



Universidad
de Cádiz

Escuela Superior de Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Apuntes de Lógica Matemática

3. Razonamientos y Demostraciones

Francisco José González Gutiérrez

Cádiz, Abril de 2005

Lección 3

Razonamientos y Demostraciones

Contenido

3.1 Razonamientos	56
3.1.1 Razonamiento	56
3.1.2 Razonamiento Válido	56
3.1.3 Falacia	58
3.2 Inferencia	59
3.2.1 Regla de Inferencia	59
3.2.2 Reglas de Inferencia más Usuales	61
3.3 Demostraciones	64
3.3.1 Teorema	64
3.3.2 Corolario	64
3.3.3 Lema	64
3.3.4 Demostración	65
3.4 Razonamientos y Cuantificadores	69
3.4.1 Definiciones Matemáticas	69
3.4.2 Regla de Particularización	72
3.4.3 Regla de Generalización	73
3.5 Métodos de Demostración	74
3.5.1 Demostración Vacía	74
3.5.2 Demostración Trivial	74
3.5.3 Demostración Directa	75
3.5.4 Demostración por la Contrarrecíproca	76
3.5.5 Demostración por Contradicción	77
3.5.6 Búsqueda de Contraejemplos	78

Tenía 40 años cuando por primera vez se fijó en la geometría; y ello aconteció accidentalmente. Encontrábase en la biblioteca de un caballero; abiertos estaban los Elementos de Euclides, y fue la 47 El. libri I. Leyó la Proposición. Por D...(pues de cuando en cuando gustaba de proferir un exaltado Juramento, para mayor énfasis) jesto es imposible! Leyó pues la Demostración, en la que aludía a una Proposición previa; proposición que también leyó. La cual mencionaba otra anterior, que leyó también. et sic deinceps (y así sucesivamente) hasta quedar al fin demostrativamente convencido de aquella verdad. Ello le hizo enamorarse de la geometría.

Thomas Hobbes (1885-1679)

Una demostración de una proposición significa un argumento convincente de que la proposición es verdadera. Las demostraciones de esta clase suelen encontrarse fuera de los cursos de matemáticas. Los científicos que hacen predicciones con base en principios científicos dan demostraciones, en efecto, de que sus predicciones se deducen de sus principios. Los programadores de ordenadores hacen aseveraciones de que sus programas operarán de acuerdo con sus especificaciones y verifican estas aseveraciones con una combinación de razonamiento y experimentación. Los historiadores cuyo argumento es que cierta serie de decisiones conducen inevitablemente a cierta consecuencia, usan el razonamiento lógico para demostrar lo anterior. Así, aunque los detalles de escribir una demostración *matemáticamente* aceptable pueden pertenecer al terreno de los matemáticos, el objetivo de comprender lo que constituye un argumento convincente debe ser compartido por cualquiera que espere utilizar los principios matemáticos y científicos. Analizaremos, en esta lección, los principios lógicos que fundamentan los argumentos convincentes.

Las demostraciones son una forma de comunicación cuyo objetivo es convencer de la veracidad de las afirmaciones que se hacen. La lógica sirve como fundamento antecedentemente, salvo cuando haya alguna laguna comunicativa. Esto es, por lo general no será necesario pensar conscientemente en la lógica, aunque si una prueba en particular parece complicada, entonces deberá ser analizada con cuidado. ¿Cuáles son exactamente las hipótesis? ¿se utilizan supuestos ocultos? ¿estamos ante una demostración no directa?

3.1 Razonamientos

Estudiamos en este apartado el significado formal del concepto de “razonamiento válido” y lo utilizamos para demostrar la veracidad de proposiciones a través de las reglas de inferencia.

3.1.1 Razonamiento

Llamaremos de esta forma a cualquier proposición con la estructura

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \longrightarrow Q$$

siendo n un entero positivo.

A las proposiciones $P_i, i = 1, 2, \dots, n$ se les llama *premisas* del razonamiento y a la proposición Q , *conclusión* del mismo.

3.1.2 Razonamiento Válido

El razonamiento anterior se dice que es válido si la conclusión Q es verdadera cada vez que todas las premisas P_1, P_2, \dots, P_n lo sean.

Nota 3.1 Obsérvese que esto significa que las premisas *implican lógicamente* la conclusión, es decir, un razonamiento será válido cuando

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \implies Q$$

También, y de acuerdo con ??, podemos decir que el razonamiento es válido si el condicional

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \longrightarrow Q$$

es una tautología. Esto, a su vez, nos permite aceptar como válido el razonamiento en el caso de que alguna de las premisas sea falsa. En efecto, si alguna de las $P_i, i = 1, 2, \dots, n$ es falsa, entonces $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$ será falsa, luego el condicional $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \longrightarrow Q$ es verdadero, independientemente del valor de verdad de la conclusión Q .

Así pues, disponemos de dos formas de probar si un razonamiento es válido.

1. Comprobar que el condicional $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \longrightarrow Q$ es una tautología.
2. Comprobar que $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \implies Q$.

Ejemplo 3.1 Estudiar la validez del siguiente razonamiento:

Si Torcuato se casa, entonces Florinda se tira al tren.
 Florinda se tira al tren siempre y cuando Torcuato no se haga cura.
 Por lo tanto, si Torcuato se casa, entonces no se hace cura.

Solución

Sean

p : Torcuato se casa.
 q : Florinda se tira al tren.
 r : Torcuato se hace cura.

El razonamiento escrito en forma simbólica sería:

$$[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow \neg r)] \longrightarrow (p \longrightarrow \neg r)$$

Veamos si el razonamiento es válido comprobando que es una tautología. Obsérvese que la única opción en la que el condicional puede ser falso es que siendo verdad la hipótesis,

$$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow \neg r),$$

la conclusión, $p \longrightarrow \neg r$ sea falsa.

Ahora bien, $p \longrightarrow \neg r$ es falsa, si p es verdad y $\neg r$ es falso. Por otra parte, para que

$$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow \neg r),$$

sea verdad, han de serlo ambas proposiciones y al ser falso $\neg r$, q también ha de serlo, por lo tanto la tabla de verdad reducida, será

p	q	r	$p \longrightarrow q$	$q \longleftrightarrow \neg r$	$p \longrightarrow \neg r$	$[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow \neg r)] \longrightarrow (p \longrightarrow \neg r)$
V	F	V	F	V	F	V

luego, en efecto, es una tautología y, consecuentemente, el razonamiento es válido.

Veamos ahora si

$$[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow \neg r)] \implies (p \longrightarrow \neg r)$$

En efecto, si $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow \neg r)$ es verdad, entonces las dos proposiciones $p \longrightarrow q$ y $q \longleftrightarrow \neg r$ han de ser, ambas, verdad. Estudiemos las opciones que se presentan según los valores de verdad de q .

- Si q es verdad, entonces $\neg r$ ha de ser verdad y $p \longrightarrow \neg r$ es verdad, independientemente del valor de verdad que tenga p .
- Si q es falso, entonces p es falso, $\neg r$ también y, consecuentemente, $p \longrightarrow \neg r$ es verdad.

