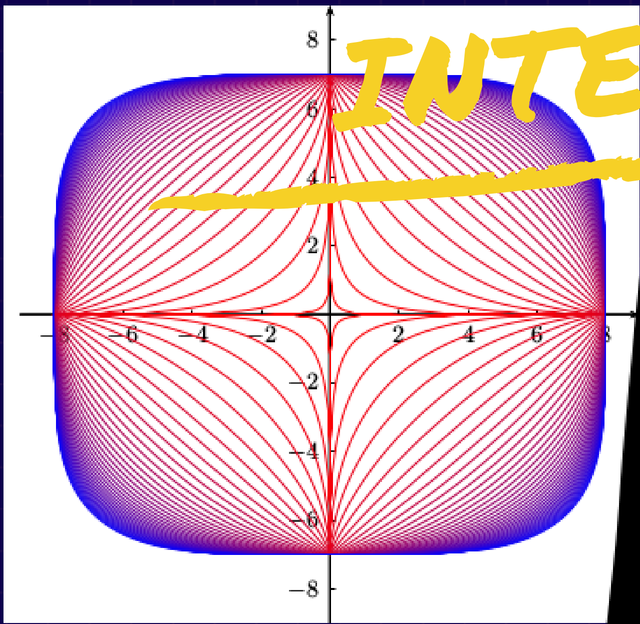
FACULTAD DE CIENCIAS

APUNTES DE CLASES DE CÁLCULO INTEGRAL



La única enseñanza que un profesor puede dar, en mi opinión, es la de pensar delante de sus estudiantes.
Henri Lebesgue

Temas:
Antiderivadas
La integral
Técnicas de integración
Las funciones logartimo y exponencial
Áreas y volúmenes
Coordenadas polares
Integrales impropias
Fórmula de Taylor

MSc. Johnny Valverde

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Apuntes de clases de Cálculo integral CM 132

Profesor: MSc. Johnny Valverde Montoro
Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Oficina R1-344
Delegada: Undg. Erika Cabrejos
mexxpre_15@hotmail.com
Número de celular: 986784892

11 de noviembre del 2017

Dedicado a mis estudiantes de la Facultad de Ciencias.

Prefacio

"Por tanto, estudiantes estudien matemáticas y no construyan sin fundamentos."

— Leonardo Da Vinci *(1452-1519).*

Cálculo es un curso con un propósito. Describe el crecimiento y el descenso, y el cambio. La población tiene una tasa de crecimiento, el cual cambia. El valor de una divisa tiene un descenso, el cual puede aumentar. Todo lo que ocurre en la vida cambia, la única cosa segura es el cambio. Para entender y modelar esos cambios, es donde el cálculo es necesitado y utilizado.

Las ideas centrales son firmemente establecidas. La responsabilidad del autor es explicarlos claramente, con ejemplos que vayan directamente al punto y *lo ilumine*. Con mucho, la mayor parte del esfuerzo detrás del libro se dedicó a expresiones claras y vivas. Debe ser sobre esta base primero, que un nuevo texto es juzgado. Las palabras deben atraer al lector y ayudar a que las ideas se fijen.

Este prefacio menciona algunas modificaciones en el énfasis. No es de extrañar que los cambios vengan (con cuidado). Pero comprenderán que ***este es un texto básico para el cálculo***. Es para todas las instituciones, y se escribe directamente al estudiante. Este es un libro de texto y no un banco de preguntas. También espero que los lectores vean el espíritu detrás de este libro. La mejor parte de las matemáticas se aprende haciendo, y saltamos allí directamente. Con la enseñanza y la escritura, el inicio da el tono y queremos que la clase sea activa. Para todos los estudiantes, debe haber algo nuevo. En lugar de terminar cada sección con un resumen (lector pasivo), pedimos al estudiante que contribuya a las palabras clave. Eso refuerza la confianza que es esencial para el aprendizaje.

Este libro enfatiza, más en el pasado, la parte visual del aprendizaje de las matemáticas. Las fórmulas son conectados con los gráficos. Lo mejor que una computadora puede hacer es mostrar la función. Los gráficos son las "llaves" que nos permiten abrir las puertas del entendimiento de las matemáticas fuera del aula.

También enfatizamos, antes de lo usual, el significado de las ecuaciones diferenciales. Son modelos de la vida. Estamos interesados en el estudio de las ecuaciones diferenciales con retardo, estas expresan la derivada de una función que depende del tiempo en términos de los valores de las funciones en tiempos previos. Creo que es esencial conocer algunas ecuaciones reales en un curso de cálculo. No podemos depender de un curso posterior para dejar claro de qué se trata. Para más información, ver [20]. Espero que el texto se concentre en los puntos importantes. Es inútil incluir mucho más de lo que cualquiera puede leer. Estamos pidiendo a los estudiantes un verdadero esfuerzo, que no debemos derrochar. Es fácil perder el propósito del cálculo bajo un millón de ecuaciones. Es más difícil, pero correcto, permanecer con las ideas que más importan.

Sobre este principio de que menos es más, resumiré:

1. Practicar con funciones y gráficas es muy importante.
2. Los modelos de cálculo son ecuaciones diferenciales.
3. Los ejemplos no necesitan ser artificialmente complicados. Las matemáticas son bastante difíciles.
4. No se requiere cubrir cada tema.
5. No tiene sentido prepararse para problemas reales y nunca verlos.

El propósito de escribir estos apuntes de clases correspondientes al año académico 2017 es proporcionar un tratamiento claro y accesible del cálculo integral y sentar las bases matemáticas para los cursos de Cálculo diferencial e integral Avanzado, Análisis Real y los cursos de Introducción a las Ecuaciones diferenciales Ordinarias e Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales, propios de la carrera de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería. Una buena formación en Cálculo diferencial es el único prerrequisito. Mediante el análisis combinado de teoría y práctica, hemos tratado de mostrar que la matemática tiene aplicaciones importantes además de ser un camino hermoso y emocionante por derecho propio.

MSc. Jhonny Valverde Montoro
Rímac, Lima.
Diciembre 2017

Para el estudiante

NUESTRO CURSO ES LLAMADO “CÁLCULO INTEGRAL”

El cálculo integral es el curso que subyace y extiende la teoría del cálculo. Es un tema profundo y extenso que ha estado en desarrollo durante siglos. Se ha desarrollado a sí mismo en una serie de campos de estudio distintos, dos de los cuales se puede llamar *cálculo integral en la recta real* y *cálculo integral en el plano complejo*, de acuerdo con el sistema numérico se toma como el sistema de números reales $\mathbb{R}$ o el sistema de números complejos $\mathbb{C}$. En estas notas de clase nos centramos en el cálculo integral en la recta real, aunque la mayor parte de lo que discutimos encuentra uso en todas las áreas del cálculo.

Como el cálculo integral tiene su origen en el cálculo diferencial, te parecerá algo familiar. Sin embargo, usted estará explorando el tema a un nivel mucho más profundo que el de sus cursos de cálculo introductorio. Este curso le exigirá un pensamiento cuidadoso y crítico. De hecho, está diseñado para ayudarle a obtener lo que los matemáticos llaman madurez *matemática*.

LOS FUNDAMENTOS SÍ IMPORTAN

Ya está familiarizado con algunos de los poderosos resultados del análisis, usted los ha visto y los ha utilizado en su curso de Cálculo diferencial. Sin embargo, lo más probable es que no haya probado todos esos resultados a partir de un pequeño conjunto de supuestos. Por lo tanto, su comprensión del por qué son ciertos puede estar un poco nublado en el misterio. ¿Cómo puede estar seguro de que toda esta teoría es realmente “verdadera”? ¿En qué sentido pueden probarse estos resultados?

No podemos responder a estar preguntas mirando “adelante”. Debemos mirar hacia atrás y trazar el tema de nuevo a sus orígenes lógicos (pero no necesariamente histórica). Después de haber establecido una base segura para el curso, y haber construido un marco básico por la deducción lógica rigurosa, tendremos una nueva comprensión del análisis que una alguna vez pensamos que sabíamos. También avanzaremos hacia nuevos y más profundos resultados.

Por lo tanto, el curso trae un cambio de énfasis: desde el desarrollo de las técnicas matemáticas y aplicaciones, hasta la crítica del propio curso. Tomaremos un enfoque crítico, incluso escéptico. ¡La mera aceptación pasiva no se hará! De hecho, seremos tan críticos que no consideraremos ninguna proposición de análisis sea totalmente confiable hasta que tengamos una justificación firme de ella (lo que llamaremos *prueba*). Para esta justificación, nos vemos obligados a mirar hacia atrás a los fundamentos del cálculo. En este sentido, se le pide que no olvide lo que aprendió acerca de cálculo diferencial y construyamos juntos los nuevos fundamentos.

POR QUÉ LAS PRUEBAS SON IMPORTANTES

“Prueba” o “demostración” puede ser una palabra intimidante para muchos estudiantes de matemáticas que prefieren que se les diga lo que es verdadero. La razón por la cual la prueba es tan importante en matemáticas se encuentra en la misma naturaleza de la “verdad matemática”, tal como se entiende en la tradición intelectual occidental. En esta tradición, el cuerpo de las matemáticas no es solo una colección de “hechos” desconectados que son aceptados porque parecen verdaderos. Más bien, estos hechos deben estar conectados entre sí y organizados de acuerdo con el “método deductivo”. Los matemáticos se esfuerzan mucho para aislar algunos de los hechos que pueden considerar básicos (viniendo desde el principio) y luego ir a mayores longitudes para demostrar que todos los hechos restantes pueden derivarse de los básicos por el proceso de la lógica deducción. Los “hechos” iniciales son entonces realmente suposiciones (axiomas). Los hechos restantes, como se deducen uno por uno de estas suposiciones, son llamados *teoremas*. El proceso de deducir (o derivar) un teorema se llama “prueba”.

Entonces, ¿qué hace válida una demostración? La respuesta no es tan obvia como puede parecer al principio. Un teorema se deriva en última instancia de los axiomas establecidos al principio de un tema matemático. Así, la verdad de un teorema es realmente contingente sobre la verdad de los axiomas.

Si los axiomas son todos verdaderos, entonces cualquier teorema que sea derivado de ellos por la deducción lógica válida también debe ser verdad. Pero la prueba de un teorema no puede asegurar que los axiomas sobre los cuales descansa la prueba son verdaderos. Por lo tanto, una «prueba» no garantiza que un teorema sea verdadero. Una prueba solo garantiza que **si los axiomas son todos verdaderos, entonces el teorema es verdadero**. En otras palabras, *la demostración de un teorema prueba que los axiomas son suficientemente fuertes para garantizar la validez del teorema*. Por lo tanto, un teorema es realmente una declaración sobre los axiomas. Por esta razón los axiomas sirven como el fundamento de un curso matemático.

NUESTRO PLAN DE ATAQUE

De acuerdo al sílabo del curso en:
https://github.com/carlosal1015/Calculus-One-and-Several-Variables
En el capítulo 0 exponemos algunos resultados sobre límites, continuidad y diferenciabilidad sobre funciones reales de variable real que usted debió de comprender en su curso de Cálculo diferencial. En capítulo 4 se llega a un punto de culminación natural con el "Teorema fundamental del cálculo", se desea introducir a dos temas muy activos propios de la matemática aplicada como lo son los splines cuadráticos y el método de los elementos finitos para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Se mostrará la solución de ejemplos de facto de ecuaciones parabólicas, elípticas e hiperbólicas como lo son la ecuación de la onda, la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación biarmónica respectivamente.

PALABRAS DE CONSEJO DEL AUTOR: SIETE REGLAS PARA EL ÉXITO EN ESTE CURSO

Cálculo integral no es un curso sencillo. De hecho, es uno de los cursos más desafiantes en el plan de estudios de pregrado. Mientras que el cálculo diferencial es una de las áreas matemáticas más aplicables, el cálculo integral es altamente teórico en espíritu y hace demandas intransigentes de rigor. Los apuntes de clases de clases está orientado a los estudiantes. Fue diseñado para ser legible, y por lo tanto para ser leído. Representa mi mejor intento de hacer el curso tan comprensible como sea posible sin comprometer el rigor. Ofrezco estas palabras de consejo a aquellos que realmente quieren tener éxito.

1. Lea los apuntes de clases, palabra por palabra, página por página, excepto cuando su instructor puede trazar un mapa y un camino alternativo para usted. No salte sobre la lectura y se dirija directo a los ejercicios, ¡cómo usted pudo haber hecho en su curso de cálculo diferencial! Si lo hace, se perderá mucho del curso.

2. Parte del material está marcada con un asterisco, "*." Deje que su instructor decida cuánto de eso se cubrirá.

3. Estudie las pruebas. Sepárelo aparte y examínelos críticamente hasta que esté seguro de que usted los entiende por completo. Pida ayuda donde usted no entienda. Nadie puede pretender estudiar cálculo integral si no entiende sus teoremas y pruebas. Sirven como modelos del tipo de pensamiento necesario para desarrollar nuevos resultados en el análisis. Su instructor puede requerir que usted aprenda algunas de las pruebas lo suficientemente bien para explicarlas a sus compañeros de clase o para hacerlas en los exámenes.

4. Asegúrese de entender las definiciones. ¡Apréndalos! (Incluso memorice). Este es un tema mucho más grave de lo que la mayoría de los estudiantes se dan cuenta. Las definiciones son el punto de partida cuando se prueban resultados sobre un nuevo concepto.

5. ¡Aprender matemáticas no es un deporte de espectadores! Tú aprendes matemáticas haciendo matemáticas. Usted no puede esperar aprender cálculo integral leyendo estas notas de clase como usted leería un periódico o una novela. Este documento no reemplaza o sustituye de ninguna manera las clases y discusiones dentro del aula. Debe "leer" este libro con lápiz y papel. Escriba los pasos clave usted mismo a medida que progresa través del texto, elaborando los detalles a medida que avanza. (Esto se llama "lectura activa"). Mantendrá su atención enfocada y facilitará su aprendizaje.

6. Trate su lista de ejercicios de la práctica dirigida como la continuación del aprendizaje iniciado en clase o en el texto. Se clasifican cuidadosamente para que aprendas a medida que progresas a través de un conjunto de ejercicios. Hay un montón de ejercicios, generalmente usted puede continuar muy bien haciendo solamente alguno de ellos y omitiendo algunos de los últimos. Si no puedes ir a ninguna parte en un ejercicio después de mucho esfuerzo, averigua de alguien cómo hacerlo y luego hazlo varias veces hasta que puedas hacerlo solo, sin ayuda.

7. En matemáticas, como en otras ramas del conocimiento humano, la verdad se comunica en oraciones. Incluso en matemáticas, la oración debe tener un sujeto y un predicado y obedecer todas las leyes de la gramática. Por ejemplo, el *sujeto* de la oración $x^2 + 3x - 7 = 11$ es x y el *predicado* es "=." Por favor recuerde, cuando escriba sus propias pruebas o soluciones de ejercicios, exprese sus ideas claramente y en oraciones completas. La escritura descuidada es a menudo un signo de pensamiento descuidado. Una idea mal expresada es a menudo mal entendida.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Índice general

1 **Para el estudiante** 3

.0.1 Iteraciones $x_{n+1} = F(x_n)$ . . . 26
.0.2 La gráfica de las iteraciones: Telarañas . . . 28
.0.3 La iteración $x_{n+1} = x_n - cf(x_n)$ . . . 29

Área y volúmenes **44**
.1 Área de regiones planas (coordenadas cartesianas) . . . 44
.2 Volúmenes de sólidos con secciones planas paralelas . . . 46
.3 Volumen de sólidos de revolución . . . 47
.3.1 Método del disco . . . 47
.3.2 Método de las arandelas . . . 49
.3.3 Método de las capas cilíndricas . . . 50

Coordenadas polares, longitud de arco y áreas de superficies de revolución **52**
.1 Sistema de coordenadas polares . . . 52
.1.1 Fórmulas de transformación . . . 57
.1.2 Gráficas en coordenadas polares . . . 57
.1.3 Intersección de gráficas en coordenadas polares . . . 57
.1.4 Tangentes a curvas polares . . . 57
.1.5 Cálculo de áreas en coordenadas polares . . . 57
.2 Longitud de arco de una curva paramétrica en coordenadas cartesianas . . . 57
.2.1 Aeiou . . . 57
.3 Curvas planas . . . 57
.3.1 Relación entre las coordenadas polares y cartesianas . . . 57
.3.2 Gráficas de ecuaciones polares . . . 58
.3.3 Rectas tangentes en coordenadas polares . . . 58
.4 Longitud de arco . . . 58
.5 Área de una superficie de revolución . . . 63
.6 Centro de masa de un sistema de partículas . . . 67
.6.1 Centroides . . . 67
.6.2 Teorema del centroide de Pappus-Guldin . . . 67

Aplicaciones del Cálculo integral **68**
.1 Aplicaciones de la fuerza y trabajo . . . 68
.1.1 Trabajo de un resorte . . . 68
.1.2 Trabajo realizado contra la gravedad . . . 68
.1.3 Trabajo realizado al vaciar un tanque . . . 68
.1.4 Fuerza ejercida por un líquido . . . 68
.2 Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias . . . 68
.2.1 Ecuaciones diferenciables separables . . . 68
.2.2 Problema del valor inicial . . . 68
.2.3 Modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales . . . 68
.2.4 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden . . . 68

Integrales impropias **69**
.1 Integrales impropias de primera y segunda especie . . . 69
.2 Criterios de convergencia y divergencia . . . 69
.3 Integrales impropias dependiente de un parámetro . . . 69
.4 Funciones Gamma $\Gamma(x)$ y Beta $B(m,n)$ . . . 69

.5 π es irracional . . . 70
.6 e es trascendente . . . 70
.7 Aplicaciones de las integrales impropias . . . 70

Fórmula de Taylor **71**
.1 Polinomio de Taylor . . . 71
.2 Fórmula del resto . . . 71
.3 Cálculo aproximado de integrales . . . 71
.4 Aplicaciones de la fórmula de Taylor . . . 71

Consejos

1. **Nota mínima en cada práctica calificada: 13** .

2. En cada examen y práctica calificada el alumno debe identificarse con su Documento Nacional de Identidad (DNI), apagar su celular y guardar en su mochila respectiva.

3. Estudiar todos los cursos.

4. Para los químicos hay trabajo, para los matemáticos hay mucho más oportunidades para desarrollarse.

5. No colocar $+C$, C: constante puede costar un punto de alguna pregunta de la práctica calificada.

6. Para aprender a demostrar hay que leer [12] y [7].

7. 48 horas.

8. Es importante para el profesor que el alumno logre contextualizar e interpretar los ejercicios.

9. Mis metas:

   * Resolver las prácticas dirigidas: Despejar mis dudas.

   ** Asistir a talleres de Cálculo integral, en caso de haberlo.

   - Gestión del tiempo.
   - Siempre es bueno la coordinación.
     Reclamo: $\neg$ 3 puntos.

Coordenadas polares.

1

CHAPTER CONCEPT

Preliminares matemáticos y análisis de errores

En este primer capítulo revisamos los conjuntos, convergencia de sucesiones, límites, continuidad y diferenciabilidad sobre el universo de los números reales, así como los *Espacios de funciones* que nos servirá como prerrequisito para el estudio de los apéndices finales.

Probablemente ya estés familiarizado con estos conceptos, pero es útil obtener una visión de cómo estas ideas funcionan juntas para resolver problemas y modelar (describir) situaciones del mundo real. En *Sage* al final del capítulo, aprenderemos un poco sobre los Sistemas Computarizados Algebraicos (CAS) y cómo usar el software llamado Sage (*Software for Algebra and Geometry Experimentation*), creado por el matemático *William Stein* como una alternativa a los software privativos Mathematica, Maple, entre otros; para resolver analíticamente (mediante el Teorema de Liouville, esto es, el Algoritmo de Risch) o numéricamente (por ejemplo los métodos de Newton-Raphson, método de Romberg, cuadratura Gaussiana entre otros), los ejercicios a lo largo de estudio del Cálculo integral. ¡Empecemos!

Repaso de precálculo

Conjuntos

Se denominará **conjunto** a una colección bien definida de objetos. Los conjuntos tienen elementos.
A continuación se presentan algunos axiomas de los conjuntos, el lector interesado puede estudiar la gran obra de [11] donde presenta la lista completa de los axiomas de Zermelo-Frænkel.

I) **Axioma de extensión**

Dos conjuntos son iguales sii tienen los mismos elementos.

II) **Axioma de especificación**

A todo conjunto A y a toda condición $S(x)$, corresponde un conjunto B cuyos elementos son precisamente aquellos elementos de A que cumplen $S(x)$.

Observación 0.1: Existencia del conjunto vacío $\emptyset$

Nótese que el axioma II nos ayuda a construir subconjuntos de un conjunto dado.

1. Aceptamos que existe un conjunto A con elementos.
2. Sea $B = \{x \in A \mid x \neq x\}$.

Como no hay elemento en A que no sea igual a si mismo, concluimos que B es un conjunto sin elementos que llamaremos el **conjunto vacío** y lo denotaremos por $\emptyset$.
En el proceso de la construcción de los números naturales, y en consecuencia, los números reales, el conjunto vacío se considera como un número, el **cero** ($\mathbf{0}$). Como el cero existe, construimos el conjunto $\{\mathbf{0}\}$ y lo denotamos por $\mathbf{1}$. Para más información ver [13].

III) **Axioma de la unión**

Para toda colección de conjuntos existe un conjunto que contiene a todos los elementos que pertenecen cuando menos a uno de los conjuntos de la colección dada.

Observación 0.2

Dado un conjunto A definimos el sucesor de A, denotado A^+, por $A^+ = A \cup \{A\}$. Es decir, A^+ se obtiene de añadir al conjunto A (como elemento) junto con todos elementos anteriores de A.

Definición 0.1: Conjunto de sucesores

Un conjunto S se dirá de **sucesores** o un conjunto **sucesor** si $0 \in S$ y toda vez que $A \in S$, entonces $A^+ \in S$.

IV) **Axioma del infinito**

Existe un conjunto de sucesores.

Observación 0.3

Si A y B son conjuntos de sucesores, entonces $A \cap B$ es un conjunto de sucesores.

Prueba: Como $0 \in A$ y $0 \in B$, entonces $0 \in A \cap B$.
Si ocurre que $n \in A \cap B$, entonces $n \in A$ y $n \in B$, pero como A y B son conjuntos sucesores,

entonces $n^+ \in A$ y $n^+ \in B$.
$\therefore n^+ \in A \cup B$. ■

Definición 0.2: Conjunto de números naturales

La intersección $\bigcap_{A \in \mathcal{D}} A$ se le llamará el **conjunto de los números naturales** y lo denotaremos momentáneamente por ω.

v) **Axioma del apareamiento**

Dados dos conjuntos cualesquiera, existe un conjunto que contiene a ambos como elementos.

vi) **Axioma de la potencia**

Para cada conjunto existe una colección de conjuntos que contiene, como elementos, a todos los subconjuntos del conjunto dado.

Con la introducción de la teoría de conjuntos de George Cantor en el siglo XIX, comenzó a parecer posible poner a las matemáticas con fundamentos lógicos mediante el desarrollo de todas sus diferentes ramas de la teoría de conjuntos y lógica. Un obstáculo importante fue el uso de conjuntos para definir un par ordenado, ya que la definición de un conjunto no se ve afectada por el orden en el que se listan a sus elementos. Por ejemplo, $[a, b]$ y $[b, a]$ representan el mismo conjunto, mientras que en un par ordenado queremos ser capaces de indicar qué elemento es primero. En 1914, el matemático alemán Félix Hausdorff (1868-1942) y Norbert Wiener (1894-1964), un joven estadounidense que había recibido su doctorado de Harvard hicieron un importante adelanto. Ambos dieron definiciones que mostraban que un par ordenado se puede definir como un cierto tipo de sistema, pero ambas definiciones son algo complicadas. Por último, en 1921, el matemático polaco Kazimierz Kuratowski (1896-1980) publicó la siguiente definición, que se ha vuelto común.

Definición 0.3: Par ordenado (Kuratowski)

Se dice que un par ordenado es un conjunto X de la forma

$$X = \{a\}, \{a, b\}.$$

Este conjunto tiene elementos, $\{a\}$ y $\{a, b\}$.

Si $a \neq b$, entonces los dos conjuntos son distintos y a está en ambos conjuntos, mientras que b no lo está. Esto nos permite distinguir entre a y b y decir que a es el primer elemento del par ordenado y b es el segundo elemento del par. Si $a = b$, entonces simplemente podemos decir que a es a la vez el primero y el segundo elemento del par. En este caso el conjunto que define el par ordenado será $\{\{a\}, \{a, a\}\}$, que es igual a $\{\{a\}\}$. Sin embargo, no fue hasta mucho tiempo después que se han utilizado los pares ordenados ampliamente en las matemáticas, que los matemáticos se dieron cuenta de que era posible definirlos totalmente en términos de conjuntos, y, en cualquier caso, la notación de conjunto sería complicada para utilizarse habitualmente. La notación habitual de los pares ordenados dada por $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ se escribe más simplemente como (a, b).

Definición 0.4: Par ordenado (Estándar)

Dados los elementos a y b, el símbolo (a, b) denotada el **par ordenado** formado por a y b junto con las especificaciones de que a es el primer elemento del par y b es el segundo elemento. Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales sii, $a = c$ y $b = d$. Simbólicamente:

$$(a, b) = (c, d) \text{ significa que } a = c \text{ y } b = d$$

Definición 0.5: Pareja ordenada

La **pareja ordenada** con primer elemento A y segundo elemento B denotada (A, B), es el conjunto (según la notación Kazimierz Kuratowski) $\{\{A\}, \{A, B\}\}$ o (según la notación de Norbert Wiener) $\{\{\{A\}, \emptyset\}, \{\{B\}\}\}$.

Definición 0.6: Producto cartesiano

El **producto cartesiano** de los conjuntos A y B, denotado $A \times B$, es el conjunto

$$A \times B = \{x \in P(P(A \cup B)); x = (a, b) \text{ con } a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Definición 0.7: Dominio y recorrido de una relación

Se definen los siguientes conjuntos, el dominio de una relación $\mathcal{R}$

$$\text{dom } \mathcal{R} = \{a \in A, \exists\, b \in B \mid (a, b) \in \mathcal{R}\},$$

y el recorrido de la relación $\mathcal{R}$

$$\text{rec } \mathcal{R} = \{b \in B, \exists\, a \in A \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}.$$

Observación 0.4

Dado un conjunto R de parejas ordenadas, existen conjuntos A y B tales que $R \subset A \times B$.

Una relación es un conjunto de pares ordenados, o en otras palabras, es cualquier subconjunto $\mathcal{R} \subset A \times B$, donde A y B son conjuntos.

Definición 0.8: Función

Una **función** f de A en B es una relación $f \subset A \times B$ que satisface:

1. $\text{dom}(f) = A$ y
2. Para cada $a \in A$, existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Notación científica

Los científicos utilizan la notación exponencial para compactar la escritura de números muy grandes o de los muy pequeños. Por ejemplo, la estrella más cercana más allá del Sol, Alfa Centauro, está casi 40 000 000 000 000 kilómetros. Por otro lado, la masa un átomo de hidrógeno es de casi 0.00000000000000000000000166 g. Estos números son difíciles de leer y de escribir, de modo que los científicos los expresan casi siempre en *notación científica*.

Definición 0.9: Notación científica

Se dice que un número positivo x está escrito en **notación científica** si está expresado como sigue

$$x = a \times 10^n \qquad \text{donde } 1 \leq a < 10 \text{ y } n \text{ es un entero.}$$

Radicales

Ya sabemos que 2^n significa que siempre n es un entero. Para dar el significado de una potencia, como $2^{4/3}$, cuyo exponente es un número racional, necesitamos estudiar los radicales.
El símbolo "$\sqrt{\ }$" significa "la raíz cuadrada de". Por lo tanto

$$\boxed{\sqrt{a} = b \qquad \text{significa} \qquad b^2 = a \qquad \text{y} \qquad b \geq 0.}$$

Puesto que $a = b^2 \leq 0$, el símbolo $\sqrt{a}$ tiene sentido solo cuando $a \geq 0$. Por ejemplo,

$$\sqrt{9} = 3 \qquad \text{porque} \qquad 3^2 = 9 \qquad \text{y } 3 \geq 0.$$

Definición 0.10: Definición de la raíz n-sima

Si n es un entero positivo, entonces la **raíz n-sima principal** de a se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \text{quiere decir} \qquad b^n = a.$$

Si n es par, debemos tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Ecuaciones

Una ecuación es un enunciado matemático en el que se establece que las expresiones matemáticas son iguales.

Definición 0.11: Ecuación cuadrática

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

Definición 0.12: La fórmula cuadrática

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Definición 0.13: El discriminante

El **discriminante** de la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ es $D = b^2 - 4ac$.

1. Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

2. Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.

3. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

Modelado mediante ecuaciones

Muchos de los problemas de las ciencias, economía, finanzas, medicina y otros numerosos campos se puede traducir a problemas de álgebra. Esta es una razón por la cual el álgebra es tan útil.

Definición 0.14: Criterios para modelar ecuaciones

1. **Identificar la variable.** Identifique la cantidad que el problema le pide determinar. Por lo regular, esta cantidad se puede determinar por medio de una lectura cuidadosa de la pregunta planteada al final de problema. Entonces **introduzca la notación** para la variable (llámalo x o cualquier otro nombre).

2. **Expresar todas las incógnitas en términos de las variables.** Lea una vez más cada oración del problema, y exprese todas las cantidades mencionadas en el problema en términos de la variable que definió en el paso 1. Para organizar esta información, a veces es útil **dibujar un esquema** o **elaborar una tabla**.

3. **Plantear el modelo.** Encuentre el hecho decisivo en el problema que relaciona las expresiones que usted listó en el paso 2. **Plantee una ecuación** o **modelo**, que exprese esta relación.

4. **Resuelva la ecuación y compruebe su respuesta.** Resuelva la ecuación, verifique su respuesta y expréselos como una oración que responde a la pregunta hecha en el problema.

Definición 0.15: Criterios para resolver desigualdades no lineales

1. **Pase todos los términos a un miembro.** Si es necesario, vuelva a escribir la desigualdad de modo que todos los términos no cero aparezcan a un lado del signo de la desigualdad. Si el lado no cero de la desigualdad contiene constantes, busque un denominador común.

2. **Factorice.** Factorice el miembro no cero de la desigualdad.

3. **Determine los intervalos.** Calcule los valores para los cuales cada factor es cero. Estos números dividirán la recta numérica en intervalos. Liste los intervalos determinados por medio de estos números.

4. **Elabore una tabla o diagrama.** Utilice los valores de prueba para construir una tabla o un diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. En el último renglón de la tabla determine el signo del producto o cociente de estos factores.

5. **Resuelva.** Determine la solución de la desigualdad a partir del último renglón de la tabla de signos. Compruebe si alguno de los extremos de los intervalos cumplen con la desigualdad, lo cual es válido si la desigualdad contiene $\leq$ o $\geq$.

Gráfica de las ecuaciones con dos variables

Una **ecuación de dos variables**, tal como $y = x^2 + 1$, expresa una relación entres dos cantidades. Un punto (x, y) **satisface** la ecuación si la ecuación es verdadera cuando los valores para x e y se sustituyen en dicha ecuación. Por ejemplo, el punto $(3, 10)$ satisface la ecuación $y = x^2 + 1$ porque $10 = 3^2 + 1$, pero el punto $(1, 3)$ no porque $3 \neq 1^2 + 1$.

Definición 0.16: Gráfica de una ecuación

La **gráfica** de una ecuación con x e y es el conjunto de todos puntos (x, y) del plano coordenado que satisfacen la ecuación.

Observación 0.5: Gráfica de $|f(x)|$

La ecuación $y = |f(x)|$ se puede escribir como

$$y = \begin{cases} f(x), & \text{cuando } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{cuando } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

que muestra la gráfica de $y = |f(x)|$ puede ser obtenida de la gráfica de $y = f(x)$ restringiendo la parte que se encuentra sobre el eje x y que refleja alrededor del eje x la parte que queda debajo del eje x.

Teorema 0.1: Test de simetrías

(a) Una curva plana es simétrica respecto al eje Y sii al reemplazar x por $-x$ en esa ecuación produce una ecuación equivalente.

(b) Una curva plana es simétrica respecto al eje X sii al reemplazar y por $-y$ en esa ecuación produce una ecuación equivalente.

(c) Una curva plana es simétrica respecto al origen sii al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en esa ecuación produce una ecuación equivalente.

Definición 0.17: Función par y función impar

Una función f se dice que es una **función par** si

$$f(-x) = f(x) \tag{1}$$

para toda x en el dominio de f. Y se dice que es una **función impar** si

$$f(-x) = -f(x) \tag{2}$$

para toda x en el dominio de f.

Geométricamente, las gráficas de las funciones pares son simétricas sobre el eje Y porque al reemplazar x por $-x$ en la ecuación $y = f(x)$ resulta $y = f(-x)$, el cual es equivalente a la ecuación original $y = f(x)$ por (.1). Similarmente, se sigue de (.2) que las gráficas de funciones impares son simétricas sobre el origen.
El desarrollo de la nueva tecnología ha cambiado significativamente cómo y donde los matemáticos, los ingenieros y los científicos realizan su trabajo, así como su acercamiento a la resolución de problemas. Entre los más significativos de estos desarrollos están los programas denominados Computer Algebra System (abreviado CAS), siendo los más comunes Mathematica y Maple.
Los CAS no sólo tienen capacidades gráficas, sino que, como su nombre indica, pueden realizar muchos de los cálculos simbólicos que se producen en álgebra, cálculo y ramas de la matemática superior. Por ejemplo, es una tarea trivial para un CAS llevar a cabo la factorización

$$x^6 + 23x^5 + 147x^4 - 139x^3 - 3464x^2 - 2112x + 23040 = (x+5)(x-3)^2(x+8)^3$$

o el cálculo numérico exacto

$$\left(\frac{63456}{3177295} - \frac{43907}{22854377}\right)^3 = \frac{2251912457164208291259320230122866923}{382895955819369204449565945369203764688375}$$

Observación 0.6: Sobre la gráfica en un Sistema Algebraico Computarizado (CAS)

Las representaciones gráficas de los CAS a veces omiten parte de la gráfica de una función que implica exponentes fraccionarios (o radicales).

a. Si p es par y q es impar, entonces grafique $g(x) = |x|^{p/q}$ en vez de $f(x)$.

b. Si p es impar y q es par, entonces grafique $g(x) = (|x|/x)\,|x|^{p/q}$.

Observación 0.7: Un breve intervalo de la historia de la matemática del siglo XX

Antecedentes, quizá el libro más influyente de la matemática moderna (con esta restricción queda fuera *Los Elementos* de Euclides) del siglo XX es *Principia Mathematica* de los matemáticos Alfred North Whitehead y Bertrand Russell, el cual tuvo como principales críticos Ludwig Wittgenstein y Kurt Gödel. Este libro tuvo como objetivo "construir la matemática", ¿y cómo así? Su idea fue partir de los predicados más sencillos y demostrar que los resultados ulteriores se podían derivar de la lógica pura. David Hilbert, en la segunda edición del ICM (*International Congress of Mathematicians*) propuso que un sistema matemático debe ser caracterizado por la **coherencia**, **completitud** y **decidibilidad**. Aclaremos estos términos:

1. **Coherencia**, se entiende que nunca se obtiene contradicción dentro del propio sistema.
2. **Completitud**, se entiende que si cualquier declaración es verdadera, entonces tiene que haber alguna manera de probarlo utilizando las reglas del propio sistema.
3. **Decidibilidad**, se entiende que debe existir algún método definido o test que se pueda aplicar a cualquier afirmación matemática determinada y que decidirá si esa afirmación es o no demostrable.

El próximo año la sede del ICM será en Rio de Janeiro, Brazil.

Teorema 0.2: Teorema de incompletitud de Kurt Gödel

Ningún sistema para las matemáticas es coherente y completo simultáneamente.

Idea clave. Si S es coherente, es decir, la no contradicción es demostrable de S, y si S es completo, es decir, cualquier oración A es decidible de S en el sentido de que S prueba A o S prueba $\neg$A. Si A ni $\neg$A son demostrables en S, entonces A se dice que es indecidible por S, y S se dice que es incompleta. ■

El matemático interesado puede analizar este resultado en [9].

Observación 0.8: El Premio A. M. Turing

El premio **ACM** (Association for Computing Machinery) **A.M. Turing** denominado como el "Premio Nobel de la Informática" fue llamado en honor al matemático británico y científico de la computación Alan Mathison Turing (1912-1954) que se otorga anualmente desde su creación en 1966 para las principales contribuciones de importancia duradera a la informática e incluye un premio de $1 millón financiados por Google. Turing hizo avances fundamentales en la arquitectura de la computadora, algoritmos, formalización de la computación e inteligencia artificial. También fue importante su trabajo en el Códi-

Alan Turing

go Enigma británico durante la Segunda Guerra Mundial. El Premio Turing ha honrado a los científicos e ingenieros que crearon los sistemas y bases teóricas subyacentes que han impulsado la industria de la tecnología de la información.
Para más información visitar el sitio web amturing.acm.org

Definición 0.18: Turing Completo

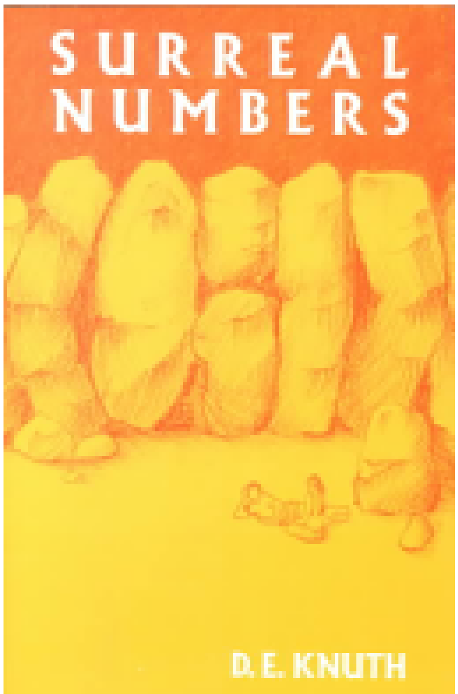
Un lenguaje de programación es una máquina de Turing completo sii es posible escribir todas las funciones computables en este lenguaje.

Ejemplo 0.1: Ejemplo de una máquina de Turing completo

LaTeX es una máquina de Turing completo. Una expresión que resumiría esto es, ¡Puedo escribir algo extremadamente complejo en LaTeX, pero no me preguntes cómo lo hice 😀!

Observación 0.9: Donald Knuth

Donald Knuth nació en Milwaukee en 1938 y es profesor emérito de computación en la Universidad de Stanford. Aún como estudiante de licenciatura en Caltech, comenzó a escribir una serie monumental de libros titulados *The art of Computer Programming*. El presidente de Jimmy Carter le otorgó la medalla nacional de Ciencia en 1979. Cuando Knuth era alumno de secundaria, se fascinó con las gráficas de funciones y de manera laboriosa trazó muchos cientos de ellas porque quería ver el comportamiento de una gran variedad de funciones. (En la actualidad, por supuesto, es bastante fácil usar las computadoras y calculadoras de graficación para hacer esto). Knuth es famoso por su invención de TeX, un sistema de composición tipográfica asistido por computadora. Este sistema se empleó en la preparación del manuscrito para estos apuntes de clase. También escribió una novela titulada *Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned On to Pure Mathemátics and Found Total Happiness.* El doctor Knuth ha recibido numerosos honores, entre ellos la elección como asociado a la Academia Francesa de Ciencias y como profesor invitado de la Royal Society.



Observación 0.10: Sonya Kovalevsky (1850-1891)

Sonya Kovalevsky es considerada la matemática más importante del siglo XIX. Nació en Moscú en una familia aristocrática. En su infancia conoció el cálculo de una manera muy inusual, su recámara fue tapizada temporalmente con las páginas de un libro de cálculo. Ella escribió después que "pasó muchas horas enfrente de esa pared, tratando de entenderla". Puesto que la ley rusas prohibía a las mujeres estudiar en la universidad, tuvo un casamiento por conveniencia, que le permitió viajar a Alemania y obtener un doctorado en matemáticas de la Universidad de Götingen. Finalmente obtuvo una plaza de profesor de tiempo completo en la Universidad de Estocolmo, donde enseñó durante ocho años antes de morir de influenza a la edad de

41 años. Su investigación fue útil para colocar sobre una base sólida y lógica las ideas y aplicaciones de las funciones y el cálculo. Recibió muchas distinciones y premios por su trabajo de investigación.

Así como los números se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir para producir otros números, las funciones también se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir para producir otras funciones. En esta sección discutiremos estas operaciones y algunas otras que no tienen análogos en la aritmética ordinaria.

Operaciones aritméticas en funciones

Dos funciones f y g se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir de forma natural para formar nuevas funciones $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$. Por ejemplo, $f+g$ es definida por la fórmula

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \tag{3}$$

el cual establece que para cada valor de entrada de $f+g$ es obtenido por la suma de los valores de f y g. La ecuación (.3) proporciona una fórmula para $f+g$, pero no nos dice nada sobre el dominio de $f+g$. Sin embargo, para que el lado derecho de esta ecuación sea definido, x debe estar en los dominios de f y g, por lo que definimos el dominio de $f+g$ como la intersección de estos dos dominios. De manera más general, hacemos la siguiente definición.

Definición 0.19: Aritmética de funciones

Dadas funciones f y g, definimos:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \tag{4}$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \tag{5}$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) \tag{6}$$
$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) \tag{7}$$

Para las funciones $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ definimos el dominio como la intersección de los dominios de f y g, y para la función f/g definimos el dominio como la intersección de los dominios de f y g, pero excluyendo los puntos donde $g(x) = 0$ (para evitar la división por cero).

Definición 0.20: Composición de funciones

Dadas las funciones f y g, la **composición** de f con g, denotado por $f \circ g$, es la función definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ como todos los x dominio de g para el cual $g(x)$ está en el dominio de f.

Funciones inversas

La idea de resolver una ecuación $y = f(x)$ para x como una función de y, así, $x = g(y)$, es una de la más importantes ideas en matemáticas.

Definición 0.21: Función inversa

Si las funciones f y g satisfacen las dos condiciones

$$g(f(x)) = x \text{ para cada } x \text{ en el dominio de } f$$

$$f(g(y)) = y \text{ para cada } y \text{ en el dominio de } g$$

entonces diremos que ***f* es la inversa de *g*** y ***g* es la inversa de *f*** o que ***f* y *g* son funciones inversas**.

Definición 0.22: Ecuaciones de cancelación de f y f^{-1}

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{para todo } x \text{ en el dominio de } f$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \text{para todo } x \text{ en el dominio de } f^{-1}$$

Observación 0.11: Notación de función inversa f^{-1}

Si f es una función, entonces el -1 en el símbolo f^{-1} siempre denota la inversa de la función y nunca un exponente. Esto es,

$$f^{-1}(x) \quad \text{nunca significa} \quad \frac{1}{f(x)}.$$

Teorema 0.3: *f* como función inversa de *g*

Si una ecuación $y = f(x)$ puede ser resuelta para x como una función de y, así, $x = g(y)$, entonces f tiene una inversa y la inversa es $g(y) = f^{-1}(y)$.

Demostración. Sustituyendo $y = f(x)$ en $x = g(y)$ se obtiene $x = g(f(x))$, que confirma la primera ecuación de la definición 0.22, y sustituyendo $x = g(y)$ en $y = f(x)$ se obtiene $y = f(g(y))$, que confirma la segunda ecuación de la definición 0.22. ■

El teorema 0.3 nos proporciona el siguiente procedimiento para encontrar la inversa de una función.

Observación 0.12: Un procedimiento para encontrar la función inversa de una función f

Paso 1 Escriba abajo la ecuación $y = f(x)$.

Pbso 2 Si es posible, resuelva la ecuación para x como función de y.

Pcso 3 La ecuación resultante será $x = f^{-1}(y)$, que proporciona una fórmula para f^{-1} con y como variable independiente.

Observación 0.13

Un camino alternativo es obtener la fórmula para $f^{-1}(x)$ con x como la variable independiente es invertir los roles de x e y al principio y resolver la ecuación.

Teorema 0.4: Existencia de la función inversa

Una función tiene inversa sii es uno a uno.

Teorema 0.5: Test de la recta horizontal

Una función tiene una inversa sii su gráfica se corta como máximo una vez por cualquier recta horizontal.

Teorema 0.6: La función inversa y la función identidad

Si f tiene una inversa, entonces las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f^{-1}(x)$ son reflejos una de la otra sobre la recta $y = x$, esto es, cada gráfica es el imagen espejo de la otra con respecto a la recta.

Números complejos

Definición 0.23: Módulo de un número complejo

El **módulo** (o **valor absoluto**) del número complejo $z = a + bi$ es

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Definición 0.24: Forma polar de números complejos

Un número complejo $z = a + bi$ tiene la **forma polar** (o **forma trigonométrica**)

$$z = r\left(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\right)$$

donde $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\tan\theta = b/a$. El número r es el **módulo** de z y θ es un **argumento** de z.

Observación 0.14

El argumento de z no es único, pero dos argumentos cualesquiera de z difieren por un múltiplo de 2π.

Definición 0.25: Multiplicación y división de números complejos

Si los dos números complejos z_1 y z_2 tienen las formas polares

$$z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1\right) \qquad \text{y} \qquad z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2\right)$$

entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\left[\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i \operatorname{sen}\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right] && && \text{Multiplicación} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i \operatorname{sen}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right] && (z_2 \neq 0) && \text{División} \end{aligned}$$

Teorema 0.7: Teorema de Moivre

Si $z = r\left(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\right)$, entonces para cualquier entero n

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Definición 0.26: Raíces n-ésimas de números complejos

Si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y n es un entero positivo, entonces z tiene las n raíces n-ésimas distintas

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

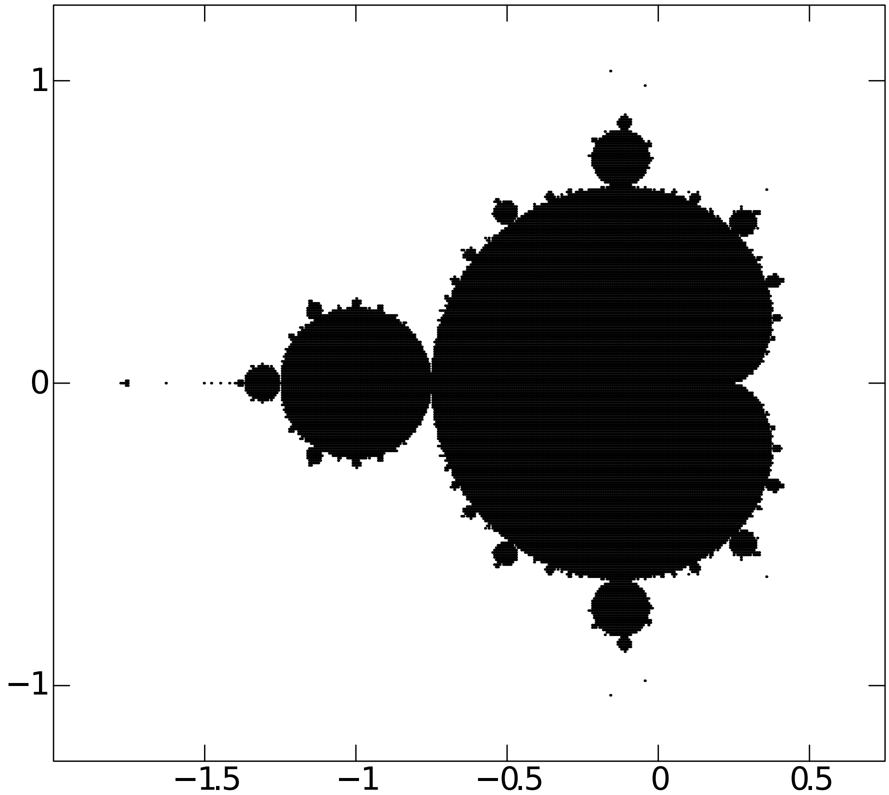
Definición 0.27: Órbita

Dado un sistema dinámico, Se llama **órbita** a

Los fractales son objetos geométricos que exhiben más y más detalles a medida que se amplifican. Muchos fractales se pueden describir al iterar funciones de números complejos. El fractal más famoso se llama

Definición 0.28: Conjunto de Mandelbrot

Sea z un número complejo. El **conjunto de Mandelbrot** está formado por todos los números complejos



1

Conjunto de Mandelbrot creado con LaTeX.

$$\boxed{z_{n+1} = z_n^2 + c.}$$

Repaso de cálculo diferencial

Límites y continuidad

Los conceptos de límites y continuidad de una función son fundamentales para estudiar las integrales, en consecuencia, el Cálculo integral y forman la bases para estudiar el análisis de nuestro enfoque del curso.

Definición 0.29: ε-vecindad

Sea x un número real y $\varepsilon > 0$. El intervalo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ será llamado **ε-vecindad** de x y denotado por $N_\varepsilon(x)$. Geométricamente hablando, $N_\varepsilon(x)$ es el conjunto de todos los puntos que están dentro de la distancia de ε hacia x.

Observación 0.15: El uso de la palabra vecindad en el habla de los matemáticos

A menudo decimos simplemente "vecindad de x", pero queremos decir "ε-vecindad de x, para algún $\varepsilon > 0$." Veremos que el lenguaje de las vecindades es muy útil para expresar los conceptos del Cálculo integral.

Definición 0.30: Límite de una función real de variable real

Una función definida en un conjunto X de números reales tiene límite L en x_0, escrito como

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número real $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ cuando } x \in X \text{ y } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Definición 0.31: Continuidad de una función real de variable real

Sea f una función definida en un conjunto X de números reales y $x_0 \in X$. Entonces f es **continua** en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

La función f es **continua en el conjunto** X si este es continua en cada número en X.

