Práctica Dirigida $N°1$ de Cálculo integral CM 132

Undg. Carlos Alonso Aznarán Laos
E-mail: caznaranl@uni.pe
Science Department, National University of Engineering

Temas: Antiderivadas. Integral Indefinida. Propiedades básicas de la integral indefinida. Aplicaciones. Métodos de Integración: Sustitución, Integración por partes, Integrales indefinidas de funciones trigonométricas. Inducción Matemática.
Profesores: Roger Metzger, Richard Acuña, Angello Morante, Luis Roca, José Zamudio, Johnny Valverde, Maritza Moreno.

---

1. Determine si las siguientes funciones poseen antiderivadas. Justifique sus respuestas.

   a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \geq 0 \\ 1-x^2 & x < 0 \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} x^3+1 & x \geq 0 \\ 1-x^3 & x < 0 \end{cases}$

   d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

   e) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & x \geq 0 \\ \cos(x) & x < 0 \end{cases}$

Solución:

a) Supongamos que $f(x)$ posee antiderivada, es decir,

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 2x + a & x > 0 \\ b & x = 0 \\ -\dfrac{x^3}{3} + c & x < 0 \end{cases}$$

Es decir,

$$f(x) = F'(x)$$

$$\boxed{\text{Como F es derivable} \implies F \text{ es continua.}}$$

$$\implies \lim_{x\to 0^-} F(x) = \lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0)$$

$$c = a = b$$

$$\implies F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 2x + a & x > 0 \\ a & x = 0 \\ -\dfrac{x^3}{3} + a & x < 0 \end{cases}$$

Pero, • $F'_-(0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{F(0+h) - F(0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-\frac{h^3}{3} + \cancel{a} - \cancel{a}}{h}$$

$$= 0.$$

• $F'_+(0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{F(0+h) - F(0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{h^2}{2} + 2h + \cancel{a} - \cancel{a}}{h}$$

$$= 2.$$

$\implies F'_-(0) \neq F'_+(0) \quad (\implies \impliedby),$

ya que habíamos considerado que posee antiderivada. $\square$

b) E

2. Encontrar una función F tal que

a) $F'(x) = \arctan(\sqrt{x})$ y $F(1) = 1$.

b) $F'(x) = 2x(\sqrt{16 - x^2})$ y $F(1) = 0$.

c) $F'(x) = \dfrac{\sec^2(\ln(x))}{2x}$ y $F(1) = 0$.

Solución:

a) Emplearemos método de sustitución

$$\arctan\sqrt{x} = u \iff \sqrt{x} = \tan u$$
$$x = \tan^2 u \implies dx = d(\tan^2 u)$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} F(x) = \int \arctan(\sqrt{x}) = \int u \cdot d(\tan^2 u) \\ &= u \cdot \tan^2 u - \int \tan^2 u \, du \\ &= u \cdot \tan^2 u - \int (\sec^2 u - 1)\, du \\ &= u \cdot \tan^2 u - \int \sec^2 u \, du + \int 1 \, du \\ &= u \cdot \tan^2 u - \tan u + u + C, \text{ C: constante} \\ &= \arctan\sqrt{x} \cdot x - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + C, \text{ C: constante .} \end{aligned}$$

Además, $F(1) = 1$

$$\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} + C = 1. \implies C = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore F(x) = \arctan(\sqrt{x}) \cdot x - \sqrt{x} + \arctan x + 2 - \frac{\pi}{2} \quad \square$$

b) Muy bien, realizaremos la siguiente sustitución en la siguiente integral $\int 2x(\sqrt{16-x^2})\,dx$.

$$\boxed{\begin{aligned} u^2 &= 16 - x^2 \\ 2u\,du &= -2x\,dx \end{aligned}}$$

Reemplazamos en la integral

$$\begin{aligned} F(x) = \int 2x(\sqrt{16-x^2})\,dx = -\int 2u \cdot u\,du = -2\int u^2\,du \\ = -2 \cdot \frac{u^3}{3} + C, \text{ C: constante} \\ = -\frac{2}{3}(16-x^2)^{\frac{3}{2}} + C, \text{ C: constante .} \end{aligned}$$

Pero, del dato $F(1) = 0$, de esta manera

$$F(1) = -\frac{2}{3}(16-1^2)^{\frac{3}{2}} + C = 0 \implies C = \frac{2}{3}\sqrt{3375}.$$

$$\therefore F(x) = -\frac{2}{3}(16-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\sqrt{3375} \quad \square$$

c) Realizaremos la sustitución

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \ln x \\ du &= \frac{dx}{x} \end{aligned}}$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} F(x) = \frac{\sec^2(\ln(x))}{2x} &= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,du \\ &= \frac{1}{2}\tan u\,du + C, \text{ C: constante} \\ &= \frac{1}{2}\tan(\ln x) + C, \text{ C: constante} \end{aligned}$$

$$F(1) = \frac{1}{2}\tan(\ln 1) + C, \text{ C: constante}$$
$$0 = C$$
$$\therefore F(x) = \frac{1}{2}\tan(\ln x)$$

