EJEMPLO 3 Demostrar que los pares de vectores que se dan, son ortogonales:

(a) $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ **(b)** $3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \ 10\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$

Solución Calculemos los productos escalares. La demostración se deduce del Teorema (14.24).

(a) $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \langle 1, 0, 0 \rangle \cdot \langle 0, 1, 0 \rangle = (1)(0) + (0)(1) + (0)(0) = 0$

(b) $(3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot (10\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 30 - 28 - 2 = 0.$ •

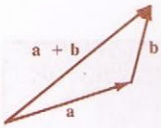
Los siguientes dos resultados son válidos para cualquier par de vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ (14.25)

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|.$$

Demostración El resultado es evidente si $\mathbf{a}$ o $\mathbf{b}$ es $\mathbf{0}$. Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores diferentes de cero, entonces por el Teorema (14.22), $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \, |\cos\theta|$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Como $|\cos\theta| \leq 1$, resulta que $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|$. • •

FIGURA 14.35



Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ se representan geométricamente como en la Figura 14.35 y se usa el hecho de que la longitud $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$ de uno de los lados del triángulo no puede ser mayor que la suma de las longitudes de los otros dos lados, se obtiene el siguiente resultado.

DESIGUALDAD DEL TRIÁNGULO (14.26)

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

Se dará una demostración *algebraica* alternativa de la Desigualdad del Triángulo usando el producto escalar. (Este tipo de demostraciones es importante en *álgebra lineal*, en donde se consideran vectores en más de tres dimensiones.)

Demostración algebraica de (14.26) Usando las propiedades del producto escalar

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$$

o bien

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \|\mathbf{b}\|^2.$$

Como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|$ (véase (14.25)), se tiene que

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\|^2 = (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2.$$

Tomando raíces cuadradas, se obtiene

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \quad \bullet \bullet$$

Si pasamos por alto que el cociente no tiene ninguna de las formas indeterminadas 0/0 o bien ∞/∞ en $x = 0$, y aplicamos (incorrectamente) la Regla de L'Hôpital, resulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x}.$$

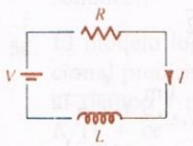
Como este cociente tiene la forma indeterminada 0/0, se aplica de nuevo la regla mencionada y obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Esto lleva a la conclusión (errónea) de que el límite existe y es igual a 1. •

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de las formas indeterminadas al análisis de un circuito eléctrico.

FIGURA 10.2



EJEMPLO 7 La corriente I al tiempo t en un circuito eléctrico está dada por $I = V(1 - e^{-Rt/L})/R$ donde V es la tensión aplicada (voltaje), R es la resistencia y L es la inductancia (véase la Figura 10.2). Calcular $\lim_{L\to 0^+} I$ tomando a L como la única variable independiente. Evaluar $\lim_{R\to 0^+} I$ tomando a R como la única variable independiente.

Solución Considerando a V, R y t como constantes y a L como variable, la expresión que se obtiene para I no es una forma indeterminada en $L = 0$. Usando los teoremas comunes sobre límites obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{L\to 0^+} I &= \lim_{L\to 0^+} \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \\ &= \frac{V}{R}\left(1 - \lim_{L\to 0^+} e^{-Rt/L}\right) \\ &= \frac{V}{R}(1 - 0) = \frac{V}{R}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, en estas condiciones la corriente está dada por la ley de Ohm $I = V/R$.

Considerando a V, L y t como constantes y a R como variable, I toma la forma indeterminada 0/0 en $R = 0$. Aplicando la Regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned}\lim_{R\to 0^+} I &= V \lim_{R\to 0^+} \frac{(1 - e^{-Rt/L})}{R} \\ &= V \lim_{R\to 0^+} \frac{0 - e^{-Rt/L}(-t/L)}{1} \\ &= V[0 - (1)(-t/L)] = \frac{V}{L}t.\end{aligned}$$

Esto puede interpretarse como sigue. Cuando $R \to 0^+$, la corriente I es directamente proporcional al tiempo t, con constante de proporcionalidad V/L. Por lo tanto, en $t = 1$ la corriente es V/L; en $t = 2$ es $(V/L)(2)$; en $t = 3$ es $(V/L)(3)$, etcétera.

EJERCICIOS 10.1

Ejercicios 1-52: Calcule el límite si es que existe.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x}$

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{5x}{\tan x}$

3. $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$

4. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt[3]{x+4}-2}$

5. $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6}$

6. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+3x-9}$

7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-2x-1}$

8. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-x-7}$

9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{\tan x - x}$

10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x-\tan x}$

11. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x+1-e^x}{x^2}$

12. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x+1-e^x}{x^3}$

13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$

14. $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}$

15. $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

16. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x}{x}$

17. $\lim_{x\to (\pi/2)^-} \dfrac{2+\sec x}{3\tan x}$

18. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\cot x}$

19. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{\ln x}$

20. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$

21. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln \operatorname{sen} 2x}$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{\tan^{-1} x}$

23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2\operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$

24. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cos x + e^{-x}}{x^2}$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2e^x - 3x - e^{-x}}{x^2}$

27. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2x^2+3x+1}{5x^2+x+4}$

28. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^3+x+1}{3x^3+4}$

29. $\lim_{\to \infty} \dfrac{x\ln x}{x+\ln x}$

30. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{e^{3x}}{\ln x}$

31. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^n}{e^x},\ n>0$

32. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^n},\ n>0$

33. $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{\ln(x-1)}{(x-2)^2}$

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + 2\cos x - 2}{\cos^2 x - x\sin x - 1}$

35. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} 2x}{\operatorname{sen}^{-1} x}$

36. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$

37. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3 \tan x}$

38. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^3-5x^2+6x-3}{x^3-2x^2+x-1}$

39. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{3-3^x}{5-5^x}$

40. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2-e^x-e^{-x}}{1-\cos^2 x}$

41. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}$

42. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4+x^3-3x^2-x+2}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}$

43. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\tan^{-1} x}{x \operatorname{sen} x}$

44. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

45. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^{3/2}+5x-4}{x\ln x}$

46. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{sen}^{-1} x}{x-\operatorname{sen} x}$

47. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\tan^{-1} x}$

48. $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{\tan x}{\cot 2x}$

49. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2e^{3x}+\ln x}{e^{3x}+x^2}$

50. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-1/x}}{x}$

51. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x-\cos x}{x}$

52. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x+\cosh x}{x^2+1}$

53. Desde un globo de aire caliente se deja caer un cuerpo de masa m. Si la fuerza resistente debida al aire es directamente proporcional a la velocidad $v(t)$ del objeto al tiempo t, entonces

$$v(t) = (mg/k)(1 - e^{-(k/m)t})$$

donde k es una constante y g es la aceleración de la gravedad (véase el Ejemplo 4 de la Sección 19.2). Demuestre que $\lim_{k\to 0^+} v(t) = -gt$.

54. Un cuerpo esférico de masa m se suelta en agua (véase el Ejercicio 56 de la Sección 8.7). Si la fuerza de resistencia debida al agua es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad, entonces la distancia $s(t)$ recorrida por la pelota al tiempo t está dada por

$$s(t) = (m/k)\ln\cosh(\sqrt{gk/m}\,t)$$

donde k es una constante y g es la aceleración

de la gravedad. Demuestre que $\lim_{k\to 0^+} s(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

55. Consulte la Definición (8.21) del movimiento armónico simple. Un cuerpo de masa m se fija a un resorte colgado de un soporte. Se pone en movimiento al cuerpo moviendo el soporte de acuerdo con la ecuación $D = A\cos\omega t$, donde A y ω son constantes positivas y t es el tiempo. Si se desprecian las fuerzas de fricción, el desplazamiento s del cuerpo con respecto a su posición inicial, al tiempo t, está dado por

$$s = \frac{A\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t)$$

para $\omega \neq \omega_0$, donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ para alguna constante positiva k. Calcule $\lim_{\omega\to\omega_0} s$, y demuestre que la amplitud de las oscilaciones es creciente. Éste es un ejemplo del fenómeno de resonancia.

56. El modelo logístico para el crecimiento poblacional predice el tamaño $y(t)$ de una población al tiempo t por medio de la fórmula $y(t) = K/(1 + ce^{-rt})$, donde r y K son constantes positivas y $c = [K - y(0)]/y(0)$. Los ecologistas llaman a K *capacidad del medio* y la interpretan como el número máximo de individuos que el medio o ambiente natural puede soportar. Calcule $\lim_{t\to\infty} y(t)$ y $\lim_{K\to\infty} y(t)$ e ilustre gráficamente el significado de estos límites.

57. La *integral senaria* $Si(x) = \int_0^x [(\operatorname{sen} u)/u]\,du$ es una función especial de las matemáticas aplicadas. Calcule

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{Si(x)}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{Si(x) - x}{x^3}$

58. La *integral cosenaria de Fresnel* cuya fórmula es $C(x) = \int_0^x \cos u^2\,du$, se utiliza en el estudio de la difracción de la luz. Calcule

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{C(x)}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{C(x) - x}{x^5}$

59. Sea $x > 0$. Se sabe que $\int_1^x t^n\,dt = [t^{n+1}/(n+1)]_1^x$, para $n \neq -1$. Demuestre que

$$\lim_{n\to -1} \int_1^x t^n\,dt = \int_1^x t^{-1}\,dt.$$

60. Calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ para

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt \quad \text{y} \quad g(x) = e^{x^2}.$$

10.2 OTRAS FORMAS INDETERMINADAS

Se asevera que $f(x)g(x)$ tiene la **forma indeterminada** $0 \cdot \infty$ en $x = c$, si se tiene $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$ o bien $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$. Se usa la misma terminología para límites unilaterales y cuando $x \to \infty$ o bien $x \to -\infty$. Esta forma se puede cambiar a una de las indeterminadas $0/0$ o bien ∞/∞ escribiendo

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \quad \text{o bien} \quad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

Calcular $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$.

La forma indeterminada es $0 \cdot \infty$. Escribimos

$$x^2 \ln x = \frac{\ln x}{1/x^2}$$

y se aplica luego la Regla de L'Hôpital a la forma indeterminada resultante que es del tipo ∞/∞. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3}.$$

Este último cociente tiene la forma indeterminada ∞/∞; sin embargo, si aplicáramos de nuevo la Regla de L'Hôpital volveríamos a obtener ∞/∞. En vez de eso se simplifica algebraicamente el cociente y se determina el límite como sigue:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{-2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{-2} = 0. \quad \bullet$$

EJEMPLO 2 Calcular $\lim_{x\to \pi/2} (2x - \pi) \sec x$.

Solución La forma indeterminada es $0 \cdot \infty$. Comenzamos por escribir

$$(2x - \pi) \sec x = \frac{2x - \pi}{1/(\sec x)} = \frac{2x - \pi}{\cos x}.$$

Puesto que esta última expresión tiene la forma indeterminada $0/0$ en $x = \pi/2$, podemos aplicar la Regla de L'Hôpital como sigue:

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{2x - \pi}{\cos x} = \lim_{x\to \pi/2} \frac{2}{-\operatorname{sen} x} = \frac{2}{-1} = -2. \quad \bullet$$

Las formas indeterminadas que se denotan por 0^0, ∞^0 y 1^∞ provienen de expresiones como $f(x)^{g(x)}$. Para estudiar estas formas es conveniente escribir

$$y = f(x)^{g(x)}$$

y tomar el logaritmo natural a ambos lados, con lo que se obtiene

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x).$$

Si la forma indeterminada para y es 0^0 o bien ∞^0, entonces la forma indeterminada para $\ln y$ es $0 \cdot \infty$, que se puede resolver usando los métodos anteriores. Análogamente, si y tiene la forma 1^∞, entonces la forma indeterminada para $\ln y$ es $\infty \cdot 0$. Resulta así que

$$\text{si} \quad \lim_{x\to c} \ln y = L, \quad \text{entonces} \quad \lim_{x\to c} y = \lim_{x\to c} e^{\ln y} = e^L,$$

es decir,

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^L.$$

Este método se puede resumir como sigue.

GUÍA PARA (10.3) ANALIZAR $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}$ CUANDO LA FORMA INDETERMINADA ES 0^0, 1^∞ O BIEN ∞^0

1. Sea $y = f(x)^{g(x)}$.
2. Tomar logaritmos: $\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$.
3. Calcular $\lim_{x\to c} \ln y$, si es que existe.
4. Si $\lim_{x\to c} \ln y = L$, entonces $\lim_{x\to c} y = e^L$.

A veces se comete el error de parar en el paso 3 y concluir que la expresión tiene el límite L. Es importante recordar que *se desea calcular el límite de y*. Por lo tanto,

si $\ln y$ tiene por límite L, entonces y tiene el límite e^L. La guía también se puede usar cuando $x \to \infty$, o bien $x \to -\infty$ y para el caso de límites unilaterales.

EJEMPLO 3 Calcular $\lim_{x\to 0} (1 + 3x)^{1/(2x)}$.

Solución La forma indeterminada es 1^∞. Siguiendo la guía (10.3), escribimos

1. $$y = (1 + 3x)^{1/(2x)}.$$

2. $$\ln y = \frac{1}{2x} \ln (1 + 3x) = \frac{\ln (1 + 3x)}{2x}.$$

Esta última expresión tiene la forma indeterminada 0/0 en $x = 0$. Por la Regla de L'Hôpital,

3. $$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln (1 + 3x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3/(1 + 3x)}{2} = \frac{3}{2}.$$

Por lo tanto,

4. $$\lim_{x\to 0} (1 + 3x)^{1/(2x)} = \lim_{x\to 0} y = e^{3/2}.$$

Si $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \infty$, entonces $f(x) - g(x)$ *tiene la forma indeterminada* $\infty - \infty$ en $x = c$. En este caso es necesario modificar la expresión para obtener una de las formas estudiadas anteriormente.

EJEMPLO 4 Calcular $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right)$.

Solución La forma es $\infty - \infty$; sin embargo, la diferencia puede escribirse con un denominador común, como sigue:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{xe^x - x}.$$

Esto da la forma indeterminada 0/0. Para resolverla es necesario aplicar dos veces la Regla de L'Hôpital ya que la primera aplicación da la forma indeterminada 0/0. Así,

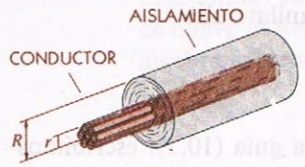
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{xe^x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{xe^x + e^x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{xe^x + 2e^x} = -\frac{1}{2}.$$

EJEMPLO 5 Consultar el Ejercicio 53 de la Sección 7.3. La velocidad v de un impulso eléctrico a través de un cable está dada por

$$v = -k \left(\frac{r}{R}\right)^2 \ln \left(\frac{r}{R}\right)$$

FIGURA 10.3



donde R es el radio exterior (con el aislamiento) del cable, r es el radio de la parte conductora y k es una constante positiva (véase la Figura 10.3). Calcular

(a) $\lim\limits_{R \to r^+} v$ **(b)** $\lim\limits_{r \to 0^+} v$.

Solución

(a) La notación de límite indica que r es fijo y R es variable. En este caso la expresión para v no es indeterminada y

$$\lim_{R \to r^+} v = -k \lim_{R \to r^+} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right) = -k(1)^2 \ln 1 = -k(0) = 0.$$

(b) Si R es fijo y r es variable, entonces la expresión para v tiene la forma indeterminada $0 \cdot \infty$ en $r = 0$. Comenzamos por modificar algebraicamente la forma de la expresión como sigue:

$$\lim_{r \to 0^+} v = -k \lim_{r \to 0^+} \frac{\ln (r/R)}{(r/R)^{-2}} = -kR^2 \lim_{r \to 0^+} \frac{\ln r - \ln R}{r^{-2}}$$

Como el cociente anterior tiene la forma indeterminada ∞/∞ en $r = 0$, podemos aplicar la Regla de L'Hôpital, y obtener

$$\lim_{r \to 0^+} v = -kR^2 \lim_{r \to 0^+} \frac{(1/r) - 0}{-2r^{-3}}$$

$$= -kR^2 \lim_{r \to 0^+} \left(\frac{r^2}{-2}\right) = -kR^2(0) = 0$$

EJERCICIOS 10.2

Ejercicios 1-42: Calcule el límite si es que existe.

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$

2. $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \tan x \ln \operatorname{sen} x$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - 1)e^{-x^2}$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} x(e^{1/x} - 1)$

5. $\lim\limits_{x \to 0} e^{-x} \operatorname{sen} x$

6. $\lim\limits_{x \to -\infty} x \tan^{-1} x$

7. $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin x \ln \operatorname{sen} x$

8. $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)$

9. $\lim\limits_{x \to \infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

10. $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} \ln x$

11. $\lim\limits_{x \to 0} x \sec^2 x$

12. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{x+1}$

13. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x}$

14. $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^x + 3x)^{1/2}$

15. $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^x - 1)^x$

16. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$

17. $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x}$

18. $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} (\tan x)^{\cos x}$

19. $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} (\tan x)^x$

20. $\lim\limits_{x \to 2^+} (x - 2)^x$

21. $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x + 1)^{\cot x}$

22. $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + 3x)^{\csc x}$

23. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x - 1} - \frac{x^2}{x + 1}\right)$

24. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

25. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

26. $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} (\sec x - \tan x)$

27. $\lim\limits_{x \to 1^-} (1 - x)^{\ln x}$

28. $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + e^x)^{e^{-x}}$

29. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{x}\right)$

30. $\lim\limits_{x \to 0} (\cot^2 x - \csc^2 x)$

31. $\lim\limits_{x \to 0} \cot 2x \tan^{-1} x$

32. $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 2^{-x}$

33. $\lim_{x\to 0} (\cot^2 x - e^{-x})$

34. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+4} - \tan^{-1} x)$

35. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} (1+\cos x)^{\tan x}$

36. $\lim_{x\to 0} (1+ax)^{b/x}$

37. $\lim_{x\to -3} \left(\dfrac{4}{x^2+2x-3} - \dfrac{4}{x+3}\right)$

38. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^4+5x^2+3} - x^2)$

39. $\lim_{x\to 0} (x+\cos 2x)^{\csc 3x}$

40. $\lim_{x\to\pi/2} \sec x \cos 3x$

41. $\lim_{x\to\infty} (\operatorname{senh} x - x)$

42. $\lim_{x\to\infty} [\ln(4x+3) - \ln(3x+4)]$

Ejercicios 43-44: Trace la gráfica de f para $x > 0$. Calcule los máximos y mínimos locales y describa el comportamiento de $f(x)$ cerca de $x = 0$. Encuentre las asíntotas horizontales si es que existen.

43. $f(x) = x^{1/x}$ **44.** $f(x) = x^x$

45. La *media geométrica* de dos números reales positivos a y b se define como $\sqrt{ab}$. Use la Regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\sqrt{ab} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x.$$

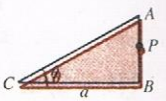
46. Si una cantidad P de dinero se invierte con una tasa de interés de $100r$ por ciento al año, con capitalización m veces al año, entonces el capital al cabo de t años está dado por $P(1+rm^{-1})^{mt}$. Si se toma a m como un número real y se le hace tender a infinito, entonces se dice que el interés se *capitaliza* o *compone continuamente*. Aplique la Regla de L'Hôpital para demostrar que en este caso el capital a los t años es Pe^{rt}.

47. Consulte el Ejercicio 51 de la Sección 8.4. Sea ABC un triángulo rectángulo (véase la figura). La distancia media k del vértice C a un punto P sobre el lado AB es $k = (a/\theta)\ln(\sec\theta + \tan\theta)$.

(a) Use su intuición geométrica para calcular $\lim_{\theta\to 0} k$.

(b) Use la Regla de L'Hôpital para comprobar su respuesta en (a).

EJERCICIO 47



48. Consulte el Ejercicio 53 de la Sección 10.1. En la fórmula de la velocidad

$$v(t) = (mg/k)(1 - e^{-(k/m)t})$$

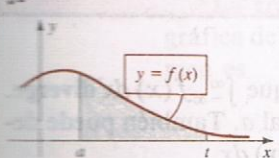
m representa la masa de un cuerpo que cae. Calcule $\lim_{m\to\infty} v(t)$ y concluya que cuando la masa m es muy grande $v(t)$ es aproximadamente proporcional al tiempo t.

