MATEMÁTICA BÁSICA

TEORIA DE LOS NÚMEROS NATURALES

Los axiomas de Peano

GUSTAVO MARCA CASTROMONTE

TEORÍA DE LOS NÚMEROS NATURALES
1ra. edición

Febrero del 2011

AUTOR/EDITOR: Gustavo Marca Castromonte

Realizado en $\LaTeX\,2_\varepsilon$
e mail: marcagustavo@yahoo.com

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N: 2011-02357

Lima Perú

Índice general

Capítulo 1

Sistema de los números naturales

1.1. Introducción

A diferencia de Dedekind, Peano no estaba interesado en una construcción de los números naturales a partir de la teoría de conjuntos sino de la Axiomatización para su definición dando bases solidas para nuevas construcciones a partir de ella, utilizando para ello la lógica matemática.

Originalmente (1889) eran 9 los axiomas que Peano presentó en su obra *Arithmetices principia nova methodo exposita*. Luego de un estudio, muchos matemáticos lograron prescindir de aquellos axiomas que se podían generar de los otros, es decir trataron de obtener su mínima condiciones necesarias y suficientes para su definición, así llegaron a obtener cinco axiomas que ahora conocemos, dos de ellos esta implícito en la definición de la función sucesor, restando tres axiomas que son conocidos como los axiomas de Peano.

1.2. El conjunto de los naturales

Dada un conjunto que denotaremos por $\mathbb{N}$ y una función $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisface los axiomas siguientes:

P1: La función s es inyectiva.

P2: $\mathbb{N} \setminus s(\mathbb{N})$ es un conjunto unitario y a dicho elemento le llamaremos *uno* y lo denotaremos por 1.

P3: (Principio de Inducción) Si $X \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto de tal forma que cumpla con
(i) $1 \in X$
(ii)Si $n \in X \Longrightarrow s(n) \in X$, entonces $X = \mathbb{N}$

Al sistema $(\mathbb{N}, s, 1)$ le llamaremos Sistema de los números naturales.

A continuación mencionaremos algunas observaciones

1. A cada elemento de $\mathbb{N}$ le llamaremos *número natural*.
2. A la función $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sera llamada *función sucesor*.
3. Sea $n \in \mathbb{N}$ luego la imagen via s la cual es $s(n)$ le llamaremos el sucesor de n.
4. Las tres condiciones anteriormente mencionadas $P1, P2$ y $P3$ recibirán el nombre de axiomas de Peano.

Problema 1.1 *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número natural arbitrario. Probar que $s(n) \neq n$*

Demostración:

Consideremos $X = \{n \in \mathbb{N} : \ s(n) \neq n \ \}$

- Es claro que $X \subseteq \mathbb{N}$

- $1 \in X$: como $\mathbb{N} \backslash s(\mathbb{N}) = \{1\}$ entonces $1 \notin s(\mathbb{N})$

  luego para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $s(n) \neq 1$ en particular para $n = 1$, luego se tiene $s(1) \neq 1$

- Considerando $n \in X$ entonces $s(n) \neq n$, ahora por ser s una función inyectiva se tiene

  $$s(s(n)) \neq s(n)$$

  luego por definición de X, se tiene $s(n) \in X$ $\square$

1.3. Operación de Adición en los números naturales

Es claro que la nueva estructura solamente considerándola como conjunto no es valiosa, para ello construyamos sobre ella una operacion que por tradición le llamaremos *la adición en los naturales*, y lo definimos del modo siguiente:

Definición 1.1 (Adición en $\mathbb{N}$) *Dados m y n dos números naturales, la suma denotada por $m+n$ esta dada por*

$$m+n=s^n(m)$$

La cual se puede interpretar del modo siguiente

$$\begin{cases} m+1 & = s(m) \\ m+s(n) & = s(m+n) \end{cases}$$

Problema 1.2 *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ entonces se tiene $m+n \in \mathbb{N}$*

Prueba: Considere $m \in \mathbb{N}$ arbitrariamente tomado es decir cualquiera, sobre n tenemos dos casos:

Caso 1: si $n=1$ entonces se tiene

$$m+n=m+1=s(m) \in \mathbb{N}$$

Caso 2: si $n \neq 1$ entonces existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $n=s(x)$ la existencia de x esta garantizada por el segundo axioma de Peano, ahora

$$m+n=m+s(x)=s(m+x) \in \mathbb{N}$$

□

Problema 1.3 *Demostrar que para todo $m, n \in \mathbb{N}$ se cumple:*

$$m+(n+1)=(m+n)+1$$

En efecto:

$$\begin{aligned} m + (n+1) &= m + s(n) \\ &= s(m+n) \\ &= (m+n)+1 \end{aligned}$$

□

Problema 1.4 *Sean m, n, p tres números naturales arbitrarios. Entonces*

$$m + (n+p) = (m+n) + p$$

Demostración:

Considere m y n dos numeros naturales arbitrarios pero fijos (*¿Que significa esto?*)

Sea ahora el conjunto de inducción

$$X = \{p \in \mathbb{N} : \quad m + (n+p) = (m+n) + p\}$$

- $1 \in X$: Esto es cierto por problema 1.3
- Consideremos ahora $p \in X$ y veamos que se cumple $s(p) \in X$

$$\begin{aligned} m + (n + s(p)) &= m + s(n+p) \\ &= s(m + (n+p)) \\ &= s((m+n)+p) \\ &= (m+n) + s(p) \end{aligned}$$

Basta con ello para indicar por definición de los axiomas de Peano que $X = \mathbb{N}$, con ello se tiene lo pedido. □

Problema 1.5 *Para todo número natural n se tiene que*

$$1 + n = n + 1$$

Demostración: Considerando $X = \{n \in \mathbb{N} : \ 1 + n = n + 1\}$

- $1 \in X$: esto es cierto ya que $1 + 1 = 1 + 1$ por propiedad reflexiva de la igualdad en $\mathbb{N}$.

- Supongamos[1] que $n \in X$ operando:

$$\begin{aligned} 1 + s(n) &= s(1 + n) \\ &= s(n + 1) \\ &= (n + 1) + 1 \\ &= s(n) + 1 \end{aligned}$$

$\square$

Problema 1.6 *Para todo par de números naturales m y n se cumple:*

$$m + n = n + m$$

Demostración:

Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : \ m + n = n + m\}$

Es claro que se tiene $1 \in X$ esto es por Teorema 1.5.

Ahora sea $n \in X$, operando:

$$\begin{aligned} m + s(n) &= s(m + n) \\ &= s(n + m) \\ &= (n + m) + 1 \\ &= n + (m + 1) \\ &= n + (1 + m) \\ &= (n + 1) + m \\ &= s(n) + m \end{aligned}$$

$\square$

[1] Esta expresión *supongamos* no es para iniciar una demostración por contradicción sino equivale a considerar que dicha afirmación es verdadera.

Problema 1.7 *[La regla de la cancelación] Sabiendo que se cumple* $m+n=m+p$ *en* $\mathbb{N}$ *entonces se tiene*

$$n=p$$

Demostración: Consideremos en el conjunto de referencia

$$X=\{m\in\mathbb{N}:\ m+n=m+p\Rightarrow\ n=p\}$$

Veamos las hipotesis para concluir que $X=\mathbb{N}$.

- $1\in X$: Sea $1+n=1+p$ entonces se tiene

$$n+1=p+1$$

luego por definición

$$s(n)=s(p)$$

ahora por ser la función sucesor inyectivo

$$n=p$$

- Consideremos como hipótesis inductiva que $m\in X$, se desea probar que $s(m)\in X$, veamos

supongamos que se tiene

$$s(m)+n=s(m)+p$$

luego por Teorema 1.6

$$n+s(m)=p+s(m)$$

por definición

$$s(n+m)=s(p+m)$$

entonces

$$n+m=p+m \qquad \text{¿\textit{Porque esto es asi?}}$$

luego

$$m + n = m + p$$

por hipótesis inductiva se concluye

$$n = p$$

□

Problema 1.8 *Sea $n = p$ entonces $n + m = p + m$ para todo $m \in \mathbb{N}$*

Demostración: Considere

$$X = \{m \in \mathbb{N} : \ n = p \Rightarrow n + m = p + m\}$$

- $1 \in X$: como $n = p$ entonces $s(n) = s(p)$ entonces $n + 1 = p + 1$
- Considerando $m \in X$ entonces

$$n + m = p + m$$

entonces

$$s(n + m) = s(p + m)$$

luego

$$(n + m) + 1 = (p + m) + 1$$

entonces por asociatividad

$$n + (m + 1) = p + (m + 1)$$

$$n + s(m) = p + s(m)$$

entonces podemos concluir que

$$s(m) \in X$$

□

Problema 1.9 *Dados dos naturales $m, n \in \mathbb{N}$, luego exactamente una y solo una de las tres proposiciones siguientes se cumple:*

1. $m = n$
2. *existe* $p \in \mathbb{N}$ *de tal manera que* $m = n + p$
3. *existe* $q \in \mathbb{N}$ *tal que se tenga* $n = m + q$

Demostración: Revisar su solución en este material páginas más adelante. $\square$

1.4. Relación de orden en los números naturales

Hasta ahora al conjunto $\mathbb{N}$ se le ha dotado de una operación que por tradición le hemos llamado *adición*, teniendo este concepto daremos a $\mathbb{N}$ una relación de orden la cual lo vuelve mas agradable dicha estructura, veamos ahora ello.

Definición 1.2 *[orden en los naturales] Sean dos naturales cualesquiera es decir* $m, n \in \mathbb{N}$

$$m < n \Longleftrightarrow \textit{ existe } p \in \mathbb{N} \textit{ tal que } n = m + p$$

Observación:

1. Se considerara también lo siguiente: Sean $m, n \in \mathbb{N}$

$$m \leq n \Longleftrightarrow [m < n \vee m = n]$$

2. Se demostrara que esta relación no es total, esto es existen dos naturales a, b de modo que

$$a \not< b$$

Problema 1.10 *Si* $m < n \wedge n < p \Longrightarrow m < p$

Demostremos: Segun las hipótesis se tiene

$$n = m + q \wedge p = n + r, \quad \text{para algunos } q, r \in \mathbb{N}$$

luego $\quad p = (m + q) + r \quad$ entonces $\quad p = m + (q + r)$
finalmente

$$m < p$$

□

Esta última expresión me indica que la relación ***menor que*** *es transitiva.*

Problema 1.11 *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ entonces se cumplen una y solo una de las siguientes afirmaciones:*

$$m = n \vee m < n \vee n < m$$

En efecto: Esta conclusión deriva del teorema (1.9). □

Problema 1.12 *Considere $m < n$ en los naturales, entonces se cumple*

$$\forall\, p \in \mathbb{N} : \; m + p < n + p$$

Demostración: Como se tiene $m < n$ entonces existe $q \in \mathbb{N}$ de tal manera que

$$n = m + q$$

luego

$$n + p = (m + q) + p$$

entonces por asociatividad y conmutatividad

$$n + p = (m + p) + q$$

luego por definición

$$m + p < n + p$$

□

observación: El teorema anterior indica que a ambos lados de la desigualdad podemos adicionarlos y la desigualdad permanece.