Definición 0.32: Convergencia de una sucesión de números reales

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. La sucesión tiene límite L (converge a L) si, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo $N(\varepsilon)$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon$ cuando $n > N(\varepsilon)$. La notación

$$\lim_{n \to \infty} x_n = L, \text{ o } x_n \longrightarrow x \text{ cuando } n \longrightarrow \infty,$$

significa que la sucesión converge a L.

Observación 0.16: Parafraseo del significado de la convergencia de una sucesión

$\lim_{n\to\infty} x_n = L$ significa:

- x_n puede hacerse arbitrariamente cerca de L haciendo n suficientemente grande.
- $|x_n - L|$ puede hacerse arbitrariamente pequeño haciendo n suficientemente grande.
- Para cada ε positivo hay n_0 tal que $|x_n - L| < \varepsilon$ siempre que $n \geq n_0$.

Teorema 0.8: Criterio de sucesiones para límites de funciones

Si f es una función definida en un conjunto de números reales, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a. El $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

b. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión en $X\backslash\{x_0\}$ que converge a x_0, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Teorema 0.9: Criterio de sucesiones para la continuidad de f en x_0

Si f es una función definida en un conjunto de números reales y $x_0 \in X$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a. f es continua en x_0.

b. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión en X que converge a x_0, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Definición 0.33: Conjunto compacto

Un conjunto de números reales X se dice que es un **conjunto compacto** si este es cerrado y acotado.

Definición 0.34: Intervalo

Llamaremos a I un **intervalo** al conjunto de números reales que cumple la siguiente propiedad:

$$\forall x < y \text{ en } I, [x, y] \subseteq I.$$

Teorema 0.10: Heine-Borel

Cualquier intervalo cerrado y acotado de números reales es compacto.

Teorema 0.11: Existencia de un mínimo y un máximo en un conjunto compacto

Cualquier conjunto compacto no vacío tiene un máximo y un mínimo.

Teorema 0.12: Criterio de sucesiones para la compacidad

Un conjunto X de números reales es compacto si y solo si cualquier sucesión de puntos en X tiene una subsucesión que converge a un punto en X.

Teorema 0.13: La imagen continua de un conjunto compacto es un compacto

Esto es, si X es un conjunto compacto y f es de clase $C(X)$, entonces $f(A)$ es compacto.

Teorema 0.14: Teorema del valor extremo

Si X es un conjunto compacto no vacío y f es de clase $C(X)$, entonces f tiene la **propiedad de valor extremo en** X:

(a) $\exists u = \min f(A) = \min\{f(x) : x \in X\}$, y

(b) $\exists v = \max f(A) = \max\{f(x) : x \in X\}$.

Esto es, una función continua asume un valor máximo y un valor mínimo en cualquier conjunto compacto no vacío.

Teorema 0.15

Si f es de clase $C(I)$, entonces $f(I)$ es un intervalo.

Teorema 0.16: Teorema del valor intermedio

Sea I el intervalo cerrado de extremos a y b $(a < b)$. Cualquier función de clase $C(I)$ debe satisfacer la propiedad **propiedad del valor intermedio** en I:

$$\forall y \text{ entre } f(a) \text{ y } f(b), \exists c \in I \text{ tal que } f(c) = y.$$

Teorema 0.17: Principio de ubicación de las raíces

Si f es de clase $C[a, b]$, y si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe algún c en entre a y b de manera que $f(c) = 0$.

Teorema 0.18: Teorema de la función inversa para funciones monótonas continuas

Suponga que I es un intervalo no vacío, y es de clase $C(I)$ y estrictamente monótona. Entonces $f^{-1} : f(I) \to I$ es continua y estrictamente monótona en el mismo sentido. ($f(I)$ es un intervalo, por el Teorema 0.15.)

Teorema 0.19

Si f es de clase $C(I)$ e inyectiva, entonces f es estrictamente monótona en I.

Teorema 0.20

Si f es de clase $C[a, b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a, b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \leq N$ para todo x en $[a, b]$.

Teorema 0.21

Si f es de clase $C[a, b]$, entonces existe algún número y en $[a, b]$ tal que $f(y) \geq f(x)$ para todo x en $[a, b]$.

Diferenciabilidad

Este curso con énfasis en la matemática aplicada, estudia funciones sofisticadas que generalmente conducen a una mejor aproximación, más adelante estudiaremos la *Fórmula de Taylor* que aproxima muy bien *localmente* a una función diferenciable. Por ejemplo, una función con un gráfico liso normalmente se comportará de manera más predecible que uno con numerosas características dentadas. La condición de suavidad se basa en el concepto de la derivada.

Definición 0.35: Interior de un conjunto

Sea X un conjunto de números reales. Se dice que un número x es un **punto interior** de X si $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $N_\varepsilon \subseteq X$. Esto es, un punto interior de X puede ser rodeado de vecindades contenidas enteramente en X.
El interior de X es el conjunto

$$A^\circ = \{x \colon x \text{ es un punto interior de } X\}.$$

Definición 0.36: Derivada de una función real de variable real

Sea f una función definida sobre un intervalo abierto que contenga a x_0. La función es **diferenciable** en x_0 si

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. El número $f'(x_0)$ es llamado la **derivada** de f en x_0. Una función que tiene una derivada en cada número en el conjunto X es diferenciable en X.

La derivada de f en x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en $(x_0, f(x_0))$, como se muestra en la figura.

Teorema 0.22: Criterio de sucesiones para la diferenciabilidad

Si f es una función definida en un conjunto de números reales y x_0 es un punto interior allí, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a. f es diferenciable en x_0.

b. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión en $X\setminus\{x_0\}$ que converge a x_0, entonces el

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = f'(x_0).$$

Teorema 0.23: Diferenciabilidad implica continuidad

Si la función f es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.

Observación 0.17: La continuidad no garantiza nada la diferenciabilidad

Existen funciones que son continuas en x_0, pero no son diferenciables en x_0.
Pocas hazañas matemáticas han sido tan sorprendentes como la exposición de una función que es continua en cada valor y diferenciable en ninguno. Hasta bien entrado el siglo XIX, existía la creencia básica de que todas las funciones tenían derivadas, excepto posiblemente en algunos puntos aislados como en la función valor absoluto, $|x|$, en $x=0$. En 1806, el matemático francés André-Marie Ampère trató de demostrar la existencia general de las derivadas. Su demostración es difícil de entender porque no está claro qué supuestos implícitos él estaba haciendo acerca de lo que constituye una función. En 1839, con la publicación del libro de Cálculo de J.L. Raabe "*Die Differential- und Integralrechnung*" el "teorema" de que cualquier función continua es diferenciable, con la posibilidad excepto en un número finito de puntos, iniciando de esta manera su camino en los libros de texto estándar.
Bolzano, Weierstraß y Riemann sabían que esto estaba mal. Hacia 1861 Riemann introdujo en sus conferencias ("lectures") la función

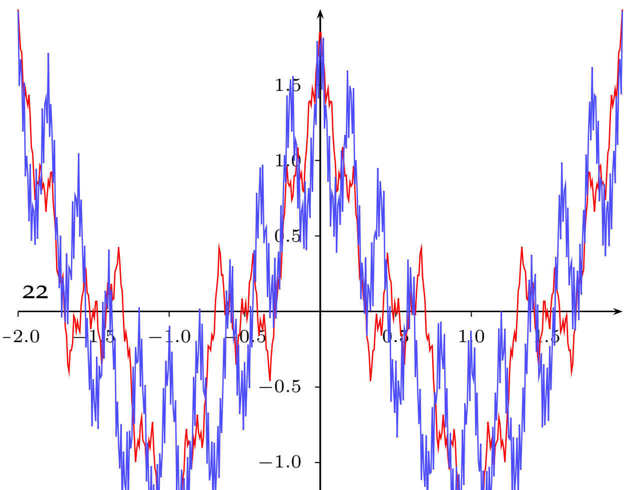
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k^2 x)}{k^2}$$

afirmando que es continua en cada x, pero no es diferenciable para infinitos valores de x. La convergencia de esta serie es uniforme (Por el M- test de Weierstrass, basta tomar $M_n = \frac{1}{n^2}$.) y por lo tanto es continua en todo x. En cambio la no diferenciabilidad es difícil de probar, no fue hasta 1916 que Godfrey Harold Hardy demostró que en cualquier intervalo finito, no importa cuán pequeño sea, habrá infinitos valores de x en el cual la derivada no existe. Se demostró en 1970 que también existe infinitos valores donde la derivada existe. Riemann, por ejemplo, aunque notable, no va tan lejos con la no diferenciabilidad para todos los x.

La fe en la existencia de derivadas es ilustrado por la reacción en el artículo de Hermann Hankel llamado "*Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen*" en el que, entre otras cosas, describió un método general para crear funciones continuas con infinitos puntos de no diferenciabilidad. J. Hoüel aplaudió este resultado y expresó la esperanza de que cambiaría la actitud actual en la que "no hay matemático hoy en día que creería en la existencia de funciones continuas sin derivadas". Phillipe Gilbert se abalanzó sobre errores y omisiones del trabajo de Hankel y los mostraba para no dejar ninguna duda sobre la inanidad de las conclusiones. Pero la marea había vuelto, Hankel respondió la observación del ejemplo de Riemann de una función integrable con un cantidad infinita de discontinuidades implicaba que la integral,

$$f(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nt)}{n^2} \, \mathrm{d}t \right),$$

es necesariamente continua en cada x, pero no puede ser diferenciable en cualquier de los infinitos puntos donde el integrando no es continuo. La gran sorpresa vino en 1872 cuando Karl Weierstraß mostró a



la Academia de Ciencias de Berlín la serie trigonométrica:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x),$$

donde a es un número impar, $b \in [0, 1)$, y $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, es continua en $(-\infty, \infty)$ pero ¡no es diferenciable en ningún x real!

No solo eso, existe una función que es continua en todas partes y diferenciable en ninguna parte, esta función recibe el nombre de **Función de Weierstraß** en honor al matemático alemán Karl Weierstraß, que tuvo gran trascendencia en la dinámica del naciente análisis matemático en 1800. Su gráfica es la siguiente. Solo se informará la no diferenciabilidad, el estudiante responsable puede revisar la prueba completa en [2].

En muchas áreas del análisis avanzado, se obtiene un poder significativo al desplazar nuestra atención de secuencias, series y conjuntos de números de sucesiones, series y “espacio” de funciones. Comenzamos este cambio de atención aquí, considerando las familias de funciones, la convergencia de sucesiones de funciones y finalmente se definirá un tipo de convergencia más satisfactorio.

Definición 0.37: Sucesión de funciones

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto arbitrario. Cualquier función $f: \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ se denomina función de valor real en $\mathcal{S}$. Consideraremos el conjunto de todas estas funciones,

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}) = \{ \text{ todas las funciones } f: \mathcal{S} \to \mathbb{R}\}$$

En este conjunto $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$, definimos las operaciones algebraicas. Para cada par de funciones $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$, y $\forall r \in \mathbb{R}$, definimos:

(a) **Adición** de f y g especificando que

$$\forall x \in \mathcal{S}, (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

(b) **Multiplicación de f por un "escalar"** r especificando que

$$\forall x \in \mathcal{S}, (rf)(x) = r \cdot f(x)$$

(c) **Multiplicación de** f y g especificando que

$$\forall x \in \mathcal{S}, (fg)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

(d) **División de** f por g especificando que

$$\forall x \in \mathcal{S}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

(Observe que $\frac{f}{g} \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ solo si $\forall x \in \mathcal{S}, g(x) \neq 0$.)

(e) **El valor absoluto de** f: $\forall x \in \mathcal{S}, |f|(x) = |f(x)|$.

(f) **El máximo de** f y g:
$$\forall x \in \mathcal{S}, \text{máx}\{f, g\}(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}.$$

(g) **El mínimo de** f y g:
$$\forall x \in \mathcal{S}, \text{mín}\{f, g\}(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}.$$

Teorema 0.24: Álgebra de funciones

Si $\mathcal{S}$ es un conjunto arbitrario no vacío, entonces $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$, junto con las operaciones (a) y (b) especificadas en la definición superior, satisface las siguientes diez propiedades:

(1) $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), f + g \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$;

(2) $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), f + (g + h) = (f + g) + h$;

(3) $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), f + g = g + f$;

(4) $\exists 0 \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ tal que $\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), f + 0 = 0 + f = f$;

(5) $\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), \exists - f \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ tal que $f + (-f) = 0$;

(6) $\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), r \in \mathbb{R}, rf \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$;

(7) $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), \forall r \in \mathbb{R}, r(f + g) = rf + rg$;

(8) $\forall \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), \forall r, s \in \mathbb{R}, (r + s)(f) = rf + sf$;

(9) $\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), \forall r, s \in \mathbb{R}, r(sf) = (rs)f = s(rf)$;

(10) $\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), 1f = f$;

Tomando en cuenta la operación (c) de la definición anterior, $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ también satisface las siguientes cinco propiedades:

(11) $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), fg \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$;

(12) $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), f(gh) = (fg)h$;

(13) $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), fg = gf$;

(14) $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), f(g+h) = fg + fh$;

(15) $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$, y $\forall r \in \mathbb{R}, r(fg) = (rf)g = f(rg)$;

Definición 0.38: Espacio de funciones

Porque $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$, junto con las operaciones de adición y multiplicación por escalar, satisface las diez propiedades este es llamado un **espacio vectorial** de funciones, o simplemente un **espacio de funciones**. Cualquier subconjunto $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ que también satisface las diez propiedades relativas a esas dos operaciones es llamado un **subespacio** de $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$.

Definición 0.39: Álgebra de funciones

Porque $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$, junto con las operaciones de adición, multiplicación por escalar y multiplicación satisface las quince propiedades este es llamado un **álgebra** de funciones. Cualquier subconjunto $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ que también satisface las quince propiedades relativas a esas tres operaciones es llamado un **subálgebra** de $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$.

La siguiente colección de teoremas son de vital importancia en la deducción de los métodos de estimación de error.

Teorema 0.25: Teorema de Rolle

Supongamos que f es de clase $C[a,b]$ y diferenciable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un número x en (a,b) tal que $f'(x) = 0$.

Teorema 0.26: Teorema del valor medio

Si $f \in C[a,b]$ y f es diferenciable en (a,b), entonces existe un número de modo que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema 0.27: Teorema del valor extremo

Si $f \in C[a,b]$, entonces existen $c_1, c_2 \in [a,b]$ con $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$, para todo $x \in [a,b]$. Además, si f es diferenciable en (a,b), entonces los números c_1 y c_2

Diferencias centradas y diferencias segundas

$$\boxed{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \text{ y } \frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x} \text{ se acercan a } f'(x)}$$

No hemos mencionado que, para una mejor aproximación de $f'(x)$ es tomar el promedio de esos dos promedios. Esto produce una ***diferencia centrada*** que se basa en $x+\Delta x$ y $x-\Delta x$. Si dividimos por $2\Delta x$:

$$\boxed{f'(x) \approx \frac{1}{2}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}\right] = \frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}}$$

Afirmamos que es mejor. Una prueba nos mostrará el poder de x.

Para $f(x)=x$ estos radios todos dados $f'=1$ (exactamente). Para $f(x)=x^2$, solo la diferencia centrada correctamente nos da $f'=2x$. Esto es solo una "precisión de primer orden". Pero centrado no nos deja error. Estamos promediando $2x+\Delta x$ con $2x-\Delta x$. Por lo tanto, la diferencia centrada es de "precisión de segundo orden".

Nos preguntamos ahora: ¿Cuál es el radio de convergencia de la segunda derivada? Una respuesta es tomar las diferencias de la primera derivada. Ciertamente, $\Delta f'/\Delta x$ se aproxima a f''. Pero si queremos un radio que encierre a f en sí misma. Una idea natural es tomar las diferencias de las diferencias, el cual llamamos la "***diferencias segundas***".

$$\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-\dfrac{f(x)-f(x)-\Delta x}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} \to \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$$

En la parte superior, la diferencia de las diferencias es $\Delta(\Delta f)=\Delta^2 f$. Que corresponde a $\mathrm{d}^2 f$. En la parte inferior, $(\Delta x)^2$ corresponde a $\mathrm{d}^2 x$. Esto explica la manera cómo reemplazamos el "2" en $\mathrm{d}^2 f/\mathrm{d}^2 x$. Para decir esto diferentemente, $\mathrm{d}x$ es cuadrado, $\mathrm{d}f$ no es cuadrado. Si dividimos Δf por $(\Delta x)^2$, el radio estalla. Si la cancelación extra en la segunda diferencia $\Delta^2 f$ que permite que el límite exista. Ese límite es $f''(x)$.

Ejemplo 0.2: Aplicación a una ecuación diferencial

La gran mayoría de ecuación es diferenciales no se pueden resolver de manera exacta. Un caso típico es $f''(x)=-\operatorname{sen} f(x)$ (la ecuación del péndulo). Para calcular una solución, se prefiere reemplazar f'' por la segunda diferencia en la ecuación anterior

Para comprobar la precisión de estas diferencias, simularemos el experimento con $f(x)=\operatorname{sen} x+\cos x$. La tabla muestra el error en $x=0$ de las fórmulas.

Longitud de paso Δx	Error por un lado	Error por diferencias centradas centrado	Errores por diferencia
1/4	.1347	-0.0052	0.0104
1/8	.0650	-0.0013	0.0026
1/8	.0319	-0.0003	0.0007
1/16	.0158	-0.0001	0.0002

El error por un lado se cortan a la mitad cuando Δx es cortado en la mitad, Las otras columnas decrecen por un factor de Δx^2. Cada reducción divide esos errores por 4. ***Los errores de diferencia de un lado son $\mathcal{O}\Delta x$ y los errores de las diferencias centradas son $\mathcal{O}(\Delta x)^2$.***

La notación $\mathcal{O}$ cuando los errores son del orden de Δx, escribimos $E=\mathcal{O}(\Delta x)$. Esto significa que $E \le C\Delta x$ para alguna constante C. No calcularemos C, de hecho no queremos tratar con esa constante. La proposición "error por un lado son $\mathcal{O}(\Delta x)$" muestra qué es importante. El punto principal para las otras columnas es $E=\mathcal{O}(\Delta)^2$.

Aproximaciones lineales versus aproximaciones cuadráticas

La segunda derivada nos da una mejorar tremenda sobre las aproximaciones lineales $f(a)+f'(a)(x-a)$. La recta tangente empieza a acercarse a la curva, pero la línea no se dobla. Después de un tiempo que varía por exceso o por defecto a la verdadera función. Esto es especialmente claro para el modelo $f(x)=x^2$, cuando la tangente es el eje X y la parábola es cóncava hacia arriba. Puedes

Definición 0.40: Aproximación cuadrática

La **aproximación cuadrática** de una función suave $f(x)$ alrededor de $x = a$ es

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

El punto de base es $f(a) = f(a)$. Las derivadas también aceptan en $x = a$. No solo eso, las segundas derivadas aceptan en $x = a$. En ambos lados de la ecuación anterior, la segunda derivada en $x = a$ es $f''(a)$.
La aproximación cuadrática se dobla con la función. Esto es absolutamente la última palabra, porque el término cúbico $\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$ y el término de cuarto grado $\frac{1}{24}f''''(a)(x-a)^4$ y así sucesivamente. La suma infinita es una serie de Taylor, la ecuación anterior nos lleva la serie hasta el término cuadrático, el cual para propósitos prácticos nos lleva a una aproximación aterradora. Como se verá en los experimentos numéricos.

Ejemplo 0.3

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 = \text{ inicio de la serie geométrica}$$

Solución. La primera derivada es $1/(1-x)^2$. La segunda derivada es $2/(1-x)^3$. En $x = 0$ tenemos. El factor $\frac{1}{2}$ cancela en 2. Nos resulta $1 + x + x^2$. Los siguientes términos son x^3 y x^4. La serie completa es $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. ■

Ejemplo 0.4: Experimento numérico

$1/\sqrt{1+x} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$ es probado por precisión. Dividiendo por 2 divide el error por 8. Si solo mantenemos la parte lineal $1 - \frac{1}{2}x$, el error es solo divido por 4. Esto son los errores en $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ y $\frac{1}{16}$.

$$\begin{array}{rlll} \text{Aproximación lineal } \left(\text{error } \approx \dfrac{3}{8}x^2\right): & ,0194 & ,0053 & ,0014 \\ \text{Aproximación cuadrática } \left(\text{error } \approx -\dfrac{5}{16}x^3\right): & -000401 & -,00055 & -0,00007 \end{array}$$

.0.1. Iteraciones $x_{n+1} = F(x_n)$

La iteración significa la repetición de la misma función. Suponga que la función es $F(x) = \cos x$. Escoja cualquier valor inicial, digamos $x_0 = 1$. Obtenga su coseno: $x_1 = \cos x_0 = 0{,}54$. ***Entonces evalúe el coseno de x_1***. Su resultado es $x_2 = \cos(0{,}54) = 0{,}86$. La *iteración* $x_{n+1} = \cos x_n$. Ahora tome su calculadora científica, asegúrese que esté en modo radianes e ingrese $\cos 1$, ahora calcule sucesivamente $\cos$Ans, ¿qué es lo importante de las salidas después de 12, 30 o 100 pasos?

Ejemplo 0.5

$$x_{12} = 0{,}75, x_{13} = 0{,}73, x_{14} = 0{,}74, \ldots, x_{29} = 0{,}7391, x_{30} = 0{,}7391$$

Nuestro objetivo es explicar por qué los x se aproximan a $\tilde{x} = 0{,}739085\ldots$. Para cualquier valor inicial x_0 siempre nos acercamos al mismo número $\tilde{x}$. ***¿Qué tiene de especial*** 0.7391?

Observación 0.18: Potencias al cuadrado es diferente a composiciones sucesivas

¿Hacer $x_1 = \cos x_0$ y $x_2 = \cos x_1$ significan que $x_2 = \cos^2 x_0$? ¡Absolutamente no! La iteración crea un nuevo y diferente función $\cos(\cos x)$. Esto usa el botón $\cos$ de su calculadora científica, no el botón potencia al cuadrado x^2. En el tercer paso crea $F(F(F(x)))$. Tan pronto como pueda, itere con $x_{n+1} = \frac{1}{2}\cos x_n$. ¿A qué valor se aproximan los X? ¿Es acaso $\frac{1}{2}(0{,}7931)$?

Déjame disminuir la rapidez para entender estas preguntas. ***La idea central se expresa mediante la ecuación*** $x_{n+1} = F(x_n)$. Sustituyendo x_0 en F resulta x_1. La salida x_1 es la entrada en x_2. En su turno, x_2 es la entrada y sale $x_3 = F(x_2)$. Es una ***iteración***, y este produce la sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots$.

Los x pueden acercarse al límite $\tilde{x}$, dependiendo de la función F. Algunas veces $\tilde{x}$ también depende del valor inicial x_0. A veces no existe el límite. Mire el segundo ejemplo, el cual no necesita una calculadora.

Ejemplo 0.6

Sea $x_{n+1} = F(x_n) = \frac{1}{2}x_n + 4$. Empezando con $x_0 = 0$, la sucesión generada es:

$$x_1 = \frac{1}{2}\cdot 0 + 4 = 4, x_2 = \frac{1}{2}\cdot 4 + 4 = 6, x_3 = \frac{1}{2}\cdot 6 + 4 = 7, x_4 = \frac{1}{2}\cdot 7 + 4 = 7\frac{1}{2}, \text{ y así sucesivamente}$$

Estos números 0,4,6,7,7$\frac{1}{2}$ parece que se acercan a $\tilde{x} = 8$. Una computador podría convencernos. Pero en matemáticas, cuando podemos ver qué tiene de especial sobre el 8.

Cuando los x se aproximan a $\tilde{x}$, el límite de $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 4$
es $\tilde{x} = \frac{1}{2}\tilde{x} + 4$. La ecuación limitante resulta $\tilde{x} = 8$.

8 es el "valor estable" cuando la entrado es igual a la salida: $8 = F(8)$. Este es el ***punto fijo***.

Si empezamos con $x_0 = 8$, la sucesión es $8, 8, 8, \ldots$. Cuando empezamos con $x_0 = 12$, la sucesión se vuelve hacia 8:

$$x_1 = \frac{1}{2}\cdot 12 + 4 = 10, x_2 = \frac{1}{2}\cdot 10 + 4 = 9, x_3 = \frac{1}{2}\cdot 9 + 4 = 8{,}5, \qquad \ldots$$

Ecuación para el límite: Si la iteración $x_{n+1} = F(x_n)$ converge a $\tilde{x}$, entonces $\tilde{x} = F(\tilde{x})$.

Para repetir: 8 es especial porque es igual a $\frac{1}{2}\cdot 8 + 4$. El número $0{,}7391$ es igual a $\cos 0{,}7391\ldots$. ***Las gráficas de*** $y = x$ ***y*** $y = F(x)$ ***se intersectan en*** $\tilde{x}$. Para explicar por qué los x convergen (o por qué no convergen) es el trabajo del cálculo.

Ejemplo 0.7

$x_{n+1} = x_n^2$ tiene dos puntos fijos: $0 = 0^2$ y $1 = 1^2$. Aquí $F(x) = x^2$.
Empezando con $x_0 = \frac{1}{2}$ la sucesión $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{256}, \cdot$ va rápidamente hacia $\tilde{x} = 0$. El único acercamiento a $\tilde{x} = 1$ ocurre cuando $x_0 = 1 \vee x_0 = -1$. Empezando con $x_0 = 2$, obtendremos la sucesión $4, 16, 256, \ldots$ que diverge hacia $+\infty$.

Cada límite $\tilde{x}$ tiene una

Definición 0.41: Cuenca de atracción

Dado un sistema dinámico, llamaremos ***cuenca de atracción*** al conjunto de todos los puntos en A que convergen al punto fijo $\forall n$.

Cada límite $\tilde{x}$ tiene una cuenca de atracción. La cuenca contiene todos los puntos iniciales x_0 que convergen a $\tilde{x}$. Para los ejemplos 1 y 2, cualquier x_0 los lleva a 0.7391 y 8. Las cuencas son toda la recta real (eso aún está por probarse). El ejemplo 3 tiene tres cuencas, el intervalo $-1 < x_0 < 1$, los dos puntos $x_0 \pm 1$ y todo el resto. La cuenca externa $|x_0| > 1$ los lleva a $\pm\infty$. El desafío es que usted encuentre las límites y las cuencas de atracción (por programación o usando su calculadora científica) para $F(x) = x - \tan x$.

En el ejemplo 3, $\tilde{x} = 0$ es el ***punto de atracción***. Puntos cercanos a $\tilde{x}$ se acercarán hacia $\tilde{x}$. El punto fijo $\tilde{x} = 1$ es un ***punto repelente o de repulsión***. Los puntos cercanos a 1 se alejarán. Ahora encontraremos la regla que decida cuando $\tilde{x}$ es un punto de atracción o un punto de repulsión. ***La clave es la pendiente*** $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ ***en*** $\tilde{x}$.

Teorema 0.28

Empezando en cualquier x_0 cercano a un punto fijo $\tilde{x} = F(\tilde{x})$:

$\tilde{x}$ es un ***punto de atracción*** si $\left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right|$ es menor que 1 en $\tilde{x}$.

$\tilde{x}$ es un ***punto de repulsión*** si $\left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right|$ es mayor que 1 en $\tilde{x}$.

Primero daremos una demostración con cálculo. Después, veremos una imagen de convergencia, empleando las "telarañas". Ambos métodos arrojan luz sobre este crucial test para la atracción: $\left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right| < 1$.

Primera prueba. Reste $\tilde{x} = F(\tilde{x})$ de $x_{n+1} = F(x_n)$. La diferencia $x_{n+1} - \tilde{x}$ es lo mismo que $F(x_n) - F(\tilde{x})$. Esto es, ΔF. ***La idea básica del cálculo es que*** ΔF ***es muy pequeño se aproxima a*** $F'\Delta x$:

$$x_{n+1} - \tilde{x} = F(x_n) - F(\tilde{x}) \approx F'(\tilde{x})\,(x_n - \tilde{x})$$

El "error" $x_n - \tilde{x}$ es multiplicado por el valor de la pendiente $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$. El siguiente error $x_{n+1} - \tilde{x}$ es más pequeño o más grande, ya que $|F'| < 1$ o $|F'| > 1$ en $\tilde{x}$. Cada paso multiplica aproximadamente por $F'(\tilde{x})$. ***Este es el tamaño de control de la rapidez de convergencia***. ■

En el ejemplo 1, $F(x)$ es $\cos x$ y $F'(x)$ es $-\operatorname{sen} x$. Existe un punto de atracción hacia 8.

En el ejemplo 3, F es x^2 y F' es $2x$. Existe un punto de atracción en $\tilde{x} = 0$ (donde $F' = 0$). Existe un punto de repulsión en $\tilde{x} = 1$. (donde $F' = 2$).

Admito una gran dificultad, La aproximación en la ecuación (1) solo es válido *cerca de* $\tilde{x}$. Si x_0 está muy lejano, ¿la sucesión se mantendrá aproximando a $\tilde{x}$? Cuando existen varios puntos de atracción, a cuál de ellos $\tilde{x}$ se aproximará? Esta sección empezó con iteraciones que tienen un "buen comportamiento" para resolver la ecuación $\tilde{x} = F(\tilde{x})$ o $f(x) = 0$. Al final descubriremos el ***método de Newton***. La siguiente sección produce iteraciones locas pero maravillosas, divergentes, pero que no "explotan". Ellos conducen a los "fractales" y los "conjuntos de Cantor" y el "caos".

La matemática de las iteraciones no ha finalizado, puede que nunca termine, pero estamos convergiendo en las respuestas. Elija una función y únase.

.0.2. La gráfica de las iteraciones: Telarañas

La iteración $x_{n+1} = F(x_n)$ involucra las dos gráficas al mismo tiempo. Una es la gráfica de $y = F(x)$. La otra es la gráfica de $y = x$ (de pendiente 1). La iteración salta de un lado a otro entre estas gráficas. Esta es una manera muy conveniente de ver todo el proceso.

En el ejemplo 1 era $x_{n+1} = \cos x_n$, la figura X muestra la gráfica de $\cos x$ y su "telarañas". Empezando con (x_0, x_0) en la recta $y = x$, la regla se basa en $x_1 = F(x_0)$:

Desde (x_0, x_0) salta arriba o abajo hacia (x_0, x_1) ***en la curva***.
Desde (x_0, x_1) cruza hacia (x_1, x_1) ***en la recta*** $y = x$.

Estos pasos se repiten por siempre. Desde x_1 sube hasta la curva en $F(x_1)$. La altura es x_2, Ahora cruce la recta $y = x$ en (x_2, x_2). Las iteraciones apuntan a $(\tilde{x}, \tilde{x}) = (0{,}7391, 0{,}7391)$. Este el punte de cruce de los dos gráficos $y = F(x)$ e $y = x$.

En el ejemplo 2 era $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 4$. Ambas gráficas son líneas rectas. La telaraña es en un sentido, desde $(0,0) \to (0,4) \to (4,4) \to (4,6) \to (6,6)$. Nótese cómo y cambia (recta vertical) y x cambia (recta horizontal). La pendiente de $F(x)$ es $\frac{1}{2}$, entonces la distancia hacia 8 es multiplicado por $\frac{1}{2}$ en cada paso.

En el ejemplo 3 era $x_{n+1} = x_n^2$. La gráfica de $y = x^2$ cruza la recta $y = x$ en dos puntos fijos: $0^2 = 0$ y $1^2 = 1$. La figura X inicia la iteración cerca de 0, pero rápidamente se aleja. Este punto fijo es un repelente porque $F'(1) = 2$. La distancia desde $\tilde{x} = 1$ es doble (en el inicio). Un camino se mueve hacia abajo en $\tilde{x} = 0$, el cual es un *punto de super atracción* porque $F' = 0$. El camino para $x_0 > 1$ diverge al infinito.

Ejemplo 0.8

$F(x)$ tiene dos puntos de atracción $\tilde{x}$ (un punto de repulsión $\tilde{x}$ está siempre entre ellos).

La figura X muestra dos cruces con pendientes cero. La iteración y las telarañas convergen rápidamente. Entre ellos, la gráficas de $F(x)$ debería cruzar la recta $y = x$ por debajo. Esto requiere una pendiente mayor que 1. Las telarañas divergen desde un punto inestable, que es la frontera de la cuenca de atracción.

Observación 0.19

1) Para dibujas las telarañas en su calculadora, grafique $y = F(x)$ en la parte superior de $y = x$.

2) Los x que se aproximan a $\tilde{x}$ desde un lado cuando $0 < \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} < 1$.

3) Una cuenca de atracción puede incluir x muy lejanos. Esto hace que el problema sea interesante. Si no hay puntos fijos atractores, vea la sección de “ciclos” y “caos”.

.0.3. La iteración $x_{n+1} = x_n - cf(x_n)$

En este punto ofrecemos al lector una elección. Una posibilidad es saltar hasta la siguiente sección en el “Método de Newton”. Este método es una iteración que resuelve $f(x) = 0$. La función $F(x)$ combina x_n, $f'(x_n)$ y $f'(x_n)$ dentro una fórmula óptima para x_{n+1}. Veremos rápidamente cómo el método de Newton funcione (cuando este funcione). Este es un destacado algoritmo para resolver ecuaciones.

El método de Newton-Raphson

Empecemos con $f(x) = 0$. Esta es la ecuación que será resuelta. Su solución x^* es el punto donde la gráfica cruza el eje X. La figura siguiente muestra x^* y también muestra el punto de inicio x_0. Nuestro objetivo es acercarnos lo más posible a x^*, basada en la información de $f(x_0)$ y $f'(x_)0$. ¿Qué vemos en x_0? La gráfica tiene altura $f(x)$ y pendiente $f'(x)$. Sabemos dónde están y en qué dirección va la curva. No conocemos la concavidad de la curva (no tenemos f''). El mejor plan es **seguir la recta tangente**, donde usemos toda la información que tenemos.
Newton reemplaza $f(x)$ por su aproximación lineal (= aproximación tangente):

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Queremos que el lado izquierdo sea cero. ¡La mejor manera de hacerlo es haciendo cero el lado de derecho!
La recta tangente cruza el eje X en x_1, donde la curva corta el eje x^*. El nuevo punto de muestra es x_1 cumple $f(x_0) + f'(x_1 - x_0)(x - x_0)$. Dividiendo por $f'(x_)$ y resolviendo para x_1, este es el primer paso en el método de Newton.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

En este nuevo punto, calcule $f(x_1)$ y $f'(x_1)$ (la altura y la pendiente en x_1). Ellos nos darán una nueva recta tangente, que cruza en x_2. ***Hasta cualquier paso que queramos*** $f(x_{n+1}) = 0$ ***y nos quedamos con*** $f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$. Después de dividir por $f'(x_n)$, la fórmula para x_{n+1} es el método de Newton.

Teorema 0.29

La recta tangente en x_n corta el eje en x_{n+1}:

$$\textbf{\textit{Método de Newton}} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Usualmente la iteración $x_{n+1} = F(x_n)$ converge rápidamente a $\tilde{x}$.

Las aproximaciones lineales involucran tres números. Ellos son Δx (que cruza) y Δ (arriba) y la pendiente $f'(x)$. Si conocemos dos de esos números, podemos estimar el tercero. Es importante darse cuenta de que el cálculo ahora ha usado los tres cálculos, estos son la clave para este capítulo.

1. Estimar la pendiente $f'(x)$ de $\Delta f/\Delta x$.
2. Estimar el cambio Δf de $f'(x)/\Delta x$.
3. Estimar el cambio Δx de $\Delta f/f'(x)$.

El deseado Δf es $-f(x_n)$. La fórmula 3 es exactamente $\Delta x = -f(x_n)/f'(x_n)$.
El método de Newton (o de Newton Raphson) es uno de los más poderosos y bien conocidos métodos numéricos para resolver el problema de encontrar las "raíces", es decir, encontrar un $x = \tilde{x}$ de manera que $f(x) = 0$.
La forma elemental del método de Newton es usado para encontrar los *ceros* de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o "raíces" de la ecuación $f(x) = 0$). El método es iterativo y emplea la fórmula $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$.

Ejemplo 0.9

Resolver $\dfrac{1}{x} - a = 0$ y encontrar $\tilde{x} = \dfrac{1}{a}$ sin dividir por a.

Solución. Aquí $f(x) = (1/x) - a$. El método de Newton usa $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ ■

Deseamos encontrar un número r tal que $f(r) = 0$. Para aproximar r, tomamos un punto inicial $\bar{x_0}$ para r, y en general, esperamos encontrar que $f(x_0) \neq 0$. Luego vemos la recta tangente a la gráfica de f en x_0.

Ejemplo 0.10: Raíces cuadradas

Sea la función $f(x) = x^2 - b$ y si $x^* = \sqrt{b}, x^* = -\sqrt{b}$ son los ceros.

Solución. El método de Newton es una manera rápida de encontrar las raíces cuadradas. La pendiente es $f'(x_n) = 2x_n$, y la fórmula para el nuevo punto de muestra será:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - b}{2x_n} = x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{b}{2x_n}$$

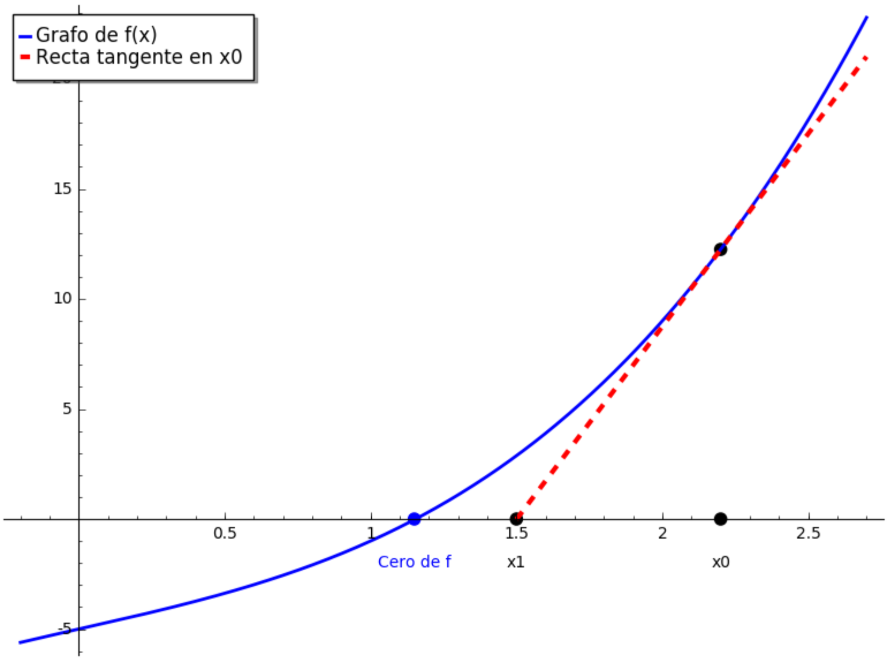
Esto se simplifica a $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + b/x_n)$. ***La raíz cuadrada de un punto de prueba, dividido entre b y el promedio de los números***. Los antiguos Babilonios tuvieron esa misma idea, sin conocer funciones o pendientes.

Los valores iterados $x_{n+1} = F(x_n)$:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{b}{x}\right) \qquad \text{y} \qquad F'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{x^2}\right).$$

Los babilonios hicieron exactamente lo correcto. La pendiente F' es el cero en la solución, cuando $x^2 = b$. Esto hace que el método de Newton converja con una gran rapidez. El test de la convergencia es $|F'(x^*)| < 1$. Newton logra $F'(x^*) = 0$, que es una *súper convergencia*. ■

```
sage: #Consideremos f
sage: var('x')
x
sage: f(x)=x^3+3*x-5
sage: #Calculemos su derivada
sage: fp(x)=diff(f(x),x)
sage: #Un valor particular para x0 es
sage: x0 = 2.2
sage: #El intervalo [a,b] es
sage: a = -0.2
sage: b = 2.7
sage: #Preparando el ploteo
sage: #Primero tengamos f
sage: function = plot(f(x), (x,a,b), linestyle='-', thickness=2,
   color='blue', legend_label='Grafo de f(x)')
sage: #Entonces la recta tangente
sage: tangent = plot( (fp(x0)*(x-x0)+f(x0)) , (x,1.5,b), linestyle='--',
   thickness=3, color='red', legend_label='Recta tangente en x0')
sage: #Incluiremos un poco de texto en el grafo
sage: textt = text('x1', (1.5,-2), color='black')
sage: #Plotareamos algunos puntos y un poco de texto
sage: points = list_plot( [(x0, f(x0)), (x0, 0), (1.5,0)],
   color='black', size=70)
sage: textp = text('x0', (x0,-2), color='black')
sage: #Entonces plotearemos el cero de f con texto
sage: Exact = list_plot( [(1.15,0)] , color='blue', size=70)
sage: textExact = text('Cero de f', (1.15,-2), color='blue')
sage: #next we display all the plots we created above
sage: show(function+tangent+textt+points+textp+textExact+Exact)
None
```



Ejemplo 0.11

Calcule las raíces de la ecuación $x^2 - \cos x = 0$ usando el método de Newton.

Solución. Ingresemos a www.cocalc.org y escribamos el siguiente código de igual manera, con la misma identación.

Como vemos, basta tomar $x^* = 1{,}20153$ para obtener una buena aproximación. ■

Ejemplo 0.12: Número de oro

Encuentre las raíces del polinomio $f(x) = x^2 - x - 1$.

Solución. Para calcular su raíz, aplicaremos el método de Newton, nuestro punto de prueba será $x^* = 1$. También $f'(x) = 2x - 1$. Luego:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

■

Si deseamos obtener la cota de error en el Método de Newton, entonces debemos de

$$\boxed{\text{error} = \text{solución exacta} - x_n}$$

Denotaremos r la solución exacta, entonces dado que r es cero de f, por el Teorema del Valor Medio, obtenemos:

$$\begin{aligned} r - x_n &= -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= f'(\zeta)(x_n - r) \end{aligned}$$

Teorema de Taylor

El teorema de Taylor proporciona una manera de aproximar una función f que es $(n+1)$ veces derivable en una vecindad en el punto a por un polinomio de grado $\leq n$ en potencias de $(x-a)$, cuyos coeficientes pueden ser determinados por las derivadas $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ en a. Este polinomio será llamado el ***n*-ésimo polinomio de Taylor** de f alrededor de a, y se denotará por $T_n(x)$. Las aproximaciones por polinomios son importantes, dado que el polinomio es el tipo de función más simple de calcular. Ellos implican solo tres operaciones aritméticas: adición, sustracción y multiplicación. Los polinomios de Taylor tienen muchas aplicaciones.

Los polinomios de Taylor pueden calculares sin usar el teorema de Taylor, usando la definición 6.5.1 siguiente. Sin embargo, el mero cálculo de polinomios de Taylor no puede justificar su uso en aproximaciones de funciones. Necesitamos un teorema que nos diga cuán exacto podemos esperar que sea la aproximación polinomial en particular. Eso es lo que el teorema de Taylor hace por nosotros.

En esta sección, usaremos las funciones familiares $e^x, \ln x$ y las funciones trigonométricas. Mientras que sus definiciones formales no se dan hasta los capítulos 3 y 4. los necesitamos aquí como ejemplos, por lo tanto, asumiremos que estas funciones están definidas y son diferenciables en todas partes en sus dominios, y que sus derivadas obedecen las reglas establecidas en cálculo diferencial.

Definición 0.42: Polinomio de Taylor

Suponga que f y sus primeras n derivadas $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ existen en a. Definimos el ***polinomio de Taylor de orden n de la función f alrededor de a*** por la fórmula

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Esto es,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

donde $f^{(0)} = f$ y $f^{(k)}$ denota la k-ésima derivada de f.

El propósito de esta sección es investigar la relación entre una función f y sus polinomios de Taylor. Veremos que cuando f se "comporta bien", $f(x)$ es muy aproximado a $T_n(x)$ para valores de x cercanos a a. Comprenderemos mejor lo que esto significa a medida que avancemos a través de esta sección.

Ejemplo 0.13

Encuentre el 4 polinomio de Taylor de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ alrededor de 0.

Solución. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= \operatorname{sen} x \implies f^{(0)}(0) = \operatorname{sen} 0 = 0;\\
f'(x) &= \cos x \implies f'(0) = \cos 0 = 1;\\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x \implies f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0;\\
f'''(x) &= -\cos x \implies f'''(0) = -\cos 0 = -1;\\
f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x \implies f^{(4)}(0) = \operatorname{sen} 0 = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
T_4(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \cdots + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4 \\
&= 0 + 1\cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 \\
&= x - \frac{1}{6}x^3.
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 0.14

Encuentre la 4 polinomio de Taylor de la función $f(x) = 3 + 5x^2 - 4x^3 + x^4$ alrededor de 0.

Solución. Sea $f(x) = 3 + 5x^2 - 4x^3 + x^4$. Entonces

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) = 3 + 5x^2 - 4x^3 + x^4 &\implies f^{(0)}(0) = 3; \\
f'(x) = 10x - 12x^2 + 4x^3 &\implies f'(0) = 0; \\
f''(x) = 10 - 24x + 12x^2 &\implies f''(0) = 10; \\
f'''(x) = -24 + 24x &\implies f'''(0) = -24; \\
f^{(4)}(x) = 24 &\implies f^{(4)}(0) = 24.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
T_4(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \cdots + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4 \\
&= 3 + 0\cdot x + \frac{10}{2!}x^2 + \frac{-24}{3!}x^3 + \frac{24}{4!}x^4 \\
&= 3 + \frac{10}{2}x^2 + \frac{-24}{6}x^3 + \frac{24}{24}x^4 \\
&= 3 + 5x^2 - 4x^3 + x^4.
\end{aligned}
$$

Observe que en este caso, $T_4(x)$ y $f(x)$ son polinomios idénticos. ■

Ahora tomemos la misma función f y busquemos su 4 polinomio de Taylor alrededor de un punto diferente, digamos 1.

Ejemplo 0.15

Encuentre el polinomio de Taylor de orden 4 de la función $f(x) = 3 + 5x^2 - 4x^3 + x^4$ alrededor de 1.

Solución: Sea $f(x) = 3 + 5x^2 - 4x^3 + x^4$. Entonces

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= 3 + 5x^2 - 4x^3 + x^4 &\Longrightarrow\ & f^{(0)}(1) = 5;\\
f'(x) &= 10x - 12x^2 + 4x^3 &\Longrightarrow\ & f'(1) = 2;\\
f''(x) &= 10 - 24x + 12x^2 &\Longrightarrow\ & f''(1) = -2;\\
f'''(x) &= -24 + 24x &\Longrightarrow\ & f'''(1) = 0;\\
f^{(4)}(x) &= 24 &\Longrightarrow\ & f^{(4)}(1) = 24.
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
T_4(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4\\
&= 5 + 2(x-1) + \frac{-2}{2!}(x-1)^2 + \frac{0}{3!}(x-1)^3 + \frac{24}{4!}(x-1)^4\\
&= 5 + 2(x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^4.
\end{aligned}
$$

Observe que en este caso, $T_4(x)$ y $f(x)$ no parecen ser polinomios idénticos. Sin embargo, es un ejercicio fácil "ampliar" los términos en $T_4(x)$ y mostrar que realmente es igual a $f(x)$. ■

Ejemplo 0.16

Encuentre el polinomio de Taylor de grado n para la función $f(x) = e^x$ alrededor de 0.

Solución: Este es fácil. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la n-ésima derivada de f es $f^{(n)}(x) = e^x$, y $f^{(n)}(0) = 1$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\\
T_n(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 0.17

Encuentre el polinomio de Taylor de grado n para la función $f(x) = \ln(1+x)$ alrededor de 0.

Solución: Primero encontremos $f^{(n)}(0)$ para $n = 1, 2, \cdots, n$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x) && \Longrightarrow f(0) &&= 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} && \Longrightarrow f'(0) &&= 1 = 0! \\
f''(x) &= -(1+x)^{2} = \frac{-1!}{(1+x)^2} && \Longrightarrow f''(0) &&= -1! \\
f'''(x) &= 2(1+x)^{-3} = \frac{2!}{(1+x)^3} && \Longrightarrow f'''(0) &&= 2! \\
f^{(4)}(x) &= -2\cdot 3(1+x)^{-4} = \frac{-3!}{(1+x)^4} && \Longrightarrow f^{(4)}(0) &&= -3! \\
\vdots \quad & \vdots && \qquad\qquad \vdots &&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^n} && \Longrightarrow f^{(n)}(0) &&= (-1)^{n+1}(n-1)!
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!}x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k
$$

$$
T_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n.
$$

■

Aproximando por polinomios de Taylor

Una razón para esperar que $T_n(x)$ es una buena aproximación para $f(x)$ es que en a, $f(x)$ y $T_n(x)$ tienen el mismo valor, la misma derivada, la misma segunda derivada, y así, hasta la misma n-ésima derivada. El siguiente teorema

Teorema 0.30

Suponga que f tiene la n-ésima derivada en a. Entonces $T_n(a) = f(a), T_n'(a) = f'(a), T_n''(a) = f''(a), \cdots$, y $T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$.

Debido a que f y $T_n(x)$ tienen el mismo valor en las primeras n derivadas en a, esperaríamos que las gráficas de $f(x)$ y $T_(x)$ se ajustarán estrechamente para los valores de x cerca de a. Si esto no es suficiente para convencerte de la relación entre una función y su polinomio de Taylor de grado n es muy especial, el siguiente teorema puede ser suficiente.

