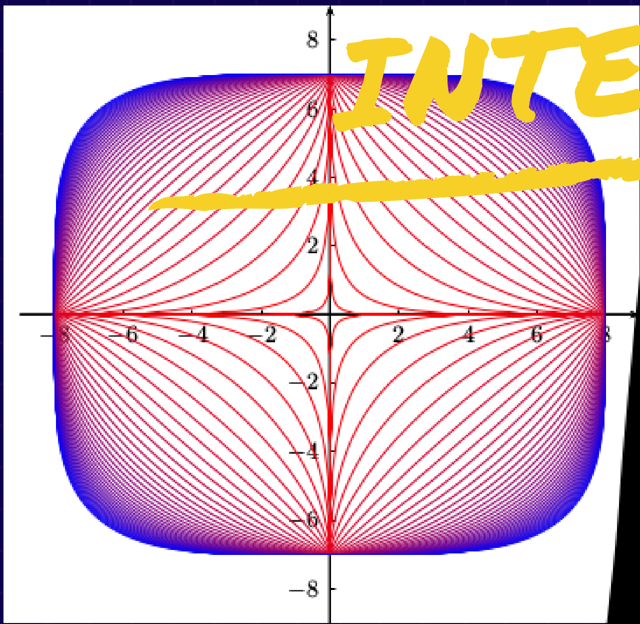
FACULTAD DE CIENCIAS

APUNTES DE CLASES DE CÁLCULO INTEGRAL



La única enseñanza que un profesor puede dar, en mi opinión, es la de pensar delante de sus estudiantes.
Henri Lebesgue

Temas:
Antiderivadas
La integral
Técnicas de integración
Las funciones logartimo y exponencial
Áreas y volúmenes
Coordenadas polares
Integrales impropias
Fórmula de Taylor

MSc. Johnny Valverde

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Apuntes de clases de Cálculo integral CM 132

Profesor: MSc. Johnny Valverde
Oficina R1-344
Delegada: Undg. Erika Cabrejos
mexxpre_15@hotmail.com
Número de celular: 986784892

13 de septiembre del 2017

Dedicado a mis estudiantes de la Facultad de Ciencias.

Prefacio

"Por tanto, estudiantes estudien matemáticas y no construyan sin fundamentos."

— Leonardo Da Vinci *(1452-1519).*

Cálculo es un curso con un propósito. Describe el crecimiento y el descenso, y el cambio. La población tiene una tasa de crecimiento, el cual cambia. El valor de una divisa tiene un descenso, el cual puede aumentar. Todo lo que ocurre en la vida cambia, la única cosa segura es el cambio. Para entender y modelar esos cambios, que es donde el cálculo es necesitado y usado.

Las ideas centrales son firmemente establecidas. La responsabilidad del autor es explicarlos claramente, con ejemplos que vayan directamente al punto y *lo ilumine*. Con mucho, la mayor parte del esfuerzo detrás del libro se dedicó a expresiones claras y vivas. Debe ser sobre esta base primero, que un nuevo texto es juzgado. Las palabras deben atraer al lector y ayudar a que las ideas se fijen.

Este prefacio menciona algunos cambios en el énfasis. No es de extrañar que los cambios vengan (con cuidado). Pero comprenderán que ***este es un texto básico para el cálculo***. Es para todas las instituciones, y se escribe directamente al estudiante. Este es un libro de texto y no un banco de preguntas. También espero que los lectores verán el espíritu detrás de este libro. La mejor parte de las matemáticas es haciendo, y saltamos allí directamente. Con la enseñanza y la escritura, el inicio da el tono y queremos que la clase sea activa. Para todos los estudiantes, debe haber algo nuevo. En lugar de terminar cada sección con un resumen (lector pasivo), pedimos al estudiante que contribuya a las palabras clave. Eso refuerza la confianza que es esencial para el aprendizaje.

Este libro enfatiza, más en el pasado, la parte visual del aprendizaje de las matemáticas. Las fórmulas son conectados con los gráficos. Lo mejor que una computadora puede hacer es mostrar la función. Los gráficos son las "llaves" que nos permiten abrir las puertas del entendimiento de las matemáticas fuera del aula.

También enfatizamos, antes de lo usual, el significado de las ecuaciones diferenciales. Son modelos de la vida. Estamos interesados en el estudio de las ecuaciones diferenciales con retardo, estas expresan la derivada de una función que depende del tiempo en términos de los valores de las funciones en tiempos previos. Creo que es esencial conocer algunas ecuaciones reales en un curso de cálculo. No podemos depender de un curso posterior para dejar claro de qué se trata. Para más información, ver [9]. Espero que el texto se concentre en los puntos importantes. Es inútil incluir mucho más de lo que cualquiera puede leer. Estamos pidiendo a los estudiantes un verdadero esfuerzo, que no debemos derrochar. Es fácil perder el propósito del cálculo bajo un millón de ecuaciones. Es más difícil, pero correcto, permanecer con las ideas que más importan.

Sobre este principio de que menos es más, resumiré:

1. Practicar con funciones y gráficas es muy importante.
2. Los modelos de cálculo son ecuaciones diferenciales.
3. Los ejemplos no necesitan ser artificialmente complicados. Las matemáticas son bastante difíciles.
4. No se requiere cubrir cada tema.
5. No tiene sentido prepararse para problemas reales y nunca verlos.

El propósito de escribir estos apuntes de clases correspondientes al año académico 2017 es proporcionar un tratamiento claro y accesible del cálculo integral y sentar las bases matemáticas para los cursos de Cálculo diferencial e integral Avanzado, Análisis Real y los cursos de Introducción a las Ecuaciones diferenciales Ordinarias e Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales, propios de la carrera de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería. Una buena formación en Cálculo diferencial es el único prerrequisito. Mediante el análisis combinado de teoría y práctica, hemos tratado de mostrar que la matemática tiene aplicaciones importantes además de ser un camino hermoso y emocionante por derecho propio.

MSc. Jhonny Valverde

Para el estudiante

NUESTRO CURSO ES LLAMADO “CÁLCULO INTEGRAL”

El cálculo integral es el curso que subyace y extiende la teoría del cálculo. Es un tema profundo y extenso que ha estado en desarrollo durante siglos. Se ha desarrollado a sí mismo en una serie de campos de estudio distintos, dos de los cuales se puede llamar *cálculo integral en la recta real* y *cálculo integral en el plano complejo*, de acuerdo con el sistema numérico se toma como el sistema de números reales $\mathbb{R}$ o el sistema de números complejos $\mathbb{C}$. En estas notas de clase nos centramos en el cálculo integral en la recta real, aunque la mayor parte de lo que discutimos encuentra uso en todas las áreas del cálculo. Como el cálculo integral tiene su origen en el cálculo diferencial, te parecerá algo familiar. Sin embargo, usted estará explorando el tema a un nivel mucho más profundo que el de sus cursos de cálculo introductorio. Este curso le exigirá un pensamiento cuidadoso y crítico. De hecho, está diseñado para ayudarle a obtener lo que los matemáticos llaman “madurez matemática.”

LOS FUNDAMENTOS SÍ IMPORTAN

POR QUÉ LAS PRUEBAS SON IMPORTANTES

“Prueba” o “demostración” puede ser una palabra intimidante para muchos estudiantes de matemáticas que prefieren que se les diga lo que es verdad. La razón por la cual la prueba es tan importante en matemáticas se encuentra en la misma naturaleza de la “verdad matemática”, tal como se entiende en la tradición intelectual occidental. En esta tradición, el cuerpo de las matemáticas no es solo una colección de “hechos” desconectados que son aceptados porque parecen verdaderos. Más bien, estos hechos deben estar conectados entre sí y organizados de acuerdo con el “método deductivo”. Los matemáticos se esfuerzan mucho para aislar algunos de los hechos que pueden considerar básicos (viniendo desde el principio) y luego ir a mayores longitudes para demostrar que todos los hechos restantes pueden derivarse de los básicos por el proceso de la lógica deducción. Los “hechos” iniciales son entonces realmente suposiciones (axiomas). Los hechos restantes, como se deducen uno por uno de estas suposiciones, son llamados “teoremas”. El proceso de deducir (o derivar) un teorema se llama “prueba”.

Entonces, ¿qué hace válida una demostración? La respuesta no es tan obvia como puede parecer al principio. Un teorema se deriva en última instancia de los axiomas establecidos al principio de un tema matemático. Así, la verdad de un teorema es realmente contingente sobre la verdad de los axiomas. Si los axiomas son todos verdaderos, entonces cualquier teorema que sea derivado de ellos por la deducción lógica válida también debe ser verdad. Pero la prueba de un teorema no puede asegurar que los axiomas sobre los cuales descansa la prueba son verdaderos. Por lo tanto, una "prueba"no garantiza que un teorema sea verdadero. Una prueba solo garantiza que **si** los axiomas son todos verdaderos, entonces el teorema es verdadero. En otras palabras, *la demostración de un teorema prueba que los axiomas son suficientemente fuertes para garantizar la validez del teorema*. Por lo tanto, un teorema es realmente una declaración sobre los axiomas. Por esta razón los axiomas sirven como el fundamento de un curso matemático.

NUESTRO PLAN DE ATAQUE

De acuerdo al sílabo del curso en:
https://github.com/carlosal1015/Calculus-One-and-Several-Variables

PALABRAS DE CONSEJO DEL AUTOR: SIETE REGLAS PARA EL ÉXITO EN ESTE CURSO

Cálculo integral no es un curso sencillo. De hecho, es uno de los cursos más desafiantes en el plan de estudios de pregrado. Mientras que el cálculo diferencial es una de las áreas matemáticas más aplicables, el cálculo integral es altamente teórico en espíritu y hace demandas intransigentes de rigor. Los apuntes de clases de clases está orientado a los estudiantes. Fue diseñado para ser legible, y por lo tanto para ser leído. Representa mi mejor intento de hacer el curso tan comprensible como sea posible sin comprometer el rigor. Ofrezco estas palabras de consejo a aquellos que realmente quieren tener éxito.

1. Lea los apuntes de clases, palabra por palabra, página por página, excepto cuando su instructor puede trazar un mapa y un camino alternativo para usted. No salte sobre la lectura y se dirija directo a los ejercicios, ¡cómo usted pudo haber hecho en su curso de cálculo diferencial! Si lo hace, se perderá mucho del curso.

2. Parte del material está marcada con un asterisco, "*." Deje que su instructor decida cuánto de eso se cubrirá.

3. Estudie las pruebas. Sepárelo aparte y examínelos críticamente hasta que esté seguro de que usted los entiende por completo. Pida ayuda donde usted no entienda. Nadie puede pretender estudiar cálculo integral si no entiende sus teoremas y pruebas. Sirven como modelos del tipo de pensamiento necesario para desarrollar nuevos resultados en el análisis. Su instructor puede requerir que usted aprenda algunas de las pruebas lo suficientemente bien para explicarlas a sus compañeros de clase o para hacerlas en los exámenes.

