Segunda práctica dirigida de Cálculo integral CM 132 Ciclo 2017-2

FACULTAD DE CIENCIAS | UNI

Undg. Carlos Alonso Aznarán Laos
E-mail: caznaranl@uni.pe
Science Department, National University of Engineering

Temas: Partición, Sumas superiores e inferiores, Integral superior e inferior, Integral definida, Aproximación de una integral y cota, Suma límite para el área de una región y Teoremas Fundamentales del Cálculo

---

1. Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas. Pruebe que:

   a) $L(f,\mathcal{P}) + L(g,\mathcal{P}) \leq L(f+g,\mathcal{P})$ y

   b) $U(f+g,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}) + U(g,\mathcal{P})$

   para toda partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[a,b]$.

Solución:

a) Sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a,b]$

$$m_i = \inf\{f(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$m_i' = \inf\{g(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Como $m_i \leq f(x) \wedge m_i' \leq g(x) \implies$

$$m_i + m_i' \leq f(x) + g(x)$$
$$m_i + m_i' \leq \inf\{f(x)+g(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$m_i\Delta x_i + m_i'\Delta x_i \leq \underbrace{\inf\{f(x)+g(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}}_{m_i''}\Delta x_i$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i}_{L(f,\mathcal{P})} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i'\Delta x_i}_{L(g,\mathcal{P})} \leq \sum_{i=1}^{n} m_i''\Delta x_i$$

$\therefore L(f,\mathcal{P}) + L(g,\mathcal{P}) \leq L(f+g,\mathcal{P}).$ $\square$

b) Sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a,b]$

$$M_i = \sup\{f(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$M_i' = \sup\{g(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Como $M_i \geq f(x) \wedge M_i' \geq g(x) \implies$

$$M_i + M_i' \geq f(x) + g(x)$$
$$M_i + M_i' \geq \sup\{f(x)+g(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$M_i\Delta x_i + M_i'\Delta x_i \geq \underbrace{\sup\{f(x)+g(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}}_{M_i''}\Delta x_i$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i}_{U(f,\mathcal{P})} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i'\Delta x_i}_{U(g,\mathcal{P})} \geq \sum_{i=1}^{n} M_i''\Delta x_i$$

$$\therefore U(f,\mathcal{P})+U(g,\mathcal{P})\geq U(f+g,\mathcal{P}). \quad \square$$

2. Sea f una función acotada en el intervalo I y sean $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ particiones de I tal que $\mathcal{P}_2$ es un refinamiento de $\mathcal{P}_1$. Demuestre que:

   a) $\|\mathcal{P}_2\| \leq \|\mathcal{P}_1\|$

   b) $L(f,\mathcal{P}_2)-L(f,\mathcal{P}_1)\leq r\,(M-m)\,\|\mathcal{P}_1\|$ y $U(f,\mathcal{P}_1)-U(f,\mathcal{P}_2)\leq r\,(M-m)\,\|\mathcal{P}_1\|$, si $\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_1$ tiene r puntos. ($M=\sup(f)$ y $m=\text{ínf}(f)$).

Solución:

Recordemos la definición de refinamiento:

Definición. *Refinamiento*
*Una partición $\mathcal{Q}$ de $[a,b]$ es un **refinamiento** de la partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ si $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{Q}$.*

En nuestro ejercicio $\mathcal{P}_1\subseteq\mathcal{P}_2$.
Caso 1: $\mathcal{P}_1\cup\{s\}$
$\mathcal{P}_1=\{x_0=a<x_1<\cdots<x_{i_0}<x_{i_0+1}<\cdots<x_n\}$
$\mathcal{P}_2=\{x_0=a<x_1<\cdots<x_{i_0}<s<x_{i_0+1}<\cdots<x_n\}$
Definimos los siguientes conjuntos:
$A=\{x_i-x_{i-1}\}$ para cada $i=1,\cdots,n$.
$B=\{x_i-x_{i-1}\}$ para cada $i=1,\cdots,n$ y $i\neq i_{0+1}$.
Sea $\delta\in B$, se tiene dos casos:

- Si $\delta=x_i-x_{i-1}$, para cierto $i\neq i_{0+1}$.
  $\implies \delta\in A \implies \delta\leq \text{máx}\,A \implies \delta\leq\|\mathcal{P}_1\|$.

