FACULTAD DE CIENCIAS | UNI

Primera práctica calificada de Cálculo integral CM 132 Ciclo 2017-2

Undg. Carlos Alonso Aznarán Laos
E-mail: caznaranl@uni.pe
Science Department, National University of Engineering

Temas: Antiderivadas. Integral Indefinida. Propiedades básicas de la integral.

---

1. (5 Puntos) Se sabe que la recta tangente a la gráfica de una función f en cada punto $(x, f(x))$ tiene como pendiente al número real $\dfrac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$. Determine la regla de correspondencia de f sabiendo que su gráfica contiene al punto $\left(0, \dfrac{709}{280}\right)$.

Solución:

Llamemos $f' = \dfrac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$, pues nos da la regla de correspondencia de la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de f. Nos interesa hallar

$$\begin{aligned} f = \int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,\mathrm{d}x. \\ &= \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}\,\mathrm{d}x + \int (1+x)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Integramos por partes la integral de color **verde**

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & \mathrm{d}v = (1+x)^{-1/3}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x & v = \dfrac{3}{2}(1+x)^{2/3} \end{array}$$

y en la integral de color azul **azul** realizamos la u- *sustitución*

$$\begin{array}{ll} u = (1+x)^{1/6} & \\ u^6 = 1+x & \implies 6u^5\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore f = \int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}\,\mathrm{d}x + \int (1+x)^{1/6}\,\mathrm{d}x. \\ &= x^2\cdot\frac{3}{2}(1+x)^{2/3} - \int \frac{3}{\cancel{2}}(1+x)^{2/3}\cdot\cancel{2}x\,\mathrm{d}x + \int u\cdot 6u^5\,\mathrm{d}u. \\ &= \frac{3}{2}\cdot x^2\cdot(1+x)^{2/3} - 3\int x\cdot(1+x)^{2/3}\,\mathrm{d}x + 6\int u^6\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Integramos por partes la integral de color morado

$$\begin{array}{ll} u = x & \mathrm{d}v = (1+x)^{2/3}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = \dfrac{3}{5}(1+x)^{5/3} \end{array}$$

$$\therefore f=\int\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\cdot x^2\cdot(1+x)^{2/3}-3\int x\cdot(1+x)^{2/3}\,\mathrm{d}x+6\int u^6\,\mathrm{d}u.$$

$$=\frac{3}{2}\cdot x^2\cdot(1+x)^{2/3}-3\left[x\cdot\frac{3}{5}(1+x)^{5/3}-\int\frac{3}{5}(1+x)^{5/3}\,\mathrm{d}x\right]+6\int u^6\,\mathrm{d}u.$$

$$=\frac{3}{2}\cdot x^2\cdot(1+x)^{2/3}-\frac{9}{5}x\cdot(1+x)^{5/3}+\frac{9}{5}\int(1+x)^{5/3}\,\mathrm{d}x+6\cdot\frac{u^7}{7}+C_1.$$

$$=\frac{3}{2}\cdot x^2\cdot(1+x)^{2/3}-\frac{9}{5}x\cdot(1+x)^{5/3}+\frac{9}{5}\cdot\frac{3}{8}(1+x)^{8/3}+\frac{6}{7}(1+x)^{7/6}+K.$$

Pero $\left(0,\dfrac{709}{280}\right)\in$ gráf (f), entonces $f(0)=\dfrac{709}{280}$.

$$\implies f(0)=\frac{3}{2}\cdot\cancelto{0}{0^2\cdot(1+0)^{2/3}}-\frac{9}{5}\cdot\cancelto{0}{0\cdot(1+0)^{5/3}}+\frac{9}{5}\cdot\frac{3}{8}\cancelto{1}{(1+0)^{10/3}}+\frac{6}{7}\cancelto{1}{(1+0)^{7/6}}+K=\frac{709}{280}.$$

