

FÍSICA TEÓRICA

TEORÍA
CUÁNTICA
RELATIVISTA

BERESTETSKII
LIFSHITZ y PITAEVSKI

PARTE I

VOLÚMEN 4

SEGUNDA EDICIÓN

CURSO DE FÍSICA TEÓRICA

Volumen 4

Parte I

L. D. LANDAU E. M. LIFSHITZ

Academia de Ciencias, U.R.S.S.

V. B. BERESTETSKII E. M. LIFSHITZ L. P. PITAEVSKII
Academia de Ciencias, U. R. S. S.

TEORÍA CUÁNTICA RELATIVISTA

Volumen 4
Parte I
del
CURSO DE FÍSICA TEÓRICA



Editorial Reverté, S. A.
Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México

Título de la obra original

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Editada por

MEZHDUNARODNAYA KNIGA, Moscou

Versión española directamente del ruso por el

Prof. Dr. Ramón Ortiz Fornaguera

Jefe de la División de Física Teórica de la Junta
de Energía Nuclear - Madrid

Propiedad de EDITORIAL REVERTÉ, S. A. Encarnación, 86 Barcelona (12)

Reservados todos los derechos. Ninguna parte del material cubierto por este título de propiedad literaria puede ser reproducida, almacenada en un sistema de informática o transmitida de cualquier forma o por cualquier medio electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros métodos sin el previo y expreso permiso por escrito del editor.

Edición en español

© **EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1971. 1975**

Impreso en España Printed in Spain

RIESSET,S.A.BARCELONA

D.L.B.: 39.225-75

ISBN.84-291-4084-0

NOTA

Esta primera edición española es traducción de la primera edición rusa, que apareció en julio de 1968 (*Reliativistskaia kvantovaia teoriia*, chast'I, Izdatel'stvo «Nauka», Moskva, 1968). Sin embargo, y aparte la corrección de algunas erratas, la edición española difiere de la rusa en el contenido de algunos párrafos, que han sido más o menos modificados de acuerdo con las indicaciones del Profesor Lifshitz. En particular, se ha completado considerablemente el § 93 en lo que concierne a la radiación de frenado.

R. ORTIZ FORNAGUERA

PRÓLOGO

Conforme al plan general de este curso, el presente volumen está dedicado a la teoría cuántica relativista en el amplio sentido de esta palabra: a la teoría de todos los fenómenos ligados con el carácter finito de la velocidad de la luz, en particular a la teoría de la radiación.

Como es sabido, esta parte de la física teórica se encuentra todavía lejos, hoy por hoy, de haber alcanzado una forma acabada, ni aun en lo que concierne a los principios físicos que se encuentran en su base. Esto vale, en particular, para la teoría de las interacciones fuertes y débiles. Pero incluso la electrodinámica cuántica, a pesar de los brillantes éxitos logrados en ella durante los últimos 20 años, no es todavía satisfactoria por lo que toca a su estructura lógica.

Al seleccionar el material para este libro nos hemos limitado a aquellos resultados que, con un grado razonable de certeza, parecen establecidos con bastante solidez. Es natural que, abordadas así las cosas, la mayor parte del libro la ocupe la electrodinámica cuántica. Hicimos todo lo posible por desarrollar la exposición desde un punto de vista realista, subrayando las hipótesis físicas hechas en la teoría, pero sin entrar en los fundamentos que, de todas maneras, dado el estado actual de la teoría, tienen un carácter puramente formal.

En el estudio de las aplicaciones concretas de la teoría no consideramos como objetivo nuestro el abarcar el número enorme de efectos involucrados y nos hemos limitado solamente a los que son fundamentales, si bien, para completar, se dan referencias a trabajos originales que contienen una investigación más detallada. Al efectuar los cálculos, que a menudo se caracterizan aquí por ser notablemente pesados, frecuentemente hemos omitido algunas fórmulas intermedias, pero se ha procurado siempre señalar todos los aspectos metódicos no triviales utilizados.

Comparado con los otros volúmenes del presente curso, la exposición en este libro presupone por parte del lector un nivel de preparación más elevado. Nos hemos basado en el hecho de que al lector, que en el proceso de estudio de la física teórica alcanza la teoría cuántica de los campos, no le hace falta una innecesaria minuciosidad en la presentación del material. La división del libro en dos partes no es una cuestión de principio, y se debe únicamente a que es grande el volumen del material a tratar. En la segunda parte se incluyen las correcciones radiativas en electrodinámica, la teoría de las interacciones débiles y algunas cuestiones relativas a la teoría de las interacciones fuertes.

Este libro se ha escrito sin la participación directa de nuestro maestro L. D. Landau. Pero nos hemos dejado guiar constantemente por aquel espíritu y aquella actitud hacia la física teórica que siempre nos enseñó y que él comunicó a los otros volúmenes del curso. A menudo nos hemos preguntado cómo trataría Dau cierta cuestión, la que fuese, y hemos procurado contestarla como nos dictaba una relación con él de muchos años.

Agradecemos a V. N. Baer la gran ayuda que nos ha prestado en la preparación de los §§ 59 y 94, y a B. I. Ritus la gran ayuda en la redacción del § 98. Damos las gracias a B. E. Meierovich por su colaboración en algunos cálculos. También

Prólogo

agradecemos a A. S. Kompaneīts el haber-nos proporcionado sus notas de las lecciones sobre electrodinámica cuántica dictadas por L. D. Landau en la Universidad Estatal de Moscú durante el año académico 1959-60.

El presente libro es el resultado de un trabajo colectivo y todo su contenido ha sido examinado y discutido por todos los autores. La distribución directa del trabajo fue la siguiente: los capítulos I y V fueron escritos por E. M. Lifshitz, los capítulos II, III y VII por V. B. Berestetskī y E. M. Lifshitz, en colaboración, los capítulos IV, VI y IX, por E. M. Lifshitz y L. P. Pitaevskī, y los capítulos VIII y X, por los tres autores conjuntamente.

Junio de 1967.

V. B. BERESTETSKĪ, E. M. LIFSHITZ, L. P. PITAEVSKĪ

NOTACIONES

Notaciones cuadridimensionales

Los índices tensoriales cuadridimensionales se designan por letras griegas $\lambda, \mu, \nu\dots$, que toman los valores 0, 1, 2, 3.

Se ha adoptado la métrica cuadridimensional con la signatura (+ — — —). El tensor métrico es el $g_{\mu\nu}$ ($g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$).

La enumeración de las componentes de un 4-vector se hace en la forma $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$. Para simplificar la escritura de las fórmulas, a menudo se omite el índice de un 4-vector *. En particular, los productos escalares de 4-vectores se escriben simplemente en la forma (ab) o $ab : ab \equiv a_\mu b^\mu = a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

El 4-vector posición es $x^\mu = (t, \mathbf{r})$, el elemento de volumen, d^4x .

Operador derivación respecto de las 4-coordenadas: $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

4-tensor unidad antisimétrico: $e^{\lambda\mu\nu\rho}$, con $e^{0123} = -e_{0123} = +1$.

Función- δ cuadridimensional: $\delta^{(4)}(a) = \delta(a^0) \delta(\mathbf{a})$.

Notaciones tridimensionales

Los índices tensoriales tridimensionales se designan por letras latinas, i, k, l, \dots que toman los valores x, y, z .

Los vectores tridimensionales se designan por letras negritas cursivas.

El elemento de volumen tridimensional, d^3x .

Operadores

Los operadores se designan por letras de tipo redondo. Los operadores — ψ se designan por letras de palo seco Ψ . Conmutadores y anticonmutadores de dos operadores:

$$\{f, g\}_\pm = fg \pm gf$$

Operador transpuesto \tilde{f} .

Operador conjugado hermítico f^+ .

Operador de conjugación de carga C .

Operador de inversión espacial P .

Operador de inversión temporal T **.

* El empleo de esta notación está muy generalizado en la literatura contemporánea. Este compromiso entre los recursos alfabeticos y las necesidades de la física exige, claro está, particular atención por parte del lector.

** La letra T se utiliza también como símbolo de ordenación cronológica de los productos de operadores.

Notaciones

Elementos de matriz

Elementos de matriz del operador F para la transición del estado inicial i al final:
 $f: F_{fi}$ o $\langle f | F | i \rangle$.

La notación $| i \rangle$ se utiliza como símbolo abstracto de un estado con independencia de cualquier representación concreta en la que cabe expresar su función de onda. La notación $\langle f |$ — es el símbolo del estado final (« del conjugado complejo »). *

De acuerdo con esto, $\langle s | r \rangle$ representan los coeficientes del desarrollo del sistema de estados con números cuánticos r como superposición de estados con números cuánticos s : $| r \rangle = \sum_s | s \rangle \langle s | r \rangle$.

Elementos de matriz reducidos de los tensores esféricos: $\langle f || F || i \rangle$.

Ecuación de Dirac

Matrices de Dirac: γ^μ , con $(\gamma^0)^2 = 1$, $(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1$. Matrices $\alpha = \gamma^0 \gamma$, $\beta = \gamma^0$. Expresiones en las representaciones espinorial y típica: (21.3), (21.16), (21.20) (págs. 82, 84 y 85). $\gamma^5 = -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$, $(\gamma^5)^2 = 1$ (véase (22.18), pág. 89). $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$ (véase (28.2), pág. 108).

Producto de un 4-vector por matrices de Dirac: $\hat{a} = (a\gamma) \equiv a_\mu \gamma^\mu$.

Conjugado de Dirac: $\bar{\psi} = \psi^* \gamma^0$.

Matrices de Pauli: $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$; (definición en (20.8), pág. 80).

Indices 4-espinoriales: α, β, \dots y $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dots$, que toman los valores 1, 2 y $\dot{1}, \dot{2}$.

Indices bispinoriales: i, k, l, \dots , que toman los valores 1, 2, 3, 4.

Desarrollos de Fourier

Desarrollo tridimensional:

$$f(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{k}) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3},$$

$$f(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{r}) e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 x.$$

Unidades

Salvo indicación expresa, se utilizan constantemente unidades relativistas en las que $\hbar = 1$, $c = 1$. En estas unidades, el cuadrado de la carga elemental vale: $e^2 = 1/137$.

Unidades atómicas: $e = 1$, $\hbar = 1$, $m = 1$. En estas unidades, $c = 137$. Unidades atómicas de longitud, tiempo y energía: \hbar^2/me^2 , \hbar^3/me^4 y me^4/\hbar^2 (la cantidad $Ry = me^4/2\hbar^2$ se llama rydberg).

Unidades ordinarias: sistema absoluto de unidades (Gauss).

* Notación de Dirac.

Constantes

Velocidad de la luz $c = 2,997925 \cdot 10^{10}$ cm/s.

Carga elemental $e = 4,803 \cdot 10^{-10}$ CGSE.

Masa del electrón $m = 9,109 \cdot 10^{-28}$ g.

Constante de Plank $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27}$ erg s.

Constante de estructura fina $\alpha = e^2/\hbar c$; $1/\alpha = 137,04$.

Radio de Bohr $\hbar^2/me^2 = 5,292 \cdot 10^{-9}$ cm.

Radio clásico del electrón $r_e = e^2/mc^2 = 2,818 \cdot 10^{-13}$ cm.

Longitud de onda de Compton del electrón $\hbar/mc = 3,861 \cdot 10^{-11}$ cm.

Energía del electrón en reposo $mc^2 = 0,5110 \cdot 10^6$ eV.

Unidad atómica de energía $me^4/\hbar^2 = 4,359 \cdot 10^{-11}$ erg = 27,21 eV.

Magnetón de Bohr $e\hbar/2 mc = 9,273 \cdot 10^{-21}$ erg G⁻¹.

Masa del protón $m_p = 1,673 \cdot 10^{-24}$ g.

Longitud de onda de Compton del protón $\hbar/m_pc = 1,321 \cdot 10^{-13}$ cm.

Magnetón nuclear $e\hbar/2 m_pc = 5,050 \cdot 10^{-24}$ erg G⁻¹.

ÍNDICE DE MATERIAS

INTRODUCCIÓN	1
1 Relaciones de indeterminación en el dominio relativista	1
CAPÍTULO 1. EL FOTÓN	7
2 Cuantificación del campo electromagnético libre	7
3 Fotones	13
4 Invariancia de contraste	15
5 El campo electromagnético en la teoría cuántica	17
6 Momento cinético y paridad del fotón	19
7 Ondas esféricas de fotones	22
8 Polarización del fotón	28
9 Sistema de dos fotones	34
CAPÍTULO 2. BOSONES	37
10 La ecuación de onda para partículas de spin 0	37
11 Partículas y antipartículas	42
12 Partículas realmente neutras	46
13 Transformaciones C, P, T	49
14 Ecuación de onda para una partícula de spin 1	55
15 Ecuación de onda para partículas con mayores valores enteros del spin	59
16 Estados de helicidad de una partícula	60
CAPÍTULO 3. FERMIONES	67
17 Espinores cuadridimensionales	67
18 Relación entre espinores y 4-vectores	70
19 Inversión de espinores	73
20 La ecuación de Dirac en la representación espinorial	78
21 Forma simétrica de la ecuación de Dirac	81
22 Álgebra de las matrices de Dirac	86
23 Ondas planas	89
24 Ondas esféricas	93
25 Relación del spin con la estadística	97
26 Conjugación de carga e inversión de los espinores respecto del tiempo	100
27 Simetría intrínseca de las partículas y antipartículas	105
28 Formas bilineales	107

Índice de materias

29 Matriz densidad de polarización	112
30 El neutrino	117
31 Ecuación de onda para una partícula de spin 3/2	121
CAPÍTULO 4. UNA PARTÍCULA EN UN CAMPO EXTERIOR	125
32 La ecuación de Dirac para el electrón en un campo exterior	125
33 Desarrollo en potencias de $1/c$	129
34 Estructura fina de los niveles del átomo de hidrógeno	133
35 Movimiento en un campo con simetría esférica	136
36 Movimiento en un campo de Coulomb	140
37 Dispersión en un campo con simetría esférica	147
38 Dispersión en el caso ultrarrelativista.....	149
39 Sistema de funciones de onda del espectro continuo para la dispersión en un campo coulombiano	151
40 Un electrón en el campo de una onda electromagnética plana	155
41 Movimiento del spin en un campo exterior	159
42 Dispersión de neutrones en un campo eléctrico	165
CAPÍTULO 5. LA RADIACIÓN	167
43 El operador de interacción electromagnética.....	167
44 Emisión y absorción	170
45 Radiación dipolar	172
46 Radiación multipolar eléctrica	175
47 Radiación multipolar magnética	179
48 Distribución angular y polarización de la radiación	182
49 Radiación de los átomos. Tipo eléctrico	190
50 Radiación de los átomos. Tipo magnético	195
51 Radiación de los átomos. Efectos Zeeman y Stark	198
52 Radiación de los átomos. El átomo de hidrógeno	201
53 La radiación por moléculas diatómicas. Espectros electrónicos	206
54 Radiación por moléculas diatómicas. Espectros vibratorio y de rotación	212
55 Radiación de los núcleos	214
56 Efecto fotoeléctrico. Caso no-relativista	217
57 Efecto fotoeléctrico. Caso relativista	222
58 Fotodesintegración del deuterón.....	225
59 Radiación de frenado magnético	229
CAPÍTULO 6. DISPERSIÓN DE LA LUZ	241
60 El tensor de dispersión	241
61 Dispersión por sistemas que se orientan libremente	249
62 Dispersión por las moléculas	255

Indice de materias

63 Anchura natural de las rayas espetrales	259
64 Fluorescencia por resonancia	264
CAPÍTULO 7. LA MATRIZ DE DISPERSIÓN	
65 Amplitud de dispersión	271
66 Reacciones con partículas polarizadas	277
67 Invariantes cinemáticos	280
68 Regiones físicas	283
69 Desarrollo de amplitudes parciales	289
70 Simetría de las amplitudes helicoidales de dispersión	292
71 Amplitudes invariantes	299
72 La condición de unitariedad	303
CAPÍTULO 8. TEORÍA INVARIANTE DE PERTURBACIONES	
73 Producto cronológico	309
74 Diagramas de Feynman para la dispersión de electrones	312
75 Diagramas de Feynman para la dispersión de un fotón	319
76 Propagador de electrón	322
77 Propagador de fotón	327
78 Reglas generales de la técnica de diagramas	330
79 Invariancia de cruce	338
80 Partículas virtuales	339
CAPÍTULO 9. INTERACCIÓN DE ELECTRONES	
81 Dispersión de un electrón en un campo exterior	345
82 Dispersión de electrones y positones por un electrón	349
83 Ecuación de Breit	358
84 El positonio	365
85 Interacción de los átomos a grandes distancias	369
CAPÍTULO 10. INTERACCIÓN DE ELECTRONES CON FOTONES	
86 La dispersión de un fotón por un electrón	377
87 Dispersión de un fotón por un electrón. Efectos de polarización	382
88 Aniquilación de un par electrón-positón en dos fotones	391
89 Aniquilación del positonio	395
90 Radiación de frenado de un electrón por un núcleo. Caso no-relativista	400
91 Radiación de frenado de un electrón por un núcleo. Caso relativista	409

Índice de materias

92	Formación de un par por un fotón en el campo de un núcleo	418
93	Teoría exacta de la creación de pares y de la radiación de frenado en el caso ultra-relativista	421
94	Radiación de frenado por un electrón que choca con un electrón en el caso ultra-relativista	435
95	Emisión de fotones blandos en las colisiones.....	440
96	Método de los fotones equivalentes	447
97	Formación de pares en las colisiones de partículas	453
98	Emisión de un fotón por un electrón en el campo de una onda electromagnética intensa	459
APÉNDICE a	El operador de las rotaciones finitas	467
b	Elementos de matriz para el trompo	472
ÍNDICE ALFABÉTICO		475

INTRODUCCIÓN

§ 1. Relaciones de indeterminación en el dominio relativista

Toda la teoría cuántica expuesta en el volumen III de este curso posee un carácter esencialmente no-relativista y es inaplicable a los fenómenos que suponen un movimiento con velocidades que no son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. A primera vista cabría esperar que el paso a la teoría relativista fuera posible mediante una generalización más o menos inmediata del formalismo de la mecánica cuántica no-relativista. Sin embargo, un examen atento muestra que la construcción de una teoría relativista lógicamente cerrada exige la introducción de nuevos principios físicos.

Recordemos algunas nociones físicas que se encuentran en la base de la mecánica cuántica no-relativista (III, § 1). Vimos que en ella representa un papel fundamental el concepto de medición, por el que se entiende un proceso de interacción de un sistema cuántico con un « objeto clásico » (un « aparato »), como resultado del cual el sistema cuántico adquiere determinados valores de ciertas variables dinámicas (coordenadas, velocidades, etc.). Vimos también que la mecánica cuántica limita fuertemente la posibilidad de que existan simultáneamente en el electrón* diferentes variables dinámicas. Así, las indeterminaciones Δq y Δp con que pueden existir simultáneamente la coordenada y el impulso están ligadas por la relación $\Delta q \Delta p \sim \hbar^{**}$, cuanto mayor es la precisión con que se mide una de estas cantidades, tanto menor es la precisión con que se puede medir simultáneamente la otra.

Sin embargo, es esencial que cada una de las variables dinámicas del electrón se pueda medir por separado con una precisión tan grande cuanto se quiera y, además, en el curso de un tiempo tan corto cuanto se quiera. Esta circunstancia representa un papel fundamental para toda la mecánica cuántica no-relativista. Tan sólo gracias a ella es posible introducir el concepto de función de onda, concepto

* Como en III, § 1, hablamos de un electrón para abreviar, pensando en el fondo en un sistema cuántico cualquiera.

** En este párrafo utilizamos unidades ordinarias.

básico en el formalismo de esta teoría. En efecto, el sentido físico de la función de onda $\psi(q)$ consiste en que el cuadrado de su módulo determina la probabilidad de obtener, como resultado de una medición efectuada en un instante dado, un cierto valor de la coordenada del electrón. Es claro que una premisa necesaria para la introducción del concepto de una tal probabilidad es la posibilidad por principio de llevar a cabo una medición tan precisa y tan rápida cuanto se quiera de la coordenada; en caso contrario, este concepto carecería de objeto y perdería su significado físico.

La existencia de una velocidad límite (la velocidad de la luz c) conduce a nuevas limitaciones de principio respecto de las posibilidades de medir las diferentes magnitudes físicas (*L. D. Landau, R. Peierls*, 1930).

En III, § 44 se obtuvo la relación

$$(v' - v) \Delta p \Delta t \sim \hbar. \quad (1.1)$$

que liga la indeterminación Δp en la medición del impulso del electrón con la duración Δt del propio proceso de medida; v y v' son las velocidades del electrón antes y después de la medición. De esta relación se sigue que conseguir una medición suficientemente precisa del impulso en un intervalo de tiempo suficientemente corto (esto es, un pequeño valor de Δp con un pequeño valor de Δt) es sólo posible a costa de una variación suficientemente grande de la velocidad como resultado del proceso mismo de medición. En la teoría no-relativista, este hecho era una manifestación de la imposibilidad de repetir la medición del impulso al cabo de cortos intervalos de tiempo, pero en modo alguno afectaba a la posibilidad por principio de una sola medición del impulso tan precisa cuanto se quiera, ya que la diferencia $v' - v$ podía ser arbitrariamente grande.

Pero la existencia de una velocidad límite cambia el estado de cosas de manera radical. La diferencia $v' - v$, como también las propias velocidades, no puede sobrepasar ahora el valor c (más precisamente, $2c$). Substituyendo en (1.1) $v' - v$ por c , obtenemos la relación

$$\Delta p \Delta t \sim \frac{\hbar}{c}, \quad (1.2)$$

que determina la máxima precisión alcanzable por principio en la medición del impulso para un intervalo de tiempo de medición dado Δt . De esta manera, en la teoría relativista resulta por principio imposible una medición del impulso arbitrariamente precisa y rápida. Una medida precisa del impulso ($\Delta p \rightarrow 0$) es sólo posible en el caso límite de una duración infinitamente grande del proceso de medición.

Modificaciones no menos profundas sufre también la medición de una coordenada; en la teoría relativista, ésta resulta medible tan sólo con una precisión no mejor que un determinado límite mínimo. Con esto el concepto de localización del electrón experimenta una limitación más en su sentido físico.

En el formalismo matemático de la teoría, esta situación se manifiesta en la incompatibilidad de la medición precisa de una coordenada con el hecho de poder afirmar el carácter positivo de la energía de una partícula libre. Veremos en lo que sigue que el sistema completo de funciones propias de la ecuación de onda relativista de una partícula libre incluye (junto con soluciones que dependen del tiempo de manera «correcta») soluciones con «frecuencia negativa». Estas funciones aparecen también en el caso general, en el desarrollo del paquete de ondas correspondientes a un electrón localizado en una pequeña región del espacio.

Las funciones de onda de «frecuencia negativa» están ligadas, como se demostrará, con la existencia de antipartículas —de los positones—. La aparición de estas funciones en el desarrollo del paquete de ondas se traduce, de manera general, en la inevitable formación de pares electrón-positón en el proceso de medida de las coordenadas del electrón. La aparición de nuevas partículas incontrolable por el propio proceso priva evidentemente de sentido al concepto de medida de tales coordenadas.

En el sistema de reposo del electrón, el error mínimo de una medición de sus coordenadas es

$$\Delta q \sim \frac{\hbar}{mc}. \quad (1.3)$$

A este valor (el único admisible ya por consideraciones de dimensión) corresponde una indeterminación del impulso $\Delta p \sim mc$, la cual, a su vez, corresponde a la energía mínima umbral de formación del par.

En un sistema de referencia en el que el electrón se mueve con energía ϵ , en vez de (1.3) tenemos

$$\Delta q \sim \frac{\hbar c}{\epsilon}. \quad (1.4)$$

En particular, en el caso límite ultrarrelativista la energía está ligada con el impulso por la relación $\epsilon \approx cp$, y entonces es

$$\Delta q \sim \frac{\hbar}{p}, \quad (1.5)$$

es decir, el error Δq coincide con la longitud de onda de De Broglie de la partícula.

Para los fotones se da siempre el caso ultrarrelativista, de modo que para ellos vale la expresión (1.5). Esto significa que sólo tiene sentido hablar de coordenadas de un fotón en aquellos casos en que las dimensiones características del problema son grandes comparadas con la longitud de onda. Pero éste, ni más ni menos, es el caso límite «clásico» correspondiente a la óptica geométrica, en la cual cabe hablar de propagación de la luz a lo largo de trayectorias determinadas —a lo largo de rayos—. Pero en el caso cuántico, cuando la longitud de onda no se puede considerar pequeña, el concepto de coordenadas de un fotón deja de tener objeto.

Veremos más adelante (§ 4) que, en el formalismo matemático de la teoría, la imposibilidad de medir las coordenadas del fotón se manifiesta ya en la imposibilidad de construir, a partir de su función de onda, una magnitud que pudiera representar el papel de una densidad de probabilidad que satisfaga las condiciones necesarias de invariancia relativista.

Por lo dicho es claro que, en una mecánica cuántica relativista consecuente, las coordenadas de las partículas no pueden, en general, figurar en tanto que variables dinámicas, variables que por su propia esencia deberían tener un sentido exacto. Tampoco el impulso de las partículas puede mantenerse en el sentido que tenía antes: Dado que la medición exacta del impulso exige un tiempo suficientemente largo, resulta imposible seguir la marcha de su variación en un proceso.

Recordando lo dicho al principio de este párrafo, llegamos a la conclusión de que el formalismo todo de la mecánica cuántica no-relativista resulta inadecuado para el paso al dominio relativista. Las funciones de onda $\psi(q)$ entendidas en su sentido primitivo, no pueden figurar en el formalismo de una teoría relativista consecuente, en tanto que portadoras de información inobservable.

El impulso puede aparecer en dicha teoría tan sólo en la aplicación a partículas libres, para las cuales se conserva y, por ello, puede medirse con precisión arbitraria. Cabe pensar, por lo tanto, que la teoría futura renunciará totalmente a considerar la marcha temporal de los procesos de interacción de las partículas. Esta teoría pondrá de manifiesto que en tales procesos no existen características determinadas exactamente (ni tan sólo dentro de los límites de la precisión de la mecánica cuántica ordinaria), de modo que la descripción de un proceso en el tiempo resultará tan ilusorio como resultaron las trayectorias clásicas en la mecánica cuántica no-relativista. Las únicas magnitudes observables serán las características (impulsos, polarizaciones) de las partículas libres — de las partículas iniciales que entran en interacción, y de las partículas finales que aparecen como resultado del proceso (*L. Landau, R. Peierls*, 1930).

El planteo característico de un problema en la teoría cuántica relativista consiste en la determinación de las amplitudes de probabilidad de las transiciones que ligan estados iniciales y finales dados (esto es, para $t \rightarrow \mp \infty$) de un sistema de partículas. El conjunto de estas amplitudes entre todos los estados posibles forma la *matriz de dispersión* o *matriz S*. Esta matriz será la portadora de toda la información con sentido físico observable relativa a los procesos de interacción de las partículas (*W. Heisenberg*, 1938).

Advertimos también que en una tal teoría deben perder su sentido primitivo los conceptos de partículas «elementales» y «complejas» — el de qué están compuestas—. Esta cuestión no puede formularse sin considerar el proceso de interacción entre partículas, y el renunciar a esta consideración priva por si solo de objeto a la pregunta. Todas las partículas, las que figuran como iniciales o como finales en cualquier fenómeno físico de colisión, deben intervenir en la teoría en igualdad de condiciones. En este sentido, la diferencia entre partículas de las que

habitualmente se dice que son « complejas » o que son « elementales », tiene un carácter puramente cuantitativo y se reduce al valor relativo del defecto de masa respecto de la desintegración en ciertas «partes componentes». Así, decir que el deuterón es una partícula compleja (con su energía de enlace respecto de la desintegración en un protón y en un neutrón relativamente pequeña) sólo difiere cuantitativamente de la afirmación de que un neutrón está « compuesto » por un protón y un mesón π .

No existe en la actualidad ninguna teoría cuántica relativista completa lógicamente cerrada. Veremos que la teoría actual introduce nuevos aspectos físicos en el carácter de la descripción del estado de las partículas, descripción que adopta algunos rasgos de la teoría de los campos (véase § 10). Sin embargo, se construye en buena medida a imagen y con ayuda de los conceptos de la mecánica cuántica ordinaria. Esta manera de construir la teoría condujo al éxito en el dominio de la electrodinámica cuántica. La falta de coherencia lógica completa de esta teoría se manifiesta en la aparición de expresiones divergentes al aplicar directamente su formalismo matemático, pero para evitar estas divergencias existen medios del todo unívocos. Con todo, estos métodos conservan en grado considerable el carácter de recetas semiempíricas y nuestra convicción en la validez de los resultados obtenidos de esta manera se basa en último término tan sólo en su magnífica concordancia con los experimentos, no en el acuerdo interno y en la armonía lógica de los principios fundamentales de la teoría.

Un carácter del todo distinto presenta la situación en el dominio de la teoría de los fenómenos ligados con las llamadas interacciones fuertes de las partículas (fuerzas nucleares). Aquí los intentos de construir una teoría basada en aquellos mismos métodos no condujo a ningún resultado físico realmente significativo. La construcción de una teoría completa que abarque las interacciones fuertes exigirá, probablemente, acudir a conceptos físicos fundamentalmente nuevos.

CAPÍTULO 1

EL FOTÓN

§ 2. Cuantificación del campo electromagnético libre

Habiéndonos propuesto estudiar el campo electromagnético en tanto que objeto cuántico, conviene partir de la descripción clásica del mismo en la que dicho campo se caracteriza por una sucesión de variables que es infinita, pero discreta; esta descripción permitirá aplicar directamente los métodos ordinarios de la mecánica cuántica. En cambio, la representación del campo mediante potenciales dados en cada punto del espacio es, por su propia esencia, una descripción mediante una multiplicidad continua de variables.

Sea $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ el potencial vector del campo electromagnético libre que satisface la «condición de transversalidad»

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (2.1)$$

En este caso, el potencial escalar $\Phi = 0$ y los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} son:

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (2.2)$$

Las ecuaciones de Maxwell se reducen a la ecuación de onda para \mathbf{A} :

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.3)$$

Como es sabido (véase II, § 52), en la electrodinámica clásica el paso a la descripción mediante una sucesión discreta de variables se efectúa considerando el campo en un determinado volumen del espacio, V , grande, pero finito*. Recor-daremos cómo se consigue esto, prescindiendo de los detalles de los cálculos.

El campo en un volumen finito se puede desarrollar en serie de ondas planas no estacionarias, de modo que este potencial se representa por una serie de la forma

$$\mathbf{A} = \sum_k (a_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + a_k^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}), \quad (2.4)$$

* Para no recargar las fórmulas con factores innecesarios, supondremos $V = 1$.

donde los coeficientes \mathbf{a}_k dependen del tiempo de acuerdo con la ley

$$\mathbf{a}_k \sim e^{-i\omega t}, \quad \omega = |\mathbf{k}|. \quad (2.5)$$

En virtud de la condición (2.1), los vectores complejos \mathbf{a}_k son ortogonales a los correspondientes vectores de onda: $\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{k} = 0$.

La suma en (2.4) se extiende al conjunto discreto infinito de valores del vector de onda (de sus tres componentes k_x, k_y, k_z). El paso a la integración en una distribución continua se puede llevar a cabo mediante la expresión

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

para el número de posibles valores \mathbf{k} que corresponden al elemento de volumen del espacio- \mathbf{k} $d^3k = dk_x dk_y dk_z$.

El campo en el volumen en cuestión queda por completo determinado dando los vectores \mathbf{a}_k . Así, pues, estas magnitudes se pueden considerar como conjunto discreto de las «variables del campo» clásicas. Sin embargo, para que quede clara la manera de pasar a la teoría cuántica, hay que aplicar aun a estas variables una determinada transformación cuyo resultado es llevar las ecuaciones del campo a una forma análoga a la de las ecuaciones canónicas de la mecánica clásica (ecuaciones de Hamilton). Las variables canónicas del campo se definen por las igualdades

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_k &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k^*), \\ \mathbf{P}_k &= \frac{-i\omega}{\sqrt{4\pi}} (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_k^*) = \dot{\mathbf{Q}}_k \end{aligned} \quad (2.6)$$

(estas variables, evidentemente, son reales). El potencial vector se expresa en función de las variables canónicas como sigue:

$$\mathbf{A} = \sqrt{4\pi} \sum_k \left(\mathbf{Q}_k \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{\omega} \mathbf{P}_k \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \right). \quad (2.7)$$

Para hallar la función de Hamilton H hay que calcular la energía total del campo

$$\frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) d^3x,$$

expresándola en función de las magnitudes $\mathbf{Q}_k, \mathbf{P}_k$. Representando \mathbf{A} mediante un desarrollo de la forma (2.7), calculando \mathbf{E} y \mathbf{H} de acuerdo con (2.2) y efectuando la integración, obtendremos

$$H = \frac{1}{2} \sum_k (\mathbf{P}_k^2 + \omega^2 \mathbf{Q}_k^2).$$

Cada uno de los vectores \mathbf{P}_k y \mathbf{Q}_k es perpendicular al vector de onda \mathbf{k} , es decir,

cada uno posee dos componentes independientes. La dirección de estos vectores determina la dirección de la polarización de la correspondiente onda. Designando las dos componentes de los vectores $\mathbf{Q}_k, \mathbf{P}_k$ (en un plano perpendicular a \mathbf{k}) por Q_{ka}, P_{ka} ($a = 1, 2$), escribiremos la función de Hamilton en la forma

$$H = \sum_{ka} \frac{1}{2} (P_{ka}^2 + \omega^2 Q_{ka}^2). \quad (2.8)$$

De esta manera, la función de Hamilton se descompone en suma de términos independientes, cada uno de los cuales contiene solamente un par de magnitudes Q_{ka}, P_{ka} . Cada uno de estos términos corresponde a una onda no estacionaria con un vector de onda y una polarización determinados y tiene la forma de la función de Hamilton de un oscilador armónico unidimensional. Por ello, del desarrollo obtenido se dice que es el desarrollo del campo en *osciladores*.

Pasemos ahora a la cuantificación del campo electromagnético libre. El procedimiento expuesto para la descripción clásica del campo hace evidente el camino para pasar a la teoría cuántica. Hemos de considerar ahora las variables canónicas — las coordenadas generalizadas Q_{ka} y los impulsos generalizados P_{ka} — como operadores con la regla de conmutación

$$P_{ka}Q_{ka} - Q_{ka}P_{ka} = -i \quad (2.9)$$

(mientras los operadores con diferentes $\mathbf{k}a$ comutan todos entre sí). Junto con ellas, pasan también a ser operadores el potencial \mathbf{A} y [según (2.2)] las intensidades \mathbf{E} y \mathbf{H} .

Una definición consecuente del hamiltoniano del campo exige el cálculo de la integral

$$H = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) d^3x, \quad (2.10)$$

en la que \mathbf{E} y \mathbf{H} se expresan en función de los operadores P_{ka}, Q_{ka} . De hecho, sin embargo, la no conmutabilidad de estos últimos no se manifiesta al hacerlo, ya que los productos $Q_{ka}P_{ka}$ aparecen con el factor $\cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ que se anula al integrar en todo el volumen. Por ello, para el hamiltoniano se obtiene en definitiva la expresión

$$H = \sum_{ka} \frac{1}{2} (P_{ka}^2 + \omega^2 Q_{ka}^2), \quad (2.11)$$

que corresponde exactamente a la función clásica de Hamilton, lo que, por lo demás, era natural esperar.

La determinación de los valores propios de este hamiltoniano no requiere cálculos especiales, puesto que se reduce al conocido problema de determinar los niveles de energía de los osciladores lineales (véase III, § 23). Por consiguiente, podemos escribir sin más para los niveles de energía del campo

$$E = \sum_{ka} \left(N_{ka} + \frac{1}{2} \right) \omega, \quad (2.12)$$

donde N_{ka} son números enteros no negativos.

Al estudio de esta fórmula volveremos en el párrafo siguiente, pero ahora escribiremos los elementos de matriz de las magnitudes Q_{ka} , lo que se puede hacer directamente con ayuda de las conocidas fórmulas para los elementos de matriz de las coordenadas de un oscilador (véase III, § 23). Los elementos de matriz diferentes de cero son iguales a

$$\langle N_{ka} | Q_{ka} | N_{ka} - 1 \rangle = \langle N_{ka} - 1 | Q_{ka} | N_{ka} \rangle = \sqrt{\frac{N_{ka}}{2\omega}}. \quad (2.13)$$

Los elementos de matriz de las magnitudes $P_{ka} = \dot{Q}_{ka}$ difieren de los elementos de matriz de las Q_{ka} tan sólo en el factor $\pm i\omega$.

En los cálculos que seguirán, sin embargo, será más conveniente utilizar en vez de las magnitudes Q_{ka} , P_{ka} sus combinaciones lineales $\omega Q_{ka} \pm iP_{ka}$, que tienen elementos de matriz no nulos tan sólo para las transiciones $N_{ka} \rightarrow N_{ka} \pm 1$. De acuerdo con esto introduciremos los operadores

$$c_{ka} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega Q_{ka} + i P_{ka}), \quad c_{ka}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega Q_{ka} - i P_{ka}) \quad (2.14)$$

[las magnitudes clásicas c_{ka} , c_{ka}^* coinciden, salvo el factor $\sqrt{2\pi/\omega}$, con los coeficientes a_{ka} , a_{ka}^* en el desarrollo (2.4)]. Los elementos de matriz de estos operadores son iguales a

$$\langle N_{ka} - 1 | c_{ka} | N_{ka} \rangle = \langle N_{ka} | c_{ka}^+ | N_{ka} - 1 \rangle = \sqrt{N_{ka}}. \quad (2.15)$$

La regla de conmutación entre c_{ka} y c_{ka}^+ se obtiene a partir de la definición (2.14) y de la regla (2.9):

$$c_{ka} c_{ka}^+ - c_{ka}^+ c_{ka} = 1. \quad (2.16)$$

Para el potencial vector utilizamos de nuevo un desarrollo del tipo (2.4), en el cual, sin embargo, los coeficientes son ahora operadores. Escribámoslo en la forma

$$\mathbf{A} = \sum_{ka} (c_{ka} \mathbf{A}_{ka} + c_{ka}^+ \mathbf{A}_{ka}^*), \quad (2.17)$$

donde

$$\mathbf{A}_{ka} = \sqrt{4\pi} \frac{e^{(a)}}{\sqrt{2\omega}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (2.18)$$

Hemos introducido la notación $e^{(a)}$ para los vectores unitarios que indican la dirección y sentido de la polarización de los osciladores; los vectores $e^{(a)}$ son perpendiculares al vector de onda \mathbf{k} , y para cada \mathbf{k} se tienen dos polarizaciones independientes.

Análogamente, para los operadores \mathbf{E} y \mathbf{H} escribiremos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{\mathbf{k}\alpha} (c_{\mathbf{k}\alpha} \mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha} + c_{\mathbf{k}\alpha}^+ \mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha}^*), \\ \mathbf{H} &= \sum_{\mathbf{k}\alpha} (c_{\mathbf{k}\alpha} \mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha} + c_{\mathbf{k}\alpha}^+ \mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha}^*), \end{aligned} \quad (2.19)$$

expresiones en las que

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha} = i\omega \mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}, \quad \mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha} \quad (\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega) \quad (2.20)$$

Los vectores $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}$ son ortogonales entre sí en el sentido de que

$$\int \mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}'\alpha'}^* d^3x = \frac{2\pi}{\omega} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (2.21)$$

En efecto, si $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}$ y $\mathbf{A}_{\mathbf{k}'\alpha'}^*$ difieren en los vectores de onda, su producto contiene el factor $e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}}$, que da cero al integrar en todo el volumen; en cambio, si difieren solamente en la polarización, se tiene $\mathbf{e}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{e}^{(\alpha')*} = 0$, ya que dos direcciones de polarización independientes son ortogonales entre sí. Relaciones análogas valen para los vectores $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha}$. Conviene escribir su normalización en la forma

$$\frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}'\alpha'}^* + \mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha} \cdot \mathbf{H}_{\mathbf{k}'\alpha'}^*) d^3x = \omega \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (2.22)$$

Substituyendo los operadores (2.19) en (2.10) y efectuando la integración teniendo en cuenta (2.22), obtendremos el hamiltoniano del campo expresado en función de los operadores $c_{\mathbf{k}\alpha}$, $c_{\mathbf{k}\alpha}^+$:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\mathbf{k}\alpha} \frac{1}{2} (c_{\mathbf{k}\alpha} c_{\mathbf{k}\alpha}^+ + c_{\mathbf{k}\alpha}^+ c_{\mathbf{k}\alpha}) \frac{1}{4\pi} \int (|\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha}|^2 + |\mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha}|^2) d^3x = \\ &= \sum_{\mathbf{k}\alpha} \frac{1}{2} \omega (c_{\mathbf{k}\alpha} c_{\mathbf{k}\alpha}^+ + c_{\mathbf{k}\alpha}^+ c_{\mathbf{k}\alpha}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Este operador es diagonal en la representación considerada [aquella en la que los elementos de matriz de los operadores c , c^+ son los (2.15)] y sus valores propios coinciden, naturalmente, con (2.12).

En la teoría clásica el impulso del campo se define por la integral:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \times \mathbf{H} d^3x.$$

Al pasar a la teoría cuántica substituimos \mathbf{E} y \mathbf{H} por los operadores (2.19) y se encuentra sin dificultad

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \frac{1}{2} (P_{\mathbf{k}\alpha}^2 + \omega^2 Q_{\mathbf{k}\alpha}^2) \mathbf{n} \quad (2.24)$$

de acuerdo con la conocida relación clásica entre la energía y el impulso de las ondas planas. Los valores propios de este operador son

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \mathbf{k} \left(N_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.25)$$

La representación de los operadores que proporcionan los elementos de matriz (2.15) es la «representación de números de ocupación» y corresponde a la descripción del estado del sistema (del campo) en la que se dan los números cuánticos N_{ka} (*los números de ocupación*). En esta representación los operadores del campo (2.19), y con ellos también el hamiltoniano (2.11), actúan sobre la función de onda del sistema expresada en función de los números N_{ka} ; la designaremos por $\Phi(N_{ka}, t)$. Los operadores del campo (2.19) no dependen explícitamente del tiempo. Esto corresponde a la representación de Schrödinger de los operadores, habitual en la mecánica cuántica no-relativista. En cambio, en este caso, si resulta dependiente del tiempo el estado del sistema $\Phi(N_{ka}, t)$ y esta dependencia viene determinada por la ecuación de Schrödinger.

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = H\Phi.$$

Tal descripción del campo es por su propia esencia relativísticamente invariantes, dado que se basa en las ecuaciones invariantes de Maxwell. Pero esta invariancia no queda de manifiesto de manera explícita, ante todo porque las coordenadas espaciales y el tiempo intervienen en ella de manera altamente no simétrica.

En una teoría relativista es útil atribuir a la descripción una forma en que la invariancia se advierta de manera inmediata. Con vistas a esto hay que utilizar la llamada representación de Heisenberg, en la que la dependencia explícita respecto del tiempo se hace recaer sobre los propios operadores (véase III, § 13). Entonces el tiempo y las coordenadas intervendrán en plano de igualdad en las expresiones para los operadores del campo, mientras que el estado del sistema Φ será función solamente de los números de ocupación.

Para el operador A el paso a la representación de Heisenberg se reduce a substituir en cada término de la suma (2.17) el factor $e^{ik \cdot r}$ por $e^{i(k \cdot r - \omega t)}$, es decir, se reduce a entender por A_{ka} la función dependiente del tiempo

$$A_{ka} = \sqrt{4\pi} \frac{e^{(a)}}{\sqrt{2\omega}} e^{-i(\omega t - k \cdot r)}. \quad (2.26)$$

Se comprueba fácilmente que así es observando que el elemento de matriz del operador de Heisenberg para la transición $i \rightarrow f$ ha de contener el factor $\exp\{-i(E_i - E_f)t\}$, donde E_i y E_f son las energías de los estados inicial y final (véase III, § 13). Para la transición en que el número N_{ka} disminuye o aumenta en 1, este factor se reduce a $e^{-i\omega t}$ o a $e^{i\omega t}$, respectivamente. Esta condición quedará satisfecha como resultado de la sustitución antes indicada.

En lo que sigue (al estudiar tanto el campo electromagnético como los campos de partículas) daremos siempre por supuesto que la representación de los operadores es la de Heisenberg.

§ 3. Fotones

Pasemos al examen de las fórmulas obtenidas para el campo cuántico.

Ante todo, la fórmula (2.12) para la energía del campo plantea la siguiente dificultad. El nivel de energía más bajo del campo corresponde a la anulación de los números cuánticos $N_{k\alpha}$ de todos los osciladores (este estado se llama estado de *vacio del campo electromagnético*). Pero incluso en este estado cada oscilador posee una «energía de cero» $\omega/2$ no nula. Al sumar respecto de la infinidad de osciladores obtendremos, pues, un resultado infinito. De esta manera nos encontramos ante una de las «divergencias» a que conduce la falta de una estructura lógica cerrada en la teoría actual.

Mientras se trata solamente de los valores propios de la energía del campo, podemos soslayar esta dificultad suprimiendo simplemente la energía de las oscilaciones de cero, es decir, escribiendo para la energía y el impulso del campo*

$$E = \sum_{k\alpha} N_{k\alpha} \omega, \quad P = \sum_{k\alpha} N_{k\alpha} \mathbf{k}. \quad (3.1)$$

Estas fórmulas permiten introducir el concepto de *cuantos de luz* o de *fotones***, fundamental para toda la electrodinámica cuántica. Podemos en efecto considerar el campo electromagnético libre como un conjunto de partículas cada una de las cuales tiene una energía $\omega (= \hbar\omega)$ y un impulso $\mathbf{k} (= \mathbf{n}\hbar\omega/c)$. La relación entre la energía y el impulso de un fotón es precisamente la que ha de ser en mecánica relativista para partículas con masa en reposo nula que se mueven con la velocidad de la luz. Los números de ocupación $N_{k\alpha}$ cobran el sentido de número de fotones con los impulsos \mathbf{k} y las polarizaciones $e^{(a)}$ dados. La propiedad de polarización de un fotón es análoga al concepto de spin en otras partículas (las peculiaridades específicas del fotón en relación con esto se examinarán más adelante, en el § 6).

Es fácil ver que todo el formalismo matemático desarrollado en el párrafo anterior concuerda perfectamente con la noción de campo electromagnético como conjunto de fotones; es, ni más ni menos, el formalismo de la llamada segunda cuantificación aplicado al sistema de fotones***. En este método (véase III, § 64), los números de ocupación de los estados representan el papel de variables independientes y los operadores actúan sobre funciones de estos números. El papel fundamental lo representan los operadores de «aniquilación» y de «creación» de partículas, en correspondencia con la disminución o el aumento en una unidad del número de ocupación. Operadores precisamente de este tipo son $c_{k\alpha}$, $c_{k\alpha}^+$: el

* Esta supresión se puede conseguir formalmente de manera no contradictoria conviniendo en entender los productos de operadores en (2.10) como productos «normales», es decir, tales que en ellos los operadores c^+ se colocan siempre a la izquierda de los operadores c . La fórmula (2.23) toma entonces la forma $H = \sum_{k\alpha} \omega c_{k\alpha}^+ c_{k\alpha}$.

** La noción de fotones fue introducida por primera vez por Einstein (*A. Einstein*, 1905).

*** El método de segunda cuantificación aplicado a la teoría de la radiación fue desarrollado primero por Dirac (*P. A. M. Dirac*, 1927).

operador $c_{\mathbf{k}\alpha}$ aniquila un fotón en el estado $\mathbf{k}\alpha$, mientras que el $c_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger$ crea un fotón en este estado.

La regla de conmutación (2.16) corresponde al caso de partículas que obedecen a la estadística de Bose. Así, pues, los fotones son bosones, como era ya de esperar de antemano: el número admisible de fotones en un estado cualquiera debe ser arbitrario (volveremos todavía sobre el papel que representa esta circunstancia en el § 5).

Las ondas planas $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}$ (2.26) que figuran en el operador \mathbf{A} (2.17) como coeficientes de los operadores de aniquilación de fotones, se pueden interpretar como funciones de onda de los fotones que poseen determinados impulsos \mathbf{k} y polarizaciones $e^{(a)}$. Esta interpretación corresponde al desarrollo del operador ψ en serie de funciones de onda de los estados estacionarios de una partícula en el formalismo no-relativista de la segunda cuantificación [a diferencia de ésta, sin embargo, en el desarrollo (2.17) aparecen tanto los operadores de aniquilación como los operadores de creación de partículas; el sentido de esta diferencia se pondrá en claro más adelante, véase § 12].

La función de onda (2.26) está normalizada por la condición

$$\int \frac{1}{4\pi} (|\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha}|^2 + |\mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha}|^2) d^3x = \omega. \quad (3.2)$$

Esta normalización corresponde a « un fotón en el volumen $V = 1$ ». En efecto, la integral que aparece en el primer miembro de la igualdad representa el valor medio cuántico de la energía de un fotón en el estado con la función de onda dada [esta interpretación salta a la vista en la representación del hamiltoniano que da la primera línea de (2.23)]*. En el segundo miembro de la igualdad (3.2), por otra parte, aparece la energía de un fotón.

El papel de « ecuación de Schrödinger » del fotón lo representan las ecuaciones de Maxwell. En el presente caso [para el potencial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ que satisface la condición (2.1)], éstas se reducen a la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = 0.$$

Las « funciones de onda » del fotón en el caso general de estados estacionarios arbitrarios son soluciones complejas de esta ecuación que dependen del tiempo a través del factor $e^{-i\omega t}$.

Hablando de función de onda de un fotón, subrayaremos una vez más que es totalmente imposible considerarla como amplitud de probabilidad de localización espacial del fotón, en contraposición con el sentido fundamental de función de onda en la mecánica cuántica no-relativista. Esto está ligado con el hecho de que (conforme se indicó en el § 1) el concepto de coordenadas de un fotón carece en

* Obsérvese que el coeficiente $1/4\pi$ en la integral (3.2) es el doble del coeficiente ordinario $1/8\pi$ en (2.10). Esta diferencia está ligada, en último término, con el carácter complejo de los vectores $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha}$, a diferencia de los operadores del campo \mathbf{E} , \mathbf{H} que son reales.

absoluto de sentido físico. Al final del párrafo siguiente volveremos todavía a considerar el aspecto matemático de esta situación.

Las componentes del desarrollo de Fourier de la función $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ respecto de las coordenadas constituyen la función de onda del fotón en la representación de impulsos; la designaremos por $\mathbf{A}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{k})e^{-i\omega t}$. Así, para un estado con un impulso \mathbf{k} y una polarización $e^{(a)}$ determinados, la función de onda en la representación de impulsos viene dada simplemente por el coeficiente del factor exponencial en (2.26):

$$\mathbf{A}_{ka}(\mathbf{k}', \alpha') = \sqrt{4\pi} \frac{e^{(a)}}{\sqrt{2\omega}} \delta_{k'k} \delta_{\alpha'\alpha}. \quad (3.3)$$

En virtud de la mensurabilidad del impulso de una partícula libre, la función de onda en la representación de impulsos tiene un sentido físico más profundo que la función en la representación de coordenadas: permite calcular la probabilidad w_{ka} de los diferentes valores del impulso y de la polarización del fotón que se encuentra en un estado dado. De acuerdo con las reglas generales de la mecánica cuántica, w_{ka} viene dada por el cuadrado del módulo de los coeficientes del desarrollo de la función $\mathbf{A}(\mathbf{k}')$ en funciones de onda de los estados con valores determinados de \mathbf{k} y $e^{(a)}$:

$$w_{ka} \propto \left| \sum_{k'\alpha'} \mathbf{A}_{k\alpha}^*(\mathbf{k}', \alpha') \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}') \right|^2$$

(el coeficiente de proporcionalidad depende de cómo se normalicen las funciones). Substituyendo aquí (3.3), se obtendrá

$$w_{ka} \propto |e^{(a)} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k})|^2. \quad (3.4)$$

Después de sumar respecto de las dos polarizaciones, encontramos la probabilidad de que un fotón tenga un impulso \mathbf{k} :

$$w_{\mathbf{k}} \propto |\mathbf{A}(\mathbf{k})|^2. \quad (3.5)$$

§ 4. Invariancia de contraste

Como es sabido, la elección de los potenciales del campo en la electrodinámica clásica no es única : las componentes del 4-potencial A_{μ} se pueden someter a una transformación arbitraria *de contraste* (o de *gradiente*) de la forma

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu} \chi, \quad (4.1)$$

donde χ es una función arbitraria de las coordenadas y del tiempo (véase II, § 18).

Para una onda plana, si nos limitamos a transformaciones que no alteran la forma del potencial [su proporcionalidad al factor $\exp(-ik_{\mu}x^{\mu})$], la no unicidad conduce a la posibilidad de añadir a la amplitud de la onda un 4-vector arbitrario proporcional al 4-vector k^{μ} .

La no univocidad del potencial se conserva, naturalmente, también en la teoría cuántica en lo que concierne a los operadores del campo o a las funciones de onda de los fotones. Sin decidir de antemano el modo de elegir los potenciales, en vez de (2.17) hay que escribir el desarrollo análogo para el operador 4-potencial

$$A^\mu = \sum_{ka} (c_{ka} A_{ka}^\mu + c_{ka}^+ A_{ka}^{\mu*}), \quad (4.2)$$

donde las funciones de onda A_{ka}^μ son 4-vectores de la forma

$$A_k^\mu = \sqrt{4\pi} \frac{e^\mu}{\sqrt{2\omega}} e^{-ik_\nu x^\nu}, \quad ee^* = -1,$$

o, en forma abreviada, prescindiendo de los índices vectoriales en cuatro dimensiones,

$$A_k = \sqrt{4\pi} \frac{e}{\sqrt{2\omega}} e^{-ikx}, \quad ee^* = -1. \quad (4.3)$$

En esta fórmula el 4-impulso $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ (de modo que $kx = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$), y e es un 4-vector unitario de polarización*.

Si nos limitamos a las transformaciones de contraste que no cambian la dependencia de la función (4.3) respecto de las coordenadas y del tiempo, dichas transformaciones consistirán en la sustitución

$$e_\mu \rightarrow e_\mu + \chi k_\mu, \quad (4.4)$$

donde $\chi = \chi(k^\mu)$ es una función arbitraria. El hecho de que la polarización sea transversal significa que siempre es posible un contraste de este tipo en el que el 4-vector e tiene la forma

$$e^\mu = (0, e), \quad e \cdot k = 0 \quad (4.5)$$

(llamaremos a este contraste *contraste transversal en tres dimensiones*). En forma invariante cuadrimensional esta condición se escribe como condición de *transversalidad en cuatro dimensiones*

$$ek = 0. \quad (4.6)$$

Obsérvese que esta condición (como también la condición de normalización $ee^* = -1$) no queda violada por la transformación (4.4) en virtud de que $k^2 = 0$. Por otra parte, el que sea cero el cuadrado del 4-impulso de una partícula significa que su masa es nula. Con esto mismo se manifiesta el ligamen entre la invariancia de contraste y la igualación a cero de la masa del fotón (otros aspectos de esta relación se considerarán en el § 14).

* La expresión (4.3) no tiene una forma del todo relativísticamente covariante (4-vectorial), lo que se debe al carácter no invariante de la normalización que hemos adoptado en el volumen finito $V = 1$. Esta circunstancia, sin embargo, carece de importancia fundamental y queda compensada por las ventajas que proporciona dicho tipo de normalización. Veremos más adelante que mediante ella se puede asegurar la obtención simple y automática de magnitudes físicas reales en la debida forma invariante.

Ninguna magnitud física medible puede cambiar en una transformación de contraste de las funciones de onda de los fotones que toman parte en un proceso. Esta condición de *invariancia de contraste* representa en electrodinámica cuántica un papel incluso más importante que en la teoría clásica. Veremos en multitud de ejemplos que constituye aquí, junto con la condición de invariancia relativista, un poderoso principio heurístico.

A su vez la invariancia de contraste de la teoría está íntimamente ligada con la ley de conservación de la carga eléctrica; nos detendremos a considerar este aspecto en el § 43.

Hemos recordado ya en el párrafo anterior que la función de onda del fotón respecto de las coordenadas no se puede interpretar como amplitud de probabilidad de su localización espacial. En el aspecto matemático, se manifiesta esta circunstancia en la imposibilidad de construir con ayuda de la función de onda una magnitud que, aunque sólo fuera por sus propiedades formales, pueda representar el papel de una densidad de probabilidad. Una tal magnitud debería poderse expresar por una combinación bilineal esencialmente positiva de la función de onda A_μ y su conjugada compleja. Además, debería satisfacer determinadas condiciones de covariancia relativista, a saber, representar la componente temporal de un 4-vector (ello se sigue de que la ecuación de continuidad, que expresa la conservación del número de partículas, se escribe en forma cuadridimensional como anulación de la divergencia del 4-vector corriente; la componente temporal de este último es precisamente en este caso la densidad de probabilidad de localización de la partícula, véase II, § 29). Por otra parte, en virtud de la condición de invariancia de contraste, el 4-vector A_μ podría aparecer en la corriente tan sólo como tensor antisimétrico $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -i(k_\mu A_\nu - k_\nu A_\mu)$. De esta manera, el 4-vector corriente debería formarse mediante combinación bilineal de $F_{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}^*$ (y de las componentes del 4-vector k_μ). Pero es totalmente imposible construir un tal 4-vector: cualquier expresión que satisfaga las condiciones impuestas (por ejemplo $k^\lambda F_{\mu\nu}^* F_\lambda^\nu$) se anula en virtud de la condición de transversalidad ($k^\lambda F_{\nu\lambda} = 0$), dejando incluso ya de lado el hecho de que no sería definida positiva (puesto que contiene potencias impares de las componentes k_μ).

§ 5. El campo electromagnético en la teoría cuántica

La descripción del campo como conjuntos de fotones es la única descripción completamente adecuada al sentido físico del campo electromagnético en la teoría cuántica y viene a substituir el modelo clásico basado en las intensidades de dicho campo. Estas últimas aparecen en el formalismo matemático del modelo fotónico como operadores de segunda cuantificación.

Como es sabido, las propiedades de un sistema cuántico se aproximan a las de uno clásico en aquellos casos en que sean grandes los números cuánticos que determinan los estados estacionarios del sistema. Para el campo electromagnético libre

(en un volumen dado) esto significa que deben ser grandes los números cuánticos de osciladores, es decir, los números de fotones $N_{k\alpha}$. En este sentido posee una significación profunda la circunstancia de que los fotones obedecen a la estadística de Bose. En el formalismo matemático de la teoría, el ligamen de la estadística de Bose con las propiedades del campo clásico se manifiesta en las reglas de conmutación de los operadores $c_{k\alpha}$, $c_{k\alpha}^\dagger$. Para valores $N_{k\alpha}$ grandes, cuando son grandes los elementos de matriz de estos operadores, se puede prescindir de la unidad en el segundo miembro de la relación de conmutación (2.16), con lo cual se obtiene

$$c_{k\alpha} c_{k\alpha}^\dagger \approx c_{k\alpha}^\dagger c_{k\alpha},$$

es decir, estos operadores pasan a ser las magnitudes clásicas, conmutables entre sí, $c_{k\alpha}$ y $c_{k\alpha}^*$, que determinan las intensidades clásicas del campo.

Sin embargo, hay que precisar todavía la condición de que el campo sea cuasi-clásico. El hecho es que si todos los números $N_{k\alpha}$ son grandes, al sumar respecto de la totalidad de los estados $k\alpha$ la energía del campo resulta en cualquier caso infinita, de modo que la condición deja de tener objeto.

El planteo físicamente sensato de la cuestión relativa a las condiciones para que se dé el caso cuasiclásico se basa en considerar los valores del campo promediados en un cierto intervalo pequeño de tiempo Δt . Si representamos el campo eléctrico clásico \mathbf{E} (o el campo magnético \mathbf{H}) en forma de integral de Fourier respecto del tiempo, al promediarlo en un corto intervalo Δt contribuirán de manera apreciable al valor medio $\bar{\mathbf{E}}$ tan sólo aquellas componentes de Fourier cuyas frecuencias satisfacen la condición $\omega \Delta t \lesssim 1$; en caso contrario, el factor oscilante $e^{-i\omega t}$ prácticamente se anula al efectuar el promedio. Por ello, al poner en claro la condición de que el campo promediado sea cuasiclásico hay que considerar únicamente aquellos osciladores cuánticos cuyas frecuencias cumplen la condición $\omega \lesssim 1/\Delta t$. Basta exigir que sean grandes los números cuánticos de estos osciladores.

El número de osciladores con frecuencia entre 0 y $\omega \sim 1/\Delta t$ (referido al volumen $V = 1$) en orden de magnitud es igual a *

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \sim \frac{1}{(c\Delta t)^3}. \quad (5.1)$$

La energía total del campo por unidad de volumen vale $\sim \bar{\mathbf{E}}^2$. Dividiendo esta cantidad por el número de osciladores y por una cierta energía media de un fotón individual ($\sim \hbar\omega$), encontraremos el orden de magnitud de los números de fotones

$$N_k \sim \frac{\bar{\mathbf{E}}^2 c^3}{\hbar\omega^4}.$$

Imponiendo la condición de que este número sea grande, se obtendrá la desigualdad

$$|\mathbf{E}| \gg \frac{V \hbar c}{(c\Delta t)^2}. \quad (5.2)$$

* En este párrafo utilizamos unidades ordinarias.

Esta es precisamente la condición buscada que permite considerar desde el punto de vista clásico el campo promediado (respecto de los intervalos de tiempo Δt). Vemos así que el campo debe ser suficientemente intenso, tanto más cuanto menor sea el intervalo Δt a que se extiende el promedio. Para campos variables, este intervalo no puede superar, claro está, los períodos de tiempo en el curso de los cuales el campo varía de manera apreciable. Por consiguiente, los campos variables suficientemente débiles no pueden ser en ningún caso cuasiclásicos. Tan sólo en el caso de campos estáticos (constantes en el tiempo) es posible hacer $\Delta t \rightarrow \infty$, de modo que el segundo miembro de la desigualdad (5.2) tiende a cero. Esto significa que un campo estático es siempre clásico.

Se señaló ya que las expresiones clásicas del campo electromagnético en la forma de superposición de ondas planas han de considerarse en la teoría cuántica como expresiones constituidas por operadores. El sentido físico de éstos, sin embargo, es muy limitado. En efecto, un operador del campo al que se haya dado sentido físico debería conducir a valores nulos del campo en el estado correspondiente al vacío fotónico. En cambio, el valor medio del cuadrado del operador campo E^2 en el estado fundamental, que coincide salvo un factor con la energía de cero del campo, resulta ser infinito (por «valor medio» entendemos el valor medio en sentido cuántico, es decir, el correspondiente elemento de matriz diagonal del operador). Soslayar esta dificultad es imposible ni aun acudiendo a una operación formal de substracción (como fue posible hacer para la energía del campo), ya que en el presente caso deberíamos efectuar esta operación mediante una modificación razonable de la forma de los propios operadores E , H (y no de sus cuadrados), lo que resulta imposible. Así, pues, en contraposición con los operadores ordinarios de la mecánica cuántica, en electrodinámica cuántica a los operadores del campo no corresponden magnitudes físicas que tengan sentido.

§ 6. Momento cinético y paridad del fotón

Como cualquier otra partícula, el fotón puede poseer un determinado momento cinético. Para aclarar las propiedades de esta magnitud en el caso del fotón, recordaremos antes de qué manera las propiedades de la función de onda de una partícula están ligadas en el aparato matemático de la mecánica cuántica con su momento cinético.

El momento de la partícula j se compone de su momento cinético orbital \mathbf{l} y de su momento cinético intrínseco —el spin \mathbf{s} —. La función de onda de una partícula de spin s es un espinor simétrico de orden $2s$, es decir, un conjunto de $2s + 1$ componentes que en las rotaciones del sistema de coordenadas se transforman entre sí según determinada ley. En cambio, el momento cinético orbital está ligado con la dependencia de la función de onda respecto de las coordenadas: a los estados con momento orbital l corresponden funciones de onda cuyas componentes se expresan como combinaciones (lineales) de armónicos esféricos de orden l .

La posibilidad de distinguir de manera consecuente el spin y el momento cinético orbital exige, por lo tanto, la independencia de las propiedades de las funciones de onda en lo que concierne al spin y a las coordenadas: la dependencia de las componentes del espinor (en un instante dado) respecto de éstas no debe estar limitada por ninguna condición suplementaria.

En la representación de impulsos de las funciones de onda, a la dependencia con relación a las coordenadas corresponde la dependencia respecto del impulso \mathbf{k} . La función de onda del fotón (en el contraste de transversalidad tridimensional) es el vector $\mathbf{A}(\mathbf{k})$. Un vector equivale a un espinor de segundo orden, y en este sentido sería posible atribuir al fotón el spin 1. Pero esta función de onda vectorial está sometida a la condición de transversalidad $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}) = 0$, que constituye una condición suplementaria impuesta a la dependencia del vector $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ respecto del impulso. Resulta así que esta dependencia no se puede ya fijar simultáneamente de manera arbitraria para todas las componentes del vector, lo que a su vez conduce a la imposibilidad de separar el momento cinético orbital y el spin.

Observemos que a un fotón es inaplicable también la definición de spin como momento cinético en el sistema de reposo de la partícula, puesto que para el fotón, que se mueve con la velocidad de la luz, no existe en absoluto el sistema de reposo.

De esta manera, para el fotón es posible hablar solamente de su momento cinético total. En relación con esto, es evidente a priori que el momento total puede tomar únicamente valores enteros. Esto puede verse ya sin más que considerar que entre las magnitudes que caracterizan al fotón no hay ningún espinor de orden impar.

Al igual que para cualquier partícula, un estado del fotón se caracteriza también por su paridad, ligada con el comportamiento de la función de onda en la inversión del sistema de coordenadas (véase III, § 30). En la representación de impulsos, al cambio de signo de las coordenadas corresponde el cambio de signo de todas las componentes de \mathbf{k} . La acción del operador inversión P sobre una función escalar $\varphi(\mathbf{k})$ queda limitada al siguiente cambio: $P\varphi(\mathbf{k}) = \varphi(-\mathbf{k})$. Al aplicarlo a una función vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{k})$, en cambio, hay que tener en cuenta, además, que al cambiar el sentido de los ejes en el sentido opuesto, cambia también el signo de todas las componentes del vector; por lo tanto *

$$P\mathbf{A}(\mathbf{k}) = -\mathbf{A}(-\mathbf{k}). \quad (6.1)$$

Aunque la descomposición del momento cinético del fotón en momento orbital y spin está privada de sentido físico, con todo es conveniente introducir de manera formal el «spin» s y el «momento orbital» l como conceptos auxiliares que expresan las propiedades de transformación de la función de onda respecto de las rotaciones: el valor $s = 1$ corresponde al carácter vectorial de la función de onda, y

* Convendremos en definir la paridad de un estado por la acción del operador inversión sobre un vector polar, como lo es precisamente \mathbf{A} (o el correspondiente vector eléctrico $\mathbf{E} = i\omega\mathbf{A}$). Ésta difiere en signo de la acción sobre un vector axil $\mathbf{H} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}$, dado que la inversión no altera el sentido de un vector de este tipo.

$$PH(\mathbf{k}) = H(-\mathbf{k}).$$

el valor l es el del orden de las funciones esféricas que la constituyen. Procedemos así con vistas a considerar las funciones de onda de los estados del fotón, con valores determinados del momento cinético, que representan ondas esféricas para una partícula libre. El número l determina, en particular, la paridad de un estado del fotón, igual a

$$P = (-1)^{l+1}. \quad (6.2)$$

En este mismo sentido cabe representar el operador momento cinético \mathbf{j} como suma $\mathbf{s} + \mathbf{l}$. El operador momento está ligado, como es sabido, con el operador de una rotación infinitamente pequeña del sistema de coordenadas; en el presente caso lo está con la acción de este operador sobre un campo vectorial. En la suma $\mathbf{s} + \mathbf{l}$, el operador \mathbf{s} actúa sobre el índice vectorial, transformando entre sí las diferentes componentes de un vector. El operador \mathbf{l} , en cambio, actúa sobre estas componentes en tanto que funciones del impulso (o de las coordenadas).

Determinemos el número de estados (de energía dada) que son posibles para un valor dado j del momento del fotón [prescindiendo al hacerlo de la degeneración trivial de orden $(2j + 1)$ relativa a las direcciones del momento cinético].

Cuando \mathbf{l} y \mathbf{s} son independientes, este cálculo se lleva a cabo simplemente contando el número de maneras que permiten componer los momentos \mathbf{l} y \mathbf{s} de acuerdo con las reglas del modelo vectorial de forma que se obtenga el valor considerado j . Para una partícula con spin $s = 1$ encontraríamos así (para un valor dado no nulo de j) tres estados con los valores de l y las paridades siguientes:

$$l=j, \quad P = (-1)^{l+1} = (-1)^{j+1}; \quad l=j \pm 1, \quad P = (-1)^{l+1} = (-1)^j.$$

Si, en cambio, es $j = 0$, se obtiene un solo estado (con $l = 1$) cuya paridad es $P = +1$.

En este cálculo, sin embargo, no se ha tenido en cuenta la condición de transversalidad del vector \mathbf{A} ; sus tres componentes se han considerado todas como independientes. Por ello, del número de estados que se han obtenido hay que restar aún el número de estados correspondientes a un vector longitudinal. Un tal vector se puede escribir en la forma $\mathbf{k}\varphi(\mathbf{k})$, que permite ver que, en lo que concierne a sus propiedades de transformación (respecto de las rotaciones), sus tres componentes son equivalentes a un escalar φ ^{*}. Por consecuencia, cabe decir que el estado adicional, no compatible con la condición de transversalidad, correspondería a un estado de la partícula con una función de onda escalar (espinor de orden 0), es decir, con «spin 0»^{**}. El momento j de este estado coincide por ello con el orden de las funciones esféricas que intervienen en φ . En cambio, la paridad de este estado,

* En efecto, cuando se habla del carácter de transformación de una magnitud en las rotaciones, se trata de una transformación en un punto dado, es decir, para \mathbf{k} dado. En una tal transformación, $\mathbf{k}\varphi(\mathbf{k})$ no cambia en absoluto, es decir, se comporta como un escalar.

** Subrayaremos una vez más que no estamos considerando aquí el estado de una partícula real, cualquiera que sea. El cálculo efectuado tiene carácter formal y se reduce, desde el punto de vista matemático, a la clasificación del conjunto de las magnitudes que se transforman entre sí según una representación irreducible del grupo de las rotaciones.

en tanto que estado del fotón, se determina por la acción del operador inversión sobre la función vectorial $\mathbf{k}\varphi$:

$$P(\mathbf{k}\varphi) = -(-\mathbf{k})\varphi(-\mathbf{k}) = (-1)^j \mathbf{k}\varphi(\mathbf{k}),$$

es decir, es igual a $(-1)^j$. Así, pues, del número de estados obtenidos anteriormente con paridad $(-1)^j$ (dos para $j \neq 0$ y uno para $j = 0$) hay que restar uno.

Llegamos así en definitiva al resultado de que para un momento del fotón j distinto de cero existen un estado par y un estado impar. Cuando $j = 0$, no tenemos ningún estado. Esto significa que un fotón no puede tener en absoluto un momento cinético igual a cero, de modo que j toma solamente los valores $1, 2, 3, \dots$. La imposibilidad del valor $j = 0$ es evidente, sea dicho de paso, y a priori: la función de onda de un estado con momento cinético igual a cero debe poseer simetría esférica, lo que es evidentemente imposible para una onda transversal.

Para los diferentes estados del fotón se ha adoptado una determinada terminología. Un fotón en un estado con momento cinético j y paridad $(-1)^j$ se llama *2^j-polo eléctrico* (o fotón-*Ej*), y cuando la paridad es $(-1)^{j+1}$, se habla de un *2^j-polo magnético* (o fotón-*Mj*). Así, a un fotón dipolar eléctrico corresponde un estado impar con $j = 1$, a uno cuadripolar eléctrico, un estado par con $j = 2$, a uno dipolar magnético, un estado par con $j = 1$ *.

§ 7. Ondas esféricas de fotones

Una vez determinados los valores posibles del momento cinético de un fotón, hemos de pasar ahora a considerar las funciones de onda que les corresponden**.

Consideremos primero un problema formal: determinar aquellas funciones vectoriales que son funciones propias de los operadores \mathbf{j}^2 y j_z ; con esto no decidimos de antemano cuáles de estas funciones intervienen precisamente en las funciones de onda del fotón que nos interesan y no tenemos en cuenta la condición de transversalidad.

Buscaremos las funciones en la representación de impulsos. El operador de coordenadas en esta representación es $\mathbf{r} = i\partial/\partial\mathbf{k}$ [véase III (15, 12)]. El operador de momento cinético orbital se escribe, en cambio,

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{k} = -i \mathbf{k} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}},$$

es decir, difiere del operador momento cinético en la representación de coordenadas tan sólo en la substitución de \mathbf{r} por \mathbf{k} . Por consiguiente, la solución del problema planteado es la misma formalmente en ambas representaciones.

* Estos nombres corresponden a la terminología de la teoría clásica de la radiación. Veremos más adelante (§ 46, 47) que la radiación de fotones de tipos eléctrico y magnético viene determinada por los correspondientes momentos eléctricos y magnéticos de un sistema de cargas.

** El primero en abordar este problema fue Heitler (*W. Heitler*, 1936). La forma de resolución que se expone se debe a V. B. Berestetskii (1947).

Designaremos las funciones propias buscadas por Y_{jm} y las llamaremos *vectores esféricos*. Estos deben cumplir las ecuaciones

$$\mathbf{j}^2 Y_{jm} = j(j+1) Y_{jm}, \quad \mathbf{j}_z Y_{jm} = m Y_{jm} \quad (7.1)$$

(el eje z es una dirección orientada dada en el espacio). Demostremos que esta propiedad la posee una función arbitraria de la forma $\mathbf{a} Y_{jm}$, donde \mathbf{a} es un cierto vector formado a partir de las componentes del vector unitario $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$ e Y_{jm} son los armónicos esféricos ordinarios (escalares). En todo lo que sigue, éstas se definen de acuerdo con III, § 28:

$$Y_{lm}(\mathbf{n}) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} t^l \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (7.2)$$

(θ, φ son las coordenadas esféricas de la dirección \mathbf{n}) \star .

Para ello recordemos la regla de commutación III (29.4):

$$\{l_i, a_k\}_- = ie_{ikl}a_l.$$

El segundo miembro de esta igualdad se puede escribir en la forma $(-\mathbf{s}_i a_k)$, donde \mathbf{s} es el operador de spin 1 (la acción de este operador sobre una función vectorial se define precisamente por la igualdad $\mathbf{s}_i a_k = -ie_{ikl}a_l$; véase III, § 58, problema 2). Tenemos, por lo tanto,

$$l_i a_k - a_k l_i = -\mathbf{s}_i a_k.$$

Utilizando esta igualdad, se encuentra

$$j_i a_k = (l_i + s_i) a_k = a_k l_i.$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{j}^2(\mathbf{a} Y_{jm}) = \mathbf{a} l^2 Y_{jm}, \quad \mathbf{j}_z(\mathbf{a} Y_{jm}) = \mathbf{a} l_z Y_{jm}.$$

Pero la función esférica Y_{jm} es función propia de los operadores \mathbf{l}^2 y \mathbf{l}_z correspondiente a los valores propios $j(j+1)$ y m de estas magnitudes, con lo que llegamos a las igualdades (7.1).

Obtendremos tres tipos esencialmente distintos de vectores esféricos eligiendo como vector \mathbf{a} uno de los siguientes vectores $\star\star$:

\star Con vistas a futuras referencias, observemos que el valor de estas funciones para $\theta = 0$ (\mathbf{n} a lo largo del eje z) es:

$$Y_{lm}(n_z) = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}. \quad (7.2a)$$

$\star\star$ El operador $\nabla_{\mathbf{n}} = |\mathbf{k}| \nabla_{\mathbf{k}}$ actúa sobre funciones que dependen tan sólo de la dirección \mathbf{n} . Tiene únicamente dos componentes (en coordenadas esféricas):

$$\nabla_{\mathbf{n}} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

El operador que se representa más abajo por $\Delta_{\mathbf{n}}$, es la parte angular del operador de Laplace:

$$\Delta_{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

$$\frac{\nabla_n}{V^{j(j+1)}}, \quad \frac{\mathbf{n} \times \nabla_n}{V^{j(j+1)}}, \quad \mathbf{n}. \quad (7.3)$$

De esta manera, definimos los vectores esféricos como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{jm}^{(E)} &= \frac{1}{V^{j(j+1)}} \nabla_n Y_{jm}, & P = (-1)^j; \\ \mathbf{Y}_{jm}^{(M)} &= \mathbf{n} \times \mathbf{Y}_{jm}^{(E)}, & P = (-1)^{j+1}; \\ \mathbf{Y}_{jm}^{(L)} &= \mathbf{n} Y_{jm}, & P = (-1)^j. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Junto con cada vector se indica su paridad P . Los vectores esféricos de los tres tipos son ortogonales entre sí y de ellos $\mathbf{Y}_{jm}^{(L)}$ es longitudinal, e $\mathbf{Y}_{jm}^{(E)}$, $\mathbf{Y}_{jm}^{(M)}$ son transversales con relación a \mathbf{n} .

Los vectores esféricos se pueden expresar mediante funciones esféricas escalares. Así, los $\mathbf{Y}_{jm}^{(M)}$ se expresan mediante funciones esféricas de un único orden $l = j$, e $\mathbf{Y}_{jm}^{(E)}$, $\mathbf{Y}_{jm}^{(L)}$, mediante funciones esféricas de órdenes $l = j \pm 1$. Esta circunstancia era de prever: basta comparar las paridades de los vectores esféricos indicadas en (7.2-4) con la paridad $(-1)^{l-1}$ de un campo vectorial expresada en función de los órdenes de las funciones esféricas contenidas en él.

Los vectores esféricos de cada uno de estos tipos son ortogonales entre sí y están normalizados de acuerdo con

$$\int \mathbf{Y}_{jm} \cdot \mathbf{Y}_{j'm'}^* d\sigma = \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \quad (7.5)$$

Para los vectores $\mathbf{Y}_{jm}^{(L)}$ esto es evidente en virtud de la condición de normalización de las funciones esféricas Y_{jm} . Para los vectores $\mathbf{Y}_{jm}^{(E)}$, la integral de normalización es

$$\frac{1}{j(j+1)} \int \nabla_n Y_{jm} \cdot \nabla_n Y_{j'm'}^* d\sigma = -\frac{1}{j(j+1)} \int Y_{j'm'}^* \Delta_n Y_{jm} d\sigma,$$

y dado que $\Delta_n Y_{jm} = -j(j+1)Y_{jm}$ obtenemos (7.5). A la misma integral se reduce la normalización de los vectores $\mathbf{Y}_{jm}^{(M)}$.

Observemos que sería posible llegar a los vectores esféricos (7.4) incluso sin efectuar la verificación directa que precede de las ecuaciones (7.1) — bastaría para ello apoyarse en consideraciones generales relativas a las propiedades de transformación de las funciones. Tales consideraciones nos condujeron en el párrafo que precede a la conclusión de que una función vectorial de la forma \mathbf{n}_φ corresponde a un valor j del momento cinético que coincide con el orden de las funciones esféricas que intervienen en φ ; si se hace simplemente $\varphi = Y_{jm}$, la función \mathbf{n}_φ corresponderá también a un determinado valor m de la proyección del momento. De esta manera, llegamos inmediatamente a los vectores esféricos $\mathbf{Y}_{jm}^{(L)}$. Pero los razonamientos expuestos en el § 6 acerca de las propiedades de transformación no cambian si se substituye el factor \mathbf{n} en el producto \mathbf{n}_φ por el vector ∇_n o el $\mathbf{n} \times \nabla_n$; obtenemos así los vectores esféricos de los dos otros tipos.

Volvamos a las funciones de onda del fotón. Para un fotón de tipo eléctrico (E_j)

el vector $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ debe tener paridad $(-1)^j$. Esta paridad la poseen los vectores esféricos $\mathbf{Y}_{jm}^{(E)}$ e $\mathbf{Y}_{jm}^{(L)}$; de ellos, sin embargo, solamente el primero satisface la condición de transversalidad. Para un fotón de tipo magnético (M_j) el vector $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ debe tener la paridad $(-1)^{j+1}$; esta paridad la tiene tan sólo el vector esférico $\mathbf{Y}_{jm}^{(M)}$. Por ello, las funciones de onda del fotón con determinado momento j y proyección del mismo m (y energía ω) son

$$\mathbf{A}_{\omega jm}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}} \delta(|\mathbf{k}| - \omega) \mathbf{Y}_{jm}(\mathbf{n}), \quad (7.6)$$

donde en vez de \mathbf{Y}_{jm} hay que escribir $\mathbf{Y}_{jm}^{(E)}$ o $\mathbf{Y}_{jm}^{(M)}$, respectivamente, en el caso de un fotón de tipo eléctrico o magnético; el valor dado de la energía se tiene en cuenta mediante el factor $\delta(|\mathbf{k}| - \omega)$.

Las funciones (7.6) están normalizadas por la condición

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int \omega \omega' \mathbf{A}_{\omega' j' m'}^* \cdot (\mathbf{k}) \mathbf{A}_{\omega jm}(\mathbf{k}) d^3 k = \omega \delta(\omega' - \omega) \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \quad (7.7)$$

Para las funciones de onda de la representación de coordenadas la condición (7.7) equivale a la condición *

$$\frac{1}{4\pi} \int \{ \mathbf{E}_{\omega' j' m'}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{\omega jm}(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_{\omega' j' m'}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_{\omega jm}(\mathbf{r}) \} d^3 x = \omega \delta(\omega' - \omega) \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \quad (7.8)$$

En efecto, la integral del primer miembro de la igualdad, expresada en función de los potenciales, tiene la forma

$$\frac{1}{2\pi} \int \mathbf{A}_{\omega' j' m'}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_{\omega jm}(\mathbf{r}) \omega' \omega d^3 x.$$

Aquí hay que substituir

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\omega jm}(\mathbf{r}) &= \int \mathbf{A}_{\omega jm}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \\ \mathbf{A}_{\omega' j' m'}^*(\mathbf{r}) &= \int \mathbf{A}_{\omega' j' m'}^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Hecha la sustitución, la integración respecto de \mathbf{x} da la función δ , lo que simplifica la integral respecto de \mathbf{k} , y el resto se reduce a la forma (7.7).

Hasta aquí hemos supuesto que los potenciales obedecían al criterio de transversalidad, en el cual el potencial escalar $\Phi = 0$. En diferentes aplicaciones, sin embargo, pueden resultar más convenientes otros criterios de contraste de la onda esférica.

La transformación admisible de los potenciales toma la forma siguiente en la representación de impulsos:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{n} f(\mathbf{k}), \quad \Phi \rightarrow \Phi + f(\mathbf{k}),$$

* Esta condición es del mismo tipo que la (2.22). La aparición del factor $\delta(\omega' - \omega)$ en el segundo miembro de la igualdad se debe al hecho de que aquí se considera un campo (onda esférica) en todo el espacio infinito en vez de un campo en un volumen finito $V = 1$.

donde $f(\mathbf{k})$ es una función arbitraria. Elijámosla en el presente caso de tal manera que los nuevos potenciales se expresen mediante las mismas funciones esféricas y que, como antes, posean una paridad determinada. Para un fotón de tipo eléctrico, estas condiciones limitan la elección de los potenciales a las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} A_{\omega jm}^{(E)}(\mathbf{k}) &= \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}} \delta(|\mathbf{k}| - \omega) (Y_{jm}^{(E)} + C\mathbf{n} Y_{jm}), \\ \Phi_{\omega jm}^{(E)}(\mathbf{k}) &= \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}} \delta(|\mathbf{k}| - \omega) CY_{jm}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

donde C es una constante arbitraria. En cambio, para un fotón de tipo magnético, la adición de dicho vector a $A^{(M)}(\mathbf{k})$ lo privaría de su paridad definida y, por ello, en las mismas condiciones, la elección hecha en (7.6) resulta la única posible.

La probabilidad de que un fotón de momento y paridad determinados se registre moviéndose en la dirección \mathbf{n} situada en el elemento de ángulo sólido $d\omega$, de acuerdo con (3.5) y (7.6) es igual a

$$w(\mathbf{n}) d\omega = |\mathbf{Y}_{jm}^{(E)}(\mathbf{n})|^2 d\omega. \quad (7.11)$$

Esta expresión es la correspondiente a un fotón de tipo E . Pero dado que $|\mathbf{Y}_{jm}^{(M)}|^2 = |\mathbf{Y}_{jm}^{(E)}|^2$, las distribuciones de probabilidades $w(\mathbf{n})$ para los fotones de ambos tipos son las mismas.