Así pues, en cualquier caso, $p \longrightarrow \neg r$ es verdad.

Otra forma de razonar sería partir de que la segunda es falsa y concluir que la primera también. En efecto, si $p \longrightarrow \neg r$ es falsa, entonces p es verdad y $\neg r$ es falsa y, dado que esta conclusión no depende del valor de verdad de q , habrá dos opciones:

- Si q es verdad, entonces $q \longleftrightarrow \neg r$ es falsa y $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow \neg r)$ es falso independientemente del valor de verdad que tenga p .
- Si q es falso, entonces $p \longrightarrow q$ es falso y por lo tanto, $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow \neg r)$ es falso.

Así pues, en cualquier caso, $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow \neg r)$ es falso.

Tomando cualquiera de los dos caminos, hemos probado que

$$[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow \neg r)] \implies (p \longrightarrow \neg r)$$

por lo tanto el razonamiento es válido. ■

3.1.3 Falacia

Llamaremos de esta forma a un razonamiento que no es válido.

Veamos ejemplos de las falacias más habituales.

Ejemplo 3.2 La falacia de afirmar la conclusión. Estudiar la validez del siguiente razonamiento:

Si el mayordomo es el asesino, se pondrá nervioso cuando lo interroguen.
 El mayordomo se puso muy nervioso cuando lo interrogaron.
 Por lo tanto, el mayordomo es el asesino.

Solución

Sean

p : El mayordomo es el asesino.
 q : El mayordomo se puso muy nervioso cuando lo interrogaron.

El razonamiento escrito en forma simbólica sería:

$$[(p \longrightarrow q) \wedge q] \longrightarrow p$$

Veamos si es una tautología.

La proposición anterior es falsa, únicamente si siendo verdad la hipótesis, $(p \longrightarrow q) \wedge q$, es falsa la conclusión p . Pero $(p \longrightarrow q) \wedge q$ es verdad sólo si $p \longrightarrow q$ es verdad y q también lo es, luego una de las líneas de su *tabla de verdad* sería:

p	q	$p \longrightarrow q$	$(p \longrightarrow q) \wedge q$	$[(p \longrightarrow q) \wedge q] \longrightarrow p$
F	V	V	V	F

Por tanto, $[(p \longrightarrow q) \wedge q] \longrightarrow p$ no es una tautología y el argumento no sería válido, es decir, es una *falacia*.

Veamos ahora si $[(p \longrightarrow q) \wedge q] \implies p$.

Si $(p \longrightarrow q) \wedge q$ es verdad, entonces, $p \longrightarrow q$ y q son, ambas, verdad, por lo tanto p puede ser verdad o falsa y, consecuentemente, $(p \longrightarrow q) \wedge q$ no implica lógicamente p , es decir el razonamiento no es válido.

El nerviosismo del mayordomo pudo estar no en su culpabilidad sino en cualquier otra causa. ■

Ejemplo 3.3 La falacia de negar el antecedente. Estudiar la validez del siguiente razonamiento:

Si las manos del mayordomo están manchadas de sangre, entonces es culpable.
 El mayordomo está impecablemente limpio.
 Por lo tanto, el mayordomo es inocente.

Solución

Sean

p : El mayordomo tiene las manos manchadas de sangre.

q : El mayordomo es culpable.

En forma simbólica, el razonamiento puede representarse en la forma:

$$[(p \longrightarrow q) \wedge \neg p] \implies \neg q$$

Veamos si es una tautología.

Razonando igual que en el ejercicio anterior, una *tabla de verdad abreviada* sería:

p	q	$p \longrightarrow q$	$\neg p$	$(p \longrightarrow q) \wedge \neg p$	$\neg q$	$[(p \longrightarrow q) \wedge \neg p] \longrightarrow \neg q$
F	V	V	V	V	F	F

Luego no es una tautología y, consecuentemente, el argumento no es válido.

Veamos ahora si $[(p \longrightarrow q) \wedge \neg p] \implies \neg q$.

Si $(p \longrightarrow q) \wedge \neg p$ es verdad, entonces $p \longrightarrow q$ y $\neg p$ han de ser ambas, verdad, luego p será falsa y $p \longrightarrow q$ será verdad independientemente del valor de verdad de q , por lo tanto no puede concluirse nada sobre la veracidad de $\neg q$ y, consecuentemente, $(p \longrightarrow q) \wedge \neg p$ no implica lógicamente $\neg q$ de aquí que el razonamiento no sea válido.

El argumento ignora la obsesión compulsiva del mayordomo por la limpieza, lo cual le lleva siempre a lavarse las manos inmediatamente después de cometer un crimen. ■

3.2 Inferencia

Dado que no siempre es factible construir una tabla de verdad para comprobar la validez de un razonamiento (cuando el número de proposiciones es elevado, la tabla puede ser excesivamente larga), utilizaremos únicamente el procedimiento de probar que se da la implicación lógica.

3.2.1 Regla de Inferencia

Diremos que la proposición Q se infiere de las proposiciones P_1, P_2, \dots, P_n si Q es verdad cuando todas las $P_i, i = 1, 2, \dots, n$ lo sean, es decir, cuando $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \implies Q$.

Obsérvese que esto es lo mismo que decir que el razonamiento $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \longrightarrow Q$ sea válido. La escribiremos en la forma siguiente:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

El símbolo \therefore se lee “por lo tanto”. Cada regla de inferencia tendrá su origen en una implicación lógica.

3.2.2 Reglas de Inferencia más Usuales

Presentamos a continuación, una tabla con las reglas de inferencia más usuales y las tautologías con las que están relacionadas en el lenguaje de las proposiciones.

Regla	Forma Tautológica	Nombre
$\therefore \frac{P}{P \vee Q}$	$P \implies (P \vee Q)$	Adición
$\therefore \frac{P \wedge Q}{P}$	$(P \wedge Q) \implies P$	Simplificación
$\therefore \frac{P \quad P \longrightarrow Q}{Q}$	$[P \wedge (P \longrightarrow Q)] \implies Q$	Modus Ponens
$\therefore \frac{P \longrightarrow Q \quad \neg Q}{\neg P}$	$[(P \longrightarrow Q) \wedge \neg Q] \implies \neg P$	Modus Tollens
$\therefore \frac{P \longrightarrow Q \quad Q \longrightarrow R}{P \longrightarrow R}$	$[(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow R)] \implies (P \longrightarrow R)$	Silogismo Hipotético
$\therefore \frac{P \vee Q \quad \neg P}{Q}$	$[(P \vee Q) \wedge \neg P] \implies Q$	Silogismo Disyuntivo
$\therefore \frac{P \quad Q}{P \wedge Q}$		Conjunción
$\therefore \frac{P \longrightarrow Q \quad R \longrightarrow S \quad P \vee R}{Q \vee S}$	$[(P \longrightarrow Q) \wedge (R \longrightarrow S) \wedge (P \vee R)] \implies (Q \vee S)$	Dilema Constructivo
$\therefore \frac{P \longrightarrow Q \quad R \longrightarrow S \quad \neg Q \vee \neg S}{\neg P \vee \neg R}$	$[(P \longrightarrow Q) \wedge (R \longrightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S)] \implies (\neg P \vee \neg R)$	Dilema Destructivo
$\therefore \frac{\neg P \longrightarrow C}{P}$	$(\neg P \longrightarrow C) \implies P$	Contradicción
$\therefore \frac{P \wedge Q \quad P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)}{R}$	$[(P \wedge Q) \wedge (P \longrightarrow (Q \longrightarrow R))] \implies R$	Demostración Condicional
$\therefore \frac{P \longrightarrow R \quad Q \longrightarrow R}{(P \vee Q) \longrightarrow R}$	$[(P \longrightarrow R) \wedge (Q \longrightarrow R)] \implies [(P \vee Q) \longrightarrow R]$	Demostración por Casos

Ejemplo 3.4 Para cada una de los siguientes conjuntos de premisas, decir cuáles son las conclusiones

relevantes y las reglas de inferencia utilizadas en cada caso.