Problema 1.13 *Si se tiene que $m + p < n + p$ entonces podemos concluir*

$$m < n$$

Prueba: Debido a que

$$m + p < n + p$$

entonces

$$(m+p)+r=n+p$$

luego

$$(m+r)+p=n+p$$

pero por el problema (1.7)se tiene

$$m+r=n$$

entonces por definición (1.2) se tiene

$$m<n$$

□

Problema 1.14 *Sean $m,n\in\mathbb{N}$ entonces se cumple*

$$s(m+s(n))=s(m)+s(n)$$

Veamos:

$$\begin{aligned} s(m+s(n)) &= (m+s(n))+1 \\ &= (m+1)+s(n) \\ &= s(m)+s(n) \end{aligned}$$

□

1.5. Operación de multiplicación en los naturales

Definiremos la multiplicación de números naturales en forma inductiva. Considerando $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} m \cdot 1 &= m \\ m.(n+1) &= m.n + m \end{aligned}$$

Problema 1.15 (Distributiva) *Considere* $m, n, p \in \mathbb{N}$ *entonces probar que se cumple*

$$m.(n+p) = m.n + m.p$$

Prueba:

Considere $m, n \in \mathbb{N}$ números naturales fijo y el conjunto X definido por

$$X = \{p \in \mathbb{N} : \ m.(n+p) = m.n + m.p\}$$

• $1 \in X$:

$$\begin{aligned} m.(n+1) &= m.n + m \\ &= m.n + m.1 \end{aligned}$$

basta con ello para observar que $1 \in X$.

- Hipótesis inductiva: $p \in X$
- Veamos que $s(p) = p + 1 \in X$

Calculemos para ello

$$\begin{aligned} m.(n+s(p)) &= m.(n+(p+1)) \\ &= m.((n+p)+1) \\ &= m.(n+p)+m \\ &= (m.n+m.p)+m \\ &= m.n+(m.p+m) \\ &= m.n+m.(p+1) \\ &= m.n+m.s(p) \end{aligned}$$

considerando los extremos(gracias a que $=$ es una relación de equivalencia) se obtiene que $s(p) \in X$, con lo cual por el tercer axioma de Peano $P3$ es decir por el PIM se obtiene $X = \mathbb{N}$ □

Problema 1.16 *Si $m, n, p \in \mathbb{N}$ elementos naturales arbitrarios.*
Probar que

$$(m+n).p = m.p + n.p$$

Demostración:
Considere $X = \{p \in \mathbb{N} : \ (m+n).p = m.p + n.p\}$
• $1 \in X$:
calculemos

$$(m+n).1 = m+n = m.1 + n.1$$

lo anterior nos asegura que $1 \in X$
•Si consideramos que $p \in X$ veamos que el sucesor de p este tambien en el conjunto X

es decir $s(p) \in X$. Para ello calculemos

$$\begin{aligned}
(m+n).s(p) &= (m+n).(p+1) \\
&= (m+n).p + (m+n) \\
&= m.p + n.p + m + n \\
&= (m.p + m) + (n.p + n) \\
&= m.s(p) + n.s(p)
\end{aligned}$$

cada linea expuesta anteriormente tiene una justificación para obtener la siguiente expresión es necesario que el estudiante justifique ello.
Basta con ello para probar lo pedido, es decir la distributiva se puede realizar también por la derecha. □

Problema 1.17 (Asociativa de la multiplicación) *Si $m, n, p \in \mathbb{N}$ entonces probar que*

$$m.(n.p) = (m.n).p$$

Veamos:
Considere $m, n \in \mathbb{N}$ fijos y el conjunto siguiente

$$X = \{p \in \mathbb{N} : \ m(np) = (mn)p\}$$

• $1 \in X$:
Basta para ello considerar

$$m(n.1) = m.n = (m.n).1$$

• HI:$p \in X$:

calculemos

$$\begin{aligned} m.(n.s(p)) &= m.(n.(p+1)) \\ &= m.(np+n) \\ &= m.(n.p)+m.n \\ &= (m.n).p+(m.n) \\ &= (m.n)(p+1) \\ &= (m.n)s(p) \end{aligned}$$

de lo anterior se tiene $s(p) \in X$. □

Problema 1.18 *Sea* $m, n \in \mathbb{N}$. *Probar que* $m.n = n.m$

Prueba:

Sea m fijo y considerando

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \ m.n = n.m\}$$

• $1 \in \mathbb{N}$:

Considerando en este caso

$$Y = \{p \in \mathbb{N} : \ p.1 = 1.p\}$$

$-$ $1 \in Y$: en efecto, como $1.1 = 1.1$

$-$ Sea $p \in Y$ entonces

$$\begin{aligned} s(p).1 &= (p+1).1 \\ &= p.1+1.1 \\ &= 1.p+1 \\ &= 1.(p+1) \\ &= 1.s(p) \end{aligned}$$

con todo lo anterior se tiene que $s(p) \in Y$, luego se tiene $Y = \mathbb{N}$
con lo cual se tiene que $1 \in X$

- Consideremos $n \in X$ y veamos que $n + 1 \in X$.

Calculemos

$$\begin{aligned} m.(n+1) &= m.n + m \\ &= n.m + m \\ &= n.m + 1.m \\ &= (n+1).m \end{aligned}$$

Nuevamente es necesario que se tenga presente la justificación de cada paso en las lineas anteriores.
Con todo ello se prueba lo pedido. □

Problema 1.19 *Considere $m, n \in \mathbb{N}$ luego se cumple:*

$$s(m.s(n)) = m.n + s(m)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} s(m.s(n)) &= s(m.n + m) \\ &= (m.n + m) + 1 \\ &= m.n + (m + 1) \\ &= m.n + s(m) \end{aligned}$$

□

Problema 1.20 *Considerando m, n dos números naturales arbitrarios, entonces se cumple*

$$s(s(m).s(n)) = s(m) + m.n + s(n)$$

Probando:

$$\begin{aligned} s(s(m).s(n)) &= s(s(m).n + s(m)) \\ &= s(n.s(m) + s(m)) \\ &= s(n.m + n + s(m)) \\ &= (n.m + n + s(m)) + 1 \\ &= n.m + (n + 1) + s(m) \\ &= n.m + s(n) + s(m) \\ &= s(m) + m.n + s(n) \end{aligned}$$

□

Problema 1.21 *Si* $m.p = n.p$ *entonces se prueba que* $m = n$

Prueba Supongamos que existen $m, n, p \in \mathbb{N}$ de tal forma que

$$m.p = n.p \ \wedge \ m \neq n$$

luego por (1.11) se tiene

$$m < n \ \vee \ m > n$$

caso 1: si $m < n$ entonces existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + x$, ahora bien como $m.p = n.p$ entonces $m.p = (m + x).p$ entonces $m.p = m.p + x.p$ luego como $x.p \in \mathbb{N}$ entonces $m.p < m.p$ lo cual contradice (1.11) □

Observación: Note que se ha realizado la demostración utilizando los argumentos siguientes

$$p \to q \equiv \sim p \vee q$$

y la negación de ella

$$\sim (p \ \to q) \equiv \ p \wedge \sim q$$

1.6. El Principio del Buen Orden

Problema 1.22 *Considerando el tercer axioma de Peano como el Principio de Inducción Matemática(PIM) y tambien El Principio del Buen Orden (PBO)a la afirmación siguiente:*

Todo conjunto no vacío en $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo

Probar que

$$PIM \Longrightarrow PBO$$

Demostración: Veamos sea $B \subseteq \mathbb{N}$ no vacío totalmente arbitrario, debemos probar que existe un elemento mínimo en B esto es

$$\exists\, m \in B / \ \forall\, b \in B, m \leq b$$

ahora como lo hallamos?
Consideremos $1 \in B$ como $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq n$ podemos considerar en particular $\forall n \in B, 1 \leq n$ luego 1 es el elemento mínimo de B la cual es el elemento buscado.
Considerando ahora que $1 \notin \mathbb{N}$:
creamos un conjunto X

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \ I_n \subseteq \mathbb{N} \backslash B\}$$

como $1 \notin B$ entonces $1 \in \mathbb{N} \backslash B$ luego $I_1 \subseteq \mathbb{N} \backslash B$ por lo tanto $1 \in X$.
Ahora debido a que $B \neq \emptyset$ entonces existe $b_0 \in B$ luego $b_0 \notin \mathbb{N} \backslash B$ entonces

$$I_{b_0} \nsubseteq \mathbb{N} \backslash B$$

luego por definición $b_0 \notin X$ luego

$$X \neq \mathbb{N}$$

por lo tanto no verifica el PBO, con lo cual se deduce que existe $n_0 \in X$ de modo que

$$s(n_0) = n_0 + 1 \notin X$$

ahora como $n_0 \in X$ entonces

$$I_{n_0} = \{1, 2, \ldots, n_0\} \subseteq \mathbb{N} \backslash B$$

entonces $1, 2, \ldots, n_0 \notin B$ $(\triangle)$

ahora considerando $m = n_0 + 1$ se tiene que $m \notin X$ luego $I_m \nsubseteq \mathbb{N} \backslash B$ $(\triangle\triangle)$

de $\triangle$ y $\triangle\triangle$ obliga a que

$$m \in B$$

Afirmamos: m es el elemento mínimo de B.

