Notas de clase de Cálculo Integral

Facultad de Ciencias - Universidad Nacional de Ingeniería - Lima - Perú

Descarga la versión actualizada en `http://github.com/carlosal1015`

Actualizado al 14 de abril de 2017.

Índice general

Capítulo 1

Primera clase 14 de marzo del 2017

1.1. Bibliografía

1. Armando Venero Análisis Matemático II

2. Hasser La Salle Análisis Matemático II

3. Álvaro Pinzón Calculus II.

4. Mitacc L. Toro Cálculo II.

5. Swokowski.

6. Moisés Lázaro.

7. Eduardo Espinoza Ramos.

1.2. Recomendaciones

Llegar temprano, máximo 8:15 a.m
Oficina R1-325 (consultas por la mañana)
Es un curso netamente práctico.
El labor del estudiante es ver ejercicios de ciclos pasados y reforzar con prácticas pasadas.
Son 6 prácticas calificadas, de ellas se promedian 5 prácticas calificadas, un examen parcial y un examen final.
Los temas de Integral de Riemann, integral definida y el teorema fundamental de Cálculo son evaluaciones de aspecto teórico.
Habrá un test que durará 10 minutos al final de cada clase de dos preguntas. Es libre y acumulativo. El objetivo es desarrollar habilidad y competencia en corto tiempo, empeño, práctica, ordenarse, cumplir el orden.
Antiderivada o integral indefinida.

Definición 1. *Sean $\mathcal{I}$ un intervalo, $f\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ una función y $F\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ otra función. Se dirá que F es una antiderivada de f si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in \mathcal{I}$*

Observación:

* F es derivable en $\mathcal{I}$.

* F es continua en $\mathcal{I}$.

Ejemplo 1.2.1 Resolver:

Sea $f(x) = \sin x$; $x \in [0, 2\pi]$ entonces $F(x) = -\cos x$; $x \in [0, 2\pi]$ sería la antiderivada de $f(x)$, ya que $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [0, 2\pi]$.

Ejemplo 1.2.2 Resolver

Sea $f(x) = x^n,\ n \geq 0$; $x \in \mathbb{R}$ entonces $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ sería una antiderivada de f, ya que $F'(x) = x^n = f(x), x \in \mathbb{R}$.
Ojo: $f(x) = x^n;\ n \neq -1;\ x \in \mathbb{R} \implies F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ también es una antiderivada de f.

Propiedades:

1. Sea $\mathcal{I}$ un intervalo, $f\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ una función. Si F es una antiderivada de f, entonces $F(x) + C$ es también una antiderivada de f y C una constante.
   Veamos :
   Sea $G(x) = F(x) + C$.
$$\begin{aligned} \implies G'(x) &= (F(x) + C)' \\ &= F'(x) + 0. \\ &= F'(x) = f(x). \\ \implies G'(x) &= f(x). \end{aligned}$$
   $\therefore F(x) + C$ es una antiderivada de f en $\mathcal{I}$.

2. Si F y G son dos antiderivadas de f, entonces estas se diferencian en una constante.
   Veamos :
   Sea $H(x) = F(x) - G(x),\ x \in \mathcal{I}$
$$\begin{aligned} \implies H'(x) &= (F(x) - G(x))' \\ &= F'(x) - G'(x). \\ &= f(x) - f(x). \\ \implies H'(x) &= 0,\ x \in \mathcal{I}. \\ \implies H(x) &= C,\ x \in \mathcal{I}, \end{aligned}$$
   Donde C es una constante.
$$\implies F(x) - G(x) = C.\blacksquare$$

1.3. Integral indefinida

Definición 2. *Sea $\mathcal{I}$ un intervalo y $f\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ una función, donde F es una antiderivada de f sobre $\mathcal{I}$. Se denota la integral indefinida de f como $\int f(x)\,dx$ ($\int f$) el cual se define como:*

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C;\ x \in \mathcal{I}$$

Ejemplo 1.3.3 Resolver

Si $f(x) = \sec^2(x);\ x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ y $F(x) = \tan x$ una antiderivada de f, entonces

$$\int f(x)\ dx = \int \sec^2(x)\ dx = \tan x + C = F(x) + C$$

Observación: $\int f'(x)\ dx = f(x) + C$.