- Si $\delta\in\{s-x_{i_0}, x_{i_0+1}-s\}$
  $\implies \delta< x_{i_0+1}-x_{i_0}\leq \text{máx}\,A \implies \delta<\|\mathcal{P}_1\|$.
  $\implies \forall\delta\in B:\delta\leq\|\mathcal{P}_1\|$
  $\text{máx}=\|\mathcal{P}_2\leq\mathcal{P}_1\|$.

3. Sea $f\colon\ [-1,4]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}x+2, & -1\leq x\leq 0\\ x, & 0<x\leq 1\\ 1+\sqrt{x}, & 1<x\leq 4\end{cases}$$

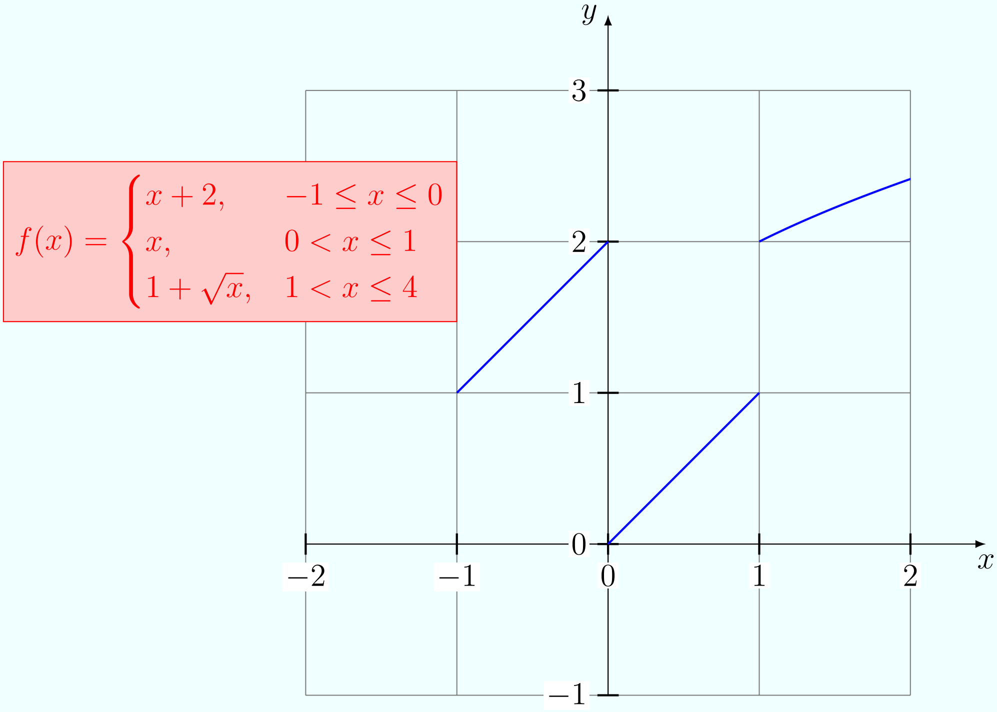
   y $\mathcal{P}=\{-1,0,1,3,4\}$ una partición de $[-1,4]$.

   a) Halle $m_i(f)$ y $M_i(f)$ para cada $1\leq i\leq 4$.

   b) Calcule $U(f,\mathcal{P})$ y $L(f,\mathcal{P})$.

   c) Halle una cota de error cometido al aproximar el valor de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ con la partición $\mathcal{P}$.