En efecto: Consideramos $b \in B$ tomado arbitrariamente de $\triangle$ se deduce que

$$n_0 < b$$

luego se tiene

$$n_0 + 1 \leq b$$

entonces

$$m \leq b$$

■

Problema 1.23 *Probar que* $PBO \implies PIM$

Prueba: Sea $X \subseteq \mathbb{N}$ de tal manera que verifique con

(i) $1 \in X$

(ii) si $n \in X$ entonces se cumple $s(n) = n + 1 \in X$

Por demostrar que $X = \mathbb{N}$:

Supongamos lo contrario es decir

$$X \subsetneqq \mathbb{N}$$

consideremos el conjunto $I = \mathbb{N} \setminus X$, por lo anterior se tiene que $I \neq \emptyset$

luego por el PBO, existe $m \in I$ elemento mínimo de I, como $1 \in X$ entonces $1 \notin I$ luego

$$1 < m$$

entonces existe $x_0 \in \mathbb{N}$ de tal forma que $m = 1 + x_0$ y como $x_0 < m = min(I)$ se cumple que $x_0 \notin I = N \backslash X$
luego

$$x_0 \in X$$

por (ii) se tiene $s(x_0) = x_0 + 1 \in X$ entonces $m \in X$ luego

$$m \notin N \setminus X = I$$

lo cual es incorrecto es decir es una afirmación contradictoria, entonces negando lo supuesto se tiene

$$X = \mathbb{N}$$

□

Problema 1.24 *Si $m > n$ entonces se cumple*

$$s(m) > s(n)$$

prueba: Supongamos lo contrario es decir

$$s(m) \leq s(n)^2$$

ahora podemos naturalmente dividir en dos casos y se espera que al entrar en cada uno de ellos se obtenga un hecho contradictorio
Caso 1: Si $s(m) = s(n)$ como s es una función inyectiva por el primer axioma de Peano se tiene

$$m = n$$

pero esto no va de acuerdo con la hipótesis.
Caso 2: Si $s(m) < s(n)$ entonces $s(m) + p = s(n)$ para algún $p \in \mathbb{N}$ luego

$$p + s(m) = s(n)$$

[2] La justificación de ser lo contrario se basa en el problema (1.11)

con lo cual se obtiene

$$s(p+m) = s(n)$$

entonces

$$p+m = n$$

es decir $m < n$ que tampoco es correcto.
Finalmente la suposición tomada inicialmente es un proposición falsa, con lo cual al negarla se obtiene lo pedido

$$s(m) > s(n)$$

$\square$

Problema 1.25 *Sabiendo que $m > n$ entonces probar que*

$$\forall\, p \in \mathbb{N} : \ m.p > n.p$$

Demostremos: debido a que se cumple $m > n$ entonces existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $m = n+p$

$$\begin{aligned} s(s(m).s(n)) &= s(s(m).n + s(m)) \\ m.p &= (n+x).p \\ m.p &= n.p + x.p \end{aligned}$$

ahora como $x.p \in \mathbb{N}$ entonces se cumple

$$m.p > n.p$$

$\square$

Problema 1.26 *Considerando $m > n \wedge p > q$.*
Demuestre que

$$m+p > n+q$$

Prueba: Como

$$m > n \wedge p > q$$

entonces existen $x, w \in \mathbb{N}$ de tal manera que

$$m = n + x \wedge p = q + w$$

luego tenemos

$$m + p = (n + x) + (q + w)$$

por propiedades se tiene

$$m + p = (n + q) + (x + w)$$

como $x + w \in \mathbb{N}$ tenemos luego

$$m + p > n + q$$

$\square$

Problema 1.27 *Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, no existe $x \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n < x < n + 1$$

Prueba: Supongamos que existen $n, x \in \mathbb{N}$ de modo que

$$n < x < n + 1$$

pero como $n < x$ entonces $n + 1 \leq x$ luego tenemos

$$n + 1 \leq x < n + 1$$

Si $n + 1 = x$ entonces $n + 1 < n + 1$ esto es imposible por (1.11)

Si $n + 1 < x$ entonces como $x < n + 1$ entonces $n + 1 < n + 1$ esto último no puede ser. $\square$

Problema 1.28 *Probar que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$$

Demostremos: Consideremos el conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N} \ : \ \ 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)\}$$

$\leadsto$ $1 \in X$: basta comprobar reemplazando !verifique¡

$\leadsto$ Supóngase que $n \in X$

veamos que $s(n) = n+1 \in X$

Calculemos

$$\begin{aligned}
1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 + (2(n+1)-1)^3 &= [1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3] + (2n+1)^3 \\
&= n^2(2n^2-1) + (2n+1)^3 \\
&= 2n^4 - n^2 + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 \\
&= 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1 \\
&= (n^2 + 2n + 1)(2n^2 + 4n + 1) \\
&= (n+1)^2(2(n+1)^2 - 1)
\end{aligned}$$

Luego haciendo uso del PIM, concluimos que

$$X = \mathbb{N}$$

$\square$

Problema 1.29 *Mostrar que para todo número natural n con $n \geq 4$ se cumple*

$$n! > 2^n$$

Veamos:

Para $n = 4$ basta observar que se verifica.

Si cumple para n es decir $n! > 2^n$, veamos para el sucesor de n: $s(n) = n+1$

Calculemos

$$(n+1)! = n!(n+1) > (n+1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

luego tenemos finalmente

$$(n+1)! > 2^{n+1}$$

□

Problema 1.30 *Probar* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ *es múltiplo de* 3.

La prueba se dejará para el estudiante.

Problema 1.31 *Demostrar que la suma de los primeros n números naturales esta dado por*

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Utilizando para su demostración

(i)PIM

(ii) PBO

Veamos ello:

(i)Utilizando el PIM

Sea X el conjunto inductivo

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \; 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\}$$

$\rightsquigarrow$ $1 \in X$:

Ello es evidente ya que

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$\rightsquigarrow$Hipótesis inductiva(HI): $n \in X$

$\rightsquigarrow$ Tesis: $s(n) = n + 1 \in X$

veamos ello

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

$\square$

(ii)Utilizando el PBO:

Considere para ello el conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\}$$

Definamos

$$Y := \mathbb{N} \backslash X$$

Es claro que basta verificar que $Y = \emptyset$, luego supongamos que

$$Y \neq \emptyset$$

esto quiere decir que existe al menos un elemento en el conjunto Y, luego $Y \neq \emptyset$ entonces por el PBO existe un elemento mínimo en Y, es decir

$$\exists\ m = min(Y)$$

es claro que $m \in Y$ entonces

$$m \notin X \tag{1.1}$$

como $1 \in X$ entonces $1 \notin Y$ luego $1 < m$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal manera que

$$m = n_0 + 1$$

ahora debido a que $n_0 \notin Y$ entonces $n_0 \in X$ luego debe cumplir con

$$1 + 2 + \cdots + n_0 = \frac{n_0(n_0+1)}{2}$$

calculando por otro lado

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n_0 + (n_0 + 1) &= \frac{n_0(n_0+1)}{2} + (n_0 + 1) \\ &= \frac{(n_0+1)(n_0+2)}{2} \end{aligned}$$

entonces $n_0 + 1 \in X$ es decir

$$m \in X \tag{1.2}$$

pero por [1.1] y [1.2] se obtiene un hecho contradictorio o imposible, con lo cual negando la suposición obtenemos $Y = \emptyset$ entonces

$$X = \mathbb{N}$$

$\square$

Problema 1.32 *Probar que no existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de tal manera que*

$$f(n) = f(f(n+1)) + f(f(n-1)), \ \ \forall\, n \geq 2$$

Prueba:

Veamos ello, comencemos de una manera muy natural suponiendo que si existe tal función f.

Ahora consideremos

$$B := \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

como $f(B) \subseteq \mathbb{N}$ es no vacío, entonces es aplicable el PBO generando así la existencia de un elemento mínimo en $f(B)$

$$\exists \ \ m = min(f(B))$$

luego existe también con ello $b \in B$ de tal manera que se cumpla

$$m = f(b), \ \text{con}\ b \geq 2$$

Considere ahora un nuevo conjunto A definido así

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \ n \geq 2 \ \wedge \ m = f(n)\}$$

es decir es el conjunto de todos los naturales que mediante f lleguen a m.

Debido a que $b \in A$ entonces $A \neq \emptyset$, luego por el PBO existe $b_0 \in A$ tal que

$$b_0 = min(A)$$

luego hasta ahora tenemos $m = f(b_0),\ b_0 \geq 2$.

Nótece que m y b_0 son mínimos en sus definiciones.

Ahora observemos la ecuación y es notorio que

$$\begin{aligned} f(f(n+1)) + f(f(n-1)) &> f(f(n+1)) \\ f(n) &> f(f(n+1)),\ n \geq 2 \end{aligned}$$

en particular para $n = b_0 \geq 2$

entonces $f(b_0) > f(q),\ q = f(b_0+1)$

entonces $m > f(q)$ con $q \geq 2$, en este punto apliquemos la minimalidad de m y b_0 entraremos en una contradicción luego esto obliga a que $q = 1$ es decir

$$f(b_0+1) = 1$$

esto es imposible por el segundo axioma de Peano.

Como conclución tenemos que tal función es imposible que exista. $\square$

Problema 1.33 *Se define*

$$h(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

Probar

$$n + h(1) + h(2) + \cdots + h(n-1) = nh(n)\ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$$

Demostración:

Veamos que se cumpla para $n = 2$

Calculemos

$$2 + h(1) = 2 + \frac{1}{1} = 3 \tag{1.3}$$

Por otro lado

$$2h(2) = 2(1 + \frac{1}{2}) = 2 + \frac{2}{2} = 2 + 1 = 3 \tag{1.4}$$

Luego comparando [1.3] y [1.4], se obtiene que se cumple para $n = 2$.

Hipótesis inductiva: Se cumple para n

Tesis: veamos que se verifique para el sucesor de n es decir para $n+1$

Calculemos

$$\begin{aligned}
(n+1)+h(1)+\cdots+h(n-1)+h(n) &= [n+h(1)+\cdots+h(n-1)]+h(n)+1\\
&= nh(n)+h(n)+1\\
&= (n+1)h(n)+1\\
&= (n+1)h(n)+\frac{n+1}{n+1}\\
&= (n+1)(h(n)+\frac{1}{n+1})\\
&= (n+1)+(1+2+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})\\
&= (n+1)h(n+1)
\end{aligned}$$

$\square$

Problema 1.34 *Probar que toda función monótona no creciente*

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$

es constante a partir de cierto punto (es decir existe $n_0\in\mathbb{N}$ *tal que* $\forall\ n\geq n_0,\ f(n)=f(n_0)$*)*

veamos ello:

Considerando

$$B=f(\mathbb{N})\subseteq\mathbb{N}$$

es claro que $B\neq\emptyset$ para ello basta tomar $f(1)\in B$

ahora por el PBO existe un elemento de B, $m\in B$ de tal modo que

$$m=min(B)$$

también existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$m=f(n_0)$$

intuímos que $n_0 \in \mathbb{N}$ es el natural buscado , es decir hace que la función sea constante a partir de dicho valor
en efecto, considerando $n \geq n_0$ arbitrariamente tomado
como f es monótona no creciente se tiene

$$f(n) \leq f(n_0) \tag{1.5}$$

ahora como $n \in \mathbb{N}$ entonces $f(n) \in B$, luego por minimalidad de m se tiene $f(n) \leq f(n_0)$
es decir

$$f(n_0) \leq f(n) \tag{1.6}$$

luego observando [1.5] y [1.6] se obtiene lo pedido

$$f(n_0) = f(n),\ \forall n \geq n_0$$

$\square$

Problema 1.35 *Pruebe que* $\forall\ A \subseteq \mathbb{N}$ *no vacío, se tiene que*

$$A \backslash S(A) \neq \emptyset$$

Prueba:

como A es un conjunto no vacío entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ elemento mínimo de A esto se da por el PBO, en este punto podemos dividir en dos casos:
Si se cumple que $n_0 = 1$ entonces por el segundo axioma de Peano

$$1 \notin S(A)$$

luego se tendría

$$1 \in A \backslash S(A)$$

luego se cumple lo pedido en este caso, es decir

$$A \backslash S(A) \neq \emptyset$$

Ahora consideraremos el caso complementario es decir si $n_0 \neq 1$ es decir $n_0 > 1$ queremos demostrar que $n_0 \notin S(A)$, ahora es natural suponer lo contrario es decir

$$n_0 \in S(A)$$

luego existe $a \in A$ tal que $n_0 = s(a)$, por minimalidad de n_0 en A, se tiene

$$n_0 \leq a$$

ahora bien supongamos que

$$n_0 = a$$

si esto fuese así $n_0 = s(a) = s(n_0)$ es decir

$$n_0 = s(n_0)$$

esto es imposible por el problema 1.1
luego debe ser que

$$n_0 < a$$

luego $a = n_0 + x$ para algún $x \in \mathbb{N}$ entonces

$$s(a) = s(n_0 + x) = n_0 + s(x)$$

entonces $s(a) > n_0$ es decir

$$s(a) > s(a)$$

lo cual es imposible.
Finalmente necesariamente hay que considerar

$$n_0 \notin S(A)$$

luego

$$A \backslash S(A) \text{ es no vacío}$$

$\square$

Problema 1.36 *Probar que para cada número natural $p(p \geq 3)$ existen p números naturales distintos dos a dos*

$$n_1, n_2, \cdots, n_p$$

de tal manera que

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_p} = 1$$

Probando:

Para $p = 3$ buscando dichos números encontramos a

$$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 6$$

como se nota son diferentes y también se tiene

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

Ahora bien, supongamos que se tiene p números naturales que verifican lo pedido(como en la hipótesis del problema)

ahora tenemos

$$\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2} + \cdots + \frac{1}{2n_p} = \frac{1}{2}$$

luego tenemos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2} + \cdots + \frac{1}{2n_p} = 1$$

parece ser que hemos logrado encontrar los $p + 1$ números naturales, las cuales serían

$$2, 2n_1, 2n_2, \cdots, 2n_p$$

utilizando el método de contradicción logramos probar que son números diferentes entre sí. $\square$

Problema 1.37 *Dados dos números naturales a y b.*

Demostrar que existe un natural m de tal forma que se cumpla con

$$ma > b$$

Prueba

basta considerar

$$m := b + 1$$

en efecto:

Calculemos

$$m.a = (b + 1)a = ba + a > ba \geq b$$

luego tenemos

$$m.a > b$$

□

observación:

En esta última parte se ha tenido que utilizar los resultados siguientes

a) Sean $a, b \in \mathbb{N}$ entonces se cumple $a.b \geq b$

b) considere $a, b, c \in \mathbb{N}$ y

$$a > b \geq c$$

entonces se tiene que

$$a > c$$

□

Problema 1.38 *Dada $m, n \in \mathbb{N}$ con $n > m$.*

Probar que n es múltiplo de m o existen $q, r \in \mathbb{N}$ de tal manera que

$$n = m.q + r, \quad con\ r < m$$

Prueba:

Supóngase que n no es múltiplo de m.

Consideremos el conjunto siguiente

$$H = \{q \in \mathbb{N} : \ mq < n\}$$

es claro que

$$H \neq \emptyset$$

debido a que $m \cdot 1 = m < n$ entonces $1 \in H$.

afirmamos que H es un conjunto finito:

En efecto sea $q \in H$ arbitrario, entonces $mq < n$ y como $n \leq m.n$

entonces se cumple

$$mq < mn$$

luego por propiedad $q < n$, con lo cual se tiene

$$H \subseteq I_n$$

y como cualquier subconjunto de un conjunto finito es finito se tiene que H es finito.

Ahora como todo conjunto finito no vacío posee un elemento máximo, considere

$$q_0 = \max(H)$$

como $q_0 \in H$ entonces $m.q_0 < n$ luego

$$\text{existe } r_0 \in \mathbb{N}/\ n = mq_0 + r_0$$

veamos que si $n = mq_0 + r$ donde $q_0 = max(H)$ entonces $r_0 < m$

en efecto: Supongamos lo contrario, es decir

$$r_0 \geq m$$

ahora si $r_0 = m$ entonces se tendría

$$n = mq_0 + r_0 = mq_0 + m$$

luego

$$n = m(q_0 + 1)$$

luego de lo anterior n es múltiplo de m, lo cual no se puede dar por la suposición inicial.

Con lo cual debe darse que $r_0 > m$ entonces existe p en los números naturales de modo que $m + p = r_0$, luego operando

$$\begin{aligned} n &= mq_0 + r_0 \\ &= mq_0 + m + p \\ &= m(q_0 + 1) + p \end{aligned}$$

luego se tendría $m(q_0 + 1) < n$, entonces $(q_0 + 1) \in H$ esto no se puede dar, ya que

$$q_0 = max(H)$$

con lo cual tendríamos que necesariamente $r_0 < m$. Hasta aquí se ha probado la existencia del cociente y resto en $\mathbb{N}$, corresponde en esta segunda parte a la Unicidad de tales elementos.

consideremos $n = mq_0 + r_0$ ya encontrados pero también sean

$$n = mq_1 + r_1$$

con $q_1, r_1 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$r_1 < m \tag{1.7}$$

de lo anterior se tiene que $mq_1 < n$ entonces $q_1 \in H$ por la maximalidad

$$q_1 \leq q_0$$

Supongamos que se cumpla $q_1 < q_0$ entonces existiría $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$q_1 + k = q_0$$

luego como

$$n = mq_0 + r_0 = mq_1 + r_1 \tag{1.8}$$

se tiene

$$m(q_1 + k) + r_0 = mq_1 + r_1$$

operando tenemos

$$mk + r_0 = r_1$$

por lo tanto $mk < r_1$ entonces $m < r_1$ pero esto último no es compatible con la ecuación (1.7)

por lo tanto es necesario que $q_1 = q_0$ de esto reemplazamos en la ecuación 1.8 se obtiene

$$r_0 = r_1$$

$\square$

Problema 1.39 *Sea $X \subseteq \mathbb{N}$ un subconjunto no vacío de tal manera que*

$$m, n \in X \Longleftrightarrow m, m+n \in X$$

Probar que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que X es el conjunto de todos los múltiplos de k, esto quiere decir que

$$X = \{k.q : \ q \in X\}$$

Prueba

La clave de este problema es descubrir quien es o podría ser este $k \in \mathbb{N}$.

Como $X \subseteq \mathbb{N}$ es no vacío luego por el PBO nos garantiza la existencia de un $k \in X$ de tal manera que es el mínimo es decir

$$k = min(X)$$

Consideremos el conjunto H de referencia, definido por

$$H = \{k.q : \ \ q \in \mathbb{N}\}$$

Afirmamos que $X = H$

en efecto:

$(\subseteq)$

Sea $x \in X$ un elemento arbitrario.

Entonces por la minimalidad $x \geq k$

Si x es múltiplo de k entonces $x \in H$

En caso contrario es decir si x no es múltiplo de k, debería existir $q, r \in \mathbb{N}$ tal que

$$x = kq + r, \text{ donde se cumpla con } r < k \tag{1.9}$$

se prueba por inducción matemática que si $k \in X$ entonces

$$\forall\, q \in \mathbb{N},\ kq \in X$$

Ahora como se verifica que

$$kq \in X \wedge x = kq + r \in X$$

por hipótesis del problema se deduce que $r \in X$(importante ver esta situación)

pero esto último no se puede dar por la minimalidad de k en X.

Finalmente este caso es imposible dejando luego obligatoriamente que se cumpla $X \in H$

$(\supseteq)$

sea $w \in H$ entonces existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $w = kq$, pero por lo demostrado anteriormente

$$kq \in X$$

entonces $w \in X$. □

Problema 1.40 *Considere válido los axiomas de Peano $P1$ y $P2$.*

Pruebe que son equivalentes

(i) Para todo subconjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{N}$ se tiene $A \backslash S(A) \neq \emptyset$

(ii) Se cumple el tercer axioma de Peano es decir el $P3$

demostración

$(i) \Longrightarrow (ii)$

Por demostrar que se cumple el PIM

Sea $X \subseteq \mathbb{N}$ tal que

(i) $1 \in X$

(ii) $n \in X \Longrightarrow s(n) = n + 1 \in X$

Por demostrar $X = \mathbb{N}$
Es común es esta parte suponer que no se verifique la igualdad es decir, supongamos que

$$X \subsetneqq \mathbb{N}$$

luego consideremos

$$Y := \mathbb{N} \backslash X$$

es claro que es no vacío, luego por hipótesis se tendría

$$Y \backslash S(Y) \neq \emptyset$$

con lo cual resulta la existencia de $a \in Y$ de manera que $a \notin S(Y)$ $(\triangle)$
ahora como $1 \in X$ entonces $1 \notin Y$ con lo cual $1 \neq a$, por lo tanto por el segundo axioma de Peano($P2$) existe

$$b \in \mathbb{N} \ / \ s(b) = a$$

ahora si fuese que $b \in Y$ entonces $s(b) \in S(Y)$ luego

$$a \in S(Y)$$

esto no se puede dar por $(\triangle)$
Por lo tanto es obligatorio que $b \notin Y$ entonces $b \in X$ pero por (ii) se tiene $s(b) \in X$ luego $a \in X$
por lo tanto $a \notin Y$ lo cual es imposible por $(\triangle)$.
Finalmente es necesario que $Y = \mathbb{N} \backslash X$ es el conjunto vacío, por lo tanto

$$X = \mathbb{N}$$

$(i) \Longleftarrow (ii)$
Ya fué demostrada en (1.35), teniendo en cuanta que $PIM \Longrightarrow PBO$ $\square$

Problema 1.41 *Sea* $B \subseteq \mathbb{N}$ *y* $a \in \mathbb{N}$ *de modo que* $\forall x \in B, x \leq a$.
Pruebe que existe $b \in B$ *de modo que* $\forall x \in B,\ x \leq b$

Veamos

Consideremos

$$A = \{w \in \mathbb{N} :\ \forall\, x \in B, x \leq w\}$$

es decir A es el conjunto de todas las cotas superiores de A en $\mathbb{N}$.
Como hipótesis $a \in A$ entonces $A \neq \emptyset$, luego por el PBO existe $m \in A$ elemento mínimo en A.
Afirmación: $m \in B$
supongamos que $m \notin B$, ahora como $\forall x \in B, x \leq m$ entonces

$$\forall\, x \in B, x < B$$

luego como $m > x \geq 1$ entonces $m > 1$ luego existe un antecesor $b \in B$ de modo que

$$m = b + 1$$

entonces como $x < m$ luego $x + 1 \leq m$
por lo tanto $m + 1 \leq b + 1$ entonces

$$x \leq b, \forall\, x \in B$$

luego $b \in B$ es decir $b < m$ pero esto es imposible por la minimalidad de m en A
entonces $\forall m \in B$
Ahora como $m \in A$ se tiene $\forall x \in B, x \leq m$ el cual es justamente lo pedido. □

Problema 1.42 *Sea* a *un número natural. Sea* X *un sub conjunto de números naturales de modo que*

(i) $a \in X$

(ii) $n \in X \Longrightarrow n + 1 \in X$

Demostrar que X contiene todos los números naturales que sean mayores iguales que a.

