UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACÚLTAD DE CIENCIAS

CALIFICACIÓN

Preg N°	Puntos
1	2,5
2	1
3	2
4	1
5	1
6	
Total	08

CURSO: Cálculo diferencial e integral Avanzado COD. CURSO: CM 211

PRACTICA: Calificada N°3 SECCIÓN: D

APELLIDOS Y NOMBRES (Alumno) CODIGO FIRMA

Lima, 24 de abril del 2018 N° Lista ....

NOTA

En números En letras Nombre del Profesor Firma del Profesor

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto F(x,y)$ función implícita $F = (h \circ f)(x,y)$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (f_1(1), f_2(1))$

2. Sea $F(x,y) = f(x^2+y,\ 3xy)$, donde $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable. $(x,y) \mapsto f(x,y)$

$\nabla f_{(2,3)} = (5,4)$.

Pero $\nabla f_{(x,y)} = \left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\text{existe}}, \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{\text{existe}} \right)$, $F(1,1) = f(1^2+1,\ 3.1.1) = f(2,3)$.

La dirección de mayor crecimiento de la función F está dada por la dirección de $\nabla F_{(x,y)}$, veamos en $(x=1, y=1)$:

$$\nabla F_{(1,1)} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{(1,1)} = \left(\frac{\partial F}{\partial f} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{5}, \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{4} \right)_{(1,1)}$$

Por el ~~T.F.I función implícita~~

$$= \left(5.-\frac{\frac{\partial}{\partial}}{\frac{\partial}{\partial}},\ 4.-\frac{\frac{\partial}{\partial}}{\frac{\partial}{\partial}} \right.$$

3) $u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$, $\underbrace{f, g \text{ de clase } C^2}_{\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}, \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}}$ continua

Veamos.

* $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[f(x+at) + g(x-at) \right] = \frac{\partial}{\partial t} f(x+at) + \frac{\partial}{\partial t} g(x-at)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial f(x+at)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} g(x-at) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \boxed{\frac{\partial^2 f(x+at)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g(x-at)}{\partial t^2}.} \quad \ldots (\alpha)$$

* $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x+at) + g(x-at) \right] = \frac{\partial}{\partial x} f(x+at) + \frac{\partial}{\partial x} g(x-at)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x+at) + \frac{\partial g}{\partial x}(x-at) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \boxed{\frac{\partial^2 f(x+at)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(x-at)}{\partial x^2}} \quad \ldots (\beta)$$

Pero de la hipótesis: f es solución de la ecuación de la onda...(I)
g es solución de la ecuación de la onda...(II)

De (I): $\frac{\partial^2 f(x+at)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 f(x+at)}{\partial x^2}$. De (II): $\frac{\partial^2 g(x-at)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 g(x-at)}{\partial x^2}$

Si sumamos (I) y (II):

$$\frac{\partial^2 f(x+at)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g(x-at)}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{\partial^2 f(x+at)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(x-at)}{\partial x^2} \right]$$

Pero, la expresión del lado izquierdo de la igualdad es (α) y la expresión del lado derecho de la igualdad que multiplica a a^2 es (β). Reemplazando:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

donde $u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$. $u(x,t)$ es solución de la ecuación de onda.

5. Sea $f(x,y) = e^{2x} \operatorname{sen}(3y)$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\qquad (x,y) \mapsto e^{2x}\operatorname{sen}(3y)$

Hallando el gradiente de f.

$$f(0,0) = e^{2.0}\operatorname{sen}(3.0)$$
$$f(0,0) = 1.0 = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\operatorname{sen}(3y)\exp(2x), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3\exp(2x).\cos(3y)$$

Así,

$$\nabla f_{(x,y)} = \Big(2\operatorname{sen}(3y)\exp(2x),\ 3\exp(2x)\cos(3y\Big)_{(x,y)}$$

Ahora, hallando las derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[2\operatorname{sen}(3y)\exp(2x)\right] = 4\operatorname{sen}(3y)\exp(2x).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[3\cos(3y)\exp(2x)\right] = 6\cos(3y)\exp(2x).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[3\cos(3y)\exp(2x)\right] = -9\operatorname{sen}(3y)\exp(2x).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[2\operatorname{sen}(3y)\exp(2x)\right] = 6\cos(3y)\exp(2x).$$