- (a) Estoy gordo o delgado. Ciertamente no estoy delgado.
- (b) Si corro, me quedará sin aliento. No estoy sin aliento.
- (c) Si el mayordomo lo hizo, entonces tiene las manos sucias. Las manos del mayordomo no están sucias.
- (d) El cielo azul me pone contento y el cielo gris me pone triste. El cielo está azul o gris.
- (e) Todas las funciones trigonométricas son periódicas y todas las funciones periódicas son continuas.

Solución

- (a) Estoy gordo o delgado. Ciertamente no estoy delgado.

Sean

p : Estoy gordo.
 q : Estoy delgado.

Entonces,

$p \vee q$: Estoy gordo o delgado.
 $\neg q$: No estoy delgado.

El argumento sería,

$$(p \vee q) \wedge \neg q.$$

Por el *silogismo disyuntivo*,

$$(p \vee q) \wedge \neg q \implies p$$

y la *regla de inferencia* es

$$\therefore \frac{p \vee q \quad \neg q}{p}$$

es decir,

$$\therefore \frac{\text{Estoy gordo o delgado.} \quad \text{No estoy delgado.}}{\text{Estoy gordo}}$$

La *conclusión* es, por tanto,

“Estoy gordo”.

- (b) Si corro, me quedará sin aliento. No estoy sin aliento.

Sean

p : Corro.
 q : Estoy sin aliento

Entonces, el argumento sería:

$$(p \longrightarrow q) \wedge \neg q$$

y por *modus tollens*,

$$(p \longrightarrow q) \wedge \neg q \implies \neg p$$

siendo la *regla de inferencia*,

$$\begin{array}{c} p \longrightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

es decir,

$$\begin{array}{c} \text{Si corro, me quedaré sin aliento.} \\ \text{No estoy sin aliento.} \\ \hline \therefore \text{No he corrido.} \end{array}$$

La *conclusión* es, por tanto,

“No he corrido”.

- (c) Si el mayordomo lo hizo, entonces tiene las manos sucias. Las manos del mayordomo no están sucias.

Sean

p : El mayordomo lo hizo.

q : El mayordomo tiene las manos sucias.

El argumento propuesto sería:

$$(p \longrightarrow q) \wedge q$$

y la *regla de inferencia*

$$\begin{array}{c} p \longrightarrow q \\ q \\ \hline \therefore \text{Las únicas conclusiones son las hipótesis} \end{array}$$

- (d) El cielo azul me pone contento y el cielo gris me pone triste. El cielo está azul o gris.

Sean

p : El cielo está azul.

q : El cielo está gris.

r : Estoy contento.

s : Estoy triste.

El argumento sería:

$$[(p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow s)] \wedge (p \vee q)$$

Por el *dilema constructivo*,

$$[(p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow s)] \wedge (p \vee q) \implies (r \vee s)$$

siendo la *regla de inferencia*,

$$\begin{array}{c} p \longrightarrow r \\ q \longrightarrow s \\ p \vee q \\ \hline \therefore r \vee s \end{array}$$

es decir,

$$\begin{array}{c} \text{El cielo azul me pone contento.} \\ \text{El cielo gris me pone triste.} \\ \text{El cielo está azul o gris.} \\ \hline \therefore \text{Estoy contento o triste.} \end{array}$$

La *conclusión* es, por tanto,

“Estoy contento o triste”.

(e) Todas las funciones trigonométricas son periódicas y todas las funciones periódicas son continuas.

Sean

p : Función trigonométrica.

q : Función periódica.

r : Función continua.

El argumento propuesto es:

$$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r).$$

Por el *silogismo hipotético*,

$$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \implies (p \longrightarrow r)$$

siendo la *regla de inferencia*,

$$\begin{array}{c} p \longrightarrow q \\ q \longrightarrow r \\ \hline \therefore p \longrightarrow r \end{array}$$

es decir,

$$\begin{array}{c} \text{Todas las funciones trigonométricas son periódicas.} \\ \text{Todas las funciones periódicas son continuas.} \\ \hline \therefore \text{Todas las funciones trigonométricas son continuas.} \end{array}$$

La *conclusión* es, por tanto,

“Todas las funciones trigonométricas son continuas”.

■

3.3 Demostraciones

Veamos algunas definiciones interesantes.

3.3.1 Teorema

Consiste en una proposición P , llamada hipótesis y otra proposición Q que será la conclusión.

3.3.2 Corolario

Es un teorema que se deduce inmediatamente de otro teorema.

3.3.3 Lema

Es un teorema que no tiene especial interés en sí mismo pero que es útil para probar algún otro teorema.

3.3.4 Demostración

Es un razonamiento que establece la veracidad de un teorema.

Nota 3.2 Obsérvese que, de acuerdo con estas definiciones, un teorema es verdadero si, y sólo si la proposición condicional

$$P \longrightarrow Q$$

es una tautología o también si

$$P \implies Q$$

o también si

$$\therefore \frac{P}{Q}$$

Dicho de otra forma un teorema es verdadero si, y sólo si el razonamiento

$$P \longrightarrow Q$$

es válido.

Ejemplo 3.5 Determinar cuáles de los razonamientos siguientes son válidos. Construir demostraciones para los razonamientos que lo sean y para los que no lo sean, explicar por qué la conclusión no se sigue de la hipótesis.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \frac{p \wedge q}{p \longrightarrow r} & \text{(b)} \quad \frac{p \vee q}{p \longrightarrow r} \quad \text{(c)} \quad \frac{p \longrightarrow q}{p \longrightarrow r} \\ & \therefore r \wedge q & \therefore r \vee q \quad \therefore r \longrightarrow q \end{array}$$

Solución

(a) En efecto,

$$\begin{array}{lll} (p \wedge q) \wedge (p \longrightarrow r) & \iff & (q \wedge p) \wedge (p \longrightarrow r) \quad \{\text{Conmutatividad de } \wedge\} \\ & \iff & q \wedge [p \wedge (p \longrightarrow r)] \quad \{\text{Asociatividad de } \wedge\} \\ & \implies & q \wedge r \quad \{\text{Modus ponens}\} \\ & \implies & r \wedge q \quad \{\text{Conmutatividad de } \wedge\} \end{array}$$

El razonamiento es válido.

