Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática — Ciclo 2016-II

[Cod: CM131 A,B,C,D. Curso: Cálculo Diferencial]

Segunda Práctica Dirigida

1. **Demostrar por inducción: Si n es un número impar, 7^n+1 es divisible por 8.**

2. **Determine si la suma y el producto de 3 números impares consecutivos es siempre divisible por 6.**

3. **Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$: $1.3+2.4+3.5+...+n(n+2)=\dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$**

4. **Pruebe que para todo número natural $n>1$, el último dígito del número $2^{2^n}+1$ es 7.**

5. **Demostrar que $3+2.3^1+...+2.3^n=3^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.**

6. **Demsotrar que para todo $n>1$,**

$$1+1.1!+2.2!+...+(n-1)(n-1)!=n!.$$

7. **Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$:**

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

8. **Probar que $a^{2n}-b^{2n}$ es dividible por $a+b$, $\forall n \in \mathbb{N}$.**

9. **Demostrar que n^7-n es múltiplo de 42, $\forall n \in \mathbb{N}$.**

10. **Demostrar que $\forall n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$, $n! > 2^n$. Determine para que valores naturales se cumple: $2^n > n^2+4n+5$.**

11. **Demostrar: Sea $a,b \in \mathbb{N}$ con $a<b$, entonces $a+1 \leq b$.**

12. **Pruebe que si $n \in \mathbb{N}$ no existe $x \in \mathbb{N}$, tal que $n<x<n+1$.**

13. **Demuestre que para todo natural $n \geq 2$**

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$

14. **Demuestre la desigualdad de Bernoulli(Jacques Bernoulli 1654-1705): $(1+a)^n \geq 1+na$ es válida para $a \geq -1$ y todo entero no negativo n.**

15. **Pruebe la la desigualdad**

$$\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

16. **Pruebe que el número de diagonales de un polígono convexo de n lados es $\dfrac{n(n-3)}{2}$.**

17. **Pruebe las siguientes propiedades:**
    (a) Si $x+u=x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces $u=0$;
    (b) Si $x.u=x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces $u=1$;
    (c) Si $x+y=0$ entonces $y=-x$;
    (d) Si $x.y=1$ entonces $y=x^{-1}$.

18. **Demostrar que $K=\{a+b\sqrt{2} : a,b \in \mathbb{Q}\}$ es un cuerpo.**

19. **Demostrar que $\forall x,y \in K$, $(-x)y=-(xy)$.**

20. **Sean $a,b,c,d \in K$, $bd \neq 0$. Demostrar:**
    (a) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$;
    (b) $(\dfrac{a}{b})(\dfrac{c}{d})=\dfrac{ac}{bd}$.

21. **para $m,n,p \in \mathbb{N}$, probar las siguientes propiedades:**
    (a) (Asociativa): $(m+n)+p=m+(n+p)$, $m.(n.p)=(m.n).p$;
    (b) (Distributiva): $m.(n+p)=m.n+m.p$;
    (c) (Conmutativa): $m+n=n+m$; $m.n=n.m$;
    (d) (Ley de corte): $m+n=m+p \Rightarrow m=p$; $m.n=m.p \Rightarrow n=p$.

22. **Demuestre las siguientes propiedades:**
    (a) Si $a>b$ y $c>d$ entonces $a+c>b+d$,
    (b) Si $a>b$ y $c>0$ entonces $ac>bc$,
    (c) Si $ac<bc$ y $c<0$ entonces $a>b$,
    (d) Si $a>b>0$ y $c>d>0$ entonces $ac>db$,
    (e) Si $a>0$ entonces $a^{-1}>0$,
    (f) Si $ab>0$ y $a>b$ entonces $a^{-1}<b^{-1}$,
    (g) Si $(\dfrac{a+b}{2})^3 \leq \dfrac{a^3+b^3}{2}$.

23. **Demostrar:** $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$ **entonces** $(\frac{a+b+c+d}{4})^3 \leq \frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}$

24. **Considerando que para un conjunto de números reales** $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ **se define la media aritmética, geométrica y armónica respectivamente como:**

$$MA = \frac{1}{n}\sum_{k+1}^{n} a_k; \quad MG = (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{1/n} \quad MH = \frac{n}{\sum a_k - 1}(a_k \neq 0)$$

que cumplen $MH \leq MG \leq MA$. **Utilice esto para probar:**

(a) **Sean** $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ **y tales que** $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$, **demostrar que** $abc \leq 1$.

(b) **Sean** $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$ **y** $s = a+b+c+d$, **demostrar que:**

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \geq 81(abcd)$$

(c) **Sean** $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+$ **y tales que** $a_1.a_2.....a_n = 1$, **demostrar que:**

$$(1+a_1)(1+a_2).....(1+a_n) \geq 2^n$$

25. **Sean** $a,b,c \in \mathbb{R}$, **demostrar que:**

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c).$$

26. **Sean** $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ **tales que la suma de dos cualesquiera de ellos es mayor que el tercero. Demostrar que:**

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) < abc.$$

El Profesor*

UNI, September 2, 2016

*Hecho en LaTeX