Ejemplo 1.3.4 Determine la integral de

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

Veamos :

$$f(x) = x^{-3};\ x \neq 0.$$

$$\Longrightarrow\ F(x) = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2}$$

$$\Longrightarrow\ F(x) = -\frac{1}{x^2};\ x \neq 0 \text{ es una antiderivada de } f,$$

entonces:

$$\int f(x)\ dx = \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C,\ x \neq 0.$$

$$\Longrightarrow\ \int f(x)\ dx = \int \frac{dx}{x^3} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2x^2} + C & \text{, si } x \in]0, +\infty[\\ -\dfrac{1}{2x^2} + C & \text{, si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

Nótese que se está expresando el dominio de F como intervalos.

Propiedad:
Sean $\mathcal{I}$ un intervalo, $f, g\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ dos funciones y F, G antiderivadas de f y g respectivamente.
Entonces:

a) $F(x) \pm G(x) = (F \pm G(x))$ es una antiderivada de $f(x) \pm g(x) = (f \pm g(x))$ y

$$\int (f \pm g)(x)\ dx = \int (f(x) \pm g(x)\ dx = F(x) \pm G(x) + C,\ x \in \mathcal{I}, C \text{ constante.}$$

b) αF es una antiderivada de αf y

$$\int \alpha f(x)\ dx = \alpha F(x) + C$$

donde α y C son constantes.

Veamos :

a) $[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$.

$$\Longrightarrow \quad (F \pm G)'(x) = (f \pm g)(x)$$

y

$$\int (f \pm g)(x)\ dx = (F \pm G)(x) + C$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\ dx = F(x) \pm G(x) + C$$

Observación:

$$\begin{aligned} \int [f(x) \pm g(x)]\ dx &= F(x) \pm G(x) + C \\ &= \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx \end{aligned}$$

Veamos :

b)

$$\begin{aligned} [\alpha\ F(x)]' &= \alpha\ F'(x) \\ &= \alpha\ f(x) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad \alpha\ F$ es una antiderivada de $\alpha\ f,\ x \in \mathcal{I}$. También:

$$\int \alpha\ f(x)\ dx = \alpha \int f$$

Ejemplo 1.3.5 Calcule la integral indefinida de

$$f(x) = \sqrt{2} \sec x \tan x - \frac{1}{x^2} + 3\sec^2 x$$

Veamos :

$$I = \int f(x)\ dx = \int [\sqrt{2} \sec x \tan x - \frac{1}{x^2} + 3\sec^2 x]\ dx$$

$$I = \int \sqrt{2} \sec x \tan x\ dx - \int \frac{1}{x^2}\ dx + \int 3\sec^2 x\ dx$$

$$I = \sqrt{2} \int \sec x \tan x\ dx - \int \frac{1}{x^2}\ dx + 3 \int \sec^2 x\ dx$$

$$I = \sqrt{2} \sec x + \frac{1}{x} + 3\tan x + C.$$

Ejemplo 1.3.6 Resuelva el siguiente ejercicio

Sean $f, F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tal que $F(x+y) = F(x) + F(y)$ y $-x^2 + x \leq F(x) \leq x\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Si F es una antiderivada de f en $\mathbb{R}$, pruebe que

$$\int -\frac{\sqrt{[1 + f^2(x)]^3 dx}}{x^2 f(x)} = 2\sqrt{2} \frac{f(x)}{x} + C.$$

Veamos :
Como F es una antiderivada de f, entonces:

$$F'(x) = f(x), x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{z \to x} \frac{F(z) - F(x)}{z - x}$$

$$\Longrightarrow x + y = z \Longrightarrow y = z - x, y \to 0.$$

$$\lim_{z \to x} \frac{F(z) - F(x)}{z - x} = \lim_{y \to 0} \frac{F(y)}{y}.$$

¿Cuánto valdrá el $\lim_{y \to 0} \dfrac{F(y)}{y}$? Pero:

$$-y^2 + y \leq F(y) \leq y$$

multiplicamos por $\dfrac{1}{y}$.

