Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2017-2

Recordar dibujo

[Cod: CM-132] [Curso: Cálculo Integral]
[Temas: Áreas de regiones planas, volúmenes de sólidos de revolución, coordenadas polares.]
[Prof.: Fernando Zamudio, Angello Morante, Maritza Moreno, Ronald Más, Juan Cribillero]

Práctica Dirigida N^o 4

---

1. Calcule el área de la región limitada por los siguientes curvas:

   a) $y = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1$, $y = \dfrac{x}{3} + 1$, $y = -x + 5$.

   b) $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje X.

   c) $y = \sec^2 x$, $y = \tan^2 x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

   d) $y = xe^{-x}$, $y = x^2 e^{-x}$, $x \geq 0$.

   e) $y = \ln^2(x)$, $0 < x \leq e$.

   f) $8y = x^3$ y $8y = 2x^3 + x^2 - 2x$.

   g) $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ y el eje Y, en el primer cuadrante.

   h) $y = -x^2 + 4x - 3$ y las tangentes a esta curva en los puntos: $(0,-3)$ y $(3,0)$.

   i) $y^3 = x^2$ y la cuerda que une los puntos $(-1,1)$ y $(8,4)$.

2. Calcule el valor de m tal que el área de la región determinada por la recta $y = mx$ y la parábola $y = 2x - x^2$ es igual a $36\ u^2$.

3. La parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = mx$, con $m > 0$, determinan una región de área $A(m)$. Calcule $\left(\dfrac{dA}{dm}\right)(m)$.

4. Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la curva $y = x^2 - 8x + 10$, el eje x y las rectas $x = 2$ y $x = 5$.

5. Calcule el área de la región limitada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

6. Calcule el área limitada por el eje X y las curvas $y = \operatorname{arc\,sen} x$ y $y = \arccos x$.

7. Calcule el área de la región limitada por la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y la recta $x = 2a$, donde $a > 0$ y $b > 0$.

8. Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función f con el eje X, en el intervalo indicado

   a) $f(x) = |x| - |x-1|$ en $[-1, 2]$

   b) $f(x) = x\ln^2(x)$ en $[1, e]$

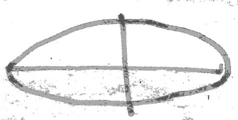
   c) $(x-1)(x-2)x$ en $[0, 2]$

9. Calcule el área de la región limitada por el bucle de la curva $y^2 = x(x-1)^2$.

10. Halle la ecuación de la recta que pasa por el origen y determina en la región limitada por la curva $y = 6x - x^2$ y el eje X dos regiones equivalentes.

11. La región $\mathscr{R}$ limitada por la recta $y = x$, el eje X y la parábola $y = 2x - x^2$, $x \geq 1$, es la base de un sólido. Calcule el volumen de este sólido, considerando que las secciones transversales perpendiculares al eje X son regiones semielípticas con eje menor contenido en $\mathscr{R}$ y eje mayor de longitud dos veces la del menor.

$x=2$



12. La base de un solido es un círculo de longitud de radio r y las secciones planas perpendiculares a un diámetro de la base están limitadas inferiormente por una cuerda del círculo y superiormente por una semi-elipse cuyo eje menor está contenido en la base del sólido y eje mayor de longitud dos veces la del menor. Calcule el volumen del sólido.

13. La base de un sólido es la región limitada por una circunferencia de radio $a > 0$. Calcule el volumen, si las secciones transversales paralelas al diámetro son triángulos rectángulos isósceles con hipotenusa sobre la base de dicho sólido.

14. Dos cilindros circulares rectos, ambos de longitud de radio igual a R, se intersecan tal que sus ejes son perpendiculares. Calcule el volumen del solido determinado por los cilindros.

15. Calcule el volumen del sólido que se determina al intersecar dos cilindros circulares rectos ortogonales de longitudes de radio a y $2a$.

16. La base de un solido es la región $\mathscr{R}$ limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$. Calcule el volumen del sólido, si las secciones transversales perpendiculares al eje Y son arcos parabólicos de altura fija h y contenidas en $\mathscr{R}$.

17. Hallar el volumen de el elipsoide obtenido mediante la rotación de la región acotada por la curva $y = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$ y el eje X, alrededor del eje X.

18. Calcule el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ y el eje X, alrededor del eje X.

19. Por el método de las capas cilíndricas demuestre que el volumen del sólido generado por la región

$$\mathscr{R} = \{(x, y)/0 \leq x \leq \sqrt{y^3}, 0 \leq y \leq 3\}$$

al girar una vuelta alrededor de la recta $y = -1$ es igual a $\frac{792\sqrt{3}\pi}{35}$.

20. Un sólido de revolución se genera por la rotación de la región limitada por la parábola $y = 16 - x^2$ y el eje X, alrededor del eje Y. Calcule la longitud del radio del cilindro circular recto de volumen máximo contenido en este sólido.

21. Una cuerda $\overline{AB}$ de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ paralela al eje X determina en la region limitada por la elipse y el eje X dos regiones tal que los solidos de revolución generados al rotar las regiones alrededor del eje X son equivalentes. Calcule la distancia del centro de la elipse a la cuerda $\overline{AB}$.

22. Hallar el volumen del sólido de revolución haciendo girar alrededor del eje X la región limitada por los siguientes lugares geométricos:

   a) La parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$.
   b) La hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
   c) $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$.
   d) La bruja $(x^2 + 4a^2)y = 8a^3$, $y = 0$.
   e) $y^2(4 + x^2) = 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 8$.

23. Calcule el volumen generado al rotar la región encerrada por la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ llamada Astroide, alrededor:

   a) del eje Y.
   b) de la recta $x = 1$.
   c) de la recta $x = 4$.

24. Expresar la ecuación $r = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$ en coordenadas rectangulares. ¿$(0, 0)$ es un punto de esta curva?

25. Determine en coordenadas cartesianas las ecuaciones de las curvas:

a) $r = a \operatorname{sen} \theta$

b) $r = \cos 2\theta$

c) $r = \operatorname{sen} 3\theta$

26. Hallar la expresión en coordenadas polares de la distancia de dos puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2).

27. Grafique

a) $r = 7$

b) $r = 4\cos\theta$

c) $r = -7\operatorname{sen}\theta$

d) $r = 5 - 5\operatorname{sen}\theta$

e) $r = 7 - 6\cos\theta$

f) $r = 2 + 4\cos\theta$

28. Grafique las siguientes curvas:

a) $r = 4\operatorname{sen}\theta$.

b) $r = 1 + \cos\theta$.

c) $r = 2\cos 4\theta$.

d) $r = 3\operatorname{sen} 4\theta$.

e) Región dentro de $r = 2\operatorname{sen}\theta$ y fuera de $r = 1$.

f) Dentro de $r = \cos\theta$ y fuera de $r = \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta$.

g) Dentro de $1+\cos\theta$ y fuera de $r = \cos\theta$.

h) Dentro de $r^2 = \cos 2\theta$ y fuera de $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$.

i) La región interior a las curvas $r = 3 + \cos 4\theta$ y $r = 2 - \cos 4\theta$.

29. Considere la lemniscata $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$.

a) Esbozar la gráfica.

b) Determine la ecuación en coordenadas cartesianas.

c) Sea el punto P en el plano cartesiano, y las distancias d_1, de P al punto $(-a, 0)$ y d_2 de P al punto $(a, 0)$. Demuestre que la lemniscata esta formada por los puntos P que cumplen $d_1 d_2 = a^2$.

d) ¿Qué forma van a tener los puntos P que satisfacen $d_1 d_2 = b$, siendo en cada caso $b > a^2$ y $b < a^2$.

30. Relacione las ecuaciones polares con las gráficas I-VI. Dé razones para sus elecciones. (No utilice dispositivos de graficación.)

a) $r = \sqrt{\theta}, \quad 0 \le \theta \le 16\pi$

b) $r = \theta^2, \quad 0 \le \theta \le 4\pi$

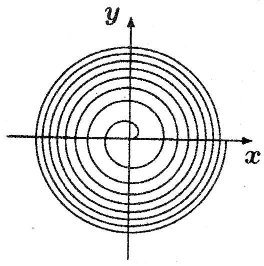
c) $r = \cos\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$

d) $r = 1 + 2\cos\theta$

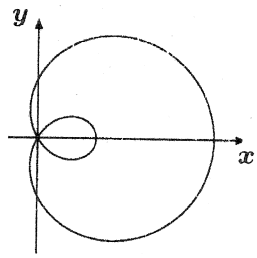
e) $r = 2 + \operatorname{sen} 3\theta$

f) $r = 1 + 2\operatorname{sen} 3\theta$

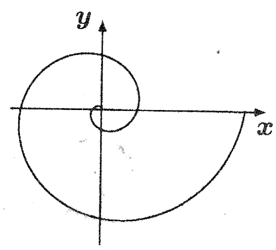
I.



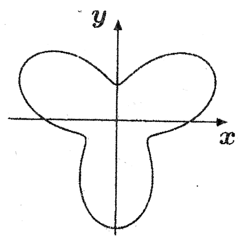
IV.



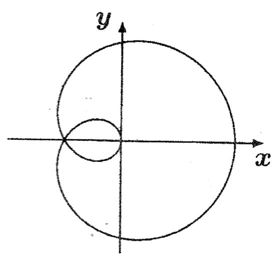
II.



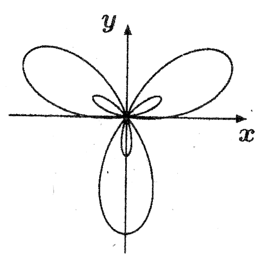
V.



III.



VI.



Uni, 30 de octubre del 2017*

*Hecho en LaTeX