Cálculo Diferencial I. 13/08/18

* Conectivos * Operaciones * Tabla de verdad
* Leyes Lógicas * Cuantificadores * Inferencia

Esquema

Técnicas de Demostración

Lógica aplicada a las Demostraciones

Conectores Lógicos

forma	se lee:
$\sim$	no
$\vee$	o
$\wedge$	y
$\rightarrow$	entonces
$\leftrightarrow$	si y solo si

Clave { $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ }

Operaciones con proposiciones

Negación:

p	$\sim$p
V	F
F	V

Conjunción:

p	q	p $\wedge$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción:

p	q	p $\vee$ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional:

p	q	p $\rightarrow$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional:

p	q	p $\leftrightarrow$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Esquemas Lógicos.

Tenemos una combinación de proposiciones y Conectivos lógicos

Así tenemos

$$(p \vee q) \rightarrow (\sim p \leftrightarrow q)$$

Tipos de Esquemas:

1. Esquemas de Contingencia

Son aquellos que tienen como resultado en su tabla de verdad, un valor verdadero (**V**) y uno falso (**F**):

p	q	$\sim p \vee q$
V	V	V
V	F	**F**
F	V	V
F	F	V

2. Esquemas Tautológicos

: Se denomina así, a esquemas donde su valor de verdad, es verdadero (**V**), para cualquier combinación de valores de verdad de sus proposiciones componentes.

Así tenemos

$\sim p \vee \sim q$	$\leftrightarrow$	$\sim(p \wedge q)$
	V	
	V	
	V	
	V	

3. Esquemas de Contradicción

: Son esquemas, donde al realizar la tabla de verdad, en la columna principal, resulta falso (**F**).

Así tenemos

$$(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (q \vee \sim p)$$

Equivalencia Lógicas

Vamos a considerar

$A \equiv B$ si y solo si $A \leftrightarrow B$ es un esquema tautológico

también

$A \equiv B$ si y solo si: las tablas de verdad de A y B son idénticas.

1. $p \vee p \equiv p$

demos:

Tabla 1

p	$p \vee p$
V	**V**
F	**F**

Tabla 2

p	p
V	**V**
F	**F**

2. $p \wedge p \equiv p$
3. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
4. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
5. $p \vee q \equiv q \vee p$
6. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
7. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
8. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
9. $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
10. $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
11. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
12. $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
13. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
14. $p \vee (q \wedge p) \equiv p$
15. $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
16. $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
17. $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

18. $p \to (q \vee r) \equiv (p \wedge \sim q) \to r$
19. $p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$
20. $\sim (p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q$

Inferencias

Tenemos el sgte esquema lógico

$$[(p \to \sim q) \wedge r] \to p$$

Cambiando de forma

$$\left.\begin{array}{l} p \to \sim q \\ r \end{array}\right\} \text{Premisas}$$
$$\left.\therefore p\right\} \text{Tesis}$$

también, dado el esquema $(p \wedge \sim q \wedge \sim r) \to h$
Se obtiene una forma:

$$\begin{array}{l} p \\ \sim q \\ \sim r \\ \hline \therefore h \end{array}$$

Propiedades de Inferencia

1. $\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$

2. $\begin{array}{l} p \to q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$

3. $\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$

4. $\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim q \\ \hline \therefore p \end{array}$

5. $\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$

6. $\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$

7. $\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$

8. $\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ p \vee r \\ \hline \therefore q \vee s \end{array}$ $\quad\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ p \wedge r \\ \hline \therefore q \wedge s \end{array}$

Cuantificadores

1. Universal $(\forall) \to$ para todo / para cada
$\forall x \in U, P(x)$

2. Existencial
$\exists x \in U, P(x)$
$\exists$ → existe

Teorema:
$\forall A$ conjunto en un universo U, se cumple $\emptyset \subset A$.

demos:
Recordemos:
1. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$.
2. $\emptyset$ es un conjunto vacío en $U \Leftrightarrow \forall x \in U, x \notin \emptyset$.