$$\Longrightarrow -y + 1 \leq \frac{F(y)}{y} \leq 1$$

$$\Longrightarrow \lim_{y \to 0} -y + 1 = 1, \text{ por el teorema del emparedado.}$$

$$\Longrightarrow \lim_{y \to 0} \frac{F(y)}{y} = 1$$

$$\Longrightarrow F'(x) = f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego:

$$\int -\frac{\sqrt{[1 + f^2(x)]^3}}{x^2 f(x)} dx = 2\sqrt{2} \cdot \frac{f(x)}{x} + C$$

$$\Longrightarrow \int -\frac{\sqrt{[1 + 1^2]^3}}{x^2 \cdot 1} dx = -2\sqrt{2} \int \frac{1}{x^2} dx = 2\sqrt{2} \frac{1}{x} + C = 2\sqrt{2} \cdot \frac{f(x)}{x} + C. \blacksquare$$

Nota: La derivada no respeta la desigualdad:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$f'(x) \leq g'(x) \leq h'(x)$$

Ejemplo 1.3.7 Pruebe que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x \in [-1, 0[\\ 1 & , \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

no posee antiderivada en $[-1, 1]$.

Reflexión de la clase y consejo del profesor Richard Acuña:
"No todas las funciones poseen antiderivadas."
Resolver la dirigida de forma consciente, no debe ser una mera práctica y hacer el esfuerzo.
Alumno estrella de la clase: Todo el salón.

Capítulo 2

Segunda clase 16 de marzo del 2017

$F' = f$.

$$F'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

$$F'(0) = F'_+(0) = F'_-(0).$$

$$F'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}.$$

$$F'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}.$$

Veamos :
Por contradicción.
Existe una función $F\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)\ \forall\, x \in [-1,1]$. Pero si F es diferenciable en $[-1,1]$, entonces por el *Teorema del Valor Medio*:

a) Si $0 \leq x \leq 1,\ \exists\, c \in [0,1]^{o}$[1] tal que

$$\begin{aligned} F'(c) &= \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}. \\ \Longrightarrow \quad f(c) &= \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}. \\ \Longrightarrow \quad F(x) &= x + F(0). \end{aligned}$$

b) Si $-1 \leq x \leq 0,\ \exists\, d \in [-1,0]^{o}$ tal que

$$\begin{aligned} F'(d) &= \frac{F(0) - F(x)}{0 - x}. \\ \Longrightarrow \quad f(d) &= \frac{F(0) - F(x)}{0 - x}. \\ \Longrightarrow \quad F(x) &= F(0). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$F(x) = \begin{cases} x + F(0) & ,\ \text{si } x \in [0,1] \\ F(0) & ,\ \text{si } x \in [-1,0[\end{cases}$$

[1] Sea A un conjunto de números reales. Un número real x se dice que es un **punto interior** de A si $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $N_\epsilon(x) \subseteq A$. El **interior de** A es el conjunto $A^{o}\{x \mid x \text{ es un punto interior de } A\}$. Ver [Den11]

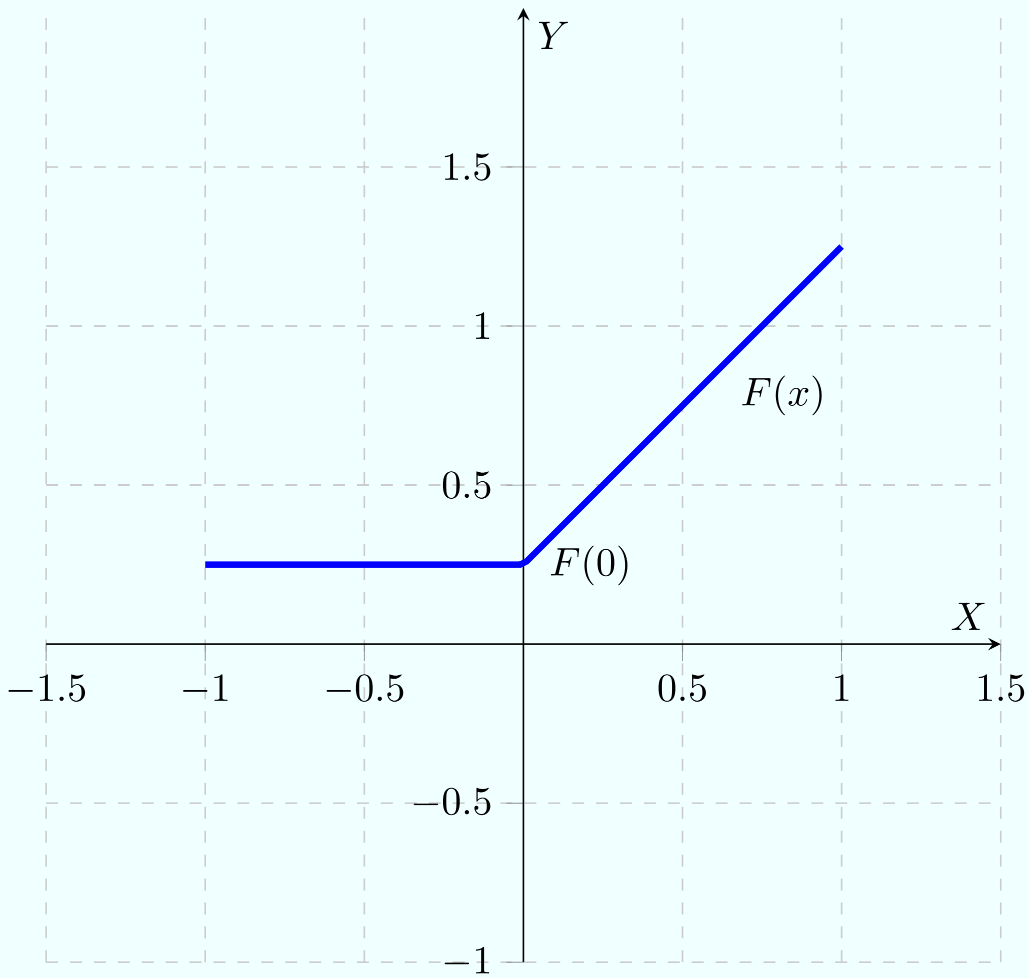

Figura 2.1: Esbozo de la gráfica $F(x)$

Pero $\nexists\, F'(0)$. ($\Longrightarrow\Longleftarrow$) ¿Por qué? $\therefore \nexists\, F\ \forall x \in [-1, 1]$.

Capítulo 3

Técnicas de integración

3.1. Sustitución algebraica

Este método proviene de la regla de la cadena para derivar composición de funciones, por lo tanto tiene que ver con la integración de funciones compuestas. En general, vamos a sustituir polinomios.

Ejemplo 3.1.8 Resolver la siguiente integral indefinida.

$$\int t^2\sqrt{t^3+2}\,dt$$

Veamos :
Por sustitución algebrica entendemos sustituir una variable por una variable trigonométrica.

$$\boxed{t^3+2=x^2}$$

$$\begin{array}{rrcl} \Longrightarrow & d(t^3+2) & = & d(x^2) \\ \Longrightarrow & 3t^2\,dt & = & 2x\,dx \\ \Longrightarrow & t^2\,dt & = & \dfrac{2}{3}x\,dx \end{array}$$

$$\int t^2\sqrt{t^3+2}\,dt = \int \sqrt{t^3+2}\,t^2dt = \int \sqrt{x^2}\frac{2}{3}xdx = \frac{2}{3}\int x^2dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+C.$$

$$\Longrightarrow \int t^2\,\sqrt{t^3+2}dt = \frac{2}{9}[t^3+2]^{\frac{3}{2}}+C.$$

Observación:

$$\int f(x)f'(x)dx = \int f(y)dy = \frac{y^2}{2}+C = \frac{1}{2}f^2(x)+C.$$

Sustitución algebraica:

$$\boxed{y=f(x) \iff dy=f'(x)dx}$$

3.2. Sustitución trigonométrica

Sustituir una variable por una función trigonométrica. Recordemos que todo cambio es para facilitar, en nuestro caso, la integración.

Ejemplo 3.2.9 Resolver:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Veamos :
Sustitución trigonométrica:

$$\boxed{x = \sin t \iff dx = \cos t}$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt.\\ &= \int \cos t\,\cos t\,dt = \int \cos^2 dt.\end{aligned}$$

Recordando:

$$\int \cos 2t\,dt = \int (\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt = \int (2\cos^2 t - 1)\,dt = \int \frac{1}{2}[\cos 2t + 1]\,dt.$$

$$\int \frac{1}{2}[\cos 2t\,dt + 1]dt = \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt + \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{4}\int [\cos 2t\,d(2t) + \frac{1}{2}\int\,dt = \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t + C.$$

$$= \frac{1}{4}(2\sin t\cos t) + \frac{1}{2}t + C.$$

Para despejar $\cos t$, veamos 3.1, el triángulo ABC.

$$\cos t = \sqrt{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

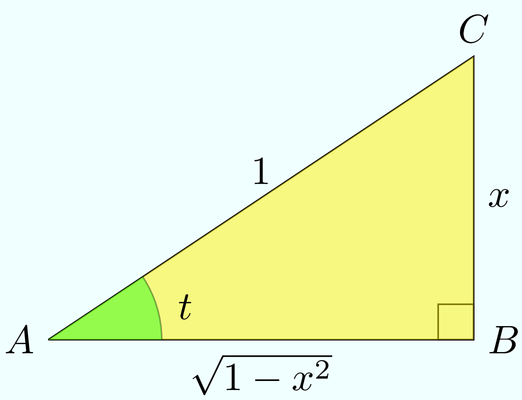

Figura 3.1: Triángulo ABC

3.3. Integración por partes

Proviene de la regla del producto para derivadas. En términos generales, la idea de este método es convertir la integral dada en una integral más fácil de resolver. La idea es degradar la expresión polinómica hasta reducir solo al objeto trigonométrico.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

ó

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x)$$

Nota: No se altera la variable cuando hacemos uso del método de integración por partes. Normalmente se escoge a $u = K[x]$ y a $dv = \sin, \cos, \tan, \cot, etc.$

Ejemplo 3.3.10 Resolver:

$$\int x \sin x\,dx$$

Veamos :
Por integración por partes:

$$\begin{array}{ll} u = \sin x & dv = x\,dx \\ du = \cos x\,dx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \int x\sin x\,dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx.$$

$\displaystyle\int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx$. ¿Es muy difícil? Cambiemos la manera de integrar por partes.

Pero:

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = \sin x\,dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{array}$$

$$\Longrightarrow \int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C. \quad \square$$

Ejemplo 3.3.11 Calcule:

$$\int \arctan x\,dx$$

Veamos :

$$\begin{array}{rclc} u & = & \arctan x & dv = dx \\ du & = & \dfrac{dx}{x^2+1} & v = x \end{array}$$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x\,dx}{x^2+1}.$$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

$$\tan u = x \implies \sec u = \sqrt{1+x^2}$$

$$\sec^2 u = 1 + x^2$$

Luego:

$$\begin{aligned} d(u) &= d(\arctan x), \text{ pero} \tan u = x \\ \sec^2(u)\,du &= dx \\ (1+x^2)\,du &= dx \implies du = \frac{dx}{1+x^2}. \end{aligned}$$

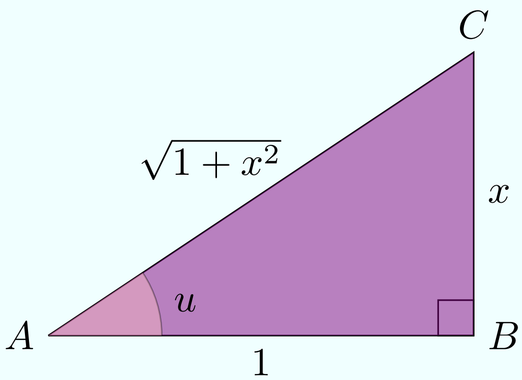

Figura 3.2: Triángulo ABC

Ejercicio 1. *Si $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son dos funciones diferenciables sobre $\mathbb{R}$ tal que $f'(x) = g(x)$ y $g'(x) = -f(x); \forall x \in \mathbb{R}$, donde $f(0) = 1$ y $g(0) = 0$. Por demostrar $f(x)g(x) \leq \frac{1}{2}\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.*

Veamos :

$$f'(x) = g(x).$$

Multiplicando por $f(x)$.

$$\implies f(x)f'(x) = f(x)g(x).$$

$$f(x)f'(x) = -g'(x)g(x).$$

$$\implies \int f(x)f'(x)\,dx = \int -g'(x)g(x)\,dx.$$

$$\frac{1}{2}f^2(x) = -\frac{1}{2}g^2(x) + C.$$

Pero $f(0) = 1; g(0) = 1$.

$$\begin{aligned} \implies \frac{1}{2}f^2(0) &= -\frac{1}{2}g^2(0) + C. \\ \implies \frac{1}{2}(1)^2 &= -\frac{1}{2}(0) + C. \\ \implies C &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Bien, si reemplazamos $C = 2$ en la expresión anterior nos resultará: $f^2(x) + g^2(x) = 1 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. También:

$$[f(x)^2 - g^2(x)]^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow \ f^2(x) + g^2(x) - 2f(x)g(x) \geq 0$$
$$\Longrightarrow \ 1 - 2f(x)g(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow \ f(x)g(x) \leq \frac{1}{2} \ \forall x \in \mathbb{R}. \ \blacksquare$$

Ejemplo 3.3.12 Calcule

$$I = \int \frac{\arctan(\sqrt{x})\, dx}{\sqrt{x + 2x^2 + x^3}}$$

Veamos :

$$I = \int \frac{\arctan(\sqrt{x})dx}{\sqrt{x}\sqrt{1 + 2x + x^2}}$$

Sustitución algebraica:

$$\boxed{x = y^2 \iff dx = 2y\, dy}$$

$$I = \int \frac{\arctan(y) 2y\, dy}{y\,(1 + y^2)} = 2\int \frac{\arctan y\, dy}{1 + y^2} = 2\int \arctan y\, (\arctan y)' = 2[\frac{1}{2}\arctan^2 y + C_1]$$

$$I = \arctan^2 y + 2C_1 = \arctan^2(\sqrt{x}) + C$$

Ejemplo 3.3.13 Calcule

$$J = \int \frac{\arcsin(\frac{1}{x})dx}{x^5}$$

Veamos :
Cambio de variable, agrupo en 2, desdoblo e intregro por partes.
Sustitución algebraica:

$$\boxed{\frac{1}{x} = y \iff \frac{-dx}{x^2} = dy}$$

Luego nos queda:

$$J = -\int y^3 \arcsin y\, dy$$

Integrando por partes J:

$$\begin{aligned} u &= \arcsin y & dv &= -y^3 dy \\ du &= \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} & v &= \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.14 Resolver:

$$\int \frac{x\cos x - \sin x + 1}{[x+\cos x]^2}\,dx$$

Veamos :
Sugerencia:

$$\boxed{\sin x^2 + \cos x^2 = 1}$$

Ejemplo 3.3.15 Primera prácticada calificada 2015-2

Un móvil se desplaza con una aceleración $a(t) = e^{\sin t}(2\cos t - t\sin t + t\cos^2 t)m/s^2$ para cada instante de tiempo t. Asumiendo que inicia su movimiento en el tiempo $t = 0$ con una velocidad inicial de $1m/s$, determine su desplazamiento en cada instante $t(t \geq 0)$.
Veamos :

$\star$ Integral *Azul*

$$a'(t) = v(t) = 2\int e^{\sin t}\cos t\,dt - \int e^{\sin t} t\sin t\,dt + \int e^{\sin t} t\cos^2 t\,dt$$

$\star$ Integral *Rojo*

$\star$ Integral *Verde*

Figura 3.3: Esquema de trabajo

Resolviendo la integral azul por sustitución:

$$2\int e^{\sin t}\cos t\,dt$$

$$u = \sin t \quad \Longrightarrow \quad du = \cos t\,dt$$

Luego nos queda:

$$2\int e^u du = 2[e^u + C] = 2[e^{\sin t} + C] = 2e^{\sin t} + C_1$$

Resolviendo la integral rojo:

$$\int e^{\sin t} t\sin t\,dt$$

Esta integral no se puede expresar en términos sencillos, ver el teorema de Liouville [FH93].
Resolviendo la integral verde por el método de integración por partes:

$$\int e^{\sin t} t\cos^2 t\, dt$$

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & t\cos t & & dv & = & e^{\sin t}\cos t\, dt \\ du & = & (\cos t - t\sin t)\, dt & & v & = & e^{\sin t} \end{array}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int e^{\sin t} t\cos^2 t\, dt &= t\cos t\, e^{\sin t} - \int e^{\sin t}(\cos t - \sin t)\, dt \\ &= \int e^{\sin t}\sin t\, dt - \int e^{\sin t}\cos t\, dt + t\cos t\, e^{\sin t} \end{aligned}$$

