UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

CALIFICACIÓN

Preg N°	Puntos
1	10
2	2
3	1,5
4	3
5	4
6	
Total	12

CURSO Cálculo diferencial e integral avanzado COD. CURSO CM 211

PRACTICA Calificada N°2 SECCIÓN D

APELLIDOS Y NOMBRES (Alumno) CODIGO FIRMA

Lima, 10 de abril del 20 18 N° Lista

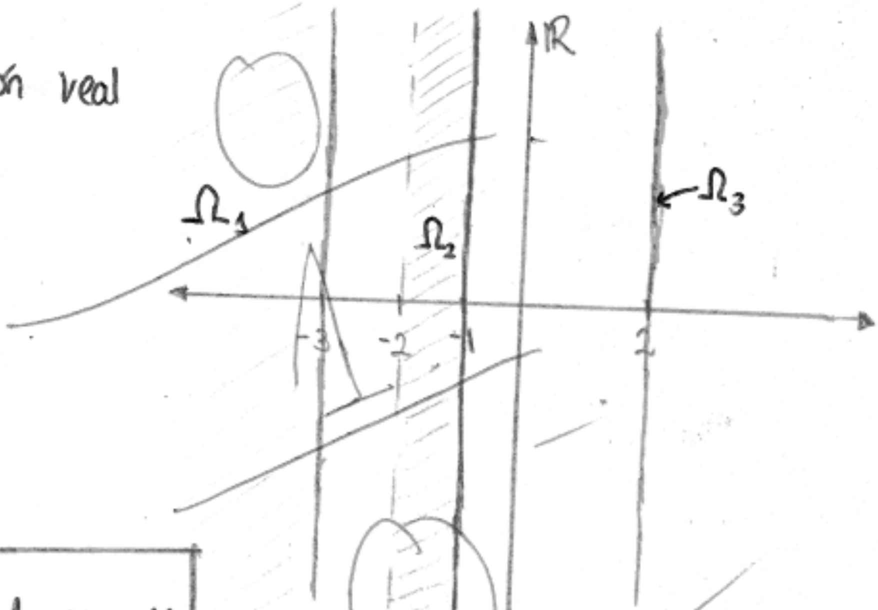
NOTA

En números En letras

Nombre del Profesor Firma del Profesor

1. (a) Sea f una función real de variable vectorial

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto$$



Sea $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$.

$x \in]-\infty,-3] \cup]-2,-1] \cup \{2\}$.
$y \in \mathbb{R}$.

c) Sea f una función real de variable vectorial dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Afirmo que no es continua. f es continua si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = 0.$

b) Sea f una función real de variable vectorial con la siguiente regla

$$f(x,y) = \cos(xy) + \ln(|y| - |x|).$$

El $\text{Dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| - |x| > 0\}$ ✓

Veamos, en cuatro casos: **Analíticamente.** (Por partes)

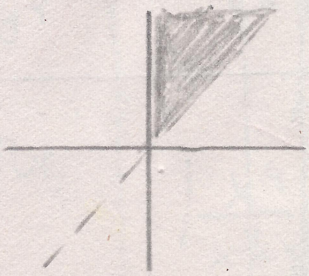
$\tilde{a})\ x \geq 0,\ y \geq 0$ (IC) $\vee$ $\tilde{b})\ x \geq 0,\ y < 0$ (IVC) $\vee$ $\tilde{c})\ x < 0,\ y \geq 0$ (IIC) $\vee$ $\tilde{d})\ x < 0,\ y < 0$ (IIIC)