Teorema 0.31

El polinomio de Taylor de grado n, $T_n(x)$, es el único polinomio de grado n en potencias de $(x-a)$ con las propiedades identificadas en el teorema 0.30. Esto es, si $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ tiene la propiedad que $f(a) = p(a), f'(a) = p'(a), f''(a) = p''(a), \cdots, f^{(n)}(a) = p^{(n)}(a)$, entonces los coeficientes en $p(x)$ son idénticos a los coeficientes en $T_n(x)$: es decir, $\forall k = 0, 1, \cdots, n, a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Prueba: Suponga que

$$g(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n, \text{ y}$$
$$h(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n$$

son polinomios tales que

$$g(a) = h(a), g'(a) = h'(a), g''(a) = h''(a), g''(a) = h''(a), \cdots, g^{(n)}(a) = h^{(n)}(a).$$

Entonces,

$$g(a) = h(a) \implies a_0 + 0 + \cdots + 0 = b_0 + 0 + \cdots + 0. \text{ Por lo tanto,}$$
$$a_0 = b_0.$$

Diferenciando $g(x)$ y $h(x)$, resulta

$$g'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + na_n(x-a)^{n-1};$$
$$h'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + 3b_3(x-a)^2 + \cdots + nb_n(x-a)^{n-1}.$$

Entonces $g'(a) = h'(a) \implies a_1 + 0 + \cdots + 0 = b_1 + 0 + \cdots + 0$. Por lo tanto,

$$a_1 = b_1.$$

Diferenciando nuevamente, tenemos

$$g''(x) = 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-a) + 3\cdot 4a_3(x-a)^2 \cdots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2};$$
$$h''(x) = 2b_2 + 2\cdot 3b_3(x-a) + 3\cdot 4b_3(x-a)^2 \cdots + n(n-1)b_n(x-a)^{n-2}.$$

Así, $g''(a) = h''(a) \implies 2a_2 + 0 + \cdots + 0 = 2b_2 + 0 + \cdots + 0$. En consecuencia,

$$a_2 = b_2.$$

Continuando de esa manera, obtenemos $a_3 = b_3, a_4 = b_4, \cdots, a_n = b_n$. Es decir, los coeficientes de g y h son idénticos. Por eso, solo puede existir un polinomio de Taylor de grado n en potencias de $(x-a)$ con las propiedades identificadas en el teorema 0.30. ■

Para estudiar la diferencia entre f y su polinomio de Taylor de grado n, introduciremos una notación para esta diferencia.

Definición 0.43

Supongamos que f y su sus primeras n derivadas $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ existen en un intervalo abierto I conteniendo un a. Entonces, $\forall x \in I$, definimos el ***residuo de Taylor para la función f alrededor de a*** como

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Por lo tanto, $\forall x \in I$,

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Podemos obtener una idea preliminar mirando al $T_0(x)$, el polinomio de Taylor de grado "cero" de la función f alrededor de a en luz del teorema del valor medio enunciado en el teorema 0.26. Supongamos que f es diferenciable en un intervalo I conteniendo a. Sea $x \in I, x \neq a$. Por el teorema del valor medio aplicado a f en el intervalo cerrado entre x y a, $\exists c$ en el intervalo abierto entre x y a tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + f'(c)(x-a) \\
f(x) - f(a) &= f'(c)(x-a) \\
f(x) - T_0(x) &= f'(c)(x-a) \\
R_0(x) &= f'(c)(x-a).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el teorema del valor medio podría ser parafraseado como un enunciado sobre el residuo $R_0(x)$.

Teorema 0.32: Parafraseo del teorema del valor medio

Suponga que f es diferenciable en un intervalo I conteniendo a. Entonces, para todo $x \neq a$ en I, $\exists c$ entre x y a tal que $R_0(x) = f'(c)(x-a)$.

Ahora estamos en el punto donde podemos afirmar y probar el teorema de Taylor. Es una afirmación sobre el residuo $R_n(x)$, la diferencia entre $f(x)$ y $T_n(x)$. Puede considerarse como una forma generalizada del teorema del valor medio; de hecho, su prueba le recordará la demostración de ese teorema. Utilizaremos el teorema de Rolle tal como se probó el teorema del valor medio en Cálculo diferencial.

Teorema 0.33

Suponga que f es es n veces diferenciable en un intervalo abierto que contengan a x y a, donde $x \neq a$, y $f^{(n+1)}(t)$ existe para todo t en el intervalo abierto I entre x y a. Si $T_n(x)$ y $R_n(x)$ son definidas como arriba, entonces $\exists c \in I$ de manera que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

También conocida como la ***forma de Lagrange*** del residuo de Taylor.

Prueba: Suponga que f es n veces diferenciable en un intervalo abierto que contiene a x y a, donde $x \neq a$, y $f^{(n+1)}(t)$ existe para todo t en el intervalo abierto I entre x y a. Supongamos que $T_(x)$ y $R_n(x)$ son definidas como arriba y definimos la función $G(t)$ sobre I por la fórmula

$$G(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + R_n(x)\frac{(x-t)^{(n+1)}}{(x-a)^{n+1}}$$

Entonces G es diferenciable en cualquier $t \in I$ y continua en la clausura de I, el intervalo cerrado entre x y a. Recordando que x es constante en la expresión de arriba ($G(t)$ no depende de x), la derivada de G, $G'(t)$ es:

$$\begin{aligned}
G'(t) &= f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{f^{(k)}(t)}{k!} k(x-t)^{k-1}(-1) + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \right] + \frac{(n+1)(x-t)^n(-1)}{(x-a)^{n+1}} R_n(x) \\
&= f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}} R_n(x) \\
&= f'(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}} R_n(x) \\
&= f'(t) - \frac{f'(t)}{0!}(x-t)^0 + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}} R_n(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $G'(t) = \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \dfrac{(n+1)(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}} R_n(x)$.

Ahora, sustituyendo $t = a$ en la fórmula definida para $G(t)$, resulta:

$$\begin{aligned} G(a) &= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)\frac{x-a^{n+1}}{(x-a)^{n+1}} = T_n(x) + R_n(x) \\ &= f(x), \text{ por la definición } 0{,}43. \end{aligned}$$

También, reemplazando $t = x$ en la fórmula definida para $G(t)$, resulta:

$$G(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x)^k + R_n(x)\frac{(x-x)^{n+1}}{(x-x)^{n+1}} = f(x) + 0 + 0 = f(x).$$

Esto significa que, $G(a) = G(x)$. Además, G satisface todas las hipótesis del teorema de Rolle en un intervalo cerrado entre x y a. Por lo tanto, por el teorema de Rolle, $\exists c$ entre x y a tal que

$$G'(c) = 0$$

Pero reemplazando c en $G'(t)$ resulta e igualando a o:

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n - \frac{(n+1)(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}}R_n(x) = 0.$$

Resolviendo para $R_n(x)$, obtendremos

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

■

Aplicaciones del Teorema de Taylor

Ejemplo 0.18

Emplee el teorema de Taylor para probar que

$$\forall x > 0, 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}e^x$$

Solución. Sea $x > 0$. Usaremos el polinomio de Taylor $T_2(x)$ para e^x alrededor de o. Usando la definición 0.43, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = T_2(x) + R_2(x).$$

Esto es, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + R_2(x)$. Por el teorema de Taylor, $\exists c$ entre 0 y x tal que $R_2(x) = \frac{e^c}{e!}x^3$. Por lo tanto, para algún c entre 0 y x,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{e^c}{3!}x^3$$

Dado que $0 < c < x$, tenemos que $1 < e^c < e^x$. Por lo tanto, de la ecuación anterior, se sigue que

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}e^x$$

■

Ejemplo 0.19

Use el teorema de Taylor para probar que

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}; \text{ es decir, } e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Solución: Sea $x \in \mathbb{R}$. Usando el polinomio de Taylor, $T_n(x)$, para e^x alrededor de 0. Usando la definición 0.43, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = T_n(x) + R_n(x).$$

Por el teorema de Taylor, para $x \neq 0$, $\exists c$ entre 0 y x tal que

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{|e^c||x^{n+1}|}{(n+1)!} \\ &< \frac{e^{|x|}|x^{n+1}|}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Pero el $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Además, para cada x, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Por lo tanto, el $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} [e^x - R_n(x)]$

$$= e^x - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = e^x.$$

■

El ejemplo 0.19 es un caso especial de un teorema general, el cual ahora enunciaremos.

Teorema 0.34

Suponga que f y todas sus derivadas existan en un intervalo abierto I conteniendo a. Si $\exists M > 0$ tal que $\forall x \in I$ y $\forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leq M^n$, entonces $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x)$, donde $T_n(x)$ denota el polinomio de Taylor de grado n para f alrededor de a. Esto es, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(x)$.

Sage, un software numérico muy poderoso

Numpy[1] y SciPy[2] son librerías para el lenguaje de programación interpretado orientado a objetos de código abierto, *Python*, que se aplica a un amplio espectro de tareas de cálculo numérico y científico. Martinus J.G. Veltman recibió el Premio Nobel de Física en 1999 junto con su ex alumno Gerard 't Hooft por su trabajo "elucidación de la estructura cuántica de la interacción electrodébil" en física de partículas. ¿Qué tiene esto en común con Sage? Es un ejemplo del dinamismo entre las diversas ramas de la ciencia, en este caso, la física de partículas y las matemáticas. Los primeros CAS de la historia fueron Schoonschip (software que desarrollaron para sus investigaciones en física de altas energías y fue programado en lenguaje ensamblador) y FORMAC (el antecedente de FORTRAN).
El proyecto Sage proporciona un entorno de software multiplataforma que permite utilizar de manera

[1] https://numpy.org
[2] https://scipy.org

uniforme un gran número de componentes de software, incluyendo Numpy y SciPy, y que tiene a Python como su lenguaje de comandos.
SAGE (System for Algebra and Geometry Experimentation) fue escrito en Python, C++ y C y creado por **William Stein** en los años 2004 - 2005, usando programas de código abierto lanzado bajo la licencia GPL. El objetivo principal del proyecto fue crear una alternativa de código abierto viable a los programas matemáticos patentados (como por ejemplo MATLAB, Mathematica, Maple) que se utilizarían para la investigación y la enseñanza. El rango de la funcionalidad de Sage es amplio, abarcando temas matemáticos de todo tipo que van desde la teoría de números y el álgebra (grupos, anillos, categorías y más) hasta la geometría y la computación numérica. En la página de Sage se enumeran más de 300 artículos académicos, 40 libros y 40 tesis en los que el programa ha estado involucrado.
Estas son algunas características de Sage:

1. **Eficiente:** Es muy rápido, comparado con cualquier otro lenguaje disponible. Esto es muy difícil, ya que muchos sistemas son de código cerrado, los algoritmos a veces no se publican, y encontrar algoritmos rápidos es a menudo extremadamente difícil (años de trabajo, tesis doctorales, suerte, etc).
2. **Bien documentado:** Manual de referencia, referencia API (Application programming interface) con ejemplos para cada función, y un extenso tutorial.
3. **Multiplataforma:** SAGE funciona bajo Linux, OS X, Windows (cygwin) y Solaris.
4. **Comprensible:** Implementar suficientes algoritmos puede ser realmente útil.
5. **Uso amigable**: La esperanza es llegar a un alto nivel de soporte al usuario.
6. **Fácil de compilar:** SAGE debería ser relativamente fácil de compilar desde la raíz para los usuarios de Linux y OS X. Esto proporciona más flexibilidad en la modificación del sistema.
7. **Gratis y de código abierto:** El código fuente debe estar libremente disponible y legible, para que los usuarios puedan entender lo que realmente está haciendo el sistema y reproducirlo fácilmente. Así como los matemáticos ganan una comprensión más profunda de un teorema leyendo cuidadosamente o al menos u hojeando la prueba, la gente que hace los cálculos debe poder entender cómo los cálculos trabajan leyendo el código fuente documentado.

https://cocalc.com/
https://doc.sagemath.org
Para la instalación

```
\usepackage{sagetex}
```

para LaTeX puede estudiar el manual en https://github.com/sagemath/sagetex

Sage en acción

Veamos algunas prestaciones de nuestro CAS:

```
sage: #Imprima el valor de pi con 150 bits.
sage: pi.n(150)
3.1415926535897932384626433832795028841971694
```

```
sage: #Verificar si es primo. La salida es True or False.
sage: is_prime(2017)
True
```

```
sage: #Calcular el valor de tangente en pi/4.
sage: tan(pi/4)
1
```

```
sage: #Calcular el cuadrado de la matriz.
sage: matrix([[1,2], [3,4]])^(2)
[ 7 10]
[15 22]
```

```
sage: #Calcular 2 elevado al cubo.
sage: 2**3
8
```

```
sage: #Factorizar el entero 2017 (es primo)
sage: 2017.factor()
2017
```

```
sage: #Especificar x como la variable.
sage: x = var ('x')
sage: #Calcular la sexta DERIVADA de cos(x).
sage: diff(cos(x),x,6)
-cos(x)
```

```
sage: #Especificar x como la variable.
sage: x = var('x')
sage: #Calcular la antiderivada de cos(x)*sin(x).
sage: integral(cos(x)*sin(x),x)
-1/2*cos(x)^2
```

```
sage: f(x)=3*exp(x)-x^4
sage: f(1.0)
7.15484548537714
```

Ejemplo 0.20

Crear un código en Sage que calcule la siguiente integral definida

$$\int_1^{10} \ln x \, \mathrm{d}x$$

Solución. Esto es:

```
sage: s = integrate(log(x),(x,1,10))
sage: s
10*log(10) - 9
```

∎

```
sage: #Importar
sage: from scipy.integrate import simps
sage: import scipy
sage: import numpy
sage: def f(x): return sin(x)/x
sage: a = 1.0
sage: b = e
sage: n = 5
sage: x = numpy.array([a+i*(b-a)/n for i in [0,1,..,n]])
sage: #Calcular y mostrar la Regla del trapecio
```

```
sage: scipy.integrate.trapz(f(x), x).n()
0.874072951263462
```

Capítulo 1

Antiderivadas

1.1. Antiderivadas

El matemático estadounidense, William Waterhouse, quien en 1966 corrigió la obra magna de Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae* escribió, "El cálculo en 1800 estaba en un estado curioso. No había duda de que era correcto. Los matemáticos de suficiente habilidad y perspicacia habían tenido éxito durante un siglo. Sin embargo, nadie podía explicar claramente por qué funcionaba... Entonces vino Cauchy." En sus *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (Resúmenes de las lecciones de cálculo infinitesimal) de 1823, el prolífico matemático francés Augustin Cauchy proporcionó un desarrollo riguroso del cálculo y una prueba moderna del Teorema Fundamental del Cálculo, que une elegantemente las dos ramas principales del cálculo (diferencial e integral) en un solo marco.
Cauchy comienza su trabajo con una clara definición de derivada. Su mentor, el matemático francés Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), pensó en términos de gráfica de curvas y consideró la derivada como la tangente a una curva. A fin de determinar la derivada, Lagrange buscó deducir fórmulas como fuera necesario. Stephen Howkings dijo, "Cauchy fue mucho más allá que Lagrange y definió la derivada de f en x como el límite del cociente de las diferencias $\Delta y/\Delta x = [f(x+i) - f(x)]/i$" cuando se aproxima a cero, que es nuestra moderna y no geométrica definición de derivada. Similarmente, al aclarar la noción de la integral en cálculo, Cauchy demostró el *Teorema Fundamental del Cálculo*, que establece una manera en la cual podemos calcular la integral de $\int_a^b f$ para cualquier función continua. Más particularmente, el *Teorema Fundamental del Cálculo* establece que si f es integrable en el intervalo $[a,b]$, y si $H(x)$ es la integral de $f(x)$ desde a hacia $x \leq b$, entonces la derivada de H' es idéntica a $f(x)$. En otras palabras, $H'(x) = f(x)$. Waterhouse concluye, "Cauchy realmente no estableció nuevos fundamentos, barrió todo el polvo para revelar el edificio del cálculo que ya estaba sobre el lecho rocoso...." Este capítulo es sobre la ***idea*** de integración, y también sobre la ***técnica*** de integración. Explicaremos las características intrínsecas de este principio de sumas integración a través de teoremas y el ejercicio de estas en ejemplos se hace en la práctica. Integración es el problema.

Definición 1.1: Antiderivada

Se dice que una función $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *antiderivada* (también se le conoce como "primitiva") de la función f en un intervalo $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ si $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathcal{I}$.

Ejemplo 1.1: Función polinómica

Sean las funciones $f, F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = 3x^2 + 1 \qquad \text{y} \qquad F(x) = x^3 + x$$

se tiene que $F'(x) = 3x^2 + 1 = f(x), \forall x \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, luego F es una antiderivada de f.

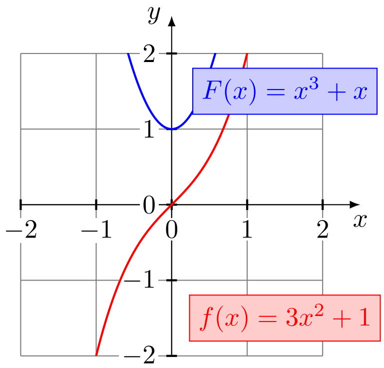


Figura 1.1: Funciones $3x^2 + 1$ y $x^3 + x$

Ejemplo 1.2: Función cos x

Se tienen las funciones $f, F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

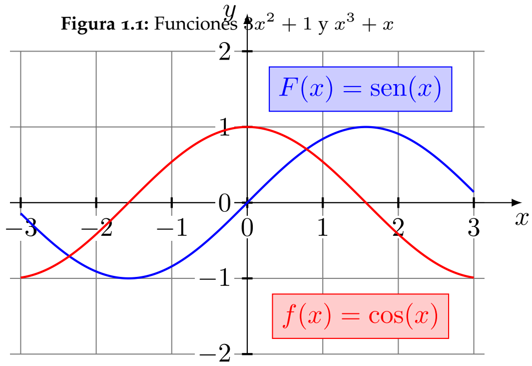


Figura 1.2: Funciones sen x y cos x

$$f(x) = \cos x \quad \text{y} \quad F(x) = \operatorname{sen} x$$

donde $F'(x) = \cos x = f(x), \forall x \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$.
$\longrightarrow$ F es antiderivada de f.

Teorema 1.1: Sobre la constante de integración

Las funciones F_1 y F_2 son antiderivadas de la función f sii $F_1(x) = F_2(x) + C$, C: constante $\forall x \in \mathcal{I}$.

Prueba. ($\Longrightarrow$) F_1 y F_2 son antiderivadas de f, esto es,

$$\begin{aligned} F_1'(x) &= f(x), \quad \forall x \in \mathcal{I}. \\ F_2'(x) &= f(x), \quad \forall x \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

se cumple $F_1'(x) = f(x) = F_2'(x), \forall x \in \mathcal{I}$.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow F_1'(x) &= (F_2(x) + C)' && \forall x \in \mathcal{I}. \\ \Longrightarrow F_1'(x) &= F_2'(x) && \forall x \in \mathcal{I}. \\ F_1'(x) - F_2'(x) &= 0 && \\ [F_1(x) - F_2(x)] &= 0 && \forall x \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Por el teorema del cálculo diferencial, se tiene que

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \text{ C: constante }, \forall x \in \mathcal{I}.$$

En consecuencia,

$$F_1(x) = F_2(x) + C, \text{ C: constante} \quad \forall x \in \mathcal{I}.$$

($\Longleftarrow$) Como $F_1(x) = F_2(x) + C$, $\forall x \in \mathcal{I}$ y para concluir que son antiderivadas de cierta función en el intervalo $\mathcal{I}$, entonces F_1 y F_2 deben ser diferenciables en $\mathcal{I}$, luego

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \ \forall x \in \mathcal{I}.$$

Derivando ambos miembros respecto a x se obtiene:

$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0, \ \forall x \in \mathcal{I}.$$

de esto

$$F_1'(x) = F_2'(x), \ \forall x \in \mathcal{I}.$$

definiendo una función f en el intervalo $\mathcal{I}$.
Como $f(x) = F_1'(x)$, $\forall x \in \mathcal{I}$.
De esto F_1 es antiderivada de f, del mismo modo F_2 es antiderivada de f. ■

$F_1 \wedge F_2$ en un intervalo común.

Diferenciabilidad $\not\Rightarrow$ derivabilidad en $\mathbb{R}^n$, pero sí en $\mathbb{R}$. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, donde Ω es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, será diferenciable si existe una transformación lineal T tal que $f(x_0 + h) = f(x_0) + T(h) + \theta(h)$ y $\theta(h)$ cumple que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\|\theta(h)\|}{\|h\|} = 0$.

A partir de esto, se observa que basta hallar una antiderivada de F y a partir de esta se obtiene una familia de antiderivadas.
Así, se obtiene la "Antiderivada General" de una función f: $\boxed{f(x) = F(x) + C, \text{ C: constante}}$
donde F es una antiderivada cualquiera de f.

Ejemplo 1.3: Función exponencial

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ luego $F(x) = e^x$ es antiderivada de f. Entonces, la antiderivada general es $H(x) = e^x + C$, C: constante .

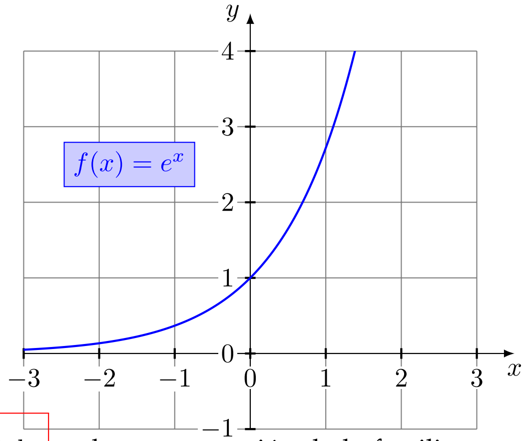


Figura 1.3: Representación de $y = e^x$

1.2. Integral indefinida

La integral indefinida de una función f, denotada por $\boxed{\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x}$ es la representación de la familia de antiderivadas de f **("antiderivadas generales de f")**, esto es

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \text{ C: constante}}$$

donde F es una antiderivada de f.

Ejemplo 2.1

① $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C,$ C: constante .

② $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C,$ C: constante .

③ $\displaystyle\int \sec\tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + C,$ C: constante .

A partir de esto se puede construir una "tabla de integrales indefinidas"

$$\boxed{\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C, \text{ C: constante}}$$

$$\boxed{\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ C: constante }, n \neq 1}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C, \text{ C: constante}}$$

$$\boxed{\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C, \text{ C: constante}}$$

$$\boxed{\int \csc x \cot x\,\mathrm{d}x = -\csc x + C, \text{ C: constante}}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C, \text{ C: constante}}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C, \text{ C: constante}}$$

[o] f es el integrando, es decir la función y x es la variable o indeterminada.

[o] El teorema de la derivada de la función inversa nos dice que dado $f(g(x)) = x$ la regla de la cadena nos da $f'(g(x))\cdot g'(x) = 1$. Escribiendo $y = g(x)$ y $x = f(y)$, la regla se ve mejor: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$ o $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x}$. La pendiente de $x = g^{-1}(y)$ veces la pendiente de $y = g(x)$ es igual a uno.

Observación 2.1

Como se cumple que

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \text{ sii } F'(x) = f(x),\ \forall x \in \mathcal{I}$$

de esto, se obtiene las propiedades:

a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right] = f(x)$.

b) $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, C: constante .

Ejemplo 2.2

① $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int \left(3x^2+5x-7\right)\mathrm{d}x\right] = 3x^2+5x-7$ (aplicando a)

② $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sen} x)\ \mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C$, C: constante (aplicando b)

Propiedad: Dadas las funciones $f, g\colon \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se cumple:

① $(f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

② $\int K\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = K\int f(x)\,\mathrm{d}x$, K: constante.

Ejemplo 2.3

Integrar $\int (e^x + \operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x$.

Solución.

$$\begin{aligned}\int (e^x+\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x &= \int e^x\,\mathrm{d}x + \int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x\\ &= e^x + C_1 - \cos x + C_2; C_1, C_2:\ \text{constante}\\ &= e^x - \cos x + C,\ \text{C: constante}\end{aligned}$$

■

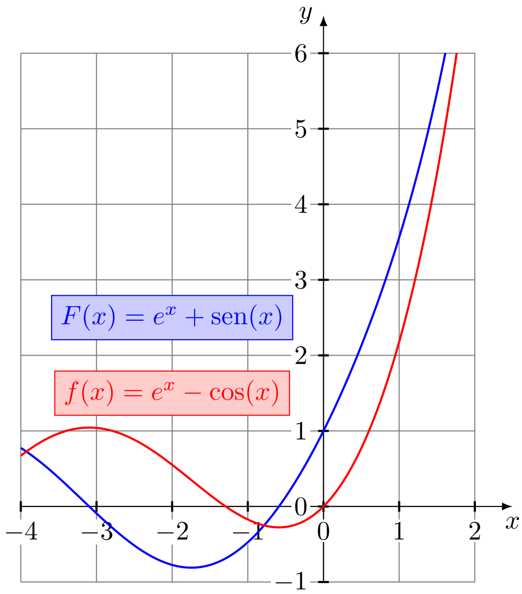


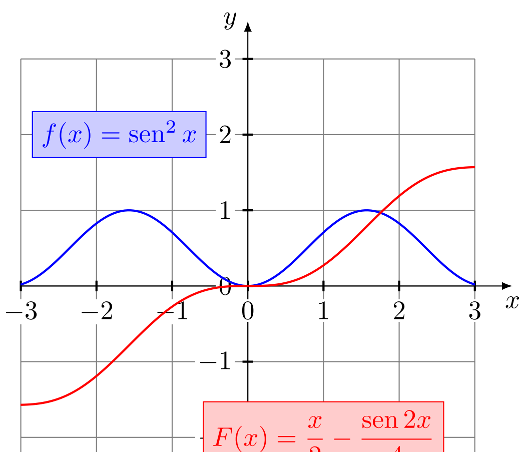
Figura 1.4: La función de color rojo es la derivada de la función de color azul.

1.3. Métodos de integración

1.3.1. Métodos de sustitución

Ejemplo 3.1

Evaluar $\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x$.



Solución. Recordemos las identidades de arco doble de las funciones seno y coseno.

$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x}$ $\boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}}$

Luego:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx \\
&= \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx \\
&= \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{4}\int d(\operatorname{sen} 2x) \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C, \text{ C: constante}
\end{aligned}$$

■

Observación 3.1

Haciendo el cambio $\boxed{u = 2x} \longrightarrow du = 2\,dx \longrightarrow \boxed{dx = \frac{1}{2} du}$

Así $\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int \cos u \, du = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C$, esto se conoce como el método de sustitución. Así:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C\right) \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C, \text{ C: constante}
\end{aligned}$$

Observación:

Teorema 3.1: Regla de la cadena para antiderivadas

Sea F una antiderivada de f en el intervalo I_x, φ es una función con derivada continua sobre el intervalo I_t, con $\varphi(I_t) \subset I_x$, entonces una primitiva de $f(\varphi(t) \cdot \varphi'(t))$ es $F(\varphi(t))$ en I_t.

Prueba. Basta probar que

$$[F(\varphi(t))]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \forall t \in I_t$$

Por la regla de la cadena

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), t \in I_t.$$

Como F es una antiderivada o primitiva de f en el intervalo I_x, entonces

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I_x$$

Si $x = \varphi(t)$, entonces $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$. Luego:

$$[F(\varphi(t))]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

■

Observación 3.2

① Se impone que φ' sea continua en I_t para asegurar la existencia de

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, \mathrm{d}t$$

② $I = \displaystyle\int f\left(\varphi(x)\right) \cdot \varphi^{x}\, \mathrm{d}x$

se hace el cambio $\boxed{u = \varphi(x)}$ $\longrightarrow \mathrm{d}u = \varphi'(x)\, \mathrm{d}x$ entonces

$$I = \int f(u)\, \mathrm{d}u$$

Ejemplo 3.2

Calcule $I = \displaystyle\int \cos 4x\, \mathrm{d}x$

Hacer $\boxed{u = 4x}$ $\longrightarrow \mathrm{d}u = 4\, \mathrm{d}x \implies$ $\boxed{\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\, \mathrm{d}u}$

$$\begin{aligned}
\longrightarrow \int \cos 4x\, \mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \cos u\ \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{sen} u + C,\ \text{C: constante} \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + C,\ \text{C: constante}
\end{aligned}$$

Es necesario expresar la respuesta con la variable incial.

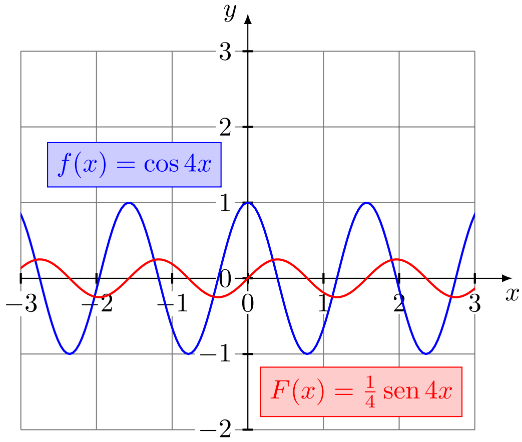


Figura 1.6: La función de color rojo es la derivada de la función de color azul.

Ejemplo 3.3

$$I = \int \frac{x^2\, \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Hacer $u = x^3 + 1$, entonces $\mathrm{d}u = 3x^2\, \mathrm{d}x$
Reemplazando

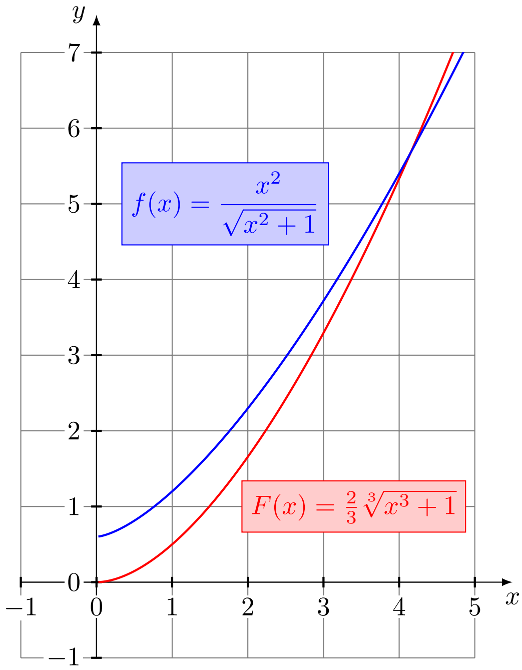


Figura 1.7: La función de color rojo es la derivada de la función de color azul.

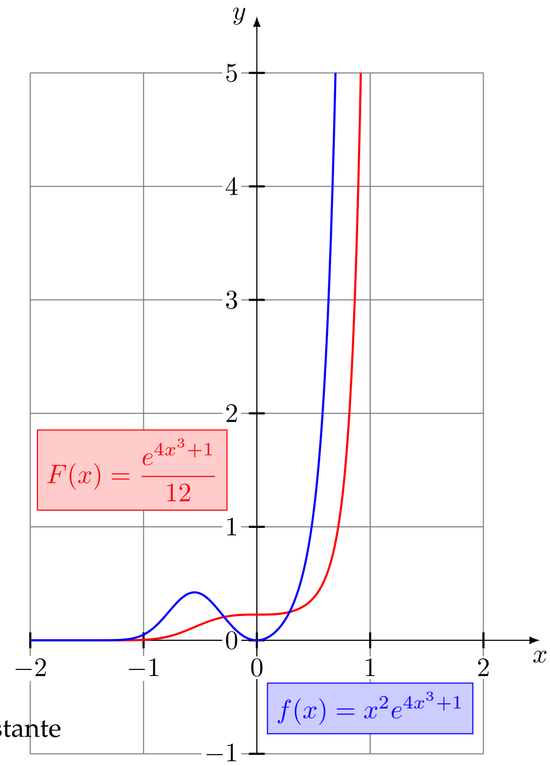
$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{3}\int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C,\ \text{C: constante} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C,\ \text{C: constante}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.4

$$J = \int x^2 e^{4x^3+1}\,\mathrm{d}x$$

Hacemos $u = 4x^3 + 1 \implies \mathrm{d}u = 12x^2\,\mathrm{d}x$
Luego:

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{12}\int e^u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{12}e^u + C,\ \text{C: constante} \\
&= \frac{e^{4x^3+1}}{12} + C,\ \text{C: constante}
\end{aligned}
$$



Nota:Si $a \neq 0$, $\int f(u)\,du = F(u) + C$.
haciendo el cambio

$$\boxed{u = ax + b}$$

entonces:

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,\ \text{C: constante}$$

Ejemplo 3.5

1) $\displaystyle\int \sec^2(4x+5)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\tan(4x+5) + C,\ \text{C: constante}$

Observación $\boxed{a = 4}$

2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{16+x^2} = \frac{1}{16}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x}{4}\right) + C,\ \text{C: constante}$

Haciendo $u = \dfrac{x}{4}$

Observación 3.3

Si hace el cambio $\boxed{u = f(x)}$ en la integral

$$\int [f(x)]^a \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x, a \neq 1$$

igual a $\int u^a \, du = \dfrac{[f(x)]^{a+1}}{a+1} + C,$ C: constante .

Ejemplo 3.6

$$I = \int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, \mathrm{d}x$$

Pero, $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{sen} x = \cos x}$

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{sen}^3 x \cdot \mathrm{d}(\operatorname{sen} x) \\ &= \int u^3 \, \mathrm{d}u = \frac{u^4}{4} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + C, \text{ C: constante} \end{aligned}$$

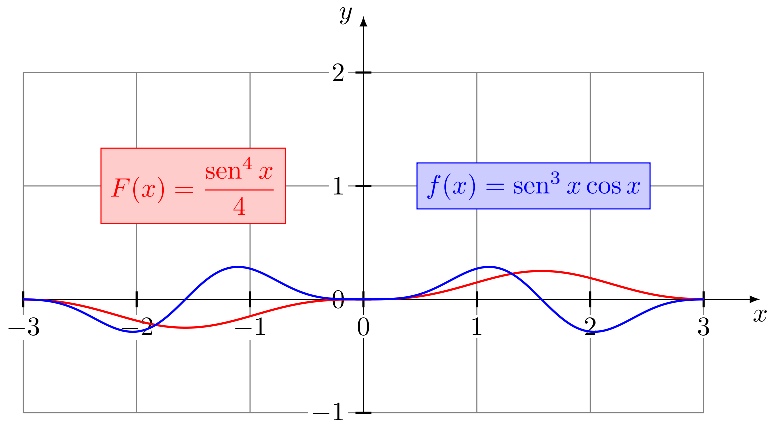


Figura 1.9: La función de color rojo es la derivada de la función de color azul.

1.3.2. Método de integración por partes

Prueba: Como

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(uv) &= v \, \mathrm{d}u + u \, \mathrm{d}v \\ \longrightarrow u \, \mathrm{d}v &= \mathrm{d}(uv) - v \, \mathrm{d}u \end{aligned}$$

Integrando:

$$\int u \, dv = \int d(uv) - \int v \, du$$

Luego:

$$\boxed{\int u \, dv = uv - \int v \, du}$$

■

Ejemplo 3.7: Integración por partes

1) Determine $I = \int \ln x \, \mathrm{d}x$.
   Empleamos la técnica de “integración por partes”:

$$\begin{aligned} I &= x \ln x - \int \cancel{x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\cancel{x}} \\ &= x \ln x - \int \mathrm{d}x \\ &= x \ln x - x + C, \text{ C: constante} \end{aligned}$$

2) Determine $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int x \cos x \, \mathrm{d}x \\
&= x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \\
&= x \operatorname{sen} x - (-\cos x) + C, \ \text{C: constante}
\end{aligned}
$$

3) Calcule $\int x \arctan x \, \mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
J &= \int x \arctan x \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + C, \ \text{C: constante}
\end{aligned}
$$

1.3.3. Fórmulas recurrentes

Ejemplo 3.8

$$
I_n = \int x^n e^x \, \mathrm{d}x
$$

Integrando por partes

$$
\boxed{\begin{array}{ll} u = x^n & du = (n-1)x^{n-1} \, \mathrm{d}x \\ dv = e^x \, \mathrm{d}x & v = e^x \end{array}}
$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
&I_n = x^n e^x - (n-1) \int x^{n-1} e^x \, \mathrm{d}x \\
&\therefore I_n = x^n e^x - (n-1) I_{n-1}
\end{aligned}
$$

Aplicación: $\boxed{n = 2}$

$$
\begin{aligned}
\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x &= x^2 e^x - (2-1) \int x e^x \, \mathrm{d}x \\
&= x^2 e^x
\end{aligned}
$$

Aplicación de la geografía al cálculo integral

Desde hace dos mil años hasta la actualidad, el problema de representar la Tierra en un plano de la manera más fidedigna ha cautivado a muchos matemáticos como Carl Friedrich Gauss, Johann Heinrich Lambert, Gerardus Mercator, Charles Sanders Peirce, Hiparco de Nicea, Al-Biruni y Leonardo Da Vinci. Gerardus Mercator fue un matemático que nació en Rupelmundo, hoy forma parte de Bélgica.

En esta ocasión narraremos el rol del calculo integral en la proyección de Mercator. Su sueño fue lograr proyectar con *transformaciones conformes*, es decir, que preserva el "ángulo". Estamos interesados en calcular

$$\mathrm{d}D = \sec\theta \,\mathrm{d}\theta$$

La integral de la secante surgió de la cartografía y la navegación y su solución fue una pregunta central de las matemáticas de mediados del siglo $XVII$. Fue descubierto en un accidente histórico cuando los matemáticos y cartógrafos intentaron entender la proyección del mapa de Mercator. Más información sobre su historia en [14].

$$\int \sec^3 x \,\mathrm{d}x$$

Usemos la técnica de "integración por partes"

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \sec x & \mathrm{d}v = \sec^2 x \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \sec x \tan x \,\mathrm{d}x & v = \tan x \end{array}}$$

Luego la expresión anterio

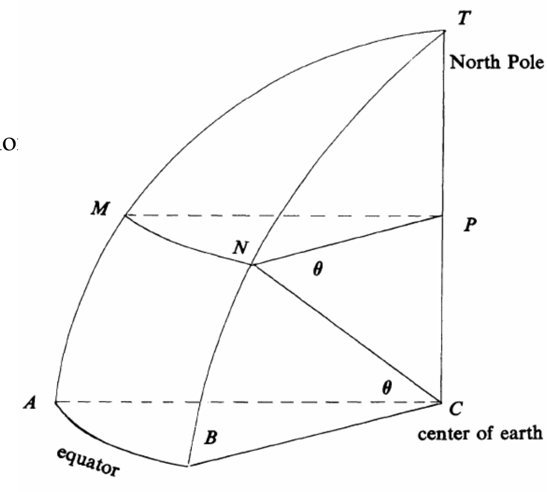


Figura 1.10: La distancia (geodésica) $D(\theta)$ en el mapa del ecuador al paralelo de latitud θ. $\mathrm{d}D$ representa el cambio infinitesimal resultado de un cambio infinitesimal $\mathrm{d}\theta$ en θ.

$$\begin{aligned}\int \sec^3 \mathrm{d}x &= uv - \int v \,\mathrm{d}u \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \tan x \cdot \sec x \tan x \,\mathrm{d}x \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot \tan^2 x \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Pero

$$\boxed{1 + \tan^2 x = \sec^2 x}$$

Reemplazando en la integral:

$$\begin{aligned}\int \sec^3 \mathrm{d}x &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot (\sec^2 x - 1) \,\mathrm{d}x \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x^3 \,\mathrm{d}x + \int \sec x \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Finalmente debemos hallar la

$$\boxed{\int \sec x \,\mathrm{d}x} \tag{1.1}$$

Pero antes conozcamos la historia de esta integral tan importante. Ahora, si a la integral inicial

$$\int \sec\theta \,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}$$

multiplicamos por el factor unitario $\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta} = 1$, obtendremos

$$\int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} \,\mathrm{d}\theta,$$

pero por la propiedad pitagórica mencionada anteriormente tenemos que

[0]Esta pregunta fue motiva por nuestro compañero de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de Ingeniería.

[0]Nótese que las representaciones $\int f(z)\,dz$ o $\int f(\Omega)\,d\Omega$ son equivalentes.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \int \frac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}^2\theta}\,\mathrm{d}\theta && \text{ya que } \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1\,\forall x \in \mathbb{R}\\
&= \int \frac{\cos\theta}{(1-\operatorname{sen}\theta)\,(1+\operatorname{sen}\theta)}\,\mathrm{d}\theta && \text{por factorización en diferencia de cuadrados}\\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\right)\mathrm{d}\theta && \text{por el método de “fracciones parciales”}\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\int \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\,\mathrm{d}\theta && \text{por la propiedad de linealidad de la integral}
\end{aligned}
$$

Si realizamos las siguientes sustituciones para cada integral respectivamente

$$
\boxed{\begin{array}{ll} u_1 = 1-\operatorname{sen}\theta & \mathrm{d}u_1 = -\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ u_2 = 1+\operatorname{sen}\theta & \mathrm{d}u_2 = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta \end{array}}
$$

Finalmente obtenemos

$$
\begin{aligned}
\int \sec\mathrm{d}\theta &= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u_2}{u_2} && \text{reemplazando } u_1 \text{ y } u_2 \text{ por } \theta\\
&= -\frac{1}{2}\ln|u_1| + \frac{1}{2}\ln|u_2| + C,\ \text{C: constante}\\
&= -\frac{1}{2}\ln|1-\operatorname{sen}\theta| + \frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{sen}\theta| + C,\ \text{C: constante} && \text{por propiedad de logaritmo}\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\right| + C,\ \text{C: constante}\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\right| + C,\ \text{C: constante} && \text{multiplicamos por el factor unidad}\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\operatorname{sen}\theta)^2}{\cos^2\theta}\right| + C,\ \text{C: constante}\\
&= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right| + C,\ \text{C: constante} && \text{por propiedad de logaritmo y simplificamos}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C,\ \text{C: constante}$$

Pero nuestro problema inicial fue calcular

$$
\begin{aligned}
\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x &= \sec x\cdot\tan x - \int \sec^3 x\,\mathrm{d}x + \int \sec x\,\mathrm{d}x\\
&= \sec x\cdot\tan x - \int \sec^3 x\,\mathrm{d}x + \ln|\sec x + \tan x| + C,\ \text{C: constante}
\end{aligned}
$$

Despejando $\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x$ obtenemos:

$$\boxed{\therefore \int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec x\cdot\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + \frac{C}{2},\ \text{C: constante}}$$

Capítulo 2

La integral

Continuando con nuestro estudio de las antiderivadas, presentaremos un breve repaso de las sumatorias e inducción matemática.

2.1. Sumatoria

Para simplificar nuestros cálculos, empezaremos discutiendo la útil notación para expresar la longitud de sumas de una manera compacta. La notación es llamada **notación sigma** o **notación de sumatoria** porque la notación mayúscula griega Σ (sigma) para denotar varios tipos de sumas. Para ilustrar cómo la notación trabaja, consideremos la suma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

en el cual cada término tiene la forma k^2, donde k es uno de los enteros del 1 al 5. En la notación sigma la suma puede ser escrito como

$$\sum_{k=1}^{5} k^2$$

el cual es leído como "la suma de k^2, donde k varía desde 1 a 5." La notación nos dice que la forma de los términos resultad cuando nosotros sustituimos sucesivamente los números enteros para k en la expresión k^2, empezando con $k = 1$ y terminando con $k = 5$. Más generalmente, si $f(k)$ es una función de k, y si m y n son enteros tal que $m \leq n$, entonces

$$\sum_{k=m}^{n} f(k)$$

denota la suma de los términos que resultan luego de sustituir sucesivamente cada entero por k, empezando con $k = m$ y acabando con $k = n$.

Ejemplo 1.1

1. $\displaystyle\sum_{k=4}^{8} k^3 = 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3.$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 2k = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10.$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} (2k+1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11.$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} (-1)^k (2k+1) = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11.$

5. $\displaystyle\sum_{k=-3}^{1} k^3 = (-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 = -27 - 8 - 1 + 0 + 1.$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{5}\right) = 1 \operatorname{sen}\left(\frac{1\pi}{5}\right) + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{5}\right).$

Los números m y n en (1) son llamados, respectivamente, el límite inferior y superior de las sumatoria, y la letra k es llamada el índice de la sumatoria, cualquier letra no reservada para otro propósito lo haremos. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i}, \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{j}, \text{ y } \sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n}$$

todas ellas denotan la suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$
Si el límite superior e inferior de la suma es el mismo, entonces la “suma” en (1) se reduce a un solo término. Por ejemplo,

$$\sum_{k=2}^{2} k^3 = 2^3 \text{ y } \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

En las sumas

$$\sum_{i=1}^{5} 2 \text{ y } \sum_{j=0}^{2} x^3 + x^3 + x^3$$

Cambiando los límites de sumaciones
Una suma puedo ser escrito de más de una manera usando la notación sigma con diferentes límites de función y correspondiente. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{5} 2i = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = \sum_{j=0}^{4} (2j+2) = \sum_{k=3}^{7} (2k-4)$$

Una forma conveniente de escribir sumas utiliza la letra griega Σ (sigma mayúscula, correspondiente a nuestra S) y se llama **notación sigma**.

Definición 1.1: Notación sigma

Si $a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n$ son números reales y m y n son enteros tales que $m \leq n$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Con notación de funciones, la definición 1.1 se puede escribir como

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

De esta forma, el símbolo $\sum_{i=m}^{n}$ indica una suma en la que la letra i (llamado **índice de sumatoria**) toma valores enteros consecutivos que empiezan con m y terminan con n, es decir, $m, m+1, \ldots, n$. También se pueden usar otras letras como el índice de sumatoria.

Observación 1.1

$$\sum_{i=m}^{n} = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$$

Ejemplo 1.2

① $\sum_{i=1}^{4}(2i+1) = (2(1)+1)+(2(2)+1)+(2(3)+1)+(2(4)+1)$

② $\sum_{i=5}^{8}\frac{i^2}{i+1} = \frac{5^2}{5+1}+\frac{6^2}{6+1}+\frac{7^2}{7+1}+\frac{8^2}{8+1}$

Ejemplo 1.3

Evalúe $\sum_{i=1}^{n} i(4i^2-3)$.

Solución. Utilizando los teoremas 2 y 3 tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i(4i^2-3) &= \sum_{i=1}^{n}(4i^3-i) = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 3\sum_{i=1}^{n} i \\
&= 4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - 3\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)\left[2n(n+1)-3\right]}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n^2+2n-3)}{2}
\end{aligned}$$

■

Propiedad: Sea c una constante y n un número natural. Entonces

1) $\sum_{k=m}^{n} c\cdot a_k = c\sum_{k=m}^{n} a_k;$ k: constante.

2) $\sum_{k=m}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha\sum_{k=m}^{n} a_k + \beta\sum_{k=m}^{n} b_k.$

3) $\sum_{k=m}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{m-1}.$

4) $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$

Ejemplo 1.4

Determine la suma

$$S = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + n\times(n+1).$$

[0]Conocida como propiedad telescópica

Solución:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \\
S &= \sum_{k=1}^{n} (k^2+k) \\
S &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\
S &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2\cdot 3} + \frac{n(n+1)}{2} \\
S &= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}+1\right) && \text{factorizamos } \frac{n(n+1)}{2}. \\
S &= \frac{n(n+1)}{\cancel{2}}\cdot\left(\frac{\cancel{2}\cdot(n+2)}{3}\right) && \text{operamos el factor de la derecha.} \\
\therefore S &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.
\end{aligned}$$

■

2.2. Inducción matemática

La inducción matemática es una de las técnicas de demostración de desarrollo más reciente en la historia de las matemáticas. Se utiliza para comprobar suposiciones acerca de los resultados de procesos que ocurren repetidamente y de acuerdo a patrones definidos. Se introduce la técnica con un ejemplo.

2.2.1. Principio de Inducción Matemática

Sea $A \subset \mathbb{N}$ se cumple que

I) $1 \in A$.

II) $(k+1) \in A$ siempre que $k \in A$.

Entonces $A = \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.1: Suma de los primeros n naturales

Demuestre la fórmula para la suma de los primeros n números naturales:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solución. Esta fórmula se puede demostrar por inducción matemática (como es nuestro caso) o por el método empleado por el matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855) cuando tenía solo 10 años de edad. Años después, en el campo de la Estadística, Gauss utilizó la expresión $\int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}}$ para predecir la localización de cuerpos celestes. Como resultado, tras esta fecha se extendió su denominación como *distribución gaussiana*. El conocido historiador Eric Temple Bell, tal como las expresó en *Hombres de las Matemáticas*. En un capítulo titulado "El príncipe de los Matemáticos" él escribe:

" Arquímedes, Newton y Gauss; estos tres están por sí mismos dentro de la clase de los grandes matemáticos, y no es posible para los mortales ordinarios intentar igualarles en mérito. Los tres aportaron ideas relevantes tanto en la matemática pura como en la aplicada. Arquímedes estimó sus matemáticas puras muy por encima de sus aplicaciones; Newton basó la importancia de sus ideas matemáticas en la utilidad científica que tenían; por su parte, Gauss declaró que para él trabajar en el campo puro o en el aplicado era todo lo mismo"

I) $1 = \dfrac{1 \cdot (1+1)}{2}$

II) Supongamos que $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, es cierto para $k \in \mathbb{N}$.

Veamos que se cumple para $(k+1)$:

$$
\begin{aligned}
&= 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) & \\
&= (1 + 2 + 3 + \ldots + k) + (k+1) & \text{Asociatividad} \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) & \text{por hipótesis inductiva} \\
&= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) & \\
&= \frac{(k+1)\,((k+1)+1)}{2} &
\end{aligned}
$$

Esto significa que se cumple para $k+1$, por el *Principio de inducción matemática* de i) y ii) se tiene $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$. ∎

Explorando

Veamos el **emocionante** ejemplo de la *Torre de Hanoi* en el programa C.

```c
#include <stdio.h>
void hanoi(char desde, char hacia, char otro, int n) {
    if(n > 0) {
        hanoi(desde, otro, hacia, n - 1);
        printf("%c -> %c\n", desde, hacia);
        hanoi(otro, hacia, desde, n - 1);
    }
}
int main() {
    int n;
    printf("Introduzca el número de discos:\n");
    scanf("%d", &n);
    hanoi('A', 'C', 'B', n);
    return 0;
}
```

El primer uso conocido de la inducción matemática ocurrió en el trabajo del científico italiano Francesco Maurolico en 1575. En el siglo $XVII$ tanto Pierre de Fermat como Blaise Pascal utilizaron la técnica, Fermat la llamó el "método de descenso infinito". Para saber más sobre esta técnica, ver el siguiente artículo [4]. En 1883 Augustus De Morgan (mejor conocido por las leyes de Morgan) describió el proceso cuidadosamente y le dio el nombre de inducción matemática.