El cuadrado del módulo $|\mathbf{Y}_{jm}^{(E)}|^2$ no depende del acimut φ (los factores $e^{\pm im\varphi}$ en las funciones esféricas desaparecen). Por ello, la distribución de probabilidad $w(\mathbf{n})$ es simétrica respecto del eje z . Además, dado que cada uno de los vectores esféricos poseen una determinada paridad, los cuadrados de sus módulos son pares respecto de la inversión, es decir, respecto de la sustitución del ángulo polar $\theta \rightarrow \pi - \theta$; esto significa que la función $w(\theta)$, desarrollada en polinomios de Legendre, contiene solamente polinomios de orden par. La determinación de los coeficientes de dicho desarrollo se reduce al cálculo de integrales de productos de tres armónicos esféricos seguido de la sumación respecto de las componentes. Una y otra operación se efectúan mediante las fórmulas obtenidas en III, §§ 107-108 y conducen al siguiente resultado:

$$w(\theta) = (-1)^{j+1} \frac{(2j+1)^{3/2}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) \begin{pmatrix} j & j & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j & j & 1 \\ j & j & 2n \end{Bmatrix} P_{2n}(\cos \theta). \quad (7.12)$$

Expresemos, finalmente, las componentes de los vectores esféricos en forma de desarrollos en armónicos esféricos. Para ello utilizaremos las «componentes esféricas» de un vector definidas en III, § 107; las componentes f_λ del vector \mathbf{f} son:

$$f_0 = if_x, \quad f_{+1} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(f_x + if_y), \quad f_{-1} = \frac{i}{\sqrt{2}}(f_x - if_y). \quad (7.13)$$

Si se introducen los «versores circulares»:

$$\mathbf{e}^{(0)} = i\mathbf{e}^{(z)}, \quad \mathbf{e}^{(+1)} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}^{(x)} + i\mathbf{e}^{(y)}), \quad \mathbf{e}^{(-1)} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}^{(x)} - i\mathbf{e}^{(y)}) \quad (7.14)$$

$(\mathbf{e}^{(x,y,z)})$ son los versores de los ejes x, y, z , se tendrá

$$\mathbf{f} = \sum_{\lambda} (-1)^{1-\lambda} f_{-\lambda} \mathbf{e}^{(\lambda)}, \quad f_{\lambda} = (-1)^{1-\lambda} \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}^{(-\lambda)} * = \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}^{(\lambda)}. \quad (7.15)$$

Las componentes esféricas de los vectores esféricos se expresan mediante símbolos-3j en función de los armónicos esféricos por las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} (-1)^{j+m+\lambda+1} (\mathbf{Y}_{jm}^{(E)})_{\lambda} &= -\sqrt{j} \begin{pmatrix} j+1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j+1, m+\lambda} + \\ &\quad + \sqrt{j+1} \begin{pmatrix} j-1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j-1, m+\lambda}, \\ (-1)^{j+m+\lambda+1} (\mathbf{Y}_{jm}^{(M)})_{\lambda} &= -\sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j, m+\lambda}, \quad (7.16) \\ (-1)^{j+m+\lambda+1} (\mathbf{Y}_{jm}^{(L)})_{\lambda} &= \sqrt{j+1} \begin{pmatrix} j+1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j+1, m+\lambda} + \\ &\quad + \sqrt{j} \begin{pmatrix} j-1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j-1, m+\lambda} \end{aligned}$$

Estas fórmulas se deducen como sigue. Cada uno de los tres vectores esféricos es de la forma $\mathbf{Y}_{jm} = \mathbf{a} Y_{jm}$, donde \mathbf{a} es uno de los tres vectores (7.3). Por ello

$$\mathbf{Y}_{jm} = \sum_{lm'} \langle lm' | \mathbf{a} | jm \rangle Y_{lm'},$$

y el problema queda reducido a hallar los elementos de matriz de los vectores \mathbf{a} respecto de las funciones propias del momento cinético orbital. Según III (107,6) tenemos

$$\langle lm' | a_{\lambda} | jm \rangle = i(-1)^{j_{\max} - m'} \begin{pmatrix} l & 1 & j \\ -m' & \lambda & m \end{pmatrix} \langle l \| a \| j \rangle,$$

donde, j_{\max} es el mayor de los números l y j . Por consiguiente, basta conocer los elementos de matriz reducidos diferentes de cero $\langle l \| a \| j \rangle$. Para ellos se tienen las fórmulas:

$$\begin{aligned} \langle l-1 \| n \| l \rangle &= \langle l \| n \| l-1 \rangle^* = i\sqrt{l}, \\ \langle l \| \nabla_n \| l-1 \rangle &= i(l-1)\sqrt{l}, \\ \langle l-1 \| \nabla_n \| l \rangle &= i(l+1)\sqrt{l}, \\ \langle l \| [\mathbf{n} \times \nabla_n] \| l \rangle &= i\sqrt{l(l+1)(2l+1)}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

§ 8. Polarización del fotón

El vector polarización e representa para el fotón el papel de «parte espinorial» de la función de onda (con las reservas expresadas en el § 6 al tratar del concepto de spin del fotón).

Los diferentes casos que pueden presentarse para la polarización del fotón en nada se distinguen de los tipos posibles de polarización de una onda electromagnética clásica (véase II, § 48).

La polarización arbitraria e cabe representarla como superposición de dos polarizaciones $e^{(1)}$ y $e^{(2)}$ elegidas de manera arbitraria, si bien ortogonales entre sí ($(e^{(1)} \cdot e^{(2)*}) = 0$). En la descomposición

$$e = e_1 e^{(1)} + e_2 e^{(2)} \quad (8.1)$$

los cuadrados de los módulos de los coeficientes e_1 y e_2 determinan las probabilidades de que el fotón tenga la polarización $e^{(1)}$ o la $e^{(2)}$.

Para estas últimas se pueden elegir dos polarizaciones lineales perpendiculares entre sí. También es posible descomponer una polarización arbitraria en dos polarizaciones circulares con sentidos de rotación opuestos. Los vectores de polarización positiva (levógira) y negativa (dextrógira) los designaremos por $e^{(+1)}$ y $e^{(-1)}$, respectivamente; en el sistema de coordenadas $\xi\eta\zeta$, con el eje ζ en el sentido de la propagación del fotón $n = k/\omega$, se tiene

$$e^{(+1)} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(e^{(\xi)} + ie^{(\eta)}), \quad e^{(-1)} = \frac{i}{\sqrt{2}}(e^{(\xi)} - ie^{(\eta)}). \quad (8.2)$$

La posibilidad de que el fotón tenga (para un impulso dado) dos polarizaciones diferentes significa, con otras palabras, que cada valor propio del impulso es doblemente degenerado. Esta circunstancia está íntimamente ligada con la igualdad a cero de la masa del fotón.

Para una partícula que se mueve libremente y cuya masa no es nula, existe siempre un sistema de reposo. Es claro que precisamente en este sistema de referencia se manifiestan las propiedades intrínsecas de simetría de la partícula como a tal. Desde este punto de vista, hay que considerar la simetría respecto de todas las posibles rotaciones en torno de un centro (es decir, respecto de todo el grupo de simetría esférica). Elemento característico de las propiedades de simetría de una partícula respecto de este grupo es su spin s , que determina la multiplicidad de la degeneración (el número $2s + 1$ de funciones de onda diferentes que se transforman entre sí). En particular, a una partícula con función de onda vectorial (tres componentes) corresponde el spin 1.

En cambio, para una partícula cuya masa es igual a cero no existe un sistema de reposo —en cualquier sistema de referencia se mueve con la velocidad de la luz—. Con relación a una tal partícula existen siempre una dirección y sentido privilegiados en el espacio —la dirección y sentido del vector impulso k (eje ζ)—. Es claro que, en

este caso, no existe simetría respecto de todo el grupo de las rotaciones tridimensionales y que sólo cabe hablar de simetría axil en torno del eje privilegiado.

En el caso de simetría axil, únicamente se conserva la *helicidad* de la partícula — es decir, la proyección del momento cinético sobre el eje ζ —; la designaremos por λ^* . Si también se impone la condición de simetría respecto de las reflexiones en planos que pasan por el eje ζ , los estados que difieren entre sí en el signo de λ corresponderán a un mismo valor del impulso; para $\lambda \neq 0$ tendremos, por lo tanto, una doble degeneración**. Un estado del fotón con determinado impulso corresponde a uno de los tipos de tales estados doblemente degenerados. Dicho estado se describe por una función de onda «espinorial» representada por el vector e en el plano $\xi\eta$; las dos componentes de este vector se transforman entre sí en todas las rotaciones en torno del eje ζ y en las reflexiones en planos que pasan por este eje.

Existe una determinada correspondencia entre los diferentes casos de polarización del fotón y los posibles valores de su helicidad. Esta correspondencia se puede establecer de acuerdo con las fórmulas III (58.3) que ligan las componentes de una función de onda vectorial con las componentes del correspondiente espino de segundo orden***. A las proyecciones $\lambda = +1$ o -1 corresponden los vectores e con una sola componente distinta de cero $e_\xi - ie_\eta$ o $e_\xi + ie_\eta$, es decir, $e = e^{(+1)}$ o $e = e^{(-1)}$, respectivamente. Con otras palabras, los valores $\lambda = +1$ y -1 corresponden a la polarización circular positiva y negativa del fotón (en el § 16 se obtendrá este mismo resultado por cálculo directo de las funciones propias del operador de proyección del spin).

Así, pues, la proyección del momento del fotón sobre la dirección de su movimiento puede tener solamente dos valores (± 1); el valor 0 es imposible.

Un estado de fotón con determinado impulso y polarización es un estado puro (en el sentido explicado en III, § 14); este estado se representa por una función de onda y corresponde a una descripción cuántica completa del estado de la partícula (del fotón). También son posibles estados del fotón del tipo «mezcla» que corresponden a una descripción incompleta, y que se representan no por una función de onda, sino tan sólo por una matriz densidad.

Consideremos un estado de fotón que es una mezcla respecto de su polarización, pero que corresponde a un valor determinado del impulso k . En un estado de este tipo (llamado *estado de polarización parcial*) existe una función de onda «de las coordenadas»****.

La matriz densidad de polarización del fotón constituye un tensor de segundo orden $\rho_{\alpha\beta}$ en un plano perpendicular al vector n (plano $\xi\eta$; los índices α, β toman sólo dos valores). Este tensor es hermítico:

* Para distinguirla de la proyección del momento m sobre una dirección dada (eje z) en el espacio, de la que se trataba en el párrafo precedente.

** Recordaremos que así se clasifican los términos electrónicos de una molécula diatómica (III, § 78).

*** Recordaremos que a las componentes de la función de onda, en tanto que amplitudes de probabilidad de los diferentes valores de la proyección del momento de la partícula (de los que aquí se trata precisamente), corresponden las componentes contravariantes de un espino.

**** En III, § 59, se consideró la matriz análoga para el electrón en la teoría no-relativista.

$$\rho_{\alpha\beta} = \rho_{\beta\alpha}^*, \quad (8.3)$$

y está normalizado por la condición

$$\rho_{\alpha\alpha} \equiv \rho_{11} + \rho_{22} = 1. \quad (8.4)$$

En virtud de (8.3) las componentes diagonales ρ_{11} y ρ_{22} son reales, viniendo determinada la una por la otra por la condición (8.4). En cambio, la componente ρ_{12} es compleja y $\rho_{21} = \rho_{12}^*$. La matriz densidad, por consiguiente, queda totalmente caracterizada por tres parámetros reales.

Si se conoce la matriz densidad de polarización, se puede hallar la probabilidad de que el fotón tenga una polarización determinada cualquiera e . Esta probabilidad se determina por la « proyección » del tensor $\rho_{\alpha\beta}$ sobre la dirección del vector e , es decir, por la cantidad

$$\rho_{\alpha\beta} e_\alpha^* e_\beta. \quad (8.5)$$

Así, las componentes ρ_{11} y ρ_{22} representan las probabilidades de las polarizaciones lineales a lo largo de los ejes ξ y η . La proyección sobre los vectores (8.2) da las probabilidades de las dos polarizaciones circulares:

$$\frac{1}{2} [1 \pm i(\rho_{12} - \rho_{21})]. \quad (8.6)$$

Las propiedades del tensor $\rho_{\alpha\beta}$, por su forma y por su naturaleza, coinciden con las propiedades del tensor $J_{\alpha\beta}$ que describe la polarización parcial de la luz en la teoría clásica (véase II, § 50). Recordaremos aquí algunas de estas propiedades.

En el caso de un estado puro con polarización determinada e , el tensor $\rho_{\alpha\beta}$ se reduce a los productos de las componentes del vector e :

$$\rho_{\alpha\beta} = e_\alpha e_\beta^*. \quad (8.7)$$

En este caso, el determinante $|\rho_{\alpha\beta}| = 0$. En el caso opuesto de un fotón no polarizado, todas las direcciones de polarización son igualmente probables, es decir,

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}; \quad (8.8)$$

se tiene entonces $|\rho_{\alpha\beta}| = 1/4$.

En el caso general, conviene describir la polarización parcial mediante los tres parámetros reales de Stokes ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 ^{*}, en función de los cuales la matriz densidad se expresa en la forma

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}. \quad (8.9)$$

Los tres parámetros toman valores entre -1 y $+1$. En el estado no polarizado, es $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$; para una polarización total del fotón se tiene $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$.

El parámetro ξ_3 caracteriza la polarización lineal a lo largo del eje ξ o η ; la

* ¡No se confunda el símbolo de los parámetros con el símbolo del eje ξ !

probabilidad de que el fotón esté polarizado linealmente a lo largo de estos ejes es igual a $(1 + \xi_3)/2$ o $(1 - \xi_3)/2$. Los valores $\xi_3 = +1$ o -1 corresponden, por ello, a la polarización total en estas direcciones.

El parámetro ξ_1 caracteriza la polarización lineal a lo largo de direcciones que forman los ángulos $\varphi = \pi/4$ o $\varphi = -\pi/4$ con el eje ξ . La probabilidad de que el fotón tenga una polarización lineal en estas direcciones es igual a $(1 + \xi_1)/2$ o $(1 - \xi_1)/2$, respectivamente; es fácil comprobarlo proyectando el tensor $\rho_{\alpha\beta}$ sobre las direcciones $e = (1, \pm 1)/\sqrt{2}$.

Finalmente, el parámetro ξ_2 es el grado de polarización circular; según (8.6), la probabilidad de que el fotón tenga una polarización circular positiva o negativa es igual a $(1 + \xi_2)/2$ o a $(1 - \xi_2)/2$. Dado que las dos polarizaciones corresponden a helicidades $\lambda = \pm 1$, es claro que, en el caso general, ξ_2 es el valor medio de la helicidad del fotón. Observemos también que en el caso de un estado puro con polarización e es

$$\xi_2 = i(e \times e^*) \cdot n. \quad (8.10)$$

Recordemos (véase II, § 50) que respecto de las transformaciones de Lorentz las magnitudes ξ_2 y $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2}$ son invariantes.

Más adelante tendremos que abordar la cuestión de cómo se comportan los parámetros de Stokes respecto de la operación de inversión del tiempo. Es fácil ver que tales parámetros son invariantes respecto de esta transformación. Esta propiedad no depende, evidentemente, de la naturaleza del estado de polarización y, por ello, basta comprobar que se cumple aunque sólo sea en el caso de un estado puro. A la inversión del tiempo corresponde en mecánica cuántica la sustitución de la función de onda por su conjugada compleja (III, § 18). Para una onda plana polarizada, esto significa que hay que efectuar la sustitución *

$$k \rightarrow -k, \quad e \rightarrow -e^*. \quad (8.11)$$

En una transformación de este tipo, la parte simétrica de la matriz densidad

$$\frac{1}{2} (e_\alpha e_\beta^* + e_\beta e_\alpha^*),$$

no cambia, y con ella tampoco cambian los parámetros ξ_1 y ξ_3 . En cuanto al parámetro ξ_2 , que en dicha transformación no cambia se ve teniendo en cuenta (8.10); ello es también evidente por el propio sentido de ξ_2 como valor medio de la helicidad. En efecto, la helicidad es la proyección del momento j sobre la dirección n , es decir, el producto $j \cdot n$; pero la inversión del tiempo cambia el signo de ambos vectores.

* El cambio adicional del signo de e procede de que la inversión del tiempo cambia el signo del potencial vector del campo electromagnético. Por el contrario, el potencial escalar no cambia de signo; por esto para el 4-vector e la inversión del tiempo se traduce en la transformación

$$(e_0, e) \rightarrow (e_0^*, -e^*). \quad (8.11a)$$

En los cálculos que siguen necesitaremos la matriz densidad del fotón escrita en forma cuadridimensional, es decir, en forma de 4-tensor $\rho_{\mu\nu}$. Para un fotón polarizado, descrito por el 4-vector e_μ , es natural definir este tensor mediante la relación

$$\rho_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu^*. \quad (8.12)$$

En el caso del contraste de transversalidad tridimensional se tiene $e = (0, \mathbf{e})$, y si uno de los ejes de coordenadas espaciales se elige a lo largo de \mathbf{n} , las componentes no nulas de este 4-tensor coinciden con (8.7).

Para un fotón no polarizado, en el contraste de transversalidad tridimensional se tiene el tensor $\rho_{\mu\nu}$ con componentes

$$\rho_{ik} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} - n_i n_k), \quad \rho_{0i} = \rho_{i0} = \rho_{00} = 0 \quad (8.13)$$

[si uno de los ejes coincide con la dirección de \mathbf{n} , encontramos de nuevo (8.8)]. Con todo, la utilización directa del tensor $\rho_{\mu\nu}$ en esta forma tridimensional resultaría incómoda. Pero podemos recurrir a una transformación de contraste; para la matriz densidad, ésta equivale a una transformación de la forma

$$\rho_{\mu\nu} \rightarrow \rho_{\mu\nu} + \chi_\mu k_\nu + \chi_\nu k_\mu, \quad (8.14)$$

donde χ_μ son funciones arbitrarias. Haciendo

$$\chi_0 = -\frac{1}{4\omega}, \quad \chi_i = \frac{k_i}{4k^2},$$

obtendremos en vez de (8.13) la expresión cuadridimensional simple

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}. \quad (8.15)$$

La representación cuadridimensional de la matriz densidad de un fotón parcialmente polarizado se obtiene fácilmente escribiendo antes el tensor bidimensional (8.9) en forma tridimensional:

$$\begin{aligned} \rho_{ik} &= \frac{1}{2} (e_i^{(1)} e_k^{(1)} + e_i^{(2)} e_k^{(2)}) + \frac{\xi_1}{2} (e_i^{(1)} e_k^{(2)} + e_i^{(2)} e_k^{(1)}) - \\ &\quad - \frac{i\xi_2}{2} (e_i^{(1)} e_k^{(2)} - e_i^{(2)} e_k^{(1)}) + \frac{\xi_3}{2} (e_i^{(1)} e_k^{(1)} - e_i^{(2)} e_k^{(2)}), \end{aligned}$$

donde $\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}$ son vectores unitarios, versores de los ejes ξ y η . La generalización requerida se consigue substituyendo estos 3-vectores por 4-vectores reales unitarios de tipo espacial $e^{(1)}, e^{(2)}$, ortogonales entre sí y al 4-impulso del fotón k :

$$\begin{aligned} e^{(1)\ 2} &= e^{(2)\ 2} = -1, \\ e^{(1)} e^{(2)} &= 0, \\ e^{(1)} k &= e^{(2)} k = 0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

En el sistema de referencia particular: $e^{(1)} = (0, \mathbf{e}^{(1)})$, $e^{(2)} = (0, \mathbf{e}^{(2)})$. De esta manera, la matriz densidad del fotón se escribe en cuatro dimensiones

$$\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (e_\mu^{(1)} e_\nu^{(1)} + e_\mu^{(2)} e_\nu^{(2)}) + \frac{\xi_1}{2} (e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} + e_\mu^{(2)} e_\nu^{(1)}) - \\ - \frac{i\xi_2}{2} (e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} - e_\mu^{(2)} e_\nu^{(1)}) + \frac{\xi_3}{2} (e_\mu^{(1)} e_\nu^{(1)} - e_\mu^{(2)} e_\nu^{(2)}). \quad (8.17)$$

La conveniencia de tal o cual elección de los 4-vectores $e^{(1)}$ y $e^{(2)}$ depende de las condiciones concretas del problema considerado.

Hay que tener en cuenta que las condiciones (8.16) no fijan la elección de $e^{(1)}$ y $e^{(2)}$ de manera unívoca. Si un 4-vector e_μ cualquiera satisface estas condiciones, a ellas satisfará también un 4-vector arbitrario de la forma $e_\mu + \chi k_\mu$ (en virtud de que $k^2 = 0$). Esta falta de unicidad está ligada con la correspondiente a la matriz densidad y asociada con las transformaciones de contraste.

El primer término de (8.17) corresponde a un estado no polarizado. Por ello cabe substituirlo, según (8.15), por $-(1/2)g_{\mu\nu}$. Esta sustitución de nuevo equivale a una cierta transformación de contraste.

Al operar con un 4-tensor de la forma (8.17), expresado en función de dos 4-vectores independientes, es cómodo aplicar el siguiente método formal. Escribiendo el tensor (8.17) en la forma

$$\rho_{\mu\nu} = \sum_{a,b=1}^2 \rho^{(ab)} e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)},$$

representaremos los coeficientes $\rho^{(ab)}$ por una matriz de segundo orden

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho^{(11)} & \rho^{(12)} \\ \rho^{(21)} & \rho^{(22)} \end{pmatrix}$$

Como toda matriz hermética de segundo orden, es posible descomponerla en cuatro matrices 2×2 independientes — las matrices de Pauli σ_x , σ_y , σ_z y la matriz unidad 1. Esta descomposición tiene la forma

$$\rho = \frac{1}{2} (1 + \xi \cdot \sigma), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (8.18)$$

como es fácil comprobar por comparación directa con (8.17) y utilizando las conocidas expresiones de las matrices de Pauli (18.5) (el hecho de reunir las tres magnitudes ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 en un «vector» ξ tiene, naturalmente, un sentido puramente formal con el que se persigue tan sólo la comodidad de escritura).

PROBLEMA

Escribir la matriz densidad del fotón en la representación en la que los «vectores de base» del sistema de coordenadas son los versores circulares (8.2).

Solución. Las componentes del tensor $\rho'_{\alpha\beta}$ en los nuevos ejes ($\alpha, \beta = \pm 1$) se obtienen proyectando el tensor (8.9) sobre los versores (8.2):

$$\rho'_{11} = \rho_{\alpha\beta} e_{\alpha}^{(+1)*} e_{\beta}^{(+1)}, \quad \rho'_{1-1} = \rho_{\alpha\beta} e_{\alpha}^{(+1)*} e_{\beta}^{(-1)}, \dots$$

$$\rho' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_2 & -\xi_3 + i\xi_1 \\ -\xi_3 - i\xi_1 & 1 - \xi_2 \end{pmatrix}$$

§ 9. Sistema de dos fotones

Razonamientos análogos a los desarrollados en el § 6 permiten también determinar el número de estados posibles en el caso más complicado de un sistema de dos fotones (L. Landau, 1948).

Consideraremos los fotones en el sistema de su « centro de masa », es decir, en un sistema en que los impulsos de los fotones son $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 \equiv \mathbf{k}^*$. La función de onda (en la representación de impulsos) de un sistema constituido por dos fotones puede representarse como tensor tridimensional de segundo orden $A_{ik}(\mathbf{n})$, forma bilineal de las componentes de las funciones de onda vectoriales de ambos fotones; cada uno de los índices de este tensor corresponde a uno de ellos (\mathbf{n} es el vector unitario correspondiente a \mathbf{k}). Por otra parte, la transversalidad de cada uno de los fotones se expresa por la ortogonalidad del tensor A_{ik} al vector \mathbf{n} :

$$A_{il}n_l = 0, \quad A_{lk}n_l = 0. \quad (9.1)$$

La permutación de los dos fotones entre sí significa la permutación de los índices del tensor A_{ik} junto con el cambio de signo de \mathbf{n} . Dado que los fotones obedecen a la estadística de Bose, se tiene

$$A_{ik}(-\mathbf{n}) = A_{ki}(\mathbf{n}) \quad (9.2)$$

El tensor A_{ik} , en general, no es simétrico respecto de sus índices. Descompongámoslo en una parte simétrica (s_{ik}) y una parte antisimétrica (a_{ik}): $A_{ik} = s_{ik} + a_{ik}$. La relación (9.2), y también las condiciones de ortogonalidad (9.1), deben cumplirla, evidentemente, cada una de estas dos partes por separado. De aquí se sigue que

$$s_{ik}(-\mathbf{n}) = s_{ik}(\mathbf{n}), \quad (9.3)$$

$$a_{ik}(-\mathbf{n}) = -a_{ik}(\mathbf{n}). \quad (9.4)$$

La inversión del sistema de coordenadas no cambia de por sí el signo de las componentes del tensor de segundo orden, pero cambia el signo de \mathbf{n} . Por ello, de (9.3) resulta que la función de onda s_{ik} es simétrica respecto de la inversión, es decir, corresponde a estados pares del sistema de fotones; la función de onda a_{ik} , en cambio, corresponde a estados impares.

Un tensor antisimétrico de segundo orden es equivalente (dual) a un vector axil \mathbf{a} cuyas componentes se expresan en función de las componentes del tensor

* Un tal sistema de referencia existe siempre con la única excepción del caso de dos fotones que se mueven paralelamente el uno al otro y en el mismo sentido. El impulso total $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ y la energía total $\omega_1 + \omega_2$ de tales fotones están ligados entre sí por la misma relación que para un solo fotón y, en consecuencia, no existe un sistema de referencia en el que sea $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0$.

mediante la relación $a_i = (1/2)e_{ikl}a_{kl}$, donde e_{ikl} es el tensor unitario antisimétrico (véase II, § 6). Que el tensor a_{kl} sea ortogonal a \mathbf{n} significa que los vectores \mathbf{a} y \mathbf{n} son paralelos*. Podemos escribir, por lo tanto, $\mathbf{a} = \mathbf{n}\varphi(\mathbf{n})$, donde φ es un escalar; de acuerdo con (9.4) debe ser $\mathbf{a}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{a}(\mathbf{n})$ y, por consiguiente,

$$\varphi(-\mathbf{n}) = \varphi(\mathbf{n}).$$

Esta igualdad nos dice que el escalar φ puede construirse linealmente a partir de armónicos esféricos de orden L par exclusivamente (incluido el de orden cero).

Vemos, pues, que el tensor antisimétrico a_{ik} es equivalente por sus propiedades de transformación (respecto de las rotaciones) a un escalar (cf. la nota en la pág. 21). Atribuyendo a este último el «spin» 0, se encuentra que el momento cinético del estado es $J = L$. Así, pues, el tensor a_{ik} corresponde a los estados impares de los sistemas de fotones con momento J par.

Pasemos al tensor simétrico s_{ik} . Dado que éste es par respecto del cambio de signo de \mathbf{n} , le corresponden estados pares del sistema de fotones. Pero de aquí se sigue que todas las componentes s_{ik} se expresan mediante armónicos esféricos de orden L par (incluido el valor $L = 0$). Un tensor simétrico de segundo orden s_{ik} arbitrario se reduce, como es sabido, a un escalar (s_{ii}) y a un tensor simétrico (s'_{ik}) de traza nula ($s'_{ii} = 0$).

Al escalar s_{ii} se hace corresponder el «spin» 0 y, por ello, el momento cinético de los estados que le corresponden es $J = L$, es decir, es par. En cambio, al tensor s'_{ik} corresponde el «spin» 2 (véase III, § 58). Sumando según la regla de composición de los momentos este «spin» con el «momento cinético orbital» L , se encuentra que para un valor dado $J \neq 0$ par son posibles tres estados (con $L = J \pm 2, J$), y para $J \neq 1$ impar, dos estados (con $L = J \pm 1$). Constituye una excepción el caso $J = 0$ con un solo estado ($L = 2$) y $J = 1$ con un solo estado ($L = 2$).

En todo esto, sin embargo, no se tuvo todavía en cuenta la condición de ortogonalidad del tensor s_{ik} respecto de \mathbf{n} . Por consiguiente, del número de estados que hemos obtenido hay que restar aún el número de estados a los que corresponde un tensor simétrico de segundo orden «paralelo» al vector \mathbf{n} . Un tensor de este tipo (designémoslo por s''_{ik}) se puede representar en la forma

$$s''_{ik} = n_i b_k + n_k b_i,$$

donde \mathbf{b} es un cierto vector. Según (9.3) este vector debe cumplir la condición $\mathbf{b}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{b}(\mathbf{n})$. Así, pues, el tensor s''_{ik} responsable de los estados «sobrantes» es equivalente a un vector impar. Este vector debe expresarse, por consiguiente, en función de armónicos esféricos de orden L impar exclusivamente. Observando también que a un vector corresponde el «spin» 1, llegamos a la conclusión de que,

* Tenemos: $a_{ikl} = e_{ikl}a_l$ y la condición de ortogonalidad dará

$$a_{ik}n_k = e_{ikl}a_ln_k = [\mathbf{n} \times \mathbf{a}]_i = 0.$$

para cada momento $J \neq 0$ par, son posibles dos estados (con $L = J \pm 1$), y para cada J impar, un estado solamente (con $L = J$); caso especial lo representa el de $J = 0$ con sólo un estado ($L = 1$).

Reuniendo los resultados a que hemos llegado, se obtiene la tabla siguiente que da el número de estados posibles, pares e impares, de un sistema de dos fotones (con impulso total igual a cero) para diferentes valores del momento cinético total J :

J	Pares	Impares	(9.5)
0	1	1	
1	—	—	
$2k$	2	1	
$2k + 1$	1	—	

(k es un número entero positivo diferente de cero). Vemos así que para J impar no existen estados impares y que el valor $J = 1$ es del todo imposible.

La función de onda de un sistema de dos fotones A_{ik} determina la correlación de sus polarizaciones. La probabilidad de que dos fotones tengan simultáneamente determinadas polarizaciones e_1 y e_2 es proporcional a

$$A_{ik}e_{1i}^*e_{2k}^*.$$

Con otras palabras, si se da la polarización e_1 de un fotón, la polarización del segundo e_2 es proporcional a

$$e_{2k} \propto A_{ik}e_{1i}^*. \quad (9.6)$$

En los estados impares del sistema, A_{ik} coincide con el tensor antisimétrico a_{ik} . En estas condiciones

$$e_2 \cdot e_1^* \propto a_{ik}e_{1i}^*e_{1k}^* = 0,$$

es decir, las polarizaciones de ambos fotones son ortogonales entre sí. En el caso de polarización lineal esto significa que sus direcciones son perpendiculares, y en el caso de polarizaciones circulares, que éstas son de sentidos opuestos.

Un estado par con $J = 0$ se representa por un tensor simétrico que se reduce a un escalar

$$s_{ik} = \text{const} \cdot (\delta_{ik} - n_i n_k).$$

Por ello, de (9.6) se sigue entonces que $e_1 = e_2^*$. En el caso de polarización lineal, esto significa que las dos direcciones son paralelas, y en el caso de polarizaciones circulares, de nuevo significa que sus sentidos son opuestos. Esta última circunstancia era de prever: en cualquier caso, cuando es $J = 0$ debe ser igual a cero la suma de las proyecciones de los momentos de los impulsos sobre una misma dirección \mathbf{k} (en cambio, las proyecciones sobre las direcciones opuestas de \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 , es decir, las helicidades, son entonces las mismas).

CAPÍTULO 2

BOSONES

§ 10. La ecuación de onda para partículas de spin 0

En el capítulo primero se puso de manifiesto cómo es posible construir el modelo cuántico de un campo electromagnético libre partiendo, al hacerlo, de las propiedades conocidas del campo en el límite clásico y apoyándonos en las ideas de la mecánica cuántica ordinaria. El esquema así obtenido del campo como sistema de fotones posee muchos rasgos que pueden trasladarse también a la descripción relativista de las partículas en la teoría cuántica.

El campo electromagnético es un sistema con un número infinito de grados de libertad. Para él no existe la ley de conservación del número de partículas (de fotones), y del conjunto de sus estados posibles forman parte estados con un número arbitrario de partículas*. Pero en la teoría relativista la misma propiedad deben poseerla, en general, también los sistemas de partículas cualesquiera. La conservación del número de partículas en la teoría no-relativista está ligada con la ley de conservación de la masa: la suma de las masas (de las masas en reposo) de las partículas no cambia en sus interacciones; pero la conservación de la suma de las masas en un sistema de electrones significa a la vez la invariabilidad del número de los mismos. En mecánica relativista, en cambio, no existe una ley de conservación de la masa; debe conservarse solamente la energía total del sistema (que incluye también la energía de reposo de las partículas). Por ello, el número de partículas no tiene ya por qué conservarse, y precisamente por esto cualquier teoría relativista de las partículas debe ser una teoría de sistemas con un número infinito de grados de libertad. Dicho de otra manera, una tal teoría de las partículas adquiere el carácter de teoría de un campo.

El formalismo matemático adecuado para describir los sistemas con un número variable de partículas es el de segunda cuantificación (III, §§ 64, 65). En la descripción cuántica del campo electromagnético, el 4-potencial A representa el papel

* De hecho, claro está, el número de fotones cambia tan sólo como resultado de diferentes procesos de interacción.

de operador de segunda cuantificación. Dicho potencial se expresa mediante las funciones de onda (con las coordenadas como argumento) de las partículas individuales (de los fotones) y sus operadores de creación y aniquilación. Un papel análogo en la descripción de un sistema de partículas lo representa el operador ψ de la función de onda cuantificada. Para construirlo es necesario, ante todo, conocer la forma de la función de onda de una partícula libre y la ecuación a que esta función obedece.

Hay que subrayar el carácter auxiliar del concepto de campo de partículas libres. Las partículas reales se encuentran en interacción y el problema que se plantea a la teoría consiste en el estudio de estas interacciones. Pero cualquier interacción se reduce a una colisión, antes y después de la cual se puede considerar el sistema como un conjunto de partículas libres. En el § 1 se hizo notar que éstos son los únicos objetos medibles. Por ello, nos valemos de los campos de partículas libres como medio para representar los estados iniciales y finales.

Comenzaremos la descripción relativista de las partículas libres con el caso de partículas de spin 0. La simplicidad matemática del mismo permite poner de relieve de la manera más clara posible las ideas fundamentales y los rasgos característicos de dicha descripción.

El estado de una partícula libre (sin spin) se puede determinar por completo con sólo dar su impulso p . Así, la energía ϵ de la partícula* se determina de acuerdo con $\epsilon^2 = p^2 + m^2$ (donde m es la masa de la partícula) o en forma cuadridimensional:

$$p^2 = m^2. \quad (10.1)$$

Como es sabido, las leyes de conservación del impulso y de la energía están ligadas con la homogeneidad del espacio y del tiempo, es decir, con la simetría respecto de una traslación paralela arbitraria del 4-sistema de coordenadas. En la descripción cuántica, imponer esta simetría significa que, en dicha transformación de las 4-coordenadas, la función de onda de una partícula con 4-impulso determinado puede únicamente quedar multiplicada por un factor de fase (de módulo igual a la unidad). Esta condición la satisface tan sólo una función exponencial cuyo exponente sea función lineal de las 4-coordenadas. Con otras palabras, la función de onda del estado de una partícula libre con 4-impulso determinado $p^\mu = (\epsilon, \mathbf{p})$ debe ser una onda plana:

$$\text{const} \cdot e^{-ipx}, \quad px = \epsilon t - \mathbf{p}r \quad (10.2)$$

(la elección del signo en el exponente es de suyo un puro convenio en la teoría relativista; se ha elegido de acuerdo con el caso no-relativista).

La ecuación de onda debe admitir las funciones (10.2) como soluciones particulares cualquiera que sea el 4-vector p que cumpla la condición (10.1). Debe ser lineal en tanto que expresión del principio de superposición: cualquier combi-

* Designamos la energía de una partícula individual por ϵ para diferenciarla de la energía E del sistema de partículas.

nación lineal de funciones (10.2) debe también representar un estado posible de la partícula y, por ello, debe ser asimismo solución. Finalmente, ha de ser del orden más bajo posible; un orden más elevado introduciría soluciones extrañas.

El spin es el momento cinético de la partícula en el sistema de referencia en el cual se encuentra en reposo. Si el spin de la partícula es s , su función de onda en el sistema de reposo constituye un espinor tridimensional de orden $2s$. En cambio, para describir la partícula en un sistema de coordenadas arbitrario, su función de onda debe expresarse en la forma correspondiente a las magnitudes cuadridimensionales.

Una partícula de spin 0 se describe en el sistema de reposo por un escalar tridimensional. Este escalar, sin embargo, puede tener una «procedencia» cuadridimensional distinta: puede ser un escalar cuadridimensional ψ , pero también puede ser la cuarta componente de un 4-vector ψ_μ (temporal), para el que en el sistema de reposo es diferente de cero únicamente la componente ψ_0^* .

Para una partícula libre el único operador que puede intervenir en la ecuación de onda es el operador 4-impulso p . Sus componentes son operadores de derivación respecto de las coordenadas y del tiempo:

$$p^\mu = i\partial^\mu = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla \right). \quad (10.3)$$

La ecuación de onda ha de constituir un vínculo diferente entre las magnitudes ψ y ψ_μ establecido mediante el operador p . Este vínculo debe expresarse, claro está, por relaciones relativísticamente invariantes. Tales son las igualdades

$$m\psi_\mu = p_\mu\psi, \quad p^\mu\psi_\mu = m\psi, \quad (10.4)$$

donde m es una constante sin dimensiones que caracteriza la partícula**.

Substituyendo la expresión de ψ_μ dada por la primera ecuación en la segunda, obtendremos

$$(p^2 - m^2)\psi = 0 \quad (10.5)$$

(O. Klein, y V. A. Fok, 1926). En forma explícita, esta ecuación se escribe

$$-\partial_\mu\partial^\mu\psi \equiv \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right)\psi = m^2\psi. \quad (10.6)$$

Substituyendo en ella ψ en forma de onda plana (10.2), obtenemos $p^2 = m^2$, de donde se sigue que m es la masa de la partícula. Obsérvese que la forma de la ecuación (10.5) se podía haber previsto, naturalmente, sin más que tener en cuenta que p^2 es el único operador escalar que se puede construir a partir de p (por esta razón, esta misma ecuación satisfacen cada una de las componentes de la función

* O quizás, de manera análoga, la componente temporal de un 4-tensor de orden superior; este caso, sin embargo, conduciría a ecuaciones de orden más elevado.

** Las constantes m se introducen en (10.4) de tal manera que ψ_μ y ψ tienen las mismas dimensiones. Introducir en estas dos ecuaciones constantes m_1 y m_2 distintas carecería de sentido, ya que siempre sería posible igualarlas redefiniendo ψ o ψ_μ .

de onda de una partícula con spin arbitrario, lo que comprobaremos repetidamente en lo que sigue).

Así, pues, una partícula de spin 0 se representa esencialmente por un solo escalar ψ (cuadridimensional) que obedece a la ecuación de segundo orden (10.5). En las ecuaciones de primer orden (10.4), en cambio, el papel de función de onda lo representa el conjunto de las magnitudes ψ y ψ_μ , reduciéndose el 4-vector ψ_μ al 4-gradiante del escalar ψ . En el sistema de reposo la función de onda de la partícula no depende de las coordenadas (espaciales) y, por ello, las componentes espaciales del 4-vector ψ_μ se anulan, como debía ser.

Con vistas a aplicar luego la segunda cuantificación, es útil expresar la energía e impulso de la partícula en forma de integrales espaciales de ciertas combinaciones lineales (respecto de ψ y ψ^*) que representan por decirlo así la densidad espacial de dichas magnitudes. En otras palabras, hay que hallar el tensor de energía-impulso $T_{\mu\nu}$, que corresponde a la ecuación (10.5). Mediante este tensor, la ley de conservación de la energía y del impulso se expresa por la ecuación

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = 0. \quad (10.7)$$

Siguiendo las reglas generales de la teoría de campos (véase II, § 32), escribiremos para ello un principio de variación del que resulte como consecuencia la ec. (10.5). Este principio debe consistir en imponer la condición de mínimo a la «integral de acción»

$$S = \int L d^4x \quad (10.8)$$

de determinado 4-escalar real L — de la densidad lagrangiana del campo *. A partir del escalar L (y el operador ∂^μ), se puede formar una expresión escalar bilineal real de la forma

$$L = \partial_\mu \psi^* \cdot \partial^\mu \psi - m^2 \psi^* \psi, \quad (10.9)$$

donde m es una constante sin dimensiones. Considerando ψ y ψ^* como variables independientes que describen el campo («coordenadas generalizadas» del campo q), es fácil ver que la ecuación de Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (10.10)$$

($q_{,\mu} \equiv \partial_\mu q$) coincide, en efecto, con las ecuaciones (10.5) para ψ y ψ^* , siendo m la masa de la partícula. Observemos también que la expresión (10.9) se ha escrito con signo tal que el cuadrado de la derivada respecto del tiempo $|\partial\psi/\partial t|^2$ aparezca en L con signo positivo; en el caso opuesto, la acción no podría tener un mínimo (cf. II, § 27). En cambio, la elección del coeficiente numérico en L es puro convenio (y se refleja sólo en el coeficiente de normalización de ψ , véase más adelante).

* El correspondiente operador de segunda cuantificación L se llama *lagrangiano* del campo. Para simplificar la terminología, utilizaremos este término, según convenga, tanto para la densidad lagrangiana «cuantificada» como para la «no cuantificada».

El tensor de energía-impulso se calcula ahora de acuerdo con la fórmula

$$T_{\mu}^{\nu} = \sum q_{\mu} \frac{\partial L}{\partial q_{\nu}} - L \delta_{\mu}^{\nu} \quad (10.11)$$

(la suma se extiende a todas las q). Substituyendo (10.9), obtendremos

$$T_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\psi^{*} \cdot \partial_{\nu}\psi + \partial_{\nu}\psi^{*} \cdot \partial_{\mu}\psi - L g_{\mu\nu} \quad (10.12)$$

(estas cantidades, como debía ser, son reales, lo que queda garantizado por el carácter real de L). En particular,

$$T_{00} = 2 \frac{\partial\psi^{*}}{\partial t} \frac{\partial\psi}{\partial t} - L = \frac{\partial\psi^{*}}{\partial t} \frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla\psi^{*} \cdot \nabla\psi + m^2\psi^{*}\psi, \quad (10.13)$$

$$T_{i0} = \frac{\partial\psi^{*}}{\partial t} \frac{\partial\psi}{\partial x^i} + \frac{\partial\psi^{*}}{\partial x^i} \frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (10.14)$$

El 4-impulso del campo viene dado por la integral

$$P_{\mu} = \int T_{\mu 0} d^3x, \quad (10.15)$$

es decir, T_{00} y T_{0i} representan el papel de densidad de energía y de impulso. Observemos que la magnitud T_{00} es definida positiva.

Cabe utilizar la fórmula (10.13) para normalizar la función de onda. Una onda plana normalizada « a una partícula en el volumen $V = 1$ » se escribe en la forma

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-ipx}. \quad (10.16)$$

En efecto, para esta función es $T_{00} = \varepsilon$ de modo que la energía total en el volumen $V = 1$ coincide con la energía de una sola partícula.

El momento cinético, cuya conservación está ligada con la isotropía del espacio, puede también expresarse como integral espacial; sin embargo, en lo que sigue no nos hará falta esta representación del momento cinético.

Finalmente, junto con las leyes de conservación ligadas de manera directa con la simetría espacio-temporal, las ecuaciones (10.4) admiten otra ley de conservación. En efecto, es fácil comprobar que en virtud de (10.4) (y de las mismas ecuaciones para ψ^{*}) se cumple la ecuación

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0, \quad (10.17)$$

donde

$$j_{\mu} = m (\psi^{*}\psi_{\mu} + \psi_{\mu}\psi) = i [\psi^{*}\partial_{\mu}\psi - (\partial_{\mu}\psi^{*})\psi]. \quad (10.18)$$

Es claro por esto que j^{μ} representa el papel de 4-vector densidad de corriente. Desde este punto de vista (10.17) es la ecuación de continuidad, que representa la ley de conservación de la magnitud

$$Q = \int j_0 d^3x, \quad (10.19)$$

donde

$$j_0 = j^0 = i \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right). \quad (10.20)$$

Hay que observar que j_0 no es una magnitud definida positiva. Ya este hecho muestra que, en el caso general, es sin duda alguna imposible interpretarla como densidad de probabilidad de localización espacial de la partícula. El sentido de la ley de conservación expresada por la ecuación (10.17) se pone en claro en el párrafo que sigue.

§ 11. Partículas y antipartículas

Siguiendo las reglas generales para llevar a cabo la segunda cuantificación, hemos de considerar el desarrollo de una función de onda arbitraria en funciones propias de un sistema completo de estados posibles de una partícula libre, por ejemplo, en ondas planas ψ_p :

$$\psi = \sum_p a_p \psi_p, \quad \psi^* = \sum_p a_p^* \psi_p^*$$

Hecho esto, habría que interpretar los coeficientes a_p , a_p^* como operadores a_p , a_p^+ de aniquilación y de creación de partículas en los correspondientes estados * .

Sin embargo, topamos inmediatamente con el siguiente hecho fundamental, que resulta nuevo comparado con el caso de la teoría no-relativista. En una onda plana, solución de la ecuación (10.5), la energía ϵ debe satisfacer (para un impulso p) tan sólo la condición $\epsilon^2 = p^2 + m^2$, es decir, puede tener dos valores: $\pm \sqrt{p^2 + m^2}$. Pero solamente los valores positivos de ϵ pueden, sin embargo, tener el sentido físico de energía de una partícula libre. Por otra parte, no cabe simplemente prescindir de los valores negativos: la solución general de la ecuación de onda resulta tan sólo de la superposición de todas sus soluciones particulares independientes. Esta circunstancia indica la necesidad de un cierto cambio en la interpretación de los coeficientes del desarrollo de ψ y ψ^* en la segunda cuantificación.

Escribiremos este desarrollo en la forma

$$\psi = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} a_p^{(+)} e^{i(p \cdot r - \epsilon t)} + \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} a_p^{(-)} e^{i(p \cdot r + \epsilon t)}, \quad (11.1)$$

donde en la primera suma aparecen las ondas planas normalizadas de acuerdo con (10.16) con «frecuencias» positivas, y en la segunda, con frecuencias negativas; en ambos casos, ϵ representa una cantidad positiva: $\epsilon = +\sqrt{p^2 + m^2}$. En la segunda cuantificación, los coeficientes $a_p^{(+)}$ en la primera suma los substituiremos como de ordinario por operadores a_p de aniquilación de partículas. En cam-

* Atribuimos a las funciones ψ el 4-impulso p como subíndice pensando en designar más adelante por ψ_{-p} las funciones con «frecuencia negativa». En cambio, a los operadores a , a^+ se atribuye como subíndice el impulso tridimensional p , que determina por completo el estado de una partícula real.

bio, en la segunda suma observamos que, al formar luego elementos de matriz, la dependencia temporal de sus sumandos corresponderá, no a la aniquilación, sino a la creación de partículas: el factor $e^{iet} = (e^{-iet})^*$ corresponde a una partícula más, con energía ϵ , en el estado final (cf. el final del § 2). De acuerdo con esto, substituiremos los coeficientes $a_{\mathbf{p}}^{(-)}$ por operadores $b_{-\mathbf{p}}^+$ de creación de ciertas otras partículas. Cambiando también en la segunda suma de (11.1) la variable de suma-ción \mathbf{p} por $-\mathbf{p}$ (a fin de que el factor exponencial tome la forma $e^{-i(pr-et)}$), obtendremos los operadores ψ en la forma

$$\Psi = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^+ e^{ipx}), \quad \Psi^+ = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} (a_{\mathbf{p}}^+ e^{ipx} + b_{\mathbf{p}} e^{-ipx}). \quad (11.2)$$

De esta manera, todos los operadores $a_{\mathbf{p}}$, $b_{\mathbf{p}}$ quedan multiplicados por funciones con la «correcta» dependencia respecto del tiempo ($\sim e^{-iet}$), y los operadores $a_{\mathbf{p}}^+$, $b_{\mathbf{p}}^+$, por las funciones complejo-conjugadas. Esto precisamente ofrece la posibilidad de interpretar, de acuerdo con las reglas generales, los operadores $a_{\mathbf{p}}$, $b_{\mathbf{p}}$ como operadores de aniquilación, y $a_{\mathbf{p}}^+$, $b_{\mathbf{p}}^+$, como operadores de creación de partículas con impulsos \mathbf{p} y energías ϵ .

Llegamos así a la idea de partículas de dos especies que intervienen juntas y en un plano de igualdad. Se dice de ellas que son *partículas* y *antipartículas* (el sentido de estos nombres se explica más adelante). A unas corresponde, en el formalismo de segunda cuantificación, los operadores $a_{\mathbf{p}}$, $a_{\mathbf{p}}^+$, y a las otras, los operadores $b_{\mathbf{p}}$, $b_{\mathbf{p}}^+$. Ambos tipos de partículas, cuyos operadores aparecen en un mismo operador ψ , poseen por ello mismo iguales masas.

Cabe llegar también al origen de estos resultados desde el punto de vista de las propias condiciones de invariancia relativista.

Una transformación de Lorentz representa, en sentido matemático, una rotación de un sistema de coordenadas cuadridimensional que cambia la dirección del eje del tiempo (junto con los giros puramente espaciales que no alteran el eje del tiempo, constituyen el grupo de transformaciones llamado *grupo de Lorentz**). Todas estas transformaciones poseen la misma propiedad general de que conservan el eje t dentro de una determinada hoja del cono de luz, con lo que se traduce el principio físico de existencia de una velocidad límite de propagación de las señales.

Pero desde un punto de vista puramente matemático, también es un giro el cambio simultáneo de signo de todas las cuatro coordenadas (*inversión cuadridimensional*): el determinante de esta transformación es igual a $+1$, al igual que el determinante de cualquier otra rotación. Pero en este caso el eje del tiempo pasa de una hoja del cono de luz a la otra. Aunque esta circunstancia caracteriza la inexistencia física de una tal transformación (considerada como transformación

* Observemos que el conjunto de todos los giros tridimensionales (espaciales) constituye de suyo un grupo, que es subgrupo del grupo de Lorentz. En cambio, el conjunto de transformaciones de Lorentz no constituye un grupo de por sí: el resultado de dos transformaciones de Lorentz consecutivas puede reducirse a una pura rotación espacial.

del sistema de referencia), en el aspecto matemático, sin embargo, la diferencia se reduce tan sólo a que (en virtud del carácter pseudoeuclídeo de la métrica) dicha rotación no se puede efectuar sin admitir al mismo tiempo una transformación compleja de las coordenadas.

Es natural suponer que esta diferencia debe ser no esencial cuando se trata de la invariancia en cuatro dimensiones. Entonces, cualquier expresión invariante respecto de las transformaciones de Lorentz ha de ser también invariante respecto de la inversión cuadridimensional. Esta condición aplicada al caso de un operador escalar ψ se formula de manera precisa en el § 13. Pero podemos ya observar inmediatamente que, en cualquier caso, conducirá a la necesidad de que en los operadores ψ existan a la vez términos con los dos signos delante de ϵ en los exponentes, ya que la sustitución $t \rightarrow -t$ cambia precisamente este signo.

Volvamos a la expresión (11.2) y establezcamos las relaciones de conmutación entre los operadores a_p , a_p^+ (y b_p , b_p^+). En el caso de los fotones, lo hicimos (para los operadores c_p , c_p^+), partiendo de la analogía con los osciladores, es decir, en esencia partiendo de las propiedades del campo electromagnético en el límite clásico. No existe ahora una tal analogía. Para establecer las reglas de conmutación (de Bose o de Fermi) entre operadores podemos guiarnos tan sólo por la forma del hamiltoniano construido a partir de ellos. Este último se obtiene (véase III, § 64) substituyendo ψ y ψ^* en vez de ψ y ψ^* en la integral $\int T_{00} d^3x$ ^{*}. Obtenemos así

$$H = \sum_p \epsilon (a_p^+ a_p + b_p^+ b_p). \quad (11.3)$$

Es fácil ver que un resultado razonable para los valores propios de este hamiltoniano se obtiene solamente si los operadores satisfacen las reglas de conmutación de Bose:

$$\{a_p, a_p^+\}_- = \{b_p, b_p^+\}_- = 1 \quad (11.4)$$

(todos los demás pares de operadores comutan; entre ellos, comutan todos los operadores de partículas a_p , a_p^+ con todos los operadores de antipartículas b_p , b_p^+). En efecto, en tal caso

$$H = \sum_p \epsilon (a_p^+ a_p + b_p^+ b_p + 1).$$

Los valores propios de los productos $a_p^+ a_p$ y $b_p^+ b_p$ son números enteros positivos N_p y \bar{N}_p — los números de partículas y de antipartículas. En cuanto a la constante aditiva infinita $\Sigma \epsilon$ («energía del vacío»), podemos de nuevo prescindir de ella sin más:

* En la teoría no-relativista se suele escribir en este caso el operador adjunto ψ^+ a la izquierda de ψ . Aquí, en cambio, el orden es indiferente, puesto que la permutación de ψ y ψ^+ conduciría únicamente a la permutación de los operadores a_p y b_p que gozan de iguales propiedades. Sin embargo, una vez elegido un orden, cualquiera, es necesario atenerse siempre a la misma regla.

$$E = \sum_p \epsilon (N_p + \bar{N}_p) \quad (11.5)$$

[cf. fórmula (3.1) y la nota a la misma]. Esta expresión es definida positiva y corresponde a la idea de dos especies de partículas que realmente existen. De manera análoga, para el impulso total del sistema de partículas obtendremos

$$P = \sum_p p (N_p + \bar{N}_p). \quad (11.6)$$

Si en vez de (11.4) se hubieran adoptado las relaciones de conmutación de Fermi (anticonmutadores en vez de comutadores), se obtendría

$$H = \sum_p \epsilon (a_p^\dagger a_p - b_p^\dagger b_p + 1),$$

y en vez de (11.5), la expresión sin sentido físico $\sum \epsilon (N_p - \bar{N}_p)$, que no es definida positiva y que, por ello, no puede representar la energía de un sistema de partículas libres.

Así, pues, las partículas de spin 0 son bosones.

Consideremos ahora la integral Q (10.19). Substituyendo en j^0 las funciones ψ y ψ^* por los operadores ψ y ψ^+ y efectuando la integración, se obtendrá

$$Q = \sum_p (a_p^\dagger a_p - b_p^\dagger b_p) = \sum_p (a_p^\dagger a_p - b_p^\dagger b_p - 1). \quad (11.7)$$

Los valores propios de este operador (una vez substraída la constante aditiva no esencial $\sum 1$) son:

$$Q = \sum_p (N_p - \bar{N}_p), \quad (11.8)$$

es decir, son iguales a las diferencias de los números enteros de partículas y de antipartículas.

Hasta aquí, en tanto hemos considerado partículas libres, prescindiendo de cualquier interacción entre ellas, el sentido de la ley de conservación de la cantidad Q [como, sea dicho de paso, también de las leyes de conservación del impulso y de la energía totales (11.5-6)] sigue siendo, claro está, en grado considerable un puro convenio: se conserva, en realidad, no solamente esta suma, sino también cada uno de los números N_p , \bar{N}_p por separado. Si se conservará o no la cantidad Q cuando exista interacción, depende del carácter de ésta. Si Q se conserva (es decir, si el operador Q commuta con el hamiltoniano de la interacción), la expresión (11.8) indica qué limitación introduce esta ley en los cambios posibles del número de partículas: pueden aparecer y desaparecer tan sólo pares «partícula + antipartícula».

Si la partícula posee carga eléctrica, su antipartícula debe tener carga de signo

opuesto: si una y otra tuviesen cargas iguales, la creación o la destrucción de un par de ellas contradiría una rigurosa ley de la naturaleza, la de conservación de la carga eléctrica total. Veremos más adelante (§ 32) cómo esta oposición de cargas (en la interacción de las partículas con el campo electromagnético) resulta automáticamente en la teoría.

La cantidad Q se llama a veces *carga* del campo de partículas dadas. Para partículas con carga eléctrica, Q determina, en particular, la carga total del sistema (medida tomando la carga elemental e como unidad). Hay que subrayar, sin embargo, que las partículas y las antipartículas pueden ser eléctricamente neutras.

Vemos así cómo el carácter de la dependencia relativista de la energía respecto del impulso (las dos raíces de la ecuación $\epsilon^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$), junto con las condiciones de invariancia relativista, conduce en la teoría cuántica a un nuevo principio de clasificación de las partículas, a la posibilidad de que existan pares de partículas diferentes (partícula-antipartícula) que se corresponden entre sí de la manera descrita más arriba. Esta notable predicción fue hecha por vez primera (en el caso de partículas de spin 1/2) por Dirac en 1930, antes todavía del descubrimiento de hecho de la primera antipartícula, el positón.

§ 12. Partículas realmente neutras

Al aplicar la segunda cuantificación a las funciones ψ (11.1), los coeficientes $a_{\mathbf{p}}^{(+)}$ y $a_{\mathbf{p}}^{(-)}$ se consideraron como operadores relativos a partículas diferentes. Sin embargo, no tiene por qué ser siempre así: como caso particular, los operadores de aniquilación y de creación que aparecen en ψ pueden referirse a un mismo tipo de partículas [como ocurría en el caso de los fotones, cf. (2.17)]. Designando en este caso dichos operadores por $c_{\mathbf{p}}$ y $c_{\mathbf{p}}^+$, escribiremos el operador ψ en la forma

$$\psi = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} (c_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + c_{\mathbf{p}}^+ e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}). \quad (12.1)$$

El campo descrito por este operador corresponde a un sistema de partículas iguales de las cuales cabe decir que « coinciden con sus antipartículas ».

El operador (12.1) es hermítico ($\psi^+ = \psi$); podemos decir que el campo es real. Es natural que un tal campo posea un número de « grados de libertad » mitad que un campo complejo, para el cual los operadores ψ y ψ^+ no coinciden.

Debido a esto, el lagrangiano de un campo expresado por un operador real ψ debe contener un factor $1/2$ más [en comparación con (10.9)]*

$$L = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \psi \cdot \partial^{\mu} \psi - m^2 \psi^2). \quad (12.2)$$

* De manera análoga a como aparece el factor suplementario 1/2 en el operador densidad energía (2.10) del campo electromagnético (expresado en función de los operadores reales \mathbf{E} y \mathbf{H}) en comparación con la densidad de energía del fotón (3.2) expresada mediante su función de onda compleja; cf. la nota de la pág. 14).

El correspondiente tensor de energía-impulso es

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \Psi \cdot \partial_\nu \Psi - L g_{\mu\nu}, \quad (12.3)$$

de modo que el operador densidad de energía se escribe

$$T_{00} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 - L = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + (\nabla \Psi)^2 + m^2 \Psi^2 \right]. \quad (12.4)$$

Substituyendo (12.1) en la integral $\int T_{00} d^3x$, obtendremos el hamiltoniano del campo

$$H = \frac{1}{2} \sum_p \epsilon (c_p^+ c_p + c_p c_p^+). \quad (12.5)$$

De aquí se siguen de nuevo la necesidad de la cuantificación de Bose:

$$\{c_p, c_p^+\} = 1, \quad (12.6)$$

y los valores propios de la energía (prescindiendo como antes de la constante aditiva)

$$E = \sum_p \epsilon_p N_p. \quad (12.7)$$

En cambio, la cuantificación de Fermi conduciría a un resultado carente de sentido — a un valor E que no depende de los N_p .

La «carga» Q del campo considerado es igual a cero. Esto es ya evidente sin más que tener en cuenta que Q debe cambiar de signo al cambiar las partículas por antipartículas y que, en este caso, unas y otras «coinciden». Debido a esto mismo, tampoco existe el 4-vector densidad de corriente. En efecto, la expresión

$$j_\mu = i [\Psi^+ \partial_\mu \Psi - (\partial_\mu \Psi^+) \Psi] \quad (12.8)$$

para el operador del 4-vector que se conserva j se anula cuando $\Psi = \Psi^+$ (el vector $\Psi \partial_\mu \Psi$ no se conserva). Esto a su vez significa que no existe ninguna ley de conservación especial que pueda limitar los cambios posibles del número de partículas. Es evidente que, en cualquier caso, las partículas así caracterizadas son eléctricamente neutras.

Las partículas de esta especie se califican de *realmente neutras* para distinguirlas de las partículas eléctricamente neutras para las que existen antipartículas. Mientras que estas últimas se pueden destruir tan sólo a pares (transformándose en fotones), las partículas realmente neutras pueden aniquilarse una a una.

La estructura del operador- Ψ (12.1) es la misma que la estructura de los operadores (2.17-20) del campo electromagnético. En este sentido cabe decir que incluso los propios fotones son partículas realmente neutras. En el caso del campo electromagnético, el carácter hermítico de los operadores estaba vinculado con el carácter real de los campos eléctrico y magnético en tanto que magnitudes físicas medibles (en el límite clásico). En cambio, en el caso de los operadores- Ψ de partículas no existe tal relación, puesto que a ellos no corresponde en general ningún tipo de

magnitudes directamente medibles. En relación con esto conviene recordar una vez más que los operadores- ψ de la teoría actual son, probablemente, «conceptos rudimentarios» que desaparecerán en una teoría consecuente.

La no existencia de un 4-vector corriente que se conserve es una propiedad general de las partículas realmente neutras y no está vinculada con el hecho de que el spin sea nulo (así, tal ocurre también en el caso de los fotones). Físicamente, ello expresa la ausencia de las correspondientes limitaciones impuestas a la variación del número de partículas. Desde un punto de vista formal, sin embargo, existe una relación directa entre la no existencia de una corriente que se conserve y el carácter real del campo — el hecho de que el operador ψ es hermítico.

El lagrangiano de un campo complejo

$$L = \partial_\mu \psi^+ \cdot \partial^\mu \psi - m^2 \psi^+ \psi \quad (12.9)$$

es invariante respecto de la multiplicación del operador- ψ por un factor de fase arbitrario, es decir, respecto de la transformación *

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi, \quad \psi^+ \rightarrow e^{-i\alpha} \psi^+. \quad (12.10)$$

En particular, el lagrangiano no varía en la transformación infinitesimal

$$\psi \rightarrow \psi + i\delta\alpha \cdot \psi, \quad \psi^+ \rightarrow \psi^+ - i\delta\alpha \cdot \psi^+. \quad (12.11)$$

En una variación infinitamente pequeña de las «coordenadas generalizadas» q , el lagrangiano experimenta una variación

$$\delta L = \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}} \delta q_{,\mu} \right) = \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}} \right) \delta q + \sum \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}} \delta q \right)$$

(la suma se extiende a todas las q). El primer término se anula en virtud de las «ecuaciones del movimiento» (de las ecuaciones de Lagrange). Interpretando como «coordenadas» q los operadores ψ y ψ^+ y haciendo $\delta\psi = i\delta\alpha \cdot \psi$, $\delta\psi^+ = -i\delta\alpha \cdot \psi^+$, obtendremos

$$\delta L = i\delta\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\psi \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\mu}} - \psi^+ \frac{\partial L}{\partial \psi^+_{,\mu}} \right).$$

De aquí se sigue que la condición de invariancia del lagrangiano ($\delta L = 0$) es equivalente a la ecuación de continuidad ($\partial_\mu j^\mu = 0$) para el 4-vector

$$j^\mu = i \left(\psi^+ \frac{\partial L}{\partial \psi^+_{,\mu}} - \psi \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\mu}} \right). \quad (12.12)$$

Es fácil comprobar que para el lagrangiano (12.9) esta forma conduce a la corriente (12.8).

Así, pues, en el formalismo matemático de la teoría, la existencia de una corriente que se conserva resulta estar ligada con la invariancia del lagrangiano

* El conjunto de estas transformaciones se llama *grupo de contraste*.

respecto de las transformaciones (12.10) (*W. Pauli*, 1941). En cambio, el lagrangiano del campo realmente neutro (12.2) no goza de esta simetría.

§ 13. Transformaciones C, P, T

En contraste con la inversión cuadridimensional, la inversión en tres dimensiones (inversión espacial) no se puede reducir a giros de un sistema de coordenadas de cuatro dimensiones: el determinante de esta transformación es igual, no a + 1, sino a — 1. Las propiedades de simetría de las partículas respecto de la inversión (P) no se pueden, por ello, determinar de antemano mediante consideraciones de invariancia relativista *.

Cuando se aplica a una función de onda escalar, la operación inversión consiste en la transformación

$$P\psi(t, \mathbf{r}) = \pm \psi(t, -\mathbf{r}), \quad (13.1)$$

donde el signo + o — en el segundo miembro corresponde a un escalar o a un pseudoescalar, respectivamente.

Se sigue de aquí que es necesario distinguir dos aspectos en el comportamiento de la función de onda en la inversión. Uno de ellos está ligado con la dependencia de la función de onda respecto de las coordenadas. En la mecánica cuántica no-relativista se consideró únicamente esta cuestión, que condujo al concepto de paridad de un estado (que llamaremos ahora *paridad orbital*) característica de las propiedades de simetría del movimiento de la partícula. Si el estado posee una determinada paridad orbital (+ 1 o — 1), esto significa que

$$\psi(t, -\mathbf{r}) = \pm \psi(t, \mathbf{r}).$$

El otro aspecto es el comportamiento (en la inversión de los ejes de coordenadas) de la función de onda en un punto dado (que conviene imaginar que coincide con el origen de coordenadas). Este comportamiento conduce al concepto de *paridad intrínseca* de la partícula. A la paridad intrínseca + 1 o — 1 corresponden (para partículas de spin 0) los dos signos en la definición (13.1). La paridad total de un sistema de partículas viene dada por el producto de sus paridades intrínsecas y la paridad orbital del movimiento relativo.

Las propiedades «intrínsecas» de simetría de las diferentes partículas se manifiesta, claro está, tan sólo en los procesos de transformación de unas en otras. En mecánica cuántica no-relativista, el concepto análogo al de paridad intrínseca es la paridad de un determinado estado ligado de un sistema compuesto (por ejemplo, de un núcleo). Para la teoría relativista, en cambio, que no hace distinción

* El grupo de Lorentz complementado con la inversión espacial se llama *grupo de Lorentz completo o ampliado* (a diferencia del grupo original, que no contiene P, que, en relación con esto, se califica de *propio*). El grupo completo contiene todas las transformaciones que conserven el eje *t* dentro de la correspondiente hoja del cono de luz.

fundamental alguna entre partículas compuestas y elementales, dicha paridad intrínseca no se distingue de la paridad intrínseca de las partículas que en la teoría no-relativista figuran como elementales. En el dominio no-relativista, en el que estas últimas se comportan como entes invariables, sus propiedades intrínsecas de simetría son inobservables y, por ello, el considerarlas estaría desprovisto de sentido físico.

La paridad intrínseca se expresa en el formalismo de segunda cuantificación por el comportamiento de los operadores- ψ en la inversión. A un campo escalar y pseudoescalar corresponden las leyes de transformación

$$P: \psi(t, \mathbf{r}) \rightarrow \pm \psi(t, -\mathbf{r}). \quad (13.2)$$

Pero el propio sentido de la acción de la inversión sobre los operadores- ψ debe formularse dándole la forma de determinada transformación de los operadores de aniquilación y creación de partículas, de tal manera que, como resultado de la misma, se cumpla la relación (13.2). Es fácil ver que esta transformación es la

$$P: a_{\mathbf{p}} \rightarrow \pm a_{-\mathbf{p}}, \quad b_{\mathbf{p}} \rightarrow \pm b_{-\mathbf{p}} \quad (13.3)$$

(y lo mismo para los operadores adjuntos). En efecto, esta sustitución aplicada al operador da

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} (a_{\mathbf{p}} e^{-i\omega t + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} + b_{\mathbf{p}}^* e^{i\omega t - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}) \quad (13.4)$$

y cambiando luego la variable de sumación ($\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$), lo lleva a la forma $\pm \psi(t, -\mathbf{r})$. Así, pues, si designamos por $\psi^P(t, \mathbf{r})$ el operador que resulta de aplicar la transformación (13.3), se puede escribir la igualdad

$$\psi^P(t, \mathbf{r}) = \pm \psi(t, -\mathbf{r}). \quad (13.5)$$

Observemos que la transformación (13.3) posee un carácter del todo natural: la inversión cambia el signo del vector polar \mathbf{p} , de modo que las partículas con impulso \mathbf{p} se substituyen por partículas con impulso $-\mathbf{p}$.

En (13.3) los operadores $a_{\mathbf{p}}$ y $b_{\mathbf{p}}$ se transforman o bien ambos con los signos superiores, o bien ambos con los signos inferiores. En el formalismo de segunda cuantificación esto expresa la identidad de las paridades intrínsecas de las partículas y de las antipartículas (de spin 0). Pero esta identidad es ya de suyo evidente teniendo en cuenta que las partículas y las antipartículas (de spin 0) se representan por funciones de onda de exactamente el mismo tipo (escalares o pseudoescalares).

El operador- ψ (13.4) posee también determinada simetría respecto de una transformación que carece de análoga en la teoría no-relativista; esta transformación se llama *conjugación de carga* y se designa por el símbolo C. Si se permutan entre sí todos los operadores $a_{\mathbf{p}}$ y $b_{\mathbf{p}}$:

$$C: a_{\mathbf{p}} \rightarrow b_{\mathbf{p}}, \quad b_{\mathbf{p}} \rightarrow a_{\mathbf{p}} \quad (13.6)$$

(es decir, si se substituyen las partículas por antipartículas y recíprocamente), ψ

pasa a ser el operador «conjuguado respecto de la carga» ψ^C , siendo

$$\psi^C(t, \mathbf{r}) = \psi^+(t, \mathbf{r}). \quad (13.7)$$

Esta igualdad expresa la simetría con que intervienen en la teoría los conceptos de partículas y de antipartículas.

Obsérvese que la definición de la transformación que hemos llamado de conjugación de carga encierra una cierta arbitrariedad formal carente de importancia. El sentido de la transformación no varía si en la definición (13.6) se introduce un factor de fase arbitrario:

$$a_p \rightarrow e^{ia} b_p, \quad b_p \rightarrow e^{-ia} a_p.$$

Se tendría entonces

$$\psi \rightarrow e^{ia} \psi^+, \quad \psi^+ \rightarrow e^{-ia} \psi,$$

y la doble aplicación de esta transformación conduciría, como antes, a la identidad ($\psi \rightarrow \psi$). Todas estas definiciones, sin embargo, son equivalentes entre sí. Dado que las propiedades de los operadores- ψ no cambian al multiplicarlos por un factor de fase (cf. el final del párrafo que precede), podemos simplemente llamar $\psi e^{ia/2}$ a lo que hemos llamado ψ , con lo cual volvemos a la definición de la conjugación de carga en la forma (13.6-7).

Dado que la conjugación de carga substituye una partícula por una antipartícula no idéntica a ella, dicha transformación no conduce, en general, a que surja una nueva característica de la partícula o de un sistema de partículas como a tales. En otras palabras, para el operador C no existen, en general, ni estados propios ni valores propios.

Una excepción en este sentido la constituyen los sistemas formados por un número igual de partículas y de antipartículas. El operador C transforma este sistema en sí mismo y, por ello, en este caso existen para él estados propios que corresponden a los valores propios $C = \pm 1$ (estos últimos se siguen del hecho que $C^2 = 1$). Para describir la simetría de carga cabe entonces considerar una partícula y una antipartícula como dos «estados de carga» diferentes de una misma partícula, estados que difieren entre sí en el valor del número cuántico de carga $Q = \pm 1$. La función de onda del sistema aparecerá como producto de una función de onda orbital por otra «de carga» y deberá ser simétrica respecto a la permutación simultánea de todas las variables (de coordenadas y de cargas) de un par cualquiera de partículas. La simetría de la función «de carga» determinará, en cambio, la paridad de carga del sistema (véase el problema)*.

Conforme se subrayó en el § 1, la teoría relativista no hace distinción alguna de principio entre partículas «compuestas» y «elementales». En consecuencia, también el concepto de paridad de carga, que surge de manera natural en el caso de los sistemas «realmente neutros», debe aplicarse también a las partículas «ele-

* En todas estas consideraciones nos referimos a partículas de spin 0. El método de análisis descrito se generaliza directamente también a los otros casos — véase, por ejemplo, el problema en el § 27.

mentales » realmente neutras. En el formalismo de segunda cuantificación este concepto se representa por la igualdad

$$\Psi^C = \pm \Psi; \quad (13.8)$$

los signos + y — corresponden a partículas cuya paridad de carga es par e impar, respectivamente.

En el § 11 se indicó que la invariancia relativista debe significar también la invariancia respecto de la 4-inversión. En relación con el operador de un campo escalar (en el sentido de las 4-rotaciones), esto significa que en una tal transformación debe ser:

$$\Psi(t, \mathbf{r}) \rightarrow \Psi(-t, -\mathbf{r})$$

siempre con el signo + en el segundo miembro. En términos de la transformación de los operadores a_p , b_p , el paso de $\Psi(t, \mathbf{r})$ a $\Psi(-t, -\mathbf{r})$ se consigue permutando en (13.4) los coeficientes de e^{-ipx} y de e^{ipx} , es decir, mediante la sustitución

$$a_p \rightarrow b_p^+, \quad b_p \rightarrow a_p^+. \quad (13.9)$$

Al substituir los operadores-a por operadores-b, esta transformación incluye la sustitución recíproca de partículas por antipartículas. Vemos así que en la teoría relativista surge de manera natural la necesidad de imponer la invariancia respecto de la transformación en la que, junto con la inversión espacial (P) y el cambio de sentido del tiempo (T), se aplica también la conjugación de carga (C); esto es lo que afirma el llamado *teorema CPT**.

Sin embargo, en relación con esto conviene subrayar que aunque los razonamientos expuestos aquí y en los §§ 11 y 12 representan el desarrollo natural de los conceptos de la mecánica cuántica ordinaria y de la teoría clásica de la relatividad, los resultados así obtenidos se salen de sus marcos tanto en la forma (operadores- ψ , que contienen a la vez operadores de creación y de aniquilación de partículas) como en su naturaleza (partículas y antipartículas). Por ello, es imposible considerar estos resultados como una necesidad puramente lógica. Contienen en sí nuevos principios físicos para los cuales el único criterio de validez puede ser tan sólo la experiencia.

Si designamos por $\Psi^{CPT}(t, \mathbf{r})$ el operador (13.4) una vez se le ha aplicado la transformación (13.9), se puede escribir

$$\Psi^{CPT}(t, \mathbf{r}) = \Psi(-t, -\mathbf{r}). \quad (13.10)$$

Formulada de esta manera la 4-inversión como transformación (13.9), con ello hemos establecido también para el operador- ψ la formulación de la transformación que consiste en cambiar el sentido del tiempo: junto con la transformación CP debe dar (13.9)**. Teniendo en cuenta las definiciones (13.3) y (13.6), encontramos por ello

* Formulado por J. Schwinger, 1953; G. Lüders, 1954, y W. Pauli, 1955.

** La transformación CP se llama *inversión combinada*.

$$T: a_p \rightarrow \pm a_{-p}^+, b_p \rightarrow \pm b_{-p}^+ \quad (13.11)$$

[los signos \pm corresponden a los mismos signos que en (13.3)]. El sentido de esta transformación es por completo natural: el cambio de sentido del tiempo no sólo transforma un movimiento con impulso \mathbf{p} en un movimiento con impulso $-\mathbf{p}$, sino que también permuta los estados inicial y final en los elementos de matriz; por consiguiente, los operadores de aniquilación de las partículas con impulso \mathbf{p} se substituyen por los operadores de creación de partículas $-\mathbf{p}$. Efectuando en (13.4) la sustitución (13.11) y cambiando la variable de sumación ($\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$), se encuentra que *

$$\Psi^T(t, \mathbf{r}) = \pm \Psi^+(-t, \mathbf{r}). \quad (13.12)$$

Esta igualdad es análoga a la regla ordinaria de cambio de sentido del tiempo en la mecánica cuántica: si un cierto estado se describe por la función de onda $\psi(t, \mathbf{r})$, el estado «con sentido opuesto del tiempo» se describe por la función $\psi^*(-t, \mathbf{r})$; el paso a la función conjugada compleja está ligado con la necesidad de conservar el carácter «correcto» de la dependencia respecto del tiempo alterado por el cambio de signo de t (E. P. Wigner, 1932).

Dado que la transformación T, y con ella también CPT, permutan los estados iniciales y finales, carecen para ambas de sentido los conceptos de estados propios y de valores propios. No conducen, en consecuencia, a nuevas características de las partículas como tales. En el § 70 se considerarán, sin embargo, las consecuencias a que llevan al ser aplicadas a los procesos de dispersión.

Veamos cómo cambia en las transformaciones C, P, y T el operador 4-vector corriente j^μ (12.8). La transformación (13.2) junto con la sustitución $(\partial_0, \partial_i) \rightarrow (\partial_0, -\partial_i)$ da

$$P: (j^0, \mathbf{j})_{t, \mathbf{r}} \rightarrow (j^0, -\mathbf{j})_{t, -\mathbf{r}}, \quad (13.13)$$

como debe ser para un verdadero 4-vector. La transformación (13.7) daría simplemente

$$C: (j^0, \mathbf{j})_{t, \mathbf{r}} \rightarrow (-j^0, -\mathbf{j})_{t, \mathbf{r}}, \quad (13.14)$$

si los operadores Ψ y Ψ^+ comutaran entre sí. Sin embargo, la no commutabilidad de estos operadores resulta tan sólo de la no commutabilidad de a_p y a_p^+ (o de b_p y b_p^+) con iguales \mathbf{p} ; pero en virtud de las reglas de commutación (11.4), la transposición de estos operadores conduce solamente a la aparición de términos que no dependen de los números de ocupación, es decir, del estado del campo. Prescindiendo [como se hizo en (11.5-6)] de estos términos, que carecen de importancia, volvemos a la regla (13.14) que tiene un sentido natural: al substituir las partículas

* Si se definiera la operación T con independencia de las otras transformaciones, se plantearía la misma arbitrariedad en la elección de un factor de fase que se tiene para la operación C. Sin embargo, la condición de simetría CPT permite tan sólo la elección arbitraria de un factor de fase en una de las transformaciones, C o T.

por antipartículas, la conjugación de carga cambia el signo de todas las componentes de la 4-corriente.

Dado que la operación de invertir el sentido del tiempo está ligada con la transposición de los estados iniciales y finales, al aplicarla a un producto de operadores cambia el orden de los factores. Así,

$$(\Psi^+ \partial_\mu \Psi)^T = (\partial_\mu \Psi)^T (\Psi^+)^T.$$

En el presente caso, sin embargo, este hecho carece de importancia: en virtud de la commutabilidad de los operadores- ψ (en el sentido antes indicado), el volver los factores al orden inicial no se refleja en el resultado. Observando también que en el cambio de sentido del tiempo se tiene $(\partial_0, \partial_i) \rightarrow (-\partial_0, \partial_i)$, encontramos para la regla de transformación de la corriente :

$$T: (j^0, j_t, r) \rightarrow (j^0, -j_{-t}, r) \quad (13.15)$$

El vector tridimensional j cambia de signo en correspondencia con el sentido clásico de esta magnitud.

Finalmente, para la transformación CPT tenemos

$$CPT: (j^0, j_t, r) \rightarrow (-j^0, -j_{-t}, -r) \quad (13.16)$$

de acuerdo con el sentido de esta operación en tanto que 4-inversión. En relación con esto hay que recalcar que, al reducirse la 4-inversión a una rotación del 4-sistema de coordenadas, con relación a ella no existen en absoluto dos tipos de 4-tensores (tensores en sentido estricto y pseudotensores), cualquiera que sea su orden.

Hasta aquí hemos supuesto que las partículas eran libres. Pero un significado real lo adquieren los números cuánticos de paridad tan sólo cuando se consideran las partículas en interacción, cuando con ellas se vinculan determinadas reglas de selección, que permiten o prohíben determinados procesos. Un tal sentido, sin embargo, lo pueden tener únicamente las características que se conserven — es decir, los valores propios de operadores que comutan con el hamiltoniano de las partículas en interacción.

En virtud de la invariancia relativista, en cualquier caso debe comutar con el hamiltoniano el operador de la transformación CPT. En lo que concierne a las transformaciones C y P (y con ellas también T) por separado, muestra la experiencia que las interacciones electromagnéticas y fuertes son invariantes con relación a aquéllas, de modo que los correspondientes números cuánticos de paridad se conservan en estas interacciones. En la interacción débil, en cambio, se violan dichas leyes de conservación *.

Anticipándonos un poco, indicaremos que el operador de interacción de partículas cargadas con el campo electromagnético viene dado por el producto de los

* T. D. Lee y C. N. Yang (1956) fueron los primeros en lanzar la idea de una posible no-conservación de la paridad en las interacciones débiles.

operadores 4-vector A y j . Dado que la conjugación de carga cambia el signo de j , la invariancia de la interacción electromagnética respecto de esta transformación significa que también debe cambiar el signo de A . En otras palabras, los fotones son partículas impares respecto de la conjugación de carga.

El comportamiento indicado de los operadores A está de acuerdo con las propiedades del 4-potencial en la teoría clásica. En efecto, de las transformaciones

$$C : (A_0, A) \rightarrow (-A_0, -A)_{t, r}$$

$$P : (A_0, A) \rightarrow (A_0, -A)_{t, -r}$$

$$CPT : (A_0, A) \rightarrow (-A_0, -A)_{-t, -r}$$

se sigue que

$$T : (A_0, A) \rightarrow (A_0, -A)_{-t, r},$$

lo que corresponde precisamente a la regla clásica de transformación de los potenciales del campo electromagnético al cambiar el sentido del tiempo.

PROBLEMA

Determinar las paridades de carga y espacial de un sistema de dos partículas de spin 0 (una partícula y una antipartícula) con momento orbital l en su movimiento relativo.

Solución. La permutación de las coordenadas de las partículas es equivalente a la inversión (respecto del centro de masa) y por ello multiplica la función orbital por $(-1)^l$; la permutación de las variables de carga es equivalente a la conjugación de carga y multiplica el factor «de carga» en la función de onda por el valor de C buscado. De la condición $C(-1)^l = 1$ se sigue

$$C = (-1)^l.$$

La paridad espacial P del sistema es el producto de la paridad orbital y de la paridad intrínseca de ambas partículas. Dado que esta última es la misma para una partícula y su antipartícula, en el presente caso P coincide con la paridad orbital: $P = (-1)^l$.

§ 14. Ecuación de onda para una partícula de spin 1

Una partícula de spin 1 se describe en su sistema de reposo por una función de onda de tres componentes — por un vector tridimensional (de una tal partícula frecuentemente se dice que es *vectorial*). Por su origen cuadridimensional, éstas pueden ser las tres componentes espaciales de un 4-vector ψ^μ (espacial) o bien las de un 4-tensor antisimétrico de segundo orden $\psi^{\mu\nu}$ tales que, en el sistema de reposo, se anulan la componentes temporal (ψ^0) y las espaciales (ψ^{ik})★.

La ecuación de onda — que es un vínculo diferencial entre las magnitudes ψ^μ , $\psi^{\mu\nu}$ — se establece mediante relaciones que escribiremos en la forma

$$i\psi_{\mu\nu} = p_\mu\psi_\nu - p_\nu\psi_\mu, \quad (14.1)$$

* Adelantando ideas, indicaremos que al conjunto del 4-vector ψ_μ y del 4-tensor $\psi^{\mu\nu}$ corresponde el conjunto de los espinores cuadridimensionales de segundo orden $\xi^{\alpha\beta}$, $\eta^{\alpha\beta}$, $\xi^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, siendo $\xi^{\alpha\beta}$ y $\eta^{\alpha\beta}$ espinores simétricos que se transforman entre sí en la inversión (§ 19).

$$im^2\psi_{\mu} = p^{\nu}\psi_{\mu\nu}, \quad (14.2)$$

donde $p = i\partial$ (*A. Proca*, 1936). Aplicando a ambos miembros de la ecuación (14.2) la operación p^{μ} , obtendremos (dado el carácter antisimétrico de $\psi_{\mu\nu}$)

$$p^{\mu}\psi_{\mu} = 0. \quad (14.3)$$

De (14.1-2) se puede eliminar $\psi_{\mu\nu}$ substituyendo la primera ecuación en la segunda. Teniendo en cuenta (14.3), se obtendrá

$$(p^2 - m^2)\psi_{\mu} = 0, \quad (14.4)$$

donde de nuevo vemos (cf, § 10) que m es la masa de la partícula. De esta manera, una partícula libre con spin 1 se puede describir por un solo 4-vector ψ^{μ} cuyas componentes satisfacen la ecuación de segundo orden (14.4) y también la condición suplementaria (14.3) que excluye de ψ^{μ} la parte que pertenece al spin 0.

En el sistema de reposo, en el que ψ_{μ} no depende de las coordenadas espaciales, encontramos que $p^0\psi_0 = 0$. Dado que, al mismo tiempo, es $p^0\psi_0 = m\psi_0$, vemos que en dicho sistema de referencia $\psi_0 = 0$, como debía ser. Junto con ψ_0 se anulan también las ψ_{ik} .