4. Asegúrese de entender las definiciones. ¡Apréndalos! (Incluso memorice). Este es un tema mucho más grave de lo que la mayoría de los estudiantes se dan cuenta. Las definiciones son el punto de partida cuando se prueban resultados sobre un nuevo concepto.

5. ¡Aprender matemáticas no es un deporte de espectadores! Tú aprendes matemáticas haciendo matemáticas. Usted no puede esperar aprender cálculo integral leyendo estas notas de clase como usted leería un periódico o una novela. Este documento no reemplaza o sustituye de ninguna manera las clases y discusiones dentro del aula. Debe "leer" este libro con lápiz y papel. Escriba los pasos clave usted mismo a medida que progresa través del texto, elaborando los detalles a medida que avanza. (Esto se llama "lectura activa"). Mantendrá su atención enfocada y facilitará su aprendizaje.

6. Trate su lista de ejercicios de la práctica dirigida como la continuación del aprendizaje iniciado en clase o en el texto. Se clasifican cuidadosamente para que aprendas a medida que progresas a través de un conjunto de ejercicios. Hay un montón de ejercicios, generalmente usted puede continuar muy bien haciendo solamente alguno de ellos y omitiendo algunos de los últimos. Si no puedes ir a ninguna parte en un ejercicio después de mucho esfuerzo, averigua de alguien cómo hacerlo y luego hazlo varias veces hasta que puedas hacerlo solo, sin ayuda.

7. En matemáticas, como en otras ramas del conocimiento humano, la verdad se comunica en oraciones. Incluso en matemáticas, la oración debe tener un sujeto y un predicado y obedecer todas las leyes de la gramática. Por ejemplo, el *sujeto* de la oración $x^2+3x-7=11$ es x y el *predicado* es "$=$." Por favor recuerde, cuando escriba sus propias pruebas o soluciones de ejercicios, exprese sus ideas claramente y en oraciones completas. La escritura descuidada es a menudo un signo de pensamiento descuidado. Una idea mal expresada es a menudo mal entendida.

Índice general

Consejos

1. **Nota mínima en cada práctica calificada: 13** .
2. En cada examen y práctica calificada el alumno debe identificarse con su Documento Nacional de Identidad (DNI), apagar su celular y guardar en su mochila respectiva.
3. Estudiar todos los cursos.
4. Para los químicos hay trabajo, para los matemáticos hay mucho más oportunidades para desarrollarse.
5. No colocar $+C$, C: constante puede costar un punto de alguna pregunta de la práctica calificada.
6. Para aprender a demostrar hay que leer [5] y [2].
7. 48 horas.
8. Es importante para el profesor que el alumno logre contextualizar e interpretar los ejercicios.
9. Mis metas:
   - * Resolver las prácticas dirigidas: Despejar mis dudas.
   - ** Asistir a talleres de Cálculo integral, en caso de haberlo.
   - Gestión del tiempo.
   - Siempre es bueno la coordinación.
     Reclamo: $\neg$ 3 puntos más.

1
Antiderivadas

1.1. Antiderivadas

Definición 1.1: Antiderivada

Se dice que una función $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *antiderivada* (también se le conoce como “primitiva”) de la función f en un intervalo $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ si $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathcal{I}$.

Ejemplo 1.1: Función polinómica

Sean las funciones $f, F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = 3x^2 + 1, \quad F(x) = x^3 + x$$

se tiene que $F'(x) = 3x^2 + 1 = f(x), \forall x \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$
luego F es antiderivada de f.

$\mathcal{I}$ es un intervalo.

Ejemplo 1.1: Función $\cos x$

Se tienen las funciones $f, F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$f(x) = \cos x, F(x) = \operatorname{sen} x$
donde $F'(x) = \cos x = f(x), \forall x \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$.
$\longrightarrow$ F es antiderivada de f.

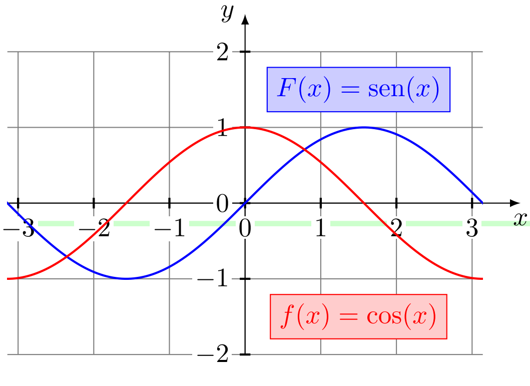


Figura 1.1: Funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$

Teorema 1.1: Sobre la constante de integración

Las funciones F_1 y F_2 son antiderivadas de la función f sii $F_1(x) = F_2(x) + C$, C: constante $\forall x \in \mathcal{I}$.

Prueba. $(\implies)$ F_1 y F_2 son antiderivadas de f

$$\begin{aligned} F_1'(x) &= f(x), \quad \forall x \in \mathcal{I}. \\ F_2'(x) &= f(x), \quad \forall x \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

se cumple $F_1'(x) = f(x) = F_2'(x), \forall x \in \mathcal{I}$.

$$\begin{aligned} &\implies F_1'(x) = (F_2(x) + C)' && \forall x \in \mathcal{I}. \\ &\implies F_1'(x) = F_2'(x) && \forall x \in \mathcal{I}. \\ &F_1'(x) - F_2'(x) = 0 && \\ &[F_1(x) - F_2(x)] = 0 && \forall x \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Por el teorema del cálculo diferencial, se tiene que

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \text{ C: constante }, \ \forall x \in \mathcal{I}.$$

En consecuencia

$$F_1(x) = F_2(x) + C, \text{ C: constante } \quad \forall x \in \mathcal{I}.$$

$(\impliedby)$ Como $F_1(x) = F_2(x) + C, \ \forall x \in \mathcal{I}$ y para concluir que son antiderivadas de cierta función en el intervalo $\mathcal{I}$, entonces F_1 y F_2 deben ser diferenciables en $\mathcal{I}$, luego

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \ \forall x \in \mathcal{I}.$$

Derivando ambos miembros respecto a x se obtiene:

$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0, \ \forall x \in \mathcal{I}.$$

de esto

$$F_1'(x) = F_2'(x), \ \forall x \in \mathcal{I}.$$

definiendo una función f en el intervalo $\mathcal{I}$.
Como $f(x) = F_1'(x), \ \forall x \in \mathcal{I}$.
De esto F_1 es antiderivada de f, del mismo modo F_2 es antiderivada de f. ■

---

si y solo si

$F_1 \wedge F_2$ en un intervalo común.

Diferenciabilidad $\nRightarrow$ derivabilidad en $\mathbb{R}^n$, pero sí en $\mathbb{R}$. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, donde Ω es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, será diferenciable si existe una transformación lineal T tal que $f(x_0 + h) = f(x_0) + T(h) + \theta(h)$ y $\theta(h)$ cumple que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\|\theta(h)\|}{\|h\|} = 0$.

A partir de esto, se observa que basta hallar una antiderivada de F y a partir de esta se obtiene una familia de antiderivadas.
Así, se obtiene la "Antiderivada General" de una función f: $\boxed{f(x) = F(x) + C, \text{ C: constante}}$
donde F es una antiderivada cualquiera de f.

Ejemplo 1.1: Función exponencial

$f(x) = e^x$ luego $F(x) = e^x$ es antiderivada de f.

Entonces , la antiderivada general es
$H(x) = e^x + C$, C: constante .

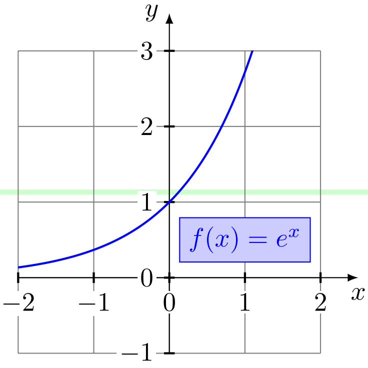


Figura 1.2: Representación de $y = e^x$

1.2. Integral indefinida

La integral indefinida de una función f, denotada por $\boxed{\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x}$ es la representación de la familia de antiderivadas de f (**"antiderivadas generales de f"**), esto es

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \text{ C: constante}}$$

donde F es una antiderivada de f.

Ejemplo 2.1

① $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C$, C: constante

② $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$, C: constante

③ $\displaystyle\int \sec\tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + C$, C: constante

A partir de esto se puede construir una "tabla de integrales indefinidas"

$$\boxed{\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C, \text{ C: constante}}$$

$$\boxed{\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ C: constante }, n \neq 1}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C, \text{ C: constante}}$$

$$\boxed{\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C, \text{ C: constante}}$$

$$\boxed{\int \csc x\cot x\,\mathrm{d}x = -\csc x + C, \text{ C: constante}}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C, \text{ C: constante}}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C, \text{ C: constante}}$$

Observación 2.1

Como se cumple que

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \text{ sii } F'(x) = f(x),\ \forall x \in \mathcal{I}$$

de esto, se obtiene las propiedades:

a) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right] = f(x).$

[0] f es el integrando, es decir la función y x es la variable o indeterminada.

[0] El teorema de la derivada de la función inversa nos dice que dado $f(g(x)) = x$ la regla de la cadena nos da $f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$. Escribiendo $y = g(x)$ y $x = f(y)$, la regla se ve mejor: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$ o $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x}$. La pendiente de $x = g^{-1}(y)$ veces la pendiente de $y = g(x)$ es igual a uno.

b) $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$ C: constante .

Ejemplo 2.2

① $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int \left(3x^2+5x-7\right)\mathrm{d}x\right] = 3x^2+5x-7$ (aplicando a)

② $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sen} x)\;\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C,$ C: constante (aplicando b)

Propiedad: Dadas las funciones $f, g\colon \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se cumple:

① $(f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$

② $\int K\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = K\int f(x)\,\mathrm{d}x$, K: constante

Ejemplo 2.3

$$\begin{aligned}\int (e^x+\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x &= \int e^x\,\mathrm{d}x + \int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x\\ &= e^x + C_1 - \cos x + C_2; C_1, C_2: \text{ constante}\\ &= e^x - \cos x + C,\ \text{C: constante}\end{aligned}$$

Veamos la gráfica.