(b) En efecto,

$$\begin{array}{lll} (p \vee q) \wedge (p \longrightarrow r) & \implies & (\neg q \longrightarrow p) \wedge (p \longrightarrow r) \quad \{\text{Implicación}\} \\ & \implies & \neg q \longrightarrow r \quad \{\text{Silogismo hipotético}\} \\ & \implies & \neg \neg q \vee r \quad \{\text{Implicación}\} \\ & \iff & q \vee r \quad \{\text{Doble negación}\} \\ & \iff & r \vee q \quad \{\text{Conmutatividad de } \vee\} \end{array}$$

El razonamiento, por tanto, es válido.

(c) Veamos si el razonamiento es válido, es decir, si $[(p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r)] \implies (r \longrightarrow q)$.

Si $(p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r)$ es verdad, entonces $p \longrightarrow q$ y $p \longrightarrow r$, ambas, han de ser verdad. Analizamos las distintas opciones según los valores de verdad de p .

- Si p es verdad, entonces q y r han de ser verdad, luego $r \longrightarrow q$ es verdad.
- Si p es falsa, entonces q y r pueden ser las dos verdad, las dos falsas o una falsa y la otra verdad. En uno de los casos (r verdadera y q falsa) la conclusión, $r \longrightarrow q$ es falsa.

Por lo tanto de la veracidad de la hipótesis no se sigue la veracidad de la conclusión y, consecuentemente, el razonamiento no es válido. ■

Ejemplo 3.6 Formular simbólicamente los siguientes razonamientos y determinar cuáles son válidos. Tomar:

p : Estudio mucho.
 q : Obtengo C como calificación.
 r : Me hago rico.

- (a)
$$\frac{\begin{array}{l} \text{Si estudio mucho, entonces obtengo } C \text{ como calificación.} \\ \text{Estudio mucho.} \end{array}}{\therefore \text{Obtengo } C \text{ como calificación.}}$$
- (b)
$$\frac{\begin{array}{l} \text{Si estudio mucho, entonces obtengo } C \text{ como calificación.} \\ \text{Si no me hago rico, entonces no obtengo } C \text{ como calificación.} \end{array}}{\therefore \text{Me hago rico.}}$$
- (c)
$$\frac{\begin{array}{l} \text{Estudio mucho si y sólo si me hago rico.} \\ \text{Me hago rico.} \end{array}}{\therefore \text{Estudio mucho.}}$$
- (d)
$$\frac{\begin{array}{l} \text{Si estudio mucho o me hago rico, entonces obtengo } C \text{ como calificación.} \\ \text{Obtengo } C \text{ como calificación.} \end{array}}{\therefore \text{Si no estudio mucho, entonces me hago rico.}}$$
- (e)
$$\frac{\begin{array}{l} \text{Si estudio mucho, entonces obtengo } C \text{ como calificación o me hago rico.} \\ \text{No obtengo } C \text{ como calificación y no me hago rico.} \end{array}}{\therefore \text{No estudio mucho.}}$$

Solución

- (a) La *regla de inferencia* en notación simbólica es

$$\therefore \frac{\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

conocida con el nombre de *Modus ponens*, luego el razonamiento es válido.

- (b) La *regla de inferencia* en notación simbólica es

$$\therefore \frac{\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ \neg r \longrightarrow \neg q \end{array}}{r}$$

Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (p \longrightarrow q) \wedge (\neg r \longrightarrow \neg q) &\iff (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) && \{\text{Contrarrecíproca}\} \\ &\implies p \longrightarrow r && \{\text{Silogismo Hipotético}\} \end{aligned}$$

Por tanto, la conclusión es

Estudio mucho o me hago rico

es decir, el razonamiento no es válido.

(c) La *regla de inferencia* en notación simbólica es

$$\therefore \frac{\begin{array}{c} p \longleftrightarrow r \\ r \end{array}}{p}$$

Veamos si $[(p \longleftrightarrow r) \wedge r] \implies p$. En efecto, si $(p \longleftrightarrow r) \wedge r$ es verdad, entonces $p \longleftrightarrow r$ y r han de ser, ambas, verdad, luego p también será verdad y, consecuentemente, el razonamiento es válido.

(d) La *regla de inferencia* en notación simbólica es:

$$\therefore \frac{\begin{array}{c} (p \vee r) \longrightarrow q \\ q \end{array}}{\neg p \longrightarrow r}$$

Si $\neg p \longrightarrow r$ es falsa, entonces $\neg p$ es verdad y r falsa, es decir p y r son, las dos, falsas, luego $(p \vee r) \longrightarrow q$ es verdad independientemente del valor de verdad que tenga q , de aquí que el valor de verdad de $[(p \vee r) \longrightarrow q] \wedge q$ dependa del de q , es decir, podrá ser verdadera o falsa y, consecuentemente, el razonamiento no sea válido.

(e) La *regla de inferencia* en notación simbólica es:

$$\therefore \frac{\begin{array}{c} p \longrightarrow (q \vee r) \\ \neg q \wedge \neg r \end{array}}{\neg p}$$

Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} [p \longrightarrow (q \vee r)] \wedge (\neg q \wedge \neg r) &\iff [p \longrightarrow (q \vee r)] \wedge [\neg (q \vee r)] && \{\text{De Morgan}\} \\ &\implies \neg p && \{\text{Modus Tollens}\} \end{aligned}$$

Por tanto, el razonamiento es válido. ■

Ejemplo 3.7 Expresar verbalmente los razonamientos dados y establecer la validez de los mismos. Tomar:

p : 1Gb es mejor que nada.

q : Compraremos mayor capacidad de memoria.

r : Compraremos un ordenador nuevo.

$$(a) \quad \therefore \frac{\begin{array}{c} p \longrightarrow r \\ p \longrightarrow q \end{array}}{p \longrightarrow (r \wedge q)}$$

$$(b) \quad \therefore \frac{\begin{array}{c} p \longrightarrow (r \vee q) \\ r \longrightarrow \neg q \end{array}}{p \longrightarrow r}$$

$$(c) \quad \therefore \frac{\begin{array}{c} p \longrightarrow r \\ r \longrightarrow q \end{array}}{q}$$

$$(d) \quad \therefore \frac{\begin{array}{c} \neg r \longrightarrow \neg p \\ r \end{array}}{p}$$

$$(e) \quad \frac{\begin{array}{l} p \longrightarrow r \\ r \longrightarrow q \\ p \end{array}}{\therefore q}$$

Solución

(a) La forma verbal del razonamiento sería:

Si 1Gb es mejor que nada, entonces compraremos un ordenador nuevo.
 Si 1Gb es mejor que nada, entonces compraremos mayor capacidad de memoria.
 \therefore Si 1Gb es mejor que nada, entonces compraremos un ordenador nuevo y mayor capacidad de memoria.

Entonces,

$$\begin{aligned} (p \longrightarrow r) \wedge (p \longrightarrow q) &\iff (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee q) && \{\text{Implicación}\} \\ &\iff \neg p \vee (r \wedge q) && \{\text{Distributividad de } \vee \text{ respecto de } \wedge\} \\ &\iff p \longrightarrow (r \wedge q) && \{\text{Implicación}\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el razonamiento es válido.