Una partícula de spin 1 puede poseer diferente paridad intrínseca, lo que depende de si ψ^{μ} es un vector propiamente dicho o un pseudovector. En el primer caso

$$P\psi^{\mu} = (\psi^0, -\psi^i),$$

y en el segundo

$$P\psi^{\mu} = (-\psi^0, \psi^i).$$

Las ecuaciones (14.1-2) pueden obtenerse mediante un principio de variación con el lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}\psi_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu*} - \frac{1}{2}\psi^{\mu\nu*}(\partial_{\mu}\psi_{\nu} - \partial_{\nu}\psi_{\mu}) - \frac{1}{2}\psi^{\mu\nu}(\partial_{\mu}\psi_{\nu}^{*} - \partial_{\nu}\psi_{\mu}^{*}) + m^2\psi_{\mu}\psi^{\mu*}. \quad (14.5)$$

El papel de coordenadas generalizadas independientes lo representan en él ψ_{μ} , ψ_{μ}^{*} , $\psi_{\mu\nu}$, $\psi_{\mu\nu}^{*}$ *

Para hallar el tensor de energía-impulso, la fórmula (10.11) no es del todo conveniente en el presente caso, ya que conduciría a un tensor no simétrico que requeriría una simetrización adicional. En vez de esto, cabe utilizar la fórmula

$$\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\sqrt{-g} = -\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} + \frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (14.6)$$

en la que se supone que L se ha expresado en forma adecuada a coordenadas curvilineas arbitrarias (véase II, § 94). Si L contiene solamente las componentes del

* Si se llevara a cabo la variación tan sólo respecto de ψ_{μ} [suponiendo que antes se ha expresado $\psi_{\mu\nu}$ en función de ψ_{μ} de acuerdo con (14.1)], la ecuación (14.3) debería introducirse como condición suplementaria, independiente del principio de variación.

propio tensor métrico $g_{\mu\nu}$ (pero no sus derivadas respecto de las coordenadas), la fórmula anterior se simplifica:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial g^{\mu\nu}} = 2 \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} L$$

(recordaremos que $d \ln g = -g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}$).

Dado que las derivadas en la fórmula (14.6) no se refieren a las cantidades ψ_μ , $\psi_{\mu\nu}$, al aplicarla no es necesario considerar estas cantidades como independientes; cabe entonces utilizar directamente la relación (14.1) y escribir el lagrangiano (14.5) en la forma

$$L = -\frac{1}{2} \psi_{\mu\nu} \psi_{\lambda\rho}^* g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} + m^2 \psi_\mu \psi_\nu^* g^{\mu\nu}. \quad (14.7)$$

Entonces

$$T_{\mu\nu} = -\psi_{\mu\lambda} \psi_{\nu}{}^{\lambda*} - \psi_{\mu\lambda}^* \psi_{\nu}{}^{\lambda} + m^2 (\psi_\mu^* \psi_\nu + \psi_\nu^* \psi_\mu) + g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \psi_{\lambda\rho} \psi^{\lambda\rho*} - m^2 \psi_\lambda^* \psi_\lambda \right). \quad (14.8)$$

En particular, la densidad de energía viene dada por una expresión definida positiva

$$T_{00} = \frac{1}{2} \psi_{ik} \psi_{ik}^* + \psi_0 i \psi_0^* + m^2 (\psi_0 \psi_0^* + \psi_i \psi_i^*). \quad (14.9)$$

El 4-vector densidad de corriente que se conserva viene dado por la expresión

$$j^\mu = i (\psi^{\mu\nu*} \psi_\nu - \psi^{\mu\nu} \psi_\nu^*). \quad (14.10)$$

Es posible hallarlo, de acuerdo con la fórmula (12.12), derivando el lagrangiano (14.5) respecto de las derivadas $\partial_\mu \psi_\nu$. En particular,

$$j^0 = i (\psi^{0k*} \psi_k - \psi^{0k} \psi_k^*) \quad (14.11)$$

y no es una magnitud esencialmente positiva.

Una onda plana, normalizada a una partícula en el volumen $V = 1$, se escribe:

$$\psi_\mu = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_\mu e^{-ipx}, \quad u_\mu u^\mu* = -1, \quad (14.12)$$

donde u_μ es el 4-vector unitario de polarización, que [en virtud de (14.3)] satisface la condición de transversalidad en cuatro dimensiones

$$u_\mu p^\mu = 0. \quad (14.13)$$

En efecto, substituyendo la función (14.12) en (14.9) y (14.11), obtendremos

$$T_{00} = -2\varepsilon^2 \psi_\mu \psi^{\mu*} = \varepsilon, \quad j^0 = 1.$$

En contraposición con el fotón, una partícula vectorial de masa no nula tiene tres direcciones de polarización independientes. Para las correspondientes amplitudes véase (16.21).

La matriz densidad para partículas vectoriales parcialmente polarizadas se

define de manera que en un estado puro se reduzca al producto

$$\rho_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu^*$$

[análogo al (8.7) para fotones]. Según (14.12-13), éste satisface las condiciones

$$p^\mu \rho_{\mu\nu} = 0, \quad \rho_\nu^\mu = -1 \quad (14.14)$$

Para partículas totalmente no-polarizadas, $\rho_{\mu\nu}$ debe ser de la forma $\rho_{\mu\nu} = a g_{\mu\nu} + b p_\mu p_\nu$. Determinando los coeficientes a y b mediante (14.14), obtendremos:

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{3} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right) \quad (14.15)$$

La cuantificación del campo vectorial se lleva a cabo de manera del todo análoga al caso del campo escalar y no hay necesidad de repetir de nuevo todos los razonamientos. El hecho de que la expresión (14.9) para T_{00} sea definida positiva, mientras que no lo es j^0 dado por (14.11), conduce, como en el caso escalar, a la necesidad de aplicar la cuantificación de Bose.

Existe una íntima relación entre las propiedades de un campo vectorial realmente neutro y el campo electromagnético. El campo vectorial neutro se representa por un operador- ψ real:

$$\Psi_\mu = \sum_{p_a} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (c_{p_a} u_\mu^{(\alpha)} e^{-ipx} + c_{p_a}^+ u_\mu^{(\alpha)*} e^{ipx}), \quad (14.16)$$

donde c_{p_a} , $c_{p_a}^+$ son operadores bosónicos de aniquilación y de creación de partículas (el subíndice α numera las tres polarizaciones independientes). El lagrangiano de este campo es:

$$L = \frac{1}{4} \Psi_{\mu\nu} \Psi^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \Psi^{\mu\nu} (\partial_\mu \Psi_\nu - \partial_\nu \Psi_\mu) + \frac{1}{2} m^2 \Psi_\mu \Psi^\mu. \quad (14.17)$$

Al campo electromagnético corresponde el caso $m = 0$. El 4-vector ψ^μ es entonces el 4-potencial A^μ , y el 4-tensor $\psi^{\mu\nu}$, el tensor del campo $F^{\mu\nu}$, ligado con el potencial por la definición (14.1). La ecuación (14.2) se transforma en $\partial^\nu \psi_{\mu\nu} = 0$, lo que corresponde al segundo par de ecuaciones de Maxwell. De ella no se sigue ya la condición (14.3), la cual, de esta manera, deja de ser necesaria. Dada la ausencia de una condición suplementaria, no hay necesidad de considerar en el lagrangiano Ψ_μ y $\Psi_{\mu\nu}$ como «coordenadas» independientes y el lagrangiano (14.17) se reduce a

$$L = -\frac{1}{4} \Psi_{\mu\nu} \Psi^{\mu\nu} \quad (14.18)$$

de acuerdo con la conocida expresión clásica del lagrangiano del campo electromagnético. Este lagrangiano, junto con el tensor $\Psi_{\mu\nu}$, es invariante respecto de una transformación de contraste arbitraria de los «potenciales» Ψ_μ . Se ve claramente la relación de esta circunstancia con el hecho de que la masa sea nula: el lagrangiano (14.17) no posee esta propiedad debido al término $m^2 \Psi_\mu \Psi^\mu$.

§ 15. Ecuación de onda para partículas con mayores valores enteros del spin

Dado que las ecuaciones de onda (14.3-4) se siguen inmediatamente una vez se da la masa y el spin de la partícula, la utilización práctica del lagrangiano se reduce no tanto a deducir estas ecuaciones, como a la construcción de expresiones para la energía, el impulso y la carga del campo.

Para este fin, conforme ya se hizo notar, cabe utilizar en vez de (14.5) la expresión (14.7) y esta última se puede transformar todavía más. Utilizando (14.1), escribiremos (14.7) en la forma

$$\begin{aligned} L &= -(\partial_\mu \psi^*) (\partial^\mu \psi) + (\partial_\nu \psi^*) (\partial^\mu \psi) + m^2 \psi_\mu \psi^* = \\ &= -(\partial_\mu \psi^*) (\partial^\mu \psi) + m^2 \psi_\mu^* \psi^\mu + \partial_\nu (\psi_\mu^* \partial^\mu \psi) - \psi_\mu^* \partial^\mu \partial_\nu \psi. \end{aligned}$$

En virtud de (14.3), el último término se anula y el penúltimo es una divergencia. Prescindiendo de ella, obtendremos el lagrangiano

$$L' = -(\partial_\mu \psi^*) (\partial^\mu \psi) + m^2 \psi_\mu^* \psi^\mu. \quad (15.1)$$

Este tiene la misma estructura que el lagrangiano (10.9) de una partícula con spin 0, difiriendo solamente en que el escalar ψ se substituye por el 4-vector ψ_μ , y en el signo. Esto último se debe a que ψ_μ es un vector espacial, de modo que $\psi_\mu \psi^\mu < 0$, mientras que para una partícula escalar se tiene $\psi \psi^* > 0$.

Si se construye el 4-tensor energía-impulso y el 4-vector corriente mediante el lagrangiano (15.1), obtendremos expresiones de la misma forma que en el caso de las expresiones (10.12) y (10.18) para un campo escalar:

$$T_{\mu\nu} = -\partial_\mu \psi^\lambda * \cdot \partial_\nu \psi_\lambda - \partial_\nu \psi^\lambda * \cdot \partial_\mu \psi_\lambda - L' g_{\mu\nu}, \quad (15.2)$$

$$j_\mu = -i [\psi_\lambda^* \partial_\mu \psi^\lambda - (\partial_\mu \psi_\lambda^*) \psi^\lambda]. \quad (15.3)$$

Estas expresiones difieren de (14.8) y (14.10) también en una divergencia. Pero los valores locales de estas cantidades no tienen (como ya se subrayó anteriormente) un sentido físico profundo. Tan sólo importan las integrales de volumen P_μ (10.15) y Q (10.19), que coincidirán para ambas expresiones de $T_{\mu\nu}$ y de j_μ .

Esta manera de describir la situación se generaliza inmediatamente al caso de partículas con spin arbitrario (entero). La función de onda de una partícula de spin s es un 4-tensor irreducible de orden s , es decir, un tensor que es simétrico respecto de todos sus índices y que se anula al contraer respecto de cualquier par de ellos:

$$\psi_{\mu_1 \mu_2 \dots} = \psi_{\nu_1 \nu_2 \dots}, \quad \psi_{\mu_1 \mu_2 \dots}^\mu = 0. \quad (15.4)$$

Este tensor debe satisfacer la condición suplementaria de transversalidad en cuatro dimensiones:

$$p^\mu \psi_{\mu \dots} = 0, \quad (15.5)$$

y cada una de sus componentes ha de ser solución de la ecuación de segundo orden

$$(p^2 - m^2) \psi \dots = 0. \quad (15.6)$$

En el sistema de reposo, la condición (15.5) conduce a que se anulen todas las componentes del 4-tensor entre cuyos índices figure el 0. En otras palabras, la función de onda en el sistema de reposo (es decir, en el límite no-relativista) se reduce, como debía, a un 3-tensor irreducible de orden s cuyo número de componentes independientes es igual a $2s + 1$.

El lagrangiano, el tensor de energía impulso y el vector corriente para un campo de partículas de spin s difieren de (15.1-3) tan sólo en la substitución de ψ_λ por $\psi_{\lambda\mu\dots}$.

Una onda plana normalizada se escribe:

$$\psi^{\mu\nu\dots} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u^{\mu\nu\dots} e^{-ipx}, \quad u_{\mu\nu\dots}^* u^{\mu\nu\dots} = -1, \quad (15.7)$$

y en ella la amplitud de la onda satisface las condiciones

$$u^{\dots\mu} p_\mu = 0. \quad (15.8)$$

Se tienen $2s + 1$ estados de polarización independientes.

La cuantificación del campo se efectúa mediante una generalización evidente a partir de los casos de spin 0 ó 1.

El esquema expuesto es por completo suficiente para el fin que nos habíamos fijado — la descripción de un campo de partículas libres. Otra cosa es el plantearse el problema de describir la interacción de partículas con el campo electromagnético. Esta interacción debería introducirse en un lagrangiano a partir del cual se podrían obtener todas las ecuaciones sin necesidad de imponer condiciones suplementarias (véase también más adelante la nota en la página 128). Sin embargo, de hecho resulta que una tal descripción de la interacción es aplicable tan sólo a los electrones — a partículas de spin $1/2$ (véase § 2). Por ello, en el caso de otros valores del spin este problema podría tener tan sólo un interés metódico.

Hay que observar que para todos los valores del spin $s > 1$ (enteros y semi-enteros) resulta imposible formular un principio de variación a partir de una función solamente (tensorial o espinorial) cuyo orden corresponda al spin dado. Para conseguirlo resulta imprescindible introducir como elementos auxiliares otras cantidades tensoriales o espinoriales de orden inferior. El lagrangiano se elige entonces de tal manera que estas magnitudes auxiliares se anulan automáticamente en virtud de las ecuaciones del campo de partículas libres que se siguen del principio de variación*.

§ 16. Estados de helicidad de una partícula**

En la teoría relativista el momento cinético orbital \mathbf{l} y el spin \mathbf{s} de una partícula en movimiento no se conservan por separado. Únicamente se conserva el momento cinético total $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$. Por ello, tampoco se conserva la proyección del spin en una dirección dada cualquiera (eje z) y, en consecuencia, esta cantidad no sirve

* Véase M. FIERZ, W. PAULI, Proc. Roy. Soc., A173, 211 (1939). En este trabajo se lleva a cabo el programa indicado para partículas con spin $3/2$ y 2 .

** El contenido de este párrafo se refiere a partículas de spin cualquiera (entero o semientero).

para enumerar los estados (espinoriales) de polarización de una partícula en movimiento.

Se conserva, sin embargo, la proyección del spin sobre la dirección orientada del impulso: dado que $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, el producto $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}$ coincide con el producto $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} (\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|)$ que sí se conserva. Esta magnitud se llama *helicidad** (la hemos considerado ya para el fotón en el § 8). Sus valores propios los designaremos por λ ($\lambda = -s, \dots, +s$) y los estados de una partícula con valores determinados de λ se llamarán estados de helicidad.

Sea $\psi_{\mathbf{p}\lambda}$ la función de onda (onda plana) que describe el estado de la partícula con valores determinados de \mathbf{p} y λ , y $u^{(\lambda)}(\mathbf{p})$, su amplitud; para abreviar las notaciones no escribiremos los índices de las componentes de esta función (para spin entero, estos son los índices de un 4-tensor).

Vimos en los párrafos precedentes que en la descripción relativista de las partículas con spin (entero) no nulo es necesario introducir una función de onda con un número de componentes mayor que $2s + 1$. Sin embargo, el número de componentes independientes sigue siendo igual a $2s + 1$; las componentes «sobrantes» se eliminan imponiendo condiciones suplementarias en virtud de las cuales estas componentes se anulan en el sistema de reposo (en el capítulo que sigue veremos esto mismo para s semientero).

De acuerdo con las fórmulas de transformación del momento cinético (véase II, § 14), la helicidad es invariante respecto de las transformaciones de Lorentz que no modifiquen la dirección (orientada) de \mathbf{p} sobre la cual se proyecta dicho momento. Por ello el número λ conserva en tales transformaciones su sentido de número cuántico y para estudiar las propiedades de simetría de los estados de helicidad cabe utilizar un sistema de referencia en el cual el impulso $|\mathbf{p}| \ll m$ (en el límite, el sistema de reposo). Entonces $\psi_{\mathbf{p}\lambda}$ se reduce a una función de onda no-relativista de $2s + 1$ componentes. Designemos su amplitud por $w^{(\lambda)}(\mathbf{n})$, indicando como argumento el versor $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ a lo largo del cual se cuantifica el momento cinético. La amplitud $w^{(\lambda)}$ es función propia del operador $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}$:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}) w^{(\lambda)}(\mathbf{n}) = \lambda w^{(\lambda)}(\mathbf{n}). \quad (16.1)$$

En la representación espinorial, $w^{(\lambda)}$ es un espinor simétrico contravariante de orden $2s$; según las fórmulas de correspondencia III (57.2) sus componentes se pueden numerar también de acuerdo con los valores de la proyección del spin σ sobre un eje fijo z^{**} .

* En ruso, spiral'nost'.

** Las consideraciones desarrolladas (como también la enumeración de los posibles valores λ) se refieren a partículas de masa no nula. Para las partículas de masa cero no existe sistema de reposo y la helicidad puede tener únicamente dos valores $\lambda = \pm s$. Esto último está ligado con la circunstancia recordada ya en el § 8: los estados de una tal partícula se clasifican de acuerdo con su comportamiento respecto del grupo de simetría axial, grupo que admite tan sólo una degeneración doble de los niveles (desde el punto de vista de las propiedades de la ecuación de onda, esto significa que en el paso al límite $m \rightarrow 0$ el sistema de ecuaciones para una partícula de spin s se descompone en ecuaciones independientes que corresponden a partículas sin masa y con spins $s, s - 1, \dots$). Así, para el fotón $\lambda = \pm 1$ y el papel de componentes $w^{(\lambda)}$ lo representan los vectores tridimensionales $e^{(\pm 1)}$ (8.2).

En la representación de impulsos, las funciones de onda de los estados considerados coinciden en esencia con las amplitudes $u^{(\lambda)}(\mathbf{p})$. Concretamente,

$$\psi_{p\lambda}(\mathbf{k}) = u^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \delta^{(2)}(\mathbf{v} - \mathbf{n}) = u^{(\lambda)}(\mathbf{p}) \delta^{(2)}(\mathbf{v} - \mathbf{n}), \quad (16.2)$$

donde el impulso en tanto que variable independiente se ha designado por \mathbf{k} , para distinguirlo de su valor propio \mathbf{p} , y $\mathbf{v} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ para diferenciarlo de $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$. * En el límite no-relativista

$$\psi_{n\lambda}(\mathbf{v}) = w^{(\lambda)}(\mathbf{v}) \delta^{(2)}(\mathbf{v} - \mathbf{n}) = w^{(\lambda)}(\mathbf{n}) \delta^{(2)}(\mathbf{v} - \mathbf{n}). \quad (16.3)$$

De manera más detallada esta expresión debería escribirse en la forma

$$\psi_{n\lambda}(\mathbf{v}, \sigma) = w_{\sigma}^{(\lambda)}(\mathbf{v}) \delta^{(2)}(\mathbf{v} - \mathbf{n}),$$

donde se indica explícitamente también la variable independiente discreta σ .

El operador helicidad $s \cdot n$ comuta con los operadores j_z y j^2 . En efecto, el operador momento cinético está ligado con una rotación infinitesimal del sistema de coordenadas, y el producto escalar de dos vectores es invariante respecto de cualquier rotación. En consecuencia, existen estados estacionarios en los que la partícula posee simultáneamente valores determinados del momento cinético j , de su proyección $j_z = m$ y de la helicidad λ . A tales estados los llamaremos *estados de helicidad esféricos*.

Determinemos las funciones de onda de estos estados en la representación de impulsos. Esto puede hacerse valiéndose de las fórmulas obtenidas en el §a del apéndice**. Junto con el sistema de coordenadas fijo en el espacio xyz (respecto del cual se definen las funciones $\psi_{jm\lambda}$) introduciremos también un sistema $\xi\eta\zeta$ «móvil» con el eje ζ a lo largo de \mathbf{v} . Substituyendo en la fórmula (a.2) el símbolo m' por λ escribamos

$$\psi_{jm\lambda}(\mathbf{k}) = \psi_{j\lambda}^{(0)} D_{\lambda m}^{(j)}(\mathbf{v}).$$

Dado que el eje ζ coincide con el eje de cuantificación del momento cinético en la función $\psi_{j\lambda}^{(0)}$, ésta coincide con la amplitud $u^{(\lambda)}$. La función de onda normalizada (véase más adelante) es

$$\psi_{jm\lambda}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{\lambda m}^{(j)}(\mathbf{v}) u^{(\lambda)}(\mathbf{k}). \quad (16.4)$$

Se plantea aquí, sin embargo, una cuestión de elección de fases ligada con la siguiente falta de unicidad. La rotación del sistema de coordenadas $\xi\eta\zeta$ respecto del xyz se determina por tres ángulos α, β, γ ; en cambio, la dirección orientada de \mathbf{v} , de la cual tan sólo puede depender la función de onda de la partícula, depende

* La función $-\delta^{(2)}$ se define de manera que $\int \delta^{(2)}(\mathbf{v} - \mathbf{n}) d\sigma_{\mathbf{v}} = 1$. En (16.2) [y en el caso análogo que sigue, (16.4)] se ha prescindido de la función $-\delta$ que garantiza que el valor de la energía es un valor dado.

** Las fórmulas obtenidas en el §a se basan solamente en propiedades de simetría respecto de los giros. Por ello, son aplicables a las funciones en la representación de impulsos en igual medida que lo son a las funciones de coordenadas.

únicamente de los dos ángulos esféricos $\alpha \equiv \varphi$, $\beta \equiv \theta$. En consecuencia, hay que llegar a un convenio acerca de cómo elegir el ángulo γ . Nosotros supondremos que $\gamma = 0$, es decir, definiremos $D_{\lambda m}^{(j)}(\mathbf{v})$ por la relación

$$D_{\lambda m}^{(j)}(\mathbf{v}) = D_{\lambda m}^{(j)}(\varphi, \theta, 0) = e^{im\varphi} d_{\lambda m}^{(j)}(\theta). \quad (16.5)$$

En virtud de (a.14) las funciones (16.5) satisfacen las condiciones de ortogonalidad y de normalización siguientes:

$$\int D_{\lambda_1 m_1}^{(j_1)*}(\mathbf{v}) D_{\lambda_2 m_2}^{(j_2)}(\mathbf{v}) \frac{d\sigma_{\mathbf{v}}}{4\pi} = \frac{1}{2j+1} \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} \quad (16.6)$$

($d\sigma_{\mathbf{v}} = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$). En cuanto a la ortogonalidad de las funciones $\psi_{jm\lambda}$ respecto del índice λ , dicha ortogonalidad queda garantizada por el factor $u^{(\lambda)}$. De esta manera, las funciones $\psi_{jm\lambda}$ son ortogonales, como debía ser, respecto de todos sus índices $jm\lambda$ y con la elección (16.4) del coeficiente están normalizadas por la condición

$$\int |\psi_{jm\lambda}|^2 d\sigma_{\mathbf{v}} = 1. \quad (16.7)$$

Se supone aquí que las amplitudes $u^{(\lambda)}$ están normalizadas a la unidad: $u^{(\lambda)} u^{(\lambda)*} = 1$.

Veamos cómo se comportan las funciones de onda de los estados de helicidad respecto a la inversión de las coordenadas. El producto del vector polar \mathbf{v} por el vector axil \mathbf{j} es un pseudoscalar. Por lo tanto, es claro ya desde un principio que, como resultado de la inversión, un estado de helicidad λ pasa a ser un estado con helicidad $-\lambda$; falta solamente determinar los factores de fase en estas transformaciones.

En la inversión $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$. El vector \mathbf{v} se determina por dos ángulos φ , θ y la transformación $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ se realiza en la sustitución $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$. Con ello se fija un nuevo eje ζ , pero queda sin determinar la situación de los ejes ξ y η que depende también del tercer ángulo de Euler γ ; la transformación de θ y φ únicamente, no ofrece posibilidad alguna de distinguir, en este sentido, la reflexión del sistema de coordenadas de un giro de eje ζ . En términos de los tres ángulos de Euler la inversión se traduce en la transformación

$$\alpha \equiv \varphi \rightarrow \varphi + \pi, \quad \beta \equiv \theta \rightarrow \pi - \theta, \quad \gamma \rightarrow \pi - \gamma. \quad (16.8)$$

En consecuencia, si $D_{\lambda m}^{(j)}(\mathbf{v})$ se define de acuerdo con (16.5) (es decir, con $\gamma = 0$) y la sustitución $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ se interpreta como resultado de la inversión, entonces será

$$D_{\lambda m}^{(j)}(-\mathbf{v}) = D_{\lambda m}^{(j)}(\varphi + \pi, \pi - \theta, \pi). \quad (16.9)$$

Mediante las fórmulas (a.5), (a.9) y (a.11) encontraremos, por lo tanto,

$$\begin{aligned} D_{\lambda m}^{(j)}(-\mathbf{v}) &= e^{i\lambda\pi} d_{\lambda m}^{(j)}(\pi - \theta) e^{im(\varphi + \pi)} = \\ &= (-1)^{j-\lambda} e^{im\varphi} d_{-\lambda m}^{(j)}(\theta) = (-1)^{j-\lambda} D_{-\lambda m}^{(j)}(\varphi, \theta, 0), \end{aligned}$$

o bien

$$D_{\lambda m}^{(j)}(-\mathbf{v}) = (-1)^{j-\lambda} D_{-\lambda m}^{(j)}(\mathbf{v}) \quad (16.10)$$

($j - \lambda$ es un número entero).

Una fórmula análoga para el espinor $w^{(\lambda)}$ se puede obtener observando que sus componentes $w_\sigma^{(\lambda)}$ coinciden, salvo un factor, con las funciones

$$w_\sigma^{(\lambda)}(\mathbf{v}) \sim D_{\lambda\sigma}^{(s)}(\mathbf{v})^*. \quad (16.11)$$

En efecto, aplicando la fórmula de transformación (a.1) a las funciones propias de spin y suponiendo que su proyección- ζ posee un determinado valor λ (es decir, substituyendo en el segundo miembro de (a.1) $\psi_{jm'}$ por $\delta_{m'\lambda}$), se encuentra que las $D_{\lambda\sigma}^{(s)}(\mathbf{v})$ son funciones de onda de spin que corresponden a valores determinados de sus proyecciones z y ζ ($\sigma = -s, \dots, +s$). El conjunto de estas funciones ($\sigma = -s, \dots, +s$) constituye [según las fórmulas de correspondencia III (58.1)] un espinor covariante de orden $2s$. En cuanto a las componentes del espinor contravariante [al que corresponden según las fórmulas III (57.2) las componentes $w_\sigma^{(\lambda)}$], se transforman como las componentes conjugado-complejas de un espinor covariante del mismo orden.

De (16.10-11) se sigue

$$w^{(\lambda)}(-\mathbf{v}) = (-1)^{s-\lambda} w^{(-\lambda)}(\mathbf{v}) \quad (16.12)$$

($s - \lambda$ es un número entero). La operación inversión aplicada a $w^{(\lambda)}$ consiste, sin embargo, no sólo en la sustitución $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$, sino en la multiplicación por un factor de fase común (la « paridad intrínseca » de la partícula), factor que designaremos por η :

$$Pw^{(\lambda)}(\mathbf{v}) = \eta w^{(\lambda)}(-\mathbf{v}) = \eta (-1)^{s-\lambda} w^{(-\lambda)}(\mathbf{v}). \quad (16.13)$$

Para la amplitud relativista $u^{(\lambda)}(\mathbf{k})$, en cambio, esta transformación se escribirá en la forma

$$Pu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = \eta \beta u^{(\lambda)}(-\mathbf{k}) = \eta (-1)^{s-\lambda} u^{(-\lambda)}(\mathbf{k}), \quad (16.14)$$

donde β es una cierta matriz que se comporta como la matriz unidad respecto de las componentes $u^{(\lambda)}$ que subsisten en el límite $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$. Es importante el hecho de que esta matriz no depende de los números cuánticos del estado y en este sentido la diferencia entre (16.13) y (16.14) carece de importancia *.

Aplicando (16.14) a (16.2), obtendremos la ley de transformación de las funciones de onda de los estados $|\mathbf{n}\lambda\rangle$:

$$P\psi_{\mathbf{n}\lambda}(\mathbf{v}) = \eta (-1)^{s-\lambda} \psi_{-\mathbf{n}-\lambda}(\mathbf{v}). \quad (16.15)$$

Para los estados de helicidad esféricos, utilizando (16.10) y (16.12) se obtendrá la ley de transformación:

* Así, para $s = 1$ las amplitudes $u^{(\lambda)}$ son los 4-vectores (16.21); en tal caso β es la matriz unidad respecto de los índices 4-vectoriales: $\beta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Para $s = 1/2$ (como veremos en el capítulo siguiente) $u^{(\lambda)}$ es un bispinor; en este caso el factor de fase es $\eta = i$ y β es la matriz de Dirac γ^0 [véase (21.10)].

$$P\psi_{jm\lambda}(\mathbf{v}) = \eta(-1)^{j-s}\psi_{jm-\lambda}(\mathbf{v}). \quad (16.16)$$

Según (16.16), los estados ψ_{jm_0} se transforman entre sí, es decir, poseen una paridad determinada. Pero si $\lambda \neq 0$, sólo poseen paridad determinada las superposiciones de estados con helicidades opuestas:

$$\psi_{jm|\lambda|}^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{jm\lambda} \pm \psi_{jm-\lambda}). \quad (16.17)$$

En la inversión estos estados se transforman entre sí de acuerdo con

$$P\psi_{jm|\lambda|}^{(\pm)}(\mathbf{v}) = \pm \eta(-1)^{j-s}\psi_{jm|\lambda|}^{(\pm)}(\mathbf{v}). \quad (16.18)$$

Conviene prestar atención al hecho de que, en este párrafo, hemos procedido a una clasificación de los estados de una partícula libre que posee un momento cinético dado, operando solamente con magnitudes que se conservan y sin acudir al concepto de momento cinético orbital (utilizado, por ejemplo, en los párrafos 6 y 7 para clasificar los estados del fotón).

Consideremos como ejemplo el caso de spin 1. En el sistema de reposo, las amplitudes $u^{(1)}$ (4-vectores) se reducen a vectores tridimensionales $\mathbf{e}^{(\lambda)}$, los cuales representan aquí precisamente el papel de las amplitudes $w^{(\lambda)}$. La acción del operador de spin 1 sobre la función vectorial \mathbf{e} viene dada por la fórmula

$$(s_i \mathbf{e})_k = -ie_{ikl}e_l \quad (16.19)$$

(III, § 58, problema 2). La ecuación (16.1) toma por ello la forma

$$i\mathbf{n} \times \mathbf{e}^{(\lambda)} = \lambda \mathbf{e}^{(\lambda)}. \quad (16.20)$$

Sus soluciones (en el sistema de coordenadas $\xi\eta\zeta$ con el eje ζ a lo largo de \mathbf{n}) coinciden con los versores esféricos (7.14) *:

$$\mathbf{e}^{(0)} = i(0, 0, 1), \quad \mathbf{e}^{(\pm 1)} = \mp \frac{i}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0). \quad (16.21)$$

En el sistema de referencia en el que la partícula tiene impulso \mathbf{p} , las amplitudes de los estados de helicidad son 4-vectores

$$u^{(0)\mu} = \left(\frac{|\mathbf{p}|}{m}, \frac{\epsilon}{m} \mathbf{e}^{(0)} \right), \quad u^{(\pm 1)\mu} = (0, \mathbf{e}^{(\pm 1)}). \quad (16.22)$$

Si \mathbf{e} es un vector polar, se tendrá $\eta = -1$. Entonces las funciones (16.17) (que para $s = 1$ son vectores tridimensionales) tienen las paridades siguientes:

$$\Psi_{jm|\lambda|}^{(+)}: P = (-1)^j,$$

$$\Psi_{jm|\lambda|}^{(-)}: P = (-1)^{j+1},$$

$$\Psi_{jm0}: P = (-1)^j.$$

* La elección de los factores de fase se fija imponiendo la condición de que los elementos de matriz de los operadores de spin calculados mediante las funciones propias (16.21) correspondan a las definiciones generales dadas en III, §§ 27, 107.

Comparando con la definición de vectores esféricos (7.4), vemos que estas funciones coinciden idénticamente (salvo ciertos factores de fase) con las funciones $\mathbf{Y}_{jm}^{(E)}$, $\mathbf{Y}_{jm}^{(M)}$, $\mathbf{Y}_{jm}^{(L)}$, respectivamente. Determinando los factores de fase (digamos, por comparación con los valores en $\theta = 0$), obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_{jm}^{(E)} &= i^{j-1} \sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}} (\mathbf{e}^{(1)} D_{1m}^{(j)} + \mathbf{e}^{(-1)} D_{-1m}^{(j)}), \\ \mathbf{Y}_{jm}^{(M)} &= i^{j-1} \sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}} (\mathbf{e}^{(1)\prime} D_{1m}^{(j)} + \mathbf{e}^{(-1)\prime} D_{-1m}^{(j)}), \\ \mathbf{Y}_{jm}^{(L)} &= i^{j-1} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \mathbf{e}^{(0)} D_{0m}^{(j)}\end{aligned}\quad (16.23)$$

(j es un número entero!); $\mathbf{e}^{(\lambda)\prime} = \mathbf{n} \times \mathbf{e}^{(\lambda)}$ son los versores circulares en los ejes $\xi' \eta' \zeta'$ girados 90° en torno del eje ζ respecto de los ejes $\xi \eta \zeta$.

La última de las fórmulas (16.23) es equivalente a la expresión (a.17) para $d_{0m}^{(j)}(\theta)$. Por otra parte, de la primera (o de la segunda) fórmula se puede obtener una expresión simple para las funciones $d_{\pm 1m}^{(j)}$. Tenemos

$$i^{j-1} \sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}} D_{\pm 1m}^{(j)} = \mathbf{Y}_{jm}^{(E)} \mathbf{e}^{(\pm 1)*} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \mathbf{e}^{(\pm 1)*} \cdot \nabla Y_{jm}.$$

El producto escalar en el segundo miembro de la igualdad lo explicitaremos en el sistema $\xi \eta \zeta$, teniendo en cuenta que

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

Recordando la definición (7.2) de la función Y_{jm} y la definición (16.5), se obtiene el resultado

$$d_{\pm 1m}^{(j)}(\theta) = (-1)^{m+1} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)! j(j+1)}} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{m}{\operatorname{sen} \theta} \right) P_j^m(\cos \theta), m \geq 0. \quad (16.24)$$

CAPÍTULO 3

FERMIONES

§ 17. Espinores cuadridimensionales

En la teoría no relativista una partícula con spin arbitrario s se representa por una magnitud de $(2s + 1)$ componentes — por un espinor simétrico de orden $2s$. Desde el punto de vista matemático, éstos son magnitudes que sirven de bases para representaciones irreducibles del grupo de los giros espaciales.

En la teoría relativista este grupo interviene solamente como subgrupo del grupo más amplio de las rotaciones cuadridimensionales — del grupo de Lorentz. Se plantea con esto la necesidad de construir una teoría de los espinores cuadridimensionales (4-espinores), es decir, de magnitudes en las que se realicen las representaciones irreducibles del grupo de Lorentz; a su exposición se dedican los párrafos 17-19. En los §§ 17, 18, se estudia solamente el grupo propio de Lorentz, que no contiene la inversión espacial; esta última se considerará en el § 19.

La teoría de los 4-espinores se construye de manera análoga a como se construye la teoría de los espinores tridimensionales (*B. L. van der Waerden*, 1929; *G. E. Uhlenbeck, O. Laporte*, 1931).

Un espinor ξ^a es una magnitud de dos componentes ($a = 1, 2$); como componentes de la función de onda de una partícula de spin $1/2$, ξ^1 y ξ^2 corresponden a los valores propios de la proyección- z del spin, igual a $+1/2$ y a $-1/2$, respectivamente. En toda transformación del grupo (propio) de Lorentz las dos magnitudes ξ^1 , ξ^2 se transforman entre sí:

$$\begin{aligned}\xi'^1 &= \alpha \xi^1 + \beta \xi^2, \\ \xi'^2 &= \gamma \xi^1 + \delta \xi^2.\end{aligned}\tag{17.1}$$

Los coeficientes α , β , γ , δ son determinadas funciones de los ángulos de la rotación del 4-sistema de coordenadas sometidas a la condición

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,\tag{17.2}$$

es decir, el determinante de la transformación binaria (17.1) es igual a 1, al igual que el determinante de las transformaciones de coordenadas en el grupo de Lorentz.

En virtud de la condición (17.2), la forma bilineal $\xi^1 \Xi^2 - \xi^2 \Xi^1$ (donde ξ^a y Ξ^a son dos espinores) es invariante respecto de la transformación (17.1) (corresponde a una partícula de spin 0 « compuesta » por dos partículas de spin 1/2). Para lograr una notación natural de tales expresiones invariantes, junto con las componentes « contravariantes » del espinor, ξ^a , se introducen también las componentes « covariantes » ξ_a . El paso de unas a otras se efectúa mediante el « espinor métrico » $g_{\alpha\beta}^*$:

$$\xi_a = g_{\alpha\beta} \xi^\beta, \quad (17.3)$$

donde

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (17.4)$$

de modo que

$$\xi_1 = \xi^2, \quad \xi_2 = -\xi^1. \quad (17.5)$$

Entonces el invariante $\xi^1 \Xi^2 - \xi^2 \Xi^1$ se escribe en forma de producto escalar $\xi^a \Xi_a$. Obsérvese que $\xi^a \Xi_a = -\xi_a \Xi^a$.

Hasta aquí las propiedades enumeradas coinciden formalmente con las propiedades de los espinores tridimensionales. La diferencia surge, sin embargo, al considerar los espinores complejo-conjugados.

En la teoría no relativista la suma

$$\psi^1 \psi^{1*} + \psi^2 \psi^{2*}, \quad (17.6)$$

que determina la densidad de probabilidad de localización de las partículas en el espacio, debía ser un escalar y para esto las componentes ψ^a habían de transformarse como componentes covariantes de un espinor; en otras palabras, la transformación (17.1) tenía que ser unitaria ($\alpha = \delta^*$, $\beta = -\gamma^*$). En cambio, en la teoría relativista la densidad de partículas no es un escalar, sino que representa la componente temporal de un 4-vector. Como consecuencia, la condición indicada no tiene ya por qué quedar satisfecha y a los coeficientes de la transformación no se les impone ahora ninguna condición suplementaria [aparte la (17.2)]. Cuatro cantidades complejas α , β , γ , δ bajo la única condición (17.2) equivalen a 8 — 2 = 6 parámetros reales — en correspondencia con el número de ángulos que determinan una rotación del 4-sistema de coordenadas (rotaciones en seis planos de coordenadas).

De esta manera, las transformaciones binarias complejo-conjugadas resultan ser esencialmente distintas, de modo que en la teoría relativista existen dos tipos de espinores. Para diferenciar estos tipos se adoptan notaciones especiales: como índices de los espinores que se transforman según las fórmulas conjugado-complejas de las fórmulas (17.1) se utilizan cifras con un punto encima de ellas (*índices puntados*). Así, pues, por definición,

$$\dot{\eta}^a \sim \xi^a*, \quad (17.7)$$

donde el símbolo \sim significa « se transforma como ». En otras palabras, las fórmulas de transformación de un espinor « puntado » son:

* Designaremos los índices espinoriales por las primeras letras del alfabeto griego: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

$$\eta^i = \alpha^* \eta^i + \beta^* \eta^{\dot{i}}, \quad \eta^{\dot{i}} = \gamma^* \eta^i + \delta^* \eta^{\dot{i}}. \quad (17.8)$$

Las operaciones de bajar y subir índices puntados se efectúan de la misma manera que en el caso de índices no puntados:

$$\eta_i = \eta^{\dot{i}}, \quad \eta_{\dot{i}} = -\eta^i. \quad (17.9)$$

Respecto de las rotaciones espaciales, el comportamiento de los 4-espinores coincide con el de los 3-espinores. En el caso de éstos, conforme sabemos, se tiene $\psi_a^* \sim \psi^a$. Por consiguiente, en virtud de la definición (17.7), el 4-espinor η_a se comporta en las rotaciones como el 3-espinor contravariante ψ^a . Como componentes de la función de onda de una partícula de spin 1/2, a los valores propios de la proyección del spin 1/2 y -1/2 corresponden, por ello, las componentes covariantes η_i y $\eta_{\dot{i}}$.

Los espinores de orden superior se definen como conjuntos de magnitudes que se transforman como los productos de componentes de un cierto número de espinores de primer orden. En este caso, entre los índices del espinor de orden superior pueden aparecer tanto índices puntados como no puntados. Así, existen tres tipos de espinores de segundo orden:

$$\xi^{\alpha\beta} \sim \xi^\alpha \Xi^\beta, \quad \zeta^{\alpha\dot{\beta}} \sim \xi^\alpha \eta^{\dot{\beta}}, \quad \eta^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sim \eta^{\dot{\alpha}} H^{\dot{\beta}}.$$

En este sentido, indicar solamente el orden total de un espinor no basta para definir de manera unívoca este concepto; en consecuencia, cuando sea necesario indicaremos el orden mediante un par de números (k, l) — el número de índices no puntados y el número de índices puntados.

Dado que las transformaciones (17.1) y (17.8) son algebraicamente independientes, no hay necesidad de fijar el orden de los índices puntados y no puntados (en este sentido, por ejemplo, los espinores $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ y $\zeta^{\dot{\alpha}\beta}$ son exactamente el mismo).

Para que tenga carácter invariante, toda igualdad espinorial debe contener en uno y otro miembro los mismos números de índices no puntados y puntados; en el caso contrario, es evidente que dejaría de ser válida al pasar de un sistema de referencia a otro. Hay que recordar respecto de esto que el paso a la expresión conjugado-compleja presupone la sustitución de índices puntados por índices no puntados, y recíprocamente. En consecuencia, la relación $\eta^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = (\xi^{\alpha\beta})^*$ entre dos espinores tiene carácter invariante.

La contracción de espinores o de sus productos se puede efectuar solamente con relación a un par de índices de igual especie — dos índices puntados o dos índices no puntados. En cambio, la suma respecto de un par de índices de diferente especie no es una operación invariante. Por ello, precisamente, a partir del espinor

$$\zeta^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\dots\dot{\beta}_l}, \quad (17.10)$$

simétrico respecto de sus k índices no puntados y sus l índices puntados, es imposible formar un espinor de orden inferior (recordemos que la contracción respecto de un par de índices con relación a los cuales el espinor es simétrico da como resul-

tado el valor cero). Esto significa que partiendo de las cantidades (17.10) no es posible formar un número menor de combinaciones lineales que se transformen entre sí en todas las transformaciones del grupo. En otras palabras, los 4-espinores simétricos son bases de representaciones irreducibles del grupo propio de Lorentz. Cada representación irreducible viene dada por el par de números (k, l) .

Dado que cada índice espinorial toma dos valores, en (17.10) se tienen un conjunto de $k + 1$ números $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$ esencialmente distintos (que contienen 0, 1, 2, ..., k índices iguales a la unidad, y $k, k - 1, \dots, 0$ iguales a dos) y $l + 1$ conjuntos de números $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_l$. En total, por consiguiente, un espinor simétrico de orden (k, l) tiene $(k + 1)(l + 1)$ componentes independientes; este número es precisamente la dimensión de la representación irreducible de la que es base.

§ 18. Relación entre espinores y 4-vectores

Un espinor $\zeta^{\alpha\beta}$ con un índice puntado y otro no puntado tiene $2 \cdot 2 = 4$ componentes independientes — tantas precisamente cuantas componentes posee un 4-vector. Es claro, por consiguiente, que tanto uno como otro son base de una misma representación irreducible del grupo propio de Lorentz y, en consecuencia, entre sus componentes debe existir una determinada correspondencia.

Para establecer ésta acudamos ante todo a la correspondencia análoga en el caso de tres dimensiones, teniendo en cuenta que, con relación a las rotaciones puramente espaciales, el comportamiento de los 3- y 4-espinores debe ser el mismo.

Para un espinor tridimensional $\psi^{\alpha\beta}$ valen determinadas fórmulas de correspondencia (véase III, § 58) que escribiremos aquí en la forma

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{1}{2} (\psi^{23} - \psi^{11}) = \frac{1}{2} (\psi^3_1 + \psi^1_3), \\ a_y &= -\frac{i}{2} (\psi^{23} + \psi^{11}) = \frac{i}{2} (\psi^1_2 - \psi^2_1), \quad a_z = \frac{1}{2} (\psi^{12} + \psi^{21}) = \frac{1}{2} (\psi^1_1 - \psi^2_2), \end{aligned}$$

donde a_x, a_y, a_z son las componentes de un vector tridimensional \mathbf{a} . Pasando al caso de cuatro dimensiones, hay que substituir las componentes $\psi^{\alpha\beta}$ por $\zeta^{\alpha\beta}$ y entender por a_x, a_y, a_z las componentes contravariantes a^1, a^2, a^3 de un 4-vector. En lo que concierne a la expresión para la cuarta componente del vector, a^0 , su forma resulta evidente sin más que tener en cuenta la circunstancia que se hizo notar en el § 17: la cantidad (17.6) debe transformarse como a^0 . Por lo tanto, $a^0 \sim \zeta^{11} + \zeta^{22}$ y el coeficiente de proporcionalidad se determina de manera que el escalar $\zeta_{\alpha\beta} \zeta^{\alpha\beta}$ coincida con el escalar $a_\mu a^\mu \equiv a^2$.

De esta manera llegamos a las siguientes fórmulas de correspondencia

$$\begin{aligned} a^1 &= \frac{1}{2} (\zeta^{12} + \zeta^{21}), \quad a^2 = \frac{i}{2} (\zeta^{13} - \zeta^{31}), \\ a^3 &= \frac{1}{2} (\zeta^{11} - \zeta^{22}), \quad a^0 = \frac{1}{2} (\zeta^{11} + \zeta^{22}). \end{aligned} \tag{18.1}$$

Las fórmulas inversas son

$$\begin{aligned}\zeta_{\alpha\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= \zeta_{\alpha\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = a^3 + a^0, & \zeta_{\alpha\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= \zeta_{\alpha\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = a^0 - a^3 \\ \zeta_{\alpha\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= -\zeta_{\alpha\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = a^1 - ia^3, & \zeta_{\alpha\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= -\zeta_{\alpha\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = a^1 + ia^3.\end{aligned}\quad (18.2)$$

Se tiene, además,

$$\zeta_{\alpha\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \zeta_{\alpha\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = 2a^3. \quad (18.3)$$

Observemos también que

$$\zeta_{\alpha\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \zeta_{\alpha\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \delta_{\alpha}^{\dot{\alpha}} a^3. \quad (18.4)$$

Esta última igualdad se sigue de que un espinor de segundo orden $\zeta_{\alpha\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ es antisimétrico respecto de los índices $\alpha\gamma$ y, por consiguiente, es proporcional al espinor métrico.

La correspondencia entre un espinor $\zeta_{\alpha\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ y un 4-vector constituye un caso particular de una regla general: cualquier espinor simétrico de orden (k, k) es equivalente a un 4-tensor de orden k irreducible (es decir, tal que su contracción respecto de un par cualquiera de índices se anula).

La relación entre un espinor y un 4-vector se puede escribir en forma compacta mediante las matrices de segundo orden de Pauli *:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (18.5)$$

Si designamos simbólicamente por ζ la matriz de las cantidades $\zeta_{\alpha\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ con los índices superiores (colocando primero el no puntado), las fórmulas (18.2) se escriben así:

$$\zeta = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} + a^0 \quad (18.6)$$

(en el segundo miembro se supone, naturalmente, que a^0 es el producto de este número por la matriz unidad). Las fórmulas inversas son:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\zeta \boldsymbol{\sigma}), \quad a^0 = \frac{1}{2} \text{Tr} \zeta. \quad (18.7)$$

Mediante las fórmulas (18.6-7) es posible establecer el ligamen entre las leyes de transformación de un 4-vector y de un espinor y, con ello, expresar la ley de transformación de un espinor en función de los parámetros de las rotaciones del 4-sistema de coordenadas.

Escribamos la transformación del espinor ξ^a en la forma

$$\xi^a = (B\xi)^a, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (18.8)$$

donde B es la matriz de segundo orden constituida por los coeficientes de la transformación binaria. Entonces la transformación de un espinor puntado es:

$$\eta^{\dot{\beta}'} = (B^* \eta)^{\dot{\beta}'} = (\eta B^+)^{\dot{\beta}} \quad (18.9)$$

* En III utilizamos las matrices $s = \sigma/2$.

y la transformación de un espinor de segundo orden $\xi^{\alpha\dot{\beta}} \sim \xi^{\alpha}\eta^{\dot{\beta}}$ la escribiremos simbólicamente en la forma $\zeta' = B\zeta B^+ \star$. En una transformación infinitesimal $B = 1 + \lambda$, donde λ es una matriz pequeña, y con una precisión que alcanza a las cantidades pequeñas de primer orden, se tiene

$$\zeta' = \zeta + (\lambda\xi + \zeta\lambda^+). \quad (18.10)$$

Consideremos primero la transformación de Lorentz que lleva a un sistema de referencia que se mueve con una velocidad infinitamente pequeña δV (sin cambiar las direcciones de los ejes espaciales). Un 4-vector $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$ se transforma entonces de acuerdo con

$$a' = a - a^0 \delta V, \quad a^0 = a^0 - \mathbf{a} \cdot \delta V. \quad (18.11)$$

Utilicemos ahora las fórmulas (18.7). Por una parte, la transformación de a^0 se puede representar por

$$a^0 = a^0 - \mathbf{a} \cdot \delta V = a^0 - \frac{1}{2} \text{Tr}(\zeta \sigma \cdot \delta V),$$

y, por otra parte, en la forma

$$a^0 = \frac{1}{2} \text{Tr} \zeta' = a^0 + \frac{1}{2} \text{Tr}(\lambda\xi + \zeta\lambda^+) = a^0 + \frac{1}{2} \text{Tr} \zeta (\lambda + \lambda^+).$$

Ambas expresiones deben coincidir idénticamente (es decir, para ζ arbitrario). De ello se deduce la siguiente igualdad:

$$\lambda + \lambda^+ = -\sigma \cdot \delta V.$$

De la misma manera, considerando la transformación de \mathbf{a} , obtendremos

$$\sigma\lambda + \lambda^+\sigma = -\delta V.$$

Estas igualdades, interpretadas como ecuaciones en λ , tienen la siguiente solución:

$$\lambda = \lambda^+ = -\frac{1}{2} \sigma \cdot \delta V.$$

Así, pues, la transformación infinitesimal de Lorentz del espinor ξ^α se consigue con la matriz

$$B = 1 - \frac{1}{2}(\sigma \cdot \mathbf{n}) \delta V, \quad (18.12)$$

donde \mathbf{n} es el versor de la velocidad δV . A partir de aquí es fácil hallar también la transformación para una velocidad finita V . Recordemos para ello que una transformación de Lorentz representa (geométricamente) una rotación del 4-sistema de coordenadas en el plano t, \mathbf{n} y de ángulo φ ligado con la velocidad V por la

* Para las componentes covariantes, se tiene:

$$\xi'_\alpha = (\tilde{B}^{-1}\xi)_\alpha = (\xi B^{-1})_\alpha, \quad \eta'_\alpha = (\gamma B^{*-1})_\alpha; \quad (18.8a)$$

(de modo que el producto de dos espinores $\xi_\alpha \Xi^\alpha$ se conserve invariante).

igualdad $\tgh \varphi = V^*$. A una transformación infinitesimal corresponde el ángulo $\delta\varphi = \delta V$ y la rotación de ángulo finito φ se consigue aplicando $\varphi/\delta\varphi$ veces la rotación de ángulo $\delta\varphi$. Elevando el operador (18.12) a la potencia $\varphi/\delta\varphi$ y pasando al límite $\delta\varphi \rightarrow 0$, obtendremos

$$B = e^{-\frac{\varphi}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}}. \quad (18.13)$$

El sentido matemático de la acción de este operador queda de manifiesto observando que, por las propiedades de las matrices de Pauli, todas las potencias pares de $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ son iguales a 1 y todas las potencias impares son iguales a $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Teniendo en cuenta que el \cosh se desarrolla en potencias pares del argumento, mientras que senh contiene sólo potencias impares, se obtiene en definitiva

$$B = \cosh \frac{\varphi}{2} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \operatorname{senh} \frac{\varphi}{2}, \quad \tgh \varphi = V. \quad (18.14)$$

Obsérvese que las matrices B de las transformaciones de Lorentz resultan ser hermíticas: $B = B^+$.

Consideremos ahora una rotación infinitesimal de un sistema espacial de coordenadas. En tal caso, un vector tridimensional \mathbf{a} se transforma de acuerdo con

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \delta\theta \times \mathbf{a}, \quad (18.15)$$

donde $\delta\theta$ es el vector del ángulo infinitesimal de rotación. La correspondiente transformación de un espinoor se podría hallar de manera análoga. Sin embargo, ello no es necesario, puesto que, respecto de las rotaciones espaciales, el comportamiento de los 4-espinores coincide con el de los 3-espinores y para éstos se conoce ya la transformación a partir de la relación general del operador de spin con el operador de una rotación infinitesimal:

$$B = 1 + \frac{i}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \delta\theta. \quad (18.16)$$

El paso a una rotación de ángulo finito θ se efectúa de manera análoga al paso de (18.12) a (18.14):

$$B = \exp\left(\frac{i\theta}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) = \cos \frac{\theta}{2} + i \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \quad (18.17)$$

donde \mathbf{n} es el versor del eje de rotación. Esta matriz es unitaria ($B^+ = B^{-1}$) como debía ser en tanto que rotación espacial.

§ 19. Inversión de espinores

Al exponer (en III) la teoría tridimensional de espinores no estudiamos su comportamiento respecto de la operación inversión espacial, puesto que en la teoría no-relativista esto no conduciría a ningún resultado físico nuevo. Sin embargo, analizaremos ahora esta cuestión para mejor aclarar el estudio que sigue acerca de las propiedades de los 4-espinores respecto de la inversión.

* Recordaremos que en los planos que contienen el eje del tiempo la métrica es pseudoeuclídea.

La operación inversión no cambia el signo de un vector axil, como lo es el vector spin. Por ello, no cambia tampoco el valor de su proyección s_z . Se sigue de aquí que en la inversión cada una de las componentes de un espínor ψ^a puede transformarse tan sólo en una función de sí misma, es decir, debe ser

$$\psi^a \rightarrow P\psi^a, \quad (19.1)$$

donde P es un coeficiente constante. Aplicando la inversión dos veces, volvemos al sistema de coordenadas de partida. En el caso de los espinores, sin embargo, el hecho de volver a la situación inicial se puede entender en dos sentidos distintos: como rotación del sistema de ángulo 0° o de ángulo 360° . Para los espinores estas dos definiciones no son equivalentes, ya que las ψ^a cambian de signo en una rotación de 360° . Así, pues, son posibles dos modalidades alternativas de la inversión: en un caso

$$P^2 = 1, \quad P = \pm 1, \quad (19.2)$$

y en el otro

$$P^2 = -1, \quad P = \pm i. \quad (19.3)$$

Es esencial en todo esto que el concepto de inversión se defina exactamente de la misma manera para todos los espinores. No es admisible que espinores diferentes se comporten en la inversión de maneras diferentes [según (19.2) o (19.3)], ya que entonces no sería posible construir un escalar (o un pseudoscalar) a partir de dos espinores cualesquiera: si el espínor ψ^a se transformara de acuerdo con (19.2), y el φ^a según (19.3), la cantidad $\psi^a \varphi_a$ quedaría multiplicada en la inversión por $\pm i$, en vez de conservarse invariable (o tan sólo cambiar de signo).

Hay que subrayar también que el atribuir a un espínor (cualesquiera que sea la definición adoptada para la inversión) una determinada paridad P no tiene un sentido absoluto, puesto que los espinores cambian de signo en una rotación de ángulo 2π , rotación que siempre se puede aplicar a la vez que la inversión. Un carácter absoluto, sin embargo, sí lo tiene la «paridad relativa» de dos espinores, definida como paridad del escalar $\psi^a \varphi_a$ construido a partir de ellos; dado que en una rotación de ángulo 2π cambian de signo a la vez todos los espinores, la indeterminación ligada con ellos no se refleja en la paridad de dicho escalar.

Pasemos ahora a los espinores cuadridimensionales.

Observemos ante todo que en tanto la inversión cambia el signo de solamente tres (x, y, z) de las cuatro (t, x, y, z) coordenadas, esta operación commuta con los giros espaciales, pero no con las transformaciones que cambian la dirección del eje t . Si L es la transformación de Lorentz que lleva al sistema de referencia que se mueve con la velocidad V , se tiene $PL = L'P$, donde L' es la transformación que conduce al sistema que se mueve con velocidad $-V$.

De aquí se sigue que en la inversión las componentes de un 4-espínor ξ^a no pueden transformarse entre sí. Si la inversión del espínor ξ^a se redujera, como antes, a las transformaciones (19.1) (es decir, se representara por una matriz pro-

porcional a la matriz unidad), comutaría con absolutamente todas las transformaciones de Lorentz, lo que evidentemente no debe ocurrir (ya que las operaciones L y L' no coinciden, evidentemente, en su aplicación a ξ^a).

De esta manera, la inversión ha de transformar las componentes ξ^a del spinor en otras cantidades. Éstas pueden ser tan sólo las componentes de algún otro spinor η^a que no coincida por sus propiedades de transformación con ξ^a . Dado que la inversión no cambia (como ya se hizo notar) la proyección- z del spin, las componentes ξ^1 y ξ^2 pueden pasar a ser en la inversión tan sólo las componentes η_1 y η_2 correspondientes a los mismos valores $s_z = 1/2$ y $s_z = -1/2$. Entendiendo por inversión la operación que da 1 al ser aplicada dos veces, se puede definir su acción por las fórmulas

$$\xi^a \rightarrow \eta_a^*, \quad \eta_a^* \rightarrow \xi^a \quad (19.4)$$

[para las componentes covariantes ξ_a y contravariantes η^a estas transformaciones tienen signo opuesto:

$$\xi_a \rightarrow -\eta_a^*, \quad \eta_a^* \rightarrow -\xi_a, \quad (19.4a)$$

ya que el bajar y subir un mismo índice se efectúa con signos distintos, véase (17.5) y (17.9)*]. Pero si la inversión se entiende en el sentido de que $P^2 = -1$, su acción se define por las fórmulas

$$\xi^a \rightarrow i\eta_a^*, \quad \eta_a^* \rightarrow i\xi^a \quad (19.5)$$

o bien, lo que es lo mismo,

$$\xi_a \rightarrow -i\eta_a^*, \quad \eta_a^* \rightarrow -i\xi_a \quad (19.5a)$$

Una cierta diferencia en el carácter de las dos definiciones de la inversión consiste en que, en la segunda, los spinores conjugado-complejos se transforman de la misma manera: si $\Xi_a = \eta_a^*$, $H^a = \xi^{a*}$, entonces de (19.5) se deduce que $\Xi_a \rightarrow -iH^a$, $H^a \rightarrow -i\Xi_a$, es decir, la misma regla que para ξ_a , η^a . En cambio, según la definición (19.4) obtendríamos la transformación $\Xi_a \rightarrow H^a$, $H^a \rightarrow \Xi_a$, cuyo signo es opuesto al de la transformación de los spinores ξ_a , η^a . Volveremos a considerar esta cuestión en el § 27 para examinar los posibles aspectos físicos de esta diferencia.

En lo que sigue y para concretar adoptaremos siempre como definición la (19.5).

Respecto del subgrupo de los giros, los spinores ξ^a y η_a se transforman, conforme sabemos, de la misma manera. Formando con sus componentes las combinaciones

$$\xi^a \pm \eta_a^*, \quad (19.6)$$

obtendríamos cantidades que se transforman en la inversión según (19.1) con

* La definición (19.4), naturalmente, es, por lo que ya sabemos, un puro convenio, lo que está ligado con la independencia de las cantidades ξ^a y η_a^* . Así, introduciendo en vez de η_a^* un nuevo spinor $\eta'_a = e^{i\delta}\eta_a^*$ obtendremos en lugar de (19.4) la definición equivalente

$$\xi^a \rightarrow e^{-i\delta}\eta'_a, \quad \eta'_a \rightarrow e^{i\delta}\xi^a.$$

$P = \pm i$. Estas combinaciones, sin embargo, no se comportan como espines respecto de todas las transformaciones del grupo de Lorentz.

De esta manera, incluir la inversión en el grupo de simetría exige considerar a la vez pares de espines (ξ^α, η_α); un tal par se llama *bispinor* (de primer orden). Las cuatro componentes de un bispinor son base de una de las representaciones irreducibles del grupo ampliado de Lorentz.

El producto escalar de dos bispinores (ξ^α, η_α) y (Ξ^α, H_α) se puede formar de dos maneras. La cantidad

$$\xi^\alpha \Xi_\alpha + \eta_\alpha H^\alpha \quad (19.7)$$

no cambia en la inversión, es decir, es un escalar en sentido estricto. La cantidad

$$\xi^\alpha \Xi_\alpha - \eta_\alpha H^\alpha \quad (19.8)$$

es también invariante respecto de las rotaciones del 4-sistema de coordenadas, pero cambia de signo en la inversión; en otras palabras, es un pseudoescalar.

De dos maneras se puede definir también un espinor de segundo orden $\zeta^{\alpha\beta}$. Definiéndolo por la ley de transformación

$$\zeta^{\alpha\beta} \sim \xi^\alpha H^\beta + \Xi^\alpha \eta^\beta, \quad (19.9)$$

obtendremos una cantidad que en la inversión se transforma de acuerdo con

$$\zeta^{\alpha\beta} \rightarrow \zeta_{\alpha\beta}. \quad (19.10)$$

Entonces el 4-vector a^μ , al que equivale dicho espinor, se transforma [en correspondencia con las fórmulas (18.1)] según la ley $(a^0, \mathbf{a}) \rightarrow (a^0, -\mathbf{a})$, es decir, es un 4-vector en sentido estricto (y el vector tridimensional \mathbf{a} , un vector polar).

Sin embargo, cabe también definir $\zeta^{\alpha\beta}$ de acuerdo con

$$\zeta^{\alpha\beta} \sim \xi^\alpha H^\beta - \Xi^\alpha \eta^\beta. \quad (19.11)$$

Entonces *

$$\zeta^{\alpha\beta} \rightarrow -\zeta_{\alpha\beta}. \quad (19.12)$$

A un espinor de este tipo corresponde un 4-vector para el cual la inversión significa la transformación $(a^0, \mathbf{a}) \rightarrow (-a^0, \mathbf{a})$, es decir, un 4-pseudovector (siendo el vector tridimensional \mathbf{a} un vector axil).

Los espines simétricos de segundo orden con índices de la misma especie se definen por las leyes de transformación:

$$\xi^{\alpha\beta} \sim \xi^\alpha \Xi^\beta + \xi^\beta \Xi^\alpha, \quad \eta_{\alpha\beta} \sim \eta_\alpha H_\beta + \eta_\beta H_\alpha. \quad (19.13)$$

En la inversión se transforman entre sí:

* Hay que subrayar que las leyes de transformación (19.10) y (19.12), que difieren una de otra en el signo del segundo miembro, no son en modo alguno equivalentes, puesto que en ambos miembros aparecen las componentes del mismo espinor (cf. la nota de la pág. 75).

$$\xi^{\alpha\beta} \rightarrow -\eta_{\alpha\beta}. \quad (19.14)$$

El par $(\xi^{\alpha\beta}, \eta_{\alpha\beta})$ constituye un bispinor de segundo orden. El número de sus componentes independientes es igual a $3 + 3 = 6$. Pero el mismo número de componentes independientes posee un 4-tensor antisimétrico de segundo orden $a^{\mu\nu}$. Por ello, entre uno y otro debe existir una determinada correspondencia (ambos son base de representaciones irreducibles equivalentes del grupo completo de Lorentz).

Dado que con relación al grupo propio de Lorentz los espinores $\xi^{\alpha\beta}$ y $\eta_{\alpha\beta}$ se transforman independientemente, también a partir de las componentes del 4-tensor $a^{\mu\nu}$ se pueden formar dos grupos de cantidades que se transforman exclusivamente entre sí en todas las rotaciones del 4-sistema de coordenadas. Esta duplicación se presenta de la siguiente manera.

Introduzcamos un vector polar tridimensional \mathbf{p} y un vector axil de tres dimensiones \mathbf{a} ligados con las componentes del 4-tensor $a^{\mu\nu}$ por

$$a^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \equiv (\mathbf{p}, \mathbf{a}) \quad (19.15)$$

$[(\mathbf{p}, \mathbf{a})$ es una abreviatura que emplearemos para designar las componentes de un tal tensor]. Aquí es $a_{\mu\nu} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a})$ y de las dos cantidades

$$\mathbf{a}^2 - \mathbf{p}^2 = \frac{1}{2} a_{\mu\nu} a^{\mu\nu}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{2} e_{\mu\nu\rho\sigma} a^{\mu\nu} a^{\rho\sigma}$$

la primera es un escalar, y la segunda, un pseudoscalar; respecto del grupo propio de Lorentz, tanto uno como otra son invariantes. Junto con ellas, son también invariantes los cuadrados de los vectores tridimensionales $f^\pm = \mathbf{p} \pm i\mathbf{a}$. Esto significa que cualquier rotación en el 4-espacio es equivalente para los vectores f^\pm a una «rotación» en el espacio de tres dimensiones, en general, de ángulo complejo (a los seis ángulos de rotación en el 4-espacio corresponden tres «ángulos de rotación» complejos del sistema tridimensional). La operación de inversión espacial, que cambia el signo de \mathbf{p} (pero no el de \mathbf{a}), transforma entre sí los vectores f^+ y $-f^-$. Las componentes de estos vectores constituyen precisamente los dos grupos buscados de cantidades formadas mediante las componentes del tensor $a^{\mu\nu}$.

Con esto resulta evidente también la correspondencia entre las componentes del 4-tensor $a^{\mu\nu}$ y los espinores $\xi^{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha\beta}$. Dado que en el grupo de Lorentz figuran como subgrupos los giros espaciales, las relaciones entre las componentes de un espín y las componentes de un vector tridimensional deben ser las mismas que para los espinores tridimensionales:

$$\begin{aligned} f_x^+ &= \frac{1}{2} (\xi^{22} - \xi^{11}), & f_y^+ &= \frac{i}{2} (\xi^{22} + \xi^{11}), & f_z^+ &= \xi^{12}; \\ f_x^- &= \frac{1}{2} (\eta_{22} - \eta_{11}), & f_y^- &= \frac{i}{2} (\eta_{22} + \eta_{11}), & f_z^- &= \eta_{12}. \end{aligned} \quad (19.16)$$

PROBLEMA

Establecer la correspondencia general entre espinores de orden par y 4-tensores.

Solución. Todos los espinores para los que $k + l$ es par son base de representaciones irreducibles únicas del grupo ampliado de Lorentz y, por ello, son equivalentes a 4-tensores, que son también base de tales representaciones★.

Un espino de orden (k, k) se transforma en la inversión de acuerdo con

$$\xi^{\alpha\beta\dots\gamma\delta\dots} \rightarrow \pm \zeta_{\alpha\beta\dots\gamma\delta\dots} \quad (1)$$

Dicho espino es equivalente a un 4-tensor simétrico irreducible de orden k — tensor en sentido estricto o pseudotensor —, según sea el signo en (1).

Los espinores de órdenes (k, l) y (l, k) , que son bispinores, se transforman en la inversión como sigue:

$$\underbrace{\xi^{\alpha\beta\dots\gamma\delta\dots}}_{k} \rightarrow (-1)^{\frac{k-l}{2}} \underbrace{\chi_{\alpha\beta\dots\gamma\delta\dots}}_{l} \quad (2)$$

Para $l = k + 2$ el bispinor es equivalente a un 4-tensor $a_{[\mu\nu]\rho\sigma\dots}$ irreducible de orden $k + 2$, antisimétrico respecto de los índices $[\mu\nu]$ y simétrico con relación a todos los demás. La irreducibilidad de este tensor significa que es cero el resultado de su contracción respecto de cualquier par de índices y que también es nulo el resultado de formar el dual respecto de tres índices cualesquiera (es decir, $\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} a_{[\mu\nu]\rho\sigma\dots} = 0$); esta última condición significa que es cero el resultado de la suma cíclica con relación a los índices $\mu\nu$ y uno (cualesquiera) de los restantes.

Para $l = k + 4$ el bispinor es equivalente a un 4-tensor irreducible $a_{[\lambda\mu][\nu\rho]\sigma\dots}$ de orden $k + 4$ con las siguientes propiedades: es antisimétrico respecto de los pares de índices $[\lambda\mu]$ y $[\nu\rho]$, simétrico con relación a los demás, simétrico respecto de la permutación del par $[\lambda\mu]$ con el par $[\nu\rho]$, conduce al valor cero al contraer un par cualquiera de índices y da también cero al formar el dual para una terna cualquiera de índices.

De manera general, para $l = k + 2n$ el bispinor es equivalente a un 4-tensor irreducible de orden $k + 2n$ antisimétrico respecto de n pares de índices y simétrico con relación a los k índices restantes★★.

§ 20. La ecuación de Dirac en la representación espinorial

Una partícula de spin 1/2 se representa en su sistema de reposo por una función de onda de dos componentes — por un espino tridimensional —. Por su «origen cuadridimensional», éste puede ser tanto un 4-espino no puntado como puntado. En la descripción de la partícula en un sistema de referencia arbitrario intervienen ambos 4-espinores; los designaremos por ξ^a y η_a^{***} .

* Los espinores de orden impar, en cambio, son base de representaciones bivalentes del grupo: una rotación espacial de 360° cambia el signo de los espinores, de modo que a cada elemento del grupo corresponden dos matrices de signos opuestos.

** Los 4-tensores antisimétricos para un número mayor de índices (respecto de tres, de cuatro, etc.) no aparecen en esta clasificación por una razón evidente: un tensor antisimétrico de tercer orden es equivalente (es dual) de un pseudovector y un tensor antisimétrico de cuarto orden se reduce a un escalar (es proporcional al pseudotensor unidad $\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$); la antisimetría con relación a un número mayor de índices es totalmente imposible en el espacio de cuatro dimensiones.

*** Un espino tridimensional de primer orden puede «proceder» también de 4-espinores de órdenes impares más elevados que, en el sistema de reposo, pasan a ser antisimétricos respecto de un par de índices o más de uno. Tales variantes, sin embargo, conducirían a ecuaciones de órdenes más elevados (cf. la nota de la pág. 39).

Para una partícula libre, el único operador que interviene en la ecuación de onda puede ser (como ya se indicó en el § 10) tan sólo el operador 4-impulso $p_\mu = i\partial_\mu$. En la notación espinorial, a este 4-vector corresponde un operador espinorial $p_{a\dot{\beta}}$ tal que

$$\begin{aligned} p^{1\dot{\beta}} &= p_{z\dot{\beta}} = p_z + p_0, & p^{2\dot{\beta}} &= p_{1\dot{\beta}} = p_0 - p_z, \\ p^{1\dot{\beta}} &= -p_{z\dot{\beta}} = p_x - ip_y, & p^{2\dot{\beta}} &= -p_{1\dot{\beta}} = p_x + ip_y. \end{aligned} \quad (20.1)$$

La ecuación de onda es una relación diferencial lineal entre componentes de los espinores formada mediante el operador $p_{a\dot{\beta}}$. La condición de invariancia relativista fija el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} p^{a\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}} &= m \xi^a, \\ p_{\dot{\beta}a} \xi^a &= m \eta_{\dot{\beta}}, \end{aligned} \quad (20.2)$$

donde m es una constante sin dimensiones. Introducir en estas dos ecuaciones constantes distintas m_1 y m_2 (o cambiar el signo de m) carecería de objeto, ya que las ecuaciones se podrían en cualquier caso reconducir a la forma primitiva sin más que redefinir ξ^a o $\eta_{\dot{\beta}}$.

Eliminemos de las ecuaciones (20.2) uno de los dos espinores substituyendo la expresión de $\eta_{\dot{\beta}}$ dada por la segunda ecuación en la primera:

$$p^{a\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}} = \frac{1}{m} p^{a\dot{\beta}} p_{\gamma\dot{\beta}} \xi^\gamma = m \xi^a.$$

Pero, según (18.4), $p^{a\dot{\beta}} p_{\gamma\dot{\beta}} = p^2 \delta_a^\gamma$, de modo que

$$(p^2 - m^2) \xi^\gamma = 0, \quad (20.3)$$

donde se ve que m es la masa de la partícula.

Obsérvese que la necesidad de introducir una masa en la ecuación de onda exige considerar a la vez dos espinores (ξ^a y $\eta_{\dot{\beta}}$): es imposible construir con uno solo de ellos una ecuación relativísticamente invariante que contenga un parámetro sin dimensiones. Por ello mismo, la función de onda resulta automáticamente invariante con relación a la inversión espacial si se define la transformación de la función de onda mediante

$$P: \quad \xi^a \rightarrow i\eta_a, \quad \eta_a \rightarrow i\xi^a. \quad (20.4)$$

Es fácil ver que al aplicar esta sustitución [y a la vez la sustitución $p^{a\dot{\beta}} \rightarrow p_{a\dot{\beta}}$, que es evidente teniendo en cuenta las fórmulas (20.1)] las dos ecuaciones (20.2) se transforman entre sí. Dos espinores que en la inversión se transforman el uno en el otro constituyen una magnitud con cuatro componentes — un bispinor.

La ecuación de onda relativista representada por el sistema (20.2) se llama *ecuación de Dirac* (establecida por Dirac en 1928). Para un futuro estudio y aplicación de esta ecuación, consideraremos las diferentes formas en que se puede presentar.

Mediante la fórmula (18.6) escribiremos las ecuaciones (20.2) en la forma

$$\begin{aligned} (p_0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \eta &= m\xi, \\ (p_0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi &= m\eta. \end{aligned} \quad (20.5)$$

Los símbolos ξ y η representan aquí cantidades con dos componentes — los espinores

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_i \\ \eta_{\bar{i}} \end{pmatrix} \quad (20.6)$$

(el primero con superíndices y el segundo con subíndices), y en la multiplicación de las matrices σ por cualquier cantidad de dos componentes f aquí y en lo que sigue se entenderá siempre la multiplicación de acuerdo con la regla matricial ordinaria

$$(\sigma f)_a = \sigma_{\alpha\beta} f_\beta. \quad (20.7)$$

Escribir f en forma de columna corresponde al hecho de que en (20.7) cada fila de σ se multiplica por la columna f .

Para facilitar ulteriores referencias, escribamos aquí una vez más las matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (20.8)$$

y recordemos sus propiedades fundamentales:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i &= 2\delta_{ik}, \\ \sigma_i \sigma_k &= ie_{ikl} \sigma_l + \delta_{ik} \end{aligned} \quad (20.9)$$

(véase III, § 55).

Escribamos también la ecuación de onda a que satisface la función de onda conjugado-compleja construida a partir de los espinores

$$\xi^* = (\xi^{1*}, \xi^{2*}), \quad \eta^* = (\eta_i^*, \eta_{\bar{i}}^*). \quad (20.10)$$

Dado que todos los operadores p_μ contienen el factor i , se tiene $p_\mu^* = -p_\mu$. Al formar las expresiones conjugado-complejas de ambos miembros de las ecuaciones (20.5), hay que tener también en cuenta que, en virtud del carácter hermítico de las matrices σ ($\sigma^* = \sigma$) es

$$(\sigma f)_a^* = \sigma_{\alpha\beta}^* f_\beta^* = f_\beta^* \sigma_{\beta\alpha} = (f^* \sigma)_a,$$

y obtenemos las ecuaciones en la forma

$$\begin{aligned} \eta^* (p_0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) &= -m\xi^*, \\ \xi^* (p_0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) &= -m\eta^*. \end{aligned} \quad (20.11)$$

Al utilizar esta notación se conviene en que los operadores p^μ actúan sobre la fun-

ción que aparece a la izquierda de los mismos. Escribir ξ^* y η^* en forma de fila corresponde a la multiplicación matricial en estas ecuaciones: la fila f se multiplica por las columnas de las matrices σ :

$$(f^* \sigma)_\alpha = f_\beta^* \sigma_{\beta\alpha}. \quad (20.12)$$

La transformación inversión para ξ^* , η^* se define como conjugado-compleja de la transformación (20.4):

$$P: \quad \xi^{\alpha*} \rightarrow -i\eta_\alpha^*, \quad \eta_\alpha^* \rightarrow -i\xi^{\alpha*}. \quad (20.13)$$

§ 21. Forma simétrica de la ecuación de Dirac

La forma espinorial de escribir la ecuación de Dirac es la más natural en el sentido de que pone de manifiesto, de manera inmediata, su invariancia relativista. Sin embargo, en las aplicaciones pueden resultar más convenientes otras representaciones de la ecuación de onda que se obtienen mediante otra elección de las cuatro componentes independientes de la función de onda.

Representaremos la función de onda de cuatro componentes por el símbolo ψ (con componentes ψ_i , $i = 1, 2, 3, 4$). En la representación espinorial, esta cantidad es el bispinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (21.1)$$

Pero con igual derecho cabe elegir como componentes independientes ψ cuatro combinaciones linealmente independientes cualesquiera de las componentes de los espinores ξ y η^* . Al hacerlo, convendremos en limitar las transformaciones lineales admisibles tan sólo por la condición de que sean unitarias; tales transformaciones no cambian las formas bilineales formadas a partir de ψ y ψ^* (§ 28).

En el caso general de una elección arbitraria de las componentes de ψ , la ecuación de Dirac se puede presentar en la forma

$$p_\mu \gamma^\mu \psi_k = m \psi_i,$$

donde γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) son ciertas matrices 4×4 (*matrices de Dirac*). De ordinario, escribiremos esta ecuación de forma simbólica prescindiendo de los índices matriciales:

$$(\gamma p - m) \psi = 0, \quad (21.2)$$

donde

$$\gamma p \equiv \gamma^\mu p_\mu = p_0 \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} = i \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla, \quad \boldsymbol{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3).$$

Así, a la forma espinorial de la ecuación con las componentes de ψ dadas por (21.1) corresponden las matrices**

* Para abreviar, llamaremos también bispinor a la cantidad de cuatro componentes ψ en sus representaciones no espinoriales.

** Aquí y en lo que sigue utilizamos una notación abreviada de las matrices 4×4 expresándolas en función de matrices 2×2 : cada símbolo en las expresiones (21.3) es una matriz de este último tipo.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad (21.3)$$

como es fácil ver escribiendo las ecuaciones (20.5) en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & p_0 + p \cdot \sigma \\ p_0 - p \cdot \sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

y comparando con (21.2).

En el caso general las matrices γ deben satisfacer tan sólo las condiciones que garanticen que se cumple la igualdad $p^2 = m^2$. Para poner en claro cuáles son estas condiciones, multiplicaremos la ecuación (21.2) a la izquierda por γp . Se tiene

$$(\gamma^\mu p_\mu)(\gamma^\nu p_\nu)\psi = m(p_\mu \gamma^\mu)\psi = m^2\psi.$$

Dado que $p_\mu p_\nu$ es un tensor simétrico (todos los operadores p_μ comutan entre sí), esta igualdad se puede escribir también en la forma

$$\frac{1}{2} p_\mu p_\nu (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)\psi = m^2\psi,$$

donde se ve que ha de tenerse

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (21.4)$$

Así, pues, todos los pares de matrices γ^μ diferentes anticonmutan y los cuadrados de ellas valen:

$$(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1, \quad (\gamma^0)^2 = 1. \quad (21.5)$$

En una transformación unitaria cualquiera de las componentes de ψ ($\psi' = U\psi$, donde U es una matriz unitaria 4×4) las matrices γ se transforman de acuerdo con

$$\gamma' = U\gamma U^{-1} = U\gamma U^+ \quad (21.6)$$

[de modo que la ecuación $(\gamma p - m)\psi = 0$ pasa a ser la $(\gamma' p - m)\psi' = 0$]. Las relaciones de conmutación (21.4), naturalmente, se conservan así invariables.

La matriz γ^0 de (21.3) es hermítica, y las matrices γ , antihermíticas. Estas propiedades se conservan también en cualquier transformación unitaria (21.6), de modo que siempre se tendrá [★]:

$$\gamma^+ = -\gamma, \quad \gamma^{0+} = \gamma^0. \quad (21.7)$$

Escribamos también la ecuación para la función conjugado-compleja ψ^* . Formando la ecuación conjugado-compleja de la (21.2) y teniendo en cuenta, al hacerlo, las propiedades (21.7), se obtendrá

$$(-p_0 \tilde{\gamma}_0 - p \cdot \tilde{\gamma} - m)\psi^* = 0.$$

* Estas igualdades se pueden escribir todas juntas en la forma

$$\gamma^{\lambda+} = \gamma^0 \gamma^\lambda \gamma^0. \quad (21.7a)$$

Permutemos ψ^* teniendo en cuenta que $\tilde{\gamma}^\mu \psi^* = \psi^* \gamma^\mu$ y multipliquemos luego a la izquierda toda la ecuación por γ^0 ; observando que $\gamma \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma$ e introduciendo el nuevo bispinor

$$\bar{\psi} = \psi^* \gamma^0, \quad \psi^* = \bar{\psi} \gamma^0, \quad (21.8)$$

obtendremos

$$\bar{\psi} (\gamma p + m) = 0. \quad (21.9)$$

Al igual que en (20.11), se supone aquí que el operador p actúa sobre la función que aparece a su izquierda. La función $\bar{\psi}$ se llama *conjugada de Dirac* (o conjugada relativista) de la función ψ . El sentido de que aparezca el factor γ^0 en su definición consiste en que (en la representación espinorial) este operador permuta los espinores ξ^* y η^* de modo que en $\bar{\psi} = (\eta^*, \xi^*)$ el primero (como en ψ) es el no puntado, y el segundo, el puntado. Por esta razón precisamente $\bar{\psi}$ constituye una «pareja» más natural que ψ^* cuando, por ejemplo, uno y otro figuran juntos en las diferentes combinaciones bilineales (véase § 28).

La transformación inversión aplicada a la función de onda se puede presentar en la forma

$$P: \quad \psi \rightarrow i\gamma^0 \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow -i\bar{\psi} \gamma^0. \quad (21.10)$$

En la representación espinorial de ψ , la matriz γ^0 permuta, como debe ocurrir en la inversión, las componentes ξ y η . La invariancia de la ecuación de Dirac respecto de la transformación (21.10) es también evidente de manera directa en el caso general: substituyendo en la ecuación (21.2) $p \rightarrow -p$ y a la vez $\psi \rightarrow i\gamma^0 \psi$, obtendremos

$$(p_0 \gamma^0 + p \cdot \gamma - m) \gamma^0 \psi = 0.$$

Multiplicando esta ecuación a la izquierda por γ^0 y teniendo en cuenta que γ^0 y γ anticommutan, volvemos a la ecuación de partida.

Multiplicando a la izquierda la ecuación $(\gamma p - m) \psi = 0$ por $\bar{\psi}$, la ecuación $\bar{\psi}(\gamma p + m) = 0$ a la derecha por ψ y sumando los resultados, se obtendrá

$$\bar{\psi} \gamma^\mu (p_\mu \psi) + (p_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi = p_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0,$$

donde los paréntesis indican sobre qué función actúa el operador p . La igualdad obtenida tiene la forma de una ecuación de continuidad $\partial_\mu j^\mu = 0$, de modo que la magnitud

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = (\psi^* \psi, \psi^* \gamma^0 \psi \psi) \quad (21.11)$$

constituye el 4-vector densidad de corriente de las partículas. Observemos que su componente temporal $j^0 = \psi^* \psi$ es definida positiva.

La ecuación de Dirac puede representarse en una forma en la que aparece despejada la derivada respecto del tiempo:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (21.12)$$

donde H es el hamiltoniano de la partícula*. Para esto basta multiplicar la ecuación (21.2) a la izquierda por γ^0 . La expresión que se obtiene para el hamiltoniano es:

$$H = \alpha \cdot p + \beta m, \quad (21.13)$$

donde se ha introducido la notación ordinaria para las matrices que figuran en ella:

$$\alpha = \gamma^0 \gamma, \quad \beta = \gamma^0. \quad (21.14)$$

Observemos que

$$\alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i = 2\delta_{ik}, \quad \beta \alpha + \alpha \beta = 0, \quad \beta^2 = 1, \quad (21.15)$$

es decir, todas las matrices α, β anticommutan entre sí y sus cuadrados son iguales a 1; todas ellas son hermíticas. En la representación espinorial

$$\alpha = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (21.16)$$

En el caso límite de pequeñas velocidades, la partícula debe representarse, al igual que en la teoría no-relativista, por un solo espinor de dos componentes. En efecto, pasando en las ecuaciones (20.5) al límite $p \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow m$, obtendremos $\xi = \eta$, es decir, los dos espinores que constituyen el bispinor coinciden. Sin embargo, se pone aquí de manifiesto un inconveniente de la forma espinorial de escribir la ecuación de Dirac: en el paso al límite, se conservan distintas de cero las cuatro componentes de ψ , a pesar de que efectivamente tan sólo dos de ellas son independientes. Resulta por ello más cómoda la representación de la función de onda ψ en la que, en el límite, se anulan dos de sus componentes.

Conforme a esto, introduzcamos en vez de ξ y η sus combinaciones lineales φ y χ :

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi + \eta), \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi - \eta). \quad (21.17)$$

Entonces, para una partícula en reposo es $\chi = 0$. Esta representación de ψ la llamaremos *representación típica*. En la inversión φ y χ se transforman en funciones de sí mismas de acuerdo con

$$P: \quad \varphi \rightarrow i\varphi, \quad \chi \rightarrow -i\chi. \quad (21.18)$$

Las ecuaciones para φ y χ se obtienen sumando y restando las ecuaciones (20.5):

* Para una partícula de spin 0, la ecuación de onda no pudo representarse en esta forma: la ecuación (10.5) para el escalar ψ es de segundo orden respecto del tiempo y el sistema (10.4) de ecuaciones de primer orden para la magnitud de cinco componentes (ψ, ψ_μ) no contiene derivadas respecto del tiempo de todas las componentes.

$$\begin{aligned} p_0\varphi - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi &= m\varphi, \\ -p_0\chi + \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\varphi &= m\chi. \end{aligned} \quad (21.19)$$

Es claro por esto que a la representación típica corresponden las matrices

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (21.20)$$

Dado que en (21.17) se suman por separado las primeras y las segundas componentes de ξ y η , en la representación típica, como también en la espinorial, las componentes ψ_1 y ψ_3 corresponden a los valores propios $+1/2$ de la proyección del spin, y las ψ_2 y ψ_4 , a la proyección $-1/2$. En ambas representaciones, por consiguiente, la matriz $(1/2)\Sigma$, donde

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (21.21)$$

es el operador tridimensional de spin: al aplicar $(1/2)\Sigma_z$ a un bispinor que contiene tan sólo las componentes ψ_1 , ψ_3 o las componentes ψ_2 , ψ_4 , el bispinor queda multiplicado por $+1/2$ o por $-1/2$, respectivamente. En una representación arbitraria esta matriz se puede escribir en la forma

$$\Sigma = -\alpha\gamma^5 = -\frac{i}{2}\alpha \times \alpha \quad (21.22)$$

[la definición de γ^5 véase más adelante (22.14)].

