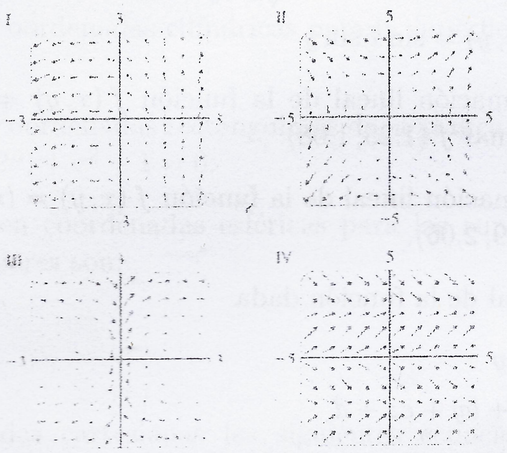
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA CICLO 2018–I

PRÁCTICA DIRIGIDA 7 DE CÁLCULO AVANZADO

---

1. Haga la correspondencia entre el campo vectorial F y la figura rotulada de $(I) - -(IV)$. Justifique sus elecciones.

   (a) $F(x,y) = (y, x)$.
   (b) $F(x,y) = (1, sen(y))$.
   (c) $F(x,y) = (x-2, x+1)$.
   (d) $F(x,y) = (y, 1/x)$.



2. Determine cual es el conjunto $f(A)$ si:

   (a) La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida como $f(x,y) = (xcos(y), xsen(y), x)$ y $A = \mathbb{R}^2$.
   (b) La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida como $f(x,y) = (x^2cos(y), x^2sen(y), x^2)$ y $A = \mathbb{R}^2$.
   (c) La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida como $f(x,y) = (xcos(y), xsen(y), x^2)$ y $A = \mathbb{R}^2$.
   (d) La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida como $f(x,y) = (acos(x), asen(x), y)$, $a > 0$ y $A = [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$.
   (e) La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida como $f(x,y) = (\sqrt{x^2+1}cosh(y), \sqrt{x^2+1}senh(y), x)$ y $A = \mathbb{R}^2$.
   (f) La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida como $f(x,y) = (x+y, x-y, x^2-y^2)$ y $A = \mathbb{R}^2$.

3. Encuentre una funció de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ cuya imagen coincida con el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

4. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in A'$. Demuestre que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ si y sólo si $\lim\limits_{x \to x_0} \|f(x)\| = 0$.

5. Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in A'$. Demuestre que, si g está acotada en una vecindad " agujerada " de x_0 (es decir, que existen $r > 0$ y $M > 0$ tales que $\|g(x)\| \leq M$ para toda $x \in (B_r(x_0) \backslash \{x_0\}) \cap A)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x \to x_0} (g.f)(x) = 0$.

6. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua en $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Demuestre que:
   (a) Existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in B_\delta(x_0) \cap A$.
   (b) Existe $c > 0$ y $\delta' > 0$ tal que $\|f(x)\| \geq c$ para todo $x \in B_{\delta'}(x_0) \cap A$.

7. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua con A cerrado y acotado. Demuestre que existen $x_0, x_1 \in A$ tales que $\|f(x_0)\| \leq \|f(x)\| \leq \|f(x_1)\|$ para toda $x \in A$.

8. Determine si las siguientes funciones son de clase C^2
   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 - y^2$
   (b) $f : \mathbb{R} - \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = ln\sqrt{x^2 - y^2}$
   (c) $f : R - \{(0,0)\} \to R,\ f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \sin x \sin y$

9. Encuentre la aproximación lineal de la función $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ en $(2, 1)$ y utilícela para aproximar $f(1.25, 1.08)$.

10. Encuentre la aproximación lineal de la función $f(x, y) = ln(x - 3y)$ en $(7, 2)$ y utilícela para aproximar $f(6.9, 2.06)$.

11. Obtenga la diferencial de la función dada
    (a) $f(x, y) = x \tan y$
    (b) $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$
    (c) $f(x, y, z, u) = \sin x + \cos y + \arcsin z + \arccos u$

12. Calcule aproximadamente el incremento de la función $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{3x+2y}$ cuando el punto (x, y) de su dominio pasa de $(2, 1)$ a $(2.05, 1.1)$

13. Si R es la resistencia total de tres resistores, conectados en paralelo, con resistencias R_1, R_2, R_3, entonces
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$
.Si las medidas de las resistencias, en ohms, son $R_1 = 25\Omega$, $R_1 = 40\Omega$, y $R_1 = 50\Omega$, con un posible error del 0.5% en cada caso, estime el máximo error en el valor calculado de R.

14. La presión, volumen y temperatura de un mol de un gas ideal están relacionados por la ecuación $PV = 8.31T$,donde P se mide en kilopascales, V en litros, y T en grados kelvins. Utilice diferenciales para hallar el cambio aproximado en la presión si el volumen aumenta de $12L$ a $12.3L$ y la temperatura se reduce de $310K$ a $305K$.

