Práctica calificada de Cálculo Integral

Facultad de Ciencias - Universidad Nacional de Ingeniería - Lima - Perú
Descarga la versión actualizada en `http:/github.com/carlosal1015`

Actualizado al 13 de abril de 2017.

Ejercicio 0.1 Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x>0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

Determine si f tiene antiderivada, en caso que la tenga muestre una. Justifique su respuesta.

Ejercicio 0.2 Integrar

$$\int \sqrt{x}\sqrt{1+x\sqrt{x}}\, dx$$

Solución :
Sea

$$u = \sqrt{x}.$$

$$du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dx}{du}.$$

Entonces,

$$I = \int u\sqrt{1+u^2\cdot u}\,(2u\,du)$$

Sea

$$w = 1+u^3$$

$$dw = 3u^2 \cdot du \implies \frac{dw}{3} = u^2\,du.$$

Entonces,

$$I = 2\int (\frac{dw}{3}\cdot\sqrt{w}) = \frac{2}{3}\int w^{1/2}\,dw = \frac{2}{3}\frac{w^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + K = (\frac{2}{3})^2 \cdot w^{3/2} + K.$$

Reemplazando:

$$I = (\frac{2}{3})^2\,[(1+u^3)]^{3/2} + K.$$

Seguimos reemplazando,

$$I = (\frac{2}{3})^2\,[(1+\sqrt{x}^3)]^{3/2} + K. \blacksquare$$

Ejercicio 0.3 **Halle la antiderivada de**

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$$

tal que dicha antiderivada pasa por el punto $P(0, \frac{709}{280})$.

Ejercicio 0.4 **Halle la antiderivada general de**

$$f(x) = \arctan \sqrt{x}\, dx$$

Solución :
Usemos el método de sustitución:

$$u = \sqrt{x}$$

$$du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

Luego:

$$I = \int \arctan u \cdot 2\, du \cdot u$$

$$I = 2\int u \arctan u\, du$$

Empleamos la técnica de integración por partes:

$$\alpha = \arctan u \qquad d\beta = u\, du$$

$$d\alpha = \frac{du}{1+u^2} \qquad \beta = \frac{u^2}{2}$$

Entonces nos queda:

$$I = \arctan u \cdot \frac{u^2}{2} - \int \frac{u^2}{2} \cdot \frac{du}{1+u^2}$$

$$I = \frac{1}{2}u^2 \arctan u - \frac{1}{2}\int \frac{u^2\, du}{1+u^2}$$

Sea

$$u^2 = t \implies 2u\, du = dt$$

Luego

$$\int \frac{t \cdot \frac{dt}{2}}{1+t} = \frac{1}{2}\int \frac{t\, dt}{1+t}$$

Pero por división sintética $\dfrac{t}{1+t} =$

Ejercicio 0.5 **Calcule**

$$I = \int e^{ax} \cos bx\, dx$$

<u>Solución</u> :

Usemos el método de integración por partes (IPP).

$$u = e^{ax} \qquad dv = \cos(bx)\,dx$$

$$du = e^{ax} a\,dx \qquad v = \frac{\sin(bx)}{b}$$

Luego,

$$I = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx).$$

Ahora vamos a integrar por partes a

$$\int e^{ax}\sin(bx)$$

$$u = e^{ax} \qquad dv = \sin(bx)\,dx$$

$$du = e^{ax} a\,dx \qquad v = -\frac{\cos(bx)}{b}$$

Luego nos queda:

$$I = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}[e^{ax}\frac{-\cos(bx)}{b} - \int \frac{-\cos(bx)}{b}e^{ax} a\,dx]$$

$$I = \frac{e^{ax}\sin(bx)}{b} - \frac{a}{b}[e^{ax}\frac{-\cos(bx)}{b}] - (\frac{a}{b})^2 I$$

Despejando y simplificando nos quedará:

$$I = \frac{\frac{1}{b}[e^{ax}\sin(bx) + \frac{a}{b}e^{ax}\cos(bx)]}{1 + (\frac{a}{b})^2} + K.$$