Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática — Ciclo 2017-1

[Cod: CM-132] [Curso: Cálculo Integral ]

[Temas: Centro de un sistema de partículas. Centroide de regiones planas. Teorema de Pappus Guldin. Aplicaciones de fuerza y trabajo. Ecuaciones diferenciales ordinarias. Integrales impropias]

[Profesores: Angello Morante, Maritza Moreno, Fernando Zamudio, Ronald Mas, Juan Cribillero]

# Práctica Dirigida $N^o$ 6

---

1. Sea $\mathscr{R}$ una región cualquiera totalmente contenida en el tercer cuadrante de área $\frac{10}{3}$ y tal que su centroide se encuentra sobre la recta $y = x$ (suponga densidad igual a 1). Si el volumen del sólido generado al girar $\mathscr{R}$ respecto a la recta $y = -x$ es $20\sqrt{2}\ u^3$, determine
   a) Centroide de $\mathscr{R}$.
   b) Momento respecto al eje X de $\mathscr{R}$.
   c) Volumen del sólido generado al rotar $\mathscr{R}$ respecto a la recta $y = 1$.

2. Considere la región $\mathscr{R}$ del primer cuadrante definida como $x^2 + y^2 \leq 3$, $x^2 \leq 2y$ e $y^2 \leq 2x$. Plantee las integrales que permiten calcular:
   a) Área de $\mathscr{R}$.
   b) Centroide de $\mathscr{R}$.

3. Sea la región $\mathscr{R}$ del plano limitada por las curvas $y = (x-2)^2$ y $y = 5 - (x-1)^2$.
   a) Plantee las integrales que calculan el volumen del sólido de revolución que se genera al girar la región $\mathscr{R}$ alrededor de la recta $x = 4$.
   b) Calcule la coordenada $\overline{x}$ del centroide de $\mathscr{R}$.

4. Sea $\mathscr{R}$ la región acotada por las curvas $y = x^2$ y $x = -y^2$. Usando el teorema de Pappus halle el volumen del sólido que se genera al girar $\mathscr{R}$ alrededor de la recta $x + y = 3$.

5. Calcular la presión sobre la mitad inferior de una elipse cuyos semiejes son 2 unidades y 3 unidades
   a) Cuando el eje mayor está en la superficie del líquido.
   b) Cuando el eje menor está en la superficie.

6. Halle el centroide de la región entre la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje $X$, $0 \leq x \leq \pi$.

7. Determinar el centroide de la región limitada por las curvas: $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

8. Halle el centroide de la región acotada por la curva $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$.

9. Halle las coordenadas del centro de masa para cada uno de los siguientes casos
   a) $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = 4$
   b) $y = -x^2 + 4x + 2$, $y = x + 2$
   c) $x = 4 - y^2$, $x = 0$
   d) $y = xe^{-x}$ en el primer cuadrante.

10. Halle el centroide del arco de la astroide $\mathscr{C}: x = a\cos^3 t$, $y = a\,\text{sen}^3\, t$, en el primer cuadrante, $(a > 0)$.

11. Verifique el teorema de Pappus para la región bajo $y = \text{sen}\, x$, $0 \leq x \leq \pi$ cuando se hace girar alrededor del eje $x$.

12. Usando el teorema de Pappus, halle el volumen del sólido que se genera al rotar la región limitada por $y = -x^2 + 2x$ e $y = -4\sqrt{x}$ alrededor de $y = x + 1$.

13. Sea $\mathscr{R}$ la región limitada por la circunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$ y el eje $X$. Calcule el volumen del sólido generado por la rotación $\mathscr{R}$ alrededor de la recta $y = x - a$.

14. Una fuerza de 8 $N$, estira un resorte de su longitud natural 4 $m$ a una longitud adicional de 50 $cm$. Determine el trabajo realizado al estirar el resorte de su longitud natural hasta una longitud de 5 $m$.

15. Un tanque, en forma de cono circular recto invertido, está lleno de agua, si la altura del tanque es de 10 *pies* y el radio de la base es de 4 *pies*, encuentre el trabajo realizado al vaciar toda el agua del tanque.

16. Un tanque tiene la forma de un cilindro circular recto de raadio igual a 4 $m$ y una altura de 8 $m$. Suponiendo que está lleno de agua (pero por $m^3$ es 0,9807 $N$). Halle el trabajo efectuado para vaciar el tanque por la parte superior. Considere que el agua sea vaciada por medio de un tubo que parte de la base.

17. Determine la función $f$ que satisfaga las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x}{(1+x^2)^2} \\ f(0) &= -\frac{1}{2} \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

18. Resuelva la ecuación

$$(1-x)y' = y + 2 + 3(1-x)$$

para $x < 1$.