15. Aplique diferenciales para calcular aproximadamente el valor de las siguientes expresiones
    (a) $\arctan\left(\sqrt{0.2} + 0.98\right)$
    (b) $\sqrt[3.1]{(4.9)^2 + 2.1}$

(c) $\arcsin\left(\sqrt[1.9]{3.9 + (0.1)^{2.92}} \right)$

16. Escriba la matriz jacobiana de la función dada en el punto indicado

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (a_1 x + b_1 y, a_2 x + b_2 y)$. $p = (x_0, y_0)$

   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = \left(\frac{1+x^2}{1+z^2}, (z + x^2)(z + y^2)\right), p = (1, 1, 1)$

   (c) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, f(x, y, z, u) = (y, u, z, x), p = (x_0, y_0, z_0, u_0)$

   (d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5,\ f(x, y) = (x^y, y^x, e^{xy}, xe^y, ye^x)$

17. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ las funciones $f(x, y, z) = (x^2 + 2, x + y^2 + z^3)$, $g(x, y, z) = (x + y + z, xyz, x^2 + y^3)$. Calcule la derivada de $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ en $(1, 1, 1)$.

18. Considere las funciones diferenciables $f : R^3 \to R^2$ y $g : R^2 \to R^3$, dadas por $f(x, y, z) = (3x^2 + y^2 + z^2, 5xyz)$, $g(x, y) = (xy, 5x, y^3)$. Calcule la derivada de $f \circ g : R^2 \to R^2$.

19. Expresar en coordenadas rectangulares el punto $(r, \theta, z) = (4, 5\pi/6, 3)$.

20. Hallar ecuaciones en coordenadas cilíndricas para la superficie cuya ecuación rectangular es $y^2 = x$.

21. Hallar la ecuación en coordenadas rectangulares de la gráfica determinada por la ecuación en cilíndricas: $r^2 \cos(2\theta) + z^2 + 1 = 0$.

22. Hallar una ecuación en coordenadas esféricas para las superficies cuyas ecuaciones en coordenadas rectangulares son:

   (a) $x^2 + y^2 = z^2$

   (b) $-4z = 0$

23. Escribir en coordenadas cartesianas las siguientes ecuaciones dadas en coordenadas esféricas:

   (a) $\rho = 2$

   (b) $\varphi = \pi/3$

   (c) $\cos(\phi) = \rho \sin^2(\phi) \cos(2\theta)$

   (d) $\rho \sin(\phi) \cos(\theta) = 3$

24. Estudiar los máximos y mínimos relativos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

   (a) $f(x, y) = x^3 + x^2 y + y^2 + 2y$.

   (b) $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

   (c) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

25. Estudiar los máximos y mínimos relativos de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por:

   (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2x$.

   (b) $f(x, y, z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$, $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$.

   (c) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xyz$.

26. Determinar los extremos de la función f sujeta a la restricción g.

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeta a $g(x,y) = x + y - 1 = 0$.

(b) $f(x,y) = 1 - \left(\dfrac{x^2}{4} + y^2\right)$ sujeto a $g(x,y) = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0$.

(c) $f(x,y) = x + y + z$ sujeto a $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

27. Determine la distancia mínima del punto $P(1,0)$ a la parábola $y^2 = 4x$.

28. Calcule la distancia mínima del punto $P(0,0)$ a la curva $(x-1)^2 - y^2 = 0$.

29. Descomponer un número positivo "a" en tres sumandos positivos, de modo que sea mínima la suma de sus cubos.

30. Calcule las distancias mínima y máxima de un punto de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ a la recta $x + y = 4$.

31. Determine (si los hay) los extremos locales y/o puntos de ensilladura de las funciones dadas

    (a) $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy$.

    (b) $f(x,y) = xlny + x$.

    (c) $f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 - 2y^2 + 4y - 2z^2 + 6z + 2$.

    (d) $f(x,y,z) = -2x^4 - y^4 - z^4 + 8x + 4y + 4z - 2$.

32. Encontrar los valores extremos de las siguientes funciones:

    (a) $x^2 + y^2 - 2y$ sobre $x^2 + 2x + y^2 \leq 3$.

    (b) $x^2 + 12xy + y^2$ sobre $x^2 + y^2 = 4$.

    (c) $f(x,y) = 2x - y$ con la restricion $g(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 33/2 = 0$.

    (d) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2y$ con la restricion $g(x,y) = x + y - 3 = 0$.

    (e) $f(x,y,z) = -x - 4y + 5z$ con la restricion $g(x,y,z) = 5x^2 + y^2 + z^2 - 1030 = 0$.

33. Encontrar las dimensiones del paralelepipedo rectangular mayor con tres de sus caras en los planos coordenados y un vertice sobre $x + 3y + 2z = 6$ si x, y, z son positivas.

34. Encontrar el punto P mas cercano al origen sobre la linea de interseccion de dos planos $2x + 3y + z = 6$ y $x + 2y + 2z = 4$.

35. Determinar los puntos (x,y,z) de la elipsoide $2x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 70$ de modo que la suma de su primera y tercera coordenada sea la mayor y la menor posible.

36. Demuestre que el paralelepipedo de mayor volumen que se puede inscribir en en una esfera es un cubo.

37. Halla el paralelepipedo cuya suma de longitudes de sus aristas sea L, que tenga el mayor volumen posible.

38. hallar la distancia maxima y minima entre los puntos del elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ y la recta $x = 3 - t$. $y = 4 + t$, $z = 6 + t$, $t \in \mathbb{R}$.

Los profesores[1]
Lima, 09 de Mayo del 2018.

[1]Hecho en LaTeX