UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Facultad de ciencias

TEORÍA DE LOS NÚMEROS REALES

cuerpos o campos

Para los estudiantes de ciencias

TEORÍA DE LOS NÚMEROS REALES

cuerpos o campos

1ra. edición

Mayo del 2011

AUTOR/EDITOR: *Gustavo Marca Castromonte*

Hecho en computadora

e mail: marcagustavo@yahoo.com

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú

N^o 2011-06258

Lima Perú

!Cómo caíste del cielo, oh Lucero hijo de la mañana¡,
Cortado fuiste por tierra, tú que *debilitabas* a las naciones.
Tu que decías en tu corazón: Subiré al cielo; en lo alto, junto a las estrellas de Dios,
levantaré mi trono, y en el monte del testimonio me sentaré, a los lados del norte;
sobre las alturas de las nubes subiré, y seré *semejante* al Altísimo.
Mas tú derribado eres hasta el Seol, a los lados del abismo.
Se inclinaran a ti los que te vean, te contemplarán, diciendo:
¿Es éste aquel varón que hacía temblar la tierra,
que trastornaba los reinos;
que puso el mundo como un desierto,
que asoló sus ciudades,
que a sus presos nunca abrío la carcel?
Isaias 14: 12- 17

¿De quien está hablando el profeta?

Índice

1. Cuerpo o campo **5**

2. Cuerpos ordenados **15**

3. Relación de orden en un cuerpo ordenado K **20**

4. Conjuntos Inductivos **27**

5. Intervalos en un cuerpo ordenado **38**

6. Valor absoluto en un cuerpo ordenado **41**

7. Conjuntos acotados **44**

8. Cuerpo Arquimediano **45**

9. Supremo de un conjunto **48**

10. Ínfimo de un conjunto **51**

11. Cuerpo completo **51**

12. Densidad en $\mathbb{R}$ **68**

13. Máximo entero en un cuerpo Completo **75**

14. Aplicaciones diversas **81**

15. Problema de reforzamiento **113**

16. Obras del mismo autor: **124**

1. Cuerpo o campo

Definición 1 ((Cuerpo)) *Sea K un conjunto juntamente con dos operaciones denotadas por $+$ y $.$ llamadas tradicionalmente* Adición *y* Multiplicación *respectivamente*

$$\begin{aligned} + \quad : \quad & K \times K \to K \\ & (x, y) \mapsto x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad : \quad & K \times K \to K \\ & (x, y) \mapsto x.y \end{aligned}$$

$(K, +, .)$ *es un cuerpo si y solo si verifican los siguientes axiomas*

Axiomas de la adición:

A1 $\forall\, x, y, z \in K,\ (x + y) + z = x + (y + z)$

A2 $\forall\, x, y \in K,\ x + y = y + x$

A3 Existe $0 \in K$ *tal que* $\forall\, x \in K, x + 0 = 0 + x = x$ *al cual le llamaremos* el cero.

A4 Para todo $x \in K$, existe $-x \in K$ tal que $x+(-x) = (-x)+x = 0$ denominado el opuesto aditivo de x.

Axiomas de la multiplicación:

M1 $\forall\, x, y, z \in K, (xy)z = x(yz)$

M2 $\forall\, x, y \in K,\ xy = yx$

M3 Existe $1 \in K$ *con* $1 \neq 0$ *tal que* $\forall x \in K, 1.x = x.1 = x$

M4 Para cada $x \in K$ *con* $x \neq 0$ *, existe* $x^{-1} \in K$ *de tal manera que* $x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1$

Distributiva:

D1 $\forall\, x, y, z \in K, x(y + z) = xy + xz$

$\square$

Observaciones:

1. Debido a la existencia del opuesto aditivo es decir del axioma $A4$ podemos definir una tercera operación que llamaremos sustracción y lo denotaremos por $-$:

$$\begin{aligned} - \quad : \quad & K \times K \to K \\ & (x, y) \mapsto x - y = x + (-y) \end{aligned}$$

2. De lo anterior podemos indicar que

$$x - y = z \Longleftrightarrow x = y + z$$

3. El axioma $A3$ nos garantiza la existencia del elemento cero, pero también se tiene su unicidad.

   En efecto:

   Sea 0 y $0'$ dos elementos de K de modo que cumplan con

$$\forall x \in K, x + 0 \quad = \quad 0 + x = x \tag{1}$$

$$\forall x \in K, x + 0' \quad = \quad 0' + x = x \tag{2}$$

   como $0 \in K$, entonces por (2) se tiene

$$0 + 0' = 0' + 0 = 0 \tag{3}$$

   pero como $0' \in K$, entonces por (1) se tiene

$$0' + 0 = 0 + 0' = 0' \tag{4}$$

   luego por (3)y(4) se tiene

$$\begin{aligned} 0 + 0' &= 0' + 0 \\ 0 &= 0' \end{aligned}$$

$\square$

4. El axioma A4, nos garantiza la existencia del elemento opuesto de x, pero también se prueba su **unicidad**.

   Veamos ello: Sea $x \in K$ un elemento arbitrario del cuerpo K y a, b dos elementos de dicho campo, de modo que cumplan con A4, es decir:

$$x + a \quad = \quad a + x = 0 \tag{5}$$

$$x + b \quad = \quad b + x = 0 \tag{6}$$

pero también se cumple

$$\begin{aligned} a &= a+0 \\ &= a+(x+b) \\ &= (a+x)+b \\ &= 0+b \\ &= b \end{aligned}$$

por lo tanto se tiene $a=b$

5. Se prueba que $\forall\, x \in K,\ -(-x)=x$

   En efecto: Basta considerar que $(-x)+x=0$ y por la UNICIDAD del opuesto, se tiene:

$$\boxed{-(-x)=x}$$

6. También se cumple que:

   Si se tiene $x+z=y+z$, entonces $x=y$.

