in \mathcal{B}$. Definamos ahora un función $f : \mathbb{Z}_+ \to A$ mediante la fórmula de recursión

$$(*) \qquad \begin{aligned} &f(1) = c(A), \\ &f(i) = c(A - f(\{1, \ldots, i-1\})) \quad \text{para } i > 1. \end{aligned}$$

Como A es infinito, el conjunto $A - f(\{1, \ldots, i-1\})$ es no vacío, por lo que la parte derecha de esta ecuación tiene sentido. Ya que esta fórmula define $f(i)$ unívocamente en términos de $f \mid \{1, \ldots, i-1\}$, se aplica el principio de definición recursiva. Concluimos que existe una única función $f : \mathbb{Z}_+ \to A$ verificando $(*)$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$. La inyectividad de f se deduce como antes. ■

Habiendo enfatizado que para construir una demostración del Teorema 9.1, que sea lógicamente correcta, se debe hacer un uso específico de una función de elección, volvemos ahora hacia atrás y admitimos que en la práctica, la mayoría de los matemáticos no hacen tal cosa. Ellos continúan sin escrúpulos dando demostraciones como nuestra primera versión, que implican un número infinito de elecciones arbitrarias. Ellos saben que realmente utilizan el axioma de elección, y saben también que si fuese necesario, podrían rehacer sus demostraciones de una forma lógicamente más satisfactoria introduciendo una función de elección específica. Pero usualmente no se preocupan.

Y tampoco lo haremos nosotros. Encontraremos unos pocos usos específicos más de una función de elección en este libro; introduciremos una función de elección sólo cuando la demostración se vuelva confusa sin ella. Pero habrá muchas demostraciones en las cuales hagamos un número infinito de elecciones arbitrarias, y en cada caso estaremos utilizando realmente el axioma de elección de forma implícita.

Ahora bien, debemos confesar que, en una sección anterior de este libro, hay una demostración en la cual construimos una determinada función haciendo un número infinito de elecciones arbitrarias. Y eludimos esa demostración sin incluso mencionar el axioma de elección: nuestras disculpas por la decepción. Dejamos que el lector descubra qué demostración era.

Hagamos un último comentario sobre el axioma de elección. Existen dos versiones de este axioma. Una podría denominarse ***axioma de elección finito***, el cual

asegura que dada una colección *finita* $\mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos no vacíos, existe un conjunto C formado exactamente por un elemento de cada elemento de $\mathcal{A}$. Se necesita esta forma débil del axioma de elección todo el tiempo; nosotros la hemos utilizado libremente en las secciones anteriores sin hacer ningún comentario. Ningún matemático tiene ningún escrúpulo sobre el axioma finito de elección, es parte de la teoría de conjuntos de todo el mundo. Dicho de otra forma, nadie tiene escrúpulos sobre una demostración que implica sólo finitas elecciones arbitrarias.

La versión más fuerte del axioma de elección, la que se aplica a una familia *arbitraria* $\mathcal{A}$ de conjuntos no vacíos, es la que se denomina propiamente "el axioma de elección". Cuando un matemático escribe "esta demostración depende del axioma de elección", se refiere invariablemente a esta forma más fuerte del axioma.

Ejercicios

1. Defina una aplicación inyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to X^\omega$, donde X es el conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$, sin utilizar el axioma de elección.
2. Encuentre, cuando sea posible, una función de elección para cada una de las siguientes familias, sin utilizar el axioma de elección:
   (a) La familia $\mathcal{A}$ de los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}_+$.
   (b) La familia $\mathcal{B}$ de los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}$.
   (c) La familia $\mathcal{C}$ de los subconjuntos no vacíos de los números racionales $\mathbb{Q}$.
   (d) La familia $\mathcal{D}$ de los subconjuntos no vacíos de X^ω, donde $X = \{0, 1\}$.
3. Supongamos que A es un conjunto y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ es una familia indexada dada de funciones inyectivas
$$f_n : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow A.$$
   Demuestre que A es infinito. ¿Es posible definir una función inyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to A$ sin utilizar el axioma de elección?
4. En §7 hay un teorema cuya demostración implica un número infinito de elecciones arbitrarias. ¿Cuál es? Reescriba la demostración de forma que se haga explícito el uso del axioma de elección (varios de los ejercicios anteriores han utilizado también el axioma de elección).
5. (a) Utilice el axioma de elección para demostrar que si $f : A \to B$ es sobreyectiva, entonces f tiene una inversa por la derecha $h : B \to A$.
   (b) Demuestre que si $f : A \to B$ es inyectiva y A es no vacío, entonces f tiene inversa por la izquierda. ¿Se necesita el axioma de elección?
6. La mayoría de las paradojas famosas de la teoría de conjuntos sencilla están asociadas de una u otra forma al concepto de "conjunto de todos los conjuntos". Ninguna de las reglas que hemos dado para construir conjuntos nos permite

considerar tal conjunto. Y por un buen motivo —el concepto en sí mismo es contradictorio—. Supongamos que $\mathcal{A}$ representa el "conjunto de todos los conjuntos".

(a) Demuestre que $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$; deduzca una contradicción.

(b) (*Paradoja de Russell*). Sea $\mathcal{B}$ el subconjunto de $\mathcal{A}$ formado por todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos,

$$\mathcal{B} = \{A \mid A \in \mathcal{A} \text{ y } A \notin A\}.$$

(Desde luego, no puede haber *ningún* conjunto A tal que $A \in A$; si este fuera el caso, $\mathcal{B} = \mathcal{A}$). ¿Es $\mathcal{B}$ un elemento de sí mismo o no?

7. Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Si existe una aplicación inyectiva de B en A, pero no existe ninguna inyección de A en B, decimos que A tiene ***mayor cardinal*** que B.

(a) Deduzca del Teorema 9.1 que todo conjunto no numerable tiene mayor cardinal que $\mathbb{Z}_+$.

(b) Demuestre que si A tiene mayor cardinal que B y B tiene mayor cardinal que C, entonces A tiene mayor cardinal que C.

(c) Encuentre una sucesión $A_1, A_2, \ldots$ de conjuntos infinitos tales que, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, el conjunto A_{n+1} tenga mayor cardinal que A_n.

(d) Halle un conjunto que para todo n tenga mayor cardinal que A_n.

***8.** Demuestre que $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ y $\mathbb{R}$ tienen el mismo cardinal. [*Indicación*: puede utilizar el hecho de que todo número real tiene un desarrollo decimal, que es único si se prohiben los desarrollos que terminen en una cadena infinita de nueves.]

Una famosa conjetura de la teoría de conjuntos, llamada la *hipótesis del continuo*, asegura que no existe ningún conjunto que tenga mayor cardinal que $\mathbb{Z}_+$ y menor cardinal que $\mathbb{R}$. La *hipótesis del continuo generalizada* afirma que, dado el conjunto infinito A, no existe ningún conjunto que tenga mayor cardinal que A y menor cardinal que $\mathcal{P}(A)$. Sorprendentemente, se ha demostrado que ambas afirmaciones son independientes de los axiomas usuales de la teoría de conjuntos. Para un informe claro y legible véase [Sm].

§10 Conjuntos bien ordenados

Una de las propiedades más útiles del conjunto $\mathbb{Z}_+$ de los enteros positivos es el hecho de que cada uno de sus subconjuntos no vacíos tiene un mínimo. La generalización de esta propiedad conduce al concepto de un conjunto bien ordenado.

Definición. Un conjunto A con una relación de orden $<$ se dice que está ***bien ordenado***si todo subconjunto no vacío de A tiene un mínimo.

EJEMPLO 1. Considérese el conjunto $\{1,2\} \times \mathbb{Z}_+$ con el orden del diccionario. Esquemáticamente, se puede representar como una sucesión infinita seguida por otra sucesión infinita:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots; b_1, b_2, b_3, \ldots$$

con el convenio de que cada elemento es menor que cualquier otro elemento que haya a su derecha. No es difícil ver que todo subconjunto no vacío C de este conjunto ordenado tiene un mínimo: si C contiene cualquiera de los a_n, simplemente hay que tomar el mínimo de la intersección de C con la sucesión $a_1, a_2, \ldots$, mientras que si C no contiene ningún a_n, entonces es un subconjunto de la sucesión $b_1, b_2, \ldots$, y como tal tiene un mínimo.

EJEMPLO 2. Considérese el conjunto $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ con el orden del diccionario. Esquemáticamente, se puede representar como una sucesión infinita de sucesiones infinitas. Demostremos que es un conjunto bien ordenado. Sea X un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$. Sea A el subconjunto de $\mathbb{Z}_+$ formado por todas las *primeras coordenadas* de elementos de X. A tiene un primer elemento, llamémoslo a_0. Entonces la familia

$$\{b \mid a_0 \times b \in X\}$$

es un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_+$, siendo b_0 su primer elemento. Por definición del orden del diccionario, $a_0 \times b_0$ es el mínimo de X (véase la Figura 10.1).

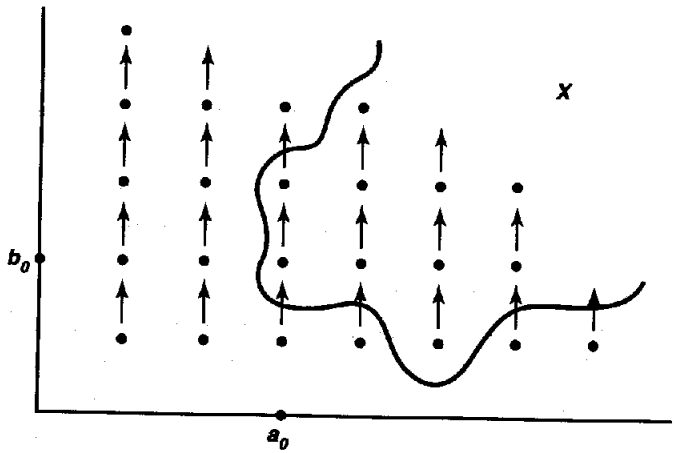


Figura 10.1

EJEMPLO 3. El conjunto de los enteros no está bien ordenado con el orden usual; el subconjunto formado por los enteros negativos no tiene un mínimo. Ni el conjunto de los números reales del intervalo $\{0 \leq x \leq 1\}$ está bien ordenado; el subconjunto formado por los x para los cuales $0 < x < 1$ no tiene un mínimo (aunque tiene un ínfimo, desde luego).

Hay varias formas de construir conjuntos bien ordenados. Dos de ellas son las siguientes:

(1) Si A es un conjunto bien ordenado, entonces cualquier subconjunto de A está bien ordenado con la relación de orden inducida.

(2) Si A y B son conjuntos bien ordenados, entonces $A \times B$ está bien ordenado con el orden del diccionario.

La demostración de (1) es trivial y la demostración de (2) sigue el modelo dado en el Ejemplo 2.

Se deduce de esto que el conjunto $\mathbb{Z}_+ \times (\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+)$ está bien ordenado con el orden del diccionario y se puede representar como una sucesión infinita de sucesiones infinitas de sucesiones infinitas. Análogamente, $(\mathbb{Z}_+)^4$ es un conjunto bien ordenado con el orden del diccionario, y así sucesivamente. Pero si se intenta generalizar a un producto infinito de $\mathbb{Z}_+$ consigo mismo, aparece un problema. Examinaremos esta situación brevemente.

Ahora, dado un conjunto A sin una relación de orden, es natural preguntarse si existe una relación de orden en A que lo convierta en un conjunto bien ordenado. Si A es finito, cualquier biyección

$$f : A \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$$

puede utilizarse para definir una relación de orden en A, y bajo esta relación, A tiene el mismo tipo de orden que el conjunto ordenado $\{1, \ldots, n\}$. En efecto, toda relación de orden sobre un conjunto finito puede obtenerse de la siguiente forma:

Teorema 10.1. *Todo conjunto no vacío, finito y ordenado tiene el tipo de orden de una sección $\{1, \ldots, n\}$ de $\mathbb{Z}_+$, y por tanto está bien ordenado.*

Demostración. Ésta se propuso como un ejercicio en §6 y lo demostraremos aquí. En primer lugar, demostremos que todo conjunto finito y ordenado A tiene un máximo. Si A tiene un solo elemento, esto es trivial. Supongamos que es cierto para conjuntos con $n - 1$ elementos, sea A un conjunto con n elementos y sea $a_0 \in A$. Entonces $A - \{a_0\}$ tiene un máximo a_1, y el mayor de $\{a_0, a_1\}$ es el máximo de A.

En segundo lugar, demostremos que existe una biyección que preserva el orden entre A y $\{1, \ldots, n\}$ para algún n. Si A tiene un solo elemento, este hecho es trivial. Supongamos que es cierto para conjuntos que tengan $n - 1$ elementos y sea b el máximo de A. Por hipótesis, existe una biyección que preserva el orden

$$f' : A - \{b\} \longrightarrow \{1, \ldots, n-1\}.$$

Definimos una biyección que preserva el orden $f : A \to \{1, \ldots, n\}$ por

$$f(x) = f'(x) \text{ para } x \neq b,$$
$$f(b) = n.$$

■

Así, un conjunto finito ordenado tiene sólo un tipo de orden posible. Para un conjunto infinito, las cosas son bastante diferentes. Los conjuntos bien ordenados

$$\begin{aligned}&\mathbb{Z}_+,\\&\{1,\dots,n\}\times\mathbb{Z}_+,\\&\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+,\\&\mathbb{Z}_+\times(\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+)\end{aligned}$$

son infinito numerables, pero todos tienen distintos tipos de orden, como se puede comprobar.

Todos los ejemplos que hemos dado de conjuntos bien ordenados tienen órdenes de conjuntos numerables. Es natural preguntarse si se pueden encontrar conjuntos no numerables bien ordenados.

El conjunto no numerable más obvio de estudiar es el producto infinito numerable

$$X=\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+\times\cdots=(\mathbb{Z}_+)^\omega$$

de $\mathbb{Z}_+$ consigo mismo. Se puede generalizar el orden del diccionario a este conjunto de una forma natural, definiendo

$$(a_1,a_2,\dots)<(b_1,b_2,\dots)$$

si para algún $n\geq 1$,

$$a_i=b_i,\quad \text{para } i<n \quad \text{y} \quad a_n<b_n.$$

Ésta es, en efecto, una relación de orden para el conjunto X, pero desgraciadamente no es un buen orden. Considérese el conjunto A de todos los elementos $\mathbf{x}$ de X de la forma

$$\mathbf{x}=(1,\dots,1,2,1,1,\dots),$$

donde exactamente una coordenada de $\mathbf{x}$ es igual a 2 y todas las demás son iguales a 1. Claramente, el conjunto A no tiene un mínimo.

Por tanto, el orden del diccionario no da, al menos, un buen orden para el conjunto $(\mathbb{Z}_+)^\omega$. ¿Existe alguna otra relación de orden en este conjunto que sea una buena ordenación? Nadie ha construido nunca un buen orden específico de $(\mathbb{Z}_+)^\omega$. Sin embargo, hay un famoso teorema que dice que el citado buen orden existe:

Teorema (Teorema del buen orden). *Si A es un conjunto, existe una relación de orden sobre A que es un buen orden.*

Este teorema fue demostrado por Zermelo en 1904 y sobrecogió al mundo de las matemáticas. Hubo un considerable debate sobre la corrección de la demostración; la ausencia de cualquier tipo de procedimiento constructivo para establecer un buen orden en un conjunto no numerable arbitrario conducía a muchos a ser escépticos. Cuando la demostración fue analizada cuidadosamente, el único punto que se encontró que podía cuestionarse fue una construcción que implicaba un número infinito de elecciones arbitrarias, esto es, una construcción que utilizaba el axioma de elección.

Algunos matemáticos rechazaban el axioma de elección como un resultado y durante muchos años una pregunta legítima sobre cada nuevo teorema era: ¿utiliza su demostración el axioma de elección o no? Un teorema se consideraba un tanto en el aire si se tenía que utilizar el axioma de elección en su demostración. Los matemáticos actuales, en general, no tienen tales dudas. Ellos aceptan el axioma de elección como una hipótesis razonable sobre la teoría de conjuntos y aceptan por tanto el teorema del buen orden.

La demostración de que el axioma de elección implica el teorema del buen orden es bastante larga (aunque no excesivamente complicada), y principalmente de interés para los especialistas en lógica; nosotros la omitiremos. Si está interesado, se ha esbozado una demostración en los ejercicios suplementarios al final del capítulo. En su lugar, simplemente aceptaremos el teorema del buen orden cuando lo necesitemos. Considérelo como un axioma adicional de la teoría de conjuntos, si lo prefiere.

En efecto, necesitaremos la fuerza de esta hipótesis sólo de forma ocasional. La mayor parte del tiempo, todo lo que se necesitará será el siguiente resultado más débil:

Corolario. *Existe un conjunto bien ordenado no numerable.*

Utilizaremos ahora este resultado para construir un conjunto bien ordenado particular que nos será muy útil.

Definición. Sea X un conjunto bien ordenado. Dado $\alpha \in X$, sea S_α el conjunto

$$S_\alpha = \{x \mid x \in X \text{ y } x < \alpha\}.$$

Se denomina ***sección*** de X por α.

Lema 10.2. *Existe un conjunto bien ordenado A teniendo un máximo Ω, tal que la sección S_Ω de A por Ω es no numerable, pero tal que cualquier otra sección de A es numerable.*

Demostración. Comenzamos con un conjunto no numerable bien ordenado B. Sea C el conjunto bien ordenado $\{1, 2\} \times B$ con el orden del diccionario, entonces alguna

sección de C es no numerable (en efecto, la sección de C por un elemento de la forma $2 \times b$ es no numerable). Sea Ω el mínimo de C para el cual la sección de C por Ω es no numerable. Entonces A consiste en esta sección junto con el elemento Ω. ■

Obsérvese que S_Ω es un conjunto bien ordenado no numerable, toda sección del cual es numerable. Su tipo de orden está, en efecto, unívocamente determinado por esta condición. Lo llamaremos un *conjunto bien ordenado no numerable minimal*. Más aún, representaremos el conjunto bien ordenado $A = S_\Omega \cup \{\Omega\}$ mediante el símbolo $\bar{S}_\Omega$ (por razones que veremos más adelante).

La propiedad del conjunto S_Ω más útil para nuestros propósitos viene expresada en el siguiente teorema:

Teorema 10.3. *Si A es un subconjunto numerable de S_Ω, entonces A tiene una cota superior en S_Ω.*

Demostración. Sea A un subconjunto numerable de S_Ω. Para cada $a \in A$, la sección S_a es numerable. Por lo tanto, la unión $B = \cup_{a \in A} S_a$ es también numerable. Como S_Ω es no numerable, el conjunto B no puede ser todo S_Ω; sea x un punto de S_Ω que no está en B. Entonces, x es una cota superior para A. Efectivamente, si $x < a$ para algún a de A, entonces x pertenece a S_a, y por lo tanto a B, contradiciendo la elección. ■

Ejercicios

1. Demuestre que todo conjunto bien ordenado tiene la propiedad del supremo.
2. (a) Demuestre que en un conjunto bien ordenado, todo elemento excepto el máximo (si lo hay) tiene un inmediato sucesor.
   (b) Encuentre un conjunto que no esté bien ordenado y en el cual todo elemento tenga un inmediato sucesor.
3. Los dos conjuntos $\{1, 2\} \times \mathbb{Z}_+$ y $\mathbb{Z}_+ \times \{1, 2\}$ están bien ordenados con el orden del diccionario. ¿Tienen el mismo tipo de orden?
4. (a) Sea $\mathbb{Z}_-$ el conjunto de los enteros negativos con el orden usual. Demuestre que un conjunto simplemente ordenado A no está bien ordenado si, y sólo si, contiene un subconjunto que tiene el mismo tipo de orden que $\mathbb{Z}_-$.
   (b) Demuestre que si A es simplemente ordenado y todo subconjunto numerable de A está bien ordenado, entonces A está bien ordenado.
5. Demuestre que el teorema del buen orden implica el axioma de elección.
6. Sea S_Ω el conjunto bien ordenado no numerable minimal.

(a) Demuestre que S_Ω no tiene un máximo.

(b) Demuestre que, para todo $\alpha \in S_\Omega$, el subconjunto $\{x \mid \alpha < x\}$ es no numerable.

(c) Sea X_0 el subconjunto de S_Ω formado por todos los elementos x tales que x no tiene un inmediato predecesor. Demuestre que X_0 es no numerable.

7. Sea J un conjunto bien ordenado. Un subconjunto J_0 de J se dice que es ***inductivo*** si para todo $\alpha \in J$,

$$(S_\alpha \subset J_0) \Longrightarrow \alpha \in J_0.$$

Teorema (El principio de inducción transfinita). Si J es un conjunto bien ordenado y J_0 es un subconjunto inductivo de J, entonces $J_0 = J$.

8. (a) Sean A_1 y A_2 conjuntos disjuntos, bien ordenados por $<_1$ y $<_2$, respectivamente. Defina una relación de orden en $A_1 \cup A_2$ mediante $a < b$ si bien $a, b \in A_1$ y $a <_1 b$, bien $a, b \in A_2$ y $a <_2 b$, o bien $a \in A_1$ y $b \in A_2$. Demuestre que es un buen orden.

(b) Generalice (a) a una familia arbitraria de conjuntos disjuntos bien ordenados, indexada por un conjunto bien ordenado.

9. Considere el subconjunto A de $(\mathbb{Z}_+)^\omega$ formado por todas las sucesiones infinitas de enteros positivos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ que terminan en una cadena infinita de unos. Dote a A del siguiente orden: $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ si $x_n < y_n$ y $x_i = y_i$ para $i > n$. Llamamos a éste el "orden antidiccionario" en A.

(a) Demuestre que, para todo n, existe una sección de A que tiene el mismo tipo de orden que $(\mathbb{Z}_+)^n$ con el orden del diccionario.

(b) Demuestre que A está bien ordenado.

10. *Teorema. Sean J y C conjuntos bien ordenados; supongamos que no existe ninguna función sobreyectiva aplicando una sección de J en C. Entonces existe una única función $h : J \to C$ verificando la ecuación*

$$(*) \qquad h(x) = \textit{mínimo}\,[C - h(S_x)]$$

para cada $x \in J$, donde S_x es la sección de J por x.
Demostración.

(a) Si h y k aplican secciones de J, o todo J, en C y satisfacen $(*)$ para todo x de sus respectivos dominios, demuestre que $h(x) = k(x)$ para todo x de ambos dominios.

(b) Si existe una función $h : S_\alpha \to C$ verificando $(*)$, demuestre que existe una función $k : S_\alpha \cup \{\alpha\} \to C$ verificando $(*)$.

(c) Si $K \subset J$ y para todo $\alpha \in K$ existe una función $h_\alpha : S_\alpha \to C$ verificando $(*)$, demuestre que existe una función

$$k : \bigcup_{\alpha \in K} S_\alpha \longrightarrow C$$

que satisface $(*)$.

(d) Demuestre por inducción transfinita que para todo $\beta \in J$, existe una función $h_\beta : S_\beta \to C$ verificando $(*)$. [*Indicación*: si β tiene un inmediato predecesor α, entonces $S_\beta = S_\alpha \cup \{\alpha\}$. Si no, S_β es la unión de todos los S_α con $\alpha < \beta$.]

(e) Demuestre el teorema.

11. Sean A y B dos conjuntos. Utilizando el teorema del buen orden, demuestre que tienen el mismo cardinal, o uno tiene mayor cardinal que el otro. [*Indicación*: si no existe ninguna aplicación sobreyectiva $f : A \to B$, aplique el ejercicio anterior.]

*§11 El principio del máximo†

Ya hemos señalado que el axioma de elección conduce al importante teorema que nos asegura que todo conjunto puede ser bien ordenado. El axioma de elección tiene otras consecuencias que son incluso más importantes en matemáticas. Referidas en su conjunto como "principios del máximo", tienen muchas versiones. Formuladas independientemente por un gran número de matemáticos, entre los que se incluyen F. Hausdorff, K. Kuratowski, S. Bochner y M. Zorn, durante los años 1914-1935, se demostraron frecuentemente como consecuencia del teorema del buen orden. Posteriormente, se observó que todas ellas eran, de hecho, *equivalentes* al teorema del buen orden. Consideraremos aquí varias de ellas.

En primer lugar, damos una definición. Dado un conjunto A, una relación $\prec$ sobre A se denomina ***orden parcial estricto*** sobre A si tiene las siguientes dos propiedades:

(1) (No-reflexividad) la relación $a \prec a$ nunca se cumple.

(2) (Transitividad) si $a \prec b$ y $b \prec c$, entonces $a \prec c$.

Éstas son, sencillamente, la segunda y tercera propiedades de un orden simple (véase §3); la propiedad de comparabilidad es la única que se ha omitido. En otras palabras, un orden parcial estricto se comporta como un orden simple excepto que no necesita que para cada par de puntos distintos x e y del conjunto, bien $x \prec y$, bien $y \prec x$.

†Esta sección se utilizará en los Capítulos 5 y 14.

Si $\prec$ es un orden parcial estricto sobre el conjunto A, fácilmente puede ocurrir que algún subconjunto B de A sea simplemente ordenado por esta relación; todo lo que se necesita es que todo par de elementos de B sean comparables por $\prec$.

Ahora podemos establecer el siguiente principio, que fue formulado por primera vez por Hausdorff en 1914.

Teorema (El principio del máximo). *Sean A un conjunto y $\prec$ un orden parcial estricto sobre A. Entonces existe un subconjunto simplemente ordenado maximal B de A.*

Dicho de otro modo, existe un subconjunto B de A tal que B está simplemente ordenado por $\prec$ y tal que ningún subconjunto de A que contenga propiamente a B está simplemente ordenado por $\prec$.

EJEMPLO 1. Si $\mathcal{A}$ es cualquier familia de conjuntos, la relación "es un subconjunto propio de" es un orden parcial estricto sobre $\mathcal{A}$. Supongamos que $\mathcal{A}$ es la familia de todas las regiones circulares (interiores de círculos) en el plano. Una subfamilia simplemente ordenada maximal de $\mathcal{A}$ está formada por todas las regiones circulares con centros en el origen. Otra subfamilia simplemente ordenada maximal sería la formada por todas las regiones circulares acotadas por círculos tangentes en el origen desde la derecha al eje y (véase la Figura 11.1).

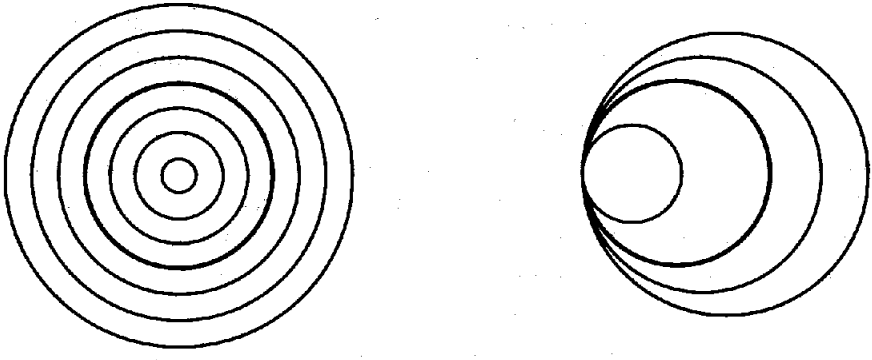


Figura 11.1

EJEMPLO 2. Si (x_0, y_0) y (x_1, y_1) son dos puntos del plano $\mathbb{R}^2$, definimos

$$(x_0, y_0) \prec (x_1, y_1)$$

si $y_0 = y_1$ y $x_0 < x_1$. Éste es un orden parcial de $\mathbb{R}^2$ bajo el cual dos puntos son comparables solamente si están en la misma recta horizontal. Los conjuntos simplemente ordenados maximales son las rectas horizontales de $\mathbb{R}^2$.

Se puede dar una "demostración" intuitiva del principio del máximo que es bastante atractiva. Utiliza un procedimiento paso-a-paso, que se puede describir en términos físicos como sigue.

Supongamos que tenemos una caja y colocamos en su interior algunos elementos de A de acuerdo con el siguiente plan: primero, tomamos un elemento arbitrario de A y lo ponemos en la caja. Después cogemos otro elemento de A. Si es comparable con el elemento de la caja, lo introducimos también en ella; en caso contrario, lo desechamos. En general, tendremos una colección de elementos metidos en la caja y una colección de elementos que han sido eliminados. Tomamos uno de los elementos restantes de A. Si es comparable con todos los que hay en la caja, también lo ponemos en ella; en caso contrario, lo desechamos. Y continuamos de forma análoga. Después de haber comprobado todos los elementos de A, los elementos que se tienen en la caja serán todos comparables unos con otros, y así formarán un conjunto simplemente ordenado. Todo elemento que no esté en la caja no será comparable con, al menos, uno de los de la caja, motivo por el cual fue desechado. Por lo tanto, el conjunto simplemente ordenado de la caja es maximal, ya que ningún subconjunto de A mayor que él puede verificar la condición de comparabilidad.

Ahora bien, el punto débil en la anterior "demostración" se presenta cuando decimos "después de haber comprobado todos los elementos de A". ¿Cómo se sabe que se han "conseguido" comprobar todos los elementos de A? Si sucediese que A es numerable, no es difícil convertir esta demostración intuitiva en una verdadera demostración. Consideremos el caso infinito numerable; el caso finito es aún más sencillo. Numeramos los elementos de A biyectivamente con los enteros positivos, así que $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Esta numeración da una forma de decidir en qué orden se comprueban los elementos de A, y cómo saber cuándo se han comprobado todos.

Ahora definimos una función $h : \mathbb{Z}_+ \to \{0, 1\}$, asignando el valor 0 a i si "ponemos a_i en la caja", y el valor 1 si "desechamos a_i". Esto quiere decir que $h(1) = 0$, y que para $i > 1$, se tiene $h(i) = 0$ si, y sólo si, a_i es comparable con todos los elementos del conjunto

$$\{a_j \mid j < i \text{ y } h(j) = 0\}.$$

Por el principio de definición recursiva, esta fórmula determina una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to \{0, 1\}$. Es fácil comprobar que el conjunto de los a_j para los cuales $h(j) = 0$ es un subconjunto simplemente ordenado maximal de A.

Si A es no numerable, una variante de este método funcionará, *si nos permitimos utilizar el teorema del buen orden*. En lugar de numerar los elementos de A con el conjunto $\mathbb{Z}_+$, los numeramos (biyectivamente) con los elementos de algún conjunto bien ordenado J, así que $A = \{a_\alpha \mid \alpha \in J\}$. Para ello necesitamos el teorema del buen orden, por lo que sabemos que existe una biyección entre A y algún conjunto bien ordenado J. Entonces, podemos proceder como en el párrafo anterior, cambiando i por α en el argumento. Estrictamente hablando, también se necesita generalizar el principio de definición recursiva a conjuntos bien ordenados, pero esto no es particularmente difícil (véanse los ejercicios complementarios).

Por lo tanto, el teorema del buen orden implica el principio del máximo.

Aunque el principio del máximo de Hausdorff fue el primero en ser formulado y es, probablemente, el más sencillo de entender, existe otro principio de este tipo que es citado con más frecuencia hoy en día. Popularmente es conocido como "el lema de Zorn", aunque Kuratowski (1922) y Bochner (1922) precedieron a Zorn (1935) enunciando y demostrando algunas versiones de este resultado. Para conocer los antecedentes y discusión de la intrincada historia de estas ideas, véase [C] o [Mo]. Para establecer este principio, necesitamos cierta terminología.

Definición. Sean A un conjunto y $\prec$ un orden parcial estricto sobre A. Si B es un subconjunto de A, una ***cota superior*** sobre B es un elemento c de A tal que para todo b de B bien $b = c$, o bien $b \prec c$. Un ***elemento maximal*** de A es un elemento m de A tal que ningún elemento a de A verifica la relación $m \prec a$.

Lema de Zorn. *Sea A un conjunto estrictamente parcialmente ordenado. Si todo subconjunto simplemente ordenado de A tiene una cota superior en A, entonces A tiene un elemento maximal.*

El lema de Zorn es una sencilla consecuencia del principio del máximo: dado A, el principio del máximo implica que A tiene un subconjunto simplemente ordenado maximal B. La hipótesis del lema de Zorn nos dice que B tiene una cota superior c en A. Entonces, el elemento c es automáticamente un elemento maximal de A. Ya que si $c \prec d$ para algún d de A, entonces el conjunto $B \cup \{d\}$, que contiene propiamente a B, es simplemente ordenado, pues $b \prec d$ para todo $b \in B$. Este hecho contradice la maximalidad de B.

También es cierto que el principio del máximo es una sencilla consecuencia del lema de Zorn (véanse los Ejercicios 5-7).

Una observación final. Hemos definido lo que queremos decir por un orden parcial estricto en un conjunto, pero no hemos dicho qué es un orden parcial en sí mismo. Sea $\prec$ un orden parcial estricto sobre un conjunto A. Supongamos que definimos $a \preceq b$ si bien $a \prec b$, bien $a = b$. Entonces la relación $\preceq$ se denomina ***orden parcial*** sobre A. Por ejemplo, la relación de inclusión $\subset$ en una familia de conjuntos es un orden parcial, mientras que la inclusión propia es un orden parcial estricto.

Muchos autores prefieren trabajar con órdenes parciales más que con órdenes parciales estrictos; el principio del máximo y el lema de Zorn se expresan con frecuencia en esos términos. La formulación que se utilice es simplemente una cuestión de gusto y conveniencia.

Ejercicios

1. Si a y b son números reales, definimos $a \prec b$ si $b - a$ es positivo y racional. Demuestre que éste es un orden parcial estricto sobre $\mathbb{R}$. ¿Cuáles son los subconjuntos simplemente ordenados maximales?

2. (a) Sea $\prec$ un orden parcial estricto sobre el conjunto A. Definimos una relación en A mediante $a \preceq b$ si bien $a \prec b$, bien $a = b$. Demuestre que esta relación tiene las siguientes propiedades, que se denominan ***axiomas del orden parcial***:

(i) $a \preceq a$ para todo $a \in A$.
(ii) $a \preceq b$ y $b \preceq a \Rightarrow a = b$.
(iii) $a \preceq b$ y $b \preceq c \Rightarrow a \preceq c$.

(b) Sea P una relación sobre A que verifica las propiedades (i)-(iii). Definimos una relación S en A mediante aSb si aPb y $a \neq b$. Demuestre que S es un orden parcial estricto sobre A.

3. Sean A un conjunto con un orden parcial estricto $\prec$ y $x \in A$. Supongamos que queremos encontrar un subconjunto simplemente ordenado maximal B de A que contiene a x. Una forma plausible de intentar definir B es igualarlo al conjunto de todos los elementos de A que son *comparables* con x:

$$B = \{y \mid y \in A \text{ y bien } x \prec y, \text{ bien } y \prec x\}.$$

Pero esto no siempre funciona. ¿En cuáles de los Ejemplos 1 y 2 tendrá éxito este procedimiento y en cuáles no?

4. Dados dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) de $\mathbb{R}^2$, definimos

$$(x_0, y_0) \prec (x_1, y_1)$$

si $x_0 < x_1$ e $y_0 \leq y_1$. Demuestre que las curvas $y = x^3$ e $y = 2$ son subconjuntos simplemente ordenados maximales de $\mathbb{R}^2$, y que la curva $y = x^2$ no lo es. Encuentre todos los subconjuntos simplemente ordenados maximales.

5. Demuestre que el lema de Zorn implica lo siguiente:
Lema (Kuratowski). Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos. Supongamos que para toda subfamilia $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ que esté simplemente ordenada por la inclusión propia, la unión de los elementos de $\mathcal{B}$ pertenece a $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A}$ tiene un elemento que no está contenido propiamente en ningún otro elemento de $\mathcal{A}$.

6. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto X se dice *de tipo finito* si se cumple que un subconjunto B de X pertenece a $\mathcal{A}$ si, y sólo si, todo subconjunto finito de B pertenece a $\mathcal{A}$. Demuestre que el lema de Kuratowski implica lo siguiente:
Lema (Tukey, 1940). Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos. Si $\mathcal{A}$ es de tipo finito, entonces $\mathcal{A}$ tiene un elemento que no está contenido propiamente en ningún otro elemento de $\mathcal{A}$.

7. Demuestre que el lema de Tukey implica el principio del máximo de Hausdorff. [*Indicación*: si $\prec$ es un orden parcial estricto sobre A, sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los subconjuntos de A que están simplemente ordenados por $\prec$. Demuestre que $\mathcal{A}$ es de tipo finito.]

8. Una típica aplicación del lema de Zorn en álgebra es la demostración de que todo espacio vectorial tiene una base. Recordemos que si A es un subconjunto cualquiera de un espacio vectorial V, decimos que un vector pertenece al *subespacio generado* por A si se puede expresar como una combinación lineal finita de elementos de A. El conjunto A es *independiente* si la única combinación lineal finita de elementos de A que es igual al vector cero es la trivial que tiene todos los coeficientes cero. Si A es independiente y todo vector de V pertenece al subespacio generado por A, entonces A es una *base* de V.

(a) Si A es independiente y $v \in V$ no pertenece al subespacio generado por A, demuestre que $A \cup \{v\}$ es independiente.

(b) Demuestre que la familia de todos los conjuntos independientes de V tiene un elemento maximal.

(c) Demuestre que V tiene una base.

*Ejercicios complementarios: el buen orden

En los siguientes ejercicios se debe demostrar la equivalencia entre el axioma de elección, el teorema del buen orden y el principio del máximo. De estos ejercicios, sólo el Ejercicio 7 utiliza el axioma de elección.

1. *Teorema (Principio general de definición recursiva). Sean J un conjunto bien ordenado y C un conjunto. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones que aplican secciones de J en C. Dada una función $\rho : \mathcal{F} \to C$, existe una única función $h : J \to C$ tal que $h(\alpha) = \rho(h \mid S_\alpha)$ para cada $\alpha \in J$.*
[*Indicación*: siga el modelo esbozado en el Ejercicio 10 de §10.]

2. (a) Sean J y E conjuntos bien ordenados y $h : J \to E$. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) h preserva el orden y su imagen es E o una sección de E.

(ii) $h(\alpha) =$ mínimo $[E - h(S_\alpha)]$ para todo α.

[*Indicación*: demuestre que cada una de estas condiciones implica que $h(S_\alpha)$ es una sección de E; concluya que debe ser la sección por $h(\alpha)$.]

(b) Si E es un conjunto bien ordenado, demuestre que ninguna sección de E tiene el tipo de orden de E, ni dos secciones diferentes de E tienen el mismo tipo de orden. [*Indicación*: dado J, existe a lo sumo una aplicación que preserva el orden de J en E cuya imagen es E o una sección de E.]

3. Sean J y E conjuntos bien ordenados y supongamos que existe una aplicación que preserva el orden $k : J \to E$. Utilizando los ejercicios 1 y 2, demuestre que J tiene el tipo de orden de E o de una sección de E. [*Indicación*: elija $e_0 \in E$. Defina $h : J \to E$ mediante la fórmula de recursión

$$h(\alpha) = \text{ mínimo } [E - h(S_\alpha)] \quad \text{si } h(S_\alpha) \neq E$$

y $h(\alpha) = e_0$ en caso contrario. Demuestre que $h(\alpha) \leq k(\alpha)$ para todo α; concluya que $h(S_\alpha) \neq E$ para todo α.]

4. Utilice los Ejercicios 1–3 para demostrar lo siguiente:

(a) Si A y B son conjuntos bien ordenados, entonces se verifica exactamente una de las siguientes tres condiciones: A y B tienen el mismo tipo de orden, o A tiene el tipo de orden de una sección de B, o B tiene el tipo de orden de una sección de A. [*Indicación*: obtenga un conjunto bien ordenado que contenga a A y a B, como en el Ejercicio 8 de §10; entonces aplique el ejercicio anterior.]

(b) Supongamos que A y B son conjuntos bien ordenados no numerables, tales que toda sección de A y de B es numerable. Demuestre que A y B tienen el mismo tipo de orden.

5. Sean X un conjunto y $\mathcal{A}$ la familia de todos los pares $(A, <)$, donde A es un subconjunto de X y $<$ es un buen orden de A. Definimos

$$(A, <) \prec (A', <')$$

si $(A, <)$ *es igual* a una sección de $(A', <')$.

(a) Demuestre que $\prec$ es un orden parcial estricto sobre $\mathcal{A}$.

(b) Sea $\mathcal{B}$ una subfamilia de $\mathcal{A}$ simplemente ordenada por $\prec$. Definimos B' como la unión de los conjuntos B, para todo $(B, <) \in \mathcal{B}$; y definimos $<'$ como la unión de las relaciones $<$, para todo $(B, <) \in \mathcal{B}$. Demuestre que $(B', <')$ es un conjunto bien ordenado.

6. Utilice los Ejercicios 1–5 para demostrar lo siguiente:
Teorema. El principio del máximo es equivalente al teorema del buen orden.

7. Utilice los Ejercicios 1–5 para demostrar lo siguiente:
Teorema. El axioma de elección es equivalente al teorema del buen orden.
Demostración. Sean X un conjunto y c una función de elección fijada para los subconjuntos no vacíos de X. Si T es un subconjunto de X y $<$ es una relación sobre T, decimos que $(T, <)$ es una ***torre*** en X si $<$ es un buen orden de T y si para cada $x \in T$,

$$x = c(X - S_x(T))$$

donde $S_x(T)$ es la sección de T por x.

(a) Sean $(T_1, <_1)$ y $(T_2, <_2)$ dos torres en X. Demuestre que estos dos conjuntos ordenados son el mismo o uno es igual a una sección del otro. [*Indicación*: permutando los índices si es necesario, podemos suponer que $h : T_1 \to T_2$ preserva el orden y $h(T_1)$ es igual a T_2 o a una sección de T_2. Utilice el Ejercicio 2 para demostrar que $h(x) = x$ para todo x.]

(b) Si $(T, <)$ es una torre en X y $T \neq X$, demuestre que existe una torre en X de la cual $(T, <)$ es una sección.

(c) Sea $\{(T_k, <_k) \mid k \in K\}$ la familia de todas las torres de X. Sean

$$T = \bigcup_{k \in K} T_k \qquad \text{y} \qquad <= \bigcup_{k \in K} (<_k).$$

Demuestre que $(T, <)$ es una torre en X. Concluya que $T = X$.

8. Utilizando los Ejercicios 1–4, construya un conjunto bien ordenado no numerable, como sigue. Sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los pares $(A, <)$, donde A es un subconjunto de $\mathbb{Z}_+$ y $<$ es un buen orden de A (se permite que A sea vacío). Definimos $(A, <) \sim (A', <')$ si $(A, <)$ y $(A', <')$ tienen el mismo tipo de orden. Es trivial demostrar que ésta es una relación de equivalencia. Si $[(A, <)]$ es la clase de equivalencia de $(A, <)$, representamos por E la familia de todas estas clases de equivalencia. Definimos

$$[(A, <)] \ll [(A', <')]$$

si $(A, <)$ tiene el tipo de orden de una *sección* de $(A', <')$.

(a) Demuestre que la relación $\ll$ está bien definida y es un orden simple sobre E. Obsérvese que la clase de equivalencia $[(\varnothing, \varnothing)]$ es el mínimo de E.

(b) Demuestre que si $\alpha = [(A, <)]$ es un elemento de E, entonces $(A, <)$ tiene el mismo tipo de orden que la sección $S_\alpha(E)$ de E por α. [*Indicación*: defina una aplicación $f : A \to E$ mediante $f(x) = [(S_x(A),$ restricción de $<)]$ para cada $x \in A$.]

(c) Concluya que E está bien ordenado por la relación $\ll$.

(d) Demuestre que E es no numerable. [*Indicación*: si $h : E \to \mathbb{Z}_+$ es una biyección, entonces h da lugar a un buen orden de $\mathbb{Z}_+$.]

Este mismo argumento, cambiando $\mathbb{Z}_+$ por un conjunto bien ordenado arbitrario X, demuestra (sin utilizar el axioma de elección) la existencia de un conjunto bien ordenado E cuyo cardinal es mayor que el de X.

Este ejercicio demuestra que es posible construir un conjunto bien ordenado no numerable,y por tanto el conjunto bien ordenado no numerable minimal, mediante una construcción explícita que no utiliza el axioma de elección. Sin embargo, este resultado es menos interesante de lo que podría parecer. La propiedad fundamental de S_Ω, la que utilizamos continuamente, es el hecho de que todo subconjunto numerable de S_Ω tiene una cota superior en S_Ω. Ese hecho depende, a su vez, del hecho de que una unión numerable de conjuntos numerables es numerable. Y la demostración de *ese* resultado (si se examina cuidadosamente) implica un número infinito de elecciones arbitrarias —esto es, depende del axioma de elección.

Dicho de otro modo, sin el axioma de elección podemos construir el conjunto bien ordenado no numerable minimal, pero no podemos utilizarlo para nada.

Capítulo 2

Espacios topológicos y funciones continuas

El concepto de espacio topológico se extiende más allá del estudio de la recta real y del espacio euclídeo, y del estudio de las funciones continuas sobre estos espacios. En este capítulo definimos lo que es un espacio topológico y estudiaremos algunos caminos para construir una topología sobre un conjunto, para convertirlo en un espacio topológico. También consideraremos algunos de los conceptos elementales que tienen que ver con espacios topológicos. Conjuntos abiertos y cerrados, puntos límite y funciones continuas se introducen como generalizaciones naturales de las correspondientes ideas para la recta real y el espacio euclídeo.

§12 Espacios topológicos

La definición de espacio topológico, que ahora mismo está estandarizada, tardó mucho tiempo en ser formulada. Varios matemáticos —Fréchet, Hausdorff y otros— propusieron distintas definiciones a lo largo de muchos años en las primeras décadas del siglo veinte, pero fue bastante más tarde cuando los matemáticos establecieron la definición que parecía más apropiada. Querían, por supuesto, una definición que fuera lo más general posible, de manera que incluyera como casos especiales todos los distintos ejemplos que eran útiles en matemáticas —espacio euclídeo, espacio euclídeo de dimensión infinita y espacios de funciones, entre ellos— pero también querían que la definición fuese lo suficientemente estricta para que los teoremas habituales sobre estos espacios familiares se adaptaran a espacios topológicos en general. Éste es siempre el problema cuando uno está intentando formular un nuevo concepto matemático, decidir lo general que podría ser su definición. La definición finalmente adoptada puede parecer un poco abstracta, pero a medida en que se trabaje con las

distintas formas de construir espacios topológicos, se tendrá una mejor impresión de lo que el concepto significa.

Definición. Una ***topología*** sobre un conjunto X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

(1) $\varnothing$ y X están en $\mathcal{T}$.

(2) La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

(3) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

Un conjunto X para el que se ha definido una topología $\mathcal{T}$ se llama ***espacio topológico***.

Hablando con propiedad, un espacio topológico es un par ordenado $(X, \mathcal{T})$, formado por un conjunto X y una topología $\mathcal{T}$ sobre X, pero a menudo omitiremos hacer mención específica de $\mathcal{T}$ si no existe confusión.

Si X es un espacio topológico con una topología $\mathcal{T}$, diremos que un subconjunto U de X es un ***conjunto abierto*** de X si U pertenece a la colección $\mathcal{T}$. Usando esta terminología, se puede decir que un espacio topológico es un conjunto X junto a una colección de subconjuntos de X, llamados *conjuntos abiertos*, tales que $\varnothing$ y X son ambos abiertos, y tal que las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de conjuntos abiertos son abiertos.

EJEMPLO 1. Sea X un conjunto de tres elementos, $X = \{a, b, c\}$. Hay muchas topologías posibles sobre X, algunas de las cuales se indican esquemáticamente en la Figura 12.1. El diagrama de la esquina superior derecha representa la topología en la que los conjuntos abiertos son $X, \varnothing, \{a, b\}, \{b\}$ y $\{b, c\}$. La topología de la esquina superior izquierda contiene sólo a X y $\varnothing$, mientras que la topología de la esquina inferior derecha contiene cada uno de los subconjuntos de X. Se pueden obtener otras topologías sobre X permutando a, b y c.

A partir de este ejemplo, se puede ver que incluso un conjunto de tres elementos tiene muchas topologías distintas. Pero no toda colección de subconjuntos de X es una topología sobre X. Ninguna de las colecciones indicadas en la Figura 12.2 es una topología, por ejemplo.

EJEMPLO 2. Si X es un conjunto cualquiera, la colección de *todos* los subconjuntos de X es una topología sobre X y se denomina ***topología discreta***. La colección compuesta únicamente por X y $\varnothing$ es también una topología sobre X y la llamaremos ***topología indiscreta***, o ***topología trivial***.

EJEMPLO 3. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{T}_f$ la colección de todos los subconjuntos U de X tales que $X - U$ es finito o es todo X. Entonces $\mathcal{T}_f$ es una topología sobre X, llamada ***topología de los complementos finitos***. Tanto X como $\varnothing$ están dentro de $\mathcal{T}_f$, puesto que

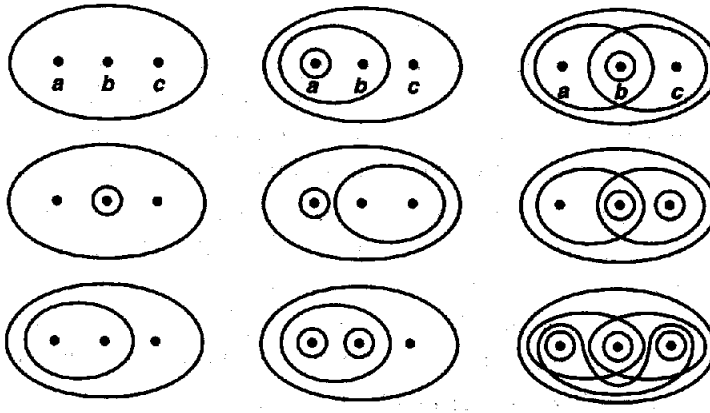


Figura 12.1

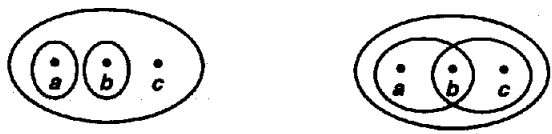


Figura 12.2

$X - X$ es finito y $X - \varnothing$ es todo X. Si $\{U_\alpha\}$ es una familia indexada de elementos no vacíos de $\mathcal{T}_f$, para mostrar que $\bigcup U_\alpha$ pertenece a $\mathcal{T}_f$, tenemos

$$X - \bigcup U_\alpha = \bigcap (X - U_\alpha).$$

El último conjunto es finito, puesto que cada conjunto $X - U_\alpha$ es finito. Si $U_1, \ldots, U_n$ son elementos no vacíos de $\mathcal{T}_f$, para mostrar que $\bigcap U_i$ está en $\mathcal{T}_f$, tenemos

$$X - \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X - U_i).$$

Este último conjunto es una unión finita de conjuntos finitos y es, por tanto, finito.

EJEMPLO 4. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{T}_c$ la colección de todos los subconjuntos U de X tales que $X - U$ es numerable o todo X. Entonces $\mathcal{T}_c$ es una topología sobre X, como se puede comprobar.

Definición. Supongamos que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son dos topologías sobre un conjunto dado X. Si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, diremos que $\mathcal{T}'$ es ***más fina*** que $\mathcal{T}$; si $\mathcal{T}'$ contiene *propiamente* a $\mathcal{T}$, diremos que $\mathcal{T}'$ es ***estrictamente más fina*** que $\mathcal{T}$. También diremos que $\mathcal{T}$ es ***más gruesa*** que $\mathcal{T}'$, o ***estrictamente más gruesa***, en ambas situaciones. Diremos que $\mathcal{T}$ es ***comparable*** con $\mathcal{T}'$ si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ ó $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$.

Esta terminología surge al pensar en un espacio topológico como si fuera un camión lleno de gravilla —siendo las pequeñas piedras y todas las uniones de colecciones de las mismas los conjuntos abiertos—. Si ahora rompemos las piedras para dar lugar a otras aún más pequeñas, la colección de conjuntos abiertos se ha ampliado, y la topología, como la grava, se dice que se ha hecho más fina mediante esta operación.

Dos topologías sobre X, por supuesto, no son necesariamente comparables. En la Figura 12.1 anterior, la topología de la esquina superior derecha es estrictamente más fina que cada una de las tres topologías de la primera columna y, a su vez, estrictamente más gruesa que cada una de las otras topologías de la tercera columna. Pero no es comparable con cualquiera de las topologías de la segunda columna.

Algunas veces se utiliza otra terminología para este concepto. Si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, algunos matemáticos dirían que $\mathcal{T}'$ es ***más grande*** que $\mathcal{T}$, y $\mathcal{T}$ es ***más pequeña*** que $\mathcal{T}'$. Esta es una terminología ciertamente aceptable, si bien no son tan gráficas como las palabras "más fina" y "más gruesa".

Muchos matemáticos utilizan las palabras "más débil" y "más fuerte" en este contexto. Desgraciadamente, algunos de ellos (particularmente analistas) tienen tendencia a decir que $\mathcal{T}'$ es más fuerte que $\mathcal{T}$ si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, mientras que otros (particularmente topólogos) tienden a decir que $\mathcal{T}'$ es más débil que $\mathcal{T}$ en la misma situación. Si encuentra los términos "topología fuerte" o "topología débil" en algún libro, tendrá que decidir, a partir del contexto, a qué inclusión se refiere. No utilizaremos estos términos en este libro.

§13 Base de una topología

Para cada uno de los ejemplos de la sección anterior, podemos especificar la topología mediante la descripción de la colección completa $\mathcal{T}$ de conjuntos abiertos. Generalmente, esto es bastante complicado. En la mayoría de los casos, se especifica una colección más pequeña de subconjuntos de X que es capaz de definir dicha topología.

Definición. Si X es un conjunto, una ***base*** para una topología sobre X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X (llamados ***elementos básicos***) tales que:

(1) Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x.

(2) Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2, entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x y tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Si $\mathcal{B}$ satisface estas dos condiciones, se define la ***topología*** $\mathcal{T}$ ***generada por*** $\mathcal{B}$ como sigue: un subconjunto U de X se dice que es abierto en X (esto es, un elemento de $\mathcal{T}$), si para cada $x \in U$, existe un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subset U$. Nótese que cada elemento básico es así mismo un elemento de $\mathcal{T}$.

Comprobaremos brevemente que la colección $\mathcal{T}$ es, efectivamente, una topología sobre X. Pero primero consideraremos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todas las regiones circulares (interiores de círculos) en el plano. Entonces $\mathcal{B}$ satisface ambas condiciones para una base. La segunda condición se ilustra en la Figura 13.1. En la topología generada por $\mathcal{B}$, un subconjunto U del plano es abierto si cada x en U está dentro de alguna región circular contenida en U.

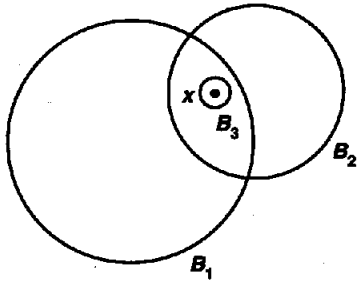


Figura 13.1

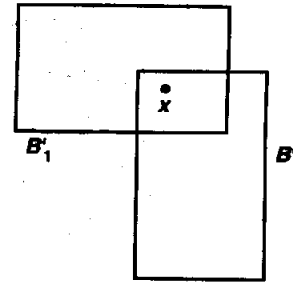


Figura 13.2

EJEMPLO 2. Sea $\mathcal{B}'$ la colección de todas las regiones rectangulares (interiores de rectángulos) en el plano, donde los rectángulos tienen lados paralelos a los ejes de coordenadas. Entonces $\mathcal{B}'$ satisface ambas condiciones para una base. La segunda condición se ilustra en la Figura 13.2; en este caso, la condición es trivial, porque la intersección de cualesquiera dos elementos básicos es un elemento básico (o es vacía). Como veremos después, la base $\mathcal{B}'$ genera la misma topología sobre el plano que la base $\mathcal{B}$ dada en el ejemplo anterior.

EJEMPLO 3. Si X es cualquier conjunto, la colección de todos los subconjuntos unipuntuales de X es una base para la topología discreta sobre X.

Comprobemos ahora que la colección $\mathcal{T}$ generada por la base $\mathcal{B}$ es, de hecho, una topología sobre X. Si U es el conjunto vacío, satisface la condición de ser abierto trivialmente. De la misma forma, X está en $\mathcal{T}$, puesto que para cada $x \in X$ existe algún elemento básico B que contiene a x y que está contenido a su vez en X. Tomemos una familia indexada $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de elementos de $\mathcal{T}$ y probemos que

$$U = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$$

pertenece a $\mathcal{T}$. Dado $x \in U$, existe un índice α tal que $x \in U_\alpha$. Puesto que U_α es abierto, existe un elemento básico B tal que $x \in B \subset U_\alpha$. Entonces $x \in B$ y $B \subset U$, por lo que U es abierto, por definición.

Tomemos ahora *dos* elementos U_1 y U_2 de $\mathcal{T}$ y probemos que $U_1 \cap U_2$ pertenece a $\mathcal{T}$. Dado $x \in U_1 \cap U_2$, elegimos un elemento básico B_1 que contenga a x tal

que $B_1 \subset U_1$; elijamos también un elemento básico B_2 que contenga a x tal que $B_2 \subset U_2$. La segunda condición para una base nos permite elegir un elemento básico B_3 que contiene a x tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ (véase la Figura 13.3). Por tanto, $x \in B_3$ y $B_3 \subset U_1 \cap U_2$, por lo que $U_1 \cap U_2$ pertenece a $\mathcal{T}$, por definición.

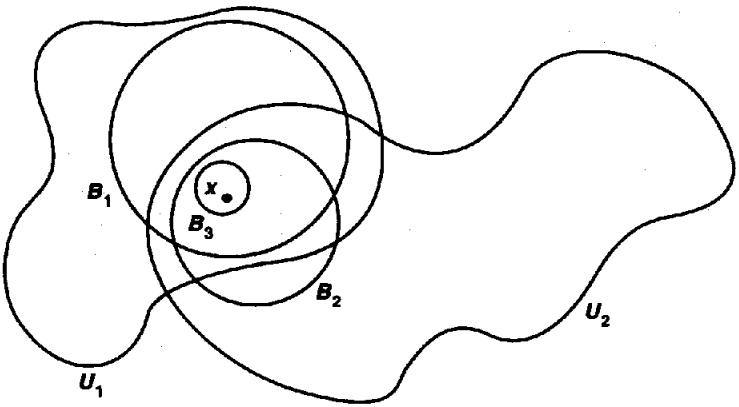


Figura 13.3

Finalmente, mostramos por inducción que cualquier intersección finita $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ de elementos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$. Este hecho es trivial para $n = 1$; supongamos que es cierto para $n - 1$ y probémoslo para n. Tenemos

$$(U_1 \cap \cdots \cap U_n) = (U_1 \cap \cdots \cap U_{n-1}) \cap U_n.$$

Por hipótesis, $U_1 \cap \cdots \cap U_{n-1}$ pertenece a $\mathcal{T}$; utilizando el resultado que acabamos de probar, la intersección de $U_1 \cap \cdots \cap U_{n-1}$ y U_n también pertenece a $\mathcal{T}$. Así hemos comprobado que la colección de conjuntos abiertos generados por una base $\mathcal{B}$ es, en efecto, una topología.

Otro modo para describir la topología generada por una base es la dada por el siguiente lema:

Lema 13.1. *Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ una base para una topología $\mathcal{T}$ sobre X. Entonces $\mathcal{T}$ es igual a la colección de todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$.*

Demostración. Dada una colección de elementos de $\mathcal{B}$, también son elementos de $\mathcal{T}$. Puesto que $\mathcal{T}$ es una topología, la unión de ellos pertenece a $\mathcal{T}$. Recíprocamente, dado $U \in \mathcal{T}$, elijamos para cada $x \in U$ un elemento B_x de $\mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U$. Entonces $U = \bigcup_{x \in U} B_x$, por lo que U es igual a la unión de elementos de $\mathcal{B}$. ■

Este lema establece que cada conjunto abierto U en X se puede expresar como una unión de elementos básicos. Esta expresión para U no es, sin embargo, única.

Así, el uso del término "base" en topología difiere enormemente de su uso en álgebra lineal, donde la ecuación que expresa un vector dado como combinación lineal de los vectores de la base *es* única.

Hemos descrito de dos formas distintas cómo llegar, a partir de una base, a la topología que genera. Algunas veces necesitamos ir en la dirección contraria, desde una topología hasta una base que la genera. Aquí damos un método para obtener una base para una topología dada; lo usaremos frecuentemente.

Lema 13.2. *Sea X un espacio topológico. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una colección de conjuntos abiertos de X tal que, para cada conjunto abierto U de X y cada x en U, existe un elemento C de $\mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset U$. Entonces $\mathcal{C}$ es una base para la topología de X.*

Demostración. Debemos probar que $\mathcal{C}$ es una base. La primera condición para una base es fácil: dado $x \in X$, puesto que X es un conjunto abierto, existe, por hipótesis, un elemento C de $\mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset X$. Para comprobar la segunda condición, sea x un elemento de $C_1 \cap C_2$, donde C_1 y C_2 son elementos de $\mathcal{C}$. Puesto que C_1 y C_2 son abiertos, también lo es $C_1 \cap C_2$. Luego existe, por hipótesis, un elemento C_3 en $\mathcal{C}$ tal que $x \in C_3 \subset C_1 \cap C_2$.

Sea $\mathcal{T}$ la colección de conjuntos abiertos de X; debemos probar que la topología $\mathcal{T}'$ generada por $\mathcal{C}$ coincide con la topología $\mathcal{T}$. En primer lugar, nótese que si U pertenece a $\mathcal{T}$ y si $x \in U$, entonces existe, por hipótesis, un elemento C de $\mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset U$. Se sigue que U pertenece a la topología $\mathcal{T}'$, por definición. Recíprocamente, si W pertenece a la topología $\mathcal{T}'$, entonces W es igual a una unión de elementos de $\mathcal{C}$, por el lema anterior. Ya que cada elemento de $\mathcal{C}$ pertenece a $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}$ es una topología, W también pertenece a $\mathcal{T}$. ■

Cuando se dan topologías a partir de las bases, es útil tener un criterio en términos de las bases para determinar si una topología es más fina que otra. Un criterio semejante es el siguiente:

Lema 13.3. *Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases para las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, respectivamente, sobre X. Entonces son equivalentes:*

(1) *$\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$.*

(2) *Para cada $x \in X$ y cada elemento básico $B \in \mathcal{B}$ que contiene a x, existe un elemento básico $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset \mathcal{B}$.*

Demostración. (2) $\Rightarrow$ (1). Dado un elemento U de $\mathcal{T}$, queremos probar que $U \in \mathcal{T}'$. Sea $x \in U$. Puesto que $\mathcal{B}$ genera a $\mathcal{T}$, existe un elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$. La condición (2) nos dice que existe un elemento $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$. Entonces $x \in B' \subset U$, por lo que $U \in \mathcal{T}'$, por definición.

(1) $\Rightarrow$ (2). Tenemos $x \in X$ y $B \in \mathcal{B}$, con $x \in B$. Ahora bien, B pertenece a $\mathcal{T}$ por definición, y $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ por la condición (1), luego $B \in \mathcal{T}'$. Puesto que $\mathcal{T}'$ está generada por $\mathcal{B}'$, existe un elemento $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$. ■

Algunos estudiantes encuentran esta condición difícil de recordar. "¿En qué sentido *va* la inclusión?", preguntan. Puede ser más fácil de recordar si se tiene presente la analogía entre un espacio topológico y un camión lleno de gravilla. Piense en las pequeñas piedras como los elementos básicos de la topología; después de que se reduzcan hasta polvo, las partículas de polvo son los elementos básicos de la nueva topología. La nueva topología es más fina que la anterior, y cada partícula de polvo estaba contenida en una piedra, como expone el criterio.

EJEMPLO 4. Ahora se puede ver que la colección $\mathcal{B}$ de todas las regiones circulares en el plano va a generar la misma topología que la colección $\mathcal{B}'$ de todas las regiones rectangulares; la Figura 13.4 ilustra la demostración. Trataremos este ejemplo de una manera más formal cuando estudiemos espacios métricos.

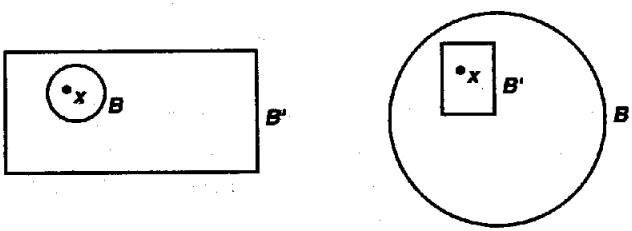


Figura 13.4

Definimos, a continuación, tres topologías sobre la recta real $\mathbb{R}$, todas ellas interesantes.

Definición. Si $\mathcal{B}$ es la colección de todos los intervalos abiertos en la recta real,

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$

la topología generada por $\mathcal{B}$ se denomina ***topología usual*** sobre la recta real. Siempre que estudiemos $\mathbb{R}$ supondremos que viene con esta topología, a menos que digamos lo contrario. Si $\mathcal{B}'$ es la colección de todos los intervalos semiabiertos del tipo

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

donde $a < b$, la topología generada por $\mathcal{B}'$ se llama ***topología del límite inferior*** sobre $\mathbb{R}$. Cuando $\mathbb{R}$ esté dotada de la topología del límite inferior, lo denotaremos por $\mathbb{R}_\ell$. Finalmente, sea K el conjunto de todos los números de la forma $1/n$, para $n \in \mathbb{Z}_+$, y sea $\mathcal{B}''$ la colección de todos los intervalos abiertos (a, b), junto con todos

los conjuntos de la forma $(a, b) - K$. La topología generada por $\mathcal{B}''$ se llamará la ***K-topología*** sobre $\mathbb{R}$. Cuando $\mathbb{R}$ esté dotada de esta topología, lo denotaremos como $\mathbb{R}_K$.

Es fácil ver que esas tres colecciones son bases; en cada caso, la intersección de dos elementos básicos es bien otro elemento básico, bien vacía. La relación entre estas topologías es la siguiente:

Lema 13.4. *Las topologías de $\mathbb{R}_\ell$ y $\mathbb{R}_K$ son estrictamente más finas que la topología usual sobre $\mathbb{R}$, pero no son comparables entre sí.*

Demostración. Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}''$ las topologías de $\mathbb{R}, \mathbb{R}_\ell$ y $\mathbb{R}_K$, respectivamente. Dado un elemento (a, b) básico para $\mathcal{T}$ y un punto x de (a, b), el elemento $[x, b)$ básico para $\mathcal{T}'$ contiene a x y está en (a, b). Por otro lado, dado un nuevo elemento $[x, d)$ básico para $\mathcal{T}'$, no existe intervalo abierto alguno (a, b) que contenga a x y esté dentro de $[x, d)$. Así $\mathcal{T}'$ es estrictamente más fina que $\mathcal{T}$.

Un argumento similar es aplicable a $\mathbb{R}_K$. Dado un elemento básico (a, b) para $\mathcal{T}$ y un punto x de (a, b), este mismo intervalo es un elemento básico para $\mathcal{T}'$ que contiene a x. Recíprocamente, dado el elemento $B = (-1, 1) - K$ básico para $\mathcal{T}''$ y el punto 0 de B, no existe intervalo abierto alguno que contenga a 0 y esté dentro de B.

Queda para el lector probar que las topologías $\mathbb{R}_\ell$ y $\mathbb{R}_K$ no son comparables.

■

En este punto puede surgir una pregunta. Puesto que la topología generada por una base $\mathcal{B}$ puede ser descrita como la colección de uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{B}$, ¿qué ocurre si comenzamos con una colección dada de conjuntos y tomamos intersecciones finitas de ellos además de uniones arbitrarias? Esta cuestión nos lleva a la noción de subbase para una topología.

Definición. Una ***subbase*** $\mathcal{S}$ para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a X. La ***topología generada por la subbase*** $\mathcal{S}$ se define como la colección $\mathcal{T}$ de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

Debemos comprobar, por supuesto, que $\mathcal{T}$ es una topología. Para este propósito será suficiente mostrar que la colección $\mathcal{B}$ de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ es una base, y consiguientemente, la colección $\mathcal{T}$ de todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$ será una topología, por el Lema 13.1. Dado $x \in X$, pertenece a un elemento de $\mathcal{S}$, y de aquí a un elemento de $\mathcal{B}$; esta es la primera condición para una base. Para comprobar la segunda condición, sean

$$B_1 = S_1 \cap \cdots \cap S_m \qquad \text{y} \qquad B_2 = S_1' \cap \cdots \cap S_n'$$

dos elementos de $\mathcal{B}$. Su intersección

$$B_1 \cap B_2 = (S_1 \cap \cdots \cap S_m) \cap (S'_1 \cap \cdots \cap S'_n)$$

es también una intersección finita de elementos de $\mathcal{S}$, por lo que pertenece a $\mathcal{B}$.

Ejercicios

1. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Supongamos que para cada $x \in A$ existe un conjunto abierto U que contiene a x tal que $U \subset A$. Pruebe que A es abierto en X.

2. Considere las nueve topologías sobre el conjunto $X = \{a, b, c\}$ indicadas en el Ejemplo 1 de §12. Compárelas, es decir, para cada par de topologías, determine si son comparables, y si lo son, cuál es la más fina.

3. Pruebe que la colección $\mathcal{T}_c$ dada en el Ejemplo 4 de §12 es una topología sobre el conjunto X. ¿Es la colección

$$\mathcal{T}_\infty = \{U \mid X - U \text{ es infinita o vacía o todo } X\}$$

una topología sobre X?

4. (a) Si $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ es una familia de topologías sobre X, pruebe que $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$ es una topología sobre X. ¿Es $\bigcup \mathcal{T}_\alpha$ una topología sobre X?

   (b) Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ una familia de topologías sobre X. Pruebe que existe una única topología sobre X más pequeña entre todas las que contienen a todas las colecciones $\mathcal{T}_\alpha$, y una única topología más grande entre todas las que están contenidas en toda $\mathcal{T}_\alpha$.

   (c) Si $X = \{a, b, c\}$, sean

$$\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{T}_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}.$$

   Encuentre la topología más pequeña que contenga a $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$, y la topología más grande contenida en $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$.

5. Demuestre que si $\mathcal{A}$ es una base para una topología sobre X, entonces la topología generada por $\mathcal{A}$ es igual a la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a $\mathcal{A}$. Pruebe lo mismo si $\mathcal{A}$ es una subbase.

6. Pruebe que las topologías de $\mathbb{R}_\ell$ y $\mathbb{R}_K$ no son comparables.

7. Considere las siguientes topologías sobre $\mathbb{R}$:

$\mathcal{T}_1$ = la topología usual,

$\mathcal{T}_2$ = la topología de $\mathbb{R}_K$,

$\mathcal{T}_3$ = la topología de los complementos finitos,

$\mathcal{T}_4$ = la topología del límite superior, con todos los conjuntos $(a, b]$ como base,

$\mathcal{T}_5$ = la topología con todos los conjuntos $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$ como base.

Determine las posibles relaciones de inclusión entre estas topologías.

8. (a) Aplique el Lema 13.2 para ver que la colección numerable

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a < b,\ a \text{ y } b \text{ racionales}\}$$

es una base que genera la topología usual sobre $\mathbb{R}$.

(b) Demuestre que la colección

$$\mathcal{C} = \{[a, b) \mid a < b,\ a \text{ y } b \text{ racionales}\}$$

es una base que genera una topología distinta de la topología del límite inferior sobre $\mathbb{R}$.

§14 La topología del orden

Si X es un conjunto simplemente ordenado, existe una topología obvia para X, definida usando la relación de orden. Se llama *topología del orden*; en esta sección la analizaremos y estudiaremos algunas de sus propiedades.

Supongamos que X es un conjunto con una relación de orden simple $<$. Dados los elementos a y b, hay cuatro subconjuntos de X que se llaman ***intervalos*** determinados por a y b. Son los siguientes:

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \mid a < x < b\},\\
(a, b] &= \{x \mid a < x \leq b\},\\
[a, b) &= \{x \mid a \leq x < b\},\\
[a, b] &= \{x \mid a \leq x \leq b\}.
\end{aligned}$$

La notación usada aquí ya es familiar cuando X es la recta real, pero estos son intervalos en un conjunto ordenado cualquiera. Un conjunto del primer tipo se denomina ***intervalo abierto*** en X, un conjunto del último tipo se denomina ***intervalo cerrado*** en X, y conjuntos del segundo y tercer tipos se denominan ***intervalos semiabiertos***. El uso del término "abierto" en esta relación sugiere que los intervalos

abiertos en X deberían convertirse en conjuntos abiertos cuando introduzcamos una topología sobre X. Y así serán.

Definición. Sea X un conjunto, con más de un elemento, con una relación de orden simple. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los conjuntos de los siguientes tipos:

(1) Todos los intervalos abiertos (a, b) en X.

(2) Todos los intervalos de la forma $[a_0, b)$, donde a_0 es el mínimo (si lo hay) de X.

(3) Todos los intervalos de la forma $(a, b_0]$, donde b_0 es el máximo (si lo hay) de X.

La colección $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre X, que se llama ***topología del orden***.

Si X no tiene elemento mínimo, no existen conjuntos de tipo (2), y si X no tiene elemento máximo, no existen conjuntos de tipo (3).

Hay que comprobar que $\mathcal{B}$ satisface los requisitos para una base. En primer lugar, nótese que cada elemento x de X está dentro de, al menos, un elemento de $\mathcal{B}$: el elemento mínimo (de haberlo) pertenece a todos los conjuntos de tipo (2), el elemento máximo (si lo hay) pertenece a todos los conjuntos de tipo (3), y cada uno de los otros elementos pertenece a un conjunto de tipo (1). En segundo lugar, la intersección de cualesquiera dos conjuntos de los tipos anteriores es, de nuevo, un conjunto de uno de estos tipos o es vacío. Varios casos deben ser comprobados, tarea que se deja para el lector.

EJEMPLO 1. La topología usual sobre $\mathbb{R}$, como se definió en la sección anterior, es efectivamente la topología del orden derivada del orden usual en $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 2. Consideremos el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con el orden del diccionario; denotaremos a los elementos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, en general, por $x \times y$, para evitar problemas con la notación. El conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ no tiene ni elemento máximo, ni mínimo, por lo que la topología del orden sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tiene como base la colección de todos los intervalos abiertos de la forma $(a \times b, c \times d)$ para $a < c$, y para $a = c$ y $b < d$. Estos dos tipos de intervalos se indican en la Figura 14.1. La subcolección formada únicamente por intervalos del segundo tipo es también una base para la topología del orden sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, como se puede comprobar.

EJEMPLO 3. Los enteros positivos $\mathbb{Z}_+$ forman un conjunto ordenado con un elemento mínimo. La topología del orden sobre $\mathbb{Z}_+$ es la topología discreta, en la que cada conjunto unipuntual es abierto: si $n > 1$, entonces el conjunto unipuntual $\{n\} = (n-1, n+1)$ es un elemento básico y si $n = 1$, el conjunto unipuntual $\{1\} = [1, 2)$ es un elemento básico.

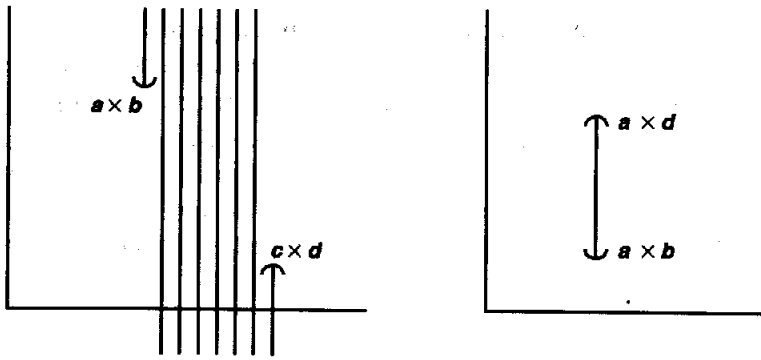


Figura 14.1

EJEMPLO 4. El conjunto $X = \{1, 2\} \times \mathbb{Z}_+$ con el orden del diccionario es otro ejemplo de un conjunto ordenado con un elemento mínimo. Denotando $1 \times n$ por a_n y $2 \times n$ por b_n, podemos representar X mediante

$$a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots$$

La topología del orden sobre X *no* es la topología discreta. La mayoría de conjuntos unipuntuales son abiertos, pero existe una excepción —el conjunto unipuntual $\{b_1\}$. Cualquier conjunto abierto que contenga a b_1 debe contener un elemento básico alrededor de b_1 (por definición), y cualquier elemento básico conteniendo a b_1 contiene puntos de la sucesión a_i.

Definición. Si X es un conjunto ordenado y a es un elemento de X, existen cuatro subconjuntos de X que se llaman ***rayos*** determinados por a. Son los siguientes:

$$\begin{aligned}
(a, +\infty) &= \{x \mid x > a\}, \\
(-\infty, a) &= \{x \mid x < a\}, \\
[a, +\infty) &= \{x \mid x \geq a\}, \\
(-\infty, a] &= \{x \mid x \leq a\}.
\end{aligned}$$

Los conjuntos de los dos primeros tipos se denominan ***rayos abiertos*** y los conjuntos de los dos últimos tipos se denominan ***rayos cerrados***.

El uso del término "abierto" sugiere que los rayos abiertos en X sean conjuntos abiertos en la topología del orden. Y así son. Considere, por ejemplo, el rayo $(a, +\infty)$. Si X tiene un elemento máximo b_0, entonces $(a, +\infty)$ es igual al elemento básico $(a, b_0]$. Si X no tiene elemento máximo, entonces $(a, +\infty)$ es igual a la unión de todos los elementos básicos de la forma (a, x), para $x > a$. En otro caso, $(a, +\infty)$ es abierto. Un argumento similar es aplicable al rayo $(-\infty, a)$.

Los rayos abiertos, de hecho, forman una subbase para la topología del orden sobre X, como mostramos ahora. Puesto que los rayos abiertos son abiertos en la topología del orden, la topología que generan está contenida en la topología del orden. Por otro lado, cada elemento básico para la topología del orden es igual a una intersección finita de rayos abiertos; el intervalo (a, b) es igual a la intersección de $(-\infty, b)$ y $(a, +\infty)$, mientras que $[a_0, b)$ y $(a, b_0]$, si existen, son ambos rayos abiertos. De aquí, la topología generada por los rayos abiertos contiene a la topología del orden.

§15 La topología producto sobre $X \times Y$

Si X e Y son espacios topológicos, existe un método natural de definir una topología sobre el producto cartesiano $X \times Y$. Analizaremos esta topología a continuación, y también estudiaremos algunas de sus propiedades.

Definición. *Sean X e Y espacios topológicos. La **topología producto** sobre $X \times Y$ es la topología que tiene como base la colección $\mathcal{B}$ de todos los conjuntos de la forma $U \times V$, donde U es un subconjunto abierto de X y V es un subconjunto abierto de Y.*

Vamos a comprobar que $\mathcal{B}$ es una base. La primera condición es trivial, puesto que $X \times Y$ es ya un elemento básico. La segunda condición es casi igual de obvia, ya que la intersección de cualesquiera dos elementos básicos $U_1 \times V_1$ y $U_2 \times V_2$ es otro elemento básico. Tenemos

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

y el último conjunto es un elemento básico porque $U_1 \cap U_2$ y $V_1 \cap V_2$ son abiertos en X e Y, respectivamente (véase la Figura 15.1).

Obsérvese que la colección $\mathcal{B}$ no es una topología sobre $X \times Y$. La unión de los dos rectángulos dibujados en la Figura 15.1, por ejemplo, no es un producto de dos conjuntos, por lo que no puede pertenecer a $\mathcal{B}$; sin embargo, es abierto en $X \times Y$.

Cada vez que introduzcamos un nuevo concepto intentaremos relacionarlo con las nociones previamente vistas. En el caso actual, preguntamos: ¿qué se puede decir si las topologías sobre X e Y están dadas mediante bases? La respuesta es la que sigue:

Teorema 15.1. *Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X y $\mathcal{C}$ es una base para la topología de Y, entonces la colección*

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B} \text{ y } C \in \mathcal{C}\}$$

es una base para la topología sobre $X \times Y$.

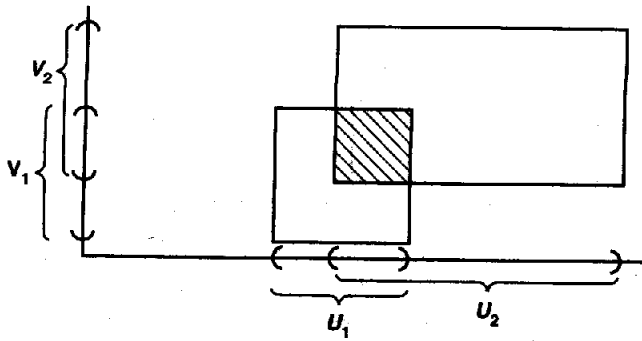


Figura 15.1

Demostración. Utilizamos el Lema 13.2. Dado un conjunto abierto W de $X \times Y$ y un punto $x \times y$ de W, por definición de la topología producto existe un elemento $U \times V$ básico tal que $x \times y \in U \times V \subset W$. Puesto que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases para X e Y, respectivamente, podemos elegir un elemento B de $\mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$, y un elemento C de $\mathcal{C}$ tal que $y \in C \subset V$. Por tanto, $x \times y \in B \times C \subset W$. Así la colección $\mathcal{D}$ cumple el criterio del Lema 13.2, por lo que $\mathcal{D}$ es una base para $X \times Y$. ■

EJEMPLO 1. La topología del orden es la topología usual de $\mathbb{R}$. El producto de esta topología consigo misma se denomina ***topología usual*** de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Tiene como base la colección de todos los productos de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, pero el teorema que acabamos de probar nos dice que la colección mucho más pequeña de todos los productos $(a, b) \times (c, d)$ de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ también sirve como base para la topología de $\mathbb{R}^2$. Cada conjunto de este tipo se puede dibujar como el interior de un rectángulo en $\mathbb{R}^2$. Así la topología usual de $\mathbb{R}^2$ es justo la que consideramos en el Ejemplo 2 de §13.

Algunas veces es útil expresar la topología producto en términos de una subbase. Para hacer esto, primero definimos ciertas funciones llamadas proyecciones.

Definición. Sean $\pi_1 : X \times Y \to X$ definida por

$$\pi_1(x, y) = x$$

y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ definida por

$$\pi_2(x, y) = y.$$

Las aplicaciones π_1 y π_2 se denominan ***proyecciones*** de $X \times Y$ sobre su primer y segundo factor, respectivamente.

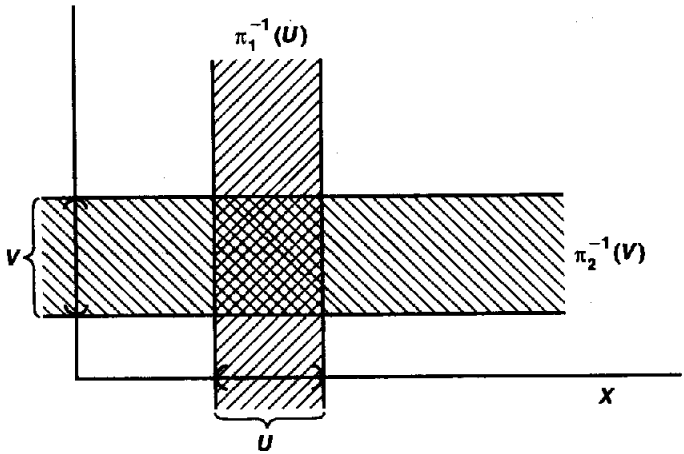


Figura 15.2

Usamos la palabra "sobre" porque π_1 y π_2 son sobreyectivas (a menos que uno de los espacios X o Y sea vacío, en cuyo caso $X \times Y$ sería vacío y, por tanto, no tendría sentido hablar de ello).

Si U es un subconjunto abierto de X, el conjunto $\pi_1^{-1}(U)$ es, precisamente, el conjunto $U \times Y$, que es abierto en $X \times Y$. De modo similar, si V es abierto en Y, ocurre que

$$\pi_2^{-1}(V) = X \times V$$

que también es abierto en $X \times Y$. La intersección de estos dos conjuntos es el conjunto $U \times V$, como se indica en la Figura 15.2. Este hecho nos lleva a enunciar el siguiente teorema:

Teorema 15.2. *La colección*

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) \mid U \text{ es abierto en } X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) \mid V \text{ es abierto en } Y\}$$

es una subbase para la topología producto sobre $X \times Y$.

Demostración. Sean $\mathcal{T}$ la topología producto sobre $X \times Y$ y $\mathcal{T}'$ la topología generada por $\mathcal{S}$. Puesto que cada elemento de $\mathcal{S}$ pertenece a $\mathcal{T}$, también pertenecen las uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$. Así $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Por otro lado, cada elemento básico $U \times V$ para la topología $\mathcal{T}$ es una intersección finita de elementos de $\mathcal{S}$, puesto que

$$U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V).$$

Por lo tanto, $U \times V$ pertenece a $\mathcal{T}'$, y así $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. ■

§16 La topología de subespacio

Definición. Sea X un espacio topológico con topología $\mathcal{T}$. Si Y es un subconjunto de X, la colección

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$$

es una topología sobre Y, denominada ***topología de subespacio*** o ***topología relativa***. Con esta topología, Y se denomina ***subespacio*** de X; sus conjuntos abiertos son todas las intersecciones de conjuntos abiertos de X con Y.

Es fácil ver que $\mathcal{T}_Y$ es una topología. Contiene a $\varnothing$ e Y, porque

$$\varnothing = Y \cap \varnothing \qquad \text{e} \qquad Y = Y \cap X$$

donde $\varnothing$ y X son elementos de $\mathcal{T}$. El hecho de que seà cerrado para intersecciones finitas y uniones arbitrarias se deduce de las ecuaciones

$$\begin{aligned}(U_1 \cap Y) \cap \cdots \cap (U_n \cap Y) &= (U_1 \cap \cdots \cap U_n) \cap Y,\\ \bigcup_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap Y) &= (\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha) \cap Y.\end{aligned}$$

Lema 16.1. *Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X, entonces la colección*

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

es una base para la topología de subespacio sobre Y.

Demostración. Dados un abierto U en X y un punto $y \in U \cap Y$, podemos elegir un elemento B en $\mathcal{B}$ tal que $y \in B \subset U$. Entonces $y \in B \cap Y \subset U \cap Y$. Se sigue del Lema 13.2 que $\mathcal{B}_Y$ es una base para la topología de subespacio sobre Y. ■

Cuando trabajamos con un espacio X y un subespacio Y, se necesita ser cuidadoso al utilizar el término "conjunto abierto". ¿Estamos hablando de un elemento de la topología de Y o de un elemento de la topología de X? Daremos la siguiente definición: si Y es un subespacio de X, diremos que un conjunto U es ***abierto en Y*** (o abierto *relativo a* Y) si pertenece a la topología de Y; esto implica, en particular, que es un subconjunto de Y. Diremos que U es ***abierto en X*** si pertenece a la topología de X.

Se puede dar el caso especial en el que cada conjunto abierto en Y también es abierto en X:

Lema 16.2. *Sea Y un subespacio de X. Si U es abierto en Y e Y es abierto en X, entonces U es abierto en X.*

Demostración. Puesto que U es abierto en Y, $U = Y \cap V$ para algún conjunto V abierto en X. Como Y y V son ambos abiertos en X, también lo es $Y \cap V$. ■

Ahora estudiaremos la relación entre la topología de subespacio y las topologías del orden y producto. Para las topologías producto el resultado es el que uno puede esperar; no así para las topologías del orden.

Teorema 16.3. *Si A es un subespacio de X y B es un subespacio de Y, entonces la topología producto sobre $A \times B$ coincide con la topología que $A \times B$ hereda como subespacio de $X \times Y$.*

Demostración. El conjunto $U \times V$ es el elemento básico genérico de $X \times Y$, donde U es abierto en X y V es abierto en Y. Por tanto, $(U \times V) \cap (A \times B)$ es el elemento básico genérico para la topología de subespacio sobre $A \times B$. Ahora bien,

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B).$$

Puesto que $U \cap A$ y $V \cap B$ es la forma general para los conjuntos abiertos para las topologías de subespacio sobre A y B, respectivamente, el conjunto $(U \cap A) \times (V \cap B)$ es el elemento básico genérico para la topología producto sobre $A \times B$.

La conclusión que obtenemos es que las bases para la topología de subespacio sobre $A \times B$ y para la topología producto sobre $A \times B$ son idénticas. De aquí que las topologías sean la misma. ■

Ahora sea X un conjunto ordenado con la topología del orden, y sea Y un subconjunto de X. La relación de orden sobre X, cuando se restringe a Y, convierte a Y en un conjunto ordenado. Sin embargo, *la topología del orden resultante sobre Y no necesita ser la misma que la topología que Y hereda como subespacio de X*. Damos un ejemplo donde las topologías del orden y de subespacio sobre Y coinciden y dos ejemplos donde ocurre lo contrario.

EJEMPLO 1. Consideremos el subconjunto $Y = [0, 1]$ de la recta real $\mathbb{R}$, en la topología *de subespacio*. La topología de subespacio tiene como base todos los conjuntos de la forma $(a, b) \cap Y$, donde (a, b) es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Tal conjunto es de uno de los siguientes tipos:

$$(a, b) \cap Y = \begin{cases} (a, b) & \text{si } a \text{ y } b \text{ están en } Y \\ [0, b) & \text{si solamente } b \text{ está en } Y \\ (a, 1] & \text{si solamente } a \text{ está en } Y \\ Y \text{ ó } \varnothing & \text{si ni } a \text{ ni } b \text{ están en } Y. \end{cases}$$

Por definición, cada uno de estos conjuntos es abierto en Y. Pero los conjuntos del segundo y tercer tipos no son abiertos en el espacio más grande $\mathbb{R}$.

Nótese que esos conjuntos forman una base para la topología *del orden* sobre Y. Así, vemos que en el caso del conjunto $Y = [0, 1]$, su topología de subespacio (como subespacio de $\mathbb{R}$) y su topología del orden son la misma.

EJEMPLO 2. Sea Y el subconjunto $[0, 1) \cup \{2\}$ de $\mathbb{R}$. En la topología de subespacio sobre Y, el conjunto unipuntual $\{2\}$ es abierto, porque es la intersección del conjunto abierto $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ con Y. Pero en la topología del orden sobre Y, el conjunto $\{2\}$ no es abierto. Cualquier elemento básico para la topología del orden sobre Y que contenga a 2 es de la forma

$$\{x \mid x \in Y \text{ y } a < x \leq 2\}$$

para algún $a \in Y$; un conjunto tal, necesariamente contiene puntos de Y menores que 2.

EJEMPLO 3. Sea $I = [0, 1]$. El orden del diccionario sobre $I \times I$ es justo la restricción a $I \times I$ de la topología del orden sobre el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sin embargo, la topología del orden del diccionario sobre $I \times I$ no es la misma que la topología de subespacio sobre $I \times I$ obtenida de la topología del orden del diccionario sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Por ejemplo, el conjunto $\{1/2\} \times (1/2, 1]$ es abierto en $I \times I$ en la topología de subespacio, pero no en la topología del orden, como se puede comprobar (véase la Figura 16.1).

El conjunto $I \times I$ en la topología del orden del diccionario se denominará ***cuadrado ordenado***, y lo denotaremos mediante I_0^2.

La anomalía ilustrada en los Ejemplos 2 y 3 no ocurre para intervalos de rayos en un conjunto ordenado X. Esto es lo que probamos a continuación.

Dado un conjunto ordenado X, diremos que un subconjunto Y de X es ***convexo*** en X si para cada par de puntos $a < b$ de Y, el intervalo completo (a, b) de puntos de X pertenece a Y. Nótese que los intervalos y rayos en X son convexos en X.

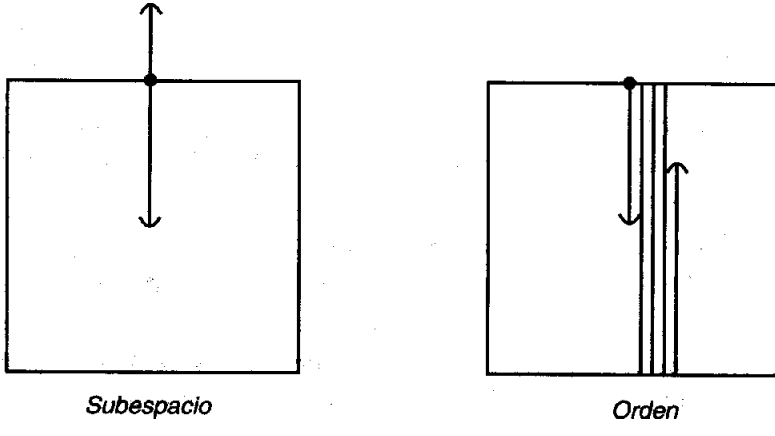


Figura 16.1

Teorema 16.4. *Sean X un conjunto ordenado en la topología del orden e Y un subconjunto de X que es convexo en X. Entonces la topología del orden sobre Y es la misma que la topología que Y hereda como subespacio de X.*

Demostración. Consideremos el rayo $(a, +\infty)$ en X. ¿Cuál es su intersección con Y? Si $a \in Y$, entonces

$$(a, +\infty) \cap Y = \{x \mid x \in Y \text{ y } x > a\}$$

que es un rayo abierto del conjunto ordenado Y. Si $a \notin Y$, entonces a es bien un límite inferior de Y, bien un límite superior de Y, puesto que Y es convexo. En el primer caso, el conjunto $(a, +\infty) \cap Y$ es igual a todo Y; en el último caso, es vacío.

Un razonamiento similar demuestra que la intersección del rayo $(-\infty, a)$ con el conjunto Y es bien un rayo abierto de Y, bien el propio Y, o bien vacío. Además, puesto que los conjuntos $(a, +\infty) \cap Y$ y $(-\infty, a) \cap Y$ forman una subbase para la topología de subespacio sobre Y, y como cada uno es abierto en la topología del orden, esta última topología contiene a la de subespacio.

Para probar el recíproco, obsérvese que cualquier rayo abierto de Y es igual a la intersección de un rayo abierto de X con Y, por lo que es abierto en la topología de subespacio sobre Y. Puesto que los rayos abiertos de Y son una subbase para la topología del orden sobre Y, esta topología está contenida en la topología de subespacio. ■

Para evitar ambigüedad, cuando X sea un conjunto ordenado con la topología del orden e Y sea un subconjunto de X, *supondremos que Y está dotado de la topología de subespacio*, a menos que específicamente digamos lo contrario. Si Y es convexo en X, esta topología es la misma que la topología del orden sobre Y; si no, puede no serlo.

Ejercicios

1. Pruebe que si Y es un subespacio de X y A es un subconjunto de Y, entonces la topología que A hereda como subespacio de Y es la misma que la topología que hereda como subespacio de X.
2. Si $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son topologías sobre X y $\mathcal{T}'$ es estrictamente más fina que $\mathcal{T}$, ¿qué puede decir sobre las correspondientes topologías de subespacio sobre el subconjunto Y de X?
3. Consideremos el conjunto $Y = [-1, 1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$. ¿Cuál de los siguientes conjuntos son abiertos en Y? ¿Cuáles son abiertos en $\mathbb{R}$?

$$\begin{aligned}
A &= \{x \mid \tfrac{1}{2} < |x| < 1\},\\
B &= \{x \mid \tfrac{1}{2} < |x| \leq 1\},\\
C &= \{x \mid \tfrac{1}{2} \leq |x| < 1\},\\
D &= \{x \mid \tfrac{1}{2} \leq |x| \leq 1\},\\
E &= \{x \mid 0 < |x| < 1 \text{ y } 1/x \notin \mathbb{Z}_+\}.
\end{aligned}$$

4. Una aplicación $f : X \to Y$ se dice que es una ***aplicación abierta*** si, para cada conjunto abierto U de X, el conjunto $f(U)$ es abierto en Y. Pruebe que $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ son aplicaciones abiertas.

5. Denotemos por X y X' a conjuntos de las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, respectivamente; sean Y e Y' conjuntos de las topologías $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$, respectivamente. Asumimos que estos conjuntos son no vacíos.

   (a) Demuestre que si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ y $\mathcal{U}' \supset \mathcal{U}$, entonces la topología producto sobre $X' \times Y'$ es más fina que la topología producto sobre $X \times Y$.

   (b) ¿Se cumple el recíproco de (a)? Explique su respuesta.

6. Pruebe que la colección numerable

$$\{(a, b) \times (c, d) \mid a < b \text{ y } c < d, \text{ y } a, b, c, d \text{ son racionales}\}$$

   es una base para $\mathbb{R}^2$.

7. Sea X un conjunto ordenado. Si Y es un subconjunto propio de X que es convexo en X, ¿se deduce que Y es un intervalo o un rayo de X?

8. Si L es una recta en el plano, describa la topología que L hereda como subespacio de $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$. En ambos casos se trata de una topología conocida.

9. Pruebe que la topología del orden del diccionario sobre el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es la misma que la topología producto $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}_d$ denota a $\mathbb{R}$ con la topología discreta. Compare esta topología con la topología usual sobre $\mathbb{R}^2$.

10. Sea $I = [0, 1]$. Compare la topología producto sobre $I \times I$, la topología del orden del diccionario sobre $I \times I$, y la topología que $I \times I$ hereda como subespacio de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en la topología del orden del diccionario.

§17 Conjuntos cerrados y puntos límite

Ahora que ya hemos visto algunos ejemplos, podemos introducir algunos de los conceptos básicos asociados a espacios topológicos. En esta sección, tratamos las nociones de *conjunto cerrado*, *clausura* de un conjunto, y *punto límite*. Éstas nos llevarán de modo natural a la consideración de un axioma para espacios topológicos llamado el *axioma de Hausdorff*.

Conjuntos cerrados

Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es ***cerrado*** si el conjunto $X - A$ es abierto.

EJEMPLO 1. El subconjunto $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ es cerrado porque su complementario

$$\mathbb{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$

es abierto. De modo similar, $[a, +\infty)$ es cerrado, porque su complementario $(-\infty, a)$ es abierto. Estos hechos justifican nuestro uso de los términos "intervalo cerrado" y "rayo cerrado". El subconjunto $[a, b)$ de $\mathbb{R}$, ni es abierto, ni cerrado.

EJEMPLO 2. En el plano $\mathbb{R}^2$, el conjunto

$$\{x \times y \mid x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$$

es cerrado, porque su complementario es la unión de los dos conjuntos

$$(-\infty, 0) \times \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$$

siendo cada uno de ellos un producto de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ y, por tanto, abierto en $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 3. En la topología de los complementos finitos sobre un conjunto X, los conjuntos cerrados son el propio X y todos los subconjuntos finitos de X.

EJEMPLO 4. En la topología discreta sobre el conjunto X, cada conjunto es abierto; se sigue que cada conjunto es también cerrado.

EJEMPLO 5. Consideremos el siguiente subconjunto de la recta real:

$$Y = [0, 1] \cup (2, 3)$$

en la topología de subespacio. En este espacio, el conjunto $[0, 1]$ es abierto, puesto que es la intersección del conjunto abierto $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ de $\mathbb{R}$ con Y. De modo similar, $(2, 3)$ es abierto como subconjunto de Y; incluso es abierto como subconjunto de $\mathbb{R}$. Puesto que $[0, 1]$ y $(2, 3)$ son complementos en Y cada uno del otro, concluimos que tanto $[0, 1]$ como $(2, 3)$ son cerrados como subconjuntos de Y.

Estos ejemplos sugieren que una respuesta al enigma matemático: "¿en qué se diferencia un conjunto de una puerta?" debería ser: "una puerta debe estar abierta o cerrada, y no pueden ocurrir las dos cosas, mientras que un conjunto puede ser abierto, o cerrado, o ambos, o ni abierto ni cerrado".

La colección de subconjuntos cerrados de un espacio X tiene similares propiedades a aquellas satisfechas por la colección de subconjuntos abiertos de X:

Teorema 17.1. *Sea X un espacio topológico. Se cumplen las siguientes condiciones:*

(1) *$\varnothing$ y X son cerrados.*

(2) *Las intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados son cerradas.*

(3) *Las uniones finitas de conjuntos cerrados son cerradas.*

Demostración. (1) $\varnothing$ y X son cerrados porque son los complementos de los conjuntos abiertos X y $\varnothing$, respectivamente.

(2) Dada una colección de conjuntos cerrados $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$, aplicamos la ley de De-Morgan,

$$X - \bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in J}(X - A_\alpha).$$

Puesto que los conjuntos $X - A_\alpha$ son abiertos por definición, la parte derecha de la ecuación representa una unión arbitraria de conjuntos abiertos, y así, es abierto. Por lo tanto, $\bigcap A_\alpha$ es cerrado.

(3) De manera similar, si A_i es cerrado para $i = 1, \ldots, n$, consideremos la ecuación

$$X - \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n}(X - A_i).$$

El conjunto de la parte derecha de esta ecuación es una intersección finita de conjuntos abiertos y es, consiguientemente, abierto. De aquí, $\bigcup A_i$ es cerrado. ■

En lugar de usar conjuntos abiertos, se podría especificar perfectamente una topología sobre un espacio dando una colección de conjuntos (llamados "conjuntos cerrados") satisfaciendo las tres propiedades de este teorema. Se podría, en ese caso, definir los conjuntos abiertos como los complementos de conjuntos cerrados y proceder exactamente igual que antes. Este procedimiento no tiene ninguna ventaja particular sobre el que adoptamos, y la mayoría de matemáticos prefieren usar conjuntos abiertos para definir topologías. Ahora bien, cuando tratemos con subespacios, se necesita ser cuidadoso al usar el término "conjunto cerrado". Si Y es un subespacio de X, diremos que un conjunto A es ***cerrado en Y*** si A es un subconjunto de Y y si A es cerrado en la topología de subespacio de Y (esto es, si $Y - A$ es abierto en Y). Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 17.2. *Sea Y un subespacio de X. Entonces un conjunto A es cerrado en Y si, y sólo si, es igual a la intersección de un conjunto cerrado de X con Y.*

Demostración. Supongamos que $A = C \cap Y$, donde C es cerrado en X (véase la Figura 17.1). Entonces $X - C$ es abierto en X, por lo que $(X - C) \cap Y$ es abierto en Y, por definición de topología de subespacio. Pero $(X - C) \cap Y = Y - A$. De aquí $Y - A$ es abierto en Y, por lo que A es cerrado en Y. Recíprocamente, asumamos que A es cerrado en Y (véase la Figura 17.2). Entonces $Y - A$ es abierto en Y, por lo que por definición es igual a la intersección de un conjunto abierto U de X con Y. El conjunto $X - U$ es cerrado en X, y $A = Y \cap (X - U)$, por lo que A es igual a la intersección de un conjunto cerrado de X con Y, como se deseaba probar. ■

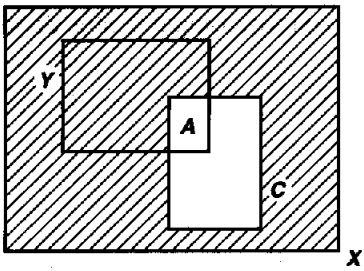


Figura 17.1

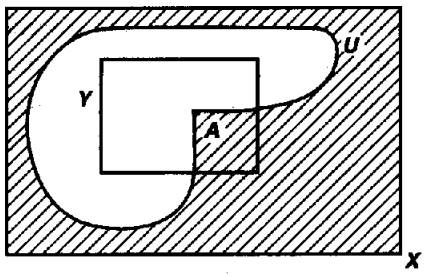


Figura 17.2

Un conjunto A que es cerrado en el subespacio Y puede ser cerrado o no en el espacio más grande X. Como fue el caso con los conjuntos abiertos, existe un criterio para ver si A es cerrado en X, demostración que queda para el lector.

Teorema 17.3. *Sea Y un subespacio de X. Si A es cerrado en Y e Y es cerrado en X, entonces A es cerrado en X.*

Clausura e interior de un conjunto

Dado un subconjunto A de un espacio topológico X, el ***interior*** de A se define como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A, y la ***clausura*** de A se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A. El interior de A se denota por $\operatorname{Int} A$ y la clausura de A se denota mediante $\operatorname{Cl} A$ o por $\bar{A}$. Obviamente, $\operatorname{Int} A$ es un conjunto abierto y $\bar{A}$ es un conjunto cerrado, más aún,

$$\operatorname{Int} A \subset A \subset \bar{A}.$$

Si A es abierto, $A = \operatorname{Int} A$, mientras que, si A es cerrado, $A = \bar{A}$.

No haremos demasiado uso del interior de un conjunto, pero la clausura de un conjunto será muy importante.

Cuando se trabaja con un espacio topológico X y un subespacio Y, es necesario tener cuidado al tomar clausuras de conjuntos. Si A es un subconjunto de Y, la clausura de A en Y y la clausura de A en X serán diferentes en general. *En tal situación, reservamos la notación $\bar{A}$ para representar la clausura de A en X.* La clausura de A en Y se puede expresar en términos de $\bar{A}$, como muestra el siguiente teorema:

Teorema 17.4. *Sean Y un subespacio de X y A un subconjunto de Y. Denotemos por $\bar{A}$ la clausura de A en X. Entonces la clausura de A en Y es $\bar{A} \cap Y$.*

Demostración. Denotemos por B la clausura de A en Y. El conjunto $\bar{A}$ es cerrado en X, por lo que $\bar{A} \cap Y$ es cerrado en Y por el Teorema 17.2. Puesto que $\bar{A} \cap Y$

contiene a A, y puesto que por definición B es igual a la intersección de *todos* los subconjuntos cerrados de Y que contienen a A, debe ser $B \subset (\bar{A} \cap Y)$.

Por otra parte, sabemos que B es cerrado en Y. De aquí, por el Teorema 17.2, $B = C \cap Y$ para algún conjunto C cerrado en X. Entonces C es un conjunto cerrado de X que contiene a A; como $\bar{A}$ es la intersección de *todos* los conjuntos cerrados tales, concluimos que $\bar{A} \subset C$. Entonces $(\bar{A} \cap Y) \subset (C \cap Y) = B$. ■

La definición de la clausura de un conjunto no nos da un método adecuado para encontrar las clausuras de conjuntos específicos, puesto que la colección de todos los conjuntos cerrados en X, como la colección de todos los conjuntos abiertos, es frecuentemente demasiado grande para trabajar con ella. Otro camino para describir la clausura de un conjunto, útil porque sólo implica una base para la topología de X, se da en el siguiente teorema.

Primero introduciremos alguna terminología conveniente. Diremos que un conjunto A ***interseca*** a un conjunto B si la intersección $A \cap B$ no es vacía.

Teorema 17.5. *Sea A un subconjunto del espacio topológico X.*

(a) Entonces $x \in \bar{A}$ si, y sólo si, cada conjunto abierto U que contiene a x interseca a A.

(b) Suponiendo que la topología de X está dada por una base, entonces $x \in \bar{A}$ si, y sólo si, cada elemento básico B que contiene a x interseca a A.

Demostración. Consideremos el enunciado de (a). Es un enunciado de la forma $P \Leftrightarrow Q$. Transformemos cada implicación en su opuesta, para así obtener el enunciado lógico equivalente no $P \Leftrightarrow$ no Q. Su desarrollo es el siguiente:

$x \notin \bar{A} \Longleftrightarrow$ existe un conjunto abierto U que contiene a x y que no interseca a A.

De este modo, nuestro teorema es sencillo de probar. Si x no está en $\bar{A}$, el conjunto $U = X - \bar{A}$ es un conjunto abierto que contiene a x y que no interseca a A, como se deseaba. Recíprocamente, si existe un conjunto abierto U que contiene a x y que no interseca a A, entonces $X - U$ es un conjunto cerrado que contiene a A. Por definición de la clausura $\bar{A}$, el conjunto $X - U$ debe contener a $\bar{A}$; sin embargo, x no puede estar en $\bar{A}$.

El enunciado (b) se sigue inmediatamente. Si cada conjunto abierto que contiene a x interseca a A, también lo hace cada elemento básico B que contenga a x, porque B es un conjunto abierto. Recíprocamente, si cada elemento básico que contiene a x interseca a A, también lo hace cada conjunto abierto U que contenga a x, porque U contiene un elemento básico que contiene a x. ■

Los matemáticos usan a menudo alguna terminología especial en cuanto a esto último. Abrevian la frase "U es un conjunto abierto que contiene a x" con la frase

"U es un ***entorno*** de x".

Usando esta terminología, se puede escribir la primera mitad del teorema anterior del modo siguiente:

> Si A es un subconjunto del espacio topológico X, entonces $x \in \bar{A}$ si, y sólo si, cada entorno de x interseca a A.

EJEMPLO 6. Sea X la recta real $\mathbb{R}$. Si $A = (0, 1]$, entonces $\bar{A} = [0, 1]$, ya que cada entorno del 0 interseca a A, mientras que cada punto fuera de $[0, 1]$ tiene un entorno disjunto con A. Argumentos similares se aplican a los siguientes subconjuntos de X:

Si $B = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$, entonces $\bar{B} = \{0\} \cup B$. Si $C = \{0\} \cup (1, 2)$, entonces $\bar{C} = \{0\} \cup [1, 2]$. Si $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales, entonces $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Si $\mathbb{Z}_+$ es el conjunto de los enteros positivos, entonces $\bar{\mathbb{Z}}_+ = \mathbb{Z}_+$. Si $\mathbb{R}_+$ es el conjunto de los reales positivos, entonces la clausura de $\mathbb{R}_+$ es el conjunto $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ (esta es la razón por la que anteriormente introdujimos en §2 la notación $\bar{\mathbb{R}}_+$ para el conjunto $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$).

EJEMPLO 7. Consideremos el subespacio $Y = (0, 1]$ de la recta real $\mathbb{R}$. El conjunto $A = (0, \frac{1}{2})$ es un subconjunto de Y; su clausura en $\mathbb{R}$ es el conjunto $[0, \frac{1}{2}]$, y su clausura en Y es el conjunto $[0, \frac{1}{2}] \cap Y = (0, \frac{1}{2}]$.

Algunos matemáticos utilizan el término "entorno" en un sentido distinto. Dicen que A es un entorno de x si A *contiene* un conjunto abierto que contiene a x. Nosotros no lo consideraremos así.

Puntos límite

Existe otro modo de describir la clausura de un conjunto, que necesita del importante concepto de punto límite, que tratamos a continuación.

Si A es un subconjunto del espacio topológico X y si x es un punto de X, diremos que x es ***punto límite*** (o "punto de acumulación") de A si cada entorno de x interseca a A en algún punto *distinto del propio* x. Dicho de otro modo, x es un punto límite de A si pertenece a la clausura de $A - \{x\}$. El punto x puede o no pertenecer a A; no importa para esta definición.

EJEMPLO 8. Consideremos la recta real $\mathbb{R}$. Si $A = (0, 1]$, entonces el punto 0 es un punto límite de A y también el punto $1/2$. De hecho, cada punto del intervalo $[0, 1]$ va a ser un punto límite de A, pero ningún otro punto de $\mathbb{R}$ es un punto límite de A.

Si $B = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$, entonces el 0 es el único punto límite de B. Cualquier otro punto x de $\mathbb{R}$ tiene un entorno que, o no llega a intersecar a B, o interseca a B sólo en el propio punto x. Si $C = \{0\} \cup (1, 2)$, entonces los puntos límite de C son los puntos del intervalo $[1, 2]$. Si $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales, cada punto de $\mathbb{R}$ es un punto límite de $\mathbb{Q}$. Si $\mathbb{Z}_+$ es el conjunto de los enteros positivos, ningún punto de $\mathbb{R}$ es un punto límite de $\mathbb{Z}_+$. Si $\mathbb{R}_+$ es el conjunto de los reales positivos, entonces cada punto de $\{0\} \cup \mathbb{R}_+$ es un punto límite de $\mathbb{R}_+$.

Si comparamos los Ejemplos 6 y 8, nos damos cuenta de la relación entre la clausura de un conjunto y los puntos límite de un conjunto. Esta relación es la que se da en el siguiente teorema:

Teorema 17.6. *Sean A un subconjunto del espacio topológico X y A' el conjunto de todos los puntos límite de A. Entonces*

$$\bar{A} = A \cup A'.$$

Demostración. Si x está en A', cada entorno de x interseca a A (en un punto distinto de x). Luego, por el Teorema 17.5, x pertenece a $\bar{A}$. De aquí, $A' \subset \bar{A}$. Puesto que, por definición, $A \subset \bar{A}$, se sigue que $A \cup A' \subset \bar{A}$.

Para demostrar la otra inclusión, supondremos que x es un punto de $\bar{A}$ y probaremos que $x \in A \cup A'$. Si ocurre que x pertenece a A, es trivial que $x \in A \cup A'$; supongamos que x no está en A. Como $x \in \bar{A}$, sabemos que cada entorno U de x interseca a A; al tener que $x \notin A$, el conjunto U debe intersecar a A en un punto distinto de x. Entonces $x \in A'$, por lo que $x \in A \cup A'$, como se deseaba. ■

Corolario 17.7. *Un subconjunto de un espacio topológico es cerrado si, y sólo si, contiene a todos sus puntos límite.*

Demostración. El conjunto A es cerrado si, y sólo si, $A = \bar{A}$, y esto último se cumple si, y sólo si, $A' \subset A$. ■

Espacios de Hausdorff

Nuestra experiencia con conjuntos abiertos y cerrados y puntos límite en la recta real y el plano puede llevarnos a cometer un error cuando consideramos espacios topológicos más generales. Por ejemplo, en los espacios $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, cada conjunto unipuntual $\{x_0\}$ es cerrado. Este hecho es fácilmente demostrable; cada punto distinto de x_0 tiene un entorno que no interseca a $\{x_0\}$, por lo que $\{x_0\}$ es su propia clausura. Pero este hecho no es cierto para espacios topológicos arbitrarios. Consideremos la topología en el conjunto de tres puntos $\{a, b, c\}$ indicado en la Figura 17.3. En este espacio, el conjunto unipuntual $\{b\}$ no es cerrado, por lo que su complementario *no* es abierto.

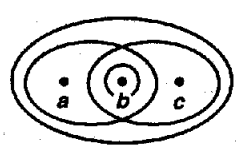


Figura 17.3

De modo similar, nuestra experiencia con las propiedades de sucesiones convergentes en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ nos puede llevar a un error cuando tratamos con espacios topológicos más generales. En un espacio topológico arbitrario, se dice que una sucesión

$x_1, x_2, \ldots$ de puntos del espacio X ***converge*** al punto x de X siempre que, para cada entorno U de x, exista un entero positivo N tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. En $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, una sucesión no puede converger a más de un punto, pero sí puede en un espacio arbitrario. En el espacio indicado en la Figura 17.3, por ejemplo, la sucesión definida por $x_n = b$ para todo n converge no sólo al punto b, sino también al punto a y al punto c.

Las topologías en las que los conjuntos unipuntuales no son cerrados, o en las que las sucesiones pueden converger a más de un punto, son consideradas por muchos matemáticos como algo extraño. No son demasiado interesantes, debido a que raras veces se dan en otras ramas de las matemáticas. Y los teoremas que podemos probar sobre espacios topológicos están bastante limitados si se permiten tales ejemplos. Por lo tanto, a menudo se impone una condición adicional que evitará ejemplos como éste, llevando la clase de espacios bajo consideración más cerca de aquellos a los que se aplica nuestra intuición geométrica. La condición fue sugerida por el matemático Félix Hausdorff, por lo que los matemáticos le han dado su nombre.

Definición. Un espacio topológico X se denomina ***espacio de Hausdorff*** si para cada par x_1, x_2 de puntos distintos de X, existen entornos U_1 y U_2 de x_1 y x_2, respectivamente, que son disjuntos.

Teorema 17.8. *Cada conjunto con un número finito de puntos en un espacio de Hausdorff X es cerrado.*

Demostración. Es suficiente probar que cada conjunto unipuntual $\{x_0\}$ es cerrado. Si x es un punto de X distinto de x_0, entonces x y x_0 tienen entornos disjuntos U y V, respectivamente. Puesto que U no interseca a $\{x_0\}$, el punto x no puede pertenecer a la clausura del conjunto $\{x_0\}$. Como consecuencia, la clausura del conjunto $\{x_0\}$ es el propio $\{x_0\}$, por lo que es cerrado. ■

La condición de que los conjuntos con un número finito de puntos sean cerrados, es de hecho más débil que la condición de Hausdorff. Por ejemplo, la recta real $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos finitos no es un espacio de Hausdorff, pero sí es un espacio en el que los conjuntos con un número finito de puntos son cerrados. La condición de que los conjuntos con un número finito de puntos sean cerrados tiene su propio nombre: se denomina ***axioma T_1***.

(Explicaremos la razón para esta extraña terminología en el Capítulo 4.) El axioma T_1 aparecerá en este libro en algunos ejercicios y sólo en un teorema, que es el siguiente:

Teorema 17.9. *Sean X un espacio satisfaciendo el axioma T_1 y A un subconjunto de X. Entonces el punto x es un punto límite de A si, y sólo si, cada entorno de x contiene infinitos puntos de A.*

Demostración. Si cada entorno de x interseca a A en infinitos puntos, está claro que interseca a A en algún otro punto distinto de x, por lo que x es un punto límite de A.

Recíprocamente, supongamos que x es un punto límite de A, y supongamos que algún entorno U de x interseca a A en un conjunto finito de puntos. Entonces U también interseca a $A - \{x\}$ en un conjunto finito de puntos; sean $\{x_1, \ldots, x_m\}$ los puntos de $U \cap (A - \{x\})$. El conjunto $X - \{x_1, \ldots, x_m\}$ es un conjunto abierto de X, puesto que el conjunto finito de puntos $\{x_1, \ldots, x_m\}$ es cerrado; entonces

$$U \cap (X - \{x_1, \ldots, x_m\})$$

es un entorno de x que no interseca al conjunto $A - \{x\}$. Esto contradice la hipótesis de que x es un punto límite de A. ■

Una razón para nuestra falta de interés en el axioma T_1 es el hecho de que muchos de los teoremas interesantes en topología no requieren únicamente este axioma, sino la fuerza del axioma de Hausdorff. Es más, la mayoría de los espacios que son importantes para los matemáticos son espacios de Hausdorff. Los dos teoremas siguientes dan algo más de fundamento a estos comentarios.

Teorema 17.10. *Si X es un espacio de Hausdorff, entonces una sucesión de puntos de X converge a lo sumo a un punto de X.*

Demostración. Supongamos que x_n es una sucesión de puntos de X que converge a x. Si $y \neq x$, sean U y V entornos disjuntos de x e y, respectivamente. Puesto que U contiene a x_n para todo n, excepto para un número finito de valores de n, el conjunto V no puede cumplir lo mismo. Por lo tanto, x_n no puede converger a y. ■

Si la sucesión x_n de puntos del espacio de Hausdorff X converge al punto x de X, a menudo escribiremos $x_n \longrightarrow x$, y diremos que x es el ***límite*** de la sucesión x_n.

La prueba del siguiente resultado se deja como ejercicio.

Teorema 17.11. *Cada conjunto simplemente ordenado es un espacio de Hausdorff en la topología del orden. El producto de dos espacios de Hausdorff es un espacio de Hausdorff. Un subespacio de un espacio de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.*

Generalmente se considera que la condición de Hausdorff es una condición extra muy débil para imponer a un espacio topológico. Efectivamente, en un primer curso de topología, algunos matemáticos van tan lejos que imponen esta condición al empezar, rechazando considerar espacios que no sean espacios de Hausdorff. Nosotros no iremos tan lejos, pero admitiremos la condición de Hausdorff siempre que se necesite en una demostración sin reparo de que limite seriamente el rango de aplicaciones de los resultados.

La condición de Hausdorff es una entre un número de condiciones extra que se pueden imponer a un espacio topológico. Cada vez que se impone tal condición, se pueden probar teoremas más fuertes, pero se limita la clase de espacios a los que se aplican dichos teoremas. La mayoría de los estudios que se han hecho en topología desde sus comienzos se han centrado en el problema de encontrar condiciones que sean lo suficientemente fuertes como para permitir que se prueben teoremas interesantes sobre espacios que satisfacen estas condiciones, y a la vez no tan fuertes que limiten notablemente el rango de aplicaciones de los resultados.

Estudiaremos diversas condiciones de este tipo en los dos próximos capítulos. La condición de Hausdorff y el axioma T_1 pertenecen, sin embargo, a una colección de análogas condiciones que se denominan en conjunto *axiomas de separación*. Otras condiciones son los *axiomas de numerabilidad* y diferentes condiciones de *compacidad* y *conexión*. Algunos de éstos son requisitos bastante estrictos, como veremos.

Ejercicios

1. Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos del conjunto X. Supongamos que $\varnothing$ y X están en $\mathcal{C}$, y que las uniones finitas y las intersecciones arbitrarias de elementos de $\mathcal{C}$ están en $\mathcal{C}$. Pruebe que la colección

$$\mathcal{T} = \{X - C \mid C \in \mathcal{C}\}$$

es una topología sobre X.

2. Pruebe que si A es cerrado en Y e Y es cerrado en X, entonces A es cerrado en X.

3. Pruebe que si A es cerrado en X y B es cerrado en Y, entonces $A \times B$ es cerrado en $X \times Y$.

4. Pruebe que si U es abierto en X y A es cerrado en X, entonces $U - A$ es abierto en X, y $A - U$ es cerrado en X.

5. Sea X un conjunto ordenado en la topología del orden. Muestre que $\overline{(a,b)} \subset [a,b]$. ¿Bajo qué condiciones se cumple la igualdad?

6. Denotemos por A, B y A_α a subconjuntos del espacio X. Pruebe lo siguiente:
   (a) Si $A \subset B$, entonces $\bar{A} \subset \bar{B}$.
   (b) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
   (c) $\overline{\bigcup A_\alpha} \supset \bigcup \bar{A}_\alpha$; dé un ejemplo donde no se cumpla la igualdad.

7. Discuta la siguiente "prueba" de que $\overline{\bigcup A_\alpha} \subset \bigcup \bar{A}_\alpha$: si $\{A_\alpha\}$ es una colección de conjuntos en X y si $x \in \overline{\bigcup A_\alpha}$, entonces cada entorno U de x interseca a $\bigcup A_\alpha$. Así, U debe intersecar a algún A_α, por lo que x debe pertenecer a la clausura de algún A_α. Por consiguiente, $x \in \bigcup \bar{A}_\alpha$.

8. Denotemos por A, B y A_α a subconjuntos del espacio X. Determine si las siguientes ecuaciones se cumplen; si una igualdad es falsa, determine si una de las inclusiones $\supset$ o $\subset$ se cumple.

(a) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

(b) $\overline{\bigcap A_\alpha} = \bigcap \bar{A}_\alpha$.

(c) $\overline{A - B} = \bar{A} - \bar{B}$.

9. Sean $A \subset X$ y $B \subset Y$. Pruebe que, en el espacio $X \times Y$,

$$\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}.$$

10. Pruebe que cada topología del orden es de Hausdorff.

11. Pruebe que el producto de dos espacios de Hausdorff es de Hausdorff.

12. Pruebe que un subespacio de un espacio de Hausdorff es de Hausdorff.

13. Pruebe que X es de Hausdorff si, y sólo si, la ***diagonal*** $\Delta = \{x \times x \mid x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$.

14. En la topología de los complementos finitos sobre $\mathbb{R}$, ¿a qué punto o puntos converge la sucesión $x_n = 1/n$?

15. Pruebe que el axioma T_1 es equivalente a la condición de que para cada par de puntos de X, cada uno posee un entorno que no contiene al otro.

16. Considere las cinco topologías sobre $\mathbb{R}$ dadas en el Ejercicio 7 de §13.

(a) Determine la clausura del conjunto $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ bajo cada una de estas topologías.

(b) ¿Cuáles de estas topologías satisfacen el axioma de Hausdorff? ¿y el axioma T_1?

17. Considere la topología del límite inferior sobre $\mathbb{R}$ y la topología dada por la base $\mathcal{C}$ del Ejercicio 8 de §13. Determine las clausuras de los intervalos $A = (0, \sqrt{2})$ y $B = (\sqrt{2}, 3)$ en estas dos topologías.

18. Determine las clausuras de los siguientes subconjuntos del cuadrado ordenado:

$$\begin{aligned} A &= \{(1/n) \times 0 \mid n \in \mathbb{Z}_+\}, \\ B &= \{(1 - 1/n) \times \tfrac{1}{2} \mid n \in \mathbb{Z}_+\}, \\ C &= \{x \times 0 \mid 0 < x < 1\}, \\ D &= \{x \times \tfrac{1}{2} \mid 0 < x < 1\}, \\ E &= \{\tfrac{1}{2} \times y \mid 0 < y < 1\}. \end{aligned}$$

19. Si $A \subset X$, definimos la ***frontera*** de A mediante la ecuación

$$\operatorname{Fr} A = \bar{A} \cap \overline{(X - A)}.$$

(a) Pruebe que $\operatorname{Int} A$ y $\operatorname{Fr} A$ son disjuntos, y $\bar{A} = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Fr} A$.

(b) Pruebe que $\operatorname{Fr} A = \varnothing \Leftrightarrow A$ es, al mismo tiempo, abierto y cerrado.

(c) Pruebe que U es abierto $\Leftrightarrow \operatorname{Fr} U = \bar{U} - U$.

(d) Si U es abierto, ¿es cierto que $U = \operatorname{Int}(\bar{U})$? Justifique su respuesta.

20. Calcule la frontera y el interior de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

(a) $A = \{x \times y \mid y = 0\}$,

(b) $B = \{x \times y \mid x > 0 \text{ e } y \neq 0\}$,

(c) $C = A \cup B$,

(d) $D = \{x \times y \mid x \text{ es racional}\}$,

(e) $E = \{x \times y \mid 0 < x^2 - y^2 \leq 1\}$,

(f) $F = \{x \times y \mid x \neq 0 \text{ e } y \leq 1/x\}$.

***21.** (Kuratowski). Considere la colección de todos los subconjuntos A del espacio topológico X. Las operaciones de clausura $A \to \bar{A}$ y complementario $A \to X - A$ son funciones que van de esta colección en ella misma.

(a) Pruebe que, comenzando con un conjunto dado A, se pueden formar no más de 14 conjuntos distintos al aplicar estas dos operaciones sucesivamente.

(b) Encuentre un subconjunto A de $\mathbb{R}$ (con su topología usual) para el que se obtenga el máximo de 14.

§18 Funciones continuas

El concepto de función continua es básico para una gran parte de las matemáticas. Las funciones continuas sobre la recta real se pueden ver en las primeras páginas de cualquier libro de cálculo, y las funciones continuas en el plano y el espacio siguen no mucho más adelante. Clases más generales de funciones continuas surgen a medida que uno profundiza en las matemáticas. En esta sección, formularemos una definición de continuidad que incluirá todas ellas como casos especiales y estudiaremos varias propiedades de funciones continuas. Muchas de estas propiedades son generalizaciones directas de conceptos que se aprendieron sobre funciones continuas en cálculo y análisis.

Continuidad de una función

Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice que es ***continua*** si para cada subconjunto abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X.

Recuérdese que $f^{-1}(V)$ es el conjunto de todos los puntos x de X para los que $f(x) \in V$; es vacío si V no interseca al conjunto imagen $f(X)$ de f.

La continuidad de una función depende no sólo de la propia función f, sino también de las topologías especificadas para su dominio y recorrido. Si deseamos resaltar este hecho, podemos decir que f es continua *relativa* a las topologías específicas sobre X e Y.

Nótese que si la topología del espacio de llegada Y está dada por una base $\mathcal{B}$, entonces para probar la continuidad de f es suficiente mostrar que la imagen inversa de cada *elemento básico* es abierta: el conjunto abierto arbitrario V de Y se puede escribir como una unión de elementos básicos

$$V = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha.$$

Entonces

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\alpha)$$

por lo que $f^{-1}(V)$ es abierto si cada conjunto $f^{-1}(B_\alpha)$ es abierto.

Si la topología sobre Y está dada por una subbase $\mathcal{S}$, para probar la continuidad de f será suficiente demostrar que la imagen inversa de cada elemento de la *subbase* es abierta: el elemento básico arbitrario B de Y se puede escribir como una intersección finita $S_1 \cap \cdots \cap S_n$ de elementos de la subbase; se deduce de la ecuación

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(S_n)$$

que la imagen inversa de cada elemento básico es abierta.

EJEMPLO 1. Consideremos una función como las estudiadas en análisis, una "función de variable real con valores reales",

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

En análisis, se define la continuidad de f mediante la "definición ϵ-δ", algo que desanimaba a todo estudiante de matemáticas. Como se podría esperar, la definición ϵ-δ y la nuestra son equivalentes. Para probar, por ejemplo, que nuestra definición implica la definición ϵ-δ, procedemos como sigue:

Dado x_0 en $\mathbb{R}$, y dado $\epsilon > 0$, el intervalo $V = (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ es un conjunto abierto del espacio de llegada $\mathbb{R}$. Por tanto, $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en el espacio de salida $\mathbb{R}$. Puesto que $f^{-1}(V)$ contiene al punto x_0, contiene algún elemento básico (a, b) alrededor de x_0. Elegimos δ para que sea el más pequeño de los dos números $x_0 - a$ y $b - x_0$. Entonces, si $|x - x_0| < \delta$, el punto x debe estar en (a, b), por lo que $f(x) \in V$, y $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, como se deseaba.

Probar que la definición ϵ-δ implica nuestra definición no es más difícil, así que se deja para el lector. Volveremos a este ejemplo cuando estudiemos espacios métricos.

EJEMPLO 2. En cálculo, se estudia la propiedad de ser continua para muchos tipos de funciones. Por ejemplo, se estudian funciones de los siguientes tipos:

$$\begin{array}{lll} f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 & & \text{(curvas en el plano)} \\ f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 & & \text{(curvas en el espacio)} \\ f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & & \text{(funciones } f(x,y) \text{ de dos variables reales)} \\ f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} & & \text{(funciones } f(x,y,z) \text{ de tres variables reales)} \\ f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & & \text{(campos de vectores } \mathbf{v}(x,y) \text{ en el plano).} \end{array}$$

Cada uno de ellos tiene una noción de continuidad definida para él mismo. Nuestra definición general de continuidad incluye todos éstos como casos especiales; este hecho será una consecuencia de teoremas generales que probaremos sobre funciones continuas en espacios producto y en espacios métricos.

EJEMPLO 3. Denotemos por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales con su topología usual, y denotemos por $\mathbb{R}_\ell$ al mismo conjunto con la topología del límite inferior. Sea

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}_\ell$$

la función identidad: $f(x) = x$ para cada número real x. Entonces f no es una función continua; la imagen inversa del conjunto abierto $[a,b)$ de $\mathbb{R}_\ell$ es él mismo, que no es abierto en $\mathbb{R}$. Por otro lado, la función identidad

$$g:\mathbb{R}_\ell \to \mathbb{R}$$

es continua, porque la imagen inversa de (a,b) es él mismo, que es abierto en $\mathbb{R}_\ell$.

En análisis se estudian diversas maneras de formular la definición de continuidad, distintas pero equivalentes. Algunas de éstas se generalizan a espacios arbitrarios, y se consideran en los teoremas que siguen. La definición familiar "ϵ-δ" y la "definición de la sucesión convergente" no se generalizan a espacios arbitrarios; se tratarán cuando estudiemos espacios métricos.

Teorema 18.1. Sean X e Y espacios topológicos; sea $f : X \to Y$. Entonces son *equivalentes:*

(1) *f es continua.*

(2) *Para cada subconjunto A de X, se tiene que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

(3) *Para cada conjunto cerrado B de Y, el conjunto $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.*

(4) *Para cada $x \in X$ y cada entorno V de $f(x)$, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subset V$.*

Si se cumple la condición (4) para el punto x de X diremos que f es ***continua en el punto x***.

Demostración. Vamos a probar que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) y que (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que f es continua. Sea A un subconjunto de X. Vamos a mostrar que si $x \in \bar{A}$, entonces $f(x) \in \overline{f(A)}$. Sea V un entorno de $f(x)$. Entonces $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto de X que contiene a x; debe intersecar a A en algún punto y. Entonces V interseca a $f(A)$ en el punto $f(y)$, por lo que $f(x) \in \overline{f(A)}$, como se deseaba.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea B un cerrado en Y y sea $A = f^{-1}(B)$. Deseamos probar que A es cerrado en X; demostraremos que $\bar{A} = A$. Por teoría elemental de conjuntos, tenemos que $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B$. Por lo tanto, si $x \in \bar{A}$,

$$f(x) \in f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \bar{B} = B$$

por lo que $x \in f^{-1}(B) = A$. Así, $\bar{A} \subset A$, por lo que $\bar{A} = A$, como se deseaba.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea V un conjunto abierto de Y. Pongamos $B = Y - V$. Entonces

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(V) = X - f^{-1}(V).$$

Ahora B es un conjunto cerrado de Y. Entonces $f^{-1}(B)$ es cerrado en X por hipótesis, por lo que $f^{-1}(V)$ es abierto en X, como se deseaba.

(1) $\Rightarrow$ (4). Sea $x \in X$ y sea V un entorno de $f(x)$. Entonces el conjunto $U = f^{-1}(V)$ es un entorno de x tal que $f(U) \subset V$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Sea V un conjunto abierto de Y; sea x un punto de $f^{-1}(V)$. Entonces $f(x) \in V$ por lo que, por hipótesis, existe un entorno U_x de x tal que $f(U_x) \subset V$. Entonces $U_x \subset f^{-1}(V)$. Se sigue que $f^{-1}(V)$ se puede escribir como la unión de conjuntos abiertos U_x, por lo que es abierto. ■

Homeomorfismos

Sean X e Y espacios topológicos; sea $f : X \to Y$ una biyección. Si la función f y la función inversa

$$f^{-1} : Y \to X$$

son ambas continuas, entonces f se dice que es un ***homeomorfismo***.

La condición de que f^{-1} sea continua significa que, para cada conjunto abierto U de X, la imagen inversa de U mediante la aplicación $f^{-1} : Y \to X$ es abierta en Y. Sin embargo, la *imagen inversa* de U mediante la aplicación f^{-1} es la misma que la *imagen* de U mediante la aplicación f (véase la Figura 18.1). Por eso, otro modo de definir un homeomorfismo es decir que es una correspondencia biyectiva $f : X \to Y$ tal que $f(U)$ es abierto si, y sólo si, U es abierto.

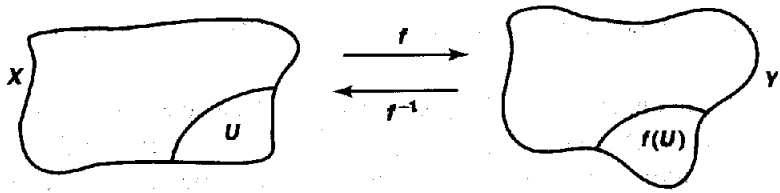


Figura 18.1

Este comentario prueba que un homeomorfismo $f : X \to Y$ proporciona una correspondencia biyectiva, no sólo entre X e Y, sino entre las colecciones de conjuntos abiertos de X y las de Y. Como resultado, cualquier propiedad de X que se exprese completamente en términos de la topología de X (esto es, en términos de los conjuntos abiertos de X) nos da, vía la correspondencia f, la propiedad correspondiente para el espacio Y. Tal propiedad de X se denomina ***propiedad topológica*** de X.

Puede haber estudiado en álgebra moderna la noción de un *isomorfismo* entre objetos algebraicos tales como grupos o anillos. Un isomorfismo es una correspondencia biyectiva que respeta la estructura algebraica implicada. El concepto análogo en topología es el de *homeomorfismo*, que es una correspondencia biyectiva que conserva la estructura topológica implicada.

Ahora supongamos que $f : X \to Y$ es una aplicación continua inyectiva, donde X e Y son espacios topológicos. Sea Z el conjunto imagen $f(X)$, considerado como un subespacio de Y; entonces, la función $f' : X \to Z$ obtenida al restringir el rango de f, es biyectiva. Si ocurre que f' es un homeomorfismo de X con Z, decimos que la aplicación $f : X \to Y$ es un ***embebimiento topológico***, o simplemente un ***embebimiento***, de X en Y.

EJEMPLO 4. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 1$ es un homeomorfismo (véase la Figura 18.2). Si definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la ecuación

$$g(y) = \frac{1}{3}(y - 1)$$

entonces se puede comprobar fácilmente que $f(g(y)) = y$ y que $g(f(x)) = x$ para todos los números reales x e y. Se sigue que f es biyectiva y que $g = f^{-1}$; la continuidad de f y g es un resultado familiar de cálculo.

EJEMPLO 5. La función $F : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

es un homeomorfismo (véase la Figura 18.3). Ya hemos observado en el Ejemplo 9 de §3 que F es una correspondencia biyectiva que conserva el orden; su inversa es la función G definida por

$$G(y) = \frac{2y}{1 + (1 + 4y^2)^{1/2}}.$$

El hecho de que F sea un homeomorfismo se puede probar de dos maneras. Una forma es observar que, debido a que F es biyectiva y conserva el orden, F lleva un elemento básico para la topología del orden en $(-1,1)$ a un elemento básico para la topología del orden en $\mathbb{R}$ y viceversa. Como resultado, F es automáticamente un homeomorfismo de $(-1,1)$ con $\mathbb{R}$ (ambos con la topología del orden). Puesto que la topología del orden en $(-1,1)$ y la topología usual (de subespacio) coinciden, F es un homeomorfismo de $(-1,1)$ con $\mathbb{R}$.

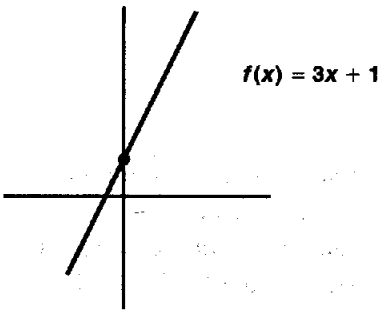


Figura 18.2

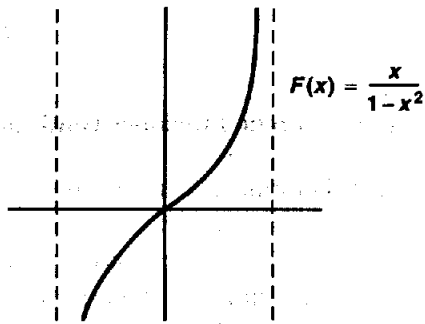


Figura 18.3

Una segunda forma de ver que F es un homeomorfismo es usar la continuidad de las funciones algebraicas y la función raíz cuadrada, para probar que tanto F como G son continuas. Estos son hechos familiares de cálculo.

EJEMPLO 6. Una función biyectiva $f : X \to Y$ puede ser continua sin ser un homeomorfismo. Una función semejante es la aplicación identidad $g : \mathbb{R}_\ell \to \mathbb{R}$ considerada en el Ejemplo 3. Otra es la siguiente: denotemos por S^1 al ***círculo unidad***

$$S^1 = \{x \times y \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

considerado como subespacio del plano $\mathbb{R}^2$, y sea

$$F : [0,1) \to S^1$$

la aplicación definida por $f(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$. El hecho de que f sea biyectiva y continua se sigue de propiedades familiares de las funciones trigonométricas. Pero la función f^{-1} no es continua. La imagen mediante f del conjunto abierto $U = [0, \frac{1}{4})$ del dominio, por ejemplo, no es abierta en S^1, puesto que el punto $p = f(0)$ no pertenece a ningún conjunto abierto V de $\mathbb{R}^2$ tal que $V \cap S^1 \subset f(U)$ (véase la Figura 18.4).

EJEMPLO 7. Consideremos la función

$$g : [0,1) \to \mathbb{R}^2$$

obtenida a partir de la función f del ejemplo anterior al extender el recorrido. La aplicación g es un ejemplo de una aplicación continua inyectiva que no es un embebimiento.

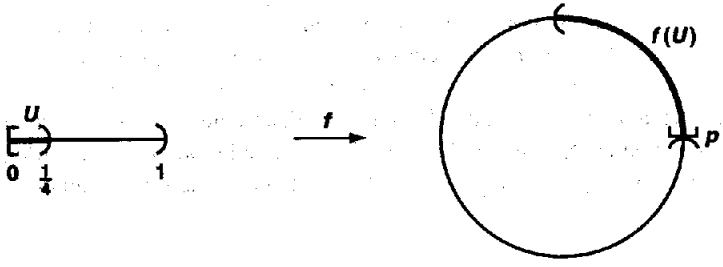


Figura 18.4

Construcción de funciones continuas

¿Cuál es la forma de construir funciones continuas de un espacio topológico en otro? Existen varios métodos usados en análisis, de los cuales algunos se generalizan a espacios topológicos arbitrarios y otros no. Estudiaremos primero algunas construcciones que se cumplen para espacios topológicos generales, dejando el estudio de los otros para más tarde.

Teorema 18.2 (Reglas para construir funciones continuas). *Sean X, Y y Z espacios topológicos.*

(a) (Función constante) si $f : X \to Y$ envía todo punto de X a un mismo punto y_0 de Y, entonces f es continua.

(b) (Inclusión) si A es un subespacio de X, la función inclusión $j : A \to X$ es continua.

(c) (Composición) si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son continuas, entonces la aplicación $g \circ f : X \to Z$ es continua.

(d) (Restricción del dominio) si $f : X \to Y$ es continua y A es un subespacio de X, entonces la función restringida $f \mid A : A \to Y$ es continua.

(e) (Restricción o extensión del recorrido) sea $f : X \to Y$ continua. Si Z es un subespacio de Y que contiene al conjunto imagen $f(X)$, entonces la función $g : X \to Z$, obtenida al restringir el rango de f, es continua. Si Z es un espacio con Y como subespacio, entonces la función $h : X \to Z$, obtenida al extender el recorrido de f, es continua.

(f) (Formulación local de continuidad) la aplicación $f : X \to Y$ es continua si X se puede escribir como la unión de conjuntos abiertos U_α tales que $f \mid U_\alpha$ es continua para cada α.

Demostración. (a) Sea $f(x) = y_0$ para todo x en X. Sea V abierto en Y. El conjunto $f^{-1}(V)$ es igual a X ó $\varnothing$, dependiendo de si V contiene a y_0 o no. En cualquier caso, es abierto.

(b) Si U es abierto en X, entonces $j^{-1}(U) = U \cap A$, que es abierto en A por definición de la topología de subespacio.

(c) Si U es abierto en Z, entonces $g^{-1}(U)$ es abierto en Y y $f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en X. Pero

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$$

por teoría elemental de conjuntos.

(d) La función $f|A$ es igual a la composición de la aplicación inclusión $j : A \to X$ y la aplicación $f : X \to Y$, ambas continuas.

(e) Sea $f : X \to Y$ continua. Si $f(X) \subset Z \subset Y$, probemos que la función $g : X \to Z$ obtenida a partir de f es continua. Sea B abierto en Z. Entonces $B = Z \cap U$ para algún conjunto abierto U de Y. Puesto que Z contiene completamente al conjunto imagen $f(X)$,

$$f^{-1}(U) = g^{-1}(B)$$

por teoría de conjuntos elemental. Ya que $f^{-1}(U)$ es abierto, también lo es $g^{-1}(B)$.

Para probar que $h : X \to Z$ es continua si Z tiene a Y como subespacio, observemos que h es la composición de la aplicación $f : X \to Y$ y la inclusión $j : Y \to Z$.

(f) Por hipótesis, podemos escribir X como unión de conjuntos abiertos U_α, tales que $f \mid U_\alpha$ es continua para cada α. Sea V un conjunto abierto en Y. Entonces

$$f^{-1}(V) \cap U_\alpha = (f \mid U_\alpha)^{-1}(V)$$

puesto que ambas expresiones representan el conjunto de los puntos x que pertenecen a U_α para los que $f(x) \in V$. Como $f \mid U_\alpha$ es continua, este conjunto es abierto en U_α, y por tanto, abierto en X. Pero

$$f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha (f^{-1}(V) \cap U_\alpha)$$

por lo que $f^{-1}(V)$ es también abierto en X. ■

Teorema 18.3 (Lema del pegamiento). *Sea $X = A \cup B$, donde A y B son cerrados en X. Sean $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ continuas. Si $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$, entonces f y g se combinan para dar una función continua $h : X \to Y$, definida mediante $h(x) = f(x)$ si $x \in A$, y $h(x) = g(x)$ si $x \in B$.*

Demostración. Sea C un subconjunto cerrado de Y. Tenemos que

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$$

por teoría de conjuntos elemental. Puesto que f es continua, $f^{-1}(C)$ es cerrado en A y, por tanto, cerrado en X. De modo similar, $g^{-1}(C)$ es cerrado en B y por ello cerrado en X. Su unión $h^{-1}(C)$ es, de este modo, cerrada en X. ■

Este teorema también se cumple si A y B son conjuntos abiertos en X; este es, precisamente, un caso especial de la regla de "formulación local de continuidad" dada en el teorema anterior.

EJEMPLO 8. Definamos una función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \leq 0 \\ x/2 & \text{para } x \geq 0. \end{cases}$$

Cada uno de los "trozos" de esta definición es una función continua, y coinciden en la zona de dominio común, que es el conjunto unipuntual $\{0\}$. Puesto que sus dominios son cerrados en $\mathbb{R}$, la función h es continua. Se necesita que los "trozos" de la función coincidan en la zona de dominio común para que sea una función. Las ecuaciones

$$k(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{para } x \leq 0 \\ x + 2 & \text{para } x \geq 0, \end{cases}$$

por ejemplo, no definen una función. Por otro lado, se necesitan algunas limitaciones sobre los conjuntos A y B para garantizar la continuidad. Las ecuaciones

$$l(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{para } x < 0 \\ x + 2 & \text{para } x \geq 0, \end{cases}$$

por ejemplo, definen una función l que lleva $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, y ambos trozos son continuos. Pero l no es continua; la imagen inversa del conjunto abierto $(1, 3)$, por ejemplo, es el conjunto no abierto $[0, 1)$ (véase la Figura 18.5).

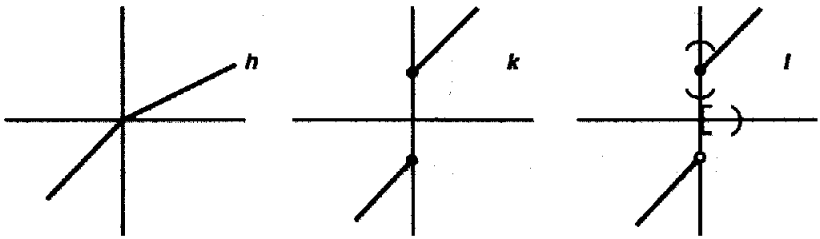


Figura 18.5

Teorema 18.4 (Aplicaciones en productos). *Sea $f : A \to X \times Y$ dada por la ecuación*

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a)).$$

Entonces f es continua si, y sólo si, las funciones

$$f_1 : A \to X \qquad y \qquad f_2 : A \to Y$$

son continuas.

Las aplicaciones f_1 y f_2 se llaman ***funciones coordenadas*** de f.

Demostración. Sean $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ las proyecciones sobre el primer y segundo factor, respectivamente. Estas aplicaciones son continuas, ya que $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ y $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$, y estos conjuntos son abiertos si U y V son abiertos. Obsérvese que, para cada $a \in A$,

$$f_1(a) = \pi_1(f(a)) \qquad \text{y} \qquad f_2(a) = \pi_2(f(a)).$$

Si la función f es continua, entonces f_1 y f_2 son composiciones de funciones continuas, y por tanto continuas. Recíprocamente, supongamos que f_1 y f_2 son continuas. Vamos a probar que para cada elemento básico $U \times V$ de la topología de $X \times Y$, su imagen inversa $f^{-1}(U \times V)$ es abierta. Un punto a está en $f^{-1}(U \times V)$ si, y sólo si, $f(a) \in U \times V$, esto es, si y sólo si $f_1(a) \in U$ y $f_2(a) \in V$. Por tanto,

$$f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V).$$

Puesto que ambos conjuntos $f_1^{-1}(U)$ y $f_2^{-1}(V)$ son abiertos, también lo es su intersección. ■

No existe criterio útil alguno para poder estudiar la continuidad de una aplicación $f : A \times B \to X$ cuyo *dominio* es un espacio producto. Se podría conjeturar que f es continua si es continua "en cada variable separadamente", pero esta conjetura no es cierta (véase el Ejercicio 12).

EJEMPLO 9. En cálculo, una *curva parametrizada* en el plano se define como una aplicación continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Se expresa a menudo en la forma $f(t) = (x(t), y(t))$, y se usa frecuentemente el hecho de que f es una función continua de t si tanto x como y lo son. De modo similar, un *campo de vectores* en el plano

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y) &= P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} \\ &= (P(x, y), Q(x, y)) \end{aligned}$$

se dice que es continuo si tanto P como Q son funciones continuas o, equivalentemente, si $\mathbf{v}$ es continua como aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Ambas afirmaciones son simplemente casos especiales del teorema anterior.

Un modo de construir funciones continuas que se usa bastante en análisis es tomar sumas, diferencias, productos o cocientes de funciones continuas con valores reales. Es un teorema usual que si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son continuas, entonces $f + g$, $f - g$, y $f \cdot g$ son continuas, y f/g es continua si $g(x) \neq 0$ para todo x. Consideraremos este teorema en la sección §21.

Otro método de construir funciones continuas que nos es familiar de análisis es tomar el límite de una sucesión infinita de funciones. Existe un teorema para el caso de que si una sucesión de funciones continuas con valores reales de una variable

Las aplicaciones f_1 y f_2 se llaman ***funciones coordenadas*** de f.

Demostración. Sean $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ las proyecciones sobre el primer y segundo factor, respectivamente. Estas aplicaciones son continuas, ya que $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ y $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$, y estos conjuntos son abiertos si U y V son abiertos. Obsérvese que, para cada $a \in A$,

$$f_1(a) = \pi_1(f(a)) \qquad \text{y} \qquad f_2(a) = \pi_2(f(a)).$$

Si la función f es continua, entonces f_1 y f_2 son composiciones de funciones continuas, y por tanto continuas. Recíprocamente, supongamos que f_1 y f_2 son continuas. Vamos a probar que para cada elemento básico $U \times V$ de la topología de $X \times Y$, su imagen inversa $f^{-1}(U \times V)$ es abierta. Un punto a está en $f^{-1}(U \times V)$ si, y sólo si, $f(a) \in U \times V$, esto es, si y sólo si $f_1(a) \in U$ y $f_2(a) \in V$. Por tanto,

$$f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V).$$

Puesto que ambos conjuntos $f_1^{-1}(U)$ y $f_2^{-1}(V)$ son abiertos, también lo es su intersección. ■

No existe criterio útil alguno para poder estudiar la continuidad de una aplicación $f : A \times B \to X$ cuyo *dominio* es un espacio producto. Se podría conjeturar que f es continua si es continua "en cada variable separadamente", pero esta conjetura no es cierta (véase el Ejercicio 12).

EJEMPLO 9. En cálculo, una *curva parametrizada* en el plano se define como una aplicación continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Se expresa a menudo en la forma $f(t) = (x(t), y(t))$, y se usa frecuentemente el hecho de que f es una función continua de t si tanto x como y lo son. De modo similar, un *campo de vectores* en el plano

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y) &= P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} \\ &= (P(x, y), Q(x, y)) \end{aligned}$$

se dice que es continuo si tanto P como Q son funciones continuas o, equivalentemente, si $\mathbf{v}$ es continua como aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Ambas afirmaciones son simplemente casos especiales del teorema anterior.

Un modo de construir funciones continuas que se usa bastante en análisis es tomar sumas, diferencias, productos o cocientes de funciones continuas con valores reales. Es un teorema usual que si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son continuas, entonces $f + g$, $f - g$, y $f \cdot g$ son continuas, y f/g es continua si $g(x) \neq 0$ para todo x. Consideraremos este teorema en la sección §21.

Otro método de construir funciones continuas que nos es familiar de análisis es tomar el límite de una sucesión infinita de funciones. Existe un teorema para el caso de que si una sucesión de funciones continuas con valores reales de una variable

real converge uniformemente a una función límite, entonces la función límite es necesariamente continua. Este teorema se llama *teorema del límite uniforme*. Se usa, por ejemplo, para demostrar la continuidad de las funciones trigonométricas, cuando se definen estas funciones rigurosamente usando las definiciones de series infinitas del seno y coseno. Este teorema se generaliza a un teorema sobre aplicaciones de un espacio topológico arbitrario X a un espacio métrico Y. Lo probaremos en §21.

Ejercicios

1. Pruebe que para las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la definición ϵ-δ de continuidad implica la definición de conjunto abierto.

2. Supongamos que $f : X \to Y$ es continua. Si x es un punto límite del subconjunto A de X, ¿es necesariamente cierto que $f(x)$ es un punto límite de $f(A)$?

3. Denotemos por X y X' a un mismo conjunto con dos topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, respectivamente. Sea $i : X' \to X$ la función identidad.

(a) Pruebe que i es continua $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$.

(b) Pruebe que i es un homeomorfismo $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

4. Dado $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, pruebe que las aplicaciones $f : X \to X \times Y$ y $g : Y \to X \times Y$ definidas por

$$f(x) = x \times y_0 \qquad \text{y} \qquad g(y) = x_0 \times y$$

son embebimientos.

5. Pruebe que el subespacio (a, b) de $\mathbb{R}$ es homeomorfo con $(0, 1)$, y el subespacio $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ es homeomorfo con $[0, 1]$.

6. Encuentre una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua únicamente en un punto.

7. (a) Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es "continua por la derecha", esto es,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. Pruebe que f es continua cuando se considera como una función de $\mathbb{R}_\ell$ en $\mathbb{R}$.

(b) ¿Puede conjeturar qué funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas cuando se consideran como aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_\ell$? ¿Y como aplicaciones de $\mathbb{R}_\ell$ en $\mathbb{R}_\ell$? Volveremos a esta cuestión en el Capítulo 3.

8. Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ continuas.

(a) Pruebe que el conjunto $\{x \mid f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.

(b) Sea $h : X \to Y$ la función

$$h(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}.$$

Pruebe que h es continua. [*Indicación:* use el lema del pegamiento.]

9. Sean $\{A_\alpha\}$ una colección de subconjuntos de X y $X = \bigcup_\alpha A_\alpha$. Sea $f : X \to Y$ y supongamos que $f \mid A_\alpha$ es continua para cada α.

(a) Pruebe que si la colección $\{A_\alpha\}$ es finita y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.

(b) Encuentre un ejemplo donde la colección $\{A_\alpha\}$ sea numerable y cada A_α sea cerrado, pero f no sea continua.

(c) Una familia indexada de conjuntos $\{A_\alpha\}$ se dice que es ***localmente finita*** si cada punto x de X tiene un entorno que interseca a A_α sólo para un número finito de valores de α. Pruebe que si la familia $\{A_\alpha\}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.

10. Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ funciones continuas. Definamos una aplicación $f \times g : A \times C \to B \times D$ mediante la ecuación

$$(f \times g)(a \times c) = f(a) \times g(c).$$

Pruebe que $f \times g$ es continua.

11. Sea $F : X \times Y \to Z$. Decimos que F es ***continua en cada variable separadamente*** si para cada y_0 en Y, la aplicación $h : X \to Z$ definida por $h(x) = F(x \times y_0)$ es continua y para cada x_0 en X, la aplicación $k : Y \to Z$ definida por $k(y) = F(x_0 \times y)$ es continua. Pruebe que si F es continua, entonces F es continua en cada variable separadamente.

12. Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la ecuación

$$F(x \times y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) & \text{si } x \times y \neq 0 \times 0 \\ 0 & \text{si } x \times y = 0 \times 0. \end{cases}$$

(a) Pruebe que F es continua en cada variable separadamente.

(b) Calcule la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = F(x \times x)$.

(c) Pruebe que F no es continua.

13. Sean $A \subset X$, $f : A \to Y$ continua e Y de Hausdorff. Pruebe que si f puede extenderse a una función continua $g : \bar{A} \to Y$, entonces g está unívocamente determinada por f.

§19 La topología producto

Volvemos ahora, para el resto del capítulo, al análisis de varios métodos para definir topologías sobre conjuntos.

Previamente hemos definido una topología sobre el producto $X \times Y$ de dos espacios topológicos. En esta sección ampliamos esta definición a productos cartesianos más generales.

Para ello consideraremos los productos cartesianos

$$X_1 \times \cdots \times X_n \qquad \text{y} \qquad X_1 \times X_2 \times \cdots$$

donde cada X_i es un espacio topológico. Hay dos métodos posibles para proceder. Uno es tomar como base todos los conjuntos de la forma $U_1 \times \cdots \times U_n$ en el primer caso, y de la forma $U_1 \times U_2 \times \cdots$ en el segundo caso, donde U_i es un conjunto abierto de X_i para cada i. Este procedimiento efectivamente define una topología sobre el producto cartesiano que llamaremos *topología por cajas*.

Otra forma de proceder es generalizar la formulación de subbase de la definición dada en §15. En este caso, tomamos como subbase todos los conjuntos de la forma $\pi_i^{-1}(U_i)$, donde i es cualquier índice y U_i es un conjunto abierto de X_i. Esta topología se denomina *topología producto*.

¿En qué se diferencian estas topologías? Considere el típico elemento básico B para la segunda topología. Es una intersección finita de elementos de la subbase $\pi_i^{-1}(U_i)$, digamos para $i = i_1, \ldots, i_k$. Entonces, un punto $\mathbf{x}$ pertenece a B si, y sólo si, $\pi_i(\mathbf{x})$ pertenece a U_i para $i = i_1, \ldots, i_k$; no existe restricción alguna sobre $\pi_i(\mathbf{x})$ para otros valores de i.

Se sigue que estas dos topologías coinciden para el producto cartesiano finito y difieren para el producto infinito. Lo que no está claro es por qué parece que preferimos la segunda topología. Esta es la cuestión que investigaremos en esta sección.

Antes de proceder, sin embargo, introduciremos una noción más general de producto cartesiano. Nosotros hemos definido el producto cartesiano de una familia indexada de conjuntos sólo en los casos donde el conjunto de índices era el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ o el conjunto $\mathbb{Z}_+$. Ahora consideramos el caso donde el conjunto de índices es completamente arbitrario.

Definición. Sea J un conjunto de índices. Dado un conjunto cualquiera X, definimos una ***J-upla*** de elementos de X como una función $\mathbf{x}\colon J \to X$. Si α es un elemento de J, a menudo denotamos el valor de $\mathbf{x}$ en α mediante x_α en lugar de $\mathbf{x}(\alpha)$; lo llamaremos la α-ésima ***coordenada*** de $\mathbf{x}$. Y a menudo denotaremos a la función $\mathbf{x}$ mediante el símbolo

$$(x_\alpha)_{\alpha \in J},$$

que es lo más cercano a una "notación upla" para un conjunto arbitrario de índices J. Denotamos al conjunto de todas las J-uplas de elementos de X por X^J.

Definición. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de conjuntos indexada y sea $X = \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$. El ***producto cartesiano*** de esta familia indexada, denotado por

$$\prod_{\alpha\in J} A_\alpha,$$

se define como el conjunto de todas las J-uplas $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ de elementos de X tales que $x_\alpha \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in J$. Esto es, es el conjunto de todas las funciones

$$\mathbf{x} : J \to \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$$

tales que $\mathbf{x}(\alpha) \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in J$.

En ocasiones denotaremos el producto simplemente por $\prod A_\alpha$, y a su elemento general por (x_α), si el conjunto índice se sobreentiende.

Si todos los conjuntos A_α son iguales a un conjunto X, entonces el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ es exactamente el conjunto X^J de *todas* las J-uplas de elementos de X. Algunas veces utilizaremos la "notación upla" para los elementos de X^J, y otras veces usaremos notación funcional, dependiendo de la que sea más conveniente.

Definición. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada de espacios topológicos. Tomemos como base para una topología sobre el espacio producto

$$\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$$

la colección de todos los conjuntos de la forma

$$\prod_{\alpha\in J} U_\alpha,$$

donde U_α es abierto en X_α, para cada $\alpha \in J$. La topología generada por esta base se denomina ***topología por cajas***.

Esta colección satisface la primera condición para una base, porque $\prod X_\alpha$ es, por sí solo, un elemento básico y satisface la segunda condición, porque la intersección de cualesquiera dos elementos básicos es otro elemento básico:

$$(\prod_{\alpha\in J} U_\alpha) \cap (\prod_{\alpha\in J} V_\alpha) = \prod_{\alpha\in J} (U_\alpha \cap V_\alpha).$$

Ahora generalizamos la formulación de subbase de la definición. Sea

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_\beta$$

la función que asigna a cada elemento del espacio producto su coordenada β-ésima,

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha\in J}) = x_\beta;$$

se denomina ***aplicación proyección*** asociada con el índice β.

Definición. Denotemos por $\mathcal{S}_\beta$ a la colección

$$\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \mid U_\beta \text{ es abierto en } X_\beta\}$$

y denotemos por $\mathcal{S}$ a la unión de esas colecciones,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta\in J} \mathcal{S}_\beta.$$

La topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ se denomina ***topología producto***. En esta topología, $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ se denomina ***espacio producto***.

Para comparar estas topologías, consideramos la base $\mathcal{B}$ que $\mathcal{S}$ genera. La colección $\mathcal{B}$ consta de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$. Si intersecamos elementos que pertenecen al mismo conjunto $\mathcal{S}_\beta$ no obtenemos nada nuevo, porque

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap \pi_\beta^{-1}(V_\beta) = \pi_\beta^{-1}(U_\beta \cap V_\beta);$$

la intersección de dos elementos de $\mathcal{S}_\beta$, o de un número finito de tales elementos, es de nuevo un elemento de $\mathcal{S}_\beta$. Sólo obtenemos algo nuevo cuando intersecamos elementos de distintos conjuntos $\mathcal{S}_\beta$. El típico elemento básico $\mathcal{B}$ puede, así, ser descrito como sigue: sea $\beta_1, \ldots, \beta_n$ un conjunto finito de índices distintos del conjunto índice J, y sea U_{β_i} un conjunto abierto en X_{β_i} para $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$B = \pi_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1}) \cap \pi_{\beta_2}^{-1}(U_{\beta_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n})$$

es el elemento típico de $\mathcal{B}$.

Ahora bien, un punto $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ está en B si, y sólo si, su coordenada β_1-ésima está en U_{β_1}, su coordenada β_2-ésima está en U_{β_2}, y así sucesivamente. No existe restricción alguna sobre la coordenada α-ésima de $\mathbf{x}$ si α no es uno de los índices $\beta_1 \ldots, \beta_n$. Como resultado, podemos escribir B como el producto

$$B = \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$$

donde U_α denota el espacio entero X_α si $\alpha \neq \beta_1, \ldots, \beta_n$. Todo esto se resume en el siguiente teorema:

Teorema 19.1 (Comparación de las topologías por cajas y producto). *La topología por cajas sobre $\prod X_\alpha$ tiene como base a todos los conjuntos de la forma $\prod U_\alpha$, donde U_α es abierto en X_α para cada α. La topología producto sobre $\prod X_\alpha$ tiene como base a todos los conjuntos de la forma $\prod U_\alpha$, donde U_α es abierto en X_α para cada α y U_α es igual a X_α excepto para un número finito de valores de α.*

Dos cosas están inmediatamente claras. En primer lugar, para productos finitos $\prod_{\alpha=1}^n X_\alpha$, las dos topologías son, precisamente, la misma. En segundo lugar, la topología por cajas es, en general, más fina que la topología producto.

Lo que no está tan claro es por qué preferimos la topología producto a la topología por cajas. La respuesta aparecerá a medida que continuemos nuestro estudio de la topología. Encontraremos que un número de teoremas importantes sobre productos finitos también se cumplirán para productos arbitrarios si usamos la topología producto, pero no si utilizamos la topología por cajas. Como consecuencia, la topología producto es importantísima en matemáticas. La topología por cajas no es tan importante; la usaremos principalmente para construir contraejemplos. Por tanto, convendremos lo siguiente:

> *Siempre que consideremos el producto $\prod X_\alpha$ lo supondremos con la topología producto, a menos que específicamente establezcamos lo contrario.*

Algunos de los teoremas que hemos probado para el producto $X \times Y$ se cumplen también para el producto $\prod X_\alpha$ sin importar la topología que usemos. Los enunciamos a continuación, donde la mayoría de las demostraciones se dejan como ejercicios.

Teorema 19.2. *Supongamos que la topología sobre cada espacio X_α está dada por una base $\mathcal{B}_\alpha$. La colección de todos los conjuntos de la forma*

$$\prod_{\alpha \in J} B_\alpha$$

donde $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ para cada α, es una base para la topología por cajas sobre $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$.

La colección de todos los conjuntos de la misma forma, donde $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ para un conjunto finito de índices α y $B_\alpha = X_\alpha$ para todos los índices restantes, servirá como base para la topología producto $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$.

EJEMPLO 1. Consideremos el espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$. Una base de $\mathbb{R}$ consiste en todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$; de aquí, una base para la topología de $\mathbb{R}^n$ consiste en todos los productos de la forma

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n).$$

Puesto que $\mathbb{R}^n$ es un producto finito, las topologías por cajas y producto coinciden. Siempre que estudiemos el espacio $\mathbb{R}^n$, supondremos que se da esta topología, a menos que digamos lo contrario.

Teorema 19.3. *Sea A_α un subespacio de X_α, para cada $\alpha \in J$. Entonces $\prod A_\alpha$ es un subespacio de $\prod X_\alpha$ si en ambos productos está dada la topología por cajas, o si en ambos productos está dada la topología producto.*

Teorema 19.4. *Si cada espacio X_α es un espacio de Hausdorff, entonces $\prod X_\alpha$ es un espacio de Hausdorff en las topologías por cajas y producto.*

Teorema 19.5. *Sea $\{X_\alpha\}$ una familia indexada de espacios y sea $A_\alpha \subset X_\alpha$, para cada α. Si $\prod X_\alpha$ está dotado de la topología por cajas o producto, entonces*

$$\prod \bar{A}_\alpha = \overline{\prod A_\alpha}.$$

Demostración. Sea $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ un punto de $\prod \bar{A}_\alpha$; probaremos que $\mathbf{x} \in \overline{\prod A_\alpha}$. Sea $U = \prod U_\alpha$ un elemento básico, bien para la topología por cajas, bien para la topología producto que contiene a $\mathbf{x}$. Ya que $x_\alpha \in \bar{A}_\alpha$ podemos elegir un punto $y_\alpha \in U_\alpha \cap A_\alpha$ para cada α. Entonces $\mathbf{y} = (y_\alpha)$ pertenece tanto a U como a $\prod A_\alpha$. Puesto que U es arbitrario, se sigue que $\mathbf{x}$ pertenece a la clausura de $\prod A_\alpha$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ pertenece a la clausura de $\prod A_\alpha$, en cualquiera de las dos topologías. Probaremos que para cualquier índice dado β, tenemos que $x_\beta \in \bar{A}_\beta$. Sea V_β un conjunto abierto arbitrario de X_β que contiene a x_β. Puesto que $\pi_\beta^{-1}(V_\beta)$ es abierto en $\prod X_\alpha$ en cualquiera de las dos topologías, contiene un punto $\mathbf{y} = (y_\alpha)$ de $\prod A_\alpha$. Entonces y_β pertenece a $V_\beta \cap A_\beta$. Se sigue que $x_\beta \in \bar{A}_\beta$. ■

Hasta aquí no ha aparecido razón alguna para preferir la topología producto a la topología por cajas. Es cuando intentamos generalizar nuestro teorema anterior sobre continuidad de aplicaciones en espacios producto cuando nos encontramos con la primera diferencia. Aquí tenemos un teorema que no se cumple si $\prod X_\alpha$ está dotado con la topología por cajas:

Teorema 19.6. *Sea $f : A \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ dada por la ecuación*

$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J}$$

donde $f_\alpha : A \to X_\alpha$ para cada α. Tomemos sobre $\prod X_\alpha$ la topología producto. Entonces la función f es continua sí, y sólo si, cada función f_α es continua.

Demostración. Sea π_β la proyección del producto sobre su factor β-ésimo. La función π_β es continua, por lo que si U_β es abierto en X_β, el conjunto $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ es un elemento de la subbase para la topología producto sobre X_α. Ahora supongamos que $f : A \to \prod X_\alpha$ es continua. La función f_β es igual a la composición $\pi_\beta \circ f$ que, al ser la composición de dos funciones continuas, es continua.

Recíprocamente, supongamos que cada función coordenada f_α es continua. Para probar que f es continua, es suficiente demostrar que la imagen inversa mediante f de cada elemento de la subbase es abierto en A; hemos insistido en este hecho cuando definimos las funciones continuas. Un elemento característico de la subbase para la topología producto sobre $\prod X_\alpha$ es un conjunto de la forma $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$, donde β es algún índice y U_β es abierto en X_β. Ahora,

$$f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(U_\beta)) = f_\beta^{-1}(U_\beta)$$

porque $f_\beta = \pi_\beta \circ f$. Puesto que f_β es continua, este conjunto es abierto en A, como se deseaba. ■

¿Por qué no se cumple este teorema si usamos la topología por cajas? Probablemente, el argumento más convincente sea ver un ejemplo.

EJEMPLO 2. Consideremos $\mathbb{R}^\omega$, el producto numerable de $\mathbb{R}$ consigo mismo infinitas veces. Recuérdese que

$$\mathbb{R}^\omega = \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} X_n$$

donde $X_n = \mathbb{R}$ para todo n. Definamos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ mediante la ecuación

$$f(t) = (t, t, t, \ldots);$$

la n-ésima función coordenada de f es la función $f_n(t) = t$. Cada una de las funciones coordenadas $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua; así pues, la función f es continua si $\mathbb{R}^\omega$ está dotado con la topología producto. Pero f no es continua si $\mathbb{R}^\omega$ está dotado con la topología por cajas. Consideremos, por ejemplo, el elemento básico

$$B = (-1, 1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times \cdots$$

para la topología por cajas. Afirmamos que $f^{-1}(B)$ no es abierto en $\mathbb{R}$. Si $f^{-1}(B)$ fuera abierto en $\mathbb{R}$, contendría algún intervalo $(-\delta, \delta)$ alrededor del punto 0. Esto significaría que $f((-\delta, \delta)) \subset B$, por lo que, aplicando π_n a ambos lados de la inclusión,

$$f_n((-\delta, \delta)) = (-\delta, \delta) \subset (-1/n, 1/n)$$

para todo n, lo que es una contradicción.

Ejercicios

1. Pruebe el Teorema 19.2.
2. Pruebe el Teorema 19.3.
3. Pruebe el Teorema 19.4.

4. Pruebe que $(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ es homeomorfo a $X_1 \times \cdots \times X_n$.

5. Una de las implicaciones establecidas en el Teorema 19.6 se cumple para la topología por cajas. ¿Cuál es?

6. Sea $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ una sucesión de puntos del espacio producto $\prod X_\alpha$. Pruebe que esta sucesión converge al punto $\mathbf{x}$ si, y sólo si, la sucesión $\pi_\alpha(\mathbf{x}_1), \pi_\alpha(\mathbf{x}_2), \ldots$ converge a $\pi_\alpha(\mathbf{x})$ para cada α. ¿Es cierto este hecho si se usa la topología por cajas en lugar de la topología producto?

7. Sea $\mathbb{R}^\infty$ el subconjunto de $\mathbb{R}^\omega$ formado por todas las sucesiones que son "finalmente cero", esto es, todas las sucesiones $(x_1, x_2, \ldots)$ tales que $x_i \neq 0$ sólo para un número finito de valores de i. ¿Cuál es la clausura de $\mathbb{R}^\infty$ en $\mathbb{R}^\omega$ en las topologías por cajas y producto? Justifique la respuesta.

8. Dadas las sucesiones $(a_1, a_2, \ldots)$ y $(b_1, b_2, \ldots)$ de números reales con $a_i > 0$ para todo i, definamos $h : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}^\omega$ mediante la ecuación

$$h((x_1, x_2, \ldots)) = (a_1 x_1 + b_1, a_2 x_2 + b_2, \ldots),$$

Pruebe que si $\mathbb{R}^\omega$ está dotado con la topología producto, h es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^\omega$ consigo mismo. ¿Qué ocurre si $\mathbb{R}^\omega$ está dotado con la topología por cajas?

9. Pruebe que el axioma de elección es equivalente a la afirmación de que para cualquier familia indexada $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de conjuntos no vacíos, con $J \neq \varnothing$, el producto cartesiano

$$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$$

es no vacío.

10. Sean A un conjunto, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de espacios y $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de funciones $f_\alpha : A \to X_\alpha$.

(a) Pruebe que existe una única topología más gruesa $\mathcal{T}$ sobre A relativa a la cual las funciones f_α son continuas.

(b) Sea

$$\mathcal{S}_\beta = \{f_\beta^{-1}(U_\beta) \mid U_\beta \text{ es abierto en } X_\beta\}$$

y sea $\mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}_\beta$. Pruebe que $\mathcal{S}$ es una subbase para $\mathcal{T}$.

(c) Pruebe que una aplicación $g : Y \to A$ es continua relativa a $\mathcal{T}$ si, y sólo si, cada aplicación $f_\alpha \circ g$ es continua.

(d) Sea $f : A \to \prod X_\alpha$ definida mediante la ecuación

$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J}$$

y denotemos por Z al subespacio $f(A)$ del espacio producto $\prod X_\alpha$. Pruebe que la imagen por f de cada elemento de $\mathcal{T}$ es un conjunto abierto de Z.

§20 La topología métrica

Uno de los métodos más importantes y frecuentemente usados para dotar de una topología a un conjunto es definir la topología en términos de una distancia en el conjunto. Las topologías dadas de esta forma se sitúan en el centro del análisis moderno, por ejemplo. En esta sección, definiremos la topología métrica y daremos unos cuantos ejemplos. En la sección siguiente consideraremos algunas de las propiedades que satisfacen las topologías métricas.

Definición. Una ***distancia*** en un conjunto X es una función

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

satisfaciendo las siguientes propiedades:

(1) $d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$; la igualdad se da si, y sólo si, $x = y$.

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in X$.

(3) (Desigualdad triangular) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ para todos $x, y, z \in X$.

Dada una distancia d en X, el número $d(x, y)$ se llama a menudo ***distancia*** entre x e y en la distancia d. Dado $\epsilon > 0$, consideremos el conjunto

$$B_d(x, \epsilon) = \{y \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

de todos los puntos y cuya distancia a x es menor que ϵ, que se denomina ***bola de radio ϵ centrada en x***. Algunas veces omitiremos la distancia d de la notación y escribiremos esta bola simplemente como $B(x, \epsilon)$, cuando no exista problema de confusión.

Definición. Si d es una distancia en el conjunto X, entonces la colección de todas las bolas $B_d(x, \epsilon)$ de radio ϵ, para $x \in X$ y $\epsilon > 0$, es una base para una topología sobre X, denominada ***topología métrica*** inducida por d.

La primera condición para una base es trivial, puesto que $x \in B(x, \epsilon)$, para cualquier $\epsilon > 0$. Antes de comprobar la segunda condición para una base, demostramos que si y es un punto del elemento básico $B(x, \epsilon)$, entonces existe un elemento básico $B(y, \delta)$ *centrado* en y que está contenido en $B(x, \epsilon)$. Definamos δ como el número positivo $\epsilon - d(x, y)$. Entonces $B(y, \delta) \subset B(x, \epsilon)$, por lo que si $z \in B(y, \delta)$, entonces $d(y, z) < \epsilon - d(x, y)$, con lo que concluimos que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \epsilon.$$

Véase la Figura 20.1.

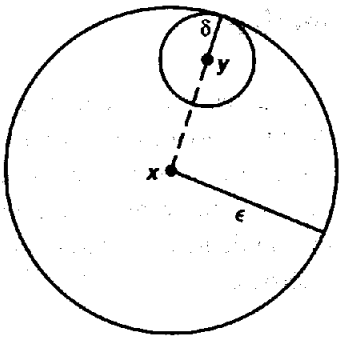


Figura 20.1

Para comprobar la segunda condición para una base, sean B_1 y B_2 dos elementos básicos y sea $y \in B_1 \cap B_2$. Acabamos de ver que podemos elegir números positivos δ_1 y δ_2 de tal modo que $B(y, \delta_1) \subset B_1$ y $B(y, \delta_2) \subset B_2$. Tomando δ como el más pequeño de δ_1 y δ_2, concluimos que $B(y, \delta) \subset B_1 \cap B_2$.

Usando lo que acabamos de probar, podemos reformular la definición de topología métrica como sigue:

> *Un conjunto U es abierto en la topología métrica inducida por d si, y sólo si, para cada $y \in U$ existe un $\delta > 0$ tal que $B_d(y, \delta) \subset U$.*

Claramente, esta condición implica que U es abierto. Recíprocamente, si U es abierto, contiene un elemento básico $B = B_d(x, \epsilon)$ que contiene a y, y B, a su vez, contiene un elemento básico $B_d(y, \delta)$ centrado en y.

EJEMPLO 1. Dado un conjunto X, definimos

$$\begin{aligned} d(x, y) &= 1 \qquad \text{si } x \neq y, \\ d(x, y) &= 0 \qquad \text{si } x = y. \end{aligned}$$

Es trivial comprobar que d es una distancia. La topología que induce es la topología discreta; el elemento básico $B(x, 1)$, por ejemplo, consiste únicamente en el punto x.

EJEMPLO 2. La distancia usual sobre los números reales $\mathbb{R}$ está definida por la ecuación

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Es fácil comprobar que d es una distancia. La topología que induce es la misma que la topología del orden: cada elemento (a, b) básico para la topología del orden es un elemento básico para la topología métrica; efectivamente,

$$(a, b) = B(x, \epsilon)$$

donde $x = (a + b)/2$ y $\epsilon = (b - a)/2$. Y recíprocamente, cada bola $B(x, \epsilon)$ de radio ϵ es igual a un intervalo abierto: el intervalo $(x - \epsilon, x + \epsilon)$.

Definición. Si X es un espacio topológico, se dice que X es ***metrizable*** si existe una distancia d en el conjunto X que induce la topología de X. Un ***espacio métrico*** es un espacio metrizable X junto a una distancia específica d que da la topología de X.

Muchos de los espacios importantes para las matemáticas son metrizables, pero algunos no lo son. La metrizabilidad es siempre un atributo altamente deseable para un espacio, puesto que la existencia de una distancia nos ofrece una valiosa herramienta para probar teoremas sobre dicho espacio.

Sin embargo, es un problema de importancia fundamental en topología encontrar condiciones sobre un espacio topológico que garanticen que es metrizable. Uno de nuestros objetivos en el Capítulo 4 será encontrar tales condiciones; se expresan allí en el famoso teorema llamado *teorema de metrización de Urysohn*. Aparecerán más teoremas sobre metrización en el Capítulo 6. En esta sección nos conformaremos simplemente con probar que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^\omega$ son metrizables.

Aunque el problema de la metrización es un problema importante en topología, el estudio de los espacios métricos como tales no pertenece propiamente a la topología tanto como al análisis. La metrizabilidad de un espacio depende solamente de la topología del espacio en cuestión, pero no, en general, de las propiedades que implica una distancia específica para X. Por ejemplo, se puede hacer la siguiente definición en un espacio métrico:

Definición. Sea X un espacio métrico con una distancia d. Un subconjunto A de X se dice que está ***acotado*** si existe algún número M tal que

$$d(a_1, a_2) \leq M$$

para todo par a_1, a_2 de puntos de A. Si A es un conjunto acotado y no vacío, el ***diámetro*** de A se define como el número

$$\operatorname{diám} A = \sup\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}.$$

La acotación de un conjunto no es una propiedad topológica, porque depende de la distancia particular d que se use para X. Por ejemplo, si X es un espacio métrico con distancia d, entonces existe una distancia $\bar{d}$ que da la topología de X, relativa a la cual *cada* subconjunto de X está acotado. Se define como sigue:

Teorema 20.1. *Sea X un espacio métrico con una distancia d. Se define $\bar{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ mediante la ecuación*

$$\bar{d}(x, y) = \operatorname{mín}\{d(x, y), 1\}.$$

Entonces $\bar{d}$ es una distancia que induce la misma topología que d.

La distancia $\bar{d}$ se denomina ***distancia acotada*** correspondiente a d.

Demostración. La comprobación de las primeras dos condiciones de una distancia es trivial. Comprobemos la desigualdad triangular:

$$\bar{d}(x,z) \leq \bar{d}(x,y) + \bar{d}(y,z).$$

Ahora bien, si $d(x,y) \geq 1$ ó $d(y,z) \geq 1$, entonces la parte derecha de esta desigualdad es, al menos, 1; puesto que la parte izquierda es (por definición) como mucho 1, la desigualdad se satisface. Queda estudiar el caso en el que $d(x,y) < 1$ y $d(y,z) < 1$. En este caso, tenemos que

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = \bar{d}(x,y) + \bar{d}(y,z).$$

Como $\bar{d}(x,z) \leq d(x,z)$ por definición, la desigualdad triangular se cumple para $\bar{d}$.

Ahora bien, recordemos que, en cualquier espacio métrico, la colección de las bolas de radio ϵ con $\epsilon < 1$ forma una base para la topología métrica, puesto que cada elemento básico que contiene a x contiene una bola de esa forma, centrada en x y de radio ϵ. Se sigue que d y $\bar{d}$ inducen la misma topología sobre X, porque las colecciones de bolas de radio ϵ, con $\epsilon < 1$, para estas dos distancias son idénticas. ■

Estudiaremos a continuación algunos espacios que nos son familiares y probaremos que son metrizables.

Definición. Dado $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$, se definen la ***norma*** de $\mathbf{x}$ mediante la ecuación

$$||x|| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2},$$

y la ***distancia euclídea*** d sobre $\mathbb{R}^n$ por la ecuación

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = [(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}.$$

Definimos la ***distancia del supremo*** ρ por la ecuación

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}.$$

La demostración de que d es una distancia requiere algo de trabajo; probablemente ya le sea familiar. Si no, en los ejercicios podrá encontrar una idea de la prueba. Casi nunca tendremos la ocasión de usar esta distancia en $\mathbb{R}^n$.

Probar que ρ es una distancia es más fácil. Sólo la desigualdad triangular no es trivial. De la desigualdad triangular para $\mathbb{R}$ se sigue que, para cada entero positivo i,

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|.$$

Entonces, por definición de ρ,

$$|x_i - z_i| \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Por consiguiente,

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \text{máx}\{|x_i - z_i|\} \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

como se deseaba.

Sobre la recta real $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, estas dos distancias coinciden con la distancia usual de $\mathbb{R}$. En el plano $\mathbb{R}^2$, los elementos básicos para d se pueden dibujar como regiones circulares, mientras que los elementos básicos para ρ se pueden dibujar como regiones cuadradas.

Ahora veremos que cada una de estas distancias induce la topología usual sobre $\mathbb{R}^n$. Necesitaremos el siguiente lema:

Lema 20.2. *Sean d y d' dos distancias sobre el conjunto X, y $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ las topologías que inducen, respectivamente. Entonces $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$ si, y sólo si, para cada x en X y cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que*

$$B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon).$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$. Dado el elemento básico $B_d(x, \epsilon)$ para $\mathcal{T}$, existe, por el Lema 13.3, un elemento básico B' para la topología $\mathcal{T}'$ tal que $x \in B' \subset B_d(x, \epsilon)$. Dentro de B' podemos tomar una bola $B_{d'}(x, \delta)$ centrada en x.

Recíprocamente, supongamos que se cumple la condición δ-ϵ. Dado un elemento básico B para $\mathcal{T}$ que contenga a x, podemos tomar dentro de B una bola $B_d(x, \epsilon)$ centrada en x. Por la condición dada, existe un δ tal que $B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$. Entonces se aplica el Lema 13.3 para probar que $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$. ■

Teorema 20.3. *Las topologías sobre $\mathbb{R}^n$ inducidas por la distancia euclídea d y la distancia del supremo ρ son la misma que la topología producto sobre $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sean $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ dos puntos de $\mathbb{R}^n$. Es un simple ejercicio de álgebra comprobar que

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n}\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

La primera desigualdad nos dice que

$$B_d(\mathbf{x}, \epsilon) \subset B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon)$$

para todos $\mathbf{x}$ y ϵ, puesto que si $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon$, entonces $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon$ también. De modo similar, la segunda desigualdad nos dice que

$$B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon/\sqrt{n}) \subset B_d(\mathbf{x}, \epsilon)$$

para todos $\mathbf{x}$ y ϵ. Se sigue, del lema anterior, que las dos topologías asociadas a las distancias son la misma.

Ahora demostraremos que la topología producto es la misma que la dada por la distancia ρ. En primer lugar, sea

$$B = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

un elemento básico para la topología producto, y sea $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un elemento de B. Para cada i, existe un ϵ_i tal que

$$(x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i) \subset (a_i, b_i),$$

y sea $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$. Entonces $B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon) \subset B$, como se puede comprobar. Por tanto, la ρ-topología es más fina que la topología producto.

Recíprocamente, sea $B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon)$ un elemento básico para la ρ-topología. Dado el elemento $\mathbf{y} \in B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon)$, necesitamos encontrar un elemento básico B para la topología producto tal que

$$\mathbf{y} \in B \subset B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon).$$

Pero esto es trivial, pues

$$B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon) = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times \cdots \times (x_n - \epsilon, x_n + \epsilon)$$

es ya un elemento básico para la topología producto. ∎

Ahora consideraremos el producto cartesiano infinito $\mathbb{R}^\omega$. Es natural intentar generalizar las distancias d y ρ a este espacio. Por ejemplo, se puede intentar definir una distancia d sobre $\mathbb{R}^\omega$ por la ecuación

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$$

Pero esta ecuación no siempre tiene sentido, puesto que las series en juego no tienen por qué ser convergentes (esta ecuación, sin embargo, define una distancia en cierto subconjunto importante de $\mathbb{R}^\omega$; véanse los ejercicios).

Análogamente, se puede intentar generalizar la distancia del supremo ρ a $\mathbb{R}^\omega$ definiendo

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{|x_n - y_n|\}.$$

De nuevo, esta fórmula no siempre tiene sentido. Si, aun así, reemplazamos la distancia usual $d(x, y) = |x-y|$ en $\mathbb{R}$ por su homóloga acotada, $\bar{d}(x, y) = \text{mín}\{|x-y|, 1\}$, entonces esta definición *tiene* sentido; da una distancia en $\mathbb{R}^\omega$ llamada *distancia uniforme*. La distancia uniforme se puede definir más generalmente sobre el producto cartesiano $\mathbb{R}^J$ para J arbitrario, como sigue:

Definición. Dado un conjunto de índices J, y puntos dados $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$ e $\mathbf{y} = (y_\alpha)_{\alpha \in J}$ de $\mathbb{R}^J$, definimos una distancia $\bar{\rho}$ sobre $\mathbb{R}^J$ por la ecuación

$$\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) \mid \alpha \in J\}$$

donde $\bar{d}$ es la distancia acotada sobre $\mathbb{R}$. Es fácil comprobar que $\bar{\rho}$ es, efectivamente, una distancia; se denomina ***distancia uniforme*** sobre $\mathbb{R}^J$, y la topología que induce se denomina ***topología uniforme***.

La relación entre esta topología y las topologías producto y por cajas es la siguiente:

Teorema 20.4. *La topología uniforme sobre $\mathbb{R}^J$ es más fina que la topología producto y más gruesa que la topología por cajas; estas tres topologías son todas distintas si J es infinito.*

Demostración. Supongamos que nos dan un punto $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$, y un elemento básico $\prod U_\alpha$ para la topología producto, alrededor de $\mathbf{x}$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ los índices para los cuales $U_\alpha \neq \mathbb{R}$. Entonces, para cada i, elegimos $\epsilon_i > 0$ de manera que la bola de radio ϵ_i centrada en x_{α_i} en la distancia $\bar{d}$ esté contenida en U_α; esto lo podemos hacer porque U_{α_i} es abierto en $\mathbb{R}$. Sea $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$, entonces la bola de radio ϵ centrada en $\mathbf{x}$ en la distancia $\bar{\rho}$ está contenida en $\prod U_\alpha$. En efecto, si $\mathbf{z}$ es un punto de $\mathbb{R}^J$ tal que $\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) < \epsilon$, entonces $\bar{d}(x_\alpha, z_\alpha) < \epsilon$ para todo α, por lo que $\mathbf{z} \in \prod U_\alpha$. Se sigue que la topología uniforme es más fina que la topología producto.

Por otro lado, sea B la bola de radio ϵ centrada en $\mathbf{x}$ en la distancia $\bar{\rho}$. Entonces el entorno caja de $\mathbf{x}$

$$U = \prod (x_\alpha - \frac{1}{2}\epsilon, x_\alpha + \frac{1}{2}\epsilon)$$

está contenido en B. Pero si $\mathbf{y} \in U$, entonces $\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) < \frac{1}{2}\epsilon$ para todo α, por lo que $\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \frac{1}{2}\epsilon$. Probar que estas tres topologías son distintas si J es infinito es una tarea que dejaremos para los ejercicios. ■

En el caso en que J es infinito, aún no hemos determinado si $\mathbb{R}^J$ es metrizable en la topología producto o por cajas. Resulta que el único de estos casos donde $\mathbb{R}^J$ es metrizable es el caso donde J es numerable y $\mathbb{R}^J$ tiene la topología producto. Lo veremos más adelante.

Teorema 20.5. *Sea $\bar{d}(a,b) = \min\{|a-b|, 1\}$ la distancia acotada usual sobre $\mathbb{R}$. Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son dos puntos de $\mathbb{R}^\omega$, definimos*

$$D(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sup\left\{\frac{\bar{d}(x_i,y_i)}{i}\right\}.$$

Entonces D es una distancia que induce la topología producto sobre $\mathbb{R}^\omega$.

Demostración. Las propiedades de una distancia se satisfacen trivialmente excepto para la desigualdad triangular, que se prueba al observar que, para todo i,

$$\frac{\bar{d}(x_i,z_i)}{i} \leq \frac{\bar{d}(x_i,y_i)}{i} + \frac{\bar{d}(y_i,z_i)}{i} \leq D(\mathbf{x},\mathbf{y}) + D(\mathbf{y},\mathbf{z})$$

de manera que

$$\sup\left\{\frac{\bar{d}(x_i,y_i)}{i}\right\} \leq D(\mathbf{x},\mathbf{y}) + D(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

El hecho de que D induce la topología producto requiere un poco más de trabajo. En primer lugar, sea U abierto en la topología métrica y sea $\mathbf{x} \in U$; encontraremos un conjunto abierto V en la topología producto tal que $\mathbf{x} \in V \subset U$. Elegimos una bola $B_D(\mathbf{x},\epsilon)$ que esté en U. Después elegimos N suficientemente grande para que $1/N < \epsilon$. Finalmente, sea V el elemento básico para la topología producto

$$V = (x_1-\epsilon, x_1+\epsilon) \times \cdots \times (x_N-\epsilon, x_N+\epsilon) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots.$$

Afirmamos que $V \subset B_D(\mathbf{x},\epsilon)$: dado cualquier $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^\omega$,

$$\frac{\bar{d}(x_i,y_i)}{i} \leq \frac{1}{N} \qquad \text{para } i \geq N.$$

Por lo tanto,

$$D(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq \text{máx}\left\{\frac{\bar{d}(x_1,y_1)}{1}, \cdots, \frac{\bar{d}(x_N,y_N)}{N}, \frac{1}{N}\right\}.$$

Si $\mathbf{y}$ está en V, esta expresión es más pequeña que ϵ, por lo que $V \subset B_D(\mathbf{x},\epsilon)$, como se deseaba.

Recíprocamente, consideremos un elemento básico

$$U = \prod_{i\in\mathbb{Z}_+} U_i$$

para la topología producto, donde U_i es abierto en $\mathbb{R}$ para $i = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $U_i = \mathbb{R}$ para el resto de índices i. Dado $\mathbf{x} \in U$, podemos tomar un conjunto abierto V en la topología métrica tal que $\mathbf{x} \in V \subset U$. Tomemos un intervalo $(x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i)$

en $\mathbb{R}$ centrado en x_i y contenido en U_i para $i = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$; elijamos cada $\epsilon_i \leq 1$. Entonces definimos

$$\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_i/i \mid i = \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}.$$

Afirmamos que

$$\mathbf{x} \in B_D(\mathbf{x}, \epsilon) \subset U.$$

Sea $\mathbf{y}$ un punto de $B_D(\mathbf{x}, \epsilon)$. Entonces, para todo i,

$$\frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} \leq D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon.$$

Ahora bien, si $i = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, entonces $\epsilon \leq \epsilon_i/i$, por lo que $\bar{d}(x_i, y_i) < \epsilon_i \leq 1$; se sigue que $| x_i - y_i | < \epsilon_i$. Por tanto, $\mathbf{y} \in \prod U_i$, como se deseaba. ■

Ejercicios

1. (a) En $\mathbb{R}^n$, definimos

$$d'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

Pruebe que d' es una distancia que induce la topología usual de $\mathbb{R}^n$. Dé una idea de cómo son los elementos básicos para d' cuando $n = 2$.

(b) De modo más general, dado $p \geq 1$, definimos

$$d'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right]^{1/p}$$

para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que d' es una distancia. Pruebe que induce la topología usual sobre $\mathbb{R}^n$.

2. Pruebe que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología del orden del diccionario es metrizable.

3. Sea X un espacio métrico con distancia d.

(a) Pruebe que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es continua.

(b) Denotemos por X' a un espacio topológico construido sobre el mismo conjunto X. Pruebe que si $d : X' \times X' \to \mathbb{R}$ es continua, entonces la topología de X' es más fina que la topología de X.

Se puede resumir el resultado de este ejercicio como sigue: si X tiene una distancia d, entonces la topología inducida por d es la topología relativa más gruesa para la cual la función d es continua.

4. Consideremos las topologías producto, uniforme y por cajas sobre $\mathbb{R}^\omega$.

(a) ¿En qué topologías son continuas las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^\omega$?

$$\begin{aligned} f(t) &= (t, 2t, 3t, \dots), \\ g(t) &= (t, t, t, \dots), \\ h(t) &= (t, \tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{3}t, \dots). \end{aligned}$$

(b) ¿En qué topologías convergen las siguientes sucesiones?

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= (1,1,1,1,\dots), & \mathbf{x}_1 &= (1,1,1,1,\dots), \\ \mathbf{w}_2 &= (0,2,2,2,\dots), & \mathbf{x}_2 &= (0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\dots), \\ \mathbf{w}_3 &= (0,0,3,3,\dots), & \mathbf{x}_3 &= (0,0,\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\dots), \\ &\dots & &\dots \\ \mathbf{y}_1 &= (1,0,0,0,\dots), & \mathbf{z}_1 &= (1,1,0,0,\dots), \\ \mathbf{y}_2 &= (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,0,\dots), & \mathbf{z}_2 &= (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,0,\dots), \\ \mathbf{y}_3 &= (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},0,\dots), & \mathbf{z}_3 &= (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},0,0,\dots), \\ &\dots & &\dots \end{aligned}$$

5. Sea $\mathbb{R}^\infty$ el subconjunto de $\mathbb{R}^\omega$ formado por todas las sucesiones que son finalmente cero. ¿Cuál es la clausura de $\mathbb{R}^\infty$ en $\mathbb{R}^\omega$ en la topología uniforme? Explique su respuesta.

6. Sea $\bar{\rho}$ la distancia uniforme sobre $\mathbb{R}^\omega$. Dado $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\omega$ y dado $0 < \epsilon < 1$, sea

$$U(\mathbf{x}, \epsilon) = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times \cdots \times (x_n - \epsilon, x_n + \epsilon) \times \cdots.$$

(a) Pruebe que $U(\mathbf{x}, \epsilon)$ no es igual a la bola $B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \epsilon)$.

(b) Pruebe que $U(\mathbf{x}, \epsilon)$ ni siquiera es abierto en la topología uniforme.

(c) Pruebe que

$$B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \epsilon) = \bigcup_{\delta < \epsilon} U(\mathbf{x}, \delta).$$

7. Considere la aplicación $h : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}^\omega$ definida en el Ejercicio 8 de §19 y dote a $\mathbb{R}^\omega$ de la topología uniforme. ¿Bajo qué condiciones sobre los números a_i y b_i es h continua? ¿Y un homeomorfismo?

8. Sea X el subconjunto de $\mathbb{R}^\omega$ formado por todas las sucesiones $\mathbf{x}$ tales que $\sum x_i^2$ converge. Entonces la fórmula

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}$$

es una distancia bien definida sobre X.

***11.** Pruebe que si d es una distancia sobre X, entonces

$$d'(x,y) = d(x,y)/(1 + d(x,y))$$

es una distancia acotada que induce la topología de X. [*Indicación:* si $f(x) = x/(1+x)$ para $x > 0$, use el teorema del valor medio para demostrar que $f(a+b) - f(b) \leq f(a)$.]

§21 La topología métrica (continuación)

En esta sección hablaremos de la relación de la topología métrica con los conceptos que hemos introducido previamente.

Los *subespacios* de los espacios métricos se comportan de la forma que desearíamos; si A es un subespacio del espacio topológico X y d es una distancia para X, entonces la restricción de d a $A \times A$ es una distancia para la topología de A. Dejamos que el lector compruebe la veracidad de esta afirmación.

Sobre *topologías del orden* no se puede decir nada; algunas son metrizables (por ejemplo, $\mathbb{Z}_+$ y $\mathbb{R}$), y otras no lo son, como veremos.

El *axioma de Hausdorff* se satisface en toda topología métrica. Si x e y son puntos distintos del espacio métrico (X,d), tomaremos $\epsilon = \frac{1}{2}d(x,y)$, con lo que la desigualdad triangular implica que $B_d(x,\epsilon)$ y $B_d(y,\epsilon)$ son disjuntas.

Ya hemos considerado la *topología producto* en casos especiales; hemos probado que los productos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^\omega$ son metrizables. Es cierto, en general, que los productos numerables de espacios metrizables son metrizables; la demostración sigue un estilo similar a la prueba para $\mathbb{R}^\omega$, por lo que lo dejaremos para los ejercicios.

Sobre *funciones continuas* hay mucho que decir. El estudio de este tema nos ocupará el resto de la sección.

Cuando estudiemos funciones continuas sobre espacios métricos, estaremos más cerca del estudio del cálculo y del análisis que en ninguna otra parte de este libro. Hay dos cosas que queremos hacer en este punto.

En primer lugar, queremos probar que la familiar "definición ϵ-δ" de continuidad se transfiere a espacios métricos generales, y así ocurre también con la "definición de sucesión convergente" de continuidad.

En segundo lugar, queremos considerar dos métodos adicionales para construir funciones continuas, además de los discutidos en §18. Uno es el proceso de tomar sumas, diferencias, productos y cocientes de funciones continuas con valores reales. El otro es el proceso de tomar límites de sucesiones uniformemente convergentes de funciones continuas.

Teorema 21.1. *Sea $f : X \to Y$ y sean X e Y metrizables con distancias d_X y d_Y, respectivamente. Entonces la continuidad de f es equivalente a exigir que dados $x \in X$ y $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d_X(x, y) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Demostración. Supongamos que f es continua. Dados x y ϵ, consideramos el conjunto

$$f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$$

que es abierto en X y contiene al punto x. Contiene alguna bola $B(x, \delta)$ centrada en x. Si y está en esta bola, entonces $f(y)$ está en la bola centrada en $f(x)$, como se deseaba.

Recíprocamente, supongamos que se satisface la condición ϵ-δ. Sea V abierto en Y; probaremos que $f^{-1}(V)$ es abierto en X. Sea x un punto del conjunto $f^{-1}(V)$. Puesto que $f(x) \in V$, existe una bola $B(f(x), \epsilon)$ centrada en $f(x)$ y contenida en V. Por la condición ϵ-δ, existe una bola $B(x, \delta)$ centrada en x tal que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$. Entonces $B(x, \delta)$ es un entorno de x contenido en $f^{-1}(V)$, por lo que $f^{-1}(V)$ es abierto, como se deseaba. ■

Volvamos ahora a la definición de continuidad mediante sucesiones convergentes. Empezaremos por considerar la relación entre sucesiones convergentes y clausuras de conjuntos. Es ciertamente creíble, a partir de la experiencia que se tiene en análisis, que si x pertenece a la clausura de un subconjunto A del espacio X, entonces debería existir una sucesión de puntos de A que converge a x. Esto no es cierto en general, pero es cierto para espacios metrizables.

Lema 21.2 (El lema de la sucesión). *Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$. Si existe una sucesión de puntos de A que converge a x, entonces $x \in \bar{A}$; el recíproco se cumple si X es metrizable.*

Demostración. Supongamos que $x_n \to x$, donde $x_n \in A$. Entonces cada entorno U de x contiene un punto de A, por lo que $x \in \bar{A}$ por el Teorema 17.5. Recíprocamente, supongamos que X es metrizable y que $x \in \bar{A}$. Sea d una distancia para la topología de X. Para cada entero positivo n, tomemos el entorno $B_d(x, 1/n)$ de radio $1/n$ de x, y elijamos x_n como el punto de su intersección con A. Afirmamos que la sucesión x_n converge a x: cualquier conjunto abierto U que contenga a x contiene una bola $B_d(x, \epsilon)$ centrada en x; si elegimos N de forma que $1/N < \epsilon$, entonces U contiene a x_i, para todo $i \geq N$. ■

Teorema 21.3. *Sea $f : X \to Y$. Si la función f es continua, entonces para cada sucesión convergente $x_n \to x$ en X, la sucesión $f(x_n)$ converge a $f(x)$. El recíproco se cumple si X es metrizable.*

Demostración. Supongamos que f es continua. Dada $x_n \to x$, queremos probar que $f(x_n) \to f(x)$. Sea V un entorno de $f(x)$. Entonces $f^{-1}(V)$ es un entorno de x, y por lo tanto existe un N tal que $x_n \in f^{-1}(V)$ para $n \geq N$. Entonces, $f(x_n) \in V$ para $n \geq N$.

Para probar el recíproco, supongamos que la condición de sucesión convergente se satisface. Sea A un subconjunto de X; vamos a demostrar que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Si $x \in \bar{A}$, entonces existe una sucesión x_n de puntos de A que converge a x (por el lema anterior). Por hipótesis, la sucesión $f(x_n)$ converge a $f(x)$. Puesto que $f(x_n) \in f(A)$, el lema anterior implica que $f(x) \in \overline{f(A)}$ (observe que no se necesita la metrizabilidad de Y). De aquí $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, como se deseaba. ■

A propósito, en la demostración del Lema 21.2 y el Teorema 21.3, no hemos utilizado en su totalidad la hipótesis de que el espacio X es metrizable. Todo lo que necesitábamos en realidad era la colección numerable $B_d(x, 1/n)$ de bolas alrededor de x. Este hecho nos lleva a enunciar una nueva definición.

Un espacio X se dice que tiene una ***base numerable en el punto*** x si existe una colección numerable $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ de entornos de x tales que cualquier entorno U de x contiene *al menos uno* de los conjuntos U_n. Un espacio X que tiene una base numerable en cada uno de sus puntos se dice que satisface el ***primer axioma de numerabilidad***.

Si X tiene una base numerable $\{U_n\}$ en x, entonces la prueba del Lema 21.2 sigue valiendo; simplemente se reemplaza la bola $B_d(x, 1/n)$ por el conjunto

$$B_n = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n.$$

La prueba del Teorema 21.3 es válida sin ningún cambio.

Un espacio metrizable siempre satisface el primer axioma de numerabilidad, pero el recíproco no es cierto, como veremos. Como el axioma de Hausdorff, el primer axioma de numerabilidad es una condición que algunas veces impondremos sobre un espacio topológico para probar teoremas más fuertes sobre el espacio. Lo estudiaremos con más detalle en el Capítulo 4.

Ahora consideraremos métodos adicionales para construir funciones continuas. Necesitamos el siguiente lema:

Lema 21.4. *Las operaciones de adición, sustracción y multiplicación son funciones continuas de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$, *y la operación cociente es una función continua de* $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$ *en* $\mathbb{R}$.

Probablemente ya habrá visto antes este lema y su demostración; es un "argumento ϵ-δ" usual. Si no, se dan las ideas de una prueba en el Ejercicio 12 próximo; no debería tener problemas en completar los detalles que faltan.

Teorema 21.5. *Si X es un espacio topológico, y si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, entonces $f + g$, $f - g$, y $f \cdot g$ son continuas. Si $g(x) \neq 0$ para todo x, entonces f/g es continua.*

Demostración. La aplicación $h : X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = f(x) \times g(x)$$

es continua, por el Teorema 18.4. La función $f + g$ es igual a la composición de h con la operación de adición

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

de lo que se deduce que $f + g$ es continua. Se aplican similares argumentos a $f - g$, $f \cdot g$, y f/g. ■

Finalmente, llegamos a la noción de convergencia uniforme.

Definición. Sea $f_n : X \to Y$ una sucesión de funciones del conjunto X al espacio métrico Y. Sea d la distancia para Y. Diremos que la sucesión (f_n) ***converge uniformemente*** a la función $f : X \to Y$ si, dado $\epsilon > 0$, existe un entero N tal que

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

para todo $n > N$ y todo x en X.

La convergencia uniforme depende no sólo de la topología de Y, sino también de su distancia. Tenemos el siguiente teorema sobre sucesiones uniformemente convergentes:

Teorema 21.6 (El teorema del límite uniforme). *Sea $f_n : X \to Y$ una sucesión de funciones continuas del espacio topológico X al espacio métrico Y. Si (f_n) converge uniformemente a f, entonces f es continua.*

Demostración. Sea V abierto en Y y sea x_0 un punto de $f^{-1}(V)$. Deseamos encontrar un entorno U de x_0 tal que $f(U) \subset V$.

Sea $y_0 = f(x_0)$. En primer lugar, elijamos ϵ tal que la bola $B(y_0, \epsilon)$ esté contenida en V. Entonces, usando la convergencia uniforme, elegimos N tal que para todo $n \geq N$ y todo $x \in X$,

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon/3.$$

Finalmente, usando la continuidad de f_N, elegimos un entorno U de x_0 tal que f_N aplica U en la bola de radio $\epsilon/3$ en Y centrada en $f_N(x_0)$.

Afirmamos que f lleva U a $B(y_0, \epsilon)$, y de aquí, a V, como se deseaba. Para este propósito, obsérvese que si $x \in U$, entonces

$$\begin{aligned} d(f(x), f_N(x)) &< \epsilon/3 \text{ (por la elección de } N), \\ d(f_N(x), f_N(x_0)) &< \epsilon/3 \text{ (por la elección de } U), \\ d(f_N(x_0), f(x_0)) &< \epsilon/3 \text{ (por la elección de } N). \end{aligned}$$

Sumando y usando la desigualdad triangular, vemos que $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, como se deseaba. ■

Pongamos especial atención en que la noción de convergencia uniforme está relacionada con la definición de distancia uniforme, que dimos en la sección anterior. Consideremos, por ejemplo, el espacio $\mathbb{R}^X$ de todas las funciones $f : X \to \mathbb{R}$, en la distancia uniforme $\bar{\rho}$. No es difícil ver que la sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a f si, y sólo si, la sucesión (f_n) converge a f cuando se consideran como elementos del espacio métrico $(\mathbb{R}^X, \bar{\rho})$. Dejamos la demostración para los ejercicios.

Concluimos la sección con algunos ejemplos de espacios que no son metrizables.

EJEMPLO 1. $\mathbb{R}^\omega$ *con la topología por cajas no es metrizable.*

Probaremos que el lema de la sucesión no se cumple para $\mathbb{R}^\omega$. Sea A el subconjunto de $\mathbb{R}^\omega$ formado por aquellos puntos cuyas coordenadas son todas positivas:

$$A = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i > 0 \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Sea $\mathbf{0}$ el "origen" en $\mathbb{R}^\omega$, esto es, el punto $(0, 0, \dots)$ con cada una de sus coordenadas cero. En la topología por cajas, $\mathbf{0}$ pertenece a $\bar{A}$; por lo que si

$$B = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots$$

es cualquier elemento básico que contiene a $\mathbf{0}$, entonces B interseca a A. Por ejemplo, el punto

$$(\frac{1}{2}b_1, \frac{1}{2}b_2, \dots)$$

pertenece a $B \cap A$.

Pero afirmamos que no existe sucesión alguna de puntos de A que converja a $\mathbf{0}$. Sea $(\mathbf{a}_n)$ una sucesión de puntos de A, donde

$$\mathbf{a}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{in}, \dots).$$

Cada coordenada x_{in} es positiva, por lo que podemos construir un elemento básico B' para la topología por cajas sobre $\mathbb{R}$ haciendo

$$B' = (-x_{11}, x_{11}) \times (-x_{22}, x_{22}) \times \cdots.$$

Entonces B' contiene al origen $\mathbf{0}$, pero no contiene término alguno de la sucesión $(\mathbf{a}_n)$; el punto $\mathbf{a}_n$ no puede pertenecer a B' porque su coordenada n-ésima x_{nn} no pertenece al intervalo $(-x_{nn}, x_{nn})$. De aquí se deduce que la sucesión $(\mathbf{a}_n)$ no puede converger a $\mathbf{0}$ en la topología por cajas.

EJEMPLO 2. *Un producto no numerable de* $\mathbb{R}$ *consigo mismo no es metrizable.*

Sea J un conjunto de índices no numerable; probaremos que $\mathbb{R}^J$ no satisface el lema de la sucesión (en la topología producto).

Sea A el subconjunto de $\mathbb{R}^J$ formado por todos los puntos (x_α) tales que $x_\alpha = 1$ para todos los valores de α excepto para un número finito. Sea $\mathbf{0}$ el "origen" de $\mathbb{R}^J$, es decir, el punto que tiene todas las coordenadas iguales a 0.

Afirmamos que $\mathbf{0}$ pertenece a la clausura de A. Sea $\prod U_\alpha$ un elemento básico conteniendo a $\mathbf{0}$. Entonces $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ únicamente para un número finito de α, digamos para $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Sea (x_α) el punto de A definido al hacer $x_\alpha = 0$ para $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $x_\alpha = 1$ para el resto de valores de α; entonces $(x_\alpha) \in A \cap \prod U_\alpha$, como se deseaba.

Pero no existe sucesión alguna de puntos de A que converja a $\mathbf{0}$. Sea $\mathbf{a}_n$ una sucesión de puntos de A. Dado n, denotemos por J_n al subconjunto de J formado por aquellos índices α para los cuales la coordenada α-ésima de $\mathbf{a}_n$ es distinta de 1. La unión de todos los conjuntos J_n es una unión numerable de conjuntos finitos y, por tanto, es numerable. Puesto que el propio J es no numerable, existe un índice en J, digamos β, que no pertenece a ningún J_n. Esto significa que para *cada uno* de los puntos $\mathbf{a}_n$, su coordenada β-ésima es igual a 1.

Sea ahora U_β el intervalo abierto $(-1, 1)$ en $\mathbb{R}$, y sea U el conjunto abierto $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ en $\mathbb{R}^J$. El conjunto U es un entorno de $\mathbf{0}$ que no contiene ninguno de los puntos de $\mathbf{a}_n$, por consiguiente, la sucesión $\mathbf{a}_n$ no puede converger a $\mathbf{0}$.

Ejercicios

1. Sea $A \subset X$. Si d es una distancia para la topología de X, pruebe que $d \mid A \times A$ es una distancia para la topología de subespacio sobre A.

2. Sean X e Y espacios métricos con distancias d_X y d_Y, respectivamente. Sea $f : X \to Y$ con la propiedad de que para cada par de puntos x_1, x_2 de X,

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2).$$

Pruebe que f es un embebimiento. Se denomina ***embebimiento isométrico*** de X en Y.

3. Sea X_n un espacio métrico con distancia d_n, para $n \in \mathbb{Z}_+$.

   (a) Pruebe que

$$\rho(x, y) = \text{máx}\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\}$$

   es una distancia para el espacio producto $X_1 \times \cdots \times X_n$.

   (b) Sea $\bar{d}_i = \text{mín}\{d_i, 1\}$. Pruebe que

$$D(x, y) = \sup\{\bar{d}_i(x_i, y_i)/i\}$$

   es una distancia para el espacio producto $\prod X_i$.

4. Pruebe que $\mathbb{R}_\ell$ y el cuadrado ordenado satisfacen el primer axioma de numerabilidad (este resultado no implica, por supuesto, que sean metrizables).

5. *Teorema. Sean $x_n \to x$ e $y_n \to y$ en el espacio $\mathbb{R}$. Entonces*

$$x_n + y_n \to x + y,$$
$$x_n - y_n \to x - y,$$
$$x_n y_n \to xy,$$

y siempre que cada $y_n \neq 0$ e $y \neq 0$,

$$x_n/y_n \to x/y.$$

[*Indicación:* aplique el Lema 21.4 y recuerde, de los ejercicios de §19, que si $x_n \to x$ e $y_n \to y$, entonces $x_n \times y_n \to x \times y$.]

6. Definamos $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ por la ecuación $f_n(x) = x^n$. Pruebe que la sucesión $(f_n(x))$ converge para cada $x \in [0,1]$, pero que la sucesión (f_n) no converge uniformemente.

7. Sea X un conjunto, y sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones. Sea $\bar{\rho}$ la distancia uniforme sobre el espacio $\mathbb{R}^X$. Pruebe que la sucesión (f_n) converge uniformemente a la función $f : X \to \mathbb{R}$ si, y solamente si, la sucesión (f_n) converge a f como elementos del espacio métrico $(\mathbb{R}^X, \bar{\rho})$.

8. Sea X un espacio topológico y sea Y un espacio métrico. Sea $f_n : X \to Y$ una sucesión de funciones continuas. Sea x_n una sucesión de puntos de X convergente a x. Pruebe que si la sucesión (f_n) converge uniformemente a f, entonces $(f_n(x_n))$ converge a $f(x)$.

9. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$f_n(x) = \frac{1}{n^3[x - (1/n)]^2 + 1}.$$

Véase la Figura 21.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función nula.

(a) Pruebe que $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

(b) Pruebe que f_n no converge uniformemente a f (esto muestra que el recíproco del Teorema 21.6 no se cumple; la función límite f debe ser continua incluso cuando la convergencia no es uniforme).

10. Usando la formulación de continuidad por conjuntos cerrados (Teorema 18.1), pruebe que los siguientes subconjuntos son cerrados en $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{x \times y \mid xy = 1\},$$
$$S^1 = \{x \times y \mid x^2 + y^2 = 1\},$$
$$B^2 = \{x \times y \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

El conjunto B^2 se denomina ***bola unidad*** (cerrada) en $\mathbb{R}^2$.

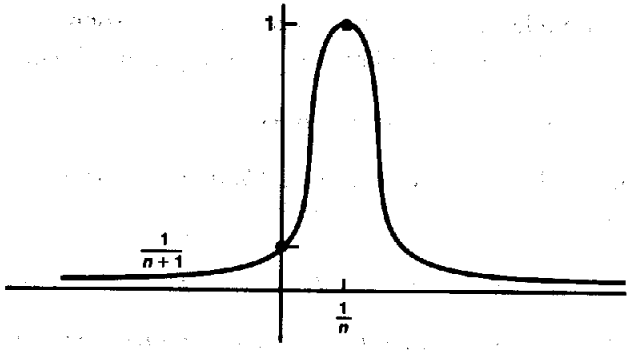


Figura 21.1

11. Pruebe los siguientes hechos usuales sobre series infinitas:

(a) Pruebe que si (s_n) es una sucesión acotada de números reales y $s_n \leq s_{n+1}$ para cada n, entonces (s_n) converge.

(b) Sea (a_n) una sucesión de números reales; definimos

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Si $s_n \to s$, decimos que la ***serie infinita***

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

converge también a s. Pruebe que si $\sum a_i$ converge a s y $\sum b_i$ converge a t, entonces $\sum(ca_i + b_i)$ converge a $cs + t$.

(c) Pruebe el ***test de comparación*** para series infinitas: si $|a_i| \leq b_i$ para cada i y la serie $\sum b_i$ converge, entonces la serie $\sum a_i$ también converge. [*Indicación:* pruebe que las series $\sum |a_i|$ y $\sum c_i$ convergen, donde $c_i = |a_i| + a_i$.]

(d) Dada una sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$, sea

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x).$$

Demuestre el ***test-M de Weierstrass*** para la convergencia uniforme: si $|f_i(x)| \leq M_i$ para todo $x \in X$ y todo i, y si la serie $\sum M_i$ converge, entonces la sucesión (s_n) converge uniformemente a una función s. [*Indicación:* sea $r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} M_i$. Pruebe que si $k > n$, entonces $|s_k(x) - s_n(x)| \leq r_n$; concluya que $|s(x) - s_n(x)| \leq r_n$.]

12. Pruebe la continuidad de las operaciones algebraicas sobre $\mathbb{R}$, como sigue: use la distancia $d(a,b) = |a-b|$ sobre $\mathbb{R}$ y la distancia en $\mathbb{R}^2$ dada por la ecuación

$$\rho((x,y),(x_0,y_0)) = \text{máx}\{|x-x_0|, |y-y_0|\}.$$

(a) Pruebe que la adición es continua. [*Indicación:* dado ϵ, tome $\delta = \epsilon/2$ y observe que

$$d(x+y, x_0+y_0) \leq |x-x_0| + |y-y_0|.]$$

(b) Pruebe que la multiplicación es continua. [*Indicación:* dado (x_0, y_0) y $0 < \epsilon < 1$, tome

$$3\delta = \epsilon/(|x_0| + |y_0| + 1)$$

y observe que

$$d(xy, x_0y_0) \leq |x_0|\,|y-y_0| + |y_0|\,|x-x_0| + |x-x_0|\,|y-y_0|.]$$

(c) Pruebe que la operación de tomar inversos es una aplicación continua de $\mathbb{R} - \{0\}$ a $\mathbb{R}$. [*Indicación:* pruebe que la imagen inversa del intervalo (a,b) es abierto. Considere cinco casos, según sean a y b positivos, negativos o cero.]

(d) Pruebe que las operaciones de sustracción y cociente son continuas.

*§22 La topología cociente†

A diferencia de las topologías que ya hemos considerado en este capítulo, la topología cociente no es una generalización natural de algo que ya se haya estudiado en análisis. No obstante, es lo suficientemente sencilla para motivar. Una motivación es la que nos da la geometría, donde a menudo tenemos ocasión de utilizar técnicas de "cortar-y-pegar" para construir objetos geométricos tales como superficies. El *toro* (superficie de un donut), por ejemplo, se puede construir tomando un rectángulo y "pegando" sus aristas apropiadamente, como en la Figura 22.1. Y la *esfera* (superficie de una pelota) se puede construir tomando un disco y plegando su borde completo hasta tener un único punto (véase la Figura 22.2). La formalización de estas construcciones implica el concepto de topología cociente.

Definición. Sean X e Y espacios topológicos y sea $p: X \to Y$ una aplicación sobreyectiva. La aplicación p se dice que es una ***aplicación cociente*** siempre que un subconjunto U de Y es abierto en Y si, y sólo si, $p^{-1}(U)$ es abierto en X.

†Esta sección se usará a lo largo de la Parte II del libro. También se referirán a ella algunos ejercicios de la Parte I.

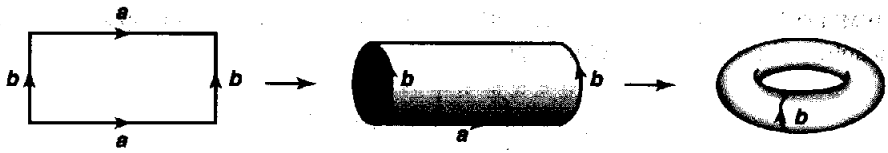


Figura 22.1

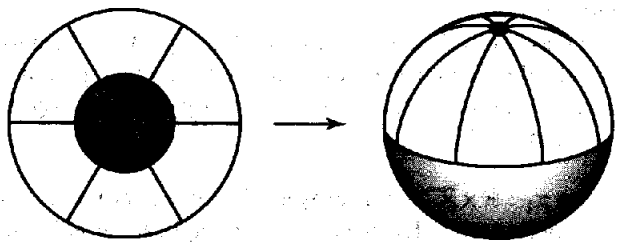


Figura 22.2

Esta condición es más fuerte que la de continuidad; algunos matemáticos la llaman "continuidad fuerte". Una condición equivalente es requerir que un subconjunto A de Y sea cerrado en Y si, y sólo si, $p^{-1}(A)$ es cerrado en X. La equivalencia de las dos condiciones se sigue de la ecuación

$$f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B).$$

Otro modo de describir una aplicación cociente es el siguiente: diremos que un subconjunto C de X es ***saturado*** (respecto a la aplicación sobreyectiva $p : X \to Y$) si C contiene a cada conjunto $p^{-1}(\{y\})$ al que interseca. Así C es saturado si es igual a la imagen inversa completa de un subconjunto de Y. Decir que p es una aplicación cociente es equivalente a decir que p es continua y p asocia conjuntos abiertos *saturados* de X con conjuntos abiertos de Y (o conjuntos saturados cerrados de X con conjuntos cerrados de Y).

Dos clases especiales de aplicaciones cociente son las *aplicaciones abiertas* y las *aplicaciones cerradas*. Recordemos que una aplicación $f : X \to Y$ se dice que es una ***aplicación abierta*** si para cada conjunto abierto U de X, el conjunto $f(U)$ es abierto en Y. Se dice que es una ***aplicación cerrada*** si para cada conjunto cerrado A de X, el conjunto $f(A)$ es cerrado en Y. Se sigue inmediatamente de la definición que si $p : X \to Y$ es una aplicación continua sobreyectiva que es abierta o cerrada, entonces p es una aplicación cociente. Existen aplicaciones cociente que no son abiertas ni cerradas (véase el Ejercicio 3).

EJEMPLO 1. Sea X el subespacio $[0,1] \cup [2,3]$ de $\mathbb{R}$ y sea Y el subespacio $[0,2]$ de $\mathbb{R}$. La aplicación $p : X \to Y$ definida por

$$p(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \in [0,1] \\ x-1 & \text{para } x \in [2,3] \end{cases}$$

se ve inmediatamente que es sobreyectiva, continua y cerrada. Por tanto, es una aplicación cociente. Sin embargo, no es una aplicación abierta; la imagen del conjunto abierto $[0,1]$ de X no es abierta en Y.

Obsérvese además que si A es el subespacio $[0,1) \cup [2,3]$ de X, entonces la aplicación $q : A \to Y$ obtenida al restringir p es continua y sobreyectiva, pero no es una aplicación cociente. En efecto, el conjunto $[2,3]$ es abierto en A y es saturado con respecto a q, pero su imagen no es abierta en Y.

EJEMPLO 2. Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proyección sobre la primera coordenada; entonces π_1 es continua y sobreyectiva. Es más, π_1 es una aplicación abierta. Si $U \times V$ es un elemento básico no vacío para $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, entonces $\pi_1(U \times V) = U$ es abierto en $\mathbb{R}$; se sigue que π_1 lleva conjuntos abiertos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Sin embargo, π_1 no es una aplicación cerrada. El subconjunto

$$C = \{x \times y \mid xy = 1\}$$

de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es cerrado, pero $\pi_1(C) = \mathbb{R} - \{0\}$, que no es cerrado en $\mathbb{R}$.

Nótese que si A es el subespacio de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que es la unión de C y el origen $\{\mathbf{0}\}$, entonces la aplicación $q : A \to \mathbb{R}$ obtenida al restringir π_1 es continua y sobreyectiva, pero no es una aplicación cociente. En efecto, el conjunto unipuntual $\{\mathbf{0}\}$ es abierto en A y es saturado con respecto a q, pero su imagen no es abierta en $\mathbb{R}$.

Ahora mostramos cómo la noción de aplicación cociente se puede usar para construir una topología sobre un conjunto.

Definición. Si X es un espacio, A un *conjunto* y $p : X \to A$ es una aplicación sobreyectiva, entonces existe exactamente una topología $\mathcal{T}$ sobre A relativa a la cual p es una aplicación cociente; se denomina ***topología cociente*** inducida por p.

La topología $\mathcal{T}$ está definida, por supuesto, reuniendo aquellos subconjuntos U de A tales que $p^{-1}(U)$ es abierto en X. Es fácil comprobar que $\mathcal{T}$ es una topología. Los conjuntos $\varnothing$ y A son abiertos porque $p^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ y $p^{-1}(A) = X$. Las otras dos condiciones se siguen de las ecuaciones

$$p^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in J} p^{-1}(U_\alpha),$$

$$p^{-1}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\Big) = \bigcap_{i=1}^{n} p^{-1}(U_i).$$

EJEMPLO 3. Sea p la aplicación de la recta real $\mathbb{R}$ sobre el conjunto de tres puntos $A = \{a, b, c\}$ definida por

$$p(x) = \begin{cases} a & \text{si } x > 0 \\ b & \text{si } x < 0 \\ c & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Puede comprobar que la topología cociente sobre A inducida por p es la que se indica en la Figura 22.3.

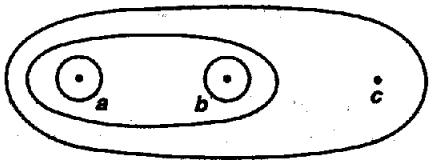


Figura 22.3

Hay una situación especial en la que la topología cociente es particularmente frecuente de encontrar. Es la siguiente:

Definición. Sea X un espacio topológico y sea X^* una partición de X en subconjuntos disjuntos cuya unión es X. Sea $p : X \to X^*$ la aplicación sobreyectiva que lleva cada punto de X al elemento de X^* que lo contiene. En la topología cociente inducida por p, el espacio X^* se denomina ***espacio cociente*** de X.

Dado X^*, hay una relación de equivalencia sobre X en la que los elementos de X^* son las clases de equivalencia. Se puede pensar en X^* como obtenido al "identificar" cada par de puntos equivalentes. Por este motivo, el espacio cociente X^* se denomina a menudo *espacio de identificación*, o *espacio de descomposición*, del espacio X.

Podemos describir la topología de X^* de otro modo. Un subconjunto U de X^* es una colección de clases de equivalencia, y el conjunto $p^{-1}(U)$ es justo la unión de las clases de equivalencia que pertenecen a U. Así, el conjunto abierto característico de X^* es una colección de clases de equivalencia cuya *unión* es un conjunto abierto de X.

EJEMPLO 4. Sea X la bola unitaria cerrada

$$\{x \times y \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

en $\mathbb{R}^2$, y sea X^* la partición de X formada por todos los conjuntos unipuntuales $\{x \times y\}$ para los que $x^2 + y^2 < 1$, junto con el conjunto $S^1 = \{x \times y \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Los conjuntos abiertos saturados característicos en X son los que están dibujados como regiones rayadas en la Figura 22.4. Se puede probar que X^* es homeomorfo al subespacio de $\mathbb{R}^3$ llamado la ***2-esfera unidad***, definida por

$$S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

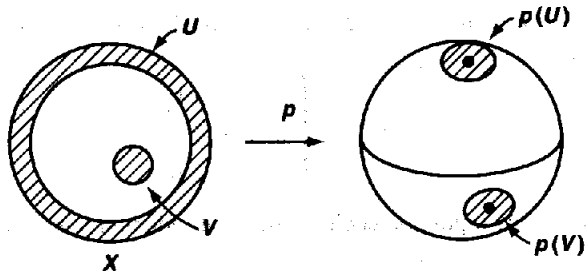


Figura 22.4

EJEMPLO 5. Sea X el rectángulo $[0,1] \times [0,1]$. Definimos una partición X^* de X como sigue: consiste en todos los conjuntos unipuntuales $\{x \times y\}$ donde $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$, los siguientes tipos de conjuntos de dos puntos:

$$\{x \times 0, x \times 1\} \qquad \text{donde } 0 < x < 1,$$
$$\{0 \times y, 1 \times y\} \qquad \text{donde } 0 < y < 1,$$

y el conjunto de cuatro puntos

$$\{0 \times 0, 0 \times 1, 1 \times 0, 1 \times 1\}.$$

Los conjuntos abiertos saturados característicos de X son los que están dibujados como regiones rayadas en la Figura 22.5; cada uno es un conjunto abierto de X que es igual a la unión de elementos de X^*.

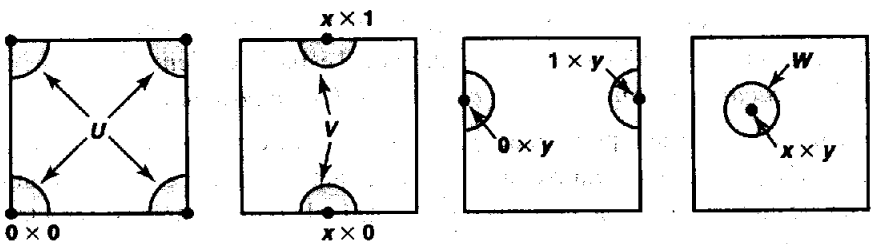


Figura 22.5

La imagen de cada uno de estos conjuntos bajo p es un conjunto abierto de X^*, como se indica en la Figura 22.6. Esta descripción de X^* es exactamente la forma matemática de decir lo que expresamos en los dibujos cuando pegábamos las aristas de un rectángulo para formar un toro.

Ahora examinaremos la relación entre las nociones de aplicación cociente y espacio cociente y los conceptos introducidos previamente. Es interesante observar que esta relación no es tan simple como uno podría desear.

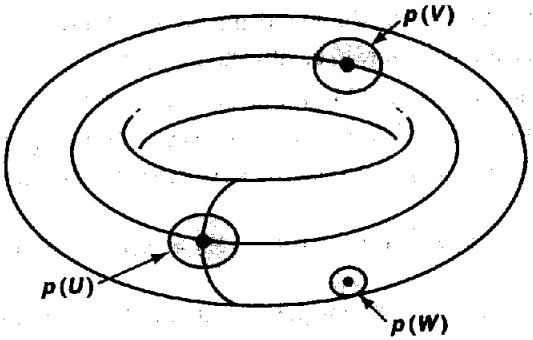


Figura 22.6

Ya hemos observado que los *subespacios* no se comportan bien; si $p : X \to Y$ es una aplicación cociente y A es un subespacio de X, entonces la aplicación obtenida al restringir p, $q : A \to p(A)$, no es necesariamente una aplicación cociente. Sin embargo, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 22.1. *Sean $p : X \to Y$ una aplicación cociente, A un subespacio de X que es saturado con respecto a p y $q : A \to p(A)$ la aplicación obtenida al restringir p.*

(1) *Si A es abierto o cerrado en X, entonces q es una aplicación cociente.*

*(2) *Si p es una aplicación abierta o cerrada, entonces q es una aplicación cociente.*

Demostración. *Paso 1.* En primer lugar comprobaremos las dos siguientes ecuaciones:

$$q^{-1}(V) = p^{-1}(V) \qquad \text{si } V \subset p(A),$$
$$p(U \cap A) = p(U) \cap p(A) \qquad \text{si } U \subset X.$$

Para comprobar la primera ecuación, observamos que, como $V \subset p(A)$ y A es saturado, $p^{-1}(V)$ está contenido en A. Se sigue que tanto $p^{-1}(V)$ como $q^{-1}(V)$ son todos los puntos de A que son aplicados por p en V. Para comprobar la segunda ecuación, nótese que para cualesquiera dos subconjuntos U y A de X, tenemos la inclusión

$$p(U \cap A) \subset p(U) \cap p(A).$$

Para probar la inclusión inversa, supongamos que $y = p(u) = p(a)$, para $u \in U$ y $a \in A$. Puesto que A es saturado, A contiene al conjunto $p^{-1}(p(a))$, por lo que A, en particular, contiene a u. Entonces $y = p(u)$, donde $u \in U \cap A$.

Paso 2. Ahora supongamos que A es abierto o que p es abierta. Dado el subconjunto V de $p(A)$, suponemos que $q^{-1}(V)$ es abierto en A y vamos a probar que V es abierto en $p(A)$.

Supongamos primero que A es abierto. Como $q^{-1}(V)$ es abierto en A y A es abierto en X, entonces $q^{-1}(V)$ es abierto en X. Puesto que $q^{-1}(V) = p^{-1}(V)$, el

segundo conjunto es abierto en X, por lo que V es abierto en Y ya que p es una aplicación cociente. En particular, V es abierto en $p(A)$.

Supongamos ahora que p es abierta. Puesto que $q^{-1}(V) = p^{-1}(V)$ y $q^{-1}(V)$ es abierto en A, tenemos que $p^{-1}(V) = U \cap A$ para algún conjunto U abierto en X. Ahora bien, $p(p^{-1}(V)) = V$ puesto que p es sobreyectiva; entonces

$$V = p(p^{-1}(V)) = p(U \cap A) = p(U) \cap p(A).$$

El conjunto $p(U)$ es abierto en Y porque p es una aplicación abierta; de aquí, V es abierto en $p(A)$.

Paso 3. La prueba cuando A o p son cerrados se obtiene reemplazando la palabra "abierto" por la palabra "cerrado" en todo el Paso 2. ■

A continuación consideramos otros conceptos introducidos previamente. *Las composiciones de aplicaciones* se comportan bien; es fácil comprobar que la composición de dos aplicaciones cociente es una aplicación cociente; este hecho se sigue de la ecuación

$$p^{-1}(q^{-1}(U)) = (q \circ p)^{-1}(U).$$

Por otro lado, *los productos de aplicaciones* no se comportan bien; el producto cartesiano de dos aplicaciones cociente no necesita ser una aplicación cociente. Véase el Ejemplo 7 siguiente. Se necesitan imponer más condiciones en las aplicaciones o en los espacios para que este hecho sea cierto. Una de ellas, una condición sobre los espacios, se llama *compacidad local*, que estudiaremos más adelante. Otra, una condición para las aplicaciones, es la condición de que las aplicaciones p y q sean aplicaciones abiertas. En ese caso, es fácil ver que $p \times q$ es también una aplicación abierta, por lo que es una aplicación cociente.

Finalmente, la *condición de Hausdorff* no se comporta bien; incluso si X es de Hausdorff, no existe razón alguna para que el espacio cociente X^* tenga que ser de Hausdorff. Hay una condición simple para que X^* satisfaga el axioma T_1; simplemente se pide que cada elemento de la partición X^* sea un subconjunto cerrado de X. Las condiciones que asegurarán que X^* sea de Hausdorff son más difíciles de encontrar. Esta es una de las cuestiones más delicadas sobre espacios cociente; volveremos a ella en varias ocasiones a lo largo del libro.

Quizás el resultado más importante en el estudio de espacios cociente tiene que ver con el problema de construir *funciones continuas* sobre un espacio cociente. Consideramos este problema a continuación. Cuando estudiamos espacios producto, teníamos un criterio para determinar si una aplicación $f : Z \to \prod X_\alpha$ *en* un espacio producto era continua. Su homólogo en la teoría de espacios cociente es un criterio para determinar cuándo una aplicación $f : X^* \to Z$ *que parte de* un espacio cociente es continua. Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 22.2. *Sea $p : X \to Y$ una aplicación cociente. Sea Z un espacio y sea $g : X \to Z$ una aplicación que es constante sobre cada conjunto $p^{-1}(\{y\})$, para $y \in Y$. Entonces g induce una aplicación $f : Y \to Z$ tal que $f \circ p = g$. La aplicación inducida f es continua si, y sólo si, g es continua; f es una aplicación cociente si, y sólo si, g es una aplicación cociente.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[r, dotted, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Demostración. Para cada $y \in Y$, el conjunto $g(p^{-1}(\{y\}))$ es un conjunto unipuntual en Z (puesto que g es constante sobre $p^{-1}(\{y\})$). Si denotamos por $f(y)$ a este punto, entonces hemos definido una aplicación $f : Y \to Z$ tal que para cada $x \in X$, $f(p(x)) = g(x)$. Si f es continua, entonces $g = f \circ p$ es continua. Recíprocamente, supongamos que g es continua. Dado un conjunto abierto V de Z, $g^{-1}(V)$ es abierto en X. Pero $g^{-1}(V) = p^{-1}(f^{-1}(V))$; como p es una aplicación cociente, se sigue que $f^{-1}(V)$ es abierto en Y. De aquí, f es continua.

Si f es una aplicación cociente, entonces g es la composición de dos aplicaciones cociente y es así una aplicación cociente. Recíprocamente, supongamos que g es una aplicación cociente. Puesto que g es sobreyectiva, también lo es f. Sea V un subconjunto de Z; probaremos que V es abierto en Z si $f^{-1}(V)$ es abierto en Y. Ahora el conjunto $p^{-1}(f^{-1}(V))$ es abierto en X porque p es continua. Puesto que este conjunto es igual a $g^{-1}(V)$, este último es abierto en X. Entonces, como g es una aplicación cociente, V es abierto en Z. ■

Corolario 22.3. *Sea $g : X \to Z$ una aplicación continua sobreyectiva. Sea X^* la siguiente colección de subconjuntos de X:*

$$X^* = \{g^{-1}(\{z\}) \mid z \in Z\}.$$

Dotemos a X^* de la topología cociente.

(a) La aplicación g induce una aplicación continua biyectiva $f : X^* \to Z$, que es un homeomorfismo si, y sólo si, g es una aplicación cociente.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X^* \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

(b) Si Z es de Hausdorff, también lo es X^*.

Demostración. Por el teorema anterior, sabemos que g induce una aplicación continua $f : X^* \to Z$; está claro que f es biyectiva. Supongamos que f es un homeomorfismo. Entonces, tanto f como la aplicación proyección $p : X \to X^*$ son aplicaciones cociente, por lo que su composición q es una aplicación cociente. Recíprocamente, supongamos que g es una aplicación cociente. Entonces se sigue del teorema anterior que f es una aplicación cociente. Al ser biyectiva, f es así un homeomorfismo.

Supongamos que Z es de Hausdorff. Dados puntos distintos de X^*, sus imágenes bajo f son distintas y así poseen entornos disjuntos U y V. Entonces $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son entornos disjuntos de los dos puntos dados de X^*. ■

EJEMPLO 6. Sea X el subespacio de $\mathbb{R}^2$ que es la unión de los segmentos de recta $[0,1] \times \{n\}$, para $n \in \mathbb{Z}_+$, y sea Z el subespacio de $\mathbb{R}^2$ formado por todos los puntos de la forma $x \times (x/n)$ para $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{Z}_+$. Entonces X es la unión de un conjunto numerable de segmentos de recta disjuntos, y Z es la unión de un conjunto numerable de segmentos de recta con un punto final en común (véase la Figura 22.7).

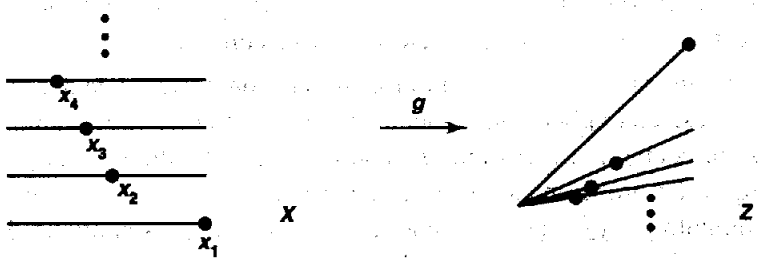


Figura 22.7

Definamos una aplicación $g : X \to Z$ por la ecuación $g(x \times n) = x \times (x/n)$; entonces g es sobreyectiva y continua. El espacio cociente X^* cuyos elementos son los conjuntos $g^{-1}(\{z\})$ es simplemente el espacio obtenido de X al identificar el subconjunto $\{0\} \times \mathbb{Z}_+$ con un punto. La aplicación g induce una aplicación continua biyectiva $f : X^* \to Z$. Pero f *no* es un homeomorfismo.

Para verificar este hecho, es suficiente mostrar que g no es una aplicación cociente. Consideremos la sucesión de puntos $x_n = (1/n) \times n$ de X. El conjunto $A = \{x_n\}$ es un subconjunto cerrado de X porque no tiene puntos límite. También es saturado con respecto a g. Por otro lado, el conjunto $g(A)$ no es cerrado en Z, ya que está formado por los puntos $z_n = (1/n) \times (1/n^2)$; este conjunto tiene el origen como punto límite.

EJEMPLO 7. *El producto de dos aplicaciones cociente no necesariamente es una aplicación cociente.*

Presentamos un ejemplo con espacios que no son de Hausdorff en los ejercicios. Aquí tenemos otro con espacios que se comportan mejor.

Sea $X = \mathbb{R}$ y sea X^* el espacio cociente obtenido de X al identificar el subconjunto $\mathbb{Z}_+$ con un punto b; sea $p : X \to X^*$ la aplicación cociente. Sea $\mathbb{Q}$ el subespacio de $\mathbb{R}$ formado por los números racionales y sea $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ la aplicación identidad. Mostraremos

que

$$p \times i : X \times \mathbb{Q} \to X^* \times \mathbb{Q}$$

no es una aplicación cociente.

Para cada n, sea $c_n = \sqrt{2}/n$, y consideremos las líneas rectas en $\mathbb{R}^2$ con pendientes 1 y -1, respectivamente, que pasan por el punto $n \times c_n$. Sea U_n formado por todos los puntos de $X \times \mathbb{Q}$ que están, o bien en la zona superior de estas rectas, o en la zona inferior de ellas, y también entre las rectas verticales $x = n - 1/4$ y $x = n + 1/4$. Entonces U_n es abierto en $X \times \mathbb{Q}$ y contiene al conjunto $\{n\} \times \mathbb{Q}$ porque c_n no es racional (véase la Figura 22.8).

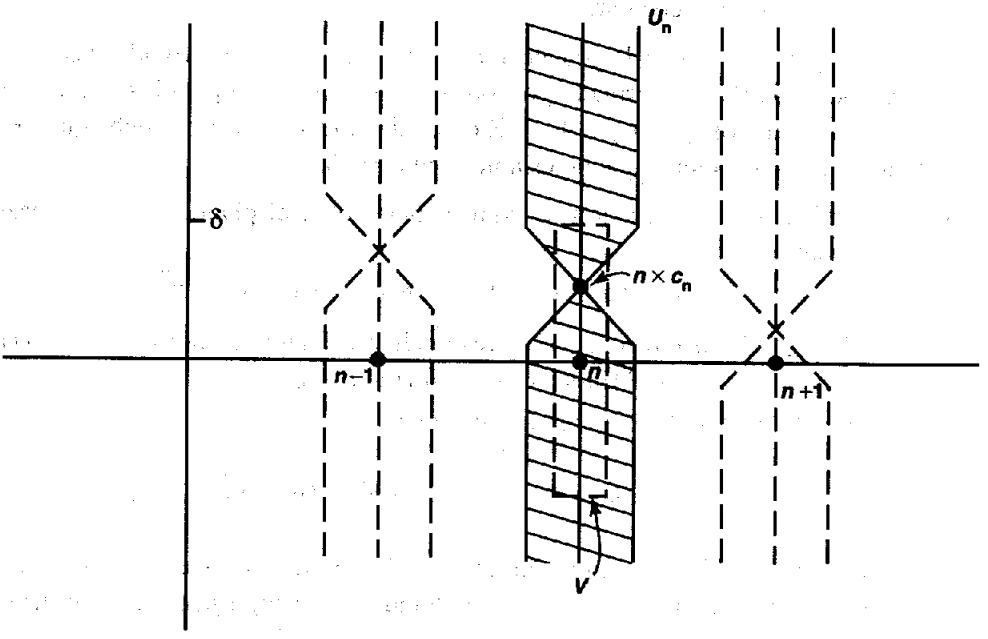


Figura 22.8

Sea U la unión de los conjuntos U_n; entonces U es abierto en $X \times \mathbb{Q}$. Es saturado con respecto a $p \times i$ porque contiene al conjunto entero $\mathbb{Z}_+ \times \{q\}$ para cada $q \in \mathbb{Q}$. Supongamos que $U' = (p \times i)(U)$ es abierto en $X^* \times \mathbb{Q}$ y obtengamos una contradicción.

Puesto que U contiene, en particular, al conjunto $\mathbb{Z}_+ \times 0$, el conjunto U' contiene al punto $b \times 0$. De aquí U' contiene un conjunto abierto de la forma $W \times I_\delta$, donde W es un entorno de b en X^* e I_δ está formado por todos los números racionales y con $|y| < \delta$. Entonces

$$p^{-1}(W) \times I_\delta \subset U.$$

Elijamos n lo suficientemente grande de modo que $c_n < \delta$. Entonces, puesto que $p^{-1}(W)$ es abierto en X y contiene a $\mathbb{Z}_+$, podemos elegir $\epsilon < 1/4$ de modo que el intervalo $(n - \epsilon, n + \epsilon)$ esté contenido en $p^{-1}(W)$. Entonces U contiene al subconjunto $V = (n - \epsilon, n + \epsilon) \times I_\delta$ de $X \times \mathbb{Q}$. Pero el dibujo aclara que hay muchos puntos $x \times y$ de V que no pertenecen a U. (Uno de ellos es el punto $x \times y$ donde $x = n + \frac{1}{2}\epsilon$ e y es un número racional con $|y - c_n| < \frac{1}{2}\epsilon$.)

Ejercicios

1. Compruebe los detalles del Ejemplo 3.

2. (a) Sea $p : X \to Y$ una aplicación continua. Pruebe que si existe una aplicación continua $f : Y \to X$ tal que $p \circ f$ es igual a la aplicación identidad de Y, entonces p es una aplicación cociente.

   (b) Si $A \subset X$, una ***retracción*** de X sobre A es una aplicación continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para cada $a \in A$. Pruebe que una retracción es una aplicación cociente.

3. Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proyección sobre la primera coordenada. Sea A el subespacio de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ formado por todos los puntos $x \times y$ para los que $x \geq 0$ ó $y = 0$ (ó ambos) y sea $q : A \to \mathbb{R}$ obtenida al restringir π_1. Pruebe que q es una aplicación cociente que no es abierta ni cerrada.

4. (a) Definamos una relación de equivalencia sobre el plano $X = \mathbb{R}^2$ como sigue:

$$x_0 \times y_0 \sim x_1 \times y_1 \qquad \text{si } x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2.$$

   Sea X^* el espacio cociente correspondiente. Es homeomorfo a un espacio conocido: ¿cuál es? [*Indicación:* defina $g(x \times y) = x + y^2$.]

   (b) Repita (a) para la relación de equivalencia

$$x_0 \times y_0 \sim x_1 \times y_1 \qquad \text{si } x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

5. Sea $p : X \to Y$ una aplicación abierta. Pruebe que si A es abierto en X, entonces la aplicación $q : A \to p(A)$, obtenida al restringir p, es una aplicación abierta.

6. Recordemos que $\mathbb{R}_K$ denota la recta real en la K-topología (véase §13). Sea Y el espacio cociente obtenido de $\mathbb{R}_K$ al reducir el conjunto K a un punto y sea $p : \mathbb{R}_K \to Y$ la aplicación cociente.

   (a) Pruebe que Y satisface el axioma T_1, pero no es de Hausdorff.

   (b) Pruebe que $p \times p : \mathbb{R}_K \times \mathbb{R}_K \to Y \times Y$ no es una aplicación cociente. [*Indicación:* la diagonal no es cerrada en $Y \times Y$, pero su imagen inversa es cerrada en $\mathbb{R}_K \times \mathbb{R}_K$.]

*Ejercicios complementarios: grupos topológicos

En estos ejercicios consideraremos grupos topológicos y algunas de sus propiedades. La topología cociente toma su nombre de un caso especial que surge cuando uno forma el cociente de un grupo topológico con un subgrupo.

Un ***grupo topológico*** G es un grupo que es también un espacio topológico satisfaciendo el axioma T_1, tal que la aplicación de $G \times G$ a G enviando $x \times y$ a $x \cdot y$, y la aplicación de G a G que envía x a x^{-1}, son aplicaciones continuas. A lo largo de los siguientes ejercicios, denotaremos por G a un grupo topológico.

1. Denotemos por H a un grupo que es también un espacio topológico satisfaciendo el axioma T_1. Pruebe que H es un grupo topológico si, y sólo si, la aplicación de $H \times H$ en H que envía $x \times y$ a $x \cdot y^{-1}$ es continua.
2. Pruebe que los siguientes son grupos topológicos:
   (a) $(\mathbb{Z}, +)$.
   (b) $(\mathbb{R}, +)$.
   (c) $(\mathbb{R}_+, \cdot)$.
   (d) $(S^1, \cdot)$, donde tomamos S^1 como el espacio de todos los números complejos z para los que $|z| = 1$.
   (e) El *grupo general lineal* $\mathrm{GL}(n)$, bajo la operación de multiplicación de matrices. ($\mathrm{GL}(n)$ es el conjunto de todas las matrices de orden n por n no singulares, con la topología de subespacio al considerarlas como un subconjunto del espacio euclídeo de dimensión n^2 de forma obvia.)
3. Sea H un subespacio de G. Pruebe que si H es también un subgrupo de G, entonces tanto H como $\bar{H}$ son grupos topológicos.
4. Sea α un elemento de G. Pruebe que las aplicaciones $f_\alpha, g_\alpha : G \to G$ definidas por
$$f_\alpha(x) = \alpha \cdot x \qquad \text{y} \qquad g_\alpha(x) = x \cdot \alpha$$
son homeomorfismos de G. Concluya que G es un *espacio homogéneo* (esto significa que para cada par x, y de puntos de G, existe un homeomorfismo de G sobre él mismo que lleva x a y).
5. Sea H un subgrupo de G. Si $x \in G$, definimos $xH = \{x \cdot h \mid h \in H\}$; este conjunto se denomina ***clase por la izquierda*** de H en G. Denotemos por G/H a la colección de clases por la izquierda de H en G, que es una partición de G. Dotemos a G/H de la topología cociente.
   (a) Pruebe que, si $\alpha \in G$, la aplicación f_α del ejercicio anterior induce un homeomorfismo de G/H que lleva a xH sobre $(\alpha \cdot x)H$. Concluya que G/H es un espacio homogéneo.
   (b) Pruebe que si H es un conjunto cerrado en la topología de G, entonces los conjuntos unipuntuales son cerrados en G/H.
   (c) Pruebe que la aplicación cociente $p : G \to G/H$ es abierta.
   (d) Pruebe que si H es cerrado en la topología de G y es un subgrupo normal de G, entonces G/H es un grupo topológico.

6. Los enteros $\mathbb{Z}$ son un subgrupo normal de $(\mathbb{R}, +)$. El cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es un grupo topológico conocido: ¿cuál es?

7. Si A y B son subconjuntos de G, denotemos por $A \cdot B$ al conjunto de todos los puntos $a \cdot b$ para $a \in A$ y $b \in B$, y representemos por A^{-1} al conjunto de todos los puntos a^{-1}, para $a \in A$.

(a) Un entorno V del elemento identidad e se dice que es ***simétrico*** si verifica que $V = V^{-1}$. Si U es un entorno de e, pruebe que existe un entorno simétrico V de e tal que $V \cdot V \subset U$. [*Indicación:* si W es un entorno de e, entonces $W \cdot W^{-1}$ es simétrico.]

(b) Pruebe que G es de Hausdorff. De hecho, pruebe que si $x \neq y$ existe un entorno V de e tal que $V \cdot x$ y $V \cdot y$ son disjuntos.

(c) Pruebe que G satisface el siguiente axioma de separación, que se denomina ***axioma de regularidad***: dado un conjunto cerrado A y un punto x que no está en A, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y a x, respectivamente. [*Indicación:* existe un entorno V de e tal que $V \cdot x$ y $V \cdot A$ son disjuntos.]

(d) Sea H un subgrupo de G que es cerrado en la topología de G y sea $p : G \to G/H$ la aplicación cociente. Pruebe que G/H satisface el axioma de regularidad. [*Indicación:* examine la prueba de (c) cuando A es saturado.]

Capítulo 3

Conexión y compacidad

En el estudio de cálculo elemental existen tres teoremas básicos acerca de funciones continuas sobre los que se apoyan la mayoría de resultados que encontramos en esta materia. Son los siguientes:

Teorema del valor intermedio. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y r es un número real comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un elemento $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = r$.

Teorema del valor máximo. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces existe un elemento $c \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq f(c)$ para cada $x \in [a, b]$.

Teorema de la continuidad uniforme. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ para cada par de números x_1, x_2 de $[a, b]$ verificando $|x_1 - x_2| < \delta$.

Estos tres teoremas se utilizan en otros muchos resultados. Por ejemplo, el teorema del valor intermedio se emplea para construir funciones inversas, tales como $\sqrt[3]{x}$ y $\operatorname{arcsen} x$; el teorema del valor máximo se utiliza para probar el teorema del valor medio para derivadas, resultado sobre el que se apoyan los dos *teoremas fundamentales del cálculo*. El teorema de la continuidad uniforme se utiliza, entre otras cosas, para demostrar que cada función continua es integrable.

Hemos hablado de estos tres teoremas como resultados sobre funciones continuas, pero también pueden ser considerados como teoremas sobre funciones definidas sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ de los números reales. Este hecho es realmente decisivo ya que los tres teoremas dependen no sólo de la continuidad de f, sino también de ciertas propiedades que satisface el espacio topológico $[a, b]$.

La propiedad del espacio $[a, b]$ que nos permite enunciar el teorema del valor intermedio se llama *conexión* y la propiedad en la que se apoyan los otros dos resultados se denomina *compacidad*. En este capítulo definiremos estas propiedades para

espacios topológicos arbitrarios y demostraremos las correspondientes versiones de estos teoremas en un contexto más general.

Así como los tres teoremas señalados son fundamentales para cálculo elemental, las nociones de conexión y compacidad son también fundamentales e imprescindibles en análisis, geometría y topología —de hecho, lo son en cualquier contexto en el que la noción de espacio topológico sea en sí misma relevante.

§23 Espacios conexos

La definición de conexión para un espacio topológico es muy natural. Así, se dice que un espacio puede ser "separado" si es posible dividirlo en dos conjuntos abiertos con intersección trivial. En caso contrario, diremos que el espacio es conexo. En términos más precisos, se tiene la siguiente definición.

Definición. Sea X un espacio topológico. Una ***separación*** de X es un par U, V de abiertos disjuntos no triviales de X cuya unión es X. El espacio X se dice que es ***conexo*** si no existe una separación de X.

Obviamente, la conexión es una propiedad topológica, ya que se formula completamente en términos de la colección de los conjuntos abiertos de X. En otras palabras, si X es un espacio conexo, también lo es cualquier espacio homeomorfo a X.

Otro modo de formular la definición de conexión es la siguiente:

> *Un espacio X es conexo si, y sólo si, los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados en X son el conjunto vacío y el propio X.*

Obsérvese que si A es un subconjunto propio no vacío de X que es a la vez abierto y cerrado, entonces los conjuntos $U = A$ y $V = X - A$ constituyen una separación de X. Recíprocamente, si U y V forman una separación de X, entonces U es un subconjunto propio no vacío de X que es abierto y cerrado.

Para un subespacio Y de un espacio topológico X existe otra manera alternativa de formular la definición de conexión.

Lema 23.1. *Si Y es un subespacio de X, una separación de Y es un par A, B de conjuntos no vacíos y disjuntos cuya unión es Y de modo que ninguno de ellos contiene puntos límite del otro. El espacio Y es conexo si no existe una separación de Y.*

Demostración. Supongamos primero que A, B es una separación de Y. Entonces A es abierto y cerrado en Y. La adherencia de A en Y es el conjunto $\bar{A} \cap Y$ (donde $\bar{A}$ denota la adherencia de A en X). Como A es cerrado en Y, $A = \bar{A} \cap Y$, o lo

que es igual, $\bar{A} \cap B = \varnothing$. Como $\bar{A}$ es la unión de A con sus puntos límite, B no contiene puntos límite de A. Un argumento análogo demuestra que A no contiene puntos límite de B.

Recíprocamente, supongamos que A y B son conjuntos disjuntos no vacíos cuya unión es Y, ninguno de los cuales contiene puntos límite del otro. Entonces se satisface que $\bar{A} \cap B = \varnothing$ y $A \cap \bar{B} = \varnothing$; de esta forma, concluimos que $\bar{A} \cap Y = A$ y $\bar{B} \cap Y = B$. Así, A y B son cerrados en Y y, como $A = Y - B$ y $B = Y - A$, también son abiertos en Y. ■

EJEMPLO 1. Sea X un conjunto con dos elementos dotado de la topología indiscreta. Es obvio que no existe una separación de X, luego X es conexo.

EJEMPLO 2. Sea Y el subespacio $[-1, 0) \cup (0, 1]$ de la recta real $\mathbb{R}$. Los conjuntos $[-1, 0)$ y $(0, 1]$ son no vacíos y abiertos en Y (aunque no en $\mathbb{R}$) y, de esta forma, constituyen una separación de Y. Por otra parte, obsérvese que ninguno de estos conjuntos contiene puntos límite del otro.

EJEMPLO 3. Sea X el subespacio $[-1, 1]$ de la recta real. Los conjuntos $[-1, 0]$ y $(0, 1]$ son disjuntos y no vacíos pero no forman una separación de X ya que el primer conjunto no es abierto en X. Por otro lado, obsérvese que el primer conjunto contiene un punto límite, el 0, del segundo. De hecho, probaremos enseguida que no existe una separación del espacio $[-1, 1]$.

EJEMPLO 4. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ no es conexo. Es más, los únicos subespacios conexos de $\mathbb{Q}$ son los conjuntos unipuntuales: si Y es un subespacio de $\mathbb{Q}$ conteniendo dos puntos p y q, es posible elegir un número irracional a entre p y q y escribir Y como la unión de los abiertos

$$Y \cap (-\infty, a) \quad \text{e} \quad Y \cap (a, +\infty).$$

EJEMPLO 5. Sea X el siguiente subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$:

$$X = \{x \times y \mid y = 0\} \cup \{x \times y \mid x > 0, y = 1/x\}.$$

Entonces X no es conexo. De hecho, los dos conjuntos constituyen una separación de X pues ninguno de ellos contiene puntos límite del otro (véase la Figura 23.1).

Figura 23.1

Hemos proporcionado varios ejemplos de espacios que no son conexos. ¿Cómo podemos construir espacios que sean conexos? Demostraremos varios resultados que

nos dicen cómo construir espacios conexos a partir de espacios conexos que ya están dados de antemano. En la próxima sección aplicaremos estos teoremas para demostrar que algunos espacios específicos, tales como los intervalos en $\mathbb{R}$, las bolas y los cubos en $\mathbb{R}^n$, son conexos. En primer lugar, veamos un lema.

Lema 23.2. *Si los conjuntos C y D forman una separación de X, y además Y es un subespacio conexo de X, entonces Y está contenido bien en C, bien en D.*

Demostración. Como C y D son abiertos en X, los conjuntos $C \cap Y$ y $D \cap Y$ son abiertos en Y. Estos dos conjuntos son disjuntos y su unión es Y; si fueran ambos no vacíos, constituirían una separación de Y. De esta forma, alguno de ellos es vacío. Por tanto, Y está contenido enteramente en C o en D. ■

Teorema 23.3. *La unión de una colección de subespacios conexos de X que tienen un punto en común es conexa.*

Demostración. Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de subespacios conexos de un espacio X y sea p un punto de $\bigcap A_\alpha$. Probemos que el espacio $Y = \bigcup A_\alpha$ es conexo. Supongamos que $Y = C \cup D$ es una separación de Y. El punto p está, bien en C bien en D; supongamos que $p \in C$. Como A_α es conexo, ya $A_\alpha \subset C$, ya $A_\alpha \subset D$, aunque esta última posibilidad se descarta pues $p \in A_\alpha$ y $p \in C$. Por tanto, $A_\alpha \subset C$ para cada α, y así $\bigcup A_\alpha \subset C$, contradiciendo el hecho de que D era no vacío. ■

Teorema 23.4. *Sea A un subespacio conexo de X. Si $A \subset B \subset \bar{A}$, entonces B es también conexo.*

En otras palabras: si B se forma añadiéndole a A alguno o todos sus puntos límite, entonces B es conexo.

Demostración. Sea A conexo y sea $A \subset B \subset \bar{A}$. Supongamos que $B = C \cup D$ es una separación de B. Por el Lema 23.2, el conjunto A verifica $A \subset C$ o $A \subset D$; supongamos que $A \subset C$. Entonces $\bar{A} \subset \bar{C}$. Como $\bar{C}$ y D son disjuntos, B no puede intersecar a D. Esto contradice el hecho de que D es un subconjunto no vacío de B. ■

Teorema 23.5. *La imagen de un espacio conexo bajo una aplicación continua es un espacio conexo.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y supongamos que X es conexo. Queremos probar que el espacio imagen $Z = f(X)$ es conexo. Como la

aplicación obtenida de f al restringir su rango al espacio Z es también continua, es suficiente considerar el caso de una aplicación continua y sobreyectiva

$$g : X \to Z.$$

Supongamos que $Z = A \cup B$ es una separación de Z en dos conjuntos disjuntos no vacíos y abiertos en Z. Entonces $g^{-1}(A)$ y $g^{-1}(B)$ son conjuntos disjuntos cuya unión es X. Además son abiertos en X, pues g es continua, y no vacíos, porque g es sobreyectiva. De esta forma, constituyen una separación de X, contradiciendo la hipótesis de que X era conexo. ■

Teorema 23.6. *El producto cartesiano finito de espacios conexos es conexo.*

Demostración. Vamos a demostrar primero el resultado para el producto de dos espacios conexos X e Y. La prueba es sencilla de visualizar. Elijamos un "punto base" $a \times b$ en el producto $X \times Y$. Obsérvese que la "rebanada horizontal" $X \times b$ es conexa, ya que es homeomorfa a X, y que también lo es cada "rebanada vertical" ya que éstas son homeomorfas a Y. Como consecuencia, cada espacio

$$T_x = (X \times b) \cup (x \times Y)$$

es conexo ya que es la unión de dos espacios conexos que tienen el punto $x \times b$ en común (véase la Figura 23.2). Ahora, consideremos la unión $\cup_{x \in X} T_x$ de todos estos espacios. Como todos tienen al punto $a \times b$ en común, esta unión es conexa. Finalmente, al coincidir esta unión con el propio espacio $X \times Y$, se concluye que $X \times Y$ es conexo.

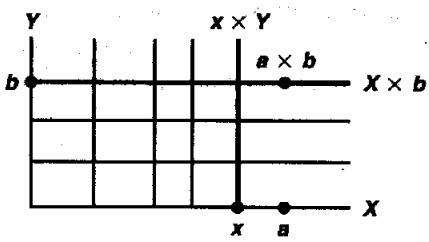


Figura 23.2

La prueba para cualquier colección finita de espacios conexos puede realizarse por inducción, utilizando el hecho (fácilmente demostrable) de que $X_1 \times \cdots \times X_n$ es homeomorfo a $(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$. ■

Es natural preguntarse cuándo puede extenderse este teorema a productos arbitrarios de espacios conexos. La respuesta depende de la topología que utilicemos para dicho producto, tal y como demuestra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6. Consideremos el producto cartesiano $\mathbb{R}^\omega$ con la topología por cajas. Podemos escribir $\mathbb{R}^\omega$ como la unión de un conjunto A constituido por todas las sucesiones acotadas de números reales, y de un conjunto B formado por las sucesiones no acotadas. Estos conjuntos son disjuntos y además son abiertos en la topología por cajas ya que si $\mathbf{a}$ es un punto de $\mathbb{R}^\omega$, el conjunto abierto

$$U = (a_1 - 1, a_1 + 1) \times (a_2 - 1, a_2 + 1) \times \cdots$$

está ya formado por sucesiones acotadas si $\mathbf{a}$ es una sucesión acotada, ya por sucesiones no acotadas si $\mathbf{a}$ no lo está. De esta forma, incluso a pesar de que $\mathbb{R}$ es conexo (tal y como probaremos en la próxima sección), el producto $\mathbb{R}^\omega$ no es conexo con la topología por cajas.

EJEMPLO 7. Consideremos ahora $\mathbb{R}^\omega$ con la topología producto y supongamos que $\mathbb{R}$ es conexo. Entonces probaremos que $\mathbb{R}^\omega$ también es conexo. Denotemos por $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ el subespacio de $\mathbb{R}^\omega$ formado por todas las sucesiones $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ tales que $x_i = 0$ para $i > n$. El espacio $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ es claramente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y utilizando el resultado anterior concluimos que es conexo. Se sigue entonces que el espacio $\mathbb{R}^\infty$ es conexo, pues es la unión de los espacios $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ que tienen el punto $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots)$ en común. Veamos ahora que la adherencia de $\mathbb{R}^\infty$ coincide con $\mathbb{R}^\omega$ de lo cual se deduce que éste también es un espacio conexo.

Sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$ un punto de $\mathbb{R}^\omega$. Sea $U = \prod U_i$ un abierto básico de la topología producto que contiene a $\mathbf{a}$. Veamos que U interseca a $\mathbb{R}^\infty$. Existe un entero N tal que $U_i = \mathbb{R}$ para $i > N$. Entonces el punto

$$\mathbf{x} = (a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$$

de $\mathbb{R}^\infty$ pertenece a U ya que $a_i \in U_i$ para $i > N$.

El argumento que acabamos de presentar puede generalizarse para demostrar que un producto arbitrario de espacios conexos es conexo en la topología producto. Como no utilizaremos este resultado, dejaremos la prueba para los ejercicios.

Ejercicios

1. Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías en X. Si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ ¿qué puede decir de la conexión de X respecto de una topología y respecto de la otra?
2. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de subespacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ para cada n. Demuestre que $\bigcup A_n$ es conexo.
3. Sean $\{A_\alpha\}$ una colección de subespacios conexos de X y A un subespacio conexo de X. Demuestre que si $A \cap A_\alpha \neq \varnothing$ para todo α, entonces $A \cup (\bigcup A_\alpha)$ es conexo.
4. Demuestre que si X es un conjunto infinito, entonces X es conexo con la topología de los complementos finitos (o topología cofinita).

5. Un espacio es ***totalmente disconexo*** si sus únicos subespacios conexos son los conjuntos unipuntuales. Demuestre que si X tiene la topología discreta, entonces X es totalmente disconexo. ¿Es cierto el recíproco?

6. Sea $A \subset X$. Demuestre que si C es un subespacio conexo de X que interseca tanto a A como a $X - A$, entonces C interseca a $\operatorname{Fr} A$.

7. ¿Es el espacio $\mathbb{R}_\ell$ conexo? Justifique la respuesta.

8. Determine si $\mathbb{R}^\omega$ es o no conexo en la topología uniforme.

9. Sean A un subconjunto propio de X y B un subconjunto propio de Y. Si X e Y son conexos, demuestre que

$$(X \times Y) - (A \times B)$$

es conexo.

10. Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de espacios conexos y X el espacio producto

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha.$$

Sea $\mathbf{a} = (a_\alpha)$ un punto fijo de X.

(a) Dado un subconjunto finito K de J, denotemos por X_K el subespacio de X dado por todos los puntos $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ tales que $x_\alpha = a_\alpha$ para todo $\alpha \notin K$. Demuestre que X_K es conexo.

(b) Demuestre que la unión Y de los espacios X_K es conexa.

(c) Demuestre que X coincide con la adherencia de Y. Concluya que X es conexo.

11. Sea $p : X \to Y$ una aplicación cociente. Demuestre que si Y y los conjuntos de la forma $p^{-1}(\{y\})$ son conexos, entonces X también es conexo.

12. Sea $Y \subset X$ y supongamos que X e Y son conexos. Demuestre que si A y B forman una separación de $X - Y$, entonces $Y \cup A$ e $Y \cup B$ son conexos.

§24 Subespacios conexos de la recta real

Los teoremas de la sección precedente nos muestran cómo construir nuevos espacios conexos partiendo de ciertos espacios conexos dados. ¿Pero dónde podemos encontrar estos espacios conexos para empezar a construir los otros? El mejor lugar para empezar a buscar es la propia recta real. Probaremos así que $\mathbb{R}$ es conexo y que también lo son los intervalos y los rayos en $\mathbb{R}$.

Una aplicación de estos resultados es el teorema del valor intermedio del cálculo, que generalizaremos fácilmente a cualquier función continua sobre un espacio conexo. Otra es el hecho de que espacios tan familiares como las bolas y las esferas del

espacio euclídeo también son espacios conexos; la demostración involucra una nueva noción, llamada *conexión por caminos*, la cual también discutiremos.

El hecho de que los intervalos y los rayos en $\mathbb{R}$ sean conexos puede resultar familiar de análisis elemental. Probaremos de nuevo este resultado de una forma generalizada; además, descubriremos que no depende de las propiedades algebraicas de $\mathbb{R}$, sino de sus propiedades como conjunto ordenado. Para justificar esta afirmación, demostraremos los resultados para un conjunto ordenado arbitrario que tiene las mismas propiedades relativas al orden que $\mathbb{R}$. Tales conjuntos se denominan *continuos lineales*.

Definición. Un conjunto simplemente ordenado L con más de un elemento se dice que es un ***continuo lineal*** si se verifican las siguientes condiciones:

(1) L tiene la propiedad del supremo.

(2) Si $x < y$, entonces existe z tal que $x < z < y$.

Teorema 24.1. *Si L es un continuo lineal con la topología del orden, entonces L es conexo, y también lo son los intervalos y los rayos de L.*

Demostración. Recordemos que un subespacio Y de L se dice *convexo* si cada par de puntos a, b de Y con $a < b$, el intervalo $[a, b]$ de puntos de L está contenido en Y. Vamos a probar que si Y es un subespacio convexo de L, entonces Y es conexo.

Supongamos entonces que Y es la unión disjunta de dos conjuntos A y B, cada uno de los cuales es abierto en Y. Elegimos $a \in A$ y $b \in B$; supongamos por conveniencia que $a < b$. El intervalo $[a, b]$ de puntos de L está enteramente contenido en Y ya que Y es convexo, por tanto, podemos escribir $[a, b]$ como la unión de dos conjuntos disjuntos

$$A_0 = A \cap [a, b] \quad \text{y} \quad B_0 = B \cap [a, b],$$

cada uno de los cuales es abierto en $[a, b]$ con la topología relativa, que es la misma que la topología del orden. Los conjuntos A_0 y B_0 son no vacíos pues $a \in A_0$ y $b \in B_0$. Así, A_0 y B_0 constituyen una separación de $[a, b]$.

Sea $c = \sup A_0$. Veamos que c no pertenece a A_0 ni a B_0 lo cual contradice el hecho de que $[a, b]$ es la unión de A_0 y B_0.

Caso 1. Supongamos que $c \in B_0$. Entonces $c \neq a$, así que bien $c = b$, o bien $a < c < b$. En cualquier caso, se sigue del hecho de que B_0 es abierto en $[a, b]$ que existe un intervalo de la forma $(d, c]$ contenido en B_0. Si $c = b$, se llega a una contradicción ya que d es una cota superior de A_0 más pequeña que c. Si $c < b$, observamos que $(c, b]$ no interseca a A_0 (pues c es una cota superior de A_0). Entonces

$$(d, b] = (d, c] \cup (c, b]$$

no interseca a A_0. De nuevo, d es una cota superior de A_0 más pequeña que c, situación contraria a nuestra hipótesis de partida (véase la Figura 24.1).

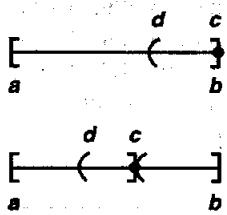


Figura 24.1

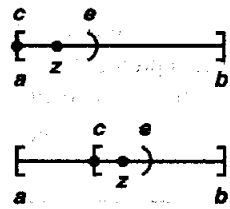


Figura 24.2

Caso 2. Supongamos que $c \in A_0$. Entonces $c \neq b$ así que bien $c = a$, o bien $a < c < b$. Como A_0 es abierto en $[a, b]$, debe existir algún intervalo de la forma $[c, e)$ contenido en A_0 (véase la Figura 24.2). Utilizando la segunda propiedad que verifica por definición un continuo lineal L, podemos elegir un punto $z \in L$ tal que $c < z < e$. Entonces $z \in A_0$, lo cual contradice el hecho de que c es una cota superior de A_0. ■

Corolario 24.2. *La recta real $\mathbb{R}$ es conexa y también lo son los intervalos y los rayos en $\mathbb{R}$.*

Como una aplicación, probamos el teorema del valor intermedio del cálculo elemental en un contexto más general.

Teorema 24.3 (Teorema del valor intermedio). *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua, donde X es un espacio conexo e Y es un conjunto ordenado con la topología del orden. Si a y b son dos puntos de X y r es un punto de Y que se encuentra entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un punto c en X tal que $f(c) = r$.*

El teorema del valor intermedio del cálculo es un caso especial de este teorema cuando X es un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ y el espacio Y es la propia recta real $\mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos las hipótesis del teorema. Los conjuntos

$$A = f(X) \cap (-\infty, r) \quad \text{y} \quad B = f(X) \cap (r, +\infty)$$

son disjuntos, y además son no vacíos pues uno contiene a $f(a)$ mientras el otro contiene a $f(b)$. Cada uno es abierto en la imagen $f(X)$ ya que son la intersección de un rayo abierto en Y con $f(X)$. Si no existiera un punto c de X tal que $f(c) = r$, entonces $f(X)$ sería la unión de los conjuntos A y B. Entonces A y B constituirían una separación de $f(X)$ lo cual contradice el hecho de que la imagen de un conjunto conexo bajo una aplicación continua sigue siendo un conjunto conexo. ■

EJEMPLO 1. Un ejemplo de continuo lineal distinto de $\mathbb{R}$ es el cuadrado ordenado. Vamos a comprobar la propiedad del supremo (la segunda propiedad de la definición es triviál). Sean A un subconjunto de $I \times I$, $\pi_1 : I \times I \to I$ la proyección sobre la primera coordenada y $b = \sup \pi_1(A)$. Si $b \in \pi_1(A)$, entonces A interseca el subconjunto $b \times I$ de $I \times I$. Como $b \times I$ tiene el mismo orden que I, el conjunto $A \cap (b \times I)$ tendrá un supremo $b \times c$, el cual será el supremo de A (véase la Figura 24.3). Si $b \notin \pi_1(A)$ entonces $b \times 0$ es el supremo de A; ningún elemento de la forma $b' \times c$ con $b' < b$ puede ser un supremo de A ya que entonces b' sería un supremo para $\pi_1(A)$.

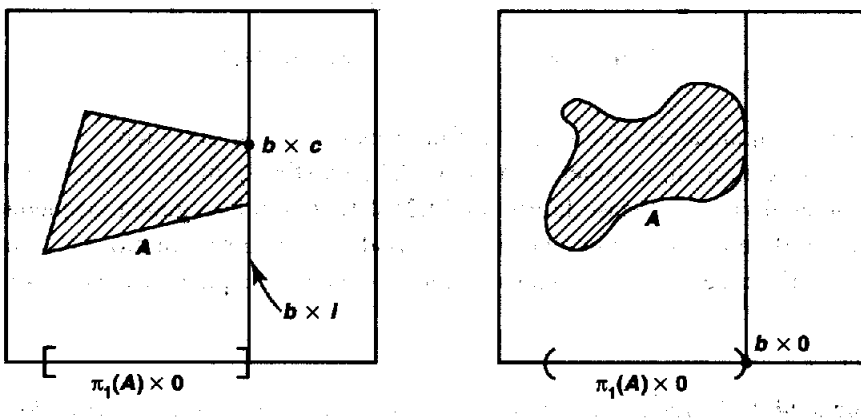


Figura 24.3

EJEMPLO 2. Si X es un conjunto bien ordenado, entonces $X \times [0,1)$ es un continuo lineal con el orden del diccionario; dejamos al lector la comprobación de este hecho como ejercicio. Este conjunto se puede interpretar como el resultado de encajar inmediatamente después de cada uno de los elementos de X el intervalo $(0,1)$.

La conexión de los intervalos en $\mathbb{R}$ nos lleva a enunciar un criterio muy útil para demostrar que un espacio X es conexo; concretamente, nos referimos a la condición de que cualquier par de puntos de X pueda unirse mediante un *camino* en X.

Definición. Dados dos puntos x e y del espacio X, un ***camino*** en X que une x con y es una aplicación continua $f : [a,b] \to X$ de algún intervalo cerrado de la recta real en X, de modo que $f(a) = x$ y $f(b) = y$. Un espacio X se dice que es ***conexo por caminos*** si cada par de puntos de X se pueden unir mediante un camino en X.

Es sencillo comprobar que todo espacio X que es conexo por caminos también es un espacio conexo. Supongamos que $X = A \cup B$ es una separación de X. Sea $f : [a,b] \to X$ un camino en X. Como $[a,b]$ es conexo, entonces el conjunto $f([a,b])$ debe estar contenido ya en A, ya en B. Por tanto, no existen caminos en X que unan puntos de A con puntos de B lo cual es contrario al hecho de que X sea conexo por caminos.

El recíproco de esta implicación no es cierto; un espacio conexo no es necesariamente conexo por caminos. Los Ejemplos 6 y 7 ilustran esta situación.

EJEMPLO 3. Se define la ***bola unidad*** B^n en $\mathbb{R}^n$ como

$$B^n = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$$

donde

$$\|x\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}.$$

La bola unidad es conexa por caminos; dados dos puntos cualesquiera $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de B^n, el segmento de línea recta $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$f(t) = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$$

está enteramente contenido en B^n ya que

$$\|f(t)\| \leq (1-t)\|\mathbf{x}\| + t\|\mathbf{y}\| \leq 1.$$

Un argumento similar muestra que tanto las bolas abiertas $B_d(\mathbf{x}, \epsilon)$ como las cerradas $\bar{B}_d(\mathbf{x}, \epsilon)$ contenidas en $\mathbb{R}^n$ son conexas por caminos.

EJEMPLO 4. Se define el ***espacio euclídeo agujereado*** como el espacio $\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$, donde $\mathbf{0}$ es el origen en $\mathbb{R}^n$. Si $n > 1$, este espacio es conexo por caminos: dados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ distintos de $\mathbf{0}$, podemos unir $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ con el segmento de línea recta que ambos determinan si este segmento no pasa por el origen. En caso de que así ocurriera, podemos elegir otro punto $\mathbf{z}$ que no esté contenido en la recta que determinan $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ y a continuación considerar la línea recta quebrada que determinan $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$ y finalmente $\mathbf{y}$.

EJEMPLO 5. Se define la ***esfera unidad*** S^{n-1} en $\mathbb{R}^n$ como el conjunto

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Si $n > 1$, es conexa por caminos ya que la aplicación $g : \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\} \to S^{n-1}$ definida por $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ es continua y sobreyectiva, y es sencillo demostrar que la imagen bajo una aplicación continua de un espacio conexo por caminos es también conexo por caminos.

EJEMPLO 6. *El cuadrado ordenado I_o^2 es conexo pero no conexo por caminos.* Hemos demostrado que el cuadrado ordenado es un continuo lineal, luego es un espacio conexo. Veamos que no es conexo por caminos: sean $p = 0 \times 0$ y $q = 1 \times 1$. Supongamos que existe un camino $f : [a,b] \to I_o^2$ uniendo p con q y llegaremos a una contradicción. Por el teorema del valor intermedio, el conjunto imagen $f([a,b])$ debe contener cada punto $x \times y$ de I_o^2. Así, para cada $x \in I$, el conjunto

$$U_x = f^{-1}(x \times (0,1))$$

es un subconjunto no vacío de $[a,b]$ y, por continuidad, es también abierto en $[a,b]$ (véase la Figura 24.4). Elijamos para cada $x \in I$, un número racional q_x perteneciente a U_x. Como los conjuntos U_x son disjuntos, la aplicación $x \to q_x$ es una aplicación inyectiva de I en $\mathbb{Q}$. Esto contradice el hecho de que el intervalo I es no numerable (tal y como probaremos más tarde).

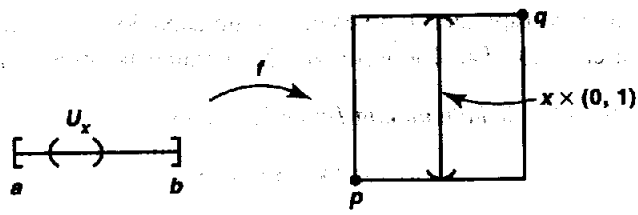


Figura 24.4

EJEMPLO 7. Sea S el siguiente subconjunto del plano

$$S = \{x \times \operatorname{sen}(1/x) \mid 0 < x \leq 1\}.$$

Como S es la imagen del conjunto conexo $(0, 1]$ bajo una aplicación continua, S es conexo. De esta forma, su adherencia $\bar{S}$ en $\mathbb{R}^2$ también es conexa. El conjunto $\bar{S}$ es un ejemplo clásico en topología que se conoce como ***curva seno del topólogo***. Está ilustrada en la Figura 24.5 y es simplemente la unión del conjunto inicial S con el intervalo vertical $0 \times [-1, 1]$. Vamos a demostrar que $\bar{S}$ no es conexo por caminos.

Supongamos que existiera un camino $f : [a, c] \to \bar{S}$ empezando en el origen y terminando en un punto cualquiera de S. El conjunto de los números t para los cuales $f(t) \in 0 \times [-1, 1]$ es cerrado y, por tanto, tiene un máximo que denotaremos por b. Entonces $f : [b, c] \to \bar{S}$ es un camino que aplica b en el intervalo vertical $0 \times [-1, 1]$ mientras el resto de puntos de $[b, c]$ se aplican en puntos de S.

Sustituyamos $[b, c]$ por $[0, 1]$ para simplificar la prueba; sea $f(t) = (x(t), y(t))$. Entonces $x(0) = 0$, mientras que $x(t) > 0$ e $y(t) = \operatorname{sen}(1/x(t))$ para $t > 0$. Vamos a demostrar que existe una sucesión de puntos $t_n \to 0$ tales que $y(t_n) = (-1)^n$. Entonces tendremos que la sucesión $y(t_n)$ no es convergente, contradiciendo la continuidad de f.

Para encontrar los números t_n procedemos del siguiente modo: dado n, elegimos u con $0 < u < x(1/n)$ tal que $\operatorname{sen}(1/u) = (-1)^n$. Usando entonces el teorema del valor intermedio podemos encontrar t_n con $0 < t_n < 1/n$ tal que $x(t_n) = u$.

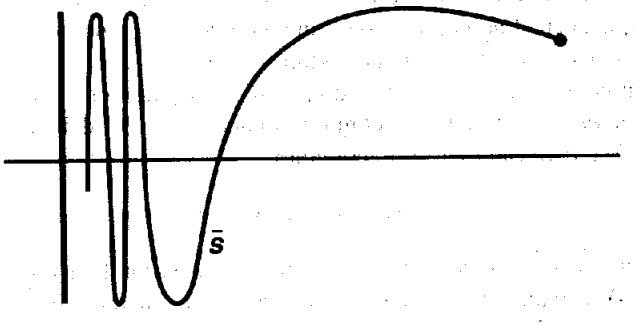


Figura 24.5

Ejercicios

1. (a) Dados los espacios $(0,1)$, $(0,1]$ y $[0,1]$, demuestre que ningún par de ellos son homeomorfos. [*Indicación:* ¿qué ocurre si le quitamos un punto a cada uno de estos espacios?]

(b) Supongamos que existen embebimientos $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$. Demuestre con un ejemplo que X e Y no son necesariamente homeomorfos.

(c) Demuestre que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos si $n > 1$.

2. Sea $f : S^1 \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Demuestre que existe un punto de S^1 tal que $f(x) = f(-x)$.

3. Sea $f : X \to X$ continua. Demuestre que si $X = [0,1]$, entonces existe un punto x tal que $f(x) = x$. El punto x se denomina ***punto fijo*** de f. ¿Qué ocurre si X es el espacio $[0,1)$ o el espacio $(0,1)$?

4. Sea X un conjunto ordenado con la topología del orden. Demuestre que si X es conexo, entonces X es un continuo lineal.

5. Considere los siguientes conjuntos con la topología del orden. ¿Cuáles de ellos son un continuo lineal?

(a) $\mathbb{Z}_+ \times [0,1)$.

(b) $[0,1) \times \mathbb{Z}_+$.

(c) $[0,1) \times [0,1]$.

(d) $[0,1] \times [0,1)$.

6. Demuestre que si X es un conjunto bien ordenado, entonces $X \times [0,1)$ con la topología del orden es un continuo lineal.

7. (a) Sean X e Y dos conjuntos ordenados con la topología del orden. Demuestre que si $f : X \to Y$ es una aplicación sobreyectiva que preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.

(b) Sea $X = Y = \bar{\mathbb{R}}_+$. Dado un entero positivo n, demuestre que la función $f(x) = x^n$ preserva el orden y es sobreyectiva. Concluya que su inversa, la *función raíz n-ésima*, es continua.

(c) Sea X el subespacio $(-\infty,-1) \cup [0,\infty)$ de $\mathbb{R}$. Demuestre que la función $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x+1$ si $x < -1$ y por $f(x) = x$ si $x \geq 0$ es una función que preserva el orden y que además es sobreyectiva. ¿Es f un homeomorfismo? Compare esta situación con (a).

8. (a) ¿El producto de espacios conexos por caminos es también un espacio conexo por caminos?

(b) Si $A \subset X$ y A es conexo por caminos, ¿es necesariamente $\bar{A}$ conexo por caminos?

(c) Si $f : X \to Y$ es continua y X es conexo por caminos, ¿es $f(X)$ necesariamente conexo por caminos?

(d) Si $\{A_\alpha\}$ es una colección de subespacios conexos por caminos de X verificando $\cap A_\alpha \neq \varnothing$, ¿es $\cup A_\alpha$ conexo por caminos?

9. Asumamos que $\mathbb{R}$ es no numerable. Demuestre que si A es un subconjunto numerable de $\mathbb{R}^2$, entonces $\mathbb{R}^2 - A$ es conexo por caminos. [*Indicación:* ¿cuántas líneas pasan a través de un punto dado de $\mathbb{R}^2$?]

10. Demuestre que si U es un subespacio abierto y conexo de $\mathbb{R}^2$, entonces U es conexo por caminos. [*Indicación:* demuestre que, dado $x_0 \in U$, el conjunto de los puntos que se pueden unir a x_0 por un camino en U es abierto y cerrado en U.]

11. Si A es un subespacio conexo de X, ¿se puede afirmar que $\operatorname{Int} A$ y $\operatorname{Fr} A$ son conexos? ¿Es cierto el recíproco? Justifique sus respuestas.

12. Recordemos que S_Ω denota el conjunto no numerable, minimal y bien ordenado. Denotemos por L el conjunto ordenado $S_\Omega \times [0, 1)$ con el orden del diccionario en el que hemos extraído el elemento mínimo. El conjunto L es un ejemplo clásico en topología que se conoce como ***línea larga***.
Teorema. La línea larga es conexa por caminos y localmente homeomorfa a $\mathbb{R}$, pero no puede ser embebida en $\mathbb{R}$.

(a) Sea X un conjunto ordenado; sean $a < b < c$ puntos de X. Demuestre que $[a, c)$ tiene el mismo tipo de orden que $[0, 1)$ si, y sólo si, tanto $[a, b)$ como $[b, c)$ tienen el mismo tipo de orden que $[0, 1)$.

(b) Sea X un conjunto ordenado. Sea $x_0 < x_1 < \cdots$ una sucesión creciente de puntos de X; supongamos que $b = \sup\{x_i\}$. Demuestre que $[x_0, b)$ tiene el mismo tipo de orden que $[0, 1)$ si, y sólo si, cada intervalo $[x_i, x_{i+1})$ tiene el mismo tipo de orden que $[0, 1)$.

(c) Denotemos por a_0 al mínimo de S_Ω. Para cada elemento a de S_Ω diferente de a_0, demuestre que el intervalo $[a_0 \times 0, a \times 0)$ de $S_\Omega \times [0, 1)$ tiene el mismo tipo de orden que $[0, 1)$. [*Indicación:* proceda por inducción transfinita. Bien a tiene un inmediato predecesor en S_Ω, o bien existe una sucesión creciente a_i en S_Ω con $a = \sup\{a_i\}$.]

(d) Demuestre que L es conexo por caminos.

(e) Demuestre que cada punto de L tiene un entorno homeomorfo a un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

(f) Demuestre que L no puede ser embebido en $\mathbb{R}$, ni en cualquiera de los espacios $\mathbb{R}^n$. [*Indicación:* cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$ tiene una base numerable de entornos.]

*§25 Componentes y conexión local†

Dado un espacio arbitrario X, existe una manera natural de dividirlo en varios trozos que son conexos (o conexos por caminos). Vamos a considerar este proceso a continuación.

Definición. Dado X, se define la siguiente relación de equivalencia en X: $x \sim y$ si existe un subespacio conexo de X que contiene a ambos puntos. Las clases de equivalencia se denominan ***componentes*** (o "componentes conexas") de X.

La simetría y la reflexividad de la relación son obvias. La transitividad se sigue del siguiente hecho: si A es un subespacio conexo que contiene a x y a y, y B es un subespacio conexo que contiene a y y a z, entonces $A \cup B$ es un subespacio que contiene a x y a z que además es conexo pues A y B tienen el punto y en común.

Las componentes de X también se pueden describir como sigue:

Teorema 25.1. *Las componentes de X son subespacios disjuntos y conexos de X cuya unión es X de forma que cada subespacio conexo de X no trivial interseca sólo a una de ellas.*

Demostración. Por tratarse de una relación de equivalencia y ser cada componente una clase, está claro que son disjuntas y que su unión es el espacio X. Además, cada subespacio conexo A de X interseca únicamente a una de ellas. Pues si A interseca a las componentes C_1 y C_2 en X, tomando $x_1 \in C_1$ y $x_2 \in C_2$ se tiene que $x_1 \sim x_2$ por definición y esto no puede ocurrir a menos que $C_1 = C_2$.

Para demostrar que cada componente C es conexa elijamos un punto x_0 de C. Para cada punto x de C, sabemos que $x \sim x_0$, luego existe un subespacio A_x que contiene a ambos puntos. Tal y como acabamos de probar, $A_x \subset C$ y así

$$C = \bigcup_{x \in C} A_x.$$

Como los subespacios A_x son conexos y tienen al punto x_0 en común, se tiene que C es conexo. ■

Definición. Definimos otra relación de equivalencia en el espacio X dada por: $x \sim y$ si existe un camino en X uniendo x con y. Las clases de equivalencia se denominan ***componentes conexas por caminos*** de X.

†Esta sección se utilizará en la Parte II del libro.

Veamos que se trata de una relación de equivalencia. Primero, observemos que si existe un camino $f : [a, b] \to X$ que une x con y y cuyo dominio es el intervalo $[a, b]$, entonces también existe un camino g uniendo x con y y con dominio $[c, d]$ (cualquier pareja de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ son homeomorfos). El hecho de que $x \sim x$ es claro pues basta considerar el camino constante $f : [a, b] \to X$ dado por $f(t) = x$ para todo t. La simetría se tiene por el siguiente motivo: si $f : [0, 1] \to X$ es un camino que une x con y, entonces el camino contrario $g : [0, 1] \to X$ dado por $g(t) = f(1 - t)$ es un camino que une y con x. Finalmente la transitividad de la relación se prueba así: sea $f : [0, 1] \to X$ un camino que une x con y y sea $g : [1, 2] \to X$ un camino que une y con z. Podemos "pegar" los caminos f y g y obtener un nuevo camino $h : [0, 2] \to X$ que une x con z; el camino h será una aplicación continua por el "lema del pegamiento", Teorema 18.3.

Podemos obtener el siguiente resultado, cuya demostración es similar a la del teorema precedente:

Teorema 25.2. *Las componentes conexas por caminos de X son subespacios disjuntos conexos por caminos de X cuya unión es X, tales que cada subespacio conexo por caminos de X no trivial interseca sólo a una de ellas.*

Obsérvese que cada componente de un espacio X es cerrada en X ya que la adherencia de un subespacio conexo de X es conexo. Si X tiene sólo un número finito de componentes, entonces cada componente es también un abierto en X, pues su complementario es una unión finita de cerrados; en general, las componentes de X no son abiertas en X.

No podemos afinar tanto cuando hablamos de las componentes conexas por caminos ya que, en general, no son ni abiertas ni cerradas en X. Consideremos los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1. Si consideramos $\mathbb{Q}$ como subespacio de $\mathbb{R}$, entonces cada componente de $\mathbb{Q}$ es un único punto. Ninguna de las componentes de $\mathbb{Q}$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{Q}$.

EJEMPLO 2. La "curva seno del topólogo" $\bar{S}$ de la sección precedente es un espacio que tiene una única componente (pues es conexo) y dos componentes conexas por caminos. Una de ellas es la curva S y la otra es el intervalo vertical $V = 0 \times [-1, 1]$. Obsérvese que S es abierto en $\bar{S}$ pero no es cerrado, mientras que V es cerrado pero no abierto. Si consideramos el espacio que resulta de quitarle a $\bar{S}$ todos los puntos de V cuya segunda coordenada es racional, se obtiene un espacio que tiene sólo una componente y una cantidad no numerable de componentes conexas por caminos.

La conexión es una propiedad muy deseable para un espacio topológico, aunque para ciertos propósitos es más importante que el espacio satisfaga una condición de conexión *localmente*. A grandes rasgos, la conexión local significa que cada punto tiene entornos conexos arbitrariamente pequeños. Siendo más precisos, podemos establecer la siguiente definición:

Definición. Un espacio X se dice que es ***localmente conexo en*** x si para cada entorno U de x, existe un entorno conexo V de x contenido en U. Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos, se dice que X es ***localmente conexo***. De manera análoga, se dice que un espacio X es ***localmente conexo por caminos en*** x si para cada entorno U de x, existe un entorno conexo por caminos V de x contenido en U. Si X es localmente conexo por caminos en cada uno de sus puntos, se dice que X es ***localmente conexo por caminos***.

EJEMPLO 3. Cada intervalo y cada rayo de la recta real son conexos y localmente conexos. El subespacio $[-1, 0) \cup (0, 1]$ no es conexo, pero es localmente conexo. La curva seno del topólogo es conexa pero no localmente conexa por caminos. Los racionales $\mathbb{Q}$ no son ni conexos, ni localmente conexos.

Teorema 25.3. *Un espacio X es localmente conexo si, y sólo si, para cada conjunto abierto U de X, cada componente de U es abierta en X.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo; sean U un abierto de X y C una componente de U. Si x es un punto de C, podemos elegir un entorno conexo V de x tal que $V \subset U$. Como V es conexo, debe estar enteramente contenido en la componente C de U. Así, C es abierto en X.

Recíprocamente, supongamos que las componentes de los abiertos de X son abiertos. Dado un punto x de X y un entorno U de x, sea C la componente de U que contiene a x. Ahora, C es conexo y como es abierto en X por hipótesis, X es localmente conexo en x. ■

Una demostración análoga se tiene para el siguiente teorema:

Teorema 25.4. *Un espacio X es localmente conexo por caminos si, y sólo si, para cada conjunto abierto U de X, cada componente conexa por caminos de U es abierta en X.*

La relación entre componentes conexas y conexas por caminos está dada por el siguiente resultado:

Teorema 25.5. *Si X es un espacio topológico, cada componente conexa por caminos de X está contenida en una componente de X. Si X es localmente conexo por caminos, entonces las componentes y las componentes conexas por caminos de X coinciden.*

Demostración. Sean C una componente de X, x un punto de C y P la componente conexa por caminos de X que contiene a x. Como P es conexa, $P \subset C$. Queremos demostrar que si X es localmente conexo por caminos, entonces $P = C$. Supongamos que $P \subsetneq C$. Denotemos por Q a la unión de todas las componentes conexas

por caminos de X que son distintas de P y que intersecan a C; cada una de ellas está contenida necesariamente en C, así que

$$C = P \cup Q.$$

Como X es localmente conexo por caminos, cada componente conexa por caminos de X es un abierto de X. Así P (que es una componente conexa por caminos) y Q (que es unión de componentes conexas por caminos) son abiertos en X y, por tanto, constituyen una separación de C, lo cual contradice la conexión de C. ■

Ejercicios

1. ¿Cuáles son las componentes y las componentes conexas por caminos de $\mathbb{R}_\ell$? ¿Cuáles son las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\ell$?

2. (a) ¿Cuáles son las componentes y las componentes conexas por caminos de $\mathbb{R}^\omega$ (con la topología producto)?

   (b) Consideremos $\mathbb{R}^\omega$ con la topología uniforme. Demuestre que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ están en la misma componente de $\mathbb{R}^\omega$ si, y sólo si, la sucesión

   $$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots)$$

   está acotada. [*Indicación:* es suficiente considerar el caso $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.]

   (c) Consideremos $\mathbb{R}^\omega$ con la topología por cajas. Demuestre que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ están en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^\omega$ si, y sólo si, la sucesión $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ es "finalmente cero". [*Indicación:* si $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ no es finalmente cero, demuestre que existe un homeomorfismo h de $\mathbb{R}^\omega$ en sí mismo tal que $h(\mathbf{x})$ está acotado mientras que $h(\mathbf{y})$ no lo está.]

3. Demuestre que el cuadrado ordenado es localmente conexo pero no es localmente conexo por caminos. ¿Cuáles son las componentes conexas por caminos de este espacio?

4. Sea X un espacio localmente conexo por caminos. Demuestre que cada conjunto abierto y conexo en X es también conexo por caminos.

5. Sean X el conjunto de los puntos racionales en el intervalo $[0, 1] \times 0$ de $\mathbb{R}^2$ y T la unión de todos los segmentos que unen el punto $p = 0 \times 1$ con los puntos de X.

   (a) Demuestre que T es conexo por caminos, pero es localmente conexo sólo en el punto p.

   (b) Encuentre un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que sea conexo por caminos y que no sea localmente conexo en cualquiera de sus puntos.

6. Un espacio X se dice que es ***débilmente localmente conexo en*** x si para cada entorno U de x, existe un subespacio conexo de X contenido en U que contiene un entorno de x. Demuestre que si X es débilmente localmente conexo en cada uno de sus puntos, entonces X es localmente conexo. [*Indicación:* demuestre que las componentes de los conjuntos abiertos son abiertos.]

7. Considere la "rama infinita" X de la Figura 25.1. Demuestre que X no es localmente conexo en p, pero sí es débilmente localmente conexo en p. [*Indicación:* cualquier entorno conexo de p debe contener todos los puntos a_i.]

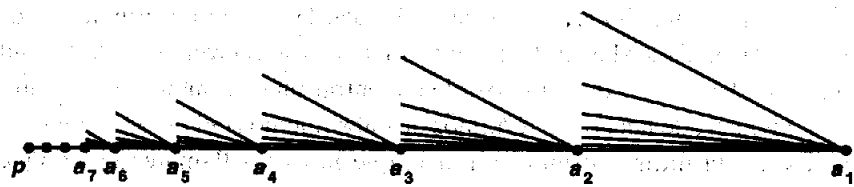


Figura 25.1

8. Sea $p : X \to Y$ una aplicación cociente. Demuestre que si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo. [*Indicación:* si C es una componente del conjunto abierto U de Y, demuestre que $p^{-1}(C)$ es una unión de componentes de $p^{-1}(U)$.]

9. Sean G un grupo topológico y C la componente de G que contiene al elemento identidad e. Demuestre que C es un subgrupo normal de G. [*Indicación:* si $x \in G$, entonces xC es la componente de G que contiene a x.]

10. Sea X un espacio. Definamos la relación $x \sim y$ si no existe una separación $X = A \cup B$ de X donde A, B son abiertos disjuntos tales que $x \in A$ e $y \in B$.

    (a) Demuestre que es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia se denominan ***cuasicomponentes*** de X.

    (b) Demuestre que cada componente de X está contenida en una cuasicomponente de X y que las componentes coinciden con las cuasicomponentes si X es localmente conexo.

    (c) Denotemos por K al conjunto $\{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ y denotemos por $-K$ al conjunto $\{-1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$. Determine las componentes, las componentes conexas por caminos y las cuasicomponentes de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2$:

$$A = (K \times [0,1]) \cup \{0 \times 0\} \cup \{0 \times 1\}.$$
$$B = A \cup ([0,1] \times \{0\}).$$
$$C = (K \times [0,1]) \cup (-K \times [-1,0]) \cup ([0,1] \times -K) \cup ([-1,0] \times K).$$

§26 Espacios compactos

La noción de compacidad no nos es tan cercana y natural como la de conexión. Desde los inicios de la topología, se ha admitido que el intervalo cerrado $[a, b]$ de la recta real gozaba de una cierta propiedad que era crucial en la demostración de teoremas tales como el teorema del valor máximo y el teorema de la continuidad uniforme. Sin embargo, tal propiedad ha tardado muchísimo en poder ser formulada para un espacio topológico arbitrario. Normalmente, se pensaba que esta propiedad crucial del intervalo cerrado era el hecho de que cualquier subconjunto infinito de puntos de $[a, b]$ tenía un punto límite y fue esta propiedad la que en un principio recibió el nombre de compacidad. Más tarde, los matemáticos asumieron que esta formulación no era la más adecuada, y que era posible encontrar una definición en términos más débiles y generales; de hecho, en términos de cubrimientos del espacio por conjuntos abiertos. Es a esta última formulación a la que nosotros llamaremos compacidad. Aunque no es tan natural ni intuitiva como su precedente, nos permitirá trabajar en contextos más arbitrarios.

Definición. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio X se dice que ***cubre*** X, o que es un ***cubrimiento*** de X, si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ coincide con X. Se dice que $\mathcal{A}$ es un ***cubrimiento abierto*** de X si es un cubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X.

Definición. Un espacio X se dice que es ***compacto*** si de cada cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X podemos extraer una subcolección finita que también cubre X.

EJEMPLO 1. La recta real $\mathbb{R}$ no es compacta, pues el cubrimiento de $\mathbb{R}$ por intervalos abiertos

$$\mathcal{A} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

no contiene ninguna subcolección finita que cubra $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 2. El siguiente subespacio de $\mathbb{R}$ es compacto:

$$X = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Dado un cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X, existe un elemento U de $\mathcal{A}$ que contiene al 0. El conjunto U contiene a todos los puntos de la forma $1/n$ excepto a un número finito de ellos; elijamos para cada uno de estos puntos que no están en U un elemento de $\mathcal{A}$ que los contenga. La colección de estos elementos de $\mathcal{A}$, junto con el propio U, es una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre X.

EJEMPLO 3. Cualquier espacio X que contenga a un número finito de puntos es trivialmente compacto, pues cualquier cubrimiento por abiertos de X es finito.

EJEMPLO 4. El intervalo $(0, 1]$ no es compacto; el cubrimiento abierto

$$\mathcal{A} = \{(1/n, 1] \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

no contiene ninguna subcolección finita cubriendo $(0, 1]$. Aplicando un argumento análogo se demuestra que tampoco es compacto el intervalo $(0, 1)$. Por otra parte, el intervalo $[0, 1]$ *sí es* compacto; quizá ya resulte familiar este hecho del análisis. En cualquier caso, lo demostraremos en breve.

En general, resulta complicado decidir cuándo un espacio dado es compacto o no. Primero vamos a probar algunos teoremas generales que nos muestran cómo construir nuevos espacios compactos a partir de otros compactos ya dados. En la siguiente sección demostraremos que algunos espacios en concreto son compactos. Estos espacios incluyen a todos los intervalos cerrados de la recta real y a todos los conjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$.

Vamos a probar en primer lugar algunos hechos acerca de subespacios. Si Y es un subespacio de X, una colección $\mathcal{A}$ se dice que cubre Y (o que es un cubrimiento de Y) si la unión de sus elementos contiene a Y.

Lema 26.1. *Sea Y un subespacio de X. Entonces Y es compacto si, y sólo si, cada cubrimiento de Y por abiertos de X contiene una subcolección finita que cubre Y.*

Demostración. Supongamos que Y es compacto y que $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es un cubrimiento de Y por abiertos de X. Entonces la colección

$$\{A_\alpha \cap Y \mid \alpha \in J\}$$

es un cubrimiento de Y por conjuntos abiertos en Y; como Y es compacto, existirá una subcolección finita de la forma

$$\{A_{\alpha_1} \cap Y, \ldots, A_{\alpha_n} \cap Y\}$$

cubriendo Y. Entonces $\{A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$ es una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre Y.

Recíprocamente, sea $\mathcal{A}' = \{A'_\alpha\}$ un cubrimiento de Y por abiertos de Y. Para cada α, podemos elegir un conjunto A_α abierto en X tal que

$$A'_\alpha = A_\alpha \cap Y.$$

La colección $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ es un cubrimiento de Y por abiertos en X. Por hipótesis, alguna subcolección finita $\{A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$ cubre Y. Entonces $\{A'_{\alpha_1}, \ldots, A'_{\alpha_n}\}$ es una subcolección finita de $\mathcal{A}'$ que cubre Y. ■

Teorema 26.2. *Cada subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Demostración. Sea Y un subespacio cerrado del espacio compacto X. Dado un cubrimiento $\mathcal{A}$ de Y por conjuntos abiertos en X, podemos considerar el cubrimiento abierto $\mathcal{B}$ de X uniendo a $\mathcal{A}$ el conjunto abierto $X - Y$, esto es,

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X - Y\}.$$

Como X es compacto, alguna subcolección finita cubre X. Si esta subcolección contiene al conjunto $X - Y$, lo descartamos. Si no es así, la dejamos como está. La colección resultante en cualquier caso es una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre Y. ■

Teorema 26.3. *Cada subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.*

Demostración. Sea Y un subespacio compacto del espacio de Hausdorff X. Probaremos que $X - Y$ es abierto, luego Y será cerrado.

Sea x_0 un punto de $X - Y$. Vamos a demostrar que existe un entorno de x_0 que no interseca a Y. Para cada punto y de Y, elijamos entornos disjuntos U_y y V_y de los puntos x_0 e y, respectivamente (utilizando la condición de Hausdorff). La colección $\{V_y \mid y \in Y\}$ es un cubrimiento de Y por abiertos de X; por tanto, podemos cubrir Y con un número finito de estos conjuntos, por ejemplo $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$. El conjunto abierto

$$V = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$$

contiene a Y, y es disjunto del abierto

$$U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$$

que se forma al tomar la intersección de los correspondientes entornos de x_0, ya que si z es un punto de V, entonces $z \in V_{y_i}$ para algún i, por tanto, $z \notin U_{y_i}$ y así $z \notin U$ (véase la Figura 26.1). Por tanto, U es un entorno de x_0 que no interseca a Y. ■

El resultado que hemos establecido a lo largo de la demostración anterior nos será útil más tarde, así que vamos a enunciarlo de un modo explícito para referirnos a él de una manera más fácil.

Lema 26.4. *Si Y es un subespacio compacto de un espacio de Hausdorff X y x_0 no está en Y, entonces existen abiertos disjuntos U y V de X conteniendo a x_0 y a Y respectivamente.*

EJEMPLO 5. Una vez que hayamos demostrado que el intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ es compacto, se sigue del Teorema 26.2 que cualquier subespacio cerrado de $[a, b]$ es compacto. Por otra parte, del Teorema 26.3 se deduce que los intervalos $(a, b]$ y (a, b) no pueden ser compactos (hecho que ya conocíamos) ya que no son cerrados en el espacio de Hausdorff $\mathbb{R}$.

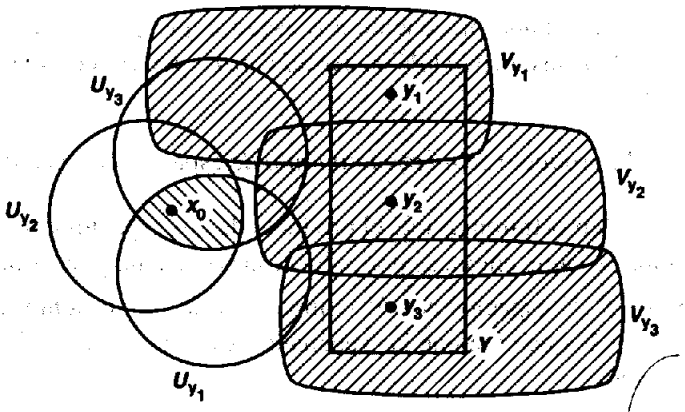


Figura 26.1

EJEMPLO 6. La condición de Hausdorff es imprescindible para demostrar el Teorema 26.3. Consideremos, por ejemplo, la topología cofinita en la recta real. Los únicos subconjuntos propios de $\mathbb{R}$ que son cerrados en esta topología son los finitos. Pero *cada* subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto con esta topología, tal y como se puede comprobar.

Teorema 26.5. *La imagen de un espacio compacto bajo una aplicación continua es un espacio compacto.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ continua con X compacto. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento del conjunto $f(X)$ por abiertos de Y. La colección

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

es un cubrimiento de X por conjuntos abiertos ya que f es continua. Por tanto, un número finito de ellos, por ejemplo

$$f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_n)$$

cubren X. Entonces los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ cubren $f(X)$. ■

Una utilidad importante del teorema precedente es la herramienta que nos ofrece para comprobar si una aplicación es un homeomorfismo.

Teorema 26.6. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva. Si X es compacto e Y es de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Probaremos que las imágenes de conjuntos cerrados de X bajo la aplicación f son también cerrados en Y; con esto demostraremos la continuidad de la aplicación f^{-1}. Si A es cerrado en X, entonces A es compacto, por el Teorema

26.2. Por tanto, el resultado precedente nos asegura que $f(A)$ es compacto. Ahora bien, como Y es de Hausdorff, $f(A)$ es cerrado en Y, por el Teorema 26.3. ■

Teorema 26.7. *El producto de un número finito de espacios compactos es compacto.*

Demostración. Demostraremos que el producto de dos espacios compactos es compacto; el teorema se sigue entonces por inducción sobre cualquier producto finito.

Paso 1. Sean X, Y espacios con Y compacto. Sea x_0 un punto de X, y sea N un abierto de $X \times Y$ que contiene la "rebanada" $x_0 \times Y$ de $X \times Y$. Probaremos el siguiente resultado:

> *Existe un entorno W de x_0 en X tal que N contiene al conjunto completo $W \times Y$.*

El conjunto $W \times Y$ se denomina ***tubo*** sobre $x_0 \times Y$. En primer lugar, cubramos $x_0 \times Y$ por elementos básicos $U \times V$ (para la topología de $X \times Y$) de modo que $U \times V \subset N$. El espacio $x_0 \times Y$ es compacto ya que es homeomorfo a Y. De esta forma, podemos cubrir $x_0 \times Y$ con un número finito de tales elementos básicos:

$$U_1 \times V_1, \ldots, U_n \times V_n.$$

(Suponemos que cada uno de los elementos básicos $U_i \times V_i$ interseca realmente a $x_0 \times Y$, ya que si así no ocurriera, tal elemento sería superfluo y lo podríamos descartar de la colección finita y seguir teniendo un cubrimiento de $x_0 \times Y$.) Definamos

$$W = U_1 \cap \cdots \cap U_n.$$

El conjunto W es abierto, y contiene a x_0 pues cada conjunto $U_i \times V_i$ interseca a $x_0 \times Y$. Afirmamos que los conjuntos $U_i \times V_i$, que fueron elegidos para cubrir la rebanada $x_0 \times Y$, también cubren el tubo $W \times Y$. Sea $x \times y$ un punto de $W \times Y$. Consideremos el punto $x_0 \times y$ de la rebanada $x_0 \times Y$ que tiene la misma y-coordenada en ese punto. Ahora, $x_0 \times y$ pertenece a algún $U_i \times V_i$ para algún i, así que $y \in V_i$. Pero $x \in U_j$ para todo j (ya que $x \in W$). Así, se tiene que $x \times y \in U_i \times V_i$, tal y como pretendíamos demostrar. Como todos los conjuntos $U_i \times V_i$ están contenidos en N, y como cubren al conjunto $W \times Y$, se tiene que el tubo $W \times Y$ también está contenido en N (véase la Figura 26.2).

Paso 2. Vamos a probar a continuación el teorema. Sean X e Y espacios compactos. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de $X \times Y$. Dado $x_0 \in X$, la rebanada $x_0 \times Y$ es compacta y estará cubierta por un número finito de elementos $A_1, \ldots, A_m$ de $\mathcal{A}$.

La unión $N = A_1 \cup \ldots \cup A_m$ es un abierto que contiene a $x_0 \times Y$; por el Paso 1, el abierto N contiene un tubo $W \times Y$ sobre $x_0 \times Y$ donde W es un abierto de X. Entonces $W \times Y$ está cubierto por un número finito de elementos $A_1, \ldots, A_m$ de $\mathcal{A}$.

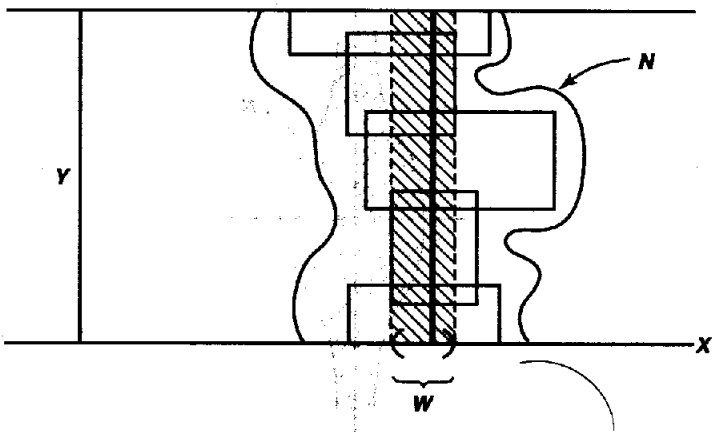


Figura 26.2

De esta forma, para cada x en X, podemos elegir un entorno W_x de x tal que el tubo $W_x \times Y$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. La colección de todos los entornos W_x es un cubrimiento abierto de X; por la compacidad de X, existe una subcolección finita

$$\{W_1, \ldots, W_k\}$$

cubriendo X. La unión de los tubos

$$W_1 \times Y, \ldots, W_k \times Y$$

es el espacio $X \times Y$ ya que cada cada uno de ellos puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$, y así $X \times Y$ es compacto. ■

El resultado que hemos probado en el Paso 1 de la prueba anterior nos puede ser muy útil en posteriores capítulos, así que lo enunciamos a continuación como un lema.

Lema 26.8 (El lema del tubo). *Consideremos el espacio producto $X \times Y$, donde Y es compacto. Si N es un conjunto abierto de $X \times Y$ conteniendo la rebanada $x_0 \times Y$ de $X \times Y$, entonces N contiene algún tubo $W \times Y$ sobre $x_0 \times Y$, donde W es un entorno de x_0 en X.*

EJEMPLO 7. No podemos eliminar la hipótesis de compacidad para el lema del tubo. Por ejemplo, sea Y el eje y de $\mathbb{R}^2$, y sea

$$N = \{x \times y \,;\, |x| < 1/(y^2 + 1)\}.$$

Entonces N es un abierto conteniendo al conjunto $0 \times \mathbb{R}$, pero que no contiene un tubo sobre $0 \times \mathbb{R}$ tal y como está ilustrado en la Figura 26.3.

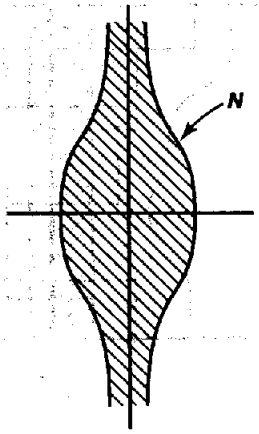


Figura 26.3

A continuación, nos podemos plantear la siguiente cuestión: *¿es el producto infinito de espacios compactos un espacio compacto?* Uno podría esperar que la respuesta fuera afirmativa, y de hecho así es. El resultado es lo suficientemente importante (y complicado) como para ser llamado por el nombre de la persona que lo descubrió: se denomina el *teorema de Tychonoff*.

A la hora de probar que el producto cartesiano de espacios conexos es conexo, lo que se hace es probar primero el resultado para un producto finito y a continuación deducir el caso general. Para el caso de la compacidad, no hay ninguna forma directa de extrapolar el resultado de productos finitos a productos arbitrarios de espacios. El caso infinito demanda un nuevo enfoque donde la prueba es bastante complicada. Por este motivo, y también para mantener la línea introductoria de este capítulo, hemos decidido posponerlo para más adelante. De cualquier forma, se podría estudiar en este momento si se desea; se demostrará este resultado en §37.

Existe un criterio último para decidir si un espacio es o no compacto, un criterio que es formulado en términos de conjuntos cerrados en lugar de abiertos. En un primer enfoque no parece muy natural ni útil. Sin embargo, y como veremos posteriormente, se utiliza en multitud de situaciones distintas. Primero vamos a escribir una definición.

Definición. Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X se dice que tiene la ***propiedad de la intersección finita*** si cada subcolección finita

$$\{C_1, \ldots, C_n\}$$

de $\mathcal{C}$ tiene intersección no vacía, es decir, $C_1 \cap \cdots \cap C_n$ es no vacía.

Teorema 26.9. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si, y sólo si, para cada colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, la intersección de todos los elementos de la colección*

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$$

es no vacía.

Demostración. Dada una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X, sea

$$\mathcal{C} = \{X - A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

la colección de sus complementarios. Entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:

(1) $\mathcal{A}$ es una colección de abiertos si, y sólo si, $\mathcal{C}$ es una colección de cerrados.

(2) La colección $\mathcal{A}$ cubre X si, y sólo si, la intersección $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ de todos los elementos de $\mathcal{C}$ es no vacía.

(3) La subcolección finita $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de $\mathcal{A}$ cubre X si, y sólo si, la intersección de los elementos correspondientes $C_i = X - A_i$ de $\mathcal{C}$ es vacía.

La primera afirmación es trivial, mientras que la segunda y la tercera se deducen de la ley de DeMorgan:

$$X - (\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in J} (X - A_\alpha).$$

La prueba del teorema se resume en dos pasos sencillos: se trata de considerar contrarrecíprocos por un lado y de tomar el complementario de los conjuntos por otro.

Así, la afirmación "X es compacto" es equivalente a decir "dada cualquier colección $\mathcal{A}$ de abiertos de X, si $\mathcal{A}$ cubre X, entonces existe una subcolección finita que cubre también a X". Esta afirmación es equivalente a su contrarrecíproco, que es la siguiente: "dada cualquier colección $\mathcal{A}$ de abiertos de X, si ninguna subcolección finita de $\mathcal{A}$ cubre X, entonces la colección no cubre a X". Tomando $\mathcal{C}$ como la colección $\{X - A \mid A \in \mathcal{A}\}$ y aplicando los pasos (1)–(3), vemos que esta afirmación es equivalente a la siguiente: "dada cualquier colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados, si cada intersección finita de elementos de $\mathcal{C}$ es no vacía, entonces la intersección de todos los elementos de $\mathcal{C}$ es no vacía". Ésta es precisamente la condición de nuestro teorema. ■

Un caso especial de este resultado ocurre cuando tenemos una ***sucesión encajada*** $C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n \supset C_{n+1} \supset \cdots$ de conjuntos cerrados en un espacio compacto X. Si cada uno de estos conjuntos C_n es no vacío, entonces la colección

$\mathcal{C} = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ tiene automáticamente la propiedad de la intersección finita. Entonces la intersección

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} C_n$$

es no vacía.

Utilizaremos este criterio de compacidad en la próxima sección para demostrar que el conjunto de los números reales es no numerable; en el Capítulo 5 cuando probemos el teorema de Tychonoff y, de nuevo, en el Capítulo 8 cuando demostremos el teorema de la categoría de Baire.

Ejercicios

1. (a) Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías en el mismo conjunto X; supongamos que $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$. ¿Qué se puede decir acerca de la compacidad de X respecto de cada una de ellas?
   (b) Demuestre que si X es un espacio compacto y de Hausdorff con respecto a ambas topologías, entonces bien $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ coinciden, o bien no son comparables.
2. (a) Demuestre que en la recta real con la topología de los complementos finitos, cualquier subespacio es compacto.
   (b) Si $\mathbb{R}$ tiene la topología formada por los conjuntos A tales que bien $\mathbb{R} - A$ es numerable, o bien es todo $\mathbb{R}$, ¿es $[0, 1]$ un subespacio compacto?
3. Demuestre que una unión finita de subespacios compactos de X es también compacto.
4. Demuestre que cada subespacio compacto de un espacio métrico está acotado en la distancia y además es cerrado. Encuentre un espacio métrico en el cual no todo subespacio cerrado y acotado sea compacto.
5. Sean A y B dos subespacios compactos disjuntos en un espacio de Hausdorff X. Demuestre que existen abiertos disjuntos U y V conteniendo a A y B, respectivamente.
6. Demuestre que si $f : X \to Y$ es continua, donde X es compacto e Y es de Hausdorff, entonces f es una aplicación cerrada (esto es, f lleva conjuntos cerrados a conjuntos cerrados).
7. Demuestre que si Y es compacto, entonces la proyección $\pi_1 : X \times Y \to X$ es una aplicación cerrada.
8. *Teorema. Sea $f : X \to Y$ una aplicación con Y compacto y de Hausdorff. Entonces f es continua si, y sólo si, el* **grafo** *de f,*

$$G_f = \{x \times f(x) \mid x \in X\},$$

es cerrado en $X \times Y$. [*Indicación:* si G_f es cerrado y V es un entorno de $f(x_0)$, entonces la intersección de G_f y $X \times (Y - V)$ es cerrada. Aplique entonces el Ejercicio 7.]

9. Generalice el lema del tubo del siguiente modo:
Teorema. Sean A y B subespacios de X e Y respectivamente; sea N un abierto en $X \times Y$ conteniendo a $A \times B$. Si A y B son compactos, entonces existen abiertos U y V en X e Y, respectivamente, tales que $A \times B \subset U \times V \subset N$.

10. (a) Demuestre el siguiente resultado parcial recíproco del teorema del límite uniforme:
Teorema. Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas, con $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in X$. Si f es continua, y si la sucesión f_n es monótona creciente con X compacto, entonces la convergencia es uniforme. [Se dice que f_n es *monótona creciente* si $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo x y n.]

(b) Encuentre ejemplos que demuestren que el teorema falla si no exigimos la compacidad de X, o si eliminamos la hipótesis de que la sucesión f_n sea monótona. [*Indicación:* véanse los ejercicios de §21.]

11. *Teorema. Sea X un espacio compacto y de Hausdorff. Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos cerrados y conexos de X que está simplemente ordenada por la inclusión propia. Entonces*

$$Y = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

es conexo. [*Indicación:* si $C \cup D$ es una separación de Y, elija conjuntos abiertos y disjuntos U y V de X conteniendo a C y D, respectivamente, y demuestre que

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} (A - (U \cup V))$$

es no vacío.]

12. Sea $p : X \to Y$ una aplicación continua y sobreyectiva tal que $p^{-1}(\{y\})$ es compacto para cada $y \in Y$ (tal aplicación se denomina ***aplicación perfecta***). Demuestre que si Y es compacto, entonces X es compacto. [*Indicación:* si U es un abierto conteniendo a $p^{-1}(\{y\})$, existe un entorno W de y tal que $p^{-1}(W)$ está contenido en U.]

13. Sea G un grupo topológico.

(a) Sean A y B subespacios de G. Si A es cerrado y B es compacto, demuestre que $A \cdot B$ es cerrado. [*Indicación:* si c no está en $A \cdot B$, encuentre un entorno W de c tal que $W \cdot B^{-1}$ no interseque a A.]

(b) Sea H un subgrupo de G y sea $p : G \to G/H$ la aplicación cociente. Si H es compacto, demuestre que p es cerrada.

(c) Sea H un subgrupo compacto de G. Demuestre que si G/H es compacto, entonces G es compacto.

§27 Subespacios compactos de la recta real

Los teoremas de la sección precedente nos permiten construir nuevos espacios compactos a partir de espacios compactos dados, pero si queremos llegar más lejos debemos encontrar algunos espacios compactos para comenzar. El lugar natural para empezar a buscar es la recta real; probaremos que cada intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es compacto. Las aplicaciones de este hecho incluyen el teorema de los valores extremos y el teorema de la continuidad uniforme en un contexto general adecuado. También proporcionaremos una caracterización de todos los subespacios compactos de $\mathbb{R}^n$ y una prueba de la no numerabilidad del conjunto de los números reales.

A la hora de probar que cada intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ es compacto, *sólo* necesitamos una de las propiedades del orden de la recta real —la propiedad del supremo. Probaremos entonces el resultado utilizando sólo esta hipótesis; entonces podremos aplicarla no sólo a la recta real, sino a cualquier conjunto bien ordenado y a otros conjuntos ordenados.

Teorema 27.1. *Sea X un conjunto simplemente ordenado que tiene la propiedad del supremo. Entonces cada subconjunto cerrado de X con la topología del orden es compacto.*

Demostración. *Paso 1.* Dados $a < b$, sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento de $[a, b]$ por conjuntos abiertos en $[a, b]$ con la topología relativa (que es la misma que la topología del orden). Quisiéramos demostrar que existe una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre a $[a, b]$. Primero veamos lo siguiente: si x es un punto de $[a, b]$ distinto de b, entonces existe un punto $y > x$ de $[a, b]$ tal que el intervalo $[x, y]$ puede ser cubierto como mucho por dos elementos de $\mathcal{A}$.

Si x tiene un inmediato sucesor en X, sea y este inmediato sucesor. Entonces $[x, y]$ contiene únicamente a los puntos x e y, y por tanto puede ser cubierto como mucho por dos elementos de $\mathcal{A}$. Si x no tiene inmediato sucesor en X, elijamos un elemento A de $\mathcal{A}$ conteniendo a x. Como $x \neq b$ y A es abierto, A contiene un intervalo de la forma $[x, c)$, para algún c de $[a, b]$. Elijamos un punto y en (x, c); entonces el intervalo $[x, y]$ está cubierto por el único elemento A de $\mathcal{A}$.

Paso 2. Sea C el conjunto de todos los puntos $y > a$ de $[a, b]$ tales que el intervalo $[a, y]$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. Aplicando el Paso 1 al caso $x = a$, vemos que existe al menos un punto y verificando tal condición, luego C no es vacío. Sea c el supremo del conjunto C; entonces $a < c \leq b$.

Paso 3. Veamos que c pertenece a C, esto es, vamos a demostrar que el intervalo $[a, c]$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. Elijamos un elemento A de $\mathcal{A}$ conteniendo a c; como A es abierto, contiene un intervalo de la forma $(d, c]$ para algún d en $[a, b]$. Si c no está en C, debe existir un punto z de C en el intervalo (d, c) pues si no, d sería una cota superior de C más pequeña que c (véase la Figura 27.1). Como z está en C, el intervalo $[a, z]$ puede ser cubierto por un número finito, por ejemplo n, de elementos de $\mathcal{A}$. Ahora $[z, c]$ está contenido en el elemento A de $\mathcal{A}$, por tanto $[a, c] = [a, z] \cup [z, c]$ puede ser cubierto por $n + 1$ elementos de $\mathcal{A}$. Así, c está en C.

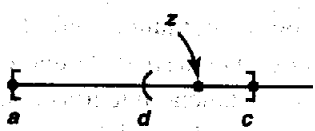


Figura 27.1

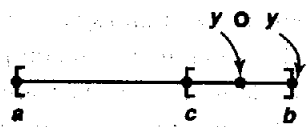


Figura 27.2

Paso 4. Finalmente, vamos a demostrar que $c = b$ y el teorema quedará probado. Supongamos que $c < b$. Aplicando el Paso 1 al caso $x = c$, concluimos que existe un punto $y > c$ de $[a, b]$ tal que el intervalo $[c, y]$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$ (véase la Figura 27.2). Hemos probado en el Paso 3 que $c \in C$, por lo que $[a, c]$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. Por tanto, el intervalo

$$[a, y] = [a, c] \cup [c, y]$$

puede ser cubierto también por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. Esto significa que y está en C, contradiciendo el hecho de que c es una cota superior de C. ■

Corolario 27.2. *Cada intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es compacto.*

Ahora caracterizamos los intervalos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 27.3. *Un subespacio A de $\mathbb{R}^n$ es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado en la distancia euclídea d o en la distancia del supremo ρ.*

Demostración. Será suficiente considerar sólo la distancia ρ pues las desigualdades

$$\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq \sqrt{n}\rho(x, y)$$

implican que A está acotado en la distancia d si, y sólo si, lo está en la distancia ρ. Supongamos que A es compacto. Entonces por el Teorema 26.3 es cerrado. Consideremos la colección de conjuntos abiertos

$$\{B_\rho(\mathbf{0}, m) \mid m \in \mathbb{Z}_+\}$$

cuya unión es el espacio total $\mathbb{R}^n$. Alguna subcolección finita debe cubrir A. Se sigue entonces que $A \subset B_\rho(\mathbf{0}, M)$ para algún M. De esta forma, dados dos puntos x e y de A, tenemos $\rho(x, y) \leq 2M$. Por tanto, A está acotado en ρ.

Recíprocamente, supongamos que A es cerrado y acotado en ρ; supongamos que $\rho(x, y) \leq N$ para cada par x, y de puntos de A. Elijamos un punto x_0 de A, y sea $\rho(x_0, \mathbf{0}) = b$. La desigualdad triangular implica que $\rho(x, \mathbf{0}) \leq N + b$ para cada x en A. Si $P = N + b$, entonces A es un subconjunto del cubo $[-P, P]^n$, el cual es compacto. Como A es cerrado, entonces A también es compacto. ■

Algunos estudiantes recuerdan este teorema estableciendo que la colección de los conjuntos compactos en un *espacio métrico* son los conjuntos cerrados y acotados. Este enunciado es claramente inapropiado ya que la cuestión de qué conjuntos son acotados depende única y exclusivamente de la distancia, mientras que el hecho de que un conjunto sea o no compacto depende de la topología del espacio.

EJEMPLO 1. La esfera unidad S^{n-1} y la bola cerrada unidad B^n en $\mathbb{R}^n$ son compactos pues son cerrados y acotados. El conjunto

$$A = \{x \times (1/x) \mid 0 < x \leq 1\}$$

es cerrado en $\mathbb{R}^2$, pero no es compacto porque no está acotado. El conjunto

$$S = \{x \times (\operatorname{sen}(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\}$$

está acotado en $\mathbb{R}^2$, pero no es compacto porque no es cerrado.

Ahora vamos a probar el teorema de los valores extremos del cálculo en un contexto generalizado.

Teorema 27.4 (Teorema de los valores extremos). *Sea $f : X \to Y$ continua, donde Y es un conjunto ordenado con la topología del orden. Si X es compacto, entonces existen puntos c y d en X tales que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ para cada $x \in X$.*

El teorema de los valores extremos del cálculo es un caso especial de éste cuando X es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ e Y es $\mathbb{R}$.

Demostración. Como f es continua y X es compacto, el conjunto $A = f(X)$ es compacto. Veamos que A tiene un máximo M y un mínimo m. Entonces, como m y M pertenecen a A, debemos tener $m = f(c)$ y $M = f(d)$ para algunos puntos c y d de X. Si A no tiene un máximo, entonces la colección

$$\{(-\infty, a) \mid a \in A\}$$

es un cubrimiento por abiertos de A. Como A es compacto, existe una subcolección finita

$$\{(-\infty, a_1), \ldots, (-\infty, a_n)\}$$

que cubre a A. Si a_i es el mayor de los elementos $a_1, \ldots, a_n$, entonces a_i no pertenece a ninguno de estos conjuntos, afirmación contraria al hecho de que estos conjuntos cubren a A. Un argumento similar demuestra que A tiene un mínimo. ■

Vamos a probar ahora el teorema de la continuidad uniforme del cálculo. En el proceso nos vemos obligados a introducir una nueva noción que nos será sorprendentemente útil. Esta noción es el *número de Lebesgue* para un cubrimiento abierto de un espacio métrico. Primero veamos una definición preliminar.

Definición. Sean (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto no vacío de X. Para cada $x \in X$, definimos la ***distancia de*** x ***a*** A por la ecuación

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Es sencillo demostrar que para A fijo, la función $d(x, A)$ es una función continua definida en X: dados $x, y \in X$, se tienen las desigualdades

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

para cada $a \in A$. Se sigue entonces que

$$d(x, A) - d(x, y) \leq \inf d(y, a) = d(y, A),$$

así que

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

La misma igualdad se tiene con x e y intercambiados, de lo que se deduce la continuidad de la función $d(x, A)$.

Ahora introducimos la noción de número de Lebesgue. Recordamos que el diámetro de un conjunto acotado A en un espacio métrico (X, d) es el número

$$\sup\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}.$$

Lema 27.5 (El lema del número de Lebesgue). *Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto del espacio métrico (X, d). Si X es compacto, existe un $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto X con diámetro menor que δ, existe un elemento de $\mathcal{A}$ conteniéndolo.*

El número δ se denomina ***número de Lebesgue*** para el cubrimiento $\mathcal{A}$.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Si X es un elemento de $\mathcal{A}$, entonces el resultado se sigue para cualquier δ positivo. Por tanto, supongamos que X no es un elemento de $\mathcal{A}$. Elegimos una subcolección finita $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de $\mathcal{A}$ que cubra a X. Para cada i, tomamos $C_i = X - A_i$, y definimos $f : X \to \mathbb{R}$ como la función media de las distancias de un punto x a los conjuntos C_i, esto es,

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i).$$

Vamos a demostrar que $f(x) > 0$ para todo x. Dado $x \in X$, escojamos i tal que $x \in A_i$. Entonces elegimos ϵ de modo que la bola de radio ϵ esté contenida en A_i. Por tanto, $d(x, C_i) \geq \epsilon$, y así $f(x) \geq \epsilon/n$. Como f es continua, tiene un valor mínimo δ; veamos que este número es precisamente el número de Lebesgue. Sea B un subconjunto de X cuyo diámetro sea menor que δ. Elijamos un punto x_0 de B; entonces B está contenido en la bola de radio δ y centrada en x_0. Ahora bien,

$$\delta \leq f(x_0) \leq d(x_0, C_m)$$

donde $d(x_0, C_m)$ es el mayor de los números $d(x_0, C_i)$. Entonces la bola de radio δ y centrada en x_0 está contenida en el elemento $A_m = X - C_m$ del cubrimiento $\mathcal{A}$. ■

Definición. Una función f del espacio métrico (X, d_X) al espacio métrico (Y, d_Y) se dice que es ***uniformemente continua*** si dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada par de puntos x_0, x_1 de X,

$$d_X(x_0, x_1) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x_1)) < \epsilon.$$

Teorema 27.6 (Teorema de la continuidad uniforme). *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua del espacio métrico compacto (X, d_X) al espacio métrico (Y, d_Y). Entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, tomamos un cubrimiento de Y por bolas $B(y, \epsilon/2)$ de radio $\epsilon/2$. Sea $\mathcal{A}$ el cubrimiento abierto de X que se obtiene al tomar las imágenes inversas de dichas bolas bajo f. Elegimos δ como el número de Lebesgue para el cubrimiento $\mathcal{A}$. Entonces, si x_1 y x_2 son dos puntos de X tales que $d_X(x_1, x_2) < \delta$, el conjunto $\{x_1, x_2\}$ tiene diámetro menor que δ, luego su imagen $\{f(x_1), f(x_2)\}$ está contenida en alguna bola $B(y, \epsilon/2)$. Entonces $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$ tal y como se quería demostrar. ■

Finalmente, vamos a probar que el conjunto de los números reales es no numerable. El aspecto interesante de esta demostración es que no involucra elementos algebraicos, sino únicamente propiedades de orden del conjunto $\mathbb{R}$.

Definición. Si X es un espacio, un punto x de X se dice que es un ***punto aislado*** de X si el conjunto unipuntual $\{x\}$ es abierto en X.

Teorema 27.7. *Sea X un espacio compacto y de Hausdorff. Si X no tiene puntos aislados, entonces X es no numerable.*

Demostración. *Paso 1*. Vamos a probar primero que dado un conjunto no vacío U de X y cualquier punto $x \in X$, existe un conjunto no vacío V contenido en U tal que $x \notin \bar{V}$. Elegimos un punto y en U distinto de x; esto es posible si x está en U pues x no es un punto aislado, y si x no está en U simplemente porque U es no vacío. Ahora elegimos abiertos disjuntos W_1 y W_2 conteniendo a x e y, respectivamente. Entonces el conjunto $V = W_2 \cap U$ verifica las condiciones del enunciado: está contenido en U, es no vacío pues contiene a y y además su adherencia no contiene a x (véase la Figura 27.3).

Paso 2. Veamos que dada una función cualquiera $f : \mathbb{Z}_+ \to X$, dicha función no puede ser sobreyectiva. Se sigue entonces que X es no numerable.

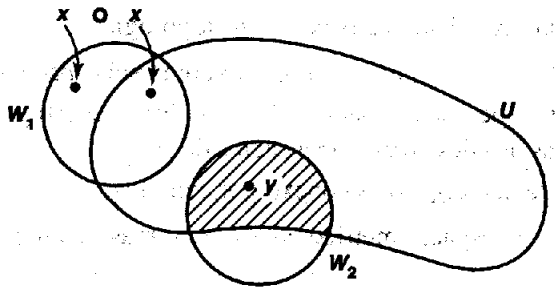


Figura 27.3

Sea $x_n = f(n)$. Aplicando el Paso 1 al conjunto no vacío $U = X$ podemos elegir un conjunto abierto y no vacío $V_1 \subset X$ tal que $\bar{V}_1$ no contenga a x_1. En general, dado V_{n-1} abierto y no vacío, elegimos V_n un abierto no vacío tal que $V_n \subset V_{n-1}$ y $\bar{V}_n$ no contiene a x_n. Consideramos así la sucesión encajada

$$\bar{V}_1 \supset \bar{V}_2 \supset \cdots$$

de cerrados no vacíos en X. Como X es compacto, por el Teorema 26.9 existe un punto $x \in \cap \bar{V}_n$. Ahora, x no puede coincidir con ninguno de los x_n para cada n, ya que $x \in \bar{V}_n$ mientras que x_n no. ■

Corolario 27.8. *Cada intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es no numerable.*

Ejercicios

1. Pruebe que si X es un conjunto ordenado en el cual cada intervalo cerrado es compacto, entonces X tiene la propiedad del supremo.
2. Sea X un espacio métrico con distancia d y sea $A \subset X$ no vacío.
   (a) Demuestre que $d(x, A) = 0$ si, y sólo si, $x \in \bar{A}$.

(b) Demuestre que si A es compacto, $d(x, A) = d(x, a)$ para algún $a \in A$.

(c) Defina el ϵ-entorno de A en X como el conjunto

$$U(A, \epsilon) = \{x \mid d(x, A) < \epsilon\}.$$

Demuestre que $U(A, \epsilon)$ coincide con la unión de las bolas abiertas $B_d(a, \epsilon)$ para $a \in A$.

(d) Supongamos que A es compacto y sea U un abierto conteniendo a A. Demuestre que algún ϵ-entorno de A está contenido en U.

(e) Demuestre que la afirmación (d) no es cierta si suponemos que A es cerrado pero no compacto.

3. Recordemos que $\mathbb{R}_K$ denota a $\mathbb{R}$ con la K-topología.

(a) Demuestre que $[0, 1]$ no es compacto como subespacio de $\mathbb{R}_K$.

(b) Demuestre que $\mathbb{R}_K$ es conexo. [*Indicación:* $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ heredan sus topologías usuales como subespacios de $\mathbb{R}_K$.]

(c) Demuestre que $\mathbb{R}_K$ no es conexo por caminos.

4. Demuestre que un espacio métrico conexo con más de un punto es no numerable.

5. Sean X un espacio compacto y de Hausdorff y $\{A_n\}$ una colección numerable de conjuntos cerrados de X. Demuestre que si cada conjunto A_n tiene interior vacío en X, entonces la unión $\cup A_n$ tiene interior vacío en X. [*Indicación:* es una prueba análoga a la del Teorema 27.7.]

Éste es un caso especial del *teorema de la categoría de Baire* que estudiaremos en el Capítulo 8.

6. Sea A_0 el intervalo cerrado $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$; sea A_1 el conjunto obtenido de A_0 quitando el *tercio medio* $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y sea A_2 el conjunto obtenido de A_1 quitando los *tercios medios* $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. En general, se define A_n por la ecuación

$$A_n = A_{n-1} - \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n} \right).$$

La intersección

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} A_n$$

se denomina ***conjunto de Cantor*** y es un subespacio de $[0, 1]$.

(a) Demuestre que C es totalmente disconexo.

(b) Demuestre que C es compacto.

(c) Demuestre que cada conjunto A_n es unión de un número finito de intervalos cerrados disjuntos con longitud $1/3^n$; demuestre que los extremos de dichos intervalos están en C.

(d) Demuestre que C no tiene puntos aislados.

(e) Concluya que C es no numerable.

§28 Compacidad por punto límite

Tal y como indicamos a la hora de introducir la noción de compacidad, existen otras formulaciones equivalentes que son frecuentemente utilizadas. En esta sección introducimos una de ellas que es más débil, en general, aunque coincide cuando se trata de espacios metrizables.

Definición. Un espacio se dice que es ***compacto por punto límite*** si cada subconjunto infinito de X tiene un punto límite.

En cierto sentido, esta propiedad es más intuitiva y natural que la definición de compacidad. En los inicios de la topología, era esta definición la que se conocía como "compacidad", mientras que la definición en términos de cubrimientos era llamada "bicompacidad". Más tarde, la palabra "compacta" se empezó a utilizar también para la definición por cubrimientos y se buscó un nuevo nombre para la definición que nos ocupa en esta sección (de hecho, todavía no se ha encontrado un nombre definitivo). Algunos han propuesto "compacidad de Frechet", otros la llaman "propiedad de Bolzano-Weierstrass". Nosotros sugerimos el término "compacidad por punto límite". Creemos que es tan buena como cualquier otra y además describe la propiedad de la que hablamos.

Teorema 28.1. *Compacidad implica compacidad por punto límite, pero el recíproco no es cierto.*

Demostración. Sea X un espacio compacto. Dado un subconjunto A de X, queremos probar que si A es infinito, entonces tiene un punto límite. Vamos a demostrar el contrarrecíproco —si A no tiene un punto límite, entonces es finito.

Supongamos pues que A no tiene un punto límite. Entonces A contiene todos sus puntos límite, luego es cerrado. Más aún, podemos elegir para cada $a \in A$ un entorno U_a de a de modo que U_a interseque a A sólo en el punto a. El espacio X está cubierto por el conjunto abierto $X - A$ y los abiertos U_a. Como es compacto, puede ser cubierto por un número finito de tales conjuntos. Como $X - A$ no interseca a A y cada conjunto U_a contiene únicamente un punto de A, el conjunto A debe ser finito. ■

EJEMPLO 1. Sea Y un conjunto con dos puntos; consideramos en Y la topología trivial, es decir, la formada por el conjunto vacío y el propio Y. Entonces el espacio $X = \mathbb{Z}_+ \times Y$ es compacto por punto límite, pues cada subconjunto no vacío de X tiene un punto límite.

Sin embargo, no es compacto, ya que el cubrimiento de X por los abiertos $U_n = \{n\} \times Y$ no admite una subcolección finita que cubra a X.

EJEMPLO 2. He aquí un ejemplo menos trivial. Consideremos el conjunto no numerable, bien ordenado y minimal S_Ω con la topología del orden. El espacio S_Ω no es compacto ya que no tiene un elemento máximo. Sin embargo, sí es compacto por punto límite. En efecto, sea A un subconjunto infinito de S_Ω. Elijamos un subconjunto B de A que sea infinito numerable. Siendo numerable, el conjunto B tiene una cota superior b en S_Ω; entonces B es un subconjunto del intervalo $[a_0, b]$ de S_Ω, donde a_0 es el mínimo de S_Ω. Como S_Ω tiene la propiedad del supremo, el intervalo $[a_0, b]$ es compacto. Por el teorema precedente, B tiene un punto límite x en $[a_0, b]$. El punto x es también un punto límite de A. Así, S_Ω es compacto por punto límite.

Veamos ahora que estas dos definiciones alternativas de compacidad coinciden para espacios metrizables. Para este propósito, introducimos un nueva versión de compacidad llamada *compacidad sucesional*. Este resultado será utilizado en el Capítulo 7.

Definición. Sea X un espacio topológico. Si (x_n) es una sucesión de puntos de X y si

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots$$

es una sucesión creciente de enteros positivos, entonces la sucesión (y_i) definida por $y_i = x_{n_i}$ se denomina ***subsucesión*** de la sucesión (x_n). El espacio X se dice que es ***sucesionalmente compacto*** si cada sucesión de puntos de X contiene una subsucesión convergente.

***Teorema 28.2.** *Sea X un espacio metrizable. Entonces son equivalentes:*

(1) X es compacto.

(2) X es compacto por punto límite.

(3) X es sucesionalmente compacto.

Demostración. Ya hemos demostrado que (1) $\Rightarrow$ (2). Para demostrar que (2) $\Rightarrow$ (3), supongamos que X es compacto por punto límite. Dada una sucesión (x_n) de puntos de X, consideremos el conjunto $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$. Si el conjunto A es finito, entonces existe un punto x tal que $x = x_n$ para un número infinito de valores de n. En este caso, la sucesión (x_n) tiene una subsucesión que es constante y, por tanto, converge trivialmente. Por otro lado, si A es infinito, entonces A tiene un punto límite x. Definimos una subsucesión de (x_n) convergente a x del siguiente modo: primero elegimos n_1 tal que

$$x_{n_1} \in B(x, 1).$$

Supongamos entonces que el entero positivo n_{i-1} está dado. Como la bola $B(x, 1/i)$ interseca a A en un número infinito de puntos, podemos elegir un índice $n_i > n_{i-1}$ tal que

$$x_{n_i} \in B(x, 1/i).$$

Entonces la subsucesión $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ converge a x.

Finalmente, veamos que (3) $\Rightarrow$ (1). Esta es la parte más complicada de la demostración. Primero veamos que si X es sucesionalmente compacto, entonces el lema del número de Lebesgue se tiene para X (esto se seguiría de la condición de compacidad, pero ésta es precisamente la propiedad que tratamos de demostrar). Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Supongamos que no existe un $\delta > 0$ tal que cada conjunto de diámetro menor que δ esté contenido en un elemento de $\mathcal{A}$ y veamos que se llega a una contradicción.

Nuestra suposición implica, en particular, que para cada entero positivo n, existe un conjunto C_n con diámetro menor que $1/n$ que no está contenido en ningún elemento de $\mathcal{A}$. Elijamos un punto $x_n \in C_n$ para cada n. Por hipótesis, existe una subsucesión (x_{n_i}) de la sucesión (x_n) que converge a un punto a. Ahora, a pertenece a algún elemento A de $\mathcal{A}$. Como A es abierto, podemos elegir $\epsilon > 0$ tal que $B(a, \epsilon) \subset A$. Si i es suficientemente grande para que $1/n_i < \epsilon/2$, entonces el conjunto C_n está contenido en el $\epsilon/2$-entorno de x_{n_i}; si i se elige suficientemente grande como para que $d(x_{n_i}, a) < \epsilon/2$, entonces C_{n_i} está contenido en el ϵ-entorno de a. Pero esto significa que $C_{n_i} \subset A$, que es contrario a la hipótesis.

En segundo lugar vamos a demostrar que si X es sucesionalmente compacto, entonces dado $\epsilon > 0$, existe un cubrimiento finito de X por ϵ-bolas abiertas. Una vez probado esto, de nuevo llegaremos a una contradicción. Supongamos que existe un $\epsilon > 0$ tal que X no puede ser cubierto por un número finito de ϵ-bolas. Construimos una sucesión de puntos de x_n como sigue: primero elegimos x_1, un punto cualquiera de X. Observando que la bola $B(x_1, \epsilon)$ no es todo el espacio X (si lo fuera, X estaría cubierto por una única ϵ-bola), elegimos x_2 un punto de X que no esté en $B(x_1, \epsilon)$. En general, dados $x_1, \ldots, x_n$, elegimos x_{n+1} un punto que no esté en la unión

$$B(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \epsilon)$$

utilizando el hecho de que estas bolas no cubren X. Observemos que, por construcción, $d(x_{n+1}, x_i) \geq \epsilon$ para $i = 1, \ldots, n$. De esta forma, la sucesión (x_n) no puede tener una subsucesión convergente; de hecho, cualquier bola de radio $\epsilon/2$ contiene a lo más un punto de la sucesión.

Finalmente, veamos que si X es sucesionalmente compacto, entonces es compacto. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Como X es sucesionalmente compacto, el cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ tiene un número de Lebesgue δ. Si $\epsilon = \delta/3$, como X es sucesionalmente compacto, podemos encontrar un cubrimiento finito de X por ϵ-bolas. Cada una de estas bolas tiene como mucho diámetro $2\delta/3$, por tanto están conteni-

das en algún elemento de $\mathcal{A}$. Eligiendo dicho elemento de $\mathcal{A}$ para cada una de estas ϵ-bolas, obtenemos una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre X. ■

EJEMPLO 3. Recordemos que $\bar{S}_\Omega$ denota el conjunto no numerable, bien ordenado y minimal S_Ω con el punto Ω añadido (en la topología del orden, Ω es un punto límite de S_Ω y es por este motivo por el que hemos introducido en §10 la notación $\bar{S}_\Omega$ para $S_\Omega \cup \{\Omega\}$). Es fácil comprobar que el espacio $\bar{S}_\Omega$ no es metrizable ya que no satisface el lema de la sucesión: el punto Ω es un punto límite de S_Ω pero no es el límite de una sucesión de puntos de S_Ω ya que cualquier sucesión de puntos de S_Ω tiene una cota superior en S_Ω. El espacio S_Ω, por otra parte, sí satisface el lema de la sucesión tal y como se puede comprobar fácilmente. No obstante, S_Ω no es metrizable ya que es compacto por punto límite pero no compacto.

Ejercicios

1. Considere $[0,1]^\omega$ con la topología uniforme. Encuentre un subconjunto infinito de este espacio que no tenga puntos límite.

2. Demuestre que $[0,1]$ no es compacto por punto límite como subespacio de $\mathbb{R}_\ell$.

3. Sea X un espacio compacto por punto límite.

   (a) Si $f : X \to Y$ es continua, ¿es $f(X)$ compacto por punto límite?

   (b) Si A es un subconjunto cerrado de X, ¿es A compacto por punto límite?

   (c) Si X es un subespacio del espacio de Hausdorff Z, ¿es X un cerrado de Z?

   Comentemos aquí que, en general, no es cierto que el producto de dos espacios compactos por punto límite sea un espacio compacto por punto límite, incluso cuando la condición de Hausdorff se asume. Sin embargo, los ejemplos son demasiado complicados (véase [S-S], Ejemplo 112).

4. Un espacio X se dice que es ***numerablemente compacto*** si cada cubrimiento numerable de abiertos de X contiene una subcolección finita que cubre a X. Demuestre que para un espacio T_1, la condición numerablemente compacto equivale a la de compacto por punto límite. [*Indicación:* si ninguna subcolección finita de los U_n cubre a X, elija $x_n \notin U_1 \cup \cdots \cup U_n$, para cada n.]

5. Demuestre que X es numerablemente compacto si, y sólo si, cada sucesión encajada $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ de conjuntos cerrados no vacíos de X tiene intersección no vacía.

6. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $f : X \to X$ satisface la condición

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

para todo $x, y \in X$, entonces f se dice que es una ***isometría*** de X. Demuestre que si f es una isometría y X es compacto, entonces f es biyectiva y, por tanto, un homeomorfismo. [*Indicación:* si $a \notin f(X)$, elija ϵ tal que el ϵ-entorno de a sea disjunto de $f(X)$. Elija $x_1 = a$ y, en general, $x_{n+1} = f(x_n)$. Demuestre que $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$ si $n \neq m$.]

7. Sea (X, d) un espacio métrico. Si f satisface la condición

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, entonces f se dice que es una ***aplicación contráctil***. Si existe un número $\alpha < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) < \alpha d(x, y)$$

para todo $x, y \in X$, entonces f se denomina ***contracción***. Un ***punto fijo*** de f es un punto x tal que $f(x) = x$.

(a) Si f es una contracción y X es compacto, demuestre que f tiene un único punto fijo. [*Indicación:* defina $f^1 = f$ y $f^{n+1} = f \circ f^n$. Considere la intersección A de los conjuntos $A_n = f^n(X)$.]

(b) Demuestre que si f es una aplicación contráctil y X es compacto, entonces f tiene un único punto fijo. [*Indicación:* sea A como antes. Dado $x \in A$, elija x_n tal que $x = f^{n+1}(x_n)$. Si a es el límite de alguna subsucesión de la sucesión $y_n = f^n(x_n)$, demuestre que $a \in A$ y que $f(a) = x$. Concluya que $f(A) = A$, luego diám $A = 0$.]

(c) Sea $X = [0, 1]$. Demuestre que $f(x) = x - x^2/2$ aplica X en X y es una aplicación contráctil pero no una contracción. [*Indicación:* utilice el teorema del valor medio del cálculo.]

(d) El resultado en (a) se tiene también si X es un espacio métrico completo, tal como $\mathbb{R}$; véanse los ejercicios de la sección §43. Sin embargo, no ocurre lo mismo para el resultado (b): demuestre que la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = [x + (x^2 + a)^{1/2}]/2$ es una aplicación contráctil que no es una contracción y no tiene puntos fijos.

§29 Compacidad local

En esta sección estudiamos el concepto de compacidad local, y probamos el teorema básico que demuestra que cualquier espacio de Hausdorff y localmente compacto puede ser embebido en un cierto espacio compacto de Hausdorff que se llama *compactificación por un punto*.

Definición. Un espacio X se dice que es ***localmente compacto en*** x si existe un subespacio compacto C de X que contiene un entorno de x. Si X es localmente compacto en cada uno de sus puntos, diremos que X es ***localmente compacto***.

Obsérvese que un espacio compacto es automáticamente localmente compacto.

EJEMPLO 1. La recta real $\mathbb{R}$ es localmente compacta. El punto x está contenido en un intervalo de la forma (a, b), el cual a su vez está contenido en el subespacio compacto $[a, b]$. El subespacio $\mathbb{Q}$ de los números racionales no es localmente compacto como se puede comprobar fácilmente.

EJEMPLO 2. El espacio $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto; el punto x está contenido en algún elemento básico de la forma $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, el cual está contenido en el subespacio compacto $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. El espacio $\mathbb{R}^\omega$ no es localmente compacto; ninguno de sus elementos básicos están contenidos en un subespacio compacto ya que si

$$B = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times \cdots$$

estuviera contenido en un subespacio compacto, su adherencia

$$\bar{B} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times \cdots$$

sería compacta, cuando ciertamente no lo es.

EJEMPLO 3. Cada conjunto simplemente ordenado X con la propiedad del supremo es localmente compacto. Dado un elemento básico para X, está contenido en un intervalo cerrado de X, el cual es compacto.

De entre todas las clases de espacios topológicos, los espacios metrizables por un lado y los espacios que son a la vez de Hausdorff y compactos por otro presentan una serie de facilidades para trabajar con ellos en matemáticas. Tales espacios tienen multitud de propiedades útiles, las cuales se utilizan a la hora de demostrar teoremas o cuando se realizan construcciones. Si un espacio dado no pertenece a ninguna de estas dos clases, lo mejor que uno puede esperar es que dicho espacio sea en realidad un subespacio topológico de otro mayor que sí pertenezca a alguna de las dos clases. Por supuesto, un subespacio de un espacio metrizable también es metrizable, así que esta posibilidad no parece interesante. Sin embargo, un subespacio de un espacio compacto y de Hausdorff no es necesariamente compacto. De esta forma surge la cuestión: ¿bajo qué hipótesis es un espacio homeomorfo a algún subespacio de un espacio de Hausdorff y compacto? Proporcionaremos una respuesta a esta pregunta a continuación. Volveremos a esta cuestión posteriormente en el Capítulo 5 cuando estudiemos compactificaciones en general.

Teorema 29.1. *Sea X un espacio. Entonces X es localmente compacto y de Hausdorff si, y sólo si, existe un subespacio Y que satisfaga las siguientes condiciones:*

(1) X es un subespacio de Y.

(2) El conjunto $Y - X$ consta de un solo elemento.

(3) Y es un espacio compacto y de Hausdorff.

Si Y e Y' son dos espacios que satisfacen estas condiciones, entonces existe un homeomorfismo de Y en Y' que, restringido al subespacio X, es simplemente la identidad en X.

Demostración. Paso 1. Vamos a verificar primero la unicidad. Sean Y e Y' dos espacios que satisfacen estas condiciones. Definimos $h : Y \to Y'$ donde h aplica el único punto p de $Y - X$ en el único punto q de $Y' - X$ y $h(x) = x$ para todo x en X. Veamos que si U es abierto en Y, entonces $h(U)$ es abierto en Y'. Por simetría, se concluirá que h es un homeomorfismo.

Primero, consideremos el caso en el que U no contiene a p. Entonces $h(U) = U$. Como U es abierto en Y y está contenido en X, entonces es abierto en X. Como X es abierto en Y', entonces U es abierto también en Y' tal y como queríamos demostrar.

Segundo, supongamos que U contiene al punto p. Como $C = Y - U$ es cerrado en Y, es compacto como subespacio de Y. Como C está contenido en X, es un subespacio compacto de X. Entonces, como X es un subespacio de Y', el espacio C también es un subespacio compacto de Y'. Como Y' es de Hausdorff, C es cerrado en Y', y así $h(U) = Y' - C$ es abierto en Y', como se deseaba.

Paso 2. Ahora supongamos que X es localmente compacto y de Hausdorff y construyamos el espacio Y. El Paso 1 nos da una idea acerca de cómo proceder. Elijamos algún objeto que no sea un punto de X, objeto que denotaremos por el símbolo ∞ por conveniencia. Consideremos entonces el conjunto $Y = X \cup \{\infty\}$ con la siguiente topología: los abiertos serán: (1) todos los subconjuntos U de X que son abiertos en X, y (2) todos los conjuntos de la forma $Y - C$, donde C es un subespacio compacto de X.

Necesitamos comprobar que esta colección es, de hecho, una topología sobre Y. El conjunto vacío es un conjunto del tipo (1), y el espacio total Y es un conjunto del tipo (2). Para comprobar que la intersección de dos abiertos es un abierto debemos distinguir tres casos:

$$\begin{aligned} U_1 \cap U_2 & & \text{es del tipo (1),} \\ (Y - C_1) \cap (Y - C_2) &= Y - (C_1 \cup C_2) & \text{es del tipo (2),} \\ U_1 \cap (Y - C_1) &= U_1 \cap (X - C_1) & \text{es del tipo (1),} \end{aligned}$$

pues C_1 es cerrado en X. Análogamente, se comprueba que la unión arbitraria de conjuntos abiertos de cualquier tipo es también un abierto:

$$\begin{aligned} \bigcup U_\alpha &= U & \text{es del tipo (1),} \\ \bigcup (Y - C_\beta) = Y - (\bigcap C_\beta) &= Y - C & \text{es del tipo (2),} \\ (\bigcup U_\alpha) \cup (\bigcup (Y - C_\beta)) = U \cup (Y - C) &= Y - (C - U), \end{aligned}$$

que es del tipo (2) porque $C-U$ es un subespacio cerrado de C y, por tanto, compacto.

Veamos ahora que X es un subespacio de Y. Dado un conjunto abierto de Y, veamos que su intersección con X es un abierto en X. Si U es del tipo (1), entonces $U \cap X = U$ y si $Y - C$ es del tipo (2), entonces $(Y - C) \cap X = X - C$; ambos conjuntos son abiertos en X. Recíprocamente, cualquier abierto en X es un conjunto del tipo (1) y por tanto abierto en Y.

Para demostrar que A es compacto, sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de Y. La colección $\mathcal{A}$ debe contener un conjunto abierto del tipo (2), por ejemplo $Y - C$, ya que ninguno de los conjuntos abiertos del tipo (1) contiene al punto ∞. Si consideramos todos los miembros de $\mathcal{A}$ distintos de $Y - C$ y los intersecamos con X tenemos entonces un cubrimiento de C por abiertos de X. Como C es compacto, un número finito de ellos cubren C; la correspondiente colección finita de elementos de $\mathcal{A}$ junto con el elemento $Y - C$ cubrirán entonces todo Y.

Veamos ahora que Y es de Hausdorff: sean x e y dos puntos de Y. Si ambos están contenidos en X, existen abiertos disjuntos U y V en X conteniéndolos respectivamente. Por otra parte, si $x \in X$ e $y = \infty$, podemos elegir un conjunto compacto C conteniendo un entorno U de x. Entonces U e $Y - C$ son entornos disjuntos de x e ∞, respectivamente, en Y.

Paso 3. Finalmente, vamos a demostrar el recíproco. Supongamos que existe un espacio Y que satisface las condiciones (1)–(3). Entonces X es de Hausdorff porque es un subespacio del espacio de Hausdorff Y. Dado $x \in X$, veamos que X es localmente compacto en x. Elegimos abiertos disjuntos U y V de Y conteniendo a x y al único punto de $Y - X$, respectivamente. Entonces el conjunto $C = Y - V$ es cerrado en Y, luego es un subespacio compacto de Y. Como C está contenido en X, es también compacto como subespacio de X y además contiene un entorno U de x. ■

Cuando el espacio X en cuestión ya es compacto, el espacio Y del teorema precedente no es interesante, ya que se obtiene al añadir a X un único punto aislado. Sin embargo, si X no es compacto, entonces el punto de $Y - X$ es un punto límite de X, de modo que $\bar{X} = Y$.

Definición. Si Y es un espacio compacto y de Hausdorff y X es un subespacio propio de Y cuya adherencia coincide con Y, entonces se dice que Y es ***compactificación*** de X. Si $Y - X$ consiste en un único punto, entonces Y se denomina ***compactificación por un punto*** de X.

Hemos demostrado que X admite una compactificación por un punto Y si, y sólo si, X es un espacio de Hausdorff y localmente compacto que no es compacto. Además, dicha compactificación es única salvo homeomorfismos.

EJEMPLO 4. La compactificación por un punto de la recta real $\mathbb{R}$ es homeomorfa al círculo, tal y como se puede comprobar. Análogamente, la compactificación de $\mathbb{R}^2$ por un punto es homeomorfa a la esfera S^2. Si $\mathbb{R}^2$ se identifica con el espacio de los números complejos $\mathbb{C}$, entonces $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se denomina *esfera de Riemann* o *plano complejo ampliado*.

En algunos aspectos nuestra definición de compacidad local no es satisfactoria. Normalmente, se dice que un espacio X satisface una propiedad "localmente" si cada $x \in X$ tiene entornos "arbitrariamente pequeños" verificando dicha propiedad. La definición de compacidad local que hemos proporcionado no se adapta a este esquema y, en este sentido, cabe preguntarse si no existe alguna formulación alternativa de esta propiedad. La respuesta nos la proporciona el siguiente resultado válido para espacios de Hausdorff:

Teorema 29.2. *Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces X es localmente compacto si, y sólo si, dados x en X y un entorno U de x, existe un entorno V de x tal que $\bar{V}$ es compacto y $\bar{V} \subset U$.*

Demostración. Claramente esta nueva formulación implica la compacidad local; el conjunto $C = \bar{V}$ es el compacto requerido conteniendo un entorno V de x. Para demostrar el recíproco, supongamos que X es localmente compacto; sean x un punto de X y U un entorno de x. Consideramos la compactificación por un punto Y de X, y sea C el conjunto $Y - U$. Entonces C es cerrado en Y, así que C es un subespacio compacto de Y. Aplicando el Lema 26.4 elegimos abiertos disjuntos V y W conteniendo a x y C, respectivamente. Entonces la adherencia $\bar{V}$ de V en Y es compacta y además $\bar{V}$ es disjunto de C, así que $\bar{V} \subset U$, tal y como queríamos demostrar. ■

Corolario 29.3. *Sea X un espacio localmente compacto y de Hausdorff y sea A un subespacio de X. Si A es cerrado en X o abierto en X, entonces A es localmente compacto.*

Demostración. Supongamos que A es cerrado en X. Dado $x \in A$, sea C un subespacio compacto de X conteniendo un entorno U de x. Entonces $C \cap A$ es cerrado en C y, por tanto, compacto. Además contiene al entorno $U \cap A$ de x en A (no hemos utilizado la condición de Hausdorff aquí).

Supongamos ahora que A es abierto en X. Dado $x \in A$, aplicamos el resultado precedente y elegimos un entorno V de x en X tal que $\bar{V}$ es compacto y $\bar{V} \subset A$. Entonces $C = \bar{V}$ es un subespacio compacto de A conteniendo el entorno V de x en A. ■

Corolario 29.4. *Un espacio X es homeomorfo a un subespacio abierto de un espacio compacto y de Hausdorff si, y sólo si, X es localmente compacto y de Hausdorff.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del Teorema 29.1 y el Corolario 29.3. ■

Ejercicios

1. Demuestre que el conjunto $\mathbb{Q}$ no es un espacio localmente compacto.
2. Sea $\{X_\alpha\}$ una familia indexada de espacios no vacíos.
   (a) Demuestre que si $\prod X_\alpha$ es localmente compacto, entonces cada X_α es localmente compacto y X_α es compacto excepto para un número finito de valores de α.
   (b) Demuestre el recíproco, suponiendo cierto el teorema de Tychonoff.
3. Sea X un espacio localmente compacto. Si $f : X \to Y$ es continua, ¿se sigue entonces que $f(X)$ es localmente compacto? ¿Qué ocurre si, además, f es una aplicación abierta? Justifique sus respuestas.
4. Demuestre que $[0,1]^\omega$ no es localmente compacto con la topología uniforme.
5. Si $f : X_1 \to X_2$ es un homeomorfismo de espacios de Hausdorff y localmente compactos, ¿cómo se extiende f a un homeomorfismo entre sus respectivas compactificaciones por un punto?
6. Demuestre que la compactificación por un punto de $\mathbb{R}$ es homeomorfa a la circunferencia S^1.
7. Demuestre que la compactificación por un punto de S_Ω es homeomorfa a $\bar{S}_\Omega$.
8. Demuestre que la compactificación por un punto de $\mathbb{Z}_+$ es homeomorfa al subespacio $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ de $\mathbb{R}$.
9. Demuestre que si G es un grupo topológico localmente compacto y H es un subgrupo, entonces G/H es localmente compacto.
10. Demuestre que si X es un espacio de Hausdorff que es localmente compacto en el punto x, entonces para cada entorno U de x, existe un entorno V de x tal que $\bar{V}$ es compacto y $\bar{V} \subset U$.

*11. Demuestre lo siguiente:
   (a) *Lema. Si $p : X \to Y$ es una aplicación cociente y Z es un espacio localmente compacto y de Hausdorff, entonces la aplicación*

$$\pi = p \times i_Z : X \times Z \to Y \times Z$$

es una aplicación cociente. [*Indicación:* si $\pi^{-1}(A)$ es abierto y contiene a $x \times y$, elija abiertos U_1 y V con $\bar{V}$ compacto, tales que $x \times y \in U_1 \times V$ y $U_1 \times \bar{V} \subset \pi^{-1}(A)$. Dados $U_i \times \bar{V} \subset \pi^{-1}(A)$ utilice el lema del tubo

para elegir un abierto U_{i+1} conteniendo a $p^{-1}(p(U_i))$ tal que $U_{i+1} \times \bar{V} \subset \pi^{-1}(A)$. Sea $U = \cup U_i$; demuestre que $U \times V$ es un entorno saturado de $x \times y$ que está contenido en $\pi^{-1}(A)$.] Una prueba completamente distinta de este resultado se puede encontrar en los ejercicios de §46.

(b) *Teorema. Sean $p : A \to B$ y $q : C \to D$ aplicaciones cociente. Si B y C son espacios de Hausdorff y localmente compactos, entonces $p \times q : A \times C \to B \times D$ es una aplicación cociente.*

*Ejercicios complementarios: redes

Ya hemos visto que las sucesiones son instrumentos adecuados para detectar puntos límite, funciones continuas y conjuntos compactos en un espacio metrizable. Existe una generalización del concepto de sucesión, el concepto de ***red***, que sirve para los mismos propósitos que las sucesiones pero en un espacio topológico arbitrario. Vamos a proporcionar las definiciones más importantes aquí y dejaremos las demostraciones como ejercicios. Recuérdese que una relación $\preceq$ en un conjunto A es una *relación de orden parcial* si se dan las siguientes condiciones:

(1) $\alpha \preceq \alpha$ para todo α.

(2) Si $\alpha \preceq \beta$ y $\beta \preceq \alpha$ entonces $\alpha = \beta$.

(3) Si $\alpha \preceq \beta$ y $\beta \preceq \gamma$ entonces $\alpha \preceq \gamma$.

Además, se dice que un conjunto J es un ***conjunto dirigido*** con un orden parcial $\preceq$ si para cada par de elementos α, β de J, existe un elemento γ de J con la propiedad de que $\alpha \preceq \gamma$ y $\beta \preceq \gamma$.

1. Demuestre que los siguientes conjuntos son dirigidos:

(a) Cualquier conjunto simplemente ordenado, con la relación $\leq$.

(b) La colección de todos los subconjuntos de un conjunto S, parcialmente ordenados por la inclusión (es decir, $A \preceq B$ si $A \subset B$).

(c) La colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de S que son cerrados bajo intersecciones finitas, parcialmente ordenados por la inclusión inversa (esto es, $A \preceq B$ si $A \supset B$).

(d) La colección de todos los subconjuntos cerrados de un espacio X, parcialmente ordenados por la inclusión.

2. Un subconjunto K de J se dice que es ***cofinal*** en J si para cada $\alpha \in J$ existe $\beta \in K$ tal que $\alpha \preceq \beta$. Demuestre que si J es un conjunto dirigido y K es cofinal en J, entonces K es un conjunto dirigido.

3. Sea X un espacio topológico. Una ***red*** en X es una función f de un conjunto dirigido J en X. Si $\alpha \in J$, denotaremos a la imagen $f(\alpha)$ por x_α. También

denotaremos a la propia red f por el símbolo $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$, o simplemente por (x_α) si el conjunto de índices es único.

Se dice que la red (x_α) ***converge*** al punto x de X (y lo escribimos $x_\alpha \to x$) si para cada entorno U de x, existe $\alpha \in J$ tal que

$$\alpha \preceq \beta \Rightarrow x_\beta \in U.$$

Demuestre que estas definiciones se reducen a la definición natural de sucesión cuando $J = \mathbb{Z}_+$.

4. Supongamos que

$$(x_\alpha)_{\alpha\in J} \longrightarrow x \text{ en } X \qquad \text{e} \qquad (y_\alpha)_{\alpha\in J} \longrightarrow y \text{ en } Y.$$

Demuestre que $(x_\alpha \times y_\alpha) \longrightarrow x \times y$ en $X \times Y$.

5. Demuestre que si X es de Hausdorff, una red en X converge a lo más a un único punto.

6. *Teorema. Sea $A \subset X$. Entonces $x \in \bar{A}$ si, y sólo si, existe una red de puntos en A que converge a x.* [*Indicación:* para probar la implicación $\Rightarrow$, tome como conjunto de índices la colección de todos los entornos de x, parcialmente ordenados por la inclusión inversa.]

7. *Teorema. Sea $f : X \to Y$. Entonces f es continua si, y sólo si, para cada red convergente (x_α) en X que converge a x, entonces la red $(f(x_\alpha))$ converge a $f(x)$.*

8. Sea $f : J \to X$ una red en X y $f(\alpha) = x_\alpha$. Si K es un conjunto dirigido y $g : K \to J$ es una función tal que

(i) $i \preceq j \Rightarrow g(i) \preceq g(j)$,
(ii) $g(K)$ es cofinal en J,

entonces la función compuesta $f \circ g : K \to X$ se dice que es una ***subred*** de (x_α). Demuestre que si la red (x_α) converge a x, entonces cualquier subred también converge a dicho punto.

9. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ una red en X. Se dice que x es un punto de acumulación de la red (x_α) si para cada entorno U de x, el conjunto de los índices α tales que $x_\alpha \in U$ es cofinal en J.
Lema. El punto x es un punto de acumulación de la red (x_α) si, y sólo si, alguna subred de (x_α) converge a x. [*Indicación*: para probar la implicación $\Rightarrow$, sea K el conjunto de todos los pares (α, U) donde $\alpha \in J$ y U es un entorno de x conteniendo a x_α. Se define el orden $(\alpha, U) \preceq (\beta, V)$ si $\alpha \preceq \beta$ y $V \subset U$. Demuestre que K es un conjunto dirigido y utilice este hecho para definir la subred.]

10. *Teorema.* *X es compacto si, y sólo si, toda red en X tiene una subred convergente.* [*Indicación*: para probar la implicación $\Rightarrow$, sea $B_\alpha = \{x_\beta \mid \alpha \preceq \beta\}$ y pruebe que $\{B_\alpha\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Para demostrar $\Leftarrow$, sea $\mathcal{A}$ una colección de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita, y sea $\mathcal{B}$ la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{A}$, parcialmente ordenadas por la inclusión inversa.]

11. *Corolario.* *Sean G un grupo topológico y A y B subconjuntos de G. Si A es un cerrado en G y B es compacto, entonces $A \cdot B$ es cerrado en G.* [*Indicación*: en primer lugar, dé una prueba utilizando sucesiones, suponiendo que G es metrizable.]

12. Compruebe que los ejercicios precedentes siguen teniendo validez si la condición (2) se omite en la definición de *conjunto dirigido*. Muchos matemáticos utilizan el término "conjunto dirigido" en un sentido más general.

Capítulo 4

Axiomas de separación y numerabilidad

Los conceptos que vamos a introducir ahora, a diferencia de la compacidad y conexión, no surgen naturalmente en el estudio del cálculo y el análisis. Surgen de un estudio más profundo de la topología misma. Tales problemas, como embeber un espacio dado en un espacio métrico o en un espacio compacto de Hausdorff, son problemas básicamente de topología más que de análisis. Estos problemas particulares poseen soluciones que incluyen a los axiomas de separación y numerabilidad.

Ya hemos presentado el primer axioma de numerabilidad que estaba relacionado con el estudio de sucesiones convergentes en §21. También hemos estudiado uno de los axiomas de separación —el axioma de Hausdorff—, y hemos mencionado otro —el axioma T_1. En este capítulo introduciremos otros, y más fuertes, axiomas de este tipo, y estudiaremos algunas de sus consecuencias. Nuestro objetivo básico es probar el *teorema de metrización de Urysohn*. Éste afirma que si un espacio topológico X satisface un cierto axioma de numerabilidad (el segundo) y un cierto axioma de separación (el axioma de regularidad), entonces X se puede embeber en un espacio métrico, y así es metrizable.

Otro teorema de embebimiento, importante para los geómetras, se presenta en la última sección del capítulo. Dado un espacio que es una variedad compacta (el análogo a una superficie en dimensiones más altas), probaremos que se puede embeber en algún espacio euclídeo de dimensión finita.

§30 Los axiomas de numerabilidad

Recordemos la definición que dimos en §21.

Definición. Un espacio X se dice que tiene una ***base numerable en x*** si existe una colección numerable $\mathcal{B}$ de entornos de x tales que cada entorno de x contiene al menos a uno de los elementos de $\mathcal{B}$. Un espacio que tiene una base numerable en cada uno de sus puntos se dice que satisface el ***primer axioma de numerabilidad***, que es ***1AN***, o que es ***uno-numerable***.

Ya hemos visto que todo espacio metrizable satisface este axioma, véase §21. El hecho más útil sobre espacios que satisfacen este axioma es el hecho de que en un espacio tal, las sucesiones convergentes son adecuadas para detectar puntos límite de conjuntos y para comprobar la continuidad de funciones. Esto ya lo hemos observado con anterioridad y ahora lo estableceremos formalmente como un teorema:

Teorema 30.1. *Sea X un espacio topológico.*

(a) Sea A un subconjunto de X. Si existe una sucesión de puntos de A convergente a x, entonces $x \in \bar{A}$ y el recíproco se cumple si X es $1AN$.

(b) Sea $f : X \to Y$. Si f es continua, entonces para cada sucesión convergente $x_n \to x$ en X, la sucesión $f(x_n)$ converge a $f(x)$. El recíproco se cumple si X es $1AN$.

La prueba es una generalización directa de la demostración dada en §21 bajo la hipótesis de metrizabilidad, por lo que no la repetiremos aquí.

De mucha más importancia que el primer axioma de numerabilidad es el siguiente:

Definición. Si un espacio X tiene una base numerable para su topología, entonces se dice que X satisface el ***segundo axioma de numerabilidad***, que es ***2AN***, o que es ***dos-numerable***.

Obviamente, el segundo axioma implica el primero: si $\mathcal{B}$ es una base numerable para la topología de X, entonces el subconjunto de $\mathcal{B}$ formado por aquellos elementos de la base que contienen al punto x es una base numerable en x. El segundo axioma es, de hecho, mucho más fuerte que el primero; es tan fuerte que incluso no todo espacio métrico lo satisface.

Entonces, ¿por qué es interesante este segundo axioma? Bien, por un lado, muchos espacios que nos son familiares lo satisfacen. Por otro, es una hipótesis crucial usada para probar teoremas tales como el teorema de metrización de Urysohn, como veremos en su momento.

EJEMPLO 1. La recta real $\mathbb{R}$ tiene una base numerable —la colección de todos los intervalos abiertos (a, b) con extremos racionales—. Del mismo modo, $\mathbb{R}^n$ tiene una base numerable —la colección de todos los productos de intervalos con extremos racionales—. Incluso $\mathbb{R}^\omega$ tiene una base numerable —la colección de todos los productos $\prod_{n\in\mathbb{Z}_+} U_n$, donde U_n es un intervalo abierto con extremos racionales para un número finito de valores de n, y $U_n = \mathbb{R}$ para el resto de valores de n.

EJEMPLO 2. En la topología uniforme, $\mathbb{R}^\omega$ satisface el primer axioma de numerabilidad (siendo metrizable). Sin embargo, no satisface el segundo. Para comprobar este hecho, primero mostramos que si X es un espacio que tiene una base numerable $\mathcal{B}$, entonces cualquier subespacio discreto A de X debe ser numerable. Elijamos, para cada $a \in A$, un elemento B_a de la base que interseque a A únicamente en el punto a. Si a y b son puntos distintos de A, los conjuntos B_a y B_b son distintos, puesto que el primero contiene a a y el segundo no. Se sigue que la aplicación $a \to B_a$ es una inyección de A en $\mathcal{B}$, por lo que A debe ser numerable.

Ahora bien, el subespacio A de $\mathbb{R}^\omega$ formado por todas las sucesiones de ceros y unos no es numerable y tiene la topología discreta porque $\bar{\rho}(a, b) = 1$ para cualesquiera dos puntos a y b de A distintos. Por tanto, en la topología uniforme, $\mathbb{R}^\omega$ no tiene una base numerable.

Ambos axiomas de numerabilidad se comportan bien con respecto a las operaciones de tomar subespacios o productos numerables:

Teorema 30.2. *Un subespacio de un espacio $1AN$ es $1AN$, y un producto numerable de espacios $1AN$ es $1AN$. Un subespacio de un espacio $2AN$ es $2AN$, y un producto numerable de espacios $2AN$ es $2AN$.*

Demostración. Consideremos el segundo axioma de numerabilidad. Si $\mathcal{B}$ es una base numerable para X, entonces $\{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$ es una base numerable para el subespacio A de X. Si $\mathcal{B}_i$ es una base numerable para el espacio X_i, entonces la colección de todos los productos $\prod U_i$, donde $U_i \in \mathcal{B}_i$ para un número finito de valores de i y $U_i = X_i$ para el resto de valores de i, es una base numerable para $\prod X_i$.

La prueba para el primer axioma de numerabilidad es similar. ■

En el siguiente teorema se dan dos consecuencias del segundo axioma de numerabilidad que nos serán útiles más tarde. Antes, daremos una definición:

Definición. Un subconjunto A de un espacio X se dice que es ***denso*** en X si $\bar{A} = X$.

Teorema 30.3. *Supongamos que X tiene una base numerable. Entonces:*

(a) Todo cubrimiento abierto de X contiene una subcolección numerable que recubre a X.

(b) Existe un subconjunto numerable de X que es denso en X.

Demostración. Sea $\{B_n\}$ una base numerable para X.

(a) Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Para cada entero positivo n para el que sea posible, elegimos un elemento A_n de $\mathcal{A}$ que contiene al elemento B_n de la base. La colección $\mathcal{A}'$ de los conjuntos A_n es numerable, puesto que está indexada con un subconjunto J de enteros positivos. Es más, recubre a X: dado un punto $x \in X$, podemos elegir un elemento A de $\mathcal{A}$ que contiene a x. Puesto que A es abierto, existe un elemento B_n de la base tal que $x \in B_n \subset A$. Al pertenecer B_n a un elemento de $\mathcal{A}$, el índice n está en el conjunto J, por lo que A_n está definido; como A_n contiene a B_n, contiene a x. Así, $\mathcal{A}'$ es una subcolección numerable de $\mathcal{A}$ que recubre a X.

(b) De cada elemento B_n no vacío de la base, elijamos un punto x_n. Sea D el conjunto formado por los puntos x_n. Entonces D es denso en X: dado cualquier punto x de X, cada elemento de la base que contenga a x interseca a D, por lo que x pertenece a $\bar{D}$. ■

Las dos propiedades enunciadas en el Teorema 30.3 algunas veces se toman como axiomas de numerabilidad alternativos. Un espacio para el que cada cubrimiento abierto contiene un subcubrimiento numerable, se denomina ***espacio de Lindelöf***. Un espacio que tiene un subconjunto numerable denso, a menudo se dice que es ***separable*** (una elección de terminología desafortunada).† Aunque son más débiles, en general, que el segundo axioma de numerabilidad, cada una de estas propiedades es equivalente, cuando el espacio es metrizable, al segundo axioma de numerabilidad (véase el Ejercicio 5). Son menos importantes que el segundo axioma de numerabilidad, pero debería conocerlos, porque algunas veces son útiles. A menudo es más fácil, por ejemplo, probar que un espacio X tiene un subconjunto numerable denso que probar que X tiene una base numerable. Si el espacio es metrizable (como habitualmente ocurre en análisis), se sigue que X es $2AN$.

No utilizaremos estas propiedades para probar teorema alguno, pero una de ellas —la condición de Lindelöf— será muy útil para tratar algunos ejemplos. No se comportan tan bien como uno podría esperar bajo las operaciones de tomar subespacios y productos cartesianos, como veremos en los ejemplos y ejercicios que siguen.

EJEMPLO 3. *El espacio $\mathbb{R}_\ell$ satisface todos los axiomas de numerabilidad excepto el segundo.*

Dado $x \in \mathbb{R}_\ell$, el conjunto de todos los elementos de la base de la forma $[x, x + 1/n)$ es una base numerable en x. Y es fácil ver que los números racionales son densos en $\mathbb{R}_\ell$.

†Éste es un buen ejemplo de cómo se puede abusar de una palabra. Ya hemos definido lo que entendemos por una *separación* de un espacio y analizaremos los axiomas de *separación* brevemente.

Para ver que $\mathbb{R}_\ell$ no tiene una base numerable, sea $\mathcal{B}$ una base para $\mathbb{R}_\ell$. Para cada x, elijamos un elemento B_x de $\mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset [x, x+1)$. Si $x \neq y$, entonces $B_x \neq B_y$, ya que $x = \inf B_x$ e $y = \inf B_y$. Por tanto, $\mathcal{B}$ debe ser no numerable.

Para ver que $\mathbb{R}_\ell$ es de Lindelöf, es necesario más trabajo. Será suficiente probar que cada cubrimiento abierto de $\mathbb{R}_\ell$ por elementos de la base contiene una subcolección numerable recubriendo a $\mathbb{R}_\ell$ (puede comprobarlo). Así, sea

$$\mathcal{A} = \{[a_\alpha, b_\alpha)\}_{\alpha \in J}$$

un cubrimiento de $\mathbb{R}$ por elementos de la base para la topología del límite inferior. Deseamos encontrar una subcolección numerable que recubra a $\mathbb{R}$. Sea C el conjunto

$$C = \bigcup_{\alpha \in J} (a_\alpha, b_\alpha),$$

que es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Vamos a probar que el conjunto $\mathbb{R} - C$ es numerable.

Sea x un punto de $\mathbb{R} - C$. Sabemos que x no pertenece a intervalo abierto alguno del tipo (a_α, b_α), por tanto, $x = a_\beta$ para algún índice β. Elijamos un β de este tipo y un número racional q_x que pertenezca al intervalo (a_β, b_β). Puesto que (a_β, b_β) está contenido en C, también lo está el intervalo $(a_\beta, q_x) = (x, q_x)$. Se sigue que si x e y son dos puntos de $\mathbb{R} - C$ con $x < y$, entonces $q_x < q_y$ (ya que, si no, tendríamos $x < y < q_y \leq q_x$, por lo que y estaría en el intervalo (x, q_x) y, de aquí, en C). Por tanto, la aplicación $x \to q_x$ de $\mathbb{R} - C$ a $\mathbb{Q}$ es inyectiva, por lo que $\mathbb{R} - C$ es numerable.

A continuación probaremos que alguna subcolección numerable de $\mathcal{A}$ recubre a $\mathbb{R}$. Para empezar, elijamos, para cada elemento de $\mathbb{R} - C$, un elemento de $\mathcal{A}$ que lo contenga; se obtiene así una subcolección numerable $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ que recubre a $\mathbb{R} - C$. Tomemos ahora el conjunto C y dotémoslo de la topología como subespacio de $\mathbb{R}$; en esta topología, C satisface el segundo axioma de numerabilidad. Ahora bien, C está recubierto por los conjuntos (a_α, b_α), que son abiertos en $\mathbb{R}$ y, de aquí, abiertos en C. Luego alguna subcolección numerable recubre a C. Supongamos que esta subcolección está formada por los elementos (a_α, b_α) para $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Entonces la colección

$$\mathcal{A}'' = \{[a_\alpha, b_\alpha) | \alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$$

es una subcolección numerable de $\mathcal{A}$ que recubre al conjunto C, y $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$ es una subcolección numerable de $\mathcal{A}$ que recubre a $\mathbb{R}_\ell$.

EJEMPLO 4. *El producto de dos espacios de Lindelöf no es necesariamente de Lindelöf.*

Aunque el espacio $\mathbb{R}_\ell$ es de Lindelöf, probaremos que el espacio producto $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell = \mathbb{R}_\ell^2$ no lo es. El espacio $\mathbb{R}_\ell^2$ es un ejemplo muy útil en topología llamado ***plano de Sorgenfrey***.

El espacio $\mathbb{R}_\ell^2$ tiene como base todos los conjuntos de la forma $[a, b) \times [c, d)$. Para probar que no es de Lindelöf, consideremos el subespacio

$$L = \{x \times (-x) \mid x \in \mathbb{R}_\ell\}.$$

Es fácil comprobar que L es cerrado en $\mathbb{R}_\ell^2$. Recubramos $\mathbb{R}_\ell^2$ con el conjunto abierto $\mathbb{R}_\ell^2 - L$ y por todos los elementos de la base de la forma

$$[a, b) \times [-a, d).$$

Cada uno de estos conjuntos abiertos interseca a L en, al menos, un punto. Puesto que L no es numerable, ninguna subcolección numerable recubre a $\mathbb{R}_\ell^2$. Véase la Figura 30.1.

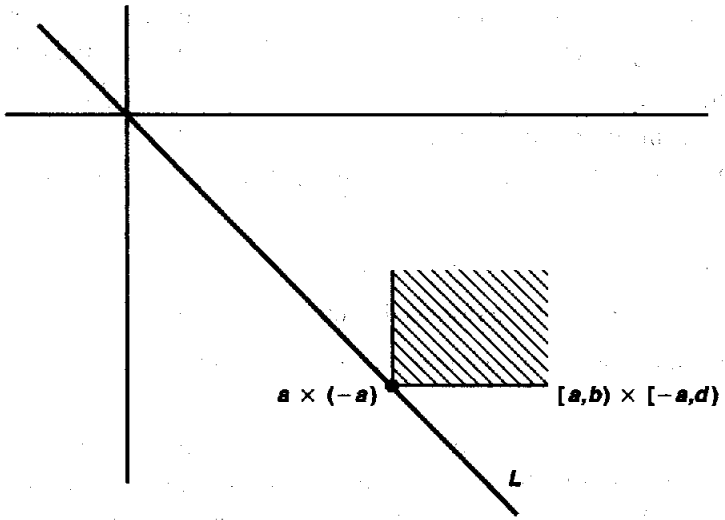


Figura 30.1

EJEMPLO 5. *Un subespacio de un espacio de Lindelöf no es necesariamente de Lindelöf.*

El cuadrado ordenado I_0^2 es compacto, por lo que es trivialmente de Lindelöf. Sin embargo, el subespacio $A = I \times (0,1)$ no es de Lindelöf. A es la unión de los conjuntos disjuntos $U_x = \{x\} \times (0,1)$, cada uno de los cuales es abierto en A. Esta colección de conjuntos no es numerable, y ninguna subcolección propia recubre a A.

Ejercicios

1. (a) Un *conjunto* G_δ en un espacio X es un conjunto A que es igual a una intersección numerable de conjuntos abiertos de X. Pruebe que en un espacio T_1 uno-numerable, cada conjunto unipuntual es un conjunto G_δ.

(b) Existe un espacio familiar en el que cada conjunto unipuntual es un conjunto G_δ, y sin embargo, no satisface el primer axioma de numerabilidad. ¿Cuál es?

La terminología proviene del alemán. La "G" viene de "Gebiet", que significa "conjunto abierto", y la "δ" de "Durchschnitt", que significa "intersección".

2. Pruebe que si X tiene una base numerable $\{B_n\}$, entonces cada base $\mathcal{C}$ de X contiene una base numerable para X. [*Indicación:* para cada par de índices n, m para los que sea posible, elija $C_{n,m} \in \mathcal{C}$ tal que $B_n \subset C_{n,m} \subset B_m$.]

3. Sean X un espacio con una base numerable y A un subconjunto no numerable de X. Pruebe que una cantidad no numerable de puntos de A son puntos límite de A.

4. Pruebe que cada espacio compacto metrizable X tiene una base numerable. [*Indicación:* sea $\mathcal{A}_n$ un recubrimiento finito de X por bolas de radio $1/n$.]

5. (a) Pruebe que cada espacio metrizable con un subconjunto denso numerable tiene una base numerable.

(b) Pruebe que cada espacio metrizable y de Lindelöf tiene una base numerable.

6. Pruebe que $\mathbb{R}_\ell$ y I_0^2 no son metrizables.

7. ¿Cuál de nuestros cuatro axiomas de numerabilidad satisface S_Ω? ¿Y $\bar{S}_\Omega$?

8. ¿Cuál de nuestros cuatro axiomas de numerabilidad satisface $\mathbb{R}^\omega$ en la topología uniforme?

9. Sea A un subespacio cerrado de X. Pruebe que si X es de Lindelöf, entonces A es de Lindelöf. Pruebe, con un ejemplo, que si X tiene un subconjunto denso numerable, A no tiene por qué contener un subconjunto denso numerable.

10. Pruebe que si X es un producto numerable de espacios con subconjuntos densos numerables, entonces X tiene un subconjunto denso numerable.

11. Sea $f : X \to Y$ continua. Pruebe que si X es de Lindelöf, o si X tiene un subconjunto denso numerable, entonces $f(X)$ satisface la misma condición.

12. Sea $f : X \to Y$ una aplicación abierta continua. Pruebe que si X satisface el primer o segundo axioma de numerabilidad, entonces $f(X)$ satisface el mismo axioma.

13. Pruebe que si X tiene un subconjunto denso numerable, cada colección de conjuntos abiertos y disjuntos en X es numerable.

14. Pruebe que si X es de Lindelöf e Y es compacto, entonces $X \times Y$ es de Lindelöf.

15. Sea $\mathbb{R}^I$ con la distancia uniforme, donde $I = [0, 1]$ y sea $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ el subespacio formado por las funciones continuas. Pruebe que $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ tiene un subconjunto denso numerable y, por tanto, una base numerable. [*Indicación:* consideremos las funciones continuas cuyas gráficas constan de un número finito de segmentos de recta con extremos racionales.]

16. (a) Pruebe que el espacio producto $\mathbb{R}^I$, donde $I = [0, 1]$, tiene un subconjunto denso numerable.

(b) Pruebe que si J tiene cardinal mayor que $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$, entonces el espacio producto $\mathbb{R}^J$ no contiene un subconjunto denso numerable. [*Indicación:* si D es denso en $\mathbb{R}^J$, defina $f : J \to \mathcal{P}(D)$ por la ecuación $f(\alpha) = D \cap \pi_\alpha^{-1}((a, b))$, donde (a, b) es un intervalo fijo en $\mathbb{R}$.]

***17.** Dote a $\mathbb{R}^\omega$ de la topología por cajas. Denotemos por $\mathbb{Q}^\infty$ al subespacio formado por sucesiones de racionales que acaban en una cadena infinita de ceros. ¿Cuáles de nuestros cuatro axiomas de numerabilidad satisface este espacio?

***18.** Sea G un grupo topológico $1AN$. Pruebe que si G tiene un subconjunto numerable denso, o si es de Lindelöf, entonces G tiene una base numerable. [*Indicación:* sea $\{B_n\}$ una base numerable en e. Si D es un subconjunto numerable denso de G, pruebe que los conjuntos dB_n, para $d \in D$, forman una base para G. Si G es de Lindelöf, elijamos para cada n un conjunto numerable C_n tal que los conjuntos cB_n, para $c \in C_n$, recubren a G. Pruebe que cuando n recorre $\mathbb{Z}_+$, estos conjuntos forman una base de G.]

§31 Los axiomas de separación

En esta sección introducimos tres axiomas de separación y estudiamos algunas de sus propiedades. Ya conoce uno de ellos —el axioma de Hausdorff—. Los otros son similares pero más fuertes. Como hacemos siempre que introducimos nuevos conceptos, examinaremos la relación entre estos axiomas y los conceptos introducidos anteriormente en el libro.

Recordemos que un espacio X se dice que es de *Hausdorff* si para cada par x, y de puntos distintos de X, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a x e y, respectivamente.

Definición. Supongamos que los conjuntos unipuntuales son cerrados en X. Entonces se dice que X es ***regular*** si para cada par formado por un punto x y un conjunto cerrado B que no contiene a x, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a x y B, respectivamente. El espacio X se dice que es ***normal*** si para cada par A, B de conjuntos cerrados disjuntos de X, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B, respectivamente.

Está claro que un espacio regular es de Hausdorff, y que un espacio normal es regular. (Necesitamos incluir la condición de que los conjuntos unipuntuales sean cerrados como parte de la definición de regularidad y normalidad para que tengan sentido. Un espacio con dos puntos en la topología indiscreta satisface el resto de las definiciones de regularidad y normalidad, incluso sin ser de Hausdorff.) Remitimos al lector a los Ejemplos 1 y 3 para ver cómo el axioma de regularidad es más fuerte que el axioma de Hausdorff, y cómo la normalidad es más fuerte que la regularidad.

Estos axiomas se llaman los axiomas de separación por el hecho de implicar la "separación" de ciertas clases de conjuntos por conjuntos abiertos disjuntos. Ya hemos usado la palabra "separación" antes, cuando estudiamos espacios conexos. Pero en aquel caso, estábamos intentando encontrar conjuntos abiertos disjuntos *cuya unión era el espacio total.*

La situación de ahora es bastante diferente, porque los conjuntos abiertos no satisfacen necesariamente esta condición.

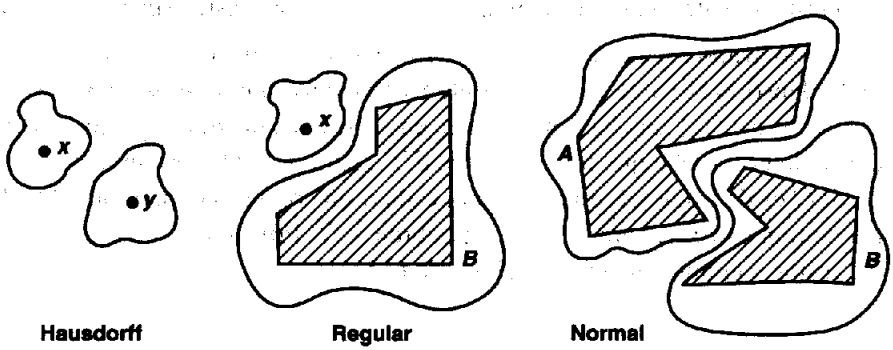


Figura 31.1

Los tres axiomas de separación se ilustran en la Figura 31.1.

Existen otros modos de enunciar los axiomas de separación. Un enunciado que es útil algunas veces se da en el siguiente lema:

Lema 31.1. *Sea X un espacio topológico donde los conjuntos unipuntuales son cerrados.*

(a) X es regular si, y sólo si, dado un punto x de X y un entorno U de x, existe un entorno V de x tal que $\bar{V} \subset U$.

(b) X es normal si, y sólo si, dado un conjunto cerrado A y un conjunto abierto U que contiene a A, existe un conjunto abierto V que contiene a A tal que $\bar{V} \subset U$.

Demostración. (a) Supongamos que X es regular, y que el punto x y el entorno U de x están dados. Si $B = X - U$ entonces B es un conjunto cerrado. Por hipótesis, existen conjuntos abiertos disjuntos V y W que contienen a x y a B, respectivamente. El conjunto $\bar{V}$ es disjunto de B, ya que si $y \in B$, el conjunto W es un entorno de y distinto de V. Por tanto, $\bar{V} \subset U$, como se deseaba.

Para probar el recíproco, supongamos que nos dan el punto x y el conjunto cerrado B que no contiene a x. Sea $U = X - B$. Por hipótesis, existe un entorno V de x tal que $\bar{V} \subset U$. Los conjuntos abiertos V y $X - \bar{V}$ son conjuntos abiertos disjuntos que contienen a x y a B, respectivamente. Así X es regular.

(b) Esta demostración usa exactamente el mismo argumento, simplemente se sustituye el punto x por el conjunto A. ■

A continuación relacionamos los axiomas de separación con los conceptos que introdujimos anteriormente.

Teorema 31.2. *(a) Un subespacio de un espacio de Hausdorff es de Hausdorff y un producto de espacios de Hausdorff es de Hausdorff.*

(b) Un subespacio de un espacio regular es regular y un producto de espacios regulares es regular.

Demostración. (a) Este resultado era un ejercicio en §17 y damos una prueba a continuación. Sea X un espacio de Hausdorff y sean x e y dos puntos del subespacio Y de X. Si U y V son entornos disjuntos en X de x e y, respectivamente, entonces $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son entornos disjuntos de x e y en Y.

Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios de Hausdorff. Sean $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ e $\mathbf{y} = (y_\alpha)$ puntos distintos del espacio producto $\prod X_\alpha$. Puesto que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, existe algún índice β tal que $x_\beta \neq y_\beta$. Elijamos conjuntos abiertos disjuntos U y V en X_β que contengan a x_β e y_β, respectivamente. Entonces los conjuntos $\pi_\beta^{-1}(U)$ y $\pi_\beta^{-1}(V)$ son conjuntos abiertos disjuntos en $\prod X_\alpha$ que contienen a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, respectivamente.

(b) Sea Y un subespacio del espacio regular X. Entonces los conjuntos unipuntuales son cerrados en Y. Sea x un punto de Y y sea B un subconjunto cerrado de Y disjunto a x. Tenemos que $\bar{B} \cap Y = B$, donde $\bar{B}$ denota la adherencia de B en X. Por consiguiente, $x \notin \bar{B}$, por lo que, utilizando la regularidad de X, podemos elegir conjuntos abiertos disjuntos U y V de X que contengan a x y a $\bar{B}$, respectivamente. Entonces $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son conjuntos abiertos disjuntos en Y que contienen a x y a B, respectivamente.

Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios regulares y sea $X = \prod X_\alpha$. Por (a), X es de Hausdorff, por lo que los conjuntos unipuntuales son cerrados en X. Usamos el lema anterior para probar la regularidad de X. Sea $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ un punto de X y sea U un entorno de $\mathbf{x}$ en X. Elijamos un elemento $\prod U_\alpha$ de la base alrededor de $\mathbf{x}$ contenido en U. Elijamos, para cada α, un entorno V_α de x_α en X_α tal que $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$; si ocurre que $U_\alpha = X_\alpha$, elegimos $V_\alpha = X_\alpha$. Entonces $V = \prod V_\alpha$ es un entorno de x en X. Puesto que $\bar{V} = \prod \bar{V}_\alpha$ por el Teorema 19.5, se sigue inmediatamente que $\bar{V} \subset \prod U_\alpha \subset U$, por lo que X es regular. ■

No existe teorema análogo para espacios normales, como veremos brevemente, en esta sección y en la próxima.

EJEMPLO 1. *El espacio $\mathbb{R}_K$ es de Hausdorff, pero no regular.*

Recordemos que $\mathbb{R}_K$ denota los números reales con la topología que tiene como base a todos los intervalos abiertos (a, b) y todos los conjuntos de la forma $(a, b) - K$, donde $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$. Este espacio es de Hausdorff, puesto que cualesquiera dos puntos distintos tienen intervalos abiertos disjuntos que los contienen.

Sin embargo, no es regular. El conjunto K es cerrado en $\mathbb{R}_K$, y no contiene al punto 0. Supongamos que existen conjuntos abiertos disjuntos U y V que contienen a 0 y K, respectivamente. Elijamos un elemento de la base que contenga a 0 y que esté en U. Debe ser un elemento del tipo $(a, b) - K$, puesto que cada elemento de la base de la forma

(a, b) que contenga al 0 interseca a K. Tomemos n lo suficientemente grande para que $1/n \in (a, b)$. Elijamos después un elemento de la base que contenga a $1/n$ y contenido, a su vez, en V; debe ser un elemento de la base de la forma (c, d). Finalmente, elijamos z de tal modo que $z < 1/n$ y $z > \text{máx}\{c, 1/(n+1)\}$. Entonces z pertenece tanto a U como a V, por lo que no son disjuntos (véase la Figura 31.2).

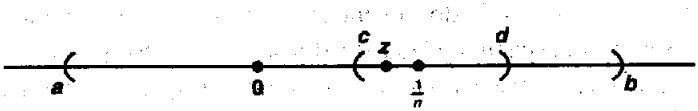


Figura 31.2

EJEMPLO 2. *El espacio $\mathbb{R}_\ell$ es normal.*

Es inmediato comprobar que los conjuntos unipuntuales son cerrados en $\mathbb{R}_\ell$, ya que la topología de $\mathbb{R}_\ell$ es más fina que la de $\mathbb{R}$. Para comprobar la normalidad, supongamos que A y B son conjuntos cerrados disjuntos en $\mathbb{R}_\ell$. Para cada punto a de A, elijamos un elemento $[a, x_a)$ de la base que no interseque a B y para cada punto b de B, escojamos un elemento $[b, x_b)$ de la base que no interseque a A. Los conjuntos abiertos

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x_a) \qquad \text{y} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x_b)$$

son conjuntos abiertos disjuntos en A y B, respectivamente.

EJEMPLO 3. *El plano de Sorgenfrey $\mathbb{R}_\ell^2$ no es normal.*

El espacio $\mathbb{R}_\ell$ es regular (de hecho, es normal), de tal modo que el espacio producto $\mathbb{R}_\ell^2$ es también regular. Así, este ejemplo sirve para dos propósitos. Muestra que un espacio regular no es necesariamente normal, y muestra que el producto de dos espacios normales tampoco tiene por qué ser normal.

Supongamos que $\mathbb{R}_\ell^2$ es normal y lleguemos a una contradicción. Sea L el subespacio de $\mathbb{R}_\ell^2$ formado por todos los puntos de la forma $x \times (-x)$. Entonces L es cerrado en $\mathbb{R}_\ell^2$, y L tiene la topología discreta. De aquí, cada subconjunto A de L cerrado en L, es cerrado en $\mathbb{R}_\ell^2$. Como $L - A$ es también cerrado en $\mathbb{R}_\ell^2$, esto significa que para cada subconjunto propio no vacío A de L, se pueden encontrar conjuntos abiertos disjuntos U_A y V_A que contienen a A y $L - A$, respectivamente.

Denotemos por D al conjunto de los puntos de $\mathbb{R}_\ell^2$ que tienen coordenadas racionales; éste es denso en $\mathbb{R}_\ell^2$. Definimos una aplicación θ que asigna, para cada subconjunto de la recta L, un subconjunto del conjunto D, del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \theta(A) &= D \cap U_A \qquad \text{si } \varnothing \subsetneq A \subsetneq L, \\ \theta(\varnothing) &= \varnothing, \\ \theta(L) &= D. \end{aligned}$$

Vamos a probar que $\theta : \mathcal{P}(L) \to \mathcal{P}(D)$ es inyectiva.

Sea A un subconjunto propio no vacío de L. Entonces $\theta(A) = D \cap U_A$ no es ni vacío (puesto que U_A es abierto y D es denso en $\mathbb{R}_\ell^2$), ni todo D (porque $D \cap V_A$ es no vacío). Queda probar que si B es otro subconjunto propio no vacío de L, entonces $\theta(A) \neq \theta(B)$.

Uno de los conjuntos A, B contiene un punto que no está en el otro; supongamos que $x \in A$ y $x \notin B$. Entonces $x \in L - B$, por lo que $x \in U_A \cap V_B$; puesto que el último conjunto es abierto y no vacío, debe contener puntos de D. Estos puntos pertenecen a U_A y no a U_B, por tanto, $D \cap U_A \neq D \cap U_B$, como se deseaba. Así θ es inyectiva.

Ahora probaremos que existe una aplicación inyectiva $\phi : \mathcal{P}(D) \to L$. Puesto que D es infinito-numerable y L tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$, es suficiente definir una aplicación inyectiva ψ de $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ en $\mathbb{R}$. Para ello, hacemos que ψ le asigne al subconjunto S de $\mathbb{Z}_+$ el decimal infinito $.a_1a_2\ldots$, donde $a_i = 0$ si $i \in S$ y $a_i = 1$ si $i \notin S$. Esto es,

$$\psi(S) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i/10^i.$$

Ahora bien, la composición

$$\mathcal{P}(L) \xrightarrow{\theta} \mathcal{P}(D) \xrightarrow{\psi} L$$

es una aplicación inyectiva de $\mathcal{P}(L)$ en L. Pero el Teorema 7.8 nos dice que una aplicación semejante no existe, por lo que hemos encontrado una contradicción.

Esta demostración de que $\mathbb{R}^2_\ell$ no es normal es, sin embargo, muy poco rigurosa. Hemos probado sólo que debe existir algún subconjunto propio no vacío A de L tal que los conjuntos A y $B = L - A$ no están contenidos en conjuntos abiertos disjuntos de $\mathbb{R}^2_\ell$. Pero no hemos encontrado tal conjunto A. De hecho, el conjunto A de los puntos de L con coordenadas racionales es un conjunto de ese tipo, pero la prueba no es fácil. Se deja para los ejercicios.

Ejercicios

1. Pruebe que si X es regular, cada par de puntos de X tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas.
2. Pruebe que si X es normal, cada par de conjuntos cerrados disjuntos tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas.
3. Pruebe que cada topología del orden es regular.
4. Denotemos por X y X' a un mismo conjunto dotado con dos topologías distintas $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, respectivamente y supongamos que $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$. Si uno de los espacios es de Hausdorff (o regular, o normal), ¿qué se puede decir del segundo?
5. Sean $f, g : X \to Y$ continuas y supongamos que Y es de Hausdorff. Pruebe que $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.
6. Sea $p : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva continua. Pruebe que si X es normal, también lo es Y. [*Indicación:* si U es un conjunto abierto que contiene a $p^{-1}(\{y\})$, pruebe que existe un entorno W de y tal que $p^{-1}(W) \subset U$.]
7. Sea $p : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva continua y cerrada tal que $p^{-1}(\{y\})$ es compacto para cada $y \in Y$ (una aplicación así se llama *aplicación perfecta*).

(a) Pruebe que si X es de Hausdorff, también lo es Y.

(b) Pruebe que si X es regular, entonces también lo es Y.

(c) Pruebe que si X es localmente compacto, también lo es Y.

(d) Pruebe que si X es $2AN$, también lo es Y. [*Indicación:* sea $\mathcal{B}$ una base numerable para X. Para cada subconjunto finito J de $\mathcal{B}$, sea U_J la unión de todos los conjuntos de la forma $p^{-1}(W)$, siendo W un abierto en Y, que están contenidos en la unión de los elementos de J.]

8. Sean X un espacio y G un grupo topológico. Una ***acción*** de G sobre X es una aplicación continua $\alpha : G \times X \to X$ tal que, denotando a $\alpha(g \times x)$ por $g \cdot x$, se tiene:

(i) $e \cdot x = x$ para todo $x \in X$.

(ii) $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x$ para todo $x \in X$ y $g_1, g_2 \in G$.

Definamos $x \sim g \cdot x$ para cualesquiera x y g; el espacio cociente resultante se denota por X/G y es llamado ***espacio de órbitas*** de la acción α.

Teorema. Sea G un grupo topológico compacto, X un espacio topológico y α una acción de G sobre X. Si X es de Hausdorff, o regular, o normal, o localmente compacto, o 2AN, también lo es X/G. [*Indicación:* véase el Ejercicio 13 de §26.]

***9.** Sea A el conjunto de todos los puntos de $\mathbb{R}^2_\ell$ de la forma $x \times (-x)$, para x racional y sea B el conjunto de todos los puntos de esta forma para x irracional. Si V es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2_\ell$ que contiene a B, pruebe que no existe conjunto abierto alguno U que contenga a A y que sea disjunto de V, como sigue:

(a) Sea K_n el conjunto formado por todos los números irracionales x de $[0, 1]$ tales que $[x, x + 1/n) \times [-x, -x + 1/n)$ está contenido en V. Pruebe que $[0, 1]$ es la unión de los conjuntos K_n y una cantidad numerable de conjuntos unipuntuales.

(b) Use el Ejercicio 5 de §27 para probar que algún conjunto $\bar{K}_n$ contiene un intervalo abierto (a, b) de $\mathbb{R}$.

(c) Pruebe que V contiene al paralelogramo abierto formado por todos los puntos de la forma $x \times (-x + \epsilon)$ para los que $a < x < b$ y $0 < \epsilon < 1/n$.

(d) Concluya que si q es un número racional con $a < q < b$, entonces el punto $q \times (-q)$ de $\mathbb{R}^2_\ell$ es un punto límite de V.

§32 Espacios normales

Iniciamos ahora un estudio más profundo de los espacios que satisfacen el axioma de normalidad. En cierto sentido, el término "normal" es algo inapropiado, puesto que los espacios normales no se comportan tan bien como uno podría esperar. Por

otro lado, la mayoría de los espacios que nos son familiares satisfacen este axioma, como veremos. Su importancia viene del hecho de que los resultados que se pueden probar bajo la hipótesis de normalidad son centrales para una parte considerable de la topología. El teorema de metrización de Urysohn y el teorema de extensión de Tietze son dos de estos resultados; nos detendremos en ellos más tarde en este mismo capítulo.

Empezamos probando tres teoremas que dan tres conjuntos importantes de hipótesis bajo las cuales se garantiza la normalidad de un espacio.

Teorema 32.1. *Todo espacio regular con una base numerable es normal.*

Demostración. Sea X un espacio regular con una base numerable $\mathcal{B}$. Sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X. Cada punto x de A tiene un entorno U que no interseca a B. Usando la regularidad, elijamos un entorno V de x cuya clausura esté en U; finalmente, elijamos un elemento de $\mathcal{B}$ que contenga a x y esté contenido en V. Al elegir un elemento de la base de este tipo para cada x de A, construimos un recubrimiento numerable de A por conjuntos abiertos cuyas clausuras no intersecan a B. Puesto que este recubrimiento de A es numerable, podemos indexarlo con los enteros positivos, denotándolo por $\{U_n\}$.

De modo similar, elijamos una colección numerable $\{V_n\}$ de conjuntos abiertos recubriendo a B, tal que cada conjunto $\bar{V}_n$ es disjunto con A. Los conjuntos $U = \bigcup U_n$ y $V = \bigcup V_n$ son conjuntos abiertos que contienen a A y B, respectivamente, pero no son necesariamente disjuntos. Utilizaremos la siguiente estrategia para construir dos conjuntos abiertos que *sean* disjuntos. Dado n, definamos

$$U'_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{V}_i \qquad \text{y} \qquad V'_n = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{U}_i.$$

Observe que cada conjunto U'_n es abierto, siendo la diferencia de un conjunto abierto U_n y un conjunto cerrado $\bigcup_{i=1}^{n} \bar{V}_i$. De modo similar, cada conjunto V'_n es abierto. La colección $\{U'_n\}$ recubre a A, porque cada x de A pertenece a U_n para algún n, y x *no* pertenece a ninguno de los $\bar{V}_i$. De manera similar, la colección $\{V'_n\}$ recubre a B (véase la Figura 32.1).

Finalmente, los conjuntos abiertos

$$U' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} U'_n \qquad \text{y} \qquad V' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} V'_n$$

son disjuntos. Si $x \in U' \cap V'$, entonces $x \in U'_j \cap V'_k$ para algún j y algún k. Supongamos que $j \leq k$. Se sigue de la definición de U'_j que $x \in U_j$ y puesto que $j \leq k$, se sigue de la definición de V'_k que $x \notin \bar{U}_j$. Una contradicción similar se obtiene si $j \geq k$. ■

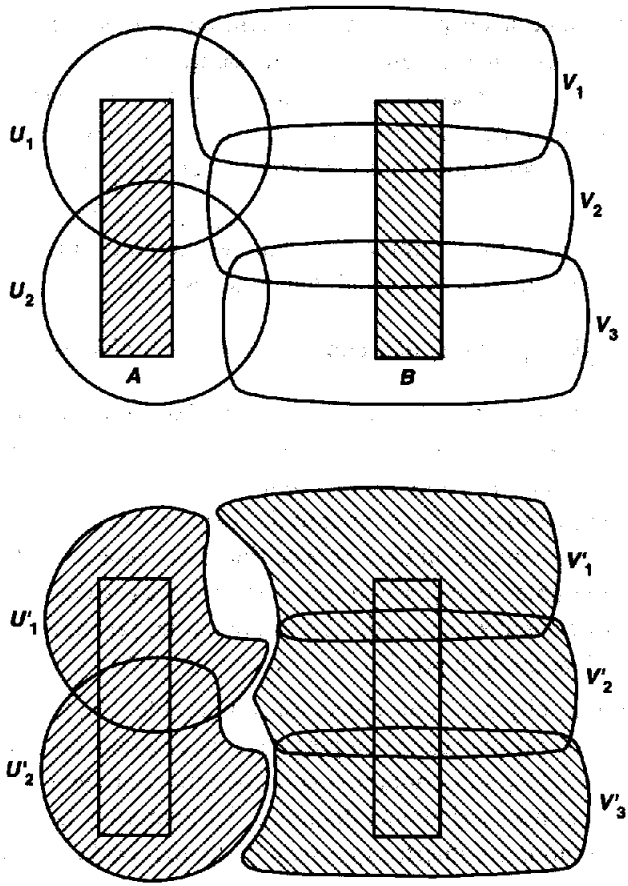


Figura 32.1

Teorema 32.2. *Todo espacio metrizable es normal.*

Demostración. Sea X un espacio metrizable con distancia d. Sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X. Para cada $a \in A$, elijamos ϵ_a de tal modo que la bola $B(a, \epsilon_a)$ no interseque a B. De modo similar, para cada b de B, elijamos ϵ_b de tal modo que la bola $B(b, \epsilon_b)$ no interseque a A. Definamos

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon_a/2) \qquad \text{y} \qquad V = \bigcup_{b \in B} B(b, \epsilon_b/2).$$

Entonces U y V son conjuntos abiertos que contienen a A y B, respectivamente y afirmamos que son disjuntos. En efecto, si existiera $z \in U \cap V$, entonces

$$z \in B(a, \epsilon_a/2) \cap B(b, \epsilon_b/2)$$

para algún $a \in A$ y algún $b \in B$. Utilizando la desigualdad triangular se obtiene que $d(a, b) < (\epsilon_a + \epsilon_b)/2$. Si $\epsilon_a \leq \epsilon_b$, entonces $d(a, b) < \epsilon_b$, por lo que la bola $B(b, \epsilon_b)$

contendría al punto a. Si $\epsilon_b \leq \epsilon_a$, entonces $d(a,b) < \epsilon_a$, por lo que el punto b estaría contenido en la bola $B(a, \epsilon_a)$. Ninguna de estas situaciones es posible. ■

Teorema 32.3. *Todo espacio de Hausdorff compacto es normal.*

Demostración. Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Ya hemos probado esencialmente que X es regular. Si x fuera un punto de X y B un conjunto cerrado en X que no contiene a x, entonces B sería compacto, y aplicando el Lema 26.4 se prueba que existen conjuntos abiertos disjuntos alrededor de x y B, respectivamente.

Esencialmente el mismo argumento que se dio en ese lema se puede usar para probar que X es normal: dados conjuntos cerrados disjuntos A y B en X, elijamos, para cada punto a de A, conjuntos abiertos disjuntos U_a y V_a que contengan a a y B, respectivamente (aquí usamos la regularidad de X). La colección $\{U_a\}$ recubre a A; como A es compacto, A se puede recubrir por un número finito de conjuntos $U_{a_1}, \ldots, U_{a_m}$. Entonces

$$U = U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m} \qquad \text{y} \qquad V = V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_m}$$

son conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B, respectivamente. ■

A continuación enunciamos un resultado que llega más lejos sobre normalidad y que encontraremos útil para algunos ejemplos.

Teorema 32.4. *Todo conjunto bien ordenado X es normal en la topología del orden.*

De hecho, es cierto que *toda* topología del orden es normal (véase el Ejemplo 39 de [S-S]), pero no tendremos oportunidad de usar este resultado aún más fuerte.

Demostración. Sea X un conjunto bien ordenado. Afirmamos que cada intervalo de la forma $(x, y]$ es abierto en X: si X tiene un máximo e y es ese elemento, $(x, y]$ es un elemento de la base alrededor de y. Si y no es el máximo de X, entonces $(x, y]$ es igual al conjunto abierto (x, y'), donde y' es el inmediato sucesor de y.

Sean ahora A y B conjuntos cerrados disjuntos en X; afirmamos, de momento, que ni A ni B contienen al mínimo a_0 de X. Para cada $a \in A$, existe un elemento de la base que contiene a a disjunto con B; éste contiene algún intervalo de la forma $(x, a]$ (aquí es donde usamos el hecho de que a no es el mínimo de X). Elijamos, para cada $a \in A$, un intervalo $(x_a, a]$, disjunto con B. De modo similar, para cada $b \in B$, elijamos un intervalo $(y_b, b]$ disjunto con A. Los conjuntos

$$U = \bigcup_{a \in A} (x_a, a] \qquad \text{y} \qquad V = \bigcup_{b \in B} (y_b, b]$$

son conjuntos abiertos que contienen a A y B, respectivamente y afirmamos que son disjuntos. Supongamos que $z \in U \cap V$. Entonces $z \in (x_a, a] \cap (y_b, b]$ para algún

$a \in A$ y algún $b \in B$. Supongamos que $a < b$. Entonces si $a \leq y_b$, los dos intervalos son disjuntos, mientras que si $a > y_b$, tenemos que $a \in (y_b, b]$, contrario al hecho de que $(y_b, b]$ es disjunto con A. Una contradicción similar ocurre si $b < a$.

Finalmente, supongamos que A y B son conjuntos cerrados disjuntos en X y A contiene al mínimo a_0 de X. El conjunto $\{a_0\}$ es simultáneamente abierto y cerrado en X. Por el párrafo anterior, existen conjuntos abiertos disjuntos U y V que contienen a los conjuntos cerrados $A - \{a_0\}$ y B, respectivamente. Entonces $U \cup \{a_0\}$ y V son conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B, de la misma forma. ■

EJEMPLO 1. *Si J no es numerable, el espacio producto $\mathbb{R}^J$ no es normal.*

La prueba es realmente difícil; la dejamos como un ejercicio de destreza (véase el Ejercicio 9).

Este ejemplo sirve para tres propósitos. Muestra que un espacio regular $\mathbb{R}^J$ no necesita ser normal. Muestra que un subespacio de un espacio normal no necesita ser normal, puesto que $\mathbb{R}^J$ es homeomorfo al subespacio $(0,1)^J$ de $[0,1]^J$, el cual (usando el teorema de Tychonoff) es de Hausdorff compacto y, por tanto, normal. Y muestra que un producto no numerable de espacios normales no es necesariamente normal. Se deja en el aire la cuestión de si un producto finito o numerable de espacios normales debe ser normal.

EJEMPLO 2. *El espacio producto $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ no es normal.*†

Consideremos el conjunto bien ordenado $\bar{S}_\Omega$, en la topología del orden, y consideremos el subconjunto S_Ω, en la topología del subespacio (que es la misma que la topología del orden). Ambos espacios son normales, por el Teorema 32.4. Probaremos que el espacio producto $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ no es normal.

Este ejemplo sirve para tres propósitos. En primer lugar, muestra que un espacio regular no es necesariamente normal, ya que $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ es un producto de espacios regulares y, por tanto, regular. En segundo lugar, muestra que un subespacio de un espacio normal no es necesariamente normal, ya que $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ es un subespacio de $\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega$, que es un espacio compacto de Hausdorff y, por tanto, normal. En tercer lugar, muestra que el producto de dos espacios normales no es necesariamente normal.

Primero, consideremos el espacio $\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ y su "diagonal" $\Delta = \{x \times x \mid x \in \bar{S}_\Omega\}$. Puesto que $\bar{S}_\Omega$ es de Hausdorff, Δ es cerrado en $\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega$: si U y V son entornos disjuntos de x e y, respectivamente, entonces $U \times V$ es un entorno de $x \times y$ que no interseca Δ.

Por tanto, en el subespacio $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$, el conjunto

$$A = \Delta \cap (S_\Omega \times \bar{S}_\Omega) = \Delta - \{\Omega \times \Omega\}$$

es cerrado. Del mismo modo, el conjunto

$$B = S_\Omega \times \{\Omega\}$$

es cerrado en $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$, siendo una "rebanada" de este espacio producto. Los conjuntos A y B son disjuntos. Supondremos que existen conjuntos abiertos disjuntos U y V de $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ que contienen a A y B, respectivamente, y llegaremos a una contradicción (véase la Figura 32.2).

†Kelley [K] atribuye este ejemplo a J. Dieudonné y A. P. Morse independientemente.

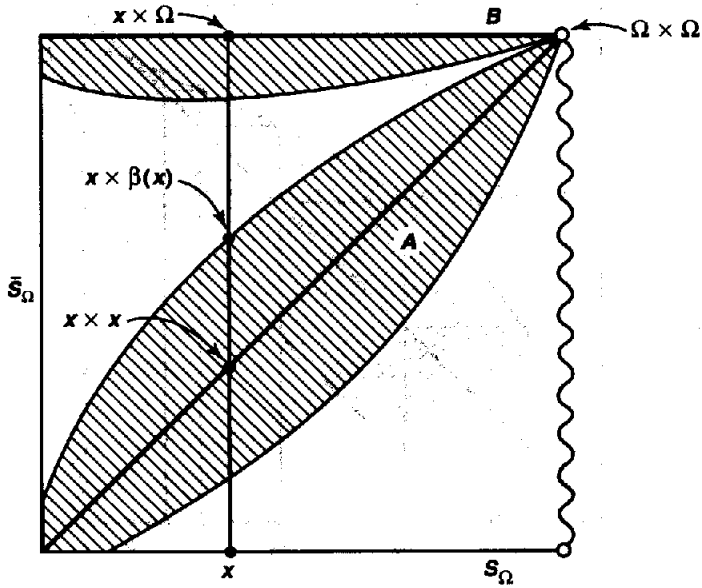


Figura 32.2

Dado $x \in S_\Omega$, consideremos la rebanada vertical $x \times \bar{S}_\Omega$. Aseguramos que existe algún punto β con $x < \beta < \Omega$ tal que $x \times \beta$ está fuera de U. Si U contuviese a todos los puntos $x \times \beta$ para $x < \beta < \Omega$, entonces el punto máximo $x \times \Omega$ de la rebanada sería un punto límite de U, que no lo es porque V es un conjunto abierto disjunto con U conteniendo a este punto máximo.

Elijamos $\beta(x)$ como un punto de ese tipo; para estar definido, sea $\beta(x)$ el *mínimo* de S_Ω tal que $x < \beta(x) < \Omega$ y $x \times \beta(x)$ está fuera de U. Definamos una sucesión de puntos de S_Ω como sigue: sea x_1 cualquier punto de S_Ω, sea $x_2 = \beta(x_1)$ y, en general, $x_{n+1} = \beta(x_n)$. Tenemos

$$x_1 < x_2 < \cdots$$

porque $\beta(x) > x$ para todo x. El conjunto $\{x_n\}$ es numerable y, por tanto, tiene una cota superior en S_Ω; sea $b \in S_\Omega$ su supremo, así $x_n \to b$. Pero $\beta(x_n) = x_{n+1}$, por lo que $\beta(x_n) \to b$ también. Entonces

$$x_n \times \beta(x_n) \to b \times b$$

en el espacio producto. Véase la Figura 32.3. Pero esto es una contradicción, porque el punto $b \times b$ está en el conjunto A, que está contenido en el conjunto abierto U, y U *no* contiene ningún punto del tipo $x_n \times \beta(x_n)$.

Ejercicios

1. Pruebe que un subespacio cerrado de un espacio normal es normal.

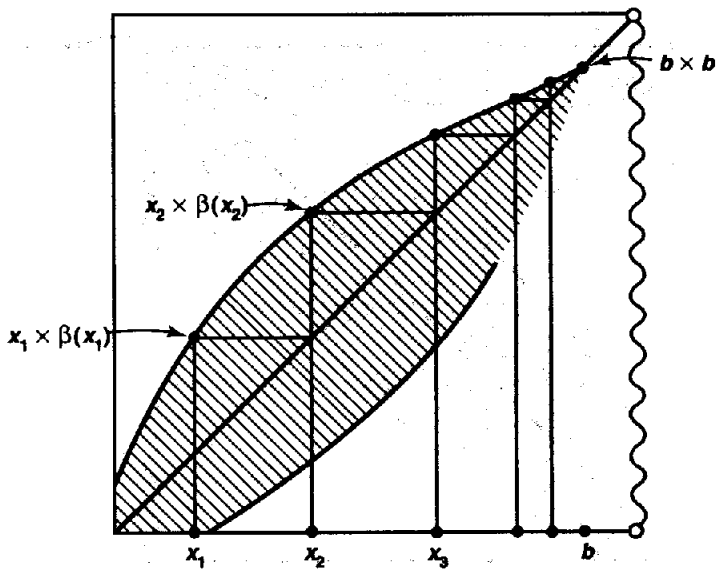


Figura 32.3

2. Pruebe que si $\prod X_\alpha$ es de Hausdorff, regular o normal, entonces también lo es X_α (suponga que cada X_α es no vacío).

3. Pruebe que todo espacio de Hausdorff localmente compacto es regular.

4. Pruebe que todo espacio de Lindelöf regular es normal.

5. ¿Es $\mathbb{R}^\omega$ normal en la topología producto? ¿Y en la topología uniforme?

   No se sabe si $\mathbb{R}^\omega$ es normal en la topología por cajas. Mary-Ellen Rudin ha probado que la respuesta es afirmativa si se admite la hipótesis del continuo, [RM]. De hecho, prueba que se satisface una condición más fuerte llamada *paracompacidad*.

6. Un espacio X se dice que es ***completamente normal*** si cada subespacio de X es normal. Pruebe que X es completamente normal si, y sólo si, para cada par A, B de conjuntos separados en X (esto es, conjuntos tales que $\bar{A} \cap B = \varnothing$ y $A \cap \bar{B} = \varnothing$), existen conjuntos abiertos disjuntos que los contienen. [*Indicación:* si X es completamente normal, considere $X - (\bar{A} \cap \bar{B})$.]

7. ¿Cuáles de los siguientes espacios son completamente normales? Justifique sus respuestas.

   (a) Un subespacio de un espacio completamente normal.

   (b) El producto de dos espacios completamente normales.

   (c) Un conjunto bien ordenado en la topología del orden.

   (d) Un espacio metrizable.

(e) Un espacio de Hausdorff compacto.

(f) Un espacio regular con una base numerable.

(g) El espacio $\mathbb{R}_\ell$.

***8.** Pruebe lo siguiente:
Teorema. Todo espacio X continuo lineal es normal.

(a) Sea C un subconjunto cerrado no vacío de X. Si U es una componente de $X - C$, pruebe que U es un conjunto de la forma (c, c') o $(-\infty, c)$, donde $c, c' \in C$.

(b) Sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X. Para cada componente W de $X - A \cup B$ que sea un intervalo abierto con un extremo en A y el otro en B, elija un punto c_W de W. Pruebe que el conjunto C de los puntos c_W es cerrado.

(c) Pruebe que si V es una componente de $X - C$, entonces V no interseca a A ni a B.

***9.** Pruebe el siguiente:
Teorema. Si J no es numerable, entonces $\mathbb{R}^J$ no es normal.
Demostración. (Esta prueba se debe a A. H. Stone, según la adaptación de [S-S].) Si $X = (\mathbb{Z}_+)^J$, será suficiente probar que X no es normal, puesto que X es un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^J$. Usaremos notación funcional para los elementos de X, por lo que el elemento característico de X es una función $\mathbf{x} : J \to \mathbb{Z}_+$.

(a) Si $\mathbf{x} \in X$ y B es un subconjunto finito de J, denotemos por $U(\mathbf{x}, B)$ al conjunto formado por todos aquellos elementos $\mathbf{y}$ de X tales que $\mathbf{y}(\alpha) = \mathbf{x}(\alpha)$ para $\alpha \in B$. Pruebe que los conjuntos $U(\mathbf{x}, B)$ son una base para X.

(b) Definamos P_n como el subconjunto de X formado por aquellos $\mathbf{x}$ tales que sobre el conjunto $J - \mathbf{x}^{-1}(n)$, la aplicación $\mathbf{x}$ es inyectiva. Pruebe que P_1 y P_2 son cerrados y disjuntos.

(c) Supongamos que U y V son conjuntos abiertos que contienen a P_1 y P_2, respectivamente. Dada una sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de elementos distintos de J, y una sucesión

$$0 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$$

de enteros, para cada $i \geq 1$ escribamos

$$B_i = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_i}\}$$

y definamos $\mathbf{x}_i \in X$ por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(\alpha_j) &= j && \text{para } 1 \leq j \leq n_{i-1}, \\ \mathbf{x}_i(\alpha) &= 1 && \text{para los demás valores de } \alpha. \end{aligned}$$

Pruebe que se pueden elegir las sucesiones α_j y n_j de tal modo que para cada i, se tiene la inclusión

$$U(\mathbf{x}_i, B_i) \subset U.$$

[*Indicación:* para empezar, observe que $\mathbf{x}_1(\alpha) = 1$ para todo α; después elija B_1 de tal modo que $U(\mathbf{x}_1, B_1) \subset U$.]

(d) Sea A el conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ construido en (c). Definamos $\mathbf{y} : J \to \mathbb{Z}_+$ por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\alpha_j) &= j \qquad \text{para } \alpha_j \in A, \\ \mathbf{y}(\alpha) &= 2 \qquad \text{para los demás valores de } \alpha. \end{aligned}$$

Elijamos B de tal modo que $U(\mathbf{y}, B) \subset V$. Después elijamos i de manera que $B \cap A$ esté contenido en el conjunto B_i. Pruebe que

$$U(\mathbf{x}_{i+1}, B_{i+1}) \cap U(\mathbf{y}, B)$$

no es vacío.

10. ¿Es normal todo grupo topológico?

§33 El lema de Urysohn

A continuación entramos en el primer teorema profundo del libro, un teorema que habitualmente se llama el "lema de Urysohn". Nos asegura la existencia de ciertas funciones continuas con valores reales sobre un espacio normal X. Es la herramienta básica usada al probar un gran número de teoremas importantes. Probaremos tres de ellos —el teorema de metrización de Urysohn, el teorema de extensión de Tietze y un teorema de embebimiento para variedades— en las próximas secciones de este capítulo.

¿Por qué decimos que el lema de Urysohn es un teorema "profundo"? Porque su demostración implica una idea realmente original, que las pruebas anteriores no hacían. Quizá podamos explicar lo que significa esto: se podría esperar que si alguien modificara este libro y borrara todas las demostraciones que hemos dado hasta ahora y después le ofreciera el libro a un estudiante brillante que no hubiera estudiado topología, ese estudiante debería ser capaz de leer el libro y obtener las demostraciones independientemente (sería una gran dedicación de tiempo y esfuerzo, por supuesto, y no se esperaría que el estudiante demostrara los ejemplos más difíciles). Pero el lema de Urysohn está en un nivel distinto. Necesitaría considerablemente más originalidad de la que la mayoría de nosotros poseemos para probar este lema, a menos que nos dieran bastantes indicaciones.

Teorema 33.1 (Lema de Urysohn). *Sea X un espacio normal y sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X. Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado en la recta real. Entonces existe una aplicación continua*

$$f : X \to [a, b]$$

tal que $f(x) = a$ para todo x de A y $f(x) = b$ para todo x de B.

Demostración. Necesitamos considerar sólo el caso donde el intervalo en cuestión es el intervalo $[0, 1]$; el caso general se sigue de éste. El primer paso de la prueba es construir, usando la normalidad, una cierta familia U_p de conjuntos abiertos de X, indexada por los números racionales. Después se usan estos conjuntos para definir la función continua f.

Paso 1. Sea P el conjunto de todos los números racionales en el intervalo $[0, 1]$.† Definiremos, para cada p de P, un conjunto abierto U_p de X, de tal modo que siempre que $p < q$, tengamos

$$\bar{U}_p \subset U_q.$$

Así, los conjuntos U_p estarán simplemente ordenados por la inclusión, del mismo modo que sus subíndices están ordenados por el orden usual en la recta real.

Puesto que P es numerable, podemos usar la inducción para definir los conjuntos U_p (o mejor aún, el principio de definición recursiva). Coloquemos los elementos de P en una sucesión infinita de cualquier manera; por comodidad, supongamos que los números 1 y 0 son los dos primeros elementos de la sucesión.

Definamos ahora los conjuntos U_p como sigue: en primer lugar, definamos $U_1 = X - B$. En segundo lugar, puesto que A es un conjunto cerrado contenido en el conjunto abierto U_1, podemos elegir, por la normalidad de X, un conjunto abierto U_0 tal que

$$A \subset U_0 \qquad \text{y} \qquad \bar{U}_0 \subset U_1.$$

En general, denotemos por P_n al conjunto formado por los primeros n números racionales en la sucesión. Supongamos que U_p está definido para todos los números racionales p que pertenecen al conjunto P_n, satisfaciendo la condición

$$(*) \qquad p < q \Longrightarrow \bar{U}_p \subset U_q.$$

Denotemos por r al siguiente número racional de la sucesión; deseamos definir U_r.

Consideremos el conjunto $P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$. Es un subconjunto finito del intervalo $[0, 1]$ y, como tal, tiene una ordenación simple derivada de la relación de

†En realidad, cualquier subconjunto numerable denso de $[0, 1]$ funcionará, siempre que contenga a los puntos 0 y 1.

orden usual $<$ sobre la recta real. En un conjunto finito simplemente ordenado, cada elemento (distinto del mínimo y del máximo) tiene un inmediato predecesor y un inmediato sucesor (véase el Teorema 10.1). El número 0 es el mínimo y 1 es el máximo del conjunto simplemente ordenado P_{n+1}, y r no es ni 0 ni 1. Así, r tiene un inmediato anterior p en P_{n+1}, y un inmediato sucesor q en P_{n+1}. Los conjuntos U_p y U_q ya están definidos, y $\bar{U}_p \subset U_q$ por la hipótesis de inducción. Usando la normalidad de X, podemos encontrar un conjunto abierto U_r de X tal que

$$\bar{U}_p \subset U_r \quad \text{y} \quad \bar{U}_r \subset U_q.$$

Afirmamos que $(*)$ se cumple ahora para cada par de elementos de P_{n+1}. Si ambos elementos pertenecen a P_n, $(*)$ se cumple por la hipótesis de inducción. Si uno de ellos es r y el otro es un punto s de P_n, entonces $s \leq p$, en cuyo caso

$$\bar{U}_s \subset \bar{U}_p \subset U_r,$$

o $s \geq q$, en cuyo caso

$$\bar{U}_r \subset U_q \subset U_s.$$

Así, para cada par de elementos de P_{n+1}, la relación $(*)$ se cumple.

Por inducción, tenemos U_p definido para todo $p \in P$.

Para ilustrarlo, supongamos que empezamos con el método usual de colocar los elementos de P en una sucesión infinita:

$$P = \{1, 0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}, \ldots\}$$

Después de definir U_0 y U_1, definiríamos $U_{1/2}$ de tal modo que $\bar{U}_0 \subset U_{1/2}$ y $\bar{U}_{1/2} \subset U_1$. Entonces pondríamos $U_{1/3}$ entre U_0 y $U_{1/2}$, y $U_{2/3}$ entre $U_{1/2}$ y U_1, y así sucesivamente. En el octavo paso de la prueba tendríamos la situación dibujada en la Figura 33.1. Y el noveno paso consistiría en elegir un conjunto abierto $U_{2/5}$ para introducirlo entre $U_{1/3}$ y $U_{1/2}$, y así sucesivamente.

Paso 2. Ya hemos definido U_p para todos los números racionales p del intervalo $[0, 1]$. Extendemos esta definición a todos los números racionales p de $\mathbb{R}$ definiendo

$$U_p = \varnothing \qquad \text{si } p < 0,$$
$$U_p = X \qquad \text{si } p > 1.$$

Sigue siendo cierto (como puede comprobarse) que para cualquier par de números racionales p y q,

$$p < q \Longrightarrow \bar{U}_p \subset U_q.$$

Paso 3. Dado un punto x de X, definamos $\mathbb{Q}(x)$ como el conjunto de aquellos números racionales p tales que los conjuntos abiertos correspondientes U_p contienen a x:

$$\mathbb{Q}(x) = \{p \mid x \in U_p\}.$$

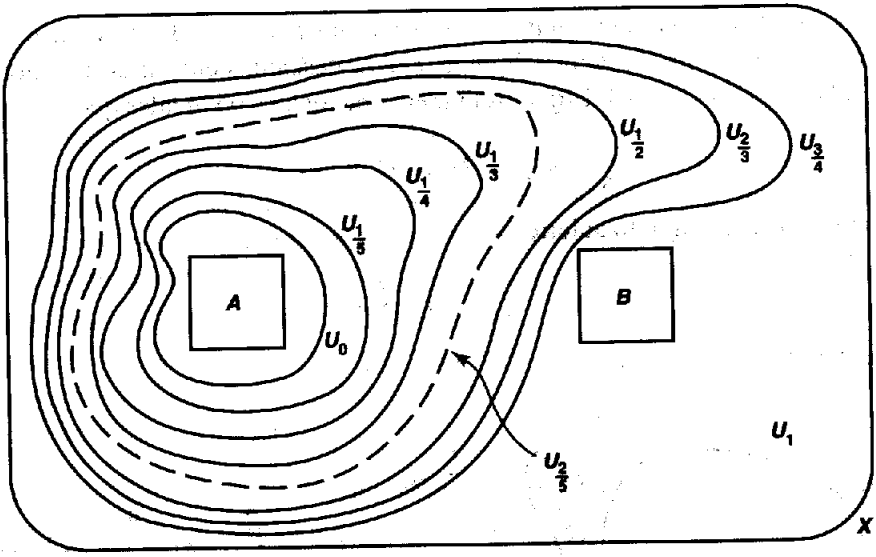


Figura 33.1

Este conjunto no contiene ningún número menor que 0, puesto que no hay x alguno que pertenezca a U_p para $p < 0$. Y contiene a cada número mayor que 1, puesto que cada x está en U_p para $p > 1$. Por tanto, $\mathbb{Q}(x)$ está acotado inferiormente, y su ínfimo es un punto del intervalo $[0, 1]$. Definamos

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = \inf\{p \mid x \in U_p\}.$$

Paso 4. Probaremos que f es la función deseada. Si $x \in A$, entonces $x \in U_p$ para cada $p \geq 0$, por lo que $\mathbb{Q}(x)$ es igual al conjunto de todos los racionales no negativos, y $f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = 0$. De manera similar, si $x \in B$, entonces $x \in U_p$ siempre que no sea $p \leq 1$, por lo que $\mathbb{Q}(x)$ está formado por todos los números racionales mayores que 1, y $f(x) = 1$.

Todo lo anterior es fácil. La única parte difícil es probar que f es continua. Para este propósito, primero demostramos los siguientes hechos elementales:

(1) $x \in \bar{U}_r \Rightarrow f(x) \leq r$.

(2) $x \notin U_r \Rightarrow f(x) \geq r$.

Para probar (1), observe que si $x \in \bar{U}_r$, entonces $x \in U_s$ para cada $s > r$. Por tanto, $\mathbb{Q}(x)$ contiene a todos los números racionales mayores que r, por lo que, por definición, tenemos

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \leq r.$$

Para probar (2), observe que si $x \notin U_r$ entonces x no está en U_s para todo $s < r$. Por tanto, $\mathbb{Q}(x)$ no contiene número racional alguno menor que r, por lo que

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \geq r.$$

Ahora probamos la continuidad de f. Dado un punto x_0 de X y un intervalo abierto (c, d) en $\mathbb{R}$ que contenga al punto $f(x_0)$, deseamos encontrar un entorno U de x_0 tal que $f(U) \subset (c, d)$. Elijamos números racionales p y q tales que

$$c < p < f(x_0) < q < d.$$

Afirmamos que el conjunto abierto

$$U = U_q - \bar{U}_p$$

es el entorno deseado de x_0 (véase la Figura 33.2).

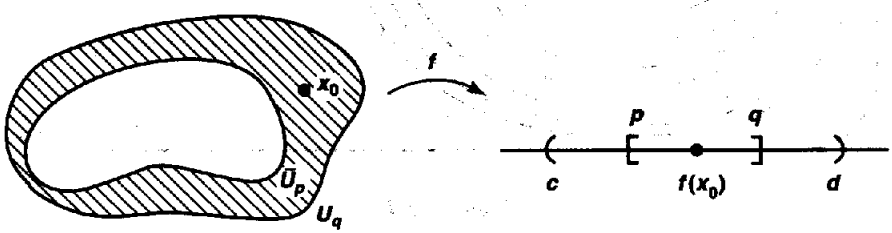


Figura 33.2

En primer lugar, observemos que $x_0 \in U$. Esto se verifica por el hecho de que $f(x_0) < q$ implica, por la condición (2), que $x_0 \in U_q$, mientras que el hecho de que $f(x_0) > p$ implica, por (1), que $x_0 \notin \bar{U}_p$.

En segundo lugar, probaremos que $f(U) \subset (c, d)$. Sea $x \in U$, entonces $x \in U_q \subset \bar{U}_q$, por lo que $f(x) \leq q$, por (1). Y $x \notin \bar{U}_p$, por lo que $x \notin U_p$ y $f(x) \geq p$, por (2). Así, $f(x) \in [p, q] \subset (c, d)$, como deseábamos. ■

Definición. Si A y B son dos subconjuntos del espacio topológico X, y existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$, decimos que A y B ***pueden separarse por una función continua***.

El lema de Urysohn dice que si cada par de conjuntos cerrados disjuntos de X se pueden separar por conjuntos abiertos disjuntos, entonces cada par de ese tipo también se puede separar por una función continua. El recíproco es trivial, ya que si $f : X \to [0, 1]$ es la función, entonces $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ y $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ son conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B, respectivamente.

Este hecho nos lleva a una cuestión que ya se le puede haber ocurrido: ¿por qué no puede generalizarse la demostración del lema de Urysohn para probar que en un espacio regular, donde pueden separarse puntos de conjuntos cerrados por conjuntos abiertos disjuntos, también pueden separarse puntos de conjuntos cerrados por funciones continuas?

A primera vista, parece que la prueba del lema de Urysohn valdría. Se toma un punto a y un conjunto cerrado B que no contenga a a, y comienza la demostración igual que antes definiendo $U_1 = X - B$ y eligiendo U_0 para que sea un conjunto abierto alrededor de a cuya clausura está contenida en U_1 (usando la regularidad de X). Pero en el próximo paso de la demostración nos encontramos con dificultades. Si suponemos que p es el siguiente número racional en la sucesión después de 0 y 1, se quiere encontrar un conjunto abierto U_p tal que $\bar{U}_0 \subset U_p$ y $\bar{U}_p \subset U_1$. Para esto, la regularidad no es suficiente.

Pedir que se pueda separar un punto de un conjunto cerrado por una función continua es, de hecho, una condición más fuerte que pedir que se puedan separar por conjuntos abiertos disjuntos. Convertimos esta condición en un nuevo axioma de separación:

Definición. Un espacio X es ***completamente regular*** si los conjuntos unipuntuales son cerrados en X y si para cada punto x_0 y cada conjunto cerrado A que no contenga a x_0, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x_0) = 1$ y $f(A) = \{0\}$.

Un espacio normal es completamente regular, por el lema de Urysohn, y un espacio completamente regular es regular, puesto que dada f, los conjuntos $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ y $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ son conjuntos abiertos y disjuntos que contienen a A y x_0, respectivamente. Como consecuencia, este nuevo axioma se introduce entre la regularidad y la normalidad en la lista de los axiomas de separación. Observe que en la definición se podría pedir perfectamente que la función asociara x_0 con 0, y A con $\{1\}$, ya que $g(x) = 1 - f(x)$ satisface esta condición. Pero nuestra definición es, en ocasiones, más conveniente.

En los primeros años de la topología, los axiomas de separación, listados en orden de fuerza creciente, eran llamados T_1, T_2 (Hausdorff), T_3 (regular), T_4 (normal) y T_5 (completamente normal), respectivamente. La letra "T" proviene del alemán "Trennungsaxiom", que significa "axioma de separación". Más tarde, cuando se introdujo la noción de regularidad completa, alguien sugirió en broma que debería llamarse el "axioma $T_{3\frac{1}{2}}$", puesto que está entre la regularidad y la normalidad. Esta terminología, de hecho, se usa algunas veces en la literatura matemática.

A diferencia de la normalidad, este nuevo axioma de separación se comporta bien con respecto a subespacios y productos:

Teorema 33.2. *Un subespacio de un espacio completamente regular es completamente regular. Un producto de espacios completamente regulares es completamente regular.*

Demostración. Sea X un espacio completamente regular e Y un subespacio de X. Sea x_0 un punto de Y y A un conjunto cerrado de Y disjunto de x_0. Tenemos que $A = \bar{A} \cap Y$, donde $\bar{A}$ denota la clausura de A en X. Por tanto, $x_0 \notin \bar{A}$. Puesto que X

es completamente regular, podemos elegir una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x_0) = 1$ y $f(\bar{A}) = \{0\}$. La restricción de f a Y es la función continua deseada sobre Y.

Sea $X = \prod X_\alpha$ un producto de espacios completamente regulares. Sea $\mathbf{b} = (b_\alpha)$ un punto de X y sea A un conjunto cerrado de X disjunto con $\mathbf{b}$. Elijamos un elemento $\prod U_\alpha$ de la base que contenga a $\mathbf{b}$ y que no interseque a A; entonces $U_\alpha = X_\alpha$ excepto para un número finito de valores de α, digamos $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Dado $i = 1, \ldots, n$, elijamos una función continua

$$f_i : X_{\alpha_i} \to [0,1]$$

tal que $f_i(b_{\alpha_i}) = 1$ y $f_i(X - U_{\alpha_i}) = \{0\}$. Hagamos $\phi_i(\mathbf{x}) = f_i(\pi_{\alpha_i}(\mathbf{x}))$; entonces ϕ_i aplica X continuamente sobre $\mathbb{R}$ y es nula fuera de $\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$. El producto

$$f(\mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x}) \cdot \phi_2(\mathbf{x}) \cdot \cdots \cdot \phi_n(\mathbf{x})$$

es la función continua deseada sobre X, ya que es igual a 1 en $\mathbf{b}$ y es nula fuera de $\prod U_\alpha$. ■

EJEMPLO 1. Los espacios $\mathbb{R}_\ell^2$ y $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ son completamente regulares, pero no son normales. La razón es que son productos de espacios que son completamente regulares (de hecho, normales).

Un espacio que sea regular pero no completamente regular es mucho más difícil de encontrar. La mayoría de los ejemplos que se han construido para este propósito son difíciles, y requieren estar considerablemente familiarizado con los números cardinales. Sin embargo, hace poco tiempo, John Thomas [T] construyó un ejemplo mucho más elemental, que presentamos en el Ejercicio 11.

Ejercicios

1. Examine la demostración del lema de Urysohn y pruebe que, para un r dado,

$$f^{-1}(r) = \bigcap_{p>r} U_p - \bigcup_{q<r} U_q$$

donde p, q son racionales.

2. (a) Pruebe que un espacio conexo normal con más de un punto no es numerable.

   (b) Pruebe que un espacio conexo regular con más de un punto no es numerable.† [*Indicación:* cualquier espacio numerable es de Lindelöf.]

† Sorprendentemente, existe un espacio de *Hausdorff* conexo que es numerablemente infinito. Véase el Ejemplo 75 de [S-S].

3. Proporcione una prueba directa del lema de Urysohn para un espacio métrico (X, d) haciendo

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

4. Recordemos que A es un "conjunto G_δ" en X si A es la intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos de X.

Teorema. Sea X normal. Existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ para $x \in A$ y $f(x) > 0$ para $x \notin A$ si, y sólo si, A es un conjunto G_δ cerrado en X.

Una función que satisface las condiciones de este teorema se dice que ***es nula exactamente sobre A***.

5. Pruebe:

Teorema (versión fuerte del lema de Urysohn). Sea X un espacio normal. Existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ para $x \in A$, $f(x) = 1$ para $x \in B$ y $0 < f(x) < 1$ en el resto si, y sólo si, A y B son conjuntos G_δ cerrados y disjuntos en X.

6. Un espacio X se dice que es ***perfectamente normal*** si X es normal y cada conjunto cerrado en X es un conjunto G_δ en X.

(a) Pruebe que todo espacio metrizable es perfectamente normal.

(b) Pruebe que un espacio perfectamente normal es completamente normal. Por este motivo la condición de normalidad perfecta se llama algunas veces "axioma T_6". [*Indicación:* sean A y B conjuntos separados en X. Elija funciones continuas $f, g : X \to [0, 1]$ que sean nulas exactamente sobre $\bar{A}$ y $\bar{B}$, respectivamente. Considere la función $f - g$.]

(c) Existe un espacio familiar que es completamente normal pero no perfectamente normal. ¿Cuál es?

7. Pruebe que todo espacio de Hausdorff localmente compacto es completamente regular.

8. Sea X completamente regular y sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X. Pruebe que si A es compacto, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.

9. Pruebe que $\mathbb{R}^J$ en la topología por cajas es completamente regular. [*Indicación:* pruebe que es suficiente considerar el caso donde el entorno caja $(-1, 1)^J$ es disjunto de A y el punto es el origen. Después use el hecho de que una función continua en la topología uniforme es también continua en la topología por cajas.]

***10.** Pruebe lo siguiente:

Teorema. Todo grupo topológico es completamente regular.

Demostración. Sea V_0 un entorno del elemento identidad e en el grupo topológico G. En general, elijamos V_n como un entorno de e tal que $V_n \Delta V_n \subset V_{n-1}$.

Consideremos el conjunto de todos los racionales emparejados p, esto es, todos los números racionales de la forma $k/2^n$, con k y n enteros. Para cada racional emparejado p en $(0, 1]$, definimos un conjunto abierto $U(p)$ inductivamente como sigue: $U(1) = V_0$ y $U(\frac{1}{2}) = V_1$. Dado n, si $U(k/2^n)$ está definido para $0 < k/2^n \leq 1$, definimos

$$\begin{aligned} U(1/2^{n+1}) &= V_{n+1}, \\ U((2k+1)/2^{n+1}) &= V_{n+1}\Delta U(k/2^n) \end{aligned}$$

para $0 < k < 2^n$. Para $p \leq 0$, sea $U(p) = \varnothing$ y para $p > 1$, sea $U(p) = G$. Pruebe que

$$V_n\Delta U(k/2^n) \subset U((k+1)/2^n)$$

para todos k y n. Proceda como en el lema de Urysohn. Este ejercicio está adaptado de [M-Z], al que se remite al lector para más resultados sobre grupos topológicos.

***11.** Defina un conjunto X como sigue: para cada entero par m, denotemos por L_m al segmento de recta $m \times [-1, 0]$ en el plano. Para cada entero impar n y cada entero $k \geq 2$, denotemos por $C_{n,k}$ a la unión de los segmentos de recta $(n+1-1/k) \times [-1, 0]$ y $(n-1+1/k) \times [-1, 0]$ y el semicírculo

$$\{x \times y \mid (x-n)^2 + y^2 = (1-1/k)^2 \quad \text{e} \quad y \geq 0\}$$

en el plano. Denotemos por $p_{n,k}$ al punto máximo $n \times (1-1/k)$ de este semicírculo. Sea X la unión de todos los conjuntos L_m y $C_{n,k}$, además de dos puntos a y b. Dotemos a X de una topología tomando conjuntos de los siguientes cuatro tipos como elementos de la base:

(i) La intersección de X con un segmento horizontal abierto de recta que no contiene a ninguno de los puntos $p_{n,k}$.

(ii) Un conjunto formado por uno de los conjuntos $C_{n,k}$ al borrar un número finito de puntos.

(iii) Para cada entero par m, la unión de $\{a\}$ y el conjunto de puntos $x \times y$ de X para los que $x < m$.

(iv) Para cada entero impar m, la unión de $\{b\}$ y el conjunto de puntos $x \times y$ de X para los que $x > m$.

(a) Haga un dibujo aproximado de X y pruebe que estos conjuntos forman una base para una topología sobre X.

(b) Sea f un función continua con valores reales sobre X. Pruebe que para cualquier c, el conjunto $f^{-1}(c)$ es un conjunto G_δ en X (esto es cierto para cualquier espacio X). Concluya que el conjunto $S_{n,k}$ formado por aquellos puntos p de $C_{n,k}$ para los que $f(p) \neq f(p_{n,k})$, es numerable.

Elija $d \in [-1, 0]$ de tal modo que la recta $y = d$ no interseque a ninguno de los conjuntos del tipo $S_{n,k}$. Pruebe que, para n impar,

$$f((n-1) \times d) = \lim_{k \to \infty} f(p_{n,k}) = f((n+1) \times d).$$

Concluya que $f(a) = f(b)$.

(c) Pruebe que X es regular pero no completamente regular.

§34 El teorema de metrización de Urysohn

Abordamos ahora el objetivo principal de este capítulo, un teorema que nos da condiciones bajo las cuales un espacio topológico es metrizable. La prueba relaciona entre sí varios conceptos que ya hemos visto en otras partes del libro; usa resultados sobre topologías métricas del Capítulo 2, así como hechos sobre los axiomas de separación y numerabilidad probados en el presente capítulo. La construcción básica usada en la prueba es simple, pero muy útil. Se verá con posterioridad en este libro, de distintas formas.

Existen dos versiones de la prueba, y puesto que cada una tiene generalizaciones útiles que aparecerán posteriormente, presentaremos aquí las dos. La primera versión se generaliza para dar un teorema de embebimiento para espacios completamente regulares. La segunda versión se generalizará en el Capítulo 6 cuando probemos el teorema de metrización de Nagata-Smirnov.

Teorema 34.1 (Teorema de metrización de Urysohn). *Todo espacio regular X con una base numerable es metrizable.*

Demostración. Probaremos que X es metrizable construyendo un embebimiento de X en un espacio metrizable Y, esto es, mostrando que X es homeomorfo a un subespacio de Y. Las dos versiones de la prueba difieren en la elección del espacio metrizable Y. En la primera versión, Y es el espacio $\mathbb{R}^\omega$ con la topología producto, un espacio que hemos probado previamente que es metrizable (Teorema 20.5). En la segunda versión, el espacio Y es también $\mathbb{R}^\omega$, pero esta vez con la topología dada por la distancia uniforme $\bar{\rho}$ (véase §20). En cada caso, se consigue un embebimiento de X en el subespacio $[0, 1]^\omega$ de $\mathbb{R}^\omega$.

Paso 1. Probaremos lo siguiente: *Existe una colección numerable de funciones continuas $f_n : X \to [0, 1]$ con la propiedad de que dado cualquier punto x_0 de X y cualquier entorno U de x_0, existe un índice n tal que f_n es positiva en x_0 y es nula fuera de U.*

Como consecuencia del lema de Urysohn, dados x_0 y U, existe una función de ese tipo. Sin embargo, si elegimos dicha función para cada par (x_0, U), la colección

resultante no será numerable, en general. Nuestra tarea es disminuir el tamaño de la colección. Aquí mostramos un manera de proceder:

Sea $\{B_n\}$ una base numerable para X. Para cada par n, m de índices para los que $\bar{B}_n \subset B_m$, aplicamos el lema de Urysohn para elegir una función continua $g_{n,m} : X \to [0,1]$ tal que $g_{n,m}(\bar{B}_n) = \{1\}$ y $g_{n,m}(X - B_m) = \{0\}$. Entonces la colección $\{g_{n,m}\}$ satisface nuestra condición: dado x_0 y dado un entorno U de x_0, se puede elegir un elemento B_m de la base que contenga a x_0 y que esté contenido en U. Utilizando la regularidad, se puede elegir entonces B_n de tal modo que $x_0 \in B_n$ y $\bar{B}_n \subset B_m$. Entonces n, m es un par de índices para los que la función $g_{n,m}$ está definida, es positiva en x_0 y nula fuera de U. Puesto que la colección $\{g_{n,m}\}$ está indexada con un subconjunto de $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, es numerable; por tanto, se puede reordenar con los enteros positivos, dándonos la colección deseada $\{f_n\}$.

Paso 2 (Primera versión de la demostración). Dadas las funciones f_n del Paso 1, consideramos $\mathbb{R}^\omega$ con la topología producto y definimos una aplicación $F : X \to \mathbb{R}^\omega$ mediante la regla

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots).$$

Afirmamos que F es un embebimiento.

En primer lugar, F es continua, porque $\mathbb{R}^\omega$ tiene la topología producto y cada f_n es continua. En segundo lugar, F es inyectiva, puesto que dados $x \neq y$, sabemos que existe un índice n tal que $f_n(x) > 0$ y $f_n(y) = 0$; por consiguiente, $F(x) \neq F(y)$.

Finalmente, debemos probar que F es un homeomorfismo de X sobre su imagen, el subespacio $Z = F(X)$ de $\mathbb{R}^\omega$. Sabemos que F define una biyección continua de X con Z, por lo que sólo necesitamos probar que para cada conjunto abierto U en X, el conjunto $F(U)$ es abierto en Z. Sea z_0 un punto de $F(U)$. Encontraremos un conjunto abierto W de Z tal que

$$z_0 \in W \subset F(U).$$

Sea x_0 el punto de U tal que $F(x_0) = z_0$. Elijamos un índice N para el que $f_N(x_0) > 0$ y $f_N(X - U) = \{0\}$. Tomemos el rayo abierto $(0, +\infty)$ en $\mathbb{R}$, y sea V el conjunto abierto

$$V = \pi_N^{-1}((0, +\infty))$$

de $\mathbb{R}^\omega$. Sea $W = V \cap Z$, entonces W es abierto en Z, por definición de la topología de subespacio (véase la Figura 34.1). Afirmamos que $z_0 \in W \subset F(U)$. En primer lugar, $z_0 \in W$ puesto que

$$\pi_N(z_0) = \pi_N(F(x_0)) = f_N(x_0) > 0.$$

En segundo lugar, $W \subset F(U)$. Si fuera $z \in W$, entonces $z = F(x)$ para algún $x \in X$, y $\pi_N(z) \in (0, +\infty)$. Puesto que $\pi_N(z) = \pi_N(F(x)) = f_N(x)$, y f_N es nula fuera de U, el punto x debe estar en U. Entonces $z = F(x)$ está en $F(U)$, como se deseaba. Así F es un embebimiento de X en $\mathbb{R}^\omega$.

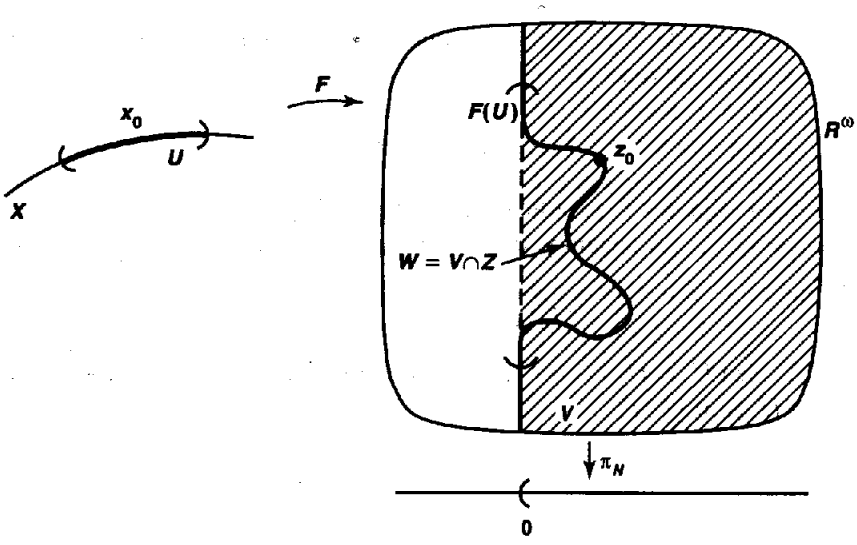


Figura 34.1

Paso 3 (Segunda versión de la demostración). En esta versión, embebemos X en el espacio métrico $(\mathbb{R}^\omega, \bar{\rho})$. En realidad, embebemos X en el subespacio $[0,1]^\omega$, en el que $\bar{\rho}$ es igual a la distancia

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{|x_i - y_i|\}.$$

Utilizaremos la colección numerable de funciones $f_n : X \to [0,1]$ construida en el Paso 1. Pero ahora impondremos la condición adicional de que $f_n(x) \leq 1/n$ para todo x (esta condición es fácil de satisfacer, simplemente dividiendo cada función f_n por n).

Definimos la función $F : X \to [0,1]^\omega$ como antes:

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots).$$

Afirmamos que F es ahora un embebimiento relativo a la distancia ρ sobre $[0,1]^\omega$. Sabemos, por el Paso 2, que F es inyectiva. Es más, sabemos que si usamos la topología *producto* sobre $[0,1]^\omega$, la aplicación F lleva conjuntos abiertos de X sobre conjuntos abiertos del subespacio $Z = F(X)$. Esta afirmación sigue siendo cierta si se utiliza la topología más fina (más grande) sobre $[0,1]^\omega$ inducida por la distancia ρ.

Lo único que nos queda por hacer es probar que F es continua. Esto no se deduce del hecho de que cada función componente sea continua, puesto que no estamos utilizando la topología producto sobre $\mathbb{R}^\omega$ ahora. Aquí es donde entra en juego la suposición de que $f_n(x) \leq 1/n$.

Sean x_0 un punto de X y $\epsilon > 0$. Para probar la continuidad, necesitamos encontrar un entorno U de x_0 tal que

$$x \in U \Longrightarrow \rho(F(x), F(x_0)) < \epsilon.$$

En primer lugar elijamos N lo suficientemente grande para que $1/N \leq \epsilon/2$. Después, para cada $n = 1, \ldots, N$, usemos la continuidad de f_n para elegir un entorno U_n de x_0 tal que

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \epsilon/2$$

para $x \in U_n$. Sea $U = U_1 \cap \cdots \cap U_N$; probaremos que U es el entorno deseado de x_0. Sea $x \in U$. Si $n \leq N$,

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \epsilon/2$$

por la elección de U. Y si $n > N$, entonces

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < 1/N \leq \epsilon/2$$

puesto que f_n aplica X en $[0, 1/n]$. Por tanto, para todo $x \in U$,

$$\rho(F(x), F(x_0)) \leq \epsilon/2 < \epsilon,$$

como deseábamos. ■

En el Paso 2 de la demostración que acabamos de hacer, realmente hemos probado algo más fuerte que el resultado establecido allí. Para un uso posterior, lo enunciaremos aquí:

Teorema 34.2 (Teorema del embebimiento). *Sea X un espacio en el que los conjuntos unipuntuales son cerrados. Supongamos que $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una familia indexada de funciones continuas $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ satisfaciendo la condición de que para cada punto x_0 de X y cada entorno U de x_0, existe un índice α tal que f_α es positiva en x_0 y nula fuera de U. Entonces la función $F : X \to \mathbb{R}^J$ definida por*

$$F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$$

es un embebimiento de X en $\mathbb{R}^J$. Si f_α aplica X en $[0, 1]$ para cada α, entonces F embebe X en $[0, 1]^J$.

La prueba es casi una copia del Paso 2 de la demostración anterior; simplemente se sustituye n por α, y $\mathbb{R}^\omega$ por $\mathbb{R}^J$. Se necesita que los conjuntos unipuntuales en X sean cerrados para asegurar que, dado $x \neq y$, existe un índice α tal que $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.

Una familia de funciones continuas que satisface las hipótesis de este teorema se dice que *separa puntos de conjuntos cerrados* en X. Es evidente que la existencia de una familia de ese tipo es equivalente, para un espacio X en el que los conjuntos unipuntuales son cerrados, a la condición de que X sea completamente regular. Por consiguiente se tiene la siguiente consecuencia:

Teorema 34.3. *Un espacio X es completamente regular si, y sólo si, es homeomorfo a un subespacio de $[0,1]^J$ para algún J.*

Ejercicios

1. Encuentre un ejemplo donde se muestre que un espacio de Hausdorff con una base numerable no es necesariamente metrizable.
2. Proporcione un ejemplo donde se muestre que un espacio puede ser completamente normal, satisfacer el primer axioma de numerabilidad y la condición de Lindelöf, y tener un subconjunto numerable denso y, sin embargo, no ser metrizable.
3. Sea X un espacio compacto de Hausdorff. Pruebe que X es metrizable si, y sólo si, X tiene una base numerable.
4. Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto. ¿Es cierto que si X tiene una base numerable, entonces X es metrizable? ¿Es cierto que si X es metrizable, entonces X tiene una base numerable?
5. Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto y sea Y la compactificación por un punto de X. ¿Es cierto que si X tiene una base numerable, entonces Y es metrizable? ¿Es cierto que si Y es metrizable, entonces X tiene una base numerable?
6. Compruebe los detalles de la demostración del Teorema 34.2.
7. Un espacio X es ***localmente metrizable*** si cada punto x de X tiene un entorno que es metrizable en la topología de subespacio. Pruebe que un espacio de Hausdorff compacto X es metrizable si es localmente metrizable. [*Indicación:* pruebe que X es una unión finita de subespacios abiertos, cada uno de los cuales tiene una base numerable.]
8. Pruebe que un espacio regular de Lindelöf es metrizable si es localmente metrizable. [*Indicación:* un subespacio cerrado de un espacio de Lindelöf es de Lindelöf.] La regularidad es esencial; ¿en qué lugar de la prueba se usará?
9. Sea X un espacio compacto de Hausdorff que es la unión de los subespacios cerrados X_1 y X_2. Si X_1 y X_2 son metrizables, pruebe que X es metrizable. [*Indicación:* construya una colección numerable $\mathcal{A}$ de conjuntos abiertos de X

cuyas intersecciones con X_i formen una base para X_i, para $i = 1, 2$. Suponga que $X_1 - X_2$ y $X_2 - X_1$ pertenecen a $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto formado por las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{A}$.]

*§35 El teorema de extensión de Tietze†

Una consecuencia inmediata del lema de Urysohn es el útil teorema llamado el teorema de extensión de Tietze. Se ocupa del problema de extender una función continua con valores reales, que está definida sobre un subespacio de un espacio X, a una función continua definida sobre todo X. Este teorema es importante en muchas de las aplicaciones de topología.

Teorema 35.1 (Teorema de extensión de Tietze). *Sea X un espacio normal y A un subespacio cerrado de X.*

(a) Cualquier aplicación continua de A en el intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ se puede extender a una aplicación de todo X en $[a, b]$.

(b) Cualquier aplicación continua de A en $\mathbb{R}$ se puede extender a una aplicación continua de todo X en $\mathbb{R}$.

Demostración. La idea de la prueba es construir una sucesión de funciones continuas s_n definida sobre todo el espacio X, tal que la sucesión s_n converge uniformemente, y tal que la restricción de s_n a A se aproxima cada vez más a f a medida que n aumenta. Entonces la función límite será continua y su restricción a A será igual a f.

Paso 1. El primer paso es construir una función particular g definida sobre todo X tal que g no sea demasiado grande, y tal que g aproxime a f sobre el conjunto A con una exactitud aceptable. Para ser más precisos, tomemos el caso $f : A \to [-r, r]$. Afirmamos que existe una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \tfrac{1}{3}r \qquad \text{para todo } x \in X, \\ |g(a) - f(a)| &\leq \tfrac{2}{3}r \qquad \text{para todo } a \in A. \end{aligned}$$

La función g se construye como sigue.

Dividimos el intervalo $[-r, r]$ en tres intervalos de igual longitud a $\frac{2}{3}r$:

$$I_1 = \left[-r, -\frac{1}{3}r\right], \qquad I_2 = \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right], \qquad I_3 = \left[\frac{1}{3}r, r\right].$$

†Esta sección se utilizará en §62, así como en varios ejercicios.

Sean B y C los subconjuntos

$$B = f^{-1}(I_1) \qquad \text{y} \qquad C = f^{-1}(I_3)$$

de A. Puesto que f es continua, B y C son subconjuntos cerrados y disjuntos de A. Por tanto, son cerrados en X. Por el lema de Urysohn, existe una función continua

$$g : X \to \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$$

con la propiedad de que $g(x) = -\frac{1}{3}r$ para cada x de B, y $g(x) = \frac{1}{3}r$ para cada x en C.

Entonces $|g(x)| \leq \frac{1}{3}r$ para todo x. Afirmamos que para cada a en A,

$$|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}r.$$

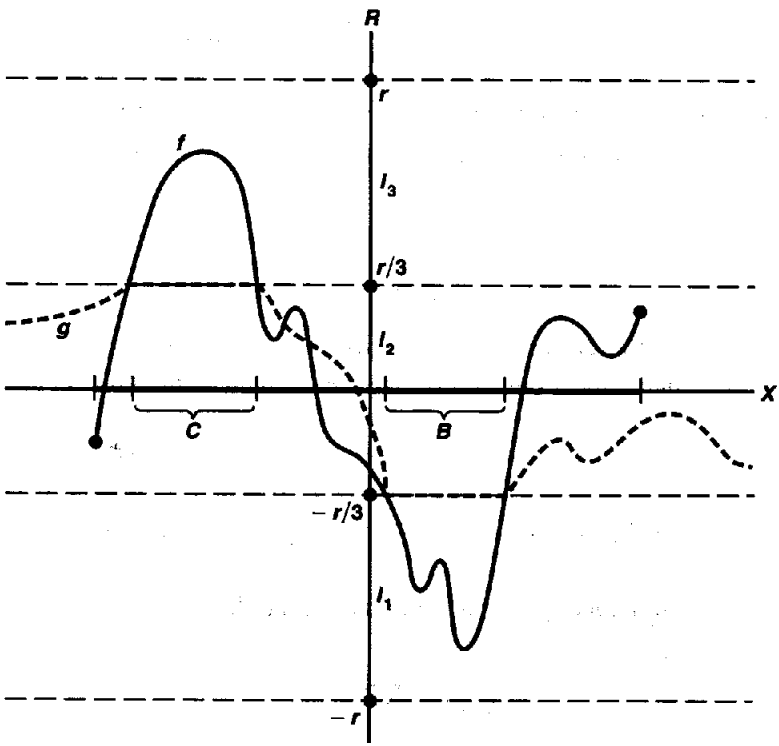


Figura 35.1

Hay tres casos. Si $a \in B$, entonces $f(a)$ y $g(a)$ pertenecen a I_1. Si $a \in C$, entonces $f(a)$ y $g(a)$ están en I_3. Y si $a \notin B \cup C$, entonces $f(a)$ y $g(a)$ están en I_2. En cada caso, $|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}r$ (véase la Figura 35.1).

Paso 2. A continuación probaremos la parte (a) del teorema de Tietze. Sin pérdida de generalidad, podemos sustituir el intervalo cerrado arbitrario $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ por el intervalo $[-1, 1]$.

Sea $f : X \to [-1, 1]$ una aplicación continua. Entonces f satisface las hipótesis del Paso 1, con $r = 1$. Por tanto, existe una función g_1 continua con valores reales, definida sobre todo X, tal que

$$\begin{aligned} |g_1(x)| &\leq 1/3 \qquad \text{para } x \in X, \\ |f(a) - g_1(a)| &\leq 2/3 \qquad \text{para } a \in A. \end{aligned}$$

Consideremos a continuación la función $f - g_1$. Esta función aplica A en el intervalo $[-2/3, 2/3]$, por lo que podemos utilizar el Paso 1 otra vez, haciendo $r = 2/3$. Obtenemos una función g_2 con valores reales, definida sobre todo X, tal que

$$\begin{aligned} |g_2(x)| &\leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) \qquad \text{para } x \in X, \\ |f(a) - g_1(a) - g_2(a)| &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \qquad \text{para } a \in A. \end{aligned}$$

Después aplicamos el Paso 1 a la función $f - g_1 - g_2$. Y así sucesivamente.

En el paso general, tenemos las funciones con valores reales $g_1, \ldots, g_n$, definidas sobre todo X, tales que

$$|f(a) - g_1(a) - \cdots - g_n(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

para $a \in A$. Aplicando el Paso 1 a la función $f - g_1 - \cdots - g_n$, con $r = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, obtenemos una función g_{n+1} con valores reales, definida sobre todo X, tal que

$$\begin{aligned} |g_{n+1}(x)| &\leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{para } x \in X, \\ |f(a) - g_1(a) - \cdots - g_{n+1}(a)| &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \qquad \text{para } a \in A. \end{aligned}$$

Por inducción, las funciones g_n están definidas para todo n.

Ahora definimos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

para todo x en X. Por supuesto, tenemos que saber que esta serie infinita converge. Pero eso se deduce del teorema de comparación del cálculo; converge por comparación con la serie geométrica

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Para probar que g es continua, debemos probar que la sucesión s_n converge a g uniformemente. Este hecho se sigue del "test-M de Weierstrass" de análisis. Sin suponer este resultado, se puede observar simplemente que si $k > n$, entonces

$$\begin{aligned} |s_k(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{i=n+1}^{k} g_i(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{3} \sum_{i=n+1}^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\ &\leq \frac{1}{3} \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n}. \end{aligned}$$

Manteniendo n fijo y haciendo $k \to \infty$, vemos que

$$|g(x) - s_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

para todo $x \in X$. Por tanto, s_n converge a g uniformemente.

Probaremos que $g(a) = f(a)$ para $a \in A$. Sea $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$, la n-ésima suma parcial de la serie. Entonces $g(x)$ es, por definición, el límite de la sucesión infinita $s_n(x)$ de sumas parciales. Puesto que

$$|f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a)| = |f(a) - s_n(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

para todo a en A, se sigue que $s_n(a) \to f(a)$ para todo $a \in A$. Por tanto, tenemos $f(a) = g(a)$, para $a \in A$.

Finalmente, vamos a probar que g aplica X en el intervalo $[-1, 1]$. Esta condición se satisface, de hecho, automáticamente, puesto que la serie $(1/3) \sum (2/3)^n$ converge a 1. Sin embargo, ésta es sólo una casualidad, más que una parte esencial de la prueba. Si todo lo que supiéramos fuera que g aplica X en $\mathbb{R}$, entonces la aplicación $r \circ g$, donde $r : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ es la aplicación

$$\begin{aligned} r(y) &= y && \text{si } |y| \leq 1, \\ r(y) &= y/|y| && \text{si } |y| \geq 1, \end{aligned}$$

sería una extensión de f que aplicaría X en $[-1, 1]$.

Paso 3. A continuación probaremos la parte (b) del teorema, en la que f aplica A en $\mathbb{R}$. Podemos sustituir $\mathbb{R}$ por el intervalo abierto $(-1, 1)$, ya que este intervalo es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Para ello, sea f una aplicación continua de A en $(-1, 1)$. La mitad del teorema de Tietze ya probado muestra que podemos extender f a una aplicación continua

$g : X \to [-1, 1]$ que lleva X al intervalo *cerrado*. ¿Cómo podemos encontrar una aplicación h que lleve X al intervalo *abierto*?

Dada g, definamos un subconjunto D de X por la ecuación

$$D = g^{-1}(\{-1\}) \cup g^{-1}(\{1\}).$$

Puesto que g es continua, D es un subconjunto cerrado de X. Como $g(A) = f(A)$, que está contenido en $(-1, 1)$, el conjunto A es disjunto de D. Por el lema de Urysohn, existe una función continua $\phi : X \to [0, 1]$ tal que $\phi(D) = \{0\}$ y $\phi(A) = \{1\}$. Definamos

$$h(x) = \phi(x)g(x).$$

Entonces h es continua, por ser el producto de dos funciones continuas. Además, h es una extensión de f, ya que, para a en A,

$$h(a) = \phi(a)g(a) = 1\Delta g(a) = f(a).$$

Finalmente, h aplica todo X en el intervalo abierto $(-1, 1)$. Esto es así porque si $x \in D$, entonces $h(x) = 0\Delta g(x) = 0$, y si $x \notin D$, entonces $|g(x)| < 1$. Se sigue que $|h(x)| \leq 1\Delta|g(x)| < 1$. ■

Ejercicios

1. Pruebe que el teorema de extensión de Tietze implica el lema de Urysohn.
2. En la prueba del teorema de Tietze, ¿es esencial la ingeniosa decisión en el Paso 1 de dividir el intervalo $[-r, r]$ en tres partes iguales? Suponga que se divide este intervalo en los tres intervalos

$$I_1 = [-r, -ar], \qquad I_2 = [-ar, ar], \qquad I_3 = [ar, r],$$

   para algún a con $0 < a < 1$. ¿Para qué valores de a distintos de $a = 1/3$ (si los hay) funciona la prueba?
3. Sea X metrizable. Pruebe que son equivalentes:
   (i) X está acotado bajo toda distancia que da la topología de X.
   (ii) Toda función continua $\phi : X \to \mathbb{R}$ está acotada.
   (iii) X es compacto por punto límite.

   [*Indicación:* si $\phi : X \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $F(x) = x \times \phi(x)$ es un embebimiento de X en $X \times \mathbb{R}$. Si A es un subconjunto infinito de X sin puntos límites, sea ϕ una aplicación sobreyectiva de A en $\mathbb{Z}_+$.]

4. Sea Z un espacio topológico. Si Y es un subespacio de Z, diremos que Y es un ***retracto*** de Z si existe una aplicación continua $r : Z \to Y$ tal que $r(y) = y$ para cada $y \in Y$.

(a) Pruebe que si Z es de Hausdorff e Y es un retracto de Z, entonces Y es cerrado en Z.

(b) Sea A un conjunto de $\mathbb{R}^2$ con dos puntos. Pruebe que A no es un retracto de $\mathbb{R}^2$.

(c) Sea S^1 el círculo unidad en $\mathbb{R}^2$. Pruebe que S^1 es un retracto de $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$, donde $\mathbf{0}$ es el origen. ¿Podría decir si S^1 también es, o no, un retracto de $\mathbb{R}^2$?

5. Un espacio Y se dice que tiene la ***propiedad universal de extensión*** si para cada terna formada por un espacio normal X, un subconjunto cerrado A de X y una función continua $f : A \to Y$, existe una extensión de f a una aplicación continua de X en Y.

(a) Pruebe que $\mathbb{R}^J$ tiene la propiedad universal de extensión.

(b) Pruebe que si Y es homeomorfo a un retracto de $\mathbb{R}^J$, entonces Y tiene la propiedad universal de extensión.

6. Sea Y un espacio normal. Entonces se dice que Y es un ***retracto absoluto*** si para cada par de espacios (Y_0, Z) tal que Z es normal e Y_0 es un subespacio cerrado de Z homeomorfo a Y, el espacio Y_0 es un retracto de Z.

(a) Pruebe que si Y tiene la propiedad universal de extensión, entonces Y es un retracto absoluto.

(b) Pruebe que si Y es un retracto absoluto e Y es compacto, entonces Y tiene la propiedad universal de extensión. [*Indicación:* utilizando el teorema de Tychonoff se obtiene que $[0,1]^J$ es normal. Construya un embebimiento de Y en $[0,1]^J$.]

7. (a) Pruebe que la espiral logarítmica

$$C = \{0 \times 0\} \cup \{e^t \cos t \times e^t \operatorname{sen} t \mid t \in \mathbb{R}\}$$

es un retracto de $\mathbb{R}^2$. ¿Puede definir una retracción específica $r : \mathbb{R}^2 \to C$?

(b) Pruebe que el "eje x anudado" K de la Figura 35.2 es un retracto de $\mathbb{R}^3$.

***8.** Pruebe el siguiente teorema:

Teorema. Sea Y un espacio normal. Entonces Y es un retracto absoluto si, y sólo si, Y tiene la propiedad universal de extensión.

[*Indicación:* si X e Y son espacios normales disjuntos, A es cerrado en X y $f : A \to Y$ es una aplicación continua, definimos el ***espacio adjunto*** Z_f como el espacio cociente obtenido de $X \cup Y$ al identificar cada punto a de A con el punto $f(a)$ y con todos los puntos de $f^{-1}(\{f(a)\})$. Utilizando el teorema de

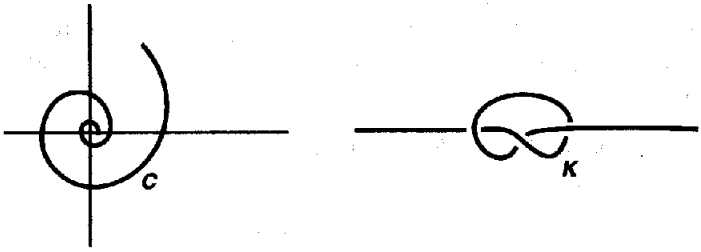


Figura 35.2

Tietze, pruebe que Z_f es normal. Si $p : X \cup Y \to Z_f$ es la aplicación cociente, pruebe que $p|Y$ es un homeomorfismo de Y con un subespacio cerrado de Z_f.]

9. Sea $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ una sucesión de espacios, donde X_i es un subespacio cerrado de X_{i+1} para cada i. Sea X la unión de los X_i y dotemos a X de una topología afirmando que un conjunto U es abierto en X si $U \cap X_i$ es abierto en X para cada i.

(a) Pruebe que ésta es una topología sobre X y que cada espacio X_i es un subespacio (de hecho, un subespacio cerrado) de X en esta topología. Dicha topología se llama topología ***coherente*** con los espacios X_i.

(b) Pruebe que $f : X \to Y$ es continua si $f|X_i$ es continua para cada i.

(c) Pruebe que si cada espacio X_i es normal, entonces X es normal. [*Indicación:* dados conjuntos cerrados disjuntos A y B en X, defina f igual a 0 sobre A y 1 sobre B, y extienda f sucesivamente a $A \cup B \cup X_i$ para $i = 1, 2, \ldots$.]

*§36 Embebimientos de variedades†

Hemos probado que todo espacio regular con una base numerable se puede embeber en el espacio euclídeo "infinito-dimensional" $\mathbb{R}^\omega$. Es natural preguntarse bajo qué condiciones un espacio X se puede embeber en algún espacio euclídeo finito-dimensional $\mathbb{R}^N$. Una respuesta a esta cuestión se da en esta sección; una más general se obtendrá en el Capítulo 8, cuando estudiemos la teoría de la dimensión.

Definición. Una ***m-variedad*** es un espacio de Hausdorff X con una base numerable tal que cada punto x de X tiene un entorno que es homeomorfo con un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$.

†Esta sección se utilizará cuando estudiemos la paracompacidad en §41 y cuando estudiemos la teoría de la dimensión en §50.

Una 1-variedad se denomina ***curva*** y una 2-variedad se denomina ***superficie***. Las variedades forman una clase muy importante de espacios; se estudian mucho en geometría diferencial y topología algebraica.

Probaremos que si X es una variedad compacta, entonces X se puede embeber en un espacio euclídeo finito-dimensional. El teorema se cumple sin la suposición de la compacidad, pero la prueba se hace bastante más complicada.

Para empezar, necesitamos algunas definiciones.

Si $\phi : X \to \mathbb{R}$, entonces el ***soporte*** de ϕ se define como la clausura del conjunto $\phi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$. Así, si x está fuera del soporte de ϕ, existe algún entorno de x sobre el que ϕ es nula.

Definición. Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ un recubrimiento abierto finito e indexado del espacio X. Una familia indexada de funciones continuas

$$\phi_i : X \to [0,1] \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n$$

se dice que es una ***partición de la unidad*** dominada por $\{U_i\}$ si:

(1) $(\text{soporte } \phi_i) \subset U_i$ para cada i.

(2) $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$ para cada x.

Teorema 36.1 (Existencia de particiones finitas de la unidad). *Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ un recubrimiento abierto finito del espacio normal X. Entonces existe una partición de la unidad dominada por $\{U_i\}$.*

Demostración. Paso 1. En primer lugar, vamos a probar que se puede "reducir" el recubrimiento $\{U_i\}$ a un recubrimiento abierto $\{V_1, \ldots, V_n\}$ de X tal que $\bar{V}_i \subset U_i$ para cada i.

Procederemos por inducción. Antes de empezar, observe que el conjunto

$$A = X - (U_2 \cup \cdots \cup U_n)$$

es un subconjunto cerrado de X. Puesto que $\{U_1, \ldots, U_n\}$ recubre a X, el conjunto A está contenido en el conjunto abierto U_1. Usando la normalidad, elegimos un conjunto abierto V_1 que contenga a A y tal que $\bar{V}_1 \subset U_1$. Entonces la colección $\{V_1, U_2, \ldots, U_n\}$ recubre a X.

En general, dados conjuntos abiertos $V_1, \ldots, V_{k-1}$ tales que la colección

$$\{V_1, \ldots, V_{k-1}, U_k, U_{k+1}, \ldots, U_n\}$$

recubre a X, pongamos

$$A = X - (V_1 \cup \cdots \cup V_{k-1}) - (U_{k+1} \cup \cdots \cup U_n).$$

Entonces A es un subconjunto cerrado de X que está contenido en el conjunto abierto U_k. Elegimos V_k como un conjunto abierto que contiene a A tal que $\bar{V}_k \subset U_k$. Entonces $\{V_1, \ldots, V_{k-1}, V_k, U_{k+1}, \ldots, U_n\}$ recubre a X. En el paso n-ésimo de la inducción, se prueba nuestro resultado.

Paso 2. Ahora probaremos el teorema. Dado un cubrimiento abierto $\{U_1, \ldots, U_n\}$ de X, elijamos un recubrimiento abierto $\{V_1, \ldots, V_n\}$ de X tal que $\bar{V}_i \subset U_i$ para cada i. Después elijamos un recubrimiento abierto $\{W_1, \ldots, W_n\}$ de X tal que $\overline{W}_i \subset V_i$ para cada i. Utilizando el lema de Urysohn, elijamos para cada i una función continua

$$\psi_i : X \to [0, 1]$$

tal que $\psi_i(\overline{W}_i) = \{1\}$ y $\psi(X - V_i) = \{0\}$. Puesto que $\psi_i^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ está contenido en V_i, tenemos

$$(\text{soporte}\, \psi_i) \subset \bar{V}_i \subset U_i.$$

Como la colección $\{W_i\}$ recubre a X, la suma $\Psi(x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x)$ es positiva para cada x. Por tanto, podemos definir, para cada j,

$$\phi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\Psi(x)}.$$

Es fácil comprobar que las funciones $\phi_1, \ldots, \phi_n$ forman la deseada partición de la unidad. ■

Hay una noción comparable de *partición de la unidad* cuando el recubrimiento abierto y la colección de funciones no es finita, ni siquiera numerable. Consideraremos este tema en el Capítulo 6, cuando estudiemos la paracompacidad.

Teorema 36.2. *Si X es una m-variedad compacta, entonces X se puede embeber en $\mathbb{R}^N$ para algún entero positivo N.*

Demostración. Recubramos X por un número finito de conjuntos abiertos $\{U_1, \ldots, U_n\}$, cada uno de los cuales puede embeberse en $\mathbb{R}^m$. Elijamos embebimientos $g_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ para cada i. Como X es de Hausdorff y compacto, también es normal. Sea $\phi_1, \ldots, \phi_n$ una partición de la unidad dominada por $\{U_i\}$ y sea $A_i =$ soporte ϕ_i; para cada $i = 1, \ldots, n$, definamos una función $h_i : X \to \mathbb{R}^m$ por la regla

$$h_i(x) = \begin{cases} \phi_i(x) \Delta g_i(x) & \text{para } x \in U_i \\ \mathbf{0} = (0, \ldots, 0) & \text{para } x \in X - A_i. \end{cases}$$

[Aquí $\phi_i(x)$ es un número real c y $g_i(x)$ es un punto $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ de $\mathbb{R}^m$; el producto $c\Delta\mathbf{y}$ denota, naturalmente, el punto $(cy_1, \ldots, cy_m)$ de $\mathbb{R}^m$.] La función h_i está bien definida porque las dos definiciones de h_i coinciden en la intersección de

sus dominios, y h_i es continua porque sus restricciones a los conjuntos abiertos U_i y $X - A_i$ son continuas.

Ahora definamos

$$F : X \to (\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}} \times \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{n \text{ veces}})$$

mediante la regla

$$F(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x), h_1(x), \ldots, h_n(x)).$$

Claramente, F es continua. Para probar que F es un embebimiento, sólo necesitamos mostrar que F es inyectiva (porque X es compacto). Supongamos que $F(x) = F(y)$. Entonces $\phi_i(x) = \phi_i(y)$ y $h_i(x) = h_i(y)$ para todo i. Tenemos que $\phi_i(x) > 0$ para algún i (puesto que $\sum \phi_i(x) = 1$). Por tanto, $\phi_i(y) > 0$ también, por lo que $x, y \in U_i$. Entonces

$$\phi_i(x)\Delta g_i(x) = h_i(x) = h_i(y) = \phi_i(y)\Delta g_i(y).$$

Como $\phi_i(x) = \phi_i(y) > 0$, concluimos que $g_i(x) = g_i(y)$. Pero $g_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ es inyectiva, por lo que $x = y$, como deseábamos. ■

En muchas aplicaciones de las particiones de la unidad, como la que acabamos de presentar, todo lo que necesitamos saber es que la suma $\sum \phi_i(x)$ es positiva para cada x. En otras, sin embargo, se necesita la condición más fuerte de que $\sum \phi_i(x) = 1$. Véase §50.

Ejercicios

1. Pruebe que toda variedad es regular y, por tanto, metrizable. ¿Dónde se usa la condición de Hausdorff?

2. Sea X un espacio compacto de Hausdorff. Supongamos que para cada $x \in X$, existe un entorno U de x y un entero positivo k tal que U se puede embeber en $\mathbb{R}^k$. Pruebe que X se puede embeber en $\mathbb{R}^N$ para algún entero positivo N.

3. Sea X un espacio de Hausdorff tal que cada punto de X tiene un entorno que es homeomorfo con un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$. Pruebe que si X es compacto, entonces X es una m-variedad.

4. Una familia indexada $\{A_\alpha\}$ de subconjuntos de X se dice que es ***indexada finita para puntos*** si cada $x \in X$ pertenece a A_α sólo para un número finito de valores de α.
   Lema (El lema de la reducción). Sea X un espacio normal y $\{U_1, U_2, \ldots\}$

un recubrimiento abierto indexado finito para puntos de X. Entonces existe un recubrimiento abierto indexado $\{V_1, V_2, \dots\}$ de X tal que $\bar{V}_n \subset U_n$ para cada n.

5. La condición de Hausdorff es una parte esencial de la definición de una variedad; no se deduce del resto de la definición. Considere el siguiente espacio: sea X la unión del conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$ y el conjunto de dos puntos $\{p, q\}$. Dotemos a X de una topología tomando como base la colección de todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ que no contienen a 0, junto con todos los conjuntos de la forma $(-a, 0) \cup \{p\} \cup (0, a)$ y todos los del tipo $(-a, 0) \cup \{q\} \cup (0, a)$, para $a > 0$. El espacio X se denomina ***recta con dos orígenes***.
   (a) Compruebe que ésta es una base para una topología.
   (b) Demuestre que cada uno de los espacios $X - \{p\}$ y $X - \{q\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.
   (c) Pruebe que X satisface el axioma T_1, pero no es de Hausdorff.
   (d) Pruebe que X satisface todas las condiciones para una 1-variedad excepto la condición de ser de Hausdorff.

*Ejercicios complementarios: revisión de lo básico

Consideremos las siguientes propiedades que puede satisfacer un espacio:

(1) conexo,
(2) conexo por caminos,
(3) localmente conexo,
(4) localmente conexo por caminos,
(5) compacto,
(6) compacto por punto límite,
(7) Hausdorff localmente compacto,
(8) Hausdorff,
(9) regular,
(10) completamente regular,
(11) normal,
(12) 1AN,
(13) 2AN,
(14) Lindelöf,
(15) tener un subconjunto denso numerable,

(16) localmente metrizable,

(17) metrizable.

1. Para cada uno de los siguientes espacios, determine (si puede) cuáles de estas propiedades satisface (utilice el teorema de Tychonoff si lo necesita).
   (a) S_Ω.
   (b) $\bar{S}_\Omega$.
   (c) $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$.
   (d) El cuadrado ordenado.
   (e) $\mathbb{R}_\ell$.
   (f) $\mathbb{R}_\ell^2$.
   (g) $\mathbb{R}^\omega$ en la topología producto.
   (h) $\mathbb{R}^\omega$ en la topología uniforme.
   (i) $\mathbb{R}^\omega$ en la topología por cajas.
   (j) $\mathbb{R}^I$ en la topología producto, donde $I = [0, 1]$.
   (k) $\mathbb{R}_K$.
2. ¿Cuáles de esas propiedades debe tener necesariamente un espacio métrico?
3. ¿Cuáles de esas propiedades debe tener necesariamente un espacio de Hausdorff compacto?
4. ¿Cuáles de esas propiedades se conservan al pasar a subespacios? ¿Y al pasar a un subespacio cerrado? ¿Y a un subespacio abierto?
5. ¿Cuáles de esas propiedades se conservan en productos finitos? ¿Y en productos numerables? ¿Y en productos arbitrarios?
6. ¿Cuáles de esas propiedades se conservan por aplicaciones continuas?
7. Después de estudiar los Capítulos 6 y 7, repita los Ejercicios 1–6 para las siguientes propiedades:
   (18) paracompacidad,
   (19) topológicamente completo.

Ya debería ser capaz de responder todas las preguntas (340) de los Ejercicios 1–6, excepto una, y todas (40) las del Ejercicio 7, excepto una. Estas dos están sin resolver; véase la nota en el Ejercicio 5 de §32.

Capítulo 5

El teorema de Tychonoff

Regresamos a un problema que dejamos abierto en el Capítulo 3. Demostraremos el teorema de Tychonoff, el cual afirma que los productos arbitrarios de espacios compactos son compactos. La prueba hace uso del Lema de Zorn (véase §11). Una demostración alternativa basada en el teorema de la buena ordenación se puede encontrar en los ejercicios.

El teorema de Tychonoff es de gran utilidad para los analistas (bastante menos para los geómetras). Lo aplicamos en §38 para construir la compactificación de Stone-Čech de un espacio completamente regular y en §47 para probar la versión general del teorema de Ascoli.

§37 El teorema de Tychonoff

Como el lema de Urysohn, el teorema de Tychonoff es lo que denominamos un teorema "profundo". Su demostración involucra no sólo una, sino varias ideas originales; ésta podría ser cualquier cosa excepto algo directo y evidente. Discutiremos las ideas cruciales de la prueba con cierto detalle antes de desarrollar la prueba en sí misma.

En el Capítulo 3 probamos que el producto $X \times Y$ de dos espacios compactos es compacto. Para esa prueba la formulación de la compacidad en términos de cubrimientos era completamente satisfactoria. Dado un cubrimiento por abiertos de $X \times Y$ por elementos básicos, cubríamos cada rebanada $x \times Y$ por un número finito de ellos. A continuación, obteníamos un cubrimiento finito de $X \times Y$.

Resulta complicado trasladar este argumento para un producto arbitrario de espacios compactos; se puede establecer un buen orden en el conjunto de índices y utilizar la inducción transfinita (véase el Ejercicio 5). Una demostración alternativa

que no utilice los cubrimientos por abiertos consiste en considerar la formulación de la compacidad en términos de conjuntos cerrados y utilizar el lema de Zorn.

Para ver cómo esta idea puede funcionar, consideremos primero el caso más sencillo posible: el producto de dos espacios compactos $X_1 \times X_2$. Supongamos que $\mathcal{A}$ es una colección de subconjuntos cerrados de $X_1 \times X_2$ con la propiedad de la intersección finita. Consideremos la aplicación proyección $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$. La colección

$$\{\pi_1(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

de subconjuntos de X_1 también tiene la propiedad de la intersección finita, y también así la colección de sus clausuras $\overline{\pi_1(A)}$. La compacidad de X_1 nos garantiza que la intersección de todos los conjuntos $\overline{\pi_1(A)}$ es no vacía. Elijamos un punto x_1 perteneciente a esta intersección. Análogamente, podemos elegir un punto x_2 perteneciente a todos los conjuntos $\overline{\pi_2(A)}$. La conclusión obvia a la que podríamos llegar es que el punto $x_1 \times x_2$ está en $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$, y por tanto nuestro teorema estaría probado.

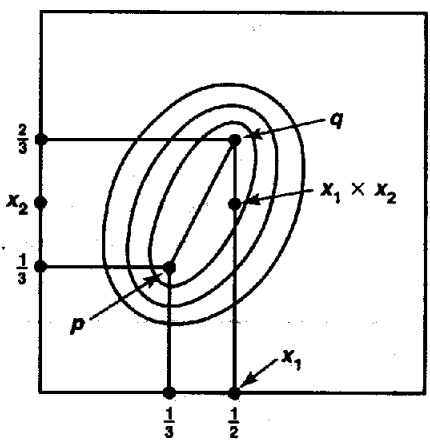


Figura 37.1

Desafortunadamente, esto no es cierto. Consideremos el siguiente ejemplo, en el cual $X_1 = X_2 = [0, 1]$, y la colección $\mathcal{A}$ está formada por todas las regiones elípticas cerradas acotadas por elipses que tienen como focos los puntos $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y $q = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ (véase la Figura 37.1). Ciertamente, la colección $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Elijamos ahora un punto x_1 en la intersección de los conjuntos $\{\overline{\pi_1(A)} \mid A \in \mathcal{A}\}$. Cualquier punto del intervalo $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ nos sirve; supongamos que elegimos el punto $x_1 = \frac{1}{2}$. Análogamente, elijamos un punto x_2 en la intersección de los conjuntos $\{\overline{\pi_2(A)} \mid A \in \mathcal{A}\}$. Cualquier punto del intervalo $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ nos vale; supongamos que tomamos $x_2 = \frac{1}{2}$. Esta elección no es la acertada, ya que el punto

$$x_1 \times x_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

no está en la intersección de todos los conjuntos A.

Pensará usted: "el problema es que hemos hecho una mala elección. Si después de haber escogido $x_1 = \frac{1}{2}$ elegimos $x_2 = \frac{2}{3}$, *entonces* habremos encontrado un punto en $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$". La dificultad de la demostración anterior es que nos deja demasiada libertad a la hora de escoger x_1 y x_2 y nos permite hacer una "mala" elección en lugar de una "buena" elección.

¿Cómo podemos modificar la prueba para evitar esta dificultad?

Esta cuestión nos lleva a la segunda idea de la prueba: quizá, si *ampliamos* la colección $\mathcal{A}$ (conservando la propiedad de la intersección finita, por supuesto), esta ampliación implicará una restricción en las posibles elecciones de x_1 y x_2 que será suficiente para asegurar la elección correcta. Para ilustrar esta situación, supongamos que en el ejemplo previo ampliamos la colección $\mathcal{A}$ a la colección $\mathcal{D}$ que consiste en todas las regiones elípticas cerradas acotadas por elipses que tienen como focos a $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y a cualquier otro punto del segmento pq. Esta colección está ilustrada en la Figura 37.2. La nueva colección $\mathcal{D}$ también tiene la propiedad de la intersección finita. Pero si intentamos elegir un punto x_1 en

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_1(D)}$$

la única elección posible para x_1 es $\frac{1}{3}$. Análogamente, la única elección posible para x_2 es $\frac{1}{3}$. Y $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ pertenece a cada conjunto de la colección $\mathcal{D}$ y, por tanto, a cada conjunto de $\mathcal{A}$. En otras palabras, el ampliar la colección $\mathcal{A}$ a la colección $\mathcal{D}$ nos obliga a efectuar la elección correcta.

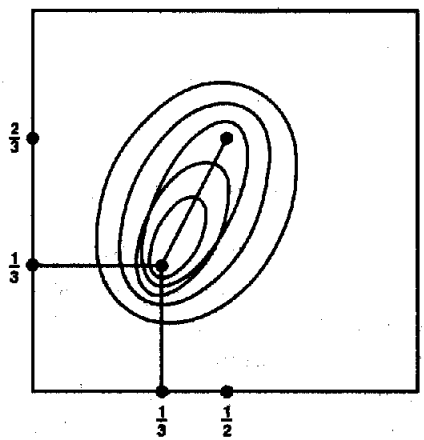


Figura 37.2

Por supuesto, en este ejemplo hemos escogido $\mathcal{D}$ cuidadosamente para que la demostración funcionara. ¿Qué esperanzas tenemos de escoger correctamente la colección $\mathcal{D}$ en general? Aquí está la tercera idea para la prueba: ¿por qué no elegimos

$\mathcal{D}$ como la colección "más grande posible", de modo que no exista una colección mayor con la propiedad de la intersección finita, y luego comprobamos si esta colección funciona? No parece obvio que tal colección $\mathcal{D}$ deba existir; para probarlo, debemos apelar al lema de Zorn. Pero, una vez que hayamos probado que $\mathcal{D}$ existe, seremos capaces de demostrar que $\mathcal{D}$ es lo suficientemente grande como para forzar una elección correcta.

Una observación final. La suposición de que los elementos de la colección $\mathcal{A}$ eran conjuntos cerrados era irrelevante en esta discusión. El motivo es que, incluso siendo cerrado el conjunto $A \in \mathcal{A}$, el conjunto imagen $\pi_1(A)$ no tiene por qué serlo, así que debemos tomar su clausura para poder aplicar la formulación de compacidad en términos de conjuntos cerrados. De esta forma, podemos también comenzar con una colección arbitraria de subconjuntos de X verificando la propiedad de la intersección finita, y probar que la intersección de sus *clausuras* es no vacía. Este enfoque resulta ser mucho más conveniente.

Lema 37.1. *Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X verificando la propiedad de la intersección finita. Entonces existe una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X con la propiedad de la intersección finita tal que $\mathcal{D}$ contiene a $\mathcal{A}$. Además, ninguna colección de subconjuntos de X verificando dicha propiedad contiene a $\mathcal{D}$ propiamente.*

Con frecuencia, diremos que una colección $\mathcal{D}$ que satisface la conclusión de este teorema es *maximal* con respecto a la propiedad de la intersección finita.

Demostración. Vamos a construir $\mathcal{D}$ utilizando el lema de Zorn. Este resultado establece que dado un conjunto A que esté estrictamente parcialmente ordenado y en el cual cada subconjunto simplemente ordenado tenga una cota superior, entonces A posee un elemento maximal.

El conjunto A al cual le vamos a aplicar el lema de Zorn no es un subconjunto de X, ni siquiera una colección de subconjuntos de X, sino un conjunto cuyos *elementos* son colecciones de subconjuntos de X. Para los propósitos de esta prueba, llamaremos a un conjunto cuyos elementos son colecciones de subconjuntos de X un "superconjunto" y lo denotaremos con una letra contorneada. En definitiva, utilizaremos la siguiente notación:

c es un elemento de X.

C es un subconjunto de X.

$\mathcal{C}$ es una colección de subconjuntos de X.

$\mathbb{C}$ es un superconjunto cuyos elementos son colecciones de subconjuntos de X.

Ahora, por hipótesis, tenemos una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X que tiene la propiedad de la intersección finita. Denotemos por $\mathbb{A}$ el superconjunto formado por *todas* las colecciones $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tales que $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tiene la

propiedad de la intersección finita. Consideraremos como orden parcial estricto en $\mathbb{A}$ la inclusión propia $\subsetneq$. Para probar nuestro lema, necesitamos demostrar que $\mathbb{A}$ tiene un elemento maximal $\mathcal{D}$.

Para aplicar el lema de Zorn, debemos demostrar que si $\mathbb{B}$ es un "subsuperconjunto" de $\mathbb{A}$ que está simplemente ordenado por la inclusión propia, entonces $\mathbb{B}$ tiene una cota superior en $\mathbb{A}$. De hecho, demostraremos que la colección

$$\mathcal{C} = \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} \mathcal{B}$$

que es la unión de las colecciones pertenecientes a $\mathbb{B}$, es un elemento de $\mathbb{A}$; entonces esta unión es la cota superior requerida en $\mathbb{B}$.

Para demostrar que $\mathcal{C}$ es un elemento de $\mathbb{A}$, debemos probar que $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$ y que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Ciertamente $\mathcal{C}$ contiene a $\mathcal{A}$, ya que cada elemento de $\mathbb{B}$ contiene a $\mathcal{A}$. Para demostrar que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de la intersección finita, sean $C_1, \ldots, C_n$ elementos de $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es la unión de los elementos de $\mathbb{B}$, existe, para cada i, un elemento $\mathcal{B}_i$ de $\mathbb{B}$ tal que $C_i \in \mathcal{B}_i$. El superconjunto $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n\}$ está contenido en $\mathbb{B}$, así que está simplemente ordenado por la relación de la inclusión propia. Siendo finito, tiene un elemento máximo; esto es, existe un índice k tal que $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}_k$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces todos los conjuntos $C_1, \ldots, C_n$ son elementos de $\mathcal{B}_k$. Como $\mathcal{B}_k$ tiene la propiedad de la intersección finita, la intersección de los conjuntos $C_1, \ldots, C_n$ es no vacía, tal y como se quería demostrar. ■

Lema 37.2. *Sea X un conjunto y $\mathcal{D}$ una colección de subconjuntos de X que es maximal con respecto a la propiedad de la intersección finita. Entonces:*

(a) Cualquier intersección finita de elementos de $\mathcal{D}$ es un elemento de $\mathcal{D}$.

(b) Si A es un subconjunto de X que interseca a cada elemento de $\mathcal{D}$, entonces A es un elemento de $\mathcal{D}$

Demostración. (a) Sea B la intersección de un número finito de elementos de $\mathcal{D}$. Definamos una colección $\mathcal{E}$ uniendo B a $\mathcal{D}$, de modo que $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{B\}$. Vamos a demostrar que $\mathcal{E}$ tiene la propiedad de la intersección finita; entonces, la maximalidad de $\mathcal{D}$ implica que $\mathcal{D} = \mathcal{E}$, luego $B \in \mathcal{D}$, tal y como se quería demostrar.

Escojamos un número finito de elementos de $\mathcal{E}$. Si ninguno de ellos es el conjunto B, entonces su intersección es no vacía ya que $\mathcal{D}$ verifica dicha propiedad. Si alguno de ellos es el conjunto B, entonces su intersección es de la forma

$$D_1 \cap \cdots \cap D_m \cap B.$$

Como B es una intersección de un número finito de elementos de $\mathcal{D}$, este conjunto es no vacío.

(b) Dado A, definamos $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{A\}$. Veamos que $\mathcal{E}$ verifica la propiedad de la intersección finita y concluiremos así que A pertenece a $\mathcal{D}$. Escojamos un número finito de elementos de $\mathcal{E}$. Si ninguno de ellos es el conjunto A, su intersección es automáticamente no vacía. De otra manera, esta intersección es de la forma

$$D_1 \cap \cdots \cap D_n \cap A.$$

Ahora, $D_1 \cap \cdots \cap D_n$ pertenece a $\mathcal{D}$, por (a); de esta forma, esta intersección es no vacía, por hipótesis. ■

Teorema 37.3 (Teorema de Tychonoff). *El producto arbitrario de espacios compactos es compacto en la topología producto.*

Demostración. Sea

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha,$$

donde cada espacio X_α es compacto. Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X con la propiedad de la intersección finita. Vamos a probar que la intersección

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$$

es no vacía. Se sigue entonces la compacidad de X.

Aplicando el Lema 37.1, elegimos una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X tales que $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ es maximal con respecto a la propiedad de la intersección finita. Será suficiente demostrar que la intersección $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \bar{D}$ es no vacía.

Dado $\alpha \in J$, sea $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ la aplicación proyección. Consideremos la colección

$$\{\pi_\alpha(D) \mid D \in \mathcal{D}\}$$

de subconjuntos de X_α. Esta colección tiene la propiedad de la intersección finita ya que $\mathcal{D}$ la tiene. Por compacidad de X_α, podemos elegir para cada α un punto x_α de X_α tal que

$$x_\alpha \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_\alpha(D)}.$$

Sea $\mathbf{x}$ el punto $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ de X. Veamos que $\mathbf{x} \in \bar{D}$ para cada $D \in \mathcal{D}$; entonces nuestra prueba habrá acabado.

Primero, veamos que si $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ es un elemento cualquiera de la subbase (para la topología producto en X) conteniendo a $\mathbf{x}$, entonces $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ interseca a cada elemento de $\mathcal{D}$. El conjunto U_β es un entorno de x_β en X_β. Como $x_\beta \in \overline{\pi_\beta(D)}$ por definición, U_β interseca $\pi_\beta(D)$ en algún punto $\pi_\beta(\mathbf{y})$, donde $\mathbf{y} \in D$. Se sigue entonces que $\mathbf{y} \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap D$.

Se deduce de la parte (b) del Lema 37.2 que cada elemento de la subbase que contiene a **x** *pertenece* a $\mathcal{D}$. Y se tiene entonces de la parte (a) del mismo lema que cada elemento *básico* que contiene a **x** pertenece a $\mathcal{D}$. Como $\mathcal{D}$ tiene la propiedad de la intersección finita, esto significa que cada elemento básico que contiene a **x** interseca a cada elemento de $\mathcal{D}$; por tanto, $\mathbf{x} \in \bar{D}$ para cada $D \in \mathcal{D}$ tal y como se quería probar. ■

Ejercicios

1. Sea X un espacio y sea $\mathcal{D}$ una colección de subconjuntos de X que es maximal con respecto a la propiedad de la intersección finita.

(a) Demuestre que $x \in \bar{D}$ para cada $D \in \mathcal{D}$ si, y sólo si, cada entorno de x pertenece a $\mathcal{D}$. ¿En qué implicación se utiliza la maximalidad de $\mathcal{D}$?

(b) Sea $D \in \mathcal{D}$. Demuestre que si $A \supset D$, entonces $A \in \mathcal{D}$.

(c) Demuestre que si X satisface el axioma T_1, existe al menos un punto perteneciente a $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \bar{D}$.

2. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X se dice que tiene la ***propiedad de la intersección numerable*** si cada intersección numerable de elementos de $\mathcal{A}$ es no vacía. Demuestre que X es un espacio de Lindelöf si, y sólo si, para cada colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X verificando la propiedad de la intersección numerable, se tiene que

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$$

es no vacía.