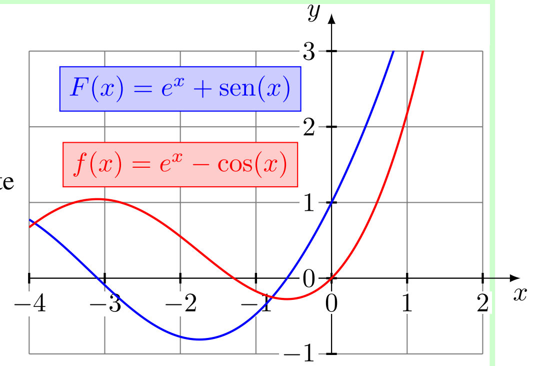


Figura 1.3: La función de color rojo es la derivada de la función de color azul.

$C = C_1 + C_2$
$C = C_1 + C_2$

1.3. Métodos de integración

1.3.1. Métodos de sustitución

Ejemplo 3.1

Evaluar $\int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x$.

Recordemos las identidades de arco doble de las funciones seno y coseno.

$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x}$

$\boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}}$

Luego:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{2} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{2} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{4} \int \mathrm{d}(\operatorname{sen} 2x) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C, \text{ C: constante}\end{aligned}$$

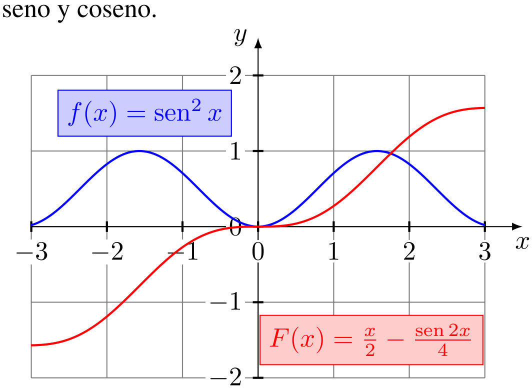


Figura 1.4: La función de color rojo es la derivada de la función de color azul.

Observación 3.1

Haciendo el cambio $\boxed{u = 2x} \longrightarrow du = 2\,\mathrm{d}x \longrightarrow \boxed{\mathrm{d}x = \frac{1}{2} du}$

Así $\int \cos 2x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \cos u \, du = \frac{1}{2} \operatorname{sen} u + C$

esto se conoce como el método de sustitución. Así:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} u + C\right) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C, \text{ C: constante}\end{aligned}$$

Observación:

Teorema 3.1: Regla de la cadena para antiderivadas

Sea F una antiderivada de f en el intervalo I_x, φ es una función con derivada continua sobre el intervalo I_t, con $\varphi(I_t) \subset I_x$, entonces una primitiva de $f(\varphi(t) \cdot \varphi'(t))$ es $F(\varphi(t))$ en I_t.

Prueba. Basta probar que

$$[F(\varphi(t))]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \forall t \in I_t$$

Por la regla de la cadena

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), t \in I_t.$$

Como F es una antiderivada o primitiva de f en el intervalo I_x, entonces

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I_x$$

Si $x = \varphi(t)$, entonces $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$.
Luego:

$$[F(\varphi(t))]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

■

Observación 3.2

① Se impone que φ' sea continua en I_t para asegurar la existencia de

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

② $I = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi^x \, \mathrm{d}x$

se hace el cambio $\boxed{u = \varphi(x)} \longrightarrow du = \varphi'(x)\, \mathrm{d}x$
entonces

$$I = \int f(u)\, du$$

Ejemplo 3.0: Integrar

$$I = \int \cos 4x \, \mathrm{d}x$$

Hacer $\boxed{u = 4x} \longrightarrow du = 4\, \mathrm{d}x \implies \boxed{\mathrm{d}x = \frac{1}{4} du}$

$$\longrightarrow \int \cos 4x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int \cos u \; du$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{sen} u + C, \text{ C: constante}$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x + C, \text{ C: constante}$$

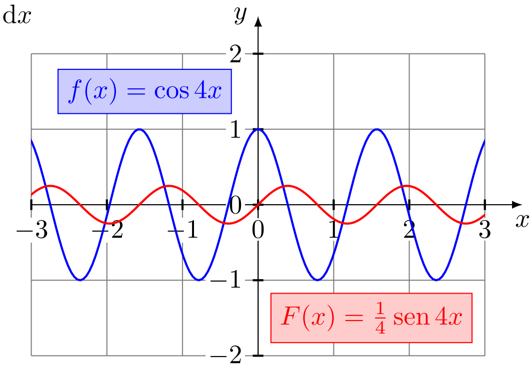


Figura 1.5: La función de color rojo es la derivada de la función de color azul.

Es necesario expresar la respuesta con la variable incial.

Ejemplo 3.3

$$I = \int \frac{x^2 \, \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Hacer $u = x^3 + 1$, entonces $du = 3x^2 \, \mathrm{d}x$

Reemplazando

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{1}{3}\int u^{-1/2}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C, \text{ C: constante}$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C, \text{ C: constante}$$

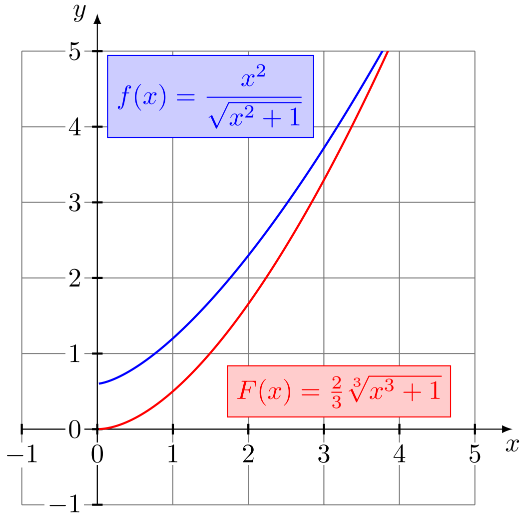


Figura 1.6: La función de color rojo es la derivada de la función de color azul.

Ejemplo 3.4

$$J = \int x^2 e^{4x^3+1}\,\mathrm{d}x$$

hacemos $u = 4x^3+1 \implies du = 12x^2\,\mathrm{d}x$
Luego:

$$J = \frac{1}{12}\int e^u\,du$$
$$= \frac{1}{12}e^u + C, \text{ C: constante}$$
$$= \frac{e^{4x^3+1}}{12} + C, \text{ C: constante}$$

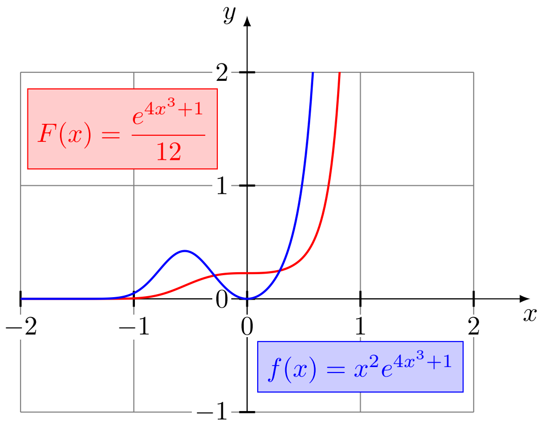


Figura 1.7: La función de color rojo es la derivada de la función de color azul.

Nota:Si $a \neq 0$, $\int f(u)\,du = F(u) + C$.
haciendo el cambio

$$\boxed{u = ax+b}$$

entonces:

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \text{ C: constante}$$

Ejemplo 3.5

1) $$\int \sec^2(4x+5)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\tan(4x+5) + C, \text{ C: constante}$$

Observación $\boxed{a = 4}$

2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{16+x^2} = \frac{1}{16}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x}{4}\right) + C, \text{ C: constante}$$

Haciendo $u = \frac{x}{4}$

Observación 3.3

Si hace el cambio $\boxed{u = f(x)}$ en la integral

$$\int [f(x)]^a \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x, a \neq 1$$

igual a $\displaystyle\int u^a\, du = \frac{[f(x)]^{a+1}}{a+1} + C,$ C: constante

Ejemplo 3.6

$$I = \int \operatorname{sen}^3 x \cos x\,\mathrm{d}x$$

Pero,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sen} x = \cos x}$$

$$I = \int \operatorname{sen}^3 x \cdot \mathrm{d}(\operatorname{sen} x)$$

$$= \int u^3\ \mathrm{d}u = \frac{u^4}{4}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + C, \text{ C: constante}$$

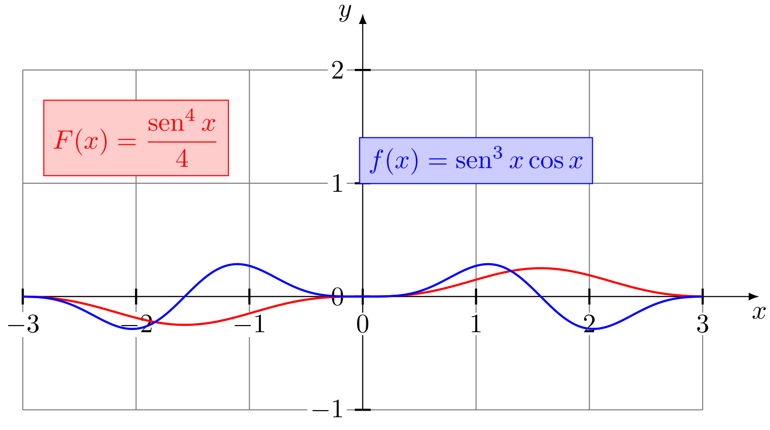


Figura 1.8: La función de color rojo es la derivada de la función de color azul.

1.3.2. Método de integración por partes

Prueba: Como

$$\mathrm{d}(uv) = v\ \mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v$$
$$\longrightarrow u\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\,\mathrm{d}u$$

Integrando:

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

Luego:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

■

Ejemplo 3.0: Integración por partes

1) Determine $I = \displaystyle\int \ln x \, \mathrm{d}x$.