Para visualizar la idea de inducción matemática, imagine una colección infinita de fichas de dominó colocadas una detrás de la otra de tal manera que si alguna ficha de dominó cae hacia atrás, hace que la que está detrás caiga hacia atrás también (Vea la figura **??**.) Después imagine que la primera ficha de dominó se cae hacia atrás. ¿Qué sucede? …¡Se caen todas!

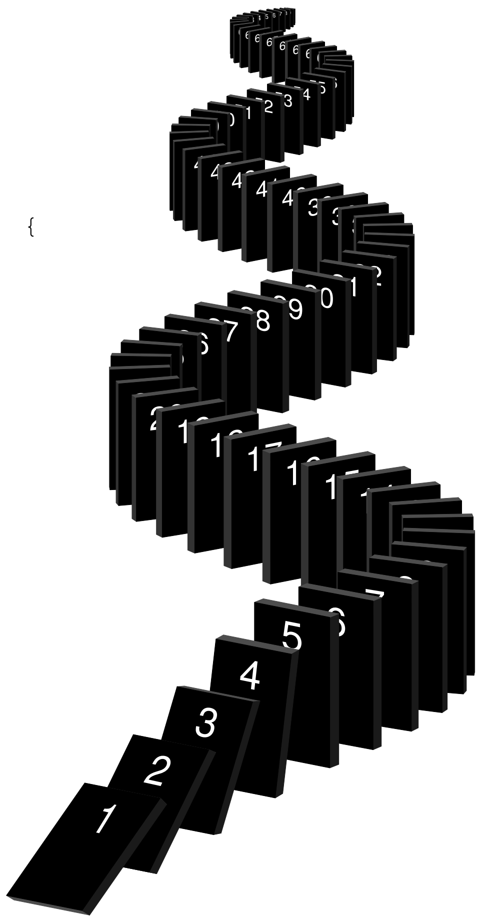


Figura 2.1: Si la k-ésima ficha de dominó cae hacia atrás, también empuja a la $(k+1)$-ésima ficha de dominó hacia atrás.

Observación 2.1: Principio de inducción matemática

El Principio de Inducción Matemática se emplea para probar la validez de una proposición $P(n), \forall n \in \mathbb{N}$ de la siguiente manera

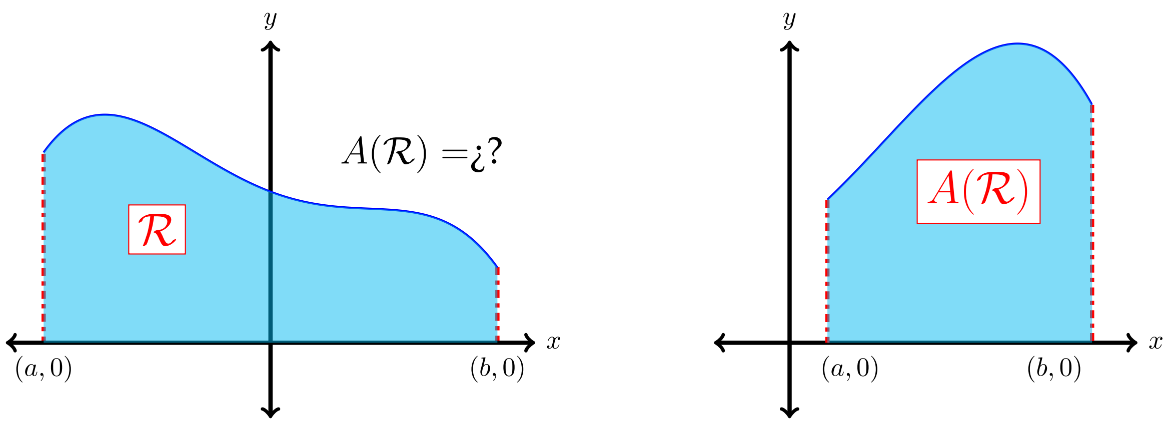
I) $P(1)$ es cierto.

II) Si $P(k)$ es cierto, entonces $P(k+1)$ es cierto.

Entonces $P(n)$ es cierto, $\forall n \in \mathbb{N}$.

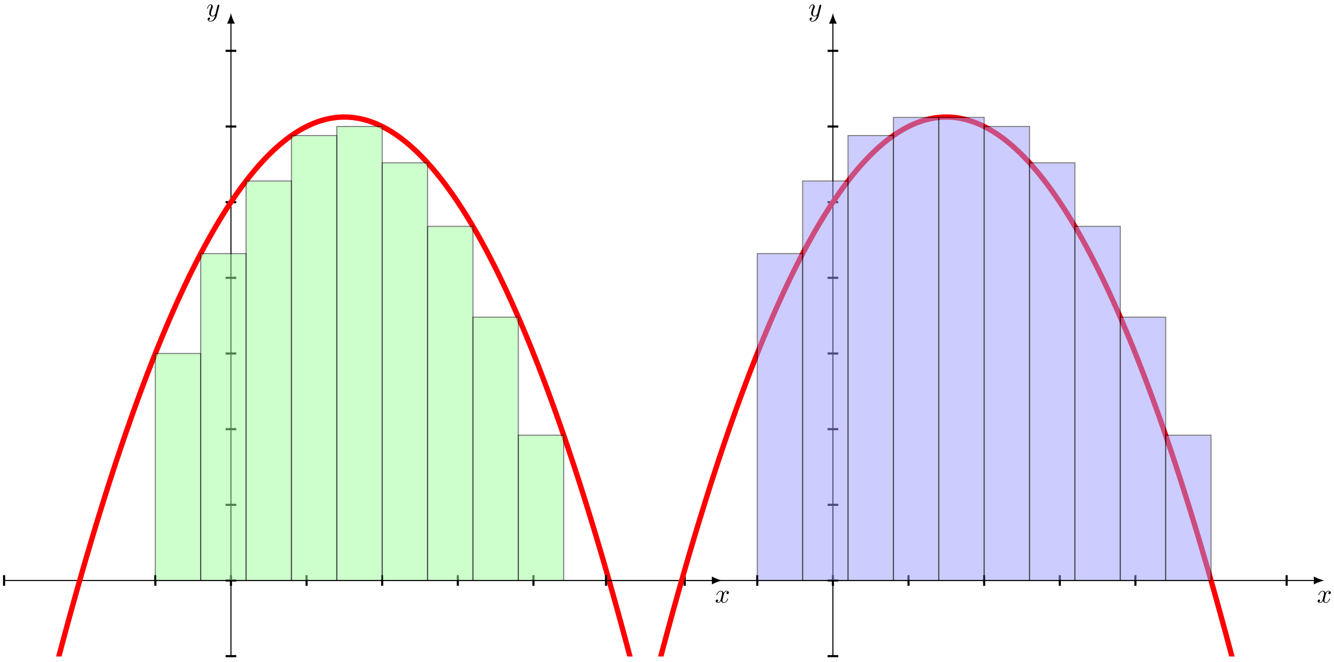
2.3. Integral definida

En esta parte del curso intentaremos definir el área de algunas regiones especiales según figura.



(a) Integral 1 **(b)** Integral 2

Figura 2.2: Combinación de Figura **??** and **??**.



(a) Sumas inferiores **(b)** Sumas superiores

Figura 2.3: Sumas de Riemann en Figura **??** y **??**.

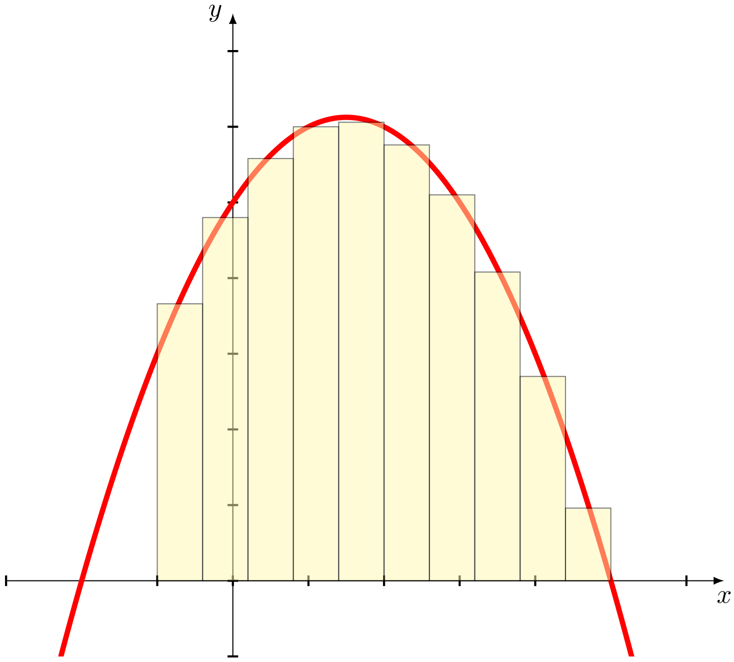


Figura 2.4: Sumas de Riemann en las imágenes de los puntos medios en la partición.

Para ello pasaremos a definir algunos conceptos importantes.

Definición 3.1: Partición de un intervalo

Un conjunto P de puntos $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se dice que es una *partición del intervalo* $[a, b]$, si se cumple que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

es decir $P = \{x_k; k = 0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Definición 3.2: Norma de una partición

La norma de una partición $P = \{x_i\}_{i=0}^n$ de $[a, b]$ denotado por $\|P\|$, se define como sigue:

$$\|P\| = \text{máx}\{|x_k - x_{k-1}| \mid k = 1, \ldots, n\}$$

La norma de una partición nos mide la "finura" de la partición.

Observación 3.1

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (longitud de I_k).

Ejemplo 3.1

$P = \{1; 2; 4; 4,5; 4,8; 5\}$ es una partición de $[1, 5]$

$\|P\| = \text{máx}\{(2-1); (4-2); (4,5-4); (4,8-4,5); (5-4,8)\}$
$\|P\| = \text{máx}\{1; 2; 0{,}5; 0; 3; 0,2\}$
$\|P\| = 2$.

Observación 3.2

En $[a, b]$ se forman subintervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Observación 3.3

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Observación 3.4

Cuando Δx_k tiene la misma longitud para cada I_k, diremos que que la partición $P = \{x_i\}_{i=0}^n$ de $[a, b]$ es "regular", y en tal caso

$$x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right), \Delta x_k = \frac{b-a}{n}, \forall k = 0, \ldots, n.$$

Ejemplo 3.2

Por ejemplo si seleccionamos $P = \{0, \frac{a}{n}; \frac{2a}{n}; \frac{3a}{n}, \ldots, \frac{(n-1)a}{n}, a\}$ es una partición regular de $[0, a]$

$$\|P\| = \frac{a}{n}$$

y en estos casos se tiene que:

$$\boxed{x_k = x_0 + k\Delta x_k}\text{, donde } \Delta x_k = \frac{b-a}{n}$$

Definición 3.3: Función acotada

Se dice que una función $f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada en $[a,b]$, si existen m y M reales tales que

$$m \leq f(x) \leq M \quad ; \forall x \in [a,b] \, .$$

Ahora tomamos una partición $P = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$ de $[a,b]$.
Para cada $k = 1, \dots, n$ definamos

$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \quad \text{y} \quad M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

Por tanto, es claro que: $\forall k = 1, 2 \dots, n$; $m_k \leq f(x) \leq M_k, \forall x \in [x_{k-1}, x_k]$.

Observación 3.5: Propiedad

Se cumple que:

$$m \leq m_k \leq f(x) \leq M_k \leq M, \forall x \in [x_{k-1}, x_k] \, \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Prueba. Sea $k = 1, 2, \dots, n$ cualquiera. Como $[x_{k-1}, x_k] \subset [a,b]$
$\implies m \leq \inf_{[a,b]} f \leq m_k \leq f(x) \leq \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \leq M_k \leq \sup_{[a,b]} f \leq M$.
Por consiguiente:

$$m \leq m_k \leq f(x) \leq M_k \leq M \, ; \forall x \in [x_{k-1}, x_k] \, ; \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

■

Definición 3.4: Conjunto de particiones

Siendo $\mathcal{P}\,[a,b] = \{\text{conjunto de particiones de } [a,b]\}$. Si $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}\,[a,b]$, entonces

a) *La suma superior de f con respecto a la partición P* se denota por $U(f,P)$ y se define como:

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \left(x_k - x_{k-1}\right).$$

b) *La suma inferior de f con respecto a la partición P* se denota por $L(f,P)$ y se define como:

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k - x_{k-1}\right).$$

Teorema 3.1: Propiedad

Demuestre que $\forall P \in \mathcal{P}\,[a,b] : L(f,P) \leq U(f,P)$.

Prueba. Para cada $k = 1, 2, \dots, n$ se tiene: $m_k \leq M_k$.
Por tanto, para cada $k = 1, 2, \dots, n$:

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \leq M_k(x_k - x_{k-1})$$

Sumando miembro a miembro

$$\Longrightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})}_{L(f,P)} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})}_{U(f,P)}$$

Por consiguiente

$$L(f,P) \leq U(f,P).$$

■

Ejemplo 3.3

Sea la función $f\colon [1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, entonces f es acotada en $[1,3]$ porque $1 \leq f(x) \leq 9, \forall x \in [1,3]$.

Definición 3.5: m_k y M_k

Se tiene una función $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada, una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$. Se definen los números

$$m_k = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]\}$$
$$M_k = \sup\{f(x) \mid x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]\}$$

Observación 3.6

Observación: En el caso de que f es creciente en $[a,b]$ con $f > 0$.
Se definen

$$\boxed{L(f;P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k} \text{ “suma inferior”}$$

$$\boxed{U(f;P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k} \text{ “suma superior”}$$

Observación 3.7: Propiedades

1) Se cumple que:

$$m \leq m_k \leq M_k \leq M, \forall k = 1, 2, \ldots, n.$$

Sea $P\,[a,b]$ el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.

2) Se cumple que

$$\forall p \in P\,[a,b] \text{ se tiene que } m(b-a) \leq L(f;P) \leq U(f;P) \leq M(b-a).$$

Prueba. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}\,[a,b]$ cualquiera. De la propiedad 3.3 se tiene que:

$$m \leq m_k \leq M_k \leq M, \forall k = 1, 2, \ldots, n$$

multiplicando por Δx_k se obtiene

$$m\Delta x_k \leq m_k\Delta x_k \leq M_k\Delta x_k \leq M\Delta x_k, \forall k = 1, 2, \ldots, n$$

Sumando cada una de estas n desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n} m\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M\Delta x_k, \forall k = 1, 2, \ldots, n$$

■

Comentario: La suma superior a disminuir con respecto a la otra suma.
Cuando tienes un refinamiento la suma interior tiende a crecer.
Proposición: Sea $P, Q \in \mathcal{P}[a, b]$. Si $P \subset Q$, entonces

a) $L(f, P) \leq L(f, Q)$

b) $U(f, Q) \leq U(f, P)$

Demostración. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Sea $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ en $[a, b]$ tal que $x_0 < c_1 < x_1 < c_2 < x_2 \cdots < x_{n-1} < c_n < x_n$ de este modo $Q = P \cup \{c_i\}_{i=1}^{n}$ es una partición de $[a, b]$ y $P \subset Q$; esto es Q es un refinamiento de P. ■

Nota: Se cumple:

a) $\text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1}, x_k]}\right) \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq \text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1}, c_k]}\right) \cdot (c_k - x_{k-1}) + \text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1}, c_k]}\right) \cdot (c_k - x_{k-1})$

b) $\sup\left(f\big|_{[x_{k-1}, c_k]}\right) \cdot (c_k - x_{k-1}) + \sup\left(f\big|_{[c_k, x_k]}\right) \cdot (x_k - c_k) \leq \sup\left(f\big|_{[x_{k-1}, x_k]}\right) \cdot (x_k - x_{k-1})$

Observación 3.8

$$\text{ínf}\left(f\big|_{[c,d]}\right) = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in [c, d]\}$$

Aplicando a, en cada $I_k = [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \ldots, n$.
Sumando las n desigualdades:

$$\sum_{k=1}^{n} \text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1}, x_k]}\right) \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} \left[\text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1}, c_k]}\right)(c_k - x_{k-1}) + \text{ínf}\left(f\big|_{[c_k, x_k]}\right)(x_k - c_k)\right]$$

Entonces,

$$L(f, P) \leq L(f, Q)$$

De manera similar aplicando b (de la nota) se prueba la segunda.

Observación 3.9

De a se nota que cuando se refinan una partición, la suma inferior crece. En cambio, de b se tiene que cuando se refina la suma superior decrece.
Así, se obtiene $\{L(f; P) \mid p \in \mathcal{P}[a, b]\}$ el cual es acotado superiormente porque $L(f; P) \leq M(b - a); \forall P \in \mathcal{P}[a, b]$ y no vacío. (¿Por qué?).
Entonces el conjunto $\{L(f, P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}$ posee supremo. De esto se define la "integral inferior de la función acotada f en $[a, b]$", denotado por

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f, P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}$$

De manera similar se obtiene el conjunto $\{U(f, P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}$, el cual es no vacío y acotado inferiormente porque $m(b - a) \leq U(f, P), \forall P \in \mathcal{P}[a, b]$. En consecuencia posee ínfimo.

De esta manera se define la "integral superior de la función acotada f en $[a,b]$", denotado por $\overline{\int_a^b} f$, como

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{U(f,P) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

Definición 3.6

Sea la función acotada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice que f es integrable según Riemann si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

En este caso, se define la integral definida de la función f en $[a,b]$, denotada por $\int_a^b f$ como

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Como se cumple:

$$m(b-a) \leq L(f;P) \leq U(f;P) \leq M(b-a)$$

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq L(f,Q) \leq U(f;Q) \leq U(f,P) \leq M(b-a)\ \forall P,Q \in \mathcal{P}[a,b] \text{ con } P \subset Q.$$

Fijando la partición P, se tiene que

$$\{L(f,Q) \mid Q \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

está acotada superiormente por $U(f,P)$, esto es, $U(f,P)$ es una cota superior de $\{L(f,Q) \mid Q \in \mathcal{P}[a,b]\}$ entonces

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f \leq U(f,P)}$$

porque $\underline{\int_a^b} f$ es supremo o mínima cota superior. De esto último $\underline{\int_a^b} f$ es una cota inferior de $\{U(f,P) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\}$ pero el ínfimo de este conjunto es $\underline{\int_a^b} f$, entonces $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Así, se tiene la siguiente

Definición 3.7: Definición de Darboux de $\int_a^b f$

Una función definida y acotada en $[a,b]$ es **integrable** en $[a,b]$ si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso el valor común de $\underline{\int_a^b} f$ y $\overline{\int_a^b} f$ es llamada la **integral** (definida) **de Riemann** de f sobre $[a,b]$, y es simplemente denotada $\int_a^b f$.

Observación 3.10: Observación en la notación

En algunos libros de Análisis no es usada la notación común $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, familiar del cálculo elemental porque en la definición de integral definida los símbolos x y $\mathrm{d}x$ no juegan un rol. La notación correcta indica que todo lo que necesitamos son la función y el intervalo. Sin embargo, en ejemplos concretos frecuentemente encontraremos más útil usar la notación familiar $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$.

Ejemplo 3.4

Una **función constante** $f(x) = c$ es integrable sobre $[a, b]$, y $\int_a^b f = c(b-a)$.

Prueba. Para cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$, y para cualquier $k = 1, 2, \cdots, n$,

$$m_k = c = M_i,$$

entonces

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_i \Delta_i = \sum_{k=1}^{n} c\Delta_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta_k = c(b-a),$$

y además, $\underline{\int_a^b} f = c(b-a)$. Similarmente, para cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$,

$$U(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k = \sum_{k=1}^{n} c\Delta_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta_k = c(b-a),$$

y además $\overline{\int_a^b} f = c(b-a)$. Por lo tanto, $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = c(b-a)$, de lo cual se sigue la conclusión deseada. ■

$L(f, P) = \sum_{k=1}^{n} \text{ínf}\,(f, I_k)\,\Delta x_k$, pero $\text{ínf}\,(f; I_k) = 5$, entonces $L(f, P) = \sum_{k=1}^{n} 5{\cdot}\Delta x_k = 5\left(\sum_{k=1}^{n} \Delta I_k\right) = 5(3-1) = 10, \forall P \in \mathcal{P} \in [1, 3]$.
De esto $\underline{\int_1^3} f = 10$.
De manera similar

$$\sup\,(f, I_k) = 5$$

Entonces:

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \sum_{k=1}^{n} \sup\,(f, I_k) \cdot \Delta I_k \\ &= 5(3-1) = 10,\ \forall P \in \mathcal{P}\,[1, 3]\,. \end{aligned}$$

De esto $\overline{\int_1^3} f = 10$.
Como $\underline{\int_1^3} f = \overline{\int_1^3} f = 10$.
Entonces f es integrable según Riemann.
$\therefore \int_1^3 f = 10$.

Ejemplo 3.5: Una función no integrable

La **función de Dirichlet** dada por $f(x) = \begin{Bmatrix} 1 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{Bmatrix}$ es no integrable en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$, donde $a < b$.

Prueba. Supongamos que $a < b$. Para cualquier partición $\mathcal{P}\,[a, b]$, y para cualquier $k = 1, 2, \cdots, n$, tenemos $m_k = 0$, y $M_k = 1$, entonces

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k = \sum_{k=1}^{n} 0\Delta_k = 0, \text{ y por lo tanto, } \underline{\int_a^b} f = 0. \text{ Similarmente,}$$

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k = \sum_{k=1}^{n} 1\Delta_k = (b - a), \text{ y por lo tanto, } \overline{\int_a^b} f = (b - a).$$

Por lo tanto, $\underline{\int_a^b} f \neq \overline{\int_a^b} f$, de lo cual se sigue que f no es integrable en $[a, b]$. ■

$f\colon\ [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ para una partición P de $[0, 2]$ se tiene que

$$f(I_k) = \{0; 1\} \text{ para cualquier partición } P \text{ de } [0, 2]\,.$$

$$\sup\left(f|_{I_k}\right) = 1$$

entonces

$$\begin{aligned} L(f, P) &= 0 \\ S(f, P) &= \sum 1 \cdot \Delta I_k = 1 \cdot \sum \Delta I_k = 2. \end{aligned}$$

$\underline{\int_0^2} f = 0; \overline{\int_0^2} f = 2.$
Como

$$\underline{\int_0^2} f \neq \overline{\int_0^2} f$$

entonces f no es integrable según Riemann.

Ejemplo 3.6: Función característica de un intervalo cerrado

Consideremos la función característica de un intervalo cerrado, sea $f = \chi_{[1,3]}$, dada por $f(x) = \begin{Bmatrix} 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{Bmatrix}$. Pruebe que f es integrable en $[0, 5]$ y encuentre $\int_0^5 f$.

Solución: Nuestra comprensión intuitiva de la integral como área nos lleva a esperar que $\int_0^2 f = 2$, entonces empecemos con esa expectativa.

a) Sea $\mathcal{P} = \{0, 1, 3, 5\}$. Luego $\mathcal{P}$ es una partición de $[0, 5]$, y

$$\begin{aligned} L(f, P) &= m_1\Delta_1 + m_2\Delta_2 + m_3\Delta_3 \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $\underline{\int_0^5} f$ es el supremo de todas las sumas inferiores, $\underline{\int_0^5} f \geq L(f, P) = 2$.

b) Sea $0 < \varepsilon < 1$, y sea $\mathcal{Q} = \{0, 1 - \frac{\varepsilon}{2}, 3 + \frac{\varepsilon}{2}, 5\}$. Entonces $\mathcal{Q}$ es una partición de $[0, 5]$, y

$$\begin{aligned} U(f, P) &= M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2 + M_3\Delta_3 \\ &= 0(1 - \frac{\varepsilon}{2}) + 1(2 + \varepsilon) + 0(2 - \frac{\varepsilon}{2}) \\ &= 2 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $\overline{\int_0^5} f$ es el ínfimo de todas las sumas superiores, $\overline{\int_0^5} f \leq U(f, \mathcal{Q}) = 2 + \varepsilon$.

Además, $\forall \varepsilon > 0$, $\overline{\int_0^5} f \leq 2 + \varepsilon$. Por lo tanto, por el principio de fuerza, $\overline{\int_0^5} f \leq 2$.

c) Tomando (a) y (b) juntos con el teorema,

$$2 \leq \underline{\int_0^5} f \leq \overline{\int_0^5} f \leq 2.$$

Esto es, $\underline{\int_0^5} f = \overline{\int_0^5} f = 2$. Por lo tanto, f es integrable en $[0, 5]$, y $\int_0^5 f = 2$.

■

Recordando: Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Si A es

a) $c = \sup(A) \iff \begin{array}{r} x \leq c, \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A \mid c < x_0 + \varepsilon \end{array}$

b) $d = \text{ínf}(A) \iff \begin{array}{r} d \leq x, \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A \mid x_0 - \varepsilon < d \end{array}$

Para una función acotada $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se definió:

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f, P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}}$$

$$\boxed{\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{U(f, P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}}$$

Propiedad: Sea la función $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces para $\varepsilon > 0$, existen $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que se cumple:

$$\int_a^b f - \varepsilon < L(f, P_1) \leq \int_a^b f \leq U(f; P_2) < \int_a^b f + \varepsilon$$

Prueba. Aplicar las definiciones de supremo e ínfimo. ■

Propiedad: Sea la función $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable. Para $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que

$$\boxed{\int_a^b f - \varepsilon < L(f, P) \leq \int_a^b f \leq U(f, P) < \int_a^b f + \varepsilon}$$

Prueba. De la anterior proposición tomar $P = P_1 \cup P_2$ (P es refinamiento de P_1 y P_2). De esto último

$$
\begin{aligned}
U(f,P) - L(f,P) &\leq \int_a^b + \varepsilon - \left(\int_a^b f - \varepsilon \right) \\
&\leq 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

■

Así se obtiene:

Proposición: Sea $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}\,[a,b]$ tal que

$$U(f,P) - L(f,P)\varepsilon$$

Proposición:Sea $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}\,[a,b]$ de modo que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$, entonces f es integrable según Riemann en $[a,b]$.

Proposición: Para una función $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada las dos proposiciones son equivalentes.

2.3.1. Cotas para el error de aproximación de una integral definida

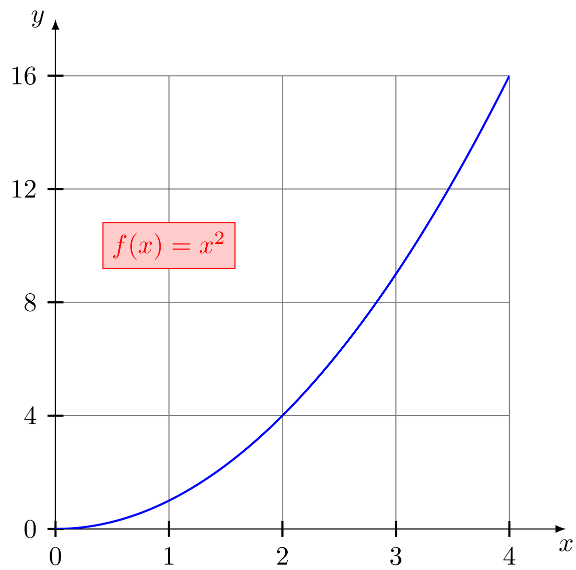
Ejemplo 3.7: Aproximación de la función $f(x) = x^2$

Sea la función f dada por $f(x) = x^2, x \in [0,4]$. Determine una aproximación de $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Solución: f es acotada en $[0,4]$. Tomando una partición $\mathcal{P} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ de $[0,4]$. Determinando $L(f,\mathcal{P})$ y $U(f,\mathcal{P})$, donde

$$L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{3} m_i(x)\Delta x_i = 0(1-0) + 1(3-1) + 9(4-3) = 11.$$

$$U(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{3} M_i(x)\Delta x_i = 1(1-0) + 9(4-3) + 16(4-3) = 35.$$



$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\left[U(f,\mathcal{P}) + L(f,\mathcal{P})\right]$$

esto es

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\left[35 + 11\right] \approx 23$$

donde la cota de error de la aproximación por partición es

estos $\frac{1}{2}[35-11]=12.$ ■

Recordar que toda función continua en conjunto compacto en $\mathbb{R}$ posee un máximo y un mínimo.

2.3.2. Existencia de funciones integrables

Teorema 3.2: Existencia de funciones integrables

Si f es una función continua en $[a,b]$ excepto en $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subsetneq [a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.

Observación 3.11: Entendiendo el significado de una función integrable

Decir que f es *integrable* en $[a,b]$ significa que existe $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. ¡No quiere decir que conozcamos como calcularlo! Veamos algunas integrales que existen pero no se pueden expresar en términos de funciones elementales.

1. $\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x.$
2. $\int \operatorname{sen}(x^2)\,\mathrm{d}x.$
3. $\int x\tan x\,\mathrm{d}x.$
4. $\int \tan(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x.$
5. $\int \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x.$
6. $\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x.$
7. $\int \ln(x)e^x\,\mathrm{d}x.$
8. $\int \sqrt{x \pm \ln(x)}\,\mathrm{d}x.$

Aunque algunas funciones no pueden integrarse con antiderivadas elementales, muchas de ellas pueden ser evaluadas en términos de constantes matemáticas bien conocidas para ciertas integrales definidas. Quizás los ejemplos más famosos sean las integrales:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{e^x}\,\mathrm{d}x = -\gamma.$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Teorema 3.3: Corolario

Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.

Ejemplo 3.8: Función $\operatorname{sen} x$

Sea la función dada por $f(x) = \operatorname{sen} x, x \in [0,\pi]$ entonces f es integrable en $[0,\pi]$.

Teorema 3.4

Si f es continua en $[a,b]$, entonces para $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \right| < \varepsilon$$

toda partición etiquetada $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ con $|\mathcal{P}| < \delta, \forall x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ elegido.

Observación 3.12

Si $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$ y se elige $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1; 2; \cdots; n$. A la siguiente suma:

$$\mathcal{S}(f, \mathcal{P}, \mathcal{W}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

se le denomina "*suma de Riemann*" donde $\mathcal{W} = \{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\}$

Teorema 3.5: Corolario

Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} f(x_k^*)\Delta x_k}$$

Observación 3.13

Cuando $|\mathcal{P}| \to 0$ equivale a $n \to \infty$.

Ejemplo 3.9

Sea f la función dada por $f(x) = x^2, x \in [0, 4]$. Se tiene que f es continua en $[0, 4]$, entonces f es integrable en $[0, 4]$.
Tomando una partición regular de $[0, 4]$ $\mathcal{P} = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ de la siguiente manera:

$$x_k = x_{k-1} + \Delta x_k; \quad \Delta x_k = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}.$$

de esto:

$$x_k = \underbrace{x_0}_{0} + k\Delta x_k, k = 1; 2; \cdots; n \implies x_k = k \cdot \frac{4}{n}; k = 1; 2; \cdots; n$$

En particular tomando $x_k^* = x_k = k \cdot \frac{4}{n}; k = 1; 2; \cdots; n$ entonces la suma de Riemann sería

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(k \cdot \frac{4}{n}) \cdot \frac{4}{n} = \sum_{k=1}^{n} \left(k \cdot \frac{4}{n}\right)^2 \cdot \frac{4}{n} = \frac{4^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{4^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Luego, se tiene que

$$\int_0^4 x^2 \, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{4^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{64}{3}.$$

2.4. Área de una región acotada

Sea f una función continua en $[a, b]$. $f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$. Se define la región

$$\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x) \wedge a \leq x \leq b\}$$

Se define el área de la región $\mathcal{W}$ como

$$\boxed{\text{área }(\mathcal{W}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Observación 4.1

El área es no negativa.

Ejemplo 4.1

Sea $\mathcal{W}$ ka región delimitada por la gráfica de la función dada por $f(x) = x^2$, el eje X y las rectas $x = 0, x = 4$. Así, entonces el área $(\mathcal{W}) = \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x$. Pero, del ejemplo anterior $\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{64}{3}$. Esto es, el área $(\mathcal{W}) = \frac{64}{3}u^2$.

Propiedades de la integral definida:
1 Si f es una función acotada sobre $[a,b]\,, c \in [a,b]$ entonces:

a) $\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$

b) $\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f$

Pero en el caso de que f sea continua en $[a,b]\,, c \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Ejemplo 4.2

Sea la función f dada

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [-3,0] \\ x^2 & ; x \in [0,4] \end{cases}$$

se tiene que f es continua en $[-3,4]$ entonces f es integrable.

Capítulo 3

Teoremas

3.1. Teorema fundamental del cálculo

3.1.1. Primer teorema fundamental del cálculo

Teorema 1.1: Primer teorema fundamental del cálculo

Sea la función f integrable en $[a,b]$ y se define la función F por $F(x) = \int_a^x f, x \in [a,b]$. Si f es continua en $[a,b], c \in [a,b]$ entonces F es diferenciable en $[a,b]$, además, $F'(c) = f(c)$.

Demostración: a) Sea $h > 0$, entonces $F(c+h) = \displaystyle\int_a^{c+h} f, F(c) = \int_a^c f$. De esto $F(c+h) - F(c) = \displaystyle\int_a^{c+h} - \int_a^c$.

$= \displaystyle\int_a^c f + \int_c^{c+h} - \int_a^c$, entonces $F(c+h) - F(c) = \displaystyle\int_c^{c+h} f$.

Como f es integrable en $[a,b]$ y $[c,c+h] \subset [a,b]$, entonces f es integrable en $[c,c+h]$. Definamos:

$m_h = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in [c,c+h]\}$
$M_h = \sup\{f(x) \mid x \in [c,c+h]\}$

y como f es integrable, por teorema (colocar el número que le corresponde), se cumple:

$$m_h \cdot h \leq \int_c^{c+h} \leq M_h \cdot h$$

dividendo entre h:

$$m_h \leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} \leq M_h$$

Cuando $h \to 0^+$ y como f es continua en $[c,c+h]$ se cumple que $m_h = M_h = f(c)$. De esto $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f = f(c)$ (Teorema del Sándwich).

esto es $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}[f(c+h) - F(c)] = f(c)$

Así $F'(c) = f(c)$.

b) Para $h < 0$ de manera análoga se obtiene lo anterior.

■

Límite especial:

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f = f(c)}$$

Ejemplo 1.1

Calcule

$$\lim_{h\to 0}\int_{\pi}^{\pi+h} \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(\pi) = 0.$$

Teorema 1.2: Corolario

Si f es continua en $[a,b]$ y $f = G'$ para alguna función G definida en $[a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f = G(b) - G(a)$.

Demostración: Como f es continua en $[a,b]$ entonces f es integrable en $[a,b]$. Definamos la función F en (a,b) por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f, x \in [a,b]$. Luego, por el *Primer teorema fundamental del cálculo*:

$$\begin{aligned}&F'(x) = f(x), x \in [a,b]\\ &f(x) = G'(x), x \in [a,b] \text{esto es G es antiderivada de f}\end{aligned}$$

entonces $F'(x) = G'(x), x \in [a,b]$.
De esto, se cumple por el teorema de diferenciabilidad

$$F(x) = G(x) + C, , \text{ C: constante para} x \in [a,b]$$

En particular para $x = a$ se tiene que $F(a) = G(a) + C$.
Pero $F(a) = \displaystyle\int_a^a = 0$.
En lo anterior $0 = G(a) + C$ de esto $0 = -G(a)$.
Así $F(x) = G(x) - G(a); x \in [a,b]$ en particular $F(b) = G(b) - G(a)$ pero $\displaystyle\int_a^b f$ por lo tanto $\displaystyle\int_a^b f = G(b) - G(a)$. ■

3.1.2. Segundo teorema fundamental del cálculo

Teorema 1.3: Segundo teorema fundamental del cálculo

Si f es una función integrable en $[a,b]$ y $f = G'$ para alguna función G en $[a,b]$ entonces $\displaystyle\int_a^b f = G(b) - G(a)$.

Demostración: Como la función G es diferenciable en $[a,b]$, entonces G es continua en $[a,b]$. Tomando una partición $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ de $[a,b]$ en cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]\,, k = 1, 2, \cdots, n$ se puede aplicar el *Teorema del valor medio* existe $x_k^* \in]x_{k-1}, x_k[$ tal que

$$G'(x_k) = \frac{G(x_k) - G(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

definamos

$$\begin{aligned}&m_k = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}\\ &M_k = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}\end{aligned}$$

Como $m_k \leq f(x_k) \leq M_k$ multiplicando por $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \geq 0$ entonces $m_k \Delta x_k \leq f(x_k)\Delta x_k \leq M_k \Delta x_k \quad k = 1, 2, \cdots, n$.

Sumando estas "n" desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(x)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

entonces

$$L(f,\mathcal{P}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(x)\Delta x_k \leq U(f,\mathcal{P})$$

donde

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(x)\Delta x_k &= \sum_{k=1}^{n} [G(x_k) - G(x_{k-1})] \\ &= G(x_n) - G(x_0) \quad \text{Propiedad telescópica} \\ &= G(b) - G(a).\end{aligned}$$

Así,

$$L(f,\mathcal{P}) \leq G(b) - G(a) \leq U(f,\mathcal{P}) \quad \text{, para cualquier partición de } [a,b]\,.$$

Luego $G(b) - G(a)$ es cota superior de $\{L(f,\mathcal{P}) \mid P \in \mathcal{P}\,[a,b]\}$, entonces $\underline{\int_a^b} f \leq G(b) - G(a)$.

Además, $(G(b) - G(a))$ es cota inferior de $\{U(f,\mathcal{P}) \mid P \in \mathcal{P}\,[a,b]\}$, entonces $G(b) - G(a) \leq \overline{\int_a^b} f$, y como f es integrable en $[a,b]$ se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = G(b) - G(a) = \int_a^b f.$$

■

Observación 1.1

Para calcular $\displaystyle\int_a^b f$ basta obtener una antiderivada G de f, esto es $G' = f$, de modo que

$$\int_a^b f = G(b) - G(a) = \underbrace{G(x)|_{x=a}^{x=b}}_{\text{"Notación"}}\,.$$

Observación 1.2: Importante

Es falso que:
Una función integrable sobre $[a,b]$ tenga una antiderivada allí.
Existen:

1. Funciones integrables sobre $[a,b]$ que no poseen antiderivadas allí.
2. Funciones que tienen antiderivadas sobre $[a,b]$, pero que no son integrables allí.

Es posible
encontrar una función integrable en $[-1,1]$ y que no posea antiderivada en $[-1,1]$.

La función de Thomæe es integrable en $[0,1]$, pero no posee antiderivada em cualquier subintervalo de $[0,1]$. Esta función es discontinua en $\mathbb{I}$, pero continua en $\mathbb{Q}$.

Ejemplo 1.2

(1) $\displaystyle\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$

(2) $\displaystyle\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e^x|_{x=0}^{x=1} = e^1 - e^0 = e - 1.$

Ejemplo 1.3: Ejercicio

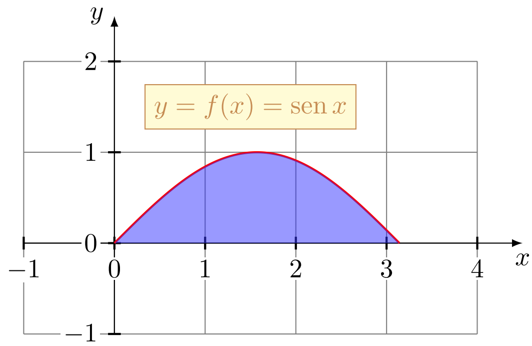
Calcule el área de la región

$$W = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq \operatorname{sen} x, x \in [0,\pi]\}$$

Solución.

$$\begin{aligned} \text{Área}(W) = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x &= -\cos x|_{x=0}^{x=\pi} \\ &= -[\cos\pi - \cos 0] \\ &= 2u^2. \end{aligned}$$

■



3.2. Teorema del valor medio para integrales

Teorema 2.1: Teorema del valor medio para integrales

Si la función f es continua en $[a,b]$, entonces existe $c \in [a,b]^\circ$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\,(b-a)\,.$$

Demostración: Como f es continua en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.
Definamos una función $G := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, x \in [a,b]$ donde $G'(x) = f(x), x \in [a,b]$ (por el *Primer Teorema Fundamental del Cálculo*).
Se tiene que: G es continua en $[a,b]$.
G es derivable en $[a,b]^\circ$.
Por el *Teorema de Valor Medio para derivadas* se tiene que existe $c \in [a,b]^\circ$ tal que

$$G'(c) = \frac{G(b) - G(a)}{b-a}$$

Esto es, $G(b) - G(a) = G'(c)(b-a)$. Reemplazando:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \cancelto{0}{\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t} &= f(c)\,(b-a)\\
\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= f(c)\,(b-a)
\end{aligned}
$$

Como t es variable muda, cambiando $t \mapsto x$, así se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\,(b-a)$$

■

Observación 2.1: Interpretación geométrica

Existe algún rectángulo de altura $f(c)$ cuya área coincide con el área de la región bajo la gŕafica de f para $f > 0$.

Observación 2.2

Determinar las dimensiones de una región rectangular cuya área coincide con el área de la región

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x^2 + 1, x \in [0, 1]\}$$

Considerando $f(x) = x^2 + 1, x \in [0, 1] \to f$ es continua en $[0, 1]$.
Aplicando el Teorema del Valor Medio para integrales, existe $c \in [0, 1]^{\mathrm{o}}$ tal que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\,(1-0)\\
\to &\int_0^1 \left(x^2+1\right)\mathrm{d}x = c^2+1\\
&\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = c^2+1\\
&\frac{4}{3} = c^2+1\\
&\frac{1}{3} = c^2\\
&\frac{\sqrt{3}}{3} = c
\end{aligned}
$$

Luego, el rectángulo tendrá como dimensiones:
Largo: 1u.
Ancho: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$u.

3.3. Cálculo de integrales definidas

Para calcular $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bastaría con obtener una antiderivada F de f ($F'(x) = f, x \in [a, b]$). Por el *Segundo teorema fundamental del cálculo* se tendría:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

Ejemplo 3.1: Ejercicios

(1) Calcule $\displaystyle\int_0^\pi x \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x$.

Solución. Veamos la integral definida

$$\int x \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & du = \mathrm{d}x \\ dv = \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x & v = -\cos x \end{array}}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x &= -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{-x\cos x + \operatorname{sen} x}_{\text{Tomando esta antiderivada}} + C,\ \text{C: constante}\end{aligned}$$

Por el *Segundo Teorema Fundamental del Cálculo*, se tiene:

$$\int_0^\pi x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = (-x\cos x + \operatorname{sen} x)|_{x=0}^{x=\pi} = \pi$$

■

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+2)^{20}}{(x+1)^{22}}\,\mathrm{d}x$

Solución. Trabajando con la integral indefinida

$$I = \int \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{20} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}$$

Sustituimos:

$$u = \frac{x+1}{x+2} \to \mathrm{d}u = \left[\frac{(x+1)-(x+2)}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} I = \int \frac{(x+2)^{20}}{(x+1)^{22}}\,\mathrm{d}x &= -\int u^{20}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{u^{21}}{21} + C,\ \text{C: constante} \\ &= -\frac{1}{21}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{21} + C,\ \text{C: constante}\end{aligned}$$

Así,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(x+2)^{20}}{(x+1)^{22}}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{21}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{21}\Bigg|_{x=0}^{x=1} \\
&= -\frac{1}{21}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{21} - 2^{21}\right]
\end{aligned}
$$

■

3.4. Aproximación numérica

La $\displaystyle\int_a^b$ se puede aproximar por los siguientes métodos:

Definición 4.1: Método del trapecio $f > 0$ en un intervalo cerrado

Se toma una partición regular $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ y se obtienen $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n)$; donde $h = \Delta x_k = \left(\dfrac{b-a}{n}\right)$ es constante.

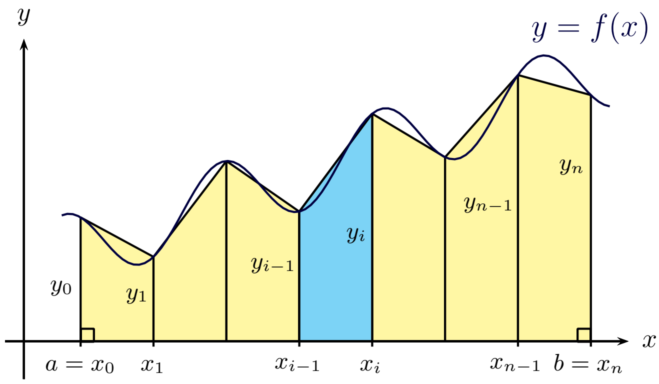


Figura 3.1: Ilustración de suma de trapecios de la función $f(x)$

Luego, el área de la región delimitada por la gráfica de la función y las rectas $x = a, x = b, y = 0$ se puede aproximar por las sumas de las áreas de todos los trapecios obtenidos. Así, se tiene que:

$$
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\right)h}_{\dfrac{h}{2}\left(y_0 + 2\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} y_k\right) + y_n\right)}
$$

Esto es,

$$
\boxed{\left(\frac{b-a}{2n}\right)\left[y_0 + 2\left(\sum_{k=1}^{n-1} y_k\right) + y_n\right]}
$$

Toda la parte interna se va a sumar dos veces excepto en los puntos extremos.

Observación 4.1

La región sombreada es un trapecio cuya área es igual a $\left(\frac{y_0+y_1}{2}\right)\times h$, el segundo trapecio tiene como área $\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)\times h$.

Ejemplo 4.1

Aproxime $\int_0^{10} x^2\,\mathrm{d}x$ por el método del trapecio tomando la partición $\{0;1;2;3;\ldots;10\}$ de $[0,10]$.

Solución. Vemos que $a=0; b=10; f(x_k)=k^2; k=0;1;2;\ldots;10.$
Luego:

$$\begin{aligned}\int_0^{10} x^2\,\mathrm{d}x &\approx \frac{10-0}{2\times 10}\left[0^2+2\sum_{k=1}^{9}k^2+10^2\right]\\ &\approx \frac{\cancel{10}}{2\times\cancel{10}}\left[0+2\times\frac{9\times 10\times 19}{6}+100\right]\end{aligned}$$

$$\to \int_0^{10} x^2\,\mathrm{d}x \approx 335$$

■

Podemos mejorar la aproximación empleando polinomios cuadráticas, de esta forma se obtiene:

Definición 4.2: Método de Simpson

Suponer que el intervalo de integración es $[0,2h]$. Los tres puntos sobre la gráfica de la función obtenidos: $P_0(0,y_0); P_1(h,y_1); P_2(2h,y_2)$. Se pueden interpolar por un polinomio cuadrático:

$$p(x)=Ax^2+Bx+C$$

Para obtener los coeficientes A, B y C:

* $\underbrace{P(0)}_{y_0}=0+0+C=0 \implies \boxed{C=y_0}$
* $\underbrace{P(h)}_{y_1}=Ah^2+Bh+\underbrace{C}_{y_0} \quad \cdots(1)$
* $\underbrace{P(2h)}_{y_2}=4Ah^2+2Bh+y_0 \quad \cdots(2)$

$(2)-(2)\times(1)$: $y_2-2y_1=2Ah^2-y_0 \implies \boxed{A=\dfrac{y_0-2y_1+y_2}{2h^2}.}$

En (1): $y_1=\left(\dfrac{y_0-2y_1+y_2}{2\cancel{h^2}}\right)\cancel{h^2}+Bh+y_0 \implies 2y_1=y_0-2y_1+y_2+2Bh+2y_0 \implies \boxed{B=\dfrac{4y_1-3y_0-y_2}{2h}.}$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2h} f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \int_0^{2h} p(x)\,\mathrm{d}x \\
\int_0^{2h} f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \left(\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{6h^2}\right) x^3\big|_0^{2h} + \left(\frac{4y_1 - 3y_0 - y_2}{4h}\right) x^2\big|_0^{2h} + y_0\, x\big|_0^{2h} \\
&\approx \frac{4}{3}h\left(y_0 - 2y_1 + y_2\right) + h\left(4y_1 - 3y_0 - y_2\right) + 2hy_0 \\
&\approx \frac{h}{3}\left[4y_0 - 8y_1 + 4y_2 + 12y_1 - 9y_0 - 3y_2 + 6y_0\right] \\
&\approx \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right]
\end{aligned}$$

De esta manera. según Simpson, se parte del intervalo $[a, b]$ en $(2n)$ partes $\left(\text{donde } h = \dfrac{b-a}{2n}\right)$, determinándose las imágenes: $y_i = f(x), i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$. De esta manera aplicando lo anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right] \\
&\approx \frac{h}{3}\left[y_0 + 4\sum y_{2i-1} + 2\sum y_{2i} + y_{2n}\right]
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.2

Obtener un valor aproximado de $\displaystyle\int_0^{10} x^3\,\mathrm{d}x$, empleando Simpson, dividiendo $[0, 10]$ en 10 partes.

Definición 4.3: Cota de error

Se tiene por Simpson

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4\sum\nolimits_{2i-1} + 2\sum\nolimits_{2i} + y_{2n} + E\right]$$

Suponiendo que existe $f^{(4)}$ en $[a, b]$.
Si $|f^{(4)}(x)| \le M, x \in [a, b]$ entonces:

$$|E| \le \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} M$$

3.5. Integración numérica

Este es uno de mis temas favoritos, en el capítulo X dijimos, un tanto despreocupadamente, que las integrales podían ser calculadas con tanta precisión como se deseara por medio del cálculo de sumas superiores y sumas inferiores. Pero un matemático aplicado, quien realmente tiene que efectuar los cálculos en lugar de hablar solo de los mismos, tal vez no se entusiasme con la idea de calcular sumas inferiores para calcular una integral, hasta, por ejemplo, el tercer decimal (una precisión que fácilmente se requiere en muchas aplicaciones). Los siguientes tres problemas muestran cómo métodos más refinados permiten hacer los cálculos de forma mucho más eficiente.

Debemos mencionar, en primer lugar que el cálculo de las sumas superiores e inferiores ni siquiera podría ser realizable, ya que podría no ser posible calcular las cantidades m_i y M_i para cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Es mucho más razonable seleccionar simplemente puntos x_k en $[x_{i-1}, x_i]$ y considerar

$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot(x_k - x_{k-1})$. Esto representa la suma las áreas de algunos rectángulos que se superponen parcialmente a la gráfica de f. Pero vamos a obtener un resultado mucho mejor si en lugar elegimos los trapecios que se muestran en la figura siguiente:

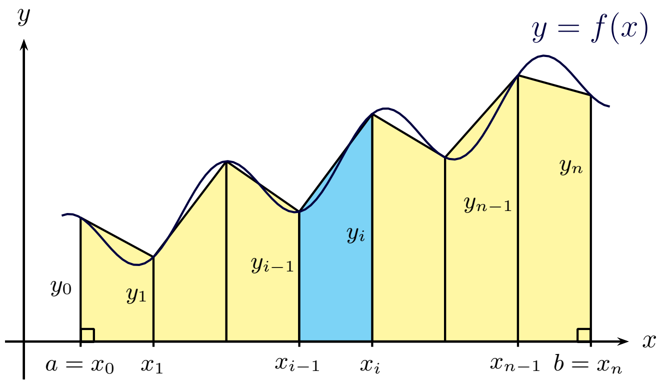


Figura 3.2: Ilustración de suma de trapecios de la función $f(x)$

Supongamos, en particular, que dividimos $[a, b]$ en n intervalos de igual longitud, por medio de puntos

$$x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right) = a + k\Delta x_k$$

Entonces el trapecio con base $[x_{k-1}, x_k]$ tiene un área de $\dfrac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\cdot(x_k - x_{k-1})$ y la suma de todas estas áreas es simplemente

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_n &= h\left[\frac{f(x_1)+f(a)}{2} + \frac{f(x_2)+f(x_1)}{2} + \cdots + \frac{f(b)+f(x_{n-1})}{2}\right] \\ &= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b)\right], \qquad h = \frac{b-a}{n}.\end{aligned}$$

Este método aproximado para el cálculo de una integral se le denomina *regla del trapecio*.
Tenga en cuenta que para obtener $\sum_{2n}$ a partir de $\sum_n$ no es necesario volver a calcular de nuevos los antiguos $f(x_i)$, su contribución a la $\sum_{2n}$ es $\frac{1}{2}\sum_n$. Así que en la práctica es mejor calcular $\sum_2, \sum_4, \sum_8, \ldots$, para obtener aproximaciones a $\int_a^b f$. En el siguiente problema estimaremos $\int_a^b f - \sum_n$. Veamos con un ejemplo cómo se maneja en la práctica. Suponga que f'' es continua. Sea P_i la función lineal que coincide con f en x_{k-1} y x_k. Demuestre que si n_k y N_k son el mínimo y el máximo de f'' en $[x_{k-1}, x_k]$ e

$$I = \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})\,\mathrm{d}x$$

entonces

$$\frac{n_k I}{2} \geq \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f - P_k) \geq \frac{N_k I}{2}.$$

Estime I para obtener

$$-\frac{n_k h^3}{12} \geq \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f - P_k) \geq \frac{N_k h^3}{12}.$$

Concluya que existe un c en (a, b) con

$$\int_a^b f = \sum\nolimits_n - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c).$$

Observe que el "error residual" $(b-a)^3 f''(c)/12n^2$ varia proporcionalmente a $1/n^2$ (mientras que el error obtenido empleando sumas superiores e inferiores ordinarias varia proporcionalmente a $1/n$). Podemos obtener resultados aún más precisos si aproximamos f mediante funciones cuadráticas en vez de funciones lineales. En primer lugar, consideremos lo que ocurre cuando dividimos el intervalo $[a,b]$ en dos intervalos iguales. Ver la siguiente figura:

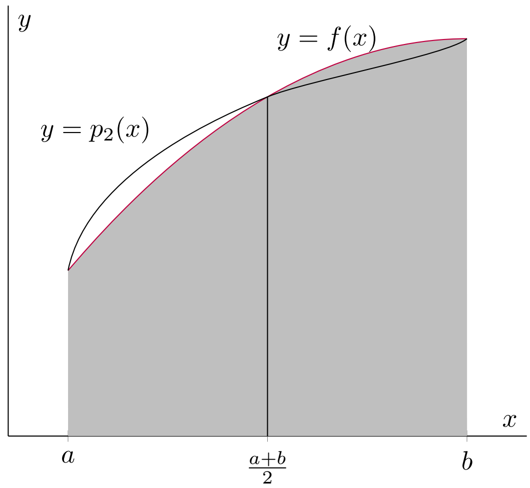


Figura 3.3: Ilustración de la regla de Simpson

Suponga en primer lugar que $a=0$ y $b=2$. Sea P el polinomio de grado ≤ 2 que coincide con f en $0, 1 y 2$. Demuestre que

$$\int_0^2 P = \frac{1}{3}\left[f(0)+4f(1)+f(2)\right].$$

Concluya el caso general

$$\int_a^b P = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right].$$

Naturalmente $\displaystyle\int_a^b P = \int_a^b f$ si f es un polinomio de segundo grado. Pero, de forma remarcable, ¡la misma relación se cumple si f es un polinomio de tercer grado! Demuestre esto, utilizando el problema dos anterior, observe que f''' es una constante. El problema anterior demuestra que no hemos de hacer ningún nuevo cálculo para hallar $\displaystyle\int_a^b Q$ cuando Q es un polinomio cúbico que coincide con f en a, b, y $\dfrac{a+b}{2}$ todavía tenemos que

$$\int_a^b Q = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].$$

Pero hay muchos más casos en la elección Q, que podemos utilizar a nuestro favor:

(a) Demuestre que existe un polinomio de tercer grado Q tal que

$$Q(a)=f(a), \qquad Q(b)=f(b), \qquad Q\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$Q'\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Indicación: Claramente $Q(x)=P(x)+A(x-a)(x-b)\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)$ para alguna función A.

(b) Demuestre que si $f^{(4)}$ está definida en $[a, b]$, entonces para cada x en $[a, b]$ tenemos

$$f(x) - Q(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)\frac{f^{(4)}}{4}$$

para algún ξ en (a, b).

(c) Concluya que si $f^{(4)}$ es continua, entonces

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(c)$$

para algún c en (a, b).

(d) Ahora divida $[a, b]$ en $2n$ intervalos mediante los puntos

$$t_k = a + kh \qquad h = \frac{b-a}{2n}.$$

Demuestre la regla de Simpson:

$$\int_a^b = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + \sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(b)\right) - \frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\hat{c})$$

para algún $\hat{c}$ en (a, b).

En esta sección nos concentraremos en las integrales definidas. Las entradas son $y(x)$ y dos puntos terminales a y b. La salida es la integral I. Nuestro objetivo es encontrar el número $\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x = I$, con precisión en un corto tiempo. Normalmente este objetivo se logra, tan pronto tengamos un buen método para calcular integrales. Nuestras dos aproximaciones son muy débiles. La búsqueda de una antiderivada ocurre en casos importantes, en el capítulo 7 extenderemos el rango, pero generalmente $f(x)$ no está disponible. La otra aproximación (por rectángulos) está en la dirección correcta, pero es muy tosca. La altura es el conjunto de $y(x)$ de derecha a izquierda para cada pequeño intervalo. La derecha a izquierda regla del rectángulo suma áreas (Δ veces y):

$$R_n = (\Delta x)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \quad \text{y} \quad L_n = (\Delta x)(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}).$$

El valor de $y(x)$ al final del intervalo j es y_j. El valor del extremo izquierdo $y_0 = y(a)$ ingresa a L_n. Con n intervalo de igual longitud.

3.5.1. Teorema del cambio de variable de una integral definida

Teorema 5.1: Teorema de sustitución de integrales definidas

Si g es una función con derivada continua en $[a, b]$ y f es una función continua en el rango g, entonces:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

Demostración. Como f es continua en $[g(a), g(b)]$, entonces f es integrable en $[g(a), g(b)]$, garantiza la existencia de una antiderivada F de f $(F' = f)$.

$$\int_a^b f(g(x))\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

■

Ejemplo 5.1

Calcule $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+2x+6\right)^2}$.

Solución. Hacemos $u = x^2 + 2x + 6 \to \mathrm{d}u = 2(x+1)\,\mathrm{d}x$. Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+2x+6\right)^2} = \int_6^9 \frac{\mathrm{d}u}{u^2} \\ &= \left.\frac{-1}{2u}\right|_6^9 \\ &= \frac{-1}{18} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

■

Capítulo 4

Técnicas de integración

4.1. Métodos de integración

4.2. Sustituciones simples

4.3. Integración por partes para la integral definida

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

Ejemplo 3.1

Calcule $I = \displaystyle\int_0^1 \arctan x\,\mathrm{d}x$.

Solución.

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \arctan x & du = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ dv = \mathrm{d}x & v = x \end{array}}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \arctan x\,\mathrm{d}x &= x\arctan x\big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \left(\ln\left(\frac{1+1^2}{1+0^2}\right)^{1/2}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

■

4.4. Integrales trigonométricas y sustitución trigonométrica

Tipo I

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^n x\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int \cos^n x\,\mathrm{d}x}$$

(a) n es par. Se desdobla:

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^n \mathrm{d}x = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x}$$

Ejemplo 4.1

Calcule: $I = \displaystyle\int \operatorname{sen}^7 x \, \mathrm{d}x$.

Solución. Primero desdoblemos $\operatorname{sen}^7 x = \operatorname{sen}^6 x \operatorname{sen} x$ y reemplacemos $u = \cos x \to \mathrm{d}u = -\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I = \int \operatorname{sen}^7 x\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{sen}^6 x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^3 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \\
&= \int (1-\cos^2 x)^3 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left[1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x\right] \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left[1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6\right](-\mathrm{d}u) \\
&= 3\int u^2\,\mathrm{d}u - \int \mathrm{d}u + \int u^6\,\mathrm{d}u - 3\int u^4\,\mathrm{d}u \\
&= \cancel{3}\cdot\frac{u^3}{\cancel{3}} - u + \frac{u^7}{7} - 3\cdot\frac{u^5}{5} + C, \text{ C: constante} \\
&= \cos^3 x - \cos x + \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{3}{5}\cos^5 x + C, \text{ C: constante}
\end{aligned}
$$

■

(b) n par. Aplicar:

$$
\boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}}
$$

Ejemplo 4.2

Calcule $I = \displaystyle\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$.

Solución.

$$
\begin{aligned}
I = \int \cos^4 x\,\mathrm{d}x &= \int (\cos^2 x)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x) \\
&= \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right)\mathrm{d}x + C, \text{ C: constante} \\
&= \frac{x}{4} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + \frac{1}{4}\left[\int \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\cos(4x)}{2}\,\mathrm{d}x\right] + C, \text{ C: constante} \\
&= \frac{x}{4} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + \frac{1}{8}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int \cos(4x)\,\mathrm{d}x + C, \text{ C: constante} \\
&= \frac{x}{4} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{32} + C, \text{ C: constante}
\end{aligned}
$$

■

Tipo I

$$
\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,\mathrm{d}x
$$

Observación 4.1

e trata de llevar al caso I.

(a) "n" impar, $m \in \mathbb{R}$ (m impar, $n \in \mathbb{R}$).

Ejemplo 4.3

Calcule $I = \displaystyle\int \operatorname{sen}^{3/5} \cos^3 x \, \mathrm{d}x$.

Solución. Primero desdoblemos $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x$ y reemplacemos $u = \operatorname{sen} x \to \mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I = \int \operatorname{sen}^{3/5} x \cos^3 x \, \mathrm{d}x &= \int \operatorname{sen}^{3/5} x \left(\cos^2 x\right) \cos x \, \mathrm{d}x \\
&= \int \operatorname{sen}^{3/5} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x \, \mathrm{d}x \\
&= \int \operatorname{sen}^{3/5} x \cos x \, \mathrm{d}x - \int \operatorname{sen}^{13/5} x \cos x \, \mathrm{d}x \\
&= \int u^{3/5} \, \mathrm{d}u - \int u^{13/5} \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{5}{8} u^{8/5} - \frac{5}{18} u^{18/5} + C, \ \text{C: constante} \\
&= \frac{5}{8} \operatorname{sen}^{8/5} - \frac{5}{18} \operatorname{sen}^{18/5} + C, \ \text{C: constante}
\end{aligned}
$$

■

(c) m y n pares.

Ejemplo 4.4

Calcule $I = \displaystyle\int \cos^2 x \operatorname{sen}^4 x \, \mathrm{d}x$.

Solución.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \cos^2 x \operatorname{sen}^4 x \, dx \\
&= \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) \operatorname{sen}^4 x \, dx \\
&= \int \operatorname{sen}^4 x \, dx - \int \operatorname{sen}^6 x \, dx \\
&= \int \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^2 dx - \int \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^3 dx \\
&= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx - \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^3 dx \\
&= \frac{1}{4}\int 1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\, dx - \frac{1}{4}\int 1 - 3\cos(2x) + 3\cos^2(2x) - \cos^3(2x)\, dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left[\cancel{1} - \cancel{1} - 2\cos(2x) + 3\cos(2x) + \cos^2(2x) - 3\cos^2(2x) + \cos^3(2x)\right] dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left[\cos(2x) - 2\cos^2(2x) + \cos^3(2x)\right] dx \\
&= \frac{1}{4}\int \cos(2x)\, dx - \frac{1}{2}\int \cos^2(2x)\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^3(2x)\, dx \\
&= \frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos(4x)}{2}\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\cos(2x)\, dx + C, \ \text{C: constante} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(2x)}{8} - \frac{1}{4}\int 1 + \cos(4x)\, dx + \frac{1}{4}\int \left(1 - \operatorname{sen}^2(2x)\right)\cos(2x)\, dx + C, \ \text{C: constante} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(2x)}{8} - \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos(4x)\, dx + \frac{1}{4}\int \cos(2x)\, dx - \frac{1}{4}\int \left(\operatorname{sen}(2x)\right)^2 \cos(2x)\, dx + C, \ \text{C: constante} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(2x)}{8} - \frac{x}{4} - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{16} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{8} - \frac{1}{4}\int u^2\, du + C, \ \text{C: constante} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(2x)}{8} - \frac{x}{4} - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{16} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{8} - \frac{1}{4}\frac{u^3}{3} + C, \ \text{C: constante} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(2x)}{8} - \frac{x}{4} - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{16} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{8} - \frac{\operatorname{sen}^3(2x)}{12} + C, \ \text{C: constante}
\end{aligned}
$$

■

Tipo III

$$\boxed{\int \tan^m x \sec^n x \, dx}$$

Vimos:

(a) m o n es cero.

(b) m es impar o n es par.

(c) m es par y n es impar.

Observación 4.2

* $\displaystyle\int \sec x \, dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)|$.

* $\displaystyle\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x|$.

* $\int \sec^5 x\,dx = \int \sec^3 x \sec^2 x\,dx =$¿?

Integración por partes:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \sec^3 x & du = 3\sec^3 x \tan x\,dx \\ dv = \sec^2 x\,dx & v = \tan x \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
\int \sec^5 x\,dx &= \sec^3 x \tan x - 3\int \sec^3 x(\tan^2 x)\,dx \\
&= \sec^3 x \tan x - 3\int \sec^3 x(\sec^2 x - 1)\,dx \\
&= \sec^3 x \tan x - 3\int (\sec^5 x - \sec^3 x)\,dx \\
&= \sec^3 x \tan x - 3\int \sec^5 x\,dx + 3\int \sec^3 x\,dx \\
4\int \sec^5 x\,dx &= \sec^3 x \tan x + 3\int \sec^3 x\,dx \\
\int \sec^5 x\,dx &= \frac{1}{4}\sec^3 x \tan x + \frac{3}{4}\int \sec^3 x\,dx \\
\int \sec^5 x\,dx &= \frac{1}{4}\sec^3 x \tan x + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x|\right) \quad \text{pero de la observación } 8{,}1 \\
\int \sec^5 x\,dx &= \frac{\sec^3 x \tan x}{4} + \frac{3}{8}\sec x \tan x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x|.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.5

Calcule $I = \int \tan^2 x \sec^2 x\,dx$.

Solución.

$$\begin{aligned}
I = \int \tan^2 x \sec^2 x\,dx &= \int (\sec^2 x - 1) sec^3 x\,dx \\
&= \int \sec^5 x\,dx - \int \sec^3 x\,dx \\
&= \frac{\sec^3 x \tan x}{4} + \frac{3}{8}\sec x \tan x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x| - \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| \\
&= \frac{\sec^3 x \tan x}{4} - \frac{1}{8}\sec x \tan x - \frac{1}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C, \text{ C: constante}
\end{aligned}$$

■

Observación 4.3: Recordar

1. $\operatorname{sen} u \cos u = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)\right]$
2. $\cos u \cos v = \frac{1}{2}\left[\cos(u+v) + \cos(u-v)\right]$

Tipo IV:

$$\boxed{\int \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x} \qquad \boxed{\int \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\,\mathrm{d}x} \qquad \boxed{\int \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x}$$

Ejemplo 4.6

Calcule $I = \displaystyle\int \operatorname{sen}(3x)\cos(8x)\,\mathrm{d}x$.

Solución. Emplear la identidad trigonométrica:

$$\boxed{\operatorname{sen}(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x\right]}$$

$$I = \int \operatorname{sen}(3x)\cos(8x)\,\mathrm{d}x$$
$$I = \int \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(3+8)x + \operatorname{sen}(3-8)x\right]\mathrm{d}x$$
$$I = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(11x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(5x)\,\mathrm{d}x$$
$$I = -\frac{1}{22}\cos(11x) + \frac{1}{10}\cos(5x) + C,\ \text{C: constante}$$

■

Tipo V:

$$\boxed{\int P_n(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x} \qquad \boxed{\int P_n(x)\operatorname{sen}(ax)\,\mathrm{d}x} \qquad \boxed{\int P_n(x)\cos(ax)\,\mathrm{d}x}$$

donde $P_n(x)$: Polinomio de grado n en variable x.
Se cumple:

$$\boxed{\int P_n(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x = Q_n(x)e^{ax} + C,\ \text{C: constante}}$$

donde Q_n es un polinomio de grado n de coeficientes indeterminados, esto es:

$\boxed{Q_n = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$ donde b_i son los coeficientes indeterminados $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 4.7

Calcule $J = \displaystyle\int \left(x^3 + 8x^2 - x + 1\right)e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Solución. Por coeficientes indeterminados: $J = \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)e^{2x} + C,\ \text{C: constante}$ se debe determinar a, b, c y d.
Por la definición de derivada se cumple:

$$D_x\left[(ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x}\right] = \left(x^3 + 8x^2 - x + 1\right)e^{2x}$$

$$\Longrightarrow\ \left(3ax^2 + 2bx + c\right)e^{2x} + 2\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)e^{2x} = \left(x^3 + 8x^2 - x + 1\right)e^{2x}$$

$$\Longrightarrow \left[2ax^3 + (3a+2b)x^2 + (2b+2c)x + (c+d)\right] e^{2x} = \left(x^3 + 8x^2 - x + 1\right) e^{2x}$$

Luego,

* $2a = 1 \longrightarrow a = \frac{1}{2}$
* $3a + 2b = 8 \longrightarrow b = \frac{13}{4}$
* $2b + 2c = 1 \longrightarrow c = \frac{19}{4}$

$\therefore J = \left(\dfrac{x^3}{2} + \dfrac{13}{4}x^2 - \dfrac{15}{4}x + \dfrac{19}{4}\right) e^{2x} + C,$ C: constante ■

En general:

$$\boxed{\int P_n(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a}\left[P_n(x) - \frac{P_n'(x)}{a} + \frac{P_n''(x)}{a^2} - \frac{P_('''x)}{a^3} + \cdots\right]}$$

Teorema 4.1

Sean los polinomios:

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 \\
Q_n(x) &= b_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots b_1 x + b_0 \\
&= B(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\ldots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+M_1x+N_1)^{q_1}\ldots(x^2+M_tx+N_t)^{q_t}
\end{aligned}$$

donde: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} r_i + 2\sum_{i=1}^{t} q_i = m.$

Ejemplo 4.8

Expresar $\dfrac{3x+5}{(x-1)(x+1)}$ como suma de fracciones parciales.

Solución.

$$\begin{aligned}
\frac{3x+5}{(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} \\
\Longrightarrow \quad \frac{3x+5}{(x-1)(x+1)} &= \frac{(A+B)x + (A-B)}{(x-1)(x+1)}
\end{aligned}$$

Como son polinomios idénticos se cumple:

$$3 = A + B \qquad 5 = A - B$$

$$\therefore \frac{3x+5}{(x-1)(x+1)} = \frac{4}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$ ■

Esta técnica es muy útil para integrar funciones racionales de polinomios.

Ejemplo 4.9

Calcule $I = \int \dfrac{3x+5}{x^2-1}$.

Solución.

$$I = \int \left(\frac{3x+5}{x^2-1}\right) \mathrm{d}x = \int \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)} \,\mathrm{d}x.$$

Aplicando fracciones parciales al integrando (ejemplo anterior)

$$I = \int \left[\frac{4}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right] \mathrm{d}x = \int \frac{4\,\mathrm{d}x}{x-1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$$

$\therefore I = 4\ln|x-1| - \ln|x+1| + C,$ C: constante ■

Ejemplo 4.10

$$I = \int \frac{3x^2+4x+1\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

Fracciones parciales:

$$\frac{3x^2+4x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

donde A, B, C y D son constantes.

4.5. Método de fracciones parciales

4.6. Integrales que contienen factores cuadráticos

4.7. Binomio diferencial

$$\boxed{\int x^m(a+bx^n)^p \,\mathrm{d}x} \qquad m, n, p \in \mathbb{Q}, a, b \text{ no nulas.}$$

Teorema 7.1: Teorema de Chebishev

Esta integral se puede integrar en uno de los tres casos:

(I) $p \in \mathbb{Z}$, hacer $\boxed{x = t^N}$ donde N es el común denominador de m y n.

(II) $\left(\dfrac{m+1}{n}\right) \in \mathbb{Z}$, hacer $\boxed{a+bx^n = t^N}$, donde N es el denominador de p.

(III) $\left(\dfrac{m+1}{n} + p\right) \in \mathbb{Z}$, hacer $\boxed{t^N = \dfrac{a+bx^n}{x^n} = ax^{-n}+b}$ donde N es el denominador de p.

Ejemplo 7.1

Determine las siguientes integrales usando el Teorema de Chebishev.

1. $\displaystyle\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 \mathrm{d}x.$

   Identificamos $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{3}, p = 2 \in \mathbb{Z}$. Es el caso I, hacer $\boxed{x = t^6} \longrightarrow \mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t.$

Reemplazando:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x}\big(1+\sqrt[3]{x}\big)^2\,\mathrm{d}x &= \int t^3(1+t^2)^2 6t^5\,\mathrm{d}t \\
&= 6\int t^8(1+2t^2+t^4)\,\mathrm{d}t \\
&= 6\int (t^8+2t^{10}+t^{12})\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}t^9+\frac{12}{11}t^{11}+\frac{6}{13}t^{13}+C,\ \text{C: constante} \\
&= \frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{12}{11}x^{11/6}+\frac{6}{13}x^{13/6}+C,\ \text{C: constante}
\end{aligned}$$

2. $I=\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}\,\mathrm{d}x.$

Identificamos $m=-1, n=\frac{1}{2}, p=\frac{1}{3}$, notamos que $p\notin\mathbb{Z}$, pero $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-1+1}{\frac{1}{2}}=0\in\mathbb{Z}$. Es el caso II, hacer: $\boxed{1+x^{1/2}=t^3}\longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{2x^{1/2}}=3t^2\,\mathrm{d}t.$

Reemplazando:

$$\begin{aligned}
I=\int \sqrt{x}\big(1+\sqrt[3]{x}\big)^2\,\mathrm{d}x &= \int x^{-1}\cdot t\cdot 6x^{1/2}t^2\,\mathrm{d}t \\
&= 6\int x^{-1/2}t^3\,\mathrm{d}t \\
&= 6\int \frac{t^3}{t^3-1}\,\mathrm{d}t \\
&= 6\int \mathrm{d}t+\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} \\
&= 6t+\int\frac{\mathrm{d}t}{(t-1)(t^2+t+1)}
\end{aligned}$$

Por fracciones parciales:

$$\frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1}\qquad A,B,C \text{ son constantes.}$$

equivale a:

$$1=A(t^2+t+1)+(Bt+C)(t-1)$$

$t=1: 1=3A\longrightarrow \boxed{A=1/3}$

$t=0: 1=A-C\longrightarrow \boxed{C=-2/3}$

$t=-1: 1=A+2B-2C\longrightarrow \boxed{B=-1/3}$

$$
\begin{aligned}
I &= 6t + \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \frac{1}{6}\int \frac{2t+1-3}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= 6t + \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{6}\ln|t^2+t+1| - \frac{3}{6}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} \\
&= 6\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} - \frac{1}{3}\ln\left|\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}-1\right| - \frac{1}{6}\ln\left|\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1\right| \\
&- \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\right)\right) + C, \ \text{C: constante}
\end{aligned}
$$

Observación 7.1: Integral de Chebyshev

$$\int x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x = B(x;1+p;1+q)$$

donde $B(x;a;b)$ es la función beta incompleta.

4.8. Funciones racionales del seno y coseno

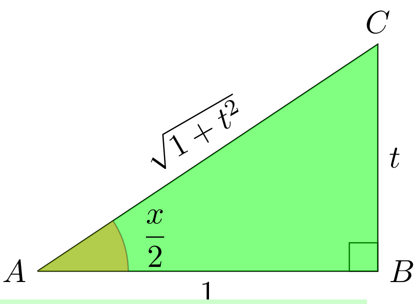
Veamos otra herramienta de integración, aquellas funciones que son del tipo

$$\boxed{\int \mathcal{R}\,(\operatorname{sen} x, \cos x)\,\mathrm{d}x}$$

Sustitución universal: $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}} \qquad \boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$



Ejemplo 8.1

Calcule la integral $I = \displaystyle\int \frac{5\,\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x + 1}$.

Solución. Hacer $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right) \iff \boxed{\dfrac{x}{2} = \arctan t \longrightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}$. Así,

$$
\begin{aligned}
I = \int \frac{5\,\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x + 1} &= 5\int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)+1} \\
&= 5\int \frac{\frac{2}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{1+2t+t^2}{\cancel{1+t^2}}}\,\mathrm{d}t \\
&= 10\int (1+t)^{-2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{10}{(1+t)} + C, \ \text{C: constante} \\
&= -\frac{10}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + C, \ \text{C: constante}
\end{aligned}
$$

■

Observación 8.1

A veces, la sustitución universal se complica y en dichos casos se aplican variantes.

(a) Cuando $\mathcal{R}\left(-\operatorname{sen} x, \cos x\right) = -\mathcal{R}\left(\operatorname{sen} x, \cos x\right)$.

Observación 8.2

$\mathcal{R}$ es impar respecto al seno, hacer $\boxed{t = \cos x}$.

Ejemplo 8.2

Calcule $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x + 1}\, \mathrm{d}x$.

Solución. Identificamos la expresión "racional de senos y cosenos" $\boxed{\mathcal{R}(\operatorname{sen} x, \cos x) = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x + 1}}$.

Pero,

$$\mathcal{R}(-\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{(-\operatorname{sen} x)^3}{\cos x + 1} = -\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x + 1} = -\mathcal{R}(\operatorname{sen} x, \cos x).$$

Esto es, $\mathcal{R}$ es impar respecto al seno. Realizamos la sustitución:

$$\boxed{t = \cos x \qquad \mathrm{d}t = -\operatorname{sen} x\, \mathrm{d}x}$$

$$\begin{aligned}
I = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x + 1}\, \mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x}{\cos x + 1}\, \mathrm{d}x &= \int \frac{(\cos^2 x - 1)(-\operatorname{sen} x)}{\cos x + 1} \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{t^2 - 1}{t + 1}\, \mathrm{d}t \\
&= \int \frac{\cancel{(t+1)}(t-1)}{\cancel{t+1}}\, \mathrm{d}t \\
&= \int t\, \mathrm{d}t - \int \mathrm{d}t \\
&= \frac{t^2}{2} - t + C, \text{ C: constante} \\
&= \frac{\cos^2 x}{2} - \cos x + C, \text{ C: constante}
\end{aligned}$$

■

Observación 8.3

(b) Cuando $\mathcal{R}\left(\operatorname{sen} x, -\cos x\right) = -\mathcal{R}\left(\operatorname{sen} x, \cos x\right)$.

Observación 8.4

$\mathcal{R}$ es impar respecto al coseno, hacer $\boxed{t = \operatorname{sen} x}$.

Ejemplo 8.3

Calcule $I = \displaystyle\int \frac{\cos x(1+\cos^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x}\,\mathrm{d}x$.

Solución. Identificamos la expresión "racional de senos y cosenos"

$$\boxed{\mathcal{R}(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{\cos x(1+\cos^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x}}.$$

Pero,

$$\mathcal{R}(\operatorname{sen} x, -\cos x) = \frac{(-\cos x)(1+(-\cos x)^2)}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x} = -\frac{\cos x(1+\cos^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x} = -\mathcal{R}(\operatorname{sen} x, \cos x).$$

Esto es, $\mathcal{R}$ es impar respecto al coseno. Realizamos la sustitución:

$$\boxed{t = \operatorname{sen} x \qquad \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x}$$

$$\begin{aligned}
I = \int \frac{\cos x(1+\cos^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+(1-\operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x(1+\operatorname{sen}^2 x)}\cos x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1+(1-t^2)}{t^2(1+t^2)}\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{2-t^2}{t^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{2}{t^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t - \int \frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int \frac{1}{t^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t - \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} - 3\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= -\frac{2}{t} - 3\arctan t + C: \\
&= -\frac{2}{\operatorname{sen} x} - 3\arctan(\operatorname{sen} x) + C:
\end{aligned}$$

■

Observación 8.5

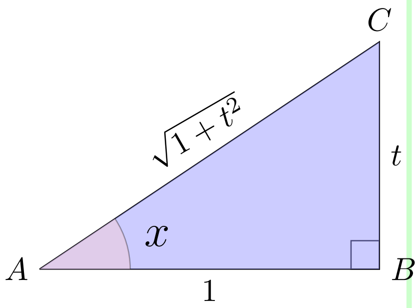
(c) Cuando $\mathcal{R}(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = -\mathcal{R}(\operatorname{sen} x, \cos x)$.

Observación 8.6

$\mathcal{R}$ es impar respecto al seno y coseno, hacer $\boxed{t = \tan x}$.

Ejemplo 8.4

Calcule $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x \cos x + 1}$.



Solución. Identificamos la expresión "racional de senos y cosenos"

$$\boxed{\mathcal{R}(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x + 1}}.$$

Pero,

$$\mathcal{R}(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = \frac{1}{(-\operatorname{sen} x)(-\cos x) + 1} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x + 1} = \mathcal{R}(\operatorname{sen} x, \cos x).$$

Esto es, $\mathcal{R}$ es impar respecto al seno y coseno. Realizamos la sustitución:

$$\boxed{t = \tan x \iff x = \arctan t \longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}$$

$$\begin{aligned}
I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x \cos x + 1} = \int \frac{\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) + 1} &= \int \frac{\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{t}{\sqrt[\cancel{2}]{1+t^2}^{\,\cancel{2}}} + 1} \\
&= \int \frac{\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2} + 1} \\
&= \int \frac{\frac{\mathrm{d}t}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{t+1+t^2}{\cancel{1+t^2}}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C, \quad \text{C: constante} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\tan x + 1}{\sqrt{3}}\right) + C, \quad \text{C: constante}
\end{aligned}$$

■

Cálculo de variaciones

El "cálculo de variaciones", interpretado ampliamente, trata de problemas extremos que involucran funciones. Es análoga a la teoría de máximos y mínimos en el cálculo diferencial, pero con la complicación adicional de que las incógnitas no son simples números, sino funciones. Empezamos con algunas ilustraciones clásicas, planteando solo los problemas, y postergando sus soluciones hasta después de que se hayan explicado algunas técnicas. La notación tradicional es usada, en la que x e y son variables, x siendo "independiente" e y siendo "dependiente". Esto armonizará con muchos libros en el curso.

Ejemplo 8.5: Menor distancia entre dos puntos

Encontrar la ecuación de la mínima longitud de un arco unido por dos puntos en el plano. Sean los puntos (a, α) y (b, β), donde $a < b$. Sea el arco dado por una función continuamente diferenciable $y = y(x)$, donde $y(a) = \alpha$ e $y(b) = \beta$. La longitud de arco es dada por la integral $\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, \mathrm{d}x$. Aquí $y \in C^1[a, b]$. La solución, como sabemos, es una línea recta, este resultado será probado más tarde.

Ejemplo 8.6: Catenaria

Encuentre la función y en $C^1[a, b]$, satisfaciendo $y(a) = \alpha$ e $y(b) = \beta$, tal que la superficie de revolución obtenido por la rotación de la gráfica de y alrededor del eje X tenga la mínima área. Para resolver esto, uno empieza

$$\int_a^b 2\pi y(x)\, \mathrm{d}s = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, \mathrm{d}x$$

La solución resulta ser (en muchos casos) una catenaria, como será mostrado después. La figura

Ejemplo 8.7: Problema de la Braquistócrona

En el plano vertical, con la gravedad ejerciendo una fuera hacia abajo, imaginamos una partícula deslizándose sin fricción a lo largo de una curva unidos por dos puntos, digamos $(0, 0)$ y (b, β). No hay pérdida de generalidad en tomar $b > 0$, y si la dirección positiva del eje y es hacia abajo, entonces $\beta > 0$ también.Pedimos la curva a lo largo de la cual la partícula caería en el menor tiempo. Si la curva es la gráfica de la función y en $C^1[0, b]$, entonces el tiempo de descenso es

$$\int_0^b \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy(x)}}\, \mathrm{d}x$$

será mostrado después. En la integral, g es la aceleración debido a la gravedad. Este problema es el "Problema de la Braquistócrona", propuesta como un desafío por John Bernoulli in 1696. La figura , correspondientes a dos elecciones en el punto terminal (b, β). Ambas curvas son cicloides, una es subconjunto de la otra.

En 1696, Isaac Newton acababa de convertirse recientemente en el Guardián de la Casa de la Moneda y estaba en medio de supervisar una masiva recolección. Sin embargo, cuando el escuchó sobre el problema, no pudo dormir hasta que él lo resuelva, y una vez que obtuvo la respuesta, publicó la solución anónimamente. Bernoulli, sin embargo, supo enseguida que el autor de la solución era Newton, y en una famosa observación él "reconoció al León por la huella de su pata"
Los tres ejemplos dados con anterioridad tiene una forma en común, por lo tanto, en cada una hay una función lineal que fue minimizada, y tiene la forma

$$\int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, \mathrm{d}x$$

La función desconocida y es requerida para satisface las condiciones de los puntos terminales $y(a) = \alpha$ e $y(b) = \beta$. Es más, algunas condiciones de suavidad deben ser impuestas en y, dada que la funcional es permitida involucrar y'. El primer teorema establece una condición necesaria para extremos, conocida como la ecuación de Euler o la "Ecuación de Euler-Lagrange".

Teorema 8.1: La Ecuación de Euler

Sea F una aplicación de $\mathbb{R}^3$ hacia $\mathbb{R}^1$, que poseen derivadas parciales continuos por tramos del segundo orden. Para que una función y en $C^1[a, b]$ minimiza $\int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, \mathrm{d}x$ sujeto a las restricciones $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$, es necesario que la ecuación de Euler tome:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_3(x, y(x), y'(x)) = F_2(x, y(x), y'(x)) \qquad \text{Donde } F_2 \text{ y } F_3 \text{ son derivadas parciales}$$

Teorema 8.2

Suponga que $y_1, \ldots, y_n$ son funciones (de t) en $C^2[a, b]$ que minimiza la integral

$$\int_a^b F(y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\,\mathrm{d}t$$

sujeto a las restricciones de los puntos terminales que prescribe valores para todos $y_i(a), y_i(b)$. Entonces las Ecuaciones de Euler toma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

Observación 8.7: Problema de la geodésica

Encontrar el arco más pequeño situado sobre una superficie dada y unidos por dos puntos en la superficie. Sea la superficie definida por $z = z(x, y)$. Sean los dos puntos (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1). La longitud de arco es

$$\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_1,y_1,z_1)} \mathrm{d}s = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_1,y_1,z_1)} \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$$

Si la curva es dada paramétricamente como $x = x(t), y = y(t), z = z(x(t), y(t), 0 \leq t \leq 1$, entonces nuestro problema es minimizar

$$\int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2 + (z_x x' + z_y y')^2}\,\mathrm{d}t$$

sujeto a $x \in C^2[0,1], y \in C^2[0,1], x(0) = x_0, x(1) = x_1, y(0) = y_0, y(1) = y_1$.

Ejemplo 8.8: Geodésica en un cilindro

Buscamos la geodésica en un cilindro. Sea la superficie de un cilindro $x^2 + z^2 = 1$, o $z = (1 - x^2)^{1/2}$ (mitad superior del cilindro).
En la teoría general, $F(x, y, x', y') = \sqrt{x'^2 + y'^2 + (z_x x' + z_y y')^2}$. En el caso particular que:

$$F = \left[x'^2 + x'^2\right]^{1/2} = \left[x'^2 + y'^2\right]$$

Capítulo 5

El logaritmo y la exponencial

La tendencia en los últimos años ha sido la introducción de las funciones logaritmo y exponencial más temprano en cursos de cálculo diferencial de lo que se había acostumbrado en décadas anteriores. La motivación para esto viene de querer hacer estas funciones altamente útiles disponibles para el uso en ejemplos y aplicaciones tan pronto como sea posible. Esta situación se ha traducido en una situación ligeramente vergonzosa: estas funciones se introducen y utilizan antes de que se hayan definido rigurosamente. Se les pide a los estudiantes que crean afirmaciones sobre la existencia y continuidad de estas funciones, y los límites relacionados, sobre la base de argumentos de plausibilidad.
En este capítulo definiremos las funciones logaritmo, exponencial y las funciones trigonométricas. Pedimos pruebas rigurosas de sus propiedades, bien conocidas de su curso de cálculo diferencial y se utilizan rutinariamente a través del cálculo. La sección puede ser cubierta ligeramente en clase, asignada como un proyecto de lectura independiente, u omitida completamente. No hay ningún ejercicio establecido en esta sección; en su lugar, se le pedirá que rellene las pruebas de los resultados declarados, pero no se demostró en el texto. Seguramente está familiarizado con la definición de e^x como la inversa de la función $\ln x$, que se define en cursos de cálculo elemental por una integral. Pero puede que no esté familiarizado con la definición de $\operatorname{sen} x$ como la inversa de una función definida por una integral. De hecho, puede estar intrigado por el hecho de que en los cursos de cálculo diferencial parece que aceptamos la función trigonométrica sin definición. Es decir, parece que asumimos que están definidos en algún lugar fuera del cálculo. Estamos a punto de remediar esta situación.

5.1. La función logaritmo natural

En esta sección se muestra que, además de proporcionar definiciones de las funciones logarítmicas y exponenciales, la integral de Riemann nos permite dar definiciones de las funciones trigonométricas. Utilizaremos la integral para definir estas funciones y esbozar las pruebas de sus propiedades fundamentales. Llamamos a estas funciones "trascendentales", porque sus valores no pueden ser calculados como raíces de ecuaciones polinómicas con coeficientes racionales.

Definición 1.1: Función logaritmo natural

La función **logaritmo natural** $\ln x\colon\ (0,\infty) \to \mathbb{R}$ se define por

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad (\text{para } x > 0).$$

Observación 1.1

(a) $\ln x$ existe para todo $x > 0$.

(b) $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$; $\ln x = 0$ si $x = 1$; $\ln x > 0$ si $x > 1$.

(c) $\ln x$ es continua y estrictamente creciente en $(0,\infty)$.

(d) $\ln x$ es diferenciable en $(0,\infty)$ y $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \dfrac{1}{x}$.

(e) Se integra la función $f(t) = \dfrac{1}{t}$.

* Si $x > 1$: $A(\mathcal{R}) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x) - \ln(1)$.
* Si $x < 1$: $A(\mathcal{R}) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} = -\int_1^x \frac{dt}{t} = -\ln(x)$

Teorema 1.1: Leyes de logaritmos

$\forall x, y \in (0, +\infty)$, y $\forall n \in \mathbb{N}$,

(a) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

(b) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$.

(c) $\ln(x^n) = n \ln x$.

(d) $\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x$.

(e) $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$.

(f) $\ln(x^r) = r \ln x, \forall x \in \mathbb{Q}$.

Demostración de (a): Sea $y > 0$ fijo. Por el teorema **??**, $\forall x > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x},$$

y por la regla de la cadena,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(xy) = \frac{1}{xy} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy) = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}.$$

Dado que $\ln x$ y $\ln(xy)$ tienen la misma derivada, ellas deben diferenciarse por una constante. Esto es, $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x > 0, \ln(xy) = \ln x + C. \tag{5.1}$$

Tomando $x = 1$, encontramos que $\ln y = C$. Conectando este resultado dentro de **??**, tenemos $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. ■

Demostración de (f): Sea $r \in \mathbb{Q}$ fijo. Por la regla de la cadena, $\forall x > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x^r) = \frac{1}{x^r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r) = \frac{1}{x^r} \cdot r x^{r-1} = \frac{r}{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} r \ln x.$$

Dado que $\ln(x^r)$ y $r \ln x$ tienen la misma derivada, ellas deben diferir por una constante. Esto es, $\exists C \in \mathcal{R}$ tal que

$$\ln(x^r) = r \ln x + C. \tag{5.2}$$

Tomando $x = 1$, encontramos que $0 = C$. Conectando con **??**, tenemos $\ln(x^r) = r \ln x$. ■

Observación 1.2: El número e

En cálculo, definimos e como el número que satisface la ecuación $\ln x = 1$.

En cursos de cálculo usualmente justificamos la existencia de este número apelando al teorema del valor intermedio. Dado que $\ln x$ es continua en $(0, \infty)$, y el $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, y $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, concluimos del teorema del valor intermedio que debe existir un número real x tal que $\ln x = 1$. Para justificar la unicidad de tal número, observamos que $\ln x$ es estrictamente creciente, así que debe ser $1-1$ (inyectiva). Sin embargo, no podemos tomar este enfoque aquí. Esto se debe a que ya hemos definido e por un procedimiento diferente en cálculo diferencial. Eso es lo que hacemos a continuación.

Teorema 1.2

$\ln e = 1$, donde $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ de la definición en cálculo diferencial.

Demostración. Por la definición de e, $\ln e = \ln \left[\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right]$. La función $\ln x$ es continua en $(0, +\infty)$, por lo tanto es continua en e. La sucesión $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ converge a e. Así, por el criterio de sucesiones para continuidad implica que $\ln \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \to e$. Esto es,

$$\begin{aligned}
\ln e &= \lim_{n\to\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Ahora, por la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x}{x+1} \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el criterio de sucesiones para límites de funciones al ∞

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1. \tag{5.3}$$

Conectando el resultado **??** en **??**, tenemos $\ln e = 1$. ∎

Corolario

(a) $\forall r \in \mathbb{Q}, \ln(e^r) = r$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$;

(d) El rango de $\ln\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es $\mathbb{R}$; el gráfico es como se muestra en la figura **??**.

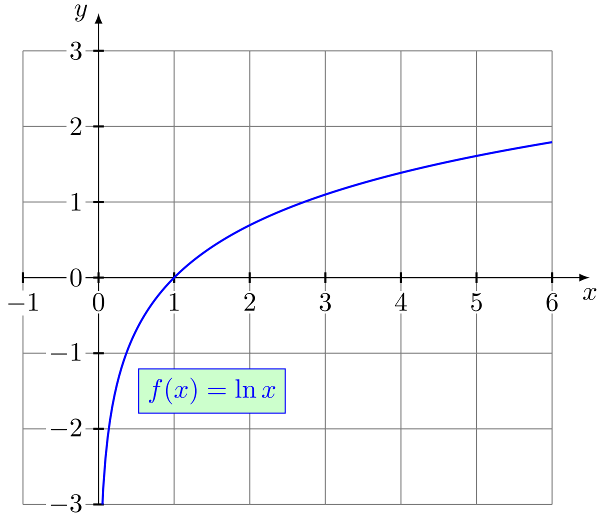


Figura 5.1: Función logaritmo natural

5.1.1. Derivadas e integrales

5.1.2. Logaritmo en otras bases

5.2. La función exponencial

Definición 2.1: La función $\exp(x)$

Dada la función $\ln\colon\ (0,\infty) \to \mathbb{R}$ es continua, estrictamente creciente, $1-1$ (inyectiva) y sobre. De cálculo diferencial conocemos el siguiente "*Teorema de la función inversa para funciones monótonas continuas*" que nos asegura que tiene una inversa $\ln^{-1}\colon \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ que es continua, estrictamente creciente, $1-1$ y sobre. Denotaremos la inversa (temporalmente) por

$$\mathbf{exp(x)} = \ln^{-1} x.$$

Esto es, $y = \exp(x)$ si y solo si $x = \ln y$.

Teorema 2.1: Teorema de la función inversa para funciones monótonas continuas

Suponga que I es un intervalo no vacío y $f\colon I \to \mathbb{R}$ es continua y estrictamente monótona. Entonces $f^{-1}\colon\ f(I) \to I$ es continua y estrictamente monótona en el mismo sentido. ¡($f(I)$ es un intervalo)!

Demostración. Supongamos que I es un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$ es continua y estrictamente creciente. Entonces $f\colon I \to f(I)$ es una correspondencia $1-1$ y por lo tanto tiene inversa, $f^{-1}\colon\ f(I) \to I$, cual es también $1-1$ y sobre. Por otro lema de cálculo diferencial, f^{-1} es estrictamente creciente en $f(I)$. Por lo tanto, por el teorema que versa: si f es monótona en un intervalo y su imagen es un intervalo, entonces f es continua; $f^{-1}\colon\ f(I) \to I$ es continua en $f(I)$. ∎

Observación 2.1

(a)

$$\begin{aligned} \exp x &> 1, \text{ si } x > 0. \\ \exp x &= 1, \text{ si } x = 0. \\ 0 < \exp x &< 1, \text{ si } x < 0. \end{aligned}$$

(b) $\forall r \in \mathbb{Q}, \exp(r) = e^r$.

(c) Para cualquier sucesión $\{r_n\}$ de números racionales que convergen a x, $\exp(x) = \text{lím}_{n\to\infty} \exp(r_n) = \text{lím}_{n\to\infty} e^{r_n}$.

Definición 2.2: La función e^x

Ahora llegamos al problema de definir e^x, para números reales arbitrarios x (en particular, para números irracionales x) de tal manera que nuestra definición sea consistente con las definiciones previamente acordadas.
Extendemos esto a todos los números reales x definiendo

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \exp(x).$$

Como hemos señalado anteriormente, para cualquier número racional r, $e^r = \exp(r)$. Por lo tanto, e^x y $\exp(x)$ son continuas en todas partes en $\mathbb{R}$ y como $\mathbb{Q}$ es un conjunto denso allí, es decir, de acuerdo al teorema de "Cálculo diferencial". Independientemente de si estudiamos o no el teorema en mención, vemos que la función e^x y $\exp(x)$ son idénticas. Por consiguiente, ya no utilizaremos la notación $\exp(x)$; usaremos exclusivamente e^x.

Teorema 2.2: Densidad de conjuntos

Supongamos que f y g son continuas en un conjunto A y $f(x) = g(x)$ para todo x en un subconjunto denso de A. Probar que $f(x) = g(x)$ para todo x en A.

5.2.1. Derivadas e integrales

Teorema 2.3

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}, \quad x > 0.$$

(1) $\ln(1) = \displaystyle\int_1^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0$.

(2) Se tiene que probar que

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \quad a > 0, b > 0.$$

Prueba. Sea $f(x) = \ln(ax)$, derivando $f'(x) = \dfrac{1}{ax} \cdot a = \dfrac{1}{x}$ donde $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \dfrac{1}{x}$,
entonces $f(x) = \ln(x) + C$, C: constante (Por teorema de cálculo diferencial).
Reemplazando:

$$\ln(ax) = \ln x + C$$

tomando $x = 1$:

$$\ln(a \cdot 1) = \ln(1) + C$$

$$\ln(a) = 0 + C \implies c = \ln(a)$$

Así, $\ln(ax) = \ln x + \ln a$ haciendo $x = b$:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

■

(3) $\ln(a^n) = n\ln(a), n \in \mathbb{N}$ Demostración por inducción.

(4) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

Definición 2.3: Número e

Se define un número e tal que se cumple:

$$1 = \ln e = \int_1^e \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Teorema 2.4

Probar que:

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}.$$

Demostración. Se sabe que $D_x = \ln x = \frac{1}{x}, x > 0 \implies \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h) - h(x)}{h} = \frac{1}{x}$.
Para $x = 1$, se define:

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} \\
1 &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\ln\left(\frac{1+h}{1}\right) \\
1 &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\ln(1+h) \\
1 &= \lim_{h\to 0}\ln(1+h)^{1/h} \\
1 &= \ln\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}\right)
\end{aligned}$$

entonces

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$$

■

Además

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t < 1(2-1) = 1 = \ln(e) = \left.\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right|_1^1 \tag{5.4}$$

Una suma superior para una partición $\{1,2\}$ de $[1,2]$.
Una suma inferior para una partición $\{1,2,4\}$ de $[1,4]$ se tiene

$$\frac{1}{2}(2-1) + \frac{1}{4}(4-2) < \int_1^4 \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

esto es,

$$1 < \int_1^4 \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

entonces

$$1 = \ln(e) = \int_1^e \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t < \int_1^4 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \tag{5.5}$$

De (**??**) y (**??**)

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t < \int_1^e \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t < \int_1^4 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

entonces $2 < e < 4$. Como la función $\ln$ es creciente en todo $\mathbb{R}$, entonces la función $\ln$ es inyectiva. De esto, la función $\ln$ tiene una función inversa.

