Demostración Aplicando la Definición (7.19) y el Teorema (7.15),

$$D_x\,(a^x) = D_x\,(e^{x \ln a}) = e^{x \ln a}\, D_x\,(x \ln a) = e^{x \ln a}(\ln a).$$

Usando de nuevo (7.19), se obtiene que

$$D_x\,(a^x) = a^x \ln a.$$

Esto demuestra (i). La fórmula (ii) se deduce de la Regla de la Cadena. • •

Nótese que si $a = e$, entonces el Teorema (7.21)(i) se reduce a (7.14) puesto que $\ln e = 1$.

Si $a > 1$, entonces $\ln a > 0$ y por lo tanto $D_x(a^x) > 0$. Resulta entonces que a^x es creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $a > 1$.

Si $0 < a < 1$, entonces $\ln a < 0$ y $D_x(a^x) < 0$. Por tanto, a^x es decreciente para todo x cuando $0 < a < 1$.

FIGURA 7.13

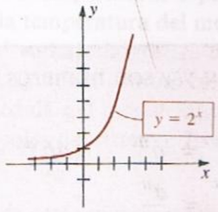
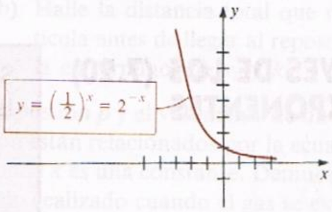


FIGURA 7.14



Las gráficas de $y = 2^x$ y $y = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$, en las Figuras 7.13 y 7.14 pueden trazarse situando puntos. La gráfica de $y = a^x$ tiene la forma general que se ilustra en la Figura 7.13 o 7.14 si $a > 1$ o bien $0 < a < 1$, respectivamente.

EJEMPLO 1 Determinar y' para $y = 3^{\sqrt{x}}$.

Solución Usando el Teorema (7.21)(ii) con $a = 3$ y $u = \sqrt{x}$,

$$y' = (3^{\sqrt{x}} \ln 3)\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) = \frac{3^{\sqrt{x}} \ln 3}{2\sqrt{x}} \quad \bullet$$

Si $u = g(x)$, *es muy importante distinguir las expresiones de la forma* a^u de las de la forma u^a. Para derivar a^u se usa (7.21), pero para derivar u^a hay que utilizar la Regla de la Potencia, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Hallar y' para $y = (x^2 + 1)^{10} + 10^{x^2+1}$.

Solución Usando la Regla de la Potencia para Funciones y el Teorema (7.21),

$$\begin{aligned} y' &= 10(x^2 + 1)^9(2x) + (10^{x^2+1} \ln 10)(2x) \\ &= 20x[(x^2 + 1)^9 + 10^{x^2} \ln 10]. \quad \bullet \end{aligned}$$

La fórmula de integración en (i) del siguiente teorema puede verificarse demostrando que el integrando es la derivada de la expresión al lado derecho de la ecuación. La fórmula (ii) se deduce del Teorema (7.21) (ii).

TEOREMA (7.22)

(i) $\int a^x\,dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^x + C$

(ii) $\int a^u\,du = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^u + C$ para $u = g(x)$.

EJEMPLO 3 Evaluar $\int 3^{x^2}x\,dx$.

Solución Hacemos la sustitución

$$u = x^2, \qquad du = 2x\,dx$$

y procedemos como sigue:

$$\int 3^{x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int 3^{x^2}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int 3^u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln 3}\right)3^u + C = \left(\frac{1}{2\ln 3}\right)3^{x^2} + C \quad \bullet$$

EJEMPLO 4 Los oceanógrafos estudian la cantidad de luz que penetra en las profundidades del mar. La *ley de Beer-Lambert* afirma que la cantidad de luz (equivalente) (en cal/cm²/s) que llega a una profundidad x (en metros) está dada por $I(x) = I_0a^x$, donde a es una constante positiva.

(a) ¿Cuál es el significado de I_0?

(b) Demostrar que la tasa de variación dI/dx a una profundidad x es directamente proporcional a $I(x)$.

(c) Calcular aproximadamente la cantidad media de luz que hay entre la superficie del océano y 5 m de profundidad suponiendo que $a = 0.4$ e $I_0 = 10$.

(d) Demostrar que $I(x) = I_0e^{kx}$ para una constante k.

Solución

(a) Si $x = 0$, entonces $I(0) = I_0a^0 = I_0$. Por lo tanto, I_0 es la cantidad (o intensidad) de luz en la superficie del océano.

(b) Derivando $I(x)$,

$$I'(x) = I_0(a^x \ln a) = (\ln a)(I_0a^x) = (\ln a)I(x).$$

Por lo tanto, la razón de cambio dI/dx a una profundidad x es directamente proporcional a $I(x)$ y la constante de proporcionalidad es $\ln a$.

(c) Si $I(x) = 10(0.4)^x$, entonces por la Definición (5.21), el valor medio de I (o sea I_{med}) en el intervalo $[0, 5]$ es

$$I_{\text{med}} = \frac{1}{5-0}\int_0^5 10(0.4)^x\,dx = 2\int_0^5 (0.4)^x\,dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{\ln(0.4)}(0.4)^x\right]_0^5 = \frac{2}{\ln(0.4)}\left[(0.4)^5 - (0.4)^0\right] = \frac{-1.9795}{\ln(0.4)} \approx 2.16$$

(d) Usando la Definición (7.19),

$$I(x) = I_0 a^x = I_0 e^{x \ln a} = I_0 e^{kx}$$

con $k = \ln a$. •

Si $a \neq 1$ y $f(x) = a^x$, entonces f es una función biunívoca. Su función inversa se denota por $\log_a$ y se llama *función logaritmo en base a*. Otra manera de enunciar esta relación es la siguiente.

DEFINICIÓN DE (7.23) $\log_a x$

$$y = \log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad x = a^y.$$

La expresión $\log_a x$ se llama **logaritmo en base *a* de *x***. Usando esta terminología, los logaritmos naturales son logaritmos en base e, es decir,

$$\ln x = \log_e x.$$

La demostración de que las leyes de los logaritmos del Teorema (7.7) también son válidas para los logaritmos en base a, se deja como ejercicio.

Para obtener la relación entre $\log_a$ y ln, se considera $y = \log_a x$ o, equivalentemente, $x = a^y$. Tomando logaritmos naturales en ambos lados de esta última ecuación, se obtiene $\ln x = y \ln a$, o bien $y = (\ln x)/(\ln a)$. Esto demuestra que

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Derivando en ambos miembros de esta ecuación, se llega a (i) del teorema siguiente. Usando la Regla de la Cadena y tomando en cuenta los valores absolutos como en el Teorema (7.16), se obtiene (ii).

TEOREMA (7.24)

(i) $D_x \log_a x = \dfrac{1}{x \ln a}$.

(ii) $D_x \log_a |u| = \dfrac{1}{u \ln a} D_x u \quad$ para $u = g(x) \neq 0$.

Los logaritmos en base 10 son útiles en diversas aplicaciones (véanse los Ejercicios 40-43 y 45) y se llaman **logaritmos comunes**. Para abreviar el símbolo $\log_{10} x$ se usa el símbolo $\mathbf{\log} x$. En el siguiente ejemplo se usa esta notación.

EJEMPLO 5 Evaluar $f'(x)$ para $f(x) = \log \sqrt[3]{(2x+5)^2}$

Solución Utilizando la ley $\log u^r = r \log u$ (véase el Ejercicio 50 (iii)) junto con $(2x+5)^2 = |2x+5|^2$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{3}\log(2x+5)^2 \\ &= \tfrac{1}{3}\log|2x+5|^2 = \tfrac{2}{3}\log|2x+5|. \end{aligned}$$

Ahora usando el Teorema (7.24) (ii) con $a = 10$,

$$f'(x) = \frac{2}{3}\,\frac{1}{(2x+5)\ln 10}\,(2) = \frac{4}{3(2x+5)\ln 10} \quad \bullet$$

Como ya se definieron los exponentes irracionales, se puede considerar la **función potencia general** f dada por $f(x) = x^c$, donde c es cualquier número real. Si c es irracional, entonces por definición, el dominio de f es el conjunto de los números reales positivos. Usando la Definición (7.19) y los Teoremas (7.15) y (7.4),

$$D_x(x^c) = D_x(e^{c\ln x}) = e^{c\ln x} D_x(c\ln x)$$

$$= e^{c\ln x}\left(\frac{c}{x}\right) = x^c\left(\frac{c}{x}\right) = cx^{c-1}.$$

Esto demuestra que la Regla de la Potencia es válida para exponentes tanto racionales como irracionales. También puede generalizarse la Regla de la Potencia para Funciones al caso de exponentes irracionales.

EJEMPLO 6 Determinar dy/dx para **(a)** $y = x^{\sqrt{2}}$, **(b)** $y = (1 + e^{2x})^{\pi}$.

Solución

(a) $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$$

(b) $$\frac{dy}{dx} = \pi(1+e^{2x})^{\pi-1} D_x(1+e^{2x})$$

$$= \pi(1+e^{2x})^{\pi-1}(2e^{2x})$$

$$= 2\pi e^{2x}(1+e^{2x})^{\pi-1} \quad \bullet$$

EJEMPLO 7 Encontrar $D_x y$ para $y = x^x$ y $x > 0$.

Solución Como el exponente en x^x es variable, no puede aplicarse la Regla de la Potencia. El Teorema (7.21) tampoco es aplicable porque la base a no es un número real fijo. Sin embargo, de la Definición (7.19), $x^x = e^{x\ln x}$ para todo $x > 0$ y por lo tanto,

$$D_x(x^x) = D_x(e^{x\ln x}) = e^{x\ln x} D_x(x\ln x)$$

$$= e^{x\ln x}\left[x\left(\frac{1}{x}\right) + (1)\ln x\right] = x^x(1+\ln x).$$

Este problema también puede resolverse de otra manera usando la derivación logarítmica expuesta en la sección anterior. Para ello se toma el logaritmo natural a ambos lados de la ecuación $y = x^x$ y luego se deriva implícitamente como sigue:

$$\ln y = \ln x^x = x\ln x$$

$$D_x(\ln y) = D_x(x\ln x)$$

$$\frac{1}{y} D_x y = 1 + \ln x$$

$$D_x y = y(1+\ln x) = x^x(1+\ln x) \quad \bullet$$

Para terminar esta sección se expresa el número e como un límite.

TEOREMA (7.25) (i) $\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{1/h}=e$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e.$

Demostración Aplicando la fórmula de la derivada (3.4) a $f(x) = \ln x$ y usando las propiedades de los logaritmos, se obtiene

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\frac{x+h}{x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}.$$

Como $f'(x) = 1/x$, para $x = 1$ se tiene

$$1=\lim_{h\to 0}\ln(1+h)^{1/h}.$$

Usando el Teorema (7.12), puede escribirse

$$(1+h)^{1/h}=e^{\ln(1+h)^{1/h}}.$$

Como la función exponencial natural es continua en 1, del Teorema (2.27) se deduce que

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}=\lim_{h\to 0}\left[e^{\ln(1+h)^{1/h}}\right]$$

$$=e^{[\lim_{h\to 0}\ln(1+h)^{1/h}]}=e^1=e.$$

Esto demuestra la parte (i) del teorema. El límite en la parte (ii) se obtiene con el cambio de variable $n = 1/h$. • •

A veces se utilizan las fórmulas del Teorema (7.25) para *definir* el número e. Es instructivo calcular $(1 + h)^{1/h}$ para valores pequeños de h. La siguiente tabla da algunos valores aproximados de esta expresión.

h	$(1+h)^{1/h}$	h	$(1+h)^{1/h}$
0.01	2.704814	−0.01	2.731999
0.001	2.716924	−0.001	2.719642
0.0001	2.718146	−0.0001	2.718418
0.00001	2.718268	−0.00001	2.718295
0.000001	2.718280	−0.000001	2.718283

Con una precisión o aproximación de cinco decimales, $e \approx 2.71828$.

EJERCICIOS 7.5

Ejercicios 1-22: Encuentre $f'(x)$ para la expresión $f(x)$ dada.

1. 7^x **2.** 5^{-x} **3.** 8^{x^2+1} **4.** $9^{\sqrt{x}}$

5. $\log(x^4+3x^2+1)$ **6.** $\log_3|6x-7|$

7. 5^{3x-4} **8.** 3^{2-x^2}

9. $(x^2 + 1)10^{1/x}$
10. $(10^x + 10^{-x})^{10}$
11. $7^{\sqrt{x^4+9}}$
12. $x/(6^x + x^6)$
13. $\log (3x^2 + 2)^5$
14. $\log \sqrt{x^2 + 1}$
15. $\log_5 \left|\dfrac{6x + 4}{2x - 3}\right|$
16. $\log \left|\dfrac{1 - x^2}{2 - 5x^3}\right|$
17. $\log \ln x$
18. $\ln \log x$
19. $x^e + e^x$
20. $x^\pi \pi^x$
21. $(x + 1)^x$
22. x^{x^2+4}

Ejercicios 23-34: Evalúe la integral.

23. $\int 10^{3x}\, dx$
24. $\int 5^{-5x}\, dx$
25. $\int x(3^{-x^2})\, dx$
26. $\int \dfrac{(2^x + 1)^2}{2^x}\, dx$
27. $\int \dfrac{2^x}{2^x + 1}\, dx$
28. $\int \dfrac{3^x}{\sqrt{3^x + 4}}\, dx$
29. $\int_1^2 5^{-2x}\, dx$
30. $\int_{-1}^1 2^{3x-1}\, dx$
31. $\int x^2 2^{x^3}\, dx$
32. $\int \dfrac{10^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$
33. $\int (3^x + 3^{-x})^2\, dx$
34. $\int 4^x(4^x + 1)^3\, dx$

35. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $y = 2^x$, $x + y = 1$ y $x = 1$.

36. La región bajo la gráfica de $y = 3^{-x}$ entre $x = 1$ y $x = 2$, gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

37. Un economista predice que el poder de compra $B(t)$ de cierta moneda disminuirá de acuerdo con la fórmula $B(t) = (0.95)^t$, donde t es el tiempo en años.
(a) ¿Con qué rapidez estará disminuyendo el poder de compra dentro de dos años?
(b) Calcule aproximadamente el *poder de compra medio* durante los próximos dos años.

38. Se predice que cuando una persona ingiere una tableta de 100 mg de un medicamento contra el asma, la rapidez R con que éste penetra en la sangre está dada por $R = 5(0.95)^t$ mg/min. Suponiendo que no hay traza del medicamento en la sangre en el momento en que la tableta se ingiere, calcule el número de minutos que tardan en ingresar en la sangre los primeros 50 mg.

39. Se introducen mil truchas de un año de edad en un estanque grande. Se predice que el número de peces que siguen vivas a los t años es $N(t) = 1000(0.9)^t$.
(a) Calcule aproximadamente la tasa o rapidez dN/dt con que mueren en los tiempos $t = 1$ y $t = 5$. ¿Con qué rapidez estará disminuyendo la población cuando $N = 500$?
(b) Se espera que el peso $W(t)$ (en kg) de una trucha aumente de acuerdo con la fórmula $W(t) = 0.1 + 0.7t$. ¿A los cuántos años se tiene la mayor cantidad de kilos de trucha en el estanque?

40. La presión de vapor P (en lbf/pulg^2) de un líquido, que es una medida de su volatilidad, está relacionada con la temperatura T (en °F) por la *ecuación de Antoine* $\log P = a + [b/(c + T)]$, donde a, b y c son constantes. La presión de vapor aumenta rápidamente al elevarse la temperatura. Encuentre condiciones sobre a, b y c que garanticen que P sea una función creciente de T.

41. Los químicos usan un número denotado por pH para describir cuantitativamente la acidez o alcalinidad (basicidad) de las soluciones. Por definición pH $= -\log [H^+]$, donde $[H^+]$ es la concentración de iones hidrógeno en moles por litro. Se estima que (con un error porcentual máximo de 0.5%) para cierta marca de vinagre $[H^+] \approx 6.3 \times 10^{-3}$. Calcule el pH y use diferenciales para estimar el error porcentual máximo en el cálculo.

42. En la escala de Richter, la magnitud R de un sismo o terremoto de intensidad I está dada por I_0, donde $R = \log (I/I_0)$ es una cierta intensidad mínima. Se estima que la intensidad de un sismo fue 100 veces mayor que I_0 y el error porcentual máximo en la estimación es de 1%. Obtenga el error porcentual máximo en el cálculo de R usando diferenciales.

43. Sea $R(x)$ la reacción de una persona a un estímulo de intensidad x. Por ejemplo, si el estímulo x es la salinidad (en gramos de sal por litro) de una solución, $R(x)$ puede ser la estimación del individuo acerca de cuán salada o salobre sabe la solución según una escala de 0 a 10. La fórmula de *Weber-Fechner* es una función que se ha propuesto para relacionar R con x y está dada por $R = a \log (x/x_0)$, en donde a es una constante positiva.
(a) Demuestre que $R = 0$ para el *estímulo umbral* $x = x_0$.
(b) La derivada $S = dR/dx$ es la *sensibilidad*

al nivel de estímulo x y mide la aptitud para detectar cambios pequeños en el nivel de un estímulo. Demuestre que S es inversamente proporcional a x y compare $S(x)$ con $S(2x)$.

44. Si un capital P se invierte en una cuenta de ahorros durante t años y el interés anual r (expresado en decimales) se capitaliza (o compone) n veces al año, entonces el monto A que hay en la cuenta a los t años está dado por la *fórmula del interés compuesto* $A = P[1 + (r/n)]^{nt}$.
 (a) Sea $h = r/n$. Demuestre que $\ln A = \ln P + rt \ln (1 + h)^{1/h}$.
 (b) Use la expresión en la parte (a) y haga tender n a infinito para obtener la fórmula $n \to \infty$ del interés *compuesto continuamente*.

45. El volumen o fuerza de un sonido que percibe el oído humano depende de su intensidad. Para calcular el nivel de intensidad α (en decibels) que corresponde a una intensidad de sonido I, se usa la fórmula $\alpha = 10 \log (I/I_0)$, donde el valor especial I_0 de I es el sonido más débil que el oído humano puede detectar en ciertas condiciones. Determine la tasa de cambio de α con respecto a I si
 (a) I es 10 veces mayor que I_0.
 (b) I es 1000 veces mayor que I_0.
 (c) I es 10 000 veces mayor que I_0. (Ésta es la intensidad normal de la voz.)

46. Demuestre el Teorema (7.25) (ii) usando el límite en la parte (i) y el cambio de variable $n = 1/h$.

47. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} [1 + (x/n)]^n = e^x$ tomando $h = x/n$ y usando el Teorema (7.25) (i).

48. En la teoría de la probabilidad se usa la aproximación $(1 - p)^n \approx e^{-np}$ cuando p es pequeño y np tiene un valor intermedio.
 (a) Sea $A = (1 - p)^n$. Demuestre que $\ln A = np \ln (1 - p)^{1/p}$.
 (b) Use el Ejercicio 47 para deducir que $\ln A \approx -np$ si p está cerca de 0.

49. Demuestre que si $a > 0$ y $b > 0$, entonces para todos los números reales u y v:
 (i) $(ab)^u = a^u b^u$
 (ii) $a^u/a^v = a^{u-v}$
 (iii) $(a^u)^v = a^{uv}$

50. Demuestre las Leyes de los Logaritmos:
 (i) $\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v$
 (ii) $\log_a \dfrac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$
 (iii) $\log_a u^r = r \log_a u$

7.6 LEYES DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Supongamos que una cantidad física varía en el tiempo y que su magnitud al tiempo t está dada por $q(t)$, donde q es una función derivable con $q(t) > 0$ para todo t. La derivada $q'(t)$ es la tasa de cambio de $q(t)$ con respecto al tiempo. En muchas aplicaciones, esta rapidez de variación es directamente proporcional a la magnitud de la cantidad al tiempo t. Esta relación puede expresarse por medio de la ecuación diferencial

$$q'(t) = cq(t)$$

donde c es una constante. El número de bacterias se comporta de esta manera en algunos cultivos. Si el número de bacterias $q(t)$ es pequeño, entonces su tasa de crecimiento $q'(t)$ es pequeña, sin embargo, a medida que el número de bacterias aumenta, también la *tasa de crecimiento* se eleva. El decrecimiento de una sustancia radiactiva obedece una ley similar, pues a medida que la cantidad de materia disminuye, la tasa de decrecimiento —y por tanto, la actividad o radiación— también disminuye. Como un último ejemplo consideremos la descarga de un condensador eléctrico. Si la carga en el elemento es muy grande cuando se empieza a descargar, entonces la rapidez de la descarga es muy elevada, pero a medida que la carga se debilita, el condensador o capacitor se va descargando más lentamente.

En las aplicaciones, la ecuación $q'(t) = cq(t)$ se expresa a menudo en términos de diferenciales. Así, $y = q(t)$ se puede escribir

$$\frac{dy}{dt} = cy \quad \text{o bien} \quad dy = cy\,dt.$$

Dividiendo ambos lados de la última ecuación entre y, se obtiene

$$\frac{1}{y}\,dy = c\,dt.$$

Como las variables y y t se pudieron **separar** en esta ecuación diferencial, es decir, aparece sólo una en cada lado de la igualdad, la ecuación $dy/dt = cy$ se llama **ecuación diferencial separable.** Más adelante se estudiarán estas ecuaciones con mayor detalle y se demostrará que sus soluciones se pueden encontrar integrando ambos lados de la ecuación ''separada'' $(1/y)\,dy = c\,dt$. De modo que,

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int c\,dt$$

y, suponiendo que $y > 0$,

$$\ln y = ct + d.$$

Las dos constantes de integración se combinaron en una sola constante d. Se deduce que

$$y = e^{ct+d} = e^d e^{ct}.$$

Si y_0 denota el valor inicial de y (es decir, el valor correspondiente a $t = 0$), entonces poniendo $t = 0$ en la ecuación anterior se obtiene

$$y_0 = e^d e^0 = e^d$$

y por lo tanto, la solución $y = e^d e^{ct}$ puede escribirse

$$y = y_0 e^{ct}.$$

Se ha demostrado lo siguiente.

TEOREMA (7.26) Sea y una función derivable de t tal que $y > 0$ para todo t y sea y_0 su valor en $t = 0$. Si $dy/dt = cy$ para una constante c, entonces $y = y_0 e^{ct}$.

Este teorema establece que *si la tasa o razón de cambio de $y = q(t)$ con respecto a t es directamente proporcional a y, entonces y se puede expresar mediante una función exponencial.* Si al aumentar t también aumenta y, entonces la fórmula $y = y_0 e^{ct}$ es una **ley de crecimiento;** si y disminuye, entonces la fórmula es una **ley de decrecimiento.**

EJEMPLO 1 El número de bacterias en un cultivo aumenta de 600 a 1800 en 2 horas. Encontrar una fórmula para el número de bacterias al tiempo t, suponiendo que en cada momento la tasa de crecimiento es directamente proporcional al número de bacterias. ¿Cuál será el número de bacterias al cabo de cuatro horas?

Solución Denotemos por $y = q(t)$ el número de bacterias a las t horas. Entonces, $y_0 = q(0) = 600$ y $q(2) = 1800$. Por hipótesis,

$$\frac{dy}{dt} = cy.$$

Siguiendo los pasos de la demostración del Teorema (7.26), obtenemos

$$y = y_0 e^{ct} = 600e^{ct}.$$

Como $y = 1800$ cuando $t = 2$,

$$1800 = 600e^{2c} \quad \text{o bien} \quad e^{2c} = 3.$$

Por lo tanto,

$$2c = \ln 3 \quad \text{o bien} \quad c = \tfrac{1}{2}\ln 3,$$

y la fórmula para y es

$$y = 600e^{[(1/2)\ln 3]t}.$$

Usando el hecho de que $e^{\ln 3} = 3$ (véase la Definición (7.11)), esta ley de crecimiento se puede expresar en términos de una función exponencial de base 3 como sigue:

$$y = 600(e^{\ln 3})^{t/2} = 600(3)^{t/2}.$$

En particular, al cabo de 4 horas el número de bacterias será

$$600(3)^{4/2} = 600(9) = 5400. \quad \bullet$$

EJEMPLO 2 El radio decrece exponencialmente y tiene una *semivida* (o "vida media") de aproximadamente 1600 años; es decir, dada una cantidad, al cabo de 1600 años se habrá desintegrado *la mitad* de la cantidad original de la sustancia radiactiva. Encontrar una fórmula para la cantidad y de radio que queda a los t años de una muestra de 50 mg de radio puro. ¿Cuándo quedarán 20 mg?

Solución Suponiendo que $y = q(t)$,

$$y_0 = q(0) = 50 \quad \text{y} \quad q(1600) = \tfrac{1}{2}(50) = 25.$$

Como $dy/dt = cy$ para alguna constante c, del Teorema (7.26) se deduce que

$$y = 50e^{ct}.$$

Como $y = 25$ cuando $t = 1600$,

$$25 = 50e^{1600c} \quad \text{o bien} \quad e^{1600c} = \tfrac{1}{2}.$$

Entonces,

$$1600c = \ln \tfrac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$$

y

$$c = -\frac{\ln 2}{1600}.$$

Por lo tanto,

$$y = 50e^{-(\ln 2/1600)t}.$$

Como en el Ejemplo 1, podemos escribir esta fórmula en términos de otra base como sigue:

$$y = 50(e^{\ln 2})^{-t/1600}$$

o sea
$$y = 50(2)^{-t/1600}.$$

Para obtener el valor de t en que $y = 20$, se despeja de la ecuación

$$20 = 50(2)^{-t/1600} \quad \text{o bien} \quad 2^{t/1600} = \tfrac{5}{2}.$$

Tomando el logaritmo natural a ambos lados,

$$\frac{t}{1600}\ln 2 = \ln\frac{5}{2} \quad \text{o sea} \quad t = \frac{1600 \ln \frac{5}{2}}{\ln 2}.$$

Podemos obtener un valor aproximado usando una calculadora o la Tabla C,

$$t \approx 1600(0.916)/(0.693) \approx 2115 \text{ años.} \quad \bullet$$

EJEMPLO 3 La ley de Newton del enfriamiento afirma que la rapidez con que un objeto se enfría es directamente proporcional a la diferencia de temperaturas entre el objeto y el medio que lo rodea. La temperatura de un objeto baja de 125°F a 100°F en media hora, estando rodeado por aire a una temperatura de 75°F. Calcular su temperatura al cabo de otra media hora.

Solución Si y denota la temperatura del objeto cuando lleva t horas enfriándose, entonces por la ley de Newton,

$$\frac{dy}{dt} = c(y - 75)$$

donde c es una constante. Separando variables,

$$\frac{1}{y - 75}\,dy = c\,dt.$$

Integrando ambos lados, obtenemos

$$\ln(y - 75) = ct + b$$

donde b es una constante. Esto equivale a

$$y - 75 = e^{ct+b} = e^b e^{ct}.$$

Si definimos $k = e^b$, entonces la ecuación anterior se puede escribir

$$y = ke^{ct} + 75.$$

Como $y = 125$ cuando $t = 0$, se ve que

$$125 = ke^0 + 75 = k + 75 \quad \text{o bien} \quad k = 50.$$

Entonces,
$$y = 50e^{ct} + 75.$$

Como $y = 100$ cuando 0.5 horas,

$$100 = 50e^{c/2} + 75 \quad \text{o sea} \quad e^{c/2} = \tfrac{25}{50} = \tfrac{1}{2}.$$

Esto implica que

$$c = 2 \ln \tfrac{1}{2} = \ln \tfrac{1}{4}.$$

Por lo tanto, la temperatura y a las t horas está dada por

$$y = 50e^{t \ln (1/4)} + 75.$$

En particular, si $t = 1$,

$$\begin{aligned} y &= 50e^{\ln (1/4)} + 75 \\ &= 50(\tfrac{1}{4}) + 75 = 87.5 \text{ °F} \quad \bullet \end{aligned}$$

En muchos casos, el crecimiento natural es más moderado que la situación descrita por el Teorema (7.26). Algunas situaciones típicas en las que esto sucede están relacionadas con poblaciones, ventas de productos y valores de inversiones. En biología, para calcular la magnitud de una cantidad al tiempo t, se usa a veces una función G dada por

$$G(t) = ke^{(-Ae^{-Bt})}$$

donde k, A y B son constantes positivas. La función G es la **función de crecimiento de Gompertz**. Siempre es positiva y creciente pero tiende a un límite cuando t tiende a infinito. La gráfica de G es una **curva de crecimiento de Gompertz**.

EJEMPLO 4 Analizar la gráfica de la función de crecimiento de Gompertz G y trazarla.

Solución Observemos primero que la ordenada en el origen es $G(0) = ke^{-A}$ y que $G(t) > 0$ para todo t. Derivando obtenemos

$$\begin{aligned} G'(t) &= ke^{(-Ae^{-Bt})} D_t(-Ae^{-Bt}) \\ &= ABke^{(-Bt - Ae^{-Bt})} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &ABke^{(-Bt - Ae^{-Bt})} D_t(-Bt - Ae^{-Bt}) \\ &= ABk(-B + ABe^{-Bt})e^{-Bt - Ae^{-Bt}}. \end{aligned}$$

Como $G'(t) > 0$ para todo t, la función G es creciente en $[0, \infty)$. La segunda derivada $G''(t)$ es cero si

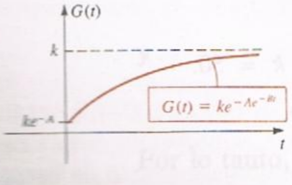
$$-B + ABe^{-Bt} = 0 \qquad \text{o bien} \qquad e^{Bt} = A.$$

Despejando t de la última ecuación obtenemos $t = (1/B) \ln A$, que es un número crítico de la función G'. Queda como ejercicio demostrar que en este tiempo la tasa de crecimiento G' tiene un máximo Bk/e. También se puede demostrar que

$$\lim_{t\to\infty} G'(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to\infty} G(t) = k.$$

Por lo tanto, cuando t tiende a infinito, la tasa de crecimiento tiende a 0 y la gráfica de G tiene una asíntota horizontal $y = k$. La Figura 7.15 muestra una de las gráficas típicas. •

FIGURA 7.15



EJERCICIOS 7.6

1. El número de bacterias en cierto cultivo crece de 5 000 a 15 000 en 10 horas. Suponiendo que la tasa o rapidez de crecimiento es proporcional al número de bacterias, encuentre una fórmula para el número de bacterias en el cultivo al tiempo t. Calcule el número al cabo de 20 horas. ¿Cuándo llegará a 50 000 el número de bacterias?

2. El isótopo de polonio ^{210}Po tiene una semivida (o periodo medial) de 140 días; aproximadamente. Si una muestra pesa inicialmente 20 mg, ¿cuánto queda t días después? Aproximadamente, ¿cuánto quedará después de dos semanas?

3. Si la temperatura es constante, entonces la razón de cambio de la presión atmosférica p respecto a la altura h es proporcional a p. Suponiendo que $p = 762$ mmHg al nivel del mar y $p = 737$ mm Hg a 300 m de altitud, calcule la presión a una altitud de 1500 m.

4. La población de una ciudad crece a razón de 5% al año. Si la población actual es 500 000, ¿cuál será la población dentro de 10 años?

5. Los agrónomos calculan que se necesitan 1000 m^2 de tierra para proveer de alimentos a una persona. Por otro lado, se calcula que hay $40 \cdot 10^{12}$ m^2 de tierra laborable en el mundo y, por lo tanto, se puede sostener a una población máxima de 40 000 millones de personas si no hay ninguna otra fuente de alimentos. La población de la Tierra en 1980 era de 4500 millones de habitantes. Suponiendo que la población crece a razón de 2% al año, ¿cuándo se alcanzará la población máxima que la Tierra puede alimentar?

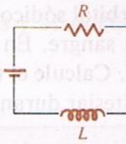
6. Una placa de metal se enfría de 80°C a 65°C en 20 min al estar rodeada de aire a una temperatura de 15°C. Use la ley de Newton (véase el Ejemplo 3) para estimar la temperatura al cabo de una hora de enfriamiento. ¿Cuándo llegará la temperatura a 40°C?

7. Un termómetro exterior registra una temperatura de 4°C. Cinco minutos después de introducirlo en una habitación donde la temperatura es de 20°C, el termómetro marca 15°C. ¿Cuándo marcará 18°C?

8. La rapidez con la que la sal se disuelve en el agua es directamente proporcional a la cantidad de sal no disuelta. En un recipiente con agua se ponen 5 kg de sal y en 20 min se disuelven 2 kg. ¿Cuánto tiempo tardará en disolverse 1 kg más?

9. Según la primera ley de Kirchhoff para los circuitos eléctricos, $V = RI + L(dI/dt)$, donde las constantes V, R y L denotan la tensión (o voltaje), la resistencia y la inductancia, respectivamente, e I denota la corriente al tiempo t (véase la figura). Demuestre que si la tensión se anula en el tiempo $t = 0$ y la corriente en ese momento es I_0, entonces $I = I_0 e^{-Rt/L}$.

EJERCICIO 9



10. Un físico encuentra que cierta sustancia radiactiva produce 2000 marcas o cuentas por minuto en un contador Geiger. Diez días más tarde la sustancia produce 1500 cuentas por minuto. Calcule aproximadamente su semivida o "vida media".

11. La presión atmosférica P (en atmósferas) a una altitud de z metros sobre el nivel del mar satisface la ecuación diferencial $dP/dz = -9.81\,\rho(z)$, donde $\rho(z)$ es la densidad del aire a una altitud z. Suponiendo que el aire satisface la ley de los gases ideales, la ecuación diferencial puede escribirse como $dP/dz = -0.0342P/T$, donde T es la temperatura (en kelvins, K) a una altitud z. Exprese P como una función de z suponiendo que la presión al nivel del mar es de 1 atm y que $T = 288 - 0.01z$.

12. Durante el primer mes de crecimiento de ciertos cultivos como el maíz, el algodón y la soya, la rapidez de crecimiento (en gramos por día) es proporcional al peso actual W. Para una especie de algodón, $dW/dt = 0.21W$. ¿Cuál será el peso dentro de un mes ($t = 30$ días) de una planta que actualmente pesa 70 mg?

13. El material radiactivo estroncio 90, a ^{90}Sr, que tiene una semivida de 29 años, puede causar cáncer en los huesos de los seres humanos. La sustancia se encuentra en la lluvia ácida, penetra en el suelo y se introduce en la cadena alimenticia. El nivel de radiactividad en cierto terreno de cultivo es 2.5 veces el nivel máximo S que se consi-

dera aún no dañino. ¿Durante cuántos años seguirá contaminado ese terreno?

14. El indicador radiactivo ^{51}Cr, que tiene una semivida o periodo medial de 27.8 días, se usa a veces en pruebas médicas para localizar la posición de la placenta en mujeres embarazadas. El indicador se pide a un laboratorio de productos médicos y la entrega de un pedido tarda dos días. ¿Cuántas unidades se deben solicitar para hacer una de estas pruebas si se necesitan 35 unidades en el momento de la prueba?

15. Los veterinarios anestesian animales con pentobarbital sódico. Para anestesiar a un perro se requieren 30 mg por cada kilogramo de su peso. El citado pentobarbital sódico se elimina exponencialmente de la sangre. En 4 horas la cantidad baja a la mitad. Calcule el tamaño de una dosis única para anestesiar durante 45 min a un perro que pesa 20 kg.

16. En la fisiología pulmonar se usa la siguiente ecuación para describir el transporte de una sustancia a través de la pared de un vaso capilar:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{V}{Q}\left(\frac{h}{k+h}\right)$$

donde h es la concentración de hormona en la sangre al tiempo t, V es la rapidez máxima de transporte, Q es el volumen del capilar y k es una constante que mide la afinidad entre las hormonas y las enzimas que contribuyen al proceso de transporte. Determine la solución general de la ecuación diferencial.

17. Se dispara un cohete espacial desde la Tierra. Si se desprecia la resistencia del aire, su velocidad a partir del momento en que se termina el combustible, está dada por la ecuación diferencial $v(dv/dy) = -ky^{-2}$, donde y es la distancia desde el centro de la Tierra y k es una constante positiva. Sea y_0 la distancia desde dicho centro en el momento en que se termina el combustible y v_0 la velocidad correspondiente. Exprese v como una función de y. (*Sugerencia:* Separe las variables y y v.)

18. A altas temperaturas, el dióxido de nitrógeno NO_2 se descompone en NO y O_2. Si $y(t)$ es la concentración de NO_2 (en moles por litro) y la temperatura es de 600 K, entonces $y(t)$ cambia de acuerdo con la *ley de reacción de segundo orden* $dy/dt = -0.05y^2$, donde t es el tiempo (en segundos). Exprese y en términos de t y de la concentración inicial y_0.

19. La edad de los especímenes geológicos o arqueológicos se determina con el método del carbono 14. Este método de datación se basa en el hecho de que el CO_2 de la atmósfera contiene cierta cantidad del isótopo inestable carbono 14 (^{14}C). Las plantas absorben carbono de la atmósfera y cuando mueren la cantidad de ^{14}C que han acumulado comienza a decrecer (o decaer) con una semivida de 5 700 años aproximadamente. Midiendo la cantidad de ^{14}C que queda en un espécimen, puede estimarse la fecha en que el organismo murió. Calcule aproximadamente la edad de un hueso fósil que presenta 20% del ^{14}C que contiene un hueso actual.

20. Consulte el Ejercicio 19. El isótopo $^{3}_{1}H$ (tritio) del hidrógeno, que es radiactivo y tiene una semivida de 12.3 años, es producido en la atmósfera por los rayos cósmicos y traído a la Tierra por la lluvia. Los muros de madera de una casa vieja contienen 10% del $^{3}_{1}H$ que tienen los de una casa nueva. Calcule la edad de la casa vieja.

21. En la *ley del crecimiento logístico* se supone que al tiempo t la tasa de crecimiento $f'(t)$ de una cierta cantidad $f(t)$ está dada por $f'(t) = Af(t)[B - f(t)]$, donde A y B son constantes. Demuestre que si $f(0) = C$, entonces

$$f(t) = \frac{BC}{C + (B - C)e^{-ABt}}$$

22. Ciertos procesos de aprendizaje se describen con la gráfica de $f(x) = a + b(1 - e^{-cx})$, donde a, b y c son constantes positivas. Un fabricante calcula que una operaria nueva puede producir cinco artículos en su primer día de trabajo. A medida que se vuelve más eficiente, su producción diaria aumenta hasta llegar a un máximo. El número $f(n)$ de artículos que produce en el n-ésimo día de trabajo está dado por la fórmula $f(n) = 3 + 20(1 - e^{-0.1n})$.

(a) Calcule el número de artículos que produce el quinto, el noveno, el vigésimo y el trigésimo días de trabajo.

(b) Trace la gráfica de f entre $n = 0$ y $n = 30$. (Este tipo de gráficas se llaman *curvas de aprendizaje* y se utilizan a menudo en educación y psicología.)

(c) ¿Qué sucede con una n muy grande?

23. Una célula esférica tiene volumen V y el área de su superficie es S. Un modelo simple para el crecimiento de las células antes de la mitosis supone que la tasa de crecimiento dV/dt es proporcional al área de la superficie de la célula. Demuestre que $dV/dt = kV^{2/3}$ para $k > 0$ y exprese V como una función de t.

24. En el Teorema (7.26) se supone que la rapidez de variación de una cantidad $q(t)$ al tiempo t es directamente proporcional a $q(t)$. Demuestre que si la rapidez de cambio es proporcional a $[q(t)]^2$, entonces hay un tiempo t_1 para el cual $\lim_{t \to t_1^+} q(t) = \infty$.

25. En el Ejemplo 4 verifique que (a) Bk/e es un máximo de G'; (b) $\lim_{t\to\infty} G'(t) = 0$; (c) $\lim_{t\to\infty} G(t) = k$.

26. Trace la gráfica de G en el Ejemplo 4 para $k = 10$, $A = \frac{1}{2}$ y $B = 1$.

7.7 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES INVERSAS

En la Sección 7.1 se definió la función inversa f^{-1} de una función f. En esta sección se demuestran algunos teoremas sobre funciones inversas y se encuentra una fórmula para obtener sus derivadas.

TEOREMA (7.27) Si una función f es continua y creciente en un intervalo $[a, b]$, entonces f tiene una función inversa f^{-1} que es continua y creciente en el intervalo $[f(a), f(b)]$.

Demostración Si f es creciente, entonces f es biunívoca y, por lo tanto, f^{-1} existe. Para demostrar que f^{-1} es creciente se debe demostrar que si $w_1 < w_2$ en $[f(a), f(b)]$, entonces $f^{-1}(w_1) < f^{-1}(w_2)$ en $[a, b]$. Se demostrará este hecho por contradicción. *Supongamos* que $f^{-1}(w_2) \le f^{-1}(w_1)$. Como f es creciente, se tiene que $f(f^{-1}(w_2)) \le f(f^{-1}(w_1))$ y por lo tanto $w_2 \le w_1$, que es una contradicción. Por consiguiente, $f^{-1}(w_1) < f^{-1}(w_2)$.

También hay que demostrar que f^{-1} es continua en $[f(a), f(b)]$. Se sabe que $y = f(x)$ si y sólo si $x = f^{-1}(y)$. En particular, si y_0 está en el intervalo abierto $(f(a), f(b))$, sea x_0 el número del intervalo (a, b) tal que $y_0 = f(x_0)$ o, equivalentemente, $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Debemos demostrar que

$$(*) \qquad \lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0.$$

La Figura 7.16 muestra una representación geométrica de f y de su función inversa f^{-1} semejante a la de la Figura 7.1. El dominio $[a, b]$ de f está representado por puntos sobre un eje x y el dominio $[f(a), f(b)]$ de f^{-1} por puntos sobre un eje y. Para representar las funciones se han dibujado flechas de uno de los ejes al otro. Para demostrar (*), se considera un intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$. Hay que encontrar

FIGURA 7.16

FIGURA 7.17

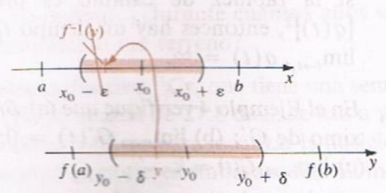
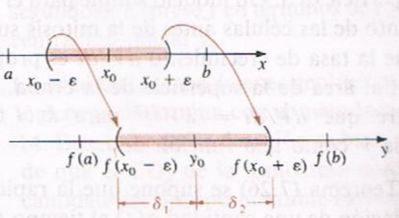


FIGURA 7.18



un intervalo $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ como el que se indica en la Figura 7.17, tal que siempre que y esté en $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, entonces $f^{-1}(y)$ está en $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Se puede suponer que $x_0 - \varepsilon$ y $x_0 + \varepsilon$ están ambos en $[a, b]$. Como en la Figura 7.18, sean $\delta_1 = y_0 - f(x_0 - \varepsilon)$ y $\delta_2 = f(x_0 + \varepsilon) - y_0$. Como f determina una correspondencia biunívoca entre los números de los intervalos $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ y $(y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2)$, los valores de la función f^{-1} que corresponden a los números en $(y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2)$, deben estar en $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Sea δ el mínimo entre δ_1 y δ_2. Se deduce que si y está en $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, entonces $f^{-1}(y)$ está en $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, que es lo que se quería demostrar.

La continuidad en los extremos $f(a)$ y $f(b)$ del dominio de f^{-1} se demuestra de manera análoga usando límites unilaterales. • •

La demostración del siguiente resultado es similar a la del Teorema (7.27).

TEOREMA (7.28) Si una función f es continua y decreciente en un intervalo $[a, b]$, entonces f tiene una función inversa que es continua y decreciente en el intervalo $[f(b), f(a)]$.

EJEMPLO 1 Verificar el Teorema (7.27) para $f(x) = x^2 - 3$ en el intervalo $[0, 6]$.

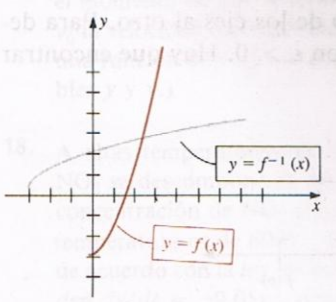
Solución Del Ejemplo 2 de la Sección 7.1, f^{-1} está dada por

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 3}, \quad \text{para } x \geq -3.$$

En este ejemplo el dominio de f^{-1} es $[f(0), f(6)]$, es decir, $[-3, 33]$.

Las gráficas de f y f^{-1} aparecen en la Figura 7.3 y están representadas nuevamente en la Figura 7.19.

FIGURA 7.19



Como f es un polinomio, es una función continua en $[0, 6]$. Más aún, como $f'(x) = 2x$, $f'(x) > 0$ para todo x en $(0, 6]$ y, por lo tanto, f es creciente en $[0, 6]$.

Como $\lim_{x \to a} \sqrt{x + 3} = \sqrt{a + 3}$ para todo a en $(-3, 33]$, f^{-1} es continua en este intervalo. También es continua en -3. Finalmente, como la derivada

$$D_x f^{-1}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}$$

es positiva en $(-3, 33]$, se deduce que f^{-1} es creciente en $[-3, 33]$. •

El teorema siguiente da un método para encontrar la derivada de una función inversa.

TEOREMA (7.29) Si una función derivable f tiene una función inversa g y si $f'(g(c)) \neq 0$, entonces g es derivable en c y

$$g'(c) = \frac{1}{f'(g(c))}.$$

Demostración De la Definición (3.1′),

$$g'(c) = \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}.$$

Sea z una nueva variable tal que $z = g(x)$ y sea $a = g(c)$. Como f y g son funciones inversas una de la otra,

$$g(x) = z \quad \text{si y sólo si} \quad f(z) = x,$$

y

$$g(c) = a \quad \text{si y sólo si} \quad f(a) = c.$$

La expresión $x \to c$ bajo el límite en la fórmula se puede sustituir por $z \to a$, pues si $x \to c$, entonces $g(x) \to g(c)$, es decir, $z \to a$. Por otro lado, si $z \to a$, entonces $f(z) \to f(a)$. Por lo tanto, se puede escribir

$$g'(c) = \lim_{z \to a} \frac{z - a}{f(z) - f(a)} = \lim_{z \to a} \frac{1}{\left[\dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}\right]}$$

$$= \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(c))}. \quad \bullet\bullet$$

Es conveniente enunciar el Teorema (7.29) en la siguiente forma equivalente.

TEOREMA (7.30) Si g es la función inversa de una función derivable f y si $f'(g(x)) \neq 0$, entonces

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

EJEMPLO 2 Usar el Teorema (7.30) y el hecho de que la función exponencial natural es la función inversa del logaritmo natural para demostrar que $D_x e^x = e^x$.

Solución Sean $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^x$. Entonces,

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad f'(g(x)) = f'(e^x) = \frac{1}{e^x}.$$

Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema (7.30),

$$g'(x) = \frac{1}{(1/e^x)} = e^x \quad \bullet$$

EJEMPLO 3 Sea $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Demostrar que f tiene una función inversa g y calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de g en el punto $P(2, 1)$.

Solución Nótese que f es continua y $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ para todo x. Entonces, por el Teorema (7.27), f tiene una función inversa g. Como $f(1) = 2$, resulta que $g(2) = 1$ y por lo tanto, el punto $P(2, 1)$ está en la gráfica de g. Aplicando el Teorema (7.30), obtenemos que la pendiente de la recta tangente en $P(2, 1)$ es

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5} \quad \bullet$$

Para recordar fácilmente el Teorema (7.30) es conveniente considerar $y = f(x)$. Si g es la función inversa de f, entonces $g(y) = g(f(x)) = x$. De (7.30),

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{f'(x)}$$

que en notación diferencial se escribe

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}.$$

Esto demuestra que, en cierto sentido, la derivada de la función inversa g es el recíproco o inverso de la derivada de f. La desventaja de usar las dos últimas fórmulas es que ambas están expresadas en términos de la variable independiente de la función f en vez de estar en términos de la variable independiente de la función inversa. Si en el Ejemplo 3 se toma $y = x^3 + 2x - 1$ y $x = g(y)$, entonces

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{3x^2 + 2},$$

es decir,

$$g'(y) = \frac{1}{3x^2 + 2} = \frac{1}{3(g(y))^2 + 2}.$$

Esto también puede escribirse en la forma

$$g'(x) = \frac{1}{3(g(x))^2 + 2}.$$

Por consiguiente, para encontrar $g'(x)$ se necesita conocer $g(x)$ igual que en el Teorema (7.30).

EJERCICIOS 7.7

Ejercicios 1-10: Demuestre que la función f definida en el intervalo dado tiene una función inversa f^{-1} y encuentre su dominio. Encuentre $f^{-1}(x)$. Obtenga $D_x f^{-1}(x)$ directamente y también aplicando el Teorema (7.30).

1. $f(x) = \sqrt{2x + 3}$, $[1, 11]$
2. $f(x) = \sqrt[3]{5x + 2}$, $[0, 5]$
3. $f(x) = 4 - x^2$, $[0, 7]$
4. $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $[-1, 1]$
5. $f(x) = 1/x$, $(0, \infty)$
6. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $[0, 3]$

7. $f(x) = e^{-x^2}$, $[0, \infty)$
8. $f(x) = \ln(3 - 2x)$, $(-\infty, \frac{3}{2})$
9. $f(x) = e^x - e^{-x}$, $(-\infty, \infty)$
10. $f(x) = e^x + e^{-x}$, $[0, \infty)$

Ejercicios 11-14: Demuestre que f tiene una función inversa f^{-1} en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ y calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en P.

11. $f(x) = x^5 + 3x^3 + 2x - 1$, $P(5, 1)$
12. $f(x) = 2 - x - x^3$, $P(-8, 2)$
13. $f(x) = (e^{2x} - 1)/(e^{2x} + 1)$, $P(0, 0)$
14. $f(x) = e^{2-3x}$, $P(1/e, 1)$

Ejercicios 15-18: Demuestre que si el dominio de f es $\mathbb{R}$, entonces f no tiene una función inversa. Demuestre también que si el dominio se restringe convenientemente, entonces f^{-1} sí existe.

15. $f(x) = x^4 + 3x^2 + 7$
16. $f(x) = |x - 2|$
17. $f(x) = 10^{-x^2}$
18. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
19. Complete la demostración del Teorema (7.27) mostrando que f^{-1} es continua en $f(a)$ y $f(b)$.
20. Demuestre el Teorema (7.28).

7.8 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Función inversa.
2. Función logaritmo natural.
3. Leyes de los logaritmos.
4. Función exponencial natural.
5. El número e.
6. Fórmulas para derivar $\ln u$ y e^u.
7. Derivación logarítmica.
8. a^x para $a > 0$.
9. $\log_a$.
10. Fórmulas para derivar $\log_a u$ y a^u.
11. Función potencia general.
12. Leyes de crecimiento y decrecimiento.
13. Derivadas de las funciones inversas.

EJERCICIOS 7.8

Ejercicios 1-24: Encuentre $f'(x)$ para la función $f(x)$ dada por la expresión.

1. $(1 - 2x)\ln|1 - 2x|$
2. $\sqrt{\ln\sqrt{x}}$
3. $\ln\dfrac{(3x+2)^4\sqrt{6x-5}}{8x-7}$
4. $\log\left|\dfrac{2-9x}{1-x^2}\right|$
5. $\dfrac{1}{\ln(2x^2+3)}$
6. $\dfrac{\ln x}{e^{2x}+1}$
7. $e^{\ln(x^2+1)}$
8. $\ln(e^{4x} + 9)$
9. $10^x \log x$
10. $\ln\sqrt[4]{x/(3x+5)}$
11. $x^{\ln x}$
12. $4^{\sqrt{2x+3}}$
13. $x^2 e^{1-x^2}$
14. $\sqrt{e^{3x} + e^{-3x}}$
15. $2^{-1/x}/(x^3 + 4)$
16. $5^{3x} + (3x)^5$
17. $(1 + \sqrt{x})^e$
18. $\ln e^{\sqrt{x}}$
19. $10^{\ln x}$
20. $(x^2 + 1)^{2x}$
21. $\ln|x^2 - 5x - 3|$
22. $7^{\ln|x|}$
23. $(\ln x)^{\ln x}$
24. $\ln[(\ln x)^x]$

Ejercicios 25-26: Encuentre y'.

25. $1 + xy = e^{xy}$
26. $\ln(x + y) + x^2 - 2y^3 = 1$

Ejercicios 27-44: Evalúe la integral.

27. $\displaystyle\int \frac{(1 + e^x)^2}{e^{2x}}\,dx$
28. $\displaystyle\int_0^1 e^{-3x+2}\,dx$
29. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}\,dx$
30. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$
31. $\displaystyle\int \frac{1}{x - x\ln x}\,dx$
32. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x}\,dx$

33. $\int \frac{x^2}{3x+2}\,dx$

34. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

35. $\int_0^1 x4^{x^2}\,dx$

36. $\int \frac{(e^{2x}+e^{3x})^2}{e^{5x}}\,dx$

37. $\int \frac{1}{x\sqrt{\log x}}\,dx$

38. $\int \frac{x}{x^4+2x^2+1}\,dx$

39. $\int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx$

40. $\int \frac{2e^x}{1+e^x}\,dx$

41. $\int 5^x e^x\,dx$

42. $\int x10^{x^2}\,dx$

43. $\int x^e\,dx$

44. $\int 5^x\sqrt{1+5^x}\,dx$

45. Una partícula se mueve sobre una recta coordenada con cierta aceleración al tiempo t de $e^{t/2}$ cm/s^2. En $t = 0$ la partícula se encuentra en el origen y su velocidad es de 6 cm/s. ¿Qué distancia recorre durante el intervalo de tiempo $[0, 4]$?

46. Realice el cálculo de los máximos y mínimos locales de $f(x) = x^2 \ln x$ para $x > 0$. Analice la concavidad, encuentre los puntos de inflexión y trace la gráfica de f.

47. Encuentre una ecuación para la recta tangente a la gráfica de $y = xe^{1/x^3} + \ln|2 - x^2|$ en el punto $P(1, e)$.

48. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = e^{2x}$, $y = x/(x^2+1)$, $x = 0$ y $x = 1$.

49. La región acotada por las gráficas de $y = e^{4x}$, $x = -2$, $x = -3$ y $y = 0$ gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

50. En 1980 la población de la India era de unos 651 millones de habitantes y se sabe que ha estado aumentando a razón de 2% al año. Encuentre una fórmula para la población $N(t)$ (en millones de habitantes) al tiempo t (en años transcurridos a partir de 1980). Suponiendo que este rápido crecimiento continúe, ¿qué población tendrá la India en el año 2000?

51. Cierta sustancia radiactiva tiene una semivida (o periodo de semidesintegración) de cinco días. ¿Cuánto tomará a una cantidad A desintegrarse hasta que quede sólo un 1% de A?

52. Para predecir la edad T (en años) de un fósil mediante la técnica del carbono 14, se usa la ecuación $T = -8310 \ln x$, donde $100x$ es el porcentaje de carbono que aún queda en el espécimen (véase el Ejercicio 19 de la Sección 7.6).

(a) Calcule la edad de un fósil con una precisión de 1000 años suponiendo que en este caso, $x = 0.04$.

(b) Estime el error máximo en el cálculo de T en la parte (a) usando diferenciales, suponiendo que el error en la estimación de x pudo haber sido hasta de 0.005.

53. La rapidez con que el azúcar se disuelve en agua es proporcional a la cantidad sin disolverse. Si 10 kg de azúcar se vierten en un recipiente con agua a la 1:00 P.M., se encuentran que a las 4:00 P.M., ya se ha disuelto la mitad.

(a) ¿Cuánto tardarán en disolverse 2 kg más?

(b) ¿Cuántos de los 10 kg se habrán disuelto a las 8:00 P.M.?

54. Según la ley de Newton del enfriamiento, la rapidez con que un objeto se enfría es directamente proporcional a la diferencia de temperaturas entre el objeto y el medio que lo rodea. Demuestre que si $f(t)$ denota la temperatura al tiempo t, entonces $f(t) = T + [f(0) - T]e^{-kt}$, donde T es la temperatura del medio que rodea al objeto y k es una constante positiva.

55. La bipartición de la bacteria *E. coli* ocurre aproximadamente cada 20 minutos. Calcule el número de bacterias que se tendrán a las dos horas de que había 100 000.

56. La ecuación diferencial $p\,dv + cv\,dp = 0$, donde p es la presión, v el volumen y c una constante, describe el comportamiento adiabático del aire. Resuelva la ecuación expresando p como una función de v.

57. Sea $f(x) = 2x^3 - 8x + 5$ en $[-1, 1]$. Demuestre que f tiene una función inversa g, y calcule $g'(5)$.

58. Sea $f(x) = e^{2x} + 2e^x + 1$ para $x \geq 0$.

(a) Demuestre que f tiene una función inversa f^{-1} y describa su dominio.

(b) Encuentre $f^{-1}(x)$ y $D_x f^{-1}(x)$.

(c) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(0, 4)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en $(4, 0)$.

CAPÍTULO **8**

OTRAS FUNCIONES TRASCENDENTES

En este capítulo se consideran los límites, las derivadas y las integrales de otras funciones trascendentes (o trascendentales). Para comenzar se hace un repaso de las funciones trigonométricas y de las identidades trigonométricas. Los estudiantes que necesiten recordar estos temas deben estudiar la Sección 8.1 cuidadosamente antes de los siguientes temas. Luego se desarrollan las fórmulas para los límites, las derivadas y las integrales de las funciones trigonométricas y de las funciones trigonométricas inversas. El resto del capítulo presenta discusiones de las funciones hiperbólicas y de las funciones hiperbólicas inversas.

8.1 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En la geometría se dice que un ángulo está determinado por dos rayos o semirrectas l_1 y l_2 que tienen el mismo punto inicial O. Dos puntos A y B sobre l_1 y l_2, respectivamente (véase la Figura 8.1), determinan el **ángulo** AOB. Un ángulo también se puede considerar como dos segmentos rectilíneos finitos con un punto extremo en común.

En la trigonometría los ángulos se interpretan como rotaciones de rayos. Se comienza con un rayo fijo l_1 que tiene un extremo O y que gira alrededor de O sobre un plano hasta otra posición especificada por el rayo l_2. A l_1 se le llama **lado inicial**, a l_2 **lado final** y a O **vértice** del ángulo AOB. La magnitud y el sentido de la rotación no se restringen de ninguna manera. Se puede hacer que l_1 dé varias vueltas o revoluciones alrededor de O en uno u otro de los dos sentidos antes de llegar a la posición l_2. Así, hay muchos ángulos diferentes que tienen los mismos lados inicial y final.

En un sistema de coordenadas rectangulares, se dice que un ángulo está en su **posición normal** (o **estándar**) si tiene el vértice en el origen y su lado inicial l_1 coincide con la parte positiva del eje x. Si l_1 gira en el sentido contrario al del reloj para llegar a la posición final l_2, se considera entonces que el ángulo es **positivo**, mientras que si l_1 gira en el sentido del reloj, el ángulo es **negativo**. La dirección del movimiento de las manecillas del reloj se llama **sentido negativo**, y la contraria, **sentido positivo**. Los ángulos suelen denotarse por letras griegas minúsculas y su sentido (o dirección) se especifica mediante un arco circular, o una curva espiral, con una punta de flecha en un extremo (véase la Figura 8.2).

La magnitud de un ángulo se puede expresar en grados o en radianes. Un giro de 1/360 de una vuelta en el sentido positivo es un ángulo de un grado, o 1°. En Cálculo, la unidad usual para medir ángulos es el *radián* (rad). Para definir un radián se considera una circunferencia unitaria U con centro en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares, y se toma un ángulo θ en la posición normal (véase la Figura 8.3). El ángulo θ se genera al girar alrededor de O un rayo coincidente con la parte positiva del eje x. Cuando dicho rayo gira hacia el lado final de θ, su punto de intersección con U recorre una cierta distancia circular t antes de llegar a su posición final $P(x, y)$. Se considera que t es positivo para rotaciones positivas, y negativo para rotaciones negativas. Es natural asignar al ángulo θ el número t como su medida. Se dice que θ es **un ángulo de t radianes** y se escribe $\theta = t$ o bien $\angle = t$ radianes. Así, θ denota al ángulo, o específicamente a su medida. En la Figura 8.3, t es la longitud del arco $\widehat{AP}$ que el ángulo θ *intercepta*.

FIGURA 8.1

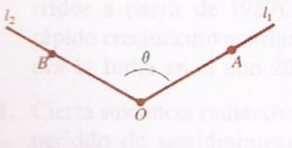


FIGURA 8.2

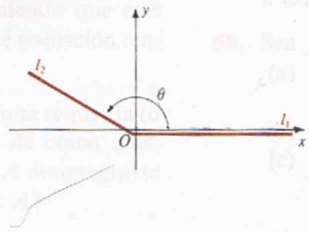


FIGURA 8.3

$\theta = t$ radianes

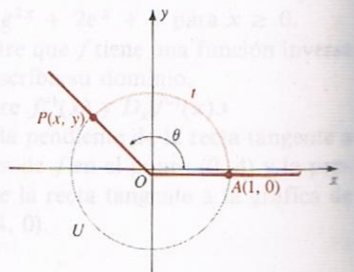
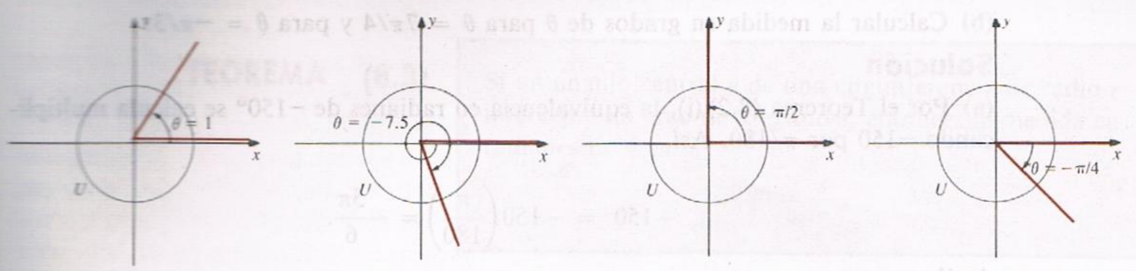


FIGURA 8.4



Si $\theta = 1$ (es decir, si θ es un ángulo de 1 rad), entonces θ intercepta o abarca un arco de longitud unidad sobre la circunferencia unitaria U (véase la Figura 8.4). La notación $\theta = -7.5$ significa que θ es el ángulo generado por un giro en el sentido negativo en el que el punto de intersección del eje x con la circunferencia unitaria U recorre 7.5 unidades. Como el perímetro de U es 2π, resulta que si $\theta = \pi/2$, entonces θ se obtiene por un giro de $\frac{1}{4}$ de vuelta completa en el sentido positivo. Análogamente, si $\theta = -\pi/4$, entonces θ se genera con $\frac{1}{8}$ de vuelta en el sentido negativo. La Figura 8.4 muestra estos ángulos con sus valores (o medidas) en radianes.

Si un ángulo en la posición normal es generado mediante media vuelta en la dirección positiva, entonces su medida en grados es 180° y su medida en radianes es π. Esto da las siguientes relaciones.

RELACIONES ENTRE GRADOS Y RADIANES (8.1)

$$180° = \pi \text{ rad}, \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}, \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)°$$

Mediante una calculadora se pueden evaluar aproximadamente $\pi/180$ y $180/\pi$, obteniendo

$$1° \approx 0.0174533 \text{ rad} \qquad \text{y} \qquad 1 \text{ rad} \approx 57.29578°.$$

El siguiente teorema es una consecuencia de las fórmulas anteriores.

TEOREMA (8.2)

(i) Para convertir un valor en radianes a uno en grados hay que multiplicar por $180/\pi$.

(ii) Para convertir un valor en grados a uno en radianes hay que multiplicar por $\pi/180$.

Cuando se considere un ángulo expresado en radianes, no se indicará esta unidad. Así, si un ángulo tiene una medida en radianes igual a 5, se escribe $\theta = 5$ en vez de $\theta = 5$ *rad*. Esto no debe causar confusión respecto a las unidades usadas para expresar un ángulo, pues si θ tiene un valor en grados igual a 5, se escribe $\theta = 5°$ y *no* $\theta = 5$.

EJEMPLO 1 **(a)** Calcular la medida en radianes de θ para $\theta = -150°$ y para $\theta = 225°$.
(b) Calcular la medida en grados de θ para $\theta = 7\pi/4$ y para $\theta = -\pi/3$.

Solución

(a) Por el Teorema (8.2) (i), la equivalencia en radianes de $-150°$ se calcula multiplicando -150 por $\pi/180$. Así,

$$-150° = -150\left(\frac{\pi}{180}\right) = -\frac{5\pi}{6}.$$

Análogamente,

$$225° = 225\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{5\pi}{4}.$$

(b) Por el Teorema (8.2) (ii), la equivalencia en grados de $7\pi/4$ radianes se determina multiplicando por $180/\pi$. De modo que

$$\frac{7\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 315°.$$

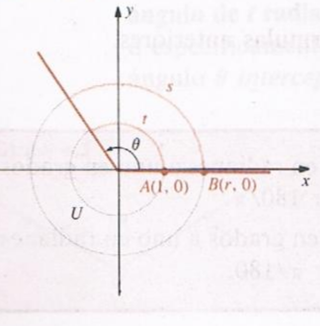
Análogamente,

$$-\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}\left(\frac{180}{\pi}\right) = -60° \quad \bullet$$

La siguiente tabla expone la relación entre valores en radianes y en grados de algunos ángulos comunes. Los datos de la tabla se pueden verificar usando el Teorema (8.2).

Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°

FIGURA 8.5



La medida en radianes de un ángulo se puede obtener a partir de una circunferencia con *cualquier* radio. En lo que sigue, la expresión **ángulo central** de una circunferencia se refiere a un ángulo cuyo vértice está en el centro de esta curva. Sea θ un ángulo central de una circunferencia de radio r que determina un arco en la circunferencia cuya longitud es s, donde $0 \leq s < 2\pi r$. Para calcular la medida o valor en radianes de θ, se coloca θ en la posición normal sobre un sistema de coordenadas rectangulares y se sobrepone una circunferencia unitaria U, como se muestra en la Figura 8.5. Si θ intercepta un arco de longitud t en U, entonces, por definición, se puede escribir $\theta = t$. De la geometría plana, la razón de los arcos en la Figura 8.5 es igual a la razón de los radios correspondientes, es decir,

$$\frac{t}{s} = \frac{1}{r} \quad \text{o bien} \quad t = \frac{s}{r}.$$

Sustituyendo t por θ se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA (8.3) Si un ángulo central θ de una circunferencia de radio r intercepta un arco de longitud s, entonces la medida en radianes de θ es

$$\theta = \frac{s}{r}.$$

La fórmula $\theta = s/r$ para la medida en radianes de un ángulo es independiente del tamaño de la circunferencia. Por ejemplo, si el radio de tal curva es $r = 4$ cm y un ángulo central θ, abarca un arco de 8 cm de longitud, entonces la medida en radianes de θ es

$$\theta = \frac{8 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 2.$$

Si el radio de la circunferencia es de 5 km y la longitud del arco es de 10 km, entonces

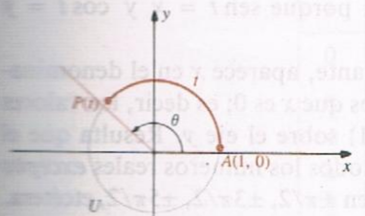
$$\theta = \frac{10 \text{ km}}{5 \text{ km}} = 2.$$

Estos cálculos indican que la medida en radianes de un ángulo no tiene dimensiones y se puede considerar como un número real. Es por esto que se usa la notación $\theta = t$ de preferencia a $\theta = t$ radianes.

La fórmula $\theta = s/r$ se puede usar para calcular la longitud del arco abarcado por un ángulo central θ de una circunferencia. A veces, en este tipo de problemas es conveniente usar la fórmula equivalente

$$s = r\theta.$$

FIGURA 8.6



Hay dos métodos que se usan normalmente para definir las funciones trigonométricas: uno mediante una circunferencia unitaria y el otro por medio de triángulos rectángulos. Comenzaremos por el enfoque de la circunferencia unitaria. Las descripciones de las funciones trigonométricas en términos de triángulos rectángulos, aparece en (8.9).

Sea U una circunferencia unitaria, es decir, una circunferencia con radio 1 y centro en el origen O de un sistema de coordenadas rectangulares. Entonces, U es la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Dado cualquier número real t, denotemos por θ al ángulo (en la posición normal) cuya medida en radianes es t. La Figura 8.6 muestra un caso posible con $0 < \theta < 2\pi$. En ella, $P(t)$ denota el punto de intersección del lado final de θ con la circunferencia unitaria U. Usando la fórmula $s = r\theta$ con $r = 1$, se ve que el arco $\widehat{AP}$ que el ángulo θ intercepta tiene longitud $s = t$. Entonces, *el número real t puede considerarse como la medida en radianes del ángulo θ o la longitud del arco $\widehat{AP}$ de U.*

Para todo $t > 0$ se puede pensar que el ángulo θ fue generado al girar un rayo coincidente con la parte positiva del eje x alrededor del origen en el sentido positivo. En este caso, t es la distancia sobre U que el punto $P(t)$ recorre antes de llegar a su posición final. Si $t < 0$, entonces $|t|$ es la distancia recorrida por $P(t)$ sobre U en el sentido negativo.

La discusión anterior indica cómo se puede asociar a cada número real t, un punto único $P(t)$ en U. El punto $P(t)$ se llama **punto de la circunferencia unitaria U que corresponde a t.** Las seis **funciones trigonométricas** se pueden definir a partir de las coordenadas (x, y) de $P(t)$. Estas funciones son el **seno**, el **coseno**, la **tangente**, la **cotangente**, la **secante** y la **cosecante** y se denotan por los símbolos **sen, cos, tan, cot, sec** y **csc**, respectivamente. Si t es un número real, la función seno asocia a t otro número real que se denota por sen (t), o bien sen t. Para las otras cinco funciones se usa una notación similar.

Para tomar en cuenta las coordenadas rectangulares de $P(t)$, se usa la notación $P(x, y)$ en vez de $P(t)$ y se dice que $P(x, y)$ es el punto de la circunferencia unitaria que corresponde a t. Esta notación se usa en la siguiente definición.

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEFINIDAS POR MEDIO DE UNA CIRCUNFERENCIA UNITARIA (8.4)

Si t es un número real y $P(x, y)$ es el punto de una circunferencia unitaria U que corresponde a t, entonces

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \csc t = \frac{1}{y} \ (\text{para } y \neq 0)$$

$$\cos t = x \qquad \sec t = \frac{1}{x} \ (\text{para } x \neq 0)$$

$$\tan t = \frac{y}{x} \ (\text{para } x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \ (\text{para } y \neq 0)$$

Debido a que estas fórmulas están dadas en términos de las coordenadas de un punto sobre una circunferencia unitaria, a veces se llaman **funciones circulares** a las funciones trigonométricas.

El dominio de las funciones seno y coseno es $\mathbb{R}$, porque sen $t = x$ y $\cos t = y$ existen para todo número real t.

En las definiciones de las funciones tangente y secante, aparece x en el denominador, y por tanto se deben excluir los valores de t para los que x es 0; es decir, los valores de t a los que corresponden los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ sobre el eje y. Resulta que el dominio de las funciones tangente y secante consta de todos los números reales *excepto* $(\pi/2) + n\pi$ para todo entero n. En particular, se excluyen $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, $\pm 5\pi/2$, etcétera.

Para $\cot t = x/y$ y $\csc t = 1/y$, el número y aparece en el denominador, y por tanto hay que excluir los valores de t que dan los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ sobre el eje x. Entonces, el dominio de las funciones cotangente y cosecante consta de todos los números reales *excepto* $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$ y, en general, $n\pi$ para todo entero n.

Nótese que $P(x, y)$ es un punto de la circunferencia unitaria U y, por consiguiente, $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 1$. Esto implica que

$$|\operatorname{sen} t| \leq 1, \qquad |\cos t| \leq 1, \qquad |\csc t| \geq 1, \qquad |\sec t| \geq 1$$

para todo t en los dominios de estas funciones. En la Sección 8.2 se verá que sen t y

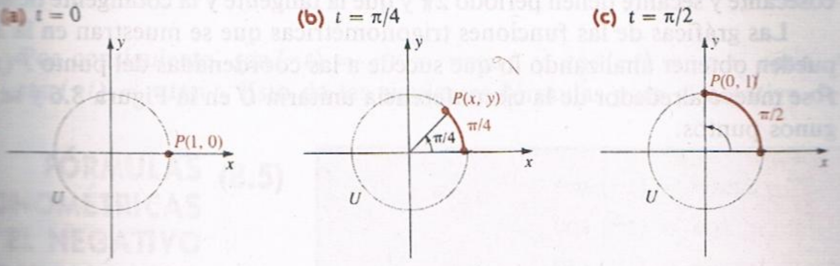
$\cos t$ toman *todos* los valores entre -1 y 1. También se puede demostrar que el contradominio de las funciones tangente y cotangente es $\mathbb{R}$ y el contradominio de las funciones cosecante y secante es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

EJEMPLO 2 Calcular los valores de las funciones trigonométricas en

(a) $t = 0$ (b) $t = \pi/4$ (c) $t = \pi/2$

Solución Los puntos $P(x, y)$ de la circunferencia unitaria U que corresponden a los valores dados de t, aparecen localizados en la Figura 8.7.

FIGURA 8.7



(a) Para $t = 0$ tomamos $x = 1$ y $y = 0$ en la Definición (8.4) y se obtienen los valores en el primer renglón de la tabla de abajo. Nótese que, como $y = 0$, csc y y cot y no están definidas, lo que se indica con rayas o guiones en la tabla.

(b) Para $t = \pi/4$, la recta que pasa por O y P biseca el primer cuadrante y P tiene coordenadas de la forma (x, x). Usando la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ para U, obtenemos $P(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Utilizando las coordenadas de P en la Definición (8.4) obtenemos el segundo renglón de la tabla.

(c) Finalmente, sustituimos $x = 0$ y $y = 1$ en la definición. Los resultados para $t = \pi/2$ están dados en el último renglón de la tabla.

t	(x, y)	$\operatorname{sen} t$	$\cos t$	$\tan t$	$\csc t$	$\sec t$	$\cot t$
0	$(1, 0)$	0	1	0	—	1	—
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$	1	0	—	1	—	0

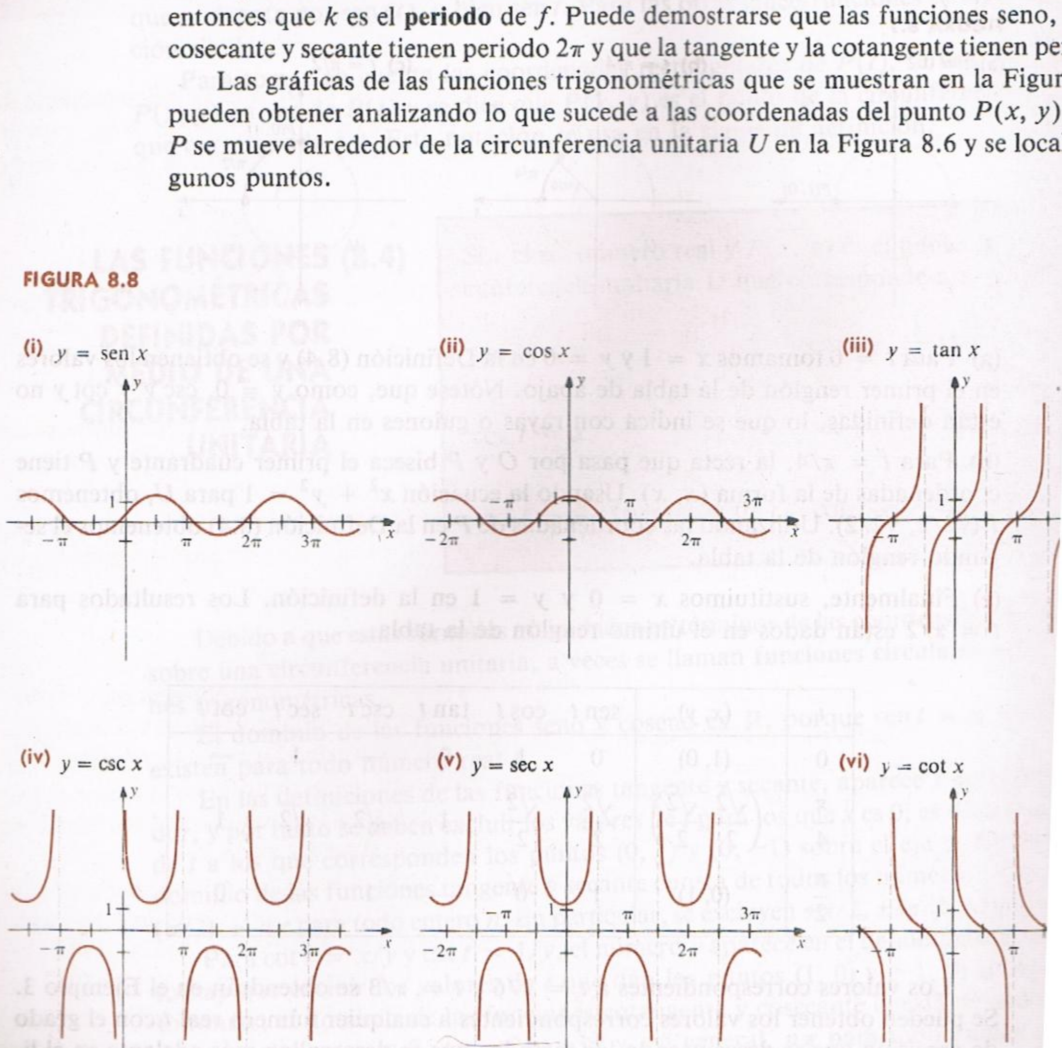
Los valores correspondientes a $t = \pi/6$ y $t = \pi/3$ se obtendrán en el Ejemplo 3. Se pueden obtener los valores correspondientes a cualquier número real t con el grado de precisión que se desee usando los métodos que se desarrollan más adelante en el libro. Se supondrá que el lector sabe cómo usar las tablas trigonométricas (véase el Apéndice III) o una calculadora para obtener los valores aproximados de las funciones trigonométricas.

Si $P(x, y)$, en la Definición (8.4), está en el cuadrante I, entonces x y y son ambos positivos y por lo tanto, todos los valores de las funciones trigonométricas son positivos. Si $P(x, y)$ está en el cuadrante II, entonces x es negativo, y es positivo, y tanto sen t y csc t son positivos, mientras que las otras cuatro funciones son nega Se pueden hacer observaciones similares con respecto a los otros cuadrantes.

Como el perímetro de la circunferencia unitaria U es 2π, se obtiene el mismo $P(x, y)$ con $t + 2\pi n$ para todo entero n. Es decir, los valores de las funciones tri métricas se repiten en intervalos sucesivos de longitud 2π. Se dice que una fun con dominio D es **periódica** si existe un número real positivo k tal que $t + k$ e D y $f(t + k) = f(t)$ para todo t en D. Geométricamente esto significa que la g de f se repite cuando las abscisas de los puntos toman valores en intervalos suc de amplitud k. Si existe un mínimo número real positivo k con esta propiedad, entonces que k es el **periodo** de f. Puede demostrarse que las funciones seno, c cosecante y secante tienen periodo 2π y que la tangente y la cotangente tienen peri

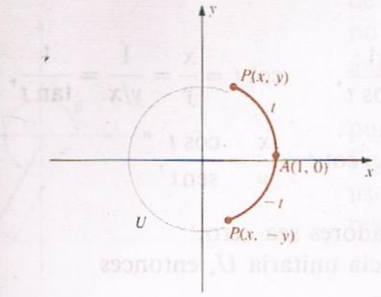
Las gráficas de las funciones trigonométricas que se muestran en la Figura pueden obtener analizando lo que sucede a las coordenadas del punto $P(x, y)$ c P se mueve alrededor de la circunferencia unitaria U en la Figura 8.6 y se locali gunos puntos.

FIGURA 8.8



Si $P(x, y)$ es el punto de la circunferencia unitaria U correspondiente a t, como se ilustra en la Figura 8.9, $P(x, -y)$ corresponde a $-t$.

FIGURA 8.9



Por consiguiente, $\operatorname{sen}(-t) = -y = -\operatorname{sen} t$ y $\cos(-t) = x = \cos t$. Análogamente, $\tan(-t) = -\tan t$. Esto da las siguientes fórmulas para el negativo de un ángulo:

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS PARA EL NEGATIVO DE UN NÚMERO (8.5)

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$$
$$\cos(-t) = \cos t$$
$$\tan(-t) = -\tan t$$

Si $f(t) = \cos t$, entonces de (8.5),

$$f(-t) = \cos(-t) = \cos t = f(t).$$

De modo que la función coseno es par y, de acuerdo con el Teorema (1.23), su gráfica es simétrica con respecto al eje y (véase la Figura 8.8). Análogamente, las funciones seno y tangente son impares y sus gráficas son simétricas con respecto al origen.

Hay muchas relaciones entre las funciones trigonométricas. Las fórmulas que aparecen en el recuadro siguiente son, sin lugar a dudas, las identidades trigonométricas más importantes porque se usan para simplificar y unificar varios aspectos del tema. Como las fórmulas son válidas para cualquier valor permitido de t y son parte de los fundamentos de la trigonometría, se llaman *Identidades Fundamentales*.

En tres de las citadas identidades intervienen cuadrados como $(\operatorname{sen} t)^2$ y $(\cos t)^2$. En general, si n es un entero diferente de -1, potencias como $(\cos t)^n$ se escriben en la forma $\cos^n t$. Los símbolos especiales $\operatorname{sen}^{-1} t$ y $\cos^{-1} t$ están reservados para las funciones inversas de las funciones trigonométricas, que se estudian en la Sección 8.5.

IDENTIDADES FUNDAMENTALES (8.6)

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \qquad 1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

$$\cot t = \frac{1}{\tan t} \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

Demostración Las demostraciones se deducen de las definiciones de las funciones trigonométricas. Así,

$$\csc t = \frac{1}{y} = \frac{1}{\operatorname{sen} t}, \quad \sec t = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{x}{y} = \frac{1}{y/x} = \frac{1}{\tan t},$$

$$\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{x}{y} = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t},$$

siempre y cuando ninguno de los denominadores sea cero.

Si (x, y) es un punto de la circunferencia unitaria U, entonces

$$y^2 + x^2 = 1.$$

Como $y = \operatorname{sen} t$ y $x = \cos t$, se obtiene

$$(\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 = 1$$

o equivalentemente,

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Si $\cos t \neq 0$, entonces dividiendo ambos lados de la última ecuación entre $\cos^2 t$, resulta

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$$

o bien

$$\left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2$$

Como $\tan t = \operatorname{sen} t/\cos t$ y $\sec t = 1/\cos t$, se ve que

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t.$$

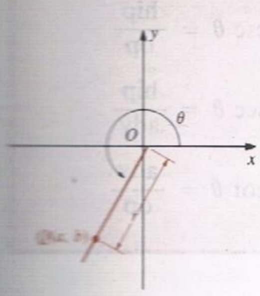
La demostración de la última identidad fundamental se deja como ejercicio. • •

En algunas aplicaciones es conveniente cambiar el dominio de una función trigonométrica de un subconjunto de $\mathbb{R}$ a un conjunto de ángulos. Esto se logra mediante la siguiente definición.

DEFINICIÓN (8.7) Sea θ un ángulo con medida t en radianes. **El valor de una función trigonométrica en θ es su valor en el número real t.**

De la Definición (8.7) se deduce que $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} t$, $\cos\theta = \cos t$, etcétera, donde t es la medida o el valor en radianes de θ. Para aclarar más qué unidad de medida angular se utiliza, cada vez que el ángulo esté medido en grados se pone explícitamente el símbolo de grados, como en sen 65° o tan 150°. Los números a los que no se agrega un símbolo de unidad, como en cos 3 y csc $(\pi/6)$, indican valores de ángulos en rad

FIGURA 8.10



nes. Esto es consistente con lo que se hizo previamente, donde por ejemplo, cos 3 significaba el valor de la función coseno en el número real 3, pero por definición, el coseno de un ángulo que mide 3 rad es idéntico al coseno del número real 3.

Sea θ un ángulo en la posición normal y sea $Q(a, b)$ un punto arbitrario en el lado final de θ, como se ilustra en la Figura 8.10. El siguiente teorema muestra cómo se pueden usar las coordenadas del punto Q para determinar los valores de las funciones trigonométricas de θ.*

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS (8.8)

Sea θ un ángulo en la posición normal sobre un sistema de coordenadas rectangulares y sea $Q(a, b)$ cualquier punto distinto de O sobre el lado final de θ. De modo que si $d(O, Q) = r$, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{b}\ (\text{para } b \neq 0)$$

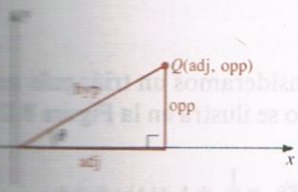
$$\cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{a}\ (\text{para } a \neq 0)$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}\ (\text{para } a \neq 0) \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}\ (\text{para } b \neq 0).$$

Cuando $r = 1$ el Teorema (8.8) se reduce a (8.4) con $a = x$, $b = y$ y $\theta = t$.

En el caso de ángulos agudos, los valores de las funciones trigonométricas pueden interpretarse como razones (o cocientes) de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Recordemos que un **triángulo de este tipo** es aquel que tiene un **ángulo recto**. Un ángulo agudo θ se puede considerar como uno de los ángulos de un triángulo rectángulo y se puede hablar de las longitudes de la **hipotenusa**, del **cateto opuesto** y del **cateto adyacente**. Para abreviar se usarán los símbolos **hip**, **op** y **ady**, respectivamente, para denotar estos números.

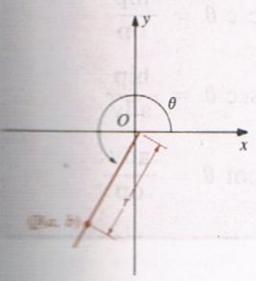
FIGURA 8.11



Si un triángulo rectángulo se coloca en un sistema de coordenadas rectangulares, como en la Figura 8.11, entonces las longitudes del cateto adyacente y el cateto opuesto a θ son, respectivamente, la abscisa y la ordenada del punto Q, que es el vértice del triángulo donde se unen la hipotenusa y el cateto opuesto. Del Teorema (8.8) se obtiene lo siguiente.

* Más detalles pueden verse en: E.W. Swokowski: *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, 2a. edición (Grupo Editorial Iberoamérica, México, D.F., 1988), Sección 6.5.

FIGURA 8.10



nes. Esto es consistente con lo que se hizo previamente, donde por ejemplo, cos 3 significaba el valor de la función coseno en el número real 3, pero por definición, el coseno de un ángulo que mide 3 rad es idéntico al coseno del número real 3.

Sea θ un ángulo en la posición normal y sea $Q(a, b)$ un punto arbitrario en el lado final de θ, como se ilustra en la Figura 8.10. El siguiente teorema muestra cómo se pueden usar las coordenadas del punto Q para determinar los valores de las funciones trigonométricas de θ.*

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS (8.8)

Sea θ un ángulo en la posición normal sobre un sistema de coordenadas rectangulares y sea $Q(a, b)$ cualquier punto distinto de O sobre el lado final de θ. De modo que si $d(O, Q) = r$, entonces

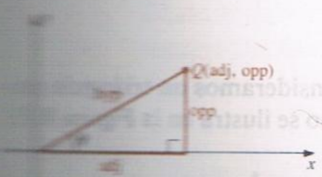
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{b}\ (\text{para } b \neq 0)$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{a}\ (\text{para } a \neq 0)$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}\ (\text{para } a \neq 0) \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}\ (\text{para } b \neq 0).$$

Cuando $r = 1$ el Teorema (8.8) se reduce a (8.4) con $a = x$, $b = y$ y $\theta = t$.