(b) En forma verbal, el razonamiento es

Si 1Gb es mejor que nada, entonces compraremos un ordenador nuevo o mayor capacidad de memoria.
 Si compramos un ordenador nuevo, entonces no compraremos mayor capacidad de memoria.
 \therefore Si 1Gb es mejor que nada, entonces compraremos un ordenador nuevo.

Pues bien, si $p \longrightarrow r$ es falso, entonces p es verdad y r es falso, luego $r \longrightarrow \neg q$ es verdad independientemente del valor de verdad de q y el valor de verdad de $[p \longrightarrow (r \vee q)] \wedge (r \longrightarrow \neg q)$ dependerá del de $p \longrightarrow (r \vee q)$ que, a su vez, depende del que tenga q .

- Si q es verdad, entonces $p \longrightarrow (r \vee q)$ es verdad y, por lo tanto, $[p \longrightarrow (r \vee q)] \wedge (r \longrightarrow \neg q)$ es verdad.
- Si q es falso, entonces $p \longrightarrow (r \vee q)$ es verdad y, por lo tanto, $[p \longrightarrow (r \vee q)] \wedge (r \longrightarrow \neg q)$ es falso.

Consecuentemente, el razonamiento no es válido.

(c) El razonamiento sería,

Si 1Gb es mejor que nada, entonces compraremos un ordenador nuevo.
 Si compramos un ordenador nuevo, entonces compraremos mayor capacidad de memoria.
 \therefore Compraremos mayor capacidad de memoria.

Estudiemos la validez del razonamiento. Por el *silogismo hipotético*,

$$[(p \longrightarrow r) \wedge (r \longrightarrow q)] \implies (p \longrightarrow q)$$

pero $p \longrightarrow q$ no implica lógicamente q . En efecto, si $p \longrightarrow q$ es verdad, entonces pueden ocurrir dos cosas:

- si p es verdad, q ha de ser también verdad.
- si p es falso, q puede ser verdad o falso.

Consecuentemente, el razonamiento no es válido.

(d) La forma verbal del razonamiento sería:

Si no compramos un ordenador nuevo, entonces 1Gb no es mejor que nada.
 Compraremos un ordenador nuevo.

 \therefore 1Gb es mejor que nada.

Estudiemos su validez.

Si $[(\neg r \rightarrow \neg p) \wedge r]$ es verdad, entonces $\neg r \rightarrow \neg p$ y r han de ser, ambas, verdad, de aquí que $\neg r$ sea falsa y $\neg p$ y, por lo tanto, p pueda ser verdad o falsa.

Así pues, de la veracidad de $[(\neg r \rightarrow \neg p) \wedge r]$ no se sigue la veracidad de p , luego la primera proposición no implica lógicamente la segunda y, consecuentemente, el razonamiento no es válido.

(e) El razonamiento en forma verbal es,

Si 1Gb es mejor que nada, entonces compraremos un ordenador nuevo.
 Si compramos un ordenador nuevo, entonces compraremos mayor capacidad de memoria.
 1Gb es mejor que nada.

 \therefore Compraremos mayor capacidad de memoria.

Veamos el razonamiento:

$$\begin{aligned} (p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q) \wedge q &\implies (p \rightarrow q) \wedge p && \{\text{Silogismo Hipotético}\} \\ &\implies q && \{\text{Modus Ponens}\} \end{aligned}$$

por lo tanto es válido. ■

3.4 Razonamientos y Cuantificadores

La mayoría de los razonamientos que hemos visto hasta ahora trataban con proposiciones y no con predicados además poco, o nada, tenían ver con cuestiones de tipo matemático.

En casi todos los teoremas matemáticos aparecen de forma natural los predicados y los cuantificadores, así pues si queremos utilizar el procedimiento lógico aprendido en los razonamientos para demostrar este tipo de teoremas, habrá que utilizar proposiciones cuantificadas en los razonamientos. En este apartado introducimos predicados y cuantificadores en los razonamientos y vemos como todo lo que hemos aprendido hasta ahora puede utilizarse sin más que añadir un par de reglas.

3.4.1 Definiciones Matemáticas

En las definiciones, y únicamente en las definiciones, un condicional puede leerse e interpretarse correctamente como un bicondicional.

Cuando se definen conceptos matemáticos, normalmente se utiliza el condicional. Consideremos, por ejemplo, el universo de todos los triángulos del plano. En un libro podemos leer la siguiente definición:

“Si un triángulo tiene sus tres lados iguales, entonces es equilátero”

y en otro texto, leemos

“Si un triángulo es equilátero, entonces tiene sus tres lados iguales”

En ambos casos se están utilizando proposiciones cuantificadas con el cuantificador universal. En efecto, sean

$p(x) : x$ tiene tres lados iguales.
 $q(x) : x$ es un triángulo equilátero.

Entonces en notación simbólica el primer libro dice

$$\forall x [p(x) \longrightarrow q(x)]$$

y el segundo

$$\forall x [q(x) \longrightarrow p(x)]$$

Pues bien, observemos que una de ellas es la recíproca de la otra y si tenemos en cuenta que una proposición y su recíproca no son, en general, lógicamente equivalentes ¿cuál de las dos definiciones es la correcta?

La respuesta es que ambas lo son, en el sentido de que los dos libros utilizan el condicional como un bicondicional, o sea,

$$\forall x [p(x) \longleftrightarrow q(x)]$$

es decir, los dos están diciendo que

“Un triángulo es equilátero si, y sólo si tiene sus tres lados iguales”

Concluyendo: *En las definiciones, y únicamente en las definiciones, un condicional puede leerse e interpretarse correctamente como un bicondicional.*

Ejemplo 3.8 En el universo de los números enteros, podemos definir el concepto de divisibilidad de la forma siguiente:

“Para cada par de enteros x e y , decimos que x es divisible por y si x es múltiplo de y ”

Pues bien, si

$p(x, y) : x$ es múltiplo de y
 $q(x, y) : x$ es divisible por y

entonces la definición anterior en forma simbólica sería,

$$\forall x, \forall y [p(x, y) \longrightarrow q(x, y)]$$

Pero la intención es que se interprete la definición dada como

$$\forall x, \forall y [p(x, y) \longleftrightarrow q(x, y)]$$

es decir,

“Para cada par de enteros x e y , diremos que x es divisible por y si, y sólo si x es múltiplo de y ”

Pero, ¿qué significa “ser múltiplo de”? Recordemos que

“ x es múltiplo de y , si puede encontrarse otro número entero k tal que $x = ky$ ”

que, al igual que antes, hay que interpretar como

“ x es múltiplo de y si, y sólo si puede encontrarse otro número entero k tal que $x = ky$ ”

Si llamamos $r(x, y) : x = ky$, en notación simbólica sería

$$\forall x, \forall y [q(x, y) \longleftrightarrow \exists k : r(x, y)]$$

y relacionando esta definición con la anterior, tendríamos que

$$\forall x, \forall y [p(x, y) \longleftrightarrow \exists k : r(x, y)]$$

es decir que otra forma de definir la divisibilidad sería:

“Para cada par de números enteros x e y , diremos que x es divisible por y si, y sólo si existe un entero k tal que $x = ky$ ”

■

Ejemplo 3.9 Utilizaremos la definición anterior para adaptar la de número entero par.

