Práctica calificada de Cálculo Integral

Facultad de Ciencias - Universidad Nacional de Ingeniería - Lima - Perú
Descarga la versión actualizada en `http:/github.com/carlosal1015`

Actualizado al 14 de abril de 2017.

Ejercicio 0.1 Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x>0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

Determine si f tiene antiderivada, en caso que la tenga muestre una. Justifique su respuesta.
Solución :
Por contradicción, supongamos que una existe función $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$. Pero si F es diferenciable en $\mathbb{R}$. Entonces por el *Teorema del Valor Medio*:

a) Si $x > 0$, $\exists\, c \in \,]0, \infty[^{\text{o}}$ tal que

$$\begin{aligned} & F'(c) &=& \frac{F(x)-F(0)}{x-0}. \\ \Longrightarrow\; & f(c) &=& \frac{F(x)-F(0)}{x-0}. \\ \Longrightarrow\; & c^2+1 &=& \frac{F(x)-F(0)}{x} \\ \Longrightarrow\; & c^2x + x + F(0) &=& F(x) \end{aligned}$$

b) Si $x \leq 0$, $\exists\, d \in \,]-\infty, 0]^{\text{o}}$ tal que

$$\begin{aligned} & F'(d) &=& \frac{F(0)-F(x)}{0-x}. \\ \Longrightarrow\; & f(d) &=& \frac{F(0)-F(x)}{0-x}. \\ \Longrightarrow\; & -d^2 &=& \frac{F(0)-F(x)}{-x}. \\ \Longrightarrow\; & d^2x &=& F(0)-F(x). \\ \Longrightarrow\; & F(x) &=& F(0)-d^2x. \end{aligned}$$

Luego hallemos $F'(x)\Big|_{x=0}$:

$$F'_{+}(0) = 2cx + 1\Big|_{x=0} = 2c(0) + 1 = 1$$

$$F'_{-}(0) = -2dx\Big|_{x=0} = -2d(0) = 0$$

¡1=0!. ni que $\mathbb{R}$ fuera un cuerpo de característica 0. ¡Contradicción! Todo empezó por suponer que F existe, por lo tanto F no existe, su antiderivada de f no existe.

Ejercicio 0.2 Integrar

$$\int \sqrt{x}\sqrt{1+x\sqrt{x}}\,dx$$

Solución :
Sea

$$u = \sqrt{x}.$$

$$du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dx}{2u}.$$

Entonces,

$$I = \int u\sqrt{1+u^2\cdot u}\,(2u\,du)$$

Sea

$$w = 1+u^3$$

$$dw = 3u^2\cdot\,du \implies \frac{dw}{3} = u^2\,du.$$

Entonces,

$$I = 2\int (\frac{dw}{3}\cdot\sqrt{w}) = \frac{2}{3}\int w^{1/2}\,dw = \frac{2}{3}\frac{w^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + K = (\frac{2}{3})^2\cdot w^{3/2} + K.$$

Reemplazando:

$$I = (\frac{2}{3})^2\,[(1+u^3)]^{3/2} + K.$$

Seguimos reemplazando,

$$I = (\frac{2}{3})^2\,[(1+\sqrt{x}^3)]^{3/2} + K. \blacksquare$$

Ejercicio 0.3 Halle la antiderivada de

$$f(x) = \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$$

tal que dicha antiderivada pasa por el punto $P(0, \frac{709}{280})$.
Solución :
Bien, nuestra estrategia será:

$$I = \int f(x) = \int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$$

Resolviendo la integral ***Naranja***
$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}dx}.$$
Integrando por partes:
$$u = x^2 \qquad dv = \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}}$$
$$du = 2x\ dx \qquad v = \frac{3}{2}(1+x)^{2/3}$$
$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}dx} = x^2\cdot\frac{3}{2}(1+x)^{2/3} - \int \frac{3}{2}(1+x)^{2/3}\cdot 2x\ dx = x^2\cdot\frac{3}{2}(1+x)^{2/3} - 3\int x(1+x)^{2/3}\ dx$$
Pero,
$$\int x(1+x)^{2/3}\ dx$$
$$u = (1+x)^{1/3} \implies u^6 = (1+x)^2, \text{ diferenciando}$$
$$6u^5\ du = 2(1+x)\ dx, \text{ pero } (1+x) = u^3$$
$$3u^2\ du = dx$$
$$\int x(1+x)^{2/3}\ dx = \int (u^3-1)\cdot u^2\cdot(3u^2\ du) = 3\int (u^7 - u^4\ du) = 3\int u^7\ du - 3\int u^4\ du$$
$$\int x(1+x)^{2/3}\ dx = 3\cdot\frac{u^{7+1}}{7+1} + K_1 - 3\cdot\frac{u^{4+1}}{4+1} + K_2 = \frac{3}{8}u^8 - \frac{3}{5}u^5 + K_3 = \frac{3}{8}(1+x)^{8/3} - \frac{3}{5}(1+x)^{5/3} + K_3.$$
Resolviendo la integral ***Celeste***
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}.$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \int (1+x)^{-1/2}\ dx = \frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + K_4 = \frac{1}{2}(1+x)^{1/2} + K_4.$$
Luego:
$$I = \frac{3}{2}x^2(1+x)^{2/3} - 3[\frac{3}{8}(1+x)^{8/3} - \frac{3}{5}(1+x)^{5/3} + K_3] + \frac{1}{2}(1+x)^{1/2} + K_4.$$
$$I = \frac{3}{2}x^2(1+x)^{2/3} - \frac{9}{8}(1+x)^{8/3} + \frac{9}{5}(1+x)^{5/3} + \frac{1}{2}(1+x)^{1/2} + K.$$
Pero $(0, \frac{709}{280}) \in f$. Luego:
$$\frac{709}{280} = \frac{3}{2}\cdot 0^2(1+0)^{2/3} - \frac{9}{8}(1+0)^{8/3} + \frac{9}{5}(1+0)^{5/3} + \frac{1}{2}(1+0)^{1/2} + K$$
$$\frac{709}{280} = 0 - \frac{9}{8} + \frac{9}{5} + \frac{1}{2} + K \implies K =$$