FIGURA 8.11



En el caso de ángulos agudos, los valores de las funciones trigonométricas pueden interpretarse como razones (o cocientes) de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Recordemos que un **triángulo de este tipo** es aquel que tiene un **ángulo recto**. Un ángulo agudo θ se puede considerar como uno de los ángulos de un triángulo rectángulo y se puede hablar de las longitudes de la **hipotenusa**, del **cateto opuesto** y del **cateto adyacente**. Para abreviar se usarán los símbolos **hip**, **op** y **ady**, respectivamente, para denotar estos números.

Si un triángulo rectángulo se coloca en un sistema de coordenadas rectangulares, como en la Figura 8.11, entonces las longitudes del cateto adyacente y el cateto opuesto a θ son, respectivamente, la abscisa y la ordenada del punto Q, que es el vértice del triángulo donde se unen la hipotenusa y el cateto opuesto. Del Teorema (8.8) se obtiene lo siguiente.

* Más detalles pueden verse en: E.W. Swokowski: *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, 2a. edición (Grupo Editorial Iberoamérica, México, D.F., 1988), Sección 6.5.

PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO (8.9)

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

Estas fórmulas son muy importantes para trabajar con triángulos rectángulos. El siguiente ejemplo ilustra cómo se usan.

EJEMPLO 3 Calcular $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$ para los siguientes valores de θ:

(a) $\theta = 60°$ **(b)** $\theta = 30°$ **(c)** $\theta = 45°$

Solución Consideremos un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud 2. La mediana que va de un vértice al lado opuesto biseca el ángulo del vértice, como se ilustra en la Figura 8.12. Por el Teorema de Pitágoras, la longitud de esta mediana es $\sqrt{3}$. Usando (8.9) con respecto al triángulo coloreado, obtenemos los siguientes valores:

(a) $\operatorname{sen} 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$, $\tan 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

(b) $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{1}{2}$, $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

FIGURA 8.12

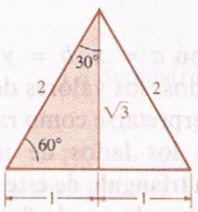
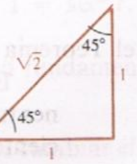


FIGURA 8.13



(c) Para calcular los valores funcionales para $\theta = 45°$, consideramos un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales tienen longitud 1, como se ilustra en la Figura 8.13. Entonces,

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°, \qquad \tan 45° = \frac{1}{1} = 1$$

Algunas de las identidades trigonométricas siguientes serán de utilidad a lo largo de este libro. Sus demostraciones se encuentran en libros de trigonometría.

FÓRMULAS PARA SUMAS Y RESTAS DE ÁNGULOS (8.10)

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

$$\operatorname{sen}(u-v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

FÓRMULAS PARA EL DOBLE DE UN ÁNGULO (8.11)

$$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u = 2\cos^2 u - 1$$

$$\tan 2u = \frac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$$

FÓRMULAS PARA LA MITAD DE UN ÁNGULO (8.12)

$$\operatorname{sen}^2 \frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{2} \qquad \cos^2 \frac{u}{2} = \frac{1 + \cos u}{2}$$

$$\tan \frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u}$$

FÓRMULAS PARA PRODUCTOS (8.13)

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)\right]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(u+v) - \operatorname{sen}(u-v)\right]$$

$$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}\left[\cos(u+v) + \cos(u-v)\right]$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}\left[\cos(u+v) - \cos(u-v)\right]$$

FÓRMULAS DE FACTORIZACIÓN (8.14)

$$\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v = 2 \operatorname{sen} \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \operatorname{sen} \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \operatorname{sen} \frac{u+v}{2} \operatorname{sen} \frac{u-v}{2}$$

EJERCICIOS 8.1

1. Verifique los datos en la tabla de radianes y grados de la página 398.
2. Demuestre que $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$.
3. Encuentre el cuadrante que contiene a θ suponiendo que
   (a) $\sec\theta < 0$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$.
   (b) $\cot\theta > 0$ y $\csc\theta < 0$.
   (c) $\cos\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$.
4. Calcule los valores de las otras funciones trigonométricas dado que
   (a) $\operatorname{sen} t = -\frac{4}{5}$ y $\cos t = \frac{3}{5}$.
   (b) $\csc t = \sqrt{13}/2$ y $\cot t = -\frac{3}{2}$.
5. Calcule los valores de las funciones trigonométricas en los siguientes números reales, sin usar tablas ni calculadora:
   (a) $9\pi/2$ (b) $-5\pi/4$ (c) 0 (d) $11\pi/6$
6. Calcule el valor (o medida) en radianes correspondiente al valor en grados dado, sin usar calculadora:
   $330°$, $405°$, $-150°$, $240°$, $36°$
7. Determine el valor en grados correspondiente al valor en radianes dada, sin usar calculadora:
   $9\pi/2$, $-2\pi/3$, $7\pi/4$, 5π, $\pi/5$
8. Un ángulo central θ abarca un arco de 20 cm de longitud sobre una circunferencia de 2 m de radio. ¿Cuál es el valor de θ en radianes?
9. Calcule los valores de las seis funciones trigonométricas en un ángulo θ que está en la posición normal y satisface las condiciones dadas.
   (a) El punto $(30, -40)$ está en el lado final de θ.
   (b) El lado final de θ está en el cuadrante II y es paralelo a la recta $2x + 3y + 6 = 0$.
   (c) $\theta = -90°$.
10. Calcule cada valor sin utilizar tablas ni calculadora.
    (a) $\cos 225°$ (b) $\tan 150°$ (c) $\operatorname{sen}(-\pi/6)$
    (d) $\sec(4\pi/3)$ (e) $\cot(7\pi/4)$ (f) $\csc(300°)$

Ejercicios 11-30: Verifique la identidad.

11. $\cos\theta\sec\theta = 1$
12. $\tan\alpha\cot\alpha = 1$
13. $\operatorname{sen}\theta\sec\theta = \tan\theta$
14. $\operatorname{sen}\alpha\cot\alpha = \cos\alpha$
15. $\dfrac{\csc x}{\sec x} = \cot x$
16. $\cot\beta\sec\beta = \csc\beta$
17. $(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha) = \operatorname{sen}^2\alpha$
18. $\cos^2 x(\sec^2 x - 1) = \operatorname{sen}^2 x$
19. $\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 2\cos^2 t - 1$
20. $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$
21. $\dfrac{\operatorname{sen} t}{\csc t} + \dfrac{\cos t}{\sec t} = 1$
22. $1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$
23. $(1 + \operatorname{sen}\alpha)(1 - \operatorname{sen}\alpha) = 1/\sec^2\alpha$
24. $(1 - \operatorname{sen}^2 t)(1 + \tan^2 t) = 1$
25. $\sec\beta - \cos\beta = \tan\beta\operatorname{sen}\beta$
26. $\dfrac{\operatorname{sen} w + \cos w}{\cos w} = 1 + \tan w$
27. $\dfrac{\csc^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \cot^2\theta$
28. $\operatorname{sen} x + \cos x\cot x = \csc x$
29. $\operatorname{sen} t(\csc t - \operatorname{sen} t) = \cos^2 t$
30. $\cot t + \tan t = \csc t\sec t$

Ejercicios 31-42: (a) Encuentre las soluciones de las ecuaciones dadas dentro del intervalo $[0, 2\pi)$, y (b) calcule el valor en grados de cada solución. (Para los Ejercicios 39-42 consulte las identidades (8.11) y (8.12).)

31. $2\cos^3\theta - \cos\theta = 0$
32. $2\cos\alpha + \tan\alpha = \sec\alpha$
33. $\operatorname{sen}\theta = \tan\theta$
34. $\csc^5\theta - 4\csc\theta =$
35. $2\cos^3 t + \cos^2 t - 2\cos t - 1 = 0$
36. $\cos x\cot^2 x = \cos x$
37. $\operatorname{sen}\beta + 2\cos^2\beta = 1$
38. $2\sec u\operatorname{sen} u + 2 = 4\operatorname{sen} u + \sec u$
39. $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$
40. $\operatorname{sen} 2u = \operatorname{sen} u$
41. $2\cos^2\frac{1}{2}\theta - 3\cos\theta = 0$
42. $\sec 2x\csc 2x = 2\csc 2x$

Ejercicios 43-51: Suponiendo que θ y φ son ángulos agudos tales que $\csc\theta = \frac{5}{3}$ y $\cos\varphi = \frac{8}{17}$, utilice las identidades (8.10)-(8.12) para calcular los números dados.

43. $\operatorname{sen}(\theta + \varphi)$
44. $\cos(\theta + \varphi)$

45. $\tan(\theta - \varphi)$
46. $\operatorname{sen}(\varphi - \theta)$
47. $\operatorname{sen} 2\varphi$
48. $\cos 2\varphi$
49. $\tan 2\theta$
50. $\operatorname{sen}(\theta/2)$
51. $\tan(\theta/2)$
52. Exprese $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ en términos de funciones de α, β y γ.
53. ¿Existe un número real t tal que $7 \operatorname{sen} t = 9$? Explique su respuesta.
54. ¿Existe un número real t tal que $3 \csc t = 1$? Explique su respuesta.

Ejercicios 55-56: Sean f y g las funciones dadas. Encuentre (a) $f(g(\pi))$ y (b) $g(f(\pi))$.

55. $f(t) = \cos t$, $g(t) = t/4$
56. $f(t) = \tan t$, $g(t) = t/4$

Ejercicios 57-60: Use la Figura 8.8 y los resultados sobre desplazamientos verticales y horizontales, ampliaciones y reflexiones para trazar la gráfica de f para $0 \le x \le 2\pi$.

57. (a) $f(x) = 4 \operatorname{sen} x$
(b) $f(x) = -\frac{1}{4} \operatorname{sen} x$
58. (a) $f(x) = \frac{1}{3} \cos x$
(b) $f(x) = -3 \cos x$
59. (a) $f(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{1}{2}\pi)$
(b) $f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\pi$
60. (a) $f(x) = 2 \cos(x + \pi)$
(b) $f(x) = 2 \cos x + \pi$

8.2 LÍMITES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

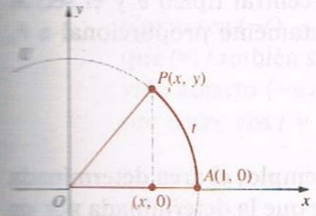
Al discutir los límites de las expresiones trigonométricas en que intervienen sen t, cos x, tan θ, etcétera, *se supondrá que las variables son números reales o medidas de un ángulo en radianes*. El siguiente resultado es importante para lo que sigue.

TEOREMA (8.15)

$$\lim_{t \to 0} \operatorname{sen} t = 0.$$

Demostración Se probará primero que $\lim_{t \to 0^+} \operatorname{sen} t = 0$. Como para esto sólo interesan los valores positivos de t cercanos a cero, puede suponerse que $0 < t < \pi/2$. Sea U la circunferencia de radio 1 con centro en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares y sea A el punto $(1, 0)$. Si $P(x, y)$ es el punto de U tal que $\widehat{AP} = t$, como se ilustra en la Figura 8.14, entonces la medida en radianes del ángulo AOP es t. En la figura se ve que

FIGURA 8.14



$$0 < y < t$$

o, como $y = \operatorname{sen} t$,

$$0 < \operatorname{sen} t < t.$$

En vista de que $\lim_{t \to 0^+} t = 0$, del Teorema de Intercalación (2.22) se deduce que $\lim_{t \to 0^+} \operatorname{sen} t = 0$.

Para completar la demostración basta probar que $\lim_{t\to 0^-} \operatorname{sen} t = 0$. Si $-\pi/2 < t < 0$, entonces $0 < -t < \pi/2$ y por lo tanto, de la primera parte de la demostración,

$$0 < \operatorname{sen}(-t) < -t.$$

Multiplicando por -1 la última desigualdad y usando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$, se obtiene

$$t < \operatorname{sen} t < 0.$$

Como $\lim_{t\to 0^-} t = 0$, del Teorema de Intercalación se deduce que $\lim_{t\to 0^-} \operatorname{sen} t = 0$.

COROLARIO (8.16)

$$\lim_{t\to 0} \cos t = 1.$$

Demostración Debido a que $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, resulta que $\cos t = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$. Si $-\pi/2 < t < \pi/2$, entonces $\cos t$ es positivo y por lo tanto $\cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$. Por consiguiente,

$$\lim_{t\to 0} \cos t = \lim_{t\to 0} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{\lim_{t\to 0} (1 - \operatorname{sen}^2 t)}$$
$$= \sqrt{1 - 0} = 1.$$

En la Sección 8.3 será necesario conocer los límites de $(\operatorname{sen} t)/t$ y $(1 - \cos t)/t$ cuando t tiende a 0. Éstos se presentan en los Teoremas (8.18) y (8.19). En la demostración del Teorema (8.18) se usa el siguiente resultado.

TEOREMA (8.17)

Si θ es el valor en radianes de un ángulo central de una circunferencia de radio r, entonces el área A del sector circular determinado por θ es

$$A = \tfrac{1}{2} r^2 \theta.$$

Demostración En la Figura 8.15 se muestra un ángulo central típico θ y el sector circular que determina. El área del sector circular es directamente proporcional a θ, es decir,

$$A = k\theta$$

FIGURA 8.15

para algún número real k. Por ejemplo, el área determinada por un ángulo de 2 rad es el doble que la determinada por un ángulo de 1 rad. En particular, si $\theta = 2\pi$, entonces el sector circular es todo el círculo y $A = \pi r^2$. De modo que

$$\pi r^2 = k(2\pi) \quad \text{o bien} \quad k = \tfrac{1}{2} r^2$$

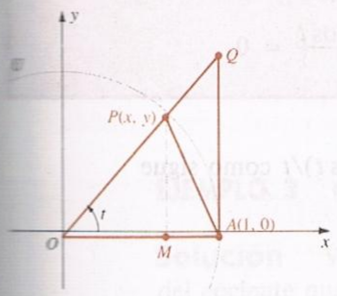
y por lo tanto

$$A = \tfrac{1}{2}r^2\theta$$ • •

TEOREMA (8.18)

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

FIGURA 8.16



Demostración Si $0 < t < \pi/2$, se tiene la situación ilustrada en la Figura 8.16, donde $P(x, y)$ es el punto de la circunferencia unitaria U tal que $\widehat{AP} = t$, y M es el punto $(x, 0)$. Si A_1 es el área del triángulo AOP, A_2 el área del sector circular AOP y A_3 el área del triángulo AOQ, entonces

$$A_1 < A_2 < A_3.$$

Usando la fórmula para el área de un triángulo y el Teorema (8.17), se obtiene

$$A_1 = \tfrac{1}{2}(1)d(M, P) = \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t$$
$$A_2 = \tfrac{1}{2}(1)^2 t = \tfrac{1}{2}t$$
$$A_3 = \tfrac{1}{2}(1)d(A, Q) = \tfrac{1}{2}\tan t.$$

Por lo tanto,

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t < \tfrac{1}{2}t < \tfrac{1}{2}\tan t.$$

Usando la identidad $\tan t = (\operatorname{sen} t)/(\cos t)$ y dividiendo entre $\frac{1}{2}$ sen t, se obtiene

$$1 < \frac{t}{\operatorname{sen} t} < \frac{1}{\cos t}$$

o, equivalentemente,

$$(*) \qquad 1 > \frac{\operatorname{sen} t}{t} > \cos t.$$

Si $-\pi/2 < t < 0$, entonces $0 < -t < \pi/2$ y de los resultados ya establecidos,

$$1 > \frac{\operatorname{sen}(-t)}{-t} > \cos(-t).$$

Como $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$ y $\cos(-t) = \cos t$, esta igualdad se reduce a (*). Esto demuestra que (*) también se satisface para $-\pi/2 < t < 0$, y por lo tanto, para todo t en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, excepto $t = 0$. Como $\lim_{t\to 0}\cos t = 1$ y $(\operatorname{sen} t)/t$ está siempre entre $\cos t$ y 1, del Teorema de Intercalación se deduce que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$ • •

En otras palabras, el Teorema (8.18) dice que si t está cerca de 0, entonces $(\operatorname{sen} t)/t$ está cerca de 1. Otra manera de enunciar esto es escribir $\operatorname{sen} t \approx t$ para valores pequeños de t. Es importante recordar que si t denota un ángulo, entonces en el Teorema

(8.18) *t debe expresarse en radianes* y lo mismo para la fórmula de aproximación $\operatorname{sen} t \approx t$. Por ejemplo, de las tablas trigonométricas o con una calculadora puede verse que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(0.06) &\approx 0.05996\\ \operatorname{sen}(0.05) &\approx 0.04998\\ \operatorname{sen}(0.04) &\approx 0.03999\\ \operatorname{sen}(0.03) &\approx 0.03000\end{aligned}$$

con una precisión de cinco decimales.

TEOREMA (8.19)

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t} = 0.$$

Demostración Se puede cambiar la forma de $(1 - \cos t)/t$ como sigue

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos t}{t} &= \frac{1-\cos t}{t}\cdot\frac{1+\cos t}{1+\cos t}\\ &= \frac{1-\cos^2 t}{t(1+\cos t)}\\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t(1+\cos t)} = \frac{\operatorname{sen} t}{t}\cdot\frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t}\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t} &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\cdot\frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t}\right)\\ &= \left(\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)\left(\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t}\right)\\ &= 1\cdot\left(\frac{0}{1+1}\right) = 1\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

• •

EJEMPLO 1 Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{2x}$.

Solución No es posible aplicar directamente el Teorema (8.18) porque la expresión dada no está en la forma $(\operatorname{sen} t)/t$. Sin embargo, podemos llegar a ella (con $t = 5x$) haciendo las siguientes manipulaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{2x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} 5x}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\frac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\\ &= \frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\end{aligned}$$

De la definición de límite se deduce que $x \to 0$ se puede sustituir por $5x \to 0$. Por lo tanto, aplicando el Teorema (8.18) con $t = 5x$, obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{2x} = \frac{5}{2}(1) = \frac{5}{2} \quad \bullet$$

EJEMPLO 2 Calcular $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\tan t}{2t}$.

Solución Usando el hecho de que $\tan t = \operatorname{sen} t/\cos t$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tan t}{2t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{t} \cdot \frac{1}{\cos t}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \quad \bullet$$

EJEMPLO 3 Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x + 1 - \cos x}{3x}$.

Solución Vamos a usar el Teorema (8.19). Para ello comenzamos aislando la parte del cociente que contiene $(1 - \cos x)/x$ y luego se procede como sigue.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x + 1 - \cos x}{3x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2x}{3x} + \frac{1 - \cos x}{3x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{2x}{3x}\right) + \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\left(\frac{1 - \cos x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{2}{3} \quad \bullet$$

EJERCICIOS 8.2

Ejercicios 1-26: Calcule el límite si es que existe.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x}}$

3. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 t}{(2t)^3}$

4. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{3\theta + \operatorname{sen} \theta}{\theta}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2 + \operatorname{sen} x}{3 + x}$

6. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos 3t}{t}$

7. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{2\cos \theta - 2}{3\theta}$

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 1}{x + \cos x}$

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(-3x)}{4x}$

10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$

11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^{2/3}}$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - 2x^2 - 2\cos x + \cos^2 x}{x^2}$

13. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{4t^2 + 3t \operatorname{sen} t}{t^2}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \cos x - x^2}{2x}$

15. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\cos t}{1 - \operatorname{sen} t}$

16. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t}$

17. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t}{\operatorname{sen} t}$

18. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}x}{x}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x + \tan x}{\operatorname{sen} x}$

20. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 2t}{t^2}$

21. $\lim_{x\to 0} x \cot x$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\csc 2x}{\cot x}$

23. $\lim_{\alpha\to 0} \alpha^2 \csc^2 \alpha$

24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$

25. $\lim_{v\to 0} \dfrac{\cos (v + \frac{1}{2}\pi)}{v}$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x}{\operatorname{sen} x}$

Ejercicios 27-30: Demuestre la igualdad del límite para todos los números reales a y b diferentes de cero.

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos ax}{bx} = 0$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx} = \dfrac{a}{b}$

30. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos ax}{\cos bx} = 1$

8.3 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

A continuación se presentan las derivadas de las seis funciones trigonométricas. En el enunciado del teorema se supone que $u = g(x)$, donde g es una función derivable y x se restringe a los valores para los que la función trigonométrica está definida.

TEOREMA (8.20)

$$\begin{aligned}
D_x \operatorname{sen} u &= (\cos u)\, D_x u \\
D_x \cos u &= (-\operatorname{sen} u)\, D_x u \\
D_x \tan u &= (\sec^2 u)\, D_x u \\
D_x \csc u &= (-\csc u \cot u)\, D_x u \\
D_x \sec u &= (\sec u \tan u)\, D_x u \\
D_x \cot u &= (-\csc^2 u)\, D_x u
\end{aligned}$$

Demostración Para la primera fórmula basta demostrar que $D_x \operatorname{sen} x = \cos x$ ya que $D_x \operatorname{sen} u$ se puede encontrar usando la Regla de la Cadena. Sea pues $f(x) = \operatorname{sen} x$. Si $f'(x)$ existe, entonces

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}.
\end{aligned}$$

Usando la fórmula para el seno de una suma (véase (8.10)),

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x (\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \right].
\end{aligned}$$

De los Teoremas (8.18) y (8.19),

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1.$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = (\operatorname{sen} x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x,$$

es decir,

$$D_x \operatorname{sen} x = \cos x.$$

Se demostró que la derivada de la función seno es la función coseno.

Si $y = \operatorname{sen} u$ y $u = g(x)$, entonces por la Regla de la Cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}.$$

Usando la notación D_x esto puede escribirse

$$D_x \operatorname{sen} u = \cos u\, D_x u.$$

Para obtener la derivada de la función coseno se toma $f(x) = \cos x$. En este caso,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}.$$

Usando la fórmula para el coseno de una suma,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \operatorname{sen} x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)\right]. \end{aligned}$$

De los Teoremas (8.18) y (8.19),

$$f'(x) = (\cos x)(0) - (\operatorname{sen} x)(1) = -\operatorname{sen} x,$$

es decir,

$$D_x \cos x = -\operatorname{sen} x.$$

Por lo tanto, la derivada de la función coseno es el *negativo* de la función seno. Para encontrar $D_x \cos u$ se puede usar la Regla de la Cadena como se hizo para $\operatorname{sen} u$.

