Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática — Ciclo 2018-1

[Cod: CM-132] [Curso: Cálculo Integral]

[Temas: Volúmenes de solidos en coordenadas polares y paramétricas.]

[Profesor: Ronald Mas, Dimas Abanto, Jose Zamudio, Jorge Mayta, Juan Cribillero]

Práctica Dirigida N^o 6

1. Grafique cada punto, dado en coordenadas polares, y halle sus coordenadas rectangulares.

   a) $(4, 60^o)$

   b) $(\sqrt{2}, -45^o)$

   c) $(-6, 240^o)$

   d) $(5, 270^o)$

2. Halle todas las coordenadas polares posibles (r, θ) con $0 < \theta < 360^o$ de los siguientes puntos:

   a) (4,-4)

   b) (-3,3)

   c) (0,-3)

   d) $(-2, -2\sqrt{3})$

3. Escribe cada una de las siguientes ecuaciones dadas en coordenadas rectangulares en términos de las coordenadas polares r y θ.

   a) $x^2/4 + y^2/9 = 1$

   b) $x^2 + y^2 - 6x = 0$

   c) $x^2 = 1 - 4y$

   d) $xy = 1$

   e) $y = -4$

   f) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$

4. Grafique cada ecuación polar. Localice los interceptos, pruebe las simetrias y halle las tangentes en el polo.

   a) $r = 2$

   b) $r = 2Sen\theta$

   c) $\theta = \pi/4$

   d) $\theta = -\pi/3$

   e) $r = -2Cos\theta$

   f) $r = 2 - 2Sen\theta$

   g) $r = 4 - 3Cos\theta$

   h) $r = 4 + 2Sen\theta$

   i) $r = 2Sen3\theta$

   j) $r = 6Cos5\theta$

   k) $r^2 = 16Cos2\theta$

   l) $r^2 = 4Sen\theta$

5. Grafique y halle las coordenadas polares de todos los puntos de intersección de los siguientes pares de gráficas polares:

   a) $r = 1 + Sen\theta$ y $r = 1 + Cos\theta$

   b) $r = 2 + Cos\theta$ y $r = 5Cos\theta$

   c) $r = 2Cos3\theta$ y $r = 1$

d) $r = 1 + Cos\theta$ y $r = 1 - Sen\theta$

6. Calcule el menor ángulo entre las rectas tangentes del par de curvas dadas:

   a) $r = 1 + Cos\theta$ y $r = 1 - Cos\theta$

   b) $r = 3Sen\theta$ y $r = 1 + Sen\theta$

   c) $r = Cos\theta$ y $r = Sen2\theta$

   d) $r = 2Sec\theta$ y $r = Csc^2(\theta/2)$

7. Demuestre que la gráfica de la cardioide de $r = a(1 - Cos\theta)$ y la gráfica de la parábola $r = a/(1 - Cos\theta)$ se intersectan en ángulos rectos.

8. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $r = 4$ en el punto $(4, \pi/4)$.

9. Encuentre la ecuación polar de la recta tangente a la curva $r = -6Cos\theta$ en el punto $(6, \pi)$.

10. Halle el área de la regón limitada por las curvas:

    a) $r = 2 + Cos\theta$, $\theta \in IC$.

    b) $r = Sen\theta$

    c) Dentro de $r = a$ (circunferencia) y fuera de $r = a(1 - Cos\theta)$ (cardioide).

    d) $r = 2 - Sen\theta$.

11. Halle el área de las regiones de las curvas cerradas

    a) $x = aCost, y = bSent.$(Elipse)

    b) $x = aCos^3t, y = bSen^3t.$(Astroide)

    c) $x = 2aCost - aCos2t.,\ y = 2aSent - aSen2t.$(Cardioide)

12. Demostrar que el volumen de un casquete cónico de altura a cortado del sólido engendrado haciendo girar la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ alrededor de OX, el igual al volumen de una esfera de radio a.

13. Dadas las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide:

$$\begin{aligned} x &= a\cos^3\theta \\ y &= a\operatorname{sen}^3\theta \end{aligned}$$

    Calcule el volumen del sólido que se engendra haciéndola girar alrededor del eje X.

14. Calcule el volumen del sólido engendrado haciendo girar una arcada de la cicloide:

$$\begin{aligned} x &= a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y &= a(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

    alrededor del eje X.

    Demuestre que si la arcada gira alrededor del eje Y, el volumen que del sólido generado es $6\pi^3a^3$.

15. Calcular el volumen que se genera por la región determinada por la curva $y = \sec\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, el eje X y las rectas $y = x + \frac{1}{2}$ e $y = x - \frac{1}{2}$ al girar alrededor del eje X.

16. La región $\mathscr{R}$ determinada por la curva $y = e^x \operatorname{sen} x$ y el eje X, desde $x = 0$ hasta $x = \pi$ gira alrededor del eje X. Calcule el volumen del sólido generado por la región $\mathscr{R}$.

17. Calcule los volúmenes de los sólidos generados al girar la región determinada por la parábolas $y^2 = 4x$ e $y^2 = 5 - x$ alrededor de los ejes X e Y.