Empleamos la técnica de "integración por partes":

$$
\begin{aligned}
I &= x \ln x - \int x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&= x \ln x - \int \mathrm{d}x \\
&= x \ln x - x + C, \ \text{C: constante}
\end{aligned}
$$

2) Determine $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int x \cos x \, \mathrm{d}x \\
&= x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \\
&= x \operatorname{sen} x - (-\cos x) + C, \ \text{C: constante}
\end{aligned}
$$

3) Calcule $\int x \arctan x \, \mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
J &= \int x \arctan x \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + C, \ \text{C: constante}
\end{aligned}
$$

1.3.3. Fórmulas recurrentes

Ejemplo 3.8

$$
I_n = \int x^n e^x \, \mathrm{d}x
$$

Integrando por partes

$$
\boxed{\begin{array}{ll} u = x^n & du = (n-1)x^{n-1} \, \mathrm{d}x \\ dv = e^x \, \mathrm{d}x & v = e^x \end{array}}
$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
&I_n = x^n e^x - (n-1) \int x^{n-1} e^x \, \mathrm{d}x \\
&\therefore I_n = x^n e^x - (n-1) I_{n-1}
\end{aligned}
$$

Aplicación: $\boxed{n = 2}$

$$
\begin{aligned}
\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x &= x^2 e^x - (2-1) \int x e^x \, \mathrm{d}x \\
&= x^2 e^x
\end{aligned}
$$

Aplicación de la geografía al cálculo integral

Desde hace dos mil años hasta la actualidad, el problema de representar la Tierra en un plano de la manera más fidedigna ha cautivado a muchos matemáticos como Carl Friedrich Gauss, Johann Heinrich Lambert, Gerardus Mercator, Charles Sanders Peirce, Hiparco de Nicea, Al-Biruni y Leonardo Da Vinci. Gerardus Mercator fue un matemático que nació en Rupelmundo, hoy forma parte de Bélgica. En esta ocasión narraremos el rol del calculo integral en la proyección de Mercator. Su sueño fue lograr proyectar con *transformaciones conformes*, es decir, que preserva el "ángulo". Estamos interesados en calcular

$$\mathrm{d}D = \sec\theta \, \mathrm{d}\theta$$

La integral de la secante surgió de la cartografía y la navegación y su solución fue una pregunta central de las matemáticas de mediados del siglo $XVII$. Fue descubierto en un accidente histórico cuando los matemáticos y cartógrafos intentaron entender la proyección del mapa de Mercator. Más información sobre su historia en [6].

$$\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x$$

Usemos la técnica de "integración por partes"

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \sec x & \mathrm{d}v = \sec^2 x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \sec x \tan x \, \mathrm{d}x & v = \tan x \end{array}}$$

Luego la expresión anterior resulta:

$$\begin{aligned} \int \sec^3 \mathrm{d}x &= uv - \int v \, \mathrm{d}u \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \tan x \cdot \sec x \tan x \, \mathrm{d}x \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot \tan^2 x \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

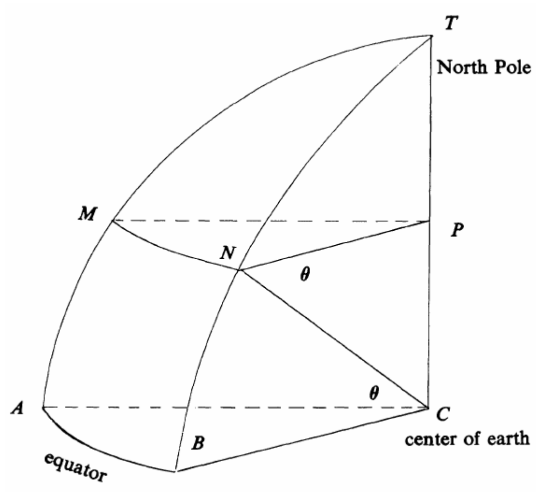


Figura 1.9: La distancia (geodésica) $D(\theta)$ en el mapa del ecuador al paralelo de latitud θ. $\mathrm{d}D$ representa el cambio infinitesimal resultado de un cambio infinitesimal $\mathrm{d}\theta$ en θ.

Pero

$$\boxed{1 + \tan^2 x = \sec^2 x}$$

Reemplazando en la integral:

$$\begin{aligned} \int \sec^3 \mathrm{d}x &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot (\sec^2 x - 1) \, \mathrm{d}x \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x^3 \, \mathrm{d}x + \int \sec x \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Finalmente debemos hallar la

$$\boxed{\int \sec x \, \mathrm{d}x} \tag{1.1}$$

Pero antes conozcamos la historia de esta integral tan importante. Ahora, si a la integral incial

$$\int \sec\theta \, d\theta = \int \frac{d\theta}{\cos\theta}$$

multiplicamos por el factor unitario $\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta} = 1$, obtendremos

$$\int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} \, d\theta,$$

[0]Esta pregunta fue motiva por nuestro compañero de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de Ingeniería.

[0]Nótese que las representaciones $\int f(z)\,dz$ o $\int f(\Omega)\,d\Omega$ son equivalentes.

pero por la propiedad pitagórica mencionada anteriormente tenemos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta &= \int \frac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta && \text{ya que } \operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x = 1\,\forall x\in\mathbb{R}\\
&= \int \frac{\cos\theta}{(1-\operatorname{sen}\theta)(1+\operatorname{sen}\theta)} && \text{por factorización en diferencia de cuadrados}\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\,d\theta && \text{por el método de “fracciones parciales”}\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\,d\theta+\frac{1}{2}\int\frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\,d\theta && \text{por la propiedad de linealidad de la integral}
\end{aligned}$$

Si realizamos las siguientes sustituciones para cada integral respectivamente

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_1 = 1-\operatorname{sen}\theta & du_1 = -\cos\theta\,d\theta \\ u_2 = 1+\operatorname{sen}\theta & du_2 = \cos\theta\,d\theta \end{array}}$$

Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \sec\,d\theta &= -\frac{1}{2}\int\frac{du_1}{u_1}+\frac{1}{2}\int\frac{du_2}{u_2} && \text{reemplazando } u_1 \text{ y } u_2 \text{ por } \theta\\
&= -\frac{1}{2}\ln|u_1|+\frac{1}{2}\ln|u_2|+C,\ \text{C: constante}\\
&= -\frac{1}{2}\ln|1-\operatorname{sen}\theta|+\frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{sen}\theta|+C,\ \text{C: constante} && \text{por propiedad de logaritmo}\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\right|+C,\ \text{C: constante}\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\right|+C,\ \text{C: constante} && \text{multiplicamos por el factor unidad}\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\operatorname{sen}\theta)^2}{\cos^2\theta}\right|+C,\ \text{C: constante}\\
&= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right|+C,\ \text{C: constante} && \text{por propiedad de logaritmo y simplificamos}
\end{aligned}$$

$$\therefore \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta|+C,\ \text{C: constante}$$

Pero nuestro problema inicial fue calcular

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x &= \sec x\cdot\tan x-\int\sec x^3 x+\int\sec x\,\mathrm{d}x\\
&= \sec x\cdot\tan x-\int\sec x^3 x+\ln|\sec x+\tan x|+C,\ \text{C: constante}
\end{aligned}$$

Despejando $\int \sec^3 x$ obtenemos:

$$\boxed{\therefore \int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec x\cdot\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+\frac{C}{2},\ \text{C: constante}}$$

2

La integral

Continuando con nuestro estudio de las antiderivadas, presentaremos un breve repaso de las sumatorias e inducción matemática.

2.1. Sumatoria

Una forma conveniente de escribir sumas utiliza la letra griega Σ (sigma mayúscula, correspondiente a nuestra S) y se llama **notación sigma**.

Definición 1.1: Notación sigma

Si $a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n$ son números reales y m y n son enteros tales que $m \leq n$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Con notación de funciones, la definición 1.1 se puede escribir como

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

De esta forma, el símbolo $\sum_{i=m}^{n}$ indica una suma en la que la letra i (llamado **índice de sumatoria**) toma valores enteros consecutivos que empiezan con m y terminan con n, es decir, $m, m+1, \ldots, n$. También se pueden usar otras letras como el índice de sumatoria.

Observación 1.1

$$\sum_{i=m}^{n} = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$$

Ejemplo 1.1

① $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} (2i+1) = (2(1)+1) + (2(2)+1) + (2(3)+1) + (2(4)+1)$

② $\displaystyle\sum_{i=5}^{8} \frac{i^2}{i+1} = \frac{5^2}{5+1} + \frac{6^2}{6+1} + \frac{7^2}{7+1} + \frac{8^2}{8+1}$

Ejemplo 1.2

Evalúe $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(4i^2 - 3)$.

Solución. Utilizando los teoremas 2 y 3 tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i(4i^2-3) &= \sum_{i=1}^{n}(4i^3 - i) = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 3\sum_{i=1}^{n} i \\
&= 4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - 3\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)\left[2n(n+1)-3\right]}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n^2+2n-3)}{2}
\end{aligned}$$

■

Propiedad: Sea c una constante y n un número natural. Entonces

1) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k = c\sum_{k=m}^{n} a_k;$ k: constante.

2) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha\sum_{k=m}^{n} a_k + \beta\sum_{k=m}^{n} b_k.$

3) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{m-1}.$

4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$

Ejemplo 1.3

Determine la suma

$$S = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n \times (n+1).$$

[0]Conocida como propiedad telescópica

Solución:

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \\
S &= \sum_{k=1}^{n} (k^2+k) \\
S &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\
S &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2\cdot 3} + \frac{n(n+1)}{2} \\
S &= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}+1\right) && \text{factorizamos } \frac{n(n+1)}{2}. \\
S &= \frac{n(n+1)}{\cancel{2}}\cdot\left(\frac{\cancel{2}\cdot(n+2)}{3}\right) && \text{operamos el factor de la derecha.} \\
\therefore S &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.
\end{aligned}
$$

■

2.2. Inducción matemática

La inducción matemática es una de las técnicas de demostración de desarrollo más reciente en la historia de las matemáticas. Se utiliza para comprobar suposiciones acerca de los resultados de procesos que ocurren repetidamente y de acuerdo a patrones definidos. Se introduce la técnica con un ejemplo.

2.2.1. Principio de Inducción Matemática

Sea $A \subset \mathbb{N}$ se cumple que

I) $1 \in A$.

II) $(k+1) \in A$ siempre que $k \in A$.

Entonces $A = \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.0: Suma de los primeros n naturales

Demuestre la fórmula para la suma de los primeros n números naturales:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solución. Esta fórmula se puede demostrar por inducción matemática (como es nuestro caso) o por el método empleado por el matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855) cuando tenía solo 10 años de edad.

I) $1 = \dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$

II) Supongamos que $1+2+3+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, es cierto para $k \in \mathbb{N}$.