Utilizando la definición 1, tenemos

$$\emptyset \subset A \Leftrightarrow \underbrace{[\underbrace{\forall x \in \emptyset}_{F} \Rightarrow x \in A]}_{V}$$

→ Es cierto que $\emptyset \subset A$

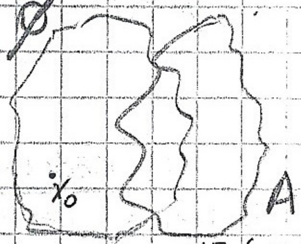
① Otra forma: Supongamos $\emptyset \not\subset A$

$\Rightarrow \exists x_0 \in \emptyset \wedge x_0 \notin A$

$p \wedge q$

$\therefore p$

$\Rightarrow \exists x_0 \in \emptyset$ (contradicción)



17/08/16

Recordemos:

Algunos resultados importantes

hipótesis   hipótesis

* $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

tesis   tesis

Contradicción

* $p \to q \equiv (p \wedge \sim q) \to F$
* $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

Formas de Demostrar

1. Método Directo.

hipótesis

$\boxed{p \to q}$

tesis

2. Método Indirecto

se divide en:

2.1 Contraposición o contrarrecíproca

$\{p \to q \equiv \sim q \to \sim p\}$

2.2 Reducción al absurdo o método de contradicción.

$p \to q \equiv (p \wedge \sim q) \to F$

error

(1). Demostrar: Si es $n \in \mathbb{N}$, entonces n es par o n es impar.

Demos:

Necesitamos saber quien es $\mathbb{N}$ y las operaciones, juntamente con el algoritmo de la división.

(2). Demostrar: Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n(n+1)(n+2)$ es múltiplo de 6.

Demos:

CASO 1: Si $n = 2K$ (par)

$n(n+1)(n+2) = 2K(2K+1)(2K+2)$

(3). Premisas

$(\sim p \vee \sim q) \to (R \wedge S)$ ... (1)

$S \to t$ ... (2)

$\sim t$ ... (3)

Inferir que: p

resol

de (2) y (3): $\sim S$ ... (4)

de (4): $\sim S \vee \sim R$ ojo: $\dfrac{p}{\therefore p \vee q}$

$\Rightarrow \sim(S \wedge R)$ ... (5)

(1) y (5) se tiene:

$\sim(\sim p \vee \sim q)$ ojo: $\dfrac{p \wedge q}{\therefore p}$

$\Rightarrow p \wedge q \Rightarrow p$.

(4). Demostrar por el absurdo que: Si $\underbrace{\boxed{3n+2 \text{ es impar}}}_{p}$, entonces $\underbrace{\boxed{n \text{ es impar}}}_{q}$

demos:

equivale a demostrar:

Si n es par $\Longrightarrow$ $3n+2$ es par.

Veamos:

Como n es par

$\exists K \in \mathbb{N} \,/\, n = 2K$.

reempl.

; $3n+2 = 3(2K)+2$

$= 2(3K+1)$

$\Longrightarrow$ $3n+2$ es par.

(6). Sea

$\sim(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \sim s)$ --- (1)

$q \rightarrow \sim p$ --- (2)

$\therefore r$

dem:

negando la tesis: $\sim r$ --- (3)

de (3)

$\sim r \vee s$ --- (4)

de (1) y (4)

$\sim(\sim(p \wedge q))$

$\Rightarrow p \wedge q$ --- (5)

de (5)

p --- (6)

q --- (7)

de (7) y (2):

$\sim p$ --- (8)

de (6) y (8) Contradicción.

(7). Demostrar: Sea $A, B \subset U$, si $\underbrace{A \cap B = \emptyset}_{\text{DATO}}$, entonces $\underbrace{A \subset B^c}_{\text{TESIS}}$

demos:

Por dato (P.d.) $A \subset B^c$

Sea $x \in A$ cualquiera

Suponer que $x \in B$

$\Longrightarrow x \in A \wedge x \in B$

$\Longrightarrow x \in A \cap B$

$x \in \emptyset$ (contrad.)

negando lo supuesto

$x \notin B$

$\Rightarrow x \in B^c$.

(8). Conjetura de Goldbach: Todo número par mayor que 2 es la suma de dos primos

$4 = 2+2$

$6 = 3+3$

$8 = 5+3$

$10 = 5+3 = 7+3$

$12 = 5+7$

$14 = 7+7$

$\vdots$

(9). Demuestre que el argumento siguiente no es válido.

$P \leftrightarrow Q$	Demos: basta		
$Q \rightarrow R$	$S \equiv F$	$V \leftrightarrow V$	V
$R \vee \sim S$	$R \equiv V$	$V \rightarrow V$	V
$\sim S \rightarrow Q$	$P \equiv V$	$V \vee \sim F$	V
$\therefore S$	$Q \equiv V$	$\sim F \rightarrow V$	V
		$\therefore F$	

(10). Demuestre que el argumento no es válido

P ...(1)

$P \to R$ ...(2)

$P \to (q \vee \sim R)$ ...(3)

$\sim q \vee \sim S$ ...(4)

Se infiere S.

demos:

de (1) y (2): R ...(5)

de (1) y (3): $q \vee \sim R$ ...(6)

de (5) y (6): q ...(7)

de (7) y (4): $\sim S$ ...(8)

(11). Demostrar: Sean A y B dos conjuntos en un universo U.

$$A \cup B = U \Leftrightarrow A^c \subset B$$

demos:

($\Rightarrow$) Hipótesis: $A \cup B = U$

Tesis: $A^c \subset B$

Sea $x \in A^c$

$\Rightarrow x \notin A$

tenemos $x \in U$

$x \in A \cup B$

$\underbrace{x \in A}_{F} \vee x \in B \Rightarrow x \in B$

($\Leftarrow$) Hip: $A^c \subset B$

$q \to p$ $\leftarrow$ T: $A \cup B = U$

Recordar

$A = B \Leftrightarrow [A \subset B \wedge B \subset A]$

($\subset$) Sea $x \in A \cup B$

Note: $A \subset U \wedge B \subset U$

$\Rightarrow x \in U \vee x \in U$

$\Rightarrow x \in U$

$\frac{p \vee p}{\therefore p}$

($\supset$) Sea $x \in U$

Caso 1: si $x \in A$

$\Rightarrow x \in A \vee x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cup B$

$\frac{p}{\therefore p \vee q}$ $\frac{p}{\therefore q \vee p}$

Caso 2: Si $x \notin A$

$\Rightarrow x \in A^c$

Por hipótesis $A^c \subset B$

$\Rightarrow x \in B$

$\Rightarrow x \in A \vee x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cup B$

(12) Demostrar

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow [A = \emptyset \vee B = \emptyset]$$

demos:

($\Rightarrow$) T: $A = \emptyset \vee B = \emptyset$

Consideremos $A \neq \emptyset$

basta probar que

$B = \emptyset$

Por el método del absurdo.

Supongamos $B \neq \emptyset$

Como $A \neq \emptyset$

$\exists\, a \in A$

Como $B \neq \emptyset$

$\exists\, b \in B$

$\Rightarrow (a;b) \in A \times B$

$\Rightarrow (a;b) \in \emptyset$ (Contrad.)

($\Leftarrow$) Tesis: $A \times B = \emptyset$

Demostrar

negando la tesis

$A \times B \neq \emptyset$

(13). Demostrar: Sea $n \in \mathbb{Z}^+$.
Si n^3+5 es impar, entonces n es par

demos: Utilizando el método de reducción al absurdo.

Hip: n^3+5 impar
n es impar
T: Contradicción

$\Rightarrow n = 2K+1$, para algún $K \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow n^3+5 = 8K^3+12K^2+6K+1+5$
$n^3+5 = 2(4K^3+6K^2+3K+3)$ es par
(contradicción).

Teoría de Conjuntos

Noción: Es una agrupación de objetos bien definidos

Ejm ①
$A = \{a; e; i; o; u\}$

Ejm ②
$B = \{\emptyset; \{\emptyset\}; \{1; 2\}; 3; 4\}$

Inclusión

Sea $A, B \subset U$

$A \subset B \overset{def}{\equiv} \{\forall x \in U : x \in A \rightarrow x \in B\}$

Propiedades

① $\emptyset \subset A$
$\equiv \forall x \in U : \underbrace{x \in \emptyset}_{F} \rightarrow x \in A$
V