⋆ Integral *Naranja*

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

⋆ Integral *Celeste*

Figura 1: Estrategia de resolución

Ejercicio 0.4 Halle la antiderivada general de

$$f(x) = \arctan \sqrt{x}\, dx$$

Solución :
Usemos el método de sustitución:

$$u = \sqrt{x} \implies du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Y reemplazamos la variable u x:

$$I = \int \arctan u \cdot 2u\, du = 2 \int u \arctan u\, du.$$

Empleamos la técnica de integración por partes:

$$\alpha = \arctan u \qquad d\beta = u\, du$$
$$d\alpha = \frac{du}{1+u^2} \qquad \beta = \frac{u^2}{2}$$

Entonces nos queda:

$$I = 2[\arctan u \cdot \frac{u^2}{2} - \int \frac{u^2}{2} \cdot \frac{du}{1+u^2}] = u^2 \arctan u - \int \frac{u^2\, du}{1+u^2}$$

Y sustituimos

$$u^2 = t \implies 2u\, du = dt.$$

Reemplazamos la variable de integración u por t y denominemos Ω a la siguiente integral:

$$\Omega = \int \frac{t \cdot \frac{dt}{2}}{1+t} = \frac{1}{2} \int \frac{t\, dt}{1+t}.$$

Pero por división sintética (ver figura 2): $\dfrac{t}{1+t} = 1 + \dfrac{-1}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$ y nos quedaría:

$$\Omega = \frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{1+t} = \int dt - \int \frac{dt}{1+t} = t - \ln|1+t| + K = u^2 - \ln|1+u^2| + K_1.$$

Por último reemplazamos Ω en I y lo expresamos en la variable x:

$$I = \frac{1}{2}u^2 \arctan u - \Omega = \frac{1}{2}u^2 \arctan u - [u^2 - \ln|1+u^2| + K_1.]$$

$$I = \frac{1}{2}x \arctan \sqrt{x} - [x - \ln|1+x| + K_1.]$$

$$I = \frac{1}{2}x \arctan \sqrt{x} - x + \ln|1+x| + K. \blacksquare$$

$$\begin{array}{r|l} t & \; t+1 \\ \cline{2-2} -\;\; t+1 & \qquad 1 \\ \cline{1-1} -1 & \end{array}$$

Figura 2: División sintética de $\dfrac{t}{1+t}$

Ejercicio 0.5 Calcule

$$I = \int e^{ax} \cos bx \; dx$$

Solución :
Usemos el método de integración por partes (IPP).

$$u = e^{ax} \qquad dv = \cos(bx)\,dx$$

$$du = e^{ax} a\,dx \qquad v = \frac{\sin(bx)}{b}$$

Luego,

$$I = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx).$$

Ahora vamos a integrar por partes a

$$\int e^{ax}\sin(bx)$$

$$u = e^{ax} \qquad dv = \sin(bx)\,dx$$

$$du = e^{ax} a\,dx \qquad v = -\frac{\cos(bx)}{b}$$

Luego nos queda:

$$I = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}[e^{ax}\frac{-\cos(bx)}{b} - \int \frac{-\cos(bx)}{b}e^{ax} a\,dx]$$

$$I = \frac{e^{ax}\sin(bx)}{b} - \frac{a}{b}[e^{ax}\frac{-\cos(bx)}{b}] - (\frac{a}{b})^2 I$$

Despejando y simplificando nos quedará:

$$I = \frac{\frac{1}{b}[e^{ax}\sin(bx) + \frac{a}{b}e^{ax}\cos(bx)]}{1 + (\frac{a}{b})^2} + K.$$