10.3 INTEGRALES CON EXTREMOS (O LÍMITES) DE INTEGRACIÓN INFINITOS

Sea f una función continua no negativa definida en un intervalo infinito $[a, \infty)$ tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Si $t > a$, entonces el área $A(t)$ bajo la gráfica de f entre a y t, ilustrada en la Figura 10.4, está dada por

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx.$$

FIGURA 10.4
$\int_a^t f(x)\,dx$



Si $\lim_{t\to\infty} A(t)$ existe, entonces el límite se puede interpretar como el área de la región que se encuentra bajo la gráfica de f, arriba del eje x y a la derecha de $x = a$, como se ilustra en la Figura 10.5. Para denotar este número se utiliza el símbolo $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

La parte (i) de la siguiente definición es una generalización del comentario anterior al caso en que $f(x)$ puede tomar valores negativos en $[a, \infty)$.

DEFINICIÓN (10.4)

(i) Si f es continua en $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

si el límite existe.

(ii) Si f es continua en $(-\infty, a]$, entonces

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx$$

si el límite existe.

FIGURA 10.5
$\int_a^\infty f(x)\,dx$

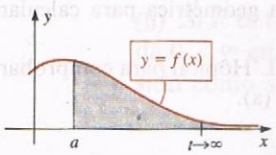
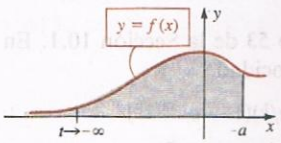


FIGURA 10.6
$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$



Si $f(x) \geq 0$ para todo x, entonces el límite en la Definición (10.4) (ii) puede considerarse como el área bajo la gráfica de f, arriba del eje x y a la *izquierda* de $x = a$ (véase la Figura 10.6).

Las expresiones en la Definición (10.4) se llaman **integrales impropias**. Difieren de las integrales definidas en que uno de sus extremos de integración no es un número real. Se dice que una integral impropia **converge** si el límite correspondiente existe, y en ese caso el **valor** de la integral impropia es ese límite. Si el límite no existe entonces la integral impropia **diverge**.

La Definición (10.4) tiene muchas aplicaciones. En el Ejemplo 4 se usa una integral impropia para calcular el trabajo realizado al enviar un objeto de la superficie de la Tierra a un punto fuera del campo gravitatorio terrestre. Su aplicación al estudio de las series infinitas es muy importante (véase el Teorema (11.22)).

Una integral impropia puede tener *dos* extremos de integración infinitos como en la siguiente definición.

DEFINICIÓN (10.5)

Sea f una función continua para todo x. Si a es un número real, entonces

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

siempre y cuando converjan las dos integrales impropias del lado derecho de la igualdad.

Si diverge una de las integrales en (10.5), entonces se dice que $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ **diverge**. Se puede demostrar que (10.5) es independiente del número real a. También puede demostrarse que $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ no es lo mismo que $\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t f(x)\,dx$.

EJEMPLO 1 Investigar si la integral converge o diverge. Calcular su valor si converge.

(a) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1}\,dx$

Solución

(a) De la Definición (10.4) (i),

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-1}{x-1}\right]_2^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{-1}{t-1} + \frac{1}{2-1}\right) = 0 + 1 = 1.$$

Por lo tanto la integral converge y su valor es 1.

(b) De la Definición (10.4) (i),

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \Big[\ln(x-1)\Big]_2^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} [\ln(t-1) - \ln(2-1)]$$

$$= \lim_{t\to\infty} \ln(t-1) = \infty.$$

Por lo tanto, la integral impropia diverge. •

En las Figuras 10.7 y 10.8 aparecen las gráficas de las funciones dadas como integrandos en el Ejemplo 1. Nótese que aunque las gráficas se parecen para $x \geq 2$, puede asignarse un valor al área de la región infinita bajo la curva en la Figura 10.7 pero no para la de la Figura 10.8.

FIGURA 10.7

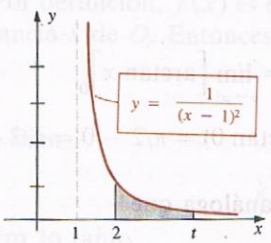
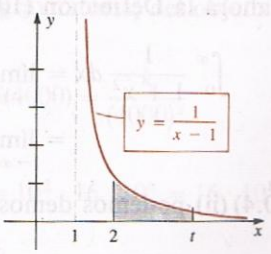


FIGURA 10.8



La gráfica de la Figura 10.8 tiene una propiedad interesante. Si la región bajo la gráfica de $y = 1/(x-1)$ entre 2 y t gira alrededor del eje x, genera un sólido cuyo volumen es

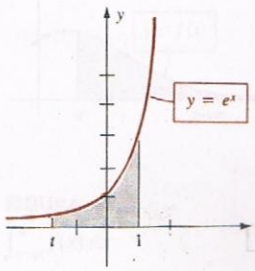
$$\pi \int_2^{t} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx.$$

Se puede considerar a la integral impropia

$$\pi \int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$$

como el volumen del sólido *no acotado* (o *infinito*) que se obtiene al girar alrededor del eje x la región bajo la gráfica de $y = 1/(x-1)$ para $x \geq 2$. Por (a) del Ejemplo 1, el valor de esta integral impropia es $\pi \cdot 1$, es decir π. Esto muestra un hecho curioso: aunque no se puede asignar un número real al área de la región, sí se puede asignar un valor finito al volumen del sólido de revolución generado al girar la región. (En el Ejercicio 35 se describe otro caso parecido.)

FIGURA 10.9



EJEMPLO 2 Asignar un valor al área de la región que se encuentra bajo la gráfica de $y = e^x$, arriba del eje x y a la izquierda de $x = 1$.

Solución En la Figura 10.9 aparece un croquis de la región acotada por las gráficas de $y = e^x$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = t$, para $t < 1$. El área de la región *infinita* a la izquierda de $x = 1$ es

$$\int_{-\infty}^{1} e^x\, dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^1 e^x\, dx = \lim_{t \to -\infty} \Big[e^x\Big]_t^1$$

$$= \lim_{t \to -\infty} (e - e^t) = e - 0 = e \quad \bullet$$

EJEMPLO 3 Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$. Trazar la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ e interpretar la integral como un área.

Solución Usando la Definición (10.5) con $a = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Aplicando ahora la Definición (10.4) (i),

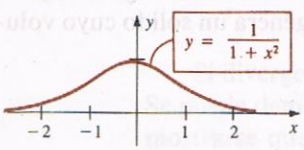
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t \to \infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t \to \infty} \Big[\arctan x\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} (\arctan t - \arctan 0) = \pi/2 - 0 = \pi/2.$$

Usando (10.4) (ii) podemos demostrar en forma análoga que

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

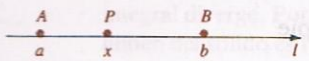
FIGURA 10.10



Por lo tanto, la integral impropia converge y su valor es $(\pi/2) + (\pi/2) = \pi$.

La gráfica de $y = 1/(1+x^2)$ está en la Figura 10.10. La región infinita que se encuentra bajo la gráfica y arriba del eje x tiene un área finita de π unidades cuadradas. •

FIGURA 10.11



Terminamos esta sección con una aplicación de las integrales impropias a la física. Sean a y b las coordenadas de dos puntos A y B sobre una recta coordenada l (véase la Figura 10.11). Si $f(x)$ es la fuerza que actúa sobre una partícula P en un punto de coordenada x, entonces de la Definición (6.16), el trabajo realizado cuando P se mueve de A a B está dado por

$$W = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Análogamente, se puede usar la integral impropia $\int_a^\infty f(x)\,dx$ para definir el trabajo realizado cuando P se mueve indefinidamente a la derecha (en las aplicaciones se dice que *P se va al infinito*). Por ejemplo, si $f(x)$ es la fuerza de atracción entre una partícula fija en un punto A y otra partícula móvil P, y si $c > a$, entonces $\int_c^\infty f(x)\,dx$ representa el trabajo requerido para desplazar P desde el punto con coordenada c hasta el infinito.

EJEMPLO 4 Consultar el Ejercicio 19 de la Sección 6.6 Sea l la recta coordenada con el origen O en el centro de la Tierra, como se ilustra en la Figura 10.12. La fuerza de gravedad ejercida en un punto sobre l a una distancia x de O, está dada por $f(x) = k/x^2$, donde k es una constante. Calcular el trabajo requerido para enviar un objeto con un peso de 100 libras fuerza (lbf), desde la superficie de la Tierra hasta un punto fuera de su campo de atracción gravitatoria, a lo largo de la recta l. Usar 4000 mi (6400 km) como valor del radio de la Tierra.

FIGURA 10.12

Solución Teóricamente la fuerza de gravedad $f(x)$ *nunca* deja de actuar sobre un objeto; pero podemos considerar el envío del cuerpo en cuestión desde la superficie de la Tierra hasta el infinito. De acuerdo con el párrafo anterior a este ejemplo, se desea calcular

$$W = \int_{4000}^\infty f(x)\,dx.$$

Por definición, $f(x)$ es el peso (fuerza gravitatoria) del objeto cuando está a una distancia x de O. Entonces,

$$100 = F(4000) = \frac{k}{(4000)^2}$$

o bien

$$k = 100(4000)^2 = 10^2 \cdot 16 \cdot 10^6 = 16 \cdot 10^8.$$

Por lo tanto,

$$W = \int_{4000}^\infty 16 \cdot 10^8 \frac{1}{x^2}\,dx = 16 \cdot 10^8 \lim_{t\to\infty} \int_{4000}^t \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= 16 \cdot 10^8 \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{4000}^t = 16 \cdot 10^8 \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{t} + \frac{1}{4000}\right]$$

$$= \frac{16 \cdot 10^8}{4000} = 4 \cdot 10^5 \text{ lbf} \cdot \text{mi}$$

En términos de libras fuerza-pie,

$$W = 5280 \cdot 4 \cdot 10^5 \approx (2.1)10^9 \text{ lbf} \cdot \text{pie}$$

ya que 1 mi = 5280 pie. Esto equivale a aproximadamente 290 millones de kilográmetros.

EJERCICIOS 10.3

Ejercicios 1-24: Determine si la integral converge o diverge y, si converge, calcule su valor.

1. $\int_1^\infty \frac{1}{x^{4/3}}\,dx$ **2.** $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$

3. $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/4}}\,dx$ **4.** $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$

5. $\int_{-\infty}^2 \frac{1}{5-2x}\,dx$ **6.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^4+9}\,dx$

7. $\int_0^\infty e^{-2x}\,dx$ **8.** $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$

9. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3}\,dx$ **10.** $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

11. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-8)^{2/3}}\,dx$ **12.** $\int_1^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$

13. $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$ **14.** $\int_{-\infty}^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx$

15. $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx$ **16.** $\int_{-\infty}^\infty \cos^2 x\,dx$

17. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$ **18.** $\int_3^\infty \frac{1}{x^2-1}\,dx$

19. $\int_0^\infty \cos x\,dx$ **20.** $\int_{-\infty}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x\,dx$

21. $\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sech} x\,dx$ **22.** $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$

23. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$ **24.** $\int_4^\infty \frac{x+18}{x^2+x-12}\,dx$

Ejercicios 25-28: Si f y g son funciones continuas tales que $0 \le f(x) \le g(x)$ para todo x en $[a, \infty)$, entonces los siguientes *criterios de convergencia para integrales impropias* son válidos:

(i) Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.

(ii) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge.

Use estos criterios para determinar si las integrales impropias convergen o divergen.

25. $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx$ **26.** $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx$

27. $\int_2^\infty \frac{1}{\ln x}\,dx$ **28.** $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$

Ejercicios 29-32: Asignar cuando sea posible, un valor a (a) el área de la región R y (b) el volumen del sólido generado al girar R alrededor del eje x.

29. $R = \{(x, y): x \ge 1,\ 0 \le y \le 1/x\}$

30. $R = \{(x, y): x \ge 1,\ 0 \le y \le 1/\sqrt{x}\}$

31. $R = \{(x, y): x \ge 4,\ 0 \le y \le x^{-3/2}\}$

32. $R = \{(x, y): x \ge 8,\ 0 \le y \le x^{-2/3}\}$

33. La región infinita que se encuentra a la derech del eje y y entre las gráficas de $y = e^{-x^2}$ $y = 0$ gira alrededor del eje y. Demuestre que s puede asignar un valor real al volumen del sóli do infinito resultante. ¿Cuál es el valor del vo lumen?

34. La gráfica de $y = e^{-x}$ para $x \ge 0$ gira alrededo del eje x. Demuestre que se puede asignar un va lor real al área del sólido infinito resultant ¿Cuál es el área?

35. El sólido de revolución llamado *trompeta de G briel* (el "arcángel Gabriel") se genera al gir la región bajo la gráfica de $y = 1/x$ para $x \ge$ alrededor del eje x (véase la figura).

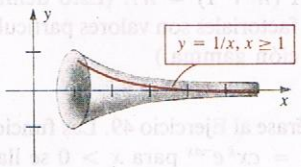
(a) Demuestre que la trompeta de Gabriel ti ne un volumen finito de π unidades cúbica

(b) ¿Se obtiene un volumen finito si la gráfi gira alrededor del eje y?

(c) Compruebe que el área de la superficie la trompeta de Gabriel se halla dada p $\int_1^\infty 2\pi(1/x)\sqrt{x^4+1}\,dx$. Use un criterio comparación (véanse los Ejercicios 25-

con $f(x) = 2\pi/x$ para demostrar que esta integral diverge. Por lo tanto, aunque el volumen del sólido es finito, no se puede asignar un valor real al área de la superficie.

EJERCICIO 35



36. Un cohete espacial lleva una carga de combustible de masa m. Como medida de conservación, el comandante decide quemar el combustible a razón de $R(t) = mke^{-kt}$ g/s, donde k es una constante positiva.

(a) ¿Qué representa la integral impropia $\int_0^\infty R(t)\,dt$?

(b) ¿Cuánto tarda en acabarse el combustible?

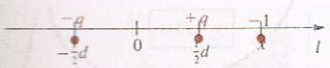
37. La fuerza (en dinas) con la que dos electrones se repelen es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (en cm) que los separa. Suponiendo que un electrón está fijo en el punto A de la Figura 10.11, calcule el trabajo realizado cuando el otro electrón se mueve desde el punto B, que está a 1 cm de A, hasta el infinito, sobre la recta l.

38. Un dipolo eléctrico consta de un par de cargas de signo opuesto separadas una pequeña distancia d. Suponga que se colocan cargas de $+q$ y $-q$ unidades en una recta coordenada l, en $\frac{1}{2}d$ y $-\frac{1}{2}d$, respectivamente (véase la figura). Según la ley de Coulomb, la fuerza que actúa sobre una carga de -1 unidades en $x > \frac{1}{2}d$ está dada por

$$f(x) = \frac{-kq}{(x - \frac{1}{2}d)^2} + \frac{kq}{(x + \frac{1}{2}d)^2}$$

donde k es una constante positiva. Suponiendo que $a > \frac{1}{2}d$, calcule el trabajo realizado al mover la carga unitaria a lo largo de l desde a hasta el infinito.

EJERCICIO 38



39. La confiabilidad $R(t)$ de un producto es la probabilidad de que no necesite ninguna reparación en t años. Para elaborar una garantía el fabricante debe conocer el tiempo medio de servicio de un producto antes de su primera reparación, que está dado por la integral impropia $\int_0^\infty (-t)\,R'(t)\,dt$.

(a) Para muchos productos de alta calidad $R(t)$ tiene la forma e^{-kt}, donde k es una constante positiva. Encuentre una expresión en términos de k para el tiempo medio de servicio antes de la primera reparación.

(b) ¿Se puede fabricar un producto para el cual $R(t) = 1/(t + 1)$?

40. Se deposita una cierta cantidad de dinero en una cuenta que paga un interés de 8% al año, compuesto continuamente (véase el Ejercicio 46 de la Sección 10.2). Dentro de T años se empezará a retirar el dinero a razón de $f(t)$ unidades monetarias al año, y se continuará haciéndolo indefinidamente; $f(t)$ se llama *tasa de flujo de capital*. Para generar un ingreso futuro como éste es necesario depositar una cantidad mínima A, llamada *valor actual del flujo de capital*, dada por la integral impropia $A = \int_T^\infty f(t)e^{-0.08t}\,dt$. Calcule A suponiendo que el ingreso que se desea tener dentro de 20 años es

(a) 12 000 unidades monetarias al año;

(b) $12\,000e^{0.04t}$ unidades monetarias al año.

41. (a) Demuestre la siguiente fórmula integrando por partes:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2a^{3/2}}\int_0^\infty e^{-u^2}\,du.$$

El valor de esta integral es $\sqrt{\pi}/2$ (véase el Ejercicio 26 de la Sección 17.7).

(b) El número de moléculas de un gas contenido en un recipiente que se mueven a una velocidad v cm/s está dado por la *distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann* F:

$$F(v) = cv^2 e^{-mv^2/(2kT)}$$

donde T es la temperatura (en K), m la masa de una molécula; c y k son constantes positivas. La constante c debe elegirse de tal manera que $\int_0^\infty F(v)\,dv = 1$. Use la parte (a) para expresar c en términos de k, T y m.

42. La *transformada de Fourier* es útil para resolver algunas ecuaciones diferenciales. La *transformada cosenoidal de Fourier* de una función f está definida por

$$F_C[f(x)] = \int_0^\infty f(x)\cos sx\,dx$$

para todo número real s para el que converge la integral impropia. Calcule $F_C[e^{-ax}]$ para $a > 0$.

Ejercicios 43-48: En la teoría de las ecuaciones diferenciales, si f es una función, entonces la *transformada de Laplace* L de $f(x)$ está dada por

$$L[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx$$

para todo número real s para el que converge la integral impropia. Calcule $L[f(x)]$ para las expresiones $f(x)$ dadas.

43. 1 **44.** x **45.** $\cos x$

46. $\operatorname{sen} x$ **47.** e^{ax} **48.** $\operatorname{sen} ax$

49. La *función gamma* (o *gama*) Γ está dada por $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\, dx$ para todo número real positivo n.

(a) Calcule $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$ y $\Gamma(3)$.

(b) Demuestre que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. (*Sugerencia:* Integrar por partes.)

(c) Demuestre valiéndose de inducción matemática que si n es un entero positivo entonces $\Gamma(n+1) = n!$. (Esto demuestra que los factoriales son valores particulares de la función gamma.)

Refiérase al Ejercicio 49. Las funciones dadas por $f(x) = cx^k e^{-ax}$ para $x > 0$ se llaman *distribuciones gamma* y desempeñan un papel importante en la teoría de la probabilidad. La constante c debe elegirse de manera que $\int_0^\infty f(x)\, dx = 1$. Exprese c en términos de las constantes positivas k y a, y de la función gamma Γ.

10.4 INTEGRALES CON INTEGRANDOS DISCONTINUOS

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces por el Teorema (5.12) la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ existe. Aun si la función f tiene una discontinuidad infinita en algún número del intervalo puede asignarse a veces un valor a la integral. Por ejemplo, sea f continua y no negativa en el intervalo semiabierto $[a, b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$. Si $a < t < b$, entonces el área $A(t)$ bajo la gráfica de f entre a y t (véase la Figura 10.13) está dada por

$$A(t) = \int_a^t f(x)\, dx$$

Si $\lim_{t\to b^-} A(t)$ existe, entonces el límite puede interpretarse como el área de la región infinita que se encuentra bajo la gráfica de f, arriba del eje x y entre $x = a$ y $x = b$. Este número se denota por $\int_a^b f(x)\, dx$.

Para el caso ilustrado en la Figura 10.14, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, y se define $\int_a^b f(x)\, dx$ como el límite de $\int_t^b f(x)\, dx$ cuando $t \to a^+$.

FIGURA 10.13
$\int_a^t f(x)\, dx$

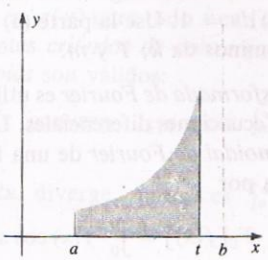
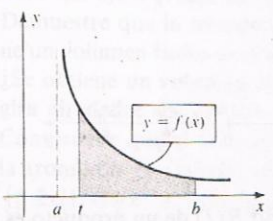


FIGURA 10.14
$\int_t^b f(x)\, dx$



Estos comentarios motivan la siguiente definición.