3. Calcule las siguientes integrales indefinidas

a) $\displaystyle\int x^{-3} + \frac{3}{4}x^4\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^4 + 5\sqrt[3]{x} - 3x\sqrt{x} - 2}{4x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+2}}$

e) $\displaystyle\int |1+x| + |1-x|\, dx$

f) $\displaystyle\int (x^3 - x^{-3})\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\, dx$

Solución:

a) Dado que la integral indefinida es *lineal*, podemos expresar $\displaystyle\int x^{-3} + \frac{3}{4}x^4\, dx$ como

$$\begin{aligned}
\int x^{-3} + \frac{3}{4}x^4\, dx &= \int x^{-3}\, dx + \frac{3}{4}\int x^4\, dx \\
&= \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C_1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{x^{4+1}}{4+1} + C_2 \\
&= -\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{20}x^5 + C, \ \text{C: constante} .
\end{aligned}$$

b) La integral pedida es igual

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4 + 5\sqrt[3]{x} - 3x\sqrt{x} - 2}{4x}\, dx &= \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{x}\, dx + \frac{5}{4}\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x}\, dx - \frac{3}{4}\int \frac{x\sqrt{x}}{x}\, dx - \frac{2}{4}\int \frac{dx}{x} \\
&= \frac{1}{4}\int x^3\, dx + \frac{5}{4}\int x^{-2/3}\, dx - \frac{3}{4}\int x^{1/2}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1} + C_1 + \frac{5}{4}\cdot\frac{x^{-2/3+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C_2 - \frac{3}{4}\cdot\frac{x^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + C_3 - \frac{1}{2}\ln|x| + C_4 \\
&= \frac{1}{16}\cdot x^4 + \frac{15}{4}\cdot x^{1/3} - \frac{1}{2}\cdot x^{1/3} - \frac{1}{2}\ln|x| + C, \ \text{C: constante} .
\end{aligned}$$

c) La siguiente integral racional podemos expresarlo como

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2}{x+1}\, dx &= \int \frac{x^2 - 1 + 3}{x+1}\, dx \\
&= \int \frac{\cancel{(x+1)}\cdot(x-1)}{\cancel{x+1}}\, dx + \int \frac{3}{x+1}\, dx \\
&= \int (x-1)\, dx + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} \\
&= \frac{x^2}{2} - x + C_1 + 3\ln|x+1| + C_2 \\
&= \frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x+1| + C, \ \text{C: constante} .
\end{aligned}$$

d) Realizamos la siguiente sustitución

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \sqrt{2}\tan u \\ dx &= \sqrt{2}\sec^2 u\, du \end{aligned}}$$

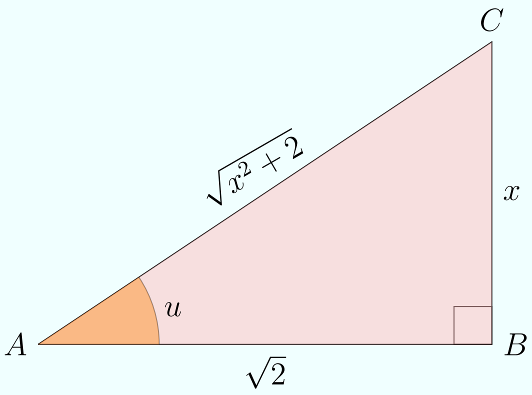

Figura 1: Triángulo trigonométrico

Al reemplazar

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{2}\sec^2 u\,du}{2\tan^2 u\sqrt{2\sec^2 u}} \\
&= \int \frac{\sqrt{2}\sec^2 u\,du}{2\tan^2 u\sqrt{2}\sec u} \\
&= \frac{1}{2}\int \cot u \csc u\,du \\
&= -\frac{1}{2}\csc u + C,\ \text{C: constante} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+2}}{x} + C,\ \text{C: constante .} \quad \square
\end{aligned}
$$

e) Para resolver ejercicios con valor absoluto debemos de trabajar cada dominio del

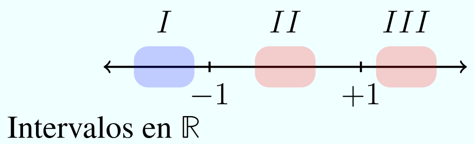

Figura 2: Intervalo en $\mathbb{R}$

Veamos

① Cuando $x < -1$, es decir, $x + 1 < 0$. Luego

$$
\begin{aligned}
\int |1+x| + |1-x|\,dx &= \int \left(-(1+x) + (1-x)\right)\,dx \\
&= \int \left(-\cancel{1} - x + \cancel{1} - x\right)\,dx \\
&= \int -2x\,dx \\
&= -2\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} + C,\ \text{C: constante .} \\
&= -x^2 + C,\ \text{C: constante}
\end{aligned}
$$

② Cuando $x \in [-1,1]$, es decir, $x-1 \leq 0 \wedge 0 \leq x+1$. Luego

$$\begin{aligned}
\int |1+x|+|1-x|\,dx &= \int ((1+x)+(1-x))\;dx \\
&= \int (1+\cancel{x}+1-\cancel{x})\;dx \\
&= 2\int dx \\
&= 2x + C,\ \text{C: constante}\ .
\end{aligned}$$

③ Cuando $x > 1$, es decir, $x-1>0$. Luego

$$\begin{aligned}
\int |1+x|+|1-x|\,dx &= \int ((1+x)+(1-x))\;dx \\
&= \int (1+\cancel{x}+1-\cancel{x})\;dx \\
&= 2\int dx \\
&= 2x + C,\ \text{C: constante}\ .
\end{aligned}$$

4. Calcule las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 2x\sqrt{1+2\cos(2x)}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\tan^2(x)}{\sqrt{x}}\,dx$

c) $\displaystyle\int x\cos^3 x\,dx$

d) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arc\,sen}(x)\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+8}{x\sqrt{x-4}}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{(5x+1)\sqrt{100x^2+40x-5}}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{5x+2}{\sqrt{3x}\sqrt{1-3x}}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\,dx$

k) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}\,dx$

[0]Voy a consultar al profesor sobre este ejercicio.

l) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\operatorname{sen}^3(x)}\,\sqrt[3]{1+\operatorname{sen}^{3/4}(x)}}\,dx$

m) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5x^2-8x-1}}\,dx$

Solución:

a)

b)
$$\begin{aligned}\int \frac{\tan^2(x)}{\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{\sec^2(x)-1}{\sqrt{x}}\,dx\\ &= \int \frac{\sec^2(x)}{\sqrt{x}}\,dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

La integral azul es sencilla de resolver, pues es del tipo $\displaystyle\int x^n\,dx,\ n\in\mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx\\ &= \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C_2\\ &= 2\sqrt{x}+C_2.\end{aligned}$$

Ahora nos queda resolver la integral roja.

Si realizamos el siguiente intento de *integración por partes*:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x^{-\frac{1}{2}} & dv = \sec^2 x\,dx \\ du = -\dfrac{1}{2}x^{-3/2}\,dx & v = \tan x \end{array}}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec^2(x)}{\sqrt{x}}\,dx &= x^{-1/2}\tan x - \int \tan x\cdot\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)\,dx\\ &= x^{-1/2}\tan x + \frac{1}{2}\int \tan x\cdot x^{-3/2}\,dx\end{aligned}$$

Ahora, tratemos de determinar la integral verde, quizá deberíamos de detenernos, pues la integral no es más sencilla de resolver, pero continuemos.

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \tan x & dv = x^{-3/2}\,dx \\ du = \sec^2 x\,dx & v = \dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -2x^{-1/2} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \tan x\cdot x^{-3/2}\,dx &= \frac{1}{2}\tan x\cdot -2x^{-1/2} - \int -2x^{-1/2}\sec^2 x\,dx\\ &= -\tan x\cdot x^{-1/2} + 2\int \sec^2 x\cdot x^{-1/2}\,dx\end{aligned}$$

Y si integramos por partes de la otra manera, en realidad es más complicado . . .
Pero con el aporte del profesor Ronald Mas se resuelve de inmediato. Veamos

$$I=\int\frac{\tan^2(x)}{\sqrt{x}}\,dx=2\int\tan^2 x\,d(\sqrt{x})\quad\text{ya que }\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right]=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Antes de continuar veamos una integración por partes y una sustitución "$u=\tan^2 x=\sec^2 x$":

$$\boxed{\begin{array}{ll} u=\tan^2 x & dv=d(\sqrt{x}) \\ du=2\tan x\cdot\sec^2 x\,dx & v=\sqrt{x}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} du&=2\sec x\cdot\boldsymbol{\sec x\cdot\tan x\,dx}\\ \int du&=2\int\sec x\,\boldsymbol{d(\sec x)}\\ u&=2\cdot\frac{\sec^{1+1}x}{1+1}=\sec^2 x\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
I&=2\left[\tan^2 x\cdot\sqrt{x}-\int\sqrt{x}\cdot d(\tan^2 x)\,dx\right] && \text{por integración por partes.}\\
&=2\left[\tan^2 x\cdot\sqrt{x}-\int\sqrt{x}\cdot d(\sec^2 x)\,dx\right] && \text{sustituyendo }\tan^2 x\text{ por }\sec^2 x\\
&=2\left[\tan^2 x\cdot\sqrt{x}-\left(\sqrt{x}\sec^2 x-\int\sec^2 x\,d(\sqrt{x})\right)\right] && \text{integrando por partes}\\
&=2\left[\tan^2 x\cdot\sqrt{x}-\sqrt{x}\sec^2 x+\int\sec^2 x\,d(\sqrt{x})\right]\\
&=2\left[\tan^2 x\cdot\sqrt{x}-\sqrt{x}\sec^2 x+\int(1+\tan^2 x)\,d(\sqrt{x})\right] && \text{pero }\sec^2 x=1+\tan^2 x\\
&=2\left[\tan^2 x\cdot\sqrt{x}-\sqrt{x}\sec^2 x+\int d(\sqrt{x})+\int\tan^2 x\,d(\sqrt{x})\right]\\
&=2\tan^2 x\cdot\sqrt{x}-2\sqrt{x}\sec^2 x+\int d(\sqrt{x})+2I && \text{pero }\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C_2.
\end{aligned}$$

$$\therefore I=2\sqrt{x}\sec^2 x-2\tan^2 x\cdot\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C_2.\quad\square$$

c)

$$\begin{aligned}
\int x\cos^3 x\,dx&=\int x\cdot\cos^2 x\cdot\cos x\,dx\\
&=\int x(1-\operatorname{sen}^2 x)\,d(\operatorname{sen}x)\\
&=\int x\,d(\operatorname{sen}x)-\int x\cdot\operatorname{sen}^2 x\,d(\operatorname{sen}x)\\
&=x\operatorname{sen}x-\int\operatorname{sen}x\,dx-\frac{1}{3}\left[x\operatorname{sen}^3 x-\int\left(\frac{\operatorname{sen}3x-4\operatorname{sen}x}{3}\right)dx\right]\\
&=x\operatorname{sen}x+\cos x-\frac{x\operatorname{sen}^3 x}{3}+\frac{1}{9}\int\operatorname{sen}^3 x\,dx-\frac{4}{9}\int\operatorname{sen}x\,dx\\
&=x\operatorname{sen}x+\cos x-\frac{x\operatorname{sen}^3 x}{3}-\frac{\cos 3x}{27}+\frac{4}{9}\cos x+C,\ \text{C: constante}.
\end{aligned}$$

$$\therefore x\operatorname{sen}x+\frac{13}{9}\cos x-\frac{x\operatorname{sen}^3 x}{3}-\frac{\cos 3x}{27}+C,\ \text{C: constante}.$$

Pero debemos recordar las siguientes identidades trigonométricas de ángulo doble:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} & \tan(2\theta) = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \\ \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} & \cot(2\theta) = \dfrac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta} \end{array}}$$

Y de ángulo triple

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(3\theta) = -\operatorname{sen}^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta = -4\sin^3\theta + 3\operatorname{sen}\theta & \tan(3\theta) = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta} \\ \cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta & \cot(3\theta) = \dfrac{3\cot\theta - \cot^3\theta}{1-3\cot^2\theta} \end{array}}$$

d) Realizamos el siguiente cambio

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{arc\,sen} x = u \\ \qquad x = \operatorname{sen} u \longrightarrow \quad dx = \cos u\, du \end{array}}$$

Al reemplazar:

$$\begin{aligned} \int x^2 \operatorname{arc\,sen}(x)\, dx &= \int \operatorname{sen}^2 u \cdot u \cdot \cos u\, du \\ &= \int u \cdot \frac{d(\operatorname{sen}^3 u)}{3} \\ &= \frac{1}{3}\int u\, d(\operatorname{sen}^3 u) \\ &= \frac{1}{3}\left[u\operatorname{sen}^3 u - \int \operatorname{sen}^3 u\, du\right] \quad = \frac{u\operatorname{sen}^3 u}{3} - \frac{1}{3}\left(\int \frac{m}{n}\, du\right) \text{ Corregir} \end{aligned}$$

5. La rapidez de cambio de temperatura T (en°C) de un cuerpo está dada por la expresión

$$\frac{dT}{dt} = (t+2)T^{3/4}$$

donde t es el tiempo (en minutos). Si $T = 0$ en $t = 0$, encuentre una fórmula para T en función de t.

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= (t+2)T^{3/4} \\ \frac{dT}{T^{3/4}} &= (t+2)\, dt \end{aligned}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int \frac{dT}{T^{3/4}} &= \int (t+2)\, dt \\ \int T^{-3/4}\, dT &= \int t\, dt + 2\int dt \\ \frac{T^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1} + C_1 &= \frac{t^{1+1}}{1+1} + C_2 + 2t + C_3 \\ 4 \cdot T^{1/4} &= \frac{1}{2} \cdot t^2 + 2t + C, \text{ C: constante .} \end{aligned}$$

Pero tenemos que cuando $T = 0 \implies t = 0$, luego:

$$4 \cdot 0^{1/4} = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + C \implies C = 0.$$

$\therefore T(t) = \left(\frac{t^2}{8} + \frac{t}{2} \right)^4.$

6. Si $f''(x) = -af(x)$ y $g''(x) = bf(x)$, en donde a y b son constantes, calcule $\int f(x)g''(x)\,dx$ en términos de f, g, f', g'.

7. Determine una antiderivada de $f(x) = \dfrac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$, de modo que la gráfica de dicha antiderivada contenga al punto $\left(0, \dfrac{709}{280}\right)$.

Solución:

Veamos el siguiente diagrama

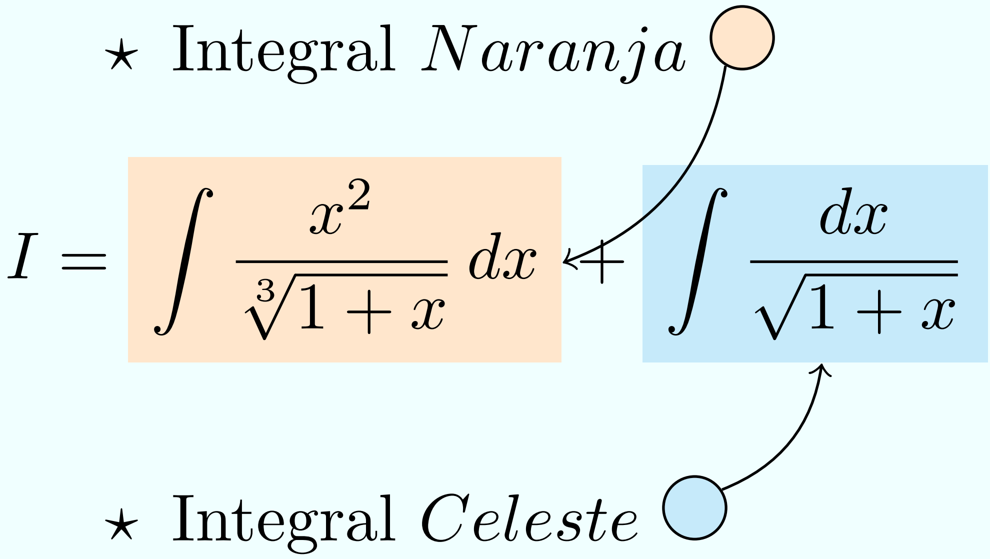

Figura 3: Diagrama de ayuda

8. Use integración por partes para deducir las fórmulas siguientes:

   a) $\displaystyle\int e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)\,dx = \frac{e^{\alpha x}\left(\alpha \operatorname{sen}(\beta x) - \beta \cos(\beta x)\right)}{\alpha^2 + \beta^2} + C$

   b) $\displaystyle\int e^{\alpha x} \cos(\beta x)\,dx = \frac{e^{\alpha x}\left(\alpha \cos(\beta x) - \beta \operatorname{sen}(\beta x)\right)}{\alpha^2 + \beta^2} + C$

c) $\displaystyle\int x^{\alpha}(\ln(x))^2\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\ln(x))^2 - 2\cdot\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\ln(x) + 2\cdot\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^3} + C,\ \alpha\neq 1$

9. En cada uno de los siguientes ítems, deduzca la fórmula de reducción que se da utlizando integración por partes.

   a) $\displaystyle\int x^{\alpha}e^{\beta x}\,dx = \frac{x^{\alpha}e^{\beta x}}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1}e^{\beta x}\,dx.$

   b) $\displaystyle\int x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta x)\,dx = -\frac{x^{\alpha}\cos(\beta x)}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1}\cos(\beta x)\,dx.$

   c) $\displaystyle\int x^{\alpha}\cos(\beta x)\,dx = \frac{x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta x)}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1}\operatorname{sen}(\beta x)\,dx.$

   d) $\displaystyle\int (\ln x)^{\alpha}\,dx = x(\ln x)^{\alpha} - \alpha\int (\ln x)^{\alpha-1}\,dx$

   e) $\displaystyle\int \left(a^2-x^2\right)^{\alpha}dx = x\left(a^2-x^2\right)^{\alpha} + 2\alpha\int x^2\left(\alpha^2-x^2\right)^{\alpha-1}dx$

   f) $\displaystyle\int \cos^{\alpha}(x)\,dx = \frac{\cos^{\alpha-1}(x)\operatorname{sen}(x)}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha}\int \cos^{\alpha-2}(x)\,dx.$

   g) $\displaystyle\int \sec^{n}(x)\,dx = \frac{1}{n-1}\tan(x)\sec^{n-2}(x) + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(x)\,dx, n\geq 2.$

Solución:

a)
$$\begin{aligned}\int x^{\alpha}e^{\beta x}\,dx = \int x^{\alpha}\frac{d(e^{\beta x})}{\beta} &= \frac{1}{\beta}\left[x^{\alpha}\cdot e^{\beta x}\cdot d(x^{\alpha})\right]\\ &= \frac{x^{\alpha\cdot e^{\beta x}}}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\beta x}\cdot x^{\alpha-1}\,dx\end{aligned}$$

10. Si $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$ entonces integre por partes $I_n - I_{n-1}$ para demostrar que

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}(x)\right].$$

Solución:

Veamos que para $n=1$, la expresión $I_1 = \arctan x + C_1$.
La expresión

$$\begin{aligned}I_n - I_{n-1} &= \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx\\ &= \int\left(\frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\right)dx\\ &= \int\left(\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\right)dx \quad \text{factorizamos } (1+x^2)^{n-1}\\ &= \int\left[\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} + \left(\frac{1}{1+x^2} - 1\right)\right]dx\\ &= \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx + \int\left(\frac{1}{1+x^2} - 1\right)dx\\ I_n - I_{n-1} &= I_{n-1} + \int\frac{dx}{1+x^2} - \int dx\\ I_n &= 2I_{n-1} + \arctan x - x + C.\end{aligned}$$

Ahora integramos por partes

11. Alabama Instruments Company ha montado una línea de producción para fabricar una calculadora nueva. La tasa de producción de estas calculadoras después de t semanas se modela con la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = 5000\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right) \text{ calculadoras/semana.}$$

Encuentre la cantidad de calculadoras producidas desde el principio de la tercera semana hasta el final de la cuarta.

Solución:

Este es un ejercicio en el cual deseamos encontrar la regla que nos diga el número de calculadoras producidas en función del tiempo (semanas).