PROBLEMAS

1. Hallar las fórmulas de transformación de la función de onda en una transformación de Lorentz infinitesimal y en un giro espacial infinitamente pequeño.

Solución. En la representación espinorial de ψ , en una transformación de Lorentz infinitesimal se tiene

$$\xi' = \left(1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta V\right)\xi, \quad \eta' = \left(1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta V\right)\eta$$

[véase (18.8), (18.8a), (18.10)]. Ambas fórmulas pueden escribirse juntas en la forma

$$\psi' = \left(1 - \frac{1}{2}\alpha \cdot \delta V\right)\psi. \quad (1)$$

De manera análoga, la ley de transformación correspondiente a un giro infinitamente pequeño es

$$\psi' = \left(1 + \frac{i}{2}\Sigma \cdot \delta \theta\right)\psi. \quad (2)$$

En esta forma las fórmulas son válidas en cualquier representación de ψ , si por α y Σ se entienden las matrices en la misma representación.

Es fácil comprobar que las matrices α y Σ constituyen las componentes de un «4-tensor matricial» antisimétrico

$$\alpha^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = (\alpha, i\Sigma)$$

[las componentes se han numerado de acuerdo con la regla (19.15)]. Introduzcamos también el tensor antisimétrico infinitesimal $\delta\epsilon^{\mu\nu} = (\delta V, \delta\theta)$. Entonces

$$\sigma^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu} = 2i\Sigma\delta\theta - 2\alpha\cdot\delta V,$$

y ambas fórmulas (1-2) se pueden escribir en una forma única:

$$\psi' = \left(1 + \frac{1}{4}\sigma^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu}\right)\psi. \quad (3)$$

2. Escribir la ecuación de Dirac en una representación tal que en ella no aparezcan coeficientes imaginarios (*E. Majorana*, 1937).

Solución. En la representación típica, en la ecuación

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} + im\beta\right)\psi = 0$$

son imaginarias tan sólo las matrices α_y e $i\beta$. Este carácter imaginario desaparece aplicando una transformación $\psi' = U\psi$ tal que, como resultado de la misma, se permutan la matriz imaginaria α_y y la matriz real β . Para esto hay que hacer

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_y + \beta) = U^{-1}.$$

Entonces

$$\alpha'_x = U\alpha_x U = -\alpha_x, \quad \alpha'_y = \beta, \quad \alpha'_z = -\alpha_z, \quad \beta' = \alpha_y,$$

y la ecuación de Dirac toma la forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} - \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} + im\alpha_y\right)\psi' = 0,$$

en la que todos los coeficientes son reales.

§ 22. Álgebra de las matrices de Dirac

En los cálculos en los que interviene la ecuación de Dirac hay que utilizar a menudo las matrices γ sin acudir a su forma concreta en una u otra representación determinada. Las reglas de operación con estas matrices están por completo determinadas por las relaciones de conmutación

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3), \quad (22.1)$$

que fijan todas sus propiedades generales.

En este párrafo presentamos una serie de fórmulas y reglas del álgebra de las matrices γ que son útiles en diferentes cálculos.

El « producto escalar » de las matrices γ por sí mismas es: $g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = 4$. Para abreviar la notación y por analogía con las componentes covariantes de los 4-vectores, introduciremos los símbolos $\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$. Entonces

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4. \quad (22.2)$$

Pero si las matrices γ_μ y γ^μ están separadas por uno o por varios factores γ , mediante una o varias permutaciones con estos factores [y con ayuda de la regla (22.1)] γ_μ y γ^μ pueden llevarse a posiciones contiguas, hecho lo cual la suma (respecto de μ)

se efectúa de acuerdo con (22.2). De esta manera se obtienen las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned}\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu &= -2\gamma^\nu, \\ \gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\mu &= 4g^{\lambda\nu}, \\ \gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu &= -2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda, \\ \gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu &= 2(\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho + \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma).\end{aligned}\quad (22.3)$$

De ordinario, los factores γ^μ, \dots figuran combinados con diferentes 4-vectores en forma de «productos escalares». En lo que sigue utilizaremos frecuentemente la notación

$$\hat{a} = \gamma a \equiv \gamma^\mu a_\mu. \quad (22.4)$$

Para tales productos, las fórmulas (22.1) pasan a ser

$$\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a} = 2(ab), \quad \hat{a}\hat{a} = a^2, \quad (22.5)$$

y las fórmulas (22.3),

$$\begin{aligned}\gamma_\mu \hat{a} \gamma^\mu &= -2\hat{a}, \\ \gamma_\mu \hat{a} \hat{b} \gamma^\mu &= 4(ab), \\ \gamma_\mu \hat{a} \hat{b} \hat{c} \gamma^\mu &= -2\hat{c} \hat{b} \hat{a}, \\ \gamma_\mu \hat{a} \hat{b} \hat{c} \hat{d} \gamma^\mu &= 2(\hat{d} \hat{a} \hat{b} \hat{c} + \hat{c} \hat{b} \hat{a} \hat{d}).\end{aligned}\quad (22.6)$$

Una operación que se aplica con frecuencia es la de formar la traza del producto de un cierto número de matrices γ . Consideremos la cantidad

$$T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \equiv \frac{1}{4} \text{Tr} (\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}). \quad (22.7)$$

En virtud de la conocida propiedad de la traza de un producto de matrices, este tensor es simétrico respecto de las permutaciones cíclicas de los índices $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n$.

Dado que las matrices γ tienen la misma forma en cualquier sistema de referencia, también las cantidades T son independientes del sistema elegido. Por ello, forman un tensor que se expresa exclusivamente en función del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que goza de esta propiedad.

Pero a partir del tensor de segundo orden $g_{\mu\nu}$ se puede construir tan sólo tensores de orden par. De aquí se sigue, sin más, que la traza del producto de un número impar cualquiera de factores γ es igual a cero. En particular, es igual a cero cada una de las trazas de las γ^* .

$$\text{Tr } \gamma^\mu = 0. \quad (22.8)$$

La traza de la matriz unidad 4×4 [implícita en el segundo miembro de la relación de commutación (22.1)] es igual a 4. Por ello, tomando la traza de ambos miembros de la igualdad (22.1), se sigue que

* La traza de una matriz es invariante respecto de las transformaciones $\gamma = U\gamma U^{-1}$. Por lo tanto, (22.8) es también evidente sin más que tener en cuenta las expresiones concretas (21.3) de dichas matrices.

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}. \quad (22.9)$$

La traza del producto de cuatro matrices es

$$T^{\lambda\mu\nu\rho} = g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho} - g^{\lambda\nu}g^{\mu\rho} + g^{\lambda\rho}g^{\mu\nu}. \quad (22.10)$$

Esta fórmula se puede obtener, por ejemplo, « arrastrando » el factor γ^λ hacia la derecha en $\text{Tr}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho$ mediante la relación de commutación (22.1); con cada permutación aparece uno de los términos que figuran en (22.10):

$$T^{\lambda\mu\nu\rho} = 2g^{\lambda\mu}T^{\nu\rho} - T^{\mu\lambda\nu\rho} = 2g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho} - T^{\mu\lambda\nu\rho}$$

etcétera. Efectuadas todas estas permutaciones, en el segundo miembro aparece $-T^{\mu\nu\rho\lambda} = -T^{\lambda\mu\nu\rho}$, término que pasaremos al primer miembro. Siguiendo este mismo método, el cálculo de la traza del producto de seis γ se reduce al de las trazas de productos de cuatro factores, etc. Así,

$$T^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} = g^{\lambda\mu}T^{\nu\rho\sigma\tau} - g^{\lambda\nu}T^{\mu\rho\sigma\tau} + g^{\lambda\rho}T^{\mu\nu\sigma\tau} - g^{\lambda\sigma}T^{\mu\nu\rho\tau} + g^{\lambda\tau}T^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (22.11)$$

Observemos que todas las trazas $T^{\lambda\mu\dots}$ son reales y que son distintas de cero tan sólo si cada una de las matrices $\gamma^0, \gamma^1, \dots$ aparece en el producto un número par de veces; tanto lo uno como lo otro es evidente si se tiene en cuenta las fórmulas obtenidas. De aquí, a su vez, es fácil concluir que la traza no varía al cambiar el orden de todos los factores en el orden opuesto \star :

$$\gamma^{\lambda\mu\dots\rho\sigma} = T^{\sigma\rho\dots\mu\lambda}. \quad (22.12)$$

Conforme se recordó ya, los factores γ figuran de ordinario como factores en productos « escalares » junto con diferentes 4-vectores. En tales casos, por ejemplo, las fórmulas (22.9) y (22.10) significan que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{Tr } \hat{a} \hat{b} &= ab, \\ \frac{1}{4} \text{Tr } \hat{a} \hat{b} \hat{c} \hat{d} &= (ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc). \end{aligned} \quad (22.13)$$

Un papel especial lo representa el producto $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Para él se suele adoptar el símbolo:

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (22.14)$$

Es fácil ver que

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad (22.15)$$

es decir, la matriz γ^5 anticommuta con todas las γ^μ . En relación con las matrices α y β se tienen en cambio las reglas

$$\alpha\gamma^5 - \gamma^5\alpha = 0, \quad \beta\gamma^5 + \gamma^5\beta = 0 \quad (22.16)$$

\star En efecto, dado que, para una matriz cualquiera M , es $\text{Tr}M = \widetilde{\text{Tr}M}$, resulta (teniendo también en cuenta el carácter real de la traza): $\text{Tr}(\gamma^2 \dots \gamma^n) = \text{Tr}(\gamma^2 \dots \gamma^n)^+ = \text{Tr}(\gamma^{n+} \dots \gamma^{2+})$, y puesto que cada una de las matrices es o hermítica o antihermítica ($\gamma^{\mu+} = \pm\gamma^\mu$) y aparece en el producto un número par de veces, vale evidentemente (22.12).

(la conmutabilidad con α se sigue del hecho que $\alpha = \gamma^0 \gamma$ es el producto de dos matrices γ^μ).

La matriz γ^5 es hermítica; en efecto,

$$\gamma^{5+} = i\gamma^{3+}\gamma^{2+}\gamma^{1+}\gamma^{0+} = -i\gamma^3\gamma^3\gamma^1\gamma^0,$$

y dado que la sucesión 3, 2, 1, 0 se reduce a la sucesión 0, 1, 2, 3 mediante un número par de transposiciones, será

$$\gamma^{5+} = \gamma^5. \quad (22.17)$$

Daremos también la forma de esta matriz en dos representaciones concretas:

$$\begin{array}{ll} \text{espinorial} & \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \text{típica} & \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{array} \quad (22.18)$$

La traza de la matriz γ^5 es igual a cero:

$$\text{Tr } \gamma^5 = 0 \quad (22.19)$$

[esto se ve directamente en (22.18)]. También son iguales a cero las trazas de los productos $\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu$. En cambio, para los productos de γ^5 por los cuatro factores γ^μ , se tiene

$$\frac{1}{4} \text{Tr } \gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho = ie^{\lambda\mu\nu\rho}. \quad (22.20)$$

Otra fórmula interesante es:

$$\hat{N} = i\gamma^5 \hat{a} \hat{b} \hat{c}, \quad N^\lambda = e^{\lambda\mu\nu\rho} a_\mu b_\nu c_\rho. \quad (22.21)$$

Ésta se sigue de la definición (22.14) escrita en la forma

$$e^{\lambda\mu\nu\rho} \gamma_\lambda = i\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho.$$

PROBLEMA

Hallar (1/4) $\text{Tr } \gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau \equiv A^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau}$.

Solución. Utilizando la regla de conmutación (22.1) y la fórmula (22.20), reducimos la traza buscada a la forma

$$A^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} = -2iB^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} + A^{\nu\mu\lambda\tau\rho\sigma},$$

donde

$$B^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} = e^{\lambda\mu\nu\rho} g^{\sigma\tau} - e^{\lambda\mu\nu\sigma} g^{\rho\tau} + e^{\lambda\mu\nu\tau} g^{\rho\sigma} - e^{\nu\tau\rho} g^{\lambda\mu} + e^{\mu\tau\rho} g^{\lambda\nu} - e^{\lambda\tau\rho} g^{\mu\nu}.$$

En virtud de las propiedades cíclicas y de (22.12), se tiene $A^{\nu\mu\lambda\tau\rho\sigma} = A^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau}$. Así, pues,

$$A^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} = -iB^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau}$$

§ 23. Ondas planas

El estado de una partícula libre con valores determinados del impulso y de la

energía se representa por una onda plana que escribiremos en la forma

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} u_p e^{-ipx} \quad (23.1)$$

El subíndice p indica el valor del 4-impulso; la amplitud de la onda u_p es un bispinor normalizado de determinada manera.

Con vistas a aplicar más adelante la segunda cuantificación, necesitamos, junto con las funciones de onda (23.1), las funciones con «frecuencia negativa» que aparecen en la teoría relativista, conforme se explicó en el § 11, en relación con el carácter bivalente de la raíz $\pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Al igual que en el § 11, entenderemos siempre por ϵ la cantidad positiva $\epsilon = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, de modo que la «frecuencia negativa» es $-\epsilon$; cambiando también el signo de \mathbf{p} , obtendremos una función que es natural designar por ψ_{-p} :

$$\psi_{-p} = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} u_{-p} e^{ipx} \quad (23.2)$$

El sentido de estas funciones se pondrá en claro en el § 26. En lo que sigue escribiremos en paralelo las formas para ψ_p y para ψ_{-p} .

Las componentes de las amplitudes bispinoriales u_p y u_{-p} satisfacen los sistemas de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} (\hat{p} - m) u_p &= 0, \\ (\hat{p} + m) u_{-p} &= 0, \end{aligned} \quad (23.3)$$

que se obtienen substituyendo (23.1-2) en la ecuación de Dirac (lo que equivale a substituir en ésta el operador p por $\pm p$).^{*} La relación $p^2 = m^2$ representa en este caso la condición de compatibilidad de cada uno de estos sistemas. Normalizaremos siempre las amplitudes bispinoriales por las condiciones invariantes

$$\begin{aligned} \bar{u}_p u_p &= 2m, \\ \bar{u}_{-p} u_{-p} &= -2m \end{aligned} \quad (23.4)$$

(donde el trazo sobre una letra significa, como siempre, el paso a la conjugada de Dirac: $\bar{u} = u^* \gamma^0$). Multiplicando las ecuaciones (23.3) a la izquierda por $\bar{u}_{\pm p}$, obtendremos $(\bar{u}_{\pm p} \gamma u_{\pm p}) p = 2m^2 = 2p^2$, de donde resulta evidente que

$$\bar{u}_p \gamma u_p = \bar{u}_{-p} \gamma u_{-p} = 2p. \quad (23.5)$$

Obsérvese que se pasa de las fórmulas para u_p a las fórmulas para u_{-p} cambiando el signo de m .

El 4-vector densidad de corriente es:

$$j = \bar{\psi}_{\pm p} \gamma \psi_{\pm p} = \frac{1}{2\epsilon} \bar{u}_{\pm p} \gamma u_{\pm p} = \frac{p}{\epsilon}, \quad (23.6)$$

* Mencionaremos también los sistemas análogos que se obtienen a partir de la ecuación de Dirac (21.9) para la función conjugado-compleja:

$$\bar{u}_p (\hat{p} - m) = 0, \quad \bar{u}_{-p} (\hat{p} + m) = 0. \quad (23.3a)$$

es decir, $j^\mu = (1, \mathbf{v})$, donde $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\epsilon$ es la velocidad de la partícula. Es claro, por ello, que las funciones ψ_p están normalizadas «a una partícula en el volumen $V = 1$ ».

En virtud de las ecuaciones (23.3), las componentes de la amplitud de onda están ligadas entre sí por ciertas relaciones cuya forma concreta depende, claro está, de la representación concreta de ψ . Determinémosla para la representación típica.

De las ecuaciones (21.19) se sigue para una onda plana

$$\begin{aligned} (\epsilon - m) \varphi - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \chi &= 0, \\ (\epsilon + m) \chi - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (23.7)$$

De estas igualdades se deduce la relación entre φ y χ en dos formas equivalentes:

$$\varphi = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\epsilon - m} \chi, \quad \chi = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\epsilon + m} \varphi \quad (23.8)$$

(es evidente que estas fórmulas son equivalentes: multiplicando la primera a la izquierda por $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}/(\epsilon + m)$ y teniendo en cuenta que $(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbf{p}^2$ y que $\epsilon^2 - m^2 = \mathbf{p}^2$, obtenemos la segunda). En cuanto al factor común en φ y χ lo elegiremos de tal manera que satisfaga la condición de normalización (23.4). En definitiva obtendremos para u_p (y de manera análoga para u_{-p}) las siguientes expresiones:

$$u_p = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon + m} w \\ \sqrt{\epsilon - m} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) w \end{pmatrix}, \quad u_{-p} = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon - m} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) w' \\ \sqrt{\epsilon + m} w' \end{pmatrix} \quad (23.9)$$

[la segunda fórmula se obtiene a partir de la primera cambiando el signo de m y aplicando la sustitución $w \rightarrow (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})w'$]. Aquí, \mathbf{n} es el versor de \mathbf{p} , y w una cantidad arbitraria de dos componentes que sujeta tan sólo a la condición de normalización

$$w^* w = 1. \quad (23.10)$$

Para $\bar{u} = u^* \gamma^0 [\gamma^0 \text{ de (21.20)}]$ se sigue

$$\begin{aligned} \bar{u}_p &= (\sqrt{\epsilon + m} w^*, -\sqrt{\epsilon - m} w^* (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})), \\ \bar{u}_{-p} &= (\sqrt{\epsilon - m} w'^* (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}), -\sqrt{\epsilon + m} w'^*), \end{aligned} \quad (23.11)$$

y multiplicando comprobamos que, efectivamente, $\bar{u}_{\pm p} u_{\pm p} = \pm 2m$.

En el sistema de reposo, es decir, para $\epsilon = m$, tenemos

$$u_p = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{-p} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ w' \end{pmatrix}, \quad (23.12)$$

esto es, w representa el espinor tridimensional a que se reduce en el límite no-relativista la amplitud de cada una de las ondas. Obsérvese que para el bispinor u_{-p} se anulan, en el sistema de reposo, las primeras componentes, no las segundas. Esta propiedad de las soluciones de la ecuación de Dirac con «frecuencias negativas» era evidente a priori: haciendo en (23.7) $\mathbf{p} = 0$ y substituyendo ϵ por $-m$, obtendremos $\varphi = 0$ ^{*}.

* En cambio, en la representación de spin tenemos $\xi = -\gamma_i$ en vez de la relación $\xi = \gamma_i$, que es válida en el sistema de reposo para las soluciones con «frecuencias positivas».

La amplitud de una onda plana contiene una cantidad arbitraria de dos componentes. En otras palabras, para un impulso dado existen dos estados independientes distintos en correspondencia con los dos valores posibles de la proyección del spin. Sin embargo, la proyección del spin sobre un eje cualquiera z no puede, en estas condiciones, tener un valor determinado. Esto se ve teniendo en cuenta que el hamiltoniano de una partícula con un \mathbf{p} determinado (es decir, la matriz $H = \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m$) no commuta con la matriz $\Sigma_z = -i\alpha_x\alpha_y$. De acuerdo con lo dicho de una manera general en el § 16, se conserva, con todo, la helicidad λ — es decir, la proyección del spin sobre la dirección orientada de \mathbf{p} : el hamiltoniano commuta con la matriz $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma}$.

A los estados de helicidad corresponden ondas planas en las cuales el espinor tridimensional $w = w^{(\lambda)}(\mathbf{n})$ es función propia del operador $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$:

$$\frac{1}{2} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) w^{(\lambda)} = \lambda w^{(\lambda)}. \quad (23.13)$$

La forma explícita de estos espinores es:

$$w^{(\lambda=1/2)} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad w^{(\lambda=-1/2)} = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (23.14)$$

donde θ y φ son el ángulo polar y el acimut de \mathbf{n} respecto de los ejes fijos xyz^* .

Otra posible elección de dos estados independientes de una partícula libre con \mathbf{p} dado (más simple, aunque menos intuitiva) corresponde a los dos valores de la proyección- z del spin en el sistema de reposo; representémosla por σ . Los correspondientes espinores son:

$$w^{(\sigma=1/2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w^{(\sigma=-1/2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (23.15)$$

En cuanto a las soluciones linealmente independientes con «frecuencia negativa», elegiremos para ellas ondas planas en las que los espinores tridimensionales son

$$w^{(\sigma)} = -\sigma_y w^{(-\sigma)} = 2\sigma i w^{(\sigma)} \quad (23.16)$$

(el sentido de esta elección se explicará en el § 26).

PROBLEMAS

1. Obtener la función de onda (23.9) mediante una transformación de Lorentz directamente a partir del sistema de reposo.

Solución. La fórmula de transformación para una velocidad finita V del sistema de referen-

* La solución de las ecuaciones (23.13) puede multiplicarse por un factor de fase arbitrario, lo que está ligado con la posibilidad de efectuar una rotación cualquiera en torno de la dirección de \mathbf{n} . A esta posibilidad corresponde el hecho de que el ángulo γ sea arbitrario en la transformación (a. 3) [para obtener (23.14) partiendo de las fórmulas (a. 3) hay que hacer en estas últimas iguales a (i) o a (f) las componentes con apóstrofe del espinor, lo que corresponde a determinados valores de la proyección del spin sobre el eje ζ , y los ángulos α, β, γ hay que substituirlos por $\varphi, \theta, 0$].

cia K' respecto del sistema K , se obtiene a partir de la fórmula (1) del problema i del § 21 de la misma manera como se obtiene (18.13) partiendo de (18.12):

$$\psi' = e^{-\frac{\varphi}{2} \mathbf{v}^a} \psi = \left(\cosh \frac{\varphi}{2} - \mathbf{v}^a \sinh \frac{\varphi}{2} \right) \psi,$$

donde \mathbf{v} es el versor de \mathbf{V} y $\tgh \varphi = |\mathbf{V}|$; según la misma fórmula se transforma también la amplitud bispinorial u . Si K es el sistema de reposo de la partícula, y en el sistema K' ésta tiene el impulso \mathbf{p} , se tendrá $\mathbf{V} = -\mathbf{p}/\epsilon$, de donde

$$\cosh \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\epsilon + m}{2m}}, \quad \sinh \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\epsilon - m}{2m}}.$$

Tomando u de (23.12) y utilizando la matriz a de la representación típica, obtendremos para u' la expresión (23.9).

2. En el sistema de reposo se conserva el spin de una partícula libre y su función de onda (en la representación típica) tiene tan sólo dos componentes, que corresponden a los valores $\pm 1/2$ de la proyección del spin sobre el eje z dado. Hallar la representación en la cual la función de onda (onda plana) tiene únicamente dos componentes en cualquier sistema de referencia, componentes que corresponden a valores determinados de una misma característica física del estado — la proyección del spin en el sistema de reposo (*L. Foldy, S. A. Wouthuysen, 1950*).

Solución. Partiendo de la amplitud u_p en la representación típica (23.9), busquemos la transformación unitaria incógnita en la forma $U = e^{W\gamma^5}\mathbf{n}$, donde \mathbf{n} es el versor de \mathbf{p} y W una cantidad real (dado que $\gamma^5 = -\gamma$, automáticamente es entonces $U^+ = U^{-1}$). Desarrollando en serie y teniendo en cuenta que $(\gamma \cdot \mathbf{n})^2 = -1$, representaremos U en la forma

$$U = \cos W + \gamma \cdot \mathbf{n} \sin W.$$

De la condición de que en la amplitud transformada $u'_p = U u_p$ se anulen las dos segundas componentes, se deduce que $\operatorname{tg} W = |\mathbf{p}|/(m + \epsilon)$, o bien

$$W = \operatorname{arctg} \frac{|\mathbf{p}|}{m + \epsilon} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{|\mathbf{p}|}{m}.$$

En la nueva representación se tiene:

$$u_p = \sqrt{2\epsilon} \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$$

y en ella el hamiltoniano de la partícula toma la forma

$$H' = U (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m) U^{-1} = \beta \epsilon$$

(todas las matrices β , α , γ son las de la representación típica). Este hamiltoniano commuta con la matriz

$$\Sigma = -\alpha \gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

que en la nueva representación es el operador de una magnitud física que se conserva — el spin en el sistema de reposo.

§ 24. Ondas esféricas

Las funciones de onda de los estados de una partícula libre (de spin 1/2) con valores determinados j del momento cinético son ondas esféricas espinoriales. Determinemos su forma, para lo cual recordaremos antes las fórmulas análogas de la teoría no-relativista.

La función de onda no-relativista es un espinor tridimensional $\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$. Para un estado con valores determinados de la energía ϵ (y, con ella, también del módulo del impulso, p^*), del momento cinético orbital l , del momento cinético total j y de su proyección m , la función de onda tiene la forma

$$\psi = R_{pl}(r) \Omega_{jlm}(\theta, \varphi). \quad (24.1)$$

Su parte angular Ω_{jlm} son espinores tridimensionales cuyas componentes (para los dos valores $j = l \pm 1/2$ posibles para un valor dado l) vienen dadas por las fórmulas

$$\Omega_{l+1/2, l, m} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}} Y_{l, m-1/2} \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}} Y_{l, m+1/2} \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{l-1/2, l, m} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} Y_{l, m-1/2} \\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} Y_{l, m+1/2} \end{pmatrix} \quad (24.2)$$

(véase III, pág. 471). Llamaremos a Ω_{jlm} *espinores esféricos*. Están normalizados por la condición

$$\int \Omega_{jlm}^* \Omega_{j'l'm'} d\sigma = \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (24.3)$$

En cuanto a las funciones radiales R_{pl} , son un factor común a ambas componentes del espinor ψ y vienen dadas por la fórmula III (33.9):

$$R_{pl} = \sqrt{\frac{p}{r}} J_{l+1/2}(pr). \quad (24.4)$$

Están normalizadas por la condición

$$\int_0^\infty r^2 R_{p'l} R_{pl} dr = \delta(p' - p). \quad (24.5)$$

Volviendo al caso relativista, recordaremos ante todo que para una partícula en movimiento no existen leyes separadas de conservación del spin y del momento cinético orbital: ninguno de los operadores \mathbf{s} y \mathbf{l} comuta por separado con el hamiltoniano. Sin embargo, por lo visto antes se conserva (para una partícula libre) la paridad de un estado. Por ello, el número cuántico l pierde el sentido de índice de un determinado valor del momento cinético orbital, pero pasa a fijar (véase más adelante) la paridad del estado.

Convengamos en considerar la función de onda buscada (bispinor) en la repre-

* En este párrafo p representa el $|\mathbf{p}|$.

sentación típica: $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$. Respecto de las rotaciones, φ y χ se comportan como espinores tridimensionales. En consecuencia, su dependencia angular viene dada por los mismos espinores esféricos Ω_{jlm} . Supongamos que $\varphi \leadsto \Omega_{jlm}$, donde l es uno (determinado) de los dos valores $j + 1/2$ o $j - 1/2$. En la inversión $\varphi(\mathbf{r}) \rightarrow i\varphi(-\mathbf{r})$ [véase (21.18)] y dado que $\Omega_{jlm}(-\mathbf{n}) = (-1)^l \Omega_{jlm}(\mathbf{n})$, será

$$\varphi(\mathbf{r}) \rightarrow i(-1)^l \varphi(\mathbf{r}).$$

En cambio, las componentes χ se comportan en la inversión de acuerdo con $\chi(\mathbf{r}) \rightarrow -i\chi(-\mathbf{r})$. Para que un estado posea determinada paridad (es decir, para que en la inversión todas las componentes queden multiplicadas precisamente por un mismo factor) es necesario, por consiguiente, que la dependencia angular de χ sea la de un spinor esférico $\Omega_{jl'm}$ con otro valor de l (de los dos posibles): dado que estos valores difieren en 1, se tendrá $(-1)^l = -(-1)^l$.

Además, la dependencia radial de φ y χ se determinará por las mismas funciones R_{pl} y $R_{pl'}$ (con valores l y l' que corresponden a los órdenes de los armónicos esféricos que figuran en Ω_{jlm}). Esto es claro, ya que cada una de las componentes de ψ satisface la ecuación de segundo orden $(\mathbf{p}^2 - m^2)\psi = 0$, la cual, para un valor dado de $|\mathbf{p}|$, tiene la forma

$$(\Delta + \mathbf{p}^2)\psi = 0,$$

que coincide formalmente con la ecuación no-relativista de Schrödinger para una partícula libre.

Así, pues, se tiene

$$\varphi = AR_{pl}\Omega_{jlm}, \quad \chi = BR_{pl'}\Omega_{jl'm}, \quad (24.6)$$

y quedan por determinar los coeficientes constantes A y B . Para ello, consideraremos una región alejada en la cual la onda esférica se pueda considerar como plana. De acuerdo con la fórmula asintótica III (33.10) es

$$R_{pl} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2ir} \left\{ e^{i(p_r - \frac{\pi l}{2})} - e^{-i(p_r - \frac{\pi l}{2})} \right\}, \quad (24.7)$$

de modo que φ representa la diferencia de dos ondas planas que se propagan en las direcciones $\pm \mathbf{n}$ ($\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$). Para cada una de ellas tenemos, según (23.8),

$$\chi = \frac{p}{\epsilon + m} (\pm \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \varphi.$$

De lo dicho más arriba, en (24.6), es claro, sin más, que $(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})\Omega_{jlm} = a\Omega_{jl'm}$, donde a es una constante. Es fácil determinarla comparando los valores de ambos miembros de la igualdad para $m = 1/2$ y la dirección \mathbf{n} a lo largo del eje z . Aplicando (7.2a), se encuentra

$$(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})\Omega_{jlm} = i^{l' - l}\Omega_{jl'm}. \quad (24.8)$$

Juntando las fórmulas escritas y comparando con (24.6), obtendremos

$$B = -\frac{\rho}{\epsilon + m} A.$$

Finalmente, el coeficiente A se determina por la normalización general de ψ . Normalizando ψ por la condición

$$\int \psi_{pjlm}^* \psi_{pj'l'm'} dV = \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(p - p'), \quad (24.9)$$

se encuentra finalmente

$$\psi_{pjlm} = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \left(\begin{array}{l} \sqrt{\epsilon + m} R_{pl} \Omega_{jlm} \\ -\sqrt{\epsilon - m} R_{pl'} \Omega_{jl'm'} \end{array} \right), \quad l' = 2j - l. \quad (24.10)$$

De esta manera, para valores dados de j y de m (y de la energía ϵ) existen dos estados que difieren en su paridad. Esta última queda únicamente determinada por el número l , que toma los valores $j \pm 1/2$: en la inversión, el bispinor (24.10) se multiplica por $i(-1)^l$. Las componentes de este bispinor, sin embargo, contienen armónicos esféricos de los dos órdenes l y l' , en lo que se refleja la falta de un valor determinado del momento cinético orbital.

Cuando $r \rightarrow \infty$, en cada región pequeña del espacio las ondas esféricas (24.7) se pueden considerar como planas y correspondientes al impulso $\mathbf{p} = \pm p\mathbf{n}$. Por ello es claro que las funciones de onda en la representación de impulsos difieren esencialmente de (24.10) tan sólo en que en las primeras no aparecen factores radiales y en el significado de versor del impulso atribuido a \mathbf{n} .

Para pasar directamente a la representación de impulsos hay que aplicar el desarrollo de Fourier:

$$\psi(\mathbf{p}') = \int \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}} d^3x. \quad (24.11)$$

La integral se calcula mediante las fórmulas de desarrollo de una onda plana en ondas esféricas *:

$$e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = \frac{(2\pi)^{3/2}}{p} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l R_{pl}(r) Y_{lm}^*(\frac{\mathbf{p}}{p}) Y_{lm}(\frac{\mathbf{r}}{r}). \quad (24.12)$$

Representando el factor $e^{-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}}$ de (24.11) mediante este desarrollo y teniendo en cuenta (24.5), para las componentes de Fourier de la función

$$\psi(\mathbf{r}) = R_{pl}(r) \Omega_{jlm}(\frac{\mathbf{r}}{r})$$

se obtendrá

$$\psi(\mathbf{p}') = \frac{(2\pi)^{3/2}}{p} \delta(p' - p) i^{-l} Y_{lm}(\frac{\mathbf{p}'}{p'}) \int \Omega_{jlm}(\frac{\mathbf{r}}{r}) Y_{lm}^*(\frac{\mathbf{r}}{r}) do.$$

La integral que aquí aparece es igual a los coeficientes de los armónicos esféricos

* Esta fórmula es la generalización de la fórmula III (34.1) al caso en que no se presupone una determinada elección de la dirección del eje z . Véase también (46.3-4).

en la definición (24.2) de los espinores esféricos y, junto con el factor $Y_{lm'}(\mathbf{p}'/\mathbf{p}')$ conduce de nuevo al mismo espinor esférico, pero ahora como función del argumento \mathbf{p}'/\mathbf{p}' :

$$\psi(\mathbf{p}') = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\rho} \delta(p' - p) i^{-l} \Omega_{jlm} \left(\frac{\mathbf{p}'}{\rho} \right)$$

Aplicando este resultado a la función de onda bispinorial (24.10), se obtiene su representación de impulsos:

$$\psi_{pjlm}(\mathbf{p}') = \delta(p' - p) \frac{(2\pi)^{3/2}}{\rho \sqrt{2\varepsilon}} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon + m}}{\sqrt{\varepsilon - m}} i^{-l} \Omega_{jlm}(\mathbf{p}'/\mathbf{p}') \right). \quad (24.13)$$

Los estados $|pjlm\rangle$ coinciden con los estados $|pjm|\lambda\rangle$ considerados en el § 16 (donde $|\lambda| = 1/2$): unos y otros poseen valores determinados de pjm y de la paridad. Por ello, los espinores esféricos Ω_{jlm} están ligados de manera determinada con las funciones $D_{\lambda lm}^{(j)}$ (unas y otras con \mathbf{p}/ρ como argumento). Cuando $p \rightarrow 0$, las funciones de onda (24.13) se reducen a los espinores tridimensionales Ω_{jlm} , cuyas paridades son $P = \eta(-1)^l$ (donde $\eta = i$ es la «paridad intrínseca» del espinor). La comparación con los resultados del § 16 conduce a la siguiente fórmula:

$$\Omega_{jlm} = l! \sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}} (w^{(-1/2)} D_{-1/2 m}^{(j)} \pm w^{(1/2)} D_{1/2 m}^{(j)}) \quad (24.14)$$

(para $l = j \mp 1/2$), donde $w^{(\lambda)}$ es el espinor de tres dimensiones (23.14).

§ 25. Relación del spin con la estadística

La segunda cuantificación de un campo de partículas de spin 1/2 (campo bispinorial) se lleva a cabo exactamente de la misma manera como en el caso del campo escalar en el § 11.

Sin repetir de nuevo todos los razonamientos, escribamos directamente las expresiones de los operadores del campo, que son del todo análogas a las fórmulas (11.2):

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{\rho\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (a_{\rho\sigma} u_{\rho\sigma} e^{-ipx} + b_{\rho\sigma}^+ u_{-\rho-\sigma} e^{ipx}), \\ \bar{\psi} &\equiv \psi^+ \gamma^0 = \sum_{\rho\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (a_{\rho\sigma}^+ \bar{u}_{\rho\sigma} e^{ipx} + b_{\rho\sigma} \bar{u}_{-\rho-\sigma} e^{-ipx}); \end{aligned} \quad (25.1)$$

la suma se extiende a todos los valores del impulso \mathbf{p} y a los valores $\sigma = \pm 1/2$. Los operadores de aniquilación de antipartículas $b_{\rho\sigma}$ (como también los operadores de aniquilación de partículas $a_{\rho\sigma}$) aparecen como coeficientes de funciones que, por su dependencia respecto de las coordenadas ($e^{i\rho r}$), corresponden a estados con impulso \mathbf{p}^* .

* Tanto unas funciones como otras corresponden también a los mismos valores σ de la proyección del spin en el sistema de reposo; para las funciones $\bar{\psi}_{-\rho-\sigma}$ esto se demostrará en el § 26 — véase (26.10).

Para el cálculo del hamiltoniano del campo espinorial, no es necesario determinar su tensor de energía impulso (como hicimos para el campo escalar) dado que, en el presente caso, existe ya el hamiltoniano de la partícula mediante el cual se puede escribir la ecuación de onda (ecuación de Dirac) (21.12). La energía media de la partícula en un estado cuya función de onda es ψ viene dada por la integral

$$\int \psi^* H \psi d^3x = i \int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} d^3x = i \int \bar{\psi} \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} d^3x. \quad (25.2)$$

Conviene observar que la « densidad de energía » (el integrando) no es aquí una magnitud definida positiva.

Substituyendo en (25.2) las funciones ψ y $\bar{\psi}$ por sus operadores- ψ , teniendo en cuenta la ortogonalidad dos a dos de las funciones de onda con diferentes \mathbf{p} o σ y también la relación $\bar{u}_{\pm p\sigma} \gamma^0 u_{\pm p\sigma} = 2\varepsilon$ para las amplitudes de onda, obtendremos el hamiltoniano del campo en la forma

$$H = \sum_{p\sigma} \varepsilon (a_{p\sigma}^+ a_{p\sigma} - b_{p\sigma} b_{p\sigma}^+). \quad (25.3)$$

Se sigue de aquí que, en el caso presente, la cuantificación ha de efectuarse en el sentido de Fermi:

$$\{a_{p\sigma}, a_{p\sigma}^+\}_+ = 1, \quad \{b_{p\sigma}, b_{p\sigma}^+\}_+ = 1, \quad (25.4)$$

mientras que todos los demás pares de operadores a , a^+ , b , b^+ anticommutan entre sí (véase III, § 65). En efecto, el hamiltoniano (25.3) puede escribirse también en la forma

$$H = \sum_{p\sigma} \varepsilon (a_{p\sigma}^+ a_{p\sigma} + b_{p\sigma}^+ b_{p\sigma} - 1),$$

y los valores de la energía (restando, como siempre, una constante aditiva infinita) son:

$$E = \sum_{p\sigma} \varepsilon (N_{p\sigma} + \bar{N}_{p\sigma}), \quad (25.5)$$

es decir, resultan ser, como debían, cantidades definidas positivas. En cambio, si se aplicara la cuantificación de Bose, obtendríamos a partir de (25.3) valores propios no definidos positivos, carentes de sentido, por lo tanto:

$$\sum \varepsilon (N_{p\sigma} - \bar{N}_{p\sigma}).$$

Una expresión análoga a (25.5)

$$P = \sum_{p\sigma} \mathbf{p} (N_{p\sigma} + \bar{N}_{p\sigma}) \quad (25.6)$$

se obtiene también para el impulso del sistema — valores propios del operador $\int \psi^+ \mathbf{p} \psi d^3x$.

El operador 4-corriente es

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (25.7)$$

y para el operador «carga» del campo obtenemos

$$Q = \int \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi d^3x = \sum_{p\sigma} (a_{p\sigma}^+ a_{p\sigma} + b_{p\sigma} b_{p\sigma}^+) = \sum_{p\sigma} (a_{p\sigma}^+ a_{p\sigma} - b_{p\sigma}^+ b_{p\sigma} + 1), \quad (25.8)$$

y sus valores propios son

$$Q = \sum_{p\sigma} (N_{p\sigma} - \bar{N}_{p\sigma}). \quad (25.9)$$

De esta manera, llegamos de nuevo a una representación de las partículas y de las antipartículas para la que vale todo lo dicho acerca de ellas en el § 11.

Pero mientras que las partículas de spin cero son bosones, las partículas de spin 1/2 resultan ser fermiones. Si se busca el origen formal de esta diferencia, veremos que procede de la diferencia en el carácter de las expresiones de la «densidad de energía» para los campos escalar y espinorial. En el primer caso, esta expresión es definida positiva, como consecuencia de lo cual en el hamiltoniano (11.3) ambos términos (a^+a y bb^+) aparecen con el signo más. Para poder asegurar el carácter positivo de los valores propios de la energía, la substitución de bb^+ por b^+b debe efectuarse entonces sin cambio de signo, es decir, de acuerdo con la regla de conmutación de Bose. En el caso del campo espinorial, en cambio, la «densidad de energía» no es una cantidad definida positiva, lo que conduce a que en el hamiltoniano (25.3) el término bb^+ aparece con el signo menos y para obtener valores propios positivos la substitución de bb^+ por b^+b debe ir acompañada del cambio de signo, es decir, debe efectuarse según la regla de conmutación de Fermi.

Por otra parte, la forma de la densidad de energía está vinculada directamente con las propiedades de transformación de la función de onda y con la condición de invariancia relativista. En este sentido cabe decir que también el ligamen del spin con la estadística a la que obedecen las partículas es asimismo una consecuencia directa de estas condiciones.

Del hecho de que las partículas de spin 1/2 son fermiones se sigue también una aserción general: todas las partículas con spin semientero son fermiones, y las partículas con spin entero son bosones (incluido lo demostrado en el § 11 para partículas de spin 0)★.

Esto es evidente si se observa que una partícula de spin s se puede representar como «compuesta» de $2s$ partículas de spin 1/2. Si el número s es semientero, $2s$ es impar, y si s es entero, será par. Pero una partícula «compuesta» que contiene un número par de fermiones, es un bosón, y la que contiene un número impar de fermiones, es un fermión★★.

* El origen de la relación entre el spin de una partícula y la estadística a que obedece fue explicado por primera vez por Pauli (1940).

** En estos razonamientos se presupone que todas las partículas con igual spin deben obedecer a la misma estadística (con toda independencia de la manera como se las ha «compuesto»). Que efectivamente así es se puede ver por razonamientos análogos. Así, si existieran fermiones con spin 0, mediante un fermión de spin 0 y un fermión de spin 1/2 sería posible formar una partícula de spin 1/2 que sería un bosón —en contradicción con el resultado general demostrado para el caso de spin 1/2.

Si el sistema está formado por partículas de diferente especie, para cada tipo de partículas deben introducirse sus propios operadores de creación y aniquilación. Al hacerlo, los operadores que se refieren a diferentes bosones, o a bosones y a fermiones, comutan entre sí. En lo que concierne a los operadores que se refieren a fermiones diferentes, en los límites de la teoría no-relativista sería posible considerarlos o bien como operadores que comutan, o bien como operadores que anticommutan (III, § 65). Pero en la teoría relativista, que permite la transformación de unas partículas en otras, hay que considerar los operadores de creación y aniquilación de los diferentes fermiones como operadores que anticommutan, al igual que los operadores que se refieren a los diferentes estados de fermiones del mismo tipo.

PROBLEMA

Hallar el lagrangiano del campo espinorial.

Solución. La función de Lagrange que corresponde a la ecuación de Dirac viene dada por la expresión escalar real

$$L = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \cdot \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi. \quad (1)$$

Interpretando como «coordenadas generalizadas» q las componentes ψ y $\bar{\psi}$, es fácil comprobar que las correspondientes ecuaciones de Lagrange (10.10) coinciden con las ecuaciones de Dirac para $\bar{\psi}$ y ψ . El signo del lagrangiano (como también su coeficiente) es, en este caso, convencional. Dado que L contiene las derivadas de ψ y $\bar{\psi}$ linealmente, la acción $S = \int L d^4x$ no puede en ningún caso presentar ni mínimo ni máximo. La condición $\delta S = 0$ determina ahora únicamente un punto estacionario, pero no un extremo de la integral.

El lagrangiano del campo espinorial se obtiene substituyendo en (1) ψ por el operador Ψ . Aplicando a este lagrangiano la fórmula (12.12) obtendremos el operador corriente (25.7).

§ 26. Conjugación de carga e inversión de los espines respecto del tiempo

Los factores $\psi_{p\sigma} = u_{p\sigma} e^{-ipx}$ que en (25.1) multiplican a los operadores $a_{p\sigma}$, son funciones de onda de partículas libres (nos referiremos a electrones) con impulsos p y polarizaciones σ :

$$\psi_{p\sigma}^{(e)} = \psi_{p\sigma}.$$

Los factores $\bar{\psi}_{-p-\sigma}$, en cambio, que multiplican a los operadores $b_{p\sigma}$, deben considerarse como funciones de onda de positones con los mismos p , σ . Sin embargo, con esto resulta que las funciones de electrón y de positón se expresan en diferentes representaciones bispinoriales. Esto es claro teniendo en cuenta que ψ y $\bar{\psi}$ son distintos en cuanto a sus propiedades de transformación y que sus componentes satisfacen a sistemas de ecuaciones diferentes. Para evitar este inconveniente hay que aplicar a las componentes $\bar{\psi}_{-p-\sigma}$ una determinada transformación unitaria tal que la nueva función de cuatro componentes satisfagan la misma ecuación que $\psi_{p\sigma}^*$. Esta función precisamente es la que llamaremos función de onda del positón (con

* Para partículas de spin 0 esta cuestión no se planteaba en absoluto, ya que las funciones escalares ψ y ψ^* satisfacen la misma ecuación y ψ_{-p}^* coincide simplemente con ψ_p .

impulso \mathbf{p} y polarización σ). Designando por U_C la matriz de la transformación unitaria que buscamos, escribiremos

$$\psi_{p\sigma}^{(p)} = U_C \bar{\psi}_{-p-\sigma}. \quad (26.1)$$

La operación C mediante la cual se construye esta función a partir de $\psi_{-p-\sigma}$ se llama *conjugación de carga* de la función de onda (H. Kramers, 1937). Este concepto no queda limitado, claro está, a su aplicación a las ondas planas. Para una función ψ cualquiera existe la función «conjugada de carga»

$$C\psi(t, \mathbf{r}) = U_C \bar{\psi}(t, \mathbf{r}). \quad (26.2)$$

que se transforma como ψ y que satisface a la misma ecuación.

Las propiedades de la matriz U_C se siguen de esta definición. Si ψ es una solución de la ecuación de Dirac $(\gamma p - m)\psi = 0$, $\bar{\psi}$ satisface la ecuación

$$\bar{\psi}(\gamma p + m) = 0, \text{ o bien } (\tilde{\gamma}p + m)\bar{\psi} = 0.$$

Multiplicando esta ecuación a la izquierda por U_C , queda

$$U_C \tilde{\gamma}p \bar{\psi} + m U_C \bar{\psi} = 0;$$

impongamos la condición de que la función $U_C \bar{\psi}$ satisfaga la misma ecuación que ψ :

$$(\gamma p - m) U_C \bar{\psi} = 0.$$

Comparando ambas ecuaciones se encuentra la siguiente «relación de conmutación» entre U_C y las matrices γ^μ ^{*}:

$$U_C \tilde{\gamma}^\mu = -\gamma^\mu U_C. \quad (26.3)$$

Supondremos, además, que las funciones de onda se dan en las representaciones espinorial o típica (al caso general de una transformación arbitraria volveremos únicamente al final de este párrafo). En estas representaciones es

$$\begin{aligned} \gamma^{0,2} &= \tilde{\gamma}^{0,2}, & \gamma^{1,3} &= -\tilde{\gamma}^{1,3}, \\ (\gamma^{0,1,3})^* &= \gamma^{0,1,3}, & \gamma^{2*} &= -\gamma^2. \end{aligned} \quad (26.4)$$

Entonces, las condiciones (26.3) quedan satisfechas por la matriz $U_C = \eta_C \gamma^2 \gamma^0$ con una constante arbitraria η_C . De la condición $C^2 = 1$ se sigue que $|\eta_C|^2 = 1$, de modo que la matriz U_C queda definida salvo un factor de fase. En lo que sigue elegiremos $\eta_C = 1$, de modo que

$$U_C = \gamma^2 \gamma^0 = -\alpha_y. \quad (26.5)$$

Observando también que $\bar{\psi} = \psi^* \gamma^0 = \tilde{\gamma}^0 \psi^* = \gamma^0 \psi^*$, la acción del operador C se puede representar de la siguiente manera:

$$C\psi = \gamma^2 \gamma^0 \bar{\psi} = \gamma^2 \psi^*. \quad (26.6)$$

* Obsérvese también la igualdad que se sigue de aquí

$$U_C \tilde{\gamma}^5 = \gamma^5 U_C \quad (26.3a)$$

En forma explícita, la transformación (26.6) para la representación espinorial es

$$C: \xi^a \rightarrow -i\eta^{\dot{a}*}, \quad \eta_a \rightarrow -i\xi_a^*, \quad (26.7a)$$

o, lo que es lo mismo,

$$C: \xi_a \rightarrow -i\eta_a^*, \quad \eta^{\dot{a}} \rightarrow -i\xi^a. \quad (26.7b)$$

La transformación de conjugación de carga para ondas planas $\psi_{\pm p\sigma}$ se puede efectuar fácilmente utilizando sus expresiones explícitas (23.9) y la matriz U_C en la representación típica:

$$U_C = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix}. \quad (26.8)$$

Observando que

$$\sigma_y \sigma^* = -\sigma \sigma_y,$$

en la definición de $w^{(\sigma)*}$, de acuerdo con (23.16), obtendremos

$$U_C \bar{u}_{-p-\sigma} = u_{p\sigma}, \quad U_C u_{-p-\sigma} = \bar{u}_{p\sigma} \quad (26.9)$$

De esta manera

$$C \psi_{-p-\sigma} = \psi_{p\sigma}, \quad (26.10)$$

de modo que las funciones $\psi_{-p-\sigma}$ que figuran en los operadores- ψ (25.1) junto con los operadores $b_{p\sigma}$, corresponden en efecto a estados de una partícula con impulso p y polarización σ . Vemos también que los estados de electrón y de positón se representan por las mismas funciones exactamente:

$$\psi_{p\sigma}^{(e)} = \psi_{p\sigma}^{(p)} = \psi_{p\sigma}.$$

Esto es del todo natural, ya que las funciones $\psi_{p\sigma}$ nos informan solamente acerca del impulso y la polarización de una partícula.

De manera análoga se puede considerar la operación inversión del tiempo. El cambio de signo del tiempo debe ir acompañado por el paso de la función de onda a la conjugado-compleja. Para obtener como resultado de la «inversión respecto del tiempo» la función de onda ($T\psi$) en la misma representación que la función de partida ψ hay que aplicar a las componentes ψ^* (o $\bar{\psi}$) una determinada transformación unitaria. Según esto, y de manera análoga al caso de la ecuación (26.2), representaremos la acción del operador T sobre ψ en la forma

$$T\psi(t, r) = U_T \bar{\psi}(-t, r), \quad (26.11)$$

donde U_T es una matriz unitaria.

De nuevo escribamos la ecuación de Dirac a que satisface ψ :

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma \cdot \nabla - m \right) \psi(t, r) = 0,$$

y la ecuación para $\bar{\psi}$:

$$\left(i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\tilde{\gamma} \cdot \nabla + m \right) \bar{\psi}(t, r) = 0.$$

Cambiemos en esta última $t \rightarrow -t$ y multipliquémosla a la izquierda por U_T :

$$\left(iU_T\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t} - iU_T\tilde{\gamma}\nabla \right) \bar{\Psi}(-t, \mathbf{r}) - mU_T\bar{\Psi}(-t, \mathbf{r}) = 0.$$

Queremos que la función $U_T\bar{\Psi}(-t, \mathbf{r})$ satisfaga la misma ecuación a que satisface $\psi(t, \mathbf{r})$:

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma\nabla \right) U_T\bar{\Psi}(-t, \mathbf{r}) - mU_T\bar{\Psi}(-t, \mathbf{r}) = 0.$$

Comparando ambas ecuaciones, se encuentra que la matriz U_T debe satisfacer las condiciones

$$U_T\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0 U_T, \quad U_T\tilde{\gamma} = -\gamma U_T. \quad (26.12)$$

En las representaciones espinorial y típica, éstas quedan satisfechas por la matriz*

$$U_T = i\gamma^3\gamma^1\gamma^0. \quad (26.13)$$

Así, pues, la acción del operador T viene dada por la fórmula

$$T\psi(t, \mathbf{r}) = i\gamma^3\gamma^1\gamma^0\bar{\Psi}(-t, \mathbf{r}) = i\gamma^3\gamma^1\psi^*(-t, \mathbf{r}). \quad (26.14)$$

En forma explícita, esta transformación en la representación espinorial se escribe

$$T: \quad \xi^a \rightarrow -i\xi_a^*, \quad \eta_a \rightarrow i\eta_a^* \quad (26.15a)$$

o bien

$$T: \quad \xi_a \rightarrow i\xi^{a*}, \quad \eta^a \rightarrow -i\eta_a^*. \quad (26.15b)$$

En la representación típica es

$$U_T = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & -\sigma_y \end{pmatrix}. \quad (26.16)$$

Determinemos el resultado de la acción sobre ψ de las tres operaciones P, T y C. Para ello, escribamos sucesivamente:

$$T\psi(t, \mathbf{r}) = -i\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t, \mathbf{r}),$$

$$PT\psi(t, \mathbf{r}) = i\gamma^0(T\psi) = \gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t, -\mathbf{r}),$$

$$CPT\psi(t, \mathbf{r}) = \gamma^2(\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi^*)^* = \gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi(-t, -\mathbf{r}),$$

o bien

$$CPT\psi(t, \mathbf{r}) = i\gamma^5\psi(-t, -\mathbf{r}). \quad (26.17)$$

En la representación espinorial

$$CPT: \quad \xi^a \rightarrow -i\xi_a, \quad \eta_a \rightarrow i\eta_a^* \quad (26.18)$$

[lo que se comprueba fácilmente de manera directa a partir de las reglas de transformación (20.4), (26.7) y (26.15)]**.

* La elección del factor de fase (26.13) está ligada con la elección correspondiente a (26.5) por consideraciones que se indican más adelante, en la nota de la pág. 106.

** La notación CPT supone la aplicación de los operadores en el orden de derecha a izquierda. El signo en (26.17-18) depende de este orden dado el carácter no conmutativo de T con C y P (en su acción sobre un bispinor).

Las expresiones escritas más arriba para las matrices U_C y U_T suponían que la representación de ψ era la espinorial o la típica. Veamos, finalmente, qué propiedades de estas expresiones se conservan en una representación arbitraria de ψ .

Si se somete ψ a una transformación unitaria:

$$\psi' = U\psi, \quad \gamma' = U\gamma U^{-1}, \quad \bar{\psi}' = \psi^*\gamma^0 = \bar{\psi}U^+ = \bar{\psi}U^{-1}, \quad (26.19)$$

en la nueva representación se tendrá

$$(C\psi)' = U(C\psi) = UU_C\bar{\psi} = UU_C(\bar{\psi}'U) = UU_C\tilde{U}\bar{\psi}'.$$

Comparando con la definición de la matriz U'_C en la nueva representación [$(C\psi)' = U'_C\bar{\psi}'$], se encuentra

$$U'_C = UU_C\tilde{U}. \quad (26.20)$$

La transformación (26.20) coincide con la transformación de las matrices γ tan sólo para matrices U reales. Por ello, también la expresión (26.5) es válida únicamente en las representaciones que se obtienen a partir de la espinorial o de la típica mediante una transformación real.

La matriz (26.5) es unitaria y cambia de signo al transponerla:

$$U_C U_C^\dagger = 1, \quad \tilde{U}_C = -U_C. \quad (26.21)$$

Estas propiedades son invariantes respecto de la transformación (26.20) y, por ello, valen en cualquier representación. La matriz (26.5) es también hermítica ($U_C = U_C^\dagger$), pero esta propiedad se pierde en el caso general al aplicar la transformación (26.20).

Todo lo dicho [en particular (26.21)] vale asimismo para las propiedades de la matriz U_T .

En el formalismo de segunda cuantificación, las transformaciones C , P , T para los operadores- ψ deben formularse como reglas de transformación de los operadores de creación y de aniquilación de las partículas. Estas reglas pueden establecerse (de manera análoga a como se hizo en el § 13 para partículas de spin 0) partiendo de la condición de que los operadores- ψ transformados pueden representarse en la forma

$$\begin{aligned} \Psi^C(t, \mathbf{r}) &= U_C \bar{\psi}(t, \mathbf{r}), \\ \Psi^P(t, \mathbf{r}) &= i\gamma^0 \psi(t, -\mathbf{r}), \\ \Psi^T(t, \mathbf{r}) &= U_T \bar{\psi}(-t, \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (26.22)$$

Cálculos efectuados con ayuda de las fórmulas obtenidas prueban que a estas condiciones satisfacen las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} a_{p\sigma}^C &= b_{p\sigma}, & b_{p\sigma}^C &= a_{p\sigma}; \\ a_{-p\sigma}^P &= ia_{p\sigma}, & b_{-p\sigma}^P &= ib_{p\sigma}; \\ a_{-p-\sigma}^T &= 2\sigma i a_{p\sigma}^+, & b_{-p-\sigma}^T &= 2\sigma i b_{p\sigma}^+. \end{aligned} \quad (26.23)$$

PROBLEMA

Hallar el operador de conjugación de carga en la representación de Majorana (véase el problema 2 § 21).

Solución. La matriz U'_C en la representación de Majorana se obtiene a partir de la matriz $U_C = -\alpha_y$ en la representación típica mediante la transformación (26.20) con $U = (\alpha_y + \beta)/\sqrt{2}$ y es igual a $U'_C = \alpha_y$ (α_y y β son matrices de la representación típica). Designando por $(')$ las cantidades en la representación de Majorana, tenemos $C\psi' = U'_C(\psi'^*\beta')$ y dado que $\beta' = \alpha_y$, será

$$C\psi' = \alpha_y (\psi'^*\alpha_y) = \alpha_y \tilde{\alpha}_y \psi'^* = \psi'^*,$$

es decir, la conjugación de carga equivale a la conjugación compleja.

§ 27. Simetría intrínseca de las partículas y antipartículas

La función de onda de una partícula de spin 1/2 se reduce, en su sistema de reposo, a un espinor tridimensional (designémoslo por Φ^a). Con el comportamiento de este espinor en la inversión está ligado el concepto de paridad intrínseca de la partícula. Sin embargo (como se indicó ya en el § 19), aunque son posibles dos leyes de transformación para los espinores tridimensionales ($\Phi^a \rightarrow \pm i\Phi^a$) y que éstas no son equivalentes entre sí, con todo, el atribuir a un espinor una determinada paridad carece de sentido absoluto. En consecuencia, carece también de sentido hablar de paridad intrínseca de una partícula de spin 1/2. Cabe, sin embargo, hablar de paridad intrínseca relativa de dos de tales partículas.

Con dos espinores (tridimensionales) $\Phi^{(1)}$ y $\Phi^{(2)}$ es posible construir un escalar $\Phi_a^{(1)} \Phi^{(2)a}$. Si éste es un escalar en sentido estricto, se dice de las partículas representadas por ellos que tienen la misma paridad; pero si dicho producto es un pseudoescalar, se habla de partículas de paridad intrínseca opuesta.

Vamos a demostrar que las paridades intrínsecas de una partícula y de una antipartícula (de spin 1/2) son opuestas (V. B. Berestetskiĭ, 1948).

Para ello, observemos que si a ambos miembros de la transformación P (19.5) (en la representación espinorial)

$$P: \xi^a \rightarrow i\eta_a^c, \quad \eta_a^c \rightarrow i\xi^a \tag{27.1}$$

se aplica la operación C (26.7), obtendremos

$$\eta^{ca*} \rightarrow i\xi_a^{c*}, \quad \xi_a^{c*} \rightarrow i\eta^{ca*},$$

donde el índice c designa las componentes del bispinor $\psi^c = \begin{pmatrix} \xi^c \\ \eta^c \end{pmatrix}$, conjugado de carga del bispinor $\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$. Pasando a las expresiones conjugadas complejas y cambiando la posición de los índices, se encuentra

$$P: \eta_a^c \rightarrow i\xi^{ca}, \quad \xi^{ca} \rightarrow i\eta_a^c \tag{27.2}$$

Vemos así que los bispinores conjugados de carga se transforman en la inversión de acuerdo con la misma ley.

Sea $\psi^{(e)}$ la función de onda de una partícula (de un electrón) y $\psi^{(p)}$ la función

de onda de una antipartícula (positón). Esta última es un bispinor conjugado de carga de una determinada solución de la ecuación de Dirac con «frecuencia negativa». En el sistema de reposo cada una de ellas se reduce a un cierto espinor tridimensional:

$$\xi^{(e)\alpha} = \eta_{\dot{\alpha}}^{(e)} = \Phi^{(e)\alpha}, \quad \xi^{(p)\alpha} = \eta_{\dot{\alpha}}^{(p)} = \Phi^{(p)\alpha}.$$

Según (27.1-2), estos espinores se transforman en la inversión de acuerdo con la ley

$$\Phi^\alpha \rightarrow i\Phi^\alpha, \quad (27.3)$$

la misma para $\Phi^{(e)}$ y $\Phi^{(p)}$. En cambio, el producto $\Phi^{(e)} \Phi^{(p)}$ cambia de signo, como queríamos demostrar.

En el formalismo de segunda cuantificación, el carácter opuesto de la paridad de las partículas y de las antipartículas se traduce en el cambio de signo de los productos de operadores en la inversión: $a_{p_\sigma} b_{p_\sigma} \rightarrow -a_{p_\sigma} b_{p_\sigma}$ [véase (26.23)].

Se califica de realmente neutra una partícula que «coincide» con su antipartícula (§ 12). El operador- ψ del campo de tales partículas satisface la condición

$$\psi(t, r) = \psi^C(t, r).$$

Para partículas de spin 1/2 esto equivale a las condiciones (en la representación espinorial)

$$\xi^\alpha = -i\eta^{\dot{\alpha}+}, \quad \eta_{\dot{\alpha}} = -i\xi^{\dot{\alpha}+}. \quad (27.4)$$

Al igual que cualquier relación que exprese propiedades físicas, estas condiciones son invariantes respecto de la transformación CPT*. Es fácil comprobar que, en efecto, son invariantes no sólo con respecto a la transformación CPT, sino también con relación a cada una de las tres transformaciones por separado.

En el § 19 convinimos en definir la inversión de los espinores como una transformación para la cual es $P^2 = -1$ y hasta aquí nos hemos atenido a esta definición. Es fácil ver que los resultados obtenidos acerca de la paridad relativa de las partículas y de las antipartículas es independiente, como debe ser, de la manera como se defina la inversión.

Si la inversión se define de manera que $P^2 = 1$, en vez de (27.1) será

$$P: \xi^\alpha \rightarrow \eta_{\dot{\alpha}}, \quad \eta_{\dot{\alpha}} \rightarrow \xi^\alpha. \quad (27.5)$$

La función conjugada de carga se transforma entonces según la ley

$$\xi^{c\alpha} \rightarrow -\eta_{\dot{\alpha}}^c, \quad \eta_{\dot{\alpha}}^c \rightarrow -\xi^{c\alpha},$$

que difiere de (27.5) en el signo. De acuerdo con esto, los espinores tridimensionales Φ se transformarán según las leyes

$$\Phi^{(e)\alpha} \rightarrow \Phi^{(e)\alpha}, \quad \Phi^{(p)\alpha} \rightarrow -\Phi^{(p)\alpha},$$

de modo que el producto $\Phi^{(e)} \Phi^{(p)}$ será, al igual que antes, un pseudoescalar.

* Mejor dicho, la transformación CPT debe definirse en este caso de manera que deje invariantes las relaciones del tipo (27.4). Esto se consigue mediante una elección adecuada del factor de fase en la definición de la matriz U_T (véase la nota en la pág. 103).

La única diferencia posible en las consecuencias físicas que se siguen de ambas definiciones de la inversión consiste en que en la definición (27.5) la condición de que el campo sea realmente neutro no sería invariante respecto de esta transformación (o de la transformación CP): cambiaría el signo relativo de los dos miembros de las igualdades (27.4). De hecho, no se conocen partículas realmente neutras de spin 1/2 y hoy es imposible decir si tiene o no un sentido físico real la diferencia que hemos señalado entre las dos definiciones de la inversión*.

PROBLEMA

Hallar la paridad de carga del positonio (sistema hidrogenoide formado por un electrón y un positón).

Solución. La función de onda del sistema de los dos fermiones debe ser antisimétrica respecto de la permutación simultánea de las coordenadas, de los spines y de las variables de carga de las partículas (cf. el problema del § 13). La permutación de las primeras multiplica la función por $(-1)^l$, la de las segundas, por $(-1)^{1+S}$ (donde $S = 0$ ó 1 es el spin total del sistema), la de las terceras, por el factor C buscado. De la condición $(-1)^l (-1)^{1+S} C = -1$ se deduce

$$C = (-1)^l + S.$$

Dado que la paridad intrínseca del electrón y del positón son opuestas, la paridad espacial del sistema es $P = (-1)^{l+1}$. La paridad combinada vale: $CP = (-1)^{S+1}$.

§ 28. Formas bilineales

Consideremos las propiedades de transformación de las diferentes formas bilineales que se pueden construir a partir de las componentes de las funciones ψ y ψ^* . Tales formas poseen de manera general una gran importancia en mecánica cuántica; entre ellas figura el 4-vector densidad de corriente (21.11).

Dado que ψ y ψ^* tienen cada una cuatro componentes, a partir de ellas se pueden formar $4 \times 4 = 16$ combinaciones bilineales independientes. La clasificación de estas magnitudes de acuerdo con sus propiedades de transformación es ya evidente en las distintas maneras de multiplicar dos bispinores cualesquiera (como son en este caso ψ y ψ^*) enumeradas en el § 19. Es posible, a saber, formar un escalar (llamémosle S), un pseudoescalar (P), un espinor mixto de segundo orden, equivalente a un 4-vector V^μ (cuatro cantidades independientes), un espinor mixto de segundo orden, equivalente a 4-pseudovector A^μ (4 cantidades) y un bispinor de segundo orden que equivale a un 4-tensor antisimétrico $T^{\mu\nu}$ (6 cantidades).

En forma simétrica (para cualquier representación ψ) estas combinaciones se escriben de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S &= \bar{\psi}\psi, \quad P = i\bar{\psi}\gamma^5\psi, \\ V^\mu &= \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \quad T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi, \end{aligned} \tag{28.1}$$

donde

* G. Racah, 1937, hizo notar la incompleta equivalencia de las dos definiciones de la inversión.

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = (\alpha, i\boldsymbol{\Sigma}) \quad (28.2)$$

[la numeración de las componentes en (28.2), de acuerdo con (19.15)] *. Todas las expresiones que preceden son reales.

El carácter escalar y pseudoescalar de las magnitudes S y P es evidente en su representación espinorial:

$$S = \xi^* \eta + \eta^* \xi, \quad P = i(\xi^* \eta - \eta^* \xi),$$

lo que corresponde precisamente a las expresiones (19.7) y (19.8). La naturaleza vectorial de las magnitudes V^μ es evidente en la ecuación de Dirac teniendo en cuenta lo que precede: multiplicando la igualdad $p_\mu \gamma^\mu \psi = m\psi$ a la izquierda por $\bar{\psi}$, se obtendrá

$$(\bar{\psi} p_\mu \gamma^\mu \psi) = m \bar{\psi} \psi,$$

dado que en el segundo miembro figura un escalar, escalar debe ser también la expresión que aparece en el primer miembro.

La regla de formación de las magnitudes (28.1) es evidente: se forman como si las matrices γ^μ constituyeran un 4-vector, γ^5 fuese un pseudoescalar y las funciones ψ y $\bar{\psi}$ que encontramos a uno y otro lados formasen, juntas, un escalar**. El hecho de que no existan formas bilineales que tengan el carácter de un 4-tensor simétrico, hecho evidente en la representación espinorial, lo es asimismo teniendo en cuenta esta regla: dado que la combinación simétrica de matrices γ^μ es tal que $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu}$, dicha forma se reduciría esencialmente a un escalar.

Las formas bilineales se obtienen en la segunda cuantificación substituyendo en (28.1) las funciones- ψ por operadores- ψ . Para mayor generalidad, supondremos que los dos operadores- ψ se refieren a campos de partículas diferentes; los distinguiremos por los índices a y b . Veamos cómo se transforman dichas formas de operadores en la conjugación de carga. Observando que ***

$$\psi^C = U_C \bar{\psi}, \quad \bar{\psi}^C = U_C^+ \psi, \quad (28.3)$$

tenemos, aplicando (26.3) y (26.21),

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_a^C \psi_b^C &= (U_C^+ \psi_a) (U_C \bar{\psi}_b) = \psi_a U_C^* U_C \bar{\psi}_b = -\psi_a U_C^* U_C \bar{\psi}_b = -\psi_a \bar{\psi}_b, \\ \bar{\psi}_a^C \gamma^\mu \psi_b^C &= \psi_a U_C^* \gamma^\mu U_C \bar{\psi}_b = -\psi_a U_C^* \gamma^\mu U_C \bar{\psi}_b = \psi_a \tilde{\gamma}^\mu \bar{\psi}_b. \end{aligned}$$

* En una transformación unitaria de ψ (cambio de representación) tenemos: $\psi \rightarrow U\psi$, $\gamma \rightarrow U\gamma U^{-1}$, $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} U^{-1}$, con lo que es evidente la invariancia de las formas bilineales en dichas transformaciones.

** El propio carácter «pseudoescalar» de γ^5 corresponde a estas reglas, dado que

$$\gamma^5 = \frac{i}{24} e_{\lambda\mu\nu\rho} \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho.$$

*** Para obtener la segunda igualdad a partir de la primera hacemos

$$\bar{\psi}^C = [U_C^* (\psi \gamma^0*)] \gamma^0 = \tilde{\gamma}^0 U_C^* \gamma^0 \psi = -\tilde{\gamma}^0 U_C^* \gamma^0 \psi = \tilde{\gamma}^0 \gamma^0* U_C^* \psi = U_C^* \psi$$

[teniendo en cuenta (26.3), (26.21) y el carácter hermítico de γ^0].

Al permutar los operadores con relación al orden de partida ($\bar{\psi}$ a la izquierda de ψ), en virtud de las reglas de conmutación de Fermi (25.4) cambia el signo del producto (y, además, aparecen términos que no dependen del estado del campo, términos de los que prescindiremos como en las conclusiones análogas del § 13). De esta manera obtenemos

$$\bar{\Psi}_a^C \Psi_b^C = \bar{\Psi}_b \Psi_a, \quad \bar{\Psi}_a^C \gamma^\mu \Psi_b^C = - \bar{\Psi}_b \gamma^\mu \Psi_a.$$

Transformando también de manera análoga las restantes formas, se encuentra que al conjugar respecto de la carga se tiene *

$$C: S_{ab} \rightarrow S_{ba}, P_{ab} \rightarrow P_{ba}, V_{ab}^\mu \rightarrow -V_{ba}^\mu, A_{ab}^\mu \rightarrow A_{ba}^\mu, T_{ab}^{\mu\nu} \rightarrow -T_{ba}^{\mu\nu}. \quad (28.4)$$

Análogamente se explica el comportamiento de dichas formas al cambiar el sentido del tiempo. Al hacerlo, hay que recordar (véase § 13) que esta operación está ligada con el cambio de orden de los operadores y, en consecuencia, por ejemplo,

$$(\bar{\Psi}_a \Psi_b)^r = \Psi_b^r \bar{\Psi}_a^r.$$

Substituyendo aquí

$$\Psi^r = U_r \bar{\Psi}, \quad \bar{\Psi}^r = -U_r^+ \Psi, \quad (28.5)$$

tendremos

$$(\Psi_a \Psi_b)^r = - (U_r \bar{\Psi}_b) (U_r^+ \Psi_a) = - \bar{\Psi}_b U_r U_r^+ \Psi_a = \bar{\Psi}_b U_r U_r^+ \Psi_a = \bar{\Psi}_b \Psi_a.$$

Considerando igualmente las restantes formas, se obtendrá

$$T: \begin{aligned} S_{ab} &\rightarrow S_{ba}, \quad P_{ab} \rightarrow -P_{ba}, \quad (V^0, V)_{ab} \rightarrow (V^0, -V)_{ba}, \\ (A^0, A)_{ab} &\rightarrow (A^0, -A)_{ba}, \quad T_{ab}^{\mu\nu} = (\mathbf{p}, \mathbf{a})_{ab} \rightarrow (\mathbf{p}, -\mathbf{a})_{ba} \end{aligned} \quad (28.6)$$

[\mathbf{p}, \mathbf{a} son los vectores tridimensionales equivalentes a las componentes $T^{\mu\nu}$ según (19.15)].

En la inversión espacial, en cambio, y en correspondencia con el carácter tensorial de esas magnitudes, resulta

$$P: \begin{aligned} S_{ab} &\rightarrow S_{ab}, \quad P_{ab} \rightarrow -P_{ab}, \quad (V^0, V)_{ab} \rightarrow (V^0, -V)_{ab}, \\ (A^0, A)_{ab} &\rightarrow (-A^0, A)_{ab}, \quad T_{ab}^{\mu\nu} = (\mathbf{p}, \mathbf{a})_{ab} \rightarrow (-\mathbf{p}, \mathbf{a})_{ab}. \end{aligned} \quad (28.7)$$

Finalmente, la aplicación conjunta de estas tres operaciones da **

$$CPT: S_{ab} \rightarrow S_{ab}, \quad P_{ab} \rightarrow P_{ab}, \quad V_{ab}^\mu \rightarrow -V_{ab}^\mu, \quad A_{ab}^\mu \rightarrow -A_{ab}^\mu, \quad T_{ab}^{\mu\nu} \rightarrow T_{ab}^{\mu\nu} \quad (28.8)$$

que corresponde precisamente al significado de esta transformación en tanto que

* Conviene observar que para las formas bilineales construidas a partir de las funciones- ψ (y no de los operadores $-\psi$), las transformaciones (28.4) tendrían signo contrario, ya que al volver los factores $\bar{\psi}$ y ψ a su orden inicial no se produciría ningún cambio de signo.

** Para evitar malentendidos recordaremos que las transformaciones T y P exigen también el cambio de los argumentos de la función; los segundos miembros (formas transformadas) en (22.6-8) son funciones de

$$x^T = (-t, \mathbf{r}), \quad x^P = (t, -\mathbf{r}), \quad x^{CPT} = (-t, -\mathbf{r}),$$

respectivamente, si los primeros miembros son funciones de $x = (t, \mathbf{r})$.

4-inversión: dado que la 4-inversión equivale a una rotación del 4-sistema de coordenadas, no existe con relación a ella diferencia alguna entre los tensores y los pseudotensores cualquiera que sea su orden.

Consideremos los productos dos a dos de formas bilineales construidas a partir de cuatro funciones distintas $\psi^a, \psi^b, \psi^c, \psi^d$. Obtendremos un resultado diferente según sea el par de estas funciones que se multiplican entre sí. Resulta posible, sin embargo, reducir cualquiera de estos productos a productos de formas bilineales con pares fijos de factores (W. Pauli, M. Fierz, 1936). Deduzcamos la relación que se encuentra en la base de esta reducción.

Consideremos el conjunto de matrices 4×4

$$1, \quad \gamma^5, \quad \gamma^\mu, \quad i\gamma^\mu\gamma^5, \quad i\sigma^{\mu\nu} \quad (28.9)$$

(1 es la matriz unidad). Numerando estas 16 ($= 1 + 1 + 4 + 4 + 6$) matrices formando con ellas una sucesión determinada cualquiera, las designaremos por γ^A ($A = 1, \dots, 16$), y por γ_A , las mismas matrices con subíndices 4-tensoriales (μ, ν). Estas matrices gozan de las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \text{Tr } \gamma^A &= 0 \quad (\gamma^A \neq 1), \\ \gamma^A \gamma_A &= 1, \quad \frac{1}{4} \text{Tr } \gamma^A \gamma_B &= \delta_B^A. \end{aligned} \quad (28.10)$$

En virtud de la última de éstas, las matrices γ^A son linealmente independientes, pero dado que su número es igual al número (4×4) de elementos de una matriz 4×4 , las matrices γ^A constituyen un sistema completo y una matriz 4×4 arbitraria Γ se puede representar como combinación lineal de las mismas:

$$\Gamma = \sum_A c_A \gamma^A, \quad c_A = \frac{1}{4} \text{Tr } \gamma_A \Gamma, \quad (28.11)$$

o en forma explícita con índices matriciales ($l, k = 1, 2, 3, 4$):

$$\Gamma_{ik} = \frac{1}{4} \sum_A \Gamma_{lm} \gamma_{ml}^A \gamma_{ik}^A.$$

Suponiendo, en particular, que la matriz Γ contiene tan sólo un elemento diferente de cero (Γ_{lm}), obtendremos la relación buscada (« condición de carácter completo »)

$$\delta_{il} \delta_{km} = \frac{1}{4} \sum_A \gamma_{Aik} \gamma_{ml}^A. \quad (28.12)$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por $\bar{\psi}_i^a \bar{\psi}_k^b \bar{\psi}_m^c \psi_l^d$, se obtiene

$$(\bar{\psi}^a \psi^d) (\bar{\psi}^c \psi^b) = \frac{1}{4} \sum_A (\bar{\psi}^a \gamma_A \psi^b) (\bar{\psi}^c \gamma^A \psi^d). \quad (28.13)$$

Esta es una de las igualdades del tipo indicado más arriba: reduce el producto de

dos formas bilineales escalares a productos de formas construidas a partir de otros pares de factores*.

Otras igualdades de este tipo se pueden obtener de (28.13) substituyendo

$$\psi^d \rightarrow \gamma^B \psi^d, \quad \psi^b \rightarrow \gamma^C \psi^b$$

y utilizando el desarrollo

$$\gamma^A \gamma^B = \sum_R c_R \gamma^R, \quad c_R = \frac{1}{4} \operatorname{Tr} \gamma^A \gamma^B \gamma_R$$

(véanse los problemas).

Señalaremos aquí también, para futuras referencias, la relación análoga a la (28.12) para matrices 2×2 . Un sistema completo de matrices 2×2 linealmente independientes $\sigma^A (A = 1, \dots, 4)$ es el formado por

$$1, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z. \quad (28.14)$$

Para ellas

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \sigma^A &= 0 \quad (\sigma^A \neq 1), \\ \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \sigma^A \sigma^B &= \delta_{AB}. \end{aligned} \quad (28.15)$$

La condición de carácter completo es

$$\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} = \frac{1}{2} \sum_A \sigma_{\alpha\beta}^A \sigma_{\delta\gamma}^A = \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \cdot \sigma_{\delta\gamma} + \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\gamma} \quad (28.16)$$

($\alpha, \beta, \dots = 1, 2$) o, de otra manera,

$$\sigma_{\alpha\beta} \cdot \sigma_{\delta\gamma} = -\frac{1}{2} \sigma_{\alpha\gamma} \cdot \sigma_{\delta\beta} + \frac{3}{2} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\delta\beta}. \quad (28.17)$$

PROBLEMAS

- Deducir las fórmulas análogas a (28.13) para los productos escalares de dos formas bilineales P, V, A, T .

Solución. Hagamos:

$$\begin{aligned} J_S &= (\bar{\psi}^a \psi^b) (\bar{\psi}^c \psi^d), \quad J_P = (\bar{\psi}^a \gamma^b \psi^b) (\bar{\psi}^c \gamma^b \psi^d), \\ J_V &= (\bar{\psi}^a \gamma^b \psi^b) (\bar{\psi}^c \gamma_\mu \psi^d), \quad J_A = (\bar{\psi}^a i \gamma^\mu \gamma^b \psi^b) (\bar{\psi}^c i \gamma_\mu \gamma^b \psi^d), \\ J_T &= (\bar{\psi}^a i \sigma^{\mu\nu} \psi^b) (\bar{\psi}^c i \sigma_{\mu\nu} \psi^d), \end{aligned}$$

y designemos con las mismas letras con apóstrofo los productos que se obtienen de aquí permutando ψ^b y ψ^d . Siguiendo el método indicado en el texto, obtendremos:

$$\begin{aligned} 4J'_S &= J_S + J_V + J_T + J_A + J_P, \\ 4J'_V &= 4J_S - 2J_V + 2J_A - 4J_P, \\ 4J'_T &= 6J_S - 2J_T + 6J_P, \\ 4J'_A &= 4J_S + 2J_V - 2J_A - 4J_P, \\ 4J'_P &= J_S - J_V + J_T - J_A + J_P \end{aligned}$$

[la primera fila corresponde a la fórmula (28.13)].

* Para evitar posibles equívocos recordaremos que aquí estamos considerando formas construidas a partir de funciones- ψ . Para formas obtenidas mediante operadores- ψ que anticomután, el signo de la transformación sería el opuesto.

2. Demostrar que

$$J^{ab, cd} = - J^{ad, cb},$$

donde

$$J^{ab, cd} = (\bar{\psi}^a \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \psi^b) (\bar{\psi}^c \gamma_\mu (1 + \gamma^5) \psi^d).$$

Solución. Las magnitudes J consideradas son escalares respecto de las 4-rotaciones, pero no poseen una paridad determinada respecto de la inversión. La manera más fácil de obtener la igualdad buscada se basa en la representación espinorial. Observando que

$$\gamma^\mu (1 + \gamma^5) = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \gamma^\mu (1 + \gamma^5)$$

y que

$$\frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_a^* \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \psi (1 - \gamma^5) = \begin{pmatrix} \eta_a^* \\ 0 \end{pmatrix},$$

veremos que el «escalar» $J^{ab, cd}$ debe expresarse en función de un espinor de 2.º orden

$$\zeta_{\alpha\beta}^{(ab)} = \eta_a^* \eta_\beta^b, \quad \zeta_{\alpha\beta}^{(cd)} = \eta_a^c \eta_\beta^d$$

y, por ello, ha de ser de la forma

$$J^{ab, cd} \propto \zeta_{\alpha\beta}^{(ab)} \zeta^{(cd)\alpha\beta} = \eta_a^{\alpha*} \eta_c^{\beta*} \eta_\beta^b \eta_\alpha^d.$$

Permutando los índices b y d y observando que

$$\eta_\beta^b \eta^d \hat{\beta} = - \eta^b \eta_\beta^d,$$

se obtiene el resultado buscado.

§ 29. Matriz densidad de polarización

La dependencia de la función de onda ψ respecto de las coordenadas, función que representa un movimiento libre de impulso \mathbf{p} (onda plana), se reduce al factor común $e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}$ mientras que la amplitud u_p representa el papel de función de onda espinorial. En un tal estado (puro), la partícula está por completo polarizada (véase III, § 59). En la teoría no-relativista, esto significa que el spin de la partícula tiene en el espacio una dirección y sentido determinados (más precisamente, existe una dirección orientada a lo largo de la cual la proyección del spin tiene el valor determinado $+1/2$). En la teoría relativista, es imposible una caracterización semejante del estado en un sistema de referencia arbitrario como consecuencia de la no conservación del vector spin (de la que se habló ya en el § 23). Que el estado sea puro significa solamente que el spin posee una determinada dirección en el sistema de reposo de la partícula.

En un estado de polarización parcial no existe una determinada amplitud, sino tan sólo una *matriz densidad de polarización* ρ_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$ son índices bispinoriales). Definiremos esta matriz de tal manera que se reduzca, en un estado puro, a los productos

$$\rho_{ik} = u_{pi} \bar{u}_{pk}. \quad (29.1)$$

De acuerdo con esto, la matriz ρ se normaliza por la condición

$$\text{Tr } \rho = 2m \quad (29.2)$$

[cf. (23.4)].

En un estado puro el valor medio del spin se determina por la cantidad

$$\bar{s} = \frac{1}{2} \int \psi^* \Sigma \psi d^3x = \frac{1}{4\epsilon} u_p^* \Sigma u_p = \frac{1}{4\epsilon} \bar{u}_p \gamma^0 \Sigma u_p \quad (29.3)$$

La correspondiente expresión para un estado de polarización parcial es:

$$\bar{s} = \frac{1}{4\epsilon} \text{Tr}(\rho \gamma^0 \Sigma) = \frac{1}{4\epsilon} \text{Tr}(\rho \gamma^5 \gamma). \quad (29.4)$$

Las amplitudes u_p , \bar{u}_p satisfacen los sistemas de ecuaciones algebraicas $(\hat{p} - m)u_p = 0$, $\bar{u}_p(\hat{p} - m) = 0$. Por ello, la matriz (29.1) satisface la ecuación

$$(\hat{p} - m)\rho = \rho(\hat{p} - m) = 0. \quad (29.5)$$

A las mismas ecuaciones lineales debe obedecer la matriz densidad en el caso general de un estado mezclado (respecto del spin) (cf. el razonamiento análogo en III, § 14).

Si se considera una partícula libre en su sistema de reposo, a ella es aplicable la teoría no-relativista. Pero en esta teoría un estado de polarización parcial queda por completo determinado por tres parámetros — las componentes del vector que representa el valor medio del spin \bar{s} (véase III, § 59). Es claro, por lo tanto, que estos mismos parámetros definirán también el estado de polarización después de aplicar una transformación de Lorentz cualquiera, es decir, para la partícula en movimiento.