DEFINICIÓN (10.6)

(i) Si f es continua en $[a, b)$ y discontinua en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

si el límite existe.

(ii) Si f es continua en $(a, b]$ y discontinua en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

si el límite existe.

Como en la sección anterior, las integrales definidas en (10.6) se llaman *integrales impropias* y se dice que *convergen* si el límite existe. Los límites se llaman *valores* de las integrales impropias. Si los límites no existen se dice que las integrales impropias *divergen*.

Otra clase de integrales impropias se define como sigue.

DEFINICIÓN (10.7)

Si f tiene una discontinuidad en un número c del intervalo abierto (a, b) pero es continua en todos los demás puntos de $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

siempre y cuando converjan *las dos* integrales impropias que están al lado derecho de la igualdad. Si ambas convergen, el valor de la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ es la suma de los dos valores.

FIGURA 10.15

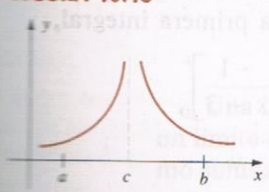
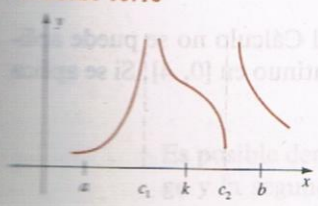


FIGURA 10.16



En la Figura 10.15 aparece la gráfica de una función que satisface las condiciones de la Definición (10.7).

Cuando f tiene un número finito de discontinuidades en (a, b) se puede usar una definición semejante a (10.7). Por ejemplo, sea f una función que tiene discontinuidades en c_1 y c_2, donde $c_1 < c_2$, pero es continua en el resto de $[a, b]$. La Figura 10.16 ilustra este caso. En esta situación se escoge un número k entre c_1 y c_2 y se expresa $\int_a^b f(x)\,dx$ como la suma de cuatro integrales impropias sobre los intervalos $[a, c_1]$, $[c_1, k]$, $[k, c_2]$ y $[c_2, b]$, respectivamente. Por definición, $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si y sólo si convergen las cuatro integrales impropias de la suma. Puede demostrarse que esta definición es independiente del número k.

Finalmente, si f es continua en (a, b) pero tiene discontinuidades infinitas en a y b, $\int_a^b f(x)\,dx$ se define mediante (10.7).

EJEMPLO 1 Evaluar $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$.

Solución Como el integrando tiene una discontinuidad infinita en $x = 3$, aplicamos la Definición (10.6) (i) como sigue:

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx &= \lim_{t\to 3^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx \\ &= \lim_{t\to 3^-} \left[-2\sqrt{3-x}\right]_0^t \\ &= \lim_{t\to 3^-} \left[-2\sqrt{3-t} + 2\sqrt{3}\right] \\ &= 0 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

•

EJEMPLO 2 Determinar si la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ converge o diverge.

Solución El integrando no está definido en $x = 0$. Aplicando (10.6) (ii),

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \left[\ln x\right]_t^1 \\ &= \lim_{t\to 0^+} \left[0 - \ln t\right] = \infty.\end{aligned}$$

Como el límite no existe la integral impropia diverge. •

EJEMPLO 3 Determinar si la integral impropia $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$ converge o diverge.

Solución El integrando no está definido en $x = 3$. Como este número se encuentra en el intervalo (0, 4), usamos la Definición (10.7) con $c = 3$:

$$\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \int_0^3 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx + \int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$$

Para que converja la integral del lado izquierdo se necesita que *las dos* integrales del lado derecho converjan. Aplicando la Definición (10.6) (i) a la primera integral,

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx &= \lim_{t\to 3^-} \int_0^t \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \lim_{t\to 3^-} \left[\frac{-1}{x-3}\right]_0^t \\ &= \lim_{t\to 3^-} \left(\frac{-1}{t-3} - \frac{1}{3}\right) = \infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral impropia diverge. •

Es importante señalar que el Teorema Fundamental del Cálculo no se puede aplicar a la integral del Ejemplo 3 ya que el integrando no es continuo en [0, 4]. Si se aplica (incorrectamente) el Teorema Fundamental, se obtiene

$$\left[\frac{-1}{x-3}\right]_0^4 = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Es claro que este resultado es incorrecto ya que el integrando nunca es negativo.

EJEMPLO 4 Evaluar $\int_{-2}^{7} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\,dx$.

Solución El integrando no está definido en $x = -1$, que es un número del intervalo $(-2, 7)$. Entonces aplicamos la Definición (10.7) con $c = -1$ y obtenemos

$$\int_{-2}^{7} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\,dx = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\,dx + \int_{-1}^{7} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\,dx$$

Ahora se estudia cada una de las integrales del lado derecho de la ecuación. Usando (10.6) (i) con $b = -1$ obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\,dx &= \lim_{t\to -1^-} \int_{-2}^{t} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\,dx \\ &= \lim_{t\to -1^-} \left[3(x+1)^{1/3}\right]_{-2}^{t} \\ &= \lim_{t\to -1^-} \left[3(t+1)^{1/3} - 3(-1)^{1/3}\right] \\ &= 0 + 3 = 3.\end{aligned}$$

Análogamente, usando (10.6) (ii) con $a = -1$,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{7} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\,dx &= \lim_{t\to -1^+} \int_{t}^{7} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\,dx \\ &= \lim_{t\to -1^+} \left[3(x+1)^{1/3}\right]_{t}^{7} \\ &= \lim_{t\to -1^+} \left[3(8)^{1/3} - 3(t+1)^{1/3}\right] \\ &= 6 - 0 = 6.\end{aligned}$$

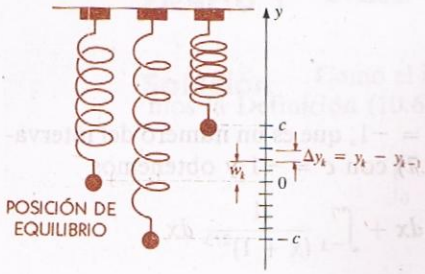
En razón de que ambas integrales convergen, la integral dada converge y su valor es $3 + 6 = 9$. •

Una integral impropia puede tener una discontinuidad en el integrando y también un límite de integración infinito. Estas integrales se pueden estudiar expresándolas como sumas de integrales impropias, cada una de las cuales tiene *una* de las formas definidas anteriormente. Por ejemplo, como el integrando de $\int_0^\infty (1/\sqrt{x})\,dx$ es discontinuo en $x = 0$, eligiendo algún número mayor que 0, por ejemplo 1, puede escribirse

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Es posible demostrar que la primera integral del lado derecho de esta ecuación converge y la segunda diverge. Por tanto (por definición) la integral dada es divergente.

FIGURA 10.17



Las integrales impropias del tipo considerado en esta sección tienen aplicaciones en física. La Figura 10.17 es un esquema de un resorte al que está fijado un cuerpo que oscila entre dos puntos con coordenadas $-c$ y c sobre una recta coordenada y (se indica el eje y a la derecha para mayor claridad). El **periodo** T es el tiempo que tarda en completarse una oscilación, es decir, el doble del que tarda el cuerpo en recorrer el intervalo $[-c, c]$. El siguiente ejemplo muestra cómo puede utilizarse una integral impropia para obtener una fórmula para T.

EJEMPLO 5 Sea $v(y)$ la velocidad del cuerpo oscilante de la Figura 10.17 cuando se encuentra en el punto de ordenada $[-c, c]$. Demostrar que el periodo T está dado por

$$T = 2\int_{-c}^{c} \frac{1}{v(y)}\, dy$$

Solución Subdividimos el intervalo $[-c, c]$ en la forma acostumbrada. Sea $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ la distancia recorrida por el cuerpo durante el intervalo de tiempo Δt_k. Sea w_k cualquier número del subintervalo $[y_{k-1}, y_k]$. Entonces $v(w_k)$ es la velocidad del oscilador cuando se encuentra en el punto con coordenada w_k. Si la norma de la partición es pequeña y suponemos que v es una función continua, entonces la distancia Δy_k es aproximadamente igual al producto $v(w_k)\,\Delta t_k$; es decir,

$$\Delta y_k \approx v(w_k)\,\Delta t_k.$$

Entonces el tiempo requerido por el cuerpo para recorrer la distancia Δy_k se puede estimar por

$$\Delta t_k \approx \frac{1}{v(w_k)}\,\Delta y_k$$

y por tanto,

$$T = 2\sum_k \Delta t_k \approx 2\sum_k \frac{1}{v(w_k)}\,\Delta y_k.$$

Considerando el límite de las sumas del lado derecho y la definición de integral definida,

$$T = 2\int_{-c}^{c} \frac{1}{v(y)}\, dy.$$

Nótese que $v(c) = 0$ y $v(-c) = 0$, por lo que la integral es impropia. •

EJERCICIOS 10.4

Ejercicios 1-30: Determine si la integral converge o diverge y, si converge, halle su valor.

1. $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$

2. $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

3. $\displaystyle\int_{-3}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$

4. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+2)^{5/4}}\, dx$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec^2 x\, dx$

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

7. $\int_0^4 \frac{1}{(4-x)^{3/2}}\,dx$

8. $\int_0^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

9. $\int_0^4 \frac{1}{(4-x)^{2/3}}\,dx$

10. $\int_1^2 \frac{x}{x^2-1}\,dx$

11. $\int_{-2}^2 \frac{1}{(x+1)^3}\,dx$

12. $\int_{-1}^1 x^{-4/3}\,dx$

13. $\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

14. $\int_{-2}^0 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

15. $\int_{-1}^2 \frac{1}{x}\,dx$

16. $\int_0^4 \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$

17. $\int_0^1 x \ln x\,dx$

18. $\int_0^{\pi/2} \tan^2 x\,dx$

19. $\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$

20. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-\cos x}\,dx$

21. $\int_2^4 \frac{x-2}{x^2-5x+4}\,dx$

22. $\int_{1/e}^e \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

23. $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$

24. $\int_0^{\pi} \sec x\,dx$

25. $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx$

26. $\int_0^9 \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$

27. $\int_0^4 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx$

28. $\int_{-1}^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx$

29. $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x-4)^2}\,dx$

30. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x+2}\,dx$

Ejercicios 31-34: Sean f y g funciones continuas en $(a, b]$, discontinuas en $x = a$ y tales que $0 \le f(x) \le g(x)$ para todo x en $(a, b]$. Se pueden demostrar los siguientes *criterios de convergencia por comparación:*

(i) Si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

(ii) Si $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge.

Pueden enunciarse criterios semejantes para el caso en que las funciones son continuas en $[a, b)$ pero discontinuas en $x = b$. Use estos criterios para determinar si las integrales impropias convergen o divergen.

31. $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx$

$\int_0^{\pi/4} \frac{\sec x}{x^3}\,dx$

33. $\int_0^2 \frac{\cosh x}{(x-2)^2}\,dx$

$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x^{2/3}}\,dx$

Ejercicios 35-36: Encuentre todos los valores de n para los que la integral converge.

35. $\int_0^1 x^n\,dx$

36. $\int_0^1 x^n \ln x\,dx$

Ejercicios 37-40: Asigne un valor, cuando sea posible, (a) al área de la región R, y (b) al volumen del sólido que se obtiene al girar R alrededor del eje x.

37. $R = \{(x, y)\colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1/\sqrt{x}\}$

38. $R = \{(x, y)\colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1/\sqrt[3]{x}\}$

39. $R = \{(x, y)\colon -4 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 1/(x+4)\}$

40. $R = \{(x, y)\colon 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1/(x-1)\}$

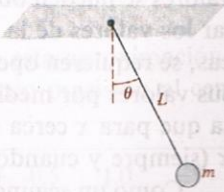
41. Consulte el Ejemplo 5. Si el cuerpo en la Figura 10.17 tiene masa m, el resorte obedece la ley de Hooke (con constante de fuerza $k > 0$), y no hay fuerzas de fricción, la velocidad v del cuerpo satisface la ecuación diferencial

$$mv\frac{dv}{dy} + ky = 0.$$

(a) Ejecute la demostración por separación de variables (véase la Sección 7.6) de que $v^2 = (k/m)(c^2 - y^2)$. (*Sugerencia:* Recuérdese el hecho de que $v(c) = v(-c) = 0$.)

(b) Calcule el periodo T de la oscilación.

EJERCICIO 42



42. El péndulo simple consta de una bola de masa m fija a una cuerda de longitud L (véase la figura). Si la cuerda no tiene masa y no hay fuerzas de fricción, entonces la velocidad angular $\omega = d\theta/dt$ satisface la ecuación diferencial

$$\omega\frac{d\omega}{d\theta} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

(a) Suponiendo que $\omega = 0$ en $\theta = \pm\theta_0$ demuestre por separación de variables que

$$\omega^2 = (2g/L)(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

(b) El periodo T del péndulo es el doble del tiempo que se necesita para que θ cambie de

$-\theta_0$ a θ_0. Demuestre que T está dado por la integral impropia

$$T = 2\sqrt{2L/g}\int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\,d\theta.$$

43. Cuando una dosis de y_0 mg de cierto medicamento se inyecta en la sangre, el tiempo medio T que una molécula se mantiene en la corriente sanguínea está dado por $T = (1/y_0)\int_0^{y_0} t\,dy$, donde t es el tiempo en el que hay exactamente y mg.

(a) Explique por qué la integral para T es impropia si $y = y_0e^{-kt}$ para alguna constante positiva k.

(b) Demuestre que $T = \tau/\ln 2$, donde τ es la semivida ("o vida media") del medicamento en la corriente sanguínea.

44. En la piscicultura, el conjunto de peces que resulta de una reproducción anual se llama *cohorte*. El número de peces N que siguen vivos después de t años está dado normalmente por una función exponencial. Para el bacalao del Mar del Norte, $N = N_0e^{-0.2t}$ cuando el tamaño de una cohorte es N_0. La semivida T (en años) de un bacalao en una cohorte está dado por la fórmula $T = (1/N_0)\int_0^{N_0} t\,dN$, donde t es el tiempo en el que quedan exactamente N peces vivos.

(a) Calcule la semivida (o periodo medial) T del bacalao del Mar del Norte.

(b) ¿Es posible que para alguna especie $N = N_0/(1 + kN_0t)$, donde k es una constante positiva? Si es así, calcule T para esa especie.

10.5 FÓRMULA DE TAYLOR

Recordemos que f es una función polinomial de grado n si

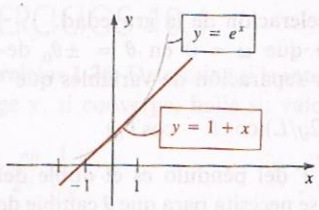
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

donde cada a_k es un número real, $a_n \neq 0$, y los exponentes son enteros no negativos. Las funciones polinomiales son las más fáciles de usar para hacer cálculos ya que sus valores se pueden obtener con sumas y multiplicaciones de números reales. Para calcular los valores de la función logarítmica, la exponencial y las funciones trigonométricas, se requieren operaciones más complicadas. Sin embargo, a veces pueden *estimarse* sus valores por medio de polinomios. Por ejemplo, como $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x = 1$, resulta que para x cerca de 0, $\operatorname{sen} x \approx x$; es decir, $\operatorname{sen} x$ *puede estimarse por el polinomio* x (siempre y cuando x esté cerca de 0).

Como un segundo ejemplo, sea f la función exponencial natural, es decir, $f(x) = e^x$ para todo x. Supóngase que deseamos calcular valores de f para x cerca de 0. Como $f'(x) = e^x$, la pendiente de la recta tangente en el punto (0, 1) de la gráfica de f es $f'(0) = e^0 = 1$. Por lo tanto la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = 1(x - 0) \quad \text{o bien} \quad y = 1 + x.$$

FIGURA 10.18



En la Figura 10.18 se puede ver que si x está cerca de 0, entonces el punto $(x, 1 + x)$ sobre la recta tangente se halla cerca del punto (x, e^x) sobre la gráfica de f y, por lo tanto, puede escribirse $e^x \approx 1 + x$. Esta fórmula permite estimar e^x por un polinomio de grado 1. Como esta aproximación es muy deficiente, a menos que x esté muy cerca de 0, ha de buscarse un polinomio de segundo grado

$$g(x) = a + bx + cx^2$$

tal que $e^x \approx g(x)$. La primera y la segunda derivadas de $g(x)$ son

$$g'(x) = b + 2cx \quad \text{y} \quad g''(x) = 2c.$$

Si queremos que la gráfica de g (una parábola) tenga (i) la misma intersección con el eje y, (ii) la misma recta tangente, y (iii) la misma concavidad que la gráfica de f en el punto (0, 1), entonces

$$\text{(i)}\ g(0) = f(0), \qquad \text{(ii)}\ g'(0) = f'(0), \qquad \text{(iii)}\ g''(0) = f''(0).$$

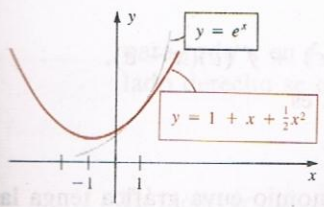
Como todas las derivadas de e^x son iguales a e^x, y $e^0 = 1$, estas tres ecuaciones implican que

$$a = 1, \quad b = 1, \quad \text{y} \quad 2c = 1$$

y por lo tanto

$$e^x \approx g(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2.$$

FIGURA 10.19



Las gráficas de f y g están en la Figura 10.19. Comparando tales gráficas con la Figura 10.18 vemos que si x está cerca de 0, entonces e^x está más cerca de $1 + x + \frac{1}{2}x^2$ que de $1 + x$.

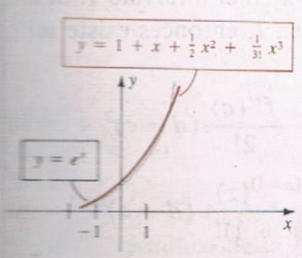
Si se quiere estimar $f(x) = e^x$ por medio de un polinomio de *tercer* grado $h(x)$, es natural esperar que $h(0)$, $h'(0)$, $h''(0)$ y $h'''(0)$ sean iguales a $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$, respectivamente. En este caso las gráficas de f y h tienen la misma recta tangente y la misma concavidad en (0, 1) y además, las *tasas de variación de la relación de concavidad* con respecto a x (es decir, las terceras derivadas) son iguales. Usando el mismo procedimiento que antes obtenemos

$$e^x \approx h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3.$$

Para tener una idea del grado de precisión de esta aproximación, en la siguiente tabla se muestran algunos valores de e^x y $h(x)$, con precisión al centésimo.

x	−1.5	−1.0	−0.5	0	0.5	1.0	1.5
e^x	0.22	0.37	0.61	1	1.65	2.72	4.48
$h(x)$	0.06	0.33	0.60	1	1.65	2.67	4.19

FIGURA 10.20



Obsérvese que el error en la aproximación crece a medida que $|x|$ lo hace. Las gráficas de f y h están en la Figura 10.20. Nótese que la aproximación mejora cerca de $x = 0$.

Continuando de esta manera puede obtenerse un polinomio de grado n cuyas primeras n derivadas coinciden con las de f en $x = 0$, con lo que se tiene la estimación

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Más adelante en esta sección se podrá ver que la fórmula anterior tan sencilla puede servir para estimar e^x con tanta precisión como se desee.

Ahora se plantean dos preguntas:

1. ¿Existe una fórmula *general* que pueda usarse para estimar cualesquiera funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, trigonométricas inversas y otras funciones trascendentes o algebraicas, por medio de funciones polinomiales?

2. ¿Se pueden aplicar estas nociones al caso de que x esté cerca de un número arbitrario $c \neq 0$?

Ambas preguntas tienen respuesta afirmativa si la función tiene un número suficientemente grande de derivadas. Para ver esto, sea f una función con muchas derivadas y sea c un número en el dominio de f. Procederemos como en el caso especial de e^x, pero con c en vez de 0. Primero notamos que el único polinomio de grado 0 que coincide con f en c es la constante $f(c)$. Para estimar $f(x)$ cerca de c con un polinomio de grado 1, se toma el polinomio cuya gráfica es la recta tangente a la gráfica de f en $(c, f(c))$. La ecuación de esta recta tangente es

$$y - f(c) = f'(c)(x - c) \quad \text{o bien} \quad y = f(c) + f'(c)(x - c).$$

Por lo tanto, el polinomio de primer grado que se desea es

$$f(c) + f'(c)(x - c).$$

Debe obtenerse una mejor aproximación usando un polinomio cuya gráfica tenga la misma *concavidad* y la misma recta tangente que f en $(c, f(c))$. Se puede verificar que el polinomio de segundo grado

$$f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2}(x - c)^2$$

satisface estas condiciones. Considerando el polinomio de tercer grado

$$g(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x - c)^3$$

es posible verificar que además de $g'(c) = f'(c)$ y $g''(c) = f''(c)$, ahora también $g'''(c) = f'''(c)$. Si se prosigue de esta manera, aparentemente se deben obtener mejores aproximaciones a $f(x)$ para x cerca de c. Así se generan los primeros $n + 1$ términos del segundo miembro de la Fórmula (10.9). El último término de dicha fórmula se obtiene del siguiente resultado.

