Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2007-2

1$^{\text{ra}}$ Práctica Dirigida de Cálculo Diferencial (CM131 A-B-C)

1. **Simbolice los enunciados siguientes:**
   a) Si una sustancia orgánica se descompone, entonces sus componentes se transforman en abono y fertilizan el suelo.
   b) Si son más de las 22 horas, entonces la puerta está cerrada y yo no tengo la llave.
   c) Si este mineral no es duro, entonces no está compuesta de cristales de cuarzo.

2. **Use la lógica proposicional para contestar las siguientes preguntas. Se dan los enunciados:**
   Juan necesita un abogado o Juan necesita un médico.
   Si Juan necesita un abogado entonces Juan necesita un médico.
   a) ¿Necesariamente se deduce que "Juan necesita un abogado"?
   b)¿Necesariamente se deduce que "Juan necesita un médico"?

3. **Simbolice las proposiciones matemáticas siguientes:**
   a) Si x es menor que dos, entonces x es igual a uno o x es igual a cero.
   b) Si a la vez x es menor que tres y mayor que uno, entonces x es igual a dos.
   c) $y = 4$ y si $x < y$, entonces $x < 5$.
   d) O x es mayor que cinco y x es menor que siete o x no es igual a seis.
   e) Si $x + 3 > 5$ y $y - 4 > 0$, entonces $y > 6$.

4. **Simbolice y niegue las siguientes proposiciones:**
   a) Para todo número racional r existe un número entero n tal que $n \leq r < n + 1$
   b) Para todo número real a, existe un número natural n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $n > a$
   c) Es posible encontrar un número "y" entre 0 y 1, de modo que todo par de números $x, z \in \mathbb{R}$, también entre 0y1, satisfacen $z \leq y < x$
   d) Todos los americanos están locos.
   e) Hay al menos una persona que es feliz todo el tiempo.
   f) Todos los hombres son honestos o algún hombre es ladrón.
   g) Al final del ciclo, todos los alumnos del curso de Cálculo Diferencial tendrán una nota mayor o igual a 10.
   h) Es de día y todo el mundo se ha levantado.

5. **Halle la recíproca y la contrarrecíproca de cada una de las siguientes proposiciones:**
   a) Si él tiene valor, ganará.
   b) Es preciso ser fuerte para ser marinero.
   c) Solo si no se cansa ganará.
   d) Es suficiente que sea un cuadrado para ser un rectángulo.

6. **Sea P el conjunto de todos los peruanos, y H el conjunto de personas honestas. Exprese en palabras las siguientes proposiciones y establezca su valor de verdad:**
   a) $\forall x :\sim (x \in H)$ b) $\forall y : y \in P \rightarrow y \in H$
   c) $\forall z : z \in H \rightarrow z \notin P$ d) $\exists x : x \notin H \rightarrow x \in P$
   e) $\exists y : (y \notin H \rightarrow y \notin P) \wedge \forall w : (w \in H \rightarrow w \in P)$

7. **De las siguientes proposiciones. ¿Cuáles son equivalentes entre sí?**
   a) Es necesario que Juan no estudie en la Uni para que Luis viva en el Rimac.
   b) No es cierto que Luis viva en el Rimac y que Juan estudie en la Uni.
   c) Luis no vive en el Rimac y Juan no estudia en la Uni.

8. **Se sabe que $(p \wedge q)$ y $(q \rightarrow p)$ son falsos. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?**
   a) $(\sim p \vee t) \vee s$.
   b) $[(\sim p) \vee (q \wedge \sim t)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge \sim (q \wedge t)]$.
   c) $\sim [p \wedge (\sim q \vee \sim p)]$.

9. **La proposición $\sim (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim r)$ es equivalente a:**
   a)$p \wedge (p \vee \sim r) \wedge (\sim q)$ b)$p \wedge (\sim q) \wedge [\sim (q \wedge r)]$
   c)$(p \wedge \sim q) \vee [(p \wedge \sim r) \wedge \sim q]$

10. **Dado el conjunto $A = \{1; 2; 3\}$:Determine el valor de verdad de:**
    a)$\exists x \in A / \forall y \in A, x^2 < y + 1$
    b)$\forall x \in A, \exists y \in A / x^2 + y^2 < 11$
    c)$\forall x \in A, x^2 < 4 \leftrightarrow x < 3$

11. **Explique porqué las proposiciones no son equivalentes:**
    a)$\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / x < y$ b)$\exists y \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R} : x < y$

12. **Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones (aquí el conjunto universal es el de los números reales).**
a) $\forall x, |x| = x$; b) $\exists x, x^2 = x$; c) $\forall x, x+1 > x$; d) $\exists x, |x| = 0$; e) $\exists x, x^2 = x$; f) $\exists x, x+2 = x$