La expresión

$|y| - |x| > 0$

$y - x > 0$

$\boxed{y > x}$



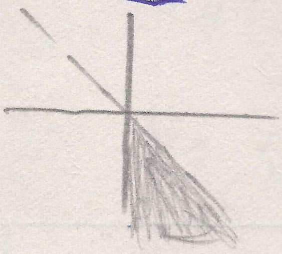
La expresión

$|y| - |x| > 0$

$-y - x > 0$

$y + x < 0$

$\boxed{y < -x}$



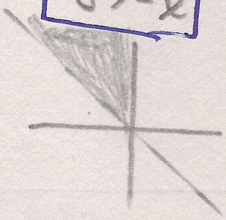
La expresión

$|y| - |x| > 0$

$y - (-x) > 0$

$y + x > 0$

$\boxed{y > -x}$



La expresión

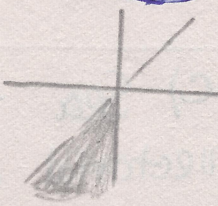
$|y| - |x| > 0$

$(-y) - (-x) > 0$

$-y + x > 0$

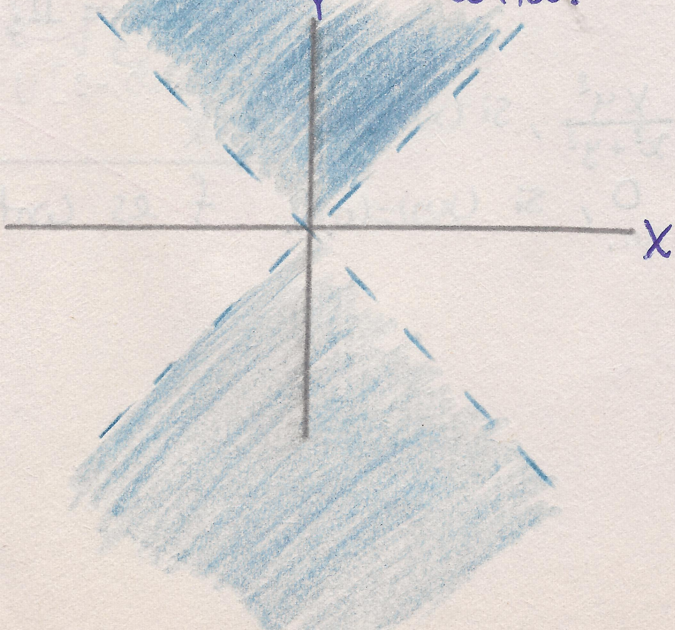
$y - x < 0$

$\boxed{y < x}$



Superponiendo las gráficas resulta:

$\mathbb{R}^2$



Geométricamente.

5. Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y,z) \longmapsto \operatorname{Sgn}\left(\frac{2}{x^2+y^2+z^2+1} - 1\right) - 6$$

El conjunto de nivel pedido es:

$$N_{(-5)} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \operatorname{Sgn}\left(\frac{2}{x^2+y^2+z^2+1} - 1\right) = 1 \right\}$$

Pero, la función $\operatorname{Sgn}(x)$ se define como

$$\operatorname{Sgn}: \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$$
$$t \mapsto \begin{cases} -1, & \text{si } t<0 \\ 0, & \text{si } t=0 \\ 1, & \text{si } t>0. \end{cases}$$

Así,

$$\frac{2}{x^2+y^2+z^2+1} - 1 > 0 \quad \wedge \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}: \; \begin{matrix} x^2 \geq 0 \\ y^2 \geq 0 \\ z^2 \geq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{2}{x^2+y^2+z^2+1} > 1 \qquad \therefore \; x^2+y^2+z^2+1 > 0.$$

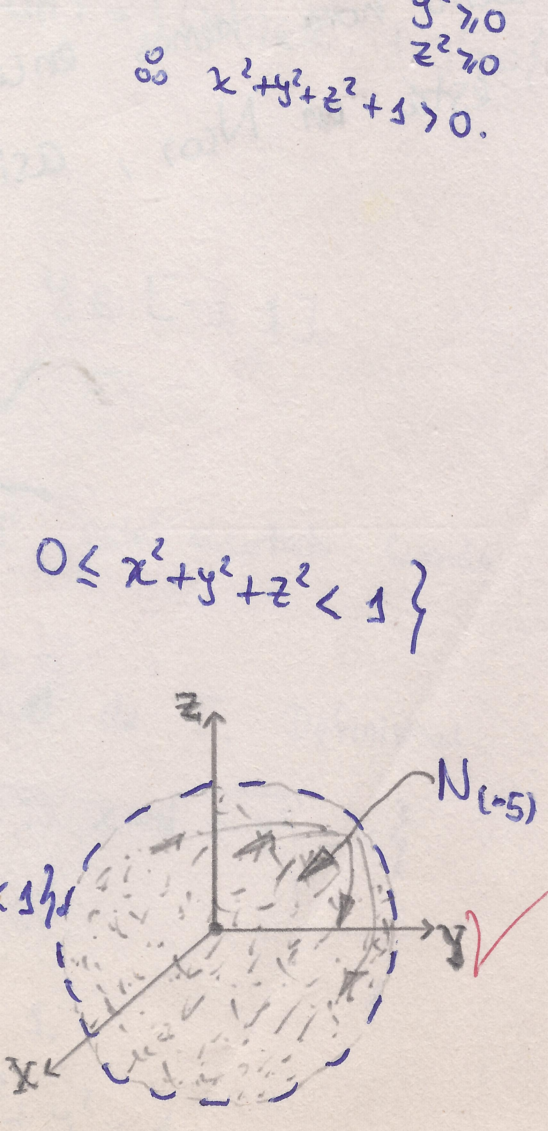
$$2 > x^2+y^2+z^2+1$$
$$1 > x^2+y^2+z^2 \geq 0.$$

El conjunto pedido resulta ser:

$$N_{(-5)} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2+y^2+z^2 < 1 \right\}$$

La descripción es una bola abierta centrada en el origen de radio 1.

$$B_1((0,0,0)) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \| (x,y,z) - (0,0,0) \| < 1 \right\}.$$



4. Sea $[0,2]^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una función real de variable vectorial y del teorema del valor intermedio para funciones reales de variable vectorial, continuas, también

$$f(0,0,1) = -1 < 0 \quad \wedge \quad f(2,2,1) = 1 > 0,$$

$$\exists\, C \in [0,2]^3 \;/\; f(C) = f(c_1, c_2, c_3) = 0.$$

con $0 \leq c_1 \leq 2$, $0 \leq c_2 \leq 2$, $0 \leq c_3 \leq 2$.