Veamos que se cumple para $(k+1)$:

$$
\begin{aligned}
&= 1+2+\ldots+k+(k+1) && \\
&= (1+2+3+\ldots+k)+(k+1) && \text{Asociatividad} \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) && \text{por hipótesis inductiva} \\
&= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) && \\
&= \frac{(k+1)\,((k+1)+1)}{2} &&
\end{aligned}
$$

Esto significa que se cumple para $k+1$, por el *Principio de inducción matemática* de $i)$ y $ii)$ se tiene $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$. ■

Explorando

Veamos el **emocionante** ejemplo de la *Torre de Hanoi* en el programa C.

```c
#include <stdio.h>
void hanoi(char desde, char hacia, char otro, int n) {
    if(n > 0) {
        hanoi(desde, otro, hacia, n - 1);
        printf("%c -> %c\n", desde, hacia);
        hanoi(otro, hacia, desde, n - 1);
    }
}
int main() {
    int n;
    printf("Introduzca el número de discos:\n");
    scanf("%d", &n);
    hanoi('A', 'C', 'B', n);
    return 0;
}
```

El primer uso conocido de la inducción matemática ocurrió en el trabajo del científico italiano Francesco Maurolico en 1575. En el siglo $XVII$ tanto Pierre de Fermat como Blaise Pascal utilizaron la técnica, Fermat la llamó el "método de descenso infinito". Para saber más sobre esta técnica, ver el siguiente artículo [1]. En 1883 Augustus De Morgan (mejor conocido por las leyes de Morgan) describió el proceso cuidadosamente y le dio el nombre de inducción matemática. Para visualizar la idea de inducción matemática, imagine una colección infinita de fichas de dominó colocadas una detrás de la otra de tal manera que si alguna ficha de dominó cae hacia atrás, hace que la que está detrás caiga hacia atrás también (Vea la figura 2.1.) Después imagine que la primera ficha de dominó se cae hacia atrás. ¿Qué sucede? . . . ¡Se caen todas!

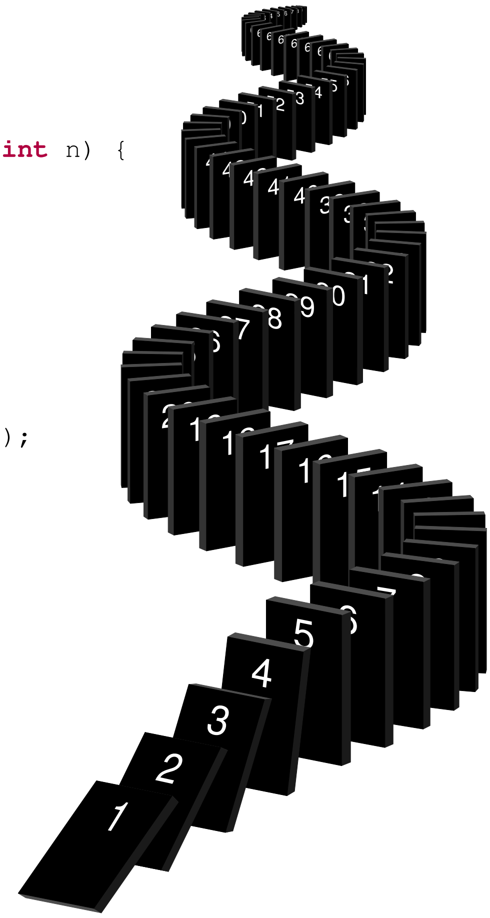


Figura 2.1: Si la k-ésima ficha de dominó cae hacia atrás, también empuja a la $(k+1)$-ésima ficha de dominó hacia atrás.

Observación 2.1: Principio de inducción matemática

El Principio de Inducción Matemática se emplea para probar la validez de una proposición $P(n), \forall n \in \mathbb{N}$ de la siguiente manera

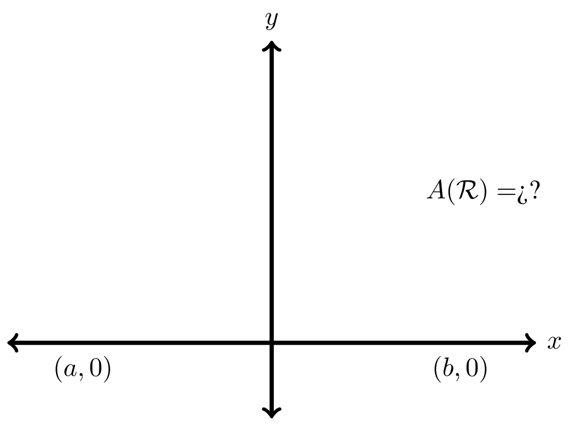
I) $P(1)$ es cierto (¡verificado!).

II) Si $P(k)$ es cierto, entonces $P(k+1)$ es cierto.

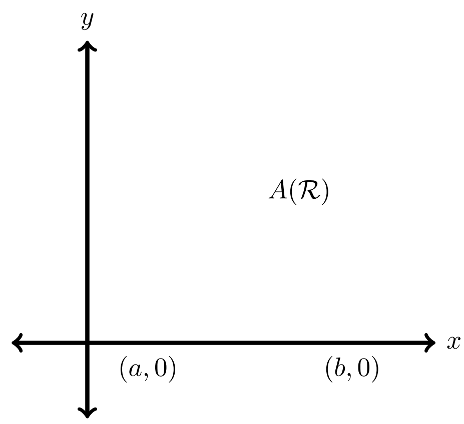
Entonces $P(n)$ es cierto, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.3. Integral definida

En esta parte del curso intentaremos definir el área de algunas regiones especiales según figura.

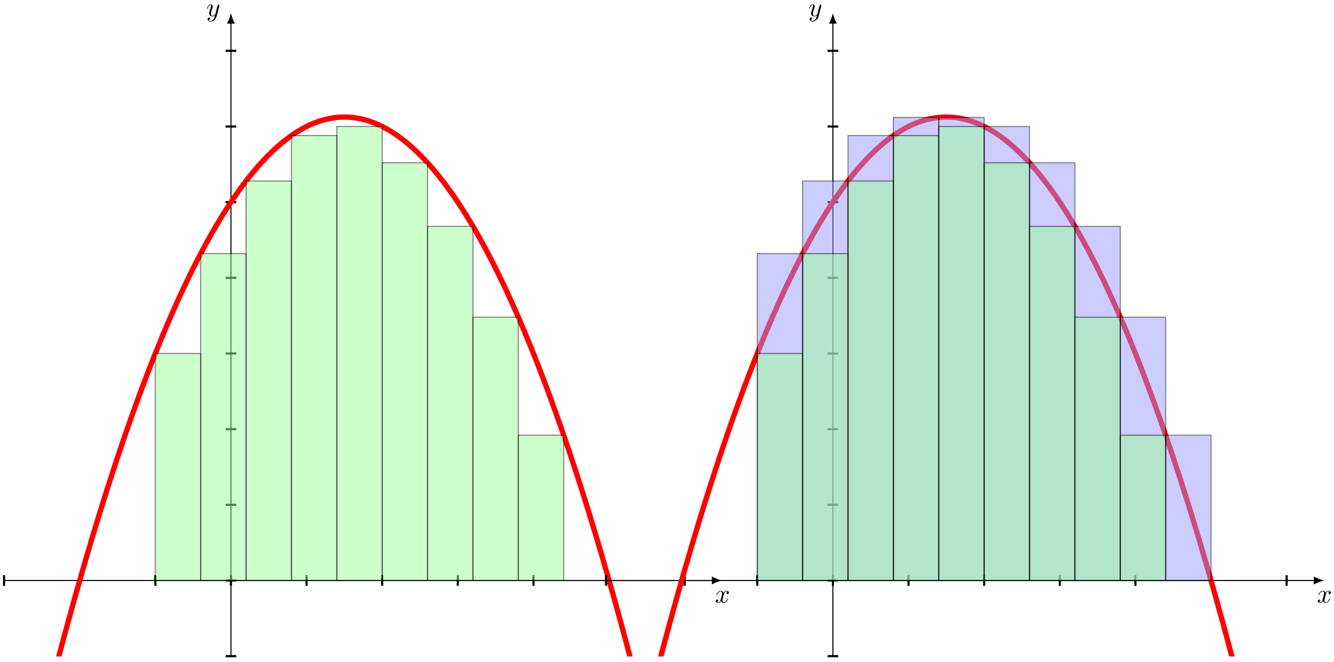


(a) Integral 1



(b) Integral 2

Figura 2.2: Combinación de Figura 2.2a and 2.2b.



(a) Sumas inferiores

(b) Sumas superiores

Figura 2.3: Sumas de Riemann en Figura 2.3a y 2.3b.

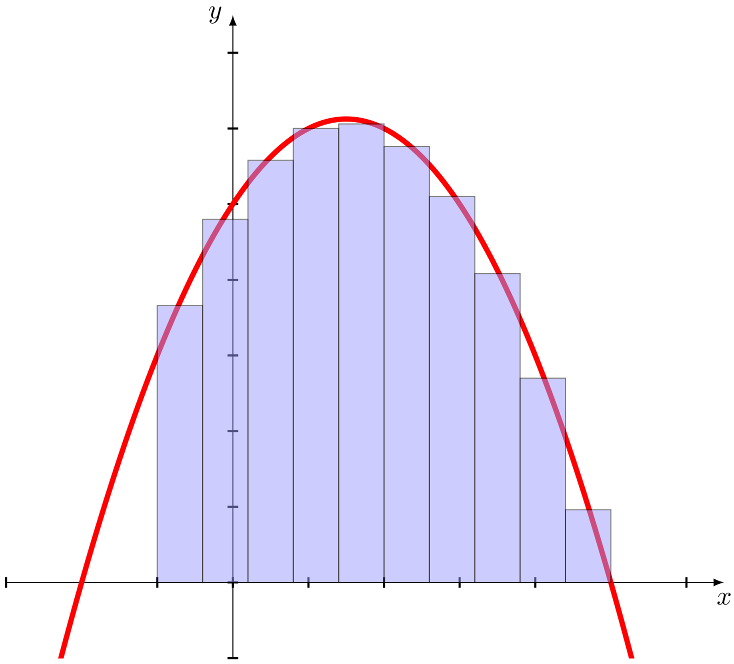


Figura 2.4: Sumas de Riemann en las imágnes de los puntos medios en la partición.

Para ello pasaremos a definir algunos conceptos importantes.

Definición 3.1: Partición de un intervalo

Un conjunto P de puntos $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se dice que es una *partición del intervalo* $[a, b]$, si se cumple que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

es decir $P = \{x_k; k = 0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Definición 3.2: Norma de una partición

La norma de una partición $P = \{x_i\}_{i=0}^n$ de $[a, b]$ denotado por $\|P\|$, se define como sigue:

$$\|P\| = \text{máx}\{|x_k - x_{k-1}| \mid k = 1, \ldots, n\}$$

La norma de una partición nos mide la "finura" de la partición.

Observación 3.1

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (longitud de I_k).

Ejemplo 3.1

$P = \{1; 2; 4; 4,5; 4,8; 5\}$ es una partición de $[1, 5]$

$\|P\| = \text{máx}\{(2-1); (4-2); (4,5-4); (4,8-4,5); (5-4,8)\}$
$\|P\| = \text{máx}\{1; 2; 0{,}5; 0; 3; 0,2\}$
$\|P\| = 2$.

Observación 3.2

En $[a, b]$ se forman subintervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]\,, k = 1, 2, \ldots, n$.