② $A \subset A$
$\equiv \forall x \in U : x \in A \rightarrow x \in A$
V

③ Si $A \subset B$ y $B \subset M$, entonces $A \subset M$

Prueba:
$A \subset B : \forall x \in U : x \in A \rightarrow x \in B$
$B \subset M : \forall x \in U : x \in B \rightarrow x \in M$

$\forall x \in U : x \in A \rightarrow x \in M$

Por definición de inclusión $A \subset M$ ■

OPERACIONES

Sean $A, B \subset U$

UNIÓN:
$A \cup B = \{x \in U / x \in A \vee x \in B\}$

INTERSECCIÓN:
$A \cap B = \{x \in U / x \in A \wedge x \in B\}$

COMPLEMENTO
$A^c = \{x \in U / \underbrace{x \notin A}_{\sim(x \in A)}\}$

DIFERENCIA:
$A \setminus B = \{x \in U / x \in A \wedge x \notin B\}$

$A \setminus B = A \cap B^c$

Diferencia Simétrica
$A \Delta B = \{x \in U / x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$

* $A \Delta B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$
* $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Propiedades

① $A \cup B = B \cup A$ Prueba: $A\cup B \overset{def}{=} \{x \in U / x\in A \vee x \in B\}$ conmutatividad

$A \cap B = B \cap A$ $= \{x \in U / x \in B \vee x \in A\}$

$A \Delta B = B \Delta A$ $\overset{def}{=} B \cup A$

② $(A\cup B)\cup C = A \cup (B \cup C)$ ③ $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$ $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

Prueba:

$(A\cup B)\cup C = \{x\in U / x\in(A\cup B) \vee x\in C\}$

$= \{x\in U / (x\in A \vee x\in B) \vee x \in C\}$

$= \{x\in U / x\in A \vee (x\in B \vee x\in C)\}$

$= \{x \in U / x\in A \vee x\in B\cup C\}$

$= A\cup(B\cup C)$

④ $A\cup A^c = U$

$A \cap A^c = \emptyset$

$(A^c)^c = A$

⑤ $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$

Prueba:

$(A\cup B)^c = \{x\in U / x \notin A\cup B\}$

$= \{x\in U / \sim(x\in A\cup B)\}$

$= \{x\in U / \sim(x\in A \vee x\in B)\}$

$= \{x\in U / x\notin A \wedge x\notin B\}$

$= A^c \cap B^c$

⑥ $A\cap(A\cup B) = A$

$A\cup(A\cap B) = A$

$A\cap(A^c\cup B) = A\cap B$

$A\cup(A^c\cap B) = A\cup B$

PRUEBA₁:

$A\cap(A\cup B) = \{x\in U / x\in A \wedge (x\in A\cup B)\}$

$= \{x\in U / x\in A\}$

$= A$

Conjunto Potencia

Sea $A \subset U$

$P(A) = \{X / X\subset A\}$

Ejemplo:

$A = \{2; \emptyset\}$

$P(A) = \{\emptyset; \{2\}, \{\emptyset\}, \{2,\emptyset\}\}$

Propiedades

① $X\in P(A) \leftrightarrow X\subset A$

② $A\subset B \leftrightarrow P(A)\subset P(B)$

($\Rightarrow$) AFIRMO

$P(A)\subset P(B)$

$X\in P(A) \xrightarrow{Por ①} X\subset A$

y además $A\subset B$

Entonces $X\subset B \xrightarrow{Por ①} X\in P(B)$

($\Leftarrow$) AFIRMO $A\subset B$

$x\in A \rightarrow \{x\}\subset A$

$\rightarrow \{x\}\in P(A)$

Sabemos $P(A)\subset P(B)$

$\therefore \{x\}\in P(B)$

Por ① $\{x\}\subset B$

$\therefore x\in B$

⑤ $P(A)\cup P(B)\subset P(A\cup B)$

Prueba:

Sabemos:

$A\subset A\cup B \xrightarrow{Por ②} P(A)\subset P(A\cup B)$

$B\subset A\cup B \xrightarrow{Por ②} P(B)\subset P(A\cup B)$

$\therefore P(A)\cup P(B)\subset P(A\cup B)$

Obs $\boxed{2}$:

$A\subset M$ o $B\subset M \rightarrow A\cup B\subset M$

Obs: $\boxed{2}$ $A\subset M$ o $B\subset M \rightarrow A\cup B\subset M$

Prueba

$x\in A\cup B \rightarrow x\in A$ o $x\in B$

$x\in M$ o $x\in M$

$\therefore x\in M$

③ $A = B \leftrightarrow P(A)=P(B)$

($\Rightarrow$) $A=B \leftrightarrow P(A)=P(B)$

($\Leftarrow$) $P(A)=P(B) \rightarrow P(A)\subset P(B) \xrightarrow{Por ②} A\subset B$

y

$P(B)\subset P(A) \xrightarrow{Por ②} B\subset A$

$\therefore A=B$

④ $P(A\cap B) = P(A)\cap P(B)$

($\subset$) Sabemos

$A\cap B\subset A \xrightarrow{Por ②} P(A\cap B)\subset P(A)$

$A\cap B\subset B \xrightarrow{Por ②} P(A\cap B)\subset P(B)$

$\therefore P(A\cap B)\subset P(A)\cap P(B)$

Obs: $\boxed{1}$ $A\subset M$ y $A\subset N \rightarrow A\subset M\cap N$

Prueba

$x\in A\subset M \rightarrow x\in M$

y

$x\in A\subset N \rightarrow x\in N$

$\therefore x\in M\cap N$

($\supset$) AFIRMO $P(A)\cap P(B)\subset P(A\cap B)$

$X\in P(A)\cap P(B)$

Por def. $X\in P(A)$ y $X\in P(B)$

$\downarrow$① $\downarrow$①

$X\subset A$ y $X\subset B$

Por la obs: $X\subset A\cap B$

Por ①: $X\in P(A\cap B)$

Capítulo (I)

Números Naturales

La construcción de los números naturales. Se basan en los axiomas de Peano:

Axiomas de Peano

① Existe una función Inyectiva

$$S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$
$$n \rightarrow S(n)$$

Donde esta función se le conoce como **Sucesor**

$$S(m) = S(n) \longrightarrow m = n$$

o

$$* \quad m \neq n \longrightarrow S(m) \neq S(n)$$

Prioridad

② Llamaremos $1 \in \mathbb{N}$

Tal que cumple

$\forall n \in \mathbb{N}, S(n) \neq 1$

③ **Primer Principio De Inducción Matemática (PIM)**

Sea $X \subset \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l}(1).\ 1 \in X \\ (2).\ \underbrace{n \in X}_{\text{Hipótesis}} \longrightarrow S(n) \in X\end{array}\right\} \Longrightarrow X = \mathbb{N}$$

Propiedad

$\forall n \in \mathbb{N}, S(n) \neq n.$

Defino.

$$X = \{n \in \mathbb{N} / S(n) \neq n\}$$

Por el P.I.M.:

1) $1 \in X \longleftrightarrow S(1) \neq 1$ (Por el axioma ②)

2) $n \in X$ (Hipótesis)

$$S(n) \neq n$$

Por el axioma ①

$$S(S(n)) \neq S(n) \quad \therefore S(n) \in X$$

Entonces $X = \mathbb{N}$

$$\therefore \forall n \in \mathbb{N};\ S(n) \neq n \quad \blacksquare$$

Soma:

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(m;n) \longrightarrow m+n$$

Axiomas

$* \ m+1 = S(m)$

$* \ m+S(n) = S(m+n)$

Multiplicación:

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(m;n) \longrightarrow m.n$$

Axiomas

$* \ m.1 = m$

$* \ m.\ S(n) = m.n + m$

Propiedades:

① Conmutativa:

$\forall m, n \in \mathbb{N}: m+n = n+m$

$\forall m, n \in \mathbb{N}: m.n = n.m$

② Asociativa

$\forall m, n, p \in \mathbb{N}: (m+n)+p = m+(n+p)$

$\forall m, n, p \in \mathbb{N}: (m.n).p = m.(n.p)$

③ Distributiva

$\forall m, n, p \in \mathbb{N}.\ m.(n+p) = m.n + m.p$

$\forall m, n, p \in \mathbb{N}: (m+n).p = m.p + n.p$

④ Cancelación

$\forall m, n, p \in \mathbb{N}$

Si $m+p = m+n \rightarrow p = n$

Prueba

(1.) $\forall m, n \in \mathbb{N}, \ m+n = n+m$

Fijamos $m \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N} : m+n = n+m$

Por el P.I.M.

Defino: $X = \{ n \in \mathbb{N} / m+n = n+m \}$

(I) $1 \in X \longleftrightarrow \underbrace{m+1 = 1+m}_{\text{¡Probar!}}$

Obs:

$\forall m \in \mathbb{N} : m+1 = 1+m$

$Z = \{ m \in \mathbb{N} / m+1 = 1+m \}$

Por la P.I.M.

a. $1 \in Z \longleftrightarrow 1+1 = 1+1$

b. Hipótesis

$m \in Z \longleftrightarrow m+1 = 1+m$

$S(m) + 1 = (m+1) + 1$

Por la hip.

$= (1+m) + 1$

$= 1 + (m+1)$ ASOC.

$= 1 + S(m)$

$\therefore S(m) \in Z \longrightarrow Z = \mathbb{N}$ $\boxed{\equiv}$

(II) Hipótesis

$n \in X \longleftrightarrow m+n = n+m$

$m + S(n) = m + (n+1)$ ASOC.

$= (m+n) + 1$ Por hipótesis

$= n + (m+1)$

$= n + (1+m)$ Por (I)

$= (n+1) + m$ ASOC.

$= S(n) + m$ $\quad \therefore m + S(n) = S(n) + m$

$\therefore S(n) \in X$

(2.) $\forall m, n, p \in \mathbb{N}$

$(m+n) + p = m + (n+p)$

Defino:

$X = \{ p \in \mathbb{N} / (m+n) + p = m + (n+p) \}$

(I) $1 \in X \longleftrightarrow (m+n) + 1 = m + (n+1)$

(II) $P \in X$ (hipótesis)

Por la hipótesis

$S((m+n) + p) = S(m + (n+p))$

$(m+n) + S(p) = m + S(n+p)$

$= m + (n + S(p))$

$\therefore S(p) \in X$.

Obs:

$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad (m+n) + 1 = m + (n+1)$

Fijando "n".

$\forall m \in \mathbb{N} : (m+n) + 1 = m + (n+1)$

$Z = \{ m \in \mathbb{N} / (m+n) + 1 = m + (n+1) \}$

a) $1 \in Z$

$(1+n) + 1 = 1 + (n+1)$

$S(n) + 1 = S(n+1)$

b) $m \in Z$

$S((m+n) + 1) = S(m + (n+1))$

$S(m+n) + 1 = S(m) + (n+1)$

$(S(m) + n) + 1 = S(m) + (n+1)$

$\therefore S(m) \in Z$

| / /

Relación de Orden

$m<n$: · n es mayor que m.
· m es menor que n.

Relación de Orden (Estricto)

$$m<n \overset{\text{Definición}}{\equiv} \exists p \in \mathbb{N} / n = m+p$$

$$m \leq n \overset{def}{\equiv} m<n \text{ o } m=n$$

Relación de Orden (No estric.)

Ejercicio: Probar que no existe $x \in \mathbb{N}$ tal que
Dado $n \in \mathbb{N}$, $n<x<n+1$.

Prueba:
Por contradicción
$\exists x \in \mathbb{N} / n<x<n+1$

Tenemos: $n<x \overset{Def}{\equiv} \exists p \in \mathbb{N} / x = p+n$

Además: $x<n+1 \overset{def}{\equiv} \exists q \in \mathbb{N} / n+1 = x+q$

$n+1 = (p+n)+q$ Conmutativa "+"
$n+1 = (n+p)+q$ Asociativa "+"
$n+1 = n+(p+q)$ Cancelativa
$1 = p+q$

Por casos:

I) $q=1$; $1 = p+1$
$1 = S(p)$ $(\rightarrow\leftarrow)$
Por el primer Axioma de Peano

II) $q>1 \overset{def}{\equiv} \exists s \in \mathbb{N} / q = s+1$

$1 = p+(s+1)$ Asociativa
$1 = (p+s)+1$
$1 = S(p+s)$ $(\rightarrow\leftarrow)$

Propiedad (transitiva)

