

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2016-2

[Curso CM131: Cálculo Diferencial]

[Profesores: E. Reyes, J. Mayta, G. Marca, L. Paredes, R. Pérez]

Examen Sustitutorio

$$f(x) = \underbrace{f(x) + f(-x)}_{\text{par}} + \underbrace{f(x) - f(-x)}_{\text{impar}}$$

1. Formalice los siguientes razonamientos mediante una proposición lógica y demuestre

- a) [2 ptos.] O la Tierra gira alrededor del Sol o el Sol alrededor de la Tierra. Si la Tierra gira alrededor del Sol, deberíamos apreciar una variación en el brillo de las estrellas a lo largo de los años o en su posición con respecto a un observador terrestre. No se aprecia variación en el brillo de las estrellas a lo largo del año, ni se aprecia una variación en su posición con respecto a un observador terrestre. Luego, el Sol gira alrededor de la Tierra.
- b) [2 ptos.] Si hay una situación de crisis económica, el índice de natalidad disminuye. Si avanza la medicina, las expectativas de vida serán mayores. Si el índice de natalidad disminuye y las expectativas de vida se hacen mayores, entonces la sociedad irá envejeciendo rápidamente. La crisis económica es un hecho y los avances en la medicina son constantes. Luego, la sociedad envejecerá con rapidez.

2. Indique el valor de verdad de las proposiciones siguientes, justifique su respuesta:

- a) [1 pto.] $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1, \forall k \in \mathbb{N}$.
- b) [1 pto.] $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ es un número irracional.
- c) [2 ptos.] Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera, pruebe que existen $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que g es una función par, h es impar y además $f(x) = g(x) + h(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

3. a) [2 ptos.] Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{(x \sin(x))^{3/2}}$$

b) [2 ptos.] Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$$

4. Se sabe que de Lima a Ica hay 306 kilómetros de distancia vía la carretera Panamericana Sur. Un automovilista parte de Lima hacia Ica el día sábado a las 8 : 00 am y tarda 4 horas en llegar a su destino, por otro lado al día siguiente domingo parte de Ica hacia Lima a las 8 : 00 am y tarda también 4 horas en llegar a su destino. Considere las funciones:

$$f: [8; 12] \rightarrow \mathbb{R}$$

$t \rightarrow f(t)$ = distancia que recorrió el sábado

$$g: [8; 12] \rightarrow \mathbb{R}$$

$t \rightarrow g(t)$ = distancia que recorrió el domingo

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f es derivable
 $f'(2) < d < f'(4)$ entonces $\exists c \in (2,4) / f'(c) = d$
 entonces $\exists c \in (2,4) / f'(c) = d$

$[0,12] \rightarrow [306]$

- a) [1 pto.] Pruebe que la función $h(t) = f(t) - (306 - g(t))$ satisface las hipótesis del teorema del valor intermedio.
 - b) [3 ptos.] Demuestre que en algún momento t_0 del día domingo el automovilista se encuentra a igual distancia de Lima que a la que se encontraba el día sábado en ese mismo instante t_0 .
5. [4 ptos.] Sean los puntos $P(1;4)$, $Q(-1,2)$ y $R(2,3)$. Justifique sus respuestas.
- a) Determine la función cuadrática que pasa por puntos dados.
 - b) Determine el máximo y/o mínimo de la función obtenida.
 - c) Determine el gráfico de la función y trácela.

Uni, 19 de Diciembre del 2016

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} 4 = a + b + c \\ 2 = a - b + c \\ 3 = 4a + 2b + c \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = 2b \rightarrow b = 1 \\ 2 + 4 = 4a + 2b + c \\ 3a = 2b \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4 &= 4a + c \\ 3 &= 2a + c \\ \hline -1 &= 2a \\ a &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$3 = -\frac{1}{2} + c \Rightarrow \frac{7}{2} = c$$

$$2) -\frac{2}{3}x^2 + x + \frac{11}{3} = f(x)$$

$$b) f'(x) = -\frac{4}{3}x + 1$$

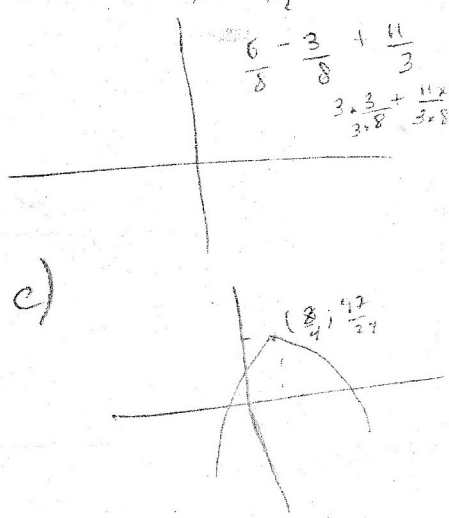
$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$f''(x) = -\frac{4}{3} < 0$$

entonces posee máximo local

$$f(3/4) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3^2}{4^2} + \frac{3}{4} + \frac{11}{3}$$

$$= \frac{6}{8} - \frac{3}{8} + \frac{11}{3} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 8} + \frac{11 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{97}{24}$$



$$-\frac{2}{3}x^2 + x + \frac{11}{3}$$

$$-\frac{2}{3} \left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{11}{2} \right)$$

$$-\frac{2}{3} \left(x^2 - 2 \left(\frac{3}{4} \right) x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - \frac{11}{2} \right)$$

$$-\frac{2}{3} \left(\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} - \frac{11 \cdot 8}{16} \right)$$

$$-\frac{2}{3} \left(\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{97}{16} \right)$$

$$\left(x - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{97}}{4} \right) \left(x - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{97}}{4} \right) = 0$$