$\therefore K=1.$

Finalmente la regla de correspondencia de f es:

$$\begin{aligned} f\colon\ [-1,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \frac{3}{2}\cdot x^2\cdot(1+x)^{2/3}-\frac{9}{5}x\cdot(1+x)^{5/3}+\frac{9}{5}\cdot\frac{3}{8}(1+x)^{8/3}+\frac{6}{7}(1+x)^{7/6}+1. \qquad \square\end{aligned}$$

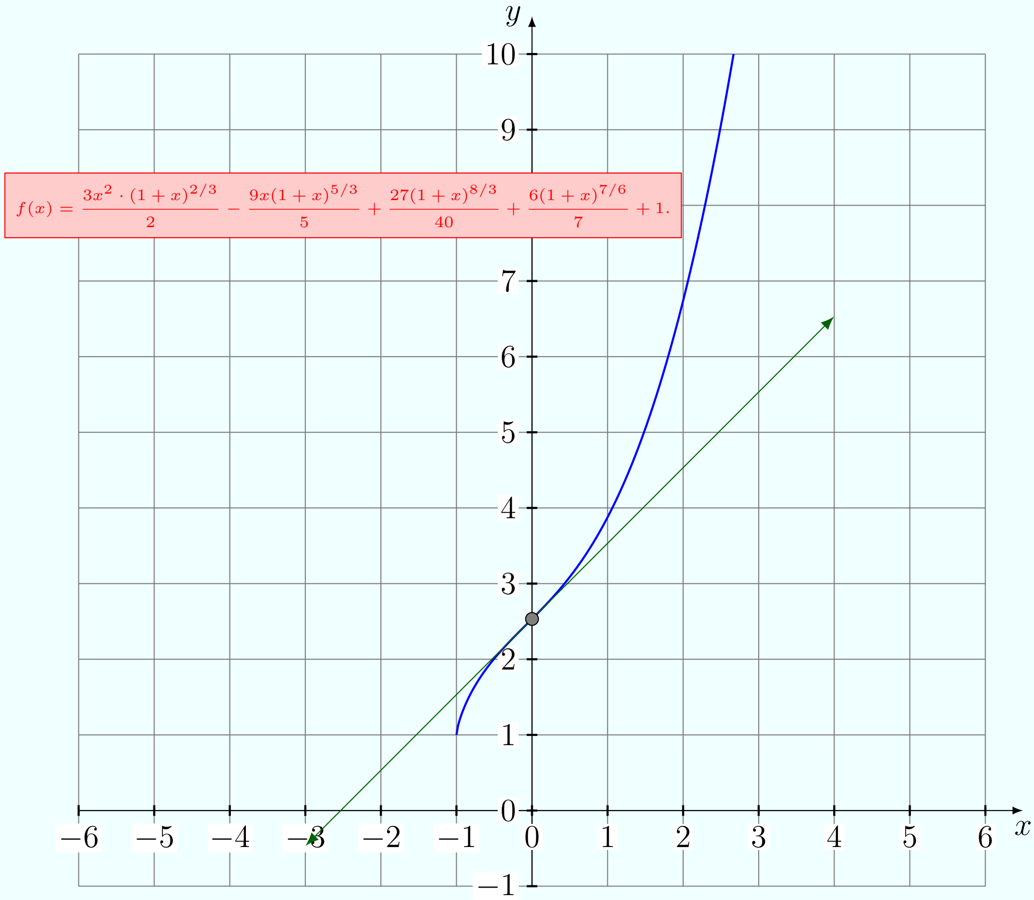

Figura 1: La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $\left(0,\dfrac{709}{280}\right)$ es $f'(0)=1$.

2. (5 Puntos) Si $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$ entonces integre por partes $I_n - I_{n-1}$ para demostrar que

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right].$$

Solución:

Podemos hallar la expresión pedida $I_n - I_{n-1}$ o sino ...
Otra manera es empezar con I_n y obtener la forma $I_n - I_{n-1}$, es decir,

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x && \text{sumamos y restamos } x^2 \\ &= \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x && \text{propiedad distributiva} \end{aligned}$$

Integremos por partes la integral rosada.

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & \mathrm{d}v = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = ¿? \end{array}}$$

Hallemos $v = \displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$ con la u-sustitución

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x^2 \\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \end{array}}$$

Luego,

$$\boxed{\begin{array}{l} v = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^n} = \frac{1}{2}\int (1+u)^{-n}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+u)^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{2\cdot(1-n)}\cdot\frac{1}{(1+u)^{n-1}} \\ \therefore v = \dfrac{1}{2\cdot(1-n)}\cdot\dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \end{array}}$$

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x\cdot x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x \\ &= I_{n-1} - \left[\frac{x}{2\cdot(1-n)}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{1}{2\cdot(1-n)}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}x\right] \\ &= I_{n-1} - \frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \\ &= I_{n-1} - \frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right)I_{n-1} - \frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} \\ &= \left(\frac{2n-2-1}{2(n-1)}\right)I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right]. \quad \square \end{aligned}$$

3. (5 Puntos) Calcule $\displaystyle\int \sec(\sqrt{\operatorname{sen} x})\tan(\sqrt{\operatorname{sen} x})\sqrt{\cot x}\sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}x$

Solución:

La integral anterior se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
I &= \int \sec(\sqrt{\operatorname{sen} x})\tan(\sqrt{\operatorname{sen} x})\sqrt{\cot x}\sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \sec(\sqrt{\operatorname{sen} x})\tan(\sqrt{\operatorname{sen} x}) \cdot \sqrt{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} \cdot \sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \sec(\sqrt{\operatorname{sen} x})\tan(\sqrt{\operatorname{sen} x}) \cdot \frac{\sqrt[\cancel{2}]{\cos x^{\cancel{2}}}}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \sec(\sqrt{\operatorname{sen} x})\tan(\sqrt{\operatorname{sen} x}) \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Realicemos la u-sustitución:

$$\boxed{\begin{aligned}
u &= \sqrt{\operatorname{sen} x} \\
\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}}$$

Reemplazando en la integral I:

$$\begin{aligned}
I &= \int \sec(\sqrt{\operatorname{sen} x})\tan(\sqrt{\operatorname{sen} x}) \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \sec u \tan u \cdot (2\,\mathrm{d}u) \\
&= 2\int (\mathrm{d}\sec u) \\
&= 2\sec u + K
\end{aligned}$$

$\therefore I = 2\sec(\sqrt{\operatorname{sen} x}) + K.$ $\square$

4. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones que satisfacen

   I) $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = xf(x) + 1.$

   II) $\forall x, y \in \mathbb{R}, g(x+y) = g(x)g(y).$

   III) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1.$

   Pruebe que

   (a) (2 Puntos) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x} = 1.$

   (b) (2 Puntos) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g(x).$

   (c) (1 Punto) $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x = g(x) + C.$

Solución:

Para probar el item (a) de (I) y (III) tenemos

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\colon g(x) &= xf(x)+1\\ g(x)-1 &= xf(x)\\ \frac{g(x)-1}{x} &= f(x)\end{aligned}$$

Pero de la hipótesis $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1^{\dagger}$, entonces $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-1}{x} = 1.$ $\square$

Para probar el item (b) de (II) tenemos la siguiente ecuación funcional

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\colon g(x+y) = g(x)g(y).$$

En particular para $y = h$.

$$g(x+h) = g(x)g(h) \tag{1}$$

Restemos $g(x)$ a (1):

$$g(x+h) - g(x) = g(x)g(h) - g(x) \tag{2}$$

Dividamos por $\dfrac{1}{h}$ a (2):

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{g(x)g(h)-g(x)}{h} \tag{3}$$

Tomemos el $\lim\limits_{h\to 0}$ de (3)

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x)g(h)-g(x)}{h} \tag{4}$$

Pero

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)g(h)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[g(x)\cdot\left(\frac{g(h)-1}{h}\right)\right]\end{aligned}$$

¡Un momento! Por propiedad de límites de funciones reales de variable real, el límite del producto es igual al productos de los límites sii el límite de cada uno de los factores existe.