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 5000\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right) \text{ calculadoras/semana.} \\
\int dx(\text{calculadoras}) &= 5000\int\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right) dt(\text{semanas}) \\
\int dx &= 5000\int dt - 5000\cdot 100\int \frac{dt}{(t+10)^2} \\
x + C_1 &= 5000\cdot t + C_2 - 500000\cdot -\left(\frac{1}{t+10}\right) + C_3 \\
x &= 5000t + 500000\cdot\left(\frac{1}{t+10}\right) + C
\end{aligned}$$

$\therefore x(t) = 5000(t + \frac{100}{t+10}) + C.$
Pero nos piden la cantidad de calculadoras producidas desde el principio de la tercera semana hasta el final de la cuarta semana (o inicio de la quinta semana), es decir:
$x(5) - x(3) = 5000\left[\left(5 + \frac{100}{5+10}\right) - \left(3 + \frac{100}{3+10}\right)\right] \approx 4871$ calculadoras.

12. En cada item, determine una función $y = y(x)$ derivable que cumpla la ecuación dada:

a) $y' = (1+x)(1+y)$.

b) $y' = \dfrac{y^2 + xy^2}{x^2y - x^2}$.

c) $y' = \dfrac{(1+x)y^2}{x^2(y-1)}$.

d) $xy' - y - xy = 0$.

e) $y'\tan(x) = (4+y^2)\sec^2(x)$

Solución:

a) Si la ecuación dada $y' = (1+x)(1+y)$ se escribe con diferenciales, tenemos

$$\frac{dy}{(y+1)} = (x+1)\,dx$$

y las variables están separadas. Antidiferenciamos ambos lados de la ecuación y obtenemos:

$$\int \frac{dy}{(1+y)} = \int (x+1)\,dx$$
$$\ln|y+1| = \frac{x^2}{2} + x + C$$

que es la solución completa.
Ahora despejando y en función de x y tomando antilogaritmo.
$y+1 = \exp(\frac{x^2}{2} + x + C)$
$\therefore \boxed{y(x) = \exp(\frac{x^2}{2} + x) + K.}$

b) Si la ecuación dada $y' = \dfrac{y^2 + xy^2}{x^2y - x^2} = \dfrac{y^2(1+x)}{x^2(y-1)}$ se escribe con diferenciales, tenemos

$$\frac{y-1}{y^2}\,dy = \frac{(x+1)}{x^2}\,dx$$

y las variables están separadas. Antidiferenciamos ambos lados de la ecuación y obtenemos:

$$\int \frac{y-1}{y^2}\,dy = \int \frac{(x+1)}{x^2}\,dx$$
$$\int \left(\frac{y}{y^2} - \frac{1}{y^2}\right)\,dy = \int \left(\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)\,dx$$
$$\int \frac{y}{y^2}\,dy - \int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{x}{x^2}\,dx + \int \frac{dx}{x^2}$$

Realizamos la u-substitution: $u_1 = y^2 \implies du_1 = 2y\,dy$ y $u_2 = x^2 = 2x\,dx$.

$$\frac{1}{2}\int \frac{du_1}{u_1} - \int y^{-2}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{du_2}{u_2} + \int x^{-2}\,dx$$
$$\frac{1}{2}\ln|u_1| - \frac{y^{-1}}{-1} = \frac{1}{2}\ln|u_2| + \frac{x^{-1}}{-1}$$
$$\frac{1}{2}\ln|y^2| + C_1 + \frac{1}{y} + C_2 = \frac{1}{2}\ln|x^2| + C_3 - \frac{1}{x} + C_4$$
$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\ln|y| + \frac{1}{y} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\ln|x| - \frac{1}{x} + C$$
$$\ln|y| + \frac{1}{y} = \ln|x| - \frac{1}{x}$$
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \ln|\frac{x}{y}|$$

Tomando antilogaritmo:
$\exp(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) = \frac{x}{y}$

c)

d) Si la ecuación diferencial dada

$$\begin{aligned} xy' - y - xy &= 0 \\ xy' - y(1+x) &= 0 \\ xy' &= y(1+x) \\ \frac{y'}{y} &= \frac{(1+x)}{x} \end{aligned}$$

se escribe con diferenciales, tenemos

$$\frac{dy}{y} = \frac{(1+x)}{x}\,dx$$

y las variables están separadas. Antidiferenciamos ambos lados de la ecuación y obtenemos:

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx + \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = x + \ln|x| + C$$

Tomamos antilogaritmo y nos queda:

$$y = \exp(x + \ln|x| + C)$$

13. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2}$ es un número entero positivo.

Solución:

Sea la propiedad $P(n)$ la expresión matemática

$$\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2} \in \mathbb{Z}^+$$

Para establecer $P(1)$ debemos demostrar:

$$\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^1 + \left(2-\sqrt{3}\right)^1}{2} \in \mathbb{Z}^+$$

Pero $\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right) + \left(2-\sqrt{3}\right)}{2} = \dfrac{2+\cancel{\sqrt{3}}+2-\cancel{\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \in \mathbb{Z}^+$.

Por tanto $P(1)$ es verdadera.