   En efecto: Operando

$$\begin{aligned} x &= x+0 \\ &= x+(z+(-z)) \\ &= (x+z)+(-z) \\ &\overset{Hip}{=} (y+z)+(-z) \\ &= y+(z+(-z)) \\ &= y+0 \\ &= y \end{aligned}$$

   por lo tanto se tiene $x=y$, esto quiere decir que se cumple la *la propiedad cancelativa en la Adición.*

7. Por el *axioma M4* podemos generar una notación de división, pero es lamentable que no es una operación cerrada en K.

   Sea $x, y \in K$ dos elementos del cuerpo K, de modo que $y \neq 0$, luego tenemos

$$\frac{x}{y} = x.y^{-1}$$

8. De M3, se verifica la existencia del elemento *uno* o llamado también *neutro multiplicativo.* Adicionalmente se prueba que este elemento es **único**, es decir se comprueba su *unicidad.*

9. De manera similar de M4, se cumple la unicidad del elemento inverso multiplicativo x^{-1}.

10. Sea $x, y, z \in K$ con $y \neq 0$

    Por demostrar que:

$$\frac{x}{y} = z \Leftrightarrow x = y.z$$

    En efecto:

    ($\Rightarrow$) Nos piden probar que $x = y.z$, veamos como se obtiene esto

$$\begin{aligned} x &= x.1 \\ &= x(y.y^{-1}) \\ &= (x.y^{-1}).y \\ &= (\frac{x}{y}).y \\ &= z.y \\ &= y.z \end{aligned}$$

    ($\Leftarrow$)

    Debido a que $y \neq 0$, entonces existe $\frac{x}{y} = x.y{-}1 = (y.z).y^{-1} = z$

11. Probar: Sea $z \neq 0$. Si se cumple que $xz = yz$, entonces se tiene x=y

    En efecto:

    Se sugiere utilizar estrictamente los axiomas y las propiedades obtenidas hasta este momento

$$\begin{aligned} x &= x\ .\ 1 \\ &= x(z.z^{-1}) \\ &= (xz)z^{-1} \\ &= (y.z)z^{-1} \\ &= y(z.z^{-1}) \\ &= y\ .\ 1 \\ &= y \end{aligned}$$

12. Del axioma D1, nos indica que es posible la distribución por la izquierda, pero gracias a M2, se verifica que dicha distribución, también es posible por la derecha, es decir

$$(y+z)x = yx + zx$$

En efecto: Operando simbólicamente

$$(y+z)x = x(y+z) = xy + xz = yx + zx$$

$\square$

13. Pruebe que $\forall x \in K,\ \ x.0 = 0$ *En efecto:* Veamos que $x.0 = x(0+0)$, luego

$$x.0 = x.0 + x.0$$

ahora por la cancelación se obtiene

$$x.0 = 0(Detallar)$$

$\square$

14. Probar: Sabiendo que se cumple $x.y = 0$, entonces $x = 0 \vee y = 0$

En efecto:

En el caso que $x = 0$, entonces $x = 0 \vee y = 0$ cumple con lo pedido, debido a que $V \equiv V \vee P,\ \forall P$ proposición.

Ahora en el caso que $x \neq 0$, luego existe $x^{-1} \in K$, por lo tanto

$$\begin{aligned} y &= y.1 \\ &= y(x.x^{-1}) \\ &= (y.x)x^{-1} \\ &= (x.y)x^{-1} \\ &= 0.x^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto, también cumple. $\square$

15. Probar $\forall x, y \in K$, se cumple

$$(-x).y = x(-y) = -(xy)$$

Probando: Veamos

$$xy + (-x)y = (x + -x).y = 0.y = 0$$

ahora, por la unicidad del opuesto aditivo se tiene

$$(-x).y = -(x.y)$$

También se prueba que $x(-y) = -(x.y)$, de lo anterior se tiene lo pedido. △

16. Demostrar que $(-x)(-y) = xy$

En efecto:

$$(-x)(-y) = x(-(-y)) = xy$$

△

17. Sabiendo que $(\mathbb{N}, S, 1)$ es un **sistema de Peano**. ¿$\mathbb{N}$ es un campo?

18. ¿Existen cuerpos finitos?

La repuesta a esta pregunta es afirmativa, ahora debemos dar un ejemplo concreto de ello.

Considere $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ de modo que

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Cuadro 1: Operación de Adición en $\mathbb{Z}_2$

Nótece que se está definiendo la operación en este nuevo conjunto.

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Cