# Segunda clase de Cálculo Integral

*Carlos Alonso Aznarán Laos*
`caznaranl@uni.pe`

26 de marzo de 2017

$F' = f$.

$$F'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

$$F'(0) = F'_+(0) = F'_-(0).$$

$$F'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}.$$

$$F'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}.$$

***Veamos*** :
Por contradicción.
Existe una función $F\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)\ \forall\, x \in [-1,1]$. Pero si $F$ es diferenciable en $[-1,1]$, entonces por el *Teorema del Valor Medio*:

a) Si $0 \leq x \leq 1,\ \exists\, c \in [0,1]^{\circ}$[1] tal que

$$\begin{aligned} F'(c) &= \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}. \\ \implies f(c) &= \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}. \\ \implies F(x) &= x + F(0). \end{aligned}$$

b) Si $-1 \leq x \leq 0,\ \exists\, d \in [-1,0]^{\circ}$ tal que

$$\begin{aligned} F'(d) &= \frac{F(0) - F(x)}{0 - x}. \\ \implies f(d) &= \frac{F(0) - F(x)}{0 - x}. \\ \implies F(x) &= F(0). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$F(x) = \begin{cases} x + F(0) & \text{, si } x \in [0,1] \\ F(0) & \text{, si } x \in [-1,0[ \end{cases}$$

[1]Sea $A$ un conjunto de números reales. Un número real $x$ se dice que es un **punto interior** de $A$ si $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $N_\epsilon(x) \subseteq A$. El **interior de** $A$ es el conjunto $A^{\circ}\{x \mid x \text{ es un punto interior de } A\}$. Ver [Den11]

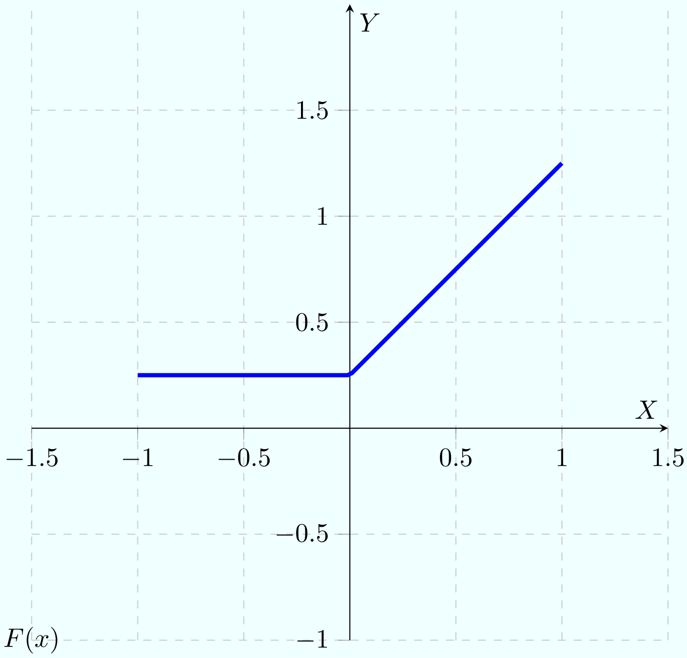


Figura 1: Esbozo de la gráfica $F(x)$

Pero $\nexists\, F'(0)$. ( $\Longrightarrow\Longleftarrow$ ) ¿Por qué? $\therefore \nexists\, F\, \forall x \in [-1,1]$.

# 1. Técnicas de integración

## 1.1. Sustitución algebraica

Este método proviene de la regla de la cadena para derivar composición de funciones, por lo tanto tiene que ver con la integración de funciones compuestas. En general, vamos a sustituir polinomios.

**Ejemplo 1.1 Resolver la siguiente integral indefinida.**

$$\int t^2\sqrt{t^3+2}\,dt$$

***Veamos*** :
Por sustitución algebrica entendemos sustituir una variable por una variable trigonométrica.

$$\boxed{t^3+2=x^2}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad d(t^3+2) &= d(x^2)\\
\Longrightarrow \quad 3t^2\,dt &= 2x\,dx\\
\Longrightarrow \quad t^2\,dt &= \frac{2}{3}x\,dx
\end{aligned}$$

$$\int t^2\sqrt{t^3+2}\,dt = \int \sqrt{t^3+2}\,t^2 dt = \int \sqrt{x^2}\frac{2}{3}xdx = \frac{2}{3}\int x^2dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+C.$$

$$\Longrightarrow \int t^2\,\sqrt{t^3+2}dt = \frac{2}{9}[t^3+2]^{\frac{3}{2}}+C.$$

**Observación**:

$$\int f(x)f'(x)dx = \int f(y)dy = \frac{y^2}{2} + C = \frac{1}{2}f^2(x) + C.$$

Sustitución algebraica:

$$\boxed{y = f(x) \iff dy = f'(x)dx}$$

## 1.2. Sustitución trigonométrica

Sustituir una variable por una función trigonométrica. Recordemos que todo cambio es para facilitar, en nuestro caso, la integración.