Observación 3.3

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Observación 3.4

Cuando Δx_k tiene la misma longitud para cada I_k, diremos que que la partición $P = \{x_i\}_{i=0}^n$ de $[a, b]$ es "regular", y en tal caso

$$x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right), \Delta x_k = \frac{b-a}{n}, \forall k = 0, \ldots, n.$$

Ejemplo 3.2

Por ejemplo si seleccionamos $P = \{0, \frac{a}{n}; \frac{2a}{n}; \frac{3a}{n}, \ldots, \frac{(n-1)a}{n}, a\}$ es una partición regular de $[0, a]$

$$\|P\| = \frac{a}{n}$$

y en estos casos se tiene que:

$$\boxed{x_k = x_0 + k\Delta x_k}\text{ , donde } \Delta x_k = \frac{b-a}{n}$$

Definición 3.3: Función acotada

Se dice que una función $f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada en $[a,b]$, si existen m y M reales tales que

$$m \leq f(x) \leq M \quad ;\forall x \in [a,b]\,.$$

Ahora tomamos una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ de $[a,b]$.
Para cada $k = 1, \ldots, n$ definamos

$$m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \quad \text{y} \quad M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f$$

Por tanto, es claro que: $\forall k = 1, 2 \ldots, n$; $m_k \leq f(x) \leq M_k, \forall x \in [x_{k-1}, x_k]$.
Propiedad:
Se cumple que:

$$m \leq m_k \leq f(x) \leq M_k \leq M, \forall x \in [x_{k-1}, x_k]\, \forall k = 1, 2, \ldots, n.$$

Prueba. Sea $k = 1, 2, \ldots, n$ cualquiera. Como $[x_{k-1}, x_k] \subset [a,b]$
$\Longrightarrow\ m \leq \inf_{[a,b]} f \leq m_k \leq f(x) \leq \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \leq M_k \leq \sup_{[a,b]} f \leq M$
Por consiguiente
$m \leq m_k \leq f(x) \leq M_k \leq M\ ;\forall x \in [x_{k-1}, x_k]\,;\forall k = 1, 2, \ldots, n.$ ■

Definición 3.4: Conjunto de particiones

Siendo $\mathcal{P}\,[a,b] = \{$conjunto de particiones de $[a,b]\}$. Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\} \in \mathcal{P}\,[a,b]$, entonces

a) *La suma superior de f con respecto a la partición P* se denota por $U(f,P)$ y se define como:

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1})\,.$$

b) *La suma inferior de f con respecto a la partición P* se denota por $L(f,P)$ y se define como:

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1})\,.$$

Propiedad: $\forall P \in \mathcal{P}\,[a,b] : L(f,P) \leq U(f,P)$.

Prueba. Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ se tiene: $m_k \leq M_k$.
Por tanto, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \leq M_k(x_k - x_{k-1})$$

Sumando miembro a miembro

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})}_{L(f,P)} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})}_{U(f,P)}$$

Por consiguiente

$$L(f,P) \leq U(f,P).$$

■

Ejemplo 3.3

Sea la función $f\colon [1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, entonces f es acotada en $[1,3]$ porque $1 \leq f(x) \leq 9, \forall x \in [1,3]$.

Definición 3.5: m_k y M_k

Se tiene una función $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada, una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a,b]$. Se definen los números

$$m_k = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k = \sup\{f(x) \mid x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]\}$$

Observación 3.5

Observación: En el caso de que f es creciente en $[a,b]$ con $f > 0$.
Se definen

$$\boxed{L(f;P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k} \text{ “suma inferior”}$$

$$\boxed{U(f;P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k} \text{ “suma superior”}$$

Propiedad: Se cumple que

$$m \leq m_k \leq M_k \leq M, \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Sea $P\,[a,b]$ el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.
Propiedad: Se cumple que

$$\forall p \in P\,[a,b] \text{ se tiene que } m(b-a) \leq L(f;P) \leq U(f;P) \leq M(b-a).$$

Prueba. Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}\,[a,b]$ cualquiera. De la propiedad 3.3 se tiene que:

$$m \leq m_k \leq M_k \leq M, \forall k = 1, 2, \dots, n$$

multiplicando por Δx_k se obtiene

$$m\Delta x_k \leq m_k \Delta x_k \leq M_k \Delta x_k \leq M\Delta x_k, \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Sumando cada una de estas n desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n} m\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M\Delta x_k, \forall k = 1, 2, \dots, n$$

■

Comentario: La suma superior a disminuir con respecto a la otra suma.
Cuando tienes un refinamiento la suma interior tiende a crecer.
Proposición: Sea $P, Q \in \mathcal{P}\,[a,b]$. Si $P \subset Q$, entonces

a) $L(f,P) \leq L(f,Q)$

b) $U(f,Q) \leq U(f,P)$

Demostración: Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Sea $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ en $[a, b]$ tal que $x_0 < c_1 < x_1 < c_2 < x_2 \cdots < x_{n-1} < c_n < x_n$ de este modo $Q = P \cup \{c_i\}_{i=1}^{n}$ es una partición de $[a, b]$ y $P \subset Q$; esto es Q es un refinamiento de P. Nota: Se cumple:

a) $\text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1},x_k]}\right) \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq \text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1},c_k]}\right) \cdot (c_k - x_{k-1}) + \text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1},c_k]}\right) \cdot (c_k - x_{k-1})$

b) $\sup\left(f\big|_{[x_{k-1},c_k]}\right) \cdot (c_k - x_{k-1}) + \sup\left(f\big|_{[c_k,x_k]}\right) \cdot (x_k - c_k) \leq \sup\left(f\big|_{[x_{k-1},x_k]}\right) \cdot (x_k - x_{k-1})$

Observación 3.6

$$\text{ínf}\left(f\big|_{[c,d]}\right) = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in [c, d]\}$$

Aplicando a, en cada $I_k = [x_{k-1}, x_k]\,, k = 1, 2, \ldots, n.$
Sumando las n desigualdades:

$$\sum_{k=1}^{n} \text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1},x_k]}\right) \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n}\left[\text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1},c_k]}\right)(c_k - x_{k-1}) + \text{ínf}\left(f\big|_{[c_k,x_k]}\right)(x_k - c_k)\right]$$

Entonces,

$$L(f, P) \leq L(f, Q)$$

De manera similar aplicando b (de la nota) se prueba la segunda.

Observación 3.7

De a se nota que cuando se refinan una partición, la suma inferior crece. En cambio, de b se tiene que cuando se refina la suma superior decrece.
Así, se obtiene $\{L(f; P) \mid p \in \mathcal{P}\,[a, b]\}$ el cual es acotado superiormente porque $L(f; P) \leq M(b-a); \forall P \in \mathcal{P}\,[a, b]$ y no vacío. (¿Por qué?).
Entonces el conjunto $\{L(f, P) \mid P \in \mathcal{P}\,[a, b]\}$ posee supremo. De esto se define la "integral inferior de la función acotada f en $[a, b]$", denotado por

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f, P) \mid P \in \mathcal{P}\,[a, b]\}$$

De manera similar se obtiene el conjunto $\{U(f, P) \mid P \in \mathcal{P}\,[a, b]\}$, el cual es no vacío y acotado inferiormente porque $m(b-a) \leq U(f, P), \forall P \in \mathcal{P}\,[a, b]$. En consecuencia posee ínfimo.

De esta manera se define la "ntegral superior de la función acotada f en $[a, b]$", denotado por $\overline{\int_a^b} f$, como

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{U(f, P) \mid P \in \mathcal{P}\,[a, b]\}$$

Definición 3.6

Sea la función acotada $f\colon\ [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice que f es integrable según Riemann si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso, se define la integral definida de la función f en $[a,b]$, denotada por $\int_a^b f$ como

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Como se cumple:

$$m(b-a) \leq L(f;P) \leq U(f;P) \leq M(b-a)$$

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq L(f,Q) \leq U(f;Q) \leq U(f,P) \leq M(b-a) \; \forall P,Q \in \mathcal{P}\,[a,b] \text{ con } P \subset Q.$$

Fijando la partición P, se tiene que

$$\{L(f,Q) \mid Q \in \mathcal{P}\,[a,b]\}$$

está acotada superiormente por $U(f,P)$, esto es, $U(f,P)$ es una cota superior de $\{L(f,Q) \mid Q \in \mathcal{P}\,[a,b]\}$ entonces

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f \leq U(f,P)}$$

porque $\underline{\int_a^b} f$ es supremo o mínima cota superior. De esto último $\underline{\int_a^b} f$ es una cota inferior de $\{U(f,P) \mid P \in \mathcal{P}\,[a,b]\}$ pero el ínfimo de este conjunto es $\underline{\int_a^b} f$, entonces $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Así, se tiene el siguiente

Definición 3.7: Definición de Darboux de $\int_a^b f$

Una función definida y acotada en $[a,b]$ es **integrable** en $[a,b]$ si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso el valor común de $\underline{\int_a^b} f$ y $\overline{\int_a^b} f$ es llamado la (definida) **integral de Riemann** de f sobre $[a,b]$, y es simplemente denotada $\int_a^b f$.

Observación 3.8: Observación en la notación

En algunos libros de Análisis no es usada la notación común $\int_a^b f \, \mathrm{d}x$, familiar del cálculo elemental porque en la definición de integral definida los símbolos x y $\mathrm{d}x$ no juegan un rol. La notación correcta indica que todo lo que necesitamos son la función y el intervalo. Sin embargo, en ejemplos concretos frecuentemente encontraremos más útil usar la notación familiar $\int_a^b f \, \mathrm{d}x$.

Ejemplo 3.4

Una **función constante** $f(x) = c$ es integrable sobre $[a,b]$, y $\int_a^b f = c(b-a)$.

Prueba. Para cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$, y para cualquier $k = 1, 2, \cdots, n$,

$$m_k = c = M_i, \text{ entonces}$$

$$L(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_i \Delta_i = \sum_{k=1}^{n} c\Delta_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta_k = c(b-a),$$

y además, $\underline{\int_a^b} f = c(b-a)$. Similarmente, para cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$,

$$U(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k = \sum_{k=1}^{n} c\Delta_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta_k = c(b-a),$$

y además $\overline{\int_a^b} f = c(b-a)$. Por lo tanto, $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = c(b-a)$, de lo cual se sigue la conclusión deseada. ■

$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \text{ínf}\,(f, I_k)\,\Delta x_k$, pero $\text{ínf}\,(f; I_k) = 5$, entonces $L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} 5{\cdot}\Delta x_k = 5\left(\sum_{k=1}^{n} \Delta I_k\right) = 5(3-1) = 10, \forall P \in \mathcal{P} \in [1,3]$.