Supongamos que k es un entero con $k \geq 1$ tal que

$$\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k}{2} \in \mathbb{Z}^+ \qquad \text{hipótesis inductiva}$$

Debemos demostrar que

$$\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{k+1}}{2} \in \mathbb{Z}^+$$

Sabemos del binomio de Newton que: $(2+\sqrt{3})^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^{n-i}\sqrt{3}^i$

$(2+\sqrt{3})^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^{n-i}\sqrt{3}^i$

Ver siguiente vídeo como motivación al problema https://youtu.be/5pa1AryylpM.
También revisar https://math.stackexchange.com/questions/1903099/why-is-2-sqrt3n2
noredirect=1&lq=1.
También revisar https://math.stackexchange.com/questions/1903099/why-is-2-sqrt3n2
noredirect=1&lq=1.

14. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left((2k-1)x\right) = \frac{\operatorname{sen}(2nx)}{2\operatorname{sen}(nx)}$.

Solución:

Ver https://math.stackexchange.com/questions/728229/cosx-cos3x-cos2n-1x-sin2n

15. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p, q, a_i, b_i \in \mathbb{R}$,

$$2pq\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq q^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + p^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

16. Si P es un polinomio de grado n, demuestre que

$$\int e^x P(x)\, dx = e^x \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{d^j P(x)}{dx^j}.$$

Use este resultado para evaluar $\displaystyle\int \left(3x^4 + 2x^2\right) e^x\, dx$.

Facultad de Ciencias, 5 de septiembre del 2017.

Comentarios finales

1) No olvidar. Si una función es derivable, entonces es continua.
Si f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.
Supongamos que f es derivable en x_0. Entonces, para todo $x \in \mathcal{D}(f) - \{x_0\}$,

$$\boxed{f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0).}$$

Pero, por el álgebra de límites,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x\to x_0} (x - x_0) + \lim_{x\to x_0} f(x_0)\\ &= f'(x_0)(x_0 - x_0) + f(x_0) = 0 + f(x_0) = f(x_0).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, lo que significa que f es continua en x_0. $\square$

2) ¿Si una función es continua, entonces es diferenciable?

No, sea la función: $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ que es continua en 0, pero no es diferenciable allí.

Prueba

a) Continuidad en 0:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\left(x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)\\ &= 0 \text{ ¿ ?}\\ &= f(0).\end{aligned}$$

Usaremos el *teorema de las funciones mayorantes y minorantes* o teorema del sándwich para funciones en su segunda versión que dice: “Suponga $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. Si $|f(x) - L| \leq |g(x)|$, para todo x en alguna vecindad $N'_\varepsilon(x_0)$ *perforada* de x_0 , es decir, con $x_0 \notin N_\varepsilon(x_0)$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.”

Empezaremos con la desigualdad, $|\operatorname{sen} t| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$. Luego $\forall x \neq 0$, $|\operatorname{sen}(\frac{1}{x})| \leq 1$. Multiplicando ambos lados $|x|$, obtenemos
$$|x||\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|; \text{ es decir,}$$
$$|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|.$$

Pero $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, y por la segunda versión del teorema del Sándwich, $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. $\square$