El polinomio (en dos variables) de Taylor de segundo ~~tercer~~ orden (centrado en (0,0)) se define como sigue:

$$P_{(0,0)}(x,y) = f(0,0) + \langle \nabla f_{(0,0)}, (0,0)\rangle + \underbrace{R_{(x,y)}}_{\text{Resto}} + \frac{1}{2}\langle H, 0,0\rangle$$

$$= 0 +$$

4. Sea $F: xyz + \ln(xyz) - z = 0$, cuando $x>0, y>0, z>0$.

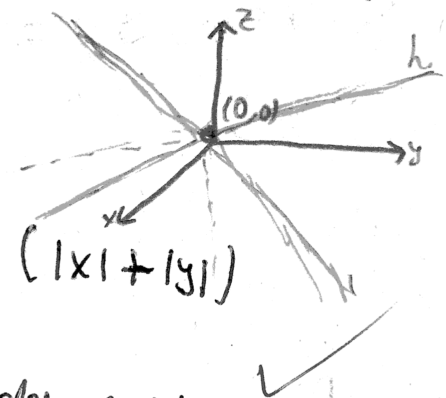
¿ $(1,1,1) \in F$? $(1)(1)(1) + \ln(1 \cdot 1 \cdot 1) - 1 = 1 + \ln(1) - 1 = 0$.

$P = (1,1,1) \in F$. ✓

F satisface las condiciones del teorema de la función implícita, luego:

1. (c) Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

NO podemos asociarle un plano tangente a su gráfico, debemos exigir un poco más, que f sea diferenciable.



Contraejemplo: Sea $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \big||x|-|y|\big| - (|x|+|y|)$$

Sus $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 0$, ¡sus derivadas parciales existen!

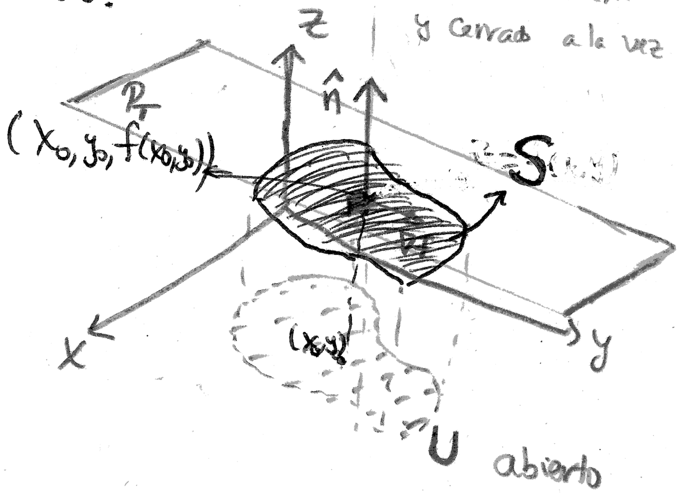
Sin embargo si calcular en la dirección $y=x$ obtendría otro valor.

h no tiene plano tangente en $(0,0,f(0,0))$.

(b) Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable.

¿La recta $\mathbb{R}^2$ es abierto y cerrado a la vez

Como f es diferenciable, en particular en (x_0,y_0), la gráfica de f tiene asociada un plano tangente.



La ecuación del plano tangente es:

$$P_T: \frac{\partial f}{\partial x}_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}_{(x_0,y_0)}(y-y_0) + f(x_0,y_0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}_{(x_0,y_0)}x + \frac{\partial f}{\partial y}_{(x_0,y_0)}y + f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}_{(x_0,y_0)}x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}_{(x_0,y_0)}y_0 = 0.$$

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$

$$\langle \nabla f_{(x_0,y_0)}, (x,y)-(x_0,y_0) \rangle = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} \cdot (x-x_0, y-y_0) = 0$$

El vector direccional de la normal está dada por los coeficientes de la ecuación cartesiana del plano, es decir:

$$\vec{a} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), z\right), \ z \in \mathbb{R}.$$

Como $\vec{a} \parallel \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), 1\right)$ con $z=1$.

Respuesta: Verdadero

a) Sea $\underset{\text{diferenciable}}{f}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\nabla f_{(a)} \neq \vec{0}$, donde $a \in U$.

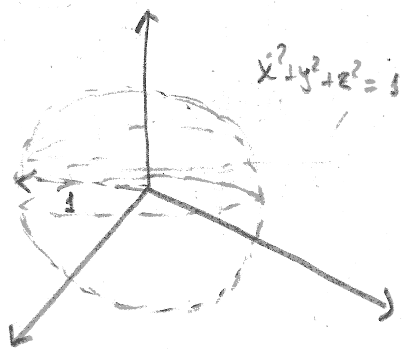
Superficie de nivel de f que pasa por a $= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \vec{0} : f(a) = c \right\} = S$.
$c > 0$

¿ $\langle \nabla f_{(a)}, S \rangle = 0$?

Como f es diferenciable, $\nabla f_{(a)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{(a)} \neq (0,0,0)$

Veamos que ocurre con un $(x,y,z) \in S$.

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a)}_{\neq 0} \cdot \underset{\neq 0}{\underset{\downarrow}{x}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(a)}_{\neq 0} \cdot \underset{\neq 0}{\underset{\downarrow}{y}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}(a)}_{\neq 0} \cdot \underset{\neq 0}{\underset{\downarrow}{z}} \neq 0.$$



Falso.