Para hallar la derivada de la función tangente se utiliza la identidad fundamental $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$ y se aplica la Regla del Cociente como sigue:

$$\begin{aligned} D_x \tan x &= D_x \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) \\ &= \frac{\cos x (D_x \operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x (D_x \cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x (\cos x) - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

Análogamente, para la función secante,

$$D_x \sec x = D_x \left(\frac{1}{\cos x} \right)$$

$$= \frac{(\cos x)(D_x\, 1) - (1)\, D_x\, (\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(\cos x)(0) - (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$= \sec x \tan x$$

Se deja al lector la verificación de las fórmulas para las derivadas de $\cot x$ y $\csc x$.

El Teorema (8.20) puede servir para obtener información acerca de la continuidad de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, como las funciones seno y coseno son derivables en todo número real, del Teorema (3.5) se deduce que estas funciones son continuas en todo $\mathbb{R}$. Análogamente, la función tangente es continua en los intervalos abiertos $(-\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$, etcétera ya que es derivable en cada número de estos intervalos.

EJEMPLO 1 Encontrar y' para $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$.

Solución De la Regla del Cociente y el Teorema (8.20) (con $u = x$),

$$y' = \frac{(1 + \cos x)\, D_x\, (\operatorname{sen} x) - (\operatorname{sen} x)\, D_x\, (1 + \cos x)}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(0 - \operatorname{sen} x)}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + \cos x}$$

En la solución del Ejemplo 1 se usó la identidad fundamental $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. Ésta y otras identidades trigonométricas se usan a menudo para resolver problemas en los que aparecen las derivadas de las funciones trigonométricas.

EJEMPLO 2 Encontrar $g'(x)$ para $g(x) = \sec x \tan x$.

Solución Aplicando la Regla del Producto y el Teorema (8.20) (con $u = x$),

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\sec x)(D_x \tan x) + (\tan x)(D_x \sec x) \\ &= (\sec x)(\sec^2 x) + (\tan x)(\sec x \tan x) \\ &= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x \\ &= \sec x\,(\sec^2 x + \tan^2 x). \end{aligned}$$

La fórmula para $g'(x)$ se puede escribir de muchas otras maneras. Por ejemplo, como

$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1 \quad \text{o bien} \quad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

puede escribirse

$$g'(x) = \sec x\,(2\tan^2 x + 1) \quad \text{o bien} \quad g'(x) = \sec x\,(2\sec^2 x - 1) \quad \bullet$$

EJEMPLO 3 Encontrar $k'(\theta)$ para $k(\theta) = \sec\theta \cot\theta$.

Solución Podríamos usar la Regla del Producto como en el Ejemplo 2, sin embargo, es más fácil cambiar antes la forma de $k(\theta)$ aprovechando las identidades fundamentales como sigue:

$$k(\theta) = \sec\theta \cot\theta = \frac{1}{\cos\theta}\,\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta.$$

Aplicando el Teorema (8.20),

$$k'(\theta) = D_\theta(\csc\theta) = -\csc\theta\cot\theta \quad \bullet$$

EJEMPLO 4 Encontrar $\dfrac{dy}{dx}$ para $y = \cos(5x^3)$.

Solución Aplicando la fórmula para $D_x \cos u$ en el Teorema (8.20), con $u = 5x^3$,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = D_x\, y = D_x \cos(5x^3) &= [-\operatorname{sen}(5x^3)]\, D_x(5x^3) \\ &= [-\operatorname{sen}(5x^3)](15x^2) \\ &= -15x^2 \operatorname{sen}(5x^3) \quad \bullet \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = \tan^3 4x$.

Solución Notamos primero que $f(x) = \tan^3 4x = (\tan 4x)^3$. Aplicando la Regla de la Potencia para Funciones (3.28) con $u = \tan 4x$ y $n = 3$,

$$f'(x) = 3(\tan 4x)^2 D_x \tan 4x = (3\tan^2 4x)\, D_x \tan 4x.$$

Luego, por el Teorema (8.20),

$$D_x \tan 4x = (\sec^2 4x)\, D_x(4x) = (\sec^2 4x)(4) = 4\sec^2 4x.$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = (3\tan^2 4x)(4\sec^2 4x) = 12\tan^2 4x \sec^2 4x \quad \bullet$$

EJEMPLO 6 Encontrar $f'(x)$ para **(a)** $f(x) = e^{-3x}\tan 2x$; **(b)** $f(x) = \sec^2(3x - 1)$.

Solución

(a) Usando primero la Regla del Producto y luego los Teoremas (8.20) y (7.14),

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-3x} D_x \tan 2x + (\tan 2x) D_x e^{-3x} \\ &= e^{-3x}(\sec^2 2x)(2) + (\tan 2x)(e^{-3x})(-3) \\ &= e^{-3x}(2 \sec^2 2x - 3 \tan 2x) \end{aligned}$$

(b) Aplicando la Regla de la Potencia y el Teorema (8.20) obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \sec(3x-1) D_x \sec(3x-1) \\ &= 2 \sec(3x-1) \sec(3x-1) \tan(3x-1)(3) \\ &= 6 \sec^2(3x-1) \tan(3x-1) \end{aligned}$$

•

EJEMPLO 7 Sea $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$. Calcular los máximos y mínimos locales y trazar la gráfica de f en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Solución Derivando,

$$f'(x) = 2 \cos x - 2 \operatorname{sen} 2x.$$

Como $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, esto se puede escribir

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cos x - 4 \operatorname{sen} x \cos x \\ &= 2 \cos x(1 - 2 \operatorname{sen} x). \end{aligned}$$

La derivada existe para todo x y $f'(x) = 0$ si $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ o bien $\cos x = 0$. Por lo tanto, los números críticos de f en el intervalo $[0, 2\pi]$ son $\pi/6$, $5\pi/6$, $\pi/2$ y $3\pi/2$.

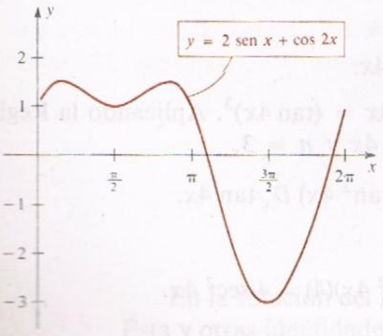
La segunda derivada de f es

$$f''(x) = -2 \operatorname{sen} x - 4 \cos 2x.$$

Sustituyendo x por los números críticos, queda

$$f''(\pi/6) = -3, \quad f''(5\pi/6) = -3, \quad f''(\pi/2) = 2, \quad f''(3\pi/2) = 6.$$

FIGURA 8.17



Aplicando el Criterio de la Segunda Derivada se ve que hay máximos locales en $\pi/6$ y $5\pi/6$, y mínimos locales en $\pi/2$ y $3\pi/2$. Por lo tanto,

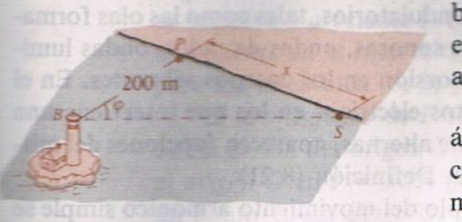
Máximos locales: $f(\pi/6) = 3/2$ y $f(5\pi/6) = 3/2$

Mínimos locales: $f(\pi/2) = 1$ y $f(3\pi/2) = -3$

Usando esta información y situando algunos puntos más obtenemos el croquis de la Figura 8.17. •

EJEMPLO 8 Un faro que se encuentra a 200 m del punto más cercano P de una costa recta gira dando una vuelta completa cada 15 s. Calcular la rapidez con la que el haz de luz se mueve al pasar por un punto a 400 m de P.

FIGURA 8.18



Solución La Figura 8.18 muestra un diagrama del problema. En ella B denota la localización del faro y φ denota el ángulo entre BP y el haz luminoso a un punto S de la costa a x m de P.

A causa de que la luz da cuatro vueltas por minuto, el ángulo φ cambia a razón de 8π radianes por minuto, es decir, $d\varphi/dt = 8\pi$. Usando el triángulo rectángulo PBS vemos que

$$\tan\varphi = \frac{x}{200} \quad \text{o bien} \quad x = 200\tan\varphi.$$

Por consiguiente, la rapidez con la que el rayo de luz se mueve a lo largo de la orilla es

$$\frac{dx}{dt} = 200\sec^2\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} = (200\sec^2\varphi)(8\pi) = 1600\pi\sec^2\varphi.$$

Si $x = 400$, entonces

$$\tan\varphi = 400/200 = 2 \quad \text{and} \quad \sec\varphi = \sqrt{1+\tan^2\varphi} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

Por lo tanto, $$\frac{dx}{dt} = 1600\pi(\sqrt{5})^2 = 8000\pi \approx 25{,}133 \text{ m/min.}$$ •

Las funciones seno y coseno desempeñan un papel importante en el estudio de las entidades físicas que vibran o tienen un movimiento periódico. Uno de los tipos de movimiento más importantes es el que se describe en la siguiente definición.

DEFINICIÓN (8.21)

Si un punto P se mueve sobre una recta coordenada l de manera que su distancia $s(t)$ al origen al tiempo t está dada por

$$s(t) = a\cos(\omega t + b)$$

o bien

$$s(t) = a\,\text{sen}(\omega t + b)$$

donde a y b son números reales arbitrarios y $\omega > 0$, entonces se dice que P está en **movimiento armónico simple**.

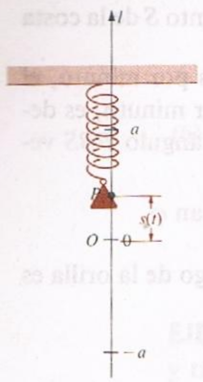
El movimiento armónico simple también se puede definir como aquél en que la aceleración $a(t)$ satisface la condición

$$a(t) = -\omega^2 s(t)$$

para todo t. Puede demostrarse (véase la Sección 19.5) que esta condición es equivalente a la de la Definición (8.21).

En el movimiento armónico simple, el punto P oscila entre los puntos de l con coordenadas $-a$ y a. La **amplitud** del movimiento es el desplazamiento máximo $|a|$ del punto desde el origen. El **periodo** es el tiempo $2\pi/\omega$ que se tarda en completar una oscilación. **La frecuencia** $\omega/2\pi$ es el número de oscilaciones por unidad de tiempo.

FIGURA 8.19



El movimiento armónico simple aparece en diversos tipos de movimientos ondulatorios, tales como las olas formadas en el agua, ondas sonoras, ondas de radio, ondas luminosas y ondas de distorsión en los cuerpos vibrantes. En el análisis de los circuitos eléctricos en los que interviene una tensión y una corriente alternas, aparecen funciones del mismo tipo que las de la Definición (8.21).

Como otro ejemplo del movimiento armónico simple se tiene el de un cuerpo fijo a un muelle o resorte que oscila verticalmente a lo largo de una recta coordenada, como se ilustra en la Figura 8.19. El número $s(t)$ representa la coordenada de un punto P del cuerpo. La amplitud $|a|$ del movimiento es constante cuando no hay fuerzas de fricción que se opongan al movimiento. Cuando existe rozamiento o fricción, la amplitud de la oscilación disminuye con el tiempo y se dice que el movimiento es *amortiguado*.

EJEMPLO 9 El cuerpo que se muestra en la Figura 8.19 está oscilando y su posición al tiempo t está dada por

$$s(t) = 10 \cos \frac{\pi}{6} t$$

donde t está en segundos y $s(t)$ en centímetros. Describir el movimiento del cuerpo.

Solución De acuerdo con la Definición (8.1), el movimiento es armónico simple con $a = 10$, $b = 0$ y $\omega = \pi/6$. La amplitud a es de 10 cm. El periodo es $2\pi/\omega = 2\pi/(\pi/6) = 12$. Entonces, hay una oscilación completa cada 12 s. La frecuencia es $\omega/2\pi = (\pi/6)/2\pi = \frac{1}{12}$, es decir, hay $\frac{1}{12}$ de oscilación cada segundo.

Analicemos el movimiento durante el intervalo de tiempo [0, 12]. Las funciones de velocidad y aceleración están dadas por

$$v(t) = s'(t) = 10\left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}t\right)\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}t,$$

$$a(t) = v'(t) = -\frac{5\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}t\right)\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi^2}{18}\cos\frac{\pi}{6}t.$$

La velocidad se anula en $t = 0$, $t = 6$ y $t = 12$, pues $\operatorname{sen}[(\pi/6)t] = 0$ para estos valores de t. La aceleración se anula en $t = 3$ y $t = 9$, puesto que en estos casos $\cos[(\pi/6)t] = 0$. Los tiempos en que la velocidad y la aceleración son cero sugieren analizar los intervalos de tiempo (0, 3), (3, 6) y (9, 12). La tabla siguiente muestra las características más importantes del movimiento. Los signos de $v(t)$ y $a(t)$ en los intervalos se pueden determinar con valores de prueba (verifique cada dato).

Intervalo de tiempo	Signo de $v(t)$	Dirección del movimiento	Signo de $a(t)$	Comportamiento de $v(t)$	Rapidez $\lvert v(t)\rvert$
(0, 3)	−	Hacia abajo	−	Decreciente	Creciente
(3, 6)	−	Hacia abajo	+	Creciente	Decreciente
(6, 9)	+	Hacia arriba	+	Creciente	Creciente
(9, 12)	+	Hacia arriba	−	Decreciente	Decreciente

Si $0 < t < 3$, la velocidad $v(t)$ es negativa y decreciente; es decir, $v(t)$ se hace *más* negativa. Esto implica que la rapidez $|v(t)|$ es *creciente*. Si $3 < t < 6$, la velocidad es negativa y creciente ($v(t)$ se hace *menos* negativa). En este caso la rapidez de P es *decreciente* en el intervalo de tiempo (3, 6). Se pueden hacer observaciones similares para los intervalos (6, 9) y (9, 12).

El movimiento de P se puede resumir como sigue: en $t = 0$, $s(0) = 10$ y P está 10 cm arriba del origen O. Luego se mueve hacia abajo ganando rapidez hasta llegar al origen O en $t = 3$. A partir de ahí comienza a disminuir su rapidez hasta llegar a un punto 10 cm abajo de O, al cabo de 6 s. Entonces la dirección del movimiento se invierte y el cuerpo se mueve hacia arriba aumentando su rapidez hasta llegar a O en $t = 9$, después de lo cual comienza a disminuir hasta llegar a su posición inicial al cabo de 12 s. En ese momento la dirección del movimiento se vuelve a invertir y se repite lo mismo indefinidamente. •

EJERCICIOS 8.3

Ejercicios 1-40: Encuentre $f'(x)$ para la expresión $f(x)$ dada.

1. $4 \cos x$
2. $x \operatorname{sen} x$
3. $\operatorname{sen}(x^2 + 2)$
4. $\cos(4 - 3x)$
5. $\cos^5 3x$
6. $\operatorname{sen}^4(x^3)$
7. $x^3 \cos \frac{1}{x}$
8. $\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$
9. $\tan(8x + 3)$
10. $\cot \frac{1}{2}x$
11. $\sec \sqrt{x - 1}$
12. $\csc(x^2 + 4)$
13. $\cot(x^3 - 2x)$
14. $\tan \sqrt[3]{5 - 6x}$
15. $\cos(3x^2) + \cos^2 3x$
16. $\tan^3 6x$
17. $\csc^2 2x$
18. $\sec e^{-2x}$
19. $x^2 \csc 5x$
20. $x \csc(1/x)$
21. $\tan^2 x \sec^3 x$
22. $x^2 \sec^3 4x$
23. $(\operatorname{sen} 5x - \cos 5x)^5$
24. $\operatorname{sen} \sqrt{x} + \sqrt{\operatorname{sen} x}$
25. $\cot^3(3x + 1)$
26. $e^{\cos 2x}$
27. $\frac{\cos 4x}{1 - \operatorname{sen} 4x}$
28. $\frac{\sec 2x}{1 + \tan 2x}$
29. $\ln|\csc x + \cot x|$
30. $\operatorname{sen}(2x + 3)^4$
31. $e^{-3x} \tan \sqrt{x}$
32. $\ln \csc^2 3x$
33. $\ln \ln \sec 2x$
34. $\csc(\cot 4x)$
35. $\tan^3 2x - \sec^3 2x$
36. $(\tan 2x - \sec 2x)^3$
37. $\frac{\csc 3x}{x^2 + 1}$
38. $4x^3 - x^2 \cot^3(1/x)$
39. [illegible]
40. $(\tan x)^{3x}$

Ejercicios 41-46: Determine dy/dx y d^2y/dx^2.

41. $y = \sec^2 3x$
42. $y = \cot^3 5x$
43. $y = \operatorname{sen} x - x \cos x$
44. $y = \ln \tan x$
45. $y = \sqrt{\tan x}$
46. $y = \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}$

Ejercicios 47-50: Encuentre y' por derivación implícita.

47. $y^2 = x \cos y$
48. $xy = \tan y$
49. $e^x \cot y = xe^{2y}$
50. $y^2 + 1 = x^2 \sec y$

Ejercicios 51-56: Calcule los máximos y mínimos locales de f en el intervalo $[0, 2\pi]$ y determine dónde f es creciente o decreciente en $[0, 2\pi]$. Trace la gráfica de f correspondiente a $0 \le x \le 2\pi$.

51. $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$
52. $f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$
53. $f(x) = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x$
54. $f(x) = x + 2 \cos x$
55. $f(x) = 2 \cos x + \operatorname{sen} 2x$
56. $f(x) = 2 \cos x + \cos 2x$
57. Halle los máximos y mínimos locales y trace la gráfica de $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x$ para $0 \le x \le 4\pi$.
58. Halle los máximos y mínimos locales de $f(x) = e^{-x} \sec x$ para $0 \le x \le 2\pi$.

Ejercicios 59-60: Calcule el máximo y el mínimo absolutos de f en el intervalo $[a, b]$.

59. $f(x) = \tan x - \sqrt{2} \sec x$, $[0, \pi/3]$

60. $f(x) = 3 \cot x + 4x$, $[\pi/6, 5\pi/6]$

Ejercicios 61-62: Encuentre ecuaciones para las rectas tangente y normal a la gráfica de la ecuación en el punto P.

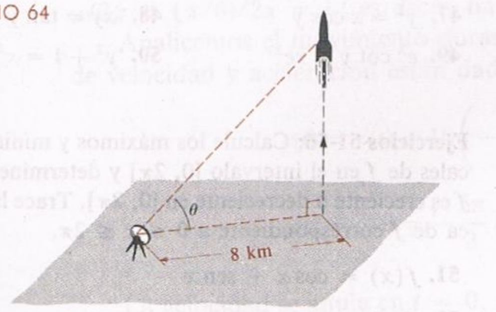
61. $y = \frac{1}{8} \csc^3 x$; $P(\pi/6, 1)$

62. $y = \tan x - \sqrt{2} \operatorname{sen} x$; $P(3\pi/4, -2)$

63. Un avión vuela con velocidad y altura constantes a lo largo de una recta que pasa directamente arriba de una estación de radar en tierra. En el momento en que el avión está a 20 km de la estación, un observador nota que su ángulo de elevación es 30° y va aumentando a razón de 0.5° por segundo. Calcule la velocidad del avión.

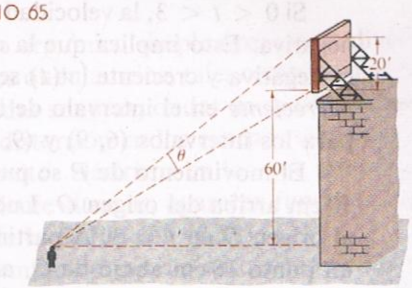
64. Un cohete despega verticalmente desde un punto a 8 km de una estación rastreadora que se encuentra a la misma altitud (véase la figura). Durante los primeros 20 s de vuelo, el ángulo de elevación θ aumenta a una razón constante de 2° por segundo. Calcule la velocidad del cohete cuando el ángulo de elevación es de 30°.

EJERCICIO 64



65. Una cartelera rectangular de 20 pie de altura está instalada arriba de un edificio de manera que su orilla inferior está 60 pie arriba del nivel de los ojos de un observador (véase la figura). ¿A qué distancia del edificio se debe colocar el observador para que el ángulo θ entre las rectas que van de sus ojos a la orilla de arriba y a la de abajo de la cartelera sea máxima? (Este ángulo será aquél con el que se obtiene una mejor vista del cartel.)

EJERCICIO 65

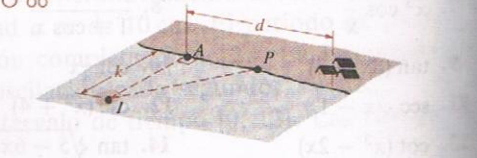


66. Un hombre en una pequeña isla I, que se encuentra a k kilómetros del punto más cercano A sobre una costa recta, desea llegar a un campamento que se encuentra a d kilómetros de A sobre la misma costa (véase la figura). El hombre planea nadar hasta algún punto P de la costa y caminar el resto del trayecto. Suponiendo que disipa c_1 calorías por kilómetro cuando nada y c_2 calorías por kilómetro cuando camina y que $c_1 > c_2$.

(a) Encuentre una fórmula para el número total c de calorías que disipa en el recorrido.

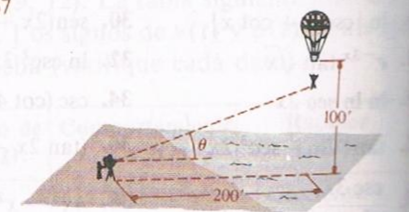
(b) ¿Para qué ángulo AIP el número de calorías c es mínimo?

EJERCICIO 66



67. Un acróbata de cine salta desde un globo de aire caliente que permanece a una altura constante de 100 pie sobre un lago. Una cámara de televisión que se encuentra en tierra a 200 pie del punto del lago que está directamente abajo del globo, lo va enfocando durante su descenso (véase la figura). ¿Con qué rapidez va cambiando el ángulo de elevación θ de la cámara a los 2 s de haber saltado? (Desprecie la altura de la cámara.)