Designemos por ζ el doble del vector valor medio del spin en el sistema de reposo (en un estado puro es $|\zeta| = 1$, en una mezcla se tiene $|\zeta| < 1$). En la descripción cuadridimensional de un estado de polarización, conviene introducir el 4-vector a^μ que coincide, en el sistema de reposo, con el vector de tres dimensiones ζ ; dado que ζ es un vector axil, a^μ será un 4-pseudovector. Este 4-vector es ortogonal al 4-impulso en el sistema de reposo [donde $a^\mu = (0, \zeta)$, $p^\mu = (m, 0)$] y, por consiguiente, también lo será en un sistema arbitrario de referencia

$$a^\mu p_\mu = 0. \quad (29.6)$$

En un sistema de referencia cualquiera se tendrá también

$$a_\mu a^\mu = -\zeta^2. \quad (29.7)$$

Las componentes del 4-vector a^μ en el sistema de referencia en el cual la partícula se mueve con velocidad $v = p/\epsilon$, se encuentran mediante una transformación de Lorentz aplicada al sistema de reposo y valen

$$a^0 = \frac{|\mathbf{p}|}{m} \zeta_{||}, \quad a_{\perp} = \zeta_{\perp}, \quad a_{||} = \frac{\epsilon}{m} \zeta_{||}, \quad (29.8)$$

donde los subíndices \parallel y \perp representan las componentes de los vectores ζ y a paralelas y perpendiculares a la dirección orientada de \mathbf{p}^* . Estas fórmulas se pueden escribir en forma vectorial:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \zeta + \frac{\mathbf{p}(\zeta \cdot \mathbf{p})}{m(\epsilon + m)}, & a^0 &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}}{\epsilon} = \frac{\mathbf{p} \cdot \zeta}{m}, \\ \mathbf{a}^2 &= \zeta^2 + \frac{(\mathbf{p} \cdot \zeta)^2}{m^2}. \end{aligned} \quad (29.9)$$

Consideremos primero un estado no polarizado ($\zeta = 0$). La matriz densidad puede contener como parámetros en este caso tan sólo el 4-impulso p . La única forma de una tal matriz que satisfaga las ecuaciones (29.5) es

$$\rho = \frac{1}{2} (\hat{p} + m) \quad (29.10)$$

(I. E. Tamm, 1930; H. B. C. Casimir, 1933). El coeficiente constante se elige de acuerdo con la condición de normalización (29.2).

En el caso general de polarización parcial ($\zeta \neq 0$), buscaremos la matriz densidad en la forma

$$\rho = \frac{1}{4m} (\hat{p} + m) \rho' (\hat{p} + m), \quad (29.11)$$

que satisface automáticamente las ecuaciones (29.5). Para $\zeta = 0$ la matriz auxiliar ρ' debe reducirse a la unidad; dado que $(\hat{p} + m)^2 = 2m(\hat{p} + m)$, (29.11) coincide entonces con la expresión (29.10). Además, debe contener linealmente el 4-vector a como parámetro, es decir, ha de tener la forma

$$\rho' = 1 - A \gamma^5 \hat{a}; \quad (29.12)$$

en el segundo término figura el producto «escalar» del pseudovector a y del «4-pseudovector matricial» $\gamma^5 \gamma$. Para determinar el coeficiente A escribamos la matriz densidad en el sistema de reposo:

$$\rho = \frac{m}{4} (1 + \gamma^0) (1 + A \gamma^5 \gamma \cdot \xi) (1 + \gamma^0) = \frac{m}{2} (1 + \gamma^0) (1 + A \gamma^5 \gamma \cdot \xi)$$

y calculemos, de acuerdo con (29.4), el valor medio del spin. Utilizando las reglas

* Por sus propiedades de transformación, las componentes del vector spin medio \bar{s} (al igual que cualquier momento cinético) son en mecánica relativista las componentes espaciales de un tensor antisimétrico $S^{\lambda\mu}$. El 4-vector a^λ está ligado con este tensor por

$$S^{\lambda\mu} = \frac{1}{2m} e^{\lambda\mu\nu\rho} a_\nu p_\rho, \quad a^\lambda = -\frac{2}{m} e^{\lambda\mu\nu\rho} S_{\mu\nu} p_\rho.$$

Hay que subrayar que, en un sistema de referencia arbitrario, la parte espacial \mathbf{a} del 4-vector a^λ no coincide en modo alguno con el vector $2\bar{s}$. Es fácil ver que

$$2\bar{s}_{||} = \frac{1}{m} (a_{||}\epsilon - a^0 |\mathbf{p}|) = \zeta_{||}, \quad 2\bar{s}_\perp = \frac{\epsilon}{m} \mathbf{a}_\perp = \frac{\epsilon}{m} \zeta_\perp.$$

señaladas en el § 22, llegamos fácilmente a la conclusión de que el único término distinto de cero en la traza buscada es:

$$2\bar{s} = \frac{1}{2m} \text{Tr} (\rho \gamma^5 \gamma) = -\frac{A}{4} \text{Tr} ((\gamma \cdot \zeta) \gamma) = A\zeta.$$

Igualando esta expresión a ζ , resulta $A = 1$. La expresión definitiva para ρ se obtiene substituyendo (29.12) y (29.11) y permutando los factores ρ' y $(\hat{p} + m)$; en virtud de la ortogonalidad de a y p el producto γp anticommuta con γa :

$$a\hat{p} = 2ap - \hat{p}a = -\hat{p}a,$$

y commuta así con $\gamma^5 a$.

De esta manera, la matriz densidad de un electrón parcialmente polarizado viene dada por la expresión

$$\rho = \frac{1}{2} (\hat{p} + m) (1 - \gamma^5 a) \quad (29.13)$$

(L. Michel, A. S. Wightman, 1955). Si se conoce la matriz ρ , el 4-vector a que caracteriza al estado (y , con él, también el vector ζ) se puede hallar mediante la fórmula

$$a^\mu = \frac{1}{2m} \text{Tr} (\rho \gamma^5 \gamma^\mu). \quad (29.14)$$

Las fórmulas para la matriz densidad de un positón son del todo análogas a las fórmulas para el electrón. Si el positón (con 4-impulso p) se describiera por la amplitud de positón y por la matriz densidad $u_p^{(\text{pos})}$ determinada de acuerdo con dicha amplitud, no existiría diferencia alguna respecto del caso del electrón y la matriz $\rho^{(\text{pos})}$ vendría dada por la misma fórmula (29.13). Sin embargo, en los cálculos de secciones eficaces de procesos de dispersión en los que participan positones, hay que manejar de hecho (como veremos más adelante) no $u_p^{(\text{pos})}$, sino las amplitudes de «frecuencia negativa» u_{-p} . De acuerdo con esto, también la matriz densidad de polarización (designémosla por $\rho^{(-)}$) debe definirse de manera que para un estado puro se reduzca a $u_{-pi}\bar{u}_{-pk}$.

Según (26.1) la amplitud de positón es $u_p^{(\text{pos})} = U_C \bar{u}_{-p}$. Recíprocamente:

$$u_{-p} = U_C \bar{u}_p^{(\text{pos})}, \quad \bar{u}_{-p} = U_C^* u_p^{(\text{pos})} = u_p^{(\text{pos})} U_C^*$$

[cf. (28.3)]. Si

$$\rho_{ik}^{(-)} = u_{-pi} \bar{u}_{-pk}, \quad \rho_{ik}^{(\text{pos})} = u_{pi}^{(\text{pos})} \bar{u}_{pk}^{(\text{pos})},$$

mediante estas fórmulas obtendremos

$$\rho^{(-)} = U_C \tilde{\rho}^{(\text{pos})} U_C^*. \quad (29.15)$$

Substituyendo aquí en vez de $\rho^{(\text{pos})}$ la expresión (29.13) y efectuando [mediante (26.3) y (26.21)] simples transformaciones, se obtendrá

$$\rho^{(-)} = \frac{1}{2} (\hat{p} - m) (1 - \gamma^5 \alpha). \quad (29.16)$$

En particular, para un estado no polarizado es

$$\rho^{(-)} = \frac{1}{2} (\hat{p} - m). \quad (29.17)$$

En lo que sigue, al hablar de matrices densidad para positones, nos referiremos a las matrices $\rho^{(-)}$ y prescindiremos del superíndice $(-)$ en ellas (en cambio, no es necesario en la práctica utilizar las matrices $\rho^{(pos)}$).

En los diferentes cálculos a menudo deberemos promediar respecto de los estados de spin expresiones de la forma $\bar{u}_p F u_p$ ($\equiv \bar{u}_i F_{ik} u_k$), donde F es una cierta matriz (4×4) y u es la amplitud bispinorial de un estado con 4-impulso determinado p . Dicho promedio es equivalente a substituir los productos $u_k \bar{u}_i$ por la matriz densidad ρ_{ki} de un estado de polarización parcial.

En particular, el promedio total respecto de dos estados de spin independientes equivale al paso a un estado no-polarizado; se tiene entonces, según (29.10),

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{polar}} \bar{u}_p F u_p = \frac{1}{2} \text{Tr} (\hat{p} + m) F. \quad (29.18)$$

De manera análoga, para las funciones de onda de frecuencia negativa es polar

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{polar}} \bar{u}_{-p} F u_{-p} = \frac{1}{2} \text{Tr} (\hat{p} - m) F. \quad (29.19)$$

Si se trata, no de un promedio, sino de la suma respecto de estados de spin, el resultado es igual al doble del primero.

Veamos cómo la matriz densidad (29.13) tiende al límite correspondiente a su expresión no-relativista. Para ello, pasemos al sistema de reposo del electrón. En la representación típica de las funciones de onda, las amplitudes u_p en dicho sistema pasan a tener dos componentes; junto con ellas, debe reducirse a una matriz 2×2 la matriz densidad. En efecto, en el sistema de reposo tenemos

$$\rho = \frac{m}{2} (\gamma^0 + 1) (1 - \gamma^5 \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\xi}),$$

y mediante las expresiones de las matrices γ (21.20) y (22.18) se encuentra

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{\text{nor}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{\text{nor}} = m (1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\xi}) \quad (29.20)$$

(los ceros representan matrices nulas 2×2). Si se adopta la normalización de la matriz densidad a 1 ($\text{Tr } \rho_{\text{nor}} = 1$), habitual en la teoría no-relativista, en vez de la normalización a $2m$, esta expresión se deberá dividir por $2m$, de modo que

$$\frac{1}{2} (1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\xi})$$

de acuerdo con III (59.4-5).

De manera análoga, el límite no-relativista de la matriz densidad de un positón es:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_{\text{nor}} \end{pmatrix}, \quad \rho_{\text{nor}} = -m(1 + \sigma \cdot \zeta).$$

Finalmente, escribamos la expresión simplificada de la matriz densidad en el caso ultrarrelativista. Haciendo en (29.8) $|\mathbf{p}| \approx \varepsilon$ [con lo cual prescindimos de cantidades del orden de $(m/\varepsilon)^2$], substituyendo estas expresiones en (29.13) o (29.16) y eligiendo el eje x en la dirección de \mathbf{p} , escribiremos

$$\rho = \frac{1}{2} [\varepsilon(\gamma^0 - \gamma^1) \pm m] \left[1 - \gamma^5 \left(\frac{\varepsilon}{m} (\gamma^0 - \gamma^1) \zeta_{||} + \zeta_{\perp} \cdot \gamma_{\perp} \right) \right],$$

donde el signo superior se refiere al caso del electrón, y el inferior, al del positón. Efectuando el producto, desaparecen en él los términos principales y los términos de orden siguiente darán

$$\rho = \frac{1}{2} \varepsilon (\gamma^0 - \gamma^1) [1 - \gamma^5 (\pm \zeta_{||} + \zeta_{\perp} \cdot \gamma_{\perp})]$$

o volviendo de la notación $\varepsilon(\gamma^0 - \gamma^1)$ a la forma \hat{p} ,

$$\rho = \frac{1}{2} \hat{p} [1 - \gamma^5 (\pm \zeta_{||} + \zeta_{\perp} \cdot \gamma_{\perp})]. \quad (29.21)$$

Esta es precisamente la expresión buscada de la matriz densidad en el caso ultrarrelativista. Conviene observar que todas las componentes del vector polarización ζ intervienen en ella en plan de igualdad como términos del mismo orden de magnitud. Recordemos que $\zeta_{||}$ es la componente de este vector paralela (para $\zeta_{||} > 0$) o antiparalela (para $\zeta_{||} < 0$) al impulso de la partícula. En particular, para un estado de helicidad de la partícula se tiene $\zeta_{||} = 2\lambda = \pm 1$; la matriz densidad toma entonces la forma particularmente simple*:

$$\rho = \frac{1}{2} \hat{p} (1 \mp 2\lambda \gamma^5). \quad (29.22)$$

§ 30. El neutrino

Vimos en el § 20 que la necesidad de describir las partículas de spin 1/2 mediante dos espinores (ξ y η) se debe al hecho de que la partícula posee una masa. Si ésta es nula, desaparece aquella necesidad. La ecuación de onda que describe una partícula de estas características puede establecerse ya con un solo espinor, por ejemplo, un espinor puntado η :

$$p^{\alpha\beta} \eta_{\beta} = 0, \quad (30.1)$$

o lo que es lo mismo

* Que coincide, como debía ser, con la forma de la matriz densidad del neutrino o del antineutrino — que son partículas de masa nula y helicidad determinada — (véase a continuación, § 30).

$$(p_0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \eta = 0. \quad (30.2)$$

En el § 20 se hizo observar también que la ecuación de onda que contiene una masa m resulta automáticamente simétrica respecto de la inversión (transformación $\xi \leftrightarrow \eta$). Pero cuando se describe la partícula mediante un solo espinor, se pierde dicha simetría. Ésta, sin embargo, no es necesaria, puesto que la simetría respecto de la inversión no es una propiedad universal de la naturaleza.

La energía y el impulso de una partícula con $m = 0$ están ligados por la relación $\epsilon = |\mathbf{p}|$. En consecuencia, para una onda plana ($\eta_p \sim e^{-ipx}$) la ecuación (30.2) da

$$(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \eta_p = -\eta_{-p} \quad (30.3)$$

donde \mathbf{n} es el versor de \mathbf{p} . La misma ecuación

$$(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \eta_{-p} = -\eta_p \quad (30.4)$$

vale también para una onda con «frecuencia negativa» ($\eta_{-p} \sim e^{ipx}$).

El operador- ψ de segunda cuantificación es

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_p (\eta_p a_p + \eta_{-p} b_p^\dagger) \\ \eta^+ &= \sum_p (\eta_p^* a_p^\dagger + \eta_{-p}^* b_p) \end{aligned} \quad (30.5)$$

De aquí se sigue, como de ordinario, que η_{-p}^* son funciones de onda de una antipartícula.

De la definición de los operadores $p^{\alpha\beta}$ (20.1) resulta que $p^{\alpha\beta*} = -p^{\beta\alpha}$. Por ello, el espinor conjugado de carga η^* satisface la ecuación $p^{\alpha\beta}\eta_{\beta}^* = 0$ o, lo que es lo mismo,

$$p_{\alpha\beta}\eta^{\beta*} = 0.$$

Introduzcamos la notación $\eta^{\beta*} = \xi^\beta$, expresando mediante ella el hecho de que la conjugación de carga transforma un espinor puntado en otro no puntado. De esta manera, las funciones de onda de una antipartícula satisfacen la ecuación

$$p_{\alpha\beta}\xi^\beta = 0, \quad (30.6)$$

o bien

$$(p_0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi = 0. \quad (30.7)$$

Para una onda plana deducimos de aquí que

$$(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_p = \xi_p \quad (30.8)$$

Ahora bien, $(1/2)\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ es el operador proyección del spin sobre la dirección orientada del movimiento. Por lo tanto, las ecuaciones (30.3) y (30.8) significan que los estados de una partícula con determinado impulso resultan ser automáticamente de helicidad definida — la proyección del spin en la dirección orientada

del movimiento posee en ellos un valor determinado —. En estas condiciones, si el spin de una partícula es opuesto al impulso (helicidad $-1/2$), el spin de la antipartícula tiene la dirección y sentido del impulso (helicidad $+1/2$).

Partículas con tales propiedades lo son, al parecer, los *neutrinos* que existen en la naturaleza. En este caso, se suele llamar neutrino a la partícula con helicidad $-1/2$, y antineutrino, a la partícula con helicidad $+1/2$ *.

En relación con el carácter no-degenerado de los estados del neutrino respecto de la orientación del spin, recordaremos la observación hecha en el § 8 según la cual una partícula de masa 0 posee solamente la simetría axial con relación al impulso. En el caso de una partícula realmente neutra — el fotón —, en esta simetría intervienen tanto las rotaciones en torno del eje, como la reflexión en planos que pasen por el mismo. Pero en el caso del neutrino la simetría respecto de las reflexiones no existe, y hemos de considerar solamente el grupo de rotaciones en torno del eje, grupo que conserva el valor de la proyección del momento cinético sobre el mismo, pero que no cambia su signo. La simetría en las reflexiones existe únicamente bajo condición de que se permuten a la vez las partículas y las antipartículas entre sí.

Hay que observar también que el hecho de que la polarización sea necesariamente longitudinal significa que en el neutrino el spin no se puede separar del momento cinético orbital (como en el caso del fotón, en el que la polarización es necesariamente transversal, véase § 6).

A partir de un solo spinor η (o ξ) se pueden formar en total cuatro combinaciones bilineales, que, juntas, forman un cuadrivector

$$j^\mu = (\eta^* \eta, \eta^* \sigma \eta). \quad (30.9)$$

Es fácil comprobar que, en virtud de las ecuaciones

$$(p_0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \eta = 0, \quad \eta^* (p_0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = 0$$

se cumple la ecuación de continuidad $\partial_\mu j^\mu = 0$, es decir, j^μ representa el papel de 4-vector densidad de corriente de las partículas.

Conviene normalizar las ondas planas de neutrino de manera análoga a como se hizo en el § 24 para partículas con masa no nula:

$$\eta_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_p e^{-ipx}, \quad \eta_{-p} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_{-p} e^{ipx}, \quad (30.10)$$

normalizando las amplitudes espinoriales por la condición invariante

$$u_{\pm p}^* (1, \boldsymbol{\sigma}) u_{\pm p} = 2(\varepsilon, \mathbf{p}). \quad (30.11)$$

En estas condiciones, la densidad de partículas y su densidad de corriente son: $j^0 = 1$, $\mathbf{j} = \mathbf{p}/\varepsilon = \mathbf{n}$.

* La existencia del neutrino fue prevista teóricamente por Pauli para explicar las propiedades de la desintegración- β (1931). La ecuación (30.1) fue estudiada por primera vez por H. Weyl (1929). La teoría del neutrino basada en estas ecuaciones fue formulada por L. D. Landau, T. D. Lee, C. N. Yang y A. Salam (1957).

Dado que un neutrino libre con impulso dado está siempre totalmente polarizado, no existe en este caso el concepto de estado mezclado (respecto del spin). Con todo, puede resultar cómodo introducir una matriz « densidad » de polarización 2×2 , definida simplemente como espinor de segundo orden

$$\rho_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta^* \quad (30.12)$$

(con lo cual $\text{Tr}\rho = 2\varepsilon$). La expresión de esta matriz puede escribirse observando que ha de satisfacer las ecuaciones

$$(\varepsilon + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \rho = \rho (\varepsilon + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = 0.$$

Se ve así que

$$\rho = \varepsilon - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (30.13)$$

Al considerar los diferentes procesos de interacción, los neutrinos pueden figurar junto con otras partículas (de spin 1/2) que posean masa no nula y que, por ello, se representan por funciones de onda con cuatro componentes. En tales casos conviene adoptar notaciones comunes, introduciendo formalmente también para el neutrino una función de onda « bispinorial », dos de cuyas componentes, sin embargo, son iguales a cero: $\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$. Pero una tal forma de ψ se pierde, en general, al pasar a otra representación (no espinorial). Esta complicación puede soslayarse observando que en la representación espinorial se tiene idénticamente

$$\frac{1+\gamma^5}{2} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (\eta^* \xi^*) \frac{1-\gamma^5}{2} = (\eta^* 0),$$

donde ξ es un espinor « de lastre » arbitrario que desaparece del resultado [la matriz γ^5 es la de (22.18)]. Por ello, la condición de una pura « representación con dos componentes » del neutrino dejará de cumplirse al representarlo por un ψ de cuatro componentes en una representación cualquiera, si se entiende por ψ una solución de la ecuación de Dirac con $m = 0$:

$$\hat{p}\psi = 0, \quad (30.14)$$

sometida a la condición suplementaria $\frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi = \psi$, o bien

$$\tau^5 \psi = \psi. \quad (30.15)$$

Esta condición puede tenerse en cuenta conviniendo en substituir ψ y $\bar{\psi}$ en todas las ecuaciones en que deberían intervenir por las expresiones siguientes:

$$\psi \rightarrow \frac{1+\gamma^5}{2} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \frac{1-\gamma^5}{2}. \quad (30.16)$$

Así, el 4-vector densidad de corriente se escribe en la forma (substituyendo (30.16) en la expresión $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$)

$$j^\mu = \frac{1}{4} \bar{\psi} (1 - \gamma^5) \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \psi = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \psi. \quad (30.17)$$

De acuerdo con esta misma regla, la matriz 4×4 densidad del neutrino debe

escribirse

$$\rho = \frac{1}{4} (1 + \gamma^5) \hat{p} (1 - \gamma^5) = \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \hat{p}. \quad (30.18)$$

En la representación espinorial se reduce, como debía ser, a la matriz 2×2 (30.13)

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon - \sigma \cdot p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las fórmulas análogas para el antineutrino difieren de las que hemos escrito en el cambio de signo de γ^5 .

El neutrino es una partícula eléctricamente neutra. Sin embargo, el neutrino con las propiedades que acabamos de estudiar no es una partícula realmente neutra. Observemos en relación con esto que el «campo neutrínico», representado por un espinor de dos componentes, por el número de estados posibles de sus partículas (pero, naturalmente, no atendiendo a otras propiedades físicas del mismo) equivale a un campo realmente neutro descrito por un bispinor de cuatro componentes. En vez de estados de partículas y de antipartículas con helicidades determinadas, se tendría así un número igual de estados de una sola partícula con dos posibles valores de la helicidad y automáticamente quedaría satisfecha la simetría respecto de la inversión. Con todo, no hay que perder de vista que la anulación de la masa del neutrino «de cuatro componentes» tendría entonces, por así decirlo, un carácter «accidental», ya que no estaría ligada con las propiedades de simetría de la ecuación de onda que lo describen (ecuación que admite también una masa diferente de cero). Por ello, tener en cuenta las diferentes interacciones de una tal partícula conduciría automáticamente a la aparición de una masa en reposo acaso muy pequeña, pero aun así no rigurosamente igual a cero.

§ 31. Ecuación de onda para una partícula de spin 3/2

Una partícula con spin 3/2 se representa en su sistema de reposo por un espinor simétrico tridimensional de tercer orden (con $2s + 1 = 4$ componentes independientes). De acuerdo con esto, en un sistema de referencia arbitrario pueden participar en su descripción 4-espinores $\xi^{\alpha\beta\gamma}$, $\eta_{\alpha\beta\gamma}$ y $\zeta^{\alpha\beta\gamma}$, $\chi_{\alpha\beta\gamma}$, cada uno de los cuales es simétrico respecto de todos los índices de igual especie (puntados o no puntados); en la inversión, los espinores del primer par y los del segundo par se transforman entre sí.

Para que en el sistema de reposo los 4-espinores $\xi^{\alpha\beta\gamma}$ y $\eta_{\alpha\beta\gamma}$ se transformen en 3-espinores simétricos respecto de sus tres índices, deben satisfacer las condiciones

$$p^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \eta_{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad p_{\alpha\beta} \xi^{\alpha\beta\gamma} = 0. \quad (31.1)$$

En efecto, en el sistema de reposo es

$$p^{\dot{\alpha}\beta} \rightarrow p_0 \delta_{\alpha}^{\beta} = m \delta_{\alpha}^{\beta}$$

[como puede verse en (20.1)]. Por ello, las condiciones (31.1) conducen a las igualdades

$$\delta_{\alpha}^{\beta} \eta'^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0, \quad \delta_{\alpha}^{\beta} \xi'^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0,$$

donde las letras con apóstrofo designan los correspondientes espinores tridimensionales; en otras palabras, estos espinores se reducen a cero al contraer respecto de los índices $\alpha\beta$ y esto significa precisamente que son simétricos respecto de dichos índices y, por lo tanto, también respecto de los tres.

La relación diferencial entre los espinores ξ y η queda establecida por las igualdades

$$\begin{aligned} p^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta'_{\alpha\delta} &= m \xi^{\dot{\beta}}_{\alpha}, \\ p_{\dot{\beta}} \xi^{\dot{\alpha}}_{\alpha\delta} &= m \eta^{\dot{\alpha}}_{\alpha\delta}. \end{aligned} \tag{31.2}$$

El carácter simétrico de los primeros miembros de estas ecuaciones (respecto de los índices β , $\dot{\gamma}$ o α , δ) queda asegurado por las condiciones (31.1), en virtud de las cuales dichos miembros se anulan al contraer respecto de todos los índices. En el sistema de reposo los espinores tridimensionales ξ' y η' coinciden, como debía ser, en virtud de las ecuaciones (31.2). Eliminando entre las ecuaciones (31.2) η o ξ , se encuentra que cada una de las componentes de los espinores ξ y η satisface la ecuación de segundo orden

$$(p^{\dot{\alpha}} - m^2) \xi^{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}} = 0. \tag{31.3}$$

El conjunto de las ecuaciones (31.1-2) constituye el sistema completo de ecuaciones de onda para una partícula de spin 3/2*. El añadir espinores ζ , χ no conduciría a nada nuevo. Éstos se construyen de acuerdo con

$$\begin{aligned} m\zeta^{\alpha\beta\gamma} &= p^{\alpha\dot{\delta}} \eta^{\beta\dot{\gamma}}_{\dot{\delta}}, \\ m\chi_{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}} &= p_{\alpha\dot{\delta}} \xi^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}_{\dot{\delta}}. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de partículas con spin 3/2 pueden también formularse de otra manera, utilizando los aspectos vectoriales de las propiedades de los espinores (*W. Rarita, J. Schwinger, 1941; A. S. Davydov, I. E. Tamm, 1942*). Con un par de índices espinoriales $\alpha\beta$ se forma un índice vectorial μ en cuatro dimensiones. Por consiguiente, a las componentes de un espinor de tercer orden $\xi^{\alpha\beta\gamma}$ pueden hacerse corresponder las componentes de magnitudes «mixtas» con un índice vectorial y un índice espinorial. Análogamente, al espinor $\eta^{\beta\gamma\tau}$ corresponden las magnitudes ψ_{μ}^{τ} , y al conjunto de ambos espinores, un bispinor «vectorial» ψ_{μ} (no

* Acerca de la formulación lagrangiana de estas ecuaciones, véase el artículo de Fierz y Pauli, citado en la página 60.

escribimos el índice bispinorial). La ecuación de onda se escribirá entonces en forma de « ecuación de Dirac » para cada una de las componentes vectoriales ψ_μ :

$$(\hat{p} - m) \psi_\mu = 0 \quad (31.4)$$

con la condición suplementaria

$$\gamma^\mu \psi_\mu = 0. \quad (31.5)$$

Utilizando para las matrices γ^μ las expresiones en la representación espinorial y las fórmulas que ligan las componentes de un espinor y de un vector (18.6-7), es fácil comprobar que las ecuaciones (31.2) están contenidas en (31.4) y que la condición (31.5) es equivalente a la condición de simetría de los espinores $\xi^{\alpha\beta\gamma}$ y $\eta^{\alpha\beta\gamma}$ respecto de los índices $\beta\gamma$ o $\beta\gamma$. Multiplicando la ecuación (31.4) por γ^μ , obtenemos, teniendo en cuenta (31.5),

$$\gamma^\mu \gamma^\nu p_\nu \psi_\mu = 0$$

o bien, aplicando las reglas de conmutación de las matrices γ^μ ,

$$2g^{\mu\nu} p_\nu \psi_\mu - \gamma^\nu p_\nu \gamma^\mu \psi_\mu = 0. \quad (31.6)$$

El segundo término se anula de nuevo en virtud de (31.5) y el primero da

$$p^\mu \psi_\mu = 0. \quad (31.7)$$

Es fácil ver que esta condición, que se sigue automáticamente de (31.4-5), equivale a las condiciones (31.1).

Finalmente, he aquí un procedimiento más de formular la ecuación de onda, que consiste en introducir magnitudes ψ_{ikl} ($i, k, l = 1, 2, 3, 4$) con tres índices bispinoriales, respecto de los cuales las ψ_{ikl} son simétricas (V. Bargman, E. P. Wigner, 1948). El conjunto de estas magnitudes es equivalente al conjunto de las componentes de los cuatro espinores ξ, η, ζ, χ . La ecuación de onda se escribe en forma de sistema de « ecuaciones de Dirac »

$$p_\mu \gamma^\mu i_m \psi_{mkl} = m \psi_{ikl} \quad (31.8)$$

Es fácil ver que estas ecuaciones conducen ya al número necesario (cuatro) de componentes independientes ψ_{ikl} y, por ello, no hace falta imponer condiciones suplementarias. En efecto, en el sistema de reposo las (31.8) se reducen a las igualdades

$$\gamma^0 i_m \psi_{mkl} = \psi_{ikl},$$

en virtud de las cuales se anulan (en la representación típica) todas las componentes con $i, k, l = 3, 4$, es decir, las ψ_{ikl} se reducen a las componentes de un espinor tridimensional de tercer orden.

Los resultados expuestos se generalizan de manera evidente al caso de partículas con spin s semientero cualquiera. Cuando se representan por ecuaciones de la forma (31.4-5), la función de onda será un 4-tensor simétrico de orden $(2s - 1)/2$ con un índice bispinorial. En cambio, si para describirlas se utilizan ecuaciones de la forma (31.8), la función de onda tendrá $2s$ índices bispinoriales respecto de los cuales es simétrica.

CAPÍTULO 4

UNA PARTÍCULA EN UN CAMPO EXTERIOR

§ 32. La ecuación de Dirac para el electrón en un campo exterior

Las ecuaciones de onda de las partículas libres representan en esencia tan sólo aquellas propiedades que están ligadas con las condiciones generales que impone la simetría espacio-temporal. En cambio, los procesos físicos que ocurren entre partículas dependen de las propiedades de sus interacciones.

En la teoría relativista resulta imposible describir las partículas sensibles a las interacciones fuertes basándose en una simple generalización de las ecuaciones de onda, ya que dicha descripción se sale del marco de la información que proporcionan las ecuaciones de las partículas libres.

El método de las ecuaciones de onda, con todo, es aplicable para describir las interacciones electromagnéticas de las partículas no susceptibles de participar en las interacciones fuertes. A esta categoría pertenecen los electrones (y los positones) y, de esta manera, la teoría actual cubre todo el extenso dominio de la electrodinámica cuántica de los electrones. Tampoco son sensibles a las interacciones fuertes ciertas partículas inestables — los muones; estas partículas se representan por la misma electrodinámica cuántica en el conjunto de fenómenos que ocurren en intervalos de tiempo pequeños comparados con la duración de su vida (duración que está vinculada con las interacciones débiles).

En este capítulo estudiaremos los problemas de la electrodinámica cuántica comprendidos dentro de los límites de la teoría en que interviene una sola partícula. Se trata de problemas en los que el número de partículas no varía y la interacción se puede introducir mediante el concepto de campo electromagnético exterior. Junto con las condiciones que permiten considerar el campo exterior como un objeto dado, los límites de aplicabilidad de esta teoría están fijados también por condiciones ligadas con las llamadas correcciones por radiación (éstas se considerarán en la segunda parte de este volumen).

Las ecuaciones de onda de un electrón en un campo exterior dado se pueden obtener de la misma manera que en la teoría no-relativista (III, § 110). Sea $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$

el 4-potencial del campo electromagnético exterior (A es el potencial vector, Φ el escalar). Obtendremos la ecuación buscada substituyendo en la ecuación de Dirac el operador 4-impulso p por la diferencia $p - eA$, donde e es la carga de la partícula^{*}:

$$[\gamma(p - eA) - m]\psi = 0. \quad (32.1)$$

El hamiltoniano que corresponde a esta ecuación se obtiene a partir de (21.13) mediante la misma sustitución:

$$H = \alpha \cdot (p - eA) + \beta m + e\Phi. \quad (32.2)$$

La invariancia de la ecuación de Dirac respecto de una transformación de contraste de los potenciales del campo eléctrico se traduce en que su forma se conserva invariante si, al mismo tiempo que se aplica la transformación $A \rightarrow A + ip\chi$ (donde χ es una función arbitraria), se transforma la función de onda de acuerdo con

$$\psi \rightarrow \psi e^{i\epsilon\chi} \quad (32.3)$$

(cf. la transformación análoga para la ecuación de Schrödinger III, § 110).

La densidad de corriente expresada mediante la función de onda viene dada por la misma fórmula (21.11)

$$j = \bar{\psi}\gamma\psi,$$

que en el caso en que no existe campo exterior. Es fácil ver que repitiendo con la ecuación (32.1) [y con la ecuación (32.4) que sigue] los mismos cálculos que se efectuaron para deducir (21.11), desaparece el campo exterior y la condición de continuidad se obtiene para la anterior expresión de la corriente.

Aplicemos a la ecuación (32.1) la operación de conjugación de carga. Para ello escribimos la ecuación

$$\bar{\psi}[\gamma(p + eA) + m]\psi = 0, \quad (32.4)$$

que se obtiene a partir de la conjugado-compleja de (32.1) de la misma manera como se obtuvo anteriormente la ecuación (21.9) (al hacerlo hay que recordar que el 4-vector A es real). Escribiendo esta ecuación en la forma

$$[\tilde{\gamma}(p + eA) + m]\bar{\psi} = 0,$$

multiplicándola a la izquierda por la matriz U_C y utilizando las relaciones (26.3) se encuentra

$$[\gamma(p + eA) - m](C\psi) = 0. \quad (32.5)$$

De esta manera, la función de onda conjugado-compleja satisface una ecuación que difiere de la de partida en el signo de la carga. Por otra parte, la operación de conjugación de carga significa el paso de partículas a antipartículas. Vemos, pues, que si las partículas poseen carga eléctrica, los signos de la carga del electrón

* La carga comprende aquí su propio signo, de modo que para el electrón $e = -|e|$.

y del positón, en tanto que magnitudes que determinan su interacción con el campo electromagnético, resultan opuestos automáticamente.

Las ecuaciones de primer orden (32.1) se pueden transformar en ecuaciones de segundo orden aplicando a (32.1) el operador $\gamma(p - eA) + m$:

$$[\gamma^\mu \gamma^\nu (p_\mu - eA_\mu) (p_\nu - eA_\nu) - m^2] \psi = 0.$$

Substituyamos el producto $\gamma^\mu \gamma^\nu$ por

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) + \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = g^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu},$$

donde $\sigma^{\mu\nu}$ es el « 4-tensor matricial » antisimétrico (28.2). Al multiplicar por $\sigma^{\mu\nu}$ se puede efectuar la antisimetrización, es decir, el cambio

$$\begin{aligned} (p_\mu - eA_\mu) (p_\nu - eA_\nu) &\rightarrow \frac{1}{2} \{(p_\mu - eA_\mu) (p_\nu - eA_\nu)\} = \\ &= \frac{1}{2} e (-A_\mu p_\nu + p_\nu A_\mu - p_\mu A_\nu + A_\nu p_\mu) = \frac{1}{2} ie (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) = -\frac{ie}{2} F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

($F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor del campo electromagnético). El resultado que se obtiene es una ecuación de segundo orden de la forma

$$[(p - eA)^2 - m^2 - \frac{i}{2} e F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}] \psi = 0. \quad (32.6)$$

El producto $F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$ puede escribirse en forma tridimensional expresándolo en función de sus componentes

$$\sigma^{\mu\nu} = (\mathbf{a}, i\boldsymbol{\Sigma}), \quad F^{\mu\nu} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H}).$$

Entonces es

$$[(p - eA)^2 - m^2 + e \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} - ie \mathbf{a} \cdot \mathbf{E}] \psi = 0, \quad (32.7)$$

o bien, en unidades ordinarias,

$$\left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c} \Phi \right)^2 - \left(i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - m^2 c^2 + \frac{e\hbar}{c} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{H} - i\frac{e\hbar}{c} \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \right] \psi = 0. \quad (32.7a)$$

La aparición en estas ecuaciones de términos que contienen los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} se debe a que la partícula posee un spin; volveremos a considerar esta cuestión en el párrafo siguiente.

Entre las soluciones de la ecuación de segundo orden se tienen también, claro está, soluciones « sobrantes », extrañas, que no satisfacen la ecuación de primer orden de partida (32.1) (son soluciones de la ecuación $[\gamma(p - eA) + m]\psi = 0$ con el signo de m cambiado). Elegir las soluciones necesarias en los casos concretos es de ordinario algo que resulta evidente y no ofrece dificultad. Un método regular de selección se basa en que si φ es una solución arbitraria de la ecuación de segundo orden, una solución de la ecuación correcta de primer orden es

$$\psi = [\gamma(p - eA) + m] \varphi. \quad (32.8)$$

En efecto, multiplicando esta igualdad por $\gamma(p - eA) - m$, vemos que se anula el segundo miembro si ϕ satisface la ecuación (32.6).

Hay que subrayar que el procedimiento para introducir el campo exterior en la ecuación de onda relativista que consiste en substituir p por $p - eA$ no es de suyo evidente. Al hacerlo nos hemos basado realmente en un principio adicional: el cambio indicado debe efectuarse en las ecuaciones de primer orden. Precisamente como resultado de esto en la ecuación (32.6) aparecieron términos suplementarios que no se habrían obtenido de haber aplicado la sustitución directamente a la ecuación de segundo orden*.

Entre las soluciones estacionarias de la ecuación de Dirac en un campo exterior pueden tenerse estados tanto del espectro continuo como del espectro discreto. Al igual que en la teoría no-relativista, los estados del espectro continuo corresponden a un movimiento infinito en el que la partícula puede encontrarse a distancia infinita, región ésta en la que cabe considerarla como libre. Dado que los valores propios del hamiltoniano de una partícula libre son iguales a $\pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, es claro que el espectro continuo de valores propios de la energía se encuentra para $\epsilon \geq m$ y para $\epsilon \leq -m$. Pero si $-m < \epsilon < m$, la partícula no puede encontrarse en el infinito, de modo que el movimiento es finito y el estado pertenece al espectro discreto.

Como en el caso de las partículas libres, las funciones de onda de «frecuencia positiva» ($\epsilon > 0$) y de «frecuencia negativa» ($\epsilon < 0$) intervienen de manera determinada en el esquema de segunda cuantificación. Para partículas en un campo exterior, este esquema se generaliza de manera natural reemplazando las ondas planas de las fórmulas (25.1) por funciones propias debidamente normalizadas de la ecuación de Dirac $\psi_n^{(+)} y \psi_n^{(-)}$, que corresponden a frecuencias positivas ($\epsilon_n^{(+)}$) y negativas ($-\epsilon_n^{(-)}$):

$$\Psi = \sum_n \{a_n \psi_n^{(+)} e^{-i\epsilon_n^{(+)} t} + b_n^+ \psi_n^{(-)} e^{i\epsilon_n^{(-)} t}\},$$

$$\bar{\Psi} = \sum_n \{a_n^- \bar{\psi}_n^{(+)} e^{i\epsilon_n^{(+)} t} + b_n^- \bar{\psi}_n^{(-)} e^{-i\epsilon_n^{(-)} t}\}. \quad (32.9)$$

Sin embargo, este esquema de cuantificación puede conducir a dificultades.

* De acuerdo con este principio, debería introducirse también el campo exterior en las ecuaciones de onda de las partículas con otros valores del spin, esto es, tomando las ecuaciones en la forma tal como se obtienen a partir del principio de variación, sin utilizar condiciones suplementarias. Así, en el caso de spin 1 la sustitución $p \rightarrow p - eA$ debería efectuarse en las ecuaciones (14.1-2). Haremos notar que dicha sustitución (en el caso de spin 1) en la ecuación de segundo orden (14.4) y en la condición suplementaria (14.3) conducirían, en general, a un sistema incompatible de ecuaciones [en el caso de spin 3/2 la incompatibilidad se manifiesta ya al utilizar las ecuaciones de primer orden (31.2) con las condiciones suplementarias (31.1)].

En el caso de spin 0 la sustitución $p \rightarrow p - eA$ en las ecuaciones de primer orden (10.4) es equivalente a la sustitución en la ecuación de segundo orden (10.5).

No nos detendremos a analizar estas cuestiones con mayor detenimiento porque no tienen un sentido físico directo: la interacción electromagnética de las partículas reales con spin diferente de 1/2 no se puede describir mediante ecuaciones de onda.

Ocurre, en efecto, que a medida que aumenta la profundidad del pozo de potencial, los niveles de energía pueden atravesar la frontera $\epsilon = 0$, es decir, pasar de positivos a negativos (o bien, para un potencial del otro signo, de negativos a positivos). A pesar de todo, y por razones de continuidad, debemos seguir considerando estos niveles como niveles de electrón (y no como niveles de positón). Por ello, sería más riguroso el hacer corresponder a los electrones todos los estados que en un desacoplamiento infinitamente lento del campo se encuentran tocando a la frontera positiva del espectro continuo ($\epsilon = m$). Con todo, la energía del electrón puede entonces resultar negativa, de modo que el vacío no será el estado más bajo de todos; teniendo en cuenta el carácter del campo, esto puede conducir a la aparición de pares electrón-positón*. Además, si se sigue aumentando la profundidad del pozo de potencial, un nivel electrónico puede alcanzar la frontera negativa del espectro continuo. Se anula entonces la energía mínima necesaria para la creación de un par (igual a $m + \epsilon_{el}$), es decir, se inicia inmediatamente la formación espontánea de pares — proceso éste que en ningún caso cabe estudiar dentro de los límites de la teoría de una sola partícula.

Todo esto prueba que la aplicabilidad del concepto de campo exterior se ve limitada en la teoría relativista. En particular, es imposible considerar pozos de potencial demasiado profundos. Por otra parte, dentro del cuadro de la teoría para varias partículas el problema no ha sido aún investigado.

PROBLEMA

Determinar los niveles de energía de un electrón en un campo magnético constante.

Solución. El potencial vector es: $A_x = A_z = 0$, $A_y = Hx$ (el campo H está dirigido en el sentido del eje z). Se conservan (junto con la energía) las componentes p_y , p_z del impulso generalizado.

Utilicemos la ecuación de segundo orden para la función auxiliar φ [véase (32.8)] y supongamos que φ es función propia del operador Σ_z (con valores propios $\sigma = \pm 1$) y también de los operadores p_y , p_z . La ecuación para φ tiene la forma

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + (eHx - p_y)^2 - eH\sigma \right\} \varphi = (\epsilon^2 - m^2 - p_z^2) \varphi.$$

Esta ecuación coincide formalmente con la ecuación de Schrödinger para un oscilador lineal. Los valores propios ϵ se determinan por la fórmula

$$\epsilon^2 - m^2 - p_z^2 = |e| H (2n + 1) - eH\sigma, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(cf. III, § 111). Obsérvese que la función de onda ψ , que hay que determinar a partir de φ mediante la fórmula (32.8), no es función propia del operador Σ_z de acuerdo con el hecho de que para una partícula en movimiento el spin no es una magnitud que se conserve.

§ 33. Desarrollo en potencias de $1/c^{**}$

Vimos (§ 21) que en el límite no-relativista ($v \rightarrow 0$) se anulan las dos componentes

* En particular, tal ocurre cuando existen dos pozos de potencial profundos y de signos opuestos.

** En este párrafo utilizamos el sistema ordinario de unidades.

(χ) del bispinor $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$. En consecuencia, para pequeñas velocidades del electrón se tiene $\chi \ll \varphi$. Esto permite obtener una ecuación aproximada que contenga solamente la magnitud de dos componentes φ desarrollando formalmente la función de onda en potencias de $1/c$.

Partiremos de la ecuación de Dirac para el electrón en un campo exterior escrita en la forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ c\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}) + \beta mc^2 + e\Phi \right\} \psi. \quad (33.1)$$

En la energía relativista de una partícula se incluye también su energía en reposo mc^2 . Al pasar a la aproximación no-relativista, esta última debe eliminarse, para lo cual en vez de ψ introduciremos la función ψ' definida por

$$\psi = \psi' e^{-imc^2t/\hbar}.$$

Entonces

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + mc^2 \right) \psi' = \left\{ c\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}) + \beta mc^2 + e\Phi \right\} \psi'.$$

Representando ψ' en la forma $\psi' = \begin{pmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix}$, se obtendrá el sistema de ecuaciones

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right) \varphi' = c\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \chi', \quad (33.2)$$

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi + 2mc^2 \right) \chi' = c\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \varphi' \quad (33.3)$$

(en lo que sigue prescindiremos de los apóstrofos en φ y χ ; esto no puede dar lugar a confusiones, puesto que en este párrafo utilizaremos solamente la función transformada ψ').

En primera aproximación, conservaremos en el primer miembro de la ecuación (33.3) solamente el término $2mc^2\chi$, con lo que

$$\chi = \frac{1}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \varphi \quad (33.4)$$

(obsérvese que $\chi \sim \varphi/c$). La sustitución de esta expresión en (33.2) da

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right) \varphi = \frac{1}{2m} \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right)^2 \varphi.$$

Para las matrices de Pauli vale la relación

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}], \quad (33.5)$$

donde \mathbf{a}, \mathbf{b} son vectores arbitrarios [véase (20.9)]. En el presente caso es $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$, pero el producto vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ no se anula debido a que \mathbf{p} y \mathbf{A} no comutan.

entre sí:

$$\left[\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \times \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right] \varphi = i \frac{e\hbar}{c} \left\{ \mathbf{A} \times \nabla + \nabla \times \mathbf{A} \right\} \varphi = i \frac{e\hbar}{c} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \varphi.$$

Así, pues,

$$\left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right)^2 = \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \quad (33.6)$$

(donde $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ es el campo magnético) y para φ se obtiene la ecuación

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mathbf{H} \varphi = \left[\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\Phi - \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \right] \varphi. \quad (33.7)$$

Esta es la llamada *ecuación de Pauli*. Difiere de la ecuación no-relativista de Schrödinger en el último término del hamiltoniano, cuya forma es la de la energía potencial de un dipolo magnético en un campo exterior (cf. III, § 110). De esta manera, en primera aproximación (respecto de $1/c$) el electrón se comporta como una partícula que posee, además de una carga, un momento magnético:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} = \frac{e}{mc} \hbar \mathbf{s}. \quad (33.8)$$

Además, la razón giromagnética (e/mc) es el doble de la que sería para un momento magnético asociado con el movimiento orbital *.

Para la densidad se tiene $\rho = \psi^* \psi = \varphi^* \varphi + \chi^* \chi$. En primera aproximación debe prescindirse del segundo término, de modo que $\rho = |\varphi|^2$, como debía ser para la ecuación de Schrödinger.

En cuanto a la densidad de corriente, se tiene

$$\mathbf{j} = c\psi^* \mathbf{a}\psi = c(\varphi^* \boldsymbol{\sigma} \chi + \chi^* \boldsymbol{\sigma} \varphi).$$

De acuerdo con (33.4) substituiremos aquí

$$\chi = \frac{1}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \varphi, \quad \chi^* = \frac{1}{2mc} \left(i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \varphi^* \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

y los productos que contienen cada uno dos factores $\boldsymbol{\sigma}$ se transformarán mediante la fórmula (33.5) escrita en la forma

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a} + i[\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{a}], \quad \boldsymbol{\sigma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} + i[\mathbf{a} \times \boldsymbol{\sigma}]. \quad (33.9)$$

El resultado que se obtiene es

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\varphi \nabla \varphi^* - \varphi^* \nabla \varphi) - \frac{e}{mc} \mathbf{A} \varphi^* \varphi + \frac{\hbar}{2m} \operatorname{rot} (\varphi^* \boldsymbol{\sigma} \varphi), \quad (33.10)$$

de acuerdo con la expresión III (114.4) de la teoría no-relativista.

Hallemos ahora la segunda aproximación, llevando el desarrollo hasta términos

* Este notable resultado lo obtuvo Dirac en 1928. La función de onda de dos componentes que satisface la ecuación (33.7) fue introducida por W. Pauli (1927), antes de que Dirac descubriera su ecuación.

$\sim 1/c^2$. Al hacerlo supondremos que el campo exterior es puramente eléctrico ($\mathbf{A} = 0$).

Observemos ante todo que, teniendo en cuenta los términos $\sim 1/c^2$, la densidad se escribe

$$\rho = |\psi|^2 + |\chi|^2 = |\varphi|^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2} |\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi|^2.$$

Esta expresión difiere de la de Schrödinger. Dado que nos proponemos hallar (en segunda aproximación) una ecuación de onda análoga a la ecuación de Schrödinger, debemos introducir en vez de φ otra función φ_{Sch} (de dos componentes) para la cual la integral que se conserve en el tiempo tenga la forma $\int |\varphi_{\text{Sch}}|^2 dV$, como debe ser para dicha ecuación.

Para ver cuál es la transformación que hemos de aplicar, escribamos la condición

$$\int \varphi_{\text{Sch}}^* \varphi_{\text{Sch}} dV = \int \left\{ \varphi^* \varphi + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2} (\nabla \varphi^* \cdot \boldsymbol{\sigma}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi) \right\} dV$$

y efectuemos la integración por partes:

$$\int (\nabla \varphi^* \cdot \boldsymbol{\sigma}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi) dV = - \int \varphi^* (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \varphi dV = - \int \varphi^* \Delta \varphi dV$$

(o esta misma igualdad con φ y φ^* permutadas). De esta manera,

$$\int \varphi_{\text{Sch}}^* \varphi_{\text{Sch}} dV = \int \left\{ \varphi^* \varphi - \frac{\hbar^2}{8m^2c^2} (\varphi^* \Delta \varphi + \varphi \Delta \varphi^*) \right\} dV,$$

de donde se sigue que

$$\varphi_{\text{Sch}} = \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2c^2} \right) \varphi, \quad \varphi = \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2c^2} \right) \varphi_{\text{Sch}} \quad (33.11)$$

Para simplificar la notación supondremos que el estado es estacionario, es decir, substituiremos el operador $-i\hbar\partial/\partial t$ por la energía ϵ (restada la energía en reposo). En la aproximación que sigue [a la (33.4)] tenemos, en virtud de (33.3),

$$\chi = \frac{1}{2mc} \left(1 - \frac{\epsilon - e\Phi}{2mc^2} \right) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \varphi.$$

Esta expresión debe substituirse en (33.2) y cambiar luego φ por φ_{Sch} , de acuerdo con (33.11), prescindiendo siempre de los términos de orden superior al de $1/c^2$. Despues de un cálculo fácil se obtendrá la ecuación para φ_{Sch} en la forma $\epsilon \varphi_{\text{Sch}} = H \varphi_{\text{Sch}}$, donde en el hamiltoniano es

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + e\Phi - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^2c^2} + \frac{e}{4m^2c^2} \left\{ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \Phi (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) - \frac{1}{2} (\mathbf{p}^2 \Phi + \Phi \mathbf{p}^2) \right\}.$$

La expresión entre llaves se transforma mediante las fórmulas

* Seguimos a continuación el método de A. I. Ajiezer y V. B. Berestetskii (1953).

$$(\sigma \cdot \mathbf{p}) \Phi (\sigma \cdot \mathbf{p}) = \Phi \mathbf{p}^2 + (\sigma \cdot \mathbf{p} \Phi) (\sigma \cdot \mathbf{p}) = \Phi \mathbf{p}^2 + i\hbar (\sigma \cdot \mathbf{E}) (\sigma \cdot \mathbf{p}),$$

$$\mathbf{p}^2 \Phi - \Phi \mathbf{p}^2 = -\hbar^2 \Delta \Phi + 2i\hbar \mathbf{E} \cdot \mathbf{p}$$

(donde $\mathbf{E} = -\Delta \Phi$ es el campo eléctrico). La expresión final del hamiltoniano se escribe:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + e\Phi - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^2c^2} - \frac{e\hbar}{4m^2c^2} \sigma \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{p}] - \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2} \operatorname{div} \mathbf{E}. \quad (33.12)$$

Los últimos tres términos son las correcciones buscadas de orden $1/c^2$. La primera de ellas es consecuencia de la dependencia relativista de la energía cinética con relación al impulso (desarrollo de la diferencia $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2} - mc^2$). El segundo término, que se puede llamar energía de la *interacción spin-órbita*, es la energía de interacción del momento magnético, en movimiento, con el campo eléctrico*. Este último término es, sin embargo, distinto de cero tan sólo en aquellos puntos en que se encuentran las cargas que crean el campo exterior [así, para el campo de Coulomb de una carga puntual Ze : $\Delta\Phi = -4\pi Ze\delta(\mathbf{r})$] (C. G. Darwin, 1928).

Si el campo eléctrico tiene simetría esférica, será

$$\mathbf{E} = -\frac{r}{r} \frac{d\Phi}{dr},$$

y el operador de interacción spin-órbita se puede expresar en la forma

$$\frac{e\hbar}{4m^2c^2r} \sigma \cdot [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] \frac{d\Phi}{dr} = \frac{\hbar^2}{2m^2c^2r} \frac{dU}{dr} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}. \quad (33.13)$$

Aquí, \mathbf{l} es el operador momento cinético orbital, $\mathbf{s} = (1/2)\sigma$, el operador spin del electrón y $U = e\Phi$ la energía potencial del electrón en el campo**.

§ 34. Estructura fina de los niveles del átomo de hidrógeno

Determinemos las correcciones relativistas correspondientes a los niveles de energía del átomo de hidrógeno — es decir, del electrón en el campo coulombiano de un núcleo en reposo***. La velocidad del electrón en el átomo de hidrógeno es tal que $v/c \sim \alpha \ll 1$. Por ello, las correcciones buscadas se pueden calcular aplicando la teoría de perturbaciones — como valor medio respecto del estado no

* Introduciendo el momento magnético (33.8) y la velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$, obtendremos esta energía en la forma $-\frac{1}{2c} \mu \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{v}]$. A primera vista este resultado puede parecer artificial, ya que al pasar al sis-

tema de referencia que se mueve junto con la partícula aparece el campo magnético $\mathbf{H} = \frac{l}{c} [\mathbf{E} \times \mathbf{v}]$ en el cual el momento magnético debería tener la energía $-\mu \cdot \mathbf{H}$. Este razonamiento, sin embargo, en realidad no tiene en cuenta todavía de manera adecuada el carácter no inercial del sistema de referencia vinculado a la partícula. La aparición del factor $1/2$ («factor de Thomas», L. Thomas, 1926) se debe a las condiciones generales de invariancia relativista junto con las propiedades específicas del electrón en tanto que partícula «dotada de spin» y su significado inherente de razón giromagnética (véase § 41).

** La fórmula (33.13) se utilizó en III, § 72.

*** La influencia del movimiento del núcleo sobre el valor de estas correcciones es un efecto de orden más pequeño, que aquí no nos interesa.

perturbado (es decir, según la función de onda no-relativista) de los términos relativistas en el hamiltoniano aproximado (33.12). Para conseguir una generalidad algo mayor tomaremos la carga del núcleo igual a Ze , suponiendo, con todo, que se tiene $Z\alpha \ll 1$.

La intensidad del campo del núcleo es $\mathbf{E} = Ze\mathbf{r}/r^3$ y su potencial satisface la ecuación $\Delta\Phi = -4\pi Ze\delta(\mathbf{r})$. Substituyendo estos valores en (33.12) (en los últimos tres términos) y teniendo en cuenta que la carga del electrón es negativa, se obtendrá el operador de la perturbación

$$V = -\frac{\alpha p^4}{8m^3} + \frac{Z\alpha}{2r^3 m^2} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} + \frac{Z\alpha\pi}{2m^2} \delta(\mathbf{r}). \quad (34.1)$$

Dado que, según la ecuación no-relativista de Schrödinger, se tiene

$$\mathbf{p}^2\psi = 2m \left(\epsilon_0 + \frac{Z\alpha}{r} \right) \psi$$

(donde $\epsilon_0 = -mZ^2\alpha^2/2n^2$ es el nivel no perturbado y n el número cuántico principal), el valor medio

$$\overline{\mathbf{p}^4} = 4m^2 \overline{\left(\epsilon_0 + \frac{Z\alpha}{r} \right)^2}.$$

Esta cantidad, como también el valor medio del segundo término en (34.1), se calcula mediante las fórmulas (véase III, § 36)

$$\begin{aligned} \overline{r^{-1}} &= \frac{m\alpha Z}{n^2}, & \overline{r^{-2}} &= \frac{(m\alpha Z)^2}{n^8 (l + \frac{1}{2})}, \\ \overline{r^{-3}} &= \frac{(m\alpha Z)^3}{n^8 l (l + \frac{1}{2}) (l + 1)} \end{aligned} \quad (34.2)$$

(la última corresponde a $l \neq 0$); el valor propio

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} &= \frac{1}{2} \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \text{ para } l \neq 0, \\ \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} &= 0 \text{ para } l = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, el promedio del tercer término se efectúa con ayuda de las fórmulas

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z\alpha m}{n} \right)^{3/2}, \quad l = 0; \quad \psi(0) = 0, \quad l \neq 0. \quad (34.3)$$

El resultado de un cálculo simple utilizando las fórmulas que preceden se puede representar en todos los casos (para j y l cualesquiera) en la forma

$$\Delta\epsilon = -\frac{m(Z\alpha)^4}{2n^8} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right). \quad (34.4)$$

La fórmula (34.4) da también la corrección relativista buscada para la energía

de los niveles hidrogenoides — la energía de estructura fina [★]—. Recordaremos que en la teoría no-relativista se presenta tanto una degeneración debida a la dirección del spin, como una degeneración de Coulomb relativa a l . La estructura fina (la interacción spin-órbita) rompe esta degeneración, pero no del todo: subsiste una doble degeneración de los niveles con valores iguales de n, j , pero con diferentes $l = j \pm 1/2$ (resultan no degenerados solamente los niveles con los mayores valores posibles de j para un valor dado de n , es decir, $j = j_{\text{máx}} = l_{\text{máx}} + 1/2 = n - 1/2$ ^{★★}). De esta manera, la sucesión de los niveles hidrogenoides teniendo en cuenta la estructura fina es la siguiente:

$$\begin{gathered} 1s_{1/2}; \\ \underline{2s_{1/2}}, \underline{2p_{1/2}}, \underline{2p_{3/2}}; \\ \underline{3s_{1/2}}, \underline{3p_{1/2}}, \underline{3p_{3/2}}, \underline{3d_{3/2}}, \underline{3d_{5/2}}. \\ \dots \end{gathered}$$

El nivel con número cuántico principal n se descompone en n componentes de estructura fina.

Veremos más adelante que la degeneración aún subsistente desaparece debido a las llamadas correcciones por radiación (corrimiento Lamb), correcciones que no tiene en cuenta la ecuación de Dirac en el problema para un solo electrón.

Adelantándonos en nuestro programa, indicaremos aquí ya que estas correcciones son del orden de $\sim mZ^4\alpha^5\ln(1/\alpha)$. En cambio, la corrección de segundo orden respecto de la interacción spin-órbita sería del orden de $\sim m(Z\alpha)^6$, con lo cual la razón de ésta a las correcciones por radiación es del orden de $\sim Z^2\alpha/\ln(1/\alpha)$. Para el hidrógeno ($Z = 1$) esta razón es sin duda pequeña, por lo cual el problema de resolver exactamente la ecuación de Dirac carece en este caso de sentido. Este problema, sin embargo, sí puede tenerlo para los niveles de energía del electrón en el campo de un núcleo con un valor grande de Z (§ 36).

* Esta fórmula [como también la fórmula más precisa (36.10)] la obtuvo *A. Sommerfeld* a partir de la antigua teoría de Bohr antes de que se fundara la mecánica cuántica.

** Esta degeneración está ligada con la existencia de una ley adicional de conservación específica del campo coulombiano: el hamiltoniano de la ecuación de Dirac $H = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m - e^2/r$ commuta con el operador

$$I = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \Sigma + \frac{i}{me^2} \beta (\Sigma \cdot \mathbf{l} + 1) \gamma^5 (H - m\beta)$$

(*M. H. Johnson, B. A. Lipman*, 1950). En el límite no-relativista $I \rightarrow \Sigma \cdot \mathbf{A}$, donde

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{1}{2me^2} \{ \mathbf{l} \times \mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{l} \}$$

es el operador que corresponde a la integral del movimiento de Coulomb clásica (véase I, § 15). La degeneración accidental no-relativista en un campo coulombiano se debe a la ley de conservación de la cantidad \mathbf{A} .

§ 35. Movimiento en un campo con simetría esférica

Consideremos el movimiento de un electrón en un campo eléctrico que presenta simetría esférica.

Dado que en el movimiento en un campo de esta especie se conservan el momento cinético y la paridad (respecto del centro del campo elegido como origen de coordenadas), para la dependencia angular de las funciones de onda de ese movimiento vale todo lo dicho en el § 24 con relación a las ondas esféricas de las partículas libres. Cambian tan sólo las funciones radiales. De acuerdo con esto, buscaremos la función de onda de los estados estacionarios (en la representación típica) entre las expresiones de la forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(r) \Omega_{jlm} \\ (-1)^{\frac{1+l-l'}{2}} g(r) \Omega_{jl'm} \end{pmatrix}, \quad (35.1)$$

donde $l = j \pm \frac{1}{2}$, $l' = 2j - l$ y la potencia de -1 se ha introducido porque así convendrá más adelante.

La ecuación de Dirac en la representación típica conduce al siguiente sistema de ecuaciones para φ y χ :

$$\begin{aligned} (\epsilon - m - U) \varphi &= \sigma \cdot p \chi, \\ (\epsilon + m - U) \chi &= \sigma \cdot p \varphi, \end{aligned} \quad (35.2)$$

donde $U(r) = e\Phi(r)$ es la energía potencial del electrón en el campo. El cálculo del resultado de substituir aquí las expresiones (35.1) se reduce al cálculo de los segundos miembros de estas ecuaciones.

Expresando el spinor esférico $\Omega_{jl'm}$ en función de Ω_{jlm} de acuerdo con

$$\Omega_{jl'm} = i^l - i^l \left(\sigma \cdot \frac{r}{r} \right) \Omega_{jlm}$$

[véase (24.8)], escribiremos

$$(\sigma \cdot p) \chi = -i(\sigma \cdot p)(\sigma \cdot r) \frac{g}{r} \Omega_{jlm}.$$

Efectuando ahora el producto $(\sigma \cdot p)(\sigma \cdot r)$ mediante la fórmula (33.5), se encuentra, después de desarrollar las operaciones vectoriales,

$$\begin{aligned} (\sigma \cdot p) \chi &= -i \{ p \cdot r + i \sigma \cdot [p \times r] \} \frac{g}{r} \Omega_{jlm} = \\ &= \{ -\operatorname{div} r - (r \cdot \nabla) - \sigma \cdot [r \times p] \} \frac{g}{r} \Omega_{jlm} = \\ &= -\left\{ g' + \frac{2}{r} g + \frac{g}{r} \sigma \cdot l \right\} \Omega_{jlm}, \end{aligned}$$

donde $l = r \times p$ es el operador correspondiente al momento cinético orbital; el

apóstrofo representa la derivación respecto de r . Los valores propios del producto $\sigma \cdot l = 2l \cdot s$ son iguales a

$$\sigma \cdot l = l^2 - l^2 - s^2 = j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} = \begin{cases} j - \frac{1}{2} & \text{para } l = j - \frac{1}{2}, \\ -j - \frac{3}{2} & \text{para } l = j + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Para unificar la escritura de las fórmulas en ambos casos ($l = j \pm 1/2$) conviene introducir la notación

$$\chi = \begin{cases} -(j + \frac{1}{2}) = -(l + 1) & \text{para } j = l + \frac{1}{2}, \\ +(j + \frac{1}{2}) = l & \text{para } j = l - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (35.3)$$

El número χ toma todos los valores enteros, excluido el valor 0 (correspondiendo los números positivos al caso $j = l - 1/2$, y los negativos al caso $j = l + 1/2$). Entonces es $l \cdot \sigma = -(1 + \chi)$, de modo que

$$(\sigma \cdot p) \chi = -\left(g' + \frac{1-\chi}{r} g\right) \Omega_{ilm}.$$

Al substituir esta expresión en la primera de las ecuaciones (35.2), el espinor esférico Ω_{ilm} se reduce entre ambos miembros de la ecuación. Procediendo de manera análoga con la segunda ecuación *, obtendremos como resultado el siguiente sistema para las funciones radiales:

$$f' + \frac{1+\chi}{r} f - (\epsilon + m - U) g = 0, \quad (35.4)$$

$$g' + \frac{1-\chi}{r} g + (\epsilon - m - U) f = 0,$$

o bien

$$(fr)' + \frac{\chi}{r} (fr) - (\epsilon + m - U) gr = 0, \quad (35.5)$$

$$(gr)' - \frac{\chi}{r} (gr) + (\epsilon - m - U) fr = 0.$$

Veamos cómo se comportan f y g a cortas distancias suponiendo que el campo $U(r)$ crece más rápidamente que $1/r$ cuando $r \rightarrow 0$. Entonces, para valores pequeños de r , las ecuaciones (35.4) toman la forma

$$f' + Ug = 0, \quad g' - Uf = 0.$$

Ambas tienen soluciones reales del tipo

$$f = \text{const} \cdot \sin(\int U dr + \delta), \quad g = \text{const} \cdot \cos(\int U dr + \delta), \quad (35.6)$$

donde δ es una constante arbitraria. Estas funciones oscilan para $r \rightarrow 0$ sin tender

* No es necesario repetir estos cálculos. Basta observar que el paso de la primera ecuación a la segunda se consigue [como puede verse en (35.1-2)], mediante el cambio.

$f \rightarrow g, g \rightarrow -f, m \rightarrow -m, l \rightarrow l', \chi \rightarrow -\chi$.

a ningún límite. Es fácil ver que esta situación corresponde a una «caída» de la partícula hacia el centro.

Observemos, en primer lugar, que en el caso considerado la ecuación de onda posee un espectro continuo para cualquier valor ϵ , incluso aquellos valores tales que $|\epsilon| < m$. En efecto, el dominio de cortas distancias no añade limitaciones en la elección de la solución en este caso: la condición de contorno para $r = 0$ deja de existir, por la propia esencia del problema, en el caso de funciones que oscilan, de modo que la elección de la constante δ sigue siendo arbitraria. En cambio, el comportamiento correcto de la función de onda en el dominio de grandes valores de r [«empalmada» con la función (35.8)] puede conseguirse para ϵ cualquiera eligiendo convenientemente δ .

Sin embargo, en los estados del espectro continuo cualquier paquete de ondas escapa, en el curso del tiempo, de cualquier dominio finito del espacio (como prueban los razonamientos expuestos al final de III, § 10). Dado que para $|\epsilon| < m$ la partícula no puede escapar al infinito, esto significa que escapa hacia el origen de coordenadas, es decir, cae hacia el centro. El movimiento resulta, como si dijéramos, infinito hacia los valores pequeños de r . Pero la situación que acabamos de describir es por completo inadmisible en la teoría relativista. En efecto, en virtud de la continuidad del espectro para $|\epsilon| < m$ los estados con frecuencias negativas y positivas resultan inseparables. Esto hace imposible cualquier descripción razonable del sistema. En particular, éste sería absolutamente inestable: cualquier perturbación conduciría a la creación de un número infinito de pares. Por ello, en la teoría de Dirac es absolutamente imposible estudiar un campo cuyo potencial crece más rápidamente que $1/r$ cuando $r \rightarrow 0$. Hay que subrayar que esto vale para potenciales de ambos signos. Aunque, claro está, es posible hablar de «caída» sólo en el caso de atracción, sin embargo, y dado que el signo de $U = e\Phi$ depende también del signo de la carga e , en un caso los niveles de electrón se comportan de manera anómala, y en el otro, los niveles de positón.

Consideremos ahora el comportamiento de las funciones de onda a grandes distancias. Si el campo $U(r)$ decrece con rapidez suficiente cuando $r \rightarrow \infty$, al determinar la forma asintótica de las funciones de onda a grandes distancias cabe prescindir por completo del campo en las ecuaciones. Si $\epsilon > m$, es decir, en el dominio del espectro continuo, volvemos entonces de nuevo a la ecuación del movimiento libre, de modo que la forma asintótica de las funciones de onda (ondas esféricas) difiere de la correspondiente a una partícula libre tan sólo en la aparición de «corrimientos de fase» adicionales cuyos valores vienen determinados por la forma del campo a cortas distancias*. Estos corrimientos dependen de los valores de j y l_0 , lo que es lo mismo, del número x introducido más arriba (y también, naturalmente, de la energía ϵ). Designándolos por δ_x y utilizando la expresión de una

* Cf. III, § 33. Como en la teoría no-relativista, $U(r)$ debe decrecer más rápidamente que $1/r$. El caso en que $U \sim 1/r$ se estudiará aparte en el § 36.

onda esférica libre (24.7), podemos por ello escribir sin más la fórmula asintótica buscada

$$\psi \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \left(\begin{aligned} & \sqrt{\epsilon + m} \Omega_{jlm} \sin\left(pr - \frac{\pi l}{2} + \delta_x\right) \\ & - \sqrt{\epsilon - m} \Omega_{jl'm} \sin\left(pr - \frac{\pi l'}{2} + \delta_x\right) \end{aligned} \right) \quad (35.7)$$

(donde $p = \sqrt{\epsilon^2 - m^2}$). El coeficiente común corresponde aquí a la normalización de las funciones radiales de acuerdo con (24.5).

En cuanto a las funciones de onda del espectro discreto ($\epsilon < m$), decrecen exponencialmente para $r \rightarrow \infty$ de acuerdo con la ley

$$f = -\sqrt{\frac{m+\epsilon}{m-\epsilon}} g = \frac{A_0}{r} \exp(-r\sqrt{m^2 - \epsilon^2}), \quad (35.8)$$

donde A_0 es una constante.

Como en la teoría no-relativista, los corrimientos de fase δ_x (más precisamente, las cantidades $e^{2i\delta_x} - 1$) determinan la amplitud de dispersión en el campo dado (hablaremos de esto con mayor detenimiento en el § 37). No nos detendremos en examinar aquí las propiedades analíticas de estas magnitudes (cf. III, § 128). Sólo haremos notar que $e^{2i\delta_x}$, en tanto que función de la energía, como antes posee polos en los puntos que corresponden a los niveles de los estados de enlace de la partícula. El residuo de la función $e^{2i\delta_x}$ en uno de sus polos está ligado de manera determinada con el coeficiente en la expresión asintótica de la correspondiente función de onda del espectro discreto. Determinemos esta relación, que generaliza la fórmula no-relativista III (128.16). Los cálculos necesarios son del todo análogos a los que se efectuaron en III, § 128.

Derivemos las ecuaciones (35.5) respecto de la energía:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial rf}{\partial \epsilon}\right)' + \frac{x}{r} \frac{\partial rf}{\partial \epsilon} - (\epsilon + m - U) \frac{\partial rg}{\partial \epsilon} &= rg, \\ \left(\frac{\partial rg}{\partial \epsilon}\right)' - \frac{x}{r} \frac{\partial rg}{\partial \epsilon} + (\epsilon - m - U) \frac{\partial rf}{\partial \epsilon} &= -rf. \end{aligned}$$

Multipliquemos estas dos ecuaciones por rg y por $-rf$, respectivamente, y las dos ecuaciones (35.5) respectivamente por $-rg$ y por rf , y sumemos luego las cuatro ecuaciones miembro a miembro. Después de simplificar, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(g \frac{\partial f}{\partial \epsilon} - f \frac{\partial g}{\partial \epsilon} \right) \right] = r^2 (f^2 + g^2).$$

Integremos esta igualdad respecto de r :

$$r^2 \left(g \frac{\partial f}{\partial \epsilon} - f \frac{\partial g}{\partial \epsilon} \right) = \int_0^r (f^2 + g^2) r^2 dr,$$

y pasemos luego al límite $r \rightarrow \infty$. En virtud de la condición de normalización, la

integral que aparece en el segundo miembro de la igualdad se reduce a 1. En el primer miembro, en cambio, tengamos en cuenta que las funciones f y g están ligadas en el dominio asintótico por la igualdad

$$rg = \frac{(rf)'}{\epsilon + m}$$

(igualdad que se obtiene a partir de (35.5) prescindiendo de los términos en U y en $1/r$). El resultado que se obtiene es

$$\frac{1}{\epsilon + m} \left[(rf) \frac{\partial rf}{\partial \epsilon} - rf \left(\frac{\partial rf}{\partial \epsilon} \right)' \right] = 1. \quad (35.9)$$

Esta fórmula difiere tan sólo en el coeficiente ($\epsilon + m$ en vez de $2m$) de la fórmula no-relativista correspondiente (para la función χ). Por consiguiente, no hay necesidad de repetir todos los cálculos que seguirían y podemos escribir sin más la fórmula final válida cerca del punto $\epsilon = \epsilon_0$ (ϵ_0 es el nivel de energía):

$$e^{2i\delta_x} = (-1)^l \frac{2A_0^2}{\epsilon - \epsilon_0} \sqrt{\frac{m - \epsilon_0}{m + \epsilon_0}}, \quad (35.10)$$

donde A_0 es el coeficiente en la expresión asintótica (35.8).

PROBLEMA

Hallar la forma límite de la función de onda para pequeños valores de r en un campo tal que $U \sim r^{-s}$, $s < 1$.

Solución. Para una partícula libre se tiene, cuando r es pequeño: $f \sim r^l$, $g \sim r^{l'}$, de modo que para $l < l'$ es $f \gg g$ y para $l > l'$ es $f \ll g$. Supongamos (suposición que queda confirmada por el resultado) que dicha relación se conserva válida también en el campo que estamos considerando. Si $l < l'$ (es decir, $l = j - 1/2$, $x = -l - 1$), en la primera de las ecuaciones (35.4) se puede prescindir del término en g , con lo cual $f \sim r^l$, como antes. De la segunda ecuación, en cambio, se deduce entonces que $g \sim r^l U$, es decir, $g \sim r^{l+1-s} = r^{l'-s}$. De manera análoga se estudia el caso en que $l > l'$. El resultado que se obtiene es

$$\begin{aligned} \text{para } l < l': \quad & f \sim r^l, \quad g \sim r^{l'-s}; \\ \text{para } l > l': \quad & f \sim r^{l-s}, \quad g \sim r^{l'}. \end{aligned}$$

§ 36. Movimiento en un campo de Coulomb

El estudio de las propiedades del movimiento en el caso de un campo de Coulomb, que es el más importante, lo iniciaremos investigando el comportamiento de las funciones de onda a pequeñas distancias. Para concretar, hablaremos de un campo atractivo: $U = -Z\alpha/r^*$.

Para valores de r pequeños, en las ecuaciones (35.5) se puede prescindir de los términos que contienen $\epsilon \pm m$; entonces,

* En unidades ordinarias es $U = -Ze^2/r$. Al pasar a unidades relativistas, e^2 se substituye por la magnitud sin dimensiones α .

$$(fr)' + \frac{x}{r} fr - \frac{Z\alpha}{r} gr = 0,$$

$$(gr)' - \frac{x}{r} gr + \frac{Z\alpha}{r} fr = 0.$$

Las dos funciones fr y gr intervienen en cada una de estas ecuaciones de la misma manera. Por consiguiente, buscaremos para ellas expresiones con potencias iguales de r : $fr = ar^\gamma$, $gr = br^\gamma$. La sustitución en dichas ecuaciones nos da

$$a(\gamma + x) - bZ\alpha = 0, \quad aZ\alpha + b(\gamma - x) = 0,$$

de donde

$$\gamma^2 = x^2 - (Z\alpha)^2. \quad (36.1)$$

Supongamos que $(Z\alpha)^2 < x^2$. Entonces γ es real y, además, de los dos valores debe elegirse el positivo: la correspondiente solución o no diverge para $r = 0$ o diverge más lentamente que la otra*. Así, pues,

$$f = \frac{Z\alpha}{\gamma + x} g = \text{const} \cdot r^{-1+\gamma},$$

$$\gamma = \sqrt{x^2 - Z^2\alpha^2} = \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - Z^2\alpha^2}. \quad (36.2)$$

Aunque la función de onda puede también tender a infinito en $r = 0$ (si $\gamma < 1$), sin embargo, la integral de $|\psi|^2$ se conserva, claro está, convergente.

Si $(Z\alpha)^2 > x^2$, ambos valores de γ en (36.2) son imaginarios. Las correspondientes soluciones oscilan cuando $r \rightarrow 0$ (como $r^{-1} \cos [|\gamma| \ln r]$), lo que corresponde de nuevo, conforme se explicó antes, a la situación inadmisible en la teoría relativista de «caída hacia el centro». Dado que $x^2 \geq 1$, esto significa que un campo puramente de Coulomb se puede estudiar mediante la teoría de Dirac tan sólo si $Z\alpha < 1$, es decir, si $Z < 137$.

En el caso real del movimiento en el campo de un núcleo, la marcha del potencial a pequeñas distancias difiere del campo de Coulomb debido al tamaño finito del núcleo. Esto conduce a la posibilidad, en principio, de que existan núcleos con valores mayores de Z^{**} .

Hay que hacer observar también que, incluso en el caso de una carga puntual, la marcha del potencial a pequeñas distancias se ve alterada debido a las correcciones por radiación, lo que también puede modificar el resultado. Sin embargo, el papel de tales correcciones para valores de $Z\alpha$ próximos a 1 no se ha estudiado todavía.

Pasemos ahora a la solución exacta de la ecuación de onda (G. Darwin, 1928; W. Gordon, 1928).

* La elección de una solución que diverja menos rápidamente se puede justificar considerando un potencial «cortado» a cierto radio r_0 y pasando luego al límite $r_0 \rightarrow 0$, de manera análoga a como se procedió en III, § 35.

** El estudio de esta cuestión en el caso de potenciales «cortados» puede verse en el artículo de I. Pomeranchuk e Ia. Smorodinskii, J. Phys. USSR 9, 97 (1945).

a) *Espectro discreto* ($\varepsilon < m$). Para las funciones f y g buscaremos expresiones de la forma

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{m + \varepsilon} e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1} (Q_1 + Q_2), \\ g &= -\sqrt{m - \varepsilon} e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1} (Q_1 - Q_2), \end{aligned} \quad (36.3)$$

donde se han introducido las notaciones

$$\rho = 2\lambda r, \quad \lambda = \sqrt{m^2 - \varepsilon^2}, \quad \gamma = \sqrt{x^2 - Z^2 \alpha^2}. \quad (36.4)$$

Esta forma resulta natural teniendo en cuenta el comportamiento ya conocido de las funciones cuando $\rho \rightarrow 0$ (36.2) y su disminución exponencial ($\sim e^{-\rho/2}$) para $\rho \rightarrow \infty$. Dado que cuando $\rho \rightarrow \infty$ las funciones f y g deben comportarse asintóticamente de la misma manera, es de esperar que para $\rho \rightarrow \infty$ se tendrá $Q_1 \gg Q_2$.

Substituyendo (36.3) en (35.4), obtendremos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \rho(Q_1 + Q_2)' + (\gamma + x)(Q_1 + Q_2) - \rho Q_2 + Z\alpha \sqrt{\frac{m - \varepsilon}{m + \varepsilon}} (Q_1 - Q_2) &= 0, \\ \rho(Q_1 - Q_2)' + (\gamma - x)(Q_1 - Q_2) + \rho Q_2 - Z\alpha \sqrt{\frac{m + \varepsilon}{m - \varepsilon}} (Q_1 + Q_2) &= 0 \end{aligned}$$

(el apóstrofo simboliza la derivación respecto de ρ). Su suma y su diferencia dan

$$\begin{aligned} \rho Q_1' + \left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) Q_1 + \left(x - \frac{Z\alpha m}{\lambda}\right) Q_2 &= 0, \\ \rho Q_2' + \left(\gamma + \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda} - \rho\right) Q_2 + \left(x + \frac{Z\alpha m}{\lambda}\right) Q_1 &= 0, \end{aligned} \quad (36.5)$$

o bien, después de eliminar Q_1 o Q_2 ,

$$\begin{aligned} \rho Q_1'' + (2\gamma + 1 - \rho) Q_1' - \left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) Q_1 &= 0, \\ \rho Q_2'' + (2\gamma + 1 - \rho) Q_2' - \left(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) Q_2 &= 0 \end{aligned}$$

[hay que tener en cuenta que $\gamma^2 - (Z\alpha\varepsilon/\lambda)^2 = x^2 - (Z\alpha m/\lambda)^2$]. La solución de estas ecuaciones, finita para $\rho = 0$, es:

$$\begin{aligned} Q_1 &= AF\left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}, 2\gamma + 1, \rho\right), \\ Q_2 &= BF\left(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}, 2\gamma + 1, \rho\right), \end{aligned} \quad (36.6)$$

donde $F(\alpha, \beta, z)$ es la función hipergeométrica degenerada. Haciendo en cualquiera de las ecuaciones (36.5) $\rho = 0$, se encuentra la relación entre las constantes A y B :

$$B = -\frac{\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}}{x - \frac{Z\alpha m}{\lambda}} A. \quad (36.7)$$

Las dos funciones hipergeométricas que aparecen en (36.6) deben reducirse a polinomios (de lo contrario crecerían como e^ρ cuando $\rho \rightarrow \infty$, y con ellas crecería como $e^{\rho/2}$ también la función de onda total). La función $F(\alpha, \beta, z)$ se reduce a un polinomio si el parámetro α es igual a un número entero negativo o a cero. Hagamos

$$\gamma - \frac{Z\alpha\epsilon}{\lambda} = -n_r. \quad (36.8)$$

Si $n_r = 1, 2, \dots$, ambas funciones hipergeométricas se reducen a polinomios. Pero si $n_r = 0$, se reduce a un polinomio tan sólo una de ellas. Ahora bien, la igualdad $n_r = 0$ significa que $\gamma = Z\alpha\epsilon/\lambda$ y entonces, como se comprueba fácilmente, se tiene $Z\alpha m/\lambda = |\mathbf{x}|$. Si $|\mathbf{x}| < 0$, el coeficiente B (36.7) se anula, de modo que $Q_2 = 0$ y no se viola la condición impuesta. Pero si $|\mathbf{x}| > 0$, será $B = -A$ y Q_2 es una función que diverge para $n_r = 0$. Así, pues, son admisibles los siguientes valores del número cuántico n_r :

$$n_r = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots & \text{para } |\mathbf{x}| < 0; \\ 1, 2, 3, \dots & \text{para } |\mathbf{x}| > 0. \end{cases} \quad (36.9)$$

De la definición (36.8) se deduce ahora la expresión siguiente para los niveles de energía discretos:

$$\frac{\epsilon}{m} = \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(\sqrt{|\mathbf{x}|^2 - (Z\alpha)^2} + n_r)^2} \right]^{-1/2}. \quad (36.10)$$

Cuando $Z\alpha \ll 1$ los primeros términos del desarrollo de esta fórmula dan

$$\frac{\epsilon}{m} - 1 = -\frac{(Z\alpha)^2}{2(|\mathbf{x}| + n_r)^2} \left\{ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{|\mathbf{x}| + n_r} \left[\frac{1}{|\mathbf{x}|} - \frac{3}{4(|\mathbf{x}| + n_r)} \right] \right\}.$$

Haciendo $n_r + |\mathbf{x}| = n$ ($= 1, 2, \dots$) y observando que $|\mathbf{x}| = j + 1/2$, volvemos a la fórmula (34.4) que habíamos obtenido antes mediante la teoría de perturbaciones. Como se indicó ya al final del § 34, los términos de este desarrollo que siguen carecen de sentido porque, sin duda alguna, quedan mayorados por las correcciones radiativas. La fórmula (36.10), sin embargo, tiene sentido en su forma exacta para $Z\alpha \sim 1$. Observemos que la degeneración doble de los niveles que se advierte en la fórmula aproximada (34.4) se conserva también en la fórmula exacta: dado que en ella interviene solamente $|\mathbf{x}|$, los niveles con distintos l para un mismo valor de j coinciden, como antes.