Definición 2.4: Función exponencial

Se define la función exponencial $\exp$ como la función inversa de la función logaritmo.

$$\exp(x) = \ln^{-1}(x)$$

1 dom $(\exp) =$ Ran $(\ln) = \mathbb{R}$.

2 Ran $(\exp) =$ Dom $(\ln) = (0, \infty)$.

3 $\exp(\ln(x)) = x, x > 0$.

4 $\ln(\exp(x)) = x, x \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.5: Propiedad

$$\boxed{D_x(\exp(x)) = \exp(x)}$$

Demostración. Aplicando el teorema de la función inversa para derivadas,

$$\begin{aligned} D_x\underbrace{(\exp(x))}_{f} &= \frac{1}{D_x(\ln(x))|_f} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)\big|_{x=f}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} \\ &= \exp(x). \end{aligned}$$

De esto

$$\int \exp(x)\,\mathrm{d}x = \exp(x) + C.$$

Como $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\exp(x)) = \exp(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces la función $\exp$ es creciente en $\mathbb{R}$. ■

Teorema 2.6: Propiedad

$$\exp(a+b) = \exp(a)\cdot\exp(b)$$

Demostración. Sea

$$x = \exp(a) \quad \text{entonces} \quad a = \ln(x).$$
$$y = \exp(b) \quad \text{entonces} \quad b = \ln(y).$$

Luego $\exp(a+b) = \exp(\ln(x)+\ln(y)) = \exp(\ln(x\cdot y)) = x\cdot y = \exp(a)\cdot\exp(b)$ ∎

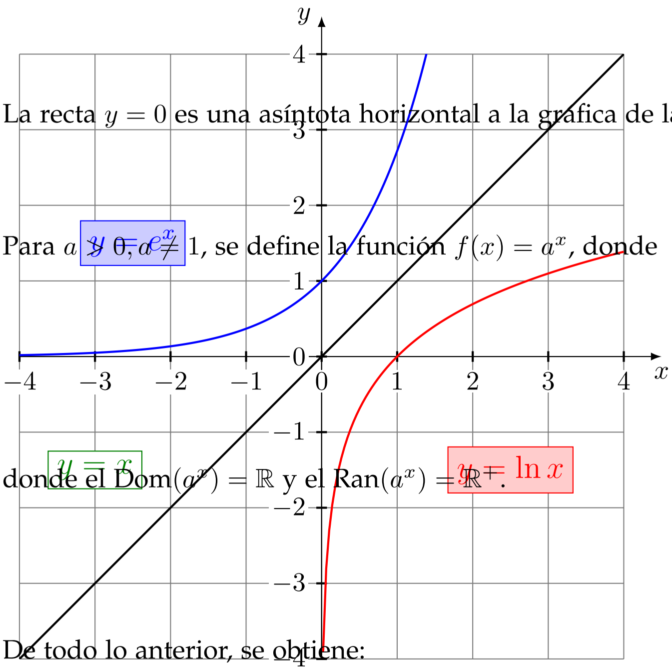
Como se definió la cantidad e como $1 = \ln(e)$, entonces $\exp(e) = 1$, de esto

$$\begin{aligned}
\exp(r) &= \exp(\underbrace{1+1+1\cdots+1+1}_{\text{´}r\text{˘ veces}}) \\
&= (\underbrace{\exp(1)\cdot\exp(1)\exp(1)\cdots\exp(1)\cdot\exp(1)}_{\text{´}r\text{˘ veces}}) \\
&= \exp(1)^r \\
&= e^r, \quad r\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

de esto, se extiende a

$$\boxed{\exp(x) = e^x, x\in\mathbb{R}}$$

5.3. Gráfica de la función exponencial



De esto se observa que:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^x = 0}.$$

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal a la gráfica de las funciones exp.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty}$$

Para $a > 0, a \neq 1$, se define la función $f(x) = a^x$, donde

$$\begin{aligned}
a^x &= \exp\left(\ln(a^x)\right) \\
&= \exp\left(x\ln(a)\right) \\
a^x &= e^{x\ln a}
\end{aligned}$$

donde el $\mathrm{Dom}(a^x) = \mathbb{R}$ y el $\mathrm{Ran}(a^x) = \mathbb{R}^+$.

De todo lo anterior, se obtiene:

$$\boxed{\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C, \text{ C: constante }.}$$

$$\boxed{\int_a^b e^x\,\mathrm{d}x = e^b - e^a.}$$

$$\boxed{\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\cdot a^x + C, \text{ C: constante }.}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = \ln(a)\cdot a^x.}$$

Ejemplo 3.1: Ejemplos

(1) $\displaystyle\int 3^x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(3)} 3^x + C, \text{ C: constante}$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5^x) = \ln(5)5^x.$

Ejemplo 3.2: Ejemplo:

Veamos que:

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

(1) $2^x = e^{x \ln 2}$

(2) $3^{-x} = e^{-x \ln 3}$

(3) Gráfica.

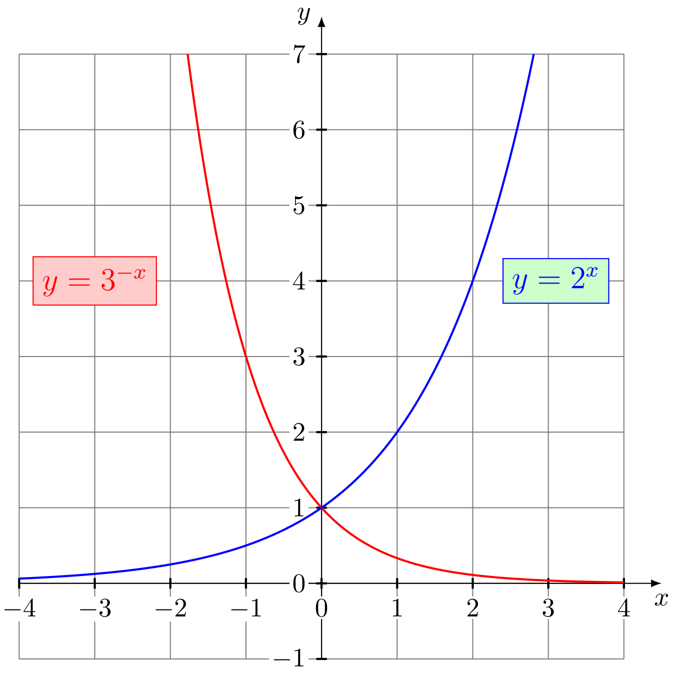


Figura 5.2: Funciones 2^x y 3^{-x}

Observación 3.1: Sobre la función a^x

Se tiene que f es creciente para $a > 0$, pero decreciente para $a \in [0, 1]^o$.

5.3.1. Función exponencial generalizada

Definición 3.1: Función exponencial generalizada

Dadas las funciones $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, se define la función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = h(x)^{g(x)} \tag{5.6}$$

la cual equivale a

$$f(x) = e^{g(x)\ln(h(x))} \tag{5.7}$$

Ejemplo 3.3

Sea $f(x) = (x^2+1)^{\operatorname{sen} x}$, de la definición anterior: $f(x)$ es equivalente a $f(x) = e^{\operatorname{sen} x \ln(x^2+1)}$.

Teorema 3.1

Derivando $f(x) = h(x)^{g(x)}, h(x) > 0, \forall x \in$ Dom (h); se tiene

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{g(x)\ln(h(x))}\right) = e^{g(x)\ln(h(x))}\left[g'(x)\ln(h(x)) + \frac{g(x)}{h(x)}h'(x)\right]$$

f es integrable:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \text{ C: constante}$$

esto es:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[h(x)^{g(x)}\right] = h(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x)\ln(h(x)) + \frac{g(x)}{h(x)}h'(x)\right]}$$

Ejemplo 3.4

Sea $f(x) = (3x^2+2)^{\cos x}$, entonces

$$f'(x) = (3x^2+2)^{\cos x} \cdot \left[-\operatorname{sen} x \ln(3x^2+2) + \frac{6x\cos x}{(3x^2+2)}\right].$$

Teorema 3.2

Se tiene:

$$\boxed{\int h(x)^{g(x)}\left[g'(x)h(x) + \frac{g(x)h'(x)}{h(x)}\right]\mathrm{d}x = h(x)^{g(x)} + C, \text{ C: constante}}$$

Ejemplo 3.5

$$\int (4x^2+1)^{\operatorname{sen} x}\left[\cos x(4x^2+1) + \frac{\operatorname{sen} x(8x)}{4x^2+1}\right]\mathrm{d}x = (4x^2+1)^{\operatorname{sen} x} + C, \text{ C: constante}.$$

5.4. Función logaritmo en otra base

A partir de la función $f(x) = a^x, a > 0, x \in \mathbb{R}$. Se define la "función logaritmo en base a" denotado por $\log_a x$ como la función inversa de f, esto es

$$\boxed{\log_a x = f^{-1}(x)},$$

Teorema 4.1

Prueba. De lo anterior, aplicando el teorema de la función inversa para derivadas,

$$\begin{aligned}
D_x[\underbrace{\log_a x}_{f}] &= \frac{1}{D_x\,(a^x)|_{x=f}} \\
&= \frac{1}{a^x \ln(a)|_{x=f}} \\
&= \frac{1}{\cancel{a}^{\cancel{\log_a} x} \ln a} \\
\rightarrow D_x\,[\log_a x] &= \frac{1}{x \ln a}
\end{aligned}$$

Así, $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln a} = \log_a x + C,$ C: constante . ■

Ejemplo 4.1

(1) $D_x\,(\log_3 x) = \dfrac{1}{(\ln 3)x}$.

(2) $D_x\,\big(\log_4(5x^2+7)\big) = \dfrac{10x}{(\ln 4)(5x^2+7)}$

(3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\ln 5)x} = \log_5 x + C,$ C: constante

En resumen:

$$y = a^x \iff x = \log_a y$$

Ejemplo 4.2

$y = 2^x \iff x = \log_2 y$. ¿Cuál es la gráfica de $\log_a x$?

(1) $a > 1$.

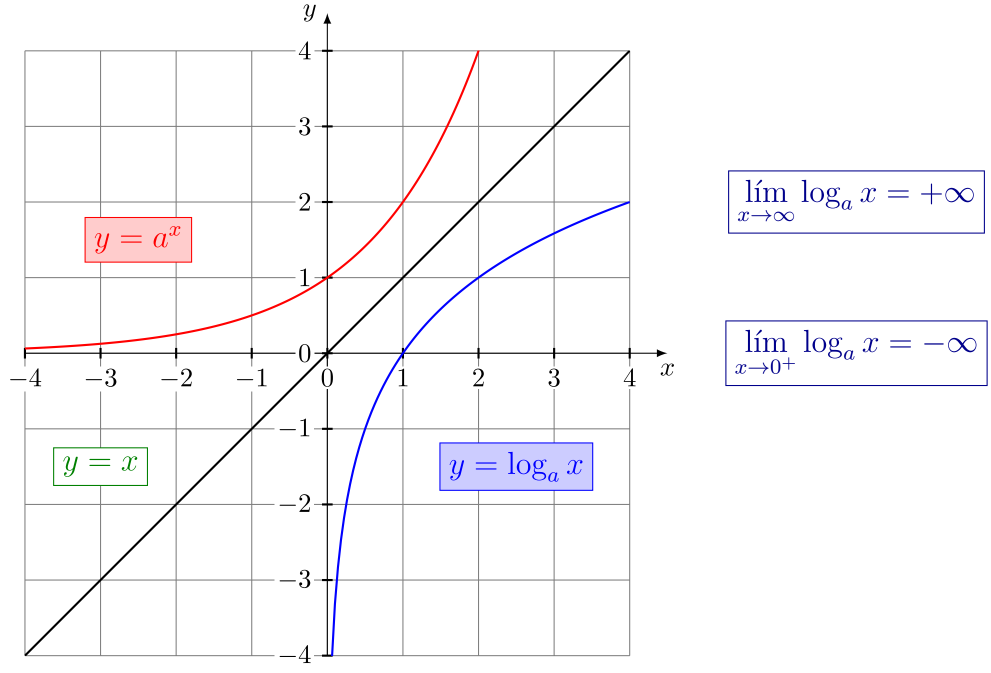


Figura 5.3: F

(II) $0 < a < 1$.

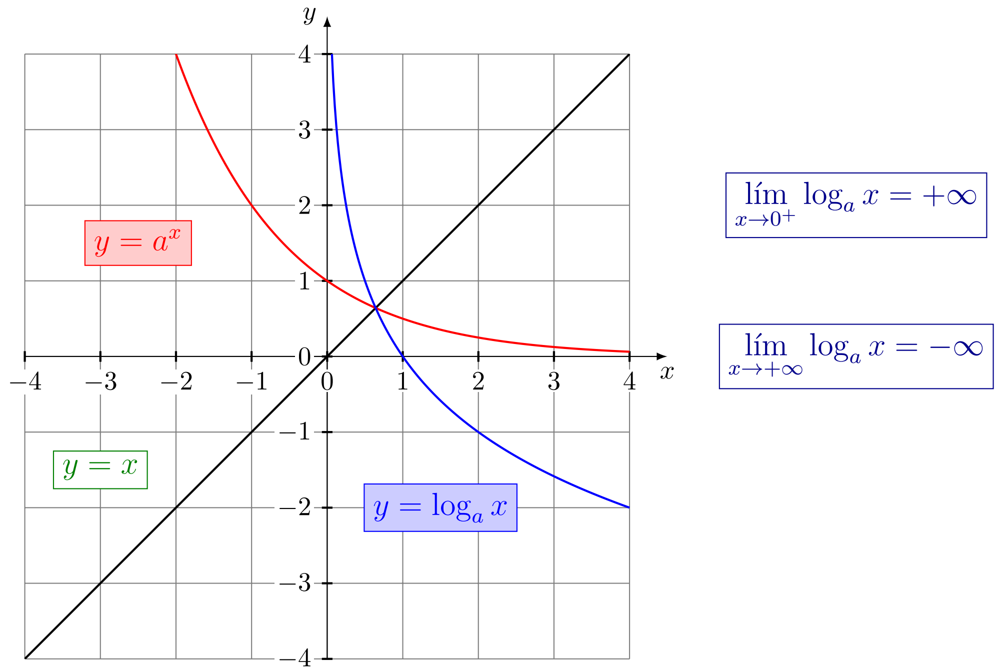


Figura 5.4: F

5.5. Diferenciación logarítmica

Se emplea cuando la regla a derivar está conformada por varios productos y/o cocientes.

$$f(x) = \frac{\prod_{i=1}^{m} u_i(x)}{\prod_{i=1}^{n} v_i(x)} = \frac{u_1(x)u_2(x)\ldots u_m(x)}{v_1(x)v_2(x)\ldots v_n(x)}$$

Determinar $f'(x)$.
Se siguen los siguientes pasos:

1) Tomar el valor absoluto de $f(x)$.

$$|f(x)| = \left|\frac{\prod_{i=1}^{m} u_i(x)}{\prod_{i=1}^{n} v_i(x)}\right| = \frac{|\prod_{i=1}^{m} u_i(x)|}{|\prod_{i=1}^{n} v_i(x)|} = \frac{\prod_{i=1}^{m} |u_i(x)|}{\prod_{i=1}^{n} |v_i(x)|} = \frac{|u_1(x)||u_2(x)|\ldots|u_m(x)|}{|v_1(x)|v_2(x)|\ldots|v_n(x)|}$$

2) Tomando $\ln$:

$$\begin{aligned}
\ln|f(x)| &= \ln\left(\frac{|u_1(x)||u_2(x)|\ldots|u_m(x)|}{|v_1(x)|v_2(x)|\ldots|v_n(x)|}\right)\\
&= \ln\left(|u_1(x)||u_2(x)|\ldots|u_m(x)|\right) - \ln\left(|v_1(x)|v_2(x)|\ldots|v_n(x)|\right)\\
&= \sum_{k=1}^{m}\ln|u_k(x)| - \sum_{k=1}^{n}\ln|v_k(x)|
\end{aligned}$$

3) Derivando con respecto, aplicando $D_x\left(\ln(|f(x)|)\right) = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| = \frac{|f'(x)|}{|f(x)|}$.

$$\begin{aligned}
D_x\left(\ln|f(x)|\right) &= D_x\left(\sum_{k=1}^{m}\ln|u_k(x)| - \sum_{k=1}^{n}\ln|v_k(x)|\right)\\
&= D_x\left(\sum_{k=1}^{m}\ln|u_k(x)|\right) - D_x\left(\sum_{k=1}^{n}\ln|v_k(x)|\right)\\
&= \sum_{k=1}^{m} D_x\left(\ln|u_k(x)|\right) - \sum_{k=1}^{n} D_x\left(\ln|v_k(x)|\right)\\
&= \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{|u'(x)|}{|u(x)|}\right] - \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{|v'(x)|}{|v(x)|}\right]
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\boxed{f'(x) = f(x)\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{|u'(x)|}{|u(x)|} - \sum_{k=1}^{n}\frac{|v'(x)|}{|v(x)|}\right].}$$

Ejemplo 5.1

Derivar:

$$f(x) = \frac{(x^2+5)(x^4+7)}{(3x^2+5x+1)(4x^2+7x-1)}.$$

Solución. Aplicando derivación logarítmica:

$$f'(x) = \frac{(x^2+5)(x^4+7)}{(3x^2+5x+1)(4x^2+7x-1)}\left[\frac{2x}{x^2+5} + \frac{4x^3}{x^4+7} - \frac{6x+5}{3x^2+5x+1} - \frac{8x+7}{4x^2+7x-1}\right]$$

■

5.6. Funciones hiperbólicas directas e inversas

Las funciones hiperbólicas son una parametrización de la ecuación de la hipérbola en coordenadas cartesianas, a saber, $\mathcal{H}\colon \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. donde $a, b > 0$.

Observación 6.1

La ecuación cartesiana de la hipérbola equilátera

$$\mathcal{H}_1\colon \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$$

puede ser parametrizada por las funciones

$$x = f(u), \qquad y = g(u),$$

que satisfacen $f(u)^2 - g(u)^2 = 1$.
Una solución de la ecuación anterior es:

$$x = \frac{1}{2}\left[h(u) + \frac{1}{h(u)}\right], \qquad y = \frac{1}{2}\left[h(u) - \frac{1}{h(u)}\right]$$

En efecto, pues

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \left(\frac{1}{2}\left[h(u) + \frac{1}{h(u)}\right]\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\left[h(u) - \frac{1}{h(u)}\right]\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[\cancel{h^2} + \cancel{\frac{1}{h^2}} + 2 - \cancel{h^2} - \cancel{\frac{1}{h^2}} + 2\right] \\ &= 1. \end{aligned}$$

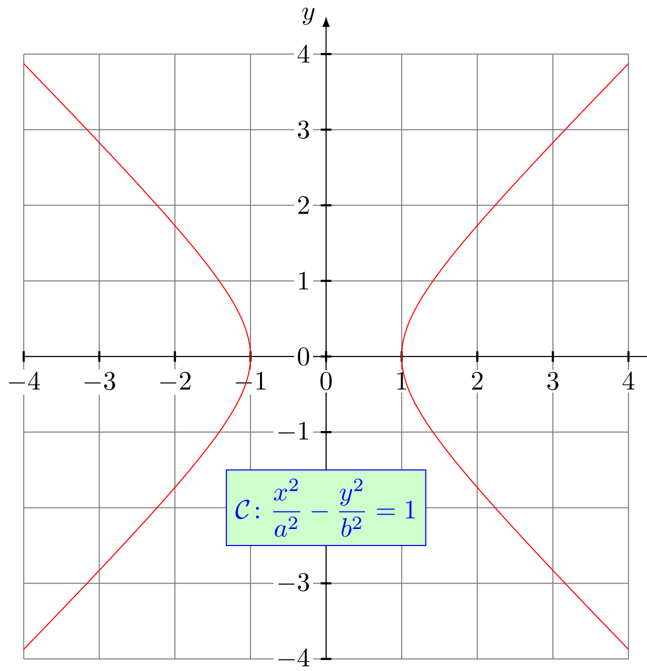


Figura 5.5: Gráfica de la hipérbola equilátera, donde $a = b = 1$.

La hipérbola $\mathcal{H}_1\colon \dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{1} = 1$ puede ser parametrizada por

$$x = \frac{1}{2}\left[h(u) + \frac{1}{h(u)}\right], \qquad y = \frac{1}{2}\left[h(u) - \frac{1}{h(u)}\right],$$

donde h es cualquier función continua no nula que satisface

$$\lim_{u\to\infty} h(u) = +\infty, \qquad \lim_{u\to-\infty} h(u) = 0, \qquad h(0) = 1.$$

Las funciones hiperbólicas corresponden a

$$h(u) = e^u.$$

A partir de la función exponencial se definen las siguientes funciones:

Definición 6.1: Funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico

Las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico se definen por:

$$\boxed{\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}}$$

La tangente hiperbólica, cotangente, secante y cosecante son definidas en términos de $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$:

1) **Tangente hiperbólico**

$$\boxed{\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}}{\cosh}, \text{ esto es } \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad x \in \mathbb{R}}$$

2) **Cotangente hiperbólico**

$$\boxed{\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)}, \quad x \neq 0.}$$

3) **Secante hiperbólico**

$$\boxed{\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}, \quad x \in \mathbb{R}}$$

4) **Cosecante hiperbólico**

$$\boxed{\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}, \quad x \neq 0}$$

Observación 6.2: Algunas propiedades de las funciones hiperbólicas

(1) $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$.

(2) $\operatorname{csch}^2(x) - \operatorname{sech}^2(x) = \operatorname{sech}^2(x)\operatorname{csch}^2(x)$.

(3) $\operatorname{senh}(x), \cosh(x)$ y $\tanh(x)$ son diferenciables.

(1) *(1).* De la definición de seno hiperbólico y coseno hiperbólico resulta:

$$\begin{aligned}
\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\left(\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}}\right) - (\cancel{e^{2x}} - 2 + \cancel{e^{2x}})}{4} \\
&= \frac{2+2}{4} = 1.
\end{aligned}$$

■

(2) *(2).* De la definición de cosecante hiperbólico y secante hiperbólico resulta:

$$\begin{aligned}
\operatorname{csch}^2(x) - \operatorname{sech}^2(x) &= \left(\frac{2}{e^x - e^{-x}}\right)^2 - \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2 \\
&= \frac{4}{e^{2x} - 2 + e^{2x}} - \frac{4}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} \\
&= \\
&=
\end{aligned}$$

■

(3) Ya que la función exponencial real es diferenciables, y las funciones $\operatorname{sen} h(x)$, $\cosh(x)$ y $\tanh(x)$ son combinaciones de la primera, entonces todas ellas son diferenciables.

Teorema 6.1: Propiedades relacionas con el argumento

1) $\operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh}(x)\cosh(x)$.

2) $\cosh(x) = \cosh^2(x) + \operatorname{senh}^2(x)$

3) $\operatorname{senh}^2(x) = \dfrac{1}{2}\left[\cosh(2x) - 1\right]$.

4) $\cosh^2(x) = \dfrac{1}{2}\left[\cosh(2x) + 1\right]$.

(1) *Demostración.*

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}(2x) &= \frac{1}{2}\left[e^{2x} - \frac{1}{e^{2x}}\right] && \text{definición de } \operatorname{senh}(2x)\\
&= \frac{1}{2}\left[(e^x)^2 - \left(\frac{1}{e^x}\right)^2\right] && \text{pues, } \forall x \in \mathbb{R}\colon x^{2a} = (x^a)^2\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)\right] && \text{por diferencia de cuadrados}\\
&= \frac{1}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\cosh(x)\right)\left(2\operatorname{senh}(x)\right)\\
&= 2\operatorname{senh}(x)\cosh(x)
\end{aligned}$$

■

(2) *Demostración.*

$$\begin{aligned}
\cosh(2x) &= \frac{1}{2}\left[e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}}\right] && \text{definición de } \cosh(2x)\\
&= \frac{1}{2}\left[(e^x)^2 + \left(\frac{1}{e^x}\right)^2\right] && \text{pues, } \forall x \in \mathbb{R}\colon x^{2a} = (x^a)^2\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)\right] && \text{por diferencia de cuadrados}\\
&=\\
&=
\end{aligned}$$

■

5.6.1. Derivadas e integrales

Además:

$$\begin{aligned}
D_x\left(\operatorname{senh}(x)\right) &= \cosh(x).\\
D_x\left(\cosh(x)\right) &= \operatorname{senh}(x).\\
D_x\left(\tanh(x)\right) &= \operatorname{sech}(x).
\end{aligned}$$

de esto:

$$\boxed{\int \cosh(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{senh}(x) + C,\ \text{C: constante}}$$

$$\boxed{\int \operatorname{senh}(x)\, \mathrm{d}x = \cosh(x) + C, \text{ C: constante}}$$

$$\boxed{\int \operatorname{sech}^2(x)\, \mathrm{d}x = \tanh(x) + C, \text{ C: constante}}$$

Observación 6.3: Ejercicio

Determine $D_x(\operatorname{sech}(x)), D_x(\coth(x)), D_x(\operatorname{csch}(x))$.

Estudiemos la función $\operatorname{senh}(x)$, calculando las dos primeras derivadas de $\operatorname{senh}(x)$ obtenemos:

$$\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x)$$
$$\operatorname{senh}''(x) = \operatorname{senh}(x)$$

Dado que la función $\cosh(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces $\operatorname{senh}(x)$ es estrictamente creciente. También, dado que $\operatorname{senh}''(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, por lo que el cambio de signo solo ocurrirá en valores de x para los cuales $\operatorname{senh}''(x) = 0$. Estos valores son soluciones de la ecuación:

$$\operatorname{senh}(x) = 0 \iff x = 0. \tag{5.8}$$

Para $x > 0, \operatorname{senh}''(x) > 0$, entonces la gráfica de la función es cóncava hacia arriba en $]0, +\infty[$.
Para $x < 0, \operatorname{senh}''(x) < 0$, entonces la gráfica de la función es cóncava hacia abajo.
De esto, la gráfica de $\operatorname{senh} x$ presenta un punto de inflexión $(0, 0)$. Así, la gráfica sería

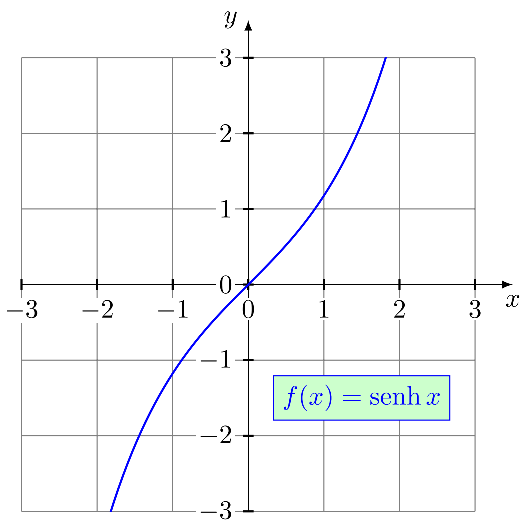


Figura 5.6: Función seno hiperbólico

Del gráfico se observa que la función senh es inyectiva, en consecuencia, existe la función inversa del $\operatorname{senh}(x)$ denominado "**función arcoseno hiperbólico**" denotado por "$\operatorname{arcsenh} x$"

$$\boxed{y = \operatorname{senh}(x) \iff x = \operatorname{arcsenh}(y)}$$

$$y = \operatorname{senh}(x) \iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ haciendo el cambio } y \text{ por } x \text{ se tiene}$$
$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \qquad y = \operatorname{senh}^{-1}(x).$$

se tiene que despejar y, para ello multiplicamos por e^y y se obtiene:

$$2xe^y = e^{2y} - 1$$

$$\implies (e^y)^2 - (2x)e^y - 1 = 0$$

es una ecuación cuadrática donde sus soluciones son según la fórmula general serían:

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1} \vee e^y = x - \sqrt{x^2+1}$$

se tomará como solución la siguiente:

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$$

esto es $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
Osea

$$\boxed{\operatorname{senh}^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$$

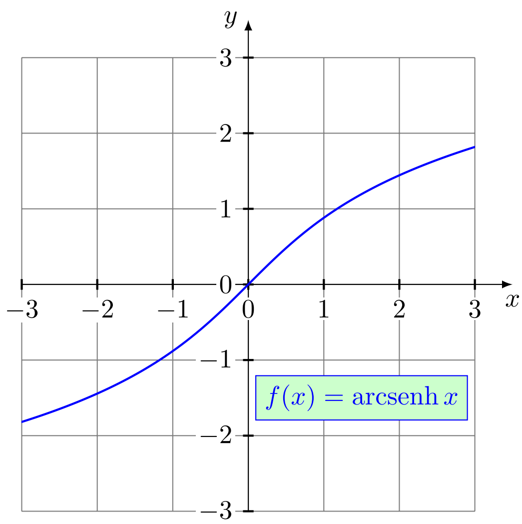


Figura 5.7: Función arcoseno hiperbólico

Ejemplo 6.1: Ejercicio

Realizar el estudio de la función $\cosh$.

De manera similar se obtiene

$$\cosh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \qquad x \geq 1.$$

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right), \qquad -1 < x < 1.$$

$$\operatorname{sech}^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\right), \qquad 0 < x \leq 1.$$

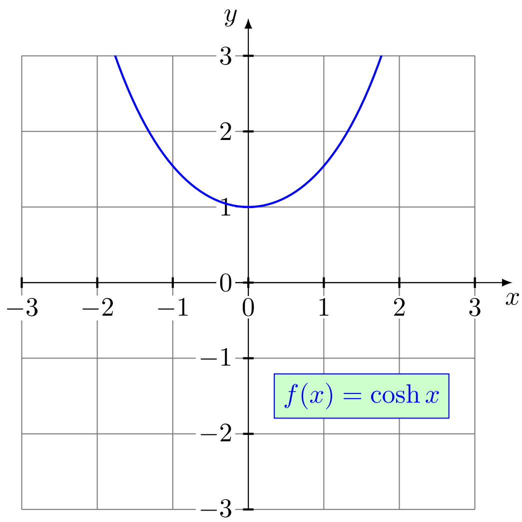


Figura 5.8: Función coseno hiperbólico

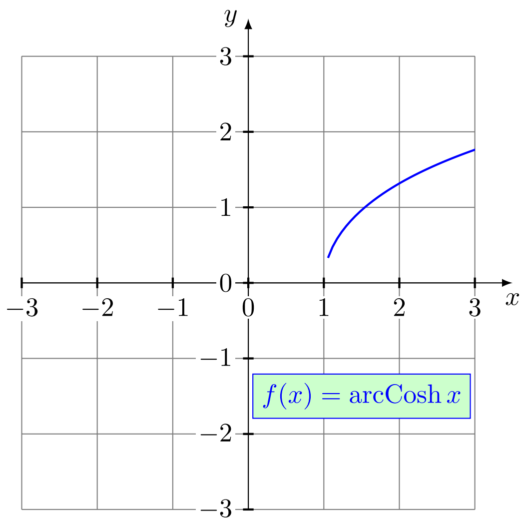


Figura 5.9: Función arcoseno hiperbólico

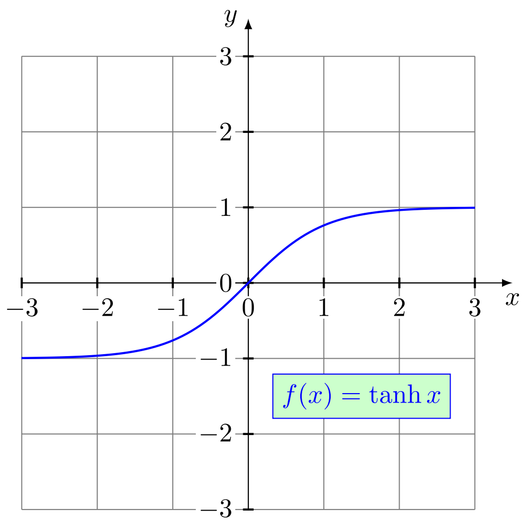


Figura 5.10: Función tangente hiperbólico

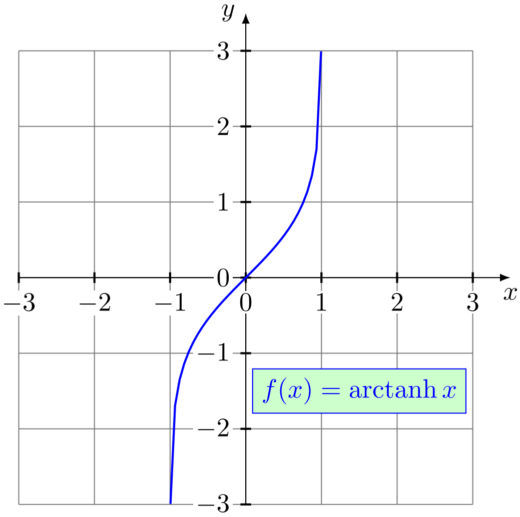


Figura 5.11: Función arcotangente hiperbólico

Asimismo se obtienen sus derivadas e integrales

$$\boxed{D_x\left(\operatorname{senh}^{-1}(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} \qquad \boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{senh}^{-1}(x) + C,\ \text{C: constante}}$$

$$\boxed{D_x\left(\cosh^{-1}(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}} \qquad \boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1}(x) + C,\ \text{C: constante}}$$

$$\boxed{D_x\left(\tanh^{-1}(x)\right) = \frac{1}{x^2-1}, -1 < x < 1} \qquad \boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = \tanh^{-1}(x) + C,\ \text{C: constante}}$$

Ejemplo 6.2

Probar que

$$\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh(x)-1}{\operatorname{senh}(x)}.$$

Solución. De la expresión de la derecha tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\cosh(x)-1}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1}{\frac{e^x-e^{-x}}{2}} &= \frac{\frac{e^x+e^{-x}-2}{\cancel{2}}}{\frac{e^x-e^{-x}}{\cancel{2}}} && \text{definición de } \cosh \text{ y } \operatorname{senh} \\
&= \frac{e^x+e^{-x}-2}{e^x-e^{-x}} && \text{expresión simplificada} \\
&= \frac{\left(e^{x/2}-e^{-x/2}\right)^{\cancel{2}}}{\left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right)\cancel{\left(e^{x/2}-e^{-x/2}\right)}} && \text{binomio al cuadrado y diferencia de cuadrados} \\
&= \frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{e^{x/2}+e^{-x/2}} && \text{expresión simplificada} \\
&= \tanh\left(\frac{x}{2}\right) && \text{definición de } \tanh
\end{aligned}$$

■

Observación 6.4

Lo enumeramos por referencia, si es posible no lo memorice. Las derivadas en las ecuaciones 1, 2 y 3 ofrece una opción para las antiderivadas, ya sea funciones inversas o logaritmos (la mayoría de las tablas prefieren logaritmos). En el apéndice A de los apuntes tiene

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right] +, \text{ C: constante (en lugar de } \arctan x +, \text{ C: constante)}$$

Observación 6.5

Los logaritmos no fueron vistos como $\arcsin x$, $\arctan x$ ni $\operatorname{arcsec} x$. Podrías preguntarte por qué. ¿Cómo sucede que $\arctan x$ se expresa mediante logaritmos cuando falta la fórmula paralela para $\arctan x$? Respuesta: *Debe haber una fórmula paralela*. Para mostrarlo, tengo que revelar un secreto que se ha ocultado a través de esta sección. El secreto es una de las grandes ecuaciones de las matemáticas. ***¿Qué fórmula para*** $\cos x$ ***y*** $\operatorname{sen} x$ ***le corresponde*** $\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$ ***y*** $\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$***?*** Con tantas analogías (circular versus hiperbólicas) debería esperar encontrar algo. Las fórmulas existen, pero ***ellas involucran números imaginarios***. Afortunadamente, son muy simples y no hay ninguna razón para retener la verdad por más tiempo.

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{ix}\right).$$

Son los exponentes imaginarios que mantuvieron esas identidades ocultas. Al multiplicar $\operatorname{sen} x$ por i y sumando a $\cos x$ se obtiene la increíblemente hermosa ecuación de Euler

$$\cos x + i \operatorname{sen} x = e^{ix}.$$

Eso es paralelo a la no hermosa ecuación hiperbólica $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$.
Debo decir que la ecuación 6 es infinitamente mucho más importante que cualquier ecuación hiperbólica que exista. Los senos y cosenos son más útiles que senh y cosh. Por lo tanto, terminaremos de grabar sus propiedades principales, con ejercicios que nos llevarán a sus aplicaciones.

5.6.2. A

Ahora dirigiremos nuestra atención al desarrollo riguroso de las funciones trigonométricas. Preferimos empezar definiendo las funciones seno y coseno porque sabemos que de ellas podemos derivar todas funciones trigonométricas restantes y sus interrelaciones. Podemos dar un enfoque con series de potencias, Tomemos la ventaja de la integral de Riemann, empezaremos con la función seno inverso y con estas base definiremos la función seno.

Definición 6.2: La función arcoseno

$$\operatorname{arc\,sen} x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad \text{para } -1 < x < 1.$$

Teorema 6.2

$\operatorname{arc\,sen}$ tiene las siguientes propiedades en $(-1,1)$:

(a) $\operatorname{arc\,sen} x$ es estrictamente creciente en $(-1,1)$.

(b) $\operatorname{arc\,sen} x$ es continua en $(-1,1)$.

(c) $\operatorname{arc\,sen} x$ es diferenciable en $(-1,1)$, y $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(d) $\operatorname{arc\,sen} x$ es una función impar en $(-1,1)$.

Observación 6.6

(a) $\operatorname{arc\,sen} x$ es un intervalo.

(b) $\operatorname{arc\,sen} x$ es acotada en $(-1,1)$

(c) Dado que $\operatorname{arc\,sen} x$ es continua, estrictamente creciente y acotada en $(-1,1)$, el corolario X nos asegura que podemos extender $\operatorname{arc\,sen} x$ a una función f en el intervalo cerrado $[-1,1]$, y

$$\operatorname{arc\,sen}[-1,1] = [c,d]$$

donde $c = \inf\{\operatorname{arc\,sen} x\colon -1 < x < 1\} = \lim_{x\to -1^+} \operatorname{arc\,sen} x = \lim_{x\to -1^+} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
y $d = \sup\{\operatorname{arc\,sen} x\colon -1 < x < 1\} = \lim_{x\to 1^-} \operatorname{arc\,sen} x = \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. como una función continua,

Definición 6.3: Definición de π

$$\begin{aligned}\pi &= 2\operatorname{arc\,sen} 1 = 2\sup\{\operatorname{arc\,sen} x\colon -1 < x < 1\}\\ &= 2\lim_{x\to 1^-} \operatorname{arc\,sen} x\\ &= 2\lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\end{aligned}$$

Definición 6.4: de $\operatorname{sen} x$, para $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Dado que $\operatorname{arc\,sen}\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y es $1-1$ y sobreyectiva, este tiene inversa, el cual llamaremos la función seno. Esto es,

$$\operatorname{sen}\colon \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1].$$

Observación 6.7

(a) Por la definición X, $\frac{\pi}{2} = \operatorname{arc\,sen} 1$, esto es, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$.

(b) Por el corolario X, $\operatorname{sen} x$ es continua y estrictamente creciente en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) $\operatorname{sen} x$ es una función impar en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. En realidad, la inversa de cualquier función impar invertible es impar.

Definición 6.5: de $\operatorname{sen} x$, para todos los números reales

(a) Para $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, definimos $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(x-\pi)$.
Note que cuando $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq x-\pi \leq \frac{\pi}{2}$, y que cuando $x = \frac{\pi}{2}$, ambos lados de la ecuación son lo mismo.

(b) La función $\operatorname{sen} x\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ es continua en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ y $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$, Así, por el ejercicio X, podemos extender la función $\operatorname{sen} x$ como una función que es continua y periódica en $\mathbb{R}$, con periodo $\frac{3\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$.

(c) Mostrar que $\operatorname{sen} x$ es una función impar en $\mathbb{R}$. [Primero muestre que es impar de $[-\pi, \pi]$, entonces muestre que es impar en $\mathbb{R}$.]

Observación 6.8: Diferenciabilidad de la función seno

La función seno es diferenciable en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^{\mathrm{o}}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{sen} x = \sqrt{1-x^2}$.

Prueba. La función $y = \operatorname{arc\,sen} x$ es diferenciable en $(-1, 1)$, y $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Así, por el teorema de la función inversa para funciones diferenciables X, la función $x = \operatorname{sen} y$ es diferenciable para cualquier $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \operatorname{sen} y = \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}.$$

■

Observación 6.9

La función seno es diferenciable en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, y $\forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{sen} x = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$.

Prueba. Aplicar la definición X y la regla de la cadena en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. ■

Observación 6.10

La función seno es diferenciable en $\frac{\pi}{2}$, y cuando $x = \frac{\pi}{2}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{sen} x = 0 = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$.

Prueba.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{sen} x &= \lim_{x\to\pi/2^-} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} \\
&= 0, \text{ por la continuidad de } \operatorname{sen} x \text{ en } \mathbb{R} \\
&= \lim_{x\to\pi/2^+} \left(-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}\right) \\
&= \lim_{x\to\pi/2^+} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema X y Y. ■

Observación 6.11

La función seno es diferenciable en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{sen} x = \begin{cases} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} & \text{si } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}.$$

Observación 6.12

La función seno es diferenciable en todas partes, y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sen} x = \begin{cases} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} & \text{si } x - 2n\pi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ para algún entero } n \\ -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} & \text{si } x - 2n\pi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \text{ para algún entero } n \end{cases}.$$

Prueba: Probar la diferenciabilidad en $-\frac{\pi}{2}$ y aplicar la periodicidad. Vea X. ■

Definición 6.6: Función coseno

(a) En $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definimos $\cos x$ por

$$\cos x = \begin{cases} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$

(b) Note que $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, y $\cos 0 = 1$.

(c) Para extender la función coseno periódicamente, con periodo 2π, de $(-\infty, +\infty)$, apelamos al ejercicio X.

(d) Note que la función coseno es una función par.

(e) Note que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Teorema 6.3: Derivada de seno y coseno

La función seno y coseno son diferenciables en todas partes, y $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sen} x = \cos x$ y $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\operatorname{sen} x$.

Prueba: La primera prueba resulta verdadera en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, y usando la regla de la cadena y la periodicidad (vea X) para extender en todo $(-\infty, +inft)$. ■

Finalmente, llegamos a la cuestión de las identidades trigonométricas. El siguiente teorema establece uno crucial.

Teorema 6.4

La función seno y coseno obedecen la siguiente ley.

(a) $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$.

(b) $\operatorname{sen}\left(\frac{pi}{2} - x\right) = \cos x$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$.

(c) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.

Demostración. Sean x, y números reales fijos, y sea $z = x+y$. Entonces $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\operatorname{sen} t \cos(x-t) + \cos t \operatorname{sen}(x-t)]$
$= (\operatorname{sen} t)[-\operatorname{sen}(z-t)(-1)] + \cos(z-t)(\cos t) + (\cos t)[-\cos(z-t)] + \operatorname{sen}(x-t)(-\operatorname{sen} t) = 0$.
Por lo tanto, $\operatorname{sen} t \cos(z-t) + \cos t \operatorname{sen}(z-t)$, C: constante .
Haciendo $t = 0$ en la expresión anterior, tenemos $0 + 1 \operatorname{sen} z = K$. Esto es, $K = \operatorname{sen} z$. Haciendo $t = x$ en la expresión anterior tenemos:

$$\operatorname{sen} x \cos(z-x) + \cos x \operatorname{sen}(z-x) = \operatorname{sen} x$$

Pero $z = x + y$, la ecuación anterior resulta

$$\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(x + y)$$

Las pruebas de (b) y (c) son consecuencias sencillas de (a) ■

Nos detenemos con estas identidades, porque a partir de ellas y otras identidades previas podemos derivar todas las identidades trignonmpericas de manera similar.

Teorema 6.5: Caracterización de la función seno

La única función $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, F''(x) = -F(x)$.

(b) $F(0) = 0$, y

(c) $F'(0) = 1$.

es la función $F(x) = \operatorname{sen} x$.

Prueba. Suponga que $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene las propiedades $(a)-(c)$. Por (b) suponga que, $F(0) = \operatorname{sen} 0$. Por lo tanto supongamos que $x \neq 0$. Se define $H(x) = F(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces H tiene una antiderivada de todos los ordenes de x, y por el teorema de Taylor, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists c_n$ entre oy x ■

Teorema 6.6: Caracterización de la función coseno

La única función $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

(a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F''(x) = -F(x)$.

(b) $F(0) = 1$, y

(c) $F'(0) = 0$.

es la función $F(x) = \cos x$.

Observación 6.13: Premio medalla Fields

Cara posterior de la medalla Fields.

La medalla Fields se concede cada cuatro años con motivo del Congreso Internacional de Matemáticos para reconocer el logro matemático sobresaliente de trabajo existente y por la promesa de logros futuros.
El comité de la medalla Fields es elegido por el Comité Ejecutivo de la Unión Internacional de Matemáticas y, normalmente, está precedido por el Presidente del IMU. Se le pide que elija al menos dos, con una fuerte preferencia por cuadro, medallistas Fields, y para tener en cuenta en la elección de representar una diversidad de campos matemáticos.
El nombre del Presidente del Comité se hace público, pero los nombres de otros miembros del Comité de permanecer en anonimato hasta que la entrega del premio en el Congreso. Si un ex-alumno (solo de tesis doctoral) de un miembro del comité se considera seriamente, tal miembro no obstante, seguirá formando parte del Comité para su decisión final. La medalla Fields es ahora indiscutiblemente el premio más conocido y más influyente en matemáticas. A veces se compara con el premio Nobel, ya que no hay premio Nobel de matemáticas. Editores y periodistas especialmente usan esta comparación. Me parece que esta comparación no es adecuada. La medalla Fields se estableció sobre diferentes principios. A diferencia del premio Nobel, que es otorgado en su mayoría a científicos maduros para coronar sus carreras, la medalla Fields es otorgada a jóvenes científicos, menores de 40 años. El premio tiene por objeto no solo reconocer los resultados ya obtenidos, sino también estimular nuevas investigaciones. Además, de esto se concede cada cuatro años. La primera medalla Fields se concedió en 1936 en Oslo y la segunda 14 años, en 1950, en Cambridge, Massachusetts. Así que los matemáticos nacidos durante 1900-1910 fueron automáticamente excluidos de la lista de candidatos, por ejemplo matemáticos brillantes como Kolmogorov, Henry Cartan, Andrew Weil. Sin embargo, si nos fijamos en los logros de los galardonados de la medalla Fields desde el punto de vista del desarrollo de las matemáticas en el siglo XX, vemos un cuadro impresionante. El fundador del premio John Charles Fields consideró dos principios fundamentales para el premio:

(a) La solución de un problema difícil.

(b) La creación de una nueva teoría que amplíe los campos de las aplicaciones de la matemática.