Solución:



Sabemos que

$$\boxed{m_i = \text{ínf}\{f(x) \colon t \in [x_{i-1}, x_i]\}}$$

$$\boxed{M_i = \sup\{f(x) \colon t \in [x_{i-1}, x_i]\}}$$

Entonces:

$m_1 = \text{ínf}\{f(x) \colon -1 \leq x \leq 0\} = \text{ínf}\{[1,2]\} = 1.$
$m_2 = \text{ínf}\{f(x) \colon 0 < x \leq 1\} = \text{ínf}]0,1] = 0.$
$m_3 = \text{ínf}\{f(x) \colon 1 < x \leq 3\} =$
$m_4 = \text{ínf}\{f(x) \colon 3 < x \leq 4\} =$

4. Mediante particiones regulares y por un proceso de límite, hallar el valor exacto de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^3 (x^2 + 4x + 5)\,\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_1^2 (4x^3 - 3x^2)\,\mathrm{d}x.$

Solución:

a) Sea $f(x) = x^2 + 4x + 5$. Sabemos que f es integrable en $[0,3]$, entonces es continua allí.
Sea $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ una partición que subdivide $[0,3]$ en n subintervalos de igual longitud.
Entonces $\|\mathcal{P}_n\| = \dfrac{3-0}{n} = \dfrac{3}{n}$ y para cada $k = 1, 2, \cdots, n$.

$$x_i = 0 + \frac{3}{n} \cdot k \quad \text{y} \quad \Delta x_k = \frac{3}{n}$$

En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, escogemos la etiqueta $x_i^* = x_i$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(f, \mathcal{P}_n^*) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k. \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{3k}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{3k}{n}\right) + 5 \right] \Delta x_k. \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{9k^2}{n^2} + \frac{12k}{n} + 5 \right] \frac{3}{n}. \\
&= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[5 + \frac{12k}{n} + \frac{9k^2}{n^2} \right]. \\
&= \frac{3}{n} \left[5\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 \right]. \\
&= \frac{3}{n} \left[5 \cdot n + \frac{12}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} + \frac{9}{n^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6} \right]. \\
&= 15 + 18 \cdot \frac{n+1}{n} + \frac{9}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n}.
\end{aligned}
$$

Calculando el

$$
\lim_{n\to\infty} \mathcal{R}(f, \mathcal{P}_n^*) = \lim_{n\to\infty} \left[15 + 18\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) \right] = 15 + 18 + \frac{9}{\cancel{2}} \cdot 1 \cdot \cancel{2} = 42.
$$

b) Sea $f(x) = 4x^3 - 3x^2$. Sabemos que f es integrable en $[1, 2]$, entonces es continua allí.
Sea $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ una partición que subdivide $[1, 2]$ en n subintervalos de igual longitud.
Entonces $\|\mathcal{P}_n\| = \dfrac{2-1}{n} = \dfrac{1}{n}$ y para cada $k = 1, 2, \cdots, n$.

$$
x_i = 1 + \frac{1}{n} \cdot k \quad \text{y} \quad \Delta x_k = \frac{1}{n}
$$

En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, escogemos la etiqueta $x_i^* = x_i$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(f, \mathcal{P}_n^*) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k. \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[4\left(1+\frac{k}{n}\right)^3 - 3\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\right]\frac{1}{n}. \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[4\left(1^3 + 3\cdot 1^2\cdot\left(\frac{k}{n}\right) + 3\cdot 1\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \left(\frac{k}{n}\right)^3\right) - 3\left(1^2 + 2\cdot 1\cdot\left(\frac{k}{n}\right) + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right]. \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[1 + 6\left(\frac{k}{n}\right) + 9\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \left(\frac{k}{n}\right)^3\right]. \\
&= \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^3\right]. \\
&= \frac{1}{n}\left[n + \frac{6}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n}(n+1)}{2} + \frac{9}{n^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n^{\cancel{3}}}\cdot\frac{\cancel{n^2}(n+1)^2}{4}\right]. \\
&= 1 + 3\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\left(\frac{2n+1}{n}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

5. Expresar los siguientes límites como una integral definida.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{8i^2}{n^3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{i}{n}\right)}{n+i}$

Solución:

Teorema 1. *Sea* $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$. *$f$ es integrable sii* $\exists \lim\limits_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_u)(x_i - x_{i-1})$ *donde* $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.