3. Considere las tres afirmaciones siguientes:

(i) Si X es un conjunto y $\mathcal{A}$ es una colección de subconjuntos de X con la propiedad de la intersección numerable, entonces existe una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X tales que $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ es maximal con respecto a la propiedad de la intersección numerable.

(ii) Supongamos que $\mathcal{D}$ es maximal con respecto a la propiedad de la intersección numerable. Entonces las intersecciones numerables de elementos de $\mathcal{D}$ están en $\mathcal{D}$. Además, si A es un subconjunto de X que interseca a cada elemento de $\mathcal{D}$, entonces A es un elemento de $\mathcal{D}$.

(iii) Los productos de espacios de Lindelöf son de Lindelöf.

(a) Demuestre que (i) y (ii) implican (iii).

(b) Demuestre que (ii) es cierto.

(c) Los productos de espacios de Lindelöf no son, necesariamente, de Lindelöf (véase §30). Así, la propiedad (i) no es cierta. Si se intenta generalizar la prueba del Lema 37.1 con la propiedad de la intersección numerable, ¿en qué lugar de la demostración se encuentra el fallo?

4. He aquí otro teorema cuya demostración utiliza el lema de Zorn. Recuérdese que si A es un espacio y si $x, y \in A$, decimos que x e y pertenecen a la misma *cuasicomponente* de A si no existe una separación $A = C \cup D$ de A en dos conjuntos disjuntos abiertos en A tales que $x \in C$ e $y \in D$.
Teorema. Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Entonces x e y pertenecen a la misma cuasicomponente de X si, y sólo si, pertenecen a la misma componente conexa de X.

(a) Sea $\mathcal{A}$ la colección de todos los subespacios cerrados A de X tales que x e y están en la misma cuasicomponente de A. Sea $\mathcal{B}$ una subcolección de $\mathcal{A}$ con el orden simple de la inclusión. Demuestre que la intersección de los elementos de $\mathcal{B}$ pertenece a $\mathcal{A}$. [*Indicación:* compare con el Ejercicio 11 de §26.]

(b) Demuestre que $\mathcal{A}$ tiene un elemento minimal D.

(c) Demuestre que D es conexo.

***5.** He aquí una prueba del teorema de Tychonoff que se apoya en el teorema de buena ordenación, en lugar del lema de Zorn. En primer lugar, pruebe la siguiente versión del lema del tubo y a continuación, pruebe el teorema.
Lema. Sea $\mathcal{A}$ una colección de elementos básicos para la topología del espacio producto $X \times Y$, tales que ninguna subcolección finita cubre $X \times Y$. Si X es compacto, entonces existe un punto $x \in X$ tal que ninguna subcolección finita de $\mathcal{A}$ cubre la rebanada $\{x\} \times Y$.
Teorema. Un producto arbitrario de espacios compactos es compacto con la topología producto.
Demostración. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de espacios compactos y sea

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha.$$

Sea $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ la aplicación proyección. Consideramos que J está bien ordenado, de modo que tenga un elemento maximal.

(a) Sea $\beta \in J$. Supongamos que están dados los puntos $p_i \in X_i$ para todo $i < \beta$. Para cada $\alpha < \beta$, denotemos por Y_α el subespacio de X definido por la ecuación

$$Y_\alpha = \{\mathbf{x} \mid \pi_i(\mathbf{x}) = p_i \text{ para } i \leq \alpha\}.$$

Observemos que si $\alpha < \alpha'$, entonces $Y_\alpha \supset Y_{\alpha'}$. Demuestre que si $\mathcal{A}$ es una colección finita de elementos básicos de X que cubren el espacio

$$Z_\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} Y_\alpha = \{\mathbf{x} \mid \pi_i(\mathbf{x}) = p_i \text{ para } i < \beta\}$$

entonces $\mathcal{A}$ cubre Y_α para algún $\alpha < \beta$. [*Indicación:* si β tiene un inmediato predecesor en J, sea α dicho elemento. En otro caso, para cada $A \in \mathcal{A}$, denotemos por J_A el conjunto de aquellos índices $i < \beta$ para los cuales $\pi_i(A) \neq X_i$; la unión de los conjuntos J_A, para $A \in \mathcal{A}$, es finita; sea α el elemento máximo de esta unión J.]

(b) Supongamos que $\mathcal{A}$ es una colección de elementos básicos de X tales que ninguna subcolección finita de $\mathcal{A}$ cubre X. Demuestre que podemos elegir puntos $p_i \in X_i$ para todo i, tales que para cada α, el espacio Y_α definido en (a) no puede estar finitamente cubierto por $\mathcal{A}$. Cuando α es el máximo de J, se llega a una contradicción. [*Indicación:* si α es el mínimo de J, utilice el lema anterior para elegir p_α. Si p_i está definido para todo $i < \beta$, observe que (a) implica que el espacio Z_β no puede estar finitamente cubierto por $\mathcal{A}$ y utilice el lema para encontrar p_β.]

§38 La compactificación de Stone-Čech

Ya hemos estudiado una forma de compactificar un espacio topológico X, la compactificación por un punto (§29); ésta es, en algún sentido, la compactificación minimal de X. La compactificación de Stone-Čech de X, que es la que vamos a estudiar ahora, es en ese mismo sentido la compactificación maximal de X. Fue construida en 1937 por M. Stone y E. Čech de forma independiente. Tiene una gran cantidad de aplicaciones en análisis que se escapan de los objetivos de este libro.

Recordemos la siguiente definición:

Definición. Una ***compactificación*** de un espacio X es un espacio de Hausdorff compacto Y que contiene a X como subespacio y además $\bar{X} = Y$. Dos compactificaciones Y_1 e Y_2 de X se dice que son ***equivalentes*** si existe un homeomorfismo $h : Y_1 \to Y_2$ tal que $h(x) = x$ para cada $x \in X$.

Si X tiene una compactificación Y, entonces X debe ser completamente regular, ya que es un subespacio de un espacio completamente regular Y. Recíprocamente, si X es completamente regular, entonces X tiene una compactificación, pues X puede ser embebido en el espacio de Hausdorff compacto $[0,1]^J$ para algún J, y cualesquiera de tales embebimientos da lugar a una compactificación de X, tal y como el siguiente lema prueba:

Lema 38.1. *Sea X un espacio y supongamos que $h : X \to Z$ es un embebimiento de X en el espacio de Hausdorff compacto Z. Entonces existe una compactificación Y de X; ésta tiene la propiedad de que existe un embebimiento $H : Y \to Z$ que coincide con h en X. La compactificación Y está unívocamente determinada salvo equivalencias.*

Llamaremos a Y la compactificación ***inducida*** por el embebimiento h.

Demostración. Dada h, denotamos por X_0 el subespacio $h(X)$ de Z, y sea Y_0 su clausura en Z. Entonces Y_0 es un espacio de Hausdorff compacto con $\bar{X}_0 = Y_0$; de esta forma Y_0 es una compactificación de X_0.

Ahora construimos un espacio Y conteniendo a X tal que el par (X, Y) es homeomorfo al par (X_0, Y_0). Elijamos un conjunto A disjunto de X que esté en correspondencia biyectiva con el conjunto $Y_0 - X_0$ bajo alguna aplicación $k : A \to Y_0 - X_0$. Definimos $Y = X \cup A$ y una correspondencia biyectiva $H : Y \to Y_0$ por la regla

$$\begin{aligned} H(x) &= h(x) \qquad \text{para } x \in X, \\ H(a) &= k(a) \qquad \text{para } a \in A. \end{aligned}$$

A continuación definimos la siguiente topología en Y: un conjunto U es abierto en Y si, y sólo si, $H(U)$ es abierto en Y_0. La aplicación H es de manera automática un homeomorfismo, y el espacio X es un subespacio de Y porque H coincide con el homeomorfismo h cuando lo restringimos al subespacio X de Y. Expandiendo el rango de H, obtenemos el embebimiento requerido de Y en Z.

Ahora supongamos que Y_i es una compactificación de X y que $H_i : Y_i \to Z$ es un embebimiento, siendo además una extensión de h para $i = 1, 2$. Entonces H_i aplica X sobre $h(X) = X_0$. Como H_i es continua, debe aplicar Y_i en $\bar{X}_0$; como $H_i(Y_i)$ contiene a X_0 y es cerrado (ya que es compacto), contiene a $\bar{X}_0$. Por tanto, $H_i(Y_i) = \bar{X}_0$, y $H_2^{-1} \circ H_1$ define un homeomorfismo de Y_1 con Y_2 que coincide con la identidad en X. ■

En general, existen distintas maneras de compactificar un espacio dado X. Consideremos, por ejemplo, las siguientes compactificaciones del intervalo abierto $X = (0, 1)$:

EJEMPLO 1. Considere el círculo unidad S^1 en $\mathbb{R}^2$ y sea $h : (0, 1) \to S^1$ la aplicación

$$h(t) = (\cos 2\pi t) \times (\operatorname{sen} 2\pi t).$$

La compactificación inducida por el embebimiento h es equivalente a la compactificación por un punto de X.

EJEMPLO 2. Sea Y el espacio $[0, 1]$. Entonces Y es una compactificación de X; se obtiene "añadiendo un punto en cada extremo del intervalo $(0, 1)$".

podríamos usarlas como funciones coordenadas de un embebimiento de $(0,1)$ en $\mathbb{R}^J$ para algún J, y de esta forma obtener una compactificación por la cual cada función de la colección sea extensible.

Esta idea es básica a la hora de construir la compactificación de Stone-Čech. Ésta se define del siguiente modo:

Teorema 38.2. *Sea X un espacio completamente regular. Existe una compactificación Y de X con la propiedad de que cada función acotada y continua $f : X \to \mathbb{R}$ se extiende de forma única a una función continua de Y en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ la colección de todas las funciones reales acotadas y continuas en X, indexadas por algún conjunto J. Para cada $\alpha \in J$, elegimos un intervalo cerrado I_α en $\mathbb{R}$ que contenga a $f_\alpha(X)$, como por ejemplo,

$$I_\alpha = [\inf f_\alpha(X), \sup f_\alpha(X)].$$

A continuación, definimos $h : X \to \prod_{\alpha\in J} I_\alpha$ por la regla

$$h(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha\in J}.$$

Por el teorema de Tychonoff, el producto $\prod I_\alpha$ es compacto. Como X es completamente regular, la colección $\{f_\alpha\}$ separa puntos de conjuntos cerrados en X. De esta forma, por el Teorema 34.2 la aplicación h es un embebimiento.

Sea Y la compactificación de X inducida por el embebimiento h. Entonces existe un embebimiento $H : Y \to \prod I_\alpha$ que coincide con h en el subespacio X de Y. Dada una función real continua y acotada f en X, vamos a mostrar cómo se extiende a Y. La función f pertenece a la colección $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$, por tanto coincide con f_β para algún índice β. Sea $\pi_\beta : \prod I_\alpha \to I_\beta$ la aplicación proyección. Entonces la aplicación continua $\pi_\beta \circ H : Y \to I_\beta$ es la extensión buscada de f, ya que si $x \in X$, tenemos

$$\pi_\beta(H(x)) = \pi_\beta(h(x)) = \pi_\beta((f_\alpha(x))_{\alpha\in J}) = f_\beta(x).$$

La unicidad de esta extensión es una consecuencia del lema siguiente: ■

Lema 38.3. *Sea $A \subset X$ y $f : A \to Z$ una aplicación continua de A en el espacio de Hausdorff Z. Entonces existe a lo más una extensión de f a una función continua $g : \bar{A} \to Z$.*

Demostración. Este lema fue propuesto como ejercicio en §18 donde dimos una demostración. Supongamos que $g, g' : \bar{A} \to X$ son dos extensiones distintas de f; elijamos x tal que $g(x) \neq g'(x)$. Sean U y U' dos entornos disjuntos de $g(x)$ y $g'(x)$, respectivamente. Elegimos un entorno V de x tal que $g(V) \subset U$ y $g'(V) \subset U'$. Ahora, V interseca a A en algún punto y; entonces $g(y) \in U$ y $g'(y) \in U'$. Pero

como $y \in A$, tenemos $g(y) = f(y)$ y $g'(y) = f(y)$. Esto contradice el hecho de que U y U' son disjuntos. ■

Teorema 38.4. *Sea X un espacio completamente regular y sea Y una compactificación de X que satisface la propiedad de extensión del Teorema 38.2. Dada cualquier aplicación continua $f : X \to C$ de X en un espacio de Hausdorff compacto C, la aplicación f se extiende de forma única a una aplicación continua $g : Y \to C$.*

Demostración. Observemos que C es completamente regular, de modo que puede ser embebido en $[0,1]^J$ para algún J. Así, podemos también asumir que $C \subset [0,1]^J$. Entonces cada función componente f_α de la aplicación f es una función real continua y acotada en X; por hipótesis, f_α puede ser extendida a una función continua g_α de Y en $\mathbb{R}$. Definimos $g : Y \to \mathbb{R}^J$ como $g(y) = (g_\alpha(y))_{\alpha \in J}$; entonces g es continua ya que $\mathbb{R}^J$ tiene la topología producto. Además, g aplica Y en el subespacio C de $\mathbb{R}^J$ ya que la continuidad de g implica que

$$g(Y) = g(\bar{X}) \subset \overline{g(X)} = \overline{f(X)} \subset \bar{C} = C.$$

Así, g es la extensión buscada de f. ■

Teorema 38.5. *Sea X un espacio completamente regular. Si Y_1 e Y_2 son dos compactificaciones de X que satisfacen la propiedad de extensión del Teorema 38.2, entonces Y_1 e Y_2 son equivalentes.*

Demostración. Consideremos la aplicación inclusión $j_2 : X \to Y_2$. Ésta es una aplicación continua de X en el espacio compacto de Hausdorff Y_2. Como Y_1 tiene la propiedad de extensión, podemos, por el teorema anterior, extender j_2 a una función continua $f_2 : Y_1 \to Y_2$. De forma análoga, podemos extender la aplicación inclusión $j_1 : X \to Y_1$ a una aplicación continua $f_1 : Y_2 \to Y_1$ (ya que Y_2 tiene la propiedad de extensión e Y_1 es un espacio compacto de Hausdorff).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "j_2"'] & Y_1 \arrow[dl, "f_2"] \\ Y_2 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "j_1"'] & Y_2 \arrow[dl, "f_1"] \\ Y_1 & \end{tikzcd}$$

La composición $f_1 \circ f_2 : Y_1 \to Y_1$ tiene la propiedad de que para cada $x \in X$, se tiene $f_1(f_2(x)) = x$. Por lo tanto, $f_1 \circ f_2$ es una extensión continua de la aplicación identidad $i_X : X \to X$. Pero la aplicación identidad de Y_1 es también una extensión continua de i_X. Por la unicidad de las extensiones (Lema 38.3), $f_1 \circ f_2$ debe ser igual a la aplicación identidad de Y_2. Así f_1 y f_2 son homeomorfismos. ■

Definición. Para cada espacio completamente regular X elegimos, de aquí en adelante, una compactificación de X verificando la condición de extensión del Teorema 38.2. Representaremos esta compactificación de X por $\beta(X)$ y la llamaremos ***compactificación de Stone-Čech*** de X. Se caracteriza por el hecho de que cualquier aplicación continua $f : X \to C$ de X en un espacio de Hausdorff compacto C se extiende de forma única a una aplicación continua $g : \beta(X) \to C$.

Ejercicios

1. Compruebe las afirmaciones hechas en el Ejemplo 4.
2. Demuestre que la función continua acotada $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \cos(1/x)$ no puede extenderse a la compactificación del Ejemplo 3. Defina un embebimiento $h : (0,1) \to [0,1]^3$ tal que las funciones x, $\operatorname{sen}(1/x)$ y $\cos(1/x)$ sean extendibles a la compactificación inducida por h.
3. ¿Bajo qué condiciones un espacio metrizable tiene una compactificación metrizable?
4. Sea Y una compactificación arbitraria de X y sea $\beta(X)$ la compactificación de Stone-Čech. Demuestre que existe una aplicación sobreyectiva continua y cerrada $g : \beta(X) \to Y$ que es igual a la identidad sobre X.

   [Este ejercicio muestra de forma precisa lo que se quiere decir al escribir que $\beta(X)$ es la "compactificación" maximal de X. Demuestre que toda compactificación de X es equivalente a un espacio cociente de $\beta(X)$.]
5. (a) Demuestre que toda función real continua definida sobre S_Ω es "finalmente constante". [*Indicación*: demuestre en primer lugar que, para cada ϵ, existe un elemento α de S_Ω tal que $|f(\beta) - f(\alpha)| < \epsilon$ para todo $\beta > \alpha$. Sea entonces $\epsilon = 1/n$ para $n \in \mathbb{Z}_+$ y considere los correspondientes puntos α_n.]

   (b) Demuestre que la compactificación por un punto de S_Ω y la compactificación de Stone-Čech son equivalentes.

   (c) Concluya que toda compactificación de S_Ω es equivalente a la compactificación por un punto.
6. Sea X un espacio completamente regular. Demuestre que X es conexo si, y sólo si, $\beta(X)$ es conexo. [*Indicación*: si $X = A \cup B$ es una separación de X, sea $f(x) = 0$ para $x \in A$ y $f(x) = 1$ para $x \in B$.]
7. Sea X un espacio discreto y considere el espacio $\beta(X)$.

   (a) Demuestre que si $A \subset X$, entonces $\bar{A}$ y $\overline{X - A}$ son disjuntos, donde las clausuras se toman en $\beta(X)$.

(b) Demuestre que si U es abierto en $\beta(X)$, entonces $\bar{U}$ también es abierto en $\beta(X)$.

(c) Demuestre que $\beta(X)$ es totalmente disconexo.

8. Demuestre que $\beta(\mathbb{Z}_+)$ tiene cardinal, al menos, tan grande como I^I, donde $I = [0,1]$. [*Indicación*: el espacio I^I tiene un subconjunto numerable denso.]

9. (a) Si X es normal e y es un punto de $\beta(X) - X$, demuestre que y no puede ser el límite de una sucesión de puntos de X.

(b) Demuestre que si X es completamente regular y no compacto, entonces $\beta(X)$ no es metrizable.

10. Hemos construido una correspondencia $X \to \beta(X)$ que asigna a cada espacio completamente regular su compactificación de Stone-Čech. Ahora asignemos, a cada aplicación continua $f : X \to Y$ entre espacios completamente regulares, la única aplicación continua $\beta(f) : \beta(X) \to \beta(Y)$ que extiende la aplicación $i \circ f$, donde $i : Y \to \beta(Y)$ es la inclusión. Verifique lo siguiente:

(i) Si $1_X : X \to X$ es la aplicación identidad de X, entonces $\beta(1_X)$ es la aplicación identidad de $\beta(X)$.

(ii) Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, entonces $\beta(g \circ f) = \beta(g) \circ \beta(f)$.

Estas propiedades nos aseguran que la correspondencia que hemos construido es lo que se conoce como ***funtor***; es un funtor de la "categoría" de los espacios completamente regulares y las aplicaciones continuas de tales espacios, a la "categoría" de los espacios de Hausdorff compactos y las aplicaciones continuas entre éstos. Verá de nuevo estas propiedades en la Parte II del libro puesto que son fundamentales en álgebra y en topología algebraica.

Capítulo 6

Paracompacidad y teoremas de metrización

El teorema de metrización de Urysohn, estudiado en el Capítulo 4, fue el primer paso hacia la consecución de una respuesta a la pregunta: ¿cuándo es metrizable un espacio topológico? Este teorema nos proporciona condiciones bajo las cuales un espacio X es metrizable: que sea regular y tenga una base numerable. Sin embargo, los matemáticos nunca están satisfechos con un teorema si existe alguna esperanza de demostrar un resultado más fuerte. En este caso, se puede mejorar el teorema encontrando condiciones necesarias y suficientes sobre X para que sea metrizable, es decir, condiciones *equivalentes* a la metrizabilidad de X.

Sabemos que la hipótesis de regularidad en el teorema de metrización de Urysohn es necesaria, en cambio la condición de existencia de una base numerable no lo es. De manera que el camino obvio que debemos seguir es intentar reemplazar la condición de existencia de una base numerable por otra más débil. Encontrar dicha condición es una tarea delicada. Ésta tiene que ser lo suficientemente fuerte para implicar metrizabilidad y lo suficientemente débil para que todos los espacios metrizables la satisfagan. En una situación como ésta, descubrir la hipótesis adecuada es más de la mitad del trabajo.

La condición que fue formulada por casualidad de forma independiente por J. Nagata e Y. Smirnov, involucra la noción nueva de finitud local. Decimos que una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un espacio X es *localmente finita* si todo punto de X tiene un entorno que interseca sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{A}$.

Por otro lado, una forma de expresar la condición de que la base $\mathcal{B}$ es numerable es decir que $\mathcal{B}$ se puede escribir como

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{B}_n,$$

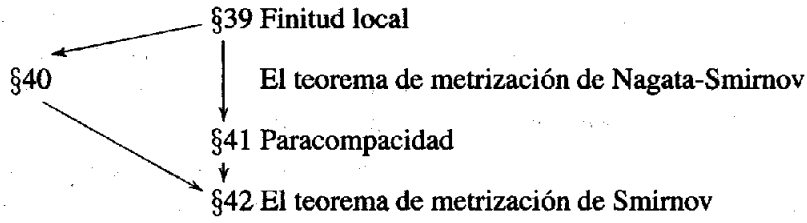
donde cada colección $\mathcal{B}_n$ es finita. Ésta es una manera poco ortodoxa de decir que $\mathcal{B}$ es numerable, pero sugiere cómo formular una versión más débil de la misma. La condición de Nagata-Smirnov no es más que requerir que la base $\mathcal{B}$ pueda expresarse de la forma

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{B}_n,$$

donde cada colección $\mathcal{B}_n$ es *localmente* finita. Decimos entonces que la colección $\mathcal{B}$ es *numerablemente localmente finita*. Sorprendentemente esta condición, junto con la de regularidad, es necesaria y suficiente para la metrizabilidad de X, lo cual será demostrado en este capítulo.

Hay otro concepto en topología que involucra la noción de finitud local. Éste es una generalización del concepto de compacidad denominado "paracompacidad". A pesar del origen medianamente reciente, este concepto ha demostrado ser muy útil en numerosas partes de las matemáticas. En este capítulo introducimos dicho concepto, el cual nos va a permitir dar otro conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que un espacio X sea metrizable. Concretamente, X es metrizable si, y sólo, si X es paracompacto y localmente metrizable, como demostraremos en §42.

Algunas de las secciones de este capítulo son independientes entre sí. La dependencia entre ellas se expresa en el siguiente diagrama:



§39 Finitud local

En esta sección probaremos algunas propiedades elementales de las colecciones localmente finitas y un lema de gran importancia sobre espacios metrizables.

Definición. Sea X un espacio topológico. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X se dice que es ***localmente finita*** en X si todo punto de X tiene un entorno que interseca sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{A}$.

EJEMPLO 1. La colección de intervalos

$$\mathcal{A} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

es localmente finita en el espacio topológico $\mathbb{R}$, como fácilmente se puede comprobar. Por otro lado, la colección

$$\mathcal{B} = \{(0, 1/n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

es localmente finita en $(0, 1)$ pero no en $\mathbb{R}$. Esto mismo ocurre con la colección

$$\mathcal{C} = \{(1/(n+1), 1/n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Lema 39.1. *Sea $\mathcal{A}$ una colección localmente finita de subconjuntos de X. Entonces:*

(a) Cualquier subcolección de $\mathcal{A}$ es localmente finita.

(b) La colección $\mathcal{B} = \{\bar{A}\}_{A\in\mathcal{A}}$ formada por las clausuras de los elementos de $\mathcal{A}$ es localmente finita.

(c) $\overline{\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \bar{A}$.

Demostración. La afirmación (a) es trivial. Para probar (b), observemos que cualquier abierto U que interseca al conjunto $\bar{A}$ necesariamente interseca a A. Por lo tanto, si U es un entorno de x que interseca sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{A}$ entonces U puede intersecar, a lo sumo, el mismo número de conjuntos de la colección $\mathcal{B}$ (podría intersecar menos conjuntos de $\mathcal{B}$ dado que $\bar{A}_1$ y $\bar{A}_2$ pueden ser iguales aunque A_1 y A_2 no lo sean).

Para demostrar la afirmación (c), denotemos por Y la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ dada por

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = Y.$$

En general, siempre se tiene $\bigcup \bar{A} \subset \bar{Y}$. Probemos la inclusión inversa utilizando la hipótesis de finitud local. Sea $x \in \bar{Y}$ y U un entorno de x que interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$, pongamos que son $A_1, \ldots, A_k$. Veamos que x pertenece a uno de los conjuntos $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_k$ y, por tanto, pertenece a $\bigcup \bar{A}$. En caso contrario, el conjunto $U - \bar{A}_1 - \cdots - \bar{A}_k$ sería un entorno de x que no interseca a ningún elemento de $\mathcal{A}$ y, por consiguiente, no interseca a Y, lo cual es una contradicción con el hecho de que $x \in \bar{Y}$. ■

Existe un concepto análogo al de finitud local para una familia indexada de subconjuntos de X. La familia indexada $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ se dice que es una ***familia indexada localmente finita*** en X si todo punto $x \in X$ tiene un entorno que interseca a los A_α sólo para un cantidad finita de valores de α. ¿Cuál es la relación entre las dos formulaciones de finitud local? Es fácil ver que $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es una familia indexada localmente finita si, y sólo si, es localmente finita como una *colección* de conjuntos y cada subconjunto no vacío A de X es igual a A_α a lo sumo para una cantidad finita de valores de α.

Nos interesaremos por las familias indexadas localmente finitas en §41, donde trabajaremos con particiones de la unidad.

Definición. Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X se dice que es ***numerablemente localmente finita*** si $\mathcal{B}$ puede escribirse como una unión numerable de colecciones localmente finitas $\mathcal{B}_n$.

La mayoría de los autores usan el término "σ-localmente finita" para este concepto. La letra σ se toma de la teoría de la medida y se utiliza con el significado "unión numerable de". Obsérvese que las colecciones numerables y las colecciones localmente finitas son numerablemente localmente finitas.

Definición. Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos del espacio X. Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X se dice que es un ***refinamiento*** de $\mathcal{A}$ (o que ***refina*** $\mathcal{A}$) si para cada elemento B de $\mathcal{B}$ existe un elemento A de $\mathcal{A}$ que contiene a B. Si los elementos de $\mathcal{B}$ son conjuntos abiertos, llamamos a $\mathcal{B}$ un ***refinamiento abierto*** de $\mathcal{A}$; si son conjuntos cerrados, llamamos a $\mathcal{B}$ un ***refinamiento cerrado***.

Lema 39.2. *Sea X un espacio metrizable. Si $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto de X, entonces existe un cubrimiento abierto $\mathcal{E}$ de X que refina $\mathcal{A}$ y es numerablemente localmente finito.*

Demostración. Para probarlo, vamos a utilizar el teorema de la buena ordenación. Elijamos un buen orden $<$ para la colección $\mathcal{A}$ y denotemos genéricamente los elementos de $\mathcal{A}$ por las letras $U, V, W, \ldots$

Escojamos una distancia para X. Sea n un entero positivo, fijo por el momento. Dado un elemento U de $\mathcal{A}$, definamos $S_n(U)$ como el subconjunto de U obtenido "recortando" U una distancia de $1/n$. De una forma más precisa, sea

$$S_n(U) = \{x \mid B(x, 1/n) \subset U\}.$$

(Observemos que $S_n(U)$ es un conjunto cerrado, aunque esto no es importante para nuestros propósitos.) Ahora utilizamos el buen orden $<$ de $\mathcal{A}$ para conseguir un conjunto aún más pequeño. Para cada U de $\mathcal{A}$, definamos

$$T_n(U) = S_n(U) - \bigcup_{V<U} V.$$

La situación donde $\mathcal{A}$ está formado por tres conjuntos $U < V < W$ se muestra en la Figura 39.1. Precisamente, como sugiere la figura, los conjuntos que hemos construido son disjuntos.

De hecho, están separados por una distancia de al menos $1/n$. Esto significa que si V y W son elementos distintos de $\mathcal{A}$, entonces $d(x, y) \geq 1/n$ para todo $x \in T_n(V)$ e $y \in T_n(W)$.

Para probarlo, podemos suponer que $V < W$. Dado que x está en $T_n(V)$, también x está en $S_n(V)$ y, por tanto, $B(x, 1/n)$ está contenido en V. Por otro lado, como $V < W$ e y pertenece a $T_n(W)$, por la definición de este último conjunto, y no está en el conjunto V. Se deduce entonces que y no pertenece al entorno $B(x, 1/n)$ de x.

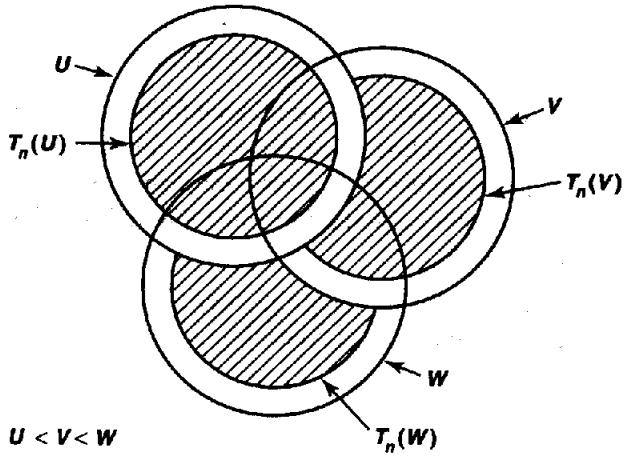


Figura 39.1

Los conjuntos $T_n(U)$ no son todavía los que estamos buscando, ya que no sabemos si son conjuntos abiertos (de hecho, son cerrados). Así, vamos a dilatar ligeramente cada uno de estos conjuntos para obtener conjuntos abiertos $E_n(U)$. Concretamente, sea $E_n(U)$ el entorno de $T_n(U)$ de radio $1/3n$, es decir, sea $E_n(U)$ la unión de todas la bolas abiertas $B(x, 1/3n)$ con $x \in T_n(U)$.

En el caso $U < V < W$, tenemos la situación representada en la Figura 39.2. Como la figura sugiere, los conjuntos que hemos construido son disjuntos. Efectivamente, si V y W son elementos distintos de $\mathcal{A}$, podemos asegurar que $d(x, y) \geq 1/3n$ para todo $x \in E_n(V)$ e $y \in E_n(W)$. Este hecho se sigue directamente de la desigualdad triangular. Observemos que, para cada $V \in \mathcal{A}$, el conjunto $E_n(V)$ está contenido en V.

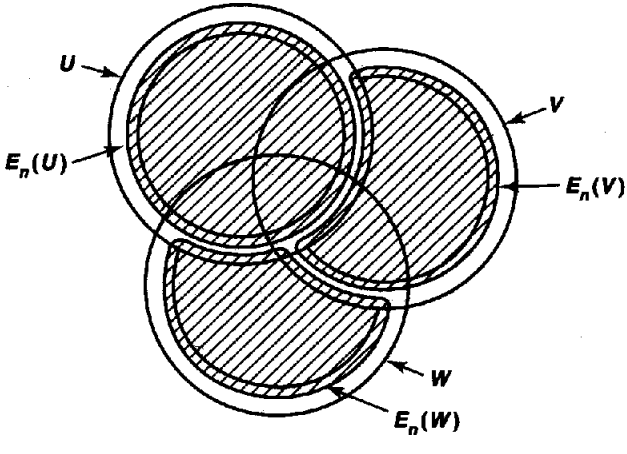


Figura 39.2

Definamos ahora

$$\mathcal{E}_n = \{E_n(U) \mid U \in \mathcal{A}\}.$$

Vamos a probar que $\mathcal{E}_n$ es una colección localmente finita de conjuntos abiertos que refina $\mathcal{A}$. El hecho de que $\mathcal{E}_n$ refine $\mathcal{A}$ se deduce de que $E_n(V) \subset V$, para cada $V \in \mathcal{A}$. Por otro lado, que la colección $\mathcal{E}_n$ sea localmente finita se debe a que, para cualquier punto x de X, la bola abierta de centro x y radio $1/6n$ interseca como máximo a *un* elemento de $\mathcal{E}_n$.

Desde luego, la colección $\mathcal{E}_n$ no recubrirá todo X (la Figura 39.2 ilustra este hecho). Sin embargo, aseguramos que la colección

$$\mathcal{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{E}_n$$

sí cubre todo X.

Sea x un punto de X. Dado que la colección $\mathcal{A}$ con la cual comenzamos cubre X y debido al buen orden de $<$, existe un primer elemento U de $\mathcal{A}$ que contiene al punto x. Como U es abierto, podemos escoger n tal que $B(x, 1/n) \subset U$. Entonces, por definición, $x \in S_n(U)$. Como U es el primer elemento de $\mathcal{A}$ que contiene a x, el punto x pertenece a $T_n(U)$ y, por tanto, x también está en el elemento $E_n(U)$ de $\mathcal{E}_n$, como deseábamos probar. ■

Ejercicios

1. Compruebe las afirmaciones del Ejemplo 1.
2. Encuentre un cubrimiento abierto puntualmente finito $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ que no sea localmente finito (la colección $\mathcal{A}$ es *puntualmente finita* si cada punto de $\mathbb{R}$ pertenece sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{A}$).
3. Dé un ejemplo de una colección de conjuntos $\mathcal{A}$ que no sea localmente finita y, sin embargo, la colección $\mathcal{B} = \{\bar{A} \mid A \in \mathcal{A}\}$ sí lo sea.
4. Sea $\mathcal{A}$ la siguiente colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{A} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

De las siguientes colecciones, ¿cuáles refinan $\mathcal{A}$?

$$\mathcal{B} = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{C} = \{(n, n+\frac{3}{2}) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$
$$\mathcal{D} = \{(x, x+\frac{3}{2}) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

5. Demuestre que si X tiene una base numerable, una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es numerablemente localmente finita si, y sólo si, es numerable.
6. Considere $\mathbb{R}^\omega$ con la topología uniforme. Dado n, sea $\mathcal{B}_n$ la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^\omega$ de la forma $\prod A_i$, donde $A_i = \mathbb{R}$ para $i \leq n$ y A_i es igual a $\{0\}$ o $\{1\}$ en otro caso. Demuestre que la colección $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$ es numerablemente localmente finita, pero no es numerable ni localmente finita.

§40 El teorema de metrización de Nagata-Smirnov

En esta sección vamos a probar que la regularidad de X y la existencia de una base numerablemente localmente finita para X son equivalentes a la metrizabilidad de X.

La demostración de que estas dos condiciones implican metrizabilidad sigue muy de cerca la segunda prueba que dimos del teorema de metrización de Urysohn. En aquella demostración construimos una aplicación del espacio X en $\mathbb{R}^\omega$ que resultaba ser un embebimiento relativo a la distancia uniforme $\bar{\rho}$ en $\mathbb{R}^\omega$. A continuación, pasamos a revisar los principales elementos de la prueba. El primer paso fue demostrar que todo espacio regular X con una base numerable es normal. El segundo paso fue construir una colección numerable $\{f_n\}$ de funciones reales definidas sobre X las cuales separaban puntos de conjuntos cerrados. El tercer paso consistió en utilizar las funciones f_n para definir un embebimiento de X en el espacio producto $\mathbb{R}^\omega$. Finalmente, el cuarto paso fue mostrar que si $f_n(x) \leq 1/n$ para todo x, entonces esta aplicación realmente es un embebimiento de X en el espacio métrico $(\mathbb{R}^\omega, \bar{\rho})$.

Con el fin de probar el teorema de metrización generalizado, es necesario extender cada uno de estos pasos. En primer lugar, demostraremos que un espacio regular X con una base que es numerablemente localmente finita es normal. En segundo lugar, construiremos una colección de funciones reales $\{f_\alpha\}$ sobre X que separa puntos de conjuntos cerrados. En tercer lugar, utilizaremos estas funciones para embeber X en el espacio producto $\mathbb{R}^J$, para algún conjunto J. Y finalmente, probaremos que si las funciones f_α son lo suficientemente pequeñas, esta aplicación realmente embebe X en el espacio métrico $(\mathbb{R}^J, \bar{\rho})$.

Antes de comenzar, necesitamos recordar la noción de conjunto G_δ, la cual ya fue introducida en los ejercicios.

Definición. Un subconjunto A de un espacio X se dice que es un ***conjunto*** G_δ en X si es igual a la intersección de una colección numerable de subconjuntos abiertos de X.

EJEMPLO 1. Cada subconjunto abierto de X es un conjunto G_δ trivialmente. En un espacio de Hausdorff y 1AN, cada conjunto unipuntual es un conjunto G_δ. El subconjunto unipuntual $\{\Omega\}$ de $\bar{S}_\Omega$ no es un conjunto G_δ, como puede comprobar.

EJEMPLO 2. En un espacio métrico X, cada conjunto cerrado es un G_δ. Dado $A \subset X$, denotemos por $U(A, \epsilon)$ el ϵ-entorno de A. Si A es cerrado, puede comprobar que

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} U(A, 1/n).$$

Lema 40.1. *Sea X un espacio regular con una base $\mathcal{B}$ que es numerablemente localmente finita. Entonces X es normal y todo subconjunto cerrado de X es un conjunto G_δ en X.*

Demostración. Paso 1. Sea W un abierto en X. Vamos a probar que existe una colección numerable $\{U_n\}$ de conjuntos abiertos de X tal que

$$W = \bigcup U_n = \bigcup \bar{U}_n.$$

Dado que la base $\mathcal{B}$ para X es numerablemente localmente finita, podemos escribir $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$, donde cada colección $\mathcal{B}_n$ es localmente finita. Sea $\mathcal{C}_n$ la colección formada por los elementos básicos B tales que $B \in \mathcal{B}_n$ y $\bar{B} \subset W$. Entonces $\mathcal{C}_n$ es localmente finita por ser una subcolección de $\mathcal{B}_n$. Definamos

$$U_n = \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} B.$$

Entonces U_n es un conjunto abierto y, por el Lema 39.1,

$$\bar{U}_n = \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} \bar{B}.$$

Por lo tanto $\bar{U}_n \subset W$, de manera que

$$\bigcup U_n \subset \bigcup \bar{U}_n \subset W.$$

Podemos asegurar que se da la igualdad. Fijado $x \in W$, por la regularidad, existe un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $\bar{B} \subset W$. Ahora bien, existe un n tal que $B \in \mathcal{B}_n$. Entonces $B \in \mathcal{C}_n$ por definición, y así $x \in U_n$. Por lo tanto $W \subset \bigcup U_n$, como deseábamos probar.

Paso 2. Vamos a demostrar que todo conjunto cerrado C en X es un conjunto G_δ en X. Dado C, sea $W = X - C$. Por el Paso 1, existen conjuntos U_n en X tales que $W = \bigcup \bar{U}_n$. Entonces

$$C = \bigcap (X - \bar{U}_n)$$

de forma que C es igual a la intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos de X.

Paso 3. Vamos a probar que X es normal. Sean C y D conjuntos cerrados y disjuntos en X. Aplicando el Paso 1 al conjunto abierto $X - D$, construimos una

colección numerable $\{U_n\}$ de conjuntos abiertos tal que $\bigcup U_n = \bigcup \bar{U}_n = X - D$. Entonces $\{U_n\}$ recubre C y cada conjunto $\bar{U}_n$ es disjunto con D. De manera similar, existe un cubrimiento numerable $\{V_n\}$ de D por conjuntos abiertos cuyas clausuras son disjuntas con C.

Volvemos ahora a la misma situación en la que nos encontrábamos al demostrar que un espacio regular con una base numerable es normal (Teorema 32.1). Podemos repetir la prueba *palabra por palabra*. Definamos

$$U'_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{V}_i \qquad \text{y} \qquad V'_n = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{U}_i.$$

Entonces los conjuntos

$$U' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} U'_n \qquad \text{y} \qquad V' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} V'_n$$

son abiertos disjuntos que contienen a C y D, respectivamente. ■

Lema 40.2. *Sea X un espacio normal y sea A un conjunto cerrado G_δ en X. Entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ y $f(x) > 0$ para todo $x \notin A$.*

Demostración. Esta propiedad la planteamos como un ejercicio en §33; la prueba la realizaremos ahora. Escribamos A como la intersección de los conjuntos abiertos U_n, $n \in \mathbb{Z}_+$. Para cada n, elijamos una función continua $f_n : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ y $f(x) = 1$ para todo $x \in X - U_n$. Definamos $f(x) = \sum f_n(x)/2^n$. La serie converge uniformemente, como se comprueba comparándola con $\sum 1/2^n$. Por lo tanto, f es continua, se anula en A y es positiva en $X - A$. ■

Teorema 40.3 (Teorema de metrización de Nagata-Smirnov). *Un espacio X es metrizable si, y sólo si, X es regular y tiene una base numerablemente localmente finita.*

Demostración. *Paso 1.* Supongamos que X es regular y tiene una base numerablemente localmente finita $\mathcal{B}$. Entonces X es normal y todo conjunto cerrado en X es un conjunto G_δ en X. Vamos a probar que X es metrizable embebiendo X en el espacio métrico $(\mathbb{R}^J, \bar{\rho})$, para algún conjunto J.

Sea $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$, donde cada colección $\mathcal{B}_n$ es localmente finita. Para cada entero positivo n y cada elemento básico $B \in \mathcal{B}$, elijamos una función continua

$$f_{n,B} : X \longrightarrow [0, 1/n]$$

tal que $f_{n,B}(x) > 0$ para todo $x \in B$ y $f_{n,B}(x) = 0$ para todo $x \notin B$. La colección $\{f_{n,B}\}$ separa puntos de conjuntos cerrados en X. En efecto, dado un punto x_0 y

un entorno U de x_0, existe un elemento básico B tal que $x_0 \in B \subset U$. Entonces $B \in \mathcal{B}_n$ para algún n, de manera que $f_{n,B}(x_0) > 0$ y $f_{n,B}$ se anula fuera de U.

Sea J el subconjunto de $\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{B}$ formado por todos los pares (n, B) tales que B es un elemento de $\mathcal{B}_n$. Definamos

$$F : X \longrightarrow [0,1]^J$$

por la ecuación

$$F(x) = (f_{n,B}(x))_{(n,B)\in J}.$$

Considerando la topología producto en $[0,1]^J$, la aplicación F es un embebimiento por el Teorema 34.2.

Dotemos ahora a $[0,1]^J$ con la topología inducida por la distancia uniforme y mostremos que F es un embebimiento relativo a esta topología. Aquí es donde se utiliza la condición $f_{n,B}(x) < 1/n$. La topología uniforme es más fina que la topología producto. Por lo tanto, relativo a la distancia uniforme, la aplicación F es inyectiva y lleva conjuntos abiertos de X sobre conjuntos abiertos del espacio imagen $Z = F(X)$. Debemos dar una demostración por separado de que F es continua.

Observemos que en el subespacio $[0,1]^J$ de $\mathbb{R}^J$, la distancia uniforme es igual a la distancia

$$\rho((x_\alpha), (y_\alpha)) = \sup\{|x_\alpha - y_\alpha|\}.$$

Para probar la continuidad, tomemos un punto x_0 de X y un número $\epsilon > 0$ con el fin de encontrar un entorno W de x_0 tal que

$$x \in W \Longrightarrow \rho(F(x), F(x_0)) < \epsilon.$$

Fijemos n por el momento. Elijamos un entorno U_n de x_0 que interseque sólo a un número finito de elementos de la colección $\mathcal{B}_n$. Esto significa que, como B recorre todo $\mathcal{B}_n$, todas salvo un número finito de las funciones $f_{n,B}$ son idénticamente nulas en U_n. Dado que cada función $f_{n,B}$ es continua, podemos ahora elegir un entorno V_n de x_0 contenido en U_n en el cual cada una de las funciones restantes $f_{n,B}$, para $B \in \mathcal{B}_n$, varía a lo más $\epsilon/2$.

Elijamos dicho entorno V_n de x_0 para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Entonces escogemos N de forma que $1/N \leq \epsilon/2$ y definimos $W = V_1 \cap \cdots \cap V_N$. Aseguramos que W es el entorno deseado de x_0. Sea $x \in W$; si $n \leq N$, entonces

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \epsilon/2$$

ya que si la función $f_{n,B}$ no se anula idénticamente entonces varía a lo más $\epsilon/2$ sobre W. Si $n > N$, entonces

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq 1/n < \epsilon/2$$

ya que $f_{n,B}$ aplica X en $[0, 1/n]$. Por lo tanto,

$$\rho(F(x), F(x_0)) \leq \epsilon/2 < \epsilon$$

como deseábamos probar.

Paso 2. A continuación, vamos a demostrar el recíproco. Si suponemos que X es metrizable, entonces sabemos que X es regular. Vamos a probar que X tiene una base numerablemente localmente finita.

Elijamos una distancia para X. Dado m, sea $\mathcal{A}_m$ el cubrimiento de X formado por todas las bolas abiertas de radio $1/m$. Por el Lema 39.2, existe un recubrimiento abierto $\mathcal{B}_m$ de X que refina $\mathcal{A}_m$ y tal que $\mathcal{B}_m$ es numerablemente localmente finito. Observemos que cada elemento de $\mathcal{B}_m$ tiene diámetro a lo sumo igual a $2/m$. Sea $\mathcal{B}$ la unión de las colecciones $\mathcal{B}_m$, para $m \in \mathbb{Z}_+$. Dado que cada colección $\mathcal{B}_m$ es numerablemente localmente finita, también lo es $\mathcal{B}$. Vamos a probar que $\mathcal{B}$ es una base para X.

Dados $x \in X$ y $\epsilon > 0$, veamos que existe un elemento B de $\mathcal{B}$ que contiene a x y que está contenido en $B(x, \epsilon)$. Elijamos primero m de forma que $1/m < \epsilon/2$. Entonces, como $\mathcal{B}_m$ recubre X, podemos encontrar un elemento B de $\mathcal{B}_m$ que contiene al punto x. Dado que B contiene a x y tiene diámetro a lo sumo $2/m < \epsilon$, deducimos que B está contenido en $B(x, \epsilon)$, como deseábamos probar. ■

Ejercicios

1. Compruebe los detalles de los Ejemplos 1 y 2.
2. Un subconjunto W de X se dice que es un "conjunto F_σ" en X si W es una unión numerable de conjuntos cerrados de X. Pruebe que W es un conjunto F_σ en X si, y sólo si, $X - W$ es un conjunto G_δ en X.

   [La terminología viene del francés. La letra "F" viene de "fermé" que significa "cerrado" y la letra "σ" de "somme" que significa "unión".]
3. Muchos espacios tienen bases *numerables*, pero ningún espacio T_1 tiene una base *localmente finita* a menos que sea discreto. Pruebe este hecho.
4. Encuentre un espacio que no sea discreto y que tenga una base numerablemente localmente finita pero que no tenga una base numerable.
5. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X se dice que es ***localmente discreta*** si cada punto de X tiene un entorno que interseca a lo sumo un elemento de $\mathcal{A}$. Una colección $\mathcal{B}$ es ***numerablemente localmente discreta*** (o "σ-localmente discreta") si es igual a una unión numerable de colecciones localmente discretas. Pruebe la siguiente afirmación:

Teorema (Teorema de metrización de Bing). Un espacio X es metrizable si, y sólo si, X es regular y tiene una base numerablemente localmente discreta.

§41 Paracompacidad

El concepto de paracompacidad es una de las generalizaciones más útiles del concepto de compacidad que ha sido descubierta en los últimos años. Es particularmente útil para aplicaciones en topología y geometría diferencial. Vamos a dar precisamente una aplicación, un teorema de metrización que probaremos en la siguiente sección.

Muchos de los espacios que nos son familiares son paracompactos. Por ejemplo, todo espacio compacto es paracompacto; esto será una consecuencia inmediata de la definición. También es cierto que todo espacio metrizable es paracompacto; esto es un teorema debido A. H. Stone, el cual probaremos. De modo que la clase de los espacios paracompactos incluye las dos clases más importantes de espacios que hemos estudiado. También incluye varios espacios más.

Para ver cómo la paracompacidad generaliza la compacidad, recordamos la definición de compacidad: un espacio X se dice que es *compacto* si todo recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X contiene una subcolección finita que recubre X. Una forma equivalente de decir esto es la siguiente:

Un espacio X es compacto si todo cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X tiene un refinamiento abierto finito $\mathcal{B}$ que recubre X.

Esta definición es equivalente a la usual ya que dado tal refinamiento $\mathcal{B}$, uno puede elegir para cada elemento de $\mathcal{B}$ un elemento de $\mathcal{A}$ que lo contiene. De esta forma, obtenemos una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que recubre X.

Esta nueva formulación de compacidad es un tanto complicada, pero sugiere una forma de generalizarla:

Definición. Un espacio X es ***paracompacto*** si todo cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{B}$ que recubre X.

Muchos autores, siguiendo la indicación de Bourbaki, incluyen como parte de la definición del concepto de *paracompacidad* la condición de que el espacio sea de Hausdorff (Bourbaki también incluye la propiedad de Hausdorff como parte de la definición del término *compacidad*). Nosotros no seguiremos esta convención.

EJEMPLO 1. *El espacio $\mathbb{R}^n$ es paracompacto.* Sean $X = \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Sea $B_0 = \varnothing$ y, para cada entero positivo m, sea B_m la bola abierta de radio m centrada en el origen. Dado m, elijamos una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$ que recubren $\bar{B}_m$ e intersecan cada uno al conjunto abierto $X - \bar{B}_{m-1}$; denotemos a esta colección finita de conjuntos abiertos por $\mathcal{C}_m$. Entonces la colección $\mathcal{C} = \bigcup \mathcal{C}_m$ es

un refinamiento de $\mathcal{A}$. Claramente es localmente finita ya que el conjunto abierto B_m interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$, concretamente aquellos elementos que pertenecen a la colección $\mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_m$. Finalmente, veamos que $\mathcal{C}$ recubre X. Dado x, sea m el menor entero tal que $x \in \bar{B}_m$. Entonces x pertenece a un elemento de $\mathcal{C}_m$, por definición.

Algunas de las propiedades de un espacio paracompacto son similares a las de un espacio compacto. Por ejemplo, un subespacio de un espacio paracompacto no es necesariamente paracompacto; sin embargo, un subespacio cerrado sí lo es. También un espacio de Hausdorff paracompacto es normal; para otras propiedades, un espacio de este tipo no es similar a un espacio compacto. En particular, el producto de dos espacios paracompactos no es necesariamente paracompacto. Comprobaremos estas afirmaciones a continuación.

Teorema 41.1. *Todo espacio de Hausdorff paracompacto X es normal.*

Demostración. Esta demostración es un tanto similar a la prueba de que un espacio de Hausdorff compacto es normal.

Primero probaremos la regularidad. Sean a un punto de X y B un conjunto cerrado de X disjunto con a. La condición de Hausdorff nos permite elegir, para cada b de B, un conjunto abierto U_b que contiene a b y cuya clausura no contiene al punto a. Recubramos X por los conjuntos abiertos U_b, junto con el conjunto abierto $X - B$. Tomemos un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{C}$ que recubra X. Construyamos la subcolección $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ consistente en todos los elementos de $\mathcal{C}$ que intersecan a B. Entonces $\mathcal{D}$ recubre B. Además, si $D \in \mathcal{D}$ entonces $\bar{D}$ es disjunto con a. En este caso D interseca a B, por tanto, está contenido en algún conjunto U_b cuya clausura es disjunta con a. Sea

$$V = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D;$$

entonces V es un conjunto abierto en X que contiene a B. Dado que $\mathcal{D}$ es localmente finita,

$$\bar{V} = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \bar{D},$$

de forma que $\bar{V}$ es disjunto con a. La regularidad queda así probada.

Para demostrar la normalidad sólo tenemos que repetir el mismo argumento, reemplazando a por el conjunto cerrado A y cambiando la condición de Hausdorff por la condición de regularidad. ■

Teorema 41.2. *Todo subespacio cerrado de un espacio paracompacto es paracompacto.*

Demostración. Sea Y un subespacio cerrado de un espacio paracompacto X. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento de Y por conjuntos abiertos en Y. Para cada $A \in \mathcal{A}$, elijamos un conjunto abierto A' de X tal que $A' \cap Y = A$. Recubramos X por los conjuntos abiertos A', además del conjunto abierto $X - Y$. Para este cubrimiento, sea $\mathcal{B}$ un refinamiento abierto localmente finito que recubra X. Entonces, la colección

$$\mathcal{C} = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

es el refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{A}$ que buscábamos. ■

EJEMPLO 2. *Un subespacio paracompacto de un espacio de Hausdorff X no es necesariamente cerrado en X.* Efectivamente, el intervalo abierto $(0, 1)$ es paracompacto ya que es homeomorfo a $\mathbb{R}$, sin embargo no es cerrado en $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 3. *Un subespacio de un espacio paracompacto no es necesariamente paracompacto.* El espacio $\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ es compacto y, por tanto, paracompacto. Sin embargo, el subespacio $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ no es paracompacto porque es de Hausdorff pero no es normal.

Para probar el importante teorema que afirma que todo espacio metrizable es paracompacto, necesitamos el siguiente lema, debido a E. Michael, el cual es también muy útil para otros propósitos.

Lema 41.3. *Sea X un espacio regular. Entonces las siguientes condiciones sobre X son equivalentes.*
Todo cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento que es:

(1) Un cubrimiento abierto de X numerablemente localmente finito.

(2) Un cubrimiento de X localmente finito.

(3) Un cubrimiento cerrado de X localmente finito.

(4) Un cubrimiento abierto de X localmente finito.

Demostración. Es trivial que (4) $\Rightarrow$ (1). Lo que necesitamos probar para nuestro teorema es el recíproco. Con esta finalidad, debemos ir dando los pasos (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4), ineludiblemente. Es por ello que hemos enumerado por conveniencia las condiciones en el orden del lema.

(1) $\Rightarrow$ (2). Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Sea $\mathcal{B}$ un refinamiento abierto de $\mathcal{A}$ que recubra X y sea numerablemente localmente finito. Pongamos

$$\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$$

donde cada $\mathcal{B}_n$ es localmente finito.

Aplicamos ahora esencialmente el mismo orden de pequeños arreglos que hemos utilizado anteriormente con el fin de hacer disjuntos los conjuntos de los diferentes $\mathcal{B}_n$. Dado i, pongamos

$$V_i = \bigcup_{U \in \mathcal{B}_i} U.$$

Entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ y cada elemento U de $\mathcal{B}_n$, definamos

$$S_n(U) = U - \bigcup_{i<n} V_i.$$

[Observemos que $S_n(U)$ no es necesariamente abierto, ni cerrado.] Sea

$$\mathcal{C}_n = \{S_n(U) \mid U \in \mathcal{B}_n\}.$$

Entonces $\mathcal{C}_n$ es un refinamiento de $\mathcal{B}_n$ ya que $S_n(U) \subset U$, para cada $U \in \mathcal{B}_n$.

Sea $\mathcal{C} = \bigcup \mathcal{C}_n$. Afirmamos que $\mathcal{C}$ es el refinamiento localmente finito de $\mathcal{A}$ que recubre X requerido.

Sea x un punto de X. Necesitamos probar que x está contenido en un elemento de $\mathcal{C}$ y que x tiene un entorno que interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$. Consideremos el cubrimiento $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$ y sea N el menor entero tal que x está en un elemento de $\mathcal{B}_N$. Sea U un elemento de $\mathcal{B}_N$ que contiene a x. Primero observemos que, dado que x no pertenece a ningún elemento de $\mathcal{B}_i$, para $i < N$, el punto x pertenece al elemento $S_N(U)$ de $\mathcal{C}$. Segundo observemos que, dado que cada colección $\mathcal{B}_n$ es localmente finita, podemos elegir para cada $n = 1, \ldots, N$ un entorno W_n de x que interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}_n$. Entonces si W_n interseca al elemento $S_n(V)$ de $\mathcal{C}_n$, debe intersecar al elemento V de $\mathcal{B}_n$ porque $S_n(V) \subset V$. Por lo tanto, W_n interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}_n$. Además, debido a que U está en $\mathcal{B}_N$, U no interseca ningún elemento de $\mathcal{C}_n$, para $n > N$. Como resultado, el entorno

$$W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_N \cap U$$

de x interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los conjuntos abiertos U de X tales que $\bar{U}$ está contenido en un elemento de $\mathcal{A}$. Por la regularidad, $\mathcal{B}$ recubre X. Utilizando (2) podemos encontrar un refinamiento $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}$ que recubra X y sea localmente finito. Sea

$$\mathcal{D} = \{\bar{C} \mid C \in \mathcal{C}\}.$$

Entonces $\mathcal{D}$ también recubre X, es localmente finito por el Lema 39.1 y refina $\mathcal{A}$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Utilizando (3), elijamos un refinamiento $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ que recubra X y sea localmente finito (si lo deseamos, podemos

tomar $\mathcal{B}$ de forma que sea un refinamiento cerrado, pero esto es irrelevante). Ahora vamos a ampliar ligeramente cada elemento B de $\mathcal{B}$ a un conjunto abierto, haciendo la extensión lo suficientemente pequeña como para que la colección resultante de conjuntos abiertos siga siendo localmente finita y refine $\mathcal{A}$.

Este paso implica un nuevo método. El método previo, usado en muchas ocasiones, consistía en ordenar los conjuntos de una determinada manera y formar un nuevo conjunto restando todos los anteriores. Aquel método contraía los conjuntos, de manera que para extenderlos necesitamos algo diferente. Vamos a introducir un cubrimiento cerrado localmente finito auxiliar $\mathcal{C}$ de X y lo utilizaremos para extender los elementos de $\mathcal{B}$.

Para cada punto x de X, existe un entorno de x que interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$. La colección de todos los conjuntos abiertos que intersecan sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$ es, por tanto, un cubrimiento abierto de X. Utilizando (3) de nuevo, sea $\mathcal{C}$ un refinamiento cerrado de este cubrimiento que sea localmente finito y recubra X. Cada elemento de $\mathcal{C}$ interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$.

Para cada elemento B de $\mathcal{B}$, sea

$$\mathcal{C}(B) = \{C \mid C \in \mathcal{C} \quad \text{y} \quad C \subset X - B\}.$$

Entonces definamos

$$E(B) = X - \bigcup_{C \in \mathcal{C}(B)} C.$$

Dado que $\mathcal{C}$ es una colección localmente finita de conjuntos cerrados, la unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathcal{C}$ es un cerrado, por el Lema 39.1. Por lo tanto, el conjunto $E(B)$ es un conjunto abierto. Además, $E(B) \supset B$ por definición (véase la Figura 41.1, en la cual los elementos de $\mathcal{B}$ están representados como regiones circulares cerradas y segmentos de rectas, y los elementos de $\mathcal{C}$ están representados como regiones cuadrangulares cerradas).

Puede ocurrir que hayamos extendido demasiado cada conjunto B; la colección $\{E(B)\}$ puede no ser un refinamiento de $\mathcal{A}$, lo cual puede ser fácilmente remediado. Para cada $B \in \mathcal{B}$, elijamos un elemento $F(B)$ de $\mathcal{A}$ que contenga a B. Entonces definamos

$$\mathcal{D} = \{E(B) \cap F(B) \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

La colección $\mathcal{D}$ es un refinamiento de $\mathcal{A}$. Dado que $B \subset (E(B) \cap F(B))$ y $\mathcal{B}$ recubre X, la colección $\mathcal{D}$ también recubre X.

Finalmente, tenemos que probar que $\mathcal{D}$ es localmente finita. Dado un punto x de X, escojamos un entorno W de x que interseque sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$, pongamos $C_1, \ldots, C_k$. Veamos que W interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{D}$. Como $\mathcal{C}$ recubre X, el conjunto W está recubierto

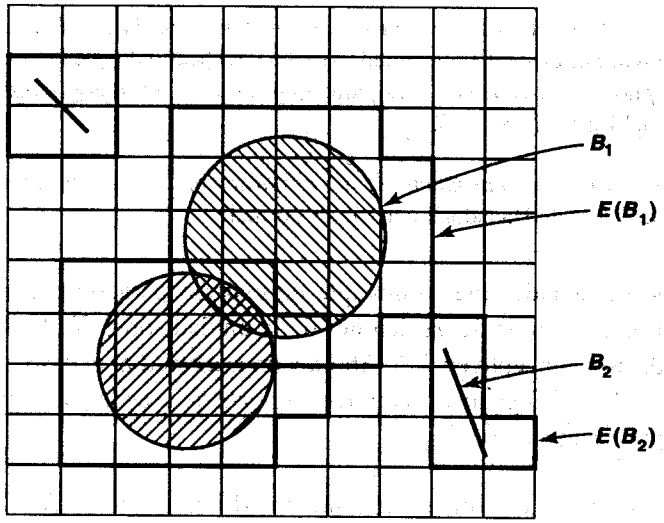


Figura 41.1

por $C_1, \ldots, C_k$. De esta forma, es suficiente probar que cada elemento C de $\mathcal{C}$ interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{D}$. Así, si C interseca el conjunto $E(B) \cap F(B)$ entonces interseca a $E(B)$, por tanto, por la definición de $E(B)$, C no está contenido en $X - B$. Esto implica que C debe intersecar a B. Dado que C interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$, C puede intersecar, a lo sumo, el mismo número de elementos de la colección $\mathcal{D}$. ■

Teorema 41.4. *Todo espacio metrizable es paracompacto.*

Demostración. Sea X un espacio metrizable. Ya sabemos por el Lema 39.2 que, dado un recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X, existe un refinamiento abierto del mismo que recubre X y es *numerablemente* localmente finito. El lema anterior implica entonces que $\mathcal{A}$ admite un refinamiento abierto que recubre X y es localmente finito. ■

Teorema 41.5. *Todo espacio regular y de Lindelöf es paracompacto.*

Demostración. Sea X regular y de Lindelöf. Dado un cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X, existe una subcolección numerable que recubre X. Esta subcolección es de forma automática numerablemente localmente finita. Aplicando el lema anterior, resulta que $\mathcal{A}$ admite un refinamiento abierto que recubre X y es localmente finito. ■

EJEMPLO 4. *El producto de dos espacios paracompactos no es necesariamente paracompacto.* El espacio $\mathbb{R}_\ell$ es paracompacto porque es regular y de Lindelöf. Sin embargo, $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ no es paracompacto porque es de Hausdorff pero no es normal.

EJEMPLO 5. *El espacio $\mathbb{R}^\omega$ es paracompacto tanto con la topología producto como con la topología uniforme.* Este resultado se sigue del hecho de que $\mathbb{R}^\omega$ es metrizable con estas topologías. No se sabe si $\mathbb{R}^\omega$ es paracompacto con la topología por cajas (véase el comentario del Ejercicio 5 de §32).

EJEMPLO 6. *El espacio producto $\mathbb{R}^J$ no es paracompacto si J no es numerable.* Esto se debe a que $\mathbb{R}^J$ es de Hausdorff pero no es normal.

Una de las propiedades más útiles que un espacio paracompacto X posee tiene que ver con la existencia de particiones de la unidad sobre X. Ya hemos visto la versión finita de este concepto en §36. Ahora vamos a estudiar el caso general. Recordemos que si $\phi : X \to \mathbb{R}$ es una función, el *soporte* de ϕ es la clausura del conjunto de puntos x para los cuales $\phi(x) \neq 0$.

Definición. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un cubrimiento abierto indexado de X. Una familia indexada de funciones continuas

$$\phi_\alpha : X \longrightarrow [0,1]$$

se dice que es una ***partición de la unidad*** sobre X, subordinada a $\{U_\alpha\}$, si:

(1) $(\text{soporte}\, \phi_\alpha) \subset U_\alpha$, para cada α.

(2) La familia indexada $\{\text{soporte}\, \phi_\alpha\}$ es localmente finita.

(3) $\sum \phi_\alpha(x) = 1$, para cada $x \in X$.

La condición (2) implica que cada $x \in X$ tiene un entorno en el cual la función ϕ_α es idénticamente nula para todos salvo para un número finito de valores de α. De esta forma, se le puede dar sentido a la "suma" indicada en (3), interpretándola como la suma de los términos $\phi_\alpha(x)$ que no son iguales a cero.

Vamos a construir ahora una partición de la unidad para un espacio de Hausdorff paracompacto arbitrario. Comenzamos probando un "lema de encogimiento", igual que hicimos para el caso finito en §36.

***Lema 41.6.** *Sea X un espacio de Hausdorff paracompacto. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de conjuntos abiertos que recubra X. Entonces existe una familia indexada localmente finita $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de conjuntos abiertos que recubre X y tal que $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$, para cada α.*

La condición $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$, para cada α, algunas veces se expresa diciendo que la familia $\{\bar{V}_\alpha\}$ es un ***refinamiento preciso*** de la familia $\{U_\alpha\}$.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ la colección formada por todos los conjuntos abiertos A tales que $\bar{A}$ está contenido en algún elemento de la colección $\{U_\alpha\}$. La regularidad de X implica que $\mathcal{A}$ recubre X. Dado que X es paracompacto, podemos encontrar una

colección localmente finita $\mathcal{B}$ de conjuntos abiertos que recubre X y refina $\mathcal{A}$. Representemos $\mathcal{B}$ como una familia indexada por un conjunto de índices K; un elemento general de $\mathcal{B}$ podemos denotarlo por B_β, para $\beta \in K$, y entonces $\{B_\beta\}_{\beta \in K}$ es una familia indexada localmente finita. Como $\mathcal{B}$ refina $\mathcal{A}$, podemos definir una función $f : K \to J$ eligiendo, para cada β de K, un elemento $f(\beta) \in J$ tal que

$$\bar{B}_\beta \subset U_{f(\beta)}.$$

Entonces para cada $\alpha \in J$, definimos V_α como la unión de los elementos de la colección

$$\mathcal{B}_\alpha = \{B_\beta \mid f(\beta) = \alpha\}.$$

(Observemos que V_α es el conjunto vacío si no existe un índice β tal que $f(\beta) = \alpha$.) Para cada elemento B_β de la colección $\mathcal{B}_\alpha$ tenemos, por definición, que $\bar{B}_\beta \subset U_\alpha$. Dado que la colección $\mathcal{B}_\alpha$ es localmente finita, $\bar{V}_\alpha$ es igual a la unión de las clausuras de los elementos de $\mathcal{B}_\alpha$, por tanto $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$.

Finalmente, vamos a comprobar la finitud local. Dado $x \in X$, elijamos un entorno W de x tal que W interseca a B_β sólo para una cantidad finita de valores de β, pongamos que son $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_k$. Entonces W puede intersecar a V_α sólo si α es uno de los índices $f(\beta_1), \ldots, f(\beta_k)$. ■

***Teorema 41.7.** *Sea X un espacio de Hausdorff paracompacto y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un cubrimiento abierto indexado de X. Entonces existe una partición de la unidad sobre X subordinada a $\{U_\alpha\}$.*

Demostración. Comenzamos aplicando dos veces el lema del encogimiento para encontrar familias indexadas localmente finitas de conjuntos abiertos $\{W_\alpha\}$ y $\{V_\alpha\}$ que recubren X y tales que $\bar{W}_\alpha \subset V_\alpha$ y $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$, para cada α. Dado que X es normal, podemos elegir, para cada α, una función continua $\psi_\alpha : X \to [0, 1]$ tal que $\psi_\alpha(\bar{W}_\alpha) = \{1\}$ y $\psi_\alpha(X - V_\alpha) = \{0\}$. Como ψ_α es distinta de cero sólo en puntos de V_α, tenemos

$$(\text{soporte}\, \psi_\alpha) \subset \bar{V}_\alpha \subset U_\alpha.$$

Además, la familia indexada $\{\bar{V}_\alpha\}$ es localmente finita (dado que un conjunto abierto interseca $\bar{V}_\alpha$ sólo si interseca V_α). Por tanto, la familia indexada $\{\text{soporte}\, \psi_\alpha\}$ también es localmente finita. Observemos que, como $\{W_\alpha\}$ recubre X, para cualquier x, al menos una de las funciones ψ_α es positiva en x.

Tiene ahora sentido la suma formalmente infinita

$$\Psi(x) = \sum_\alpha \psi_\alpha(x).$$

Dado que cada $x \in X$ tiene un entorno W_x que interseca al conjunto $(\text{soporte}\, \psi_\alpha)$ sólo para una cantidad finita de valores de α, podemos interpretar la suma infinita

como la suma finita de sus términos no nulos. Se sigue que la restricción de Ψ a W_x es igual a una suma finita de funciones continuas y, por consiguiente, es continua. Entonces al ser Ψ continua sobre W_x, para cada x, Ψ es continua sobre X. También Ψ es positiva, lo cual nos permite definir

$$\phi_\alpha(x) = \psi_\alpha(x)/\Psi(x)$$

para obtener la partición de la unidad que deseábamos. ■

Las particiones de la unidad son utilizadas frecuentemente en matemáticas para "pegar" funciones que están definidas localmente con el fin de obtener una función definida globalmente. Su uso en §36 ilustra este proceso. A continuación, damos otra aplicación de este método.

***Teorema 41.8.** *Sea X un espacio de Hausdorff paracompacto. Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de X y, para cada $C \in \mathcal{C}$, sea ϵ_C un número positivo. Si $\mathcal{C}$ es localmente finita, entonces existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$ para todo x y $f(x) \leq \epsilon_C$ para $x \in C$.*

Demostración. Recubramos X por conjuntos abiertos de forma que cada uno de ellos interseque sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$; pongámosle índices a esta colección de conjuntos abiertos de manera que se convierta en una familia indexada $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$. Escojamos una partición de la unidad $\{\phi_\alpha\}$ sobre X subordinada a $\{U_\alpha\}$. Dado α, sea δ_α el mínimo de los números ϵ_C, donde C recorre todos los elementos de $\mathcal{C}$ que intersecan el soporte de ϕ_α, y si no hubiera ningún elemento en estas condiciones, ponemos $\delta_\alpha = 1$. Entonces definimos

$$f(x) = \sum \delta_\alpha \phi_\alpha(x).$$

Como todos los números δ_α son positivos, también f es positiva. Vamos a comprobar que $f(x) \leq \epsilon_C$, para $x \in C$. Será suficiente probar que, para $x \in C$ y α arbitrario, tenemos

$$(*) \qquad \delta_\alpha \phi_\alpha(x) \leq \epsilon_C \phi_\alpha(x)$$

y entonces la desigualdad buscada se obtiene sumando, debido a que $\sum \phi_\alpha(x) = 1$. Si $x \notin$ soporte ϕ_α entonces la desigualdad $(*)$ es trivial porque $\phi_\alpha(x) = 0$. Y si ocurre que $x \in$ soporte ϕ_α y $x \in C$, entonces C interseca el soporte de ϕ_α, de manera que $\delta_\alpha \leq \epsilon_C$ por construcción y se satisface $(*)$. ■

Ejercicios

1. Dé un ejemplo que demuestre que el hecho de que X sea paracompacto no implica que para todo cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X, exista una *subcolección* localmente finita de $\mathcal{A}$ que recubra X.

2. (a) Demuestre que el producto de un espacio paracompacto y un espacio compacto es paracompacto. [*Indicación:* use el lema del tubo.]
   (b) Concluya que S_Ω no es paracompacto.

3. ¿Todo espacio de Hausdorff localmente compacto es paracompacto?

4. (a) Demuestre que si X tiene la topología discreta entonces X es paracompacto.
   (b) Demuestre que si $f : X \to Y$ es continua y X es paracompacto, el subespacio $f(X)$ de Y no es necesariamente paracompacto.

5. Sea X un espacio paracompacto. En esta sección hemos probado un "lema de encogimiento" para cubrimientos abiertos indexados y arbitrarios de X. Damos aquí un "lema de expansión" para familias indexadas localmente finitas y arbitrarias en X.
   Lema. Sea $\{B_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada localmente finita de subconjuntos de un espacio de Hausdorff paracompacto X. Entonces existe una familia indexada localmente finita $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de conjuntos abiertos en X tal que $B_\alpha \subset U_\alpha$, para cada α.

6. (a) Sea X un espacio regular. Si X es una unión numerable de subespacios compactos de X, entonces X es paracompacto.
   (b) Demuestre que $\mathbb{R}^\infty$ es paracompacto como subespacio de $\mathbb{R}^\omega$ con la topología por cajas.

*7. Sea X un espacio regular.
   (a) Si X es una unión finita de subespacios paracompactos cerrados de X, entonces X es paracompacto.
   (b) Si X es una unión numerable de subespacios paracompactos cerrados de X cuyos interiores recubren X, entonces X es paracompacto.

8. Sea $p : X \to Y$ una aplicación perfecta (véase el Ejercicio 7 de §31).
   (a) Demuestre que si Y es paracompacto entonces también lo es X. [*Indicación:* si $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto de X, encuentre un cubrimiento abierto localmente finito de Y formado por conjuntos B tales que $p^{-1}(B)$ puede ser recubierto por una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$. Entonces interseque $p^{-1}(B)$ con estos elementos de $\mathcal{A}$.]
   (b) Demuestre que si X es un espacio de Hausdorff paracompacto entonces también lo es Y. [*Indicación:* si $\mathcal{B}$ es un recubrimiento cerrado localmen-