**Ejemplo 1.2 Resolver:**

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

***Veamos*** :
Sustitución trigonométrica:

$$\boxed{x = \sin t \iff dx = \cos t}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\ \cos t\,dt. \\ &= \int \cos t\ \cos t\,dt = \int \cos^2 dt. \end{aligned}$$

Recordando:

$$\int \cos 2t\,dt = \int (\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt = \int (2\cos^2 t - 1)\,dt = \int \frac{1}{2}[\cos 2t + 1]\,dt.$$

$$\int \frac{1}{2}[\cos 2t\,dt + 1]dt = \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt + \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{4}\int [\cos 2t\,d(2t) + \frac{1}{2}\int\ dt = \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t + C.$$

$$= \frac{1}{4}(2\sin t\cos t) + \frac{1}{2}t + C.$$

**Nota**: No se altera la variable cuando hacemos uso del método de integración por partes. Normalmente se escoge a $u = K[x]$ y a $dv = \sin, \cos, \tan, \cot, etc.$
Para despejar $\cos t$, veamos 2, el triángulo $ABC$.

$$\cos t = \sqrt{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

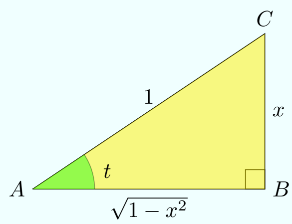


Figura 2: Triángulo $ABC$

## 1.3. Integración por partes

Proviene de la regla del producto para derivadas. En términos generales, la idea de este método es convertir la integral dada en una integral más fácil de resolver. La idea es degradar la expresión polinómica hasta reducir solo al objeto trigonométrico.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

ó

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x)$$

**Ejemplo 1.3 Resolver:**

$$\int x \sin\, dx$$

***Veamos*** :
Por integración por partes:

$$\begin{array}{cc} u = \sin x & dv = x\,dx \\ du = \cos x\,dx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \int x \sin x\,dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx.$$

$\int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx$. ¿Es muy difícil? Cambiemos la manera de integrar por partes.

Pero:

$$\begin{array}{cc} u = x & dv = \sin x\,dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{array}$$

$$\Longrightarrow \int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C. \quad \square$$

**Ejemplo 1.4 Calcule:**

$$\int \arctan x\,dx$$

***Veamos*** :

$$\begin{array}{rclc} u & = & \arctan x & dv = dx \\ du & = & \dfrac{dx}{x^2+1} & v = x \end{array}$$

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x\,dx}{x^2+1}.$$

$$\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

$$\tan u = x \implies \sec u = \sqrt{1+x^2}$$
$$\sec^2 u = 1 + x^2$$

Luego:

$$\begin{aligned} d(u) &= d(\arctan x), \text{ pero} \tan u = x \\ \sec^2(u)\, du &= dx \\ (1+x^2)\, du &= dx \implies du = \frac{dx}{1+x^2}. \end{aligned}$$

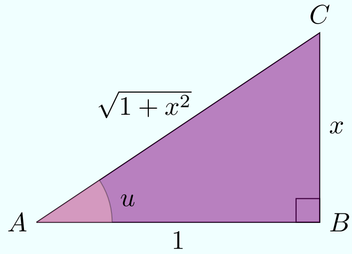


Figura 3: Triángulo $ABC$

**Ejercicio 1.** *Si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son dos funciones diferenciables sobre $\mathbb{R}$ tal que $f'(x) = g(x)$ y $g'(x) = -f(x); \forall x \in \mathbb{R}$, donde $f(0) = 1$ y $g(0) = 0$. Por demostrar $f(x)g(x) \leq \frac{1}{2}\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.*

***Veamos*** :

$$f'(x) = g(x).$$

Multiplicando por $f(x)$.

$$\implies f(x)f'(x) = f(x)g(x).$$
$$f(x)f'(x) = -g'(x)g(x).$$
$$\implies \int f(x)f'(x)\, dx = \int -g'(x)g(x)\, dx.$$
$$\frac{1}{2}f^2(x) = -\frac{1}{2}g^2(x) + C.$$

Pero $f(0) = 1; g(0) = 1$.

$$\begin{aligned} \implies \frac{1}{2}f^2(0) &= -\frac{1}{2}g^2(0) + C. \\ \implies \frac{1}{2}(1)^2 &= -\frac{1}{2}(0) + C. \\ \implies C &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bien, si reemplazamos $C = 2$ en la expresión anterior nos resultará: $f^2(x) + g^2(x) = 1\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
También:

$$\left[f(x)^2 - g^2(x)\right]^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\implies f^2(x) + g^2(x) - 2f(x)g(x) \geq 0$$
$$\implies 1 - 2f(x)g(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\implies f(x)g(x) \leq \frac{1}{2}\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \square$$

**Ejemplo 1.5 Calcule**

$$I = \int \frac{\arctan(\sqrt{x})\, dx}{\sqrt{x + 2x^2 + x^3}}$$

***Veamos*** :

$$I = \int \frac{\arctan(\sqrt{x}) dx}{\sqrt{x}\sqrt{1 + 2x + x^2}}$$

Sustitución algebraica:

$$\boxed{x = y^2 \iff dx = 2y\, dy}$$

$$I = \int \frac{\arctan(y) 2y\, dy}{y\,(1 + y^2} = 2 \int \frac{\arctan y\, dy}{1 + y^2}$$