Prueba:

Considerando $m \geq a$. Por demostrar que $m \in X$
Creemos que es suficiente probarlo siguiente:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a + n \in X$$

para ello definamos el conjunto X

$$H = \{n \in X : \quad a + n \in X\}$$

Veamos que $H = \mathbb{N}$
$-\ 1 \in X$: como $a \in X$ luego por $(ii) a + 1 \in X$ luego $1 \in H$
$-$Hipótesis inductiva: $n \in H$
Veamos que se cumpla para $n + 1 \in H$
Como $n \in H$ entonces $a + n \in X$ luego por hipótesis $(a + n) + 1 \in X$ por lo tanto $a + (n + 1) \in X$
luego por definición se tiene $n + 1 \in H$ □

Problema 1.43 *Un elemento $a \in \mathbb{N}$ es llamado antecesor de $b \in \mathbb{N}$ cuando $a < b$ y no existe $c \in \mathbb{N}$ tal que*

$$a < cb$$

Probar que todo número natural excepto 1 posee un antecesor.

Demostremos:

Como para todo número natural n se tiene $n \geq 1$ luego no existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $a < 1$ esto quiere decir que 1 no tiene antecesor por definición.

Ahora consideremos $n \in \mathbb{N}$ de modo que $n > 1$, por segundo axioma de Peano($P2$) existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $n = a + 1$

entonces $a < n$ ahora consideremos $a < a+1$ por el problema 1.27 no existe o es imposible la existencia de un $c \in \mathbb{N}$ tal que $a < c < a+1$ esto con lleva a afirmar que a es el antecesor de n.

Problema 1.44 *Probar que si un número natural tiene antecesor entonces este es único.*

Problema 1.45 *Probar que si $x, y \in \mathbb{N}$ entonces $y \neq x + y$*

En efecto:
Fijemos el valor de $x \in \mathbb{N}$ arbitrario.
Consideremos el conjunto siguiente

$$X = \{y \in \mathbb{N} : \ y \neq x + y\}$$

Por demostrar que $X = \mathbb{N}$
$-$ $1 \in X$: supongamos lo contrario es decir que $1 \notin X$ esto quiere decir que

$$1 = x + 1$$

entonces $1 = s(x)$ pero esto no es correcto por $P2$.
$-$ Considerando cierto que $n \in X$ entonces $n \neq x + n$
veamos que $s(n) = n + 1 \in X$
por $P1$ se tiene que la función sucesor es inyectiva, entonces

$$s(n) \neq s(x + n)$$

luego $s(n) \neq x + s(n)$ entonces $s(n) \in X$. □

Problema 1.46 *Dados dos números naturales x e y, luego se verifica uno y solo uno de las afirmaciones siguientes:*

(a) $x = y$

(b) *Existe* $u \in \mathbb{N}$ *tal que* $x = y + u$

(c) *Existe* $v \in \mathbb{N}$ *de tal manera que* $y = x + v$

Prueba:

Primero veamos que dos de ellos entre $(a), (b)$ y (c) no se puede dar

Caso 1: Si se cumple (a) y (b)

entonces

$$x = y \wedge x = y + u$$

entonces

$$y = y + u$$

pero por el problema 1.45 esto es imposible.

caso 2: Si se cumple (a) y (c) entonces

$$x = y \wedge y = x + v$$

por lo tanto $y = y + v$ lo cual no se puede dar.

Caso 3: Si se verifica (b) y (c) entonces se tendría

$$x = y + u \wedge y = x + v$$

con lo cual se tendría

$$\begin{aligned} x &= (x + v) + u \\ x &= x + (v + u) \end{aligned}$$

lo cual es un hecho contradictorio por el problema 1.45.

Hasta ahora se ha probado la imposibilidad de que se cumpla dos de las tres afirmaciones dadas.

Concentrémonos ahora en probar que se tiene que verificar una de ellas necesariamente.

Mantengamos fijo x y consideremos M el conjunto de todos los $y \in \mathbb{N}$ para los cuales se cumple $(a) \vee (b) \vee (c)$

Probaremos que $M = \mathbb{N}$

$-$ $1 \in M$: consideremos $y = 1$

Caso 1: Si se tiene que $x = 1$ entonces $x = y$ luego se cumple (a)

Caso 2: Si $x \neq 1$ luego existe $u \in \mathbb{N}$ de tal manera que

$$x = u + 1$$

entonces $x = u + y$ cumpliéndose así (b).

De lo anterior se concluye que necesariamente $1 \in M$.

$-$ Consideremos que se cumpla que $y \in M$, veamos que el sucesor de y este también en M, es decir

$$s(y) = y + 1 \in M$$

Bien, como $y \in \mathbb{N}$ se da una de las posibilidades (a) o (b) o sino (c)

En el caso que se cumpla (a) es decir $x = y$ luego $s(x) = s(y)$, entonces

$$s(y) = y + 1 = x + 1$$

esto quiere decir que $s(y) = x + 1$ luego $s(y)$ cumple con (b).

El caso en que y cumpla con (b) se tiene la existencia de $u \in \mathbb{N}$ tal que $y = x + u$ entonces

$$s(y) = s(x + u) = x + s(u)$$

con lo cual $s(y)$ esta cumpliendo con (b).

Por último si y cumple con (c) me origina la existencia de $v \in \mathbb{N}$ de tal manera que $x = y + v$, entonces se tendría

$$\begin{aligned} s(x) &= s(y + v) \\ x + 1 &= s(y) + v \end{aligned} \tag{1.10}$$

En la ecuación 1.10 es necesario subdividir en dos subcasos:
Si se cumple que $v = 1$ luego tendríamos

$$\begin{aligned} x+1 &= s(y)+1 \\ x &= s(y) \end{aligned}$$

esto quiere decir que $s(y)$ cumple con (a)
Finalmente si $v \neq 1$ luego $v = h+1$ para algún $h \in \mathbb{N}$ luego

$$\begin{aligned} x+1 &= s(y)+v \\ x+1 &= s(y)+h+1 \\ x &= s(y)+h \end{aligned}$$

esto último nos hace ver que $s(y)$ cumple con el caso (c).
Por todo lo visto y en todos los casos se tiene que obligatoriamente

$$s(y) \in M$$

luego por el tercer axioma de Peano $P3$ se cumple que $M = \mathbb{N}$, con lo cual unido a la primera parte obtenemos lo pedido. $\square$

Problema 1.47 *Sean $x, y, z \in \mathbb{N}$ de modo que $x \leq y \wedge y \leq z$*
Probar que $x \leq z$

Veamos:
Como se tiene $x \leq y \wedge y \leq z$ entonces

$$(x < y \vee x = y) \wedge (y < z \vee y = z)$$

aplicando propiedades de lógica proposicional se tendría

$$(x < y \wedge y < z) \vee (x < y \wedge y = z) \vee (x = y \wedge y < z) \vee (xy \wedge y = z)$$

simplificando, se obtiene

$$(x < y) \vee (x < z) \vee (x = z) \vee (x = z)$$

luego como $p \vee p \equiv p$

$$x < z \vee x = z$$

con lo cual $x \leq z$. □

Problema 1.48 *Probar*

$$x \leq y \wedge y < z \wedge z \leq w \Longrightarrow x < w$$

Probando:

Este problema nos hace ver la necesidad de probar dos afirmaciones previamente que le categorizaremos como lemas
lema 1: Sabiendo que $x \leq y \wedge y < z$ entonces $x < z$
lema 2: Si $x < y \wedge y \leq z$ entonces $x < z$
una vez probado estos lemas ya tenemos la metodología visto en el problema anterior para solucionarlo.
En efecto

$$x \leq y \wedge y < z \wedge z \leq w$$

entonces

$$(x \leq y \wedge y < z) \wedge z \leq w$$

por el lema 1 se tiene

$$x < z \wedge z \leq w$$

ahora aplicando el lema 2

$$x < w$$

□

Problema 1.49 *Siendo* $a_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \cdots, n.$

Si

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{k-1} < a_k \leq a_k \leq \cdots \leq a_n$$

Probar que $a_1 < a_n$

Prueba: Se sugiere utilizar inducción matemática. □

Problema 1.50 *Probar que* $x + y > x$, *en* $\mathbb{N}$

Demostración:

Considerando $w = x + y$

entonces por defínción $w > x$ esto es

$$x + y > x$$

□

Problema 1.51 *Probar que* $\forall\, x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$

Demostración:

Considerando $x \in \mathbb{N}$ arbitrario

por $P2$ es decir el segundo axioma de Peano se tiene

$$x \in \mathbb{N} \setminus S(\mathbb{N}) \vee x \notin \mathbb{N} \setminus S(\mathbb{N})$$

luego tenemos

$$x = 1 \vee x \in S(\mathbb{N})$$

por lo tanto

$$x = 1 \vee \exists\, n \in \mathbb{N} / \; x = s(n) = n + 1$$

con lo cual por definición de $<$ se tiene

$$x = 1 \vee x > 1$$

es decir se cumple con lo pedido que

$$x \geq 1$$

$\square$

Problema 1.52 *Sea* $(\mathbb{N}, s)$ *un sistema de Peano.*
Dada $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ *y* $s' : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *definida por*

$$s'(n) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ s(n) & , \textit{ Si } n \neq 0(\textit{ es decir } n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Probar $(\mathbb{N}_0, s')$ *cumple los axiomas de Peano es decir es un sistema de números naturales.*

Demostración:

Veamos, debemos probar los tres axiomas

(i) s es una función inyectiva:

Sea $n, m \in \mathbb{N}_0$ de tal manera que

$$s'(n) = s'(m)$$

Caso 1: Si $n = 0 \wedge m = 0$ entonces $n = m$

Caso 2: Si $n = 0 \wedge m \neq 0$ entonces

$$s'(0) = s'(m)$$

entonces $1 = s(m)$ esto es incompatible por ser $(\mathbb{N}, s)$ un sistema de Peano.

