UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICAS

Segunda Práctica Dirigida
CALCULO DIFERENCIAL CM131
Ciclo 2013-II

1. En $\mathbb{N}$ demostrar:
   (a) La clausura de la adición y el producto.
   (b) La ley asociativa y conmutativa para la suma.
   (c) La ley asociativa y conmutativa para la multiplicación.
   (d) La ley cancelativa para la suma y multiplicación.

2. Demostrar:
   (a) Si $n, x \in \mathbb{N}$ y $n < x$, entonces $n+1 \leq x$ (en otras palabras, si $n \in N$, entonces entre n y $n+1$ no hay otro natural).
   (b) Si a, b son enteros $a.b = 0$ si y sólo si $a = 0$ v $b = 0$.
   (c) Si a, b enteros
      i. $(-a) + (-b) = -(a+b)$.
      ii. $(-a)(-b) = a.b$.
      iii. $(-a)(b) = -(ab)$.

3. Si a, b y c son enteros:
   (a) $a + c > b + c$ si y sólo si $a > b$.
   (b) Si $c > 0$, $a > b$ si y sólo si $ac > bc$.
   (c) Si $c < 0$, $a > b$ si y sólo si $ac < bc$.

4. (a) No existe ningún $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 < n < 1$.
   (b) Si $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$ si y sólo si $a - b < 0$.
   (c) Si a y b son enteros tales que $a.b = 1$ entonces a y b son ambos 1 o -1.
   (d) Si a, $b \in \mathbb{Z}$ y $a < b$ entonces existe $c \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a + c = b$.

5. En los racionales $\mathbb{Q}$ demostrar:
   (a) La propiedad de la tricotomía.
   (b) Demostrar que la adición y la multiplicación están bien definidas.
   (c) Si x, y son racionales no nulos, entonces $(x.y)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.
   (d) Si x e y son racionales positivos con $x < y$, entonces $1/x > 1/y$.

6. (a) Si $\mathbb{Q}^+$ es el conjunto de los racionales postivos entonces $\mathbb{Q}^+$ es cerrado respecto a la adición y la multiplicación.
   (b) Si $x = [1, m] \in \mathbb{Q}^+$ entonces $x^{-1} \in \mathbb{Q}^+$.
   (c) Si $\mathbb{Q}^-$ es el conjunto de los racionales negativos, entonces $\mathbb{Q}^-$ es cerrado respecto a la adición pero no para la multiplicación.

7. Si $x, y, z \in \mathbb{Q}$ demostrar:
   (a) $x + z < y + z$ si y sólo si $x < y$.
   (b) Si $z > 0$, $xz < yz$ si y sólo si $x < y$.
   (c) Si $z < 0$, $xz < yz$ si y sólo si $x > y$.

8. Demostrar que la ecuación $x^2 = 3$ no tienen solución en $\mathbb{Q}$.

9. Demostrar: Si $a, b \in \mathbb{Q}^+$ y $a < b$ entonces $a^2 < ab < b$. ¿y si $a, b \in \mathbb{Q}^-$.?

10. Considerando $m, n \in \mathbb{N}$, probar que se cumple:

a) $s(m.s(n)) = m.n + s(m)$.

b) $s(s(m).s(n)) = s(m) + m.n + s(n)$

11. Dados dos números naturales x e y, luego se verifica una y solamente una de las afirmaciones siguientes:

 a) $x = y$.

 b) Existe $u \in \mathbb{N}$ tal que $x = y + u$.

 c) Existe $v \in \mathbb{N}$ de tal manera que $y = x + v$.

p. 37

12. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función tal que

$$f(n+1) > f(n)\,, \forall n \in \mathbb{N}$$

Pruebe que:

 a) Si $m < n$ entonces $f(m) < f(n)$.

 b) f es una función inyectiva.

13. Probar que $5n + 5 \leq n^2$ para todo entero $n \geq 6$.

14. Considere $S \subset \mathbb{Z}$ no vacio. Pruebe $\min S = \max S$ si y solo si S es un conjunto unitario.

15. Sea $S \neq \phi$ en $\mathbb{Z}$ la cual est acotada superiormente.
Considere

$$U(S) = \{u \in \mathbb{Z} : u \text{ cota superior de} S\}.$$

Probar que $S \cap U(S)$ es un conjunto unitario.

16. Probar que

$$1 + 2^{2n} + 3^{2n} + 2((-1)^{FIB(n)} + 1)$$

es divisible por 7 para todo $n \in \mathbb{N}$. $FIB(n+2) = FIB(n+1) + FIB(n)$, $FIB(1) = 1$, $FIB(2) = 1$.

17. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$ nunca son cuadrados perfectos:

 (a) $2^{2n-1} + 4^{2n-1} + 9^{2n-1}$.

 (b) $8^{2^n} - 5^{2^n}$.

18. Demuestre que para todo número natural $n \geq 2$, $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

19. Probar que $2^{2^n} + 3^{2^n} + 5^{2^n}$ es divisible por 19 para todo $n \in \mathbb{N}$.

20. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{i=1}^{n} F^2(i) = F(n)F(n+1) - 5$. $F(1) = 1$, $F(2) = 6$, $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$.

21. Sean a, b, c tres números naturales tales que $c = a + b$. Sea p un factor impar de $a^2 + b^2 + c^2$. Demostrar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$:

 (a) $(a^{6n-4} + b^{6n-4} + c^{6n-4})$ es divisible por p.

 (b) $(a^{6n-2} + b^{6n-2} + c^{6n-2})$ es divisible por p^2

Los Profesores
UNI, September 13, 2013.