Recordemos que un número entero es par si es divisible por 2. Consideremos, pues, el universo de los números enteros y definamos

“Para cada entero x , x es par si, y sólo si x es divisible por 2”

Si ahora tenemos en cuenta el significado de “divisible por” dado en el ejemplo anterior, tendremos que

“Para cada entero x , x es par si, y sólo si puede encontrarse un entero k tal que $x = 2k$ ”

Por ejemplo supongamos que el universo del discurso está formado por los números 16, 26 y 36 y que nos piden probar que todos son pares. Podríamos hacer lo siguiente:

- si $x = 16$ y $16 = 2k$, entonces $k = 8$ que es entero, luego $x = 2 \cdot 8$, es decir, x es par.
- si $x = 26$ y $26 = 2k$, entonces $k = 13$ que es entero, luego $x = 2 \cdot 13$, es decir, x es par.
- si $x = 36$ y $36 = 2k$, entonces $k = 18$ que es entero, luego $x = 2 \cdot 18$, es decir, x es par.

Obsérvese que hemos demostrado la proposición probando el resultado para todos y cada uno de los elementos del universo del discurso.

Ahora bien, si el universo tuviera, por ejemplo, cincuenta números, entonces este procedimiento sería largo y tedioso y, aún más, si el universo fueran todos los enteros pares, este procedimiento no sería factible. ■

Remediaremos esta situación con las dos reglas siguientes.

Nota 3.3 Al igual que definimos los números enteros pares, podemos definir los impares en la forma siguiente:

“Para cada entero x , x es impar si, y sólo si puede encontrarse un entero k tal que $x = 2k + 1$ ”

■

3.4.2 Regla de Particularización

Si un predicado se transforma en una proposición verdadera para todos los elementos de un universo del discurso, entonces es una proposición verdadera, en particular, para cada elemento del universo.

Obsérvese que lo que decimos es que si $\forall x, p(x)$ es verdad, entonces $p(a)$ es verdad para cada a en el universo del discurso.

Ejemplo 3.10 Estudiar, en el universo de todos los alumnos de la Universidad de Cádiz, la validez del siguiente razonamiento.

*Todos los alumnos de Informática estudian Matemática Discreta.
Florinda es alumna de Informática.
Por lo tanto, Florinda estudia Matemática Discreta.*

Solución

Sean

$p(x) : x$ es alumno de Informática.
 $q(x) : x$ estudia Matemática Discreta.

y llamemos f a Florinda.

El razonamiento en forma simbólica sería:

$$\begin{array}{c} \forall x [p(x) \longrightarrow q(x)] \\ p(f) \\ \hline \therefore q(f) \end{array}$$

Pues bien,

$$\begin{array}{ll} \forall x [p(x) \longrightarrow q(x)] \wedge p(f) & \implies [p(f) \longrightarrow q(f)] \wedge p(f) \quad \{\text{Regla de Particularización}\} \\ & \implies q(f) \quad \{\text{Modus Ponens}\} \end{array}$$

luego, en efecto, el razonamiento es válido. ■

Ejemplo 3.11 Consideremos el universo de los números enteros, elijamos un número a que no sea múltiplo de 2 y estudiemos la validez del siguiente razonamiento.

El número a no es múltiplo de 2.
Si un número es par, entonces es divisible por 2.
Si un número es divisible por 2, entonces es múltiplo de 2.
Por lo tanto, el número a no es par.

Solución

Sean

$p(x) : x$ es par.
 $q(x) : x$ es divisible por 2.
 $r(x) : x$ es múltiplo de 2.

El razonamiento escrito en forma simbólica sería:

$$\therefore \frac{\begin{array}{l} \neg r(a) \\ \forall x [p(x) \longrightarrow q(x)] \\ \forall x [q(x) \longrightarrow r(x)] \end{array}}{\neg p(a)}$$

Pues bien,

$$\begin{aligned} (\neg r(a)) \wedge [\forall x [p(x) \longrightarrow q(x)]] \wedge [\forall x [q(x) \longrightarrow r(x)]] &\implies (\neg r(a)) \wedge [p(a) \longrightarrow q(a)] \wedge [q(a) \longrightarrow r(a)] \\ &\implies (\neg r(a)) \wedge [p(a) \longrightarrow r(a)] \\ &\implies \neg p(a) \end{aligned}$$

es decir, el razonamiento es válido.

Obsérvese que en la primera implicación hemos utilizado la regla de particularización, obteniendo de este modo una proposición no cuantificada a la que luego hemos aplicado de forma sucesiva la regla del silogismo hipotético y del modus tollens. ■

Nota 3.4 Como hemos visto en los ejemplos anteriores, la regla de particularización nos ha permitido deducir conclusiones particulares partiendo de premisas o hipótesis generales. Sin embargo, en la inmensa mayoría de los teoremas matemáticos hay que llegar a conclusiones generales. Por ejemplo, tendremos que probar que $p(x)$ es verdad para todos los valores de un cierto universo del discurso, es decir probar que $\forall x, p(x)$ es verdad, para lo cual habrá que establecer la veracidad de la proposición $p(a)$ para cada elemento a del universo y como ya hemos comentado anteriormente, en la mayor parte de los universos esto no es factible. Lo que haremos para solventar esta cuestión es probar que $p(a)$ es verdad pero no para el caso en que a sea un elemento particular sino para el caso en que a denote un elemento arbitrario o genérico del universo. ■

3.4.3 Regla de Generalización

Si un predicado es una proposición verdadera para cualquier elemento elegido de forma arbitraria en nuestro universo del discurso, entonces es verdadera para todos los elementos del universo.

Obsérvese que aquí decimos que si $p(a)$ es verdadera, siendo a un elemento arbitrario del universo, entonces $\forall x, p(x)$ es verdad.

Obsérvese también que un elemento arbitrario o genérico del universo ha de ser uno que tenga todas las características comunes de los elementos del universo de esta forma lo que probemos o hagamos para a será aplicable a todos los elementos.

Ejemplo 3.12 Dados los predicados $p(x), q(x)$ y $r(x)$ donde la variable x pertenece a un universo cualquiera, estudiar la validez del siguiente razonamiento.

$$\therefore \frac{\begin{array}{l} \forall x [p(x) \longrightarrow q(x)] \\ \forall x [q(x) \longrightarrow r(x)] \end{array}}{\forall x [p(x) \longrightarrow r(x)]}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} [\forall x [p(x) \longrightarrow q(x)] \wedge \forall x [q(x) \longrightarrow r(x)]] &\implies [(p(a) \longrightarrow q(a)) \wedge (q(a) \longrightarrow r(a))] \\ &\implies [p(a) \longrightarrow r(a)] \\ &\implies \forall x [p(x) \longrightarrow r(x)] \end{aligned}$$

En la primera implicación hemos utilizado la regla de particularización pero para un elemento a genérico es decir elegido arbitrariamente, después hemos aplicado la regla del silogismo hipotético para proposiciones y finalmente hemos aplicado la regla de generalización.

En la práctica el razonamiento se haría de la forma siguiente:

Si

$$[\forall x (p(x) \longrightarrow q(x)) \wedge \forall x [p(x) \longrightarrow q(x)]]$$

es verdad, entonces ambas serán verdaderas para todos los valores de x en el universo del discurso.

Pues bien, sea a un elemento elegido arbitrariamente en el universo. Según lo que acabamos de decir,

$$[p(a) \longrightarrow q(a)] \text{ y } [q(a) \longrightarrow r(a)]$$

serán, ambas, verdad. (En realidad hemos aplicado la regla de particularización para un elemento genérico a).

Entonces, por la regla del silogismo hipotético,

$$p(a) \longrightarrow r(a)$$

será verdad y como a es un elemento arbitrario del universo, será verdad para todos los elementos del mismo, es decir,

$$\forall x [p(x) \longrightarrow r(x)]$$

es verdad. (Aquí hemos aplicado la regla de generalización). ■

3.5 Métodos de Demostración

Estudiamos en esta sección, la estructura de las demostraciones así como las estrategias para su construcción. Aunque no sea posible considerarlas todas, describiremos algunas de las técnicas de demostración más comunes, daremos ejemplos de su uso y las relacionaremos con las reglas de inferencia anteriormente descritas.

Hemos visto con anterioridad que una demostración era un *razonamiento que establece la veracidad de un teorema*, es decir demostrar un teorema equivale a probar que la proposición condicional $P \longrightarrow Q$ es una tautología o lo que es igual probar que $P \implies Q$.

Veremos algunas de las técnicas utilizadas para probar implicaciones. Debido a que dichas técnicas son bastante comunes nos referiremos a ellas por sus nombres.

3.5.1 Demostración Vacía

Una demostración de este tipo se construye estableciendo que el valor verdadero de la hipótesis P es falso.

En efecto, si podemos establecer la falsedad de P , entonces el condicional $P \longrightarrow Q$ siempre es verdad independientemente del valor de verdad de la conclusión Q , luego $P \longrightarrow Q$ es una tautología y, consecuentemente, $P \implies Q$.

Aunque parece que tiene poco valor, este método de demostración es importante para establecer limitaciones o estudiar casos especiales. ■

3.5.2 Demostración Trivial

Se construye una demostración de este tipo, probando que el valor verdadero de la conclusión es verdad.

Si es posible establecer la veracidad de la conclusión Q , entonces el condicional $P \longrightarrow Q$ será una tautología independientemente del valor de verdad que tenga la hipótesis, luego $P \implies Q$, la demostración es correcta y el teorema cierto.

Al igual que la demostración vacía, la demostración trivial tiene una aplicación limitada y aún así es bastante importante. Se utiliza frecuentemente para establecer casos especiales de afirmaciones. ■

3.5.3 Demostración Directa

Una demostración de este tipo muestra que la verdad de la conclusión Q , se sigue lógicamente de la verdad de la hipótesis P . La demostración empieza asumiendo que P es verdad para después, utilizando cualquier información disponible, así como teoremas probados con anterioridad, probar que Q es verdad.

Ejemplo 3.13 Demostrar que el cuadrado de un número entero par también es par.

Demostración

El teorema a demostrar escrito en forma de condicional, sería

“Para cualquier entero n , si n es par, entonces n^2 es par”

que se corresponde con el esquema

$$\forall n [p(n) \longrightarrow p(n^2)]$$

donde

$$p(n) : n \text{ es par.}$$

y el universo del discurso son todos los números enteros.

Pues bien, sea n un número entero cualquiera.

Si n es par, entonces por la definición que vimos en el ejemplo 3.3.9, existirá un número entero k tal que

$$n = 2k$$

de aquí que elevando al cuadrado, obtengamos

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

y como el cuadrado de un número entero también es entero, $2k^2$ será entero (lo llamaremos m).

Así pues, hemos encontrado un entero m tal que

$$n^2 = 2m.$$

Por lo tanto, y utilizando de nuevo la definición 3.3.9, concluimos que

$$n^2 \text{ es par.}$$

Aunque este ejemplo es bastante sencillo, el desarrollo lógico de la demostración es idéntico al de otros teoremas de contenidos más complicados. Observemos, una vez más, el camino seguido a través de implicaciones.

Sea n cualquier número entero. Entonces,

$$\begin{aligned} n \text{ es par} &\implies \exists k : n = 2k && \{\text{Ejemplo 3.3.9}\} \\ &\implies n^2 = 4k^2 && \{\text{Elevando al cuadrado}\} \\ &\implies \exists m : n^2 = 2m && \{\text{Tomando } m = 2k^2\} \\ &\implies n^2 \text{ es par} && \{\text{Ejemplo 3.3.9}\} \end{aligned}$$

3.5.4 Demostración por la Contrarrecíproca

La demostración de un teorema se dice que es por la contrarrecíproca cuando suponiendo que la conclusión, Q , es falsa y utilizando la hipótesis P y otros teoremas y equivalencias lógicas establecidas previamente, se concluye que P es falso.

Está basada en la equivalencia lógica entre una proposición condicional y su contrarrecíproca,

$$P \longrightarrow Q \iff \neg Q \longrightarrow \neg P$$

Por lo tanto, si probamos que $\neg Q \longrightarrow \neg P$ es una tautología, habremos probado que $P \longrightarrow Q$ también lo es, luego $P \implies Q$. ■

Ejemplo 3.14 Demostrar, para cada entero n , que si $5n + 3$ es par, entonces n es impar.

Demostración

Utilizaremos el método de demostración por la contrarrecíproca.

Si

$$\begin{aligned} p(n) : n \text{ es par} \\ q(n) : n \text{ es impar} \end{aligned}$$

el esquema del teorema propuesto será

$$\forall n [p(5n + 3) \longrightarrow q(n)]$$

en el universo de los números enteros. El esquema de la contrarrecíproca sería

$$\forall n [\neg q(n) \longrightarrow \neg p(5n + 3)]$$

es decir,

$$\text{“Para cada entero } n, \text{ si } n \text{ no es impar, entonces } 5n + 3 \text{ no es par”}$$

Pues bien, sea n cualquier número entero.

Si n no es impar, entonces por la nota 3.3,

$$n \neq 2k + 1$$

para cualquier entero k y, por lo tanto,

$$5n + 3 \neq 5(2k + 1) + 3, \forall k \in \mathbb{Z}$$

de aquí que

$$5n + 3 \neq 2(5k + 4), \forall k \in \mathbb{Z}$$

y como si k es entero, $5k + 4$ también lo es (lo llamaremos m), tendremos que

$$5n + 3 \neq 2m, \forall m \in \mathbb{Z}$$

Consecuentemente, y de acuerdo con la definición dada en el ejemplo 3.3.9, $5n + 3$ no es par y la demostración concluye.

