Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ciencias

Ciclo: 2014-2

[Cod: CM 132 Curso: Calculo Diferencial]

[Tema: Lógica proposicional, Métodos de demostración.]

Practica dirigida N° 1

1. Sean A, B y C tres conjuntos. Demostrar que

   a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

   b) $A \setminus B \subseteq C \leftrightarrow A \setminus C \subset B$.

   c) $A \subset B \leftrightarrow \forall D (D \subset A \Rightarrow D \subset B)$.

2. Considere $A = 1, 2, 3, 4$. Hallar por extensión los siguientes conjuntos

   a) $A_2 = \{x \in A : \forall y \in A, x^2 + y \geq 8\}$

   b) $A_3 = \{x \in A : \exists! y \in A, x^2 + y \geq 8\}$.

3. Utilizando las leyes de la lógica proposicional, simplificar la siguiente proposición compuesta

$$[(p \vee q) \wedge (p \to q)] \vee [\sim (p \vee q) \wedge \sim (p \to q)] \equiv q$$

4. hallar el valor de verdad

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \quad n > n_0 \to n > a$$

$$\forall r \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} / \quad n \leq r \wedge r < n+1$$

5. Utilizando tablas de verdad verificar, si es contingencia, tautología o contradicción:

   a) $(p \wedge q) \to r$ CONTRA

   b) $\sim (p \wedge q) \vee r$ CONTRA

   c) $q \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$ CONTRA

   d) $p \to \to \sim (q \wedge r)$ CONTRA

   e) $((p \to q) \to r) \leftrightarrow ((p \wedge q) \to r)$

6. Sea A y B dos conjuntos y A^c y B^c sus complementos.
   Probar que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

7. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones $\forall x \in \mathbb{Z}$

$$p(x) \equiv x \text{ es par}$$

$$q(x) \equiv x \text{ divide a } 4$$

   a) $\exists, p(x) \wedge q(x)$ V

   b) $\forall x, p(x) \to q(x)$ $\sim p(x) \vee q(x)$ F

   c) $\exists x, p(x) \vee q(x)$ V

8. Considerando $\overline{A} = A^c$ como el complemento del conjunto A.
   Demostrar

   a) $A \cup (A \cap B) = A$.

   b) $A \cap (A \cup B) = A$.

   c) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

   d) $(A \cap B) \cup (A \cup \overline{B}) = A$.

9. Considere la proposición siguiente:

$$p : (\forall \epsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{N})(\frac{1}{m} \leq \epsilon \to \frac{1}{m} + 1 < \epsilon)$$

$(\exists \varepsilon > 0)(\forall m \in \mathbb{N})(\frac{1}{m} \leq \varepsilon \wedge \frac{1}{m} + 1 \geq \varepsilon)$

a) Negar la proposición p.

b) Determine si la proposición p es verdadera o falsa.

10. Negar las proposiciones siguientes

a) $\forall x, \forall y, \exists z, (x + y) = z$

b) $\forall x, y(xy \leq 2)$ $\exists x / \forall (xy > 2)$

c) $\forall x, \forall y, \forall z, x + z < y$

d) $\exists x, \exists y / \ xy < 2$

11. Construir la tabla de verdad para la siguiente proposición

$$\underbrace{[p \wedge (p \vee q)]}_{p} \leftrightarrow p$$

$p \leftrightarrow p \equiv V$

12. ¿Es cierto o falso que $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow [\, p \vee \sim q]$ es equivalente a $\sim \ p \vee \sim q$. $\equiv V$

13. Pruebe que $\sim (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$ es contradicción.

14. Si $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}, B = \{x \in A : x < 3 \leftrightarrow x \geq 6\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\forall x \in A, \exists y \in B$ tal que $x + y \leq 7$.

b) $\forall x \in A, \exists y \in B$ de modo que $x + y \in B$.

c) $\exists x \in A, \forall y \in B, x + y \in A$.

15. Sean p y q dos proposiciones lógicas. Sabiendo que

a) $\sim p \wedge q$ es contradicción.

b) $p \wedge q \equiv p$.

Pruebe que $p \equiv q$.

16. Para una proposición cualquiera p se define: $V(p) = \begin{cases} 1, & \text{si p es verdadera.} \\ 0, & \text{si p es falsa.} \end{cases}$.

a) Pruebe que

- $V(-p) = 1 - V(p)$.
- $V(p \vee q) = V(p) + V(q) - V(p)V(q)$.

b) Encuentre la formula de $V(p \to q)$.

17. Dados $A, B \subset E$. Pruebe que $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset$.

18. Sean A, B subconjuntos de U. Demostrar que

a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

c) $A \cap B = A$ y $A \cup B = A \Leftrightarrow A = B$.

