Ejemplo: Frank Aires (números reales)

$\forall n \in \mathbb{N} \quad C_0^n + C_1^n + C_3^n + \cdots + C_n^n = 2^n$

Defino

$X = \{ n \in \mathbb{N} / C_0^n + C_1^n + \cdots + C_n^n = 2^n \}$

Por el P.I.M.

I) $1 \in X \longleftrightarrow C_0^1 + C_1^1 = 2^1$

II) $n \in X$ (Hipótesis)

$C_0^n + C_1^n + \cdots + C_n^n = 2^n$

$* \; C_0^{n+1} + C_1^{n+1} + C_2^{n+2} + \cdots + C_n^{n+1} + C_{n+1}^{n+1}$

$= C_0^n + (C_0^n + C_1^n) + (C_1^n + C_2^n) + \cdots$

$\cdots + (C_{n-1}^n + C_n^n) + C_n^n$

Por Hipótesis

$= 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

$\therefore S(n) \in X$

$\rightarrow X = \mathbb{N}$

Ejemplo ①

$\forall n \in \mathbb{N}: 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2$

Defino

$X = \{ n \in \mathbb{N} / 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2 \}$

I) $1 \in X \longrightarrow 2(1) - 1 = (1)^2$ ✓

II) $n \in X \longrightarrow 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)^2 = n^2$ (Hip)

En efecto:

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + 2(n+1) - 1 = (n+1)^2$

por hipótesis

$n^2 + 2(S(n)) - 1 = (S(n))^2$

$(S(n) - 1)^2 + 2(S(n)) - 1 = S(n)$

$(S(n))^2 - 2S(n) + 1 - 1 = S(n)$

$\therefore S(n) \in X$

$\longrightarrow X = \mathbb{N}$

Revisar

Ejemplo (2) $\forall n \in \mathbb{N}: 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Demostrar:

Segundo Principio de Inducción Matemática

Sea $X \subset \mathbb{N}$, $X \neq \emptyset$

$$\left.\begin{array}{l} \text{I) } 1 \in X \\ \text{II) Dado } m \in \mathbb{N},\ \forall n < m \\ \quad \text{se tiene } n \in X \Rightarrow m \in X \end{array}\right\} \Rightarrow X = \mathbb{N}$$

Prueba

AFIRMO $X = \mathbb{N}$

Por contradicción

Asumimos: $X \neq \mathbb{N}$

Defino $Y = \mathbb{N} \setminus X$,

Vemos que $Y \neq \emptyset$, $Y \subset \mathbb{N}$

Por el P.B.O.

$\exists p \in Y$ (menor elemento de Y)

Por otro lado

también $1 \in X \rightarrow 1 \notin Y$

Entonces $p > 1$

Por la relación de Orden

$\exists a \in \mathbb{N} / p = a+1 \dots (I)$

AFIRMO: $a \in X$

Por contradicción $a \notin X \rightarrow a \in Y$

De (I) $\quad a < p \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$
$\therefore a \in X$

Por las Condiciones de teorema $S(a) \in X$
$\quad p \in X \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$

$\therefore X = \mathbb{N}$

Ejercicio:

Tarea

Probar:
$\quad P.B.O. \longrightarrow P.I.M.$

Número Reales

Definición (Cuerpo)

Un cuerpo es aquella terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, donde $\mathbb{K} \neq \emptyset$, las operaciones suma $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$.

Cumplen los siguientes axiomas:

Suma (Adición)

A.1) Cerradura o Clausura
$\forall a, b \in \mathbb{K}: a+b \in \mathbb{K}$

$a+b \in \mathbb{K}$

A.2) Conmutatividad
$\forall a, b \in \mathbb{K}: a+b = b+a$

A.3) Asociativa
$\forall a, b, c \in \mathbb{K}: (a+b)+c = a+(b+c)$

A.4) Elemento Neutro Aditivo
$\exists 0 \in \mathbb{K} / \forall a \in \mathbb{K}: a+0 = a$

A.5) Elemento Inverso Aditivo
Para cada $a \in \mathbb{K}, \exists (-a) \in \mathbb{K} / a+(-a) = 0$

Multiplicación

M.1) Cerradura o Clausura
$\forall a, b \in \mathbb{K}: a \cdot b \in \mathbb{K}$

M.2) Conmutativa
$\forall a, b \in \mathbb{K}: a \cdot b = b \cdot a$

M.3) Asociativa
$\forall a, b, c \in \mathbb{K}: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

M.4) Elemento Neutro Multiplicativo
$\exists 1 \in \mathbb{K}, \forall a \in \mathbb{K}: a \cdot 1 = a$

M.5) Elemento Inverso Multiplicativo
Para cada $a \in \mathbb{K} - \{0\}$, existe $a^{-1} \in \mathbb{K} / a \cdot a^{-1} = 1$

Distributiva

D.1) $\forall a,b,c \in K: \; a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

D.2) $\forall a,b,c \in K: \; (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$

Consecuencias

1) En el enunciado del axioma (A_4) se puede escribir

$$\underbrace{a+0 = 0+a}_{\text{Conmutativa}} = a$$

2) El elemento neutro aditivo es único
En efecto:
Supongamos que
0 y $0'$ son E.N.A.

Por (A_4): $\forall a \in K: \; a+0 = 0+a = a$

$$0'+0 = 0+0' = 0' \quad \cdots (I)$$

Por (A_4): $\forall a \in K: \; a+0' = 0'+a = a$

$$0+0' = 0'+0 = 0 \quad \cdots (II)$$

De (I) y (II)

$$\therefore \; 0' = 0$$

3) El Elemento Inverso Aditivo es Único.
En efecto:
Supongamos que
$-a$ y a' son E.I.A.
para $a \in K$

AFIRMO:
$$a' = -a$$

$a' = a' + 0$ (E.N.A.)

$= a' + (a + (-a))$ (E.I.A)

$= (a' + a) + (-a)$ (Asociativa)

$= 0 + (-a)$ E.I.A.

$= -a$.

4) En el enunciado del axioma (M.4) se ~~deduce~~ puede escribir:

$$\underbrace{a\cdot 1 = 1\cdot a}_{\text{Conmutativa}} = a$$

5) El elemento neutro multiplicativo es único.

6) El elemento inverso multiplicativo es único

Propiedades

1) $\forall a \in K: \; a = -(-a)$

Prueba:
Por el axioma E.N.A. $\quad a + (-a) = 0$, conmutativa

$(-a) + a = 0$

$(-a)+a=0$, ENA (unicidad)

$a=-(-a)$

Otra forma:

$$
\begin{aligned}
a &= a+0 \quad (ENA)\\
a &= a+((-a)+-(-a)) \quad \text{Asoc.}\\
&= (a+(-a))+-(-a) \quad \text{E.N.A.}\\
&= 0+-(-a) \quad \text{E.N.A.}\\
&= -(-a)
\end{aligned}
$$

② Ley Cancelativa

Si $a+b=a+c \rightarrow b=c$

Prueba

$$
\begin{aligned}
b &= b+0 \quad (E.N.A)\\
&= b+(a+(-a)) \quad (E.I.A.)\\
&= (b+a)+(-a) \quad \text{CONMUT.}\\
&= (a+b)+(-a) \quad \text{Por condición}\\
&= (a+c)+(-a) \quad \text{CONMUT.}\\
&= (c+a)+(-a) \quad \text{Asoc.}\\
&= c+(a+(-a)) \quad EIA\\
&= c+0 \quad ENA\\
&= c
\end{aligned}
$$

③ $\forall a \in K\setminus\{0\}$; $a=(a^{-1})^{-1}$

$$
\begin{aligned}
a &= a.1 \longrightarrow E.I.M\\
&= a((a^{-1}).(a^{-1})^{-1}) \quad \text{Asoc.}\\
&= (a.(a^{-1})).(a^{-1})^{-1}
\end{aligned}
$$

E.N.M. → Elemento neutro multiplicativo

$$
\begin{aligned}
&= (a.(a^{-1})).(a^{-1})^{-1} \quad E.I.M\\
&= 1.(a^{-1})^{-1} \quad E.I.M.\\
&= (a^{-1})^{-1} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

④ Ley Cancelativa

Si $a.b=a.c$ y $a\neq 0 \longrightarrow b=c$

Prueba

$$
\begin{aligned}
b &= b.1 \quad (E.N.M)\\
&= b.(a.a^{-1}) \quad (E.I.M)\\
&= (b.a).a^{-1} \quad \text{Asoc}\\
&= (a.b).a^{-1} \quad \text{CONMUT.}\\
&= (a.c).a^{-1} \quad \text{Por condición}\\
&= (c.a).a^{-1} \quad \text{CONMUT.}\\
&= c.(a.a^{-1}) \quad \text{ASOC.}\\
&= c.1 \quad E.I.M.\\
&= c \quad E.N.M. \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

⑤ $\forall a \in K$: $a.0=0$

Sabemos: $a.0=a.0+0$ (E.N.A) ... (I)

Por otro lado

$$\underbrace{a.0}_{E.N.A} = a.(0+0) \quad \text{Distrib.}$$

De (I) y (II) $= a.0+a.0$ ... (II)

$a.0 = a.0+0 = a.0+a.0$

Ley Cancelativa

$0=a.0$ $\blacksquare$

⑥ Sean $a, b \in \mathbb{K}$

Si $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

($\Leftarrow$)

I) $a = 0$; $\overbrace{0 \cdot b = b \cdot 0}^{\text{Por conmutativa}} \underset{\text{Por ⑤}}{=} 0$

II) $b = 0$;

$a \cdot 0 \underset{\text{Por ⑤}}{=} 0$

($\Rightarrow$) Supongamos que $a \neq 0$

$a \cdot b = 0$

$a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1}(0)$

$\downarrow$ ASOCIATIVA

$(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0$ Por ⑤

$1 \cdot b = 0$

$\downarrow$ ENM

$b = 0$

De forma análogo:

Para $b \neq 0 \longrightarrow a = 0$ $\blacksquare$

⑦ Sea $a, b \in \mathbb{K}$

Si $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$

($\Leftarrow$)

I) $a = b \Leftarrow$ $a(a) = a(b)$

$a^2 = b \cdot b$ Por condición

$a^2 = b^2$

II) $a = -b$

$a(a) = a(-b)$

$\downarrow$ por condición

$a^2 = (-b)(-b)$

$\downarrow$ Ley de signos

$a^2 = (b)(b)$

$a^2 = b^2$ $\blacksquare$

($\Rightarrow$) tenemos: $a^2 = b^2$

$a^2 + (-b^2) = b^2 + (-b^2)$

$\downarrow$ EIA

$a^2 + (-b^2) = 0$

$a^2 - b^2 = 0$

Ojo:

$(a+b)(a-b) \overset{D.1}{=} (a+b)a - (a+b)b$; D.2

$= a^2 + ba - (ab + b^2)$; Ley de signos

$= a^2 + ba - ab - b^2$; CONMUT

$= a^2 + ab - ab - b^2$

$\downarrow$ EIA

$= a^2 + 0 - b^2$

$\downarrow$ ENA

$= a^2 - b^2$

Entonces:

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 0$

) Por ⑥

$a + b = 0 \quad \vee \quad a - b = 0$

$\downarrow$ EIA

$b = -a \quad \vee \quad b = a$

Notación

$a^n = \underbrace{a \dots a}_{\text{"n" veces}}, \quad n \in \mathbb{N}$

Obs:

$a \cdot b$

$a b$

ab

Tarea (Ley de signos) Probar:

- $a = -(-a)$
- $(-a)(-b) = ab$
- $(-a)(b) = (a)(-b) = -ab$