Además de (I) cuando $x = 0$: $g(0) = 0\cdot f(0) + 1 = 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}[g(x)]\cdot\lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{g(h)-1}{h}\right)\right] && \text{sustitución } h \text{ por } x\\ &= g(x)\cdot\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{g(x)-1}{x}\right)\right] \longrightarrow 1 && \text{del inciso (a)}\\ &= g(x)\cdot 1\\ &= g(x).\end{aligned}$$

$\square$

Para probar el item (c) es necesario ver que se verifique la definición de antiderivada $g'(x) = g(x)\forall x \in \mathbb{R}$.

Pero del ítem (b) tenemos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[g(x)] \tag{5}$$

Luego por la propiedad realizada en clase sobre antiderivadas:

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)]\,\mathrm{d}x = f(x) + K.$$

Entonces, de la propiedad anterior y de (5) tenemos:

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[g(x)]\,\mathrm{d}x = g(x) + K. \quad \square$$

†

Augustin-Louis Cauchy estudió varias ecuaciones funcionales, entre ellas las siguientes:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{6}$$

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \tag{7}$$

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \tag{8}$$

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y) \tag{9}$$

a las soluciones de (6) se les conoce como *funciones aditivas*.
Cauchy demostró en [3] que cualquier función aditiva es continua en todas partes, pero Darboux debilitó esta condición asegurando que si f es continua en 0, entonces f es continua en todas partes.
También la ecuación funcional (6) puede llevarse al caso (7) heredando sus propiedades. Del ejercicio 4 podemos probar que la derivada de g en 0 existe.
En efecto, de (I):

$$g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$$

Para $x = 0$,

$$\begin{aligned} g'(0) &= f(0) + 0 \cdot f'(0) \\ g'(0) &= f(0) + 0 \\ g'(0) &= f(0) \\ 1 &= f(0) \\ \therefore g(0) &= f(0) = 1. \end{aligned}$$

pero de (a) tenemos que $g'(0) = 1$. ¿Por qué?

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0) = 1$$

Además, f es continua en $0 \implies g$ es continua en 0.
Por lo tanto, g es continua en 0, por el teorema de Darboux, g es continua en $\mathbb{R}$.

Teorema 1 (Darboux)**.** *Si f es solución de (7) y es continua en 0, entonces f es continua en todas partes.*

Supongamos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$, entonces

$$f(x+c) = f(x)f(c) = 0.$$

Como todo número real se puede escribir como $y = x + c$ para algún real x, la función es o bien cero en cualquier parte o cero en ninguna parte. No es difícil probar que las funciones constantes son continuas, por lo tanto el último caso es el más interesante, consideremos la otra posibilidad en el que la función g no es constante $g = 0$. Para probar la continuidad en este caso, note que para cualquier $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = g(x+0) = g(x)g(0) \implies g(0) = 1.$$

La continuidad en 0 nos dice que dado un $\varepsilon_0 > 0$, podemos encontrar un $\delta_0 > 0$ tal que $|x - 0| < \delta_0 \implies |f(x) - 1| < \varepsilon_0$. De acuerdo, sea $c \in \mathbb{R}$ fijo y arbitrario (recuerde que $f(c) \neq 0$). Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de f en 0, podemos escoger $\delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \delta \implies |f(x-c) - 1| < \frac{\varepsilon}{|f(c)|}.$$

Ahora observe que para todo x tal que $|x - c| < \delta$, tenemos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &= |f(x-c+c) - f(c)| \\ &= |f(x-c) \cdot f(c) - f(c)| \quad \text{por propiedad de la ecuación funcional (7)} \\ &= |f(c)||f(x-c) - 1| \\ &< |f(c)|\frac{\varepsilon}{|f(c)|} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

†(¡0 es un punto de acumulación!)