Caso 3: Si $n \neq 0 \wedge m = 0$ el proceso es igual al caso 2.

Caso 4: Si $n \neq 0 \wedge m \neq 0$

entonces

$$s'(n) = s'(m)$$

luego por definicón

$$s(n) = s(m)$$

ahora como s es una función inyectiva por $P1$ se tiene

$$n = m$$

con lo cual se tiene s' es inyectiva

(ii) Por demostrar que $\mathbb{N}_0 \setminus s'(\mathbb{N}_0) = \{0\}$

en efecto:

($\subseteq$) Sea $x \in \mathbb{N}_0 \setminus s'(\mathbb{N}_0)$

Supongamos que $x \neq 0$ en $\mathbb{N}_0$ entonces $x \in \mathbb{N}$

luego podemos considerar que

Si $x = 1$ entonces

$$x = 1 = s'(0)$$

esto quiere decir que

$$x \in s'(\mathbb{N}_0)$$

es decir

$$x \notin \mathbb{N}_0 \setminus s'(\mathbb{N}_0)$$

pero esto último no se puede dar.

Luego veamos el otro caso

Si $x \in \mathbb{N}$ con $x \neq 1$, entonces existe $u \in \mathbb{N}$ de tal modo que $x = s(u)$

entonces

$$x = s(u) = s'(u)$$

tampoco se puede dar, no queda mas caso que ser

$$x = 0$$

($\supseteq$) De la definición de s' se tiene

$$0 \notin s'(\mathbb{N}_0)$$

es decir a nivel de conjuntos

$$0 \in \mathbb{N}_0 \setminus s'(\mathbb{N}_0)$$

$\square$

(iii) Sea $X \subseteq \mathbb{N}_0$
si

(i) $0 \in X$

(ii) $n \in X$ entonces $s'(n) \in X$
Por demostrar que $X = \mathbb{N}_0$
Veamos:
Como $0 \in X$ luego podemos considerar

$$X = A \cup \{0\}$$

donde $0 \notin A$, es claro que $A \neq \emptyset$(Justificar)
Luego tendríamos que $A \subseteq \mathbb{N}$ un conjunto no vacío, esto significa que hemos logrado trasladar el problema al sistema de Peano $(\mathbb{N}, s)$.
Luego

(a) $1 \in A$: esto es cierto ya que $0 \in X$ entonces $s'(0) \in X$ luego por definición se tendría que

$$1 \in X$$

entonces $1 \in A$

(b) Si $n \in A$ entonces $n \in X$ ahora por (ii) se tiene

$$s'(n) \in X$$

como $n \neq 0$ por definición se tendría

$$s(n) \in X = S \cup \{0\}$$

como $s(n) \neq 0$ entonces $s(n) \in A$.

Como conclución a lo anterior se deduce por el tercer axioma de Peano que

$$A = \mathbb{N}$$

Por lo tanto finalmente

$$X = A \cup \{0\} = \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$$

Problema 1.53 *Probar que* $\mathbb{N}$ *no tiene elemento máximo.*

Demostración:

Supongamos lo contrario es decir existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal modo que

$$n_0 = max(\mathbb{N})$$

como $s(n_0) = n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ entonces debe cumplir con

$$n_0 + 1 \leq n_0$$

entonces

$$n_0 + 1 < n_0 \vee n_0 + 1 = n_0$$

en este punto podemos dividir en dos casos

Caso 1: Si $n_0 + 1 < n_0$ ahora como $n_0 < n_0 + 1$ es imposible que se cumplan estas dos afirmaciones al mismo tiempo.

Caso 2: Si $n_0 + 1 = n_0$ entonces $s(n_0) = n_0$ esto último no se pude dar. $\square$

Problema 1.54 *Sea* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *una función tal que*

$$f(n+1) > f(n), \; \forall \; n \in \mathbb{N}$$

Pruebe que

a) Si $m < n$ entonces $f(m) < f(n)$

b) f es una función inyectiva.

Prueba:

Considere a) $m \in \mathbb{N}$ fijo y X el conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \ m < n \Longrightarrow f(m) < f(n)\}$$

Por demostrar que $X = \mathbb{N}$

∘ $1 \in X$:

Esto es verdadero, por un proceso de vacuidad esto quiere decir como $m < 1$ es una proposición falsa, entonces la implicación es verdadera es decir $1 \in X$.

∘ HI: $n \in X$

Tesis: $s(n) = n + 1 \in X$

Veamos, sea $m < s(n) = n + 1$

Caso 1: si $m = n$ luego por hipótesis del problema se tiene

$$f(n+1) > f(n)$$

luego

$$f(s(n)) > f(m)$$

Caso 2: Si $m < n$ en este punto podemos utilizar la HI, $f(m) < f(n)$ pero por hipótesis del problema se tiene $f(n) < f(n+1)$ luego se tiene

$$f(m) < f(n) < f(n+1)$$

con lo cual

$$f(m) < f(n+1) = f(s(n))$$

por lo tanto se verifica o cumple. □

b) Veamos que f es inyectiva.

Sea $m \neq n$ en $\mathbb{N}$ entonces se cumple

$$m < n \vee n < m$$

luego por la parte a) se deduce que

$$f(m) < f(n) \vee f(n) < f(m)$$

luego en cualquier caso se tiene $f(n) \neq f(m)$ esto hace que f sea inyectiva.
Nota: Como lo demostrarías, pero partiendo de que si $f(m) = f(n) \Longrightarrow m = n$ $\square$

Problema 1.55 *Sea* $(\mathbb{N}, s, 1), (\mathbb{N}', s', 1')$ *dos pares formando cada uno de ellos estructuras que cumplen con los axiomas de Peano.*
Probar que existe una biyección

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$$

de tal modo que

$$f(1) = 1' \ , \ f(s(n)) = s'(f(n))$$

Luego concluya que:

(a) $m < n \Longleftrightarrow f(m) < f(n)$

(b) $f(m + n) = f(m) + f(n)$

(c) $f(mn) = f(m)f(n)$

Prueba:
La primera situación a enfrentar es definir la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ ¿Y como lo haremos?
Una forma de definirlo es recursivamente, del modo siguiente

$$\begin{aligned} f(1) &= 1' \\ f(s(n)) &= s'(f(n)) \end{aligned}$$

Lo primero que se debería ver es que si esta definición esta adecuadamente establecida debe notarse que
Primero: Sea $m \in \mathbb{N}$ solo existe dos posibilidades

$$m = 1 \vee m \neq 1$$

Si $m = 1$ luego ya se tiene su imagen la cual es $1' \in \mathbb{N}'$
Si $m \neq 1$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que

$$s(n) = m$$

luego su imagen esta dado por $s'(f(n))$, en este punto $f(n)$ por la recursividad ya se encuentra definida luego es correcta dicho proceso.

1. f es inyectiva:
   Sea $n, m \in \mathbb{N} \; / \quad f(n) = f(m)$
   Si $n = 1 \wedge m = 1$ entonces es directo que $m = n$
   Si $n = 1 \wedge m \neq 1$ entonces como $f(n) = f(m)$ luego como $m \neq 1$ existe

   $$p \in \mathbb{N} / \; m = s(p)$$

   entonces

   $$f(1) = f(s(p))$$

   luego

   $$1' = s'(f(p))$$

   lo cual es imposible por ser $(\mathbb{N}', s', 1')$ un sistema de Peano.
   Si $n \neq 1 \wedge m = 1$ es simétrico al caso anterior.
   Si $n \neq 1 \wedge m \neq 1$
   entonces $n = s(p), m = s(q)$ para $p, q \in \mathbb{N}$
   entonces como $f(n) = f(m)$ luego tenemos

   $$f(s(p)) = f(s(q))$$

   luego por la definición recursiva dada se tiene

   $$s'(f(p)) = s'(s(q))$$

   pero s' es una función inyectiva, entonces $f(p) = f(q)$ luego $n = m$
   Por lo tanto f es inyectiva.

2. f es una función sobreyectiva:

   Sea

   $$X = \{n' \in \mathbb{N}' : \text{ existe } n \in \mathbb{N}, f(n) = n'\}$$

   - $1' \in X$: basta notar por la definción dada $f(1) = 1'$ entonces $1' \in X$
   - Hipótesis inductiva: $n' \in X$ esto significa que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

     $$f(n) = n'$$

     ojo: Debido a la inyectividad de f este $n \in \mathbb{N}$ es único.
   - Tesis: $s'(n) = n' + 1' \in X$

     Como

     $$n' + 1 = s'(n') \overset{hip}{=} s'(f(n)) \overset{def}{=} f(s(n))$$

     Por todo lo anterior f es sobre.

   Luego f es una biyección.

$\square$

Ahora consideremos para la segunda parte, comencemos por la parte (b)

(b) PD $f(m+n) = f(m) + f(n)$

   Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo y

   $$X = \{n \in \mathbb{N} : f(m+n) = f(m) + f(n)\}$$

   - $1 \in X$:

     En efecto basta considerar

     $$\begin{aligned} f(m+1) &= f(s(m)) \\ &= s'(f(m)) \\ &= f(m) + 1' \\ &= f(m) + f(1) \end{aligned}$$

- HI:$n \in X$ es decir $f(m+n) = f(m) + f(n)$
- Tesis: $s(n) \in X$: Veamos

$$\begin{aligned}
f(m+s(n)) &= f(s(m+n)) \\
&= s'(f(m+n)) \\
&= f(m+n) + 1' \\
&\overset{HI}{=} (f(m)+f(n)) + 1' \\
&= f(m) + (f(n) + 1') \\
&= f(m) + s'(f(n)) \\
&\overset{def}{=} f(m) + f(s(n))
\end{aligned}$$

(a) PD $m < n \Longleftrightarrow f(m) < f(n)$

($\Longrightarrow$) como $m < n$ en $\mathbb{N}$

entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$m + p = n$$

entonces

$$f(m+p) = f(n)$$

luego por la parte (b) se tiene

$$f(m) + f(p) = f(n)$$

entonces estamos en esta linea trabajando en $\mathbb{N}'$ se deduce que $f(m) < f(n)$

($\Longleftarrow$) Si $f(m) < f(n)$

entonces existe $w \in \mathbb{N}'$ de tal modo que

$$f(m) + w = f(n)$$

Caso 1: Si $w = 1'$ entonces

$$\begin{aligned} f(n) &= f(m) + 1' \\ &= f(m) + f(1) \\ &= f(m+1) \end{aligned}$$

Luego por ser f una función inyectiva

$$n = m + 1$$

entonces $m < n$

Caso 2: Si $w \neq 1'$ luego por ser f sobre, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(p) = w$$

luego

$$f(n) = f(m) + w = f(m) + f(p) = f(m+n)$$

ahora por ser f inyectiva se tiene

$$n = m + p$$

para finalmente deducir que

$$m < n$$

(c) PD $f(mn) = f(m)f(n)$

Consideremos $m \in \mathbb{N}$ fijo pero arbitrario y definamos en conjunto de inducción

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \ f(mn) = f(m)f(n)\}$$

- $1 \in X$:

  Calculemos

  $$f(m.1) = f(m) = f(m).1' = f(m).f(1)$$

- HI $n \in X$ es decir $f(mn) = f(m)f(n)$

- Tesis: $s(n) \in X$

  Calculemos

$$\begin{aligned} f(m.s(n) &= f(mn+m) \\ &\stackrel{por(b)}{=} f(mn)+f(m) \\ &\stackrel{HI}{=} f(m)f(n)+f(m).1' \\ &= f(m)\ (f(n)+1') \\ &= f(m)(f(n)+f(1) \\ &= f(m)f(n+1) \\ &= f(m)f(s(n)) \end{aligned}$$

$\square$

Problema 1.56 *Sea P un conjunto y $s' : P \to P$ una función.*

Diga si (P, s') satisface los axiomas de Peano. Justifique su respuesta

$$P = \{1,2,3,\ldots\}, s'(x) = 2x = x + x$$

Prueba:

Sospechamos que no es cierto, veamos que

$$P¿\tfrac{1}{2}\backslash?`\frac{1}{2}S'(P)$$

no es un conjunto unitario.