Veamos la demostración a través de implicaciones. Sea n un número entero cualquiera. Entonces,

$$\begin{aligned} n \text{ no es impar} &\implies n \neq 2k + 1, \forall k \in \mathbb{Z} && \{\text{Nota 3.3}\} \\ &\implies \begin{cases} 5n + 3 \neq 5(2k + 1) + 3 \\ &= 10k + 8 \\ &= 2(5k + 4) \end{cases} && \{\text{Haciendo operaciones}\} \\ &\implies 5n + 3 \neq 2m, \forall m \in \mathbb{Z} && \{\text{Tomando } m = 5k + 4\} \\ &\implies 5n + 3 \text{ no es par} && \{\text{Ejemplo 3.3.9}\} \end{aligned}$$

■

3.5.5 Demostración por Contradicción

La demostración de un teorema diremos que es por contradicción cuando suponiendo que la conclusión, Q , es falsa y utilizando la hipótesis P , y otros teoremas y equivalencias lógicas establecidas previamente, se llega a una contradicción.

Está basada en la equivalencia lógica conocida como reducción al absurdo, es por ello que este método de demostración es conocido, también, como demostración por reducción al absurdo.

$$P \longrightarrow Q \iff (P \wedge \neg Q) \longrightarrow C$$

donde C es una contradicción. Por lo tanto, si probamos que $(P \wedge \neg Q) \longrightarrow C$ es una tautología tendremos que $P \longrightarrow Q$ también lo es y, consecuentemente, $P \implies Q$. ■

Ejemplo 3.15 Demostrar que si el cuadrado de un número entero es impar, entonces el número es impar.

Demostración

El teorema a demostrar es

“Para cada entero n , si n^2 es impar, entonces n es impar”

Si

$$p(n) : n \text{ es impar}$$

entonces el esquema del teorema en notación simbólica será

$$\forall n [p(n^2) \longrightarrow p(n)]$$

en el universo de los números enteros.

Lo demostraremos por contradicción o reducción al absurdo. El esquema sería

$$\forall n [(p(n^2) \wedge \neg p(n)) \longrightarrow C]$$

donde C es una contradicción.

Pues bien, sea n cualquier número entero.

Supongamos que n^2 es impar y que, sin embargo, n no es impar. Entonces, tendremos que

$$n^2 \text{ es impar y } n \text{ es par}$$

de aquí que por la definición de número impar (Nota 3.3) y la de par dada en el ejemplo 3.3.9, tengamos que existan dos números enteros k y l tales que

$$n^2 = 2k + 1 \text{ y } n = 2l$$

luego,

$$n^2 = 2k + 1 \text{ y } n^2 = 4l^2$$

por lo tanto,

$$2k + 1 = 4l^2$$

de donde se sigue que

$$1 = 4l^2 - 2k = 2(2l^2 - k)$$

y como si l y k son enteros, $2l^2 - k$ también lo es (lo llamaremos m), tendremos que hemos encontrado un número entero m tal que

$$1 = 2m$$

es decir, el 1 es par, lo cual, obviamente, es una contradicción.

Lo que nos ha llevado a la contradicción es la suposición de que n no era impar, por lo tanto ésta es falsa siendo cierta la contraria, es decir, n es impar.

Veamos la demostración a través de implicaciones.

$$\begin{aligned} n^2 \text{ impar y } n \text{ no es impar} &\implies n^2 \text{ impar y } n \text{ es par} \\ &\implies \exists k : n^2 = 2k + 1 \text{ y } \exists l : n = 2l && \{\text{Definición de impar y par}\} \\ &\implies \exists k : n^2 = 2k + 1 \text{ y } \exists l : n^2 = 4l^2 && \{\text{Elevando } l \text{ al cuadrado}\} \\ &\implies \exists k \text{ y } \exists l : 2k + 1 = 4l^2 && \{\text{Igualando}\} \\ &\implies \exists k \text{ y } \exists l : 1 = 2(2l^2 - k) && \{\text{Haciendo operaciones}\} \\ &\implies \exists m : 1 = 2m && \{\text{Tomando } m = 2l^2 - k\} \\ &\implies 1 \text{ es par} && \{\text{Definición de número par}\} \\ &\implies \text{Contradicción} \end{aligned}$$

■

3.5.6 Búsqueda de Contraejemplos

Este tipo de demostración, íntimamente relacionada con el cuantificador universal, aparece cuando se quiere probar que una proposición del tipo $\forall x, p(x)$ es falsa. Normalmente diremos que se refuta la proposición $\forall x, p(x)$.

En efecto, $\forall x, p(x)$ será falsa cuando exista, al menos, un elemento a en el universo del discurso para el cual $p(a)$ sea una proposición falsa. Hemos encontrado, pues, un ejemplo que contradice el que $\forall x, p(x)$ sea verdad por lo cual le llamaremos *contraejemplo*.

En el caso de un teorema el planteamiento sería como sigue: $\forall x [p(x) \longrightarrow q(x)]$ es falso si existe un elemento a en el universo para el cual la proposición condicional $p(a) \longrightarrow q(a)$ sea falsa, es decir tal que $p(a)$ sea verdad y, sin embargo, $q(a)$ sea falsa.

Ejemplo 3.16 En el universo de los números enteros positivos, demostrar o refutar la siguiente proposición: “la suma de dos cuadrados perfectos es también un cuadrado perfecto.”

Solución

Recordemos que un entero positivo x es un cuadrado perfecto si puede encontrarse otro entero positivo y tal que $x = y^2$.

La proposición a demostrar escrita en forma de condicional sería:

“Si m y n son enteros positivos y cuadrados perfectos, entonces $m + n$ es un cuadrado perfecto.”

Pues bien, si

$p(m, n) : m + n$ es un cuadrado perfecto,

entonces la proposición escrita en forma simbólica es

$$\forall m, \forall n [(p(m, 0) \wedge p(n, 0)) \longrightarrow p(m, n)]$$

y un contraejemplo,

$$\exists a, \exists b : [p(a, 0) \wedge p(b, 0) \wedge \neg p(a, b)]$$

es decir,

“pueden encontrarse dos enteros positivos a y b tales que sean cuadrados perfectos y que, sin embargo, su suma no lo sea.”

Pues bien, elijamos dos cuadrados perfectos arbitrariamente, por ejemplo el 25 y el 36 . Entonces,

$$25 + 36 = 61 \neq y^2, \forall y$$

por lo tanto, y de acuerdo con la definición de cuadrado perfecto dada, 61 no es un cuadrado perfecto. Así pues, ya tenemos el contraejemplo

“25 y 36 son, ambos, cuadrados perfectos y, sin embargo, su suma, $25 + 36$, no lo es.”

Consecuentemente, la proposición propuesta es falsa. ■

Nota 3.5 Según hemos visto podemos demostrar un teorema de forma directa o indirecta (contrarrecíproca y contradicción). Si podemos demostrarlo de forma directa, resultará, en general, menos engorroso que utilizar métodos indirectos. Podemos empezar intentando un método directo y si no resulta, buscar un contraejemplo que refute el teorema. Si la búsqueda del contraejemplo también falla, entonces intentaríamos la demostración a través de métodos indirectos. ■