EJERCICIO 67



68. Si un objeto que tiene un peso W se arrastra sobre un plano horizontal con una fuerza aplicada a una cuerda que está atada al objeto y la cual forma un ángulo θ con la horizontal, entonces la magnitud de la fuerza de tiro está dada por

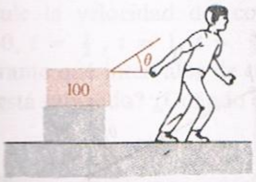
$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde μ es una constante llamada *coeficiente de fricción*. Un hombre tira una caja con masa de 100 kg sobre una superficie para la que $\mu = 0.2$ (véase la figura).

(a) Usando diferenciales, calcule aproximadamente la diferencia entre las fuerzas aplicadas cuando el ángulo θ cambia de 45° a 46°.

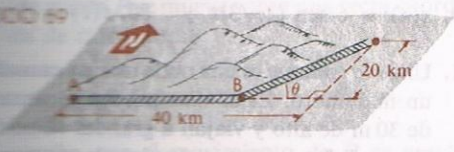
(b) Calcule el ángulo para el cual F es mínima cuando $\mu = \sqrt{3}/3$.

EJERCICIO 68



69. Se va a construir una vía de ferrocarril de un pueblo A a un pueblo C, que cambiará su dirección θ grados hacia C en un punto B (véase la figura). Debido a las montañas que hay entre A y C, el punto B de la curva debe estar por lo menos 20 km al este de A. El costo de la construcción es de \$50 000 (dólares) por kilómetro entre A y B, y de \$100 000 por kilómetro entre B y C. Calcule el ángulo θ para el cual el costo de la construcción es mínimo.

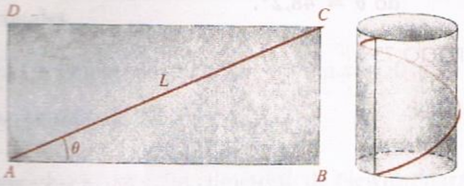
EJERCICIO 69



70. Se desea construir un cilindro juntando los lados AD y BC de un rectángulo de material elástico (véase la figura). Para hacer más resistente el cilindro, se colocará un alambre de longitud fija L según la diagonal del rectángulo. Calcule el ángulo θ para el cual el volumen del cilindro es máximo.

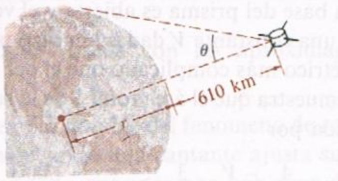
71. Un laboratorio espacial gira alrededor de la Tierra a una altura de 610 km. Un astronauta mira

EJERCICIO 70



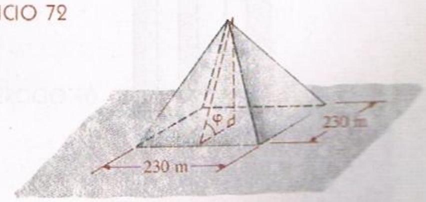
hacia el horizonte a un ángulo θ de 65.8° de la vertical (véase la figura) y el máximo error posible en la medición del ángulo es de 0.5°. Usando diferenciales, estime el error que el astronauta puede cometer al calcular el radio de la Tierra con estos datos.

EJERCICIO 71



72. La Gran Pirámide de Egipto tiene una base cuadrada de 230 m de lado (véase la figura). Para calcular la altura h de esta gigantesca construcción, un observador se coloca en el punto medio de uno de los lados y mira hacia el vértice de la pirámide. Encuentra que el ángulo φ de elevación es de 52°. ¿Cuán precisa debe ser la medición del ángulo para que el error en el cálculo de h esté entre -1 y 1 m?

EJERCICIO 72



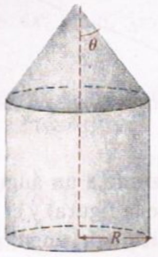
73. Un cilindro circular recto de radio R está coronado por un cono (véase la figura). El cilindro no tiene tapas y el volumen total V es una constante previamente especificada.

(a) Demuestre que el área total S de la superficie está dada por

$$S = \frac{2V}{R} + \pi R^2\left(\csc\theta - \frac{2}{3}\cot\theta\right)$$

(b) Demuestre que S alcanza un mínimo cuando $\theta \approx 48.2°$.

EJERCICIO 73

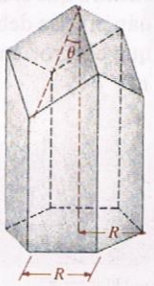


74. En el problema clásico de la estructura de un panal, un prisma hexagonal de radio (y lado) fijo R se corona con tres rombos idénticos que se encuentran en un vértice común (véase la figura). La base del prisma es abierta y el volumen total es una constante V dada. Un razonamiento geométrico más complicado que el del Ejercicio 73, demuestra que el área total S de la superficie está dada por

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{3}\,\frac{V}{R} - \frac{3}{2}R^2 \cot\theta + \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2 \csc\theta.$$

Demuestre que S alcanza su valor mínimo cuando $\theta \approx 54.7°$. (Se sabe que las abejas construyen sus panales de manera que el total de cera requerida es mínimo.)

EJERCICIO 74



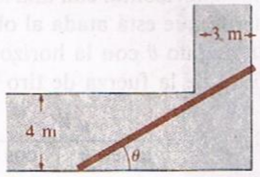
75. Dos pasillos de 3 m y 4 m de ancho se encuentran formando un ángulo recto. Evalúe la longitud de la barra rígida más larga que puede transportarse horizontalmente dando vuelta a la esquina, como se muestra en la figura (desprecie el grosor de la barra).

76. Cuando la luz viaja de un punto a otro lo hace a lo largo de la trayectoria que requiere el menor tiempo. Suponiendo que la luz tiene velocidad v_1 en el aire y v_2 en el agua, con $v_1 > v_2$, demuestre que la trayectoria que requiere el mínimo tiempo cuando la luz va de un punto P en el aire a un punto Q en el agua (véase la figura) es aquella para la cual

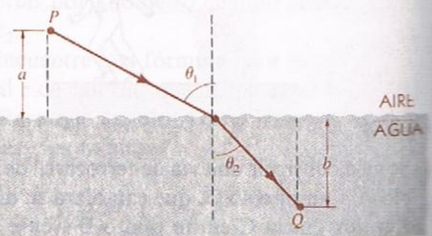
$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

(Éste es un ejemplo de la *ley de refracción de Snell.*)

EJERCICIO 75



EJERCICIO 76



Ejercicios 77-80: Se tiene que s es la función de posición de una partícula en movimiento armónico simple y t es el tiempo en segundos. Calcule la amplitud, el periodo y la frecuencia, y describa el movimiento de la partícula durante una oscilación completa.

77. $s(t) = 5\cos(\pi/4)t$ **78.** $s(t) = 4$ sen

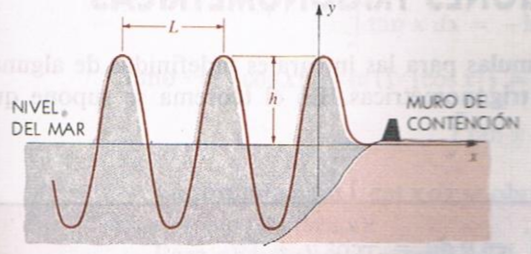
79. $s(t) = 6\operatorname{sen}(2\pi/3)t$ **80.** $s(t) = 3\cos 2$

81. Una *ola tsunami* es una onda marina causada por un maremoto. Estas olas pueden alcanzar más de 30 m de alto y viajan a grandes velocidades. En geofísica se representan las olas tsunami mediante expresiones trigonométricas de la forma $y = a\cos bt$, y se usan estas expresiones para estimar la efectividad de muros de contención. Una ola tiene una altura de 8 m, un periodo de 30 y viaja a 60 m/s.

(a) Sea (x, y) un punto sobre la ola representada en la figura. Exprese y como una función del tiempo si $y = 8$ m cuando $t = 0$

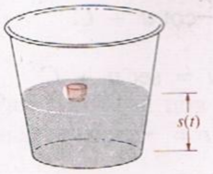
(b) ¿Cuán rápidamente asciende (o desciende) la ola cuando $y = 3$ m?

EJERCICIO 81



82. Un tapón de corcho sube y baja en un recipiente con agua de manera que la distancia del fondo del recipiente al centro del corcho al tiempo $t \geq 0$, está dada por $s(t) = 12 + \cos(\pi t)$, donde $s(t)$ se expresa en centímetros y t en segundos (véase la figura).
   (a) Calcule la velocidad del corcho cuando $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$, $t = \frac{3}{2}$ y $t = 2$.
   (b) ¿Durante qué intervalos de tiempo el corcho está subiendo? ¿Cuándo está bajando?

EJERCICIO 82



83. Un punto $P(x, y)$ se mueve con rapidez constante alrededor de una circunferencia que tiene ecuación $x^2 + y^2 = a^2$. Demuestre que el punto $Q(x, 0)$ que es la proyección sobre el eje x del punto P, tiene movimiento armónico simple.

84. Un punto P se mueve sobre una recta coordenada de manera que

$$s(t) = a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t,$$

pruebe que el movimiento de P es armónico simple
   (a) usando el comentario a continuación de la Definición (8.21).
   (b) usando únicamente métodos trigonométricos. (*Sugerencia:* Demuestre que $s(t) = A \cos(\omega t - c)$ para algunas constantes A y c.)

Ejercicios 85-86: Use el método de Newton para calcular la raíz real indicada con una precisión de cuatro decimales.

85. La raíz positiva de $2x - 3 \operatorname{sen} x = 0$

86. La raíz de $\cos x + x = 2$

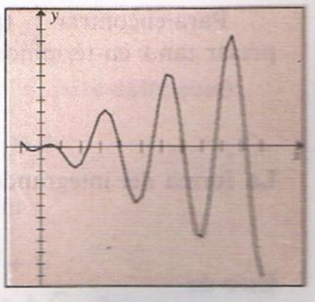
Ejercicios 87-88: Use el método de Newton para calcular todas las raíces reales de la ecuación con una precisión de dos decimales.

87. $2x - 5 - \operatorname{sen} x = 0$ 88. $x^2 - \cos 2x = 0$

89. Se pueden generar estimaciones de π aplicando el método de Newton a $f(x) = \operatorname{sen} x$ y tomando $x_1 = 3$.
   (a) Calcule las primeras cinco aproximaciones a π.
   (b) ¿Qué sucede con las aproximaciones si $x_1 = 6$?

90. Un ejemplo notable del fenómeno de *resonancia* se tiene cuando una cantante ajusta su tono de voz haciendo que se rompa una copa de cristal. En el análisis de tales vibraciones aparecen funciones dadas por $f(x) = ax \cos bx$. En la figura aparece una gráfica generada por computadora de $f(x) = x \cos 2x$.
   (a) Demuestre que la gráfica tiene tangentes horizontales en los valores de x para los cuales $\cos 2x - 2x \operatorname{sen} 2x = 0$.
   (b) Use el método de Newton para calcular las raíces entre 1 y 2 de la ecuación en la parte (a) con una precisión de tres decimales.

EJERCICIO 90



8.4 INTEGRALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El siguiente teorema presenta las fórmulas para las integrales indefinidas de algunas de las más importantes expresiones trigonométricas. En el teorema se supone que $u = g(x)$, donde g es derivable.

TEOREMA (8.22)

$$\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$$

$$\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int \tan u \, du = \ln|\sec u| + C$$

$$\int \cot u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \csc u \, du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$$

$$\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$$

$$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$$

$$\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$$

Demostración Se verificarán algunas de las fórmulas y las demás quedarán como ejercicio. Basta considerar el caso $u = x$, pues las fórmulas para $u = g(x)$ se obtienen aplicando el Teorema (5.31).

La fórmula de integración $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$ es consecuencia del hecho de que $D_x(-\cos x) = \operatorname{sen} x$. Análogamente, $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$ se cumple porque $\operatorname{sen} x$ es una antiderivada de $\cos x$.

Para encontrar $\int \tan x \, dx$, se usa primero una identidad trigonométrica para expresar $\tan x$ en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, como sigue:

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx.$$

La forma del integrando del lado derecho sugiere hacer la sustitución

$$v = \cos x, \qquad dv = -\operatorname{sen} x \, dx.$$

Esto da

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{1}{\cos x} \operatorname{sen} x \, dx = -\int \frac{1}{v} \, dv$$

Si $\cos x \neq 0$, entonces por el Teorema (7.16),

$$\int \tan x\, dx = -\ln|v| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Como $-\ln|\cos x| = \ln(1/|\cos x|) = \ln|\sec x|$, la fórmula anterior se puede escribir

$$\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C.$$

La fórmula para $\int \cot x\, dx$ se obtiene de manera parecida comenzando por escribir $\cot x = (\cos x)/(\operatorname{sen} x)$.

Para obtener una fórmula para $\int \sec x\, dx$ se procede como sigue:

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$
$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx.$$

Usando la sustitución

$$v = \sec x + \tan x, \qquad dv = (\sec x \tan x + \sec^2 x)\, dx$$

se obtiene

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{1}{v}\, dv$$
$$= \ln|v| + C$$
$$= \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

Para verificar una fórmula como $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$, basta observar que $D_x \tan x = \sec^2 x$. •

En los siguientes ejemplos se usarán muchas de las fórmulas del Teorema (8.22). En cada ejemplo se supone que $u = g(x)$, donde $g(x)$ es la expresión al lado derecho del símbolo sen, cot, sec, etcétera, de la función trigonométrica. De la Definición (3.22), se deduce que $du = g'(x)\, dx$.

EJEMPLO 1 Evaluar $\int \operatorname{sen} 5x\, dx$

Solución Usamos la sustitución

$$u = 5x, \qquad du = 5\, dx$$

Multiplicando el integrando por 5 y la integral por $\frac{1}{5}$, para compensar,

$$\int \operatorname{sen} 5x\, dx = \tfrac{1}{5}\int (\operatorname{sen} 5x) 5\, dx$$
$$= \tfrac{1}{5}\int \operatorname{sen} u\, du$$
$$= -\tfrac{1}{5}\cos u + C$$
$$= -\tfrac{1}{5}\cos 5x + C \quad \bullet$$

EJEMPLO 2 Evaluar $\int x \cot x^2\, dx$.

Solución Para obtener la forma $\int \cot u\, du$, hacemos la sustitución

$$u = x^2, \qquad du = 2x\,dx.$$

Luego se multiplica por 2 el integrando como sigue:

$$\int x \cot x^2\, dx = \frac{1}{2}\int (\cot x^2) 2x\, dx$$

Como $u = x^2$ y $du = 2x\,dx$,

$$\int x \cot x^2\, dx = \frac{1}{2}\int \cot u\, du = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} x^2| + C. \quad \bullet$$

EJEMPLO 3 Evaluar $\int \sec x(\sec x + \tan x)\, dx.$

Solución Cambiando el integrando y usando luego dos de las fórmulas del Teorema (8.22),

$$\int \sec x(\sec x + \tan x)\, dx = \int (\sec^2 x + \sec x \tan x)\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \sec x \tan x\, dx$$

$$= \tan x + \sec x + C. \quad \bullet$$

Como de costumbre, en la solución del Ejemplo 3, las constantes de las dos integrales indefinidas se combinaron en una sola constante C.

EJEMPLO 4 Evaluar $\int \frac{\csc^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx.$

Solución Primero escribimos

$$\int \frac{\csc^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = \int (\csc^2 \sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Luego hacemos la sustitución

$$u = \sqrt{x}, \qquad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx.$$

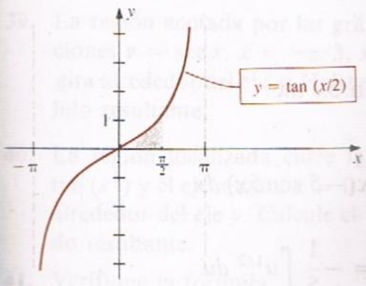
y resulta la fórmula $\int \csc^2 u\, du$ multiplicando por $\frac{1}{2}$ como sigue:

$$\int \frac{\csc^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int (\csc^2 \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$$

$$= 2\int \csc^2 u\, du = -2\cot u + C$$

$$= -2\cot\sqrt{x} + C. \quad \bullet$$

FIGURA 8.20



EJEMPLO 5 Calcular el área A de la región bajo la gráfica de $y = \tan(x/2)$ entre $x = 0$ y $x = \pi/2$.

Solución En la Figura 8.20 se muestra la región citada. Como en la Sección 6.1,

$$A = \int_0^{\pi/2} y\,dx = \int_0^{\pi/2} \tan\frac{x}{2}\,dx.$$

Ahora se hace la sustitución

$$u = \frac{x}{2}, \qquad du = \frac{1}{2}\,dx$$

y notamos que si $x = 0$, entonces $u = 0$ y si $x = \pi/2$, entonces $u = \pi/4$. Por tanto,

$$\int_0^{\pi/2} \tan\frac{x}{2}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} \tan u\,du = 2\ln\sec u\Big]_0^{\pi/4}.$$

En este caso puede omitirse el signo de valor absoluto que aparece en el Teorema (8.22) porque $\sec u$ es positivo para u entre 0 y $\pi/4$. Como $\ln\sec(\pi/4) = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$ y $\ln\sec 0 = \ln 1 = 0$, resulta que

$$\int_0^{\pi/2} \tan\frac{x}{2}\,dx = 2\cdot\frac{1}{2}\ln 2 = \ln 2 \approx 0.69. \quad\bullet$$

EJEMPLO 6 Evaluar $\int e^{2x}\sec e^{2x}\,dx$.

Solución Tomamos

$$u = e^{2x}, \qquad du = 2e^{2x}\,dx$$

y se procede como sigue:

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sec e^{2x}\,dx &= \tfrac{1}{2}\int(\sec e^{2x})2e^{2x}\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}\int \sec u\,du\\ &= \tfrac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C\\ &= \tfrac{1}{2}\ln|\sec e^{2x} + \tan e^{2x}| + C. \quad\bullet\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Evaluar $\int(\csc x - 1)^2\,dx$.

Solución

$$\begin{aligned}\int(\csc x - 1)^2\,dx &= \int(\csc^2 x - 2\csc x + 1)\,dx\\ &= \int\csc^2 x\,dx - 2\int\csc x\,dx + \int dx\\ &= -\cot x - 2\ln|\csc x - \cot x| + x + C. \quad\bullet\end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Evaluar $\int \sqrt{\cos 5x}\,\operatorname{sen} 5x\, dx$.

Solución Si tomamos

$$u = \cos 5x, \qquad du = -5 \operatorname{sen} 5x\, dx$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\cos 5x}\,\operatorname{sen} 5x\, dx &= -\frac{1}{5}\int \sqrt{\cos 5x}(-5 \operatorname{sen} 5x)\, dx \\
&= -\frac{1}{5}\int \sqrt{u}\, du = -\frac{1}{5}\int u^{1/2}\, du \\
&= -\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C \\
&= -\frac{2}{15}(\cos 5x)^{3/2} + C. \quad \bullet
\end{aligned}$$

En el Capítulo 9 se discutirán otros métodos para integrar expresiones trigonométricas.

EJERCICIOS 8.4

Ejercicios 1-34: Evalúe la integral.

1. $\int \cos 4x\, dx$
2. $\int \sec^2 5x\, dx$
3. $\int \tan 3x \sec 3x\, dx$
4. $\int x^2 \cot x^3 \csc x^3\, dx$
5. $\int (\tan 3x + \sec 3x)\, dx$
6. $\int \frac{1}{\sec 2x}\, dx$
7. $\int \frac{1}{\cos 2x}\, dx$
8. $\int \frac{\cot \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$
9. $\int x \csc^2 (x^2 + 1)\, dx$
10. $\int (x + \csc 8x)\, dx$
11. $\int \cot 6x \operatorname{sen} 6x\, dx$
12. $\int \operatorname{sen} 2x \tan 2x\, dx$
13. $\int \cos 3x \sqrt[3]{\operatorname{sen} 3x}\, dx$
14. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}\, dx$
15. $\int \operatorname{sen} x(1 + \sqrt{\cos x})^2\, dx$
16. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx$
17. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx$
18. $\int \frac{\cos x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2}\, dx$
19. $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\, dx$
20. $\int \csc^2 x \cot x\, dx$
21. $\int \frac{\tan^2 2x}{\sec 2x}\, dx$
22. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}\, dx$
23. $\int_{\pi/6}^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$
24. $\int \frac{\cos^2 x}{\csc x}\, dx$
25. $\int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{x + \cos x}\, dx$
26. $\int \frac{e^x}{\cos e^x}\, dx$
27. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx$
28. $\int_0^{\pi/4} (1 + \sec x)^2\, dx$
29. $\int e^x(1 + \tan e^x)\, dx$
30. $(\csc^2 x)2^{\cot x}\, dx$
31. $\int \frac{e^{\cos x}}{\csc x}\, dx$
32. $\int \frac{\tan e^{-3x}}{e^{3x}}\, dx$
33. $\int \frac{\sec^2 x}{2 \tan x + 1}\, dx$
34. $\int \frac{\sec x \tan x}{1 + 3 \sec x}\, dx$
35. Calcule el área de la región bajo la gráfica de $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2} x$ entre $x = 0$ y $x = \pi$.
36. Obtenga el área de la región bajo la gráfica de $y = 2 \tan x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$.
37. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $y = \sec x$, $y = x$, $x = -\pi/4$ y $x = \pi/4$.
38. Determine el área de la región acotada por las

gráficas de $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = -\pi/2$ y $x = \pi/6$.

39. La región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = \sec x$, $x = -\pi/3$, $x = \pi/3$ y $y = 0$ gira alrededor del eje x. Halle el volumen del sólido resultante.

40. La región localizada entre la gráfica de $y = \tan(x^2)$ y el eje x entre $x = 0$ y $x = \sqrt{\pi}/2$, gira alrededor del eje y. Calcule el volumen del sólido resultante.