Teorema 2. *Supongamos que f es continua en un punto o acotada en algún conjunto de medida positiva y f es solución de (7) , entonces o bien f es idénticamente nula o existe una constante c tal que*

$$f(x) = e^{cx} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Supongamos que existe un valor x_0 tal que $f(x_0) = 0$. Entonces de (6) implica que:

$$\begin{aligned} f(x) &= f((x - x_0) + x_0) \\ f(x) &= f((x - x_0)) \cdot f(x_0) \\ &= f((x - x_0)) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Veremos que la única función que satisface la ecuación funcional
Para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos

$$g(x) = g(x + 0) = g(x)g(0),$$

así que $g(x)(1 - g(0)) = 0$. Así que $g(x) = 0$ para todo x, en el caso q
De (I), si derivamos con respecto a x, obtenemos

$$g'(x) = f(x) + xf'(x)$$

Evaluamos para $x = 0$.

$$g'(0) = f(0) + 0f'(0)$$

Pero de (I), $g'(0) = 1$.

$$1 = f(0)$$

Por lo tanto f es continua en c. Dado que c fue arbitrario, f es continua en todos los reales. $\square$

Teorema 3 (Función exponencial)**.** *La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con regla $f(x) = \exp(cx)$ satisface la ecuación (7).*

También si dado

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

tomamos la derivada parcial con respecto a x

$$f'(x + y)(1) = f(y)f'(x)$$

Reemplazando $x = 0$.

$$f'(0 + y)(1) = f(y)f'(0)$$
$$f'(y) = f(y)f'(0)$$

Reemplazando y por x:

$$f'(x) = f(x)f'(0)$$

¡Tenemos una ecuación diferencial de variables separables!

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = cy; \text{ donde } c = f'(0) \text{ y } f(x) = y.$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = c \int \mathrm{d}x$$
$$\ln |y| = cx + K.$$

Tomamos antilogaritmo

$$y = e^{cx+K}$$
$$y = e^{cx}e^{k}$$

Si tomamos $x, y = 0$:

$$f(0+0) = f(0) \cdot f(0) \implies f(0) = f(0)^2 \implies f(0) = 0 \quad \vee \quad f(0) = 1.$$

Pero sabemos que la función $\exp(x)$ en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ es analítica, pero también es positiva.
$\implies f(x) \neq 0 \implies f(0) = 1 \implies 1 = e^{0 \cdot x} e^k \implies e^k = 1.$
$\therefore f(x) = e^{cx}. \quad \square$
Nuestros números son reales $\mathbb{R}$ en [2] se muestra un ejemplo en $\mathbb{C}$ y surge la pregunta: ¿Existe una función aditiva no lineal que implique la existencia una base de Hamel en $\mathbb{R}$? De hecho, es un problema abierto. La recíproca sí es verdadero, al menos eso se menciona en el diagrama de la página 156 del libro [1].
La lista de consecuencias del Axioma de elección es abismal, para más información ver [4].

Facultad de Ciencias, 8 de septiembre del 2017.

Referencias

[1] Horst Herrlich (auth.). *Axiom of Choice*. Lecture Notes in Mathematics 1876. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2006.

[2] Wilson Alberto Cabanillas Banda and José Gilmer Vera Rubio. La ecuación funcional aditiva de cauchy de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Bachelor thesis, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Escuela de Pregrado. Mención: Matemáticas, May 2017.

[3] Augustin-Louis Cauchy. Cours d'analyse de l'ecole royale polytechnique, 1.: Analyse algebrique. *Paris: Imprim. Royale, 1821; XIV, 576 p.; in 8.; DCCC. 4.85*, 1, 1821.

[4] Paul Howard and Jean E Rubin. *Consequences of the Axiom of Choice*, volume 1. American Mathematical Society, 1998.

[5] Prasanna K Sahoo and Palaniappan Kannappan. *Introduction to functional equations*. CRC Press, 2011.