**Ejemplo 1.6 Primera prácticada calificada 2015-2**

Un móvil se desplaza con una aceleración $a(t) = e^{\sin t}(2\cos t - t\sin t + t\cos^2 t)m/s^2$ para cada instante de tiempo $t$. Asumiendo que inicia su movimiento en el tiempo $t = 0$ con una velocidad inicial de $1m/s$, determine su desplazamiento en cada instante $t (t \geq 0)$.
***Veamos*** :

⋆ Integral *Azul*

$$a'(t) = v(t) = 2\int e^{\sin t}\cos t\, dt - \int e^{\sin t} t \sin t\, dt + \int e^{\sin t} t \cos^2 t\, dt$$

⋆ Integral *Rojo*

⋆ Integral *Verde*

Figura 4: Esquema de trabajo

Resolviendo la integral azul por sustitución:

$$2\int e^{\sin t}\cos t\, dt$$

$$u = \sin t \quad \Longrightarrow \quad du = \cos t\, dt$$

Luego nos queda:

$$2\int e^u du = 2[e^u + C] = 2[e^{\sin t} + C] = 2e^{\sin t} + C_1$$

Resolviendo la integral rojo:

$$\int e^{\sin t} t \sin t\, dt$$

Esta integral no se puede expresar en términos sencillos, ver el teorema de Liouville [FH93].
Resolviendo la integral verde por el método de integración por partes:

$$\int e^{\sin t} t \cos^2 t\, dt$$

$$\begin{array}{rclrcl} u & = & t\cos t & dv & = & e^{\sin t}\cos t\, dt \\ du & = & (\cos t - t\sin t)\, dt & v & = & e^{\sin t} \end{array}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \textstyle\int e^{\sin t} t\cos^2 t\, dt &= t\cos t\, e^{\sin t} - \textstyle\int e^{\sin t}(\cos t - \sin t)\, dt \\ &= \textstyle\int e^{\sin t}\sin t\, dt - \int e^{\sin t}\cos t\, dt + t\cos t\, e^{\sin t} \end{aligned}$$

¡Vamos en la mitad del ejercicio!
Reemplazando en $a'(t) = v(t)$, nos queda:

$$v(t) = 2\int e^{\sin t}\cos t\, dt - \int e^{\sin t} t\sin t\, dt + \int e^{\sin t}\sin t\, dt - \int e^{\sin t}\cos t\, dt + t\cos t\, e^{\sin t} + K$$

$$v(t) = \int e^{\sin t}\cos t\, dt + t\cos t\, e^{\sin t} + K$$

$$v(t) = e^{\sin t} + t\cos t\, e^{\sin t} + K$$

Usamos el dato del el ejercicio: Velocidad en el tiempo $t = 0s$ es $1m/s \therefore v(0s) = 1m/s$.

$$v(0) = e^{\sin 0} + 0\cos 0\, e^{\sin 0} + K = 1\, m/s.$$

Es decir,

$$e^0 + 0 + K = 1 \implies K = 0.$$

Luego:

$$v(t) = e^{\sin t} + t\cos t\, e^{\sin t}$$

Como $\dfrac{ds}{dt} = v(t) \implies ds = v(t)\, dt$. Integrando esta expresión nos queda:

$$\int ds = \int v(t)\, dt$$

$$s(t) = \int (e^{\sin t} + t\cos t\, e^{\sin t})\, dt$$

$$s(t) = \int e^{\sin t}\, dt + \int t\cos t\, e^{\sin t}\, dt$$

La $\int e^{\sin t}\, dt$ se tiene que cancelar de alguna manera y debemos usar el método de integración por partes que nos genera la integral opuesta que lo reduzca a cero en la expresión anterior, sino no se podrá calcular $s(t)$, también por el teorema de Liouville no se puede calcular de manera

sencilla.
¡Ya falta poco!

$$\int t \cos t \, e^{\sin t} \, dt$$

$$\begin{array}{cc} u = t & dv = e^{\sin t} \cos t \\ du = dt & v = e^{\sin t} \end{array}$$

Luego:

$$\int t \cos t \, e^{\sin t} \, dt = e^{\sin t} \, t - \int e^{\sin t} \, dt$$

¡Bien! Logramos obtener el opuesto de la integral que no se puede calcular en términos sencillos. Ahora:

$$s(t) = \int e^{\sin t} \, dt + \int t \cos t \, e^{\sin t} \, dt$$

$$s(t) = \int e^{\sin t} \, dt + e^{\sin t} \, t - \int e^{\sin t} \, dt$$

$$\boxed{s(t) = e^{\sin t} \, t + K_2 \; \forall \; t \geq 0}$$

Gracias profesor Metzger.

**Ejemplo 1.7 Si**

# Referencias

[Den11] Charles G Denlinger. *Elements of real analysis*. Jones & Bartlett Publishers, 2011.

[FH93] A. D. Fitt and G. T. Q. Hoare. The closed-form integration of arbitrary functions. *The Mathematical Gazette*, 77(479):227–236, 1993.