En la función de onda nos queda por determinar el coeficiente de normalización A . Como siempre, la función de onda del espectro discreto debe normalizarse por la condición $\int |\psi|^2 dV = 1$; para las funciones f y g esto equivale a la condición

$$\int_0^\infty (f^2 + g^2) r^q dr = 1.$$

La manera más simple de hallar A consiste en acudir a la forma asintótica de las

funciones para $r \rightarrow \infty$. Mediante la fórmula asintótica

$$F(-n_r, 2\gamma + 1, p) \approx \frac{\Gamma(2\gamma + 1)}{\Gamma(n_r + 2\gamma + 1)} (-p)^{n_r}$$

[véase III (d, 14)] se encuentra

$$f \approx (-1)^{n_r} A \sqrt{m + \epsilon} \frac{\Gamma(2\gamma + 1)}{\Gamma(n_r + 2\gamma + 1)} e^{-\lambda r} (2\lambda r)^{\gamma + n_r - 1}.$$

Comparando esta fórmula con la expresión (36.22), que se obtendrá más adelante, resulta

$$A = \frac{\lambda^2}{\Gamma(2\gamma + 1)} \left[\frac{2\Gamma(2\gamma + 1 + n_r) \left(\frac{Z\alpha m}{\lambda} - x \right)}{Z\alpha m^2 \cdot n_r!} \right]^{1/2}$$

Reuniendo las fórmulas obtenidas, escribiremos las expresiones finales completas de las funciones de onda normalizadas:

$$\begin{cases} f \\ g \end{cases} = \frac{\pm (2\lambda)^{3/2}}{\Gamma(2\gamma + 1)} \left[\frac{(m \pm \epsilon) \Gamma(2\gamma + n_r + 1)}{4m \frac{Z\alpha m}{\lambda} \left(\frac{Z\alpha m}{\lambda} - x \right) n_r!} \right]^{1/2} (2\lambda r)^{\gamma - 1} e^{-\lambda r} \times \\ \times \left\{ \left(\frac{Z\alpha m}{\lambda} - x \right) F(-n_r, 2\gamma + 1, 2\lambda r) \mp n_r F(1 - n_r, 2\gamma + 1, 2\lambda r) \right\} \quad (36.11)$$

(los signos superiores se refieren a f , y los inferiores, a g).

b) *Espectro continuo* ($\epsilon > m$). No es necesario resolver de nuevo la ecuación de onda para los estados del espectro continuo. Las funciones de onda que corresponden a este caso se obtienen a partir de las funciones del espectro discreto mediante el cambio *

$$\sqrt{m - \epsilon} \rightarrow -i\sqrt{\epsilon - m}, \quad \lambda \rightarrow -ip, \quad -n_r \rightarrow \gamma - i\frac{Z\alpha\epsilon}{p} \quad (36.12)$$

(acerca de la elección del signo en la prolongación analítica de la raíz $\sqrt{m - \epsilon}$, véase III, § 128). Sin embargo, hay que efectuar de nuevo la normalización de las funciones.

Aplicando en (36.11) la sustitución indicada, representaremos las funciones f y g en la forma

$$\begin{cases} f \\ g \end{cases} = \frac{\sqrt{\epsilon + m}}{i\sqrt{\epsilon - m}} \left\{ A' e^{ipr} (2pr)^{\gamma - 1} \times \right. \\ \left. \times [e^{i\zeta} F(\gamma - i\zeta, 2\gamma + 1, -2ipr) \mp e^{-i\zeta} F(\gamma + 1 - i\zeta, 2\gamma + 1, -2ipr)] \right\}$$

donde A' es una nueva constante de normalización y se han introducido las notaciones

* En lo que sigue de este párrafo p significa $|p| = \sqrt{\epsilon^2 - m^2}$.

$$\nu = \frac{Z\alpha\varepsilon}{p}, \quad e^{-2i\xi} = \frac{\gamma - i\nu}{x - i\nu} \frac{m}{\varepsilon} \quad (36.13)$$

[la cantidad ξ es real, dado que $\gamma^2 + (Z\alpha\varepsilon/p)^2 = x^2 + (Z\alpha m/p)^2$].

Según la conocida fórmula

$$F(x, \beta, z) = e^z F(\beta - \alpha, \beta, -z)$$

[véase III (d,10)], tenemos

$$\begin{aligned} F(\gamma + 1 - i\nu, 2\gamma + 1, -2ipr) &= e^{-2ipr} F(\gamma + i\nu, 2\gamma + 1, 2ipr) = \\ &= e^{-2ipr} F^*(\gamma - i\nu, 2\gamma + 1, -2ipr). \end{aligned}$$

Por ello,

$$\begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix} = 2iA' \sqrt{\varepsilon \pm m} (2pr)^{\gamma-1} \frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}} \left\{ e^{i(pr + \xi)} F(\gamma - i\nu, 2\gamma + 1, -2ipr) \right\}. \quad (36.14)$$

La expresión asintótica de estas funciones se obtiene mediante la fórmula III (d, 14), en la cual para el presente caso importa solamente el primer término (el segundo disminuye según una potencia mayor de $1/r$) *:

$$\begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix} = 2iA' \sqrt{\varepsilon \pm m} \Gamma(2\gamma + 1) (2pr)^{\gamma-1} \frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}} \left\{ \frac{(2ipr)^{-\gamma+i\nu} e^{i(pr+\xi)}}{\Gamma(\gamma+1+i\nu)} \right\} = \\ = \frac{iA' \sqrt{\varepsilon + m}}{pr} e^{-\frac{\pi\nu}{2}} \frac{\Gamma(2\gamma + 1)}{|\Gamma(\gamma + 1 + i\nu)|} \frac{\sin(pr + \delta_x + \nu \ln 2pr - \frac{\pi l}{2})}{\cos(pr + \delta_x + \nu \ln 2pr - \frac{\pi l}{2})}, \quad (36.15)$$

donde

$$\delta_x = \xi - \arg \Gamma(\gamma + 1 + i\nu) - \frac{\pi l}{2} + \frac{\pi l}{2}, \quad (36.16)$$

o bien

$$e^{2i\delta_x} = \frac{x - i\nu m/\varepsilon}{\gamma - i\nu} \frac{\Gamma(\gamma + 1 - i\nu)}{\Gamma(\gamma + 1 + i\nu)} e^{i\pi(l-\gamma)}. \quad (36.17)$$

Para futuras referencias, haremos notar que la expresión de las fases en el caso relativista límite ($\varepsilon \gg m$, $\nu \approx Z\alpha$) es:

$$e^{2i\delta_x} = \frac{x}{\gamma - iZ\alpha} \frac{\Gamma(\gamma + 1 - iZ\alpha)}{\Gamma(\gamma + 1 + iZ\alpha)} e^{i\pi(l-\gamma)}. \quad (36.18)$$

La comparación de (36.15) con la fórmula general (36.7) para la onda esférica normalizada [teniendo en cuenta la definición de las funciones f y g según (35.1)] permite determinar la constante de normalización A' :

$$\frac{iA'}{p} e^{-\frac{\pi\nu}{2}} \frac{\Gamma(2\gamma + 1)}{|\Gamma(\gamma + 1 + i\nu)|} = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}.$$

* Como en el caso de la ecuación de Schrödinger, la lentitud con que decrece el potencial de Coulomb conduce a una variación de la fase de la onda, que resulta ser una función lentamente variable de r .

De esta manera obtenemos la siguiente expresión final de las funciones de onda del espectro continuo^{*}:

$$\left. \frac{f}{g} \right\} = 2 \sqrt{\frac{m \pm \epsilon}{\pi \epsilon}} e^{\frac{\pi v}{2}} \frac{|\Gamma(\gamma + 1 + iv)|}{\Gamma(2\gamma + 1)} \frac{(2pr)^\gamma}{r} \times \\ \times \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{Re} \left\{ e^{i(pv + \xi)} F(\gamma - iv, 2\gamma + 1, -2ipr) \right\} \right\}. \quad (36.19)$$

En la prolongación analítica al dominio $\epsilon < m$ la expresión (36.17) toma la forma

$$e^{2i\delta_x} = \frac{x - Zam/\lambda}{\gamma - Zae/\lambda} \frac{\Gamma(\gamma + 1 - Zae/\lambda)}{\Gamma(\gamma + 1 + Zae/\lambda)} e^{i\pi(l-\gamma)}. \quad (36.20)$$

Esta función tiene polos en los puntos en los que $\gamma + 1 - Zae/\lambda = 1 - n_r$, $n_r = 1, 2, \dots$ (polos de la función Γ en el numerador), y también en el punto $\gamma - Zae = -n_r = 0$ (si, además, $x < 0$); como debía ser, estos puntos coinciden con los niveles discretos de energía.

Cerca de uno cualquiera de los polos con $n_r \neq 0$ se tiene

$$e^{2i\delta_x} \approx \frac{\left(\frac{Zam}{\lambda} - x \right) e^{i\pi(l-\gamma)}}{n_r \Gamma(2\gamma + 1 + n_r)} \Gamma\left(\gamma + 1 - \frac{Zae}{\lambda}\right).$$

La forma de la función Γ en el entorno de uno de sus polos se halla mediante la conocida fórmula $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\operatorname{sen} \pi z$:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\gamma + 1 - \frac{Zae}{\lambda}\right) &\approx \frac{\pi}{\Gamma(n_r) \operatorname{sen} \pi(\gamma + 1 - Zae/\lambda)}, \\ \operatorname{sen} \pi\left(\gamma + 1 - \frac{Zae}{\lambda}\right) &\approx \pi \cos \pi n_r \cdot \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{Zae}{\lambda} \right) \cdot (\epsilon - \epsilon_0) = \\ &= (-1)^{n_r} \frac{\pi Zam^2}{\lambda^3} (\epsilon - \epsilon_0) \end{aligned}$$

(ϵ_0 es el nivel de energía). De esta manera^{**}.

$$e^{2i\delta_x} \approx (-1)^{l+n_r} \frac{e^{-i\pi\gamma} \left(\frac{Zam}{\lambda} - x \right)}{n_r! \Gamma(2\gamma + 1 + n_r)} \frac{\lambda^3}{Zam^2} \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0} \quad (36.21)$$

Al final del párrafo que precede se obtuvo una fórmula que liga el residuo de la función $e^{2i\delta_x}$ en un polo con el coeficiente de la expresión asintótica de la función de onda del correspondiente estado de enlace. En el caso de un campo de Coulomb, sin embargo, esta fórmula (35.10) debe cambiarse un poco de forma debido a que, en vez del corrimiento de fase constante δ_x [como ocurría en (35.7)], en (36.15) aparece la suma $\delta_x + v \ln(2pr)$. En el primer miembro de (35.10) hay que escribir, por ello, no $e^{2i\delta_x}$, sino

* Las funciones de onda para el caso de un campo repulsivo se obtienen cambiando el signo de $Z\alpha$, es decir, cambiando el signo de v .

** Es fácil cerciorarse de que esta fórmula se conserva válida también en el caso en que $n_r = 0$.

$$\exp(2i\delta_x + 2iv \ln 2pr) \rightarrow e^{2i\delta_x} (2i\lambda r)^{n_r + v}.$$

Utilizando (36.21) y determinando a partir de (35.10) el coeficiente A_0 (que será ahora una función potencial de r), se encuentra la forma asintótica de la función de onda normalizada del espectro discreto:

$$f = \left[\frac{(Zam/\lambda - v)(m + \epsilon) \lambda^2}{2n_r! Zam^2 \Gamma(2v + 1 + n_r)} \right]^{1/2} (2\lambda r)^{n_r + v} \frac{e^{-\lambda r}}{r}. \quad (36.22)$$

Esta fórmula se utilizó ya para determinar el coeficiente en (36.11).

§ 37. Dispersión en un campo con simetría esférica

Escribamos la expresión asintótica de la función de onda que representa la dispersión de partículas en el campo de un centro de fuerzas inmóvil en la forma*

$$\psi = u_{\epsilon p} e^{ipz} + u'_{\epsilon p'} \frac{e^{ipr}}{r}. \quad (37.1)$$

Aquí $u_{\epsilon p}$ es la amplitud bispinorial de la onda plana incidente. En cambio, el bispinor $u'_{\epsilon p'}$ es función de la dirección de dispersión n' y para cada valor dado de n' su forma coincide (pero, naturalmente, no en la normalización!) con la amplitud bispinorial de una onda plana que se propaga en la dirección n' .

Vimos en el § 24 que la amplitud bispinorial de la función de onda queda por completo determinada dando una magnitud de dos componentes — el espinor tridimensional w , que representa la función de onda no-relativista en el sistema de reposo de la partícula. En función de este espinor se expresa también la densidad de corriente: ésta es proporcional a $w^* w$ (con un coeficiente de proporcionalidad que depende solamente de la energía ϵ y que, por ello, es el mismo para las partículas incidentes y dispersadas). En consecuencia, la sección eficaz de dispersión vale $d\sigma = (w^* w' / w^* w) d\Omega$ o bien, si (como en el § 24) se normaliza la onda incidente mediante la condición $w^* w = 1$,

$$d\sigma = w'^* w' d\Omega.$$

Introduzcamos el operador de dispersión f mediante la definición

$$w' = fw. \quad (37.2)$$

Debido al hecho de que las magnitudes w , w' poseen dos componentes, el operador así definido es por completo análogo al operador amplitud de dispersión que aparece en la teoría no-relativista de la dispersión cuando se tiene en cuenta el spin (III, § 138). Por lo tanto, se pueden aplicar directamente aquí las fórmulas que se obtuvieron y que expresan el operador como función de los corrimientos de fase de las funciones de onda en el campo dispersor. Únicamente es necesario efectuar

* En los §§ 37, 38 p designa a $|\mathbf{p}|$ y como subíndices de la amplitudes escribimos ϵ y \mathbf{p} por separado.

algunos cambios de notación para estas fases expresando los corrimientos δ_l^+ y δ_l^- introducidos en III, § 138, mediante los corrimientos de fase δ_x que figuran en la fórmula relativista (35.7). Recordaremos que las fases δ_l^+ y δ_l^- se refieren a estados cuyo momento cinético orbital es l y con momento total $j = l + 1/2$ y $j = l - 1/2$. De acuerdo con la definición (35.3), se tiene $x = -l - 1$ para $j = l + 1/2$ y $x = l$ para $j = l - 1/2$. Por consiguiente, el cambio de notación que debemos efectuar es

$$\delta_l^+ \rightarrow \delta_{-(l+1)}, \quad \delta_l^- \rightarrow \delta_l$$

(y recordar que el índice en δ significa ahora el valor del número x). De esta manera obtendremos las siguientes fórmulas:

$$f = A + B\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (37.3)$$

$$A = \frac{1}{2ip} \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)(e^{2il}-l-1) + l(e^{2il}-1)] P_l(\cos \theta), \quad (37.4)$$

$$B = \frac{1}{2p} \sum_{l=1}^{\infty} (e^{2il}-l-1 - e^{2il}l) P_l^1(\cos \theta), \quad (37.5)$$

donde $\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{n}'$.

Dado que w es la función de onda espinorial en el sistema de reposo, también las propiedades de polarización de la dispersión se describen en función de f mediante las mismas fórmulas que en III, § 138.

En el caso de un campo coulombiano resulta posible expresar las dos funciones $A(\theta)$ y $B(\theta)$ en términos de una sola función. Indicaremos sucintamente la marcha de los correspondientes cálculos *.

Para el campo de Coulomb las fases δ_x vienen dadas por las fórmulas (36.17) que escribiremos en la forma

$$e^{2ilx} = - \left(x - i \frac{Ze^2 m}{p} \right) \frac{x}{|x|} C_x, \quad (37.6)$$

$$C_x = - \frac{\Gamma(\gamma - iv)}{\Gamma(\gamma + 1 + iv)} e^{i\pi(|x| - v)}$$

(haremos notar que $e^{ivl} = e^{ivx}$ para $x > 0$ y $e^{ivl} = -e^{ivx}$ para $x < 0$). Con ayuda de las magnitudes introducidas de esta manera, las series (37.4-5) se pueden representar como sigue:

$$A(\theta) = \frac{1}{p} G(\theta) - i \frac{Ze^2 m}{p^2} F(\theta),$$

$$B(\theta) = - \frac{i}{p} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cdot G(\theta) + \frac{Ze^2 m}{p^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot F(\theta), \quad (37.7)$$

donde

* R. L. GLUCKSTERN, S. R. LIN, *J. Math. Phys.*, 5, 1594 (1964).

$$G(\theta) = \frac{i}{2} \sum_{l=1}^{\infty} l^3 C_l (P_l + P_{l-1}), \quad F(\theta) = \frac{i}{2} \sum_{l=1}^{\infty} l C_l (P_l - P_{l-1}). \quad (37.8)$$

Al transformar la serie correspondiente a $B(\theta)$ se han utilizado las siguientes relaciones de recurrencia entre polinomios de Legendre:

$$P_l + P_{l-1} = -\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot l (P_l - P_{l-1}), \quad (37.9)$$

$$P_l - P_{l-1} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cdot l (P_l + P_{l-1}). \quad (37.10)$$

Por otra parte, en virtud de la identidad

$$(1 + \cos \theta) \frac{d}{d \cos \theta} [P_l (\cos \theta) - P_{l-1} (\cos \theta)] = l [P_l (\cos \theta) + P_{l-1} (\cos \theta)] \quad (37.11)$$

las funciones $F(\theta)$ y $G(\theta)$ están ligadas entre sí por la relación

$$G = (1 - \cos \theta) \frac{dF}{d \cos \theta} = -\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \frac{dF}{d\theta}. \quad (37.12)$$

En consecuencia, tanto $A(\theta)$ como $B(\theta)$ se expresan mediante una misma función $F(\theta)$ *.

§ 38. Dispersión en el caso ultrarrelativista

Estudiemos en particular la dispersión en el caso ultrarrelativista ($\epsilon \gg m$). En primera aproximación, se prescindirá por completo de la masa m en la ecuación de onda. Al hacerlo conviene utilizar para ψ la representación espinorial $\psi = (\xi, \eta)$, ya que las ecuaciones correspondientes a ξ y η se separan cuando $m = 0$:

$$\begin{aligned} -i\sigma \cdot \nabla \xi &= (\epsilon - U)\xi, \\ -i\sigma \cdot \nabla \eta &= -(\epsilon - U)\eta \end{aligned} \quad (38.1)$$

(adoptando la forma «neutrínica», § 30).

La función de onda $\psi = (\xi, \eta)$ corresponde al estado de helicidad del electrón polarizado en la dirección y sentido de \mathbf{p} , y la función $\psi = (\eta)$, a la polarización opuesta al sentido de \mathbf{p} . En virtud de la separabilidad de las ecuaciones para ξ y η , es evidente que esta propiedad no varía en la dispersión. En otras palabras, la dispersión de electrones ultrarrelativistas conserva la helicidad. Por consideraciones de simetría (polarización longitudinal) es evidente que en la dispersión de partículas que poseen helicidad no existe asimetría acimutal. Cabe también afirmar que la

* La función $F(\theta)$ no se expresa en forma finita como combinación de funciones elementales. Sin embargo, resulta posible escribirla como integral doble — véase el artículo antes citado.

sección eficaz de dispersión de electrones de helicidad definida no depende del signo de la helicidad; esto se sigue del hecho de que un campo central es invariante respecto de la inversión y el signo de la helicidad se cambia en el opuesto al aplicar dicha operación.

En el caso ultrarrelativista las fórmulas (37.3-5) se pueden simplificar considerablemente (*D. R. Yennie, D. G. Ravenhall, R. N. Wilson, 1954*).

Supongamos, por ejemplo, que el electrón incidente está polarizado en el sentido y dirección del movimiento, \mathbf{n} . Para una onda plana con valor determinado de $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, el espinor $\xi [= (\varphi + \chi)/\sqrt{2}]$ es proporcional al mismo espinor tridimensional w que figuraba en la representación típica de la onda. Por ello, el vínculo entre las amplitudes espinoriales de las ondas incidente y dispersada en la nueva representación se establece como antes mediante el mismo operador f .

Como resultado de la dispersión, la polarización gira junto con el impulso, tomando la dirección \mathbf{n}' . La acción del operador f sobre la función de onda espinorial del electrón se reduce, por consiguiente, a la rotación del spin de ángulo θ (ángulo entre \mathbf{n} y \mathbf{n}') en torno del eje $\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{n}'$. A su vez, esta rotación es equivalente a una rotación del sistema de coordenadas en torno del mismo eje y en sentido opuesto, es decir, a una rotación de ángulo $-\theta$. De aquí se sigue que el operador f debe coincidir (salvo un coeficiente) con el operador que transforma la función de onda de acuerdo con el cambio del sistema de coordenadas, es decir, con el operador (18.17), en el que se ha substituido $\theta \rightarrow -\theta$. Comparando (37.3) con (18.17), se encuentra que debe tenerse

$$\frac{B}{A} = -i \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (38.2)$$

Así, pues, en el límite ultrarrelativista

$$f = A(\theta) \left[1 - i \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right]. \quad (38.3)$$

La expresión (37.4) para $A(\theta)$ puede también simplificarse si se utiliza la relación que resulta, en este mismo límite, entre las fases δ_x y δ_{-x} . Para deducirla observemos que las ecuaciones (35.4) para las funciones f y g pasan a ser invariantes, una vez suprimidos los términos en m , respecto de la sustitución

$$x \rightarrow -x, \quad f \rightarrow g, \quad g \rightarrow -f,$$

en la que no intervienen los parámetros ni de la propia partícula ni del campo. Por consiguiente, ha de ser $f_x/g_x = -g_{-x}/f_{-x}$ y una vez substituidas las expresiones asintóticas se encuentra

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(pr - \frac{l\pi}{2} + \delta_x \right) &= -\operatorname{ctg} \left(pr - \frac{l'\pi}{2} + \delta_{-x} \right), \\ \delta_x &= \delta_{-x} - (l' - l) \frac{\pi}{2} + \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, \end{aligned}$$

de donde

$$e^{2i\delta_x} = e^{2i\delta_{-x}}. \quad (38.4)$$

Utilizando esta relación [y cambiando en el primer término de la suma en (37.4) el índice de sumación l por $l - 1$], obtendremos *:

$$A(\theta) = \frac{1}{2ip} \sum_{l=1}^{\infty} l(e^{2i\delta_l} - 1)[P_l(\cos \theta) + P_{l-1}(\cos \theta)]. \quad (38.5)$$

De (38.2) se sigue que $\text{Re}(AB^*) = 0$. Esto significa que, en la aproximación considerada, la sección eficaz no depende de la polarización inicial de las partículas y que un haz no polarizado sigue siendo no polarizado también después de la dispersión [véase las fórmulas III (138.7-9)]. Observemos asimismo que cuando $\theta \rightarrow \pi$ la expresión (38.5) de $A(\theta)$ tiende a cero como $(\pi - \theta)^2$ [recordaremos que $P_l(-1) = (-1)^l$]. Junto con ella tiende también a cero la sección eficaz

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = |A|^2 + |B|^2 = \frac{|A(\theta)|^2}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (38.6)$$

Las propiedades que acabamos de citar desaparecen, naturalmente, en las aproximaciones siguientes respecto de la pequeña cantidad m/ϵ . En particular, demuestra el análisis que cuando $\theta \rightarrow \pi$ la sección eficaz tiende a un límite que es proporcional a $(m/\epsilon)^2$.

Para un campo de Coulomb en el caso ultrarrelativista, las fases δ_x no dependen de la energía, como puede verse en (36.18)**. Por ello, en un campo puramente coulombiano la sección eficaz de dispersión para $\epsilon \gg m$ tiene la forma

$$d\sigma = \frac{\tau(\theta)}{\epsilon^2} d\omega, \quad (38.7)$$

donde τ es función solamente del ángulo.

§ 39. Sistema de funciones de onda del espectro continuo para la dispersión en un campo coulombiano

Más adelante (§ 93) se estudiarán los diferentes procesos inelásticos que ocurren en la dispersión de electrones ultrarrelativistas en el campo de un núcleo pesado ($Z\alpha \sim 1$). Para calcular los correspondientes elementos de matriz necesitaremos funciones de onda cuya forma asintótica (para $r \rightarrow \infty$) resulta de la superposición de una onda plana y una onda esférica.

* Una transformación análoga de la fórmula (37.5) permite de nuevo obtener la relación (38.2). Al hacerlo hay que utilizar la relación de recurrencia (37.10) entre polinomios de Legendre.

** Esto se ve también directamente a partir de las ecuaciones (38.1), ya que para un campo de Coulomb la energía ϵ se puede eliminar de las ecuaciones por completo mediante la sustitución $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'/\epsilon$.

Veremos que, en el caso ultrarrelativista (energía del electrón $\varepsilon \gg m$), el papel principal en la dispersión lo representan las transferencias de impulso (del electrón al núcleo) $q = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}| \sim m$. A estos valores de q corresponden «parámetros de impacto» $\rho \sim 1/q \sim 1/m$ y el electrón se desvía de un ángulo *

$$\theta \sim \frac{q}{p} \sim \frac{m}{\varepsilon}. \quad (39.1)$$

En términos de las coordenadas r (distancia al centro) y $z = r \cos \theta$, esto corresponde al dominio

$$r \equiv r \sin \theta \sim \frac{1}{m}, \quad p(r-z) = pr(1 - \cos \theta) \sim 1. \quad (39.2)$$

Además, $r \sim \varepsilon/m^2$, es decir, nos encontramos en el caso en que las distancias que intervienen son grandes.

Escribamos la ecuación de Dirac en la forma

$$(\varepsilon - U - m\beta + i\alpha \cdot \nabla) \psi = 0, \quad U = -\frac{Z\alpha}{r}. \quad (39.3)$$

Transformémosla en una ecuación de segundo orden, para lo cual aplicaremos a (39.3) el operador $(\varepsilon - U + m\beta - i\alpha \cdot \nabla)$:

$$(\Delta + p^2 - 2\varepsilon U) \psi = (-i\alpha \cdot \nabla U - U^2) \psi. \quad (39.4)$$

Dado que en la región considerada es $r \gg Z\alpha/\varepsilon$, se tendrá $U \ll \varepsilon$. En primera aproximación se puede prescindir del segundo miembro en (39.4). Queda así la ecuación

$$\left(\Delta + p^2 + \frac{2\varepsilon Z\alpha}{r} \right) \psi = 0 \quad (39.5)$$

que coincide formalmente con la ecuación no-relativista de Schrödinger correspondiente a un campo coulombiano

$$\left(\frac{1}{2m} \Delta + \frac{p^2}{2m} + \frac{Z\alpha}{r} \right) \psi = 0, \quad (39.5a)$$

de la cual difiere únicamente en un cambio evidente en la designación de los parámetros (la «energía potencial» contiene un factor ε/m de más). Por ello, podemos escribir inmediatamente la solución de la misma que posee la forma asintótica impuesta (véase III, § 134).

Así, la función de onda que contiene asintóticamente una onda plana ($\sim e^{ipr}$) y una onda esférica divergente es:

$$\psi_{ip}^{(+)} = C \frac{u_{ip}}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{ipr} F\left(\frac{iZ\alpha\varepsilon}{p}, 1, i(pr - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\right), \quad (39.6)$$

* En este párrafo p representa $|\mathbf{p}|$.

$$C = e^{\pi Z\alpha\varepsilon/2p} \Gamma \left(1 - i \frac{Z\alpha\varepsilon}{p} \right),$$

donde F es la función hipergeométrica degenerada y u_{ep} la amplitud bispinorial constante de la onda plana normalizada por la condición que hemos adoptado (23.4)

$$\bar{u}_{ep} u_{ep} = 2m. \quad (39.7)$$

La función de onda (39.6) está normalizada de tal manera que la onda plana contenida en su expresión asintótica tiene la forma ordinaria

$$\frac{u_{ep}}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{ip \cdot r},$$

correspondiente a «una partícula por unidad de volumen». Dado que en el caso ultrarrelativista se tiene $p \approx \varepsilon$, en (39.6) se puede aplicar la sustitución $Z\alpha\varepsilon/p \approx Z\alpha$:

$$\begin{aligned} \psi_{ep}^{(+)} &= C \frac{u_{ep}}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{ipr} F(iZ\alpha, 1, i(pr - p \cdot r)), \\ C &= e^{Z\alpha\pi/2} \Gamma(1 - iZ\alpha). \end{aligned} \quad (39.8)$$

Hay que prestar atención al hecho de que a pesar de que consideramos distancias tan grandes que $pr \gg 1$, es imposible substituir en (39.8) la función hipergeométrica por su expresión asintótica: el argumento de la función F es no pr , sino la cantidad $pr(1 - \cos \theta)$ que no suponemos sea grande *.

En las aplicaciones resulta también necesaria la siguiente aproximación para ψ , cuya estructura espinorial es diferente de la de (39.8) (que se reduce al factor u_{ep}). Para calcularla, escribamos ψ en la forma

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{ipr} (u_{ep} F + \varphi).$$

En el segundo miembro de la ecuación (39.4) conservaremos ahora el término que contiene la primera potencia de U , y para la función φ obtenemos la ecuación

$$(\Delta + 2ip \cdot \nabla - 2\varepsilon U) \varphi = -iu_{ep} \alpha \cdot \nabla U. \quad (39.9)$$

Su solución se puede hallar observando que la función F satisface la ecuación

$$(\Delta + 2ip \cdot \nabla - 2\varepsilon U) F = 0$$

[lo que cabe comprobar substituyendo (39.6) en (39.5)]. Aplicando a esta ecuación el operador ∇ , se obtendrá

$$(\Delta + 2ip \cdot \nabla - 2\varepsilon U) \nabla F = 2\varepsilon F \nabla U.$$

Comparando con la ecuación (39.3), se encuentra

* En III, § 133, nos interesaban los valores de r arbitrariamente grandes, por lo cual dicha sustitución fue entonces posible para ángulos cualesquiera θ .

$$\varphi = -\frac{i}{2\varepsilon}(\mathbf{a} \cdot \nabla) u_{\varepsilon p} F.$$

Escribamos la expresión final para $\psi^{(+)}$, y para la función $\psi^{(-)}$ que contiene en su expresión asintótica una onda esférica convergente:

$$\begin{aligned}\psi_{\varepsilon p}^{(+)} &= \frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{ip \cdot r} \left(1 - \frac{i\mathbf{a}}{2\varepsilon} \cdot \nabla\right) F(iZ\alpha, 1, i(pr - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})) u_{\varepsilon p}, \\ \psi_{\varepsilon p}^{(-)} &= \frac{C^*}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{ip \cdot r} \left(1 - \frac{i\mathbf{a}}{2\varepsilon} \cdot \nabla\right) F(-iZ\alpha, 1, -i(pr + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})) u_{\varepsilon p}, \\ C &= e^{\pi Z\alpha/2} \Gamma(1 - iZ\alpha)\end{aligned}\quad (39.10)$$

(W. H. Furry, 1934). Escribamos también las funciones análogas ($\psi_{-\varepsilon-p}$) con « frecuencia negativa » que son necesarias al estudiar los procesos en los que participan positones. Es posible obtenerlas a partir de las funciones $\psi_{\varepsilon p}$ mediante la sustitución $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$, en la que $p = |\mathbf{p}|$ no cambia [en virtud de esta última circunstancia el parámetro $iZ\alpha$ de la función hipergeométrica cambia de signo, como puede verse considerando la expresión de partida (39.6) en la que este parámetro figura en la forma $iZ\alpha\varepsilon/p$]. De esta manera se obtiene

$$\begin{aligned}\psi_{-\varepsilon-p}^{(+)} &= \frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-ip \cdot r} \left(1 + \frac{i\mathbf{a}}{2\varepsilon} \cdot \nabla\right) F(-iZ\alpha, 1, i(pr + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})) u_{-\varepsilon-p}, \\ \psi_{-\varepsilon-p}^{(-)} &= \frac{C^*}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-ip \cdot r} \left(1 + \frac{i\mathbf{a}}{2\varepsilon} \cdot \nabla\right) F(iZ\alpha, 1, -i(pr - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})) u_{-\varepsilon-p}, \\ C &= e^{-\pi Z\alpha/2} \Gamma(1 + iZ\alpha).\end{aligned}\quad (39.11)$$

Acerca de los cálculos que acabamos de efectuar hay que hacer todavía la siguiente observación. La condición asintótica que hemos impuesto no basta de suyo en modo alguno para fijar de manera única la solución de la ecuación de onda (esto es claro aunque sólo sea por el hecho de que siempre es posible añadir a ψ , sin violar dicha condición, una onda coulombiana esférica divergente arbitraria). Cuando escribimos la solución de la ecuación (39.5) en la forma (39.6) suponemos tácitamente que se elige la solución que es finita para $r = 0$. Esta condición era necesaria en III, §§ 133, 134, donde se consideraban soluciones de la ecuación de Schrödinger exacta válidas en todo el espacio *. En el presente caso, en cambio, la ecuación (39.5) se refiere solamente a distancias grandes y, por lo tanto, el haber elegido precisamente esta solución requiere una fundamentación adicional.

Ésta la proporciona el hecho de que a « grandes parámetros de impacto » $\rho = r \operatorname{sen} \theta$ corresponden grandes momentos orbitales l y pequeños ángulos de dispersión θ : cuando $\rho \sim 1/m$, se tiene

$$l \sim \rho p \sim \rho \varepsilon \sim \frac{\varepsilon}{m} \gg 1,$$

* En el comportamiento de la solución expuesto en III, § 133, esta condición quedaba garantizada por la elección de la integral particular de la forma (133.1), en vez de la suma general de las integrales con diferentes valores β_1 , β_2 .

y el ángulo θ se puede estimar de manera cuasiclásica:

$$\theta \sim \frac{1}{p} \int \frac{dU}{dr} dt \sim \frac{U(r) p}{p} \sim \frac{m}{\epsilon} \ll 1.$$

Esto significa que en el desarrollo de ψ en ondas esféricas figurarán (en el dominio considerado de r y θ) en esencia ondas con los grandes valores de l indicados. Pero una onda esférica con l grande disminuye ciertamente hasta alcanzar pequeños valores cuando se acerca al origen de coordenadas a distancias $r \ll l/\epsilon$ que son « clásicamente inalcanzables » (debido a la barrera centrífuga). Por lo tanto, si se « empalma » la solución de la ecuación (39.5) con la solución de la ecuación exacta (39.4) a pequeñas distancias con $r \sim r_1$, donde $l/\epsilon \gg r_1 \gg Z\alpha/\epsilon$, la condición de contorno para la solución de la ecuación (39.5) consistirá en imponerle el que sea pequeña, con lo cual queda justificada la elección que hicimos.

PROBLEMA

Para un campo atractivo de Coulomb con $Z\alpha \ll 1$ hallar la corrección (de orden relativo $\sim Z\alpha$) que hay que aplicar a una función de onda no-relativista del espectro discreto.

Solución. La velocidad del electrón en un estado de enlace es $v \sim Z\alpha$, de modo que, para $Z\alpha \ll 1$, en la aproximación de orden cero la función de onda es no-relativista, es decir,

$$\psi = u\psi_{\text{nor}},$$

donde ψ_{nor} es la función de Schrödinger, u un bispinor de la forma $u = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$ y w es un espinor que describe el estado de polarización del electrón. En la aproximación siguiente escribimos: $\psi = u\psi_{\text{nor}} + \psi^{(1)}$ y substituyendo en (39.4), encontraremos para $\psi^{(1)}$ la ecuación

$$\left(\frac{1}{2m} \Delta - |\epsilon_n| + \frac{Z\alpha}{r} \right) \psi^{(1)} = i \frac{Z\alpha}{2m} \left(\nabla \frac{1}{r} \right) (\alpha u) \psi_{\text{nor}},$$

donde ϵ_n es el nivel discreto no-relativista de energía. Se ha prescindido aquí de términos del orden de $\sim (Z\alpha)^2$ (hay que tener en cuenta que en el caso no-relativista las distancias fundamentales son del orden del radio de la órbita de Bohr: $r \sim 1/mZ\alpha$). La solución de esta ecuación es

$$\psi^{(1)} = -\frac{i}{2m} \alpha \cdot u \nabla \psi_{\text{nor}}, \text{ de modo que}$$

$$\psi = \left(1 - \frac{i}{2m} \alpha \cdot \nabla \right) u \psi_{\text{nor}}.$$

§ 40. Un electrón en el campo de una onda electromagnética plana

La ecuación de Dirac se puede resolver exactamente en el caso de un electrón que se mueve en el campo de una onda plana electromagnética (*D. M. Volkov*, 1937).

El campo de una onda plana con 4-vector de onda k ($k^2 = 0$) depende de las 4-coordenadas tan sólo a través de la combinación $\varphi = kx$, de modo que el 4-potencial es

$$A^\mu = A^\mu(\varphi), \quad (40.1)$$

y satisface además la condición de contraste de Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = k_\mu A^\mu$$

(el apóstrofo simboliza la derivación respecto de φ). Dado que un término constante en A carece de importancia, en esta condición podemos prescindir del apóstrofo y escribirla en la forma

$$kA = 0. \quad (40.2)$$

Partamos de la ecuación de segundo orden (32.6) en la cual el tensor del campo es

$$F_{\mu\nu} = k_\mu A'_\nu - k_\nu A'_\mu. \quad (40.3)$$

Al desarrollar el cuadrado $(i\partial - eA)^2$ hay que tener en cuenta que, en virtud de (40.2), se tiene $\partial_\mu(A^\mu\psi) = A^\mu\partial_\mu\psi$. En definitiva obtenemos la ecuación

$$[-\partial^2 - 2ie(A\partial) + e^2 A^2 - m^2 - ie\hat{k}\hat{A}']\psi = 0 \quad (40.4)$$

$(\partial^2 = \partial_\mu\partial^\mu)$.

Busquemos una solución de esta ecuación de la forma

$$\psi = e^{-ipx}F(\varphi), \quad (40.5)$$

donde p es un 4-vector constante. Sumar a p un vector cualquiera del tipo const. k no cambia esta expresión de la función ψ [tan sólo es necesario efectuar la modificación correspondiente en el símbolo de la función $F(\varphi)$]. Por ello, sin limitar la generalidad, es posible imponer a p una condición suplementaria. Sea ésta

$$p^2 = m^2. \quad (40.6)$$

Entonces al desconectar el campo los números cuánticos p^μ pasan a ser las componentes del 4-impulso de una partícula libre. El sentido de las componentes del 4-vector p cuando existe campo resulta sobre todo evidente en un sistema de referencia especial elegido de manera que en él sea $A_0 = 0$. Supongamos que en este sistema de referencia el vector A tiene la dirección y sentido del eje x^1 , y el k , el del eje x^3 (es decir, el campo eléctrico de la onda está dirigido en el sentido de x^1 , el magnético, en el de x^2 , y la propia onda se propaga a lo largo del eje x^3). La expresión (40.5) será entonces función propia de los operadores

$$p_1 = i\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad p_2 = -i\frac{\partial}{\partial x^2}, \quad p_0 - p_3 = i\left(\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$$

con los valores propios $p_1, p_2, p_0 - p_3$ (estos mismos operadores, como es fácil ver, comutan con el hamiltoniano de la ecuación de Dirac). De esta manera, en el sistema de referencia dado, p^1, p^2 son las componentes del impulso generalizado a lo largo de los ejes x^1 y x^2 , y $p^0 - p^3$ es la diferencia entre la energía total y la componente del impulso generalizado correspondiente al eje x^3 .

Al substituir (40.5) y (40.4) tengamos en cuenta que

$$\partial^\mu F = k^\mu F', \quad \partial_\mu \partial^\mu F = k^2 F'' = 0,$$

con lo cual para $F(\varphi)$ se encuentra la ecuación

$$2i(kp)F' + [-2e(pA) + e^2A^2 - ie\hat{k}\hat{A}]F = 0.$$

Una integral de esta ecuación es

$$F = \exp \left\{ -i \int_0^{kx} \left[\frac{e}{(kp)}(pA) - \frac{e^2}{2(kp)} A^2 \right] d\varphi + \frac{e\hat{k}\hat{A}}{2(kp)} \right\} \frac{u}{\sqrt{2p_0}},$$

donde $u/\sqrt{2p_0}$ es un bispinor constante arbitrario (acerca de la notación adoptada para él, véase más adelante).

Todas las potencias de $\hat{k}\hat{A}$ superiores a la primera son iguales a cero, dado que

$$\hat{k}\hat{A}\hat{k}\hat{A} = -\hat{k}\hat{k}\hat{A}\hat{A} + 2(kA)\hat{k}\hat{A} = -k^2A^2 = 0.$$

Por consiguiente, podemos substituir;

$$\exp \frac{e\hat{k}\hat{A}}{2(kp)} = 1 + \frac{e}{2(kp)} \hat{k}\hat{A},$$

de modo que ψ toma la forma

$$\psi_p = \left[1 + \frac{e}{2(pk)} \hat{k}\hat{A} \right] \frac{u}{\sqrt{2p_0}} e^{iS}, \quad (40.7)$$

donde *

$$S = -px - \int_0^{kx} \left[\frac{e}{(kp)}(pA) - \frac{e^2}{2(kp)} A^2 \right] d\varphi. \quad (40.8)$$

Para poner en claro el sentido de las condiciones impuestas al bispinor constante u , supondremos que la onda tiene un amortiguamiento tan pequeño cuanto se quiera. Entonces $A \rightarrow 0$ para $x \rightarrow \infty$ y ψ debe transformarse en una solución de la ecuación de Dirac libre. Para esto $u = u(p)$ debe satisfacer la ecuación

$$(\hat{p} - m)u = 0. \quad (40.9)$$

Mediante esta ecuación se suprime las soluciones «extrañas» de la ecuación de segundo orden. Dado que u no depende de las coordenadas, esta condición subsiste también para valores finitos de x , donde la existencia de un débil amortiguamiento no se manifiesta en la forma de ψ . De esta manera, $u(p)$ coincide con la amplitud bispinorial de una onda plana libre; la supondremos normalizada por la misma condición (23.4): $\bar{u}u = 2m$.

Los razonamientos expuestos permiten también explicar inmediatamente el sentido de la normalización de las funciones de onda (40.7). Para las funciones de onda del espectro continuo la integral de normalización se extiende a las regiones del espacio alejadas. Después de introducir un débil amortiguamiento, las funciones de onda en dichas regiones coincidirán con las funciones del movimiento libre.

* Obsérvese que S coincide con la acción clásica para una partícula que se mueve en el campo de la onda, cf. II, § 47, problema 2.

De aquí se sigue que la función (40.7) satisfará la misma condición de normalización

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi_p^* \psi_p d^3x = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \bar{\Psi}_p \gamma^0 \psi_p d^3x = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \quad (40.10)$$

que las ondas planas libres.

Determinemos la densidad de corriente que corresponde a las funciones (40.7). Observando que

$$\bar{\Psi}_p = \frac{\bar{u}}{\sqrt{2p_0}} \left[1 + \frac{e}{2(pk)} \hat{A} \hat{k} \right] e^{iS},$$

sin más que multiplicar obtendremos

$$j^\mu = \bar{\Psi}_p \gamma^\mu \psi_p = \frac{1}{p_0} \left\{ p^\mu - e A^\mu + k^\mu \left(\frac{e(pA)}{(kp)} - \frac{e^2 A^2}{2(kp)} \right) \right\}. \quad (40.11)$$

Si $A^\mu(\varphi)$ son funciones periódicas, su valor medio (respecto del tiempo) se anula, de modo que el valor medio de la densidad de corriente es

$$\bar{j}^\mu = \frac{1}{p_0} \left(p^\mu - \frac{e^2}{2(kp)} \bar{A}^2 k^\mu \right). \quad (40.12)$$

Hallaremos también la densidad de impulso cinético en el estado ψ_p . El operador impulso cinético es igual a la diferencia $p - eA = i\partial - eA$. Mediante un cálculo que no ofrece dificultad se encuentra

$$\begin{aligned} \psi_p^*(p^\mu - eA^\mu) \psi_p &= \bar{\Psi}_p \gamma^0 (p^\mu - eA^\mu) \psi_p = p^\mu - eA^\mu + k^\mu \left(\frac{e(pA)}{(kp)} - \frac{e^2 A^2}{2(kp)} \right) + \\ &\quad + k^\mu \frac{ie}{8(kp)p_0} F_{\lambda\nu} (u^* \sigma^{\lambda\nu} u). \end{aligned} \quad (40.13)$$

El valor medio respecto del tiempo de este 4-vector, que designaremos por q^μ , es

$$q^\mu = p^\mu - \frac{e^2 \bar{A}^2}{2(kp)} k^\mu. \quad (40.14)$$

Su cuadrado vale

$$q^2 = m_*^2, \quad m_* = m \sqrt{1 + \frac{e^2}{m^2} \bar{A}^2}, \quad (40.15)$$

m_* representa el papel de « masa efectiva » del electrón en el campo. Comparando (40.14) y (40.12) vemos que

$$\bar{j}^\mu = \frac{q^\mu}{p_0}. \quad (40.16)$$

Observemos también que la condición de normalización (40.10), expresada mediante el vector q , tiene la forma

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi_p^* \psi_p d^3x = \frac{q_0}{p_0} \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) \quad (40.17)$$

[la manera más fácil de pasar de (40.10) a (40.17) consiste en efectuar el cálculo en el sistema de referencia especial señalado más arriba].

§ 41. Movimiento del spin en un campo exterior

El paso a la aproximación cuasiclásica en la ecuación de Dirac se efectúa de la misma manera como en la teoría no-relativista. En la ecuación de segundo orden (32.7a) substituyamos ψ por una expresión de la forma *

$$\psi = ue^{\frac{i}{\hbar} S}$$

(donde S es un escalar y u un bispinor que varía lentamente). Se supone, además, que se cumple la condición ordinaria de carácter cuasiclásico: el impulso de la partícula debe cambiar poco a distancias del orden de la longitud de onda $\hbar/|\mathbf{p}|$.

En la aproximación de orden cero respecto de \hbar se obtiene la ecuación relativista clásica ordinaria de Hamilton-Jacobi para la acción S . En este caso, todos los términos que contienen el spin (y proporcionales a \hbar) desaparecen de las ecuaciones del movimiento. El spin aparecería solamente en la aproximación que sigue respecto de \hbar . En otras palabras, las influencias del momento magnético del electrón sobre su movimiento es siempre del mismo orden de magnitud que las correcciones cuánticas. Esto es completamente natural vista la naturaleza puramente cuántica del spin, cuyo valor es proporcional a \hbar .

En relación con una tal situación cobra sentido el planteo del problema de determinar el comportamiento del spin de un electrón que ejecuta un movimiento cuasiclásico prefijado en un campo exterior. La solución de este problema está contenida en la aproximación siguiente respecto de \hbar en la ecuación de Dirac. Sin embargo, aplicaremos otro procedimiento más intuitivo y no ligado de manera inmediata con dicha ecuación. Este procedimiento tiene, además, la ventaja de que permite considerar el movimiento de una partícula cualquiera, entre ellas las que poseen una razón giromagnética «anómala» y que no se pueden describir por la ecuación de Dirac.

Nuestro objeto consiste en establecer la «ecuación del movimiento» para el spin en el caso de un movimiento arbitrario (dado) de la partícula. Empecemos por el caso no-relativista.

El hamiltoniano no-relativista de una partícula en un campo exterior es

$$H = H' - \mu \sigma \cdot H, \quad (41.1)$$

donde en H' se incluyen todos los términos que no contienen el spin (véase III, § 110); μ es el momento magnético de la partícula. Esta forma del hamiltoniano no está vinculada a una determinada especie de partículas. Para los electrones es

* Al principio utilizamos unidades ordinarias.

$\mu = e\hbar/2mc$ (la carga del electrón $e = -|e|$) y en el caso de los nucleones μ contiene, además, la parte «anómala»*

$$\mu' = \mu - \frac{e\hbar}{2mc}.$$
 (41.2)

De acuerdo con las reglas generales de la mecánica cuántica, la ecuación entre operadores para el movimiento del spin se obtiene a partir de la fórmula

$$\dot{s} = \frac{i}{\hbar} (Hs - sH) = \frac{i}{2\hbar} (H\sigma - \sigma H).$$
 (41.3)

Substituyendo aquí (41.1), se encuentra

$$\dot{s}_i = -\frac{i\mu}{2\hbar} H_k (\sigma_k \sigma_i - \sigma_i \sigma_k) = \frac{\mu}{\hbar} e_{ikl} H_k \sigma_l,$$

o bien

$$\dot{s} = \frac{2\mu}{\hbar} s \times H.$$
 (41.4)

Promediemos esta igualdad entre operadores respecto del estado correspondiente a un paquete de ondas cuasiclásico que se mueve a lo largo de una trayectoria dada. Esta operación se reduce a substituir el operador spin por su valor medio \bar{s} y el vector H por una función $H(t)$ que representa la variación del campo magnético en el punto en que se encuentra la partícula (el paquete de ondas) en su movimiento a lo largo de la trayectoria dada. En la aproximación no-relativista (es decir, dentro de los límites de validez de la ecuación de Pauli) $s = \sigma/2$ es el operador spin de la partícula en su sistema de reposo, cuyo valor medio designamos en el § 29 por $\xi/2$. De esta manera, llegamos a la ecuación

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{2\mu}{\hbar} \xi \times H(t).$$
 (41.5)

En esta forma, la ecuación tiene, en esencia, un carácter puramente clásico. Significa que el vector momento magnético experimenta una precesión en torno de la dirección del campo con velocidad angular $-2\mu H/\hbar$, conservando constante su valor absoluto**.

En este mismo caso no-relativista, la velocidad v de la partícula varía de acuerdo con la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e}{mc} v \times H,$$

* Si se tiene en cuenta las llamadas *correcciones radiativas*, también el momento magnético del electrón contiene una «parte anómala» muy pequeña.

** Clásicamente, la ecuación (41.5) se obtiene inmediatamente a partir de la igualdad.

$$\frac{dM}{dt} = \mu \times H,$$

en la que M es el momento cinético del sistema, μ su momento magnético; $\mu \times H$ es el momento de las fuerzas que actúa sobre el sistema. Haciendo $M = (1/2)\hbar\xi$, $\mu = \frac{\mu}{2s}\xi = \mu\xi$, se obtiene (41.5).

es decir, el vector \boldsymbol{v} gira en torno de la dirección de \mathbf{H} con una velocidad angular $-e\mathbf{H}/mc$. Si $\mu' = 0$, se tiene $\mu = e\hbar/2mc$ y esta velocidad angular coincide con la velocidad $-2\mu\mathbf{H}/\hbar$ de rotación del vector ζ ; en otras palabras, el vector polarización forma un ángulo constante con la dirección del movimiento (veremos más adelante que este resultado conserva su validez también en el caso relativista).

Efectuemos ahora la generalización relativista de la ecuación (41.5). Para una descripción covariante de la polarización hay que utilizar entonces el 4-vector a introducido en el § 29, y la ecuación del movimiento del spin ha de determinar la derivada $da/d\tau$ respecto del tiempo propio τ^* .

La forma posible de esta ecuación cabe establecerla ya por consideraciones de invariancia relativista si se tiene en cuenta que su segundo miembro debe ser lineal y homogéneo respecto del tensor campo electromagnético $F^{\mu\nu}$ y del 4-vector a^μ , a la vez que, junto con éstos, puede contener tan sólo la 4-velocidad $u^\mu = p^\mu/m$. A estas condiciones satisface únicamente una ecuación de la forma

$$\frac{da^\mu}{d\tau} = \alpha F^{\mu\nu} a_\nu + \beta u^\mu F^{\nu\lambda} u_\nu a_\lambda, \quad (41.6)$$

donde α, β son coeficientes constantes. Es fácil ver que en virtud de la condición $\alpha_\mu u^\mu = 0$ y de la antisimetría del tensor $F^{\mu\nu}$ (de modo que $F^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = 0$) es imposible construir ninguna otra expresión de la forma impuesta.

Para $v \rightarrow 0$ esta ecuación ha de coincidir con (41.5). Haciendo $a^\mu = (0, \zeta)$, $u^\mu = (1, 0)$, $\tau = t$, se obtendrá

$$\frac{d\zeta}{dt} = \alpha [\zeta \times \mathbf{H}].$$

Comparando con (41.5), se encuentra: $\alpha = 2\mu$.

Para determinar β tengamos en cuenta que $a^i u_i = 0$. Derivando esta igualdad respecto de τ y utilizando la ecuación clásica del movimiento de una carga en un campo:

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = eF^{\mu\nu} u_\nu$$

(véase II, § 23), obtendremos

$$u_\mu \frac{da^\mu}{d\tau} = -a_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = -a_\mu \frac{e}{m} F^{\mu\nu} u_\nu = \frac{e}{m} F^{\mu\nu} u_\mu a_\nu.$$

Por ello, multiplicando ambos miembros de la ecuación (41.6) por u_μ , teniendo en cuenta la igualdad $u_\mu u^\mu = 1$, y suprimiendo el factor común $F^{\mu\nu} u_\mu a_\nu$, resultará

$$\beta = -2 \left(\mu - \frac{e}{2m} \right) = -2\mu'.$$

Obtenemos así en definitiva la ecuación relativista del movimiento del spin

* En lo que sigue hemos hecho de nuevo $c = 1, \hbar = 1$.

$$\frac{da^\mu}{d\tau} = 2\mu F^{\mu\nu} a_\nu - 2\mu' u^\mu F^{\nu\lambda} u_\nu a_\lambda \quad (41.7)$$

(V. Bargman, L. Michel, V. Telegdi, 1959)★.

Pasemos del 4-vector a a la cantidad ζ que caracteriza directamente la polarización de una partícula en su sistema «instantáneo» de reposo; la relación entre a y ζ viene dada por las fórmulas (29.7-9). Pero advertimos en seguida que de (41.7) se deduce automáticamente que $a_\mu da^\mu/d\tau = 0$, de modo que $a_\mu a^\mu = \text{const}$. Dado que $a_\mu a^\mu = -\zeta^2$, esto constituye un resultado natural: en el movimiento de la partícula, se conserva el módulo de su polarización ζ .

La ecuación que determina el cambio de la dirección de la polarización, se obtendrá pasando en (41.7) a la notación tridimensional. Poniendo de manifiesto las componentes espaciales de esta ecuación, se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = & \frac{2\mu m}{\epsilon} [a \times H] + \frac{2\mu m}{\epsilon} (a \cdot v) E - \frac{2\mu' \epsilon}{m} v (a \cdot E) + \\ & + \frac{2\mu' \epsilon}{m} v (v \cdot [a \times H]) + \frac{2\mu' \epsilon}{m} v (a \cdot v) (v \cdot E). \end{aligned}$$

Aquí hay que substituir (29.9), teniendo en cuenta, al derivar, las igualdades $p = \epsilon v$, $\epsilon^2 = p^2 + m^2$ y las ecuaciones del movimiento

$$\frac{dp}{dt} = eE + e[v \times H], \quad \frac{dv}{dt} = e(v \cdot E). \quad (41.8)$$

Un cálculo elemental, aunque bastante largo, conduce a la siguiente ecuación★★:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{2\mu m + 2\mu' (\epsilon - m)}{\epsilon} [\zeta \times H] + \frac{2\mu' \epsilon}{\epsilon + m} (v \cdot H) [v \times \zeta] + \frac{2\mu m + 2\mu' \epsilon}{\epsilon + m} [\zeta \times [E \times v]]. \quad (41.9)$$

Presenta un interés particular no tanto la variación de la dirección absoluta de la polarización en el espacio, cuanto su variación respecto de la dirección del movimiento. Representaremos ζ en la forma

$$\zeta = n\zeta_{||} + \zeta_{\perp} \quad (41.10)$$

(donde $n = v/v$) y escribamos la ecuación para la proyección $\zeta_{||}$ de la polarización sobre la dirección del movimiento. El cálculo mediante (41.8-9) conduce al siguiente resultado★★★:

* En otra forma, una ecuación semejante la obtuvo primero Ia. I. Frenkel (1926).

** Si, como se hace con frecuencia, se introduce para las partículas cargadas el coeficiente giromagnético (factor de Landé) g de acuerdo con $\mu = g \frac{e}{2m} \frac{1}{2} \left(-g \frac{e}{2mc} \frac{\hbar}{2} \right)$, esta ecuación se escribe en la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} = & \frac{e}{2m} \left(g - 2 + 2 \frac{m}{\epsilon} \right) [\zeta \times H] + \frac{e}{2m} (g - 2) \frac{\epsilon}{\epsilon + m} (v \cdot H) [v \times \zeta] + \\ & + \frac{e}{2m} \left(g - \frac{2\epsilon}{\epsilon + m} \right) [\zeta \times [E \times v]]. \end{aligned} \quad (41.9a)$$

*** Es posible obtener esta ecuación de manera algo más directa a partir de la componente temporal de la ecuación (41.7).

$$\frac{d\zeta_{||}}{dt} = 2\mu' (\zeta_{\perp} \cdot [H \times n]) + \frac{2}{v} \left(\frac{\mu m^2}{\epsilon^2} - \mu' \right) (\zeta_{\perp} \cdot E). \quad (41.11)$$

Algunos ejemplos de aplicación de las ecuaciones obtenidas se consideran en los problemas de este párrafo. Aquí haremos notar solamente que en el movimiento en un campo puramente magnético la polarización de una partícula que carezca de momento magnético anómalo forma un ángulo constante con la velocidad ($\zeta_{||} = \text{const.}$). Así, pues, este resultado, ya indicado antes para el caso no-relativista, posee, de hecho, un carácter general.

Precisemos las condiciones de aplicabilidad de las ecuaciones obtenidas. La condición que hemos recordado al principio, la de que el impulso de la partícula varíe con suficiente lentitud, se reduce a la condición de que los valores absolutos de los campos E y H sean pequeños; en particular, el radio de Larmor en el campo magnético ($\sim p/eH$) debe ser grande comparado con la longitud de onda de la partícula. Sin embargo, debe cumplirse además, rigurosamente hablando, la condición de que la variación de los campos en el espacio no sea demasiado rápida: el campo debe cambiar poco a distancias del orden de las dimensiones del paquete de ondas cuasiclásico. Por esta misma razón, el campo debe variar poco a distancias del orden de la longitud de onda de la partícula y también entre puntos separados por una distancia igual a la longitud de onda de Compton $1/m$.*

Por lo demás, en los problemas prácticos del movimiento en campos macroscópicos se cumple, sin duda alguna, la condición de que varíen lentamente, de forma que, de hecho, lo que de ellos se exige es tan sólo que su valor absoluto sea suficientemente pequeño.

En el § 33 se hallaron las primeras correcciones relativistas del hamiltoniano de un electrón que se mueve en un campo exterior. Para el electrón en un campo eléctrico, el hamiltoniano aproximado tiene la forma [véase (33.12)]

$$H = H' - \frac{e}{4m} \left(\sigma \cdot \left[E \times \frac{p}{m} \right] \right) \quad (p = -i\nabla), \quad (41.12)$$

donde en H' se incluyen los términos que no contienen el spin. En nuestro caso y en virtud de la lenta variación del campo, se puede prescindir en H' del término que contiene las derivadas de E (es decir, el término en $\text{div } E$); puede prescindirse también del pequeño término en p^4 , que nada tiene que ver con el efecto del campo que aquí nos interesa, ya que H' (cuando no existe campo magnético) se reduce al hamiltoniano no-relativista $H' = \frac{p^2}{2m} + e\Phi$.

* Esta última condición resulta de otra, a saber, la de que la dispersión de las velocidades en el paquete de ondas en su sistema de reposo sea pequeña comparado con c ; en caso contrario, sería imposible utilizar en este sistema las fórmulas no-relativistas.

Si el campo cambia con excesiva rapidez, pueden resultar esenciales en las ecuaciones ciertos términos complementarios que contienen las derivadas del campo respecto de las coordenadas.

La fórmula (41.12) se puede obtener también partiendo de la ecuación (41.9), sin acudir directamente a la ecuación de Dirac. Con esto se consigue también su generalización (en el caso clásico) para partículas con momento magnético anómalo.

Limitándonos a los términos de primer orden respecto de la velocidad v , la ecuación del movimiento del spin en un campo eléctrico se obtiene a partir de (41.9) en la forma

$$\frac{d\zeta}{dt} = (\mu + \mu') [\zeta \times [E \times v]] = \left(\frac{e}{2m} + 2\mu' \right) [\zeta \times [E \times v]].$$

Si se exige que esta ecuación se obtenga, desde el punto de vista mecánico-cuántico, como resultado de la comutación del operador spin con el hamiltoniano [según (41.3)], hay que hacer

$$H = H' - \left(\mu' + \frac{e}{4m} \right) \left(\sigma \cdot \left[E \times \frac{p}{m} \right] \right). \quad (41.13)$$

como es fácil comprobar. Ésta es precisamente la expresión buscada. Cuando $\mu' = 0$, volvemos a (41.12). Hay que hacer observar que el momento magnético «normal» $e/2m$ aparece con el factor adicional $1/2$ comparado con el momento anómalo μ'^* .

PROBLEMAS

1. Determinar cómo varía la dirección de polarización de una partícula que se mueve en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme ($v \perp H$).

Solución. En el segundo miembro de la ecuación (41.9) queda solamente el primer término, es decir, el vector ζ efectúa un movimiento de precesión en torno de la dirección de H (eje z) con velocidad angular

$$\frac{2\mu m + 2\mu'(\epsilon - m)}{\epsilon} H = - \left(\frac{e}{\epsilon} + 2\mu' \right) H.$$

Con esta misma velocidad angular gira en el plano xy la proyección de ζ sobre este plano (designémosla por ζ_1). En cuanto al vector v , éste gira en el mismo plano con velocidad angular $-eH/\epsilon$ (como puede verse a partir de la ecuación del movimiento $\dot{p} = \epsilon v = ev \times H$). De aquí se sigue que ζ_1 gira respecto de la dirección de v con velocidad angular $-2\mu' H$.

2. Lo mismo para el movimiento en la dirección del campo magnético.

Solución. Cuando las direcciones de v y H coinciden, la ecuación (41.9) se reduce a la forma

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{2\mu m}{\epsilon} [\zeta \times H],$$

es decir, ζ efectúa un movimiento de precesión en torno de la dirección común a v y H con velocidad angular $-2\mu m H / \epsilon$.

3. Lo mismo para el movimiento en un campo eléctrico homogéneo.

Solución. Supongamos que el campo E tiene la dirección del eje x y que el movimiento tiene lugar en el plano xy (siendo $p_y = \text{const}$). Por (41.9), es claro que el vector ζ experimenta una precesión en torno del eje z con velocidad angular instantánea

* Éste es precisamente el «factor de Thomas» que mencionamos ya en la nota de la página 103. El razonamiento desarrollado aquí demuestra claramente cuál es su origen.

$$-\left(\frac{e}{\epsilon + m} + 2\mu'\right) E \frac{p_y}{\epsilon}.$$

Descompongamos de nuevo ζ en las dos componentes ζ_z y ζ_1 (en el plano xy). Entonces

$$\zeta_{||} = \zeta_1 \cos \varphi, \quad \zeta_{\perp} E = -\zeta_1 \sin \varphi \cdot \frac{v_y}{v}.$$

A partir de (41.11) se encuentra que ζ_1 gira respecto de la dirección de v con velocidad angular instantánea

$$\dot{\varphi} = \frac{2v_y}{v^2} \left(\frac{\mu m^2}{\epsilon^2} - \mu' \right) = \frac{p_y}{\epsilon} \left(\frac{em}{p^2} - 2\mu' \right).$$

§ 42. Dispersión de neutrones en un campo eléctrico

En las colisiones de neutrones con núcleos, la dispersión a grandes ángulos viene determinada por una interacción fundamental — las fuerzas nucleares —. En cambio, en la dispersión a ángulos pequeños, pasa a ser importante, conforme veremos, la interacción del momento magnético del neutrón con el campo eléctrico del núcleo (*J. Schwinger*, 1948).

Supondremos que el neutrón es no-relativista, de modo que el movimiento en cuestión se describe mediante el hamiltoniano aproximado (41.13). Todo el momento magnético de una partícula eléctricamente neutra es « anómalo », y el operador H' se reduce en este caso al operador correspondiente a la energía cinética \star :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + i \frac{\mu \hbar}{mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{E} \times \nabla]. \quad (42.1)$$

Teniendo en cuenta que la interacción electromagnética del neutrón es pequeña, la amplitud f_{cm} de la dispersión que aquélla determina puede calcularse en la aproximación de Born:

$$f_{cm} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-ip' \cdot r/\hbar} \left(i \frac{\mu \hbar}{mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{E} \times \nabla] \right) e^{ip \cdot r/\hbar} d^3x$$

(véase III, § 125) o bien

$$f_{cm} = \frac{\mu}{2\pi c \hbar^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{E}_q \times \mathbf{p}], \quad \mathbf{E}_q = \int \mathbf{E}(r) e^{-iq \cdot r} d^3x \quad (42.2)$$

(\mathbf{p}, \mathbf{p}' son los impulsos del neutrón antes y después de la dispersión; $\hbar \mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$). Tal como se ha escrito, la amplitud f_{cm} es un operador respecto de la variable espinorial.

Antes de pasar a los cálculos que siguen, haremos la siguiente observación: la fórmula (42.1) se obtuvo en el § 41 para un campo que varía lentamente (lo que equivale, de hecho, a prescindir en el hamiltoniano de términos que contienen las derivadas del campo respecto de las coordenadas). Al aplicarla al campo de Cou-

\star En este párrafo utilizamos unidades ordinarias y la letra m representa la masa del neutrón.

lomb del núcleo, esto significa que la longitud de onda \hbar/p debe ser pequeña comparada con las distancias $r \sim 1/q$, que son las que cuentan en la integral E_q . De aquí se sigue que $\hbar q \ll p$, con lo cual para el ángulo de dispersión se tiene $\theta \sim \hbar q/p \ll 1$. Así, pues, la condición impuesta se cumple justamente para la dispersión a ángulos pequeños.

Para el campo coulombiano con potencial $\Phi = Ze/r$ la componente de Fourier de la intensidad del campo es

$$E_q = -iq\Phi_q = -iq \frac{4\pi Ze}{q^3}$$

[véase II (51.5)]. La sustitución en (42.2) da

$$f_{em} = i \frac{2Zep}{q^2 c \hbar^5} (\sigma \cdot [p \times p']).$$

En el caso de pequeños ángulos de dispersión se tiene $\hbar q \approx p\theta$, $p \times p' \approx p^2 \theta \mathbf{v}$, donde \mathbf{v} es el versor correspondiente a $p \times p'$. De esta manera,

$$f_{em} = i \frac{2Zep}{\theta \hbar c} \sigma \cdot \mathbf{v}.$$

A esta expresión hay que añadir la amplitud de la dispersión nuclear. Dada la rápida disminución de las fuerzas nucleares con la distancia, esta amplitud tiende, para ángulos pequeños, a un valor complejo finito (que depende de la energía) que representaremos por a . Por consiguiente, la amplitud total de dispersión es

$$f = a + i \frac{b}{\theta} \sigma \cdot \mathbf{v}, \quad b = \frac{2Zep}{c\hbar} = 2Z\alpha \frac{p}{e}. \quad (42.3)$$

Vemos así que la dispersión electromagnética resulta efectivamente dominante para ángulos suficientemente pequeños.

La forma de la expresión (42.3) coincide con la que se consideró en III, § 138. Por ello, podemos utilizar directamente las fórmulas que allí se dedujeron. La sección eficaz de dispersión, sumada respecto de todos los estados de polarización posibles, es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |a|^2 + \frac{b^2}{\theta^2} + 2b \operatorname{Im} a \cdot \zeta, \quad (42.4)$$

donde ζ representa la polarización inicial del haz de neutrones (\mathbf{P} en III, § 138). Si el estado inicial es no polarizado ($\zeta = 0$), la polarización después de la dispersión vale

$$\zeta' = \frac{2b \operatorname{Im} a \cdot \theta}{|a|^2 \theta^2 + b^2} \mathbf{v}. \quad (42.5)$$

Esta polarización es máxima para $\theta = b/|a|$ y se tiene $\zeta'_{\max} = \operatorname{Im} a/|a|$.

CAPÍTULO 5

LA RADIACIÓN

§ 43. El operador de interacción electromagnética

La interacción de los electrones con el campo electromagnético puede estudiarse, por regla general, mediante la teoría de perturbaciones. Esta circunstancia está vinculada con la relativa debilidad de la interacción electromagnética, que a su vez se traduce en el hecho de que la correspondiente « constante de enlace » sin dimensiones, esto es, la constante de estructura fina $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$, es una cantidad pequeña. Este hecho desempeña un papel fundamental en la electrodinámica cuántica.

En la electrodinámica clásica (véase II, § 28) la interacción electromagnética se representa por el término

$$-ej^\mu A_\mu \quad (43.1)$$

en la densidad del lagrangiano del sistema « campo + cargas » (A es el 4-potencial del campo, j el 4-vector densidad de corriente de las partículas). Además, la densidad de corriente satisface la ecuación de continuidad

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (43.2)$$

que expresa la ley de conservación de la carga. Recordemos (véase II, § 29) que la invariancia de contraste de la teoría está íntimamente ligada precisamente con esta ley. En efecto, al substituir $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$ (4.1), a la densidad de Lagrange (43.1) se suma la cantidad $-ej^\mu \partial_\mu \chi$, la cual, en virtud de (43.2), se puede escribir en forma de 4-divergencia

$$-e\partial_\mu (\chi j^\mu)$$

y desaparece así al integrar respecto de x en la acción $S = \int L d^4x$.

En la electrodinámica cuántica los 4-vectores j y A se substituyen por los correspondientes operadores de segunda cuantificación. En particular, el operador corriente se expresa en términos de los operadores ψ de acuerdo con $j = \bar{\Psi} \gamma \Psi$. El

papel de « coordenadas » generalizadas q en el lagrangiano

$$\int L_{\text{inter}} d^3x = -e \int (jA) d^3x$$

lo representan los valores de $\bar{\psi}$, ψ , A en cada punto del espacio. Dado que su densidad depende solamente de las propias « coordenadas » q (pero no de sus derivadas respecto de x), el paso a la densidad de hamiltoniano según la fórmula (10.11) se reduce a cambiar tan sólo el signo de la densidad de Lagrange*. De esta manera, el operador de interacción electromagnética (integral espacial de la densidad del hamiltoniano de interacción) tiene la forma

$$V = e \int (jA) d^3x. \quad (43.3)$$

El operador del campo electromagnético libre es la suma

$$A = \sum_n [c_n A_n(x) + c_n^+ A_n^*(x)], \quad (43.4)$$

que contiene los operadores de creación y aniquilación de los fotones en los diferentes estados (numerados por el índice n). Cada uno de ellos posee elementos de matriz no nulos únicamente para el aumento o la disminución, respectivamente, del número de ocupación N_n en 1 (conservando invariables los restantes números de ocupación). Por consiguiente, también el operador A tiene elementos de matriz tan sólo para transiciones acompañadas de la variación del número de fotones en 1. Dicho de otra manera, en la primera aproximación de la teoría de perturbaciones se manifiestan solamente los procesos de emisión o absorción de un solo fotón en cada uno.

Según (2.15) los elementos de matriz son

$$\langle N_n - 1 | c_n | N_n \rangle = \langle N_n | c_n^+ | N_n - 1 \rangle = \sqrt{N_n}. \quad (43.5)$$

Si en el estado inicial del campo no hay fotones (de la especie n), se tendrá entonces $\langle 1 | c_n^+ | 0 \rangle = 1$. El elemento de matriz del operador (43.3) para emisión de un fotón se escribe

$$V_{fi}(t) = e \int (j_{fi} A_n^*) d^3x, \quad (43.6)$$

donde $A_n(x)$ es la función de onda del fotón emitido, y j_{fi} el elemento de matriz del operador j para la transición del emisor desde el estado inicial i al final f **. El 4-vector $j_{fi}^\mu = (\rho_{fi}, j_{fi})$ se llama *corriente de la transición*.

De manera análoga se obtiene el elemento de matriz para la absorción de un fotón:

* Con independencia de estas consideraciones, señalaremos que si se trata únicamente de una corrección de primer orden, cualquier corrección pequeña que afecte al lagrangiano se traduce en el hamiltoniano en esta misma corrección cambiada de signo (véase I, § 40).

** Las notaciones adoptadas en (43.6) son un tanto inconsecuentes: los subíndices en V_{fi} se refieren a estados de todo el sistema « emisor + campo », y en j_{fi} , a los estados del emisor solamente.

$$V_{fi}(t) = e \int (j_{fi} A_n) d^3x. \quad (43.7)$$

que difiere de (43.6) tan sólo en que en vez de $A_n^*(x)$ aparece $A_n(x)$.

Al poner de manifiesto el argumento t en V_{fi} no hacemos sino subrayar que se trata de un elemento de matriz que depende del tiempo. Separando en las funciones de onda los factores temporales, se puede pasar como de ordinario a los elementos de matriz independientes del tiempo:

$$V_{fi}(t) = V_{fi} e^{-i(E_i - E_f \mp \omega)t} \quad (43.8)$$

(E_i, E_f son las energías inicial y final del sistema radiante; $\mp \omega$ se refiere, respectivamente, a la emisión y absorción del fotón ω).

La función de onda de un fotón con impulso determinado \mathbf{k} y polarización determinada es

$$A^\mu = \sqrt{4\pi} \frac{e^\mu}{\sqrt{2\omega}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (43.9)$$

[véase (4.3); se ha prescindido del factor temporal]. Substituyendo en (43.6), encontramos el elemento de matriz para emisión de dicho fotón, elemento que resulta de la forma

$$V_{fi} = e \sqrt{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_\mu^* j_{fi}^\mu(\mathbf{k}), \quad (43.10)$$

donde $j_{fi}(\mathbf{k})$ es la corriente de transición en la representación de impulsos, es decir, la componente de Fourier

$$j_{fi}(\mathbf{k}) = \int j_{fi}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3x. \quad (43.11)$$

La fórmula análoga para absorción del fotón se escribe:

$$V_{fi} = e \sqrt{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_\mu j_{fi}^\mu(-\mathbf{k}). \quad (43.12)$$

La ecuación de conservación de la corriente en la representación de impulsos adopta la forma de condición de 4-transversalidad de las corrientes de transición:

$$k_\mu j_{fi}^\mu = \omega \rho_{fi}(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{k}) = 0. \quad (43.13)$$

Las fórmulas escritas en este párrafo, en las cuales no se fija de antemano la forma del operador corriente, poseen un carácter general y son válidas para los procesos electromagnéticos en los que participan un número cualquiera de partículas cargadas. La teoría actual permite establecer la forma del operador corriente (y con ello, en principio, calcular sus elementos de matriz) tan sólo para los electrones. En cambio, cuando se trata de aplicaciones a sistemas de partículas sensibles a las interacciones fuertes (entre ellas, a los núcleos) hay que limitarse a una teoría

semifenomenológica en la que las corrientes de transición intervienen como magnitudes tomadas de la experiencia y que solamente satisfacen las condiciones generales de simetría espacio-temporal y la ecuación de continuidad.

§ 44. Emisión y absorción

La probabilidad de transición bajo la influencia de una perturbación V viene dada en primera aproximación por las conocidas fórmulas de la teoría de perturbaciones (III, § 42). Supongamos que los estados inicial y final del sistema emisor pertenecen al espectro discreto*. Entonces la probabilidad (por segundo) de la transición $i \rightarrow f$ acompañada de la emisión de un fotón es

$$dw = 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(E_i - E_f - \omega) dv, \quad (44.1)$$

donde dv designa, como de ordinario, el conjunto de cantidades que caracterizan el estado del fotón y que toman una sucesión continua de valores (se supone que la función de onda del fotón está normalizada respecto de la función- δ «en la escala v »).

Si se emite un fotón con un valor determinado del momento cinético, la única magnitud continua es la frecuencia ω . La integración de la fórmula (44.1) respecto de $v \equiv \omega$ hace desaparecer la función- δ (substituyendo ω por el valor determinado $\omega = E_i - E_f$) y entonces la probabilidad de transición se escribe

$$w = 2\pi |V_{fi}|^2. \quad (44.2)$$

Pero si se considera la emisión de un fotón con impulso dado \mathbf{k} , entonces será $dv \equiv d^3k = \omega^2 d\omega do$. En este caso, la función de onda del fotón en la fórmula (44.1) se supondría normalizada respecto de $\delta(\mathbf{k})$. Sin embargo, en este libro normalizaremos todas las ondas planas de modo que correspondan a «una partícula por unidad de volumen». Esta normalización difiere de la normalización respecto de $\delta(\mathbf{k})$ en que no aparece el factor $(2\pi)^{-3/2}$. De acuerdo con esta normalización de la onda plana fotónica, la probabilidad de que se emita un fotón con impulso dado se escribirá, por consiguiente, en la forma**

$$dw = 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(E_i - E_f - \omega) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (44.3)$$

o después de integrar respecto de ω :

$$dw = \frac{1}{4\pi^2} |V_{fi}|^2 \omega^2 do. \quad (44.4)$$

En el segundo miembro hay que substituir el elemento de matriz V_{fi} dado por (43.10).

* Con esto, en cualquier caso, se supone que se prescinde de los retrocesos: el emisor, como un todo, permanece inmóvil.

** Esta notación concuerda con el hecho de que, al normalizar a «un fotón en el volumen $V = 1$ », en (44.1) hay que escribir en vez de $dv = d^3k$ el número de estados que corresponden al volumen Vd^3k del espacio de las fases, número que es igual a $d^3k/(2\pi)^3$.

Utilizaremos estas fórmulas en los párrafos siguientes para calcular las probabilidades de radiación en diferentes casos concretos. Aquí consideraremos algunas relaciones generales entre los diversos aspectos de los procesos radiativos.

Si en el estado inicial del campo se tenía ya un número N_n , no nulo, de fotones dados, el elemento de matriz de la transición hay que multiplicarlo todavía por

$$\langle N_n + 1 | c_n^+ | N_n \rangle = \sqrt{N_n + 1}, \quad (44.5)$$

es decir, la probabilidad de transición queda multiplicada por $N_n + 1$. La unidad corresponde en este factor a la emisión espontánea, que tiene lugar también cuando $N_n = 0$. En cambio, el término N_n determina la emisión *forzada* (o *inducida*); vemos así que la existencia de fotones en el estado inicial del campo estimula una emisión adicional de tales fotones.

El elemento de matriz V_{if} de la transición en la que los dos estados del sistema intercambian sus papeles ($f \rightarrow i$) difiere del elemento V_{fi} en la substitución de (44.5) por

$$\langle N_n - 1 | c_n | N_n \rangle = \sqrt{N_n}$$

(y en la substitución de las demás cantidades por sus conjugado-complejas). Esta transición inversa consiste en la absorción del fotón por el sistema, que pasa del nivel E_f al nivel E_i . Por ello, entre las probabilidades de emisión y de absorción del fotón (para un par dado de estados i, f) existe la relación *

$$\frac{w_{\text{em}}}{w_{\text{abs}}} = \frac{N_n + 1}{N_n} \quad (44.6)$$

(A. Einstein la estableció el primero en 1916).

Veamos qué relación existe entre el número de fotones y la densidad de la radiación que desde el exterior incide sobre el sistema. Sea

$$I_{ke} d\omega d\sigma \quad (44.7)$$

la energía de la radiación que atraviesa por segundo 1 cm² de superficie y que posee la polarización e , una frecuencia contenida en el intervalo $d\omega$ y una dirección del vector de onda que pertenece al elemento de ángulo sólido $d\sigma$. A los intervalos indicados corresponden $k^2 dk d\sigma / (2\pi)^3$ osciladores del campo, a cada uno de los cuales corresponden a su vez N_{ke} fotones con la polarización dada. Por consiguiente, la misma energía (44.7) obtendremos formando el producto

$$c \frac{k^2 dk d\sigma}{(2\pi)^3} N_{ke} \cdot \hbar\omega = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2} N_{ke} d\omega d\sigma.$$

De aquí se deduce la relación buscada:

$$N_{ke} = \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} I_{ke}. \quad (44.8)$$

* En lo que sigue de este párrafo utilizamos unidades ordinarias.

Sea $d\omega_{ke}^{\text{esp}}$ la probabilidad de radiación espontánea del fotón con polarización e en el ángulo sólido $d\Omega$; con los superíndices (ind) y (abs) designaremos las probabilidades análogas para la emisión inducida y la absorción. Según (44.6) y (44.8), estas probabilidades están ligadas entre sí por las siguientes relaciones:

$$d\omega_{ke}^{\text{abs}} = d\omega_{ke}^{\text{ind}} = d\omega_{ke}^{\text{esp}} \frac{8\pi^3 c^3}{\hbar\omega^3} I_{ke}. \quad (44.9)$$

Si la radiación incidente es isótropa y no polarizada (I_{ke} no depende de las direcciones ni de \mathbf{k} ni de e), la integración de (44.9) respecto del ángulo sólido y la suma con relación a e dan las relaciones análogas entre las probabilidades totales de los procesos radiativos (entre estados i y f dados del sistema)

$$w^{\text{abs}} = w^{\text{ind}} = w^{\text{esp}} \frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^3} I, \quad (44.10)$$

donde $I = 2 \cdot 4\pi I_{ke}$ es la intensidad espectral total de la radiación incidente.

Si los estados i y f del sistema emisor (o absorbente) son degenerados, la probabilidad total de emisión (o de absorción) de los fotones dados se obtiene sumando respecto de todos los estados degenerados finales y promediando respecto de todos los posibles estados iniciales. Designaremos las multiplicidades de la degeneración (pesos estadísticos) de los estados i y f por g_i y g_f . Para los procesos de emisión espontánea e inducida los estados iniciales son los i , y para la absorción, los estados f . Admitiendo en cada caso que todos los g_i o g_f estados iniciales corresponden a equiprobabilidad, obtendremos, evidentemente, en vez de (44.10) las relaciones siguientes *:

$$g_f w^{\text{abs}} = g_i w^{\text{ind}} = g_i w^{\text{esp}} \frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^3} I. \quad (44.11)$$

§ 45. Radiación dipolar

Apliquemos las fórmulas obtenidas a la emisión de un fotón por un electrón (relativista en el caso general) que se mueve en un campo exterior dado. La corriente de transición en este caso es el elemento de matriz del operador

$$\mathbf{j} = \bar{\Psi} \gamma \psi,$$

en la cual los operadores ψ se suponen desarrollados en serie de funciones de onda de los estados estacionarios del electrón en el campo dado (§ 32). A la transición del electrón del estado i al estado f , corresponde el elemento de matriz $\langle 0_i 1_f | j | 1_i 0_f \rangle$.

* Frecuentemente se utilizan en la literatura los llamados *coeficientes de Einstein*, definidos por $A_{if} = w^{\text{(esp)}} B_{if} = w^{\text{(ind)}} c/I$, $B_{if} = w^{\text{(abs)}} c/I$ (la cantidad I/c es la densidad espectro-espacial de energía de la radiación). Estos coeficientes están ligados entre sí por las relaciones:

$$g_f B_{fi} = g_i B_{if} = g_i A_{if} \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega^3}. \quad (44.11a)$$

Un tal cambio de los números de ocupación se consigue mediante el operador $a^\dagger a_i$ y para la corriente de transición obtenemos

$$j_{fi}^{\mu} = \bar{\psi}_f \gamma^{\mu} \psi_i = (\psi_f^* \psi_i, \psi_f^* \mathbf{a} \psi_i), \quad (45.1)$$

donde ψ_i y ψ_f son las funciones de onda de los estados inicial y final del electrón.

Elegiremos la función de onda del fotón en el contraste transversal en tres dimensiones (4-vector polarización $e = (0, \mathbf{e})$). Entonces, en (43.10) el producto $j_{fi} e^* = -\mathbf{j}_{fi} \cdot \mathbf{e}^*$. Substituyendo V_{fi} en (44.4), se obtendrá la siguiente fórmula para la probabilidad de radiación (por segundo) en el elemento de ángulo sólido $d\omega$ de un fotón con polarización e :

$$dw_{en} = e^2 \frac{\omega}{2\pi} |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{k})|^2 d\omega, \quad (45.2)$$

donde

$$\mathbf{j}_{fi}(\mathbf{k}) = \int \psi_f^* \mathbf{a} \psi_i \cdot e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3x. \quad (45.3)$$

La suma respecto de las polarizaciones del fotón se efectúa promediando según las direcciones de e (en un plano perpendicular a la dirección dada $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$), hecho lo cual el resultado se multiplica por 2 para tener en cuenta las dos posibilidades independientes de polarización transversal del fotón*. De esta manera se obtiene la fórmula

$$dw_n = e^2 \frac{\omega}{2\pi} |[\mathbf{n} \times \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{k})]|^2 d\omega. \quad (45.4)$$

Es muy importante el caso en que la longitud de onda del fotón λ es grande comparada con las dimensiones del sistema emisor, a . Esta situación está ligada de ordinario con el hecho de que la velocidad de las partículas es pequeña comparada con la velocidad de la luz. En primera aproximación respecto de a/λ (que corresponde a la radiación dipolar, cf. II, § 67), en la corriente de transición (45.3) puede substituirse por la unidad el factor e^{-ikr} , que varía poco en el dominio en que ψ_i o ψ_f difieren apreciablemente de cero. Esta sustitución equivale, en otras palabras, a prescindir del impulso del fotón comparado con los impulsos de las partículas en el sistema.

En la misma aproximación, la integral $\mathbf{j}_{fi}(0)$ se puede substituir por su expresión no-relativista, es decir, simplemente por el elemento de matriz v_{fi} de la velocidad del electrón respecto de las funciones de onda de Schrödinger. A su vez, este ele-

* Para promediar se utiliza la fórmula

$$\overline{e_i e_k^*} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} - n_i n_k) \quad (45.4a)$$

o bien

$$\overline{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}^*)} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) \right\} = \frac{1}{2} [\mathbf{a} \times \mathbf{n}] \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{n}],$$

donde \mathbf{a} , \mathbf{b} son vectores constantes [cf. II (78.6)].

mento es $\mathbf{v}_{fi} = -i\omega \mathbf{r}_{fi}$ y, por otra parte, $e\mathbf{r}_{fi} = \mathbf{d}_{fi}$, donde \mathbf{d} es el momento dipolar del electrón (en su movimiento orbital). De esta manera, hallaremos la siguiente fórmula para la probabilidad de radiación dipolar:

$$dw_{en} = \frac{\omega^3}{2\pi} |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{d}_{fi}|^2 d\Omega \quad (45.5)$$

(la dirección \mathbf{n} figura aquí en forma implícita: el vector \mathbf{e} debe ser perpendicular a \mathbf{n}). Sumando respecto de las polarizaciones, se obtendrá

$$dw_n = \frac{\omega^3}{2\pi} |[\mathbf{n} \times \mathbf{d}_{fi}]|^2 d\Omega. \quad (45.6)$$

Teniendo en cuenta el carácter no-relativista (respecto del electrón) de estas fórmulas, su generalización a un sistema cualquiera de electrones es obvia: hay que entender por \mathbf{d}_{fi} el elemento de matriz del momento dipolar total del sistema.