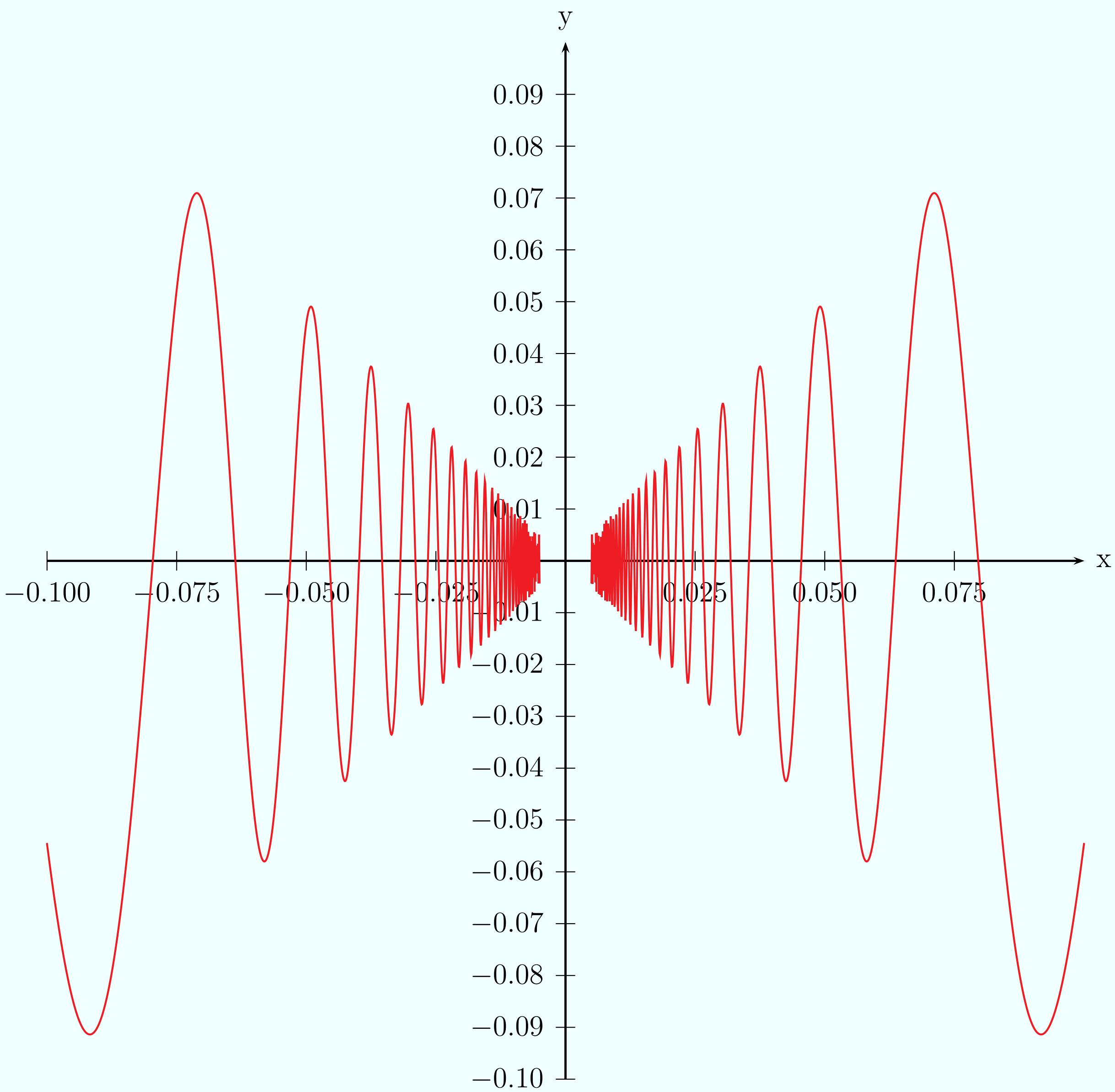

Figura 4: Gráfica de $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

3) Si una función es continua, entonces posee primitiva.

4) Si f es Riemann-integrable, entonces f posee antiderivada. No.

5) Si f posee antiderivada, entonces es Riemann-integrable. No.

6) Veamos un teorema muy importante, el *teorema del valor medio*.
Supongamos que $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es derivable en $[a,b]^{\mathrm{o}}$, donde $a < b$. Entonces $\exists c \in [a,b]^{\mathrm{o}} \ni f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

7) Una aplicación del *teorema del valor medio* es:
Supongamos que f es derivable en un intervalo I, y $\forall x \in I, f'(x) = 0$. Luego f es ***constante*** en I.

8) Un corolario de la aplicación anterior es:
Supongamos que f, g son derivables en un intervalo I, y $\forall x \in I, f'(x) = g'(x)$. Entonces $\exists$ una constante $C \in \mathbb{R} \ni \forall x \in I, f(x) = g(x) + C$.

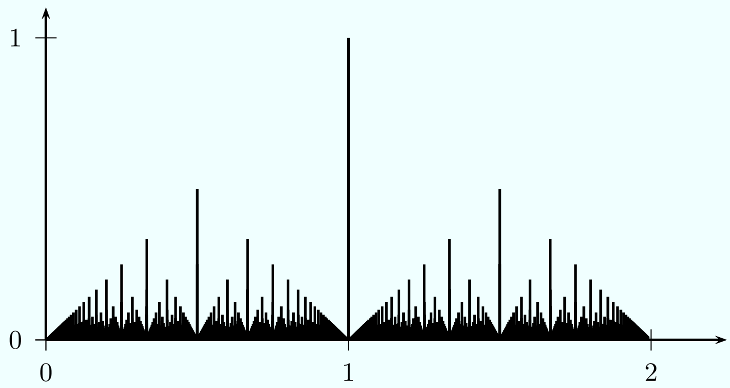

Figura 5: Gráfica de la función de Thomae.

9) Sea $a < b$ y $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$. Sea y un número real entre $f(a)$ y $f(b)$, es decir, $f(a) \leq y \leq f(b)$ o $f(a) \geq y \geq f(b)$. Entonces, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = y$. En otras palabras, el teorema del valor intermedio dice que si f toma los valores $f(a)$ y $f(b)$, entonces también debe tomar todos los valores entre ellos. Observe que si f no se supone continuo, entonces el teorema del valor intermedio ya no se aplica. Por ejemplo si $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ es la función

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Entonces $f(-1) = -1$ y $f(1) = 1$, pero no existe un $c \in [-1,1]$ para el cual $f(c) = 0$. Así, si una función es discontinua, esta puede "saltar" más allá de los valores intermedios. Sin embargo, las funciones continuas no pueden hacerlo.
Tenga en cuenta que una función continua puede tomar un valor intermedio varias veces. Por ejemplo, si $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ es la función $f(x) := x^3 - x$, entonces $f(-2) = -6$ y $f(2) = 6$, por lo que sabemos que existe un $c \in [-2,2]$ para el cual $f(c) = 0$. De hecho, en este caso existen tres valores tales de c; tenemos $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$.

10) Teorema de Rolle. Sean $a < b$ números reales y $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua que es diferenciable en $[a,b]^{\mathrm{o}}$. Supongamos también que $g(a) = g(b)$. Entonces allí existe un $x \in [a,b]^{\mathrm{o}}$ tal que $g'(x) = 0$.

11) Teorema del valor medio. Sean $a < b$ números reales y sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ la cual es continua en $[a,b]$ y diferenciable en $[a,b]^{\mathrm{o}}$. Entonces allí existe un $x \in [a,b]^{\mathrm{o}}$ tal que $f'(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.