Sea $m, n, p \in \mathbb{N}$
Si $m<n$ y $n<p$
Entonces $m<p$

Prueba:
$m<n \overset{def}{\equiv} \exists q \in \mathbb{N} / n = m+q$
$n<p \overset{def}{\equiv} \exists s \in \mathbb{N} / p = n+s$

$p = (m+q)+s$ Prop. Asociativa de la suma
$p = m + \underbrace{(q+s)}_{\in \mathbb{N}}$

Por la definición de la relación de Orden
$m<p$. ■

Ley de la Tricotomía

Sean $m, n \in \mathbb{N}$, se cumple solo una de las siguientes relaciones.

I) $m<n$ II) $m=n$ III) $m>n$

Prueba

Fijando $m \in \mathbb{N}$

$A = \{n \in \mathbb{N} / m < n\}$

$B = \{n \in \mathbb{N} / m = n\}$

$C = \{n \in \mathbb{N} / m > n\}$

Notamos $A \cap B \cap C = \emptyset$

AFIRMO

$A \cup B \cup C = \mathbb{N}$

Defino

$X = A \cup B \cup C$

Por P.I.M.

I) $1 \in X$

a) $m = 1 \longrightarrow B = \{1\}$

$1 \in B \longrightarrow 1 \in A \cup B \cup C$

$\therefore 1 \in X.$

b) $m > 1 \rightarrow 1 \in C$

$\therefore 1 \in A \cup B \cup C = X$

$\therefore 1 \in X$

II) Hipótesis $(n \in X)$

Tenemos $n \in X = A \cup B \cup C$.

a) $n \in A \longrightarrow m < n$

Sabemos $n < S(n)$

Por la Prop. Transitiva

$m < S(n)$

$\therefore S(n) \in A \subset A \cup B \cup C = X$

$\therefore S(n) \in X$

b) $n \in B \rightarrow m = n$

$S(n) = S(m) = m+1 \rightarrow m < S(n)$

$\therefore S(n) \in A \subset A \cup B \cup C = X$

$S(n) \in X$

c) $n \in C \rightarrow n < m$

Por la definición de Orden.

$\exists p \in \mathbb{N} / m = n + p$

C.1.) $p = 1 \longrightarrow m = n + 1$

$m = S(n)$

$\therefore S(n) \in B$

$\therefore S(n) \in X.$

C.2.) $p > 1 \rightarrow \exists q \in \mathbb{N} / p = 1 + q$

$m = n + p$

$m = n + (1 + q)$ } Asoc.

$m = (n+1) + q$

$m = S(n) + q$

Por la Def. de Orden

$S(n) < m$

$\therefore S(n) \in C \rightarrow S(n) \in X$

$\therefore S(n) \in X \rightarrow X = \mathbb{N}$

Ejemplo:

1) Desigualdad de Bernoulli

Sea $x > -1$,

$\forall x \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + xn$

Por el P.I.M.

$X = \{n \in \mathbb{N} / (1+x)^n \geq 1 + xn\}$

I) $1 \in X \leftrightarrow (1+x)^1 \geq 1 + x.1$

II) $n \in X$ (hipótesis)

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x)$$

Hipótesis

$$\geq (1+xn)(1+x)$$

$$= 1 + xn + x + x^2 n$$

$$= 1 + x(n+1) + \underbrace{x^2 n}_{\geq 0}$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + x(n+1)$$

$\therefore S(n) \in X$

② $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n + 3^n \leq 5^n$

$X = \{ n \in \mathbb{N} / 2^n + 3^n \leq 5^n \}$

I) $1 \in X$; $2^1 + 3^1 \leq 5^1$

II) Hipótesis $n \in X$
$(2^n + 3^n \leq 5^n)$

$5^{n+1} = 5^n \cdot 5$

Hipótesis

$\geq (2^n + 3^n) \cdot 5$

$= 2^n \cdot \underset{\geq 2}{5} + 3^n \cdot \underset{\geq 3}{5}$ $\therefore S(n) \in X$

$\geq 2^{n+1} + 3^{n+1}$ $\longrightarrow X = \mathbb{N}$

Principio de Buen Orden

Sea $A \subset \mathbb{N}$, no VACÍO entonces posee un menor elemento, es decir, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / n_0 \leq n, \forall n \in A$.

Prueba:

I) $1 \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n$
menor elemento

II) $1 \notin A$
Defino, sea $n \in \mathbb{N}$

$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

$I_n = \{ k \in \mathbb{N} / 1 \leq k \leq n \}$

$X = \{ n \in \mathbb{N} / I_n \subset \mathbb{N} - A \}$

AFIRMO: $\boxed{X \neq \mathbb{N}}$

Por contradicción
$X = \mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{ n \in \mathbb{N} / I_n \subset \mathbb{N} - A \}$

$\forall n \in \mathbb{N};\ I_n \subset \mathbb{N} - A$

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = \mathbb{N} \subset \mathbb{N} - A$

$\therefore A = \emptyset$ $(\rightarrow\leftarrow)$

Recordemos:

$(n \in X \rightarrow S(n) \in X) \longrightarrow X = \mathbb{N}$

$X \neq \mathbb{N} \longrightarrow \underbrace{\sim (n \in X \rightarrow S(n) \in X)}$

$n_0 \in X \wedge S(n_0) \notin X$

$n_0 \in X \longrightarrow I_{n_0} \subset \mathbb{N} - A$

tenemos $S(n_0) \in A$ es el menor elemento de A.

Segundo Principio de Inducción Matemática

Sea $X \subset \mathbb{N}$, $X \neq \emptyset$

I) $1 \in X$

II) Dado $n \in \mathbb{N}$, $n < m$
se tiene que $n \in X$ $\Longrightarrow X = \mathbb{N}$
$\longrightarrow m \in X$

Ejemplo: Sea la sucesión de Fibonacci

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

$$t_{n+2} = t_{(n+1)} + t_{(n)}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Donde el término general

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ t_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

donde a, b son raíces de

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Defino:

$$X = \left\{ n \in \mathbb{N} \ / \ t_n = \frac{a^n - b^n}{a - b} \right\}$$

I) $1 \in X \leftrightarrow t_1 = \dfrac{a^1 - b^1}{a - b} = 1$ ✓

II) Tomando $m = n+2$
$\forall k \in \mathbb{N};\ k < m,\ k \in X$

Para $n+1 \in X$
$n \in X$

$$t_{n+2} = t_{n+1} + t_n$$
$$= \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} + \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

$$t_{n+2} = \frac{a^{n+1} + a^n}{a - b} - \frac{b^{n+1} + b^n}{a - b} \quad \ldots (I)$$

Tenemos Que:
"a" es raíz de $x^2 - x - 1 = 0$

$$a^2 - a = 1 \ ) \times a^n$$
$$a^{n+2} - a^{n+1} - a^n = 0$$
$$\therefore \ a^{n+2} = a^{n+1} + a^n \quad \ldots (II)$$

Para "b" se cumple

$$b^{n+2} = b^{n+1} + b^n \quad \ldots (III)$$

De (I), (II) y (III)

$$t_{n+2} = \frac{a^{n+2}}{a - b} - \frac{b^{n+2}}{a - b}$$
$$= \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a - b}$$

$n+2 \in X$ ✓

Ejemplo: Frank Aires (números reales)

$\forall n \in \mathbb{N} \quad C_0^n + C_1^n + C_3^n + \dots + C_n^n = 2^n$

Defino

$X = \{ n \in \mathbb{N} / C_0^n + C_1^n + \dots + C_n^n = 2^n \}$

Por el P.I.M.

I) $1 \in X \Longleftrightarrow C_0^1 + C_1^1 = 2^1$

II) $n \in X$ (Hipótesis)

$C_0^n + C_1^n + \dots + C_n^n = 2^n$

$* \; C_0^{n+1} + C_1^{n+1} + C_2^{n+2} + \dots + C_n^{n+1} + C_{n+1}^{n+1}$

$= C_0^n + (C_0^n + C_1^n) + (C_1^n + C_2^n) + \dots$

$\dots + (C_{n-1}^n + C_n^n) + C_n^n$

Por Hipótesis

$= 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

$\therefore S(n) \in X$

$\rightarrow X = \mathbb{N}$