¡Vamos en la mitad del ejercicio!
Reemplazando en $a'(t) = v(t)$, nos queda:

$$v(t) = 2\int e^{\sin t}\cos t\, dt - \int e^{\sin t} t\sin t\, dt + \int e^{\sin t}\sin t\, dt - \int e^{\sin t}\cos t\, dt + t\cos t\, e^{\sin t} + K$$

$$v(t) = \int e^{\sin t}\cos t\, dt + t\cos t\, e^{\sin t} + K$$

$$v(t) = e^{\sin t} + t\cos t\, e^{\sin t} + K$$

Usamos el dato del el ejercicio: Velocidad en el tiempo $t = 0s$ es $1m/s \therefore v(0s) = 1m/s$.

$$v(0) = e^{\sin 0} + 0\cos 0\, e^{\sin 0} + K = 1\, m/s.$$

Es decir,

$$e^0 + 0 + K = 1 \implies K = 0.$$

Luego:

$$v(t) = e^{\sin t} + t\cos t\, e^{\sin t}$$

Como $\dfrac{ds}{dt} = v(t) \implies ds = v(t)\, dt$. Integrando esta expresión nos queda:

$$\int ds = \int v(t)\, dt$$

$$s(t) = \int (e^{\sin t} + t\cos t\, e^{\sin t})\, dt$$

$$s(t) = \int e^{\sin t}\, dt + \int t\cos t\, e^{\sin t}\, dt$$

La $\int e^{\sin t}\, dt$ se tiene que cancelar de alguna manera y debemos usar el método de integración por partes que nos genera la integral opuesta que lo reduzca a cero en la expresión anterior, sino no se podrá calcular $s(t)$, también por el teorema de Liouville no se puede calcular de manera sencilla.
¡Ya falta poco!

$$\int t\cos t\, e^{\sin t}\, dt$$

$$\begin{array}{rcrl} u = t & & dv = & e^{\sin t}\cos t \\ du = dt & & v = & e^{\sin t} \end{array}$$

Luego:

$$\int t\cos t\, e^{\sin t}\, dt = e^{\sin t}\, t - \int e^{\sin t}\, dt$$

¡Bien! Logramos obtener el opuesto de la integral que no se puede calcular en términos sencillos. Ahora:

$$s(t) = \int e^{\sin t}\, dt + \int t \cos t \, e^{\sin t}\, dt$$

$$s(t) = \int e^{\sin t}\, dt + e^{\sin t}\, t - \int e^{\sin t}\, dt$$

$$\boxed{s(t) = e^{\sin t}\, t + K_2 \;\forall\; t \geq 0}$$

Gracias profesor Metzger. Alumno estrella de la clase: Gustavo Acuña.

Capítulo 4

Tercera clase 28 de marzo del 2017

Capítulo 5

Cuarta clase 28 de marzo del 2017

Capítulo 6

Primera práctica dirigida

26) Resuelva el siguiente problema de valor inicial

$$y'(x) = \tan^2(x + y(x)).$$

$$y(\pi/4) = \pi/4.$$

Solución:
Sea $u = x + y(x)$ y derivamos la expresión anterior:

$$u' = 1 + y'(x)$$

$\implies y'(x) = \tan^2(u) \implies u' = 1 + \tan^2(u) = \sec^2 u$. Luego:

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 u \implies \cos^2 u\, du = dx$$

Integramos:

$$\int \cos^2 u\, du = \int dx$$

Pero: $\cos^2 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1$, es decir $\cos^2(u) = \dfrac{1 + \cos 2u}{2}$.

$$\int \frac{\cos(2u) + 1}{2}\, du = x + K$$

$$\frac{1}{2}\int \cos 2u\, du + \frac{1}{2}\int du = x + K$$

$$\frac{1}{4}\sin 2u + \frac{u}{2} = x + K$$

$$\frac{1}{4}\sin(2x + 2y(x)) + \frac{x + y(x)}{2} = x + K$$

Con el dato $y(\pi/4) = \pi/4$. obtenemos que $K = 0$. Luego expresamos la función $y(x)$ en forma implícita.

1)

Bibliografía

[Den11] Charles G Denlinger. *Elements of real analysis*. Jones & Bartlett Publishers, 2011.

[FH93] A. D. Fitt and G. T. Q. Hoare. The closed-form integration of arbitrary functions. *The Mathematical Gazette*, 77(479):227–236, 1993.