Está claro que no son independientes. Muy a menudo la solución de un problema concreto difícil se basa en la creación de una nueva teoría matemática y, a la inversa. la creación de una nueva teoría puede conducir a la solución de un viejo problema clásico.
La Segunda Guerra Mundial afectó en gran medida el desarrollo de la sociedad y la ciencia en general, especialmente las matemáticas. El desarrollo de las matemáticas es una buena ilustración de la tesis más general sobre la naturaleza continua pero "no diferenciable" del desarrollo de la ciencia. Si consideramos la gráfica del desarrollo de la matemática, evidentemente vemos los cambios de interés en los períodos de las guerras mundiales. Es natural que la ciencia se desarrolle continuamente, un hecho basado tanto en factores internos como en la sucesión de generaciones. Además, la ciencia se caracteriza por un cierto conservadurismo, que considero en general un fenómeno robusto. Grandes ideas aparecen en el mundo por pasos silenciosos, como dijo Nietsche. La aceptación de nuevas ideas procede contra grandes obstáculos y requiere de largas pruebas. Como Max Planck bromeó, "una nueva verdad científica no triunfa convenciendo a sus oponentes y haciéndolos ver la luz, sino más bien porque sus oponentes mueren finalmente, y una nueva generación crece con eso". Que cada trágica guerra mundial destruyó a toda una generación de científicos aceleró además un proceso aparentemente objetivo para aceptar nuevos puntos de vista en matemáticas. Si observamos los premios de 1936 y 1950 desde este punto de vista, podemos ver que las nuevas olas como la explosión de interés

en la topología y la geometría algebraica en los primeros años después de la Segunda Guerra Mundial no están todavía reflejadas en el primer premio posguerra de 19500 a Schwartz (por la teoría de distribuciones) y a Selberg por sus notables logros en teoría de números, a saber, la distribución de ceros de la función ζ de Riemann y una prueba "elemental" de la distribución asintótica de primos. Pero en 1954 el premio fue otorgado a Kodaira Serre para los logros de la posguerra. Hermann Weyl, que presidió el comité Fields en 1954, pronunció un discurso sobre los artículos de Kodaira y Serre. Curiosamente, Weyl tuvo dificultades para distinguir las áreas de investigación de los dos matemáticos. Dijo: "Los no iniciados pueden tener la impresión de que nuestro comité se equivocó al otorgar las medallas Fields a dos hombres cuya investigación se desarrolla en líneas tan cercas. Corresponde a la comisión demostrar que, a pesar de algunos solapamientos en los métodos, dan soluciones a problemas completamente diferentes y extremadamente difíciles". En los premios subsiguientes, vemos un equilibrio definitivo entre los dos principios fundamentales establecidos por el fundador dé el premio. Por ejemplo, en 1958. Klauss Roth fue honrado por la prueba de una estimación delicada que recoge el teorema de Siegel sobre la aproximación de números algebraicos por números racionales. El *teorema de Roth*. Si α es un número algebraico, racional, entonces para cualquier $\nu > 2$ la desigualdad

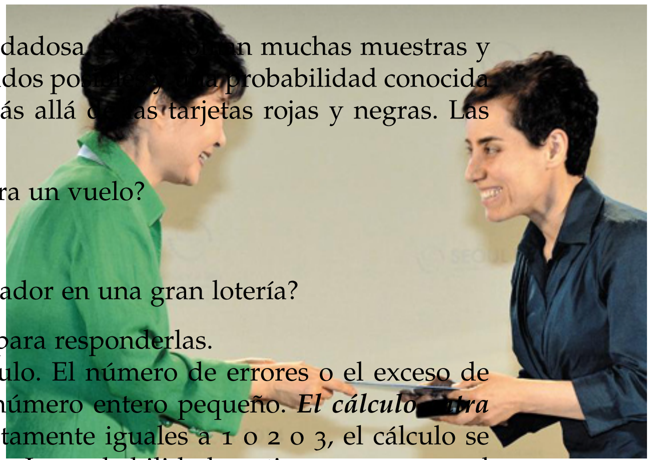
$$|\frac{p}{q} - \alpha| < \frac{1}{q^{\nu}}$$

tiene solo un número finito de soluciones $\frac{p}{q}$ racional. El segundo medallista Fields, René Thom, quien construyó un método poderoso en topología conocido como la teoría de cobordismo. En 1962, los ganadores fueron John Milnor y Lars Hormander desarrollaron la teoría general de ecuaciones lineales en derivadas parciales, incluyendo operadores hipoelíptico. El trabajo de otro laureado fue absolutamente asombroso y ha tenido gran influencia en el desarrollo futuro de la topología. Es muy difícil encontrar una invención análoga en el pasado a su hermosa construcciones de las diferentes estructuras diferenciales en la esfera de siete dimensiones. Más tarde, el resultado se convirtió en la piedra angular de una nueva rama de la topología, la *topología diferencial*. La prueba original de Milnor no fue muy constructiva, pero más tarde E. Briscorn demostró que estas estructuras diferenciales pueden describirse de una forma extremadamente explícita y hermosas. Cuatro medallas fueron otorgadas en 1966. Entre los homenajeados fueron Paul Cohen, quien mostró que los axiomas de Zermelo-Frænkel son consistentes, entonces la negación del axioma de elección o incluso la negación de la *hipótesis del continuo* puede ser unida y la teoría permanecerá consistente. Fue la primera y la última vez que el premio fue otorgado a un especialista en lógica matemática. Alexander Grothendieck, uno de los matemáticos más originales y desconcertantes de nuestro tiempo revolucionó la geometría algebraica. El concepto de esquemas que introdujo la geometría algebraica elevada a un nuevo nivel de abstracción, más allá del alance de los matemáticos con una educación tradicional. La teoría de gavillas, secuencias espectrales y otras innovaciones a finales de 1940 y principios de 1950 son subsumidas por esta complicada técnica. Pero si algunos matemáticos pudieran consolar por un tiempo con la esperanza de que todas estas complicadas estructuras fueran absurdas (en álgebra el término absurdo tiene un significado definido sin ninguna connotación peyorativa). Los últimos artículos de Grothendieck y otros mostró que los problemas clásicos de la geometría algebraica y la teoría de los números, cuyas soluciones habían resistido a los esfuerzos de varias generaciones de matemáticos talentosos, podrían resolver en términos del $K-$ functor de Grothendieck, motivado con la cohomología $p-$ ádicay otros conceptos igualmente complicados. Dos asombrosos matemáticos estuvieron presentes en esa conferencia. Las tradiciones de una comunidad científica son bastante diferentes de la de los escritores, estrellas de cine y modelos de moda. No es una práctica aceptada para felicitar a un científico de renombre en su presencia. Así que realmente no voy a tocar los resultados de los matemáticos presentes aquí, pero haré alguna excepción y diré algunas palabras sobre los resultados de Steven Smale y Michael Atiyah, porque ellos bellamente caracterizan el premio el nivel del premio y la realización de estos principios. Los resultados de Smale están especialmente cerca de mí, desde que empecé mi propia carrera en matemáticas como estudiante del conocido matemático ruso Dmitry Anosov, y su primer consejo fue estudiar los artículos de Smale sobre sistemas dinámicos.

Observación 6.14: Maryam Mirzakhani

A

5.6.3. Probabilidad y cálculo



Mirzakhanni recibiendo su premio ante la expresidenta de Corea del Sur en el 2014.

La probabilidad discreta usualmente implica una cuenta cuidadosa. No se toman muchas muestras y no se realizan muchos experimentos. Hay una lista de resultados posibles y una probabilidad conocida para cada resultado. Pero las probabilidades van mucho más allá de las tarjetas rojas y negras. Las preguntas reales son mucho más prácticas:

1. ¿Con qué frecuencia llegarán demasiados pasajeros para un vuelo?

2. ¿Cuántos errores aleatorios cometes en una prueba?

3. ¿Cuál es la posibilidad de obtener exactamente un ganador en una gran lotería?

Esas son preguntas importantes y configuraremos modelos para responderlas.

Hay otro punto Los modelos discretos no implican cálculo. El número de errores o el exceso de boletos para pasajeros o los ganadores de la lotería es un número entero pequeño. ***El cálculo entra para la probabilidad continua***. En lugar de resultados exactamente iguales a 1 o 2 o 3, el cálculo se ocupa de los resultados que caen en el rango de los números. La probabilidad continua aparece en al menos dos formas:

A Un experimento que es repetido varias veces y tomamos los promedios.

B El resultado se encuentra en cualquier lugar en un *intervalo* de números.

En el caso continuo, la probabilidad p_n de repetir un valor particular $x = n$ se vuelve cero. En cambio, tenemos una ***densidad de probabilidad*** $p(x)$ (que es una idea clave). La probabilidad que un número aleatorio X caiga entre a y b es encontrado integrando la densidad $p(x)$:

$$\text{Prob}\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$

Mas o menos, $p(x)\,\mathrm{d}x$ es la probabilidad de caer entre x y $x + \mathrm{d}x$. Ciertamente $p(x) \geq 0$. Si a y b son límites extremos $-\infty$ e ∞, incluyendo todos los resultados posibles, la probabilidad es necesariamente uno.

$$\text{Prob}\{-\infty < X < \infty\} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Este es el caso donde los límites infinitos de integración son naturales e inevitables. Al estudiar la probabilidad estos límites no crean dificultad (las áreas que van hasta el infinito son a menudo más fáciles). Aquí hay preguntas típicas que involucran probabilidad continua y el cálculo:

1. ¿Cuán concluyente es un 47 %-53 % sondeo de 33.5 millones votantes? (Población del Perú según el último Censo del Instituto Nacional de Estadística e Informática – INEI)

2. ¿16 jugadores de fútbol al azar están seguros en un ascensor con capacidad de 1600 kg?

3. ¿Cuánto tiempo falta antes de que su auto sufra un accidente en Lima?

No es tan tradicional para un curso de cálculo estudiar estas preguntas. Se necesita una reflexión adicional, más allá del cálculo de las integrales (por lo que esta sección es más difícil que la media). Pero la probabilidad es más importante que algunos temas tradicionales, y también más interesante.

Las pruebas de drogas, la identificación de genes y la investigación de marcadores son las principales aplicaciones. Comparando las preguntas 1-3 con las del 4-6 pone de manifiesto la relación de lo **discreto** hacia lo **continuo** (las diferencias entre ellos, y sus semejanzas).

Sería imposible dar aquí un tratamiento completo de la teoría de la probabilidad. Creo que verás el punto (y el uso del cálculo) de nuestros ejemplos. La conferencia de Sheldon M. Ross ha sido una guía valiosa.

5.6.4. Variables aleatorias discretas

Una variable aleatoria **discreta** X tiene una lista de posible valores. Para dos dados, los resultados son $X = 2, 3, \ldots, 12$. Para lanzar una moneda (ver abajo), la lista es infinita: $X = 1, 2, 3, \ldots$ (puede parecer contraintuitivo, pero lance una moneda, puede que obtenga cara en el primer intento o en n-ésimo).

Una variable aleatoria **continua** se encuentra en el intervalo $a \leq X \leq b$.

Ejemplo 6.3: Moneda justa

Tire una moneda justa hasta que obtenga cara. El resultado X es el número de lanzamientos. El valor de X es 1 o 2 o 3 o ..., y la probabilidad es $\frac{1}{2}$ cuando $X = 1$ (cara en el primer lanzamiento). La probabilidad de obtener sello después de cara es $p_2 = \frac{1}{4}$. La probabilidad de $X = n$ es $p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$- esta es la chance de $n-1$ sellos seguidas de caras. ***La suma de todas las probabilidades es necesariamente 1***:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$

Ejemplo 6.4: Poisson

Suponga que un estudiante (distinto de usted) comete en promedio dos errores no forzados por cada hora de examen. La cantidad de errores reales en el próximo examen es $X = 0$ o 1 o 2 o ...(si seguimos así, su nota sería 0).

Solución. Un modelo razonable para la probabilidad de n errores (cuando son aleatorios e independientes) es el ***modelo de Poisson*** (se pronuncia Pwason):

$$p_n = \textit{probabilidad de } n \textit{errores} = \frac{2^n}{n!} e^{-2}.$$

La probabilidad de ningún error, un error y dos errores son p_0, p_1 y p_2:

$$p_0 = \frac{2^0}{0!} e^{-2} = \frac{1}{1} e^{-2} \approx 0{,}135 \qquad p_1 = \frac{2^1}{1!} e^{-2} \approx 0{,}27 \qquad p_2 = \frac{2^2}{2!} e^{-2} = 0{,}27$$

La probabilidad de más de un error es 1-0.135-0.27-0.27=0.325.
El modelo de Poisson puede ser derivado experimentalmente o probado experimentalmente. La probabilidad total es otra vez 1, de la series infinitas (Sección fórmula de Taylor) para e^2:

$$p_0 + p_1 + p_2 + \cdots = \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots \right) e^{-2} = e^2 e^{-2} = 1.$$

■

Ejemplo 6.5: Exceso de pasajeros en el Aeropuerto Jorge Chávez

Suponga que en promedio 3 de cada 100 pasajeros con reservaciones no se presentan para el vuelo. Si el avión tiene la capacidad para 98 pasajeros, ***¿cuál es la probabilidad que alguien no sea escogido para volar***?

Solución. Si los pasajeros vienen de manera independiente al aeropuerto, use el modelo de Poisson con 2 cambiado a 3. X es el número de personas que se presentan al aeropuerto, y $X = n$ ocurre con probabilidad p_n:

$$p_n = \frac{3^n}{n!} e^{-3} \qquad p_0 = \frac{3^0}{0!} e^{-3} = e^{-3} \qquad p_1 = \frac{3^1}{1!} e^{-3} = 3e^{-3}.$$

Hay 98 asientos y 100 reservaciones. Alguien no podrá viajar si $X = 0$ o $X = 1$:

$$\text{probabilidad de no tomar el vuelo } = p_0 + p_1 = e^{-3} + 3e^{-3} \approx 4/20.$$

Muy pronto definiremos el ***promedio*** o ***valor esperado*** de X (para este modelo $\mu = 3$). ■

Capítulo 6

Área y volúmenes

Al final de este capítulo calcularemos el área superficial de cada una de las "hojas" del Templo de Loto (India).

6.1. Área de regiones planas (coordenadas cartesianas)

Definición 1.1: Área de una región plana delimitada por la gráfica de f

La región $\mathcal{R}$ está delimitada por la gráfica de la función f continua (con $f \geq 0$) en el intervalo $[a, b]$, el eje X y las rectas $x = a$, $x = b$, entonces el área de $\mathcal{R}$ es igual a

$$\boxed{A(\mathcal{R}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Ejemplo 1.1: Área sombreada

Determine el área de la región $\mathcal{R}$ delimitada por la gráfica de la función f dada por $f(x) = 9 - x^2$ y el eje X.

Solución: De la figura de la región **??** se muestra que el límite inferior es $y = 0$ y el límite superior es $y = 9 - x^2$. En los extremos de la región, los límites superior e inferior tienen las mismas coordenadas y; por lo tanto, para encontrar los puntos finales igualaremos

$$y = 9 - x^2 \qquad \text{e} \qquad y = 0$$

Así,

$$9 - x^2 = 0 \iff (x+3)(x-3) = 0$$

de donde obtenemos

$$x = -3 \quad \vee \quad x = 3.$$

$A(\mathcal{R}) = \displaystyle\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=-3}^{x=3} = (27 - 9) - (27 + 9) = 36u^2.$ ■

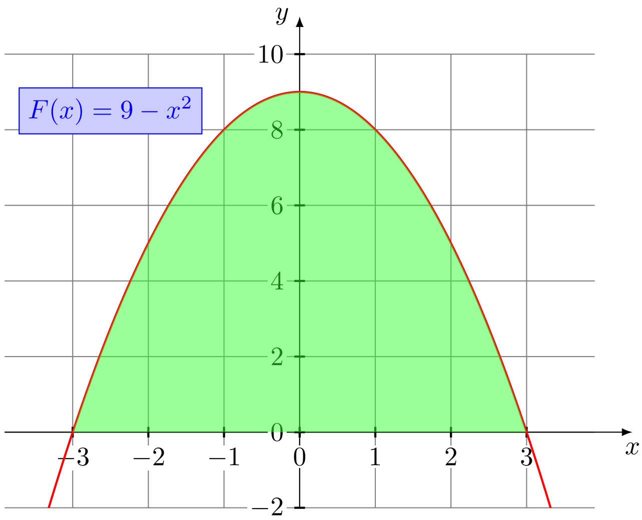


Figura 6.1: Área sombreada de la región delimitada por $f(x) = 9 - x^2$ y el eje X.

Ejemplo 1.2

Determine el área de la región $\mathcal{R}$ delimitada por la gráfica de $\operatorname{sen} x$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = \pi$.

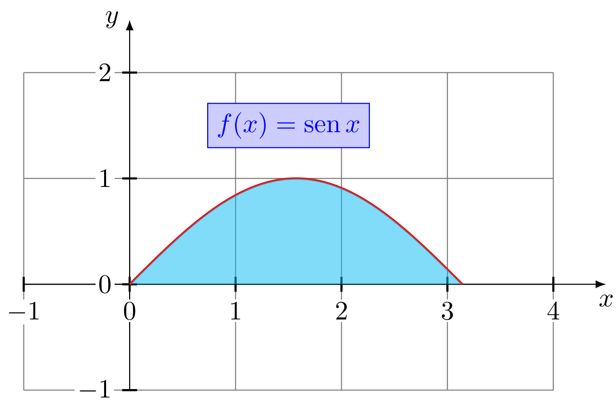


Figura 6.2: Área sombreada de la región delimitada por f

Solución.

$$A(\mathcal{R}) = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \cos x|_0^{\pi} = \cos(\pi) - \cos(0) = 2u^2.$$

■

Observación 1.1: Nota

$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq g(y), c \leq y \leq d\}$

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_c^d g(y) \, \mathrm{d}y$$

Observación 1.2: Pasos para encontrar los límites de la integración para el área entre dos curvas

1. Dibuje la región y a continuación trace un segmento de línea vertical a través de la región en un punto arbitrario $\tilde{x}$ en el eje X, conectando los límites superior e inferior.
2. La coordenada y del punto final superior del segmento de línea esbozado en el Paso 1 será $f(x)$, debajo $g(x)$ y la longitud del segmento de línea será $f(x) - g(x)$. Éste es el integrando en (1).
3. Para determinar los límites de integración, imagine el desplazamiento horizontal del segmento de línea de la izquierda hacia la derecha. La posición más a la izquierda en la que el segmento de línea intersecta la región es $x = a$ y la más a la derecha es $x = b$.

Ejemplo 1.3

Determine el área $\mathcal{R}$ delimitada por $y = \ln x$ y el eje Y, integrando con respecto a y.

Solución: $y = \ln x \iff x = e^y$
$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq e^y, 0 \leq y \leq 1\}$

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_0^1 e^y \, \mathrm{d}y = e^y|_{y=0}^{y=1} = (e - 1)u^2.$$

■

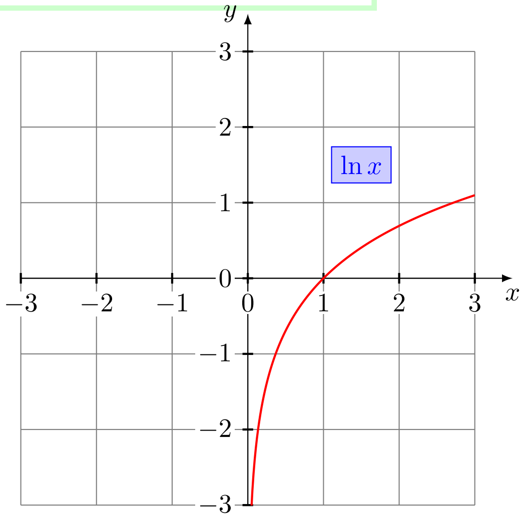


Figura 6.3: Ár

Área de las gráficas de dos funciones

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x) \leq \psi(x), a \leq x \leq b\} \implies \text{Área}(\mathcal{R}) = \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)] \, \mathrm{d}x$$

Ejemplo 1.4

Determine el área de la región $\mathcal{R}$ delimitada por las gráficas de $y = e^x$, $y = x$ y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

Solución.

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \leq e^x, 0 \leq x \leq 1\}$$

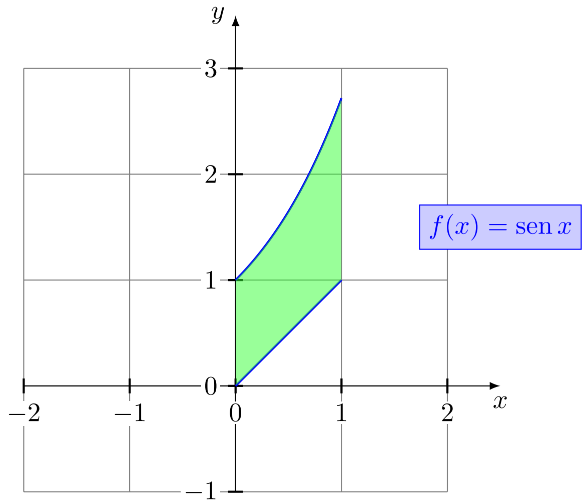


Figura 6.4: Ár

$\Longrightarrow$

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_0^1 (e^x - x)\, dx = \left(e^x - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1}$$
$$= \left(e - \frac{3}{2} \right) u^2.$$

■

Ejemplo 1.5

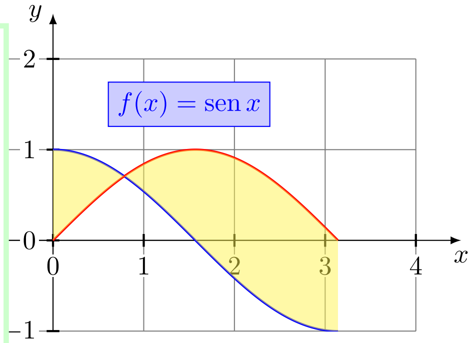
Determine el área de la región $\mathcal{R}$ delimitada por las gráficas de las funciones seno y coseno evaluadas en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución. $\operatorname{sen} x = \cos x \iff \tan x = 1 \iff x = \dfrac{\pi}{4}$.

$$\text{Área}(\mathcal{R}_1) = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)|_0^{\pi/4} = (\sqrt{2} - 1)u^2$$

$$\text{Área}(\mathcal{R}_2) = \int_{\pi/4}^{\pi} (\operatorname{sen} x - \cos x) = (-\cos x - \operatorname{sen} x)|_{\pi/4}^{\pi} = (1 + \sqrt{2})u^2$$

$\therefore$ $\text{Área}(\mathcal{R}) = \text{Área}(\mathcal{R}_1) + \text{Área}(\mathcal{R}_2) = 2\sqrt{2}u^2$. ■



ura 6.5: La región de color arillo es el área pedida.

Observación 1.3: Nota

$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \mid c \leq y \leq d\}$, entonces:

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_c^d (g_2(y) - g_1(y))\, dy$$

6.2. Volúmenes de sólidos con secciones planas paralelas

Definición 2.1

Sea V un sólido acotado por dos planos paralelos perpendiculares al eje X en $x = a$ y $x = b$. Si para cada $x \in [a, b]$, el área de la sección transversal a S es perpendicular al eje X es $A(x)$, entonces el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

Definición 2.2

Sea V un sólido acotado por dos planos paralelos perpendiculares al eje Y en $y = c$ y $y = d$. Si para cada $y \in [c, d]$, el área de la sección transversal a S es perpendicular al eje Y es $A(y)$, entonces el volumen del sólido es

$$V = \int_c^d A(y)\, dy$$

Ejemplo 2.1

Probar que el volumen de un cono recto de altura h y radio de la base r es igual a $\boxed{V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}}$.

Solución. Por semejanza de triángulos: $\dfrac{y}{r} = \dfrac{x}{h} \implies y = \dfrac{r}{h}x \implies \text{Área}(x) = \dfrac{\pi r^2 x^2}{h^2}$ Como el volumen del cono es

$$
\begin{aligned}
V = \int_0^h A(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi r^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=h} \\
\therefore V &= \frac{\pi r^2 h}{3} u^3.
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 2.2

Se tiene un cuerpo con base elíptica:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$$

La sección transversal es un triángulo equilátero perpendicular al eje X y la base de la elipse mencionada anteriormente. Determine el volumen de dicho cuerpo.

Solución. Luego, el volumen es

$$
\begin{aligned}
V = \int_{-6}^{6} 25\sqrt{3}\left(1 - \frac{x^2}{36}\right)\mathrm{d}x &= 25\sqrt{3}\int_{-6}^{6}\left(1 - \frac{x^2}{36}\right)\mathrm{d}x \\
&= 25\sqrt{3}\left(x - \frac{x^3}{108}\right)\Big|_{x=-6}^{x=6} \\
&= 0u^3.
\end{aligned}
$$

■

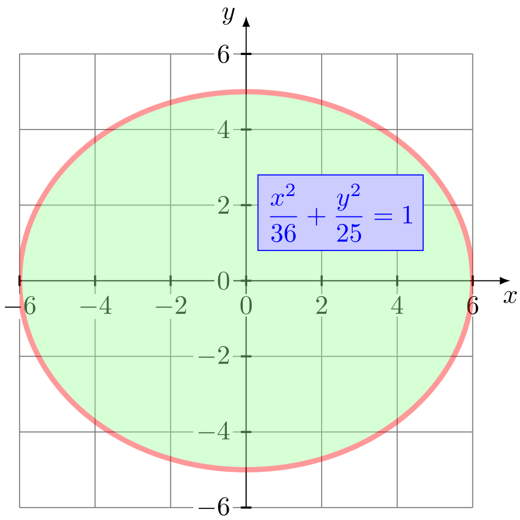


Figura 6.6: Sección transversal elíptica.

6.3. Volumen de sólidos de revolución

Un **sólido de revolución** es el sólido que es generado por la revolución de la región plana sobre la recta que está en el mismo plano así como la región; la recta es llamada el eje de revolución.

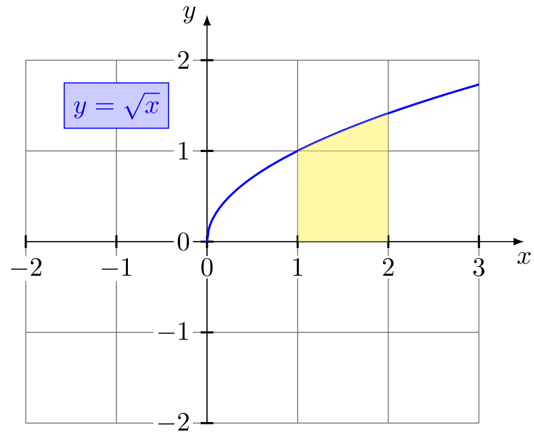
6.3.1. Método del disco

Sea $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$. Entonces $V_i = \pi f(t_i^*)^2(t_i - t_{i-1})$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. donde

$$\boxed{V = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} \pi f(t_i^*)^2(t_i - t_{i-1})}$$

Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces

$$\boxed{V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx}$$



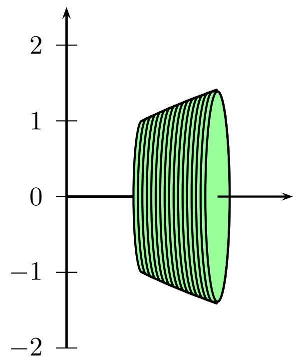
Ejemplo 3.1

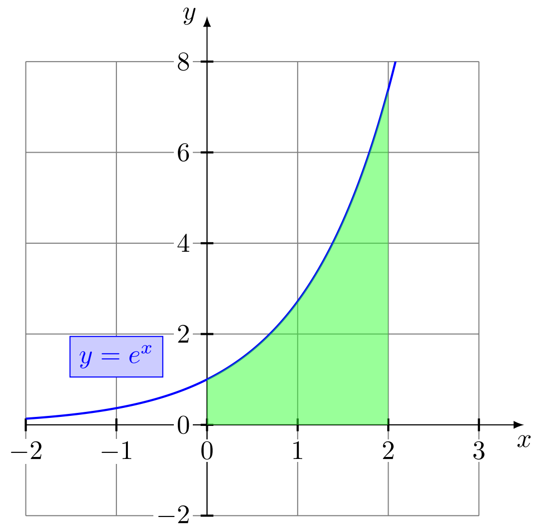
Determine el volumen del sólido generado al rotar la región delimitada por la gráfica de la función f dada por $f(x) = \sqrt{x}$, las rectas $x = 1, x = 2$ y el eje X, alrededor del eje X.

Solución. Sea $f(x) = \sqrt{x}$, por el método del disco, el volumen es:

$$\begin{aligned} V = \int_1^2 \pi f(x)^2 \, dx = \int_1^2 \pi \sqrt[\cancel{2}]{x}^{\cancel{2}} \, dx = \int_1^2 \pi x \, dx \\ = \left. \frac{\pi x^2}{2} \right|_{x=1}^{x=2} \\ = \frac{3}{2} u^3 \end{aligned}$$

■





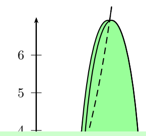
Ejemplo 3.2

Determinar el volumen del sólido obtenido al rotar la región delimitada por la gráfica de la función f dada por $f(x) = e^x$, las rectas $x = 0, x = 2$ y el eje X.

Solución. Por el método del disco:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi [e^x]^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^2 e^{2x} \, dx \\ &= \pi \cdot \frac{1}{2} \, e^{2x} \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(e^4 - 1\right) u^3 \end{aligned}$$

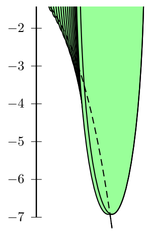
■



Ejemplo 3.3

Determinar el volumen del sólido obtenido al girar la región delimitada por las rectas $4x - y + 1 = 0, y = 2, y = 3$, el eje Y alrededor del eje Y.

Solución. Primero hallamos las intersecciones:



$$
\begin{aligned}
V &= \int_2^3 \pi\left(\frac{y-1}{4}\right)^2 \mathrm{d}y \\
&= \frac{\pi}{16}\int_2^3 \left(y^2 - 2y + 1\right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{\pi}{16}\left(\frac{y^3}{3} + y^2 + y\right)\Bigg|_{y=2}^{y=3} \\
&= \frac{11}{48}\pi u^3
\end{aligned}
$$

■

Observación 3.1: Método del disco cuando la rotación es respecto al eje Y

$$\boxed{V = \int_c^d \pi[g(y)]^2} \,\mathrm{d}y$$

6.3.2. Método de las arandelas

Se tiene la región $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \leq y \leq g(x), a \leq x \leq b\}$ que gira alrededor del eje X, el volumen del sólido obtenido es

$$\boxed{V = \int_a^b \pi\left(f(x)^2 - g(x)^2\right) \mathrm{d}x}$$

Ejemplo 3.4

Determine el volumen del sólido obtenido al hacer rotar la región $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \leq 3^x, 1 \leq x \leq 2\}$

Solución. El volumen del sólido es:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^2 \pi\left((3^x)^2 - (x)^2\right) \mathrm{d}x \\
&= \pi\int_1^2 \left(3^{2x} - x^2\right) \mathrm{d}x \\
&= \pi\left.\frac{3^{2x}}{2\ln(3)}\right|_{x=1}^{x=2} - \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=1}^{x=2} \\
&= \pi\left(\frac{36}{\ln(3)} - \frac{7}{3}\right) u^3
\end{aligned}
$$

■

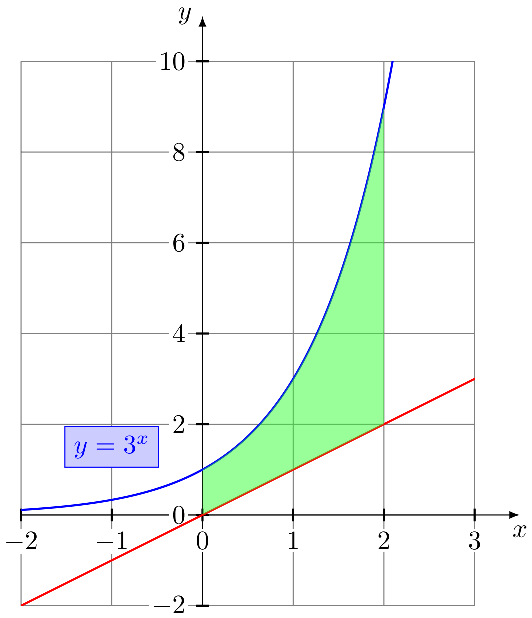


Figura 6.7: La región de color verde está delimitada por la rectas $x = 0$, $x = 1$, la recta $y = x$ y la función exponencial

Observación 3.2

En el caso de que la región delimitada por la gráfica de la función f, las rectas $x = a, x = b, y = k$ que gura alrededor de la recta $y = k$.
El volumen sería

$$\boxed{V = \int_a^b \pi[f(x) - k]^2}$$

En el caso de la arandela, una región $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid f(x) \leq y \leq g(x), a \leq x \leq b\}$ girando alrededor de la recta $y = k$, el volumen sería:

$$\boxed{V = \int_a^b \pi \left[(g(x) - k)^2 - (f(x) - k)^2\right] \mathrm{d}x}$$

Ejemplo 3.5

Determine el volumen del sólido que se obtiene al girar la región

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$$

alrededor de la recta $y = 1$.

Solución.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi \left[(x - (-1))^2 - (x^2 - (-1))^2\right] \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \pi \left[(x^2 + 2x + 1) - (x^4 + 2x^2 + 1)\right] \mathrm{d}x \\ &= \pi\ x^2 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{7}{15}\pi u^3 \end{aligned}$$

■

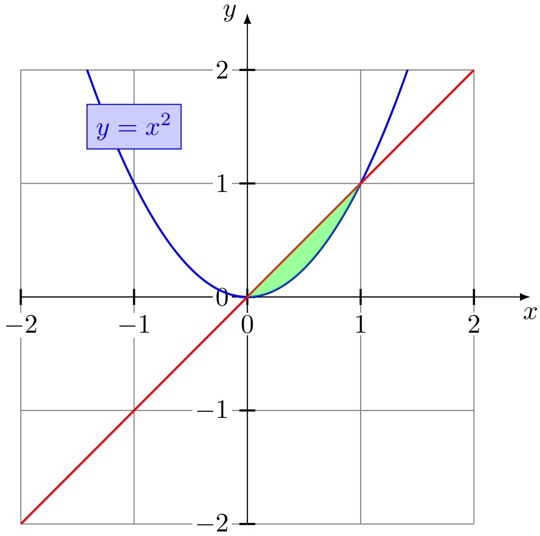


Figura 6.8: La región de color verde está delimitada por la recta y la parábola

6.3.3. Método de las capas cilíndricas

La región $\mathcal{R}$ gira alrededor del eje Y. Para una partición $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$. Se obtienen capas cilíndricas y que al hacer un corte se obtiene aproximadamente un paralelepípedo cuyo volumen es $V_i = 2\pi x_i^* f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$, donde el volumen del sólido obtenido es aproximadamente $\sum_{i=1}^n V_i$. Luego, $V = \lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} = \sum_{i=1}^n 2\pi x_i^* f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$. Si f es integrable, entonces

$$\boxed{V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, \mathrm{d}x}$$

Ejemplo 3.6

Determine el volumen del sólido obtenido al girar la región

$$\mathcal{R} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \operatorname{sen} x, \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

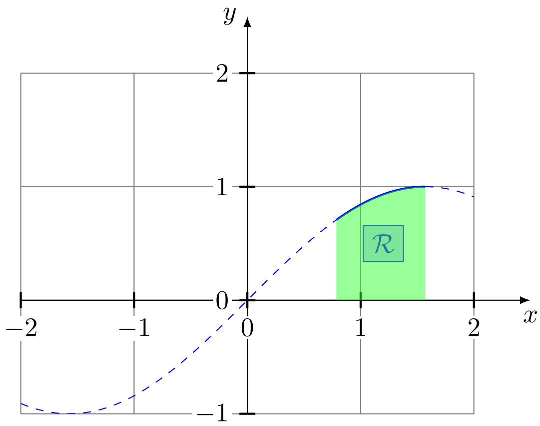


Figura 6.9: Ár

Solución.

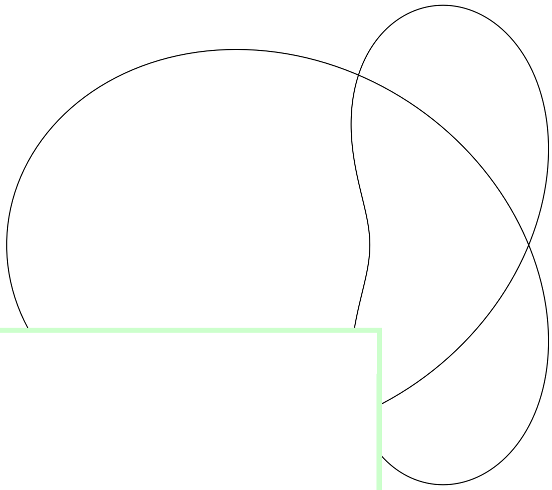
$$
\begin{aligned}
V &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\pi x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \\
&= -x\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{4}}^{x=\frac{\pi}{2}} + \operatorname{sen} x\big|_{x=\frac{\pi}{4}}^{x=\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\pi\left[\frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] u^3
\end{aligned}
$$

■

Capítulo 7

Coordenadas polares, longitud de arco y áreas de superficies de revolución

Hasta ahora , los puntos han sido localizados por sus coordenadas x e y. Pero si estamos en un controlador aéreo, y el avión aparece en la pantalla, no tienes la posición. P es un punto en el plano. r es la distancia del punto P. θ es la medida del ángulo expresado en radianes. $\mathcal{C}$ es una circunferencia centrada en el polo con radio r que pasa por P.



Ejemplo 0.1: Representar puntos en coordenadas polares

Representar en el plano los puntos $A(1, \frac{\pi}{4}), B(2, \frac{\pi}{3}), C(3, \frac{3\pi}{4})$ y $D(3, \frac{3\pi}{4})$.

Solución. A ■

Ejemplo 0.2

Pasar de polares a cartesianas los puntos $A(1, \frac{\pi}{4})$ y $B(2, \frac{\pi}{3})$.

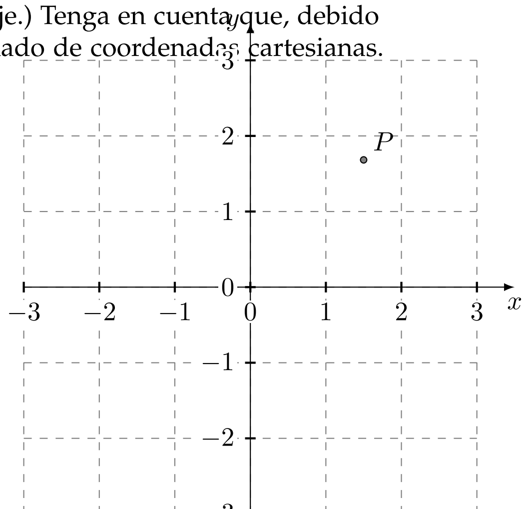
Solución:

$$x = 1\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$y = 1\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}$$
$$x = 2\cos\frac{\pi}{3}$$
$$y = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}$$

■

7.1. Sistema de coordenadas polares

Puede comprender las **coordenadas cartesianas** (o **rectangulares**) (x, y) de un punto P en $\mathbb{R}^2$ de la siguiente manera: Imagine que el plano entero está lleno de rectas horizontales y verticales, como en la Figura 1.82. Entonces el punto P se encuentra en exactamente una recta vertical y una recta horizontal. La coordenada x de P es donde esta recta vertical se cruza con el eje X, y la coordenada y es donde la recta horizontal se cruza con el eje Y. (Ver Figura 1.83.) (Por supuesto, ya hemos asignado coordenadas a lo largo de los ejes para que el punto cero de cada eje esté en el punto de intersección de los ejes. También marcamos normalmente la misma distancia de unidad en cada eje.) Tenga en cuenta que, debido a esta geometría, cada punto en $\mathbb{R}^2$ tiene un conjunto único determinado de coordenadas cartesianas. Las ***coordenadas polares*** son definidas considerando una información geométrica diferente. Ahora imagine el plano lleno de círculos concéntricos centrados en el origen y rayos que emanan del origen. Entonces, cada punto excepto el origen se encuentra en exactamente uno de esos círculos y uno de esos rayos. El origen en sí mismo es especial: ningún círculo pasa a través de él, y todos los rayos comienzan en él. (Vea la Figura 1.84.) Para los puntos P distintos



del origen, asignamos a P las coordenadas polares (r, θ), donde r es el radio del círculo en el que se encuentra P y θ es la medida del ángulo entre el eje x positivo y el rayo sobre el cual P se encuentra. (θ se mide en sentido antihorario). El origen es una excepción: se le asignan las coordenadas polares $(0, \theta)$, donde θ puede ser la medida de cualquier ángulo. (Vea la Figura 1.85.) Como hemos descrito las coordenadas polares, $r \geq 0$ ya que r es el radio de un círculo. También tiene sentido pedir $0 \leq \theta < 2\pi$, porque entonces cada punto en el plano, excepto el origen, tiene un par de coordenadas polares determinado de manera única. Ocasionalmente, sin embargo, es útil no restringir r para que sea no negativo y θ está entre 0 y 2π. En tal caso, ningún punto de $\mathbb{R}^2$ será descrito por un único par de coordenadas polares: si P tiene coordenadas polares (r, θ), entonces también tiene $(r, \theta + 2n\pi)$ y $(-r, \theta + (2n+1)\pi)$ como coordenadas, donde n puede ser cualquier número entero. (Para ubicar el punto que tiene coordenadas (r, θ), donde $r < 0$, construye el rayo que mida θ con respecto al eje x positivo, y en lugar de marchar $|r|$ unidades lejos del origen a lo largo de este rayo, vaya $|r|$ unidades en la dirección opuesta, como se muestra en la Figura 1.86.) Antes de empezar nuestro recorrido sobre las curvas, se definirán cierto términos familiares. Las curvas planas ofrecen un campo de estudio rico y hasta cierto punto inexplorado, que se puede abordar desde un nivel bastante elemental. Cualquiera que pueda dibujar un círculo con un centro dado y un radio dado puede dibujar un cardioide o un limaçon. Cualquiera que pueda usar un cuadrado fijo puede dibujar una parábola o un estrofoide. Cualquiera que conozca un poco de las proposiciones más simples de Euclides puede deducir una serie de propiedades de estas bellas y fascinantes curvas. Los hombres y mujeres estaban fascinados por las curvas y sus formas mucho antes de que los consideraran objetos matemáticos. Como evidencia, uno solo tiene que mirar los ornamentos en forma de ondas y espirales en la cerámica prehistórica, o los magníficos sistemas de pliegues en las cortinas de estatuas griegas o góticas. Fueron los geómetras griegos quienes comenzaron a construir curvas geométricamente definidas como, por ejemplo, el contorno de la intersección construcción métrica. La línea recta y el círculo se podían dibujar con instrumentos muy primitivos en un movimiento continuo, por lo que se distinguían como el locus (lugar geométrico) plano hacia las secciones cónicas sólidas.

Algunas curvas fueron generadas por el movimiento de los enlaces mecánicos, o al menos se creía que así se generaban: las espirales de Arquímedes eran de ese tipo. Una clasificación en curvas geométricas y mecánicas (que no corresponde del todo al uso moderno de esos términos) se fijó cuando la geometría analítica, en el siglo XVII, hizo posible distinguir con precisión lo que ahora deberíamos (siguiendo a Leibniz) llamar curvas algebraicas y transcendentales.

En su búsqueda de la verdadera forma de una órbita planetaria, el matemático Johannes Kepler probó una variedad de curvas antes de descubrir que la elipse era la mejor. En el antiguo sistema ptolemaico, se suponía que los planetas describían caminos que podían construirse por medio de *epiciclos* (es decir, mediante círculos llevados en otros círculos o esferas).

Kepler en conjunto jugaba con curvas e inventó una gran cantidad de nombres (generalmente los de algún tipo de frutas) para los sólidos de la revolución generados por las curvas que giraban sobre varios ejes.

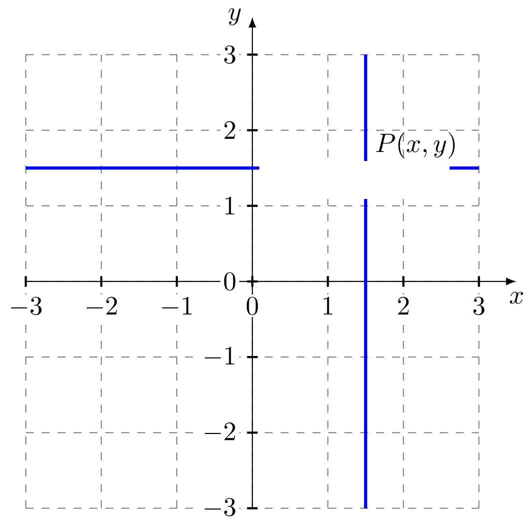


Figura 7.3: Ubicando el punto P usando coordenadas cartesianas

Cuando Bonaventura Cavalieri (1598-1647) intentó explicar su método de integración, tuvo cuidado de usar un tipo de curva realmente general, pero carecía del método analítico de descripción; más tarde en el siglo XVII, Gregory y Barrow dieron las reglas del cálculo (como deberíamos llamarlo) en forma geométrica al referirse a simples arcos monótonos. Por lo tanto, ya las curvas individuales estaban comenzando a perderse en la teoría más general.

Un dispositivo poderoso fue la creación de una nueva curva mediante la transformación de otra, como por ejemplo, una curva formada por ordenadas de dibujo igual a las longitudes de los subtangentes de una determinada. Un ejemplo más simple fue el dibujo de una concoide $r = f(\theta) + c$ para una curva dada $r = f(\theta)$: entonces, si se conociera la tangente a la curva dada, la tangente al concoide podría construirse inmediatamente.

Los problemas en la óptica llevaron a los cáusticos, es decir, a los sobres de lápices de rayos. Pero la mayor influencia en el estudio de las curvas fue, por supuesto, la invención del cálculo, que no solo aseguró la solución de problemas en gradientes, áreas y longitudes de arcos, sino que unificó todo el campo de investigación. Una gran variedad de problemas mecánicos podrían formularse con precisión, como, por ejemplo, para encontrar la curva de “descenso rápido”, la *braquistócrona*.

Pero el interés había cambiado desde los orígenes geométricos de la curva conceptual hacia el aspecto analítico: fue como el diagrama de una “función” que la curva aparecía en el libro de texto, y la individualidad de muchos miembros famosos de la familia se perdía.

Definición 1.1: Definiciones asociadas a curvas

´

Curva algebraica: Es aquella que expresada en coordenadas rectangulares puede ser expresado en términos de potencias racionales de x e y junto con las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, por ejemplo $y^8 = \dfrac{x^{3/7}}{x/(x-y)}$ es una curva algebraica, en cambio $y = 3^x$ no lo es.

2. Curva analgmática: Es aquella curva que es invariante bajo inversión. Esa propiedad fue estudiada por primera vez por Moutard en 1864.

3. Asíntota: Es la posición límite de la recta tangente a la curva en el punto de contacto alejándose indefinidamente del origen.

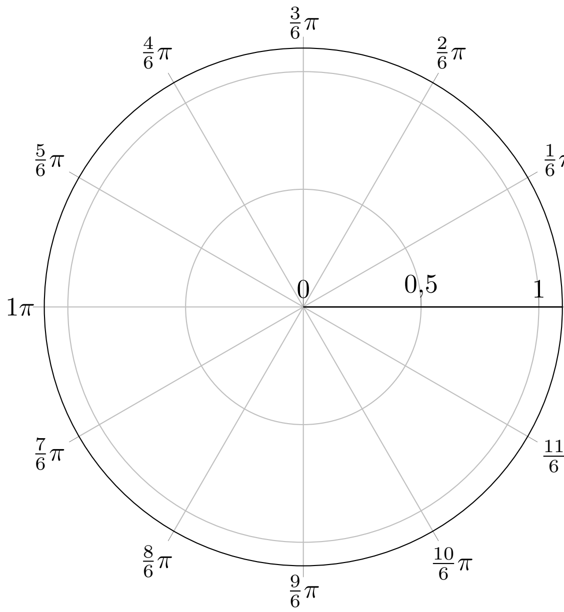
4. Coordenadas bipolares: Sean / y /′ dos puntos fijos. Un punto P puede especificarse dando sus distancias r y r' desde / y /′, respectivamente. Estas se llaman coordenadas bipolares de P. Una curva se puede definir por una ecuación, llamada ***ecuación bipolar***, que conecta r y r'. Por ejemplo, una elipse se define por $r + r' = 2a$.

5. Curva braquistócrona; Es la curva por la cual una partícula se moverá de un punto a otro bajo la acción de una fuerza de aceleración en el menor tiempo posible. En 1696, Johann Bernoulli presentó un desafío para encontrar una curva donde la fuerza de aceleración es la gravedad.

6. Curvas cáusticas: Cuando la luz se refleja en una curva, entonces la envoltura de los rayos reflejados es cáustica por reflexión o catacáustica. Cuando la luz es refractada por una curva, entonces la envolvente de los rayos refractados es cáustica por refracción o diacaústica. Primero fueron estudiados por Huygens y Tschirnhaus alrededor de 1678. Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli, de l’Hôpital y Lagrange estudiaron todas las curvas cáusticas.

7. Cisoide: Dadas dos curvas C_1 y C_2 y un punto fijo O, permita que una línea de O corte C_1 en Q y C_2 en R. Entonces, el cisoide es el locus de un punto P tal que OP = QR. El cisoide de Diocles es un cisoide donde C_1 es un círculo, C_2 es tangente a C_1 y P es el punto de C_1 diametralmente opuesto al punto de contacto de la tangente.

8. Concoide: Sea C una curva y O un punto fijo. Deje P y P' puntos en una línea de O a C encontrándose en Q donde $P'Q = QP = k$, donde k es una constante dada. Si C es un



círculo y O está en C, entonces el concoide es un limacon, mientras que en el caso especial de que k es el diámetro de C, entonces el concoide es un cardioide.

9. Curvatura: Sea C una curva y que P sea un punto en C. Sea N la normal en P y sea O el punto en N, que es el límite de donde la normal a C en P' interseca a N cuando P' tiende a P. O es el centro de curvatura en P y PO es el radio de curvatura en ese punto.

10. Cúspide: Es un punto en una curva C donde el gradiente de la tangente a C tiene una discontinuidad.

11. Envolvente: Una curva que toca a cada miembro de una familia de curvas o líneas. Por ejemplo, los ejes son la envolvente del sistema de círculos $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$.

12. Evoluta: Es la envolvente de las normales a una curva dada. Esto también se puede considerar como el lugar geométrico de los centros de curvatura. La idea aparece en una forma temprana en el libro de Cónicas de Apolonio. Aparece en su forma actual en el trabajo de Huygens desde alrededor de 1673.

13. Glisete: El *locus* de un punto P (o la envolvente de una línea) se fija en relación con una curva C que se desliza entre curvas fijas. Por ejemplo, si C es un segmento de línea y P a, en el segmento de línea, P describe una elipse cuando C se desliza para tocar dos líneas rectas ortogonales. El resplandor del segmento de línea C en sí es, en este caso, un astroide.

Definición 1.2: Ecuación polar de la parábola

$$\frac{2a}{r} = 1 - \cos\theta$$

Definición 1.3: Ecuación polar de la parábola semicúbica

$$r = c \operatorname{sen}^2\theta \sec^3\theta$$

Definición 1.4: Ecuación polar de la elipse

$$r(1 - e\cos\theta) = a(1 - e^2)$$

Definición 1.5: Ecuación polar de la hipérbola

$$r(1 + e\cos\theta) = a(e^2 - 1)$$

Definición 1.6: Ecuación polar del cardioide

$$r = 2a(1 + \cos\theta)$$

Definición 1.7: Ecuación polar del limaçon de Pascal

$$r = 2a\cos\theta + k.$$

Definición 1.8: Ecuación polar del estrofoide

$$r = a\left(\sec\theta \pm \tan\theta\right)$$

Definición 1.9: Ecuación polar de la espiral logarítmica

$$r = ae^{\theta\cot\alpha}$$

Definición 1.10: Ecuación de la lemniscata de Bernoulli

$$r^2 = a^2\cos 2\theta$$

Definición 1.11: Ecuación del concoide ni Nicómedes

$$r = a\sec\theta + k$$

Definición 1.12: Ecuación polar del Cisoide de Diocles

$$r = 2a(\sec\theta - \cos\theta)$$

Definición 1.13: Ecuación polar del nefroide de Freeth

$$r = a\left(1 + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Definición 1.14: Ecuación de la Trisectriz de Maclaurin

$$r = a\sec\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

Definición 1.15: Ecuación de la espiral de Arquímedes

$$r = a\theta$$

Definición 1.16: Ecuación de la espiral parabólica

$$(r-a)^2 = b^2\theta$$

Definición 1.17: Ecuación de la espiral sinusoidal

$$r^n = a^n \cos(n\theta)$$

7.1.1. Fórmulas de transformación

7.1.2. Gráficas en coordenadas polares

7.1.3. Intersección de gráficas en coordenadas polares

7.1.4. Tangentes a curvas polares

7.1.5. Cálculo de áreas en coordenadas polares

7.2. Longitud de arco de una curva paramétrica en coordenadas cartesianas

7.2.1. Aeiou

$$\int_0^{2\pi} re^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = -rie^{i\theta}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

7.3. Curvas planas

7.3.1. Relación entre las coordenadas polares y cartesianas

Ejemplo 3.1

Pasar de polares a cartesianas los puntos $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ y $\left(2, \frac{\pi}{8}\right)$.