Nota: cabe interpretar que la adición en $s'(x) = x+x$ proviene de que se sobre entiende que se esta utilizando el hecho que (P, s) es un sistema de Peano donde $s(x) = x+1$.

Supongamos que $1 \in s'(P)$ entonces existe $x \in P$ de tal forma que

$$s'(x) = 1$$

esto quiere decir que $2x = 1$ es decir $x + x = 1$

Si $x = 1$ entonces $1 = 1 + 1 = s(1)$ pero esto es imposible.

Si $x \neq 1$ luego existe $w \in P$ tal que $s(w) = x$ entonces

$$1 = x + x = x + s(w) = s(x + w)$$

pero esto es imposible por ser (P, s) un sistema de Peano.

Esto quiere decir que $1 \notin s'(P)$ entonces

$$1 \in P \setminus S'(P)$$

prueba también que

$$3 \in P \setminus S'(P)$$

pero no se puede dar . $\square$

Problema 1.57 *Sea* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *una función de tal forma que*

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \;\; f(x + y) = f(x)f(y)$$

Si consideramos $f(1) = a$

Probar que $f(n) = a^n, \; \forall n \in \mathbb{N}$

Demostrando:

Antes debemos tener en cuanta que

$$\begin{cases} a^1 & = a \\ a^{s(n)} & = a^n.a, \; \forall \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Veamos

$$X = \{n \in \mathbb{N} / \; f(n) = a^n\}$$

- $1 \in X$:

  esto es cierto debido a que $f(1) \overset{dato}{=} a = a^1$

- HI: $n \in X$ es decir $f(n) = a^n$

- Tesis: $s(n) \in X$

  veamos ello calculemos

$$\begin{aligned} f(s(n)) &= f(n+1) \\ &= f(n)f(1) \\ &\overset{HI}{=} a^n.a \\ &= a^{s(n)} \end{aligned}$$

$\square$

Problema 1.58 *Sea* $(\mathbb{N}, s)$ *un sistema de Peano. Probar que* $x, y \in \mathbb{N}$

(i) $x < s(y) \Longleftrightarrow x \leq y$

(ii) $x < y \Longleftrightarrow s(x) \leq y$

Prueba:

(i) Como es una bicondicional lo demostraremos por doble implicación

($\Longrightarrow$) Como $x < s(y)$ entonces $x + 1 \leq s(y)$ luego $x + 1 \leq y + 1$ por lo tanto

$$x \leq y$$

($\Longleftarrow$) Como $x \leq y$ entonces $x + 1 \leq y + 1$ luego $x + 1 \leq s(y)$
entonces existe $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$(x + 1) + a = s(y)$$

luego

$$(x + a) + 1 = s(y)$$

por lo tanto

$$s(x + a) = s(y)$$

como s es inyectiva $x + a = s(y)$ esto significa que

$$x < s(y)$$

(ii) Se sugiere al estudiante descubrir su justificación.

□

Problema 1.59 *Sea* $(P, s, <, 1)$ *un sistema de Peano y* $g : P \to P$ *una función de tal manera que*

$$x < y \Longleftrightarrow g(x) < g(y)$$

Probar que $\forall\ u \in P\ , g(u) \geq u$

Prueba:

Consideramos el conjunto inductivo

$$X = \{u \in P /\ g(u) \geq u\}$$

Bastara probar que $X = P$

- $1 \in X$: como $g(1) \in P$ luego por propiedad $g(1) \geq 1$ entonces $1 \in X$
- HI: $u \in X$ es decir $g(u) \geq u$
- Tesis: $s(u) \in X$

  Supongamos que

  $$g(u) \notin X$$

  entonces

  $$g(s(u)) < s(u)$$

  luego

  $$g(s(u)) + 1 \leq u + 1$$

  por lo tanto

  $$g(s(u)) \leq u$$

  pero por HI $u \leq g(u)$ luego

  $$g(s(u)) \leq g(u)$$

esto nos indica que se desdobla en dos posibilidades

$$g(s(u)) = g(u) \vee g(s(u)) < g(u)$$

caso 1: si $g(s(u)) = g(u)$ en este punto es casi necesario probar que g es en verdad una función inyectiva (ver)
luego se tiene que

$$g(u) = u$$

lo cual es imposible.

Caso 2: Si $g(s(u)) < s(u)$ luego $g(s(u)) \leq s(u)$ por lo tanto

$$g(s(u)) + 1 \leq u + 1$$

con lo cualse obtiene

$$g(s(u)) \leq u$$

pero por HI $u < g(u)$ entonces $g(s(u)) < g(u)$
pero por la defínción del problema $x < y \Longleftrightarrow g(x) < g(y)$ se tiene

$$s(u) < u$$

pero esto es imposible ya que es un sistema de Peano y es necesario que se cumpla

$$u < s(u)$$

$\square$

Problema 1.60 *Sea* $(\mathbb{N}, s)$ *un sistema de Peano. Demostrar que*

$$s^{-1}(\{n\}) = \{m\}$$

donde $m + 1 = n$

Prueba:

Lo demostraremos por doble inclución

($\subseteq$) Sea $x \in s^{-1}(\{n\})$

entonces por defినción de imagen inversa

$$s(x) \in \{n\}$$

esto nos indica que

$$s(x) = n$$

pero por dato del problema $s(m) = n$, esto nos impulsa a deducir que

$$s(x) = s(m)$$

pero debemos recordar que la función sucesor s es inyectiva, entonces

$$x = m$$

por lo tanto $x \in \{m\}$

($\supseteq$) Como $m + 1 = n$ entonces $s(m) = n$ luego por definición

$$m \in s^{-1}(\{n\})$$

$\square$

Problema 1.61 *Considere la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que*

$$f(n) < f(n+1), \ \forall \ n \in \mathbb{N}$$

Probar que f es una función inyectiva.

Prueba:

Antes de justificar mostremos el resultado esperado o sospechado siguiente.

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo.

Probar que: $f(n) < f(n+k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Para ello utilizaremos inducción matemática sobre k. Sea

$$X = \{k \in \mathbb{N} / \ f(n) < f(n+k)\}$$

- $1 \in X$: como $n < n+1$ por el dato del problema

  $$f(n) < f(n+1)$$

  esto significa que $1 \in X$

- HI: $k \in X$: es decir $f(n) < f(n+k)$

- Tesis: $s(k) \in X$

  Veamos como $n+k < n+k+1$ entonces

  $$f(n+k) < f(n+k+1)$$

  pero por HI $f(n) < f(n+k)$ entonces

  $$f(n) < f(n+k) < f(n+s(k))$$

  por lo tanto

  $$f(n) < f(n+s(k))$$

  para finalmente $s(k) \in X$

$\square$

Ahora si para el problema, sea $n, m \in \mathbb{N}$ tal $f(n) = f(m)$ como $n, m \in \mathbb{N}$ luego se cumple

$$n = m \vee n < m \vee m < n$$

Si $n < m$ entonces por lo demostrado

$$f(n) < f(m)$$

pero esto es imposible ya que $f(n) = f(m)$.
Si $m < n$ igualmente se obtiene un resultado contradictorio.
Por lo tanto nos obliga a tomar un solo caso restante, esto es $n = m$.
Basta con ello para justificar que f es inyectiva. $\square$

Problema 1.62 *Usando los axiomas de Peano demostrar que* $\mathbb{N}$ *es un conjunto necesariamente infinito.*

Prueba:
Antes de ver este resultado, notemos que: Afirmación: Todo conjunto finito en $\mathbb{N}$ no vacío tiene un elemento máximo.
Veamos:
Para ello consideremos o usaremos inducción matemática
$X = \{n \in \mathbb{N} /\ A$ es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ donde $card(A) = n \Longrightarrow$
A tiene un elemento máximo$\}$

- $1 \in X$: Consideramos $A \subseteq \mathbb{N}$ donde $card(A) = 1$ entonces $A = \{a\}$ luego basta tomar a como el elemento máximo.

- HI:$n \in X$, es decir cualquier subconjunto finito de $\mathbb{N}$ que encontremos la cual posee n elementos, tiene necesariamente un elemento máximo.

- Tesis: $s(n) = n + 1 \in X$
  Consideremos A un conjunto de $s(n) = n + 1$ elementos, luego podemos tener

  $$A = B \cup \{a\}$$

  donde $a \notin B$ es decir se trata de una unión disjunta. Se deduce que $card(B) = n$ luego podemos aplicar la HI(hipótesis inductiva) es decir existe $b \in B$ que actúa como elemento máximo esto quiere decir que

  $$\forall x \in B, x \leq b$$

Ahora consideremos

$$c := max\{b, a\}$$

Afirmamos que c es el elemento máximo del conjunto A

en efecto: Sea $a \in A$ arbitrario entonces

$$x \in B \vee x = a$$

luego

$$x \leq b \vee x = a$$

luego por maximálidad se tiene

$$x \leq c$$

□

Ahora sí para terminar con el problema, supongamos que $\mathbb{N}$ no sea infinito es decir consideremos que sea un conjunto finito, luego por lo anterior

$$\exists\ m = max\mathbb{N}$$

como tambien $s(m) = m + 1 \in \mathbb{N}$ luego se tiene que cumplir

$$s(m) \leq m$$

pero sabemos que

$$m < s(m)$$

de las dos expresiones anteriores se deduce que

$$s(m) < s(m)$$

lo cual es imposible.

Por lo tanto $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito. □

Problema 1.63 *Se considera la función $f(n)$ definida por*

$$f(0) = 1$$
$$f(n+1) = 2f(n) + 1$$

También la función $g(n)$

$$g(0) = 1$$
$$g(n+1) = g(n) + 2^{n+1}$$

Probar que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(n) = g(n)$

Demostración:

Antes notemos que

$$\begin{array}{cc} f(0) = 1 & g(0) = 1 \\ f(1) = 3 & g(1) = 3 \\ f(2) = 7 & g(2) = 7 \\ f(3) = 15 & g(3) = 15 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Después de dar muchos intentos de dar forma a dichas funciones se obtiene lo siguiente

$$g(n) = 2^{n+1} - 1$$

¿Que extrano? sospechamos que de repente f también tiene la misma forma, es decir

$$f(n) = 2^{n+1} - 1$$

probaremos esta sospecha por medio de inducción matemática sobre n.

Es esta parte consideraremos que $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \cdot\}$ y consideremos

$$X = \{n \in \mathbb{N} /\ f(n) = 2^{n+1} - 1\}$$

En efecto:

- $0 \in X$: en efecto $2^{0+1} - 1 = 1$ y también se tiene por defención $f(0) = 1$ entonces

$$f(0) = 2^{0+1} - 1$$

- HI: $f(n) = 2^{n+1} - 1$

- Tesis: $f(s(n)) = 2^{s(n)+1} - 1$

  veamos: calculemos

$$\begin{aligned} f(s(n)) &= 2f(n) + 1 \\ &= 2(2^{n+1} - 1) + 1 \\ &= 2^{n+1+1} - 1 \\ &= 2^{s(n)+1} - 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto f podemos redefinirlo simplemente por

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 2^{n+1} - 1$$

Realizando lo mismo para la función g podemos obtener que

$$\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = 2^{n+1} - 1$$

Es necesario que el estudiante compruebe esta situación.

□

Problema 1.64 *Considere la siguiente afirmación:* $7n^2 + 3n + 5$ *es par.*

a) Pruebe que si la afirmación anterior es verdadera para $n \in \mathbb{N}$ *entonces también es verdadera para* $n + 1$

b) Verificar que para $n = 2$ *no se cumple, es decir es una proposición falsa. ¿hay contradicción con el resultado en la parte* (a)*?*

c) *Probar que*

$$7n^2 + 3n + 5 \text{ es impar} \,\forall\, n \in \mathbb{N}$$

Prueba:

a) Suponiendo que se verifique para $n \in \mathbb{N}$ es decir

$$7n^2 + 3n + 5 \text{ es par}$$

Veamos ahora que se cumpla para $n + 1$:
Calculemos

$$\begin{aligned}
7(n+1)^2 + 3(n+1) + 5 &= 7(n^2 + 2n + 1) + 3n + 3 + 5 \\
&= 7n^2 + 14n + 7 + 3n + 3 + 5 \\
&= (7n^2 + 3n + 5) + (14n + 10) \\
&= (7n^2 + 3n + 5) + 2(7n + 5)
\end{aligned}$$

como $7n^2 + 3n + 5$ es par por hipótesis y $2(7n + 5)$ también lo es, luego se verifica lo pedido.

b) Basta evaluar

$$7.2^2 + 3.2 + 5 = 39$$

no es par.

c) Aplicaremos inducción matemática, para ello consideremos

$$X = \{n \in \mathbb{N} \ / \ 7n^2 + 3n + 5 \text{ es impar}\}$$

- $1 \in X$: esto es cierto ya que $7.1^2 + 3.1 + 5 = 15$ la cual es impar.
- HI:$n \in X$ es decir que $7n^2 + 3n + 5$ es impar

- Tesis: $n+1 \in X$

  Por la parte (a) se tiene

  $$7(n+1)^2 + 3(n+1) + 5 = (7n^2 + 3n + 5) + 2(7n + 5)$$

  pero sabemos que la suma de un impar con un par es impar, luego verifica lo pedido.

$\square$

Problema 1.65 *Probar* $n^2 > n + 3, \forall\, n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq 3$

Demostración:

Considerando el conjunto de referencia

$$X = \{n \in \mathbb{N}\ /\ n^2 > n + 3\}$$

▷ $3 \in X$: basta notar que $3^2 > 3 + 3$

▷ HI:$n \in X$ es decir $n^2 > n + 3$

▷ Tesis $n + 1 \in X$

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\
&> (n+3) + 2n + 1 \\
&= n + 2n + 4 \\
&> n + 4 \\
&= (n+1) + 3
\end{aligned}$$

esto quiere decir que

$$(n+1)^2 > (n+1) + 3$$

luego

$$n + 1 \in X$$

luego se tiene lo pedido.

□

Problema 1.66 *Demuestre que* $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 4^n - 1 = \overset{\circ}{3}$
donde $\overset{\circ}{3}$ *significa que el número es múltiplo de tres.*

Prueba:

Consideremos

$$X = \{n \in \mathbb{N} \ / \ 4^n - 1 = \overset{\circ}{3}\}$$

- $1 \in X$: esto es cierto ya que $4^1 - 1 = 3 = \overset{\circ}{3}$
- Hipótesis inductiva: $n \in X$ es decir $4^n - 1 = \overset{\circ}{3}$
- Tesis $n + 1 \in X$

  Calculemos

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4(4^n) - 1 \\ &= 4(4^n) - 4 + 3 \\ &= 4(4^n - 1) + 3 \\ &= 4.\,\overset{\circ}{3} + \overset{\circ}{3} \\ &= \overset{\circ}{3} \end{aligned}$$

□

Problema 1.67 *Probar que la cifra de las unidades de cualquier potencia natural de 6 es 6, es decir*

$$6^n = 10a + 6,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{N}_0$$

Demostración:

Quedando sobreentendido el conjunto de inducción tendríamos

- $n = 1$ cumple ya que

$$6^1 = 10(0) + 6$$

- HI:suponiendo que se tenga
$$6^n = 10a + 6$$
para algún $a \in \mathbb{N}_0$

- en esta parte calculemos
$$\begin{aligned} 6^{n+1} &= 6^n 6 \\ &\overset{HI}{=} (10a+6)6 \\ &= 60a + 36 \\ &= 10(6a) + 30 + 6 \\ &= 10(6a+3) + 6 \end{aligned}$$
como $6a + 3 \in \mathbb{N}_0$ esto comprueba que que se verifica también para su sucesor de n.

□

Problema 1.68 *Probar que*
$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$
es divisible por 9

Prueba:
Considerando
$$X = \{n \in \mathbb{N} \;/\; n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \text{ es divisible por } 9\}$$

- $1 \in X$: en efecto
$$1^3 + (1+1)^3 + (1+2)^3 = 36$$
la cual es divisible o múltiplo de 9

- HI $n \in X$

- Tesis $s(n) = n + 1 \in X$

  Calculemos

  $$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = (n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3) + 9(n^2 + 3n + 3)$$

  basta utilizar la HI y criterios de múltiplos para verificar que

  $$n + 1 \in X$$

$\square$

1.7. Problemas Propuestos

1. Considerando $n \in \mathbb{N}$ con n impar.

   Probar que $n(n^2-1)$ es divisible por 24

2. Probar que $\forall\, n \in \mathbb{N}, 2^{n-1} \leq n!$

3. Probar que

$$3n \leq 3^n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

4. Demostrar que $4n^3 + 5n$ es divisible por 3 .

5. Probar que $n^3 - n$ es múltiplo de 6.

6. Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$5n^3 + 7n$$

   es divisible por 6.

7. Demostrar que para todo n número natural se descubre que

$$5^{2n} + (-1)^{n+1}$$

   es divisible por 13.

8. Sabiendo que n es un número natural impar entonces probar que $7^n + 1 = \overset{\circ}{8}$

9. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

10. Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dos funciones y $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función sucesor de tal manera que se tenga

$$f \circ S = S \circ f, g \circ S = S \circ g$$

tambien $f(1) = g(1)$

Probar que $\forall\, n \in \mathbb{N}, f(n) = g(n)$ es decir

$$f = g$$

11. Considere $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dos funciones de tal modo que $f(1) = g(1)$ y existe una función

$$\wp : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

de tal forma que

$$f \circ S = \wp \circ f \wedge g \circ S = \wp \circ g$$

Probar que $f = g$

12. Probar que $a^{2n} - 1$ es divisible por $a + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

13. Considere un conjunto A y $a \in A$ también $H : A \to A$ una función.

Probar que existe una única función $g : \mathbb{N} \to A$ de modo que

$$\begin{aligned} g(1) &= a \\ g(n+1) &= H(g(n))) \end{aligned}$$

14. Considerando $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función tal que

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(i+1) &= f(i) + 2i + 1, i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Demostrar que $f(n) = n^2, \forall\, n \in \mathbb{N}$

15. Sea $P = \{\frac{1}{2^n} \;/\; n = 0, 1, 2, \cdots\}$ y $S : P \to P$ una función tal que

$$S(u) = \frac{1}{2}u, \forall\, u \in P$$

Probar que (P, S) verifican los axiomas de Peano.

16. Sea X un subconjunto de $\mathbb{N}$ de modo que tenga 20 elementos.

    Probar que existen al menos un para de elementos de X, cuya diferencia es un múltiplo de 19.

17. (Principio del Palomar) Se tiene m objetos repartidos en n casilleros. Probar que si $m > n$ entonces existe al menos un casillero donde hay mas de un objeto.

18. Sea S un subconjunto de los números naturales. Mostrar que hay un subconjunto $T \subseteq S$ de modo que la suma de los elementos de T es un múltiplo de $|S|$.

19. Comprobar que en una reunión de 6 personas, o bien tres de ellas se conocen o tres o se conocen.

20. Dados n números naturales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que su suma vale S, mostrar que alguno de ellos ha de ser mayor o igual que S/n.

21. Considerando $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ probar que para todo $n \geq 8$ puede escribirse como

$$n = 3a + 5b$$

    para $a, b \in \mathbb{N}$

22. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Bibliografía

[1] Elon lages lima: ***Curso de análisis vol. 1***

Rio de Janeiro,Instituto de matemática Pura y aplicada,1989

[2] Antonio tineo ; Carlos Uzcátegui: ***Introdución al análisis real***

Departamento de Matemáticas Universidad de los Andes 2006

[3] Lina María Bedoya Mejía: ***Tres axiomatizaciones de los números naturales: Peano, Lawvere, Peice***

Universidad de Tolima, Ibagué 2003

[4] Serge Lang: ***Introdución al análisis matemático***