TEOREMA (10.8)

Sea n un entero positivo y f una función tal que la derivada $f^{(n+1)}(x)$ existe para todo x en el intervalo I. Si c y d son dos números distintos en I, entonces existe un número z entre c y d tal que

$$f(d) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(d - c) + \frac{f''(c)}{2!}(d - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(d - c)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!}(d - c)^{n+1}$$

Demostración Para cada entero positivo n definimos R_n como sigue:

$$R_n = f(d) - \left[f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(d-c) + \frac{f''(c)}{2!}(d-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(d-c)^n \right].$$

Esta ecuación puede escribirse como

$$f(d) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(d-c) + \frac{f''(c)}{2!}(d-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(d-c)^n + R_n.$$

Basta demostrar que para algún z apropiado, R_n es igual al último término de la fórmula en el enunciado del teorema.

Sea g la función definida por

$$g(x) = f(d) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(d-x) - \frac{f''(x)}{2!}(d-x)^2 - \cdots$$
$$- \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(d-x)^n - R_n \frac{(d-x)^{n+1}}{(d-c)^{n+1}}$$

para todo x en I. Al derivar en ambos miembros de la ecuación, varios términos del lado derecho se cancelan. Se deja como ejercicio demostrar que

$$g'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(d-x)^n + R_n(n+1)\frac{(d-x)^n}{(d-c)^{n+1}}.$$

Es fácil ver que $g(d) = 0$. Además, sustituyendo x por c en la expresión para $g(x)$ y usando la segunda ecuación de la demostración resulta $g(c) = 0$. Por el Teorema de Rolle, existe un número z entre c y d tal que $g'(z) = 0$. Evaluando $g'(x)$ en z y despejando R_n, se obtiene

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(d-c)^{n+1}$$

que es lo que se quería demostrar.

Sustituyendo d por x en el Teorema (10.8) se obtiene el siguiente resultado que lleva el nombre del matemático inglés Brook Taylor (1685-1731).

FÓRMULA DE TAYLOR CON RESIDUO (10.9)

Sea f una función con $n + 1$ derivadas en un intervalo que contiene a c. Si x es un número del intervalo, entonces existe un número z entre c y x tal que

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

En (i) de la siguiente definición se denota por $P_n(x)$ la suma de los primeros $n + 1$ términos de la Fórmula de Taylor y se le da un nombre especial.

DEFINICIÓN (10.10)

(i) El **Polinomio de Taylor** $P_n(x)$ **de grado** n de f en c es

$$P_n(x) = f(x) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

(ii) El **Residuo de Taylor** $R_n(x)$ **de** f en c es

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

para un número z entre c y x dado por (10.9).

Con estas definiciones puede enunciarse el siguiente resultado.

TEOREMA (10.11)

Sea f una función con $n+1$ derivadas en un intervalo que contiene a c. Si x es un número del intervalo, entonces

(i) $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.
(ii) $f(x) \approx P_n(x)$ si $x \approx c$.

El error en la aproximación es $|R_n(x)|$.

Demostración La Parte (i) no es más que un nuevo enunciado de la Fórmula (10.9 usando la notación (10.10). La Parte (ii) se deduce a partir de que $|f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)|$. •

En los dos ejemplos que siguen se utilizan los polinomios de Taylor para estima valores funcionales. Para analizar la precisión de las estimaciones es necesario defini lo que significa que una estimación tenga una precisión de 1 cifra decimal, de 2 decima les, etcétera. Sea E el error en una estimación. Convenimos en que la estimación tien una precisión de k decimales si $|E| < 0.5 \times 10^{-k}$. Por ejemplo, se tiene precisión d

1 decimal si $|E| < 0.5 \times 10^{-1} = 0.05$
2 decimales si $|E| < 0.5 \times 10^{-2} = 0.005$
3 decimales si $|E| < 0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$.

Si se desea una precisión de k cifras decimales al estimar una suma, se aproxima cada término de la misma con una precisión de $k+1$ decimales, y se redondea el resultado final a k cifras. En algunos casos esto no da el grado de aproximación deseado; sin embargo, es costumbre proceder de esta manera cuando no se requiere mucho rigor. En libros de *análisis numérico* se pueden encontrar métodos más precisos.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = \ln x$.

(a) Encontrar la Fórmula de Taylor con Residuo para $n = 3$ y $c = 1$.

(b) Estimar $\ln(1.1)$ usando la parte (a) y evaluar la precisión de esta aproximación.

Solución

(a) Para $n = 3$ en la Fórmula de Taylor (10.9) se necesitan las primeras cuatro derivadas de f. Es conveniente hacer una lista de las derivadas como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x & f(1) &= 0 \\ f'(x) &= x^{-1} & f'(1) &= 1 \\ f''(x) &= -x^{-2} & f''(1) &= -1 \\ f'''(x) &= 2x^{-3} & f'''(1) &= 2 \\ f^{(4)}(x) &= -6x^{-4} & f^{(4)}(z) &= -6z^{-4} \end{aligned}$$

Por (10.9),

$$\ln x = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{6z^{-4}}{4!}(x-1)^4$$

para algún z entre 1 y x. Simplificando,

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4z^4}(x-1)^4$$

(b) Sustituyendo x por 1.1 en la fórmula de la Parte (a),

$$\ln(1.1) = 0.1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \frac{1}{3}(0.1)^3 - \frac{1}{4z^4}(0.1)^4$$

para un z tal que $1 < z < 1.1$. Sumando los tres primeros términos obtenemos $\ln(1.1) \approx 0.0953$. Si $z > 1$, entonces $1/z < 1$ y $1/z^4 < 1$. Por lo tanto,

$$|R_3(1.1)| = \left|\frac{(0.1)^4}{4z^4}\right| < \left|\frac{0.0001}{4}\right| = 0.000025.$$

A causa de que $0.000025 < 0.00005$, del Teorema (10.11) se deduce que la estimación $\ln(1.1) \approx 0.0953$ tiene una precisión de 4 decimales.

Para estimar el valor de una función $f(x)$ en un x es conveniente elegir el número c en (10.9) de manera que el residuo $R_n(x)$ sea pequeño (cercano a 0) para n relativamente pequeño (por ejemplo, $n = 3$ o $n = 4$). Esto se cumple cuando se toma c cerca de x. Además debe elegirse c de manera que las primeras $n + 1$ derivadas de f en c sean fáciles de calcular. Lo anterior se hizo en el Ejemplo 1, en donde se escogió $c = 1$ para estimar $\ln x$ en $x = 1.1$. El siguiente ejemplo muestra otra elección adecuada de c.

EJEMPLO 2 Estimar $\cos 61°$ con un Polinomio de Taylor y calcular la precisión de la aproximación.

Solución Deseamos estimar $f(x) = \cos x$ para $x = 61°$. Obsérvese primero que $61°$ está cerca de $60°$ que equivale a $\pi/3$ radianes, y que es fácil calcular los valores de las funciones trigonométricas en $\pi/3$. Esto sugiere elegir $c = \pi/3$ en (10.9). La elección de n dependerá del grado de precisión que se desee. Tomemos $n = 2$. Para este caso se requieren las tres primeras derivadas de f, por lo que se forma la siguiente tabla:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & f(\pi/3) &= 1/2 \\ f'(x) &= -\operatorname{sen} x & f'(\pi/3) &= -\sqrt{3}/2 \\ f''(x) &= -\cos x & f''(\pi/3) &= -1/2 \\ f'''(x) &= \operatorname{sen} x & f'''(z) &= \operatorname{sen} z \end{aligned}$$

De la Definición (10.10) (i), el Polinomio de Taylor de segundo grado de f en $\pi/3$ es

$$P_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}/2}{1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1/2}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2.$$

Antes de sustituir x debemos convertir 61° a radianes. Escribiendo

$$61° = 60° + 1° = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}$$

y sustituyendo en $P_2(x)$ obtenemos

$$P_2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \approx 0.48481.$$

Por el Teorema (10.11),

$$\cos 61° \approx 0.48481.$$

Para evaluar la precisión de la aproximación consideramos

$$|R_2(x)| = \left|\frac{\operatorname{sen} z}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right|.$$

Sustituyendo $x = (\pi/3) + (\pi/180)$ y usando el hecho de que $|\operatorname{sen} z| \leq 1$,

$$\left|R_2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right)\right| = \left|\frac{\operatorname{sen} z}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3\right| \leq \left|\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3\right| \leq 0.000001.$$

Del Teorema (10.11) deducimos que la aproximación $\cos 61° \approx 0.48481$ tiene una precisión de cinco cifras decimales. Para obtener mayor precisión es necesario encontrar un número n para el cual el valor máximo de $|R_n[(\pi/3) + (\pi/180)]|$ sea menor que o igual al grado de precisión deseado.

Tomando $c = 0$ en la Fórmula (10.9) se obtiene la siguiente fórmula, que lleva el nombre del matemático escocés Colin Maclaurin (1698-1746).

FÓRMULA DE MACLAURIN (10.12)

Sea f una función con $n + 1$ derivadas en un intervalo que contiene a 0. Si x es un número del intervalo, entonces existe un número z entre 0 y x tal que

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{x+1}.$$

EJEMPLO 3

(a) Encontrar la Fórmula de Maclaurin para $f(x) = e^x$ y un entero positivo n arbitrario.

(b) Usar la parte (a) con $n = 9$ para estimar e y calcular el error en la estimación.

Solución

(a) Para todo entero positivo k se tiene que $f^{(k)}(x) = e^x$, y por lo tanto $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$. Sustituyendo en (10.12),

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^z}{(n+1)!}x^{n+1}$$

para un z entre 0 y x.

(b) Usando la fórmula de la parte (a) con $n = 9$ y $x = 1$ obtenemos

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.71828153.$$

Para calcular el error consideramos

$$R_9(x) = \frac{e^z}{10!}x^{10}.$$

Si $x = 1$ entonces $0 < z < 1$. Usando los resultados del Capítulo 7 acerca de e^x, vemos que $e^z < e^1 < 3$ y

$$|R_9(1)| = \left|\frac{e^z}{10!}(1)\right| < \frac{3}{10!} < 0.000001.$$

Por lo tanto, la aproximación $e \approx 2.71828$ tiene una precisión de cinco decimales. •

La fórmula que se obtuvo en el Ejemplo 3 es útil para estimar los valores de la función exponencial natural. En el siguiente capítulo se estudia otra aplicación importante de esta fórmula en la representación de funciones por series infinitas.

EJEMPLO 4 Encontrar la Fórmula de Maclaurin para $f(x) = \operatorname{sen} x$ con $n = 8$ y evaluar el error si se usa la fórmula para estimar sen (0.1).

Solución Necesitamos las primeras nueve derivadas de $f(x)$. Comenzamos como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \end{aligned}$$

Puesto que $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$, las siguientes derivadas siguen el mismo patrón, y en particular

$$f^{(9)}(x) = \cos x \qquad f^{(9)}(z) = \cos z.$$

Sustituyendo en (10.12) y notando que tanto el término constante como los coeficientes de x^2, x^4, x^6 y x^8 son 0, obtenemos

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{1!}x + \frac{(-1)}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{(-1)}{7!}x^7 + \frac{\cos z}{9!}x^9$$

que se puede escribir

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{\cos z}{9!}x^9.$$

Si usamos esta fórmula para aproximar sen (0.1) entonces el error será menor que $|R_8(0.1)|$. Como $|\cos z| \leq 1$,

$$|R_8(0.1)| = \left|\frac{\cos z}{9!}(0.1)^9\right| \leq \frac{(0.1)^9}{9!} < 2.7 \times 10^{-15} < 0.5 \times 10^{-14}.$$

Por lo tanto la estimación tiene una precisión de 14 decimales.

EJERCICIOS 10.5

Ejercicios 1-12: Encuentre la Fórmula de Taylor con Residuo para los valores dados de c y n.

1. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ c = \pi/2,\ n = 3$
2. $f(x) = \cos x,\ c = \pi/4,\ n = 3$
3. $f(x) = \sqrt{x},\ c = 4,\ n = 3$
4. $f(x) = e^{-x},\ c = 1,\ n = 3$
5. $f(x) = \tan x,\ c = \pi/4,\ n = 4$
6. $f(x) = 1/(x-1)^2,\ c = 2,\ n = 5$
7. $f(x) = 1/x,\ c = -2,\ n = 5$
8. $f(x) = \sqrt[3]{x},\ c = -8,\ n = 3$
9. $f(x) = \tan^{-1} x,\ c = 1,\ n = 2$
10. $f(x) = \ln \operatorname{sen} x,\ c = \pi/6,\ n = 3$
11. $f(x) = xe^x,\ c = -1,\ n = 4$
12. $f(x) = \log x,\ c = 10,\ n = 2$

Ejercicios 13-24: Halle la Fórmula de Maclaurin para los valores de n dados.

13. $f(x) = \ln(x+1),\ n = 4$
14. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ n = 7$
15. $f(x) = \cos x,\ n = 8$
16. $f(x) = \tan^{-1} x,\ n = 3$
17. $f(x) = e^{2x},\ n = 5$
18. $f(x) = \sec x,\ n = 3$
19. $f(x) = 1/(x-1)^2,\ n = 5$
20. $f(x) = \sqrt{4-x},\ n = 3$
21. $f(x) = \operatorname{arcsen} x,\ n = 2$
22. $f(x) = e^{-x^2},\ n = 3$
23. $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 7,\ n = 4$ y $n = 5$
24. $f(x) = \cosh x,\ n = 4$ y $n = 5$

Ejercicios 25-28: Usando el ejercicio indicado y el he cho de que $\pi/180 \approx 0.0175$, estime con una precisión de cuatro decimales el número que se da. Demuestr que la respuesta es correcta probando que $|R_n(x)| <$ 0.5×10^{-4}.

25. sen 89° (Ejercicio 1)
26. cos 47° (Ejercicio 2
27. $\sqrt{4.03}$ (Ejercicio 3)
28. $e^{-1.02}$ (Ejercicio 4

Ejercicios 29-34: Estime el número dado usando ejercicio que se indica y calcule el error de la estim ción usando $R_n(x)$.

29. $-1/2.2$ (Ejercicio 7)
30. $\sqrt[3]{-8.5}$ (Ejercicio 8)
31. ln (1.25) (Ejercicio 13)
32. sen 0.1 (Ejercicio 14)

33. $\cos 30°$ (Ejercicio 12)

34. $\log 10.01$ (Ejercicio 15)

Ejercicios 35-40: Use la Fórmula de Maclaurin para obtener la fórmula de aproximación dada y calcule la precisión de la estimación para $|x| \leq 0.1$.

35. $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$

36. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{3}x$

37. $e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

38. $\operatorname{sen} x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$

39. $\ln(1+x) \approx x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

40. $\cosh x \approx 1 + \dfrac{x^2}{2}$

41. Verifique la fórmula para $g'(x)$ en la demostración del Teorema (10.8).

42. Sea $f(x)$ un polinomio de grado n y a un número real. Demuestre que $f(x) = P_n(x)$ donde $P_n(x)$ está dado por la Definición (10.10) (i).

10.6 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Formas indeterminadas.
2. Fórmula de Cauchy.
3. Regla de L'Hôpital.
4. Integrales impropias.
5. Fórmula de Taylor.
6. Fórmula de Maclaurin.

EJERCICIOS 10.6

Ejercicios 1-16: Encuentre el límite si existe.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2-x)}{1+e^{2x}}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x - \tan 2x}{x^2}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+3}{\ln(x+1)}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x}{\operatorname{sen}^{-1} x}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}{x^3}$

6. $\displaystyle\lim_{x\to (\pi/2)^-} \frac{\tan x}{\sec x}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^e}{e^x}$

8. $\displaystyle\lim_{x\to (\pi/2)^-} \cos x \ln \cos x$

9. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (1 - 2e^{1/x})x$

10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \tan^{-1} x \csc x$

11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+8x^2)^{1/x^2}$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 1} (\ln x)^{x-1}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (e^x+1)^{1/x}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right)$

15. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3^x+2x}{x^3+1}$

Ejercicios 17-28: Determine si la integral converge o diverge y, si es convergente, calcule su valor.

17. $\displaystyle\int_4^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

18. $\displaystyle\int_4^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

19. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x+2}\,dx$

20. $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen} x\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-8}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

22. $\displaystyle\int_{-4}^0 \frac{1}{x+4}\,dx$

23. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$

24. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

25. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

26. $\displaystyle\int^{[} x e^x\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \csc x\,dx$

29. Lleve a cabo la determinación de $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ para $f(x) = \int_1^x (\operatorname{sen} t)^{2/3}\,dt$ y $g(x) = x^2$.

30. La *función de error de Gauss* expresada por $\operatorname{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi})\int_0^x e^{-u^2}$ resulta de utilidad en la

teoría de la probabilidad Tiene la propiedad especial de que $\lim_{x\to\infty} \operatorname{erf}(x) = 1$. Ejecute el cálculo de la expresión $\lim_{x\to\infty} e^{(x^2)}\,[1 - \operatorname{erf}(x)]$.

31. Obtenga la Fórmula de Taylor con residuo:

(a) $f(x) = \ln \cos x,\ c = \pi/6,\ n = 3$

(b) $f(x) = \sqrt{x-1},\ c = 2,\ n = 4$

32. Obtenga la Fórmula de Maclaurin:

(a) $f(x) = e^{-x^3},\ n = 3$

(b) $f(x) = 1/(1-x),\ n = 6$

Use la Fórmula de Taylor para estimar $\operatorname{sen}^2 43$ con una precisión de cuatro decimales. (*Sugerencia:* $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.)

34. Ponga de manifiesto que la estimación $\operatorname{sen} x \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ tiene una precisión de cuatro decimales para $0 \le x \le \pi/4$ (es decir, para ángulos entre 0° y 45°).

CAPÍTULO 11

SERIES INFINITAS

Las series infinitas son útiles en los cursos avanzados de matemáticas, física e ingeniería, porque sirven para representar algunas funciones de manera especial. En este capítulo se discuten algunos de los resultados fundamentales relacionados con este concepto matemático tan importante.

11.1 SUCESIONES INFINITAS

Una *sucesión infinita* arbitraria normalmente se denota por

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \tag{11.1}$$

y se puede considerar como una colección de números reales para los que hay una c rrespondencia unívoca con los enteros positivos. Por comodidad, a veces se llama sim plemente *sucesiones* o (*secuencias*) a las sucesiones infinitas. Cada número real a_k un **término** de la sucesión. La sucesión está *ordenada* ya que hay un **primer térmi** a_1, un **segundo término** a_2 y, para todo entero positivo n, un ***n*-ésimo** término a_n.

Las sucesiones infinitas se presentan en las matemáticas anteriores al Cálculo. P ejemplo, la sucesión

$$0.6,\ 0.66,\ 0.666,\ 0.6666,\ 0.66666,\ \ldots$$

puede emplearse para representar el número racional $\frac{2}{3}$. En este caso, el n-ésimo t mino se va acercando cada vez más a $\frac{2}{3}$ cuando n crece.

Un uso importante de las sucesiones infinitas está en la definición de series infini en la Sección 11.2. Esta definición permite expresar un número racional como $\frac{2}{3}$ medio de una *serie infinita* (o *suma infinita*). Para $\frac{2}{3}$, la serie infinita es

$$0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + \cdots$$

La *sucesión* para $\frac{2}{3}$ se puede obtener agregando más y más términos a la suma; es de

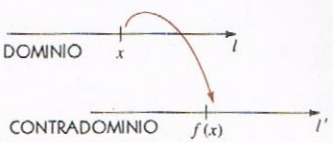
$$0.6 = 0.6, \qquad 0.66 = 0.6 + 0.06, \qquad 0.666 = 0.6 + 0.06 + 0.006,$$

etcétera.

