Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias

[ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA]
[Cod: CM131 Curso: CÁLCULO DIFERENCIAL]

Ciclo: 2016-II

SEXTA PRÁCTICA DIRIGIDA

1. Calcular $f'(x)$ si existe: $(x^2+1)^{100}(x^3-1)^{10}$!!
   a) $f(x) = (x^2+1)^100(x^3-1)^{10}$.
   b) $f(x) = |x^2-4|$.
   c) $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbb{Q} \cap < 0, 2 >$ y $f(x) = 2x - 1$ para $x \in \mathbb{I} \cap < 0, 2 >$.

2. Mostrar que la función dada por $f(x) = \begin{cases} x^2|\cos(\frac{\pi}{x})| & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ es no diferenciable en $x_n = \dfrac{2}{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, pero si en $0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

3. Determine las constantes a, b, c y d tal que f es diferenciable sobre $\mathbb{R}$.
   a) $f(x) = \begin{cases} 4x & ; x \neq 0 \\ ax^2 + bx + c & ; 0 < x < 1 \\ 3 - 2x & ; x \geq 1 \end{cases}$
   b) $f(x) = \begin{cases} ax + b & ; x \leq 0 \\ cx^2 + dx & ; 0 < x \leq 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x} & ; x > 1 \end{cases}$ * Su derivada es continua, Trabajar con derivadas laterales

4. Si f y g son diferenciables en a. Determine los límites:
   a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{xf(a) - af(x)}{x-a}$. Por Hôpital verificar.
   b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x-a}$. Sumar y restar $f(a)g(a) - f(a)g(a)$.
   Cocientes notables
   c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x-a}$, $n \in \mathbb{N}$. $+a^n f(a) -$
   d) $\lim\limits_{n\to\infty} (f(a+\frac{1}{n}) + f(a+\frac{2}{n}) + \ldots + f(a+\frac{k}{n}) - kf(a))$, $k \in \mathbb{N}$.

5. Encontrar los valores de $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, en el punto $(7, 0)$ y en el punto $(32, 5)$, sobre la curva $x = y^3 - 4y^2 + 7$ si existieran.

6. Para la función $f(x) = x^5 + 15x^3 - 15x^2 + 10x - 4$ mostrar que su gráfico es una curva creciente.

7. ¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c si el polinomio cúbico $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ es tal que tiene un punto de inflexión con una recta tangente horizontal.

8. Sea $\mathcal{L}$ la recta tangente a la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ en el punto $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$. Hallar el área del triángulo formado por $\mathcal{L}$ y los ejes coordenados.

9. Hallar los puntos sobre la curva $y = 3x^3 + 14x^2 + 3x + 8$ donde las tangentes en aquel punto pasan por el orígen.

10. ¿En cuáles puntos (x, y) sobre la curva γ dado por la ecuación $y = x^3 - 3x^2 + 2$ es la recta tengente $\mathcal{L}$ paralela a la recta $y = 9x + 4$.

11. Hallar la ecuación de la recta tangente común $\mathcal{L}$ a las curvas $y = x^2$ y $y = \dfrac{1}{x}$ Tangente entre curvas

12. La forma de una colina puede ser descrita por la ecuacón $y = -x^2 + 17x - 66$, $(6 \leq x \leq 11)$. Una persona con un rifle esta ubicado en el punto $P_0 = (2, 0)$.¿Para qué valores de x se considera una posición segura para un venado?.

13. Mostrar que el valor máximo de $y = a\sin x + b\cos x$ es $\sqrt{a^2+b^2}$.

14. Sea $f(x) = 5x^2 + Ax^{-5}$ para $x > 0$, donde A es una constante positiva. Encontrar el menor valor de A tal que $f(x) \geq 28$ para todo $x > 0$.

15. Sea $f(x) = |x|^3$ para todo x real, determine $f'(x)$; $f''(x)$ para x diferente de cero. Pruebe ademas que no existe $f'''(0)$

16. Si $f(x) = |x-3|^3(x-3) + x^3[\![x - 3/2]\!]$, hallar si existe $f'(3)$

17. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{27}{|x|^3} & ; \ |x| \geq 3 \\ ax^2 + bx + c & ; \ |x| < 3 \end{cases}$
    Halle, si es posible los valores de a, b y c de modo que la funcion sea continua en $x = 3$ y diferenciable en $x = -3$

18. Sabiendo que a es un numero fijo, halle los valores de α y β tales que la funcion f definida mediante la regla de correspondencia $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & ; \ |x| \geq a \\ \alpha + \beta x & ; \ |x| < a \end{cases}$, sea diferenciable.

19. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una funcion cóncava y $J = \{x \in J / f(x) > 0\}$, pruebe que la funcion $\frac{1}{f} : J \to \mathbb{R}$ es convexa.

20. Una fábrica de muebles calcula que el costo semanal de producir x reproducciones terminadas a mano de un escritorio colonial, esta dado por la función: $c(x) = x^3 - 3x^2 - 80x + 500$, cada escritorio producido se vende a 2800 soles, ¿que producción mensual rendirá la máxima utilidad? y ¿cuál es la mayor ganancia posible por semana?

21. El costo de operación para cierto camión se estima en $(30 + \frac{v}{2})$ centimos por kilometro, cuando se conduce a v kilometros por hora. El salario del conductor es de 18 soles por hora. ¿cual es la velocidad que minimizará el costo de realizar un envio a una ciudad que esta a k kilometros?. Suponga que las leyes de transito restringen la velocidad a $50 \leq v \leq 90$ en kilometros por hora.

22. Un hombre camina a lo largo de una senda recta a una velocidad de 4 m/s. Un reflector está en el piso a 20 m de la senda y se mantiene enfocando sobre el hombre, ¿ con que rapidéz gira el reflector cuando el hombre está a 15 m del punto de la senda mas cercano al reflector.

23. Haga un bosquejo de la grafica de la funcion $f(x) = \frac{3x^5 - 20x^3}{32}$

24. Determine los puntos de inflexion, asintotas, intervalos de concavidad, intervalos de convexidad y grafica de la funcion: $f(x) = \frac{x^3}{4+x^2}$

25. Dada la función $f(x) = \frac{x^3-2}{(x-1)^2}$, halle las asintotas y los puntos criticos, analize los intervalos de crecimiento y decrecimiento, determine los intervalos de concavidad, halle los valores extremos y puntos de inflexion y finalmente trace su gráfica.

26. Un triangulo rectangulo variable ABC en el plano es recto en B, tiene un vertice A fijo en el origen y el vertice C sobre la parabola $y = 1 + \frac{7x^2}{36}$. El vértice B parte del punto (0;1) en el tiempo $t = 0$ y se desplaza hacia arriba siguiendo el eje Y a una velocidad constante de 2 cm/seg. ¿Con que rapidez crece el área del triangulo cuando $t = 3,5seg$?

27. Un caballo corre a 20 km/h, a lo largo de una circunferencia en cuyo centro se halla un farol. En el punto inicial de la carrera del caballo está ubicada una cerca que sigue la direccion de la tangente. ¿A que velocidad se desplaza la sombra del caballo a lo largo de la cerca en el momento en que éste ha recorrido la octava parte de la circunferencia.

28. Se desea construir una caja rectangular con tres clases de materiales: un material A que se usara en la parte lateral, un material B que se usara en la base de la caja y un material C que se usara en la tapa de la caja. Se sabe que el costo de B es el doble que el costo de A por unidad de area y que el costo de C es el triple de B por unidad de area, si se quiere que la caja tenga un volumen de 288 cm^3 y que su largo sea el doble de su ancho, halle las dimensiones de la caja que minimizen el costo total.

29. La ecuación de la trayectoria de un proyectil esta dado por $y = mx - \frac{(m^2+1)}{200}x^2$, considerando el origen de coordenadas como el punto desde el cual se lanza el proyectil y m la pendiente de la curva en el origen.

    a) Si existiera una pared vertical de ecuación $x = 75$, ¿ para que valor de m la altura a la que impactara el proyectil sobre dicha pared será máxima?

    b) Para que valor de m, el proyectil caerá en el mismo nivel horizontal a la mayor distancia posible?

30. Grafique, hallando máximos, mínimos, puntos de inflexión y asintotas para la curva: $y^3 - 4x^2 + x^3 = 0$

31. Si $x > 0$, pruebe que

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

32. Siendo $x > 0$, demuestre que:

$$\left|(1+x)^{\frac{1}{3}} - \left(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}\right)\right| \leq \frac{5x^3}{81}$$

Los Profesores

UNI, 21 de noviembre del 2016