19. Resuelva el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos^2 x - y\tan x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

20. Resuelva la ecuación

$$(x + y + x^2y) - x(1+x^2)y' = 0$$

para $x > 0$.

21. Encuentre la solución general de la siguiente ecuación $(3x^2+1)y' - 2xy = 6x$

22. Encuentre la solución general de la ecuación $yy' = 2x^3$ y que satisface $y(0) = 0$.

23. Asumiendo que a la fecha la Organización mundial de la salud (OMS) a descubierto que la razón a la cual se expande la gripe porcina (también conocida como influenza porcina) sigue el modelo descrito por la ecuación:

$$\frac{dN}{dt} = (50 - 4t)e^{-N/5}$$

donde $N(t)$ es el número de infectados (en miles) despues de $t$ meses de haberse anunciado los primeros casos a nivel mundial, si los primeros casos anunciado por la $OMS$ fueron de 5000 infectados, determine:

a) La función $N$.

b) Después de cuántos meses el número de infectados comenzará a descender.

24. Una población $P$ de insectos aumenta a un ritmo proporcional a la población presente. Supongamos que inicialmente hay 1000 insectos y que una semana más tarde hay 2000 insectos.

a) Halle una expresión para el número $P(t)$ de insectos en cualquier instante $t$.

b) ¿Cuántos insectos habrá al cabo de medio año? ¿Y al cabo de 1 año?

25. Una especie de bacterias virulenta crece en un cultivo. Se observa que la tasa de crecimiento de la población es proporcional al número de individuos presentes. Si la población inicial es de 1000 bacterias y el número se duplica después de los primeros 30 minutos, determine la población pasada dos horas.

26. La velocidad de desintegración de una sustancia radioactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente.

   a) ¿Cuánto tarda en desintegrarse la mitad de la sustancia si un cuarto de la sustancia se desintegra en 4 años?

   b) Hace un año había 4 libras del material y ahora hay 3 libras. ¿Cuánto había hace 2 años?

27. Dada la ecuación diferencial

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\sqrt{y-1}$$

   a) Halle las soluciones.

   b) Halle una solución que satisfaga la condición $y(1) = 2$ y expréselo en forma explícita.

28. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

   a) $x(y+1)dx + (x^2+1)ye^y dy = 0$

   b) $y' = (x^2+1)(y^2+y)$

   c) $y' + 2xy = x$

   d) $x^2y' = y - xy$

29. Estudie la convergencia de las siguientes integrales, en caso sean convergentes calcule su valor:

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(2x-3)^2}\mathrm{d}x$

   b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

   c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{1+x})}\mathrm{d}x$

   d) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} x^{-3/2}\mathrm{d}x$

   e) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} x^{-2/3}\mathrm{d}x$

   f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

   g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)}\mathrm{d}x$

   h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x, \qquad a > 0$

   i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(8+x^3)^2}\mathrm{d}x$

   j) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \operatorname{sen}(x)\mathrm{dx}$

   k) $\displaystyle\int_{a}^{\infty} x^n\mathrm{d}x, a > 0, n \in \mathbb{R}$

   l) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\mathrm{d}x$

   m) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\mathrm{d}x$

   n) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\mathrm{d}x, \qquad a \in \mathbb{R}$

   o) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x$

   p) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(e^x+e^{-x})}\mathrm{d}x$

   q) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^8}\mathrm{d}x$

   r) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{x-e^x}\mathrm{d}x$

   s) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x}\operatorname{sen}(x)\mathrm{d}x$

   t) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N}$

   u) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x$

   v) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N}$

30. Determine el área de la región limitada por la curva $y = e^{-x}|\operatorname{sen}(x)|$, $x \in [0, \infty[$ y el eje $X$.

31. Demostrar que

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^m}\mathrm{d}x$$

es convergente para todo $m \in \mathbb{N}$.

**32.** Determinar el valor de $C$ para que la siguiente integral sea convergente:

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{x}{2x^2+2C}-\frac{C}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

además determine el valor de dicha integral.

**33.** Hallar los valores de los parámetros $a$ y $b$ para que

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right)\mathrm{d}x=1.$$

**34.** Estudie la convergencia de cada una de las siguiente integrales:

a) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{x^2+3x+1}{x^4+x^3+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{2x+\sqrt[3]{x+1}+5}\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_3^{\infty}\frac{x}{\sqrt{x^6+1}}\mathrm{d}x$

Uni, 19 de Junio del 2017*

*Hecho en LaTeX