$\xi_1 \in [x_i, x_{i-1}]$ *en cualquiera. En particular,* $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)$

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] = \left[a + \frac{(i-1)}{n}(b-a), a + \frac{(b-a)}{n}i\right]$

a)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{i}{n}\right)}{n+i} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_u)\left(\frac{b-a}{n}\right)
\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{i}{n}\right)}{n+i}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_u)\left(\frac{b-a}{n}\right)
\end{aligned}
$$

6. Expresar el límite de cada suma como una integral definida.

   a) $\displaystyle\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-x_{i-1}^2\right)$, P partición de $[-3,10]$.

   b) $\displaystyle\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(1-x_i-x_{i-1})$, P partición de $[0,1]$.

   c) $\displaystyle\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(a+\frac{i-1}{n}(b-a)\left[a+\frac{i}{n}(b-a)\right]\right)$, P partición de $[a,b]$.

7. ¿Cuán pequeño debe ser $|\mathcal{P}|$ para que el error en la aproximación de sea menor que …?

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(t)\,\mathrm{d}t$

   b) $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}t}{t}$

8. Sea f integrable sobre $[a,b]$. Pruebe que f es integrable sobre todo $[c,d]\subset[a,b]$.

9. Sea $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ acotada, pruebe que

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\overline{\int_a^b}|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

10. Sea $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ 1-x, & x\in\mathbb{I}.\end{cases}$$

    Analice la integrabilidad de f en $[0,1]$.

11. Sea $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ integrable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) $\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x=0.$

    b) Si f es continua en $c\in[a,b]$, entonces $f(c)=0$.

12. Sean f y g continuas sobre $[a,b]$ con $f(x)\leq g(x),\forall x\in[a,b]$. Si existe algún $x_0\in[a,b]$ tal que $f(x_0)<g(x_0)$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x<\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

13. Demuestre que $\displaystyle\int_0^x|t|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x|x|,\forall x\in\mathbb{R}$.

Solución:

$$f\colon \begin{cases} \displaystyle\int_0^x -t\,\mathrm{d}t & ,x<0 \\ \displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{d}t & ,x\geq 0 \end{cases} \qquad f\colon \begin{cases} -\dfrac{1}{2}t^2\Big|_0^x & ,x<0 \\ \dfrac{1}{2}t^2\Big|_0^x & ,x\geq 0 \end{cases} \qquad f\colon \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 & ,x<0 \\ \dfrac{1}{2}x^2 & ,x\geq 0 \end{cases}$$

$\therefore f \mapsto \dfrac{1}{2}x|x|; \forall x \in \mathbb{R}.$

14. Halle el valor de $c \in \mathbb{R}$ tal que si $f(x) = x^2 - 2x + 1$, se tiene que $f(c) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

15. Halle el área de la región limitada por la parábola $y = 6 + 4x - x^2$ y el segmento determinado por los puntos $P(-2,6)$ y $Q(4,6)$.

16. Sea $y = f(x)$ una función tal que bajo su gráfica y sobre el eje X determina una región de área:

$$A(x) = (1+3x)^{1/2} - 1, \quad \text{para cada} \quad x \geq 0.$$

Calcule el valor medio de $f(x)$ para cada $1 \leq x \leq 8$.

17. Calcular:

a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_1^{x+1} \operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t - \int_1^x \operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t\right].$

b) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_1^{x} \operatorname{sen}^2 t\,\mathrm{d}t - \int_1^{x+h} \cos^2 t\,\mathrm{d}t - x\right].$

Solución:

a)

b) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_1^{x} \operatorname{sen}^2 t\,\mathrm{d}t - \int_1^{x+h} \cos^2 t\,\mathrm{d}t - x\right].$

$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_1^{x} \operatorname{sen}^2 t\,\mathrm{d}t - \left(\int_1^{x+h} \cos^2 t\,\mathrm{d}t\right) - x\right].$

$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_1^{x} \operatorname{sen}^2 t\,\mathrm{d}t - \left(\int_1^{x} \cos^2 t\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+h} \cos^2 t\,\mathrm{d}t\right) - x\right].$

$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_1^{x} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t - \left(\int_1^{x} \cos^2 t\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+h} \cos^2 t\,\mathrm{d}t\right) - x\right].$

18. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b f(xt)\,\mathrm{d}t = 0$. Mostrar que $f \equiv 0$.

