UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICAS
[Código : CM132 Curso: Cálculo Integral]

QUINTA PRÁCTICA DIRIGIDA

---

1. Halle el área de la región interior a la curva $x = \frac{t}{3}(6-t)$; $y = \frac{t^2}{8}(6-t)$.

2. Sea la parábola $y^2 = 4ax$ y las rectas $y = x - a$; $x = a$, en el primer cuadrante. Hallar el área encerrada en coordenadas polares.

3. Hallar el área de la región interior a la curva $\rho = 2a\cos(3\theta)$, y fuera del círculo $\rho = a$.

4. Hallar el área de la región interior a la cardioide $\rho = a(1-\cos\theta)$ y el círculo $\rho = a$.

5. Hallar el área dentro de la curva

   $\rho = a\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$.

6. Halle el área de la porción (en el interior al círculo) de la figura acotada por la lemniscata de Bernoulli $\rho = a\sqrt{\cos(2\theta)}$.

7. Expresando a coordenadas polares evaluar el área de la región interior a :

   (a) $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.

   (b) $x^4 + y^4 = a^2(x^2+y^2)$.

8. Hágase girar alrededor del eje polar la parte de la cardioide $\rho = 4 + 4\cos\theta$ que está entre las rectas $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$ y hallar su volumen.

9. Las ecuaciones de la envolvente de un círculo son $x = a(\cos\theta + \theta\operatorname{sen}\theta)$, $y = a(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$, hallar la longitud del arco desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \theta_1$.

10. Dada la curva $x(t) = 2\cos t - \cos(2t)$, $y(t) = 2\operatorname{sen}(t) - \operatorname{sen}(2t)$, $t \in [0,\pi]$. Calcule su longitud.

11. Halle el área lateral del toro de revolución generada al girar la curva $(x-a)^2 + y^2 = r^2$, $a > r$, alrededor del eje Y.

12. Sea $f(x)$ una función continua y derivable en el intervalo $\langle 0,4\rangle$, tal que la longitud del arco de la curva $y = f(x)$ desde $x = 0$ a $x = t$ viene dado por $s(t) = 4\arcsin(t/4)$ con $t \in [0,4]$. Obtenga $f(x)$ si $f(4) = 5$.

13. Pruebe que el volumen del cono esférico $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq a^2, (a > 0)$ y $0 \leq \cos^{-1}(x/\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \leq \varphi\}$ es igual a $2\pi a^3(1-\cos\varphi)/3$.

14. Calcular el volumen generado por un segmento circular de ángulo central 2α, con $\alpha < \pi/2$ y radio R al girar alrededor de su cuerda.

15. Se considera el arco OAB de la parábola $y = x(x-a)$, con $OA = a > 0$ y $OC = c > a$. Determinar c de manera que el volumen de revolución generado por la región al girar en torno a OX, sea igual al volumen generado por el triángulo OCB girando en torno al mismo eje.

16. Hallar las pendientes de las siguientes curvas en el punto indicado:

    a) $\rho = a(1-\cos\theta)$, $\theta = \frac{\pi}{2}$,

    b) $\rho = a\sec\theta$, $\rho = 2a$,

    c) $\rho^2 = a^2\operatorname{sen}(4\theta)$, en el origen.

    d) $\rho = a^\theta$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

17. Calcular $\frac{dy}{dx}$, dado $r = \frac{2}{1-\operatorname{sen}\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$. ¿En qué puntos del gráfico tiene la curva tangente horizontal y/o vertical?

18. Determine la ecuación de la recta tangente a $r = 3 + 8\operatorname{sen}\theta$, en $\theta = \frac{\pi}{6}$.

19. Dadas las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide: $x = a\cos^3\theta$, $y = a\operatorname{sen}^3\theta$, hallar el volumen del sólido que se engendra haciéndola girar alrededor de OX.

20. Dada la curva $x = t^2$, $y = 4t - t^3$, hallar el área del lazo y el volumen del sólido generado por éste lazo, cuando gira alrededor del eje X.

21. Hágase girar alrededor del eje polar la parte de la cardioide $\rho = 4 + 4\cos\theta$ que está entre las rectas $\theta = 0$ y $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

22. Hallar la longitud de arco de las siguientes curvas:

    (a) El arco de la parábola semicúbica $ay^2 = x^3$ desde el origen hasta $x = 5a$.

    (b) El arco de la curva cuya ecuación es $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$ desde el punto de abcisa $x = 1$ hasta el punto $x = 3$.

    (c) El arco de la parábola $y^2 = 2px$ desde el vértice a un extremo del lado recto.

    (d) El arco de la curva $y = \ln\sec x$ desde el origen al punto $(\pi/3, \ln 2)$.

    (e) La hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

    (f) De una arcada completa de la cicloide.

    (g) De la curva $e^y = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ entre $x = a$ y $x = b$.

23. Hallar la longitud del arco de la curva $x = e^\theta \operatorname{sen}\theta$, $y = e^\theta\cos\theta$, desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

24. Hallar la longitud de arco de:

    (a) La espiral de Arquímedes $\rho = a\theta$, desde el origen al extremo de la primera vuelta.

    (b) De la espiral $\rho = e^{a\theta}$ desde el origen hasta el punto (ρ, θ).

    (c) De la curva $\rho = \sec^2(\dfrac{\theta}{2})$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

    (d) De la parábola $\rho = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

    (e) De la espiral hiperbólica $\rho^\theta = a$, limitado por los puntos (ρ_1, θ_1) hasta (ρ_2, θ_2)

25. Demostrar que la longitud total de la curva $\rho = a\operatorname{sen}^3(\frac{\theta}{3})$ es $\frac{3\pi a}{2}$.

26. Hallar longitud de arco de la cisoide

    $\rho = 2a\tan\theta\operatorname{sen}\theta$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{\pi}{4}$

27. Halle el área de la superficie del paraboloide que genera la curva $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$, cuando rota alrededor del eje X.

28. Halle el área de la superficie generada por la rotación de la curva paramétrica $x = t^3$, $y = \dfrac{3}{2}t^2$, $0 \le t \le 1$ alrededor del eje X.

29. Sea la curva $x = t$, $y = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{1}{4t}$. $t \in [1, 2]$. Hallar la longitud de la curva y el área que genera al girar alrededor de la recta $y = -2$.

30. Sea la función $x = g(y) = \dfrac{1}{8}y^4 + \dfrac{1}{4y^2}$ de dominio $[1, 2]$. Calcule el área de la superficie de revolución que se genera al girar su gráfico alrededor de $y = 3$.

31. Hallar el área de la superficie que se genera al girar la catenaria $y = \cosh x$, entre -1 y 1.

32. Halle el área generada al girar alrededor del eje X, la porción de curva $y^2 = |x + 4|$, definido entre $-10 \le x \le 2$.

33. Sea f una función derivable con $f'(x) \ge 0$. Asumiendo que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y sea L la longitud del gráfico de f en el intervalo $[0, 1]$. probar que $\sqrt{2} \le L \le 2$. (Considere la desigualdad $\frac{\sqrt{2}}{2}(a + b) \le \sqrt{a^2 + b^2} \le a + b$).

34. Sea $f : [0, 1] \Longrightarrow [0, 1]$ una función cóncava de clase C^1 tal que $f(0) = f(1) = 0$. Pruebe que la longitud de arco del gráfico de f no excede a 3.

UNI, November 12, 2017.