19. Probar que $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

20. Sea $A = \{1, 2, \dots, 20\}, B = \{x \in A : x < 5 \leftrightarrow x \geq 7\}$. Indagar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\forall X \subset A \to B \cap X = \emptyset$.

b) $\exists\ X \subset \exists A \wedge Y \subset B$ tal que $X \cap Y = \emptyset$.

c) $\exists\ D \subset A$ tal que $B \cup D = A$.

d) $\exists X \in A, \forall y \in B, x < y$.

e) $\forall x \in A, \exists y \in A$ tal que $x - y \in B$.

21. Demostrar que si n^2 es múltiplo de 5, entonces n es múltiplo de 5.

22. Analice el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

a) $\exists\ x \in \mathbb{R}$ tal que $\forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = (x + y)^2$.

b) $\exists\ x \in \mathbb{R}$ de modo que $2x - 4 = 4x - 2$.

23. Dados los conjuntos A y B. Sea X un conjunto con las siguientes característica

a) $A \subset X, B \subset X$.

b) si $A \subset Y, B \subset Y$, entonces $X \subset Y$.

Probar que $X = A \cup B$.

24. Sean $A, B \subset E$. Pruebe que $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$, donde B^c es el complemento del conjunto B respecto a E.

25. Demostrar que $A \cup B = E \Leftrightarrow A^c \subset B$, siendo $A, B \subset E$.

26. Sean $A, X \subset E$ son conjuntos tales que $A \cap X = \emptyset$ y $A \cup X = E$. Pruebe que $X = A^c$.

27. Sean A y B dos conjuntos. Demostrar que $A \cup B \neq \emptyset$, entonces $A \neq \emptyset$ o $B \neq \emptyset$.

28. Sabiendo que $n \in \mathbb{Z}$. Probar que si n^2 es múltiplo de 3, entonces n es múltiplo de 3.

29. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ siempre es múltiplo de tres.

30. Sea n un número impar. Probar que n^2 es de la forma $8k + 1$ para algún $k > 1$.

31. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 \geq n$.

b) $\exists n \in \mathbb{Z}, n^2 = 2$

c) $\forall n \in \mathbb{Z} \exists m \in \mathbb{Z}, n^2 < m$.

d) $\exists n \in \mathbb{Z} \exists m \in \mathbb{Z}, n^2 + m^2 = 6$.

e) $\exists n \in \mathbb{Z} \forall m \in \mathbb{Z}, nm = m$.

32. Si n es impar entonces n^2 es impar.

33. Si $3n + 2$ es impar entonces n es impar.

34. El entero n es impar si y solo si n^2 es impar.

35. Si n es un entero y $n^3 + 5$ es impar entonces n es par.

36. Si $3n - 1$ es par, probar que n es impar.

37. Demostrar que si $3n - 1$ es par, entonces n es impar.

38. Probar que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

39. Alguien mencionó la siguiente conjetura: Si n es un entero positivo, entonces

$$n^2 - n + 11$$

es un número primo. Indique su valor de verdad.

40. Demostrar: Considere a, b, c número naturales.
Si $a|b$ y $a|(b^2 - c)$, entonces $a|c$.

41. Probar: Sabiendo que n es un entero positivo, entonces

$$4|n^2 \vee 4|(n^2 - 1)$$

división

42. Demostrar que si n es un entero, entonces

$$4 \nmid (n^2 + 2)$$

43. Demostrar que si n es impar, entonces $8|(n^2 - 1)$.

44. Demostrar la siguiente conclusión $r \rightarrow \sim q$, a partir de las siguientes premisas
$\sim (r \wedge s)$
$q \rightarrow s$

45. Demostrar que se cumple
$p \vee \sim s$

$\sim r \to s$

$\sim p \to r$

46. Demostrar que se cumple con $\sim N$, utilizando las premisas siguientes

    $s \to \sim r$

    r

    $\sim s \to q$

    $q \to \sim N$

47. Determine cuales de los siguientes razonamientos son válidos

    a) Considere

    $p \wedge q$

    $p \to r$

    $\therefore r \wedge q$

    b) Considere la estructura siguiente $p \vee$

    q

    $p \to r$

    $\therefore r \vee q$

    c) Considere $p \to q$

    $p \to r$

    $\therefore r \to q$

    d) Demostrar

    $q \vee p$

    $\sim (p \vee \sim r)$

    $r \to s$

    $r \to s$

    $(q \wedge s) \to (t \wedge s)$

    $\therefore t$

Lunes 01 de setiembre del 2014[1]

---

[2]Hecho en LaTeX