De esto $\underline{\int_1^3} f = 10$.

De manera similar

$$\sup\,(f, I_k) = 5$$

Entonces:

$$\begin{aligned} U(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} \sup\,(f, I_k)\cdot \Delta I_k \\ &= 5(3-1) = 10,\ \forall P \in \mathcal{P}\,[1,3]\,. \end{aligned}$$

De esto $\overline{\int_1^3} f = 10$.

Como $\underline{\int_1^3} f = \overline{\int_1^3} f = 10$.

Entonces f es integrable según Riemann

$\therefore \int_1^3 f = 10$.

Ejemplo 3.7: Una función no integrable

La **función de Dirichlet** dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$ es no integrable en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$, donde $a < b$.

Prueba. Supongamos que $a < b$. Para cualquier partición $\mathcal{P}\,[a,b]$, y para cualquier $k = 1, 2, \cdots, n$, tenemos $m_k = 0$, y $M_k = 1$, entonces

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k = \sum_{k=1}^{n} 0\Delta_k = 0, \text{ y por lo tanto, } \underline{\int_a^b} f = 0. \text{ Similarmente,}$$

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k = \sum_{k=1}^{n} 1\Delta_k = (b-a), \text{ y por lo tanto, } \overline{\int_a^b} f = (b-a).$$

Por lo tanto, $\underline{\int_a^b} f \neq \overline{\int_a^b} f$, de lo cual se sigue que f no es integrable en $[a,b]$. ■

$f\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ para una partición P de $[0,2]$ se tiene que

$$f(I_k) = \{0;1\} \text{ para cualquier partición } P \text{ de } [0,2]\,.$$

$$\sup\left(f\big|_{I_k}\right) = 1$$

entonces

$$\begin{aligned} L(f,P) &= 0 \\ S(f,P) &= \sum 1 \cdot \Delta I_k = 1 \cdot \sum \Delta I_k = 2. \end{aligned}$$

$\underline{\int_0^2} f = 0; \overline{\int_0^2} f = 2.$
Como

$$\underline{\int_0^2} f \neq \overline{\int_0^2} f$$

entonces f no es integrable según Riemann.

Ejemplo 3.7: Función característica de un intervalo cerrado

Consideremos la función característica de un intervalo cerrado, sea $f = \chi_{[1,3]}$, dada por $f(x) = \left\{\begin{matrix} 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{matrix}\right\}$.

Pruebe que f es integrable en $[0,5]$ y encuentre $\displaystyle\int_0^5 f$.

Solución: Nuestra comprensión intuitiva de la integral como área nos lleva a esperar que $\displaystyle\int_0^2 f = 2$, entonces empecemos con esa expectativa.

a) Sea $\mathcal{P} = \{0,1,3,5\}$. Luego $\mathcal{P}$ es una partición de $[0,5]$, y

$$\begin{aligned} L(f,P) &= m_1\Delta_1 + m_2\Delta_2 + m_3\Delta_3 \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $\underline{\int_0^5} f$ es el supremo de todas las sumas inferiores, $\underline{\int_0^5} f \geq L(f,P) = 2$.

b) Sea $0 < \varepsilon < 1$, y sea $\mathcal{Q} = \{0, 1 - \frac{\varepsilon}{2}, 3 + \frac{\varepsilon}{2}, 5\}$. Entonces $\mathcal{Q}$ es una partición de $[0,5]$, y

$$\begin{aligned} U(f,P) &= M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2 + M_3\Delta_3 \\ &= 0(1 - \frac{\varepsilon}{2}) + 1(2+\varepsilon) + 0(2 - \frac{\varepsilon}{2}) \\ &= 2 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $\overline{\int_0^5} f$ es el ínfimo de todas las sumas superiores, $\overline{\int_0^5} f \leq U(f,\mathcal{Q}) = 2 + \varepsilon$.
Además, $\forall \varepsilon > 0$, $\overline{\int_0^5} f \leq 2 + \varepsilon$. Por lo tanto, por el principio de fuerza, $\displaystyle\int_0^5 f \leq 2$.

c) Tomando (a) y (b) juntos con el teorema,

$$2 \leq \underline{\int_0^5} f \leq \overline{\int_0^5} f \leq 2.$$

Esto es, $\underline{\int_0^5} f = \overline{\int_0^5} f = 2$. Por lo tanto, f es integrable en $[0,5]$, y $\int_0^5 f = 2$.

■

Recordando: Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Si A es

a) $c = \sup(A) \iff \begin{array}{c} x \leq c, \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A \mid c < x_0 + \varepsilon \end{array}$

b) $d = \text{ínf}(A) \iff \begin{array}{c} d \leq x, \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A \mid x_0 - \varepsilon < d \end{array}$

Para una función acotada $f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se definió:

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,P) \mid P \in \mathcal{P}\,[a,b]\}}$$

$$\boxed{\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{U(f,P) \mid P \in \mathcal{P}\,[a,b]\}}$$

Propiedad: Sea la función $f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es integrable sobre $[a,b]$, entonces para $\varepsilon > 0$, existen $P_1, P_2 \in \mathcal{P}\,[a,b]$ tal que se cumple:

$$\int_a^b f - \varepsilon < L(f,P_1) \leq \int_a^b f \leq U(f;P_2) < \int_a^b f + \varepsilon$$

Prueba. Aplicar las definiciones de supremo e ínfimo. ■

Propiedad: Sea la función $f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable. Para $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}\,[a,b]$ tal que

$$\boxed{\int_a^b f - \varepsilon < L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P) < \int_a^b f + \varepsilon}$$

Prueba. De la anterior proposición tomar $P = P_1 \cup P_2$ (P es refinamiento de P_1 y P_2). De esto último

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &\leq \int_a^b +\varepsilon - \left(\int_a^b f - \varepsilon\right) \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

■

Así se obtiene:
Proposición: Sea $f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}\,[a,b]$ tal que

$$U(f,P) - L(f,P)\varepsilon$$

Proposición:Sea $f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}\,[a,b]$ de modo que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$, entonces f es integrable según Riemann en $[a,b]$.
Proposición: Para una función $f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada las dos proposiciones son equivalentes.

2.4. Cotas para el error de aproximación de una integral definida

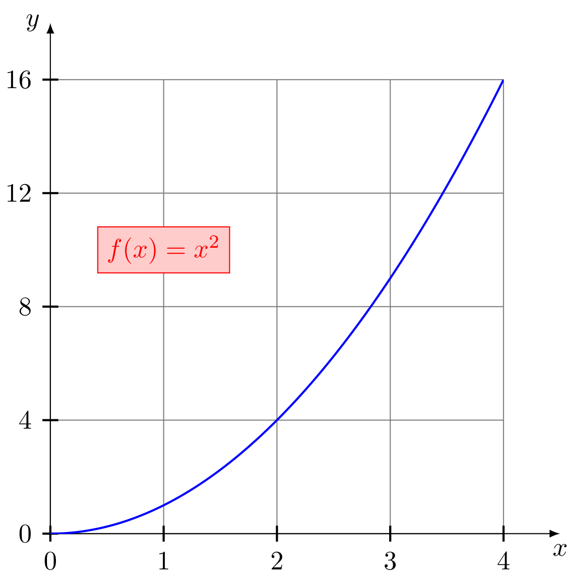
Ejemplo 4.0: Aproximación de la función $f(x) = x^2$

Sea la función f dada por $f(x) = x^2, x \in [0, 4]$. Determine una aproximación de $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Solución: f es acotada en $[0, 4]$. Tomando una partición $\mathcal{P} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ de $[0, 4]$. Determinando $L(f, \mathcal{P})$ y $U(f, \mathcal{P})$, donde

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{3} m_i(x)\Delta x_i = 0(1-0) + 1(3-1) + 9(4-3) = 11.$$

$$U(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{3} M_i(x)\Delta x_i = 1(1-0) + 9(4-3) + 16(4-3) = 35.$$



$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\left[U(f, \mathcal{P}) + L(f, \mathcal{P})\right]$$

esto es

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}[35 + 11] \approx 23$$

donde la cota de error de la aproximación por partición es

estos $\frac{1}{2}[35 - 11] = 12.$ ∎

Recordar que toda función continua en conjunto compacto posee un máximo y un mínimo.

2.5. Existencia de funciones integrables

Teorema 5.1: Existencia de funciones integrables

Si f es una función continua en $[a, b]$ excepto en $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subsetneq [a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Observación 5.1: Entendiendo el significado de una función integrable

Decir que f es *integrable* en $[a,b]$ significa que existe $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. ¡No quiere decir que conozcamos como calcularlo! Veamos algunas integrales que existen pero no se pueden expresar en términos de funciones elementales.

1 $\displaystyle\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ 3 $\displaystyle\int x\tan x\,\mathrm{d}x$ 5 $\displaystyle\int \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$ 7 $\displaystyle\int \ln(x)e^x\,\mathrm{d}x$

2 $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x^2)\,\mathrm{d}x$ 4 $\displaystyle\int \tan(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ 6 $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$ 8 $\displaystyle\int \sqrt{x\pm\ln(x)}\,\mathrm{d}x$

Aunque algunas funciones no pueden integrarse con antiderivadas elementales, muchas de ellas pueden ser evaluadas en términos de constantes matemáticas bien conocidas para ciertas integrales definidas. Quizás los ejemplos más famosos sean las integrales

1 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$ 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{e^x}\,\mathrm{d}x=-\gamma$ 3 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Corolario: Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.

Ejemplo 5.0: Función $\operatorname{sen} x$

Sea la función dada por $f(x)=\operatorname{sen} x$, $x\in[0,\pi]$ entonces f es integrable en $[0,\pi]$.

Teorema 5.2

Si f es continua en $[a,b]$, entonces para $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tal que

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k|\right|<\varepsilon$$

toda partición etiquetada $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ con $|\mathcal{P}|<\delta, \forall x_k^*\in[x_{k-1},x_k]$ elegido.

Observación 5.2

Si $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ es una partición de $[a,b]$ y se elige $x_k^*\in[x_{k-1},x_k]\,,k=1;2;\cdots;n$. A la siguiente suma:

$$\mathcal{S}(f,\mathcal{P},\mathcal{W})=\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

se le denomina "*suma de Riemann*" donde $\mathcal{W}=\{x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\}$

Corolario: Si f es continua en $[a,b]$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f=\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} f(x_k^*)\Delta x_k}$$

Observación 5.3

Cuando $|\mathcal{P}| \to 0$ equivale a $n \to \infty$.