El estudio de las series infinitas va mucho más allá de este ejemplo elemental. adelante, se representarán e^x, sen x, $\tan^{-1} x$ y muchas otras expresiones como series finitas. El uso de las series es de importancia no sólo en cálculos básicos sino tam en las matemáticas superiores y sus aplicaciones.

Hasta ahora se han descrito solamente a nivel intuit Para un estudio más riguroso hay que considerar a una s sión infinita como una función. Recordemos que una ción f es una correspondencia que asocia a cada núme del dominio un único número $f(x)$ en el contradominio, mo se ilustra con las dos rectas coordenadas de la Figura 1 Si se restringe el dominio de una función a los enteros po vos 1, 2, 3, ..., se obtiene una sucesión infinita.

FIGURA 11.1



DEFINICIÓN (11.2)

Una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es conjunto de los enteros positivos.

En este libro se considera que el contradominio de una sucesión infinita es un conjunto de los números reales.

Si f es una sucesión infinita, entonces a cada entero positivo k le corresponde un número real $f(k)$. Los números en el contradominio de f se pueden denotar por

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

en donde los tres puntos al final indican que la sucesión es interminable. Entonces (11.1) y (11.2) son esencialmente lo mismo. Para obtener la forma con subíndices (11.1) a partir de la forma (11.2), se toma $a_n = f(n)$ para cada entero positivo n. Recíprocamente, dada (11.1), se puede obtener una función definiendo $f(n) = a_n$ para todo entero positivo n.

A veces una sucesión con n-ésimo término a_n, se denota por $\{a_n\}$. Por ejemplo, la sucesión $\{2^n\}$ tiene el n-ésimo término $a_n = 2^n$. Según la Definición (11.2), la sucesión $\{2^n\}$ es la función f tal que $f(n) = 2^n$ para todo entero positivo n.

De la definición de igualdad de funciones, una sucesión $\{a_n\}$ es **igual** a otra sucesión $\{b_n\}$ si y sólo si $a_k = b_k$ para todo entero positivo k.

EJEMPLO 1 Escriba los cuatro primeros términos y el décimo término de cada sucesión:

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ **(b)** $\{2 + (0.1)^n\}$

(c) $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}\right\}$ **(d)** $\{4\}$

Solución Para encontrar los cuatro primeros términos sustituimos sucesivamente n por 1, 2, 3 y 4 en la fórmula para a_n. El décimo término se encuentra sustituyendo n por 10. Haciendo esto y simplificando obtenemos lo siguiente:

	Sucesión	*n-ésimo término*	*Primeros cuatro términos*	*Décimo término*
(a)	$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$	$\dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}$	$\dfrac{10}{11}$
(b)	$\{2 + (0.1)^n\}$	$2 + (0.1)^n$	2.1, 2.01, 2.001, 2.0001	2.0000000001
(c)	$\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}\right\}$	$(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}$	$\dfrac{1}{2}, -\dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{8}, -\dfrac{16}{11}$	$-\dfrac{100}{29}$
(d)	$\{4\}$	4	4, 4, 4, 4	4

Para especificar algunas sucesiones, se da el primer término a_1 y una regla para obtener el término a_{k+1} del término anterior a_k, para todo $k \geq 1$. Esto se llama una **definición recurrente** y se dice que la sucesión está definida **recurrentemente**.

EJEMPLO 2 Encontrar los primeros cuatro términos y el n-ésimo término de la sucesión infinita definida recurrentemente como sigue:

$$a_1 = 3 \quad \text{y} \quad a_{k+1} = 2a_k \quad \text{para } k \geq 1$$

Solución La sucesión está definida en forma recurrente, pues se da el primer término y una manera de encontrar, a partir del término a_k, el siguiente término a_{k+1}. Así,

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 3 = 6$$
$$a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 12$$
$$a_4 = 2a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 = 24.$$

Escribimos los términos como productos para tener una noción de la naturaleza del n-ésimo término. Continuando, obtendríamos $a_5 = 2^4 \cdot 3$ y $a_6 = 2^5 \cdot 3$; parecería que, $a_n = 2^{n-1} \cdot 3$. Se puede demostrar por inducción matemática que esta conjetura es correcta. •

Una sucesión infinita $\{a_n\}$ puede tener la propiedad de que cuando n aumenta, a_n se acerca a algún número real L; es decir, $|a_n - L| \approx 0$ para n grande. Por ejemplo, sea

$$a_n = 2 + (-\tfrac{1}{2})^n.$$

Los primeros términos de la sucesión $\{a_n\}$ son

$$2 - \tfrac{1}{2},\ 2 + \tfrac{1}{4},\ 2 - \tfrac{1}{8},\ 2 + \tfrac{1}{16},\ 2 - \tfrac{1}{32}, \ldots$$

y se ve que los términos se acercan progresivamente a 2 cuando n crece. De hecho, para todo entero positivo n,

$$|a_n - 2| = |2 + (-\tfrac{1}{2})^n - 2| = |(-\tfrac{1}{2})^n| = (\tfrac{1}{2})^n = 1/2^n$$

y el número $1/2^n$, y por lo tanto también $|a_n - 2|$, *se puede hacer arbitrariamente cercano a cero escogiendo n suficientemente grande*. En este caso, de acuerdo con la siguiente definición, la sucesión *tiene límite* 2 o *converge* a 2 y se escribe

$$\lim_{n \to \infty} [2 + (-\tfrac{1}{2})^n] = 2.$$

Este límite es casi idéntico a la definición de $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ dada en el Capítulo 4. La única diferencia es que si $f(n) = a_n$, el dominio de f es el conjunto de los enteros positivos y no un intervalo infinito de los números reales. Como en la Definición (4.21), pero usando a_n en vez de $f(x)$, se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN (11.3) Una sucesión $\{a_n\}$ **tiene el límite** L, o **converge a** L, lo cual se denota por

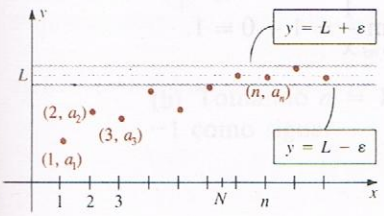
$$\lim_{n \to \infty} a_n = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número positivo N tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que } n > N.$$

Si tal número L no existe, la sucesión **no tiene límite** o **diverge**.

FIGURA 11.2



Se puede dar una interpretación geométrica para el límite de una sucesión, semejante a la que se dio en la Figura 4.43 para el límite de una función. La única diferencia es que la coordenada x del punto es siempre un entero positivo. En la Figura 11.2 se han trazado algunos puntos (k, a_k) para un caso específico en el que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Nótese que para cualquier $\varepsilon > 0$, los puntos (n, a_n) se encuentran entre las rectas $y = L \pm \varepsilon$, para n suficientemente grande. Por supuesto, la forma en que se acercan a L puede ser diferente de la que se ilustra en la figura (véanse, por ejemplo, las Figuras 11.3 y 11.6).

Si a_n se puede hacer tan grande como se quiera tomando n suficientemente grande, entonces diverge la sucesión $\{a_n\}$, pero en este caso se usa también la notación de límite y se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Una manera más rigurosa de especificar esto es como sigue.

DEFINICIÓN (11.4)

La notación

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

significa que para todo número real P existe un número N tal que $a_n > P$ siempre que $n > N$.

Hay que recordar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *no* significa que el límite existe sino que los números a_n crecen sin acotación alguna cuando n aumenta. Asimismo, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ significa que a_n decrece sin acotación alguna cuando n aumenta.

El siguiente teorema es importante porque permite usar los resultados del Capítulo 4 para investigar la convergencia o divergencia de una sucesión. La demostración se deduce de las Definiciones (11.3) y (4.21).

TEOREMA (11.5)

Sea $\{a_n\}$ una sucesión infinita y sea $f(n) = a_n$, donde $f(x)$ existe para todo número real $x \geq 1$.

(i) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$.

(ii) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (o bien $-\infty$), entonces $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ (o bien $-\infty$).

El siguiente ejemplo ilustra cómo se usa este teorema.

EJEMPLO 3 Sea $a_n = 1 + (1/n)$. Determinar si $\{a_n\}$ converge o diverge.

Solución Definimos $f(n) = 1 + (1/n)$ y se considera

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \qquad \text{para todo número real } x \geq 1.$$

De la Sección 4.6,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 1 + 0 = 1.$$

Entonces, por el Teorema (11.5),

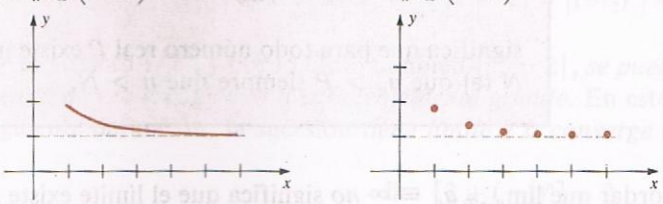
$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{a_n\}$ converge a 1. •

La diferencia entre $\lim_{x\to\infty}[1 + (1/x)] = 1$ y $\lim_{n\to\infty}[1 + (1/n)] = 1$ se ilust la Figura 11.3. Nótese que para $1 + (1/x)$, la función f es continua si $x \geq 1$ y la ca tiene una asíntota horizontal $y = 1$. Para $1 + (1/n)$ se toman sólo los puntos abscisas son enteros positivos.

FIGURA 11.3

(i) $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ (ii) $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$



EJEMPLO 4 Determinar si cada sucesión converge o diverge:

(a) $\{\frac{1}{4}n^2 - 1\}$ (b) $\{(-1)^{n-1}\}$

Solución (a) Si tomamos $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$, entonces $f(x)$ existe para todo y

$$\lim_{x\to\infty}(\tfrac{1}{4}x^2 - 1) = \infty.$$

Entonces, por el Teorema (11.5),

$$\lim_{n\to\infty}(\tfrac{1}{4}n^2 - 1) = \infty.$$

Por lo tanto, la sucesión no tiene límite. La Figura 11.4 ilustra la forma en que sión diverge.

FIGURA 11.4

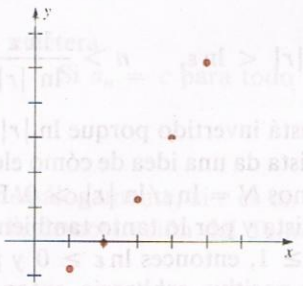
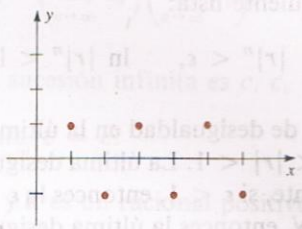


FIGURA 11.5



(b) Tomando $n = 1, 2, 3, \ldots$, vemos que los términos de $(-1)^{n-1}$ oscilan entre 1 y -1 como sigue:

$$1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \ldots$$

Esto se ilustra gráficamente en la Figura 11.5. Entonces, $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}$ no existe y la sucesión diverge. •

El siguiente ejemplo muestra cómo se puede usar la Regla de L'Hôpital para calcular los límites de algunas sucesiones.

EJEMPLO 5 Determinar si la sucesión $\{5n/e^{2n}\}$ converge o diverge.

Solución Sea $f(x) = 5x/e^{2x}$ para todo número real x. Como f toma la forma indeterminada ∞/∞ cuando $x \to \infty$, podemos usar la Regla de L'Hôpital, obteniendo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{2e^{2x}} = 0.$$

Entonces, por el Teorema (11.5), $\lim_{n\to\infty} (5n/e^{2n}) = 0$. Por lo tanto, la sucesión converge a 0. •

La demostración del siguiente teorema ilustra el uso de la Definición (11.3).

TEOREMA (11.6)

(i) $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ si $|r| < 1$

(ii) $\lim_{n\to\infty} |r^n| = \infty$ si $|r| > 1$.

Demostración Si $r = 0$, es evidente que el límite es 0. Supongamos que $0 < |r| < 1$. Para demostrar (i) usando la Definición (11.3), hay que demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número positivo N tal que

$$\text{si} \quad n > N, \quad \text{entonces} \quad |r^n - 0| < \varepsilon.$$

La desigualdad $|r^n - 0| < \varepsilon$ es equivalente a todas y cada una de las desigualdades en la siguiente lista:

$$|r|^n < \varepsilon, \qquad \ln |r|^n < \ln \varepsilon, \qquad n \ln |r| < \ln \varepsilon, \qquad n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |r|}.$$

El signo de desigualdad en la última expresión está invertido porque $\ln |r|$ es negativo para $0 < |r| < 1$. La última desigualdad de la lista da una idea de cómo elegir N. Concretamente, si $\varepsilon < 1$, entonces $\ln \varepsilon < 1$ y tomamos $N = \ln \varepsilon / \ln |r| > 0$. En este caso, si $n > N$, entonces la última desigualdad de la lista y por lo tanto también la primera, que es lo que se quería demostrar. Ahora, si $\varepsilon \geq 1$, entonces $\ln \varepsilon \geq 0$ y por lo tanto $\ln \varepsilon / \ln |r| \leq 0$. En este caso, si N es *un* número positivo *arbitrario,* entonces, siempre que $n > N$, la última desigualdad de la lista se satisface otra vez.

Para demostrar (ii), sea $|r| > 1$ y sea P un número real positivo arbitrario. Las siguientes desigualdades son equivalentes:

$$|r|^n > P, \qquad \ln |r|^n > \ln P, \qquad n \ln |r| > \ln P, \qquad n > \frac{\ln P}{\ln |r|}.$$

Si se escoge $N = \ln P / \ln |r|$, entonces, siempre que $n > N$, la última desigualdad se satisface y por tanto también la primera, es decir, $|r|^n > P$. Por la Definición (11.4) esto significa que $\lim_{n\to\infty} |r|^n = \infty$. • •

EJEMPLO 6 Escribir los primeros cuatro términos de cada sucesión y determinar si ésta converge o diverge.

(a) $\{(-\frac{2}{3})^n\}$ **(b)** $\{(1.01)^n\}$

Solución

(a) Los cuatro primeros términos de $\{(-\frac{2}{3})^n\}$ son

$$-\tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{4}{9}, \quad -\tfrac{8}{27}, \quad \tfrac{16}{81}.$$

De acuerdo con el Teorema (11.6) (i),

$$\lim_{n\to\infty} (-\tfrac{2}{3})^n = 0.$$

(b) Los cuatro primeros términos de $\{(1.01)^n\}$ son

$$1.01, \qquad 1.0201, \qquad 1.030301, \qquad 1.04060401.$$

De acuerdo con el Teorema (11.6) (ii),

$$\lim_{n\to\infty} (1.01)^n = \infty. \quad •$$

Se pueden demostrar teoremas para sucesiones análogos a los teoremas sobre límites que se usaron en la Sección 4.6 para sumas, restas, productos y cocientes de funciones. Por ejemplo, si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones convergentes, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right),$$

etcétera.

Si $a_n = c$ para todo n, tal que la sucesión infinita es $c, c, \ldots, c, \ldots$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} c = c.$$

Análogamente, si c es un número real y k es un racional positivo, entonces, como en la demostración del Teorema (4.23),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^k} = 0.$$

EJEMPLO 7 Calcular el límite de la sucesión $\left\{\dfrac{2n^2}{5n^2-3}\right\}$.

Solución Queremos encontrar $\lim_{n\to\infty} a_n$ para $a_n = 2n^2/(5n^2-3)$. Dividiendo el numerador y el denominador de a_n entre n^2 y aplicando los teoremas sobre límites,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{5n^2-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{5-(3/n^2)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2}{\lim\limits_{n\to\infty}[5-(3/n^2)]}$$

$$= \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty} 5 - \lim\limits_{n\to\infty}(3/n^2)} = \frac{2}{5-0} = \frac{2}{5}.$$

Entonces, la sucesión tiene límite $\frac{2}{5}$. También podríamos demostrar esto aplicando la Regla de L'Hôpital a $2x^2/(5x^2-3)$. •

El siguiente teorema, que es análogo al Teorema (2.22), afirma que si los términos de una sucesión infinita están siempre intercalados entre los términos correspondientes de dos sucesiones que tienen el mismo límite L, entonces la sucesión dada también tiene por límite a L. La demostración se da en el Apéndice II.

TEOREMA DE INTERCALACIÓN PARA SUCESIONES INFINITAS (11.7)

Si $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son sucesiones infinitas tales que $a_n \le b_n \le c_n$ para todo n, y si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$$

entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

EJEMPLO 8 Calcular el límite de la sucesión $\left\{\dfrac{\cos^2 n}{3^n}\right\}$.

Solución Como $0 < \cos^2 n < 1$ para todo entero positivo n,

$$0 < \frac{\cos^2 n}{3^n} < \frac{1}{3^n}.$$

Aplicando el Teorema (11.6) con $r = \frac{1}{3}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0.$$

Además, $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Del Teorema de Intercalación (11.7) con $a_n = 0$, $b_n = (\cos^2 n)/3^n$, y $c_n = (\frac{1}{3})^n$, se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n} = 0.$$

Por lo tanto, el límite de la sucesión es 0. •

El siguiente teorema es una consecuencia directa de la Definición (11.3).

TEOREMA (11.8) Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 9 Sea una sucesión cuyo n-ésimo término es $a_n = (-1)^{n+1}(1/n)$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Solución Los términos de la sucesión son alternadamente positivos y negativos. Por ejemplo, los cinco primeros términos son

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}.$$

Como $$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

del Teorema (11.8) se deduce que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. •

Se dice que una sucesión es **monótona** si sus términos sucesivos no decrecen, es decir,

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots$$

o bien si no crecen,

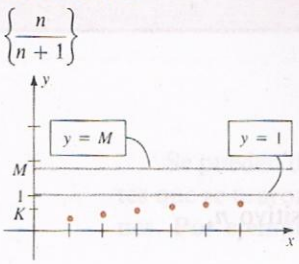
$$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots$$

Se dice que una sucesión es **acotada** si existe un número real positivo M tal que $|a_k| \le M$ para todo k. Por ejemplo, la sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

es monótona (sus términos van creciendo) y acotada (porque $k/(k+1) < 1$ para todo k). La sucesión se ilustra en la Figura 11.6. Nótese que cualquier número $M \ge 1$ es una cota de la sucesión. Sin embargo, si $K < 1$, entonces K no es una cota ya que $K < k/(k+1)$ para k suficientemente grande.

FIGURA 11.6



El siguiente teorema es fundamental para algunos desarrollos posteriores.

TEOREMA (11.9) Una sucesión infinita monótona y acotada tiene límite.

Para demostrar (11.9) se necesita usar una propiedad importante de los números reales. Se darán primero algunas definiciones. Si S es un conjunto no vacío de números reales, entonces se dice que un número u es una **cota superior** de S si $x \leq u$ para todo x en S. Se dice que un número v es una **cota superior mínima** de S si v es una cota superior y ningún número menor que v es también cota superior de S. Por lo tanto, la cota superior mínima es el menor de los números reales que es mayor que o igual a todo número en S. Por ejemplo, si S es el intervalo abierto (a, b), entonces cualquier número mayor que b es una cota superior de S, pero la cota superior mínima de S es única e igual a b.

El siguiente enunciado es un axioma en el sistema de los números reales.

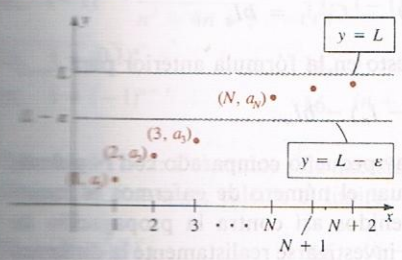
PROPIEDAD DE COMPLETITUD (11.10) Si un conjunto no vacío S de números reales tiene una cota superior, entonces S tiene una cota superior mínima.

Demostración del Teorema (11.9) Sea $\{a_n\}$ una sucesión monótona acotada de términos no decrecientes. Entonces,

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

y existe un número M tal que $a_k \leq M$ para todo entero positivo k. Entonces, M es una cota superior del conjunto S de todos los números de la sucesión y, de la Propiedad de Completitud, se deduce que S tiene una cota superior mínima L tal que $L \leq M$ (véase la Figura 11.7).