41. Verifique la fórmula
$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

42. Verifique la fórmula
$$\int \cot x \, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

Ejercicios 43-44: Verifique la fórmula evaluando la integral de dos maneras diferentes. ¿Cómo se pueden conciliar las dos respuestas?

43. $\int \tan x \sec^2 x \, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + C = \frac{1}{2}\sec^2 x + D$

44. $\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$
$$= -\tfrac{1}{2}\cos^2 x + D = -\tfrac{1}{4}\cos 2x + E$$

Ejercicios 45-46: Use (a) la Regla del Trapecio y (b) la Regla de Simpson con el valor de n indicado, para calcular aproximadamente la integral definida. Use aproximaciones a $f(x_k)$ con una precisión de cuatro decimales y redondee las respuestas a dos decimales.

45. $\int_0^{\pi} \sqrt{\operatorname{sen} x} \, dx, \; n = 6$

46. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\sqrt{x} \, dx, \; n = 4$

Ejercicios 47-48: (a) Plantee una integral para calcular la longitud de arco L de la gráfica de la ecuación entre A y B. (b) Escriba la fórmula para estimar L por medio de la Regla de Simpson con $n = 4$. (c) Calcule la aproximación dada por la fórmula en la parte (b).

47. $y = \sec \frac{1}{2}x$; $A(0, 1)$, $B(\pi/2, \sqrt{2})$

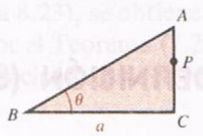
48. $y = \tan x$; $A(0, 0)$, $B(\pi/4, 1)$

49. Una especie que tiene *crecimiento de población por temporada*, aumenta su población $q(t)$ al tiempo t (en años) durante la primavera y el verano, pero disminuye durante el otoño y el invierno. Para describir este tipo de crecimiento se usa a veces la ecuación diferencial $q'(t)/q(t) = k \operatorname{sen} 2\pi t$ con $k > 0$, donde $t = 0$ corresponde al primer día de la primavera.
(a) Demuestre que la población $q(t)$ tiene crecimiento por temporada.
(b) Encuentre una fórmula explícita para $q(t)$, suponiendo que $q_0 = q(0)$.

50. Los extremos de un abrevadero de 6 pie de largo tienen la forma de la gráfica de $y = \sec x$ entre $x = -\pi/3$ y $x = \pi/3$, donde x se expresa en pies. Suponiendo que el abrevadero está lleno,
(a) plantee una integral definida con respecto a y, que sea igual al trabajo de bombeo que se requiere para extraer el agua por arriba del abrevadero.
(b) Cambie la integral en (a) a una integral con respecto a x y utilice la Regla de Simpson con $n = 4$ en el intervalo $[-\pi/3, \pi/3]$ para estimar el trabajo requerido.

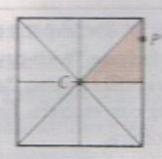
51. Dado el triángulo rectángulo ABC que se muestra en la figura, sea θ el ángulo ABC (en radianes), sea a la longitud del lado BC y P un punto sobre el lado AC. Demuestre que la distancia media de P a B es $(a/\theta)\ln(\sec\theta + \tan\theta)$. (*Sugerencia:* Exprese la longitud del lado BP como una función f del ángulo PBC y calcule el valor medio de f.)

EJERCICIO 51



52. Consulte el Ejercicio 51. En un estudio realizado en 1970 de 244 áreas urbanizadas, se encontró que sólo diez de ellas tenían formas considerablemente diferentes de un círculo, un cuadrado, un hexágono o un rectángulo de 2 por 1. Sea C el centro de una ciudad, P un punto en el límite con los suburbios de la ciudad y A el área de la zona urbana en kilómetros cuadrados. Suponiendo que la forma de la ciudad es un cuadrado (véase la figura) o un hexágono y usando la fórmula del Ejercicio 51, demuestre que la distancia media de la frontera al centro de la ciudad es $0.56\sqrt{A}$ kilómetros.

EJERCICIO 52



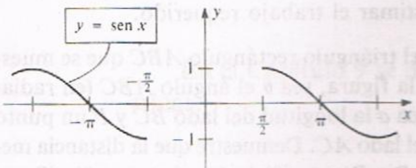
8.5 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Si f es una función biunívoca con dominio D y contradominio E, entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio E y contradominio D. Además.

$$y = f^{-1}(x) \quad \text{si y sólo si} \quad f(y) = x$$

para todo x en D y para todo y en E (véase la Sección 7.1). Las funciones trigonométricas no tienen funciones inversas porque no son biunívocas. Sin embargo, si se restringen sus dominios, pueden obtenerse funciones que toman los mismos valores que las funciones trigonométricas (sobre los dominios de menor extensión) y que *sí* tienen funciones inversas.

FIGURA 8.21



Consideremos primero la función seno cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y su contradominio es el intervalo cerrado $[-1, 1]$ (véase la Figura 8.21). La función seno no es biunívoca porque, por ejemplo, en los números $\pi/6$, $5\pi/6$ y $-7\pi/6$ toma el mismo valor $\frac{1}{2}$. Si se restringe el dominio a $[-\pi/2, \pi/2]$, como se ilustra en la porción coloreada de la curva en la Figura 8.21, se obtiene una función creciente que toma todos los valores de la función seno una y sólo una vez. Esta nueva función con dominio $[-\pi/2, \pi/2]$ y contradominio $[-1, 1]$, es continua y creciente, y entonces, por el Teorema (7.27), tiene una función inversa que también es continua y creciente. La función inversa tiene dominio $[-1, 1]$ y contradominio $[-\pi/2, \pi/2]$. Esto justifica la siguiente definición.

DEFINICIÓN (8.23)

La función **seno inverso**, que se denota por sen^{-1}, se define mediante

$$y = \text{sen}^{-1}\, x \quad \text{si y sólo si} \quad \text{sen}\, y = x$$

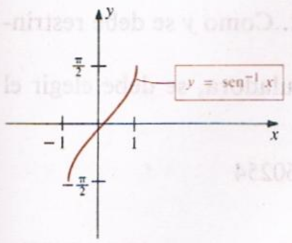
para todo $-1 \le x \le 1$ y $-\pi/2 \le y \le \pi/2$.

La función seno inverso también se llama función **arco seno** y se denota por $\text{arcsen}\, x$ en lugar de $\text{sen}^{-1}\, x$.* El símbolo $^{-1}$ en sen^{-1} no debe considerarse un exponente sino sólo un signo para denotar la inversa de una función o función inversa. Obsérvese que por la Definición (8.23),

$$-\frac{\pi}{2} \le \text{sen}^{-1} x \le \frac{\pi}{2} \qquad \text{o bien} \qquad -\frac{\pi}{2} \le \text{arcsen}\, x \le \frac{\pi}{2}.$$

* **(N. del R.)** La notación "arc sen x" antecedió a la más usada actualmente de "$\text{sen}^{-1} x$". Su origen es la frase "arco cuyo seno es x". Lo correspondiente a las demás funciones inversas es arc cos, arc tan, etcétera. (El término "arco" tiene el significado de "ángulo en radianes".) Se usó también la notación áng sen, áng cos, etcétera. Las notaciones sen^{-1}, $\cos^{-1}$, etc., pueden leerse apropiadamente como **antiseno, anticoseno,** etcétera.

FIGURA 8.22



Se puede trazar la gráfica de $y = \text{sen}^{-1} x$ usando el método de la Sección 7.2 para representar gráficamente una función inversa, efectuando la reflexión de la parte coloreada de la Figura 8.21 con respecto a la recta $y = x$. (También se puede obtener graficando $x = \text{sen}\, y$ para $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.) Resulta así la Figura 8.22.

Como sen y sen^{-1} son funciones inversas entre sí,

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen}\, x) = x \quad \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

y

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x \quad \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Estas fórmulas también pueden escribirse

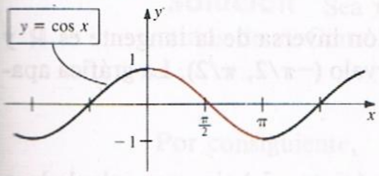
$$\text{arcsen}(\text{sen}\, x) = x \quad \text{y} \quad \text{sen}(\text{arcsen}\, x) = x.$$

EJEMPLO 1 Evaluar $\text{sen}^{-1}(\sqrt{2}/2)$ y $\text{arcsen}(-\frac{1}{2})$.

Solución Si $y = \text{sen}^{-1}(\sqrt{2}/2)$, entonces $\text{sen}\, y = \sqrt{2}/2$ y por lo tanto, $y = \pi/4$. Nótese que es necesario escoger y en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Un número como $3\pi/4$ es una respuesta incorrecta a pesar de que $\text{sen}(3\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

Si $y = \text{arcsen}(-\frac{1}{2})$, entonces $\text{sen}\, y = -\frac{1}{2}$ y, por consiguiente, $y = -\pi/6$. •

FIGURA 8.23



Pueden definirse análogamente las funciones inversas de las otras cinco funciones trigonométricas. Si el dominio de la función coseno se restringe al intervalo $[0, \pi]$ (véase la porción coloreada de la Figura 8.23), se obtiene una función continua y decreciente que, por el Teorema (7.28), tiene una función inversa continua y decreciente. Esto lleva a la siguiente definición.

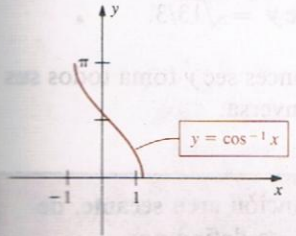
DEFINICIÓN (8.24)

La función **coseno inverso**, que se denota por $\cos^{-1}$, se define por

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad \cos y = x$$

para $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$.

FIGURA 8.24



La función inversa del coseno se llama también función **arco coseno** y se emplea entonces la notación arccos x en lugar de $\cos^{-1} x$. Adviértase que

$$\cos^{-1}(\cos x) = \arccos(\cos x) = x \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$\cos(\cos^{-1} x) = \cos(\arccos x) = x \quad \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

La gráfica de la función coseno inverso se puede trazar reflejando la porción coloreada de la Figura 8.23 con respecto a la recta $y = x$. Esto da el croquis que se muestra en la Figura 8.24. También podría usarse la ecuación $x = \cos y$, con $0 \leq y \leq \pi$, para situar puntos de la gráfica.

EJEMPLO 2 Calcular $\cos^{-1}(-\sqrt{3}/2)$.

Solución Si $y = \cos^{-1}(-\sqrt{3}/2)$, entonces $\cos y = -\sqrt{3}/2$. Como y se debe restringir al intervalo $[0, \pi]$, resulta que $y = 5\pi/6$.

Para obtener el valor de $\cos^{-1}(-\sqrt{3}/2)$ usando una calculadora, se debe elegir el modo de radianes y proceder como sigue:

INTRODUCIR: $-\sqrt{3}/2 \approx -0.8660254$

PULSAR $\boxed{\text{INV}}\boxed{\text{COS}}$: $2.6179939.$

La expresión decimal que resulta es una aproximación a $5\pi/6$. •

Si se restringe el dominio de la función tangente al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, se llega a una función biunívoca. Esto conduce a la siguiente definición.

DEFINICIÓN (8.25)

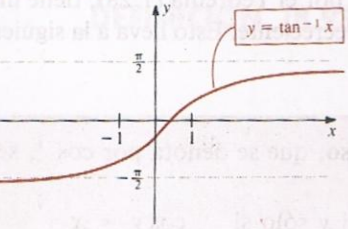
La función **tangente inversa**, o función **arco tangente**, que se denota por $\tan^{-1}$, o bien arctan, se define por

$$y = \tan^{-1} x = \arctan x \quad \text{si y sólo si} \quad \tan y = x$$

para todo número real x y $-\pi/2 < y < \pi/2$.

El dominio de la función inversa de la tangente es $\mathbb{R}$ y su contradominio es el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. La gráfica aparece en la Figura 8.25.

FIGURA 8.25



EJEMPLO 3 Calcular $\sec(\arctan \frac{2}{3})$ sin usar calculadora ni tablas.

Solución Si $y = \arctan \frac{2}{3}$, entonces $\tan y = \frac{2}{3}$. Aplicando $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$ y el hecho de que $\sec y > 0$ para $0 < y < \pi/2$,

$$\sec y = \sqrt{1 + \tan^2 y} = \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{13}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

Por lo tanto, $\sec(\arctan \frac{2}{3}) = \sec y = \sqrt{13}/3$. •

Si y recorre los dos intervalos $[0, \pi/2)$ y $[\pi, 3\pi/2)$, entonces $\sec y$ toma todos sus valores una y sólo una vez y puede definirse una función inversa.

DEFINICIÓN (8.26)

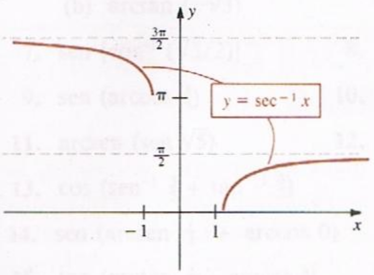
La función **secante inversa**, o función **arco secante**, denotada por $\sec^{-1}$, o bien **arcsec**, se define por

$$y = \sec^{-1} x = \operatorname{arcsec} x \quad \text{si y sólo si} \quad \sec y = x$$

$$\text{para } |x| \geq 1 \text{ y } y \text{ en } [0, \pi/2) \text{ o en } [\pi, 3\pi/2).$$

En la Figura 8.26 aparece la gráfica de $y = \sec^{-1} x$. Los valores de y se restringieron a los intervalos que se indican en la Definición (8.26) en vez de a los intervalos "más naturales" $[0, \pi/2)$ y $(\pi/2, \pi]$, porque de esta manera la fórmula de la derivada de arcsec es más sencilla. En la siguiente sección se demostrará que $D_x \sec^{-1} x = 1/(x\sqrt{x^2-1})$. Entonces, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \sec^{-1} x$ es negativa si $x < -1$ y positiva si $x > 1$ (véase la Figura 8.26). Si se utilizan los intervalos más naturales, la pendiente es siempre positiva y $D_x \sec^{-1} x = 1/(|x|\sqrt{x^2-1})$.

FIGURA 8.26



Los siguientes ejemplos muestran algunas manipulaciones con las funciones trigonométricas inversas.

EJEMPLO 4 Escribir $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)$ como una expresión algebraica en x para $-1 \leq x \leq 1$.

Solución Sea $y = \operatorname{sen}^{-1} x$. Entonces, $\operatorname{sen} y = x$. Deseamos expresar $\cos y$ en términos de x. Como $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, resulta que $\cos y \geq 0$ y por lo tanto,

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Por consiguiente,

$$\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

FIGURA 8.27

$y = \operatorname{sen}^{-1} x$

La última identidad es clara geométricamente si $0 < x < 1$. En este caso, $0 < y < \pi/2$ y se puede considerar a y como la medida en radianes de un ángulo de un triángulo rectángulo tal que $\operatorname{sen} y = x$, como se ilustra en la Figura 8.27. (El lado de longitud $\sqrt{1 - x^2}$ se calcula aplicando el Teorema de Pitágoras.) Refiriéndonos al triángulo,

$$\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \cos y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1} = \sqrt{1 - x^2} \quad \bullet$$

EJEMPLO 5 Verificar la identidad

$$\frac{1}{2}\cos^{-1} x = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

para $|x| < 1$.

Solución Sea $y = \cos^{-1} x$. Queremos demostrar que

$$\frac{y}{2} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

Aplicando la fórmula para la mitad de un ángulo,

$$\left|\tan\frac{y}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}.$$

Como $y = \cos^{-1} x$ y $|x| < 1$, resulta que $0 < y < \pi$ y, por lo tanto, $0 < (y/2) < \pi/2$. De manera que $\tan(y/2) > 0$ y se puede eliminar el símbolo de valor absoluto, con lo que se obtiene

$$\tan\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}.$$

Usando el hecho de que $\cos y = x$,

$$\tan\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

o, equivalentemente,

$$\frac{y}{2} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

que es lo que queríamos demostrar. •

EJEMPLO 6 Encontrar las soluciones de la ecuación

$$5\,\mathrm{sen}^2\, t + 3\,\mathrm{sen}\, t - 1 = 0$$

en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Solución Podemos considerar la ecuación como una de segundo grado en sen t. Aplicando la fórmula para la ecuación de segundo grado,

$$\mathrm{sen}\, t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+20}}{10} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{10}.$$

Usando la definición de la función inversa del seno, obtenemos las soluciones,

$$t = \mathrm{sen}^{-1}\tfrac{1}{10}(-3+\sqrt{29})$$

y $$t = \mathrm{sen}^{-1}\tfrac{1}{10}(-3-\sqrt{29}).$$

Para obtener valores aproximados de t se puede emplear una calculadora (en el modo de radianes) y para ello se procede como sigue:

INTRODUCIR: $\tfrac{1}{10}(-3+\sqrt{29}) \approx 0.2385165$

PULSAR $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{SEN}}$: 0.240838

Por lo tanto,

$$t \approx 0.2408.$$

Análogamente,

$$t = \mathrm{sen}^{-1}\tfrac{1}{10}(-3-\sqrt{29}) \approx \mathrm{sen}^{-1}(-0.8385165) \approx -0.9946. \quad \bullet$$

EJERCICIOS 8.5

Ejercicios 1-18: Calcule el valor exacto sin usar tablas ni calculadora.

1. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(-\sqrt{3}/2)$
2. (a) $\operatorname{sen}^{-1} 0$ (b) $\operatorname{arccos} 0$
3. (a) $\cos^{-1}(\sqrt{2}/2)$ (b) $\cos^{-1}(-\sqrt{2}/2)$
4. (a) $\operatorname{arcsen}(-1)$ (b) $\cos^{-1}(-1)$
5. (a) $\tan^{-1}\sqrt{3}$ (b) $\arctan(-\sqrt{3})$
6. (a) $\tan^{-1}(-1)$ (b) $\operatorname{arccos} \frac{1}{2}$
7. $\operatorname{sen}[\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)]$
8. $\cos(\operatorname{sen}^{-1} 0)$
9. $\operatorname{sen}(\operatorname{arccos}\frac{3}{5})$
10. $\tan(\tan^{-1} 10)$
11. $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\sqrt{5})$
12. $\tan^{-1}(\cos 0)$
13. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{4}{3})$
14. $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} + \operatorname{arccos} 0)$
15. $\tan(\arctan\frac{3}{4} + \operatorname{arccos}\frac{3}{5})$
16. $\cos(2\operatorname{sen}^{-1}\frac{8}{17})$
17. $\operatorname{sen}[2\operatorname{arccos}(-\frac{4}{5})]$
18. $\operatorname{sen}(\arctan\frac{1}{2} - \operatorname{arccos}\frac{4}{5})$

Ejercicios 19-22: Escriba la expresión dada como una de tipo algebraico en x.

19. $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x)$
20. $\tan(\operatorname{arccos} x)$
21. $\cos(\frac{1}{2}\operatorname{arccos} x)$
22. $\cos(2\tan^{-1} x)$

Ejercicios 23-30: Verifique la identidad.

23. $\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$. (*Sugerencia:* Tome $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} x$, $\beta = \cos^{-1} x$ y considere $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$.)
24. $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2,\ x > 0$
25. $\operatorname{arcsen}\dfrac{2x}{1 + x^2} = 2\arctan x,\ |x| \le 1$
26. $2\cos^{-1} x = \cos^{-1}(2x^2 - 1),\ 0 \le x \le 1$
27. $\operatorname{sen}^{-1}(-x) = -\operatorname{sen}^{-1} x$
28. $\operatorname{arccos}(-x) = \pi \operatorname{arccos} x$
29. $\operatorname{sen}^{-1} x = \tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$
30. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\dfrac{x + y}{1 - xy}$ para $|x| < 1$ y $|y| < 1$
31. Defina $\cot^{-1}$ restringiendo el dominio de cot al intervalo $(0, \pi)$.
32. Defina $\csc^{-1}$ restringiendo el dominio de csc a $(0, \pi/2]$ y $(\pi, 3\pi/2]$.

Ejercicios 33-42: Trace la gráfica de la ecuación.

33. $y = \operatorname{sen}^{-1} 2x$
34. $y = \cos^{-1}\frac{1}{2}x$
35. $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} x$
36. $y = 2\cos^{-1} x$
37. $y = 2\tan^{-1} x$
38. $y = \tan^{-1} 2x$
39. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$
40. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{arccos} x)$
41. $y = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$
42. $y = \operatorname{arccos}(\cos x)$

Ejercicios 43-44: Demuestre que la ecuación *no* es una identidad.

43. $\tan^{-1} x = 1/(\tan x)$
44. $(\operatorname{arcsen} x)^2 + (\operatorname{arccos} x)^2 = 1$

Ejercicios 45-50: (a) Encuentre las soluciones de la ecuación en el intervalo dado usando las funciones trigonométricas inversas y (b) calcule aproximadamente las soluciones de la parte (a) con una precisión de cuatro decimales, con ayuda de calculadora.

45. $2\tan^2 t + 9\tan t + 3 = 0;\ (-\pi/2, \pi/2)$
46. $3\operatorname{sen}^2 t + 7\operatorname{sen} t + 3 = 0;\ [-\pi/2, \pi/2]$
47. $15\cos^4 x - 14\cos^2 x + 3 = 0;\ [0, \pi]$
48. $3\tan^4\theta - 19\tan^2\theta + 2 = 0;\ (-\pi/2, \pi/2)$
49. $6\operatorname{sen}^3\theta + 18\operatorname{sen}^2\theta - 5\operatorname{sen}\theta - 15 = 0;\ (-\pi/2, \pi/2)$
50. $6\operatorname{sen} 2x - 8\cos x + 9\operatorname{sen} x - 6 = 0;\ (-\pi/2, \pi/2)$

Ejercicios 51-55: Aplique aquí una calculadora.

51. Demuestre que $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} 2) \ne 2$. Explique por qué la respuesta no es 2. ¿Es afirmativo que $\cos^{-1}(\cos 2) = 2$? ¿Por qué?
52. Demuestre que $\cos^{-1}(\cos(-1)) \ne -1$. Explique por qué la respuesta no es -1. ¿Es cierto que $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(-1)) = -1$? ¿Por qué?
53. ¿Es cierto que si se introduce en una calculadora un número entre -1 y 1, siempre es posible esti-