Solución. Sea ■

Observación 3.1

B está en el cuarto cuadrante.

$$\tan\theta = \frac{-1}{1} = -1 \longrightarrow \theta = 2\pi = \frac{65}{den}$$

En polares podemos representar rectas, circunferencias, cónicas. En el caso de rectas se tienen los casos:

1. Rectas que pasan por el polo.
2. Recta que no pasa por el polo.

$$r = \frac{d}{\cos(\theta - \theta_0)}$$

7.3.2. Gráficas de ecuaciones polares

Para graficar en polares las relaciones se considera

A) Simetrías

Ejemplo 3.2

Graficar

$$r = 1 + \operatorname{sen}\theta$$

Solución. a) No hay simetría con respecto al eje polar, pero sí al eje normal porque al cambiar θ por $\pi - \theta$ no se altera la relación.

b) Cota: $|r| = |1 + \operatorname{sen}\theta| \leq 1 + |\operatorname{sen}\theta| \implies r \leq 2$.

c) Tangente en el polo:

■

7.3.3. Rectas tangentes en coordenadas polares

7.4. Longitud de arco

En esta sección continuaremos con nuestro estudio de curvas parametrizadas en $\mathbb{R}^2$, siendo nuestro principal objetivo medir propiedades geométricas tales como la longitud y la curvatura. Esto se puede hacer creando una cadena poligonal que se explicará detalladamente al término de las definiciones principales. Nuestro estudio nos lleva brevemente a la rama de las matemáticas llamada **geometría diferencial**, un área donde el cálculo y el análisis se utilizan para comprender la geometría de curvas, superficies y ciertos objetos de dimensionales superiores (llamadas variedades). Iniciaremos con algunas definiciones y denotaremos por I cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ en $\mathbb{R}$.

Definición 4.1: Trayectoria o curva parametrizada

Una ***trayectoria*** o ***curva parametrizada*** en $\mathbb{R}^2$ es una aplicación continua $\lambda\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Los puntos $\lambda(a)$ y $\lambda(b)$ son llamados puntos finales de la trayectoria λ.

Ejemplo 4.1: Trayectoria de una circunferencia

La trayectoria $\mu\colon\ [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\mu(t) = (5\cos t, 5\operatorname{sen} t)$$

se puede considerar como la ruta de una partícula que se desplaza una vez, en sentido antihorario, alrededor de un círculo de radio 5.

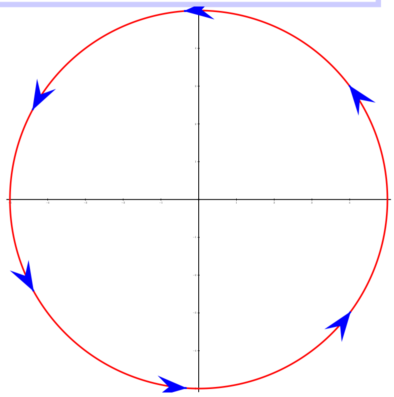


Figura 7.4: Curva parametrizada de

Definición 4.2: Gráfica de una trayectoria

La gráfica de una trayectoria $\lambda\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es el conjunto formado formado por todos los pares

$(t, \lambda(t))$ para todo $t \in I$, es decir

$$\text{Gráfica de una trayectoria } = \{(t, \lambda(t)) \in \mathbb{R}^{2+1} \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^{2+1}$$

Definición 4.3: Traza de una curva

Se llama traza de una trayectoria $\lambda\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ al conjunto (subconjunto de $\mathbb{R}^2$) de las imágenes de λ, es decir

$$\text{Traza de } \lambda = \{\lambda(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Definición 4.4: Trayectoria de clase C^1

Diremos que una trayectoria es de clase C^1 si cada una de sus funciones componentes es de clase C^1.
Por ejemplo, la trayectoria μ del ejemplo 4.1 es de clase C^1.

Definición 4.5: Trayectoria definida a trozos de clase C^1

Diremos que una trayectoria $\lambda\colon I \to \mathbb{R}^2$ es de clase C^1 definida a trozos si λ puede "romperse" en un número finito de segmentos de manera que cada uno de ellos sea de clase C^1

Definición 4.6: Trayectoria cerrada y curva cerrada

Sea $\lambda\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una aplicación de clase C^1 definida a trozos. Diremos que la trayectoria (o curva parametrizada) λ es ***cerrada*** si $\lambda(a) = \lambda(b)$.
Además, nos referiremos a la imagen de la trayectoria cerrada (imagen de la curva parametrizada cerrada), $\lambda\,[a, b]$, como una curva $\mathcal{C}$ cerrada. O dicho de otra manera, la curva $\mathcal{C}$ será cerrada si su correspondiente parametrización es una trayectoria cerrada.

Definición 4.7: Trayectoria simple y curva simple

Sea $\lambda\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una aplicación de clase C^1 definida a trozos. Diremos que la trayectoria λ es ***simple*** si no tiene autointersecciones, es decir, si λ es uno a uno, excepto posiblemente en $\lambda(a) = \lambda(b)$.
Además, nos referiremos a la imagen de la trayectoria simple (imagen de la curva parametrizada), $\lambda\,[a, b]$, como una curva $\mathcal{C}$ simple. O dicho de otra manera, la curva $\mathcal{C}$ será simple si su correspondiente parametrización es una trayectoria simple.

Observación 4.1: Curva simple regular

Se considerará como curva simple regular $\mathcal{C}$ si es de clase C^1, en otros libros se exige que sea de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Dada una curva simple regular $\mathcal{C}$ representada por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [a, b]$$

donde $x(t)$, $y(t)$ son diferenciables en $[a,b]$.
Tenemos una partición $\mathcal{P}\,[a,b]$ de modo que se obtienen puntos $P_i = (x(t_i), y(t_i))$ sobre la curva $\mathcal{C}$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

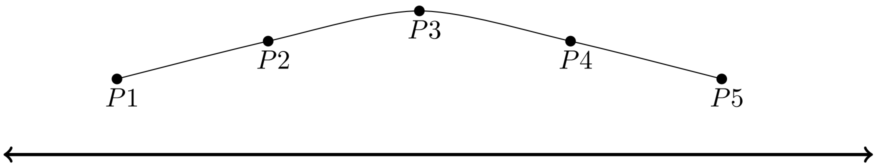


Figura 7.5: Imagen provisional

De modo que se obtiene la cadena poligonal $P_0P_1 \cdots P_n$ cuya longitud es $\ell(\mathcal{P}) = P_0P_1 + P_1P_2 + \cdots P_{n-1}P_n$, esto es

$$\boxed{\ell(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} P_{n-1}P_i}$$

Si la curva $\mathcal{C}$ tiene una longitud ℓ se tiene que $\ell(\mathcal{P}) \leq \ell$.
Supongamos que $\mathcal{Q}$ es un refinamiento de $\mathcal{P}$, entonces se obtendría otra cadena poligonal de longitud $\mathcal{Q}$ de modo que

$$\boxed{\ell(\mathcal{P}) \leq \ell(\theta) \leq \ell.}$$

De este modo se obtiene el conjunto

$$\boxed{A = \{\ell(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\text{es una partición de } [a,b]\}}$$

de longitudes de cadenas poligonales que aproximan el valor de la longitud de la curva $\mathcal{C}$. Si el conjunto A es no vacío y acotado superiormente, entonces posee supremo (ver el primer capítulo), cuando ocurra esto se dice que la curva $\mathcal{C}$ es ***rectificable***. Además, se tiene que $\ell = \sup(A)$.

Teorema 4.1

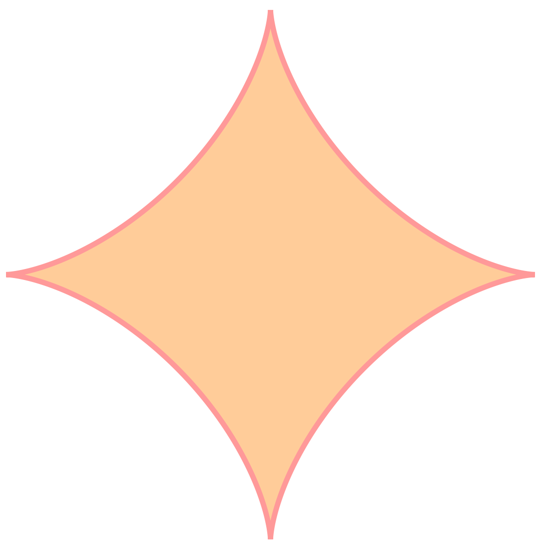
Sea $\mathcal{C}$ una curva simple parametrizada por $x(t)$, $y(t)$, $t \in [a,b]$. Si $\mathcal{C}$es una curva suave, entonces $\mathcal{C}$ es rectificable y se cumple:

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{dt}$$

Ejemplo 4.2: Longitud de arco de la astroide

La ***astroide*** $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ (un caso particular de la curva de Lamé) está parametrizada por

$$\begin{cases} x = a\cos^3(t) \\ y = a\,\mathrm{sen}^3(t) \end{cases} \quad , t \in [0, 2\pi]$$



Solución. La astroide es una curva suave, entonces es rectificable y su longitud es

$$\ell = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\, t)^2 + (3a\,\mathrm{sen}^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\ell = 12a\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^4 t\,\mathrm{sen}^2 t + \mathrm{sen}^4 \cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$\ell = 12a\int_0^{\pi/2} \sqrt{\mathrm{sen}^2 t\cos^2 t\,(\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t)}\,\mathrm{d}t$$

$$\ell = 12a\int_0^{\pi/2} |\,\mathrm{sen}\, t\cos t|\,\mathrm{d}t$$

$$\ell = 12a\,\frac{\mathrm{sen}^2 t}{2}\Big|_0^{\pi/2} = 6au$$

■

Para el caso de funciones $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ cuya gráfica es una curva simple $\mathcal{C}$ se puede parametrizar (trivialmente) por

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, t \in [a,b]$$

Si $\mathcal{C}$ es suave y rectificable, entonces su longitud es:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Así

$$\boxed{\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\,\mathrm{d}t.}$$

Ejemplo 4.3: Rectificación de la parábola

Para la curva $\mathcal{C}$ que es la gráfica de la función f dada por $f(x) = x^2, x \in [0,1]$.

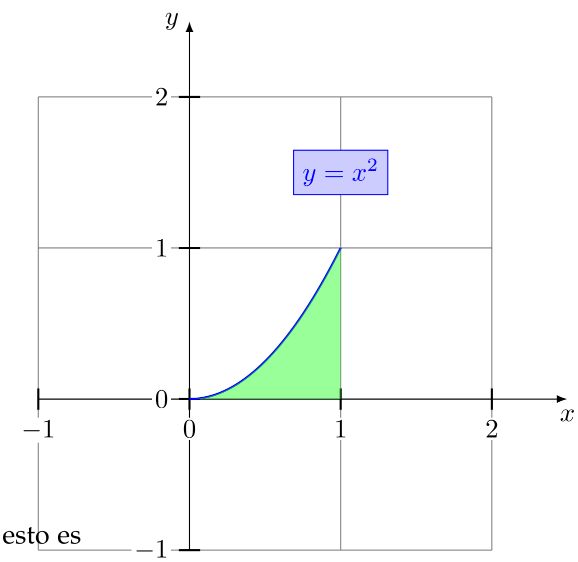
Solución. Como $\mathcal{C}$ es una curva suave, entonces la longitud del arco parabólico es igual a

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$\ell =$ Realice una sustitución hiperbólica

■



Para el caso en el que la curva $\mathcal{C}$ se expresa en coordenadas polares, esto es

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = r(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}, \theta \in [\alpha, \beta]$$

Si $\mathcal{C}$ es suave y rectificable, su longitud será igual a

$$\boxed{\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta}$$

$\ell(\mathcal{C})$ expresando en términos de $r(\theta)$ y $r'(\theta)$ es igual a:

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\theta) - r(\theta)\operatorname{sen}\theta)^2 + (r'\theta\operatorname{sen}\theta + r(\theta)\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$$
$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(r'(\theta)^2\cos^2\theta - 2r'(\theta)r(\theta)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + r(\theta)^2\operatorname{sen}^2\theta\right) + \left(r'(\theta)^2\operatorname{sen}^2\theta + 2r'(\theta)r(\theta)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + r(\theta)^2\cos^2\theta\right)}\,\mathrm{d}\theta$$
$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

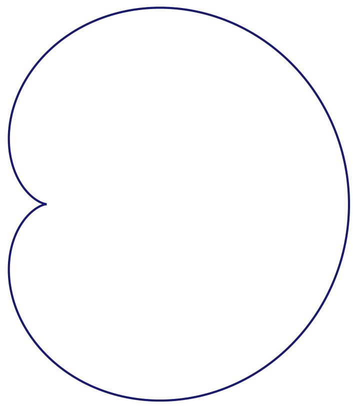
Ejemplo 4.4: Rectificación de la cardioide

La curva $\mathcal{C}$ dada por la cardioide $r(\theta) = 1 + \cos\theta, \theta \in [0, 2\pi]$.

Solución.

$$\ell = 2\int_0^\pi \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$$
$$\ell = 2\int_0^\pi \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + 1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
$$\ell = 2\int_0^\pi \sqrt{2(1+\cos\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$
$$\ell = 2\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,\mathrm{d}\theta$$
$$\ell = 2\sqrt{2}\sqrt{2}\int_0^\pi |\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|\,\mathrm{d}\theta$$
$$\ell = 4\int_0^\pi \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta$$
$$\ell = 8\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^\pi = 8u.$$

■



Ejemplo 4.5: Rectificación de la semicircunferencia

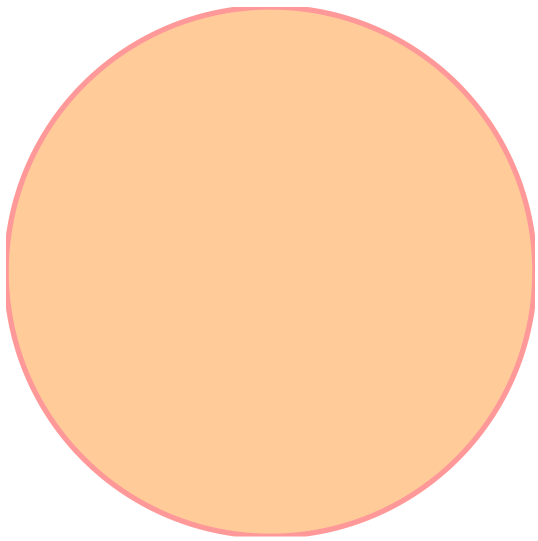
La semicircunferencia de radio a parametrizada por

$$\begin{cases} x(\theta) = a\cos\theta \\ y(\theta) = a\operatorname{sen}\theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi]$$

.

Solución. Es una curva suave, rectificable de longitud igual a:

$$\ell = \int_0^\pi \sqrt{(a\cdot -\operatorname{sen}\theta)^2 + a\cos\theta^2}\,\mathrm{d}\theta$$
$$\ell = \int_0^\pi a\,\mathrm{d}\theta$$
$$\ell = a\pi u.$$



■

Ejemplo 4.6: Rectificación de la catenaria

Considere la cadena que está suspendida en dos puntos a la misma altura sometido a un campo gravitatorio uniforme, esta cadena de curva $\mathcal{C}$ dada por la función $f(x) = \cosh(x)$ para $x \in [-L, L]$.

Solución.

$$\ell = \int_{-L}^{L} \sqrt{1 + (a\,\mathrm{senh}(x))^2}\,\mathrm{d}x$$
$$\ell = 2\int_{0}^{L} \sqrt{1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}}\,\mathrm{d}x$$
$$\ell = 2\int_{0}^{L} \sqrt{1 + \frac{e^{2x}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{4}}\,\mathrm{d}x$$
$$\ell = 2\int_{0}^{L} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}}\,\mathrm{d}x$$
$$\ell = 2\int_{0}^{L} \sqrt{\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$\ell = 2\int_{0}^{L} |\cosh x|\,\mathrm{d}x$$
$$\ell = 2\,[\mathrm{senh}(x)]\Big|_0^L$$
$$\ell = 2\,[\mathrm{senh}(L) - \mathrm{senh}(0)] = 2\,\mathrm{senh}(L)u$$

■

7.5. Área de una superficie de revolución

Esta sección inicia con la construcción de superficies. ***Una curva*** $y = f(x)$ ***que gira alrededor de un eje***. Lo que produce es una superficie de revolución, que es simétrico alrededor del eje. En el caso de un cono, haciendo un corte y abriendo la superficie se obtiene un sector circular cuyo arco es $\ell\theta$, pero que coincide con $2\pi R$, esto es $\ell\theta = 2\pi R$

$$\boxed{\theta = \frac{2\pi R}{\ell}}$$

El área del sector circular es

$$\frac{1}{2}\theta\ell^2,$$

reemplazando se obtiene

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi R}{\ell}\right)\ell^2$$

esto vendría a ser el área de la superficie del cono. Pero en el caso del tronco de un cono
se prolonga: Por semejanza:

$$\frac{x}{r} = \frac{x+\ell}{R}$$
$$x = \frac{\ell r}{R - r}$$

El área de la superficie del tronco es

$$\pi\,(x+\ell) - \pi x r = \pi\,(x(R-r) + \ell R)$$

reemplazando x se obtiene:

$$= \pi \left(\frac{\ell r}{R-r}(R-r) + \ell R \right)$$
$$= \pi \ell \left(R + r\right)$$

de esto el área del tronco de cono es igual a

$$[\pi \ell \left(R + r\right)]$$

Para obtener un sólido de revolución giramos una curva $\mathcal{C}$ simple y suave parametrizada por:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} , \theta \in [a,b] \text{ donde } a, b > 0 \text{ y } r > 2.$$

alrededor de una recta.
Supongamos que la recta sea

a) Eje X

Sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a,b]$. Se obtienen un conjunto de puntos $P_i\left(x(t_i), y(t_i)\right)$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. sobre $\mathcal{C}$. Si las $x(t)$ e $y(t)$ son de clase C^1, entonces.

Cuando gira $\mathcal{C}$ se obtiene un sólido de revolución cuya área de la superficie se puede aproximar como la suma de las áreas, de un tronco de cono generando estos por los segmentos $\overline{P_{i-1}P_i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Esto es

$$\sum_{i=1}^{n} \pi \left(y(t_{i-1}) + y(t_i)\right) d\left(P_{i-1}, P_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \pi \left(y(t_{i-1}) + y(t_i)\right) d\left(P_{i-1}, P_i\right)$$

Observación 5.1

Suponer que $x(t), y(t)$ son de clase C^1.

Por el teorema del valor medio, en cada $[t_{i-1}, t_i]$ existen t_i^*, t_i^{**} de modo que lo anterior es:

$$\sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \pi \left(\frac{y(t_{i-1}) + y(t_i)}{2} \right) \sqrt{x'(t_i^*)^2 + {}^2}$$

Observación 5.2

Se puede considerar $t_i^{***} \in [t_{i-1}, t_i]^{\text{o}}$ de modo que

$$y\left(t_i^{***}\right) = \frac{y(t_{i-1}) + y(t_i)}{2}$$

la suma sería:

Para el caso de curvas $\mathcal{C}$ que son gráficas de funciones $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, se toma una parametrización lo siguiente

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t), \theta \in [a,b] \end{cases}$$

entonces el área A de la superficie de revolución, obtenido al girar $\mathcal{C}$, alrededor del eje X es

$$A = 2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Ejemplo 5.1

Calcule el área de la superficie de revolución obtenido al girar la gráfica de la función f dada por $f(x) = 2\sqrt{x}, x \in [0, 1]$ alrededor del eje X.

Solución. El área es igual a

$$\begin{aligned}
A &= 2\pi \int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2\sqrt{x})\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 4\pi \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= 4\pi \int_0^1 (1+x)^{1/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{8\pi}{3}\,(1+x)^{3/2}\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{\pi}{3}\left(2^{9/2} - 8\right)u^2
\end{aligned}$$

■

En el caso de que la curva $\mathcal{C}$ sea una parametrización en coordenadas polares:

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = r(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta, \theta \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

El área es:

reemplazando se obtiene:

$$A = 2\pi \int_\alpha^\beta r(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \sqrt{}$$

Simplificando:

$$A = 2\pi \int_\alpha^\beta r(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}$$

Ejemplo 5.2: Área de la superficie de un cardioide

Determine el área de la superficie de revolución de un cardioide al girar alrededor del eje X

Solución. El área de la superficie de revolución es

$$
\begin{aligned}
A &= 2\pi \int_\alpha^\beta (1+\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + (1+\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_\alpha^\beta (1+\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_\alpha^\beta (1+\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 4\pi \int_0^\pi 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 32\pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \\
&= 32\frac{\pi}{5}
\end{aligned}
$$

■

Definición 5.1: Curva de Lamé

Una curva de Lamé es una curva con la siguiente ecuación cartesiana:

$$\left|\frac{x}{a}\right|^r + \left|\frac{y}{b}\right|^r = 1$$

que se puede parametrizar por

$$\begin{cases} x = a\cos^{2/r}\theta \\ y = b\operatorname{sen}^{2/r}\theta \end{cases},\theta \in [0,2\pi] \text{ donde } a,b>0 \text{ y } r>2.$$

Ejemplo 5.3: Aŕea de la superficie de un huevo

El poeta Danés Piet Hein quiso aprender mucho esta curva .

Solución. El área de la superelipse está dada por:

$$
\begin{aligned}
A &= 4b\int_0^a \left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^r\right]^{1/r}\mathrm{d}x \\
&= \frac{4^{1-1/r}ab\sqrt{\pi}\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{r}\right)}
\end{aligned}
$$

Tomemos $r=\frac{5}{2}$, entonces el área pedida es:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{S}) &= 4 \\
&=
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 5.4: Área de la superficie de un huevo

A

7.6. Centro de masa de un sistema de partículas

7.6.1. Centroides

7.6.2. Teorema del centroide de Pappus-Guldin

Capítulo 8

Aplicaciones del Cálculo integral

8.1. Aplicaciones de la fuerza y trabajo

8.1.1. Trabajo de un resorte

8.1.2. Trabajo realizado contra la gravedad

8.1.3. Trabajo realizado al vaciar un tanque

8.1.4. Fuerza ejercida por un líquido

8.2. Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias

8.2.1. Ecuaciones diferenciables separables

8.2.2. Problema del valor inicial

8.2.3. Modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales

Crecimiento y decaimiento natural

8.2.4. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Capítulo 9

Integrales impropias

9.1. Integrales impropias de primera y segunda especie

9.2. Criterios de convergencia y divergencia

9.3. Integrales impropias dependiente de un parámetro

9.4. Funciones Gamma $\Gamma(x)$ y Beta $B(m,n)$

Definición 4.1: Fórmula de Stirling para $n!$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ sea

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, \mathrm{d}x$$

Integrando por partes

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \operatorname{sen}^{n-1} x & dv = \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \\ du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x \cos x \, \mathrm{d}x & v = -\cos x \end{array}}$$

obtenemos, para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} S_n &= -\left[\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x\right]\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x \, \mathrm{d}x \\ &= -\left[(1\cdot 0) - (0 \cdot 1)\right] + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \operatorname{sen}^{n-1} x \, \mathrm{d}x \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) \operatorname{sen}^{n-2} x \, \mathrm{d}x \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \, \mathrm{d}x + (n-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n} x \, \mathrm{d}x \\ &= (n-1)\, S_{n-2} + (n-1)\, S_n \end{aligned}$$

obtenemos la fórmula de recurrencia:

$$S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2} \qquad (n \leq 2).$$

Dado que $S_0 = \dfrac{\pi}{2}$

Definición 4.2: Función Gamma de Euler

$$F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t \qquad (z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0)\,.$$

La notación $\Gamma(z)$ es debido a Legendre, quien llamó la integral como la integral euleriana de segundo orden.

9.5. π es irracional

9.6. e es trascendente

9.7. Aplicaciones de las integrales impropias

Capítulo 10

Fórmula de Taylor

10.1. Polinomio de Taylor

10.2. Fórmula del resto

10.3. Cálculo aproximado de integrales

10.4. Aplicaciones de la fórmula de Taylor

Un vistazo más allá del horizonte

Es hora de confesar que una comprensión profunda de Cálculo integral no es el fin en sí misma. Es más bien un comienzo. Este abre la puerta a un estudio más amplio de un amplio panorama de las áreas de análisis modernos, tales como análisis real multivariable, análisis de Fourier, análisis complejo, teoría de la aproximación, y varias áreas de la matemática aplicada.
Cerramos este curso con unas cuantas ideas tentadoras que pueden estimular su apetito para un estudio más profundo en cálculo y análisis funcional. Para hacer justicia a estas ideas requeriría varios capítulos, así que tendremos que conformarnos con un rápido vistazo más allá del horizonte.

Definición 4.1

Un **espacio vectorial normado** es espacio vectorial ν junto con una "norma" $\|\cdot\|$; esto es, una función de ν hacia $\mathbb{R}$ tal que $\forall u, v \in \nu$, y $\forall r \in \mathbb{R}$,

(a) $\|\cdot\| \geq 0, y\|u\| = 0$ si y solo si $u = 0$;

(b) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdad triangular);

(c) $\|ru\| = |r|\|u\|$.

En el teorema vemos que es el "supremo de la norma" definida en X que tiene las propiedades en el espacio de funciones acotadas en $[a, b]$, así como sobre un subespacio como $C[a, b]$. Pero hay otras normas comúnmente usados en $C[a, b]$ y sus subespacios; por ejemplo,

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|, \text{ y}$$
$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}.$$

Cada una de estas normas en $C[a, b]$ son útiles para ciertos propósitos, tales como en análisis de Fourier o la teoría de la aproximación. Usted puede comprobar por sí mismo que estas son realmente normas en $[a, b]$. Es bastante fácil entender por qué $\|\cdot\|_1$ podría ser útil como una norma, cuando recuerde que $\|f\|_1$ se pretende indicar la distancia de f desde la función 0, y que $\|f - g\|$ está destinado a representar la distancia entre f y g. El área *entre* las gráficas es una medida razonable de la distancia entre dos funciones.
La importancia de la segunda norma, $\|\cdot\|_2$ puede ser mejor entendido cuando se ve como más parecido a la norma familiar "euclidiana" sobre $\mathbb{R}^n$,

$$\|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Esta norma, $\|\cdot\|_2$, es comúnmente usada en la teoría de la aproximación y en análisis de Fourier, aunque no es la única. Muchos de los conceptos aprendidos en este curso se generaliza a espacios vectoriales normados. Por ejemplo, la sucesión $\{v_n\}$ en un espacio vectorial normado ν se dice que **converge** a un elemento $v \in \nu$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n \geq 0 \implies \|v_n - v\| < \varepsilon \quad \text{(es decir, } \|v_n - v\| \to 0\text{)}.$$

Así, una sucesión $\{f_n\}$ de funciones en el espacio $C[a,b]$ converge a la función f por la definición sii $f_n \to f$ uniformemente en $[a,b]$. Teorema X e Y nos dice que una sucesión $\{f_n\}$ en $C[a,b]$ converge a algún $f \in C[a,b]$ sii la sucesión es de Cauchy. Así, la teoría de convergencia de la norma de función en $C[a,b]$ estrechamente paralela a la teoría de convergencia de sucesiones de números reales.

Definición 4.2

Un espacio vectorial normado ν se dice que es **completo** si cualquier sucesión de Cauchy converge a un elemento de ν. (Del teorema X sabemos que, por la propiedad arquimediana para cuerpos ordenados, la condición es equivalente a la completitud como se definió en el capítulo X).

Por ejemplo, $C[a,b]$ (con la norma del supremo) es completo, por el teorema X e Y. Los espacios vectoriales normados completos son también llamados **Espacios de Banach** y son el curso de un área completa de la investigación matemática contemporánea.
Existen muchos espacios vectoriales normados que no son completos. Para ver esto, observe que en un espacio vectorial normado todo sucesión convergente es también de Cauchy. Por el teorema de aproximación de Weierstrass hay sucesiones de polinomios que convergen a un no polinomio en $P[a,b]$ que no convergen a un elemento de $P[a,b]$. Por lo tanto, $P[a,b]$ no es completo. Argumentos similares muestran que el espacio de funciones lineales definidas por tramos en $[a,b]$, y el espacio de funciones diferenciables en $[a,b]$ no es completo respecto a la norma del supremo. Este no es el lugar para discutir la completitud respecto a las otras normas.
Podemos

$$N_\varepsilon(v) = \{u \in \nu \colon \|u - v\| < \varepsilon\}.$$

Decimos que un conjunto $A \subseteq \nu$ es **abierto** si $\forall a \in A$, $\exists \varepsilon > 0 \mid N_\varepsilon(a) \subseteq A$, y decimos que un conjunto es **cerrado** si A^c es abierto. Similarmente, definimos un elemento $v \in \nu$ como un **punto de acumulación** de un conjunto $A \subseteq \nu$ si cada vecindad de v contiene un miembro de A distinto de v. Definimos la **clausura** de $\bar{A}$ de un conjunto $A \subseteq \nu$ como la unión de A y el conjunto de todos los puntos de acumulación de A, y se puede probar que $\bar{A}$ es el conjunto cerrado mas pequeño que contiene a A. Un conjunto $A \subseteq \nu$ es **denso** en ν si cada vecindad de cada punto de A contiene un miembro de A. Teoremas y pruebas concernientes a estos conceptos son virtualmente los mismos que los encontrados en los capítulos X.
Equipado con estos preliminares, llevamos a cabo nuestro curso con un poco de deslumbramiento . No te preocupes de todos los detalles, solo disfruta del camino. Como en la definición X, definimos el conjunto **denso en ninguna parte** en ν si su clausura, $\bar{A}$, contiene conjuntos abiertos no vacíos. La definición nos permite discutir en el contexto de conjuntos de primera y segunda categoría, as´i como lo hicimos en la sección X, pero ahora en el contexto de espacios vectoriales normados. Decimos que un conjunto $A \subseteq \nu$ es de **primera categoría** (o “pequeño”) en ν si es la unión de una colección numerable de conjuntos densos en ninguna parte, casos contrario, diremos que es de **segunda categoría**. Es importante aquí el siguiente teorema profundo, cuya prueba debemos omitir.

Teorema 4.1

Cualquier espacio vectorial normado completo es de segunda categoría.

Teorema 4.2

El conjunto de todas las funciones en $C\,[a,b]$ en alguna parte de $[a,b]$ es de primera categoría en $C\,[a,b]$.

Por definición, la unión de conjuntos de primera categoría debe ser un conjunto numerable. Además, $C\,[a,b]$ con la norma del supremo es un espacio vectorial normado completo, por lo que debería de ser de segunda categoría. Estas afirmaciones no pueden ser ambas verdaderas a menos que el conjunto de todas las funciones continua, diferenciables en ninguna parte en $C\,[a,b]$. Esto nos lleva a dos conclusiones notables :

(1) Tenemos una prueba de la existencia de funciones continuas, en ninguna parte diferenciables en $[a,b]$ que sea válida sin nunca producir un solo ejemplo.

(2) Entre todas las funciones que son continuas en todas partes en $[a,b]$, las que son diferenciables en alguna parte forman un conjunto mucho más pequeño que aquellos que aquellos que son diferenciables en ninguna parte. (Los conjuntos de primera categoría son mucho más "pequeños" que los de segunda categoría.)

Esto es una reminiscencia de la situación en el sistema de números reales. Los números racionales son superados en números por los números irracionales. Del mismo modo, los números algebraicos forman un conjunto numerable y por lo tanto son superados en números por los números trascendentales, que forman un conjunto no numerable. Con estos resultados inquietantes nos despedimos. ¡El curso es rico con tesoros por descubrir!

Referencias bibliográficas

[1] George A Anastassiou y Razvan A Mezei. *Numerical analysis using sage*. Springer, 2015.

[2] David M Bressoud. *A radical approach to real analysis*. Vol. 2. Mathematical Association of America, 2007.

[3] R.L. Burden y J.D. Faires. *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 2010.

[4] Holger Valqui Casas. «La odisea de la conjetura de Shimura-Taniyama y el último teorema de Fermat». En: *Pro Mathematica* 23.45-46 (), págs. 9-25.

[5] Ward Cheney. *Analysis for Applied Mathematics*. 1.ª ed. Graduate Texts in Mathematics 208. Springer-Verlag New York, 2001.

[6] Susan Jane Colley. *Vector calculus*. Pearson, 2011.

[7] Charles G Denlinger. *Elements of real analysis*. Jones & Bartlett Publishers, 2011.

[8] Susanna S Epp. *Discrete mathematics with applications*. Cengage Learning, 2010.

[9] Solomon Feferman. «The impact of the incompleteness theorems on mathematics». En: *Notices of the AMS* 53.4 (2006), págs. 434-439.

[10] A. D. Fitt y G. T. Q. Hoare. «The Closed-Form Integration of Arbitrary Functions». En: *The Mathematical Gazette* 77.479 (1993), págs. 227-236.

[11] Paul R Halmos. *Naive set theory*. Courier Dover Publications, 2017.

[12] Norman B Hasser, J La Salle y J Sullivan. «Análisis matemático Volumens 1». En: *Editorial Trillas* (2009).

[13] Rafael Labarca. *Construcción de los números reales a partir de los números racionales*. Universidad de Santiago de Chile: Escuela EMALCA Lambayeque, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, 2013.

[14] V. Frederick Rickey y Philip M. Tuchinsky. «An Application of Geography to Mathematics: History of the Integral of the Secant». En: *Mathematics Magazine* 53 (3 mayo de 1980).

[15] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Tata McGraw-Hill Education, 1987.

[16] Lauri Ruotsalainen y Matti Vuorinen. «Numerical methods with Sage». En: *arXiv preprint arXiv:1208.3929* (2012).

[17] M. Spivak. *Calculus*. Calculus. Cambridge University Press, 2006.

[18] James Stewart. *Single variable calculus: Early transcendentals*. Cengage Learning, 2015.

[19] Gilbert Strang. *Calculus*. Wellesley-Cambridge Press, 1991.

[20] Johnny Moisés Valverde Montoro. «Splines en la solución numérica de las ecuaciones diferenciales con retardo». En: (2012).

[21] Dennis G Zill y Patrick D Shanahan. *Complex analysis*. Jones & Bartlett Publishers, 2013.

Apéndice

1

Tabla de integrales

Apéndice

2

Una introducción a la interpolación con splines cúbicos

El ajuste de curvas que pase por puntos especificados en el plano es un problema común que se encuentra en el análisis de datos experimentales, al establecer las relaciones entre las variables, y en el trabajo de diseño.

2.1. Interpolación con splines cúbicos

2.1.1. Interpolación polinomial

En este capítulo trataremos con el siguiente problema, suponga que tiene el siguiente conjunto de datos.

¿Puede encontrar la función cuya gráfica pase a través de cada uno de los puntos? Esto es, ¿puede encontrar una función p tal que $p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1, \ldots, p(x_n) = y_n$?
El proceso de encontrar y evaluar tal función es lo que llamamos **interpolación**. $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son llamados **nodos**.
El proceso de encontrar un polinomio que pase a través de un conjunto dado de puntos es llamado **interpolación polinomial**. Este es el tópico del capítulo actual.
Existen muchas razones por qué queremos usar interpolación. Por ejemplo,si la medida de la temperatura en el exterior cada hora, entonces usando interpolación puedes *estimar* la temperatura en el exterior de cualquier minuto del día.
Podemos también aplicar esta técnica cuando nos falta datos y necesitamos algunos valores para llenarlo. Es usado ampliamente en Ciencia de la Computación. Muchas de las imágenes y vídeo usan algoritmos de compresión y descompresión usan interpolación, y entonces, usando técnicas de interpolación, podemos descomprimirlo. La restauración de imágenes, sonido digital, coordenadas GPS, videojuegos, fuentes, etc, todas usan técnicas de interpolación.
La técnica de interpolación nos ayuda a crear la transición de los discreto hacia lo continuo, y en particular, desde lo digital hacia lo analógico.
En este capítulo, por simplicidad, un **polinomio de grado** n, $n \geq 1$, significa una función $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes, y algunos de ellos (¡pero no todos!) pueden ser cero. Esto es un poco diferente a los demás cursos en matemáticas, donde un polinomio se dice que es de **grado a lo sumo** n, pero es una notación común en el lenguaje del Análisis numérico.

Observación 1.1: Nota importante

A lo largo del capítulo, asumiremos que todos los nodos x_i's son distintos.

2.1.2. Interpolación lineal

La más sencilla de la interpolaciones polinomiales es la interpolación lineal. Dados dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1), necesitamos encontrar la función lineal $p(x) = a_1 x + a_0$ que pase a través de esos dos

puntos. Esto significa, $p(x_0) = y_0$ y $p(x_1) = y_1$.
Dado que $p(x)$ es, en este caso, una función lineal, y dado que son dados dos puntos, (x_0, y_0) y (x_1, y_1), el polinomio $p(x)$ es la única recta que pasa a través de esos puntos dados. Por lo tanto, $a_1 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ es la pendiente de la recta, y $a_0 = y_1 - a_1x_1$. Además

$$\begin{aligned} p(x) &= a_1x + a_0 \\ &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot x + y_1 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot x_1 \\ &= \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) \cdot y_0 + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) \cdot y_1 \end{aligned}$$

En este punto, la fórmula debería ser más intuitiva y es equivalente a la forma X, pero más adelante veremos que es fácil de usar y memorizar una vez e ir a la cuadrática y superior grado de interpolación. Para anticipar, la forma X es llamada *Forma de Lagrange*

Ejemplo 1.1: Interpolación lineal

Dados los puntos $(2, 1)$ y $(8, 3)$. Encuentre la función lineal que interpola la tabla.

Solución. Usando la fórmula X obtenemos

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(\frac{x - 8}{2 - 8}\right) \cdot 1 + \left(\frac{x - 2}{8 - 2}\right) \cdot 3 \\ &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

■

Ahora, si deseamos estimar el valor de y para $x = 7{,}5$, obtenemos $p(7{,}5) = \frac{1}{3} \cdot 7{,}5 + \frac{1}{3} = \frac{8{,}5}{3} \approx 2{,}83333$.

2.1.3. Interpolación cuadrática

Para este tipo de interpolación, tenemos tres puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ y (x_2, y_2), y necesitaremos encontrar la función cuadrática $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ que pase a través de todos esos tres puntos. Esto significa, $p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1$ y $p(x_2) = y_2$.
Note otra vez que, por *función cuadrática*, entendemos una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son constante y ellas pueden ser todas cero. En particular, si un conjunto de puntos datos están sobre una línea recta, entonces la "función cuadrática" se vuelve una recta.
Para encontrar los coeficientes a_0, a_1 y a_2, uno puede resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 = y_0 \\ a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = y_1 \\ a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 = y_2 \end{cases}$$

Entonces la función interpolante es dada por: $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.
Luego, tendremos que encontrar la manera de encontrar $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ y esas fórmulas consistente en la siguiente subsección, la fórmula de Lagrange. La motivación de estas fórmulas serán presentadas en la siguiente subsección y además muchos detalles serán incluidos allí. Tenemos que

$$p(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$

donde

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\right)\\
L_1(x) &= \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right)\\
L_0(x) &= \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)
\end{aligned}$$

son llamados **Polinomios base de Lagrange**.
Debería ser fácil de verificar que $p(x)$ es una función cuadrática (dado que es combinación lineal de tales polinomios) y que interpola la siguiente data dada: $p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1$ y $p(x_2) = y_2$. Dados n puntos $(x_1, y_1), \ldots,$

Apéndice

3

Una introducción al Método de los Elementos Finitos (MEF)

En este capítulo estudiaremos la *Teoría de las ecuaciones en Derivadas Parciales*, tendremos en cuenta que la simulación nunca contradice el modelo (solo reproduce lo que **está en el modelo**), mientras que el experimento no depende del modelo, sino de la realidad.
Los tres pilares de la ciencia.

	Computación vs Experimentos
Costos	Se pueden probar con diferentes materiales. Por ejemplo el precio de la antimateria es de $\$62.5\,\mathrm{B}/$gramo.
Experimentos peligrosos	Por ejemplo dentro del cuerpo humano.
Imposibilidad	Por ejemplo a escalas muy pequeñas.
Variedad	Te permite estudiar diferentes modelos/parámetros de optimización.
Control del error	Controlo el error, error de la medida.

3.1. Problema bien propuesto

3.1.1. Condiciones de Neumann

3.1.2. Condiciones de Dirichlet

3.1.3. Condiciones de Robin

3.2. Formulación variacional

3.3. Derivadas débiles y espacios de Sobolev

3.4. Lema de Lax-Milgram

3.5. Desigualdad de Poincaré

3.6. Condiciones de frontera

3.7. Ecuación de Laplace

Las ecuaciones diferenciales parciales son las ecuaciones diferenciales que contienen las derivadas de las funciones desconocidas con respecto a varias variables (temporales o espaciales). En particular, si denotamos por u la función desconocida en $d+1$ variables independientes $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_d)^T$ y t, denotaremos por

$$\mathcal{P}(u,g) = F\left(\boldsymbol{x}, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_d}, \ldots, \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_d+p_t} u}{\partial {x_1}^{p_1} \ldots \partial {x_d}^{p_d} \partial t^{p_t}}, g\right) = 0 \tag{3.1}$$

una EDP genérica, g será el conjunto de datos en el cual la EDP dependa, cuando $p_1, \ldots, p_d, p_t \in \mathbb{N}$.
Diremos que es el *orden* q si q es el máximo valor tomado por el entero $p_1 + p_2 + \cdots + p_d + p_t$.

Ejemplo 7.1: Ecuación de transporte

Una ecuación lineal de primer orden es la *ecuación de transporte*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\beta u) = 0, \tag{3.2}$$

denotado por

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \qquad \boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_d)^T,$$

el *operador divergencia*. Integrado sobre una región $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, expresa la conservación de masa de un sistema material (un medio continuo) ocupando la región Ω. La variable u es la densidad del sistema, cuando $\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ es la velocidad de una partícula en el sistema que ocupa la posición $\boldsymbol{x}$ en el tiempo t.

Ejemplo 7.2

Las ecuación de segundo orden incluyen:
la *ecuación potencial*

$$-\Delta u = f, \tag{3.3}$$

que describe la difusión de un fluido en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ homogénea e isotrópica, pero también el desplazamiento vertical de una membrana elástica;
la *ecuación de calor* (o *difusión*)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f; \tag{3.4}$$

la *ecuación de la onda*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0. \tag{3.5}$$

Denotaremos por

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

al *operador de Laplace* (*Laplaciano*).

Apéndice

4

Números complejos

Las funciones exponencial y logaritmo reales juegan un rol importante en el estudio del análisis real y las ecuaciones diferenciales. En esta sección, definimos y estudiamos los análogos complejos de estas funciones. En la primera parte de esta sección, estudiamos la función exponencial compleja e^z, el cual ya fueron introducidos en las sección 4.2 y 4.3. Un concepto que no se ha discutido anteriormente, pero que se abordará en esta sección es el mapeo exponencial $w = e^z$. En la segunda mitad de esta sección, presentamos la función logaritmo complejo $\ln z$ para resolver ecuaciones exponenciales de la formar $e^w = z$, Si $\tilde{x}$ es un número real fijo positivo, entonces existe una solución *única* para la ecuación $e^y = \tilde{x}$, a saber, el valor $y = \ln(e^x)$. Sin embargo, veremos que cuando $\tilde{z}$ es un número complejo fijo no nulo, existen infinitas soluciones para la ecuación $e^w = z$. Por lo tanto, el logaritmo complejo $\ln z$ es una "función multivaluada" según la definición en la sección X. El valor principal del logaritmo complejo se definirá como una función "univaluada" que asigna a z uno de los múltiples valores de $\ln z$. Esta función de valor principal se mostrará como una función inversa de la función exponencial e^z definida en un dominio adecuadamente restringido del plano complejo. Concluimos esta sección sobre la analiticidad de las ramas del logaritmo.

Definición 0.1: Función exponencial compleja

La función e^z se define por

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$$

es llamada la ***función exponencial compleja***.

Observación 0.1: La función exponencial compleja para entradas reales

Esta función es idéntica la función exponencial real para $z \in \mathbb{R}$, esto es $z = x + 0i$, de la definición se sigue:

$$e^z = e^{x+0i} = e^x(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^x(1 + i \cdot 0) = e^x$$

La función exponencial compleja también comparte la propiedades diferenciables de la función exponencial real. Veamos en el siguiente teorema:

Teorema 0.1: La función e^x es analítica

La función exponencial e^z es analítica y su derivada está dada por:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^z = e^z.$$

Prueba. Podemos paramatrizar la función e^z como $u(x.y) = e^x \cos y$ para la parte real y $v(x, y) =$

$e^x \operatorname{sen} y$ para la parte imaginaria. De las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Por lo tanto, la función exponencial e^z es entera. Pero del teorema del pasado, la derivada de una función analítica f está dado por $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$, y así la derivada de e^z es:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}e^z = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = e^z.$$

■

Usando el hecho de que las partes reales e imaginarias de una función analítica son conjugadas y armónicas, podemos también mostrar que es la única función f entera que satisface la ecuación diferencial $f'(z) = f(z)$ es la función exponencial compleja.

Ejemplo 0.1: Derivadas de funciones exponenciales

Encuentre las derivadas de cada una de las siguientes funciones:

(a) $iz^2\left(z^3 - 2e^z\right)$.

(b) $e^{z^2-(1+i)z+3}$.

Solución. De la regla del producto para derivadas de funciones se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[iz^2\left(z^3 - 2e^z\right)\right] &= iz^2\left(3z^2 - e^z\right) + 2iz\left(z^3 - 2e^z\right) \\ &= \text{completar}\end{aligned}$$

■

Observación 0.2: La función exponencial compleja es periódica

La función exponencial compleja e^z es periódica con un periodo imaginario puro de $2\pi i$. Esto es, para la función $f(z) = e^z$, tenemos $f(z + 2\pi i) = f(z)$ para todo z.

4.1. Funciones unívocas

4.2. Funciones multivaluadas

4.3. Puntos de ramificación

4.4. Líneas de ramificación

4.5. Superficies de Riemann

4.6. Diferenciación compleja

4.6.1. Función analítica

4.6.2. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

4.7. Integración compleja

4.7.1. Teorema de Cauchy-Goursat

4.7.2. Fórmula integral de Cauchy

4.7.3. Función meromórfica

4.7.4. Serie de Laurent

Índice

Symbols
Σ, 57
ε-vecindad, 18
Álgebra de funciones, 24, 25
Área de una región acotada, 75

A
Alan M. Turing, 11
André-Marie Ampère, 22
antiderivada, 45
Augustin Cauchy, 45

B
Bolzano, 22

C
condición de integrabilidad, 68
Condiciones de Dirichlet, 172
Condiciones de Newmann, 172
Condiciones de Robin, 172
Conjunto compacto, 19
Conjunto sucesor, 5
Conjunto vacío, 5
Continuidad de una función real de variable real, 18
Convergencia de una sucesión de números reales, 18
Criterio de sucesiones para límites de funciones, 19
Criterio de sucesiones para la compacidad, 20
Criterio de sucesiones para la continuidad de f en x_0, 19
Criterio de sucesiones para la diferenciabilidad, 21

D
Derivada de una función real de variable real, 21
Desigualdad de Poincaré, 172
Diferencias centradas, 26
Diferencias segundas, 26
Disquisitiones Arithmeticae, 45
Donald Knuth, 12

E
Ecuación de Laplace, 172
Eric Temple Bell, 60
Espacio de funciones, 25

F
Félix Hausdorff, 6
familia de particiones, 65
función acotada, 65
función característica, 70
función constante, 69
función de Dirichlet, 70
función de Weierstraß, 23
Función impar, 10
función inversa, 13
Función par, 10

G
George Cantor, 6
Godfrey Harold Hardy, 22
Gráfica de una ecuación, 9

H
Hermann Hankel, 22

I
Inducción matemática, 59
integración por partes, 52
integral de Riemann, 68
integral indefinida, 47
integral inferior, 67
integral superior, 68
Interior de un conjunto, 21
Intervalo, 19

J
Joseph-Louis Lagrange, 45

K
Karl Friedrich Gauss, 60
Kazimierz Kuratowski, 6

L
Límite de una función real de variable real, 18
Lema de Lax-Milgram, 172

M
Método de los Elementos Finitos, 172
Método de Newton-Raphson, 30
método de sustitución, 48
Métodos de integración, 48
Mercator, 54

N
Norbert Wiener, 6
norma de una partición, 64

P
partición, 63
partición etiquetada, 74

partición regular, 64
Polinomio de Taylor, 34
Premio A. M. Turing, 11
Primer Teorema fundamental del cálculo, 77
Principio de inducción matemática, 62

R
Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal, 45
Regla de Simpson, 84
Regla del trapecio, 83
Riemann, 22

S
Sage, 41
Segundo Teorema fundamental del cálculo, 78
Sistema Algebraico Computarizado (CAS), 11
Sonya Kovalevsky, 12
Sucesión de funciones, 24
Sucesión de números reales, 18
suma inferior, 66
suma superior, 66

T
Teorema de Heine-Borel, 19
Teorema de incompletitud de Kurt Gödel, 11
Teorema de la función inversa para funciones monótonas continuas, 20
Teorema de Rolle, 25
Teorema de Taylor, 34
Teorema del valor extremo, 20, 25
Teorema del valor intermedio, 20
Teorema del valor medio, 25
Teorema del valor medio para integrales, 80
Teorema fundamental del cálculo, 77
Torre de Hanoi, 61

W
Weierstraß, 22
William Stein, 42
William Waterhouse, 45

Z
Zermelo-Frænkel, 5