Integrando en la fórmula (45.6) respecto de las direcciones, se encuentra la probabilidad total de emisión:

$$w = \frac{4\omega^3}{3} |\mathbf{d}_{fi}|^2, \quad (45.7)$$

o en unidades ordinarias:

$$w = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |\mathbf{d}_{fi}|^2. \quad (45.7a)$$

La intensidad I de la radiación se obtiene multiplicando la probabilidad por $\hbar\omega$:

$$I = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\mathbf{d}_{fi}|^2. \quad (45.8)$$

Esta fórmula pone de manifiesto la directa analogía con la fórmula clásica [véase II (67.11)] para la intensidad de la radiación dipolar por un sistema de partículas animadas de un movimiento periódico: la intensidad de la radiación de frecuencia $\omega_s = s\omega$ (donde ω es la frecuencia del movimiento de las partículas y s un número entero) es igual a

$$I_s = \frac{4\omega_s^4}{3c^3} |\mathbf{d}_s|^2, \quad (45.9)$$

igualdad en la que \mathbf{d}_s son las componentes de Fourier del momento dipolar, es decir, los coeficientes del desarrollo

$$\mathbf{d}(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{d}_s e^{-is\omega t}. \quad (45.10)$$

La fórmula cuántica (45.8) se obtiene a partir de (45.9) substituyendo estas componentes de Fourier por los elementos de matriz de las correspondientes transiciones. Esta regla (que expresa el principio de correspondencia de Bohr) es un caso particular de una relación general entre las componentes de Fourier de las magnitudes clásicas y los elementos de matriz cuánticos en el caso cuasiclásico (véase III, § 48).

La radiación es cuasiclásica para las transiciones entre estados con grandes números cuánticos; entonces la frecuencia de la transición $\hbar\omega = E_i - E_f$ es pequeña comparada con las energías del emisor E_i y E_f . Sin embargo, esta última circunstancia no conduciría a cambio alguno en la forma de (45.8), que es válida para transiciones cualesquiera. Esto explica el hecho (casual en cierto sentido) de que el principio de correspondencia aplicado a la intensidad de la radiación no sólo es válido en el caso cuasiclásico, sino también en el caso cuántico general.

§ 46. Radiación multipolar eléctrica

En vez de considerar la emisión de un fotón en una dirección dada (es decir, con un impulso dado) estudiemos ahora la emisión de un fotón con valores determinados del momento cinético j y de su proyección m sobre una dirección elegida z . Vimos en el § 6 que tales fotones pueden ser de dos tipos — de tipo eléctrico o de tipo magnético; comenzaremos por la radiación de fotones de tipo eléctrico. También aquí se supondrá que las dimensiones del sistema radiante son pequeñas comparadas con la longitud de onda.

Conviene efectuar los cálculos utilizando las funciones de onda del fotón en la representación de impulsos, es decir, representando el 4-vector $A^\mu(\mathbf{r})$ en forma de integral de Fourier. Entonces el elemento de matriz se escribe

$$V_{fi} = e \int j_{fi}^\mu(\mathbf{r}) A_\mu^*(\mathbf{r}) d^3x = e \int d^3x \cdot j_{fi}^\mu(\mathbf{r}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A_\mu^*(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot r} \quad (46.1)$$

(para simplificar la escritura de las fórmulas prescindimos de los índices ωjm en las funciones de onda del fotón).

Para un fotón Ej tomaremos la función de onda de (7.10), eligiendo la constante arbitraria C igual a

$$C = -\sqrt{\frac{j+1}{j}}.$$

La constante se elige así con el fin de que en las componentes espaciales de la función de onda se reduzcan los términos que contienen los armónicos esféricos de orden $j-1$ [como puede verse en las fórmulas (7.16)]. Entonces \mathbf{A} contendrá solamente las funciones esféricas de orden $j+1$, con lo cual la correspondiente contribución a V_{fi} resultará ser (como hará patente el cálculo que sigue) de un orden de pequeñez mayor (respecto de a/λ) que la contribución de la componente $A^0 \equiv \Phi$, que contiene armónicos esféricos de orden j , más bajo.

Así, pues, haremos

$$A^\mu = (\Phi, 0), \quad \Phi = -\sqrt{\frac{j+1}{j}} \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}} \delta(|\mathbf{k}| - \omega) Y_{jm}(\mathbf{n})$$

($\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$). Substituyendo esta expresión en (46.1) y efectuando la integración respecto de $|\mathbf{k}|$, obtendremos

$$V_{fi} = -e \sqrt{\frac{j+1}{j}} \frac{\sqrt{\omega}}{2\pi} \int d^3x \cdot \rho_{fi}(\mathbf{r}) \int d\mathbf{n} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} Y_{jm}^*(\mathbf{n}). \quad (46.2)$$

Para calcular la primera integral utilizaremos el desarrollo (24.12), que escribiremos en la forma

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l g_l(kr) Y_{lm}^*\left(\frac{\mathbf{k}}{kr}\right) Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right), \quad (46.3)$$

donde *

$$g_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{l+1/2}(kr). \quad (46.4)$$

Substituyendo este desarrollo en (46.2), obtenemos

$$\int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} Y_{jm}^*(\mathbf{n}) d\mathbf{n} = 4\pi i^{-j} g_j(kr) Y_{jm}^*\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

(los demás términos se anulan dada la ortogonalidad de los armónicos esféricos). En virtud de la condición $a/\lambda \ll 1$, en la integral respecto de x representarán un papel tan sólo las distancias para las cuales $kr \ll 1$. En consecuencia, se puede substituir las funciones $g_j(kr)$ por los primeros términos de sus desarrollos respecto de kr^{**} :

$$g_j(kr) \approx \frac{(kr)^j}{(2j+1)!!}. \quad (46.5)$$

En definitiva obtendremos

$$V_{fi} = (-1)^{m+1} i^j \sqrt{\frac{(2j+1)(j+1)}{\pi j}} \frac{\omega^{j+1/2}}{(2j+1)!!} e(Q_{j,-m}^{(E)})_{fi}, \quad (46.6)$$

donde se han introducido las cantidades

$$(Q_{jm}^{(E)})_{fi} = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}} \int \rho_{fi}(\mathbf{r}) r^j Y_{jm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) d^3x \quad (46.7)$$

[recordaremos que $Y_{j,-m} = (-1)^{j-m} Y_{jm}^*$]. Las cantidades (46.7) se llaman *momentos eléctricos 2j-polares de la transición* del sistema por analogía con las correspondientes magnitudes clásicas (II, § 41) ***.

* Las funciones $g_l(kr)$ dependen solamente de los productos kr , lo que hace ver claramente la simetría de la fórmula respecto de los vectores \mathbf{r} y \mathbf{k} . Es indiferente a cuál de los dos armónicos esféricos corresponde el símbolo de conjugación compleja.

La normalización de las funciones g_l es tal que su forma asintótica para $kr \rightarrow \infty$ se escribe

$$g_l(kr) \approx \frac{\sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)}{kr}. \quad (46.4a)$$

** El grado de kr coincide con el orden de la función Y_{jm} multiplicada por la cual aparece g_j . Por esto mismo se justifica el prescindir de términos en A que contienen armónicos esféricos de orden más elevado.

*** Definimos los momentos multipolares sin el factor e de acuerdo con el hecho de que también las corrientes se definen en este libro sin el factor que indica la carga.

Para el electrón en un campo exterior se tiene $\rho_{fi} = \psi_f^* \psi_i$ y las cantidades (46.7) se calculan como elementos de matriz de la cantidad clásica

$$Q_{jm}^{(E)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}} r^j Y_{jm}.$$

En el caso no-relativista (respecto de las velocidades de las partículas), el momento de la transición se puede calcular, en principio, de manera análoga para un sistema cualquiera de N partículas en interacción mutua. La densidad de transición se expresa entonces mediante las funciones de onda del sistema en la forma

$$\rho_{fi}(\mathbf{r}) = \int \psi_f^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \psi_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \sum_{n=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \cdot d^3x_1 \dots d^3x_N, \quad (46.8)$$

donde la integral se extiende a todo el espacio de configuraciones *.

La función de onda del fotón empleada corresponde (en la representación de coordenadas) a la normalización respecto de la función- δ en la escala ω , como se supone en la fórmula (44.2). Substituyendo en ésta (46.6), obtendremos la probabilidad de la radiación E_j^{**}

$$w_{jm}^{(E)} = \frac{2(2j+1)(j+1)}{j[(2j+1)!!]^2} \omega^{j+1} e^j |(Q_{j,-m}^{(E)})_{fi}|^2. \quad (46.9)$$

En particular, para $j = 1$ tenemos

$$w_{1m}^{(E)} = \frac{4\omega^3}{3} e^2 |(Q_{1,-m}^{(E)})_{fi}|^2. \quad (46.10)$$

Las cantidades $Q_{1m}^{(E)}$ están ligadas con las componentes del vector momento eléctrico dipolar por las fórmulas

$$eQ_{10}^{(E)} = id_z, \quad eQ_{1,\pm 1}^{(E)} = \mp \frac{i}{\sqrt{2}} (d_x \pm id_y). \quad (46.11)$$

Sumando (46.10) respecto de m , volvemos, como debía ser, a la fórmula (45.7), ya conocida, para la probabilidad total de radiación dipolar.

La distribución angular de la radiación multipolar se determina por la fórmula (7.11). Normalizándola respecto de la probabilidad total de emisión w_{im} , tenemos

$$dw_{jm} = |Y_{jm}^{(E)}(\mathbf{n})|^2 w_{jm} d\Omega = \frac{w_{jm}}{j(j+1)} |\nabla_{\mathbf{n}} Y_{jm}|^2 d\Omega. \quad (46.12)$$

En particular, para $j = 1$

* Al suponer que las velocidades de los electrones en el sistema son pequeñas se persigue únicamente la posibilidad de representar el sistema por una función de onda y en este sentido no tiene un carácter fundamental. Puede presentarse una situación en la que la probabilidad de transición se anule en virtud de reglas de selección aproximadas, que son correctas únicamente si se prescinde de las interacciones spin-órbita de los electrones. En tal caso, para tener un resultado diferente de cero hay que utilizar funciones de onda con la corrección relativista que tiene en cuenta esta interacción.

** A primera vista podría parecer que, en virtud de la isotropía del espacio, la probabilidad total de emisión de un fotón no debe depender del valor de m . Es fácil comprender que no es así si se observa que para emitir fotones con diferentes valores de m deberían ser diferentes los estados finales del sistema (para un estado inicial dado); cf. más abajo la regla (46.16).

$$Y_{10} = i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{1, \pm 1} = \mp i \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \cdot e^{\pm i\varphi},$$

donde θ, φ son el ángulo polar y el acimut de la dirección \mathbf{n} respecto del eje z . Calculando el gradiente, se encuentra que la distribución angular de la radiación dipolar con valores determinados de m viene dada por las expresiones

$$d\mathbf{w}_{10} = \mathbf{w}_{10} \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta d\theta, \quad d\mathbf{w}_{1, \pm 1} = \mathbf{w}_{1, \pm 1} \frac{3}{8\pi} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} d\theta. \quad (46.13)$$

Naturalmente, éstas se podrían obtener también a partir de la fórmula (45.6) haciendo en ella, primero (para $m = 0$), $d_x = d_y = 0$, $d_z = d$, y, segundo (cuando $m = \pm 1$), $d_y = \mp id_x = d/\sqrt{2}$, $d_z = 0$.

Si el orden de magnitud de las dimensiones del sistema (de un átomo o de un núcleo) es a , el orden de magnitud de los momentos multipolares eléctricos es, en general, $Q_{jm}^{(E)} \sim a^l$. La probabilidad de radiación multipolar vale, en cambio,

$$\omega_{jm}^{(E)} \sim \alpha k (ka)^{2l}. \quad (46.14)$$

El aumento del orden de multiplicidad en 1 disminuye la probabilidad de radiación en la razón $\sim (ka)^2$.

Las leyes de conservación del momento cinético y de la paridad conducen a determinadas reglas de selección que limitan los cambios posibles del estado del sistema emisor. Si el momento inicial del sistema es igual a J_i , después de emitir un fotón de momento cinético j el momento del sistema puede tomar solamente valores J_f que se determinan por la regla de composición de momentos ($\mathbf{J}_i - \mathbf{J}_f = \mathbf{j}$):

$$|J_i - J_f| \leq j \leq J_i + J_f. \quad (46.15)$$

Para valores dados J_i y J_f , la misma regla (46.15) determina los valores posibles del momento cinético del fotón. Pero dado que la probabilidad de radiación disminuye rápidamente al aumentar j , la emisión se produce fundamentalmente con la multipolaridad menor posible.

Las proyecciones M_i y M_f de los momentos \mathbf{J}_i y \mathbf{J}_f junto con la proyección m del momento del fotón satisfacen la regla evidente (que se deduce de la misma ley de composición de los momentos)

$$M_i - M_f = m. \quad (46.16)$$

Las paridades P_i y P_f de los estados inicial y final del sistema radiante deben satisfacer la condición $P_f P_F = P_i$, donde P_F es la paridad del fotón emitido; dado que las paridades pueden tomar solamente los valores ± 1 , esta condición se puede escribir también en la forma

$$P_i P_f = P_F. \quad (46.17)$$

Para un fotón de tipo eléctrico es $P_F = (-1)^j$, de modo que la regla de selección según la paridad para la radiación multipolar eléctrica se escribe:

$$P_i P_f = (-1)^j. \quad (46.18)$$

Las reglas de selección que se deducen del momento cinético total y de la paridad son del todo rigurosas y deben observarse en la radiación por cualquier sistema. Junto con estas reglas pueden existir también otras, más restrictivas, vinculadas con ciertas peculiaridades de la estructura de los sistemas radiantes concretos. Tales reglas tienen inevitablemente tan sólo un carácter más o menos aproximado; las estudiaremos en los párrafos que siguen de este capítulo.

La dependencia de la probabilidad de emisión respecto de los números cuánticos m , M_i , M_f queda completamente determinada por el carácter tensorial de los momentos multipolares. Las cantidades Q_{jm} con un valor de j dado constituyen un tensor esférico de orden j y sus elementos de matriz dependen de dichos números cuánticos según la fórmula

$$|\langle n_f J_f M_f | Q_{j, -m} | n_i J_i M_i \rangle|^2 = \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ M_f & m & -M_i \end{pmatrix}^2 |\langle n_f J_f \| Q_j \| n_i J_i \rangle|^2 \quad (46.19)$$

[véase III (107.6)], donde la letra n designa el conjunto de los números cuánticos que junto con J y M determinan el estado del sistema. Los elementos de matriz reducidos que aparecen en el segundo miembro de la igualdad (46.19) son independientes de los números m , M_i , M_f . Substituida en (46.9), esta fórmula determina también la dependencia buscada, que resulta ser la proporcionalidad a

$$\begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ M_f & m & -M_i \end{pmatrix}^2$$

(con esto se supone, claro está, que el emisor no se encuentra en un campo exterior; entonces la frecuencia de la transición ω no depende de los números M_i y M_f).

Sumando los valores de la probabilidad para todos los valores M_f (con M_i dado), obtendremos la probabilidad total de emisión de un fotón de frecuencia dada a partir del nivel inicial del sistema $n_i J_i$. En virtud de la isotropía del espacio, es evidente «a priori» que esta cantidad no dependerá tampoco del valor inicial M_i . La suma se efectúa aplicando la fórmula

$$\sum_{M_f} |\langle n_f J_f M_f | Q_{j, -m} | n_i J_i M_i \rangle|^2 = \frac{1}{2J_i + 1} |\langle n_f J_f \| Q_j \| n_i J_i \rangle|^2 \quad (46.20)$$

[véase III (107.11)].

§ 47. Radiación multipolar magnética

La función de onda de un fotón de tipo magnético es $A^\mu = (0, \mathbf{A})$, donde \mathbf{A} viene dado por la fórmula (7.6). Substituyéndola en (46.1), obtendremos para el elemento de matriz de la transición

$$V_{fi} = -e \frac{\sqrt{\omega}}{2\pi} \int d^3x \cdot \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r}) \int d\mathbf{o}_n \cdot e^{-ik \cdot r} Y_{jm}^{(m)*}(\mathbf{n}). \quad (47.1)$$

Las componentes del vector $\mathbf{Y}_{jm}^{(M)}$ se expresan, según (7.16), en función de armónicos esféricos de orden j . Utilizando de nuevo el desarrollo (46.3), se obtiene para la segunda integral

$$\int e^{-ik \cdot r} Y_{jm}^{(M)*}(\mathbf{n}) d\sigma_n = 4\pi i^j g_j(kr) Y_{jm}^{(M)*}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right),$$

y después de substituir el valor de g_j dado por (46.5) resulta *

$$V_{fi} = -et^j \frac{2\omega^{j+\frac{1}{2}}}{(2j+1)!!} \int \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r}) \mathbf{r}^j \mathbf{Y}_{jm}^{(M)*}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) d^3x.$$

De acuerdo con la definición (7.4), hay que substituir aquí

$$\mathbf{Y}_{jm}^{(M)}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{1}{Vj(j+1)} [\mathbf{r} \times \nabla Y_{jm}].$$

Hecho esto, apliquemos al integrando la igualdad

$$\mathbf{r}^j \mathbf{j}_{fi} \cdot [\mathbf{r} \times \nabla Y_{jm}^*] = -[\mathbf{r} \times \mathbf{j}_{fi}] \cdot \nabla (\mathbf{r}^j Y_{jm}^*)$$

con lo que se obtiene

$$V_{fi} = (-1)^m t^j \sqrt{\frac{(2j+1)(j+1)}{\pi j}} \frac{\omega^{j+\frac{1}{2}}}{(2j+1)!!} e(Q_{j,-m}^{(M)})_{fi}, \quad (47.2)$$

donde se han introducido las cantidades

$$(Q_{jm}^{(M)})_{fi} = \frac{1}{j+1} \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}_{fi}] \cdot \nabla (\mathbf{r}^j Y_{jm}) d^3x. \quad (47.3)$$

Éstas se llaman momentos *2i-polares magnéticos de la transición*.

Vista la analogía entre las expresiones (47.2) y (46.6), para la probabilidad de emisión se obtiene una fórmula que difiere de (46.10) solamente en que los momentos eléctricos se substituyen por los magnéticos. Conserva también su validez la fórmula (46.12) para la distribución angular [conforme se hizo ya notar en relación con (7.11)].

Examinemos la estructura de la expresión (47.3) para $j = 1$. En este caso se tiene

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_{10} = iz, \quad \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_{1,\pm 1} = \mp \frac{i}{\sqrt{2}} (x \pm iy),$$

y los gradientes de estas funciones son iguales, simplemente, a los versores esféricos $e^{(0)}, e^{(\pm 1)}$ (7.14). Por ello, las cantidades $e(Q_{1m}^{(M)})_{fi}$ son las componentes esféricas del vector

$$\mu_{fi} = \frac{e}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j}_{fi} d^3x, \quad (47.4)$$

* ¡No se confunda la corriente \mathbf{j} con el momento cinético j !

que por su estructura es análogo al momento magnético clásico (véase II, § 44). Veamos cómo está ligada la fórmula (47.4) con la expresión no-relativista cuántica ordinaria del operador momento magnético.

La expresión no-relativista de la corriente de transición es (véase III, § 114):

$$\mathbf{j}_{fi} = -\frac{i}{2m} (\psi_f^* \nabla \psi_i - \psi_i \nabla \psi_f^*) + \frac{\mu}{es} \operatorname{rot} (\psi_f^* \mathbf{s} \psi_i), \quad (47.5)$$

donde μ es el momento magnético de la partícula y s su spin. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_{fi} = & -\frac{ie}{4m} \int \psi_f^* \mathbf{r} \times \nabla \psi_i d^3x + \frac{ie}{4m} \int \psi_i \mathbf{r} \times \nabla \psi_f^* d^3x + \\ & + \frac{\mu}{2s} \int \mathbf{r} \times \operatorname{rot} (\psi_f^* \mathbf{s} \psi_i) d^3x. \end{aligned} \quad (47.6)$$

Escribamos en el segundo término

$$\int \psi_i \mathbf{r} \times \nabla \psi_f^* d^3x = - \int \psi_f^* \mathbf{r} \times \nabla \psi_i d^3x + \int \operatorname{rot} (\mathbf{r} \psi_f^* \psi_i) d^3x.$$

La última integral se transforma en una integral extendida a una superficie infinitamente alejada y se anula. De esta manera, los dos primeros términos en (47.6) coinciden. En el tercer término, transformaremos la integral de la siguiente manera (por el momento designamos por \mathbf{F} la expresión $\psi_f^* \mathbf{s} \psi_i$):

$$\int [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{F})] d^3x = \oint [\mathbf{r} \times [d\mathbf{f} \times \mathbf{F}]] - \int [[\mathbf{F} \times \nabla] \times \mathbf{r}] d^3x.$$

La integral de superficie se anula, y en la última integral tenemos $[\mathbf{F} \times \nabla] \times \mathbf{r} = -\mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{r} + \mathbf{F} = -2\mathbf{F}$. Así, pues,

$$\int [\mathbf{r} \times \operatorname{rot} \mathbf{F}] d^3x = 2 \int \mathbf{F} d^3x.$$

En definitiva, la expresión para $\boldsymbol{\mu}_{fi}$ toma la forma

$$\boldsymbol{\mu}_{fi} = \int \psi_f^* \left(\frac{e}{2m} \mathbf{L} + \frac{\mu}{s} \mathbf{s} \right) \psi_i d^3x, \quad (47.7)$$

donde $\mathbf{L} = -i \mathbf{r} \times \nabla$ es el operador del momento orbital de la partícula. Como debía ser, $\boldsymbol{\mu}_{fi}$ es el elemento de matriz del operador

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m} \mathbf{L} + \frac{\mu}{s} \mathbf{s}, \quad (47.8)$$

suma de los momentos magnéticos orbital y propio de la partícula.

Las reglas de selección correspondientes a la radiación multipolar magnética son análogas a las reglas para el caso eléctrico: para el momento cinético total valen las mismas reglas (46.15-16), y para la paridad, la regla

$$P_i P_j = (-1)^{t+1}, \quad (47.9)$$

que se obtiene substituyendo en (46.17) la paridad de un fotón M_j : $P_F = (-1)^{j+1}$.

§ 48. Distribución angular y polarización de la radiación

Las fórmulas deducidas en los §§ 46 y 47 se referían a la emisión de un fotón con valores determinados del momento j y de su proyección m . De acuerdo con esto, se suponía que también el sistema emisor (digamos, un núcleo) antes y después de la emisión posee no solamente valores determinados del momento cinético J , sino también polarizaciones determinadas, es decir, valores determinados de M .

Consideremos ahora el caso más general de la radiación por un núcleo parcialmente polarizado (las dimensiones del cual, como antes, se suponen pequeñas comparadas con la longitud de onda). El fotón emitido posee como anteriormente un momento cinético determinado, j , pero puede estar parcialmente polarizado. Determinemos la probabilidad de emisión en función de la dirección \mathbf{n} del fotón. Esta probabilidad debe expresarse mediante la matriz densidad que representa los estados de polarización del núcleo y del fotón.

Para ello escribamos primero la probabilidad de emisión como función de la dirección \mathbf{n} y de la helicidad λ del fotón ($\lambda = \pm 1$) para el caso en que los núcleos inicial y final poseen valores determinados $J_i M_i$ y $J_f M_f$.

El elemento de matriz que corresponde a la emisión del fotón con valores determinados jm es proporcional al elemento de matriz del momento 2 j -polar (eléctrico o magnético) del núcleo:

$$\langle J_f M_f; jm | V | J_i M_i \rangle \propto (-1)^m \langle J_f M_f | Q_{j, -m} | J_i M_i \rangle. \quad (48.1)$$

La función de onda del fotón emitido (en la representación de impulsos) es proporcional a $\mathbf{Y}_{jm}^{(E)}(\mathbf{n})$ o a $\mathbf{Y}_{jm}^{(M)}(\mathbf{n})$. En cambio, la función de onda del fotón con impulso en la dirección de \mathbf{n} y helicidad λ es proporcional al vector polarización $\mathbf{e}^{(\lambda)}$. El elemento de matriz para emisión de un fotón $n\lambda$ se obtendrá multiplicando (48.1) por la proyección de la función de onda del estado $|jm\rangle$ sobre la función de onda del estado $|n\lambda\rangle$:

$$\langle J_f M_f; n\lambda | V | J_i M_i \rangle \propto (-1)^m \langle J_f M_f | Q_{j, -m} | J_i M_i \rangle (\mathbf{e}^{(\lambda)*} \cdot \mathbf{Y}_{jm}).$$

Según (16.23), para los fotones de ambos tipos se tiene

$$\mathbf{e}^{(\lambda)*} \cdot \mathbf{Y}_{jm}(\mathbf{n}) \propto D_{\lambda m}^{(j)}(\mathbf{n}). \quad (48.2)$$

En cuanto al elemento de matriz del momento multipolar, lo expresaremos como de ordinario en función del elemento reducido. Finalmente obtenemos la amplitud de probabilidad de la transición en la forma

$$\langle J_f M_f; n\lambda | V | J_i M_i \rangle \propto (-1)^{J_f - M_f + m} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} Q D_{\lambda m}^{(j)}(\mathbf{n}), \quad (48.3)$$

donde Q representa el elemento $\langle J_f \| Q \| J_i \rangle$.

Podemos pasar ahora al caso general de estados de polarización mezclados. Según las reglas generales de la mecánica cuántica, la probabilidad de transición será proporcional a la expresión *

$$\sum_{(m)} \langle J_f M_f; \mathbf{n} \lambda | V | J_i M_i \rangle \langle J_f M'_f; \mathbf{n} \lambda' | V | J_i M'_i \rangle^* \times \\ \times \langle M_i | \rho^{(i)} | M'_i \rangle \langle M'_f | \rho^{(f)} | M_f \rangle \langle \lambda' | \rho^{(\tau)} | \lambda \rangle, \quad (48.4)$$

donde $\rho^{(i)}$, $\rho^{(f)}$, $\rho^{(\tau)}$ son las matrices densidad del núcleo inicial, del núcleo final y del fotón emitido; el símbolo (m) bajo el signo de suma significa que ésta se extiende a todos los índices m que se repiten dos veces en $(M_i M'_i M_f M'_f \lambda \lambda')$. En (48.4) hay que substituir (48.3).

Designemos la probabilidad de emisión de un fotón en el ángulo sólido $d\omega$ por $w(\mathbf{n})d\omega$. La probabilidad total de emisión en todas direcciones y con todas las polarizaciones del fotón y del núcleo secundario no depende, evidentemente, del estado de polarización inicial del núcleo. Dicha probabilidad viene dada por fórmulas que ya conocemos y no nos interesa aquí. Por ello, convendremos en normalizar la probabilidad $w(\mathbf{n})$ a la unidad. Se obtiene para ella **

$$w(\mathbf{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi} \sum_{(m)} (-1)^{2J_i - M_i - M'_i} D_{\lambda m}^{(j)} D_{\lambda' m'}^{(j)*} \times \\ \times \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M'_f & -m' & M'_i \end{pmatrix} \langle M_i | \rho^{(i)} | M'_i \rangle \times \\ \times \langle M'_f | \rho^{(f)} | M_f \rangle \langle \lambda' | \rho^{(\tau)} | \lambda \rangle$$

* Si los estados inicial y final del sistema se representan por las superposiciones

$$\psi^{(i)} = \sum_n a_n \psi_n^{(i)}, \quad \psi^{(f)} = \sum_m b_m \psi_m^{(f)},$$

el elemento de matriz vale

$$\langle f | V | i \rangle = \sum_{mn} b_m^* a_n V_{mn},$$

y su cuadrado

$$|\langle f | V | i \rangle|^2 = \sum_{nn' mm'} V_{mn} V_{m'n'}^* a_n a_{n'}^* b_{m'} b_m^*.$$

Para pasar al caso de estados mezclados se aplica la sustitución

$$a_n a_{n'}^* \rightarrow \rho_{nn'}^{(i)}, \quad b_{m'} b_m^* \rightarrow \rho_{m'm}^{(f)},$$

de modo que

$$|\langle f | V | i \rangle|^2 \rightarrow \sum_{nn' mm'} V_{mn} V_{m'n'}^* \rho_{nn'}^{(i)} \rho_{m'm}^{(f)}.$$

** En las transformaciones del factor signo cabe valerse del hecho de que los números $2J_i$, $2J_f$, $2M_i$, $2M_f$ son todos de igual paridad. Recordaremos también que los números j , m son enteros y que $\lambda = \pm 1$.

(más adelante comprobaremos que la normalización es correcta). Transformemos esta fórmula desarrollando el producto de las dos funciones D en serie (b, 2)

$$\begin{aligned} D_{\lambda m}^{(j)} D_{\lambda' m'}^{(j)*} &= (-1)^{\lambda'+m'} D_{\lambda m}^{(j)} D_{-\lambda'-m'}^{(j)} = \\ &= (-1)^{\lambda+m} \sum_L (2L+1) \binom{j}{\lambda - \lambda' - \Lambda} \binom{j}{m - m' - \mu} D_{\Lambda \mu}^{(L)} \end{aligned}$$

(los índices son $\Lambda = \lambda - \lambda'$, $\mu = m - m'$; los L son números enteros, $L \geq 2j$). De esta manera obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} w(\mathbf{n}) &= \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi} \sum_L \sum_{(m)} (-1)^{2J_i - M_i - M'_i + m + 1} (2L+1) \times \\ &\quad \times \binom{j}{\lambda - \lambda' - \Lambda} \binom{j}{m - m' - \mu} \binom{J_i}{-M_f - m - M_i} \binom{J_i}{-M'_f - m' - M'_i} \times \\ &\quad \times D_{\Lambda \mu}^{(L)}(\mathbf{n}) \langle M_i | \rho^{(i)} | M'_i \rangle \langle M'_f | \rho^{(f)} | M_f \rangle \langle \lambda' | \rho^{(r)} | \lambda \rangle. \quad (48.5) \end{aligned}$$

Como antes, Σ representa la suma respecto de todos los índices- m (que se repiten (m) dos veces). Además, hay que recordar la diferencia que existe entre los índices λ , λ' y los demás índices- m : la suma respecto de los primeros se extiende no a todos los $2j+1$ valores posibles (para un índice- j dado), sino solamente a los dos valores λ , $\lambda' = \pm 1$ que corresponden a las dos polarizaciones del fotón.

La fórmula (48.5) contiene toda la información necesaria acerca de la distribución angular de los fotones emitidos y de su polarización como también acerca de la polarización de los núcleos secundarios (es decir, de los que han emitido ya el fotón). En todo esto se supone dada la matriz densidad inicial.

Distribución angular

La distribución angular de los fotones se obtendrá sumando respecto de todas las polarizaciones del fotón y del núcleo secundario. El promedio respecto de las polarizaciones se consigue substituyendo las matrices densidad de los estados no polarizados:

$$\langle \lambda | \rho^{(r)} | \lambda' \rangle = \frac{1}{2} \delta_{\lambda \lambda'}, \quad \langle M_f | \rho^{(f)} | M'_f \rangle = \frac{1}{2J_f + 1} \delta_{M_f M'_f}, \quad (48.6)$$

hecho lo cual la suma se reduce a multiplicar por 2 (para el fotón) o por $2J_f + 1$ (para el núcleo). En otras palabras, la suma se efectúa simplemente substituyendo

$$\langle \lambda | \rho^{(r)} | \lambda' \rangle \rightarrow \delta_{\lambda \lambda'}, \quad \langle M_f | \rho^{(f)} | M'_f \rangle \rightarrow \delta_{M_f M'_f}. \quad (48.7)$$

Se obtiene así la distribución angular

$$\bar{w}(\mathbf{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi} \sum_L \sum_{(m)} (-1)^{m'+1} (2L+1) D_{0\mu}^{(L)}(\mathbf{n}) \times \\ \times \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m' & M_i \end{pmatrix} \langle M_i | \rho^{(i)} | M'_i \rangle.$$

Esta fórmula se puede simplificar considerablemente efectuando la suma respecto los índices- m .

Observemos ante todo que

$$\begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = (-1)^L \begin{pmatrix} j & j & L \\ -\lambda & \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad (48.8)$$

por lo cual la suma

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{para } L \text{ par} \\ 0 & \text{para } L \text{ impar} \end{cases}$$

Por consiguiente, en la suma respecto de L se conservan solamente los términos con L par, es decir, en ella aparecen solamente las funciones esféricas ($D_{0\mu}^{(L)}$) de órdenes pares. Este resultado se podía haber previsto: en virtud de la conservación de la paridad, la probabilidad debe ser invariante respecto de la inversión, es decir, respecto de la substitución $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$.

Así, pues,

$$\bar{w}(\mathbf{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{4\pi} \sum_L (2L+1) \begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} D_{0\mu}^{(L)}(\mathbf{n}) \sum_{(m)} (-1)^{m'+1} \times \\ \times \begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m' & M_i \end{pmatrix} \langle M_i | \rho^{(i)} | M'_i \rangle.$$

Obsérvese que es fácil comprobar aquí la normalización: en virtud de la fórmula

$$\int D_{0\mu}^{(L)}(\mathbf{n}) \frac{d\sigma}{4\pi} = \delta_{L0} \delta_{\mu0},$$

después de integrar respecto de las direcciones queda únicamente el término con $L = \mu = 0$; mediante las fórmulas

$$\begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \frac{1}{\sqrt{2j+1}}, \\ \sum_{M_f m} \left(\begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \right)^2 = \frac{1}{2J_i+1}, \quad \text{Tr } \rho^{(i)} = 1$$

se comprueba que este término es igual a 1.

La suma respecto de $mm'M_f$ en la suma segunda que aparece en $\bar{w}(\mathbf{n})$ se lleva a cabo mediante la fórmula III (108.4). En definitiva obtendremos para la distribución angular de los fotones la siguiente fórmula final:

$$\begin{aligned}\bar{w}(\mathbf{n}) = & (-1)^{1+J_i+J_f} \frac{(2j+1)\sqrt{2J_i+1}}{4\pi} \times \\ & \times \sum_{L \text{ par}} (-i)^L \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_i & J_i & L \\ j & j & J_f \end{Bmatrix} \sum_{\mu} \mathcal{P}_{L\mu}^{(i)*} D_{0\mu}^{(L)}(\mathbf{n}),\end{aligned}\quad (48.9)$$

donde se ha hecho

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{L\mu}^{(i)} = & i^L \sqrt{(2L+1)(2J_i+1)} \sum_{M_i M'_i} (-1)^{J_i - M'_i} \begin{pmatrix} J_i & L & J_i \\ -M'_i & \mu & M_i \end{pmatrix} \times \\ & \times \langle M_i | \rho^{(i)} | M'_i \rangle, \\ \mathcal{P}_{L\mu}^{(i)*} = & (-1)^{L-\mu} \mathcal{P}_{L,-\mu}^{(i)}.\end{aligned}\quad (48.10)$$

La segunda suma en (48.9) se extiende a todos los $|\mu| \leq L$, y la primera, a todos los valores pares de L que cumplen las condiciones

$$L \leq 2j, \quad L \leq 2J_i \quad (48.11)$$

[estas condiciones son consecuencia de la regla del triángulo a que deben satisfacer los índices j y los símbolos-3j que figuran en (48.9-10)]. En virtud de estas condiciones, de ordinario no es grande el número de términos en la suma. Así, para $J_i = 0$ ó $1/2$ queda solamente el término con $L = 0$, es decir, la radiación es isótropa (es fácil verificar que el término con $L = 0$ es igual a $1/4$, como debía ser por la condición de normalización). Cuando $J_i = 1, 3/2$ ó $j = 1$, en la suma respecto de L quedan sólo dos términos: $L = 0, 2$. Observemos también que si la matriz densidad $\rho^{(i)}$ es diagonal ($M_i = M'_i$), se tiene $\mu = 0$ y la función distribución (48.9) toma la forma de un desarrollo en polinomios de Legendre [según (16.5) y (a, 17) las funciones $D_{00}^{(L)}$ se reducen a las funciones $P_L(\cos \theta)$]. Finalmente, si

$$\langle M_i | \rho^{(i)} | M'_i \rangle = \frac{1}{2J_i + 1} \delta_{M_i M'_i},$$

es decir, si el núcleo inicial no está polarizado, todos los $\mathcal{P}_{L\mu}^{(i)} = 0$, salvo $\mathcal{P}_{00}^{(i)} = 1$ *.

* En efecto, observando que

$$\begin{pmatrix} J & 0 & J \\ -M' & 0 & M \end{pmatrix} = (-1)^{J-M} \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \delta_{MM'},$$

se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{MM'} (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & L & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix} \delta_{MM'} = & \sqrt{2J+1} \sum_{MM'} \begin{pmatrix} J & L & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & 0 & J \\ -M' & 0 & M \end{pmatrix} = \\ = & \sqrt{2J+1} \delta_{L0} \delta_{\mu 0},\end{aligned}$$

con lo cual y teniendo en cuenta la definición (48.10) se obtiene el resultado indicado.

Las cantidades $\mathcal{P}_{L\mu}$ resultan convenientes para caracterizar el estado de polarización del núcleo; las llamaremos *momentos de polarización*. La fórmula (48.10) determina estas cantidades en función de la matriz densidad $\rho_{MM'}$. Una comprobación directa permite verificar fácilmente la validez de la fórmula inversa que expresa esta matriz en función de los momentos de polarización:

$$\rho_{MM'} = \sum_{L\mu} V^{\frac{2L+1}{2J+1}} i^{-L} (-1)^{J-M'} \begin{pmatrix} J & L & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix} \mathcal{P}_{L\mu} \quad (48.12)$$

Sea $f_{L\mu}$ un tensor esférico que dependa del estado de polarización del núcleo. De acuerdo con las reglas generales [véase III (14.8)] su valor medio en un estado con matriz densidad $\rho_{MM'}$ es igual a

$$\bar{f}_{L\mu} = \sum_{MM'} \rho_{MM'} \langle JM' | f_{L\mu} | JM \rangle. \quad (48.13)$$

Expresando los elementos de matriz de las cantidades $f_{L\mu}$ mediante el elemento reducido $\langle J \| f_L \| J \rangle$ de acuerdo con

$$\langle JM' | f_{L\mu} | JM \rangle = i^L (-1)^{J-M'} \begin{pmatrix} J & L & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix} \langle J \| f_L \| J \rangle$$

e introduciendo los momentos de polarización según la definición (48.10), se obtendrá

$$\bar{f}_{L\mu} = \frac{\langle J \| f_L \| J \rangle}{V(2L+1)(2J+1)} \mathcal{P}_{L\mu}. \quad (48.14)$$

Polarización del fotón

Para matrices $\rho^{(r)}$ y $\rho^{(f)}$ dadas (junto con $\rho^{(i)}$) la fórmula (48.5) determina la probabilidad de la transición en que se emite un fotón quedando el núcleo en determinados estados de polarización. Estos estados son esencialmente una característica no del proceso de radiación como a tal, sino de aquellos detectores que registran el fotón y el núcleo de retroceso, separando sus polarizaciones determinadas. Más natural resulta otro planteo del problema en el cual el estado final del sistema «núcleo + fotón» no se fija de antemano y lo que se pide es determinar la matriz densidad de polarización de este estado cuando sólo se conoce la dirección de emisión del fotón.

La respuesta a esta cuestión viene dada por la misma fórmula (48.5). Si la representamos en la forma

$$w = \bar{w}(n) \sum_{(m)} \langle M_f; n\lambda | \rho | M'_f; n\lambda' \rangle \langle \lambda' | \rho^{(r)} | \lambda \rangle \langle M'_f | \rho^{(f)} | M_f \rangle, \quad (48.15)$$

la expresión $\langle M_f; \mathbf{n}\lambda | \rho | M'_f; \mathbf{n}\lambda' \rangle$ será precisamente la matriz densidad buscada, ya que según las reglas generales de la mecánica cuántica la probabilidad w de la transición a un estado que se fija «a priori» viene dada por su «proyección» sobre los datos $\rho^{(v)} \rho^{(f)}$. El factor $\bar{w}(\mathbf{n})$ se ha separado en (48.15) para que esta matriz esté normalizada por la condición ordinaria

$$\sum_{\lambda, M_f} \langle M_f; \mathbf{n}\lambda | \rho | M_f; \mathbf{n}\lambda \rangle = 1.$$

Si lo que nos interesa es únicamente la polarización del fotón, hay que sumar respecto de $M_f = M'_f$:

$$\langle \mathbf{n}\lambda | \rho | \mathbf{n}\lambda' \rangle = \sum_{M_f} \langle M_f; \mathbf{n}\lambda | \rho | M_f; \mathbf{n}\lambda' \rangle.$$

De manera del todo análoga a como se ha deducido la fórmula (48.9), se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}\lambda | \rho | \mathbf{n}\lambda' \rangle &= (-1)^{1+J_i+J_f} \frac{(2j+1) \sqrt{2J_i+1}}{8\pi \bar{w}(\mathbf{n})} \times \\ &\times \sum_L (-i)^L \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & \lambda' & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_i & J_i & L \\ j & j & J_f \end{Bmatrix} \sum_{\mu} \mathcal{D}_{L\mu}^{(i)*} D_{\Lambda\mu}^{(L)}(\mathbf{n}), \end{aligned} \quad (48.16)$$

($\Lambda = \lambda - \lambda'$) donde la suma se extiende a todos los valores enteros L que satisfacen las condiciones (48.11).

En particular, la polarización circular se determina por el parámetro de Stokes

$$\xi_2 = \langle \mathbf{n}1 | \rho | \mathbf{n}1 \rangle - \langle \mathbf{n}, -1 | \rho | \mathbf{n}, -1 \rangle$$

(véase el problema en el § 8). En virtud de la relación (48.8), en esta diferencia se reducen todos los términos con valores de L pares y para ξ_2 se obtiene una fórmula que difiere de la expresión (48.9) tan sólo en que la suma se extiende a valores impares de L (en vez de pares).

Polarización de los núcleos secundarios

Finalmente, si nos interesa tan sólo la polarización final de los núcleos, hay que hacer $\rho^{(v)} \rightarrow \delta$. Si, además, se efectúa también la integración respecto de las direcciones del fotón, la matriz densidad del núcleo secundario será:

$$\begin{aligned} \langle M_f | \rho | M'_f \rangle &= \int \bar{w}(\mathbf{n}) \langle M_f \mathbf{n} | \rho | M'_f \mathbf{n} \rangle d\mathbf{o} = \\ &= (2J_i + 1) \sum_{m M_i M'_i} (-1)^{2J_i - M_i - M'_i} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M'_f & -m & M'_i \end{pmatrix} \langle M_i | \rho^{(i)} | M'_i \rangle. \end{aligned}$$

Los momentos de polarización calculados según esta matriz son iguales a

$$\mathcal{P}_{L\mu}^{(f)} = (-1)^{J_i + J_f + L + j} \sqrt{(2J_i + 1)(2J_f + 1)} \begin{Bmatrix} J_i & J_i & L \\ J_f & J_f & j \end{Bmatrix} \mathcal{P}_{L\mu}^{(i)}. \quad (48.17)$$

Si el núcleo inicial no está polarizado, tampoco lo estará el núcleo final. Sin embargo, en este caso se tendrá una polarización de correlación, es decir, una polarización del núcleo después de emitir el fotón en una dirección dada. Haciendo $\rho^{(i)} \rightarrow \delta/(2J_i + 1)$ [y de acuerdo con esto $\bar{w}(\mathbf{n}) = 1/4\pi$] y efectuando un cálculo análogo al que permitió deducir (48.9), obtendremos para la matriz densidad que describe la polarización

$$\langle M_f; \mathbf{n} | \rho | M'_f; \mathbf{n} \rangle =$$

$$= (2j + 1) (-1)^{J_i + M'_f + 1} \sum_{L \text{ par}} (2L + 1) \begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & L & J_f \\ -M'_f & \mu & M_f \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{Bmatrix} J_f & J_f & L \\ j & j & J_i \end{Bmatrix} D_{0\mu}^{(L)}(\mathbf{n}). \quad (48.18)$$

Los momentos de polarización que corresponden a esta matriz son

$$\mathcal{P}_{L\mu}^{(f)} = i^L (-1)^{1 + J_i + J_f} (2j + 1) \sqrt{(2L + 1)(2J_f + 1)} \times \\ \times \begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_f & J_f & L \\ j & j & J_i \end{Bmatrix} D_{0\mu}^{(L)}(\mathbf{n}). \quad (48.19)$$

Sólo aparecen momentos de orden par (también esto es consecuencia de la conservación de la paridad que hemos recordado ya).

Si el núcleo secundario emite a su vez radiación, al estar polarizado dará lugar a una distribución no-isótropa de los fotones. Dado que los momentos de polarización (48.19) dependen de la dirección \mathbf{n} del fotón emitido en la primera transición, se manifiesta una determinada correlación entre las direcciones de los fotones emitidos sucesivamente (para un núcleo primario no polarizado). De manera análoga pueden considerarse también otros fenómenos de correlación en las emisiones en cascada (correlación de polarizaciones, etc.) *.

PROBLEMA

Establecer la relación entre los momentos de polarización $\mathcal{P}_{1\mu}$ y $\mathcal{P}_{2\mu}$ y los valores medios del vector momento cinético \mathbf{J} y del tensor momento cuadripolar Q_{ik} .

Solución. Los elementos reducidos del vector \mathbf{J} y del tensor Q_{ik} se determinan a partir de las igualdades

$$\bar{\mathbf{J}}^2 = \frac{\langle J \parallel J \parallel J \rangle^2}{2J + 1}, \quad \bar{Q}_{ik} = \frac{\langle J \parallel Q \parallel J \rangle^2}{2J + 1}$$

* Una exposición detallada de estas cuestiones puede encontrarse en el artículo de A. Z. Dolginov en el libro «Gamma-luchi» (Radiación gamma), Editorial AN SSSR, 1961.

[cf. III (107.10-11)]. El operador Q_{ik} se expresa en función de los operadores del momento cinético por la fórmula III (75.2):

$$Q_{ik} = \frac{3Q}{2J(2J-1)} \left(J_i J_k + J_k J_i - \frac{2}{3} \mathbf{J}^2 \delta_{ik} \right).$$

De aquí se sigue el valor medio

$$\overline{Q_{ik}^2} = Q^2 \frac{6(J+1)^2}{2J-1}.$$

Los elementos de matriz reducidos son:

$$\begin{aligned} \langle J \| J \| J \rangle &= \sqrt{J(J+1)(2J+1)}, \\ \langle J \| Q \| J \rangle &= Q \frac{(J+1)\sqrt{6(2J+1)}}{2J-1}. \end{aligned}$$

De (48.18) se sigue ahora que los momentos de polarización $\mathcal{P}_{1\mu}$ coinciden con las componentes esféricas del vector

$$\sqrt{\frac{3}{J(J+1)}} \mathbf{J},$$

y los momentos $\mathcal{P}_{2\mu}$, con las componentes esféricas del tensor

$$\sqrt{\frac{5}{6}} \frac{2J-1}{J+1} \frac{\overline{Q_{ik}}}{Q}.$$

§ 49. Radiación de los átomos. Tipo eléctrico *

Las energías de los electrones exteriores de un átomo (que participan en las transiciones de radiación óptica) en una estimación grosera son del orden de magnitud de $E \sim me^4/\hbar^2$, de modo que para las longitudes de onda emitidas se tiene $\lambda \sim \hbar c/E \sim \hbar^2/\alpha m e^2$. Ahora bien, las dimensiones del átomo son tales que $a \sim \hbar^2/me^2$. Por ello en los espectros ópticos de los átomos, como regla general, se cumple la desigualdad $a/\lambda \sim \alpha \ll 1$. El mismo orden de magnitud tiene la razón $v/c \sim \alpha$, donde v son las velocidades de los electrones ópticos.

Así, pues, en los espectros ópticos de los átomos se cumple la condición en virtud de la cual la probabilidad de la emisión dipolar eléctrica (si la permiten las reglas de selección) supera con mucho las probabilidades de las transiciones multipolares **. Debido a esto, en la espectroscopia de los átomos el papel más importante lo representan precisamente las transiciones dipolares eléctricas.

Conforme se señaló ya, tales transiciones están sujetas a reglas de selección rigurosas respecto del momento cinético total del átomo J y de la paridad P ***:

* En los §§ 49-55 utilizamos unidades ordinarias.

** Los valores típicos de la probabilidad de las transiciones dipolares en la región óptica del espectro de los átomos son del orden de magnitud de $10^8 s^{-1}$.

*** Designaremos ahora los números cuánticos de los estados iniciales y finales por letras sin apóstrofo y con apóstrofo, respectivamente. Con las letras n, n' se designarán los conjuntos de números cuánticos restantes que, junto con los indicados explícitamente, determinan únicamente los estados del sistema.

$$|J' - J| \leq 1 \leq J + J', \quad (49.1)$$

$$PP' = -1 \quad (49.2)$$

La desigualdad $|J' - J| \leq 1$ significa que el momento J puede cambiar únicamente en 0, ± 1 : en virtud de la desigualdad $J + J' \geq 1$ queda prohibida además la transición $0 \rightarrow 0$. Las paridades de los estados inicial y final deben ser opuestas *.

La probabilidad de radiación en la transición $nJM \rightarrow n'J'M'$ viene determinada por el correspondiente elemento de matriz del momento dipolar del átomo de acuerdo con

$$w(nJM \rightarrow n'J'M') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |\langle n'J'M' | d_{-m} | nJM \rangle|^2, \quad (49.3)$$

$$\omega = \omega(nJ \rightarrow n'J').$$

Sumando (49.3) respecto de todos los valores $M' = M - m$ (para un M dado), obtendremos la probabilidad total de radiación con frecuencia dada a partir del nivel atómico nJ . La suma se efectúa mediante (46.20) y da **

$$w(nJ \rightarrow n'J') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} \frac{1}{2J+1} |\langle n'J' || d || nJ \rangle|^2. \quad (49.4)$$

El cuadrado del módulo del elemento de matriz reducido que aquí aparece se llama a veces *intensidad de la raya de la transición*; esta cantidad es simétrica respecto de los estados inicial y final.

A otras conclusiones acerca de las probabilidades de transición en los espectros cabe llegar solamente concretando más el carácter de los estados del átomo. No nos detendremos aquí a examinar los métodos de cálculo de elementos de matriz, cuyo grado de aproximación no posee un carácter netamente teórico. Deduciremos únicamente algunas relaciones válidas para una categoría de estados bastante amplia (en particular en el caso de átomos ligeros) construidos siguiendo el tipo de enlace LS (véase III, § 72). Tales estados se caracterizan no sólo por el momento cinético total, sino también por valores determinados de los momentos cinético orbital, L , y de spin, S , que en este caso se conservan.

Dado que el momento dipolar es una cantidad puramente orbital, su operador commuta con el operador de spin, es decir, su matriz es diagonal respecto del número S . Pero para el número L valen las mismas reglas de selección relativas al momento dipolar que en el caso de un vector orbital cualquiera (véase III, § 29). Así, pues, las transiciones entre estados construidos según el esquema LS están sujetas a las reglas de selección adicionales [junto con las (49.1-2)]:

$$S' - S = 0, \quad (49.5)$$

* El primero en establecer la regla de selección respecto de la paridad fue O. Laporte, 1924.

** La intensidad observada de radiación se obtiene multiplicando w por $\hbar\omega$ y por el número de átomos en la fuente que se encuentran en el estado excitado dado (N_{nJ}). Así, en un gas a temperatura T este número es $N_{nJ} \propto (2J+1) \exp(-E_{nJ}/T)$; el factor $(2J+1)$ es el peso estadístico del nivel con momento cinético J .

$$|L' - L| \leq 1 \leq L + L'. \quad (49.6)$$

Subrayaremos una vez más que estas reglas son aproximadas y se violan al tener en cuenta la interacción spin-órbita.

Haremos observar que la regla (49.5) (que prohíbe las transiciones entre términos de diferente multiplicidad) es correcta no sólo para las transiciones del tipo dipolar eléctrico, sino para todas las transiciones de carácter eléctrico: los momentos multipolares eléctricos de todo orden son tensores orbitales, con lo cual los elementos de matriz son diagonales respecto del spin. Así, para las transiciones cuadripolares eléctricas, junto con las reglas generales

$$|J' - J| \leq 2 \leq J + J', \quad PP' = 1, \quad (49.7)$$

en el caso del acoplamiento LS se cumplen las reglas de selección adicionales:

$$S' - S = 0, \quad |L' - L| \leq 2 \leq L + L'. \quad (49.8)$$

La dependencia de la probabilidad de transición respecto de los números S, L, J' se puede determinar en forma explícita. Esta cuestión se resuelve directamente mediante las fórmulas generales para los elementos de matriz de los tensores esféricos en la composición de momentos. Según la fórmula III (109.3) tenemos*

$$|\langle n'L'SJ' \| d \| nLSJ \rangle|^2 = (2J+1)(2J'+1) \begin{Bmatrix} L' & J & S \\ J & L & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle n'L' \| d \| nL \rangle|^2. \quad (49.9)$$

Substituyendo este valor en (49.4), se obtendrá

$$w(nLSJ \rightarrow n'L'SJ') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^5} (2J'+1) \begin{Bmatrix} L' & J & S \\ J & L & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle n'L' \| d \| nL \rangle|^2, \quad (49.10)$$

con $\omega = \omega(nLS \rightarrow n'L'S)$ **.

Para estas probabilidades cabe obtener una regla de sumas. Para los cuadrados de los símbolos-6j vale la fórmula de sumación [véase III (108.7)]

$$\sum_{J'} (2J'+1) \begin{Bmatrix} L' & J & S \\ J & L & 1 \end{Bmatrix}^2 = \frac{1}{2L+1}. \quad (49.11)$$

Mediante ella se encuentra, a partir de (49.10),

$$\sum_{J'} w(nLSJ \rightarrow n'L'SJ') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^5} \frac{1}{2L+1} |\langle n'L' \| d \| nL \rangle|^2. \quad (49.12)$$

Obsérvese que esta cantidad resulta independiente del valor inicial de J .

* En las fórmulas III, § 109, hay que entender ahora por «momentos cinéticos de los subsistemas 1 y 2» el momento orbital y el spin del átomo, de cuya interacción mutua prescindimos. El papel de las cantidades $f_{ij}^{(d)}$ lo representa el vector orbital d_q .

** Prescindiendo de la interacción spin-órbita en el cálculo de los elementos de matriz, prescindimos también de la dependencia de la frecuencia respecto de J y J' , es decir, de la estructura fina de los niveles inicial y final del átomo.

Si se trata de la radiación emitida por un gas cuya temperatura es mucho mayor que los intervalos de estructura fina del término atómico nSL , los estados con valores de J diferentes están poblados de manera uniforme, es decir, todos los valores de J son equiprobables. La probabilidad de que el átomo se encuentre en un nivel con determinado valor de J es igual en tal caso a

$$\frac{2J+1}{(2L+1)(2S+1)}, \quad (49.13)$$

es decir, es igual a la razón del peso estadístico de este nivel al peso estadístico total del término nSL . El promedio de las expresiones (49.10) o de sus sumas (49.12) respecto de estas probabilidades se reduce a multiplicar por el factor (49.13); designaremos este promedio por un trazo sobre la letra correspondiente. La probabilidad total de radiación de todas las líneas del multiplete espectral (formado por todas las posibles transiciones entre las componentes de estructura fina de los dos términos nSL y $n'SL'$) es la suma

$$\overline{w}(nLS \rightarrow n'L'S) = \sum_J \sum_{J'} \overline{w}(nLSJ \rightarrow n'L'SJ'). \quad (49.14)$$

Dado que, claro está, $\sum_J (2J+1) = (2S+1)(2L+1)$, para la probabilidad total se obtiene una expresión que coincide con (49.12). Por consiguiente, para la probabilidad relativa (o, lo que es lo mismo, para la intensidad relativa) de una raya particular obtendremos

$$\frac{\overline{w}(nLSJ \rightarrow n'L'SJ')}{\overline{w}(nLS \rightarrow n'L'S)} = \frac{(2J+1)(2J'+1)}{(2S+1)} \left| \begin{array}{c} L' J' S \\ J L 1 \end{array} \right|^2. \quad (49.15)$$

El análisis de los valores numéricos dados por esta fórmula pone de manifiesto que entre las rayas de un multiplete las más intensas son aquellas para las cuales $\Delta J = \Delta L$ (se las llama *rayas principales* para distinguirlas de las demás componentes del multiplete, llamadas *rayas satélite*). Además, la intensidad de las rayas principales es tanto mayor cuanto mayor es el valor inicial de J .

La suma de las cantidades (49.15) respecto de J o de J' da

$$\frac{\sum_{J'} \overline{w}(nLSJ \rightarrow n'L'SJ')}{\overline{w}(nLS \rightarrow n'L'S)} = \frac{2J+1}{(2L+1)(2S+1)},$$

$$\frac{\sum_J \overline{w}(nLSJ \rightarrow n'L'SJ')}{\overline{w}(nLS \rightarrow n'L'S)} = \frac{2J'+1}{(2L+1)(2S+1)}. \quad (49.16)$$

Por lo tanto, la suma de las intensidades de todas las rayas del multiplete espectral que poseen el mismo nivel inicial (o final) es proporcional al peso estadístico de dicho nivel inicial (o final).

Consideremos ahora la estructura hiperfina de las rayas espectrales de un átomo.

Recordaremos que el desdoblamiento hiperfino de los niveles atómicos es resultado de la interacción de los electrones con el spin del núcleo, si este último es diferente de cero (véase III, § 120). El momento cinético total del átomo (junto con el núcleo) \mathbf{F} se compone del momento total de los electrones \mathbf{J} y del momento cinético del núcleo \mathbf{I} . Cada una de las componentes de estructura hiperfina del nivel nJ se caracteriza por su valor del número cuántico F .

La ley exacta de conservación del momento cinético conduce ahora a la regla de selección rigurosa para el momento total F ; para la radiación dipolar eléctrica se tiene

$$|F' - F| \leq 1 \leq F + F'. \quad (49.17)$$

Pero teniendo en cuenta el carácter extremadamente débil de la interacción de los electrones con el spin del núcleo, se puede prescindir por completo de ella al calcular los elementos de matriz de los momentos eléctricos (o magnéticos) de la envuelta electrónica del átomo. Por ello, siguen siendo válidas también las anteriores reglas de selección relativas al momento cinético de los electrones J y a su paridad. En particular, en virtud de esta última son imposibles las transiciones dipolares eléctricas entre componentes de estructura hiperfina de un mismo término: todos estos niveles poseen igual paridad, mientras que dichas transiciones son posibles únicamente entre estados de paridad diferente.

Dado que el operador del momento dipolar commuta con el spin del núcleo, se puede hallar la dependencia de los elementos de matriz respecto de los números I y F en forma explícita; estos cálculos difieren de los realizados antes para el enlace LS tan sólo en cambios de notación evidentes. La probabilidad de radiación, sumada respecto de los valores finales de la proyección del momento cinético total \mathbf{F} , es:

$$w(nJIF \rightarrow n'J'IF') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} \frac{1}{2F+1} |\langle n'J'IF' | d | nJIF \rangle|^2, \quad (49.18)$$

$$\omega = \omega(nJ \rightarrow n'J'),$$

donde el cuadrado del elemento de matriz reducido vale

$$|\langle n'J'IF' | d | nJIF \rangle|^2 = (2F+1)(2F'+1) \begin{Bmatrix} J' & F' & I \\ F & J & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle n'J' | d | nJ \rangle|^2. \quad (49.19)$$

PROBLEMA

La mayoría de las rayas en los espectros de los metales alcalinos se puede describir como resultado de transiciones de un electrón exterior (óptico) en el campo autoconsistente del átomo residual, que forma una configuración cerrada; el estado del átomo se construye según el tipo de enlace LS . Con estas hipótesis, determinar las intensidades relativas de las componentes de estructura fina de las rayas espectrales.

Solución. Los momentos totales L y $S = 1/2$ del átomo coinciden con el momento cinético orbital y el spin del electrón óptico. En consecuencia, la paridad del estado es igual a $(-1)^L$ (la paridad de la configuración cerrada del átomo residual es positiva). Las reglas de selección respecto de la paridad prohíben, por lo tanto, la transición dipolar con $L' = L$, de modo que sólo son posibles las transiciones en las que $L' - L = \pm 1$. Las transiciones entre las componentes de niveles doblete nL y $n'L'$, $L = 1$ dan lugar, debido a la regla de selección respecto de J , a tres rayas en total

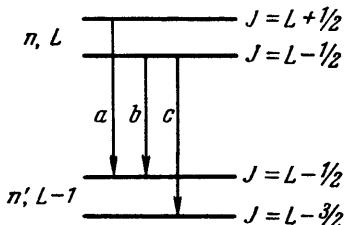


FIG. 1

(figura 1). La manera más fácil de determinar sus intensidades relativas (que designaremos por a , b , c), sin acudir directamente a la fórmula (49.15), consiste en partir de las reglas (49.16). Formando las razones de las intensidades totales de las rayas que parten de un mismo nivel inicial (o que van a parar a un mismo nivel final), se obtendrán las dos igualdades:

$$\frac{b+c}{a} = \frac{2L}{2L+2}, \quad \frac{a+b}{c} = \frac{2L}{2L-2},$$

de donde

$$\begin{aligned} a:b:c &= \\ &= [(L+1)(2L-1)]:1:[(L-1)(2L+1)]. \end{aligned}$$

Si $L = 1$, el nivel inferior no se desdobra, falta la raya c y se tiene $a/b = 2$.

§ 50. Radiación de los átomos. Tipo magnético

El momento magnético de un átomo viene dado en orden de magnitud por el magnetón de Bohr: $\mu \sim e\hbar/mc$. Esta estimación difiere en el factor α del orden de magnitud del momento dipolar eléctrico: $d \sim ea \sim \hbar^2/me$ (dados que también $v/c \sim \alpha$, se tiene $\mu \sim dv/c$, como era de esperar). De aquí se sigue que la probabilidad de la radiación dipolar magnética ($M1$) por un átomo es aproximadamente α^2 veces menor que la probabilidad de radiación dipolar eléctrica (de igual frecuencia). En consecuencia, la radiación magnética desempeña de hecho un papel tan sólo para las transiciones prohibidas por las reglas de selección del caso eléctrico.

En lo que concierne a la radiación cuadripolar eléctrica ($E2$), la razón de su probabilidad a la probabilidad de la radiación $M1$ es en orden de magnitud igual a

$$\frac{E2}{M1} \sim \frac{(ea^2)^2 \omega^2 / c^2}{\mu^2} \sim \frac{a^4 m^2 \omega^2}{\hbar^2} \sim \left(\frac{\Delta E}{E}\right)^2 \quad (50.1)$$

(el momento cuadripolar $\sim ea^2$, $E \sim \hbar^2/ma^2$ es la energía del átomo, ΔE repre-

senta la variación de energía en la transición). Vemos, pues, que para las frecuencias atómicas medias (es decir, para $\Delta E \sim E$) las probabilidades de las radiaciones $E2$ y $M1$ son del mismo orden de magnitud (a condición, claro está, de que una y otra estén permitidas por las reglas de selección). Pero si $\Delta E \ll E$ (por ejemplo, para transiciones entre componentes de estructura fina de un mismo término), la radiación $M1$ es más probable que la radiación $E2$.

Las transiciones dipolares magnéticas están sometidas a las reglas de selección rigurosas

$$|J' - J| \leq 1 \leq J + J', \quad (50.2)$$

$$PP' = 1. \quad (50.3)$$

En el caso del acoplamiento LS entran en juego reglas de selección adicionales, aunque todavía más restrictivas que en el caso eléctrico. Esta última circunstancia está vinculada con una propiedad específica del momento magnético de un átomo, propiedad que resulta de la identidad de todas las partículas en el sistema (de los electrones). En efecto, el operador momento magnético del átomo se expresa en función de los operadores de sus momentos totales orbital y de spin:

$$\mu = -\mu_0(L + 2S) = -\mu_0(J + S), \quad (50.4)$$

donde $\mu_0 = |e|\hbar/2mc$ es el magnetón de Bohr (véase III, § 112). Dado que el momento cinético total se conserva, el operador J carece de elementos no diagonales respecto de la energía, de modo que al considerar las transiciones radiativas basta escribir $\mu = -\mu_0 S^*$.

Cuando se prescinde de la interacción spin-órbita, cada uno de los momentos L y S se conserva por separado. En consecuencia, el operador S es diagonal respecto de todos los números cuánticos nSL que caracterizan el término no desdoblado. Para que tenga lugar una transición es necesario, por consiguiente, que varíe el número J . De esta manera tenemos las reglas de selección:

$$n' = n, \quad S' = S, \quad L' = L, \quad J' - J = \pm 1, \quad (50.5)$$

es decir, las transiciones son solamente posibles entre componentes de estructura fina de un mismo término.

El cálculo de la probabilidad de radiación en este caso puede efectuarse hasta el final. Cambiando como corresponde las notaciones en la fórmula (49.10), se tiene

$$w(nLSJ \rightarrow nLSJ') = \frac{4\omega^3 \mu_0^2}{3\hbar c^3} (2J' + 1) \begin{Bmatrix} S & J' & L \\ J & S & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle S||S||S\rangle|^2.$$

* Constituyen excepción los casos en los que el momento electrónico del átomo J no se conserva: cuando se tiene en cuenta la estructura hiperfina, en presencia de un campo exterior, etc. (Véanse los problemas.)

El elemento de matriz reducido del spin que aquí aparece y relativo a las funciones propias del mismo viene dado por la fórmula

$$\langle S \parallel S \parallel S \rangle = \sqrt{S(S+1)(2S+1)} \quad (50.6)$$

(véase III, nota en la página 109). El símbolo-6j que necesitamos es igual a

$$\left\{ \begin{matrix} S & J-1 & L \\ J & S & 1 \end{matrix} \right\}^2 = \frac{(L+S+J+1)(L+S-J+1)(L-S+J)(S-L+J)}{S(2S+1)(2S+2)(2J-1)2J(2J+1)} \quad (50.7)$$

(véase la tabla en III, § 108). El resultado que se obtiene es

$$\begin{aligned} w(nLSJ \rightarrow nLS, J-1) &= \frac{2J+1}{2J-1} w(nLS, J-1 \rightarrow nLSJ) = \\ &= \frac{\omega^8 \mu_0^2}{3\hbar c^3 (2J+1) J} (L+S+J+1)(L+S-J+1)(J+S-L)(J+L-S). \end{aligned} \quad (50.8)$$

Las transiciones entre componentes de estructura hiperfina de un mismo nivel (sus frecuencias se encuentran en la región de las ondas de radio) en modo alguno pueden producirse en la forma dipolar eléctrica, ya que todas estas componentes poseen igual paridad. Sin cambio de ésta se producen las transiciones *E2* y *M1*. Pero dada la relativamente muy pequeña amplitud de los intervalos de estructura hiperfina, la radiación *E2* es poco probable comparada con la *M1* [cf. (50.1)], de modo que dichas transiciones se producen en la forma dipolar magnética.

PROBLEMAS

1. Hallar la probabilidad de una transición *M1* entre componentes de estructura hiperfina de un mismo nivel.

Solución. La probabilidad de la transición viene dada por las fórmulas (49.18-19) en las que figurará ahora el elemento de matriz reducido diagonal del momento magnético: $\langle nJ \parallel \mu \parallel nJ \rangle$. Su valor puede escribirse sin más observando que el elemento de matriz completo (no reducido) $\langle nJM | \mu_z | nJM \rangle$ determina justamente el desdoblamiento del nivel dado en el efecto Zeeman (véase III, § 112) y es igual a $-\mu_0 g M$, donde *g* es el factor de Landé. En cuanto al elemento de matriz reducido, se tiene [véase III (29.7)]

$$\begin{aligned} \langle nJ \parallel \mu \parallel nJ \rangle &= \frac{1}{M} \sqrt{J(J+1)(2J+1)} \langle nJM | \mu_z | nJM \rangle = \\ &= -\mu_0 g \sqrt{J(J+1)(2J+1)}. \end{aligned}$$

Se encuentra así para la probabilidad buscada el resultado *

* Un ejemplo interesante lo ofrece la transición entre componentes de estructura hiperfina del nivel fundamental del átomo de hidrógeno ($1s^1/2$), rigurosamente prohibida no sólo como *E1*, sino también como *E2* (esto último por la regla que prohíbe la transición cuadrípolo con $J + J' = 1$). A esta transición corresponde la frecuencia $\omega = 2\pi \cdot 1,42 \cdot 10^9 s^{-1}$ (longitud de onda $\lambda = 21$ cm). Haciendo $g = 2$, $I = 1/2$, $J = 1/2$, $F = 1$, $F' = 0$, obtendremos

$$w = \frac{4\omega^8 \mu_0^2}{3\hbar c^3} = 2,85 \cdot 10^{-15} s^{-1}.$$

$$\begin{aligned} w(nJIF \rightarrow nJI, F-1) &= \frac{2F+1}{2F-1} w(nJI, F-1 \rightarrow nJIF) = \\ &= \frac{\omega^3 \mu_0^3 g^2}{3\hbar c^8 (2F+1) F} (J+I+F+1)(J+I-F+1)(F+J-I)(F-J+I). \end{aligned}$$

Esta expresión difiere de (50.8) únicamente en cambios de notación evidentes y en el factor suplementario g^2 .

2. Hallar la probabilidad de una transición $M \rightarrow M-1$ entre las componentes Zeeman de un mismo nivel atómico.

Solución. Se trata de una transición $M \rightarrow M-1$ en la que no varían los valores nJ ; la frecuencia de la transición [véase más adelante (51.3)] es: $\hbar\omega = \mu_0 g H$ (g es el factor de Landé). El elemento de matriz de la componente esférica μ_{-1} del vector μ vale:

$$\begin{aligned} |\langle nJ, M-1 | \mu_{-1} | nJM \rangle| &= \sqrt{\frac{(J-M+1)(J+M)}{2J(J+1)(2J+1)}} |\langle nJ || \mu || nJ \rangle| = \\ &= -\mu_0 g \sqrt{\frac{1}{2}(J-M+1)(J+M)} \end{aligned}$$

[véase III (27.12) y el problema que precede]. Para la probabilidad de transición se tiene

$$w = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^8} |\langle nJ, M-1 | \mu_{-1} | nJM \rangle|^2 = \frac{2\mu_0^5 H^3}{3\hbar^4 c^3} (J-M+1)(J+M).$$

§ 51. Radiación de los átomos. Efectos Zeeman y Stark

En un campo magnético exterior H (que suponemos débil) cada nivel atómico con momento cinético total J se desdobra en $2J+1$ niveles

$$E_M = E^{(0)} + \mu_0 g M H, \quad (51.1)$$

donde $E^{(0)}$ es el nivel no perturbado, μ_0 el magnetón de Bohr, g el factor de Landé y M la proyección del momento J sobre la dirección del campo (véase III, § 112). La degeneración respecto de las direcciones del momento cinético desaparece así por completo.

De manera análoga se desdoblan también las rayas espectrales que resultan de transiciones entre dos niveles desdoblados. El número de componentes de la raya se determina por la regla de selección para el número M según la cual, en la radiación dipolar, debe ser *

$$m = M - M' = 0, \pm 1. \quad (51.2)$$

Las componentes resultantes de transiciones con $m = 0$ y $m = \pm 1$ se llaman componentes- π y componentes- σ , respectivamente. Sus frecuencias son:

$$\begin{aligned} \hbar\omega_\pi &= \hbar\omega^{(0)} + \mu_0 H(g-g') M, \\ \hbar\omega_\sigma &= \hbar\omega^{(0)} + \mu_0 H[gM - g'(M \pm 1)]. \end{aligned} \quad (51.3)$$

* Además de esta regla, están prohibidas las transiciones con $M = M' = 0$ si a la vez es $J' = J$. Esto se ve inmediatamente en las expresiones generales III (29.7) de los elementos de matriz de un vector arbitrario.

En el caso particular en que $g = g'$, tenemos

$$\hbar\omega_{\pi} = \hbar\omega_0, \quad \hbar\omega_{\sigma} = \hbar\omega^{(0)} \mp \mu_0 g H, \quad (51.4)$$

con independencia del valor de M ; dicho de otra manera, en este caso la raya se desdobra en un triplete con una componente π no desplazada y, simétricamente colocadas a ambos lados de la misma, dos componentes σ (este es el llamado *efecto Zeeman «normal»*).

La probabilidad total de emisión (en todas direcciones) es proporcional al cuadrado del módulo $|\langle n'JM' | d_{-m} | nJM \rangle|^2$. Por ello, en virtud de la fórmula (46.19) con $j = 1$, la probabilidad relativa de radiación para cada una de las componentes Zeeman de una rayapectral es igual a

$$\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M' & m & -M \end{pmatrix}^2. \quad (51.5)$$

En el caso particular del efecto Zeeman «normal», se tienen en total tres componentes, cada una de las cuales resulta de transiciones con todos los M iniciales para un m dado. Puesto que

$$\sum_{MM'} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M' & m & -M \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{3} \quad (51.6)$$

[véase III (106.12)], en este caso la radiación de las tres componentes es igualmente probable.

Un mayor interés presenta, sin embargo, la intensidad relativa de las componentes Zeeman cuando se observan en una dirección determinada (respecto de la dirección del campo magnético aplicado a la fuente luminosa). Según (45.5), la probabilidad de radiación (y con ella también la intensidad de la raya) en una dirección dada \mathbf{n} es proporcional a $\sum |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{d}_{fi}|^2$, donde la suma se extiende a las dos polarizaciones independientes e posibles para el \mathbf{n} dado.

Cuando se observa a lo largo del campo (eje z), esta suma vale

$$|(d_x)_{fi}|^2 + |(d_y)_{fi}|^2,$$

o bien, pasando a componentes esféricas:

$$|(d_1)_{fi}|^2 + |(d_{-1})_{fi}|^2.$$

Esto significa que en una dirección longitudinal (respecto del campo) se observan solamente las dos componentes σ ($m = \pm 1$). Sus intensidades son proporcionales a

$$\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M \mp 1 & \pm 1 & -M \end{pmatrix}^2. \quad (51.7)$$

Dado que poseen valores determinados de la proyección del momento cinético m

a lo largo de la dirección de propagación, estas rayas tienen una polarización circular, levógiro ($m = 1$) y dextrógiro ($m = -1$) (véase § 8).

Si la radiación se observa en una dirección perpendicular al campo (dirección que tomaremos como eje x), la intensidad resulta proporcional a la suma

$$|(d_z)_{fi}|^2 + |(d_y)_{fi}|^2 = |(d_0)_{fi}|^2 + \frac{1}{2} \{ |(d_1)_{fi}|^2 + |(d_{-1})_{fi}|^2 \}.$$

Así, pues, en una dirección transversal se observan dos componentes σ y una componente π con intensidades que son proporcionales a

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M \mp 1 & \pm 1 & -M \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M & 0 & -M \end{pmatrix} \quad (51.8)$$

respectivamente (las intensidades de las componentes σ son la mitad que en el caso de observación longitudinal). Además, la componente π está polarizada linealmente a lo largo del eje z y las componentes σ se observan en aquella dirección como polarizadas linealmente a lo largo del eje y .

Hay que observar que las intensidades relativas de las componentes Zeeman vienen por completo determinadas por los valores iniciales y finales de J y M , con independencia de las otras características de los niveles.

Las reglas de selección prohíben las transiciones dipolares eléctricas entre componentes Zeeman de un mismo nivel, puesto que todas ellas poseen la misma paridad. Por la misma causa que se señaló al final del último párrafo en el caso de las transiciones entre componentes de estructura hiperfina de un nivel, dichas transiciones se producen en la forma dipolar magnética. En virtud de la regla de selección respecto del número M , las transiciones tienen lugar solamente entre componentes contiguas ($M' - M = \pm 1$).*

El desdoblamiento de los niveles de un átomo en un campo eléctrico débil (*efecto Stark*), en contraste con el desdoblamiento de un campo magnético, no conduce a una supresión total de la degeneración según las direcciones del momento cinético. Todos los niveles, con la excepción de los niveles en los que $M = 0$, presentan una degeneración doble: a cada uno corresponden dos estados con las proyecciones del momento M y $-M$.

El cálculo de las intensidades relativas de las componentes Stark de una raya espectral es del todo análogo al expuesto antes para el efecto Zeeman**. Con todo, no hay que perder de vista que a la intensidad de las componentes π contribuyen (cuando $M \neq 0$) las transiciones $M \rightarrow M$ y $-M \rightarrow -M$, y a la intensidad de las

* Las frecuencias de estas transiciones se encuentran de ordinario en la gama centimétrica, y se observan en la absorción y en la emisión inducida (resonancia paramagnética de los electrones): los átomos absorbentes se encuentran en un intenso campo magnético constante (que provoca el desdoblamiento Zeeman) y en el campo débil de radiofrecuencia correspondiente a la resonancia.

** Nos referimos aquí al efecto Stark cuadrático, efecto que se manifiesta en todos los átomos con excepción del hidrógeno (véase III, § 76). El campo se supone tan débil que el desdoblamiento que provoca de los niveles es pequeño, incluso comparado con los intervalos de estructura fina.

componentes σ , las transiciones $M \rightarrow M \pm 1$ y $-M \rightarrow -(M \pm 1)$. En consecuencia, por ejemplo, en la observación transversal del efecto las intensidades de las componentes π son proporcionales a

$$2 \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M & 0 & -M \end{pmatrix}^2,$$

y las intensidades de las componentes σ lo son a las sumas

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M \pm 1 & \mp 1 & -M \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -M \mp 1 & \pm 1 & M \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M \pm 1 & \mp 1 & -M \end{pmatrix}^2$$

(recordemos que al cambiar de signo todos los números de la segunda fila, los símbolos-3j pueden cambiar únicamente de signo, con lo que no varían sus cuadrados).

En un campo exterior, incluso si es débil, el momento cinético \mathbf{J} deja en rigor de conservarse; en un campo uniforme se cumple de manera exacta únicamente la conservación de la proyección del momento M . Por ello, también en las transiciones radiativas en un campo débil la conservación del momento cinético se convierte en algo no necesario y en el espectro de los átomos pueden aparecer rayas prohibidas por las reglas ordinarias de selección.

El cálculo de las intensidades de estas rayas se reduce al de las correcciones en la matriz del momento dipolar, lo que a su vez exige la determinación de las correcciones en las funciones de onda de los estados estacionarios. En la primera aproximación de la teoría de perturbaciones (respecto del campo exterior débil), en la función de onda aparecen «mezclas» de estados que se encuentran ligados con el de partida por elementos de matriz de la perturbación no nulos ($-\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$ en un campo eléctrico): la contribución de un estado ψ_2 al estado ψ_1 es

$$\frac{-\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_{21}}{E_1 - E_2} \psi_2.$$

Como resultado, en el elemento de matriz de la transición «prohibida» aparece un término

$$\frac{-(\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_{21}) \mathbf{d}_{32}}{E_1 - E_3},$$

que es diferente de cero si están permitidas las transiciones desde el estado «intermedio» 2 a los estados inicial y final 1 y 3.

§ 52. Radiación de los átomos. El átomo de hidrógeno

El átomo de hidrógeno es el único caso en que el cálculo de los elementos de matriz de una transición se puede efectuar hasta el fin en forma analítica (W. Gordon, 1929).

La paridad de un estado del átomo de hidrógeno es igual a $(-1)^l$, es decir, viene determinada únicamente por el momento cinético orbital del electrón (recordemos que el número l , en tanto determina la paridad de un estado, conserva su sentido incluso para las funciones de onda relativistas exactas, es decir, las que tienen en cuenta la interacción spin-órbita). Por consiguiente, la regla de selección respecto de la paridad prohíbe rigurosamente las transiciones dipolares eléctricas en las que no cambia l ; sólo son posibles las transiciones con $l \rightarrow l \pm 1$. En cambio, la variación del número cuántico principal n no está sometida a limitación alguna.

El momento dipolar del átomo de hidrógeno se reduce al vector posición del electrón $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$. Dado que la función de onda del electrón en el átomo de hidrógeno es el producto de una parte angular y de una función radial R_{nl} , también los elementos de matriz reducidos del vector posición aparecen en forma de producto

$$\langle n', l-1 \parallel r \parallel nl \rangle = \langle l-1 \parallel v \parallel l \rangle \int_0^{\infty} R_{n', l-1} r R_{nl} r^3 dr,$$

donde $\langle l-1 \parallel v \parallel l \rangle$ son los elementos de matriz reducidos del versor v de r . Estos son iguales a

$$\langle l-1 \parallel v \parallel l \rangle = \langle l \parallel v \parallel l-1 \rangle^* = i\sqrt{l}$$

(véase el problema en III, § 29). De esta manera,

$$\langle n', l-1 \parallel r \parallel nl \rangle = -\langle nl \parallel r \parallel n', l-1 \rangle = i\sqrt{l} \int_0^{\infty} R_{n', l-1} R_{nl} r^3 dr. \quad (52.1)$$

Las funciones radiales no-relativistas del espectro discreto del átomo de hidrógeno vienen dadas por la fórmula III (36.13)^{*}

$$R_{nl} = \frac{2}{n^{l+2} (2l+1)!} \sqrt{\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}} (2r)^l e^{-r/l} F\left(-n+l+1, 2l+2, \frac{2r}{n}\right). \quad (52.2)$$

La integral (52.1), que contiene el producto de dos funciones hipergeométricas degeneradas, se calcula mediante las fórmulas deducidas en III, § f^{**}. El cálculo conduce al resultado

$$\begin{aligned} \langle n', l-1 \parallel r \parallel nl \rangle &= \\ &= i\sqrt{l} \frac{(-1)^{n'-1}}{4(2l-1)!} \sqrt{\frac{(n+l)!(n'+l-1)!}{(n-l-1)!(n'-l)!}} \frac{(4nn')^{l+1} (n-n')^{n+n'-2l-2}}{(n+n')^{n+n'}} \times \end{aligned}$$

* En este párrafo utilizamos unidades atómicas. En unidades ordinarias, las expresiones que se dan más adelante para los elementos de matriz de la coordenada deben multiplicarse por \hbar^2/mc^2 (si se trata de un ion hidrogenoide de número atómico Z , por \hbar^2/mZe^2).

** Siguiendo las notaciones introducidas allí, se trata de calcular la integral $J_{2l+2}^{12}(-n+l+1, -n'+l)$. Este cálculo se efectúa mediante las fórmulas (f, 12-16).

$$\times \left\{ F\left(-n+l+1, -n'+l, 2l, -\frac{4nn'}{(n-n')^2}\right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^2 F\left(-n+l-1, -n'+l, 2l, -\frac{4nn'}{(n-n')^2}\right) \right\}, \quad (52.3)$$

donde las $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ son funciones hipergeométricas. Dado que los parámetros α, β son iguales en el presente caso a números enteros negativos (o a cero), estas funciones se reducen a polinomios \star .

Como referencia, he aquí las expresiones que se obtienen a partir de (52.3) en algunos casos particulares (el valor de l se indica mediante el símbolo espectroscópico s, p, d, \dots):

$$\begin{aligned} |\langle 1s \parallel r \parallel np \rangle|^2 &= \frac{2^8 n^7 (n-1)^{2n-5}}{(n+1)^{2n+5}}, \\ |\langle 2s \parallel r \parallel np \rangle|^2 &= \frac{2^{17} n^7 (n^2-1) (n-2)^{2n-6}}{(n+2)^{2n+6}}, \\ |\langle 2p \parallel r \parallel nd \rangle|^2 &= \frac{2^{18} n^9 (n^2-1) (n-2)^{2n-7}}{3(n+2)^{2n+7}}, \\ |\langle 2p \parallel r \parallel ns \rangle|^2 &= \frac{2^{15} n^9 (n-2)^{2n-6}}{3(n+2)^{2n+6}}. \end{aligned} \quad (52.4)$$

La fórmula (52.3) no vale para las transiciones en que no varía el número cuántico principal n (transiciones entre componentes de estructura fina de un nivel). En este caso ($n = n'$) para efectuar la integración partiremos de la representación de las funciones radiales mediante polinomios generalizados de Laguerre

$$R_{nl} = -\frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}} e^{-r/n} \left(\frac{2r}{n}\right)^l L_{n+l}^{2l+1} \left(\frac{2r}{n}\right). \quad (52.5)$$

En la integral

$$\int_0^\infty R_{n,l-1} R_{nl} r^3 dr \approx \int_0^\infty e^{-\rho} \rho^{2l+2} L_{n+l}^{2l+1}(\rho) L_{n+l-1}^{2l-1}(\rho) d\rho$$

substituiremos uno de los polinomios por su expresión en función de la derivada (véase III, § d):

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = -\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!} e^\rho \rho^{-2l-1} \left(\frac{d}{d\rho}\right)^{n-l-1} e^{-\rho} \rho^{n+l}.$$

Después de integrar por partes ($n-l-1$) veces obtendremos una integral de la forma

\star Tablas numéricas de los elementos de matriz y de las probabilidades de transición pueden encontrarse en la obra de H. A. Bethe y E. E. Salpeter, Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Systems, en Encyclopedia of Physics, Vol 35, Atoms I, Berlin, Springer 1957.

