Francis G. Florez

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2017-II

[Cod: CM132 Curso: Cálculo Integral]
[Temas: Partición, Sumas Superior e Inferior, Integral inferior y Superior, Integral definida, Aproximación de una integral y cota, Suma límite para el área de una región y Teoremas Fundamentales del Cálculo]

Práctica Dirigida N^o 2

---

1. **Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas. Pruebe que:**

a) $L(f, P) + L(g, P) \leq L(f + g, P)$ **y**

b) $U(f + g, P) \leq U(f, P) + U(g, P)$

para toda partición P del intervalo $[a, b]$.

2. **Sea f una función acotada en el intervalo I y sean P_1, P_2 particiones de I tal que P_2 es un refinamiendo de P_1. Demuestre que:** Probar refinamiento $P_1 \subset P_2$

Agrega un punto

a) $||P_2|| \leq ||P_1||$

En la parte b) se le agrega un punto

b) $L(f, P_2) - L(f, P_1) \leq r(M - m)||P_1||$ **y** $U(f, P_1) - U(f, P_2) \leq r(M - m)||P_1||$ **si** P_2/P_1 **tiene** r **puntos.**$(M = \sup(f)$ **y** $m = \inf(f))$

3. **Sea $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$ definida por**

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 1 + \sqrt{x}, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

y $P = \{-1, 0, 1, 3, 4\}$ una partición de $[-1, 4]$

a) **Halle $m_i(f)$ y $M_i(f)$, $1 \leq i \leq 4$**

b) **Calcule $U(f, P)$ y $L(f, P)$**

c) **Halle una cota de error cometido al aproximar el valor de $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ con la partición P.**

4. **Mediante particiones regulares y por un proceso de límite, hallar el valor exacto de las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int_0^3 (x^2 + 4x + 5)dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 (4x^3 - 3x^2)dx$

5. **Expresar los siguientes límites como una integral definida.** ancho del intervalo [0, 1]

a) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{8i^2}{n^3}$ b) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sin(\frac{i}{n})}{n + i}$

6. **Expresar el límite de cada suma como una integral definida**

a) $\displaystyle\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_{i-1}^2)$, **$P$ partición de $[-3, 10]$**

b) $\displaystyle\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (1 - x_i - x_{i-1})x_i^2(x_i - x_{i-1})$, **$P$ partición de $[0, 1]$**

c) $\displaystyle\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [a + \frac{i-1}{n}(b - a)][a + \frac{i}{n}(b - a)]$, **$P$ partición de $[a, b]$**

falta para ...

Corregido

7. **¿Cuán pequeño debe ser $|P|$ para que el error en la aproximación de**

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(t)dt$ b) $\displaystyle\int_2^1 \frac{dt}{t}$

8. **Sea f integrable sobre $[a, b]$. Pruebe que f es integrable sobre todo $[c, d] \subset [a, b]$**

9. **Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, pruebe que**

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)dx\right| \leq \overline{\int_a^b} |f(x)|dx$$

10. **Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Analice la integrabilidad de f en $[0, 1]$.

Si se cumple en un punto $\Rightarrow$ se cumple a su vecindad del punto

propiedad de la función continua

11. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$a \Rightarrow b$ $\quad b \Rightarrow a$ (Contrarrecíproco)

a) $\int_a^b |f(x)|dx = 0$

b) Si f es continua en $c \in [a,b]$, entonces $f(c) = 0$

la función se anula en los puntos donde es continua

12. Sean f y g continuas sobre $[a,b]$ con $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$. Si existe algún $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) < g(x_0)$, entonces $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$

13. Demuestre que $\int_0^x |t|dt = \frac{1}{2}x|x|, \forall x \in \mathbb{R}$

14. Halle el valor de $c \in \mathbb{R}$ tal que si $f(x) = x^2 - 2x + 1$, se tiene que $f(c) = \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx$

15. Halle el área de la región limitada por la parábola $y = 6 + 4x - x^2$ y el segmento determinado por los puntos $P(-2,,6)$ y $Q(4,6)$.

16. Sea $y = f(x)$ una función tal que bajo su gráfica y sobre el eje X determina una región de área:

$$F(x) = A(x) = (1+3x)^{1/2} - 1 \text{ , para cada } x \geq 0$$

Calcule el valor medio de $f(x)$ para $1 \leq x \leq 8$.

17. Calcular;

a) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_1^{x+1} sentdt - \int_1^x sentdt\right]$

b) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_1^x sen^2tdt - \int_1^{x+h} cos^2tdt - x\right]$

18. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $\int_a^b f(xt)dt = 0$. Mostrar que $f \equiv 0$.

19. Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ una función continua tal que

$$f^2(t) \leq 1 + 2\int_0^t f(s)ds. \; ; \; ;\forall t \in [0,1].$$

$\sum_{i=1}^{n} t_i$ depende de n

$\int_0^3 f(t)dt$ depende de 3 no de t.

Probar que $f(t) \leq 1 + t, \; \forall t \in [0,1]$.

20. Sea $f : [1,\infty> \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 1$ y

Cambio de variable

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}.$$

Probar que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe y este límite es menor que $1 + \frac{\pi}{4}$.

21. Sea $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Probar que

$$\int_0^x (\int_0^y f(t)dt)dy = \int_0^x (x-y)f(y)dy.$$

22. Probar que la función

$$I(t) = \int_0^1 \frac{dx}{(x^4+t^4)^{1/4}} + \ln t$$

es tal que $I(t) \geq \ln(1+t) \geq 0, \; \forall t \geq 0$, y que $I'(t) \geq 0$.

23. Si f es una función continua, pruebe que

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$$

$u = \frac{\pi}{2} - x$

24. Sea f una función derivable en

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = 1.$$

Se define la función

$$G(x) = \int_0^{f(x)} xf(u)du.$$

Hallar $G''(1)$.

x es constante, no depende de u.

UNI, 11 de Septiembre del 2017