Ejemplo 5.2

Sea f la función dada por $f(x) = x^2, x \in [0,4]$. Se tiene que f es continua en $[0,4]$, entonces f es integrable en $[0,4]$.
Tomando una partición regular de $[0,4]$ $\mathcal{P} = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ de la siguiente manera:

$$x_k = x_{k-1} + \Delta x_k; \quad \Delta x_k = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}.$$

de esto:

$$x_k = \underbrace{x_0}_{0} + k\Delta x_k, k = 1;2;\cdots;n \implies x_k = k \cdot \frac{4}{n}; k = 1;2;\cdots;n$$

En particular tomando $x_k^* = x_k = k \cdot \frac{4}{n}; k = 1;2;\cdots;n$ entonces la suma de Riemann sería

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(k \cdot \frac{4}{n}) \cdot \frac{4}{n} = \sum_{k=1}^{n} \left(k \cdot \frac{4}{n}\right)^2 \cdot \frac{4}{n} = \frac{4^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{4^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Luego, se tiene que

$$\int_0^4 x^2 \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{4^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{64}{3}.$$

2.6. Área de una región acotada

Sea f una función continua en $[a,b]$. $f(x) > 0, \forall x \in [a,b]$. Se define la región

$$\mathcal{W} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x) \wedge a \leq x \leq b\}$$

Se define el área de la región $\mathcal{W}$ como

$$\boxed{\text{área } (\mathcal{W}) = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x}$$

Observación 6.1

El área es no negativa.

Ejemplo 6.1

Sea $\mathcal{W}$ ka región delimitada por la gráfica de la función dada por $f(x) = x^2$, el eje X y las rectas $x = 0, x = 4$. Así, entonces el área $(\mathcal{W}) = \int_0^4 f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^4 x^2 \, \mathrm{d}x$. Pero, del ejemplo anterior $\int_0^4 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{64}{3}$. Esto es, el área $(\mathcal{W}) = \frac{64}{3}u^2$.

Propiedades de la integral definida:
1 Si f es una función acotada sobre $[a,b]$, $c \in [a,b]$ entonces:

a) $\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$ b) $\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f$

Pero en el caso de que f sea continua en $[a, b]$, $c \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Ejemplo 6.2

Sea la función f dada

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [-3, 0] \\ x^2 & ; x \in [0, 4] \end{cases}$$

se tiene que f es continua en $[-3, 4]$ entonces f es

3

Teoremas

3.1. Teorema fundamental del cálculo

3.1.1. Primer teorema fundamental del cálculo

Teorema 1.1: Primer teorema fundamental del cálculo

Sea la función f integrable en $[a,b]$ y se define la función F por $F(x) = \int_a^x f, x \in [a,b]$. Si f es continua en $[a,b]\,, c \in [a,b]$ entonces F es diferenciable en $[a,b]$, además, $F'(c) = f(c)$.

Demostración: a) Sea $h > 0$, entonces $F(c+h) = \displaystyle\int_a^{c+h} f, F(c) = \int_a^c f$

de esto $F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} - \int_a^c$.

$= \displaystyle\int_a^c f + \int_c^{c+h} - \int_a^c$ entonces $F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f$.

Como f es integrable en $[a,b]$ y $[c,c+h] \subset [a,b]$ entonces f es integrable en $[c,c+h]$.

Definamos

$m_h = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in [c,c+h]\}$

$M_h = \sup\{f(x) \mid x \in [c,c+h]\}$

y como f es integrable, por teorema (colocar el número que le corresponde), se cumple:

$$m_h \cdot h \leq \int_c^{c+h} \leq M_h \cdot h$$

diviendo entre h:

$$m_h \leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} \leq M_h$$

Cuando $h \to 0^+$ y como f es continua en $[c,c+h]$ se cumple que $m_h = M_h = f(c)$

de esto $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f = f(c)$ (Teorema del Sándwich).

esto es $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}[f(c+h) - F(c)] = f(c)$

Así $F'(c) = f(c)$.

b) Para $h < 0$ de manera análoga se obtiene lo anterior. ■

Límite especial:

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f = f(c)}$$

Ejemplo 1.1

Calcule

$$\lim_{h\to 0}\int_\pi^{\pi+h} \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(\pi) = 0.$$

Corolario: Si f es continua en $[a, b]$ y $f = G'$ para alguna función G definida en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f = G(b) - G(a)$

Demostración: Como f es continua en $[a, b]$ entonces f es integrable en $[a, b]$. Definamos la función F en (a, b) por $F(x) = \int_a^x f, x \in [a, b]$. Luego, por el *Primer teorema fundamental del cálculo*

$$F'(x) = f(x), x \in [a, b]$$
$$f(x) = G'(x), x \in [a, b] \text{esto es G es antiderivada de f}$$

entonces $F'(x) = G'(x), x \in [a, b]$.
De esto, se cumple por el teorema de diferenciabilidad

$$F(x) = G(x) + C, , \text{ C: constante para} x \in [a, b]$$

En particular para $x = a$ se tiene que $F(a) = G(a) + C$.
Pero $F(a) = \int_a^a = 0$.
En lo anterior $0 = G(a) + C$ de esto $0 = -G(a)$.
Así $F(x) = G(x) - G(a); x \in [a, b]$ en particular $F(b) = G(b) - G(a)$ pero $\int_a^b f$ por lo tanto $\int_a^b f = G(b) - G(a)$. ■

3.1.2. Segundo teorema fundamental del cálculo

Teorema 1.2: Segundo teorema fundamental del cálculo

Si f es una función integrable en $[a, b]$ y $f = G'$ para alguna función G en $[a, b]$ entonces $\int_a^b f = G(b) - G(a)$.

Demostración: Como la función G es diferenciable en $[a, b]$, entonces G es continua en $[a, b]$. Tomando una partición $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ de $[a, b]$ en cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \cdots, n$ se puede aplicar el *Teorema del valor medio* existe $x_k^* \in]x_{k-1}, x_k[$ tal que

$$G'(x_k) = \frac{G(x_k) - G(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

definamos

$$m_k = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$
$$M_k = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Como $m_k \leq f(x_k) \leq M_k$ multiplicando por $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \geq 0$ entonces $m_k \Delta x_k \leq f(x_k)\Delta x_k \leq M_k \Delta x_k \quad k = 1, 2, \cdots, n$.
Sumando estas “n” desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(x)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

entonces

$$L(f, \mathcal{P}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(x)\Delta x_k \leq U(f, \mathcal{P})$$

donde

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f(x)\Delta x_k &= \sum_{k=1}^{n} [G(x_k) - G(x_{k-1})] \\ &= G(x_n) - G(x_0) \quad \text{Propiedad telescópica} \\ &= G(b) - G(a). \end{aligned}$$

Así

$$L(f, \mathcal{P}) \leq G(b) - G(a) \leq U(f, \mathcal{P}) \quad \text{, para cualquier partición de } [a, b]$$

luego $G(b) - G(a)$ es cota superior de $\{L(f, \mathcal{P}) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}$ entonces $\underline{\int_a^b} f \leq G(b) - G(a)$.
Además, $(G(b) - G(a))$ es cota inferior de $\{U(f, \mathcal{P}) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}$ entonces $G(b) - G(a) \leq \overline{\int_a^b} f$, y como f es integrable en $[a, b]$ se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = G(b) - G(a) = \int_a^b f.$$

■

3.2. Cálculo de integrales definidas

3.3. Teorema del valor medio para integrales

3.4. Integración numérica

En esta sección nos concentraremos en las integrales definidas. Las entradas son $y(x)$ y dos puntos terminales a y b. La salida es la integral I. Nuestro objetivo es encontrar el número $\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x = I$, con precisión en un corto tiempo. Normalmente este objetivo se logra, tan pronto tengamos un buen método para calcular integrales. Nuestras dos aproximaciones son muy débiles. La búsqueda de una antiderivada ocurre en casos importantes, en el capítulo 7 extenderemos el rango, pero generalmente $f(x)$ no está disponible. La otra aproximación (por rectángulos) está en la dirección correcta, pero es muy tosca. La altura es el conjunto de $y(x)$ de derecha a izquierda para cada pequeño intervalo. La derecha a izquierda regla del rectángulo suma áreas (Δ veces y):

$$R_n = (\Delta x)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \quad \text{y} \quad L_n = (\Delta x)(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}).$$

El valor de $y(x)$ al final del intervalo j es y_j. El valor del extremo izquierdo $y_0 = y(a)$ ingresa a L_n. Con n intervalo de igual longitud

3.4.1. Aproximación del trapecio

3.4.2. Regla de Simpson

3.4.3. Teorema del cambio de variable de una integral definida

4
Técnicas de integración

5
El logaritmo y la exponencial

5.1. La función logaritmo natural

5.1.1. Derivadas e integrales

5.1.2. Logaritmo en otras bases

5.2. La función exponencial

5.2.1. Derivadas e integrales

5.2.2. Función exponencial generalizada

5.3. Funciones hiperbólicas directas e inversas

5.3.1. Derivadas e integrales

6
Área y volúmenes

6.1. Área de regiones planas (coordenadas cartesianas)

6.2. Volúmenes de sólidos con secciones planas paralelas

6.3. Volumen de sólidos de revolución

6.3.1. Método del disco

6.3.2. Método de las capas cilíndricas

7

Coordenadas polares, longitud de arco y áreas de superficies de revolución

7.1. Sistema de coordenadas polares

7.1.1. Fórmulas de transformación

7.1.2. Gráficas en coordenadas polares

7.1.3. Intersección de gráficas en coordenadas polares

7.1.4. Tangentes a curvas polares

7.1.5. Cálculo de áreas en coordenadas polares

7.2. Lomgitud de arco de una curva paramétrica en coordenadas cartesianas

7.2.1. A

Bibliografía

[1] Holger Valqui Casas. La odisea de la conjetura de shimura-taniyama y el último teorema de fermat. *Pro Mathematica*, 23(45-46):9–25.

[2] Charles G Denlinger. *Elements of real analysis*. Jones & Bartlett Publishers, 2011.

[3] Susanna S Epp. *Discrete mathematics with applications*. Cengage Learning, 2010.

[4] A. D. Fitt and G. T. Q. Hoare. The closed-form integration of arbitrary functions. *The Mathematical Gazette*, 77(479):227–236, 1993.

[5] Norman B Hasser, J La Salle, and J Sullivan. Análisis matemático vol. 1. *Editorial Trillas*, 2009.

[6] V. Frederick Rickey and Philip M. Tuchinsky. An application of geography to mathematics: History of the integral of the secant. *Mathematics Magazine*, 53, 05 1980.

[7] James Stewart. *Single variable calculus: Early transcendentals*. Cengage Learning, 2015.

[8] Gilbert Strang. *Calculus*. Wellesley-Cambridge Press, 1991.

[9] Johnny Moisés Valverde Montoro. Splines en la solución numérica de las ecuaciones diferenciales con retardo. 2012.

Índice