FIGURA 11.7



Si $\varepsilon > 0$, entonces $L - \varepsilon$ no es una cota superior de S y por lo tanto, al menos uno de los términos de $\{a_n\}$ es mayor que $L - \varepsilon$; es decir,

$$L - \varepsilon < a_N \qquad \text{para algún entero positivo } N,$$

como se muestra en la Figura 11.7. Como los términos de $\{a_n\}$ no decrecen, se tiene que

$$a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq \cdots$$

y, por lo tanto,

$$L - \varepsilon < a_n \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Resulta que si $n > N$, entonces

$$0 \leq L - a_n < \varepsilon \qquad \text{o bien} \qquad |L - a_n| < \varepsilon.$$

Según la Definición (11.3), esto significa que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \leq M,$$

es decir, $\{a_n\}$ tiene un límite.

Se puede obtener la demostración para una sucesión no creciente $\{a_n\}$ de manera parecida o considerando la sucesión $\{-a_n\}$. • •

Como ilustración del Teorema (11.9) puede verse que la sucesión monótona $\{n/(n+1)\}$ representada en la Figura 11.6 tiene como cota superior mínima (y límite) a 1.

APLICACIÓN: EPIDEMIAS S → I → S

Las sucesiones infinitas se pueden aplicar al estudio del desarrollo en el tiempo de una epidemia del tipo S → I → S.* Supongamos que los médicos publican diariamente informes indicando el número de personas que han sido contagiadas de la enfermedad y el de las que han sanado. Se numeran los días de los informes como 1, 2, ..., n, ..., y se denota la población total por N. Además se define

I_n = número de personas que tienen la enfermedad en el día n

F_n = número de personas que contrajeron la enfermedad el día n

C_n = número de personas que sanaron el día n.

Resulta que para todo $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = I_n + F_{n+1} - C_{n+1}.$$

Supongamos que los funcionarios de salud pública encuentran que el número de casos nuevos en un día es directamente proporcional al producto del número de personas enfermas y el de personas no contagiadas el día anterior. (Esto se conoce como *Ley de Acción de Masas* y es típica en una población estudiantil.) Supóngase que además, el número de personas que sanan en un día es proporcional al número de personas todavía enfermas el día anterior. Entonces,

$$F_{n+1} = aI_n(N - I_n) \quad \text{y} \quad C_{n+1} = bI_n$$

en donde a y b son constantes. Sustituyendo esto en la fórmula anterior para I_{n+1},

$$I_{n+1} = I_n + aI_n(N - I_n) - bI_n.$$

En los primeros días de una epidemia, I_n es muy pequeño comparado con N y desde el punto de vista de la salud pública, al evaluar el número de enfermos es mejor *sobrestimarlo* que subestimarlo, y estar prevenidos así contra la propagación de la enfermedad. Tomando esto en cuenta, puede investigarse realistamente la dinámica inicial de una epidemia analizando la ecuación

$$I_{n+1} = I_n + aNI_n - bI_n = (1 + aN - b)I_n$$

en términos del número inicial I_1 de individuos enfermos. Si se toma $r = 1 + aN - b$, entonces $I_{n+1} = rI_n$ y por lo tanto,

$$I_2 = rI_1,\ I_3 = rI_2 = r^2I_1,\ I_4 = rI_3 = r^3I_1,\ \ldots,\ I_n = r^{n-1}I_1,\ \ldots$$

Esto da la siguiente sucesión de personas afectadas:

$$I_1,\ rI_1,\ r^2I_1,\ r^3I_1,\ \ldots,\ r^{n-1}I_1,\ \ldots$$

* El símbolo S → I → S es una abreviación de Susceptible → Infectado → Susceptible y significa una persona infectada o contagiada que sana o se cura no queda inmunizada contra la enfermedad que la puede contraer otra vez. El padecimiento gonorreico y algunas infecciones de la garganta son ejemplos de este tipo de enfermedades.

El número $r = 1 + aN - b$ (que se puede estimar a partir de los datos iniciales) es de una importancia crítica. Si $r > 1$, entonces por el Teorema (11.6), $\lim_{n\to\infty} I_n = \infty$ y la epidemia se extiende. En este caso, cuando n es grande, I_n ya no es pequeño comparado con N y la fórmula para I_{n+1} ya no es válida. Si $r < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ y los funcionarios de sanidad no tienen de qué preocuparse. El caso $r = 1$ lleva a la sucesión constante $I_1, I_1, \ldots, I_1, \ldots$

EJERCICIOS 11.1

Ejercicios 1-16: La expresión dada es el n-ésimo término a_n de una sucesión infinita $\{a_n\}$. Escriba los primeros cuatro términos y calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$ si es que existe.

1. $\dfrac{n}{3n+2}$ **2.** $\dfrac{6n-5}{5n+1}$

3. $\dfrac{7-4n^2}{3+2n^2}$ **4.** $\dfrac{4}{8-7n}$

5. -5 **6.** $\sqrt{2}$

7. $\dfrac{(2n-1)(3n+1)}{n^3+1}$ **8.** $8n+1$

9. $\dfrac{2}{\sqrt{n^2+9}}$ **10.** $\dfrac{100n}{n^{3/2}+4}$

11. $(-1)^{n+1}\dfrac{3n}{n^2+4n+5}$ **12.** $(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$

13. $1+(0.1)^n$ **14.** $1-(1/2^n)$

15. $1+(-1)^{n+1}$ **16.** $(n+1)/\sqrt{n}$

Ejercicios 17-42: Determine si la sucesión converge o diverge; si converge, calcule el límite.

17. $\{6(-5/6)^n\}$ **18.** $\{8-(7/8)^n\}$

19. $\{\arctan n\}$ **20.** $\{(\tan^{-1} n)/n\}$

21. $\{1000-n\}$ **22.** $\{(1.0001)^n/1000\}$

23. $\left\{(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}\right\}$ **24.** $\left\{\dfrac{n^2}{\ln(n+1)}\right\}$

25. $\left\{\dfrac{4n^4+1}{2n^2-1}\right\}$ **26.** $\left\{\dfrac{\cos n}{n}\right\}$

27. $\{e^n/n^4\}$ **28.** $\{e^{-n}\ln n\}$

29. $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ **30.** $\{(-1)^n n^3 3^{-n}\}$

31. $\{2^{-n}\operatorname{sen} n\}$ **32.** $\left\{\dfrac{4n^3+5n+1}{2n^3-n^2+5}\right\}$

33. $\left\{\dfrac{n^2}{2n-1}-\dfrac{n^2}{2n+1}\right\}$ **34.** $\left\{n\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}\right\}$

35. $\{\cos n\pi\}$ **36.** $\{4+\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi n\}$

37. $\{n^{1/n}\}$ **38.** $\{n^2/2^n\}$

39. $\left\{\dfrac{n^{-10}}{\sec n}\right\}$ **40.** $\left\{(-1)^n\dfrac{n^2}{1+n^2}\right\}$

41. $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$ **42.** $\{\sqrt{n^2+n}-n\}$

Ejercicios 43-44: Consulte la Aplicación: Epidemia S → I → S.

43. Una población estable de 35 000 pájaros vive en tres islas. Cada año, 10% de la población de la isla A emigra a la isla B, 20% de la población de la isla B emigra a la isla C y 5% de la población de la isla C emigra a la isla A. Sean A_n, B_n y C_n las cantidades de aves que hay en el año n en las islas A, B y C, respectivamente, antes de la emigración.

(a) Demuestre que $A_{n+1} = 0.9A_n + 0.05C_n$, $B_{n+1} = 0.1A_n + 0.80B_n$ y $C_{n+1} = 0.95C_n + 0.20B_n$.

(b) Suponiendo que $\lim_{n\to\infty} A_n$, $\lim_{n\to\infty} B_n$ y $\lim_{n\to\infty} C_n$ existen, calcule el número de pájaros que habrá en cada isla dentro de muchos años.

44. Una población de gatos se divide por edades en cachorros (menores de un año) y adultos (mayores de un año). Todas las hembras adultas, incluyendo las que nacieron el año anterior, tienen una camada cada mes de junio con un promedio de tres cachorros. La tasa de sobrevivencia de los animales jóvenes es 50% mientras que la de los adultos es de $66\frac{2}{3}$% por año. Sea K_n el número de gatos recién nacidos en junio del año n-ésimo, y sea A_n el número de individuos adul-

tos; suponga que la razón de machos a hembras es siempre 1.

(a) Demuestre que $K_{n+1} = \frac{3}{2}A_{n+1}$ y $A_{n+1} = \frac{2}{3}A_n + \frac{1}{2}K_n$.

(b) Deduzca que $A_{n+1} = \frac{17}{12}A_n$ y $K_{n+1} = \frac{17}{12}K_n$, y que $A_n = (\frac{17}{12})^{n-1}A_1$ y $K_n = (\frac{17}{12})^{n-1}K_1$. ¿Qué se puede decir de la población?

Ejercicios 45-47: Use una calculadora.

45. Los términos de una sucesión definida recurrentemente por $a_1 = 5$ y $a_{k+1} = \sqrt{a_k}$, se pueden generar introduciendo $a_1 = 5$ en una calculadora y pulsando la tecla de raíz cuadrada repetidamente.

(a) Describa los que pasa a los términos de la sucesión cuando k aumenta.

(b) Demuestre que $a_n = 5^{1/2^n}$ y calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

46. Una sucesión se genera introduciendo un número N en una calculadora y pulsando repetidamente la tecla del recíproco $\boxed{1/x}$. ¿En qué condiciones tiene un límite esta sucesión?

47. Los términos de una sucesión que se definen recurrentemente por $a_1 = 1$ y $a_{k+1} = \cos a_k$, se pueden generar introduciendo 1 en una calculadora (en el modo de radianes) y pulsando la tecla del coseno repetidamente.

(a) Describa lo que sucede a los términos de la sucesión cuando k aumenta.

(b) Suponiendo que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, demuestre que $\cos L = L$. (*Indicación:* $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$.)

48. Una sucesión $\{x_n\}$ se define recurrentemente po $x_{k+1} = x_k - \tan x_k$.

(a) Escriba los primeros cinco términos de la su cesión tomando $x_1 = 3$. ¿Puede conjetura el valor de $\lim_{n\to\infty} x_n$?

(b) Escriba los cinco primeros términos de la su cesión tomando $x_1 = 6$. ¿Puede conjetura el valor de $\lim_{n\to\infty} x_n$?

(c) Suponiendo que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, demue tre que $L = \pi n$, para algún entero n.

49. Se pueden generar aproximaciones a $\sqrt{N}$ con sucesión definida recurrentemente por

$$x_1 = \frac{N}{2}, \quad x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{N}{x_k}\right).$$

(a) Calcule x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 para $N = 10$.

(b) Suponiendo que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, demue tre que $L = \sqrt{N}$.

50. La famosa *sucesión de Fibonacci* se define r currentemente por $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ con a_1 $a_2 = 1$.

(a) Encuentre los primeros diez términos de sucesión.

(b) Los términos de la sucesión $r_k = a_{k+1}/a_k$ aproximan cada vez más a τ, la *razón áure* Calcule aproximadamente los diez primer términos de esta sucesión.

(c) Suponiendo que $\lim_{n\to\infty} r_n = \tau$, demuest que $\tau = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

11.2 SERIES INFINITAS CONVERGENTES O DIVERGENTES

En la Sección 11.1 se vio que es posible expresar el número $\frac{2}{3}$ como una *serie* (o *sum infinita*.

$$0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + 0.00006 + \cdots$$

Como algebraicamente sólo se puede sumar un número finito de términos, hay que *finir* lo que significa una suma infinita de este tipo.

Comenzamos por introducir la terminología que se usará en el resto del capítu

DEFINICIÓN (11.11)

Sea $\{a_n\}$ una sucesión infinita. La expresión

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

se denomina **serie infinita** o, simplemente, **serie**.

En la notación de una serie, como la de la Definición (11.11), se emplea la notación de sumatoria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{o bien} \qquad \sum a_n.$$

En la última suma se sobreentiende que la variable de sumatoria es n. Cada número a_k es un **término** de la serie y a_n es el **n-ésimo término**.

DEFINICIÓN (11.12)

(i) La **k-ésima suma parcial** S_k de la serie infinita $\sum a_n$ es

$$S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

(ii) La **sucesión de sumas parciales** asociada a la serie infinita $\sum a_n$ es

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

De la Definición (11.12) (i),

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Para calcular S_5, S_6 y S_7, hay que añadir cada vez más términos de la serie. Así, S_{1000} es la suma de los primeros mil términos de $\sum a_n$. Si la sucesión $\{S_n\}$ tiene un límite S (es decir, si converge a S), entonces S se denomina suma de la serie *infinita* a_n, como se formaliza en la siguiente definición.

DEFINICIÓN (11.13)

Una serie infinita $\sum a_n$ es **convergente** (o **converge**) si su sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge; es decir, si

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \text{para un número real } S.$$

El límite S se llama **suma** de la serie $\sum a_n$ y se escribe

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

La serie $\sum a_n$ es **divergente** (o **diverge**) si $\{S_n\}$ diverge. Una serie infinita divergente no tiene suma.

EJEMPLO 1 Demostrar que la serie infinita

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

converge y calcular su suma.

Solución La descomposición en fracciones parciales del n-ésimo término a_n es

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Por lo tanto, la n-ésima suma parcial de la serie se puede escribir como

$$\begin{aligned} S_n &= a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Como
$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$
la serie converge y su suma es 1. •

La serie $\sum 1/[n(n+1)]$ del Ejemplo 1 se llama una **serie retráctil*** (o telescópica), pues al escribir S_n como se hizo en la solución, los términos se cancelan y la suma se reduce a $1-[1/(n+1)]$.

EJEMPLO 2 Demostrar que la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ es divergente.

Solución La serie se puede escribir como

$$1+(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

Nótese que $S_k=1$ si k es impar y $S_k=0$ si k es par. Como la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ alterna u oscila entre 1 y 0, resulta que $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe. Por lo tanto, la serie infinita diverge. •

EJEMPLO 3 Demostrar que la siguiente serie es divergente:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

Solución Se agrupan los términos de la serie como sigue:

$$1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8})+(\tfrac{1}{9}+\cdots+\tfrac{1}{16})+(\tfrac{1}{17}+\cdots+\tfrac{1}{32})+\cdots$$

Observamos que cada grupo contiene el doble número de términos que el grupo anterior

* **(N. del R.)** Este calificativo, **retráctil**, es más apropiado que el de "telescópica", que alude sólo a la característica constructiva de los anteojos astronómicos o telescopios de ser extensibles y retráctiles.

rior. Como la suma de los términos dentro de cada paréntesis es mayor que $\frac{1}{2}$, obtenemos las siguientes desigualdades:

$$S_2 = 1 + \tfrac{1}{2} > 2(\tfrac{1}{2})$$

$$S_4 > 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} > 3(\tfrac{1}{2})$$

$$S_8 > 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} > 4(\tfrac{1}{2}).$$

Análogamente, $S_{16} > 5(\frac{1}{2})$ y $S_{32} > 6(\frac{1}{2})$. Por inducción matemática, podemos demostrar que

$$S_{2^k} > (k+1)(\tfrac{1}{2}) \quad \text{para todo entero positivo } k.$$

Resulta que S_n puede hacerse tan grande como se quiera tomando n suficientemente grande; es decir, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Como $\{S_n\}$ diverge, la suma infinita es divergente. •

La serie en el Ejemplo 3 será útil más adelante. Se le asigna el siguiente nombre especial.

DEFINICIÓN (11.14) La **serie armónica** es la serie infinita divergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

En la siguiente sección se dará otra demostración de la divergencia de la serie armónica.

Algunas series infinitas aparecen frecuentemente en la solución de problemas aplicados. Una de las más importantes es la **serie geométrica**

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

donde a y r son números reales, con $a \neq 0$.

TEOREMA (11.15) Sea $a \neq 0$. La serie geométrica

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

(i) es convergente y su suma es $\dfrac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$.

(ii) es divergente si $|r| \geq 1$.

Demostración Si $r = 1$, entonces $S_n = a + a + \cdots + a = na$ y la serie diverge porque $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe.

Si $r = -1$, entonces $S_k = a$ si k es impar y $S_k = 0$ si k es par. Como la sucesión de sumas parciales alterna entre a y 0, la serie diverge.

Si $r \neq 1$, consideramos

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

y

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n.$$

Restando los lados correspondientes de estas ecuaciones, se obtiene

$$(1 - r)S_n = a - ar^n.$$

Dividiendo ambos miembros entre $1 - r$,

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty}\frac{ar^n}{1-r}$$

$$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n.$$

Si $|r| < 1$, entonces $\lim_{r\to\infty} r^n = 0$ (véase el Teorema (11.6) y por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}.$$

Si $|r| > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n$ no existe (véase el Teorema (11.6)) y por consiguiente, $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe. En este caso, la serie es divergente. • •

EJEMPLO 4 Demostrar que la siguiente serie infinita converge y calcular su suma

$$0.6 + 0.06 + 0.006 + \cdots + \frac{6}{10^n} + \cdots$$

Solución Ésta es la serie que se consideró al principio de la sección. Es una serie geométrica con $a = 0.6$ y $r = 0.1$. Por el Teorema (11.15) (i), la serie converge y su suma es

$$S = \frac{0.6}{1-0.1} = \frac{0.6}{0.9} = \frac{2}{3}.$$

Entonces,

$$\frac{2}{3} = 0.6 + 0.06 + 0.006 + \cdots + \frac{6}{10^n} + \cdots$$

Esto justifica la expresión decimal infinita $\frac{2}{3} = 0.66666\ldots$ •

EJEMPLO 5 Demostrar que la siguiente serie es convergente y calcular su suma

$$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$$

Solución La serie converge porque es una serie geométrica con $r = \frac{1}{3} < 1$. Por el Teorema (11.15) (i), la suma es

$$S = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3 \quad •$$

TEOREMA (11.16) Si una serie infinita $\sum a_n$ es convergente, entonces tenemos $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración El n-ésimo término a_n de la serie infinita se puede expresar como

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, entonces también $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ y

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$$

El teorema anterior afirma que *si* una serie converge, *entonces* su n-ésimo término a_n tiene límite cero cuando $n \to \infty$. Lo inverso no es cierto, es decir, *si* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *no necesariamente es cierto* que la serie $\sum a_n$ sea convergente. La serie armónica (11.14) es un ejemplo de serie divergente $\sum a_n$ para la cual $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Por lo tanto, para concluir que una serie infinita converge, *no basta* demostrar $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, porque esto puede ser cierto tanto para series convergentes como divergentes.

El siguiente resultado sobre *divergencia* es un corolario inmediato del Teorema (11.16).

CRITERIO DEL n-ÉSIMO TÉRMINO PARA LA DIVERGENCIA (11.17) Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie infinita $\sum a_n$ es divergente.

EJEMPLO 6 Aplicar el Criterio del n-ésimo Término (11.17) a cada serie y comentar el resultado:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$

Solución Tomando el límite del n-ésimo término a_n, obtenemos:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$ (De acuerdo con el Criterio (11.17), la serie diverge.)

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ (No se puede aplicar el Criterio (11.17). La serie puede converger o diverger.)

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ (No se puede aplicar el Criterio (11.17). La serie puede converger o diverger.)

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n} = \infty$ (De acuerdo con el Criterio (11.17), la serie diverge.)

En la siguiente sección se verá que la serie de la parte (b) es convergente y que la de la parte (c) diverge.

El siguiente teorema expresa que si los términos correspondientes de dos series infinitas son iguales a partir de un cierto término, entonces las dos series convergen o las dos divergen.

TEOREMA (11.18) Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series infinitas tales que $a_i = b_i$ para todo $i > k$, donde k es un entero positivo, entonces ambas series convergen o ambas divergen.