3

Además, el conjunto de nivel 0 es:

$$N_{(0)} = \{(x,y,z) \in [0,2]^3 : f(x,y,z) = 0\}$$

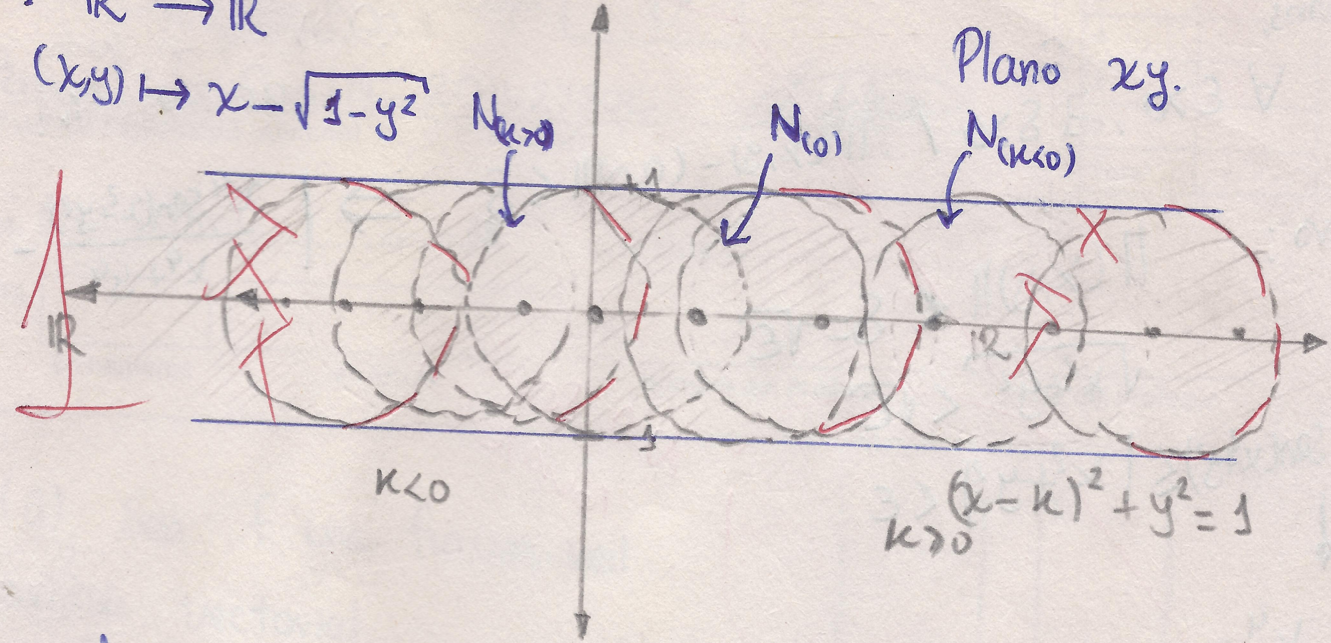
En buena hora, hemos encontrado un $C = (c_1, c_2, c_3) \in [0,2]^3$ que está en $N_{(0)}$, así que $N_{(0)} \neq \emptyset$.

■

2) Sea T una función real de variable vectorial definida de la siguiente manera:

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto x - \sqrt{1-y^2}$



Veamos, el dominio de T es: $\operatorname{Dom} T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1-y^2 \geq 0\}$

$$1-y^2 \geq 0$$
$$(1-y)(1+y) \geq 0$$
$$(y-1)(y+1) \geq 0 \Rightarrow y \in [-1, 1].$$

Así $\operatorname{Dom} T = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times[-1,1]\}$.

Ahora, x varía en $\mathbb{R}$ sin límites, $\sqrt{1-y^2}$ está acotado cuando $y\in[-1,1]$, notamos que la ~~$\operatorname{Im} T = \mathbb{R}$~~.

Finalmente veamos algunas curvas de nivel de T. Definimos

$$N_k = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times[-1,1] : x-\sqrt{1-y^2} = k\}$$

Para $k=0$: $x-\sqrt{1-y^2}=0 \to x^2+y^2=1.$

Para $k=1$: $x-\sqrt{1-y^2}=1 \to (x-1)^2+y^2=1.$

Para $k=-1$: $x-\sqrt{1-y^2}=-1 \to (x+1)^2+y^2=1$

3. Sea $L=0$, entonces verifique

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^4+y^2} = L.$$

¡(0,0) es un punto de acumulación!

Veamos,

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0 \ /\ \forall\ \|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow \left| \frac{x^4 \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^4+y^4} - L \right| < \varepsilon.$

Pero: $\|(x,y)\| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$

$\sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{\varepsilon}$

$|\operatorname{sen}(x^2+y^2)| \leq |x^2+y^2| < \varepsilon$

¡NO SON IGUALES!

$\downarrow$

$\left| \frac{x^4}{x^4+y^4} \cdot \operatorname{sen}(x^2+y^2) \right| < |\operatorname{sen}(x^2+y^2)|$

Pues $\left| \frac{x^4}{x^4+y^4} \right| < 1$

Basta tomar $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.