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho} \rho^{n+l} \left(\frac{d}{d\rho}\right)^{n-l-1} \rho L_{n+l-1}^{2l-1}(\rho) d\rho,$$

en la que se substituye el polinomio de Laguerre por su expresión explícita de acuerdo con la fórmula

$$L_n^m(\rho) = (-1)^m m! \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n}{m+k} \frac{(-\rho)^k}{k!}.$$

Efectuada la derivación, en la suma quedan solamente tres términos, y la integración que sigue es elemental. El cálculo conduce al simple resultado:

$$\langle n, l-1 \parallel r \parallel nl \rangle = l \sqrt{l} \cdot \frac{3}{2} n \sqrt{n^2 - l^2}. \quad (52.6)$$

La integral

$$\int_0^{\infty} R_{n',l-1} R_{nl} r^3 dr = \int_0^{\infty} \chi_{n',l-1}(r) \chi_{nl}(r) dr$$

(en la que $\chi_{nl} = r R_{nl}$) es el coeficiente del desarrollo de la función $r \chi_{nl}$ en el sistema de funciones ortogonales $\chi_{n',l-1}$ ($n' = 1, 2, \dots$). La suma de los cuadrados de los módulos de estos coeficientes es igual a la integral del cuadrado de la función que se ha desarrollado *. Por ello,

$$\sum_{n'} |\langle n', l-1 \parallel r \parallel nl \rangle|^2 = l \int_0^{\infty} r^2 \chi_{nl}^2 dr. \quad (52.7)$$

Utilizando la conocida expresión para el valor medio del cuadrado r^2 en el estado nl [véase III (36.16)], se encontrará la siguiente regla de sumas

$$\sum_{n'} |\langle n', l-1 \parallel r \parallel nl \rangle|^2 = l \frac{n^2}{2} [5n^2 + 1 - 3l(l+1)]. \quad (52.8)$$

Para valores dados n , l y grandes valores n' , el elemento de matriz de la transición $nl \rightarrow n'l'$ disminuye según la ley

$$|\langle n'l' \parallel r \parallel nl \rangle|^2 \sim \frac{3}{n'^3}, \quad (52.9)$$

lo que cabe comprobar tanto partiendo de las expresiones particulares (52.4), como de la fórmula general (52.3). Este resultado es del todo natural: los niveles coulombianos de energía $E' = -1/2n'^2$ se distribuyen de manera casi continua cuando n' es grande y la probabilidad de transición a un nivel cualquiera en el intervalo dE' es proporcional a la densidad de distribución de estos niveles, que a su vez es $\sim n'^{-3}$.

* La suma se extiende tanto a los estados del espectro discreto como a los del continuo.

El efecto Stark en el hidrógeno tiene, como es sabido, una peculiaridad específica (III, § 77): el desdoblamiento es proporcional a la primera potencia del campo eléctrico. Aunque se supone que el campo no es intenso (condición de aplicabilidad de la teoría de perturbaciones), se supone al mismo tiempo que lo es suficientemente como para que el desdoblamiento de los niveles sea grande comparado con su estructura fina. En estas condiciones, el valor absoluto del momento cinético no se conserva en general y los niveles deben clasificarse según los números cuánticos parabólicos n_1, n_2, m . El último de éstos, el número cuántico magnético m , determina como antes la proyección del momento cinético orbital sobre el eje z (dirección del campo), que en las condiciones dadas (en que se prescinde de la interacción spin-órbita) se conserva. Por ello, para dicho número vale la regla ordinaria de selección

$$m' - m = 0, \pm 1. \quad (52.10)$$

En cambio, no hay limitaciones para la variación de los números n_1, n_2 .

Los elementos de matriz del momento dipolar en coordenadas parabólicas también pueden calcularse analíticamente. Sin embargo, las fórmulas que se obtienen son muy engorrosas y no nos entretendremos en deducirlas aquí *.

PROBLEMA

Hallar el desdoblamiento Stark de los niveles del hidrógeno en el caso en que la magnitud del desdoblamiento es pequeña comparada con los intervalos de estructura fina (pero grande en comparación con el corrimiento Lamb).

Solución. En las condiciones indicadas subsiste una degeneración doble de los niveles no perturbados con $l = j \pm 1/2$ debido a lo cual el desdoblamiento Stark sigue siendo lineal respecto del campo. El valor del desdoblamiento Δ se determina a partir de la ecuación secular

$$\begin{vmatrix} -\Delta & -E(d_z)_{12} \\ -E(d_z)_{21} & -\Delta \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \pm E |(d_z)_{12}|$$

(los índices 1, 2 corresponden a los estados con $l = j \pm 1/2$ y un valor dado del número cuántico magnético m ; la perturbación $V = -Ed_z$ es diagonal respecto de m y carece de elementos diagonales según l). El elemento de matriz de la magnitud orbital d_z se calcula mediante las fórmulas III (29.7), III (109.3), según las cuales

$$\langle j, l=1, m | d_z | jm \rangle = \frac{m}{Vj(j+1)(2j+1)} \langle j, l=1 || d || jl \rangle,$$

$$\langle j, l=1 || d || jl \rangle = -(2j+1) \left\{ \begin{matrix} l-1 & j-1/2 \\ j & l-1 \end{matrix} \right\} \langle l-1 || d || l \rangle,$$

debiendo hacer en ellas $l = j + 1/2$; la cantidad $\langle l-1 || d || l \rangle$ se toma de (52.6). En definitiva obtendremos

* Estas fórmulas y las correspondientes tablas numéricas pueden verse en el libro de H. Bethe y E. Salpeter ya citado.

$$\Delta = \pm \frac{3}{4} \sqrt{n^2 - (j + \frac{1}{2})^2} \frac{nm}{j(j+1)} E.$$

§ 53. La radiación por moléculas diatómicas. Espectros electrónicos

Las características específicas de los espectros moleculares están vinculadas, en primer término, con la descomposición de la energía de la molécula en una parte electrónica, otra vibratoria y una tercera de rotación, cada una de las cuales es pequeña comparada con la que le precede. La estructura de los niveles de las moléculas diatómicas se estudió detenidamente en III, cap. XI. Aquí nos ocuparemos de explicar las características del espectro que resulta y de calcular las intensidades de sus rayas*.

Comencemos por el caso general en que en la transición cambia el estado electrónico de la molécula (y con él, en general, también el estado vibratorio y de rotación). Las frecuencias de estas transiciones se encuentran en las regiones visible y ultravioleta del espectro. Tomadas en conjunto, de ellas se suele decir que constituyen el *espectro electrónico* de la molécula. Además, nos referiremos siempre a transiciones dipolares eléctricas; las transiciones de otros tipos son generalmente de muy poca importancia en la espectroscopía molecular.

Como en las transiciones dipolares en un sistema cualquiera, vale aquí la regla de selección para el momento cinético total de la molécula J :

$$|J' - J| \leq 1 \leq J + J'. \quad (53.1)$$

A la regla de selección rigurosa relativa a la paridad del sistema corresponde en el caso presente una regla de selección respecto del *signo* del nivel; recordemos que, según la terminología adoptada en espectroscopía molecular, los estados con funciones de onda que no cambian o que cambian de signo en la inversión (cambio de signo de las coordenadas de los electrones y de los núcleos) se llaman *positivos* o *negativos*. Tenemos así la regla rigurosa:

$$+ \rightarrow -, \quad - \rightarrow +. \quad (53.2)$$

Si la molécula está constituida por átomos idénticos (con núcleos de un mismo isótopo), aparece la clasificación de los niveles respecto de la permutación de las coordenadas de los núcleos: niveles *simétricos* (s), con funciones de onda que no cambian de signo en esta transformación, y niveles *antisimétricos* (a), que sí cambian de signo. Dado que el operador momento dipolar eléctrico no se ve afectado en modo alguno por dicha transformación, sus elementos de matriz son diferentes de cero tan sólo para transiciones sin cambio de esta simetría**:

$$s \rightarrow s, \quad a \rightarrow a. \quad (53.3)$$

* La exposición que sigue se basa en el material contenido en III, §§ 78, 82-88. Para no recargar el texto, prescindiremos de las constantes referencias a estos párrafos.

** Esta regla se aplica también, evidentemente, a las transiciones de multipolaridad cualquiera.

Esta regla, sin embargo, no es absolutamente rigurosa. Ocurre, en efecto, que la existencia en un nivel de la propiedad de simetría en cuestión depende de que exista en la molécula un determinado valor del spin total de los núcleos I . Dada la extrema debilidad de la interacción de los spins nucleares con los electrones, el spin I se conserva con una gran precisión, pero, con todo, no rigurosamente. Si se tiene en cuenta esta interacción, I no tendrá un valor determinado, la propiedad de simetría (s o a) no se conserva y se pierde la regla de selección (53.3).

Los términos electrónicos de una molécula formada por átomos idénticos se caracterizan también por su *paridad* (g o u), es decir, por el comportamiento de las funciones de onda al cambiar el signo de las coordenadas de los electrones (contadas tomando como origen el centro de la molécula) manteniendo invariables las coordenadas de los núcleos. Existe una íntima relación entre esta propiedad del término electrónico, de una parte, y la simetría nuclear y el signo de los niveles de rotación que corresponden a este término, de otra. Los niveles que corresponden a un término electrónico par (g) pueden tener las características $s +$ o $a -$, y los que corresponden a un término impar, las características $s -$ o $a +$. De las reglas (53.2) y (53.3) se sigue, en consecuencia, también la regla

$$g \rightarrow u, \quad u \rightarrow g. \quad (53.4)$$

Como regla aproximada (53.4), sigue siendo válida para las moléculas formadas por isótopos diferentes de un mismo elemento. Dado que las cargas de los núcleos son las mismas, al considerar un término electrónico con los núcleos en reposo el sistema objeto de estudio es un conjunto de electrones en un campo eléctrico que posee un centro de simetría (el punto medio del segmento que une los dos núcleos). La simetría de la función de onda electrónica respecto de la inversión en este punto determina también la paridad del término, y dado que el vector del momento dipolar eléctrico cambia de signo en esta transformación, llegamos a la regla (53.4). El carácter aproximado de la regla basada únicamente en este razonamiento resulta de la necesidad de admitir que los núcleos se encuentran en reposo. Por ello, esta regla se viola al tener en cuenta la interacción entre un estado electrónico y la rotación de la molécula.

Otras reglas de selección están ligadas con ciertas hipótesis concretas acerca del valor relativo de diferentes interacciones en la molécula (es decir, acerca de su tipo de enlace). Por esta razón dichas reglas sólo pueden ser aproximadas.

La mayoría de los términos electrónicos de las moléculas diatómicas corresponde a los tipos de enlace a o b . Ambos tipos se caracterizan por el hecho de que el enlace del momento cinético orbital con el eje (interacción eléctrica de ambos átomos en la molécula) es grande comparada con todas las demás interacciones. Debido a ello aparecen los números cuánticos Λ y S (proyección del momento orbital de los electrones sobre el eje de la molécula y spin total de los mismos). El operador de una magnitud orbital — como el momento cinético orbital de los electrones — commuta con el operador de spin, de modo que

$$S' - S = 0 \quad (\text{casos } a, b) \quad (53.5)$$

En cambio, la variación del número Λ está sometida a la regla de selección

$$\Lambda' - \Lambda = 0, \pm 1 \quad (\text{casos } a, b) \quad (53.6)$$

a la cual, para las transiciones entre estados con $\Lambda = 0$ (términos Σ), hay que añadir la regla:

$$\Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+, \Sigma^- \rightarrow \Sigma^- \quad (\text{casos } a, b) \quad (53.7)$$

(recordaremos que los estados Σ^+ y Σ^- se distinguen por su comportamiento en la reflexión en un plano que pasa por el eje de la molécula). Las reglas (53.6-7) se obtienen considerando la molécula en un sistema de coordenadas unido rígidamente a los núcleos (véase III, § 87); la regla (53.6) es análoga a la regla de selección relativa al número cuántico magnético en el caso de los átomos.

Los tipos de enlace a y b difieren uno de otro en la relación entre la energía de interacción «spin-eje» y la energía de rotación (diferencias de los niveles de rotación). En el caso a la primera es mayor que la segunda, y en el caso b , mucho menor. En lo que sigue estudiaremos estos casos por separado.

Caso a . En este caso existe el número cuántico Σ — proyección del spin total sobre el eje de la molécula (y con él también el número $\Omega = \Sigma + \Lambda$, que es la proyección del momento cinético total). Si ambos estados (el inicial y el final) corresponden al caso a , vale la regla

$$\Sigma' - \Sigma = 0 \quad (\text{caso } a) \quad (53.8)$$

(que se sigue de la comutabilidad, ya recordada, del momento dipolar y el spin). De (53.6) y (53.8) se deduce^{*}:

$$\Omega' - \Omega = 0, \pm 1. \quad (53.9)$$

Si $\Omega = \Omega' = 0$, a la regla general (53.1) se añade otra que prohíbe las transiciones con $J' = J^{**}$:

$$J' - J = \pm 1 \text{ para } \Omega = \Omega' = 0 \quad (\text{caso } a) \quad (53.10)$$

Consideremos las transiciones entre dos niveles de vibración determinados cualesquiera que corresponden a dos términos electrónicos diferentes (del tipo a). Al tener en cuenta la estructura fina del término electrónico, cada uno de estos niveles se descompone en varias componentes, cuyo número ($2S + 1$) debe ser el mismo en ambos en virtud de la regla (53.5). Según la regla (53.8) cada una de

* Esta regla conserva su validez también en el caso c (enlace del momento orbital con el eje débil comparado con el enlace «spin-órbita»), cuando los números Λ y Σ no existen por separado.

** Esta regla es análoga a la prohibición de las transiciones con $J = J'$, cuando $M = M' = 0$, en el caso de los átomos (véase la nota en la pág. 198), en el que, sin embargo, sólo podía tener interés cuando existe un campo exterior. En el presente caso la regla se sigue directamente de la fórmula (53.12) que se deduce más adelante; el símbolo $3j \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se anula, para $J' = J$, cuando la suma $J' + J + 1$ es impar.

las componentes de un nivel se combina tan sólo con una de las componentes del otro, la que tenga el mismo valor de Σ .

Tomemos ahora un par de niveles con el mismo Σ ; sus valores Ω y Ω' pueden diferir (junto con Λ y Λ') en 0 o en ± 1 . Al tener en cuenta la rotación, cada uno de ellos se descompone en una sucesión de niveles que difieren en los valores de los números J y J' , los cuales toman valores $J \geq |\Omega|$, $J' \geq |\Omega'|$. La dependencia de las probabilidades de transición respecto de estos números puede establecerse de manera general (*H. Hönl, F. London, 1925*).

El elemento de matriz de la transición $n\Lambda\Omega JM_J \rightarrow n'\Lambda'\Omega'J'M'_J$ (n caracteriza, junto con Ω y Λ , el término electrónico) es igual a

$$|\langle n'\Lambda'\Omega'J'M'_J | d_q | n\Lambda\Omega JM_J \rangle| = \\ = V(2J+1)(2J'+1) \begin{pmatrix} J & 1 & J \\ -\Omega' & q' & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -M'_J & q & M_J \end{pmatrix} |\langle n'\Lambda' | \bar{d}_{q'} | n\Lambda \rangle|, \quad (53.11)$$

donde d_q y $\bar{d}_{q'}$ son las componentes esféricas del vector momento dipolar en el sistema de coordenadas en reposo xyz y en el sistema «móvil» $\xi\eta\zeta$ de eje ζ en el sentido del eje de la molécula, respectivamente [esta fórmula se obtiene mediante (b, 6) y equivale a las fórmulas III (87.3-4)]. Los elementos de matriz $\langle n'\Lambda' | d_{q'} | n\Lambda \rangle$ no dependen de los números cuánticos de rotación J , J' , sino solamente de las características de los términos electrónicos (además, en este caso, no dependen del número Σ^*); por esto, al designar el elemento de matriz se ha prescindido de los índices $\Omega' = \Lambda' + \Sigma$ y $\Omega = \Lambda + \Sigma$.

La probabilidad de la transición $n\Lambda\Omega J \rightarrow n'\Lambda'\Omega'J'$ es proporcional al cuadrado del elemento de matriz (53.11), sumado respecto de M'_J . En virtud de la fórmula III (106.12)

$$\sum_{M'_J} \left(\begin{matrix} J' & 1 & J \\ -M'_J & q & M_J \end{matrix} \right)^2 = \frac{1}{2J+1},$$

obtendremos

$$W(n\Lambda\Omega J \rightarrow n'\Lambda'\Omega'J') = (2J'+1) \left(\begin{matrix} J & 1 & J \\ -\Omega' & q' & \Omega \end{matrix} \right)^2 B(n', n; \Lambda', \Lambda), \quad (53.12)$$

donde los coeficientes B no dependen de J , J' (prescindimos, claro está, de la diferencia relativamente muy pequeña entre las frecuencias de las transiciones con valores J , J' diferentes)**.

* Esto cabe comprobarlo de manera análoga a como se procedió al principio de III, § 24, para la magnitud escalar f . En el presente caso, el operador de la magnitud vectorial \mathbf{d} commuta con el operador del vector \mathbf{S} , que se conserva (en la aproximación de orden cero), y Σ es la proyección de \mathbf{S} sobre el eje ζ en el sistema de coordenadas en rotación, en el cual hay que tener en cuenta también la condición de comutabilidad entre \mathbf{d} y \mathbf{S} .

** Cada uno de los niveles de rotación considerados J se desdobra en dos niveles al tener en cuenta la duplicación- Λ , de los cuales uno es positivo, y el otro negativo. Por consiguiente, en vez de una transición $J \rightarrow J'$ tendremos, al introducir la regla de selección (53.2), dos transiciones: de la componente positiva (negativa) del nivel J a la componente negativa (positiva) del nivel J' . Las probabilidades de estas transiciones son iguales.

Si se suma (53.12) respecto de J' , se obtendrá [en virtud de la propiedad de ortogonalidad de los símbolos-3j III (106.13)] simplemente $B(n', n; \Lambda', \Lambda)$. En otras palabras, la probabilidad total de transición desde un nivel de rotación J del estado Ω a todos los niveles J' del estado Ω' no depende J .

Caso *b*. En este caso, junto con el momento cinético total J existe también el número cuántico K —el momento cinético de la molécula sin tener en cuenta su spin—. Las reglas de selección respecto de este número coinciden con las reglas de selección generales para cualquier vector orbital (como es el momento dipolar eléctrico):

$$|K' - K| \leq 1 \leq K + K' \quad (\text{caso } b) \quad (53.13)$$

quedando además prohibida la transición con $K = K'$ cuando $\Lambda = \Lambda' = 0$ [de manera análoga a (53.10)]:

$$K' - K = \pm 1 \text{ cuando } \Lambda = \Lambda' = 0. \quad (53.14)$$

Consideremos las transiciones entre las componentes de rotación de determinados niveles vibratorios de dos estados electrónicos que pertenecen al tipo *b*. Las probabilidades de las transiciones entre ellos se determinan por las mismas fórmulas (53.12), en las que hay que escribir K, Λ en vez de J, Ω . Cuando se tiene en cuenta la estructura fina (y es $S \neq 0$), cada nivel de rotación K se desdobra en $2S + 1$ componentes con $J = |K - S|, \dots, K + S$ con lo cual en vez de una raya $J \rightarrow J'$ aparece un multiplete. Puesto que en el caso en cuestión se trata de la composición de dos momentos cinéticos libres \mathbf{K} y \mathbf{S} (no ligados con el eje de la molécula), las fórmulas de las probabilidades relativas de transición para las diferentes rayas de un multiplete coinciden con las fórmulas análogas (49.15) para las componentes de estructura fina de los espectros atómicos, en los que el mismo papel lo representan los momentos \mathbf{L} y \mathbf{S} (en el caso de enlace LS).

Hemos considerado así las reglas de selección que determinan las rayas del espectro posibles en todos los casos importantes que se pueden presentar en las moléculas diatómicas.

El conjunto de las rayas que corresponden a las transiciones entre componentes de rotación de dos niveles dados del tipo vibratorio-electrónico constituye, como se dice en espectroscopia, una banda; dada la pequeñez de los intervalos de rotación, las rayas en una banda aparecen muy juntas entre sí. Las frecuencias de estas rayas vienen dadas por las diferencias

$$\hbar\omega_{JJ'} = \text{const} + BJ(J+1) - B'J'(J'+1), \quad (53.15)$$

donde B, B' son las constantes de rotación en ambos estados electrónicos (para evitar complicaciones innecesarias suponemos que los términos electrónicos son singletes). Para $J' = J, J \pm 1$ la fórmula (53.15) se presenta gráficamente (fig. 2) por tres ramas (paráboles) cuyos puntos para valores J enteros determinan los valores de las frecuencias (la disposición de las ramas en la fig. 2 corresponden al

caso $B' < B$; cuando se tiene $B' > B$, se abren en el sentido de los valores de ω pequeños y, además, la rama superior corresponde a la curva para $J' = J - 1$)*. La existencia de una rama que se dobla conduce, como es claro en la figura, a un adensamiento de las rayas hacia una determinada posición límite (*arista o cabeza* de la banda).

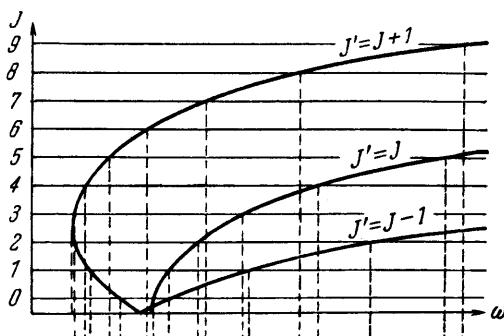


Fig. 2

Al hablar de intensidades de las rayas, hay que recordar también el peculiar fenómeno de *alternancia de las intensidades* en algunas bandas del espectro electrónico de las moléculas formadas por átomos de un mismo isótopo (*W. Heisenberg, F. Hund, 1927*). Las condiciones de simetría ligadas con los spins nucleares conducen a que, en los términos Σ electrónicos, las componentes de rotación con valores pares e impares de K posean simetría opuesta respecto de los núcleos y, de acuerdo con esto, diferentes pesos estadísticos nucleares g_s y g_a (véase III, § 86). Según la regla (53.14), en las transiciones entre dos términos Σ diferentes únicamente son admisibles los valores $J' = J \pm 1$; además, uno de los términos Σ debe ser par en virtud de la regla (53.4), y el otro, impar. Esto da lugar a que, para un valor dado de $J' - J$, las transiciones con valores consecutivos de J se producen alternativamente entre pares de niveles simétricos y pares de niveles antisimétricos (conforme ilustra el esquema de la fig. 3 en el caso de los estados Σ_g^+ y Σ_u^+). Por otra parte, la intensidad observable de una raya es proporcional al número de moléculas que se encuentran en un estado inicial dado y, en consecuencia, a su peso estadístico. Por ello, la intensidad de las rayas consecutivas ($J = 0, 1, 2, \dots$) será alternativamente mayor y menor, proporcional a g_s y g_a alternadamente [junto con la marcha monótona que predicen las fórmulas (53.12)]**.

Para la variación del número cuántico vibratorio en las transiciones entre dos términos electrónicos diferentes no existe ninguna regla de selección rigurosa; sin

* Las series de rayas que corresponden a las transiciones con $J' = J + 1, J, J - 1$, se llaman ramas P , Q y R , respectivamente.

** En todo esto se supone que los estados con diferentes valores del spin nuclear total están igualmente poblados.

embargo, sí existe una regla (*principio de Frank-Condon*) que permite predecir el cambio más probable de un estado de vibración. Dicha regla se basa en el carácter cuasiclásico del movimiento de los núcleos, carácter que se debe al hecho de que su masa es grande (cf. lo dicho acerca de la predisociación en III, § 90) *.

En la integral que determina el elemento de matriz de la transición entre estados vibratorios E y E' de los términos electrónicos $U(r)$ y $U'(r)$, el papel principal lo representa el entorno del punto $r = r_0$ en el cual

$$U(r_0) - U'(r_0) = E - E' \quad (53.16)$$

(es decir, los impulsos del movimiento relativo de los núcleos son iguales en ambos estados: $p = p'$). Para un valor dado E la probabilidad de la transición (en función de la energía final E') es tanto mayor cuanto menor es cada una de las diferencias $E - U$ y $E' - U'$. Dicha probabilidad es máxima cuando

$$E - U(r_0) = E' - U'(r_0) = 0, \quad (53.17)$$

es decir, cuando «el punto de transición» r_0 [raíz de la ecuación (53.16)] coincide con el punto de parada clásico de los núcleos (la fig. 4 ilustra gráficamente esta relación entre E y el más probable valor E'). De una manera intuitiva cabe decir que la transición alcanza su mayor probabilidad cerca del punto en el que los núcleos se detienen y en el entorno del cual pasan, en consecuencia, relativamente la mayor parte del tiempo **.

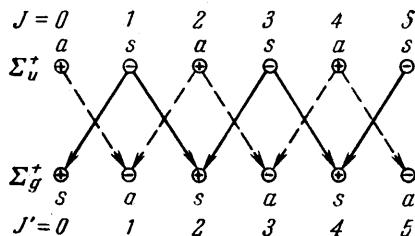


Fig. 3

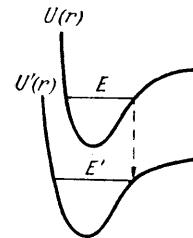


Fig. 4

§ 54. Radiación por moléculas diatómicas. Espectros vibratorio y de rotación

Las reglas de selección y las fórmulas para las probabilidades de transición presentadas en el párrafo que precede conservan también su validez en las transi-

* Rigurosamente hablando, es también necesario que el número cuántico vibratorio sea suficientemente grande.

** El problema de hallar (en la aproximación cuasiclásica) la distribución de probabilidad de las diferentes transiciones cerca de su máximo es idéntico al del ejercicio 3 en III, § 90, del cual difiere únicamente en el significado de algunos símbolos.

ciones en las que no varía el estado electrónico de la molécula*. Examinaremos aquí tan sólo algunas peculiaridades específicas de estas transiciones.

En primer lugar, la regla de selección (53.4) prohíbe en general las transiciones (dipolares) sin variación del estado electrónico en las moléculas constituidas por átomos idénticos, puesto que en una tal transición la paridad del término electrónico no cambiaría. Conforme se sigue de lo dicho en el § 53, esta prohibición únicamente podría violarse al tener en cuenta la interacción de los spins nucleares con los electrones y, cuando las moléculas están formadas por isótopos diferentes de un mismo elemento, debido a la influencia de la rotación sobre el estado electrónico.

El cálculo de los elementos de matriz del momento dipolar se reduce (según las fórmulas III, § 87) a su cálculo en un sistema de coordenadas que gira junto con la molécula. La función de onda de ésta en dicho sistema es el producto de la función de onda de los electrones para la distancia dada r entre núcleos y la función de onda del movimiento vibratorio de éstos en el campo efectivo $U(r)$ de los electrones y los núcleos. Si se prescinde por completo de la influencia del movimiento de estos últimos sobre el estado de los electrones, las funciones de onda electrónicas inicial y final son las mismas en las transiciones consideradas. La integración respecto de las coordenadas de los electrones da por ello en el elemento de matriz simplemente el momento dipolar medio de la molécula \bar{d} (dirigido, evidentemente, a lo largo de su eje) como función de la distancia r . Dada la pequeña amplitud de las vibraciones, se puede desarrollar la función $\bar{d}(r)$ en serie de potencias de la coordenada vibratoria $q = r - r_0$. En las transiciones acompañadas de cambio del estado vibratorio desaparece el término nulo del desarrollo del elemento de matriz en virtud de la ortogonalidad de las funciones de onda del movimiento de vibración en un mismo campo $U(q)$, de modo que queda un término proporcional a q . Si se consideran las vibraciones como armónicas, según las conocidas propiedades del oscilador lineal (III, § 23) los elementos de matriz serán diferentes de cero tan sólo para transiciones entre estados vibratorios vecinos; en otras palabras, para el número cuántico vibratorio v valdrá la regla de selección

$$v' - v = \pm 1. \quad (54.1)$$

Esta regla, sin embargo, se viola al tener en cuenta el carácter anarmónico de las vibraciones, y también los términos que siguen en el desarrollo de la función $\bar{d}(q)$.

En una transición puramente de rotación (sin que cambie también el estado vibratorio) el elemento de matriz de la proyección del momento dipolar sobre el eje en movimiento ζ se puede igualar simplemente al valor medio del momento dipolar de la molécula $\bar{d} = \bar{d}(0)**$. Para la probabilidad de la transición $J \rightarrow J - 1$

* Las transiciones en las que cambia el estado de vibración (y con él también el de rotación) constituyen, como suele decirse, el *espectro vibratorio* de la molécula; éste se encuentra en la región del infrarrojo próximo (longitud de onda $< 20 \mu$). En cambio, las transiciones en las que varía solamente el estado de rotación forman el *espectro de rotación*, que se encuentra en la región del infrarrojo alejada (longitudes de onda $> 20 \mu$).

** En una molécula formada por átomos idénticos se tiene $\bar{d} = 0$, como es evidente por razones de simetría.

se obtiene en definitiva la fórmula

$$w(nJ \rightarrow n, J-1) = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} d^2 \frac{J^2 - \Omega^2}{J(2J+1)}, \quad (54.2)$$

que permite calcular no sólo los valores relativos [como (53.12)] de las probabilidades, sino también sus valores absolutos. [La fórmula (54.2) se refiere al caso *a*; en el caso *b*, hay que escribir K , Λ en vez de J , Ω].

Las frecuencias de las transiciones puramente rotatorias vienen dadas por las diferencias de las energías de rotación $B(J+1)$ y son iguales a

$$\hbar\omega_{J, J-1} = 2BJ. \quad (54.3)$$

Las rayas consecutivas se encuentran a iguales distancias ($2B$) una de otra.

§ 55. Radiación de los núcleos

En la radiación γ de los núcleos se cumple, como regla general, la condición de que las dimensiones del sistema (del radio del núcleo R) sean pequeñas comparadas con la longitud de onda del fotón. Con todo, la distancia entre los niveles nucleares (y por ello mismo también la energía de los cuantos γ) de ordinario es pequeña comparada con la energía por nucleón en el núcleo. Por consiguiente, la cantidad R/λ no está ligada directamente con la velocidad v/c de los nucleones en el núcleo y, en general, es considerablemente más pequeña que ésta. De acuerdo con ello, también la probabilidad de la radiación Ml será por lo general, mayor que la probabilidad de la radiación $E, l+1$ (cf. el principio del § 50).

Las reglas generales de selección relativas al momento cinético total del núcleo (su « spin ») y a la paridad son las mismas que para la radiación de un sistema cualquiera. Un rasgo característico de la radiación nuclear lo constituye la abundancia de transiciones de multipolaridad elevada. En contraste con los átomos, cuya radiación de ordinario es del tipo dipolar eléctrico, en un núcleo a bajas energías tales transiciones son relativamente raras, resultando prohibidas por reglas de selección.

Si una transición radiativa de un núcleo se puede considerar como transición relativa a una sola partícula — variación del estado de un nucleón sin que cambie el estado del « armazón » nuclear —, a dichas reglas se añaden las de selección relativas al momento cinético de este nucleón. Sin embargo, la precisión con que se cumplen estas reglas de selección « para una sola partícula » resulta ser de hecho muy pobre.

Son específicas de un núcleo las reglas de selección correspondientes al spin isotópico. Recordemos que la proyección T_3 del spin isotópico viene ya determinada por el número de masa y el número atómico del núcleo:

$$T_3 = \frac{1}{2}(Z - N) = Z - \frac{A}{2}.$$

Ahora bien, para un valor dado de T_3 el módulo del spin isotópico puede tener cualquier valor $T \geq |T_3|$. La regla de selección relativa al número T para las transiciones radiativas resulta como consecuencia de que los operadores de los momentos eléctrico y magnético del núcleo, expresados en función de los operadores de spin isotópico de los nucleones, son suma de un escalar y de la componente x_3 de un vector en el espacio isotópico (véase III, § 115). En consecuencia, sus elementos de matriz son diferentes de cero únicamente bajo la condición de que

$$T' - T = 0, \pm 1. \quad (55.1)$$

Sin embargo, esta regla no impone de suyo limitaciones especiales a las transiciones en los núcleos ligeros (para los cuales únicamente cabe hablar con precisión suficiente de conservación del spin isotópico). Ello se debe a que entre los niveles más bajos de estos núcleos no existen de hecho niveles con $T > 1$.

Pero para las transiciones $E1$ existe todavía una regla complementaria, vinculada ésta con el hecho de que desaparece la componente isotópica-escalar del momento dipolar eléctrico y su operador queda reducido a la componente x_3 del vector isotópico (véase III, § 115). Por consiguiente, si $T_3 = 0$, quedan prohibidas además las transiciones en las que $\Delta T = 0$. En otras palabras, en los núcleos con números iguales de neutrones o de protones ($N = Z, A = 2Z$) las transiciones $E1$ son posibles sólo cuando

$$T' - T = \pm 1 \quad (T_3 = 0). \quad (55.2)$$

Claro está, la precisión con que se cumple esta regla depende de la precisión con que se conserve el spin isotópico del núcleo.

Sobre el valor de la probabilidad de las transiciones $E1$ en un núcleo influye también el efecto de retroceso del armazón nuclear como consecuencia del movimiento de los nucleones individuales. Este efecto conduce a que en la formación del momento dipolar los protones participen con una carga efectiva $e(1 - Z/A)$ en vez de e , y los neutrones, con una carga $-eZ/A$ en vez de 0 (véase III, § 117). La disminución de la carga efectiva de un protón lleva a que la probabilidad de las transiciones $E1$ sea algo menor.

Los niveles de energía de los núcleos no esféricos poseen una estructura de rotación. Debido a ello, en el espectro de rayos γ se manifiesta una estructura rotacional específica de tales núcleos.

La simetría del campo en que se mueven los nucleones en un núcleo « inmóvil » no esférico (con simetría axial), coincide con la simetría del campo en que se mueven los electrones en una molécula diatómica « inmóvil » formada por átomos iguales (grupo puntual $C_{\infty h}$). Por ello, las propiedades de simetría de los niveles de un núcleo no esférico (y también, por lo tanto, las reglas de selección para los elementos de matriz) son análogas a las de la simetría de los niveles de las moléculas diatómicas (véase III, § 118). En particular, como en dichas moléculas cuando están formadas por átomos idénticos, resultan prohibidas las transiciones dipolares eléctricas dentro

de una misma banda de rotación (es decir, sin que varíe el estado interno del núcleo) — cf. § 54 —. Tales transiciones ocurren, por ello, como transiciones $E2$ o $M1$. En el primer caso el momento cinético total del núcleo J puede cambiar en 2 ó 1, y en el segundo, en 1.

Según (46.9) la probabilidad de transición cuadripolar, sumada respecto de los valores de la proyección M' del momento total del núcleo en el estado final, vale:

$$w_{E2} = \frac{\omega^5}{15\hbar c^5} \sum_{M'} |\langle J' \Omega M' | Q_{2,-m}^{(3)} | J \Omega M \rangle|^2$$

(J es el momento cinético total del núcleo; Ω , su proyección sobre el eje del mismo; $m = M - M'$). Mediante (b, 7) esta suma se expresa en función de los cuadrados de magnitudes dadas, es decir, de los momentos cuadripolares diagonales (respecto del estado interno del núcleo) de la transición $\bar{Q}_{2\lambda}$, determinados respecto de los ejes de coordenadas $\xi\eta\zeta$ ligados con el núcleo. Además, $\lambda = \Omega - \Omega'$, de modo que, en este caso ($\Omega' = \Omega$), figura solamente la componente \bar{Q}_{20} . Por definición, se llama momento cuadripolar, simplemente, a la cantidad

$$eQ_0 = e \int p_{ii} (2\xi^2 - \xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta d\zeta = -2e(\bar{Q}_{20})_{ii}.$$

Obtendremos así

$$w_{E2}(\Omega J \rightarrow \Omega J') = \frac{\omega^5}{60\hbar c^5} Q_0^2 (2J+1) \begin{pmatrix} J' & 2 & J \\ -\Omega & 0 & \Omega \end{pmatrix}^2. \quad (55.3)$$

En forma explícita

$$w_{E2}(\Omega J \rightarrow \Omega, J-1) = \frac{\omega^5}{20\hbar c^5} Q_0^2 \frac{\Omega^2 (J^2 - \Omega^2)}{(J-1) J (J+1) (2J+1)},$$

$$w_{E2}(\Omega J \rightarrow \Omega, J-2) = \frac{\omega^5}{40\hbar c^5} Q_0^2 \frac{(J^2 - \Omega^2) [(J-1)^2 - \Omega^2]}{(J-1) J (2J-1) (2J+1)}.$$

Con relación a estas fórmulas, sin embargo, hay que hacer la siguiente observación. En ellas se utilizan elementos de matriz calculados con funciones de onda de la forma

$$\psi_{J\Omega M} = \text{const. } \chi_\Omega D_{\Omega M}^{(J)}(\mathbf{n})$$

(χ_Ω es la función de onda del estado interno del núcleo). Estas funciones corresponden a valores determinados (en valor absoluto y signo) de la proyección del momento sobre el eje ζ . En cambio, en los núcleos tenemos que considerar estados que poseen una determinada paridad, pero en los cuales solamente está definido el valor absoluto de la proyección del momento cinético (proyección que de ordinario es la que se designa por Ω). Por lo tanto, cuando $\Omega \neq 0$ habría que tomar como funciones de onda inicial y final combinaciones lineales de la forma

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{J\Omega M} \pm \psi_{J, -\Omega, M}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{J' \Omega M'} \pm \psi_{J', -\Omega, M'}).$$

Los productos de los primeros y segundos términos darán el valor anterior del elemento de matriz del momento cuadripolar. Los productos « cruzados », en cambio, conducirán a integrales diferentes de cero si $2\Omega < 2*$. En consecuencia, la fórmula (55.3), hablando propiamente, no sirve cuando $\Omega = 1/2, 1$; en estos casos aparece en la probabilidad de transición un término adicional que no se expresa en función del valor medio del momento cuadripolar**.

De manera análoga a como se dedujo la fórmula (55.3), para la probabilidad de una transición $M1$ se obtiene la fórmula

$$\begin{aligned} w_{M1}(\Omega J \rightarrow \Omega, J-1) &= \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} \mu^3 (2J-1) \begin{pmatrix} J-1 & 1 & J \\ -\Omega & 0 & \Omega \end{pmatrix}^2 = \\ &= \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} \mu^2 \frac{J^2 - \Omega^2}{J(2J+1)}, \end{aligned} \quad (55.4)$$

donde μ es el momento magnético del núcleo (esta fórmula no es aplicable cuando $\Omega = 1/2$).

§ 56. Efecto fotoeléctrico. Caso no-relativista

En los §§ 49-52 hemos estudiado las transiciones radiativas (emisión o absorción de un fotón) entre niveles atómicos del espectro discreto. El efecto fotoeléctrico difiere del proceso de absorción de un fotón en que el estado final pertenece al espectro continuo.

La sección eficaz del efecto fotoeléctrico puede calcularse en forma analítica hasta el final para el átomo de hidrógeno y para un ion hidrogenoide (con carga del núcleo $Z \ll 137$).

En el estado inicial se tiene un electrón en un nivel discreto $\epsilon_i \equiv -I$ (I es el potencial de ionización del átomo) y un fotón con determinado impulso \mathbf{k} . En el estado final el electrón posee un impulso \mathbf{p} (y una energía $\epsilon_f \equiv \epsilon$). Dado que \mathbf{p} recorre una sucesión continua de valores, la sección eficaz del efecto fotoeléctrico viene dado por la fórmula

* Para los elementos de matriz de los momentos 2^l -polares, en los integrandos aparecen productos de la forma

$$D_{-\Omega M'}^{(J')*} D_{q' q}^{(l)} D_{\Omega M}^{(J)}$$

La integral respecto de los ángulos será diferente de cero cuando $q' = -2\Omega$, mientras que q' toma únicamente los valores comprendidos entre $-l$ y $+l$; por ello debe ser $2\Omega \leq l$.

** De hecho este término proporciona una corrección importante tan sólo en el caso en que $\Omega = 1/2$, es decir, cuando el acoplamiento entre los estados de rotación e interno del núcleo es particularmente fuerte (véase acerca de esto III, § 118).

$$d\sigma = 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(-I + \omega - \epsilon) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \quad (56.1)$$

[cf. (44.3)], donde la función de onda del estado final del electrón se supone normalizada « a una partícula en el volumen $V = 1$ ». De la misma manera, la función de onda del fotón se normaliza como antes; para una transición de sección eficaz $d\sigma$, hay que dividir en tal caso la probabilidad dw por la densidad de flujo fotónico (igual a $c/V = c$), pero en unidades relativistas esto no se refleja en la forma de la fórmula (56.1).

Como en (45.2), eligiremos para el fotón el contraste transversal en tres dimensiones. Entonces

$$V_{fi} = -e \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_{fi} = -e \sqrt{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} M_{fi}$$

donde se ha hecho

$$M_{fi} = \int \psi'^* (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \psi d^3 x \quad (56.2)$$

($\psi \equiv \psi_i$ y $\psi' \equiv \psi_f$ son las funciones de onda inicial y final del electrón). Substituyendo en (56.1) $d^3 p \rightarrow \mathbf{p}^2 d|\mathbf{p}| d\omega = \epsilon |\mathbf{p}| d\omega$ e integrando la función δ respecto de ϵ , escribiremos esta fórmula en la forma

$$d\sigma = e^3 \frac{\epsilon |\mathbf{p}|}{2\pi\omega} |M_{fi}|^2 d\omega. \quad (56.3)$$

Efectuaremos el cálculo en dos casos que difieren uno de otro en el valor de la energía del fotón: para $\omega \gg I$ y para $\omega \ll m$. Dado que $I \sim me^4 Z^2 \ll m$, estos dos dominios en parte se solapan (para $I \ll \omega \ll m$), de modo que el estudio de estos casos proporciona en esencia una descripción completa del efecto fotoeléctrico.

Empezaremos por el caso

$$\omega \ll m. \quad (56.4)$$

En él, la velocidad del electrón es pequeña tanto en el estado inicial como en el final de modo que, con relación al electrón, el problema es del todo no-relativista. De acuerdo con esto, en (56.2) substituiremos \mathbf{a} por el operador velocidad no-relativista $\mathbf{v} = -i\nabla/m$ (cf. § 45). Además, cabe pasar a la aproximación dipolar, substituyendo $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \approx 1$, es decir, se puede prescindir del impulso del fotón frente al impulso del electrón. Entonces

$$d\sigma = e^3 \frac{m |\mathbf{p}|}{2\pi\omega} |\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_{fi}|^2 d\omega, \quad \mathbf{v}_{fi} = -\frac{i}{m} \int \psi'^* \nabla \psi \cdot d^3 x. \quad (56.5)$$

Estudiemos el efecto fotoeléctrico cuando se parte del nivel fundamental del átomo de hidrógeno (o del ion hidrogenoide). En tal caso

$$\psi = \frac{(Ze^2 m)^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-Ze^2 mr} \quad (56.6)$$

(en unidades ordinarias $me^2 \rightarrow 1/a_0$, donde $a_0 = \hbar^2/me^2$ es el radio de Bohr).

En cuanto a ψ' , para ella hay que tomar una función de onda cuya forma asintótica contenga una onda plana ($e^{ip \cdot r}$) y, junto con ella, una onda esférica divergente (véase III, § 134, donde dicha función se designó por ψ_p). En virtud de las reglas de selección respecto de l , la transición a partir de un estado- s es posible sólo para ir a parar a un estado- p (caso dipolar!). Por ello, en el desarrollo *

$$\psi_p = \frac{1}{p} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) e^{-i\theta_l} R_{pl}(r) P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1) \quad (56.7)$$

$(\mathbf{n} = \mathbf{p}/p, \mathbf{n}_1 = \mathbf{r}/r)$ basta conservar solamente el término con $l = 1$ **. Prescindiendo de factores de fase que carecen de importancia, se tiene así

$$\psi' = \frac{3}{p} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1) R_{p1}(r). \quad (56.8)$$

Con las funciones ψ y ψ' dadas por (56.6) y (56.8), resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_{fi} &= \frac{3(Ze^2 m)^{5/2}}{\sqrt{2} mp} \int \int (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1) (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}) e^{-Ze^2 mr} R_{p1}(r) d\omega_1 \cdot r^2 dr = \\ &= \frac{2^{3/2} \pi (Ze^2 m)^{5/2}}{pm} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) \int_0^\infty r^3 e^{-Ze^2 mr} R_{p1}(r) dr. \end{aligned}$$

Según III (36.18) y III (36.24), la función radial (en las unidades adoptadas aquí) se escribe

$$R_{p1} = \frac{2Ze^2 m}{3} \sqrt{\frac{1 + v^2}{(1 - e^{-2\pi v})}} p r e^{-ipr} F(2 + iv, 4, 2ipr),$$

donde se ha hecho

$$v = \frac{Ze^2 m}{p} \left(= \frac{Ze^2}{\hbar v} \right). \quad (56.9)$$

La integral que necesitamos se calcula mediante la fórmula

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} z^{\gamma-1} F(z, \gamma, kz) dz = \Gamma(\gamma) \lambda^{\alpha-\gamma} (\lambda - k)^{-\alpha}$$

[véase III (f, 3)]. Observando también que

* En este párrafo, p representa el \mathbf{p} .

** El coeficiente común en este desarrollo difiere en el factor $(2\pi)^{3/2}$ del coeficiente en III (134.5) debido a que la onda plana está normalizada «a una partícula por unidad de volumen» y no a la función $\delta(\mathbf{p})$.

$$\left(\frac{v+i}{v-i}\right)^{iv} = e^{-2v \operatorname{arc ctg} v},$$

obtendremos

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_{fi} = \frac{2^{7/2} \pi v^3 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})}{\sqrt{\rho m (1+v^2)^{3/2}}} \frac{e^{-2v \operatorname{arc ctg} v}}{\sqrt{1-e^{-2\pi v}}}.$$

La energía de ionización a partir del nivel fundamental del átomo de hidrógeno (o de un ion hidrogenoide) vale $I = Z^2 e^4 m / 2$. Por consiguiente,

$$\omega = \frac{p^2}{2m} + I = \frac{p^2}{2m} (1+v^2). \quad (56.10)$$

Teniendo en cuenta esta relación escribiremos la expresión final para la sección eficaz del efecto fotoeléctrico en el que se emite un electrón en un elemento de ángulo sólido $d\sigma$:

$$d\sigma = 2^7 \pi \alpha a^2 \left(\frac{I}{\hbar \omega} \right)^4 \frac{e^{-4v \operatorname{arc ctg} v}}{1-e^{-2\pi v}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})^2 d\Omega, \quad (56.11)$$

donde $a = \hbar^2/mZe^2 = a_0/Z$ (aquí y en lo que sigue las unidades son las ordinarias). Observemos que la distribución angular de los fotoselectrones viene determinada por el factor $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})^2$. Éste es máximo en las direcciones paralelas a la dirección de polarización de los fotones incidentes y se anula en las direcciones perpendiculares a \mathbf{e} , incluida la dirección de incidencia. Para fotones no polarizados la fórmula (56.11) debe promediarse respecto de las direcciones \mathbf{e} , lo que se reduce a la sustitución

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})^2 \rightarrow \frac{1}{2} |\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}|^2,$$

donde $\mathbf{n}_0 = \mathbf{k}/k$ [véase (45.46)].

La integración de la fórmula (56.11) respecto de los ángulos da, en cambio, la sección eficaz total del efecto fotoeléctrico:

$$\sigma = \frac{2^9 \pi^2}{3} \alpha a^2 \left(\frac{I}{\hbar \omega} \right)^4 \frac{e^{-4v \operatorname{arc ctg} v}}{1-e^{-2\pi v}} \quad (56.12)$$

(M. Stobbe, 1930).

El valor límite de σ para $\hbar \omega \rightarrow I$ (es decir, $v \rightarrow \infty$) es:

$$\sigma = \frac{2^9 \pi^2}{3e^4} \alpha a^2 = \frac{2^9 \pi^2}{3e^4} \frac{\alpha a_0^2}{Z^2} \quad (56.13)$$

(en el denominador $e = 2,71 \dots$). Como debe ser para una reacción en la que se forman partículas cargadas (véase III, § 144), la sección eficaz de efecto fotoeléctrico tiende cerca de su umbral a un límite constante no nulo.

El caso en que $\hbar \omega \gg I$ (siendo, como antes, $\hbar \omega \ll mc^2$) corresponde a la aproximación de Born ($v = Ze^2/\hbar v \ll 1$). La fórmula (56.12) toma la forma

$$\sigma = \frac{2^8 \pi}{3} \alpha a_0^8 Z^8 \left(\frac{I_0}{\hbar \omega} \right)^{7/2} \quad (56.14)$$

($I_0 = e^4 m / 2 \hbar^2$ es la energía de ionización del átomo de hidrógeno).

El proceso inverso del efecto fotoeléctrico es la recombinación radiativa del electrón y el ion en reposo. La sección eficaz de este proceso (σ_{rec}) se puede hallar mediante la sección eficaz del efecto fotoeléctrico (σ_F) mediante el principio de equilibrio detallado (III § 141). Según este principio, las secciones eficaces de los procesos $i \rightarrow f$ y $f \rightarrow i$ (con dos partículas en cada uno de los estados i y f) están ligadas entre sí por la relación

$$g_i p_i^2 \sigma_{i \rightarrow f} = g_f p_f^2 \sigma_{f \rightarrow i},$$

donde p_i , p_f son los impulsos del movimiento relativo de las partículas, y g_i , g_f , los pesos estadísticos de spin de los estados i y f . Teniendo en cuenta también que para el fotón es $g = 2$ (dos direcciones de polarización), se obtendrá

$$\sigma_{rec} = \sigma_F \frac{2k^2}{p^2} \quad (56.15)$$

($p = mv$ es el impulso del electrón incidente, k es el impulso del fotón emitido).

PROBLEMA

Determinar la sección eficaz de recombinación radiativa de un electrón rápido no-relativista ($I \ll mv^2 \ll mc^2$) y un núcleo (de carga $Z \ll 137$).

Solución. La sección eficaz de captura de la capa K (número cuántico principal $n = 1$) se obtiene substituyendo (56.14) en (56.15):

$$\sigma_1^{rec} = \frac{2^7 \pi}{3} Z^5 \alpha^3 a_0^8 \left(\frac{I_0}{\epsilon} \right)^{5/2}$$

($\epsilon = mv^2/2$ es la energía del electrón incidente; $\hbar \omega \approx \epsilon$). De los otros estados del átomo que se forma, son importantes tan sólo los estados s : al calcular el elemento de matriz en la aproximación de Born, cuentan en esencia los valores de la función de onda del estado de enlace para valores pequeños de r (conforme se verá en los cálculos del § 57) y para $l > 0$ estos valores son pequeños comparados con los valores de las funciones para las que $l = 0$; además, basta tener en cuenta los dos primeros términos del desarrollo de ψ en potencias de r . Para estados con $l = 0$ y n cualquiera estos términos son

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a^{3/2} n_s^{3/2}}} \left(1 - \frac{r}{a} \right),$$

es decir, contiene n tan sólo en la forma de factor común $n^{-3/2}$ [la expresión que acabamos de escribir se obtiene desarrollando la función III (36.13)]. En consecuencia, la sección eficaz total de recombinación vale

$$\sigma^{rec} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{rec} = \sigma_1^{rec} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) \sigma_1^{rec}$$

[el valor de la función ζ es: $\zeta(3) = 1,202$].

§ 57. Efecto fotoeléctrico. Caso relativista

Pasemos al caso en que

$$\omega \gg l. \quad (57.1)$$

Entonces es también $\epsilon = \omega - I \gg I$, y, en consecuencia, la influencia del campo de Coulomb del núcleo sobre la función de onda del fotoelectrón (ψ') se puede calcular mediante la teoría de perturbaciones. Escribamos ψ' en la forma

$$\psi' = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} (u' e^{ip \cdot r} + \psi^{(1)}). \quad (57.2)$$

El fotoelectrón puede ser relativista; por ello, la función no perturbada (57.2) se ha escrito en forma de onda plana relativista (23.1).

Aunque en el estado inicial el electrón es no-relativista, sin embargo, en su función de onda ψ hay que tener en cuenta de todas maneras (por razones que se explicarán más adelante) la corrección relativista ($\sim Ze^2$). Dicha función viene dada por la fórmula (véase el problema del § 39)

$$\psi = \left(1 - \frac{i}{2m} \gamma^0 \mathbf{\Gamma} \cdot \nabla \right) \frac{u}{\sqrt{2m}} \psi_{\text{nor}}, \quad (57.3)$$

donde ψ_{nor} es la función no-relativista del estado de enlace (56.6) y u es la amplitud bispinorial del electrón en reposo normalizada de acuerdo con la condición que hemos adoptado $\bar{u}u = 2m$.

Substituyamos las funciones (57.2-3) en el elemento de matriz (56.2)*:

$$M_{fi} = \frac{1}{2\sqrt{m\epsilon}} \int \left\{ \bar{u}' (\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{e}) \left[\left(1 - \frac{i}{2m} \gamma^0 \mathbf{\Gamma} \cdot \nabla \right) u \psi_{\text{nor}} \right] e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} + \right. \\ \left. + \bar{\psi}^{(1)} (\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{e}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} u \psi_{\text{nor}} \right\} d^3x. \quad (57.4)$$

Dado que se trata de obtener el primer término del desarrollo de esta cantidad en potencias de Ze^2 , en el segundo término entre llaves podemos substituir ψ_{nor} simplemente por la constante $(Ze^2m)^{3/2}/\sqrt{\pi}$. El primer término, en cambio, se anularía como resultado de dicha sustitución (si $\mathbf{p} - \mathbf{k} \neq 0$) y, por esto precisamente, hay que incluir en ψ también la primera corrección relativista, que es proporcional a Ze^2 ; cuando $v \sim 1$, esta corrección contribuirá a la sección eficaz con un término del mismo orden que el término siguiente del desarrollo de ψ_{nor} en potencias de Ze^2 .

* La función (57.3) se obtuvo para distancias $r \sim 1/mZe^2$ a las que el término correctivo en ella es del orden de magnitud de Ze^4 . Pero para el estado fundamental (y también para todos los estados s en general) la fórmula (57.3) es válida para valores cualesquiera de r , ya que la derivada de una función exponencial pura (56.6) [y con ella también el primer término correctivo en (57.3)] es siempre proporcional a Ze^2 . Esta circunstancia permite aplicar la fórmula (57.3) al problema considerado, en el cual, como veremos a continuación, importan los valores de r pequeños.

En el primer término de (57.4) integremos por partes, haciendo que el operador ∇ se aplique al factor exponencial en vez de a ψ_{nor} . El resultado que se obtiene es

$$M_{fi} = \frac{(Ze^2 m)^{3/2}}{2(\pi m \epsilon)^{1/2}} \left\{ \bar{u}'(\gamma \cdot e) \left[1 + \frac{1}{2m} \gamma^0 \gamma \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{k}) \right] u (e^{-Z e^2 m r})_{\mathbf{p} - \mathbf{k}} + \bar{\psi}_k^{(1)}(\gamma \cdot e) u \right\}, \quad (57.5)$$

dónde el índice vectorial designa a la componente espacial de Fourier. Salvo términos del orden de $\sim Ze^2$ ^{*}

$$(e^{-Z e^2 m r})_{\mathbf{p} - \mathbf{k}} = \frac{8\pi Z e^2 m}{(\mathbf{p} - \mathbf{k})^4}. \quad (57.6)$$

Para calcular las componentes de Fourier $\psi_k^{(1)}$ escribamos la ecuación a que satisface la función $\psi^{(1)}$:

$$(\gamma^0 \epsilon + i \gamma \cdot \nabla - m) \psi^{(1)} = e (\gamma^\mu A_\mu) u' e^{i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} = - \frac{Ze^2}{r} \gamma^0 u' e^{i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}$$

[ecuación que se obtiene substituyendo (57.3) en (32.1)]. Aplicando a ambos miembros de la misma el operador $(\gamma^0 \epsilon + i \gamma \cdot \nabla + m)$, se obtendrá

$$(\Delta + \mathbf{p}^2) \psi^{(1)} = - Ze^2 (\gamma^0 \epsilon + i \gamma \cdot \nabla + m) (\gamma^0 u') \frac{1}{r} e^{i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}.$$

Multipliquemos esta ecuación por $e^{-ik \cdot r}$ e integremos respecto de d^3x , efectuando de la manera ordinaria la integración por partes en los términos en Δ y ∇ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}^2 - \mathbf{k}^2) \psi_k^{(1)} &= - Ze^2 (\gamma^0 \epsilon - \gamma \cdot \mathbf{k} + m) (\gamma^0 u') \left(\frac{1}{r} \right)_{\mathbf{k} - \mathbf{p}} = \\ &= - Ze^2 (2\epsilon\gamma^0 - \gamma \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{p})) (\gamma^0 u') \frac{4\pi}{(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2}. \end{aligned}$$

En la última línea se ha tenido en cuenta que la amplitud u' satisface la ecuación

$$(\epsilon\gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \gamma - m) u' = 0, \quad \text{o bien} \quad (\epsilon\gamma^0 + \mathbf{p} \cdot \gamma - m) \gamma^0 u' = 0.$$

De aquí se sigue

$$\bar{\psi}_k^{(1)} = \psi_k^{(1)*} \gamma^0 = 4\pi Z e^2 \bar{u}' \frac{2\epsilon\gamma^0 + \gamma \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{p})}{(\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2)(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2} \gamma^0. \quad (57.7)$$

* Formando la componente de Fourier de ambos miembros de la igualdad

$$(\Delta - \lambda^2) \frac{e^{-\lambda r}}{r} = - 4\pi \delta(r),$$

se obtiene

$$\left(\frac{e^{-\lambda r}}{r} \right)_q = \frac{4\pi}{q^2 + \lambda^2}. \quad (57.6a)$$

Derivando esta expresión respecto del parámetro λ , queda

$$(e^{-\lambda r})_q = \frac{8\pi\lambda}{(q^2 + \lambda^2)^2}. \quad (57.6b)$$

Substituyendo (57.6-7) en el elemento de matriz (57.5), representaremos éste en la forma

$$M_{fi} = \frac{4\pi^{1/2} (Ze^2 m)^{5/2}}{(\epsilon m)^{1/2} (\mathbf{k} - \mathbf{p})^2} \bar{u}' A u,$$

donde

$$A = a(\gamma \cdot e) + (\gamma \cdot e)\gamma^0(\gamma \cdot b) + (\gamma \cdot c)\gamma^0(\gamma \cdot e),$$

$$a = \frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2} + \frac{\epsilon}{m} \frac{1}{\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2}, \quad b = -\frac{\mathbf{k} - \mathbf{p}}{2m(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2}, \quad c = \frac{\mathbf{k} - \mathbf{p}}{2m(\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2)}.$$

La sección eficaz es

$$d\sigma = \frac{8e^2 (Ze^2 m)^5 |\mathbf{p}|}{\omega (\mathbf{k} - \mathbf{p})^4 m} (\bar{u}' A u) (\bar{u} \bar{A} u') d\Omega,$$

donde $\bar{A} = \gamma^0 A + \gamma^0$ (véase § 66). Esta expresión hay que sumarla todavía respecto de las direcciones finales del spin del electrón y promediarla respecto de las iniciales. Estas operaciones se efectúan de acuerdo con las reglas que se presentan más adelante, en el § 66, mediante las matrices densidad de polarización de los estados inicial y final:

$$\rho = \frac{m}{2} (\gamma^0 + 1), \quad \rho' = \frac{1}{2} (\gamma^0 \epsilon - \gamma \cdot \mathbf{p} + m)$$

(en el estado final $\mathbf{p} = 0, \epsilon = m$). Dichas reglas conducen a la expresión

$$d\sigma = \frac{16e^2 (Ze^2 m)^5 |\mathbf{p}|}{m\omega (\mathbf{k} - \mathbf{p})^4} \text{Tr}(\rho' A \rho \bar{A}) d\Omega.$$

El cálculo de la traza es una operación puramente algebraica y lleva al resultado siguiente *:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho' A \rho \bar{A}) &= \\ &= \frac{m}{\epsilon + m} [a\mathbf{p} - (\mathbf{b} - \mathbf{c})(\epsilon + m)]^2 + 4(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})[(\epsilon + m)(\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}) + a(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e})] \end{aligned}$$

(el vector \mathbf{e} se supone real y representa la polarización lineal del fotón).

Daremos su forma definitiva a la fórmula de la sección eficaz del efecto fotoeléctrico introduciendo el ángulo polar θ y el acimut φ de la dirección \mathbf{p} respecto de la dirección de \mathbf{k} adoptada como eje z y el plano \mathbf{k}, \mathbf{e} , como plano xz (de modo que

* Las fórmulas tridimensionales para el cálculo de trazas son análogas a las fórmulas cuadridimensionales deducidas en el § 22. Diferentes de cero lo son únicamente las trazas de productos con un número par de factores γ^0 y γ ; además, todos los factores γ^0 se reducen a 1 y las trazas de los productos con dos y con cuatro factores γ valen:

$$\frac{1}{4} \text{Tr}(\mathbf{a} \cdot \gamma)(\mathbf{b} \cdot \gamma) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\frac{1}{4} \text{Tr}(\mathbf{a} \cdot \gamma)(\mathbf{b} \cdot \gamma)(\mathbf{c} \cdot \gamma)(\mathbf{d} \cdot \gamma) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

$\mathbf{p} \cdot \mathbf{e} = |\mathbf{p}| \cos \varphi \sin \theta$). Cuando $\omega \gg I$, la conservación de la energía puede escribirse en la forma $\epsilon - m = \omega$ (en vez de $\epsilon - m = \omega - I$). Es fácil comprobar que entonces

$$\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2 = -2m(\epsilon - m), \quad (\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 = 2\epsilon(\epsilon - m)(1 - v \cos \theta),$$

donde $v = \mathbf{p}/\epsilon$ es la velocidad del fotoelectrón. Después de simples transformaciones se obtiene finalmente

$$d\sigma = Z^5 \alpha^4 r_e^2 \frac{v^3 (1 - v^2)^3 \sin^2 \theta}{(1 - \sqrt{1 - v^2})^5 (1 - v \cos \theta)^4} \times \\ \times \left\{ \frac{(1 - \sqrt{1 - v^2})^2}{2(1 - v^2)^{3/2}} (1 - v \cos \theta) + \left[2 - \frac{(1 - \sqrt{1 - v^2})(1 - v \cos \theta)}{1 - v^2} \right] \cos^2 \varphi \right\} d\theta, \quad (57.8)$$

donde $r_e = e^2/m$.

En el caso ultrarrelativista ($\epsilon \gg m$) la sección eficaz del efecto fotoeléctrico presenta un máximo muy pronunciado para ángulos pequeños ($\theta \sim \sqrt{1 - v^2}$), es decir, los electrones se emiten predominantemente en la dirección de incidencia del fotón. Cerca del máximo escribiremos

$$1 - v \cos \theta \approx \frac{1}{2} |(1 - v^2) + \theta^2|,$$

y los términos principales en (57.8) darán

$$d\sigma \approx 4Z^5 \alpha^4 r_e^2 \frac{(1 - v^2)^{3/2} \theta^2}{(1 - v^2 + \theta^2)^3} d\theta d\varphi. \quad (57.9)$$

Una integración elemental, aunque bastante larga, de la expresión (57.8) respecto de los ángulos conduce a la fórmula siguiente para la sección eficaz total (F. Sauter, 1931):

$$\sigma = 2\pi Z^5 \alpha^4 r_e^2 \frac{(\gamma^2 - 1)^{3/2}}{(\gamma - 1)^5} \left\{ \frac{4}{3} + \frac{\gamma(\gamma - 2)}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{1}{2\gamma \sqrt{\gamma^2 - 1}} \ln \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}} \right) \right\}, \quad (57.10)$$

donde para abreviar hemos introducido el «factor de Lorentz»

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{\epsilon}{m} \approx \frac{m + \omega}{m}. \quad (57.11)$$

En el caso ultrarrelativista esta fórmula se reduce a la sencilla expresión

$$\sigma = 2\pi Z^5 \alpha^4 r_e^2 \frac{1}{\gamma}. \quad (57.12)$$

Cuando $I \ll \omega \ll m$, el paso en (57.10) al límite para valores $\gamma - 1$ pequeños conduce al resultado (56.14) que ya conocemos.

§ 58. Fotodesintegración del deuteron

Una característica peculiar del deuteron es su pequeña energía de enlace (en

comparación con la profundidad del pozo de potencial). Esta circunstancia permite describir las reacciones en que participa el deuterón sin conocer detalladamente la marcha de las fuerzas nucleares, solamente con ayuda de la energía de enlace (véase III, § 131). Se supone, además, que las longitudes de onda de las partículas que chocan son grandes comparadas con el radio de acción a de las fuerzas nucleares.

Esto se aplica, en particular, a la desintegración del deuterón por cuantos gamma para los que $ka \ll 1$, admitiendo que también $pa \ll 1$, donde \mathbf{p} es el impulso del movimiento relativo del neutrón y del protón que quedan libres (esta condición es más fuerte que la anterior^{*}).

Partiremos de la fórmula no-relativista para la sección eficaz del efecto fotoeléctrico (56.5) una vez integrada respecto de las direcciones:

$$\sigma = \frac{e^2 p}{2\pi\omega} \frac{M}{2} \frac{4\pi}{3} |(\mathbf{v}_p)_{fi}|^2.$$

Aquí, \mathbf{p} es el impulso del movimiento relativo del protón y del neutrón^{**} y m en (56.5) se ha substituido por la masa reducida $M/2$ (donde M es la masa de un nucleón). El elemento de matriz corresponde a la velocidad del protón \mathbf{v}_p , puesto que tan sólo éste interactúa con el fotón. Expresando \mathbf{v}_p en función del impulso $\mathbf{p}(\mathbf{v}_p = \mathbf{v}/2 = \mathbf{p}/M)$, tenemos

$$\sigma^{(E)} = \frac{e^2 p}{3M\omega} |\mathbf{p}_{fi}|^2. \quad (58.1)$$

El superíndice (E) indica que esta fórmula corresponde a las transiciones dipolares eléctricas: $e\mathbf{p}/M = e\mathbf{v}_p = \mathbf{d}$, de modo que $e\mathbf{p}_{fi}/M = i\omega d_{fi}$.

La función de onda normalizada del estado inicial (el fundamental) del deuterón es:

$$\psi = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \frac{e^{-xr}}{r}, \quad x = \sqrt{MI}, \quad (58.2)$$

donde $I = 2,23$ MeV es la energía de enlace (III, § 131)^{***}. Como función de onda del estado final cabe tomar, en cambio, la función del movimiento libre, es decir, la onda plana

$$\psi' = e^{ip \cdot r}. \quad (58.3)$$

* La energía del fotón para la cual $pa \approx 1$ ($a = 1,5 \cdot 10^{-13}$ cm) es de 15 MeV.

** En este párrafo p representa el $|\mathbf{p}|$.

*** La aproximación de esta función puede mejorarse introduciendo una corrección ligada con el valor no nulo de a . Esto se consigue substituyendo el coeficiente de normalización en (58.2) por

$$\sqrt{\frac{x}{2\pi(1-\alpha x)}}$$

(véase III, § 131, problema 1). Aparece entonces un factor $1/(1-\alpha x)$ también en la fórmula para la sección eficaz. Hay que decir que, de hecho, esta corrección no es tan pequeña: para el estado fundamental del deuterón se tiene $\alpha x \approx 0,4$.

El estado fundamental del deuterón es un estado 3S_1 con una pequeña «mezcla» de estado 3D_1 debida a la acción de las fuerzas tensoriales nucleares (véase III, § 116). Prescindiremos de esta contribución y, con ello, también de las fuerzas tensoriales.

La razón de esto consiste en que, en la teoría considerada, la « dimensión del deuteron » $1/\kappa$ se supone grande comparada con el radio efectivo de interacción a . Por ello, hay que tener en cuenta la interacción entre el protón y el neutrón tan sólo en los estados- S , prescindiendo de ella cuando $l \neq 0$, estados éstos cuyas funciones de onda son pequeñas a cortas distancias. Además, según las reglas de selección, las transiciones dipolares eléctricas entre dos estados S (el estado fundamental y un estado S del espectro continuo) están prohibidas. Esto ofrece la posibilidad de prescindir en el presente caso de la interacción de los nucleones en el estado final.

Integrando por partes, para el elemento de matriz se encuentra

$$\mathbf{p}_{fi} = -i \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \int e^{-ip \cdot r} \nabla \frac{e^{-\kappa r}}{r} d^3x = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \mathbf{p} \left(\frac{e^{-\kappa r}}{r} \right)_p = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \frac{4\pi p}{p^2 + \kappa^2}$$

(véase la nota en la pág. 223).

Teniendo también presente la igualdad

$$\frac{1}{M} (\mathbf{x}^2 + \mathbf{p}^2) = I + \frac{\mathbf{p}^2}{M} = \omega,$$

que expresa la conservación de la energía, obtendremos la sección eficaz de fotodesintegración en la forma final (unidades ordinarias)

$$\sigma^{(E)} = \frac{8\pi}{3} \alpha \frac{\hbar^2}{M} \frac{\sqrt{T} (\hbar\omega - I)^{3/2}}{(\hbar\omega)^3} \quad (58.4)$$

(H. A. Bethe, R. Peierls, 1935). Esa presenta un máximo para $\hbar\omega = 2I$ y se anula cuando $\hbar\omega \rightarrow I$ y cuando $\hbar\omega \rightarrow \infty$.

Sin embargo, la absorción dipolar eléctrica del fotón descrita por la fórmula (58.4) no proporciona la contribución principal a la sección eficaz cerca del umbral del efecto fotónico ($\hbar\omega$ próximo a I). En dicha región, la parte principal del efecto debe proceder de transiciones que llevan a un estado- S , transiciones que no se producen en la absorción dipolar eléctrica. Tampoco tienen lugar en la absorción cuadripolar eléctrica: aunque no contradicen en este caso la regla de selección respecto de la paridad, están prohibidas por la regla de selección correspondiente al momento cinético orbital (recordemos que se prescinde de las fuerzas tensoriales, sin las cuales \mathbf{L} y \mathbf{S} se conservan por separado). Para calcular la sección eficaz de fotodesintegración cerca del umbral es necesario, por lo tanto, considerar la absorción dipolar magnética, a la que las reglas de selección permiten las transiciones entre estados S (E. Fermi, 1935).

Substituyendo en la fórmula (58.1) el momento eléctrico por el magnético, tenemos

$$\sigma^{(M)} = \frac{1}{3} \omega M p |\boldsymbol{\mu}_{fi}|^2. \quad (58.5)$$

El momento magnético del movimiento orbital no contribuye a $\boldsymbol{\mu}_{fi}$, ya que el mo-

mento cinético orbital \mathbf{L} carece de elementos de matriz no nulos para las transiciones entre estados S . El momento magnético espinorial vale

$$\mu = 2\mu_p s_p + 2\mu_n s_n = 2(\mu_p - \mu_n) s_p + 2\mu_n S,$$

donde $\mathbf{S} = \mathbf{s}_p + \mathbf{s}_n$, y μ_p, μ_n son los momentos magnéticos del protón y del neutrón. Cuando se prescinde de las fuerzas nucleares tensoriales, el spin total se conserva, de modo que su operador no da lugar a transiciones. Por ello,

$$\mu_{fi} = 2(s_p)_{fi} (\mu_p - \mu_n).$$

En la misma aproximación (sin fuerzas tensoriales) las variables de spin y de coordenadas se separan. Junto con las funciones de onda, también el elemento de matriz toma la forma de producto de una parte correspondiente al spin por otra que corresponde a las coordenadas:

$$\mu_{fi} = 2(\mu_p - \mu_n) \langle s_p S' M' | s_p | s_p S M \rangle \int \psi'^*(r) \psi(r) d^3x.$$

Pero la existencia de fuerzas nucleares spin-órbita conduce a que la ecuación de onda para las funciones de las coordenadas $\psi(r)$ contenga como parámetro el valor del spin S . Si $S' = S$, $\psi'(r)$ y $\psi(r)$ son funciones propias de un mismo operador y, por consiguiente, ortogonales entre sí. Así, pues, partiendo del estado inicial 3S la fotodesintegración conducirá solamente a un estado 1S del espectro continuo.

El cuadrado $|\mu_{fi}|^2$ en (58.5) debe promediarse, naturalmente, respecto de las proyecciones M del spin \mathbf{S} en el estado inicial. De esta manera, el problema queda reducido al cálculo de la cantidad

$$\frac{1}{2S+1} \sum_M |\langle s_p S' M' | s_p | s_p S M \rangle|^2,$$

donde $s_p = s_n = 1/2$, $S = 1$, $S' = 0$. Según las fórmulas generales para los elementos de matriz en la composición de momentos cinéticos, esta cantidad es igual a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2S+1)(2S'+1)} |\langle s_p S' || s_p || s_p S \rangle|^2 &= \begin{pmatrix} s_p & S' & s_n \\ S & s_p & 1 \end{pmatrix}^2 |\langle n' s_p || s_p || n s_p \rangle|^2 = \\ &= \frac{1}{6} |\langle s_p || s_p || s_p \rangle|^2 \end{aligned}$$

[se han utilizado las fórmulas III (107.11), (109.3)]. El elemento de matriz reducido es

$$\langle s_p || s_p || s_p \rangle = \sqrt{s_p(s_p+1)(2s_p+1)} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

La fórmula (58.5) toma en definitiva la forma

$$\sigma^{(M)} = \frac{1}{3} \omega M p (\mu_p - \mu_n)^3 \left| \int \psi'^* \psi d^3x \right|^2. \quad (58.6)$$

La función inicial ψ viene dada por la fórmula (58.2). En cambio, la función que representa el estado final se escribe

$$\psi = \frac{1}{p} \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{p0}(r).$$

Esta expresión es el primer término ($l = 0$) del desarrollo (56.7) de una función que contiene asintóticamente una onda plana y una onda esférica divergente; se ha prescindido de un factor de fase que carece de importancia. Dado que la integración se extiende al dominio exterior al radio de acción de las fuerzas nucleares, la función radial se escribirá

$$R_{p0}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(pr + \delta)}{r}.$$

La fase δ está ligada con la energía de un nivel virtual ($I_1 = 0,067$ MeV) del sistema «protón + neutrón» para $S = 0$:

$$\operatorname{ctg} \delta = \frac{x_1}{p}, \quad x_1 = \sqrt{MI_1}$$

(véase III, § 131). Se tiene ahora

$$\int \psi^* \psi d^3x = (2\pi)^{3/2} \frac{\sqrt{x}}{p\pi} \operatorname{Im} \int e^{-ixr + ipr} e^{i\delta} dr = (2\pi)^{3/2} \frac{\sqrt{x}}{p\pi} \operatorname{Im} \frac{e^{i\delta}}{x - ip}.$$

Después de efectuar simples transformaciones algebraicas obtendremos la siguiente expresión para la sección eficaz de fotodesintegración (en unidades ordinarias):

$$\sigma^{(m)} = \frac{8\pi}{3\hbar c} (\mu_p - \mu_n)^2 \frac{\sqrt{I(\hbar\omega - I)} (\sqrt{I} + \sqrt{I_1})^2}{\hbar\omega (\hbar\omega - I + I_1)}. \quad (58.7)$$

Cuando $\hbar\omega \rightarrow I$ esta sección eficaz tiende a cero como $\sqrt{\hbar\omega - I}$, de acuerdo con las propiedades generales del comportamiento de las secciones eficaces cerca del umbral de reacción (III, § 144).

El proceso inverso de la fotodesintegración es la captura radiativa del protón por el neutrón. La sección eficaz de captura (σ_c) se obtiene a partir de la sección eficaz correspondiente al efecto fotónico (σ_F) mediante el principio de equilibrio detallado [cf. la deducción de (56.15)]. El peso estadístico espinorial del neutrón y del protón es igual a $2 \cdot 2 = 4$. En cambio, el peso estadístico del deuterón (en un estado con $S = 1$) y del fotón es igual a $3 \cdot 2 = 6$. Por consiguiente,

$$\sigma_c = \frac{3}{2} \frac{(\hbar\omega)^2}{c^2 p^2} \sigma_F = \frac{3(\hbar\omega)^2}{2Mc^2(\hbar\omega - I)} \sigma_F. \quad (58.8)$$

§ 59. Radiación de frenado magnético *

Según la teoría clásica (II, § 74), un electrón ultrarrelativista que se mueve en un campo magnético constante \mathbf{H} emite un espectro cuasicontinuo con un máximo que se presenta en una frecuencia

* Este párrafo se ha escrito en colaboración con V. N. Baier.

$$\omega \sim \omega_0 \left(\frac{\epsilon}{m} \right)^3, \quad (59.1)$$

donde

$$\omega_0 = \frac{veH}{|p|} \approx \frac{eH}{\epsilon} \quad (59.2)$$

es la frecuencia de rotación de un electrón con energía ϵ sobre una órbita circular (en un plano perpendicular al campo) *.

Los efectos cuánticos en la radiación de frenado magnético tienen un doble origen: la cuantificación del movimiento del electrón y el retroceso cuántico en la emisión del fotón. Este último viene determinado por el valor de la razón $\hbar\omega/\epsilon$, y la condición de que sea aplicable la teoría clásica exige que este valor sea pequeño. Debido a esto conviene introducir el parámetro

$$\chi = \frac{H}{H_0} \frac{|p|}{m} \approx \frac{H_\epsilon}{H_0 m} \approx \frac{\hbar\omega_0}{\epsilon} \left(\frac{\epsilon}{m} \right)^3, \quad (59.3)$$

donde $H_0 = m^2/e\hbar (= m^2c^3/e\hbar) = 4,4 \cdot 10^{13}$ G. En el dominio clásico es $\chi \sim \hbar\omega/\epsilon \ll 1$. En el caso opuesto ($\chi \gg 1$), en cambio, la energía del fotón emitido es $\hbar\omega \sim \epsilon$, siendo además esencial (como veremos más adelante) la región del espectro que se extiende hasta frecuencias para las que la energía del electrón después de la emisión vale

$$\epsilon' \sim m \frac{H_0}{H}. \quad (59.4)$$

Para que el electrón se mantenga ultrarrelativista, el campo debe satisfacer la condición

$$\frac{H}{H_0} \ll 1. \quad (59.5)$$

En lo que concierne a la cuantificación del propio movimiento del electrón, éste se caracteriza por la razón $\hbar\omega_0/\epsilon$; $\hbar\omega_0$ es la distancia entre niveles de energía contiguos del movimiento en el campo magnético. Dado que

$$\frac{\hbar\omega_0}{\epsilon} = \frac{H}{H_0} \left(\frac{m}{\epsilon} \right)^2,$$

y considerando (59.5) se tiene, evidentemente, $\hbar\omega_0 \ll \epsilon$, es decir, el movimiento del electrón es cuasiclásico con independencia del valor de χ . En otras palabras, se puede prescindir de la no conmutabilidad entre sí de los operadores correspondientes a las variables dinámicas del electrón (cantidades $\sim \hbar\omega_0/\epsilon$), teniendo en cuenta al mismo tiempo su no conmutabilidad con los operadores del campo fotónico (cantidades $\sim \hbar\omega/\epsilon$)**.

* En este párrafo suponemos $c = 1$, pero conservamos el factor \hbar .

** La solución completa del problema cuántico que plantea la radiación de frenado magnético la obtuvo primero N. P. Klepikov (1954) y la primera corrección cuántica a la fórmula clásica se debe a A. A. Sokolov, N. P. Klepikov e I. M. Ternov (1952).

La deducción de las fórmulas (59.23) y (59.30) que se expone en este párrafo, y en la que se utiliza de manera explícita el carácter cuasiclásico del movimiento, se debe a V. N. Baier y V. M. Katkov (1967). Un método análogo lo había utilizado anteriormente J. Schwinger (1954) para obtener la primera corrección cuántica en la intensidad de la radiación.

Las funciones de onda cuasiclásica de los estados estacionarios de un electrón en un campo exterior se pueden representar en la forma simbólica

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2H}} u(p) e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \varphi(r), \quad (59.6)$$

donde $\varphi(r) \sim \exp(iS/\hbar)$ son las funciones de onda clásicas de una partícula sin spin [$S(r)$ es su acción clásica]; $u(p)$ es el operador bispinorial

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{H+m} w \\ \frac{1}{\sqrt{H+m}} (\sigma \cdot p) w \end{pmatrix},$$

que se obtiene a partir de la amplitud bispinorial de la onda plana $u(p)$ (23.9) substituyendo en ella p y ϵ por los operadores \star :

$$p = P - eA = -i\hbar\nabla - eA, \quad H = \sqrt{p^2 + m^2}$$

P es el impulso generalizado de la partícula en el campo caracterizado por el potencial vector $A(r)$; el orden en que aparecen en ψ los operadores factor carece de importancia, dado que prescindimos de su no comutabilidad; el estado de spin del electrón se define por el spinor tridimensional w .

Para calcular la probabilidad de emisión del fotón en el caso cuasiclásico, lo más conveniente es partir no de la fórmula final de la teoría de perturbaciones (44.3), sino de la fórmula en la que todavía no se ha efectuado la integración respecto del tiempo. Para la probabilidad diferencial total (al cabo de tiempo prácticamente infinito) tenemos $\star\star$

$$dw = \sum_f |a_{fi}|^2 \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \quad a_{fi} = \int_{-\infty}^{\infty} V_{fi}(t) dt \quad (59.7)$$

[cf., por ejemplo, III (41.2)]; la suma se extiende a todos los estados finales del electrón.

Teniendo en cuenta (59.6), el elemento de matriz V_{fi} para emisión del fotón ω , k se puede escribir en términos de operadores en la forma:

$$V_{fi}(t) = -e \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2\hbar\omega}} \int d^3 x \left[\varphi_f^* e^{\frac{i}{\hbar} H t} \frac{u^+(p)}{\sqrt{2H}} \right] e^{i\omega t - ik \cdot r} e^* \alpha \frac{u(p)}{\sqrt{2H}} e^{\frac{i}{\hbar} H t} \varphi_i$$

* En este párrafo (no como en el cap. IV) el impulso generalizado se representa en mayúscula P ; en cambio, la notación p se utiliza para el impulso ordinario (el cinético).

** Substituyendo

$$V_{fi}(t) = V_{fi} e^{i\omega t} \varphi_f(t)$$

se obtendrá: $a_{fi} = 2\pi V_{fi} \delta(\omega_{fi})$. Teniendo en cuenta que el cuadrado de la función δ ha de entenderse en el sentido de que (véase pág. 272).

$$[\delta(\omega_{fi})]^2 \rightarrow t 2\pi \delta(\omega_{fi})$$

(donde t es el tiempo total de observación), a partir de (59.7) obtendremos para la probabilidad por unidad de tiempo la fórmula (44.3).

donde los operadores entre corchetes [...] actúan hacia la izquierda; el campo del fotón se ha elegido de acuerdo con el contraste transversal en tres dimensiones. Los factores $\exp(\pm iHt/\hbar)$ transforman los operadores de Schrödinger que aparecen entre ellos en los operadores que dependen explícitamente del tiempo de la representación de Heisenberg. Escribiremos V_{fi} en la forma

$$V_{fi} = e \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\hbar\omega}} \langle f | Q(t) | i \rangle e^{i\omega t} \quad (59.8)$$

donde $Q(t)$ designa el operador de Heisenberg

$$Q(t) = \frac{u_f^+(p)}{\sqrt{2H}} (\alpha \cdot e^*) e^{-ik \cdot r} \frac{u_i(p)}{\sqrt{2H}} \quad (59.8a)$$

y el elemento de matriz $\langle f | \dots | i \rangle$ se toma respecto de las funciones φ_f y φ_i .

La suma en (59.7) se extiende a todas las funciones de onda finales φ_f ; esta suma se efectúa mediante la igualdad

$$\sum_f \varphi_f^*(\mathbf{r}') \varphi_f(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}),$$

que expresa el carácter completo del sistema de funciones φ_f ^{*}. El resultado que se obtiene es

$$dw = \frac{e^2}{\hbar\omega} \frac{d^3k}{4\pi^2} \int dt_1 \int dt_2 \cdot e^{i\omega(t_1 - t_2)} \langle i | Q^+(t_2) Q(t_1) | i \rangle. \quad (59.9)$$

Si la integración se extiende a un intervalo suficientemente largo de tiempo, en vez de t_1 , t_2 cabe introducir las nuevas variables

$$\tau = t_2 - t_1, \quad t = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

y en la integral respecto de t considerar el integrando como probabilidad de emisión por unidad de tiempo. Multiplicándolo por $\hbar\omega$, obtendremos la intensidad

$$dI = \frac{e^2}{4\pi^2} d^3k \int e^{-i\omega\tau} \langle i | Q^+\left(t + \frac{\tau}{2}\right) Q\left(t - \frac{\tau}{2}\right) | i \rangle d\tau. \quad (59.10)$$

Un electrón ultrarrelativista radia en un cono estrecho que forma ángulos $\theta \sim m/\epsilon$ respecto de su velocidad \mathbf{v} . En consecuencia, la emisión en una dirección dada $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$ se produce en el segmento de trayectoria en el que \mathbf{v} gira un ángulo $\sim m/\epsilon$. Dicho segmento se recorre en un tiempo τ tal que $|\dot{\mathbf{v}}| \approx \tau\omega_0 \sim m/\epsilon \ll 1$. Precisamente este intervalo proporciona la contribución fundamental a la integral respecto de τ . Por lo tanto, en los cálculos que siguen desarrollaremos sistemáticamente todas las cantidades en serie de potencias de $\omega_0\tau$. Al hacerlo, sin embargo,

* Recordaremos que (en 59.8) no se ha efectuado todavía la integración respecto del tiempo, de modo que no se ha expresado la conservación de la energía y la suma respecto de φ_f no queda limitada por condición alguna.