Demostración Por hipótesis, puede escribirse que

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n + \cdots$$
$$\sum b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_k + a_{k+1} + \cdots + a_n + \cdots$$

Sean S_n y T_n las n-ésimas sumas parciales de $\sum a_n$ y $\sum b_n$, respectivamente. Se ve que si $n \geq k$, entonces,

$$S_n - S_k = T_n - T_k$$

o bien

$$S_n = T_n + (S_k - T_k).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} T_n + (S_k - T_k)$$

y así, los dos límites existen o ninguno de los dos existe. Esto es lo que se quería demostrar. Evidentemente, si las dos series convergen, entonces sus sumas difieren por $S_k - T_k$. • •

El Teorema (11.18) implica que cambiar un número finito de términos de una serie infinita no afecta su convergencia o su divergencia (aunque sí puede cambiar la suma de una serie convergente). En particular, si los primeros k términos de $\sum a_n$ se sustituyen por 0, la convergencia no se altera. Resulta que la serie

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n + \cdots$$

es convergente o divergente si $\sum a_n$ converge o diverge, respectivamente. La serie $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots$ se obtiene a partir de $\sum a_n$ **suprimiendo los primeros k términos.**

EJEMPLO 7 Demostrar que la siguiente serie converge:

$$\frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots$$

Solución La serie converge porque puede obtenerse suprimiendo los primeros dos términos de la serie retráctil (o telescópica) convergente del Ejemplo 1. •

La demostración del siguiente teorema se deduce directamente de la Definición (11.13) y se deja como ejercicio.

TEOREMA (11.19) Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series convergentes con sumas A y B, respectivamente, entonces

(i) $\sum (a_n + b_n)$ converge y su suma es $A + B$.

(ii) Si c es un número real, $\sum ca_n$ converge y su suma es cA.

(iii) $\sum (a_n - b_n)$ converge y su suma es $A - B$.

También es fácil demostrar que si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum ca_n$ es divergente para todo $c \neq 0$.

EJEMPLO 8 Demostrar que la siguiente serie converge y calcular su suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{7}{n(n+1)} + \frac{2}{3^{n-1}} \right].$$

Solución La serie telescópica $\sum 1/[n(n+1)]$ se consideró en el Ejemplo 1 y se encontró que es convergente y que su suma es 1. Aplicando el Teorema (11.19) (ii) con $c = 7$ y $a_n = 1/[n(n+1)]$, vemos que $\sum 7/[n(n+1)]$ converge y su suma es $7(1) = 7$.

La serie geométrica $\sum 2/3^{n-1}$ es convergente y su suma es 3 (véase el Ejemplo 5). Entonces por el Teorema (11.19) (i), la serie dada converge y su suma es $7 + 3 = 10$. •

TEOREMA (11.20) Si $\sum a_n$ es una serie convergente y $\sum b_n$ es divergente, entonces $\sum (a_n + b_n)$ diverge.

Demostración Se hará por contradicción. Supongamos que $\sum (a_n + b_n)$ es convergente. Aplicando el Teorema (11.19) (iii), se obtiene que $\sum [(a_n + b_n) - a_n] = \sum b_n$ converge, lo cual es una contradicción. Entonces, la hipótesis resulta ser falsa, es decir, $\sum (a_n + b_n)$ es divergente. • •

EJEMPLO 9 Determinar si la siguiente serie converge o diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{1}{n} \right).$$

Solución Como $\sum (1/5^n)$ es una serie geométrica convergente y $\sum (1/n)$ es una serie armónica divergente, de acuerdo con el Teorema (11.20), la serie dada es divergente. •

APLICACIÓN: EPIDEMIAS S → I → S

Regresamos a la discusión del final de la Sección 11.1 acerca de las epidemias. Supóngase que en vez de I_n (el número de enfermos que hay el día n) interesa el *número total* S_n de individuos que han estado enfermos alguna vez entre el primer día y el n-ésimo. Como en la discusión anterior, estimamos S_n por arriba tomando el número F_{n+1} de casos nuevos el día $n + 1$ como aNI_n. Entonces,

$$\begin{aligned} S_n &= I_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \cdots + F_n \\ &= I_1 + aNI_1 + aNI_2 + aNI_3 + \cdots + aNI_{n-1}. \end{aligned}$$

Recordando que $I_n = r^{n-1}I_1$ con $r = 1 + aN - b$, se obtiene

$$\begin{aligned} S_n &= I_1 + aNI_1 + aNrI_1 + aNr^2I_1 + \cdots + aNr^{n-2}I_1 \\ &= I_1 + aNI_1(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2}). \end{aligned}$$

Como en la demostración del Teorema (11.15), esto puede escribirse

$$S_n = I_1 + aNI_1\left(\frac{1}{1-r} - \frac{r^{n-1}}{1-r}\right).$$

Si $r < 1$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= I_1 + aNI_1\left(\frac{1}{1-r}\right) \\ &= I_1\left(1 + \frac{aN}{1-r}\right) \\ &= I_1\left(1 + \frac{aN}{b-aN}\right) \\ &= I_1\left(\frac{b}{b-aN}\right). \end{aligned}$$

Si a y b se calculan aproximadamente a partir de los datos iniciales, este resultado permite a los funcionarios de sanidad obtener una cota superior para el número total de individuos que enfermarán alguna vez durante la epidemia.

EJERCICIOS 11.2

Ejercicios 1-20: Determine si la serie infinita converge o diverge. Si es convergente, calcule su suma.

1. $3 + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{3}{4^{n-1}} + \cdots$

2. $3 + \frac{3}{(-4)} + \cdots + \frac{3}{(-4)^{n-1}} + \cdots$

3. $1 + \frac{(-1)}{\sqrt{5}} + \cdots + \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^{n-1} + \cdots$

4. $1 + \left(\frac{e}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{e}{3}\right)^{n-1} + \cdots$

5. $0.37 + 0.0037 + \cdots + \frac{37}{(100)^n} + \cdots$

6. $0.628 + 0.000628 + \cdots + \frac{628}{(1000)^n} + \cdots$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}3^{n-1}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^{n-1}4^{-n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

10. $\sum (\sqrt{2})^{n-1}$

11. $\frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \cdots$

12. $\frac{-1}{1\cdot 2} + \frac{-1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{-1}{n(n+1)} + \cdots$

13. $\frac{5}{1\cdot 2} + \frac{5}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{5}{n(n+1)} + \cdots$

14. $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n+3} + \cdots$

15. $3 + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{3}{n} + \cdots$

16. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n-1}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(0.3)^n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n}\right)$

Ejercicios 21-28: Usando los ejemplos y los teoremas de esta sección, determine si la serie converge o diverge.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln(n+1)}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{n+2} - \frac{5}{n+3}\right)$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n}{7n-5}\right)$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{4}{n}\right]$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ **28.** $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} - 2^{-3n})$

Ejercicios 29-32: Encuentre una fórmula para S_n y demuestre que la serie converge o diverge usando $\lim_{n\to\infty} S_n$ (véase el Ejemplo 1).

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ **30.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{9n^2 + 3n - 2}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ (*Sugerencia:* Racionalice el denominador.)

33. Demuestre o refute: Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ divergen, entonces $\sum (a_n + b_n)$ es divergente.

34. ¿Qué está mal en la siguiente "demostración" de que la serie geométrica divergente $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ tiene por suma 0 (véase el Ejemplo 2)?

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} &= [1 + (-1)] + [1 + (-1)] \\ &\quad + [1 + (-1)] + \cdots \\ &= 0 + 0 + 0 + \cdots = 0\end{aligned}$$

Ejercicios 35-38: La raya indica que los dígitos abajo de ella se repiten indefinidamente. Exprese el decimal periódico como una serie infinita y encuentre el número racional que representa.

35. $0.\overline{23}$ **36.** $5.\overline{146}$

37. $3.2\overline{394}$ **38.** 2.71828

39. Una pelota de goma se deja caer desde una altura de 10 m. En cada rebote sube hasta la mitad de la altura máxima anterior. Calcule la distancia total que recorre la pelota antes de quedar en reposo, usando una serie infinita geométrica.

40. El disco de un péndulo recorre un arco de 24 cm de longitud en su primera oscilación. Suponiendo que la longitud de cada oscilación es 5/6 de la anterior, calcule la distancia total que recorrerá antes de quedar en reposo. Utilice una serie infinita geométrica.

41. Cuando se administra a una persona una dosis de Q unidades de cierto medicamento, la cantidad que queda en la sangre a los t minutos está dada por Qe^{-ct}, donde c es una constante positiva. Suponga que se administra repetidamente la misma dosis cada T minutos.

(a) Demuestre que la cantidad $A(k)$ de medicamento en la sangre inmediatamente después de la k-ésima dosis está dada por

$$A(k) = \sum_{n=0}^{k-1} Qe^{-ncT}.$$

(b) Halle una cota superior para la cantidad de fármaco en la sangre para cualquier dosis.

(c) Calcule el tiempo mínimo entre dosis que asegura que $A(k)$ no sobrepasa un cierto nivel M.

42. Supóngase que cada unidad monetaria (u.m.) que se introduce a la economía circula de manera que 85% de u.m. original se gasta, luego se gasta 85% de los 0.85 de u.m. restantes, etcétera. Calcule el impacto económico (es decir, la cantidad total gastada) si se introducen 1 000 000 u.m. en la economía.

43. En un programa para erradicar una plaga, se liberan cada día N moscas macho esterilizadas y el 90% de ellas sobrevive al terminar el día.

(a) Demuestre que el número de moscas esterilizadas en la población a los n días es $N + (0.9)N + \cdots + (0.9)^{n-1}N$.

(b) Si el *objetivo a largo plazo* del programa es mantener 20 000 machos esterilizados en la población, ¿cuántas moscas deben liberarse cada día?

44. Cierto medicamento tiene una semivida (o "vida media") en la sangre de unas dos horas. Se administrarán dosis de K mg cada cuatro horas, en donde K aún no se ha determinado.

(a) Demuestre que el número de miligramos de medicamento en la sangre inmediatamente después de la n-ésima dosis es $K + \frac{1}{4}K + \cdots + (\frac{1}{4})^{n-1}K$ y que esta suma es aproximadamente $\frac{4}{3}K$ para valores grandes de n.

(b) Se considera que a partir de 500 mg de medicamento en la sangre, el nivel es peligroso. Calcule la mayor dosis que se puede administrar repetidamente durante un periodo largo.

(c) Consulte el Ejercicio 41. ¿Con qué frecuencia pueden administrarse sin peligro dosis de 50 mg del medicamento?

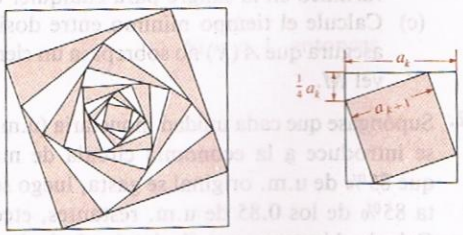
45. En la primera figura se muestra una sucesión anidada de cuadrados $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$ Sean a_k, A_k y P_k el lado, el área y el perímetro del k-ésimo cuadrado S_k, respectivamente. El cuadrado S_{k+1} se construye a partir de S_k eligiendo cuatro puntos en las orillas de éste a una distancia

$\frac{1}{4}a_k$ de los vértices, y uniéndolos (véase la segunda figura).

(a) Encuentre la relación entre a_{k+1} y a_k y determine a_n, A_n y P_n.

(b) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

EJERCICIO 45



46. En la figura se muestra una sucesión de círculos y cuadrados anidados alternadamente. Cada círculo está inscrito en el cuadrado anterior y cada cuadrado (excepto el primero) está inscrito en el círculo anterior. Sea S_n el área del n-ésimo cuadrado y C_n la del n-ésimo círculo.

(a) Encuentre la relación entre S_n y C_n y entre C_n y S_{n+1}.

(b) ¿Qué proporción del cuadrado original ha quedado sombreada en la figura?

EJERCICIO 46

Ejercicios 47-50: Use el Teorema (11.15) para verificar cada igualdad.

47. $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n+1}x^n + \cdots = \dfrac{1}{1+x}$, si $-1 < x < 1$

48. $1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots = \dfrac{1}{1-x^2}$, si $-1 < x < 1$

49. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{(x-3)}{4} + \dfrac{(x-3)^2}{8} + \cdots + \dfrac{(x-3)^n}{2^{n+1}} + \cdots = \dfrac{1}{5-x}$, si $1 < x < 5$

50. $3 + (x-1) + \dfrac{(x-1)^2}{3} + \cdots + \dfrac{(x-1)^n}{3^{n-1}} + \cdots = \dfrac{9}{4-x}$, si $-2 < x < 4$

11.3 SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS

Es difícil determinar si una serie infinita $\sum a_n$ converge o diverge usando directamente la Definición (11.13) porque en la mayoría de los casos es imposible encontrar una fórmula sencilla para S_n. Sin embargo, se pueden desarrollar criterios de convergencia o divergencia basados en un análisis del n-ésimo término a_n. Estos criterios se aplican sólo para determinar si la serie converge o diverge, no para calcular la *suma*.

En esta sección se consideran solamente **series de términos positivos**, es decir, series en las que $a_n > 0$ para todo n. Aunque esto puede parecer muy particular, las series de términos positivos son el fundamento para un estudio general de las series infinitas. Como se verá más adelante, la convergencia o divergencia de una serie infinita *arbitraria* a menudo puede determinarse analizando la convergencia o la divergencia de alguna serie relacionada de términos positivos.

El siguiente teorema muestra que para determinar si una serie de términos positivos converge o diverge, basta investigar si es acotada la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$.

TEOREMA (11.21) Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos. Si existe un número M tal que $S_n < M$ para todo n, entonces la serie converge y tiene por suma $S \leq M$. Si tal número M no existe, entonces la serie diverge.

Demostración Si $\{S_n\}$ es la sucesión de sumas parciales de la serie de términos positivos $\sum a_n$, entonces

$$S_1 < S_2 < \cdots < S_n < \cdots$$

y por lo tanto, $\{S_n\}$ es monótona. Si existe un número M tal que $S_n < M$ para todo n, entonces $\{S_n\}$ es monótona y acotada. De acuerdo con el Teorema (11.9),

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \leq M$$

para algún número S y por lo tanto, la serie converge. Si tal número M no existe, entonces $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ y la serie diverge. ••

Sea f una función definida para todo número real $x \geq 1$. Se puede considerar la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots$$

Por ejemplo, si $f(x) = 1/x^2$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

La convergencia o divergencia de una serie de este tipo puede analizarse mediante una integral impropia, como se indica en el siguiente resultado.

CRITERIO DE LA INTEGRAL (11.22)

Si una función f es continua y decreciente y toma valores positivos en $x \geq 1$, entonces la serie infinita

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots$$

(i) converge si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente,

(ii) diverge si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente.

FIGURA 11.8

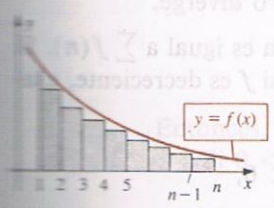
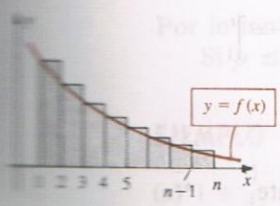


FIGURA 11.9



Demostración Si n es un entero positivo mayor que 1, entonces el área del polígono de rectángulos inscrito que se ilustra en la Figura 11.8 es

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) = f(2) + f(3) + \cdots + f(n).$$

Análogamente, el área del polígono circunscrito que se ilustra en la Figura 11.9 es

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1).$$

Como $\int_1^n f(x)\,dx$ es el área bajo la gráfica de f entre 1 y n,

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Si S_n denota la n-ésima suma parcial de la serie $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots$, entonces esta desigualdad se puede escribir

$$S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1}.$$

Tal desigualdad implica que si la integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge y es igual a $K > 0$, entonces

$$S_n - f(1) \leq K \qquad \text{o bien} \qquad S_n \leq K + f(1)$$

para todo entero positivo n. Entonces, por el Teorema (11.21), la serie $\sum f(n)$ es convergente.

Si la integral impropia diverge,

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = \infty$$

y como $\int_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1}$, también se tiene que $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \infty$; es decir, la serie $\sum f(n)$ es divergente. • •

EJEMPLO 1 Usar el Criterio de la Integral (11.22) para demostrar que la serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

es divergente (véase el Ejemplo 3 de la Sección 11.2).

Solución Si definimos $f(x) = 1/x$, entonces f es una función continua y decreciente que toma valores positivos para $x \geq 1$ y, por lo tanto, se puede aplicar el Criterio de la Integral. Como

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \Big[\ln x\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} [\ln t - \ln 1] = \infty,$$

por (11.22) (ii), la serie diverge. •

EJEMPLO 2 Determinar si la serie infinita $\sum ne^{-n^2}$ converge o diverge.

Solución Si definimos $f(x) = xe^{-x^2}$, entonces la serie dada es igual a $\sum f(n)$. Si $x \geq 1$, f es continua y toma valores positivos. Para investigar si f es decreciente, usemos la primera derivada. Como

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2) < 0,$$

f es decreciente en $[1, \infty)$. Por consiguiente puede aplicarse el Criterio de la Integral

$$\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t xe^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \Big(-\tfrac{1}{2}\Big)e^{-x^2}\Big]_1^t$$

$$= \Big(-\tfrac{1}{2}\Big) \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{e^{t^2}} - \frac{1}{e}\right] = \frac{1}{2e}.$$

Por lo tanto, de acuerdo con (11.22) (i), la serie es convergente. •

También se puede aplicar el criterio de la integral si f satisface la condición (11.22) para todo $x \geq m$, donde m es un entero positivo. En este caso, la integral en (11.22) se sustituye por $\int_m^\infty f(x)\,dx$. Esto corresponde a omitir los primeros $m - 1$ términos de la serie.

Si $f(x) = 1/x^p$ para $p > 0$, entonces la serie $\sum f(n)$ tiene la forma

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

la cual se llama **serie p**, o **serie hiperarmónica**. Esta serie es útil cuando se aplican los criterios de comparación más adelante. El siguiente teorema proporciona información sobre su convergencia o divergencia.

TEOREMA (11.23) La serie p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

converge si $p > 1$ o bien diverge si $p \leq 1$.

Demostración Observamos primero que el caso $p = 1$ corresponde a la serie armónica divergente. Supongamos ahora que p es un número real positivo diferente de 1. Si se define $f(x) = 1/x^p = x^{-p}$, entonces f es continua y toma valores positivos para $x \geq 1$. Además, para estos valores de x se ve que $f'(x) = -px^{-p-1} < 0$, y por tanto, f es decreciente. Entonces, f satisface las condiciones del Criterio de la Integral (11.22). Consideremos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^t$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{t\to\infty} [t^{1-p} - 1].$$

Si $p > 1$, entonces $p - 1 > 0$ y la expresión anterior puede escribirse

$$\frac{1}{1-p} \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right] = \frac{1}{1-p}(0 - 1) = \frac{1}{p-1}.$$

Entonces, por (11.22) (i), la serie p converge para $p > 1$.

Si $0 < p < 1$, entonces $1 - p > 0$ y

$$\frac{1}{1-p} \lim_{t\to\infty} [t^{1-p} - 1] = \infty.$$

Por lo tanto, de acuerdo con (11.22) (ii), la serie p es divergente.

Si $p \leq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) \neq 0$ y, por (11.17), la serie diverge. • •

EJEMPLO 3 Determinar si la serie converge o diverge.

(a) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} + \cdots$

(b) $5 + \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{5}{\sqrt{n}} + \cdots$

Solución

(a) La serie $\sum 1/n^2$ converge porque es la serie p con $p = 2 > 1$.

(b) La serie $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge porque es la serie p con $p = \frac{1}{2} < 1$.

Por tanto, $\sum 5/\sqrt{n}$ diverge (véase el comentario a continuación del Teorema (11.19)).

El siguiente teorema indica cómo usar series convergentes (o divergentes) para demostrar que otras series también convergen (o divergen).

CRITERIO BÁSICO DE COMPARACIÓN (11.24)

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos.

(i) Si $\sum b_n$ converge y $a_n \leq b_n$ para todo entero positivo n, entonces $\sum a_n$ es convergente.

(ii) Si $\sum b_n$ diverge y $a_n \geq b_n$ para todo entero positivo n, entonces $\sum a_n$ es divergente.

Demostración Sean S_n y T_n las n-ésimas sumas parciales de $\sum a_n$ y $\sum b_n$, respectivamente. Supongamos que $\sum b_n$ converge y que su suma es T. Si $a_n \leq b_n$ para todo n, entonces $S_n \leq T_n < T$ y, por el Teorema (11.21), $\sum a_n$ es convergente. Esto demuestra la parte (i).

Para demostrar (ii), supongamos que $\sum b_n$ diverge y que $a_n \geq b_n$ para todo n. Entonces $S_n \geq T_n$ y como T_n crece sin acotación alguna cuando n tiende a infinito, lo mismo sucede con S_n. Por lo tanto, $\sum a_n$ es divergente. • •

Como la convergencia o la divergencia de una serie no se altera al suprimir un número finito de términos, en (11.24) es suficiente que se cumplan las condiciones $a_n \geq b_n$ o bien $a_n \leq b_n$ a partir del k-ésimo término, para algún entero positivo k.

Se dice que una serie $\sum d_n$ **domina** a una serie $\sum c_n$ si $c_n \leq d_n$ para todo entero positivo n. Con esta terminología, (11.24) (i) expresa que una serie de términos positivos que está dominada por una serie convergente, también es convergente. La parte (ii) dice que si una serie domina a una serie divergente de términos positivos, entonces la primera diverge.

EJEMPLO 4 Determinar si la serie converge o diverge.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 + 5^n}$ **(b)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n-1}}$

Solución

(a) Para todo $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2 + 5^n} < \frac{1}{5^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Como $\sum (1/5)^n$ es una serie geométrica convergente, de acuerdo con (11.24) (i), la serie dada converge.

(b) La serie hiperarmónica $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge y por lo tanto, también la que se obtiene suprimiendo el primer término $1/\sqrt{1}$. Como

$$\frac{3}{\sqrt{n}-1} > \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{para } n \geq 2,$$

de (11.24) (ii) se deduce que la serie dada es divergente. •

A veces es más fácil aplicar el siguiente criterio de comparación que el básico (11.24).

CRITERIO DE COMPARACIÓN POR LÍMITE (11.25)

Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son dos series con términos positivos y si

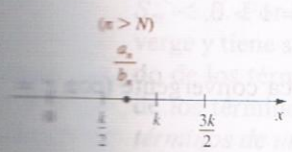
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$$

entonces las dos series convergen o las dos divergen.

Demostración Como $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = k > 0$, resulta que a_n/b_n está cerca de k, para n grande. Entonces, existe un número N tal que

$$\frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3k}{2} \quad \text{siempre que } n > N$$

FIGURA 11.10



(véase la Figura 11.10). Esto equivale a

$$\frac{k}{2} b_n < a_n < \frac{3k}{2} b_n \quad \text{siempre que } n > N.$$

Si la serie $\sum a_n$ converge, entonces $\sum (k/2) b_n$ también lo hace, pues está dominada por $\sum a_n$. Aplicando (11.19) (ii),

$$\sum b_n = \sum \left(\frac{2}{k}\right)\left(\frac{k}{2}\right) b_n$$

es convergente.

Recíprocamente, si $\sum b_n$ converge, también $\sum a_n$ lo hace, pues está dominada por la serie convergente $\sum (3k/2) b_n$. Se demostró que $\sum a_n$ converge si y sólo si $\sum b_n$ converge también. Por consiguiente, $\sum a_n$ diverge si y sólo si $\sum b_n$ es divergente. • •

En los Ejercicios 51 y 52 se enuncian otros dos criterios de comparación.

EJEMPLO 5 Determinar si la serie converge o diverge.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}$

Solución

(a) La forma del n-ésimo término $a_n = 1/\sqrt[3]{n^2+1}$ sugiere que comparemos esta serie con aquélla cuyo n-ésimo término es $b_n = 1/\sqrt[3]{n^2}$. La serie $\sum b_n$ es la serie p divergente con $p = \frac{2}{3} < 1$. No se puede usar b_n en el Criterio de Comparación Básico (11.24) porque $a_n < b_n$ en vez de $a_n \geq b_n$. Sin embargo, aplicando el Criterio de Comparación por Límite (11.25),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n^2}{n^2+1}} = 1 > 0,$$

y como $\sum b_n$ diverge, también $\sum a_n$ es divergente.

(b) Cuando se busca una serie $\sum b_n$ adecuada para compararla con $\sum a_n$, donde a_n es un cociente de dos expresiones, conviene despreciar todos los términos del numerador y del denominador excepto los que tienen mayor peso para n grande.

Consideremos

$$a_n = \frac{3n^2+5n}{2^n n^2 + 2^n}.$$

Como los términos de mayor peso son $3n^2$ en el numerador y $2^n n^2$ en el denominador, proponemos

$$b_n = \frac{3n^2}{2^n n^2} = \frac{3}{2^n}.$$

Aplicando el Criterio de Comparación por Límite (11.25),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)} \cdot \frac{2^n}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\frac{5}{3}n}{n^2+1} = 1 > 0.$$

Como, según el Teorema (11.15), $\sum b_n$ es una serie geométrica convergente (con $r = \frac{1}{2}$ y $a = 3$), la serie $\sum a_n$ también es convergente. •

EJEMPLO 6 Sea $a_n = \dfrac{8n+\sqrt{n}}{5+n^2+n^{7/2}}$. Determinar si $\sum a_n$ converge o diverge.

Solución Para encontrar una serie $\sum b_n$, adecuada para la comparación, despreciamos, tanto en el numerador como en el denominador, todas las potencias de n excepto las mayores y obtenemos así

$$b_n = \frac{8n}{n^{7/2}} = \frac{8}{n^{5/2}}.$$

Aplicando el Criterio de Comparación por Límite (11.25),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n+n^{1/2}}{5+n^2+n^{7/2}} \cdot \frac{n^{5/2}}{8}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8n^{7/2}+n^3}{40+8n^2+8n^{7/2}} = 1 > 0.$$

Como $\sum (1/n^{5/2})$ es una serie p convergente con $p = \frac{5}{2} > 1$, de (11.19) (ii) se deduce que $\sum b_n$ converge. Por lo tanto, por (11.25), $\sum a_n$ es también convergente. •

Concluimos esta sección con algunos comentarios generales sobre las series de términos positivos. Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que los términos se agrupan de alguna manera. Por ejemplo, se podrían agrupar así:

$$(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots$$

Si la serie que se obtiene se denota por $\sum b_n$, donde

$$b_1 = a_1 + a_2, \qquad b_2 = a_3, \qquad b_3 = a_4 + a_5 + a_6 + a_7, \ldots$$

entonces cualquier suma parcial de la serie $\sum b_n$ también es una suma parcial de $\sum a_n$. Por lo tanto, si $\sum a_n$ converge, entonces $\sum b_n$ converge también y tiene la misma suma. Se puede usar el mismo razonamiento para otras maneras de agrupar los términos de $\sum a_n$. Entonces, *si una serie de términos positivos converge, la serie que se obtiene agrupando los términos de cualquier manera es también convergente y tiene la misma suma*. No se puede decir lo mismo acerca de todas las series divergentes. Por ejemplo, los términos de la serie divergente $\sum (-1)^n$ pueden agruparse de manera que se obtiene una serie convergente (véase el Ejercicio 34 de la Sección 11.2).

Supongamos ahora que una serie convergente de términos positivos $\sum a_n$ tiene la suma S y que se forma una nueva serie $\sum b_n$ ordenando los términos de alguna manera. Por ejemplo, $\sum b_n$ podría ser la serie

$$a_2 + a_8 + a_1 + a_5 + a_7 + a_3 + \cdots$$

Si T_n es la n-ésima suma parcial de $\sum b_n$, entonces es una suma de términos de $\sum a_n$. Si m es el mayor subíndice de los términos a_k que aparecen en T_n, entonces $T_n \leq S_m < S$. Por lo tanto, $T_n < S$ para todo n. Aplicando el Teorema (11.21), $\sum b_n$ converge y tiene suma $T \leq S$. La demostración anterior es independiente del orden escogido de los términos. También puede considerarse la serie $\sum a_n$ como un ordenamiento de los términos de $\sum b_n$ y, con el mismo argumento, $S \leq T$. Se demostró que *si los términos de una serie convergente de términos positivos $\sum a_n$ se reordenan de cualquier manera, entonces la serie resultante converge y tiene la misma suma.*

EJERCICIOS 11.3

Ejercicios 1-16: Use el Criterio de la Integral para determinar si la serie converge o diverge.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+2n)^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4+n)^{3/2}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+7}$
4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+16n^2}$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{1+n^2}$
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$
11. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(2n-5)}$
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n^2}$
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+9}$
15. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$
16. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

Ejercicios 17-38: Use criterios de comparación para determinar si la serie converge o diverge.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + n^2 + 1}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + n^2}{n^3 + 1}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3 + \sqrt{n}}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n + 4}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + 4n^3 + 1}{2n^8 + n^4 + 2}$

25. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^3 - 5n}}$

26. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3n}{2n^2 - 7}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n^2 - 7}{e^n(n + 1)^2}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{2^n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{1 + 3^n}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^4}$ (*Indicación:* $\ln n < n$)

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \cos n}{n^2}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n + 1)^3}{(n^3 + 1)^2}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n + 1)(n + 2)}}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{5n^2 + 1}}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + 5}{n \cdot 2^n}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Ejercicios 39-45: Determine si la serie converge o diverge.

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \ln n}{n^3 + n + 1}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \ln n}{n^2 + 1}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2^n}{n + 3^n}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n + 2^n}{n + 5^n}$

Ejercicios 47-48: Encuentre todos los números reales k para los que la serie converge.

47. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k \ln n}$

48. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^k}$

49. (a) Aplique la demostración del Criterio de la Integral (11.22) para demostrar que para todo entero positivo n,

$$\ln(n + 1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n$$

(b) Estime el número de términos de la serie armónica que se deben sumar para que $S_n > 100$.

50. Considere el problema que se ilustra en la figura, en el que se comienza con una bola de radio igual a 1 m y se van apilando sobre ella verticalmente otras bolas de manera que si el radio de la k-ésima se denota por r_k, entonces $r_{n+1} = r_n\sqrt{n/(n + 1)}$ para todo entero positivo n.

(a) Demuestre que la altura de la pila se puede hacer tan grande como se quiera.

(b) Demuestre que si las bolas están construidas del mismo material homogéneo de densidad 1 kg/m³, el peso total de la pila es siempre menor que 4π kilogramos.

EJERCICIO 50

51. Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ es convergente. (Esto no es cierto para series con términos positivos y negativos.)

52. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = \infty$ y $\sum b_n$ divergen, entonces $\sum a_n$ es divergente.

53. Sea $\sum a_n$ una serie convergente de términos positivos. Sea $f(n) = a_n$, donde f es continua y decreciente para $x \geq N$, donde N es un entero. Demuestre que el error al estimar la suma de la serie dada por $\sum_{n=1}^{N} a_n$ es menor que $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$.

Ejercicios 54-56: Use el Ejercicio 53 para determinar el menor número de términos que deben sumarse para aproximar la suma de la serie con un error menor que E.

54. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $E = 0.001$

55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, $E =$

56. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$, $E = 0.05$

57. Demuestre que si una serie de términos positivos $\sum a_n$ converge, entonces $\sum (1/a_n)$ diverge.

58. Demuestre que si una serie de términos positivos $\sum a_n$ es convergente, entonces $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge. (*Sugerencia:* Demuestre primero que $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq (a_n + a_{n+1})/2$.)

11.4 CRITERIOS DE LA RAZÓN Y DE LA RAÍZ

Para aplicar el Criterio de la Integral a una serie de términos positivos $\sum a_n$, donde $a_n = f(n)$, los términos deben decrecer y se debe poder integrar $f(x)$. Esto casi siempre excluye a las series con factoriales u otras expresiones complicadas. En esta sección se presentan dos criterios que se pueden emplear para determinar convergencia o divergencia cuando no es posible aplicar otros criterios. Desafortunadamente, como se indica en las partes (iii), los criterios no son concluyentes para algunas series.

CRITERIO DE LA RAZÓN (11.26)

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

(i) Si $L < 1$, la serie es convergente.

(ii) Si $L > 1$ o bien $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, la serie es divergente.

(iii) Si $L = 1$, hay que aplicar otro criterio; la serie puede ser convergente o divergente.

Demostración

(i) Supongamos que $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = L < 1$. Sea r un número cualquiera tal que $0 \leq L < r < 1$. Como a_{n+1}/a_n se acerca a L para n grande, existe un entero N tal que siempre que $n \geq N$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r \quad \text{o bien} \quad a_{n+1} < a_n r.$$

Sustituyendo n por N, $N + 1$, $N + 2$, ..., se obtiene

$$a_{N+1} < a_N r$$
$$a_{N+2} < a_{N+1} r < a_N r^2$$
$$a_{N+3} < a_{N+2} r < a_N r^3$$

y, en general,

$$a_{N+m} < a_N r^m \quad \text{siempre que } m > 0.$$

Del Criterio de Comparación Básico (11.24), se deduce que la serie

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_{N+m} + \cdots$$

converge porque sus términos son menores que los términos correspondientes de rie geométrica convergente

$$a_N r + a_N r^2 + \cdots + a_N r^n + \cdots$$

Como la convergencia o divergencia no se altera si se suprime un número finito d minos, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

(ii) Supongamos que $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = L > 1$. Si r es un número real tal que $r > 1$, entonces existe un entero N tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > r > 1 \quad \text{siempre que } n \geq N.$$

Por lo tanto, $a_{n+1} > a_n$ si $n \geq N$. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ y por el Criterio del mo Término para la Divergencia (11.17), la serie $\sum a_n$ diverge.

La demostración para el caso $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = \infty$ es parecida y se deja ejercicio.

(iii) El criterio no es concluyente si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

porque es fácil verificar que el límite es 1 tanto para la serie convergente $\sum(1/$ mo para la divergente $\sum(1/n)$. Por lo tanto, *si el límite es* 1, *hay que usar otro c*

EJEMPLO 1 Determinar si la serie es convergente o divergente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$

Solución

(a) Aplicando el Criterio de la Razón,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0.\end{aligned}$$

Como $0 < 1$, la serie es convergente.

(b) Como

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2+2n+1} = 3 > 1\end{aligned}$$

la serie diverge.

EJEMPLO 2 Determinar la convergencia o divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Solución Aplicando el Criterio de la Razón,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\end{aligned}$$

La última igualdad es consecuencia del Teorema (7.25). En vista de que $e > 1$, la serie diverge. •

El siguiente criterio es útil cuando a_n tiene sólo potencias de n.

CRITERIO DE LA RAÍZ

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

(i) Si $L < 1$, la serie es convergente.

(ii) Si $L > 1$ o bien $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$, la serie es divergente.

(iii) Si $L = 1$, hay que aplicar otro criterio; la serie puede ser convergente o divergente.

Demostración La demostración es parecida a la del Criterio de la Razón. Si $L < 1$, entonces como en (i), consideramos un número arbitrario r tal que $L < r < 1$. Por la definición de límite, existe un entero positivo N tal que si $n \geq N$, entonces

$$\sqrt[n]{a_n} < r \quad \text{o bien} \quad a_n < r^n.$$

Como $0 < r < 1$, entonces $\sum_{n=N}^{\infty} r^n$ es una serie geométrica convergente y así, por el Criterio de Comparación Básico (11.24), $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge. Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. Esto demuestra (i). El resto de la demostración se deja como ejercicio. • •

EJEMPLO 3 Determinar la convergencia o divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^n}$.

Solución Aplicando el Criterio de la Raíz,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{3n+1}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{3n+1}}{n^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3+(1/n)}}{n} = 0.$$

Como $0 < 1$, la serie converge. Se podría aplicar el Criterio de la Razón pero la evaluación del límite sería más complicada.

EJERCICIOS 11.4

Ejercicios 1-26: Determine si la serie es convergente o divergente.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+4}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(3^{n+1})}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^n(n+1)}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}+10}{n!}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3n+4}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+1}$
11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^5}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3+e^n}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{2n}}{5^{n-1}}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{10^n}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+2^n}{n!}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(5n+3n^{-1}}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{(1.01)^n}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{1/n}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{1}{n}$
24. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$
25. $1 + \frac{1 \cdot 3}{2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} + \cdots$
26. $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} + \cdots$
27. Complete la demostración del Criterio de la Razón (11.26) comprobando que si
$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = \infty,$$
entonces $\sum a_n$ es divergente.
28. Complete la demostración del Criterio de la Ra (11.27).

11.5 SERIES ALTERNANTES Y CONVERGENCIA ABSOLUTA

Los criterios de convergencia discutidos hasta ahora solamente se pueden aplicar a s ries de términos positivos. A continuación se consideran series infinitas que contien términos positivos y negativos. Las **series alternantes** son unas de las más sencillas útiles de este tipo. En ellas el signo de sus términos va alternándose entre positi y negativo. Es costumbre expresar una serie alternante en una de las formas

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

o bien

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$$

donde $a_k > 0$ para todo k. El siguiente teorema proporciona el criterio de converg cia más importante para estas series. Se considerará el caso $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$. Puede da una demostración análoga para $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

CRITERIO PARA LAS SERIES ALTERNANTES

Si $a_k \geq a_{k+1} > 0$ para todo k y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ es convergente.

Demostración Consideremos primero las sumas parciales

$$S_2,\ S_4,\ S_6,\ \ldots,\ S_{2n},\ \ldots$$

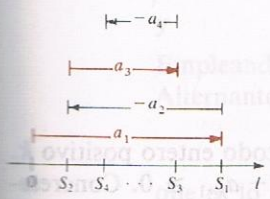
que contienen un número par de términos de la serie. Como

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

y $a_k - a_{k+1} \geq 0$ para todo k, se ve que

$$0 \leq S_2 \leq S_4 \leq \cdots \leq S_{2n} \leq \cdots,$$

FIGURA 11.11



es decir, $\{S_{2n}\}$ es una sucesión monótona. Este hecho resulta evidente de la Figura 11.11 en la que se han representado sobre una recta coordenada l las siguientes cuatro sumas parciales de la serie:

$$S_1 = a_1,\quad S_2 = a_1 - a_2,\quad S_3 = a_1 - a_2 + a_3,$$
$$S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4.$$

Se sugiere al lector localizar los puntos de l correspondientes a S_5 y S_6. Hacerlo puede ser instructivo.

Se ve de la Figura 11.11 que $S_{2n} \leq a_1$ para todo entero positivo n. Esto también se puede demostrar algebraicamente observando que

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1.$$

Por lo tanto, $\{S_{2n}\}$ es una sucesión monótona *acotada*. De acuerdo con el Teorema (11.9),

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \leq a_1$$

para algún número S. Considerando las sumas parciales S_{2n+1} que tienen un número *impar* de términos de la serie se ve que $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ y, como $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \leq a_1,$$

es decir, la serie es convergente. • •

EJEMPLO 1 Determinar si la serie alternante converge o diverge.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2n}{4n^2 - 3}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2n}{4n - 3}$

Solución

(a) Sea $a_n = f(n) = \dfrac{2n}{4n^2 - 3}$.

Para aplicar el Criterio para las Series Alternantes se debe cumplir que:

(i) $a_k \geq a_{k+1}$ para todo entero positivo k y

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Una manera de llegar a (i) es demostrar que $f(x) = 2x/(4x^2 - 3)$ es decreciente para $x \geq 1$. Por la Regla del Cociente,

$$f'(x) = \frac{(4x^2 - 3)(2) - (2x)(8x)}{(4x^2 - 3)^2}$$

$$= \frac{-8x^2 - 6}{(4x^2 - 3)^2} < 0.$$

Se deduce que f es decreciente y por lo tanto, $a_k \geq a_{k+1}$ para todo entero positivo k.

Podemos obtener el mismo resultado demostrando que $a_k - a_{k+1} \geq 0$. Concretamente, si $a_n = 2n/(4n^2 - 3)$, entonces

$$a_k - a_{k+1} = \frac{2k}{4k^2 - 3} - \frac{2(k+1)}{4(k+1)^2 - 3}$$

$$= \frac{8k^2 + 8k + 6}{(4k^2 - 3)(4k^2 + 8k + 1)} \geq 0$$

para todo entero positivo k. Otro método para demostrar $a_k \geq a_{k+1}$ es verificar qu $a_{k+1}/a_k \leq 1$.

Para probar (ii) vemos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{4n^2 - 3} = 0.$$

Por lo tanto, la serie alternante converge.

(b) Puede demostrarse que $a_k \geq a_{k+1}$ para todo k; sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{4n - 3} = \frac{1}{2} \neq 0$$

y por tanto, de acuerdo con el Criterio del n-ésimo Término para la Divergencia (11.
la serie diverge. •

Si una serie infinita converge, la n-ésima suma parcial S_n se aproxima a la s
S de la serie. En la mayoría de los casos es difícil determinar la precisión de la apr
mación. Sin embargo, el siguiente teorema proporciona una manera sencilla para
mar el error en el caso de una serie *alternante*.