19. Sea $f\colon\ [0,1] \longrightarrow [0,\infty[$ una función continua tal que

$$f^2(t) \leq 1 + 2\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \quad ; \forall t \in [0,1]\,.$$

Probar que $f(t) \leq 1 + t, \quad \forall t \in [0,1]$.

20. Sea $f\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f(1)=1$ y

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}$$

Probar que $\lim\limits_{x\to\infty}$ existe y es menor que $1+\dfrac{\pi}{4}$.

21. Sea $f\colon\ [0,a]\to\mathbb{R}$ una función continua. Probar que

$$\int_0^x\left(\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y=\int_0^x (x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

22. Probar que la función

$$I(t)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x^4+t^4)^{1/4}}+\ln t$$

es tal que $I(t)\geq \ln(1+t)\geq 0,\quad \forall t\geq 0$, y que $I'(t)\geq 0$.

23. Si f es una función continua, pruebe que

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x.$$

24. Sea f una función derivable en

$$f(1)=1=f'(1)=f''(1)=1.$$

Se define la función

$$G(x)=\int_0^{f(x)} x f(u)\,\mathrm{d}u$$

Hallar $G''(1)$.

Solución:
Bien, del dato f es una función derivable en $x=1$. (¡Y continua también!).
Además, $G(x)=\displaystyle\int_0^{f(x)} x f(u)\,\mathrm{d}u$ es igual a $G(x)=x\displaystyle\int_0^{f(x)} f(u)\,\mathrm{d}u$, pues x es constante con respecto a la variable de integración u.
Derivamos la función G:

$$\begin{aligned}
G(x)' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^{f(x)} x f(u)\,\mathrm{d}u\right] && \text{Operador derivada}\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\int_0^{f(x)} f(u)\,\mathrm{d}u\right] && \text{De la primera observación}\\
&= x'\left[\int_0^{f(x)} f(u)\,\mathrm{d}u\right]+x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^{f(x)} f(u)\,\mathrm{d}u\right] && \text{Regla del producto para derivadas}\\
&= 1\cdot F(f(x))+x\cdot f(f(x))\cdot f(x)'. && \text{Por el Teorema Fundamental del Cálculo}
\end{aligned}$$

Derivamos nuevamente:

$$
\begin{aligned}
G(x)'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[G(x)'\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[F(f(x)) + x \cdot f(f(x)) \cdot f(x)'\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[F(f(x))\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x \cdot f(f(x)) \cdot f(x)'\right] \\
&= F'(f(x)) \cdot f(x)' + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x]\, f(f(x)) \cdot f(x)' + x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(f(x))]\, f(x)' + x \cdot f(f(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)'\right] \\
&= F'(f(x)) \cdot f(x)' + f(f(x)) \cdot f(x)' + x \cdot f'(f(x)) \cdot f(x)' \cdot f(x)' + x \cdot f(f(x)) \cdot f(x)''.
\end{aligned}
$$

Ahora evaluamos en $x = 1$.

$$
\begin{aligned}
G'(x)|_{x=1} &= F'(f(1)) \cdot f(1)' + f(f(1)) \cdot f(1)' + x \cdot f'(f(1)) \cdot f(1)' \cdot f(1)' + 1 \cdot f(f(1)) \cdot f(1)'' \\
&= F'(1) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + 1 \cdot f'(1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot f(1) \cdot 1 \\
&= F'(1) + f(1) + f'(1) + f(1) \\
&= f(1) + 1 + 1 + 1 \\
\therefore G'(x)|_{x=1} &= 1 + 1 + 1 = 4 \quad \square
\end{aligned}
$$

Facultad de Ciencias, 13 de septiembre del 2017.

Referencias

[1] Charles G Denlinger. *Elements of real analysis*. Jones & Bartlett Publishers, 2011.