13. **Niegue las proposiciones del problema anterior.**

14. **Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones, $x, y \in \mathbb{R}$:**
a) $\forall x : (x-1)(x+1) = x^2 - 1$ b) $\forall x\ \exists y / x < y)$
c) $\forall x : [\exists y / x^2 + y^2 = (x+y)^2]$ d) $\exists x / \forall y, x + y = 0$
e) $\forall x : x \neq 0 \Rightarrow \exists y / xy = 1$ f) $\exists x / 3x - 2 = -4x + 1$

15. **Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones, donde $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$**

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (-y)(-x) = xy \Rightarrow xy > 0$

b) $\forall x \in M, \exists y \in M / x + y \leq 7$

c) $\exists x \in \mathbb{R} / \sqrt{-x} \in \mathbb{R}$

16. **Establezca las negaciones de:**

a) $\forall y \in \mathbb{R}, 0 < y < 1 : \exists x, z \in \mathbb{R}, 0 < x, z < 1 / x < y < z$.

b) $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0; \forall n (n > n_0 \rightarrow |a_n| < \epsilon)$.

c) $\forall x \in \mathbb{Z}, x + 3 > x$

d) $\exists x \in \mathbb{Z} / x^4 - x = 0$

e) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / x^2 - y^2 = x + y$

f) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / x > y \wedge y < x^2$.

g) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / x \geq y \vee x < y$.

h) $\forall x \in A, \exists y \in B / \forall z \in C, P(x, y, z) = 0$

i) $[\exists y \in A / \sim p(y)] \wedge [\forall x \in A, q(x) \vee r(x)]$

j) $\exists x \in A / \exists y \in B / [p(x) \rightarrow q(x, y)]$

17. **Utilice el modus ponendo ponens para deducir una conclusión de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes:**

a) **Si $x \neq 0$ entonces $x + y > 1$, $x \neq 0$**

b) **Si $x + y = z$ entonces $y + x = z$, $x + y = z$.**

c) **Si x es un número e y es un número, entonces $x + y$ es un número. x es un número e y un número.**

18. **Demuestre que las conclusiones son consecuencias de las premisas dadas en los siguientes ejercicios**

a) Demuestre: R
1) $P \rightarrow Q$
2) $\sim Q$
3) $\sim P \rightarrow R$

b) Demuestre: B
1) $\sim A \vee \sim B$
2) $\sim A \rightarrow E$
3) $\sim E$

c) Demuestre: C
1) $A \rightarrow B$
2) $B \rightarrow C$
3) A

d) Demuestre: R
1) $S \rightarrow \sim T$
2) S
3) $\sim T \rightarrow R$

19. **Demuestre usando Modus Tollendo Ponens los siguientes conjuntos.**

a) 1) $\sim Q \vee R$
2) $\sim R$

b) 1) $P \wedge Q$
2) $\sim Q$

c) 1) $\sim T \vee \sim R$
2) $\sim\sim R$

20. **Sea $n \in \mathbb{N}$. Si n^2 es múltiplo de 7, pruebe que n también lo es.**

21. **Demuestre que para un número entero n:**

a) **Si n^2 es par entonces n es par.**

b) **Si n^2 es múltiplo de 5 entonces n es múltiplo de 5.**

22. **Verifique la validez de los siguientes argumentos:**

a) $p \wedge q$
$\sim p \rightarrow q$
$\overline{\sim q}$

b) $p \wedge (p \vee q)$
$(p \vee q) \rightarrow r$
$r \rightarrow s$
$\overline{}$

c) $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$
$(\sim q) \vee (\sim s)$
$\overline{(\sim p) \vee \sim q}$

23. **Demuestre inductivamente.**

a) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

b) **Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ entonces $\dfrac{n}{m} \notin \mathbb{N}$**

c) $a, b \in \mathbb{N}$ **entones** $a + b \in \mathbb{N}$

d) $a, b \in \mathbb{N}$ **entones** $a.b \in \mathbb{N}$

e) **Sean $a, b, x \in \mathbb{N}$**
i) $a + x = b + x$ implica $a = b$
ii) $a.x = b.x$ implica $a = b$

24. **Sea $n \in \mathbb{N}$, demuestre**

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$ iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

25. **Dados los naturales m, n y p pruebe:**

a) $m + (n + p) = (m + n) + p$

b) $m + n = n + m$

c) $m + n = m + p \Rightarrow n = p$

d) **Tricotomía: se cumple una y sólo una de las condiciones**
$m = n$ ó $\exists p \in \mathbb{N} / m = n + p$ ó $\exists q \in \mathbb{N} / n = m + q$.

26. **Indique claramente en las funciones proposicionales siguientes, cuáles hipótesis del principio de inducción no se satisfacen:**

(a) $P(n) : n = 1$ b) $P(n) : n > 1$

(c) $P(n) : n^2 - 3n + 2 = 0$

(d) $P(n)$: $n = 1$ ó n es múltiplo de 2 ó n es múltiplo de 3

(e) $P(n) : \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} + 3$

Los profesores[1]
Uni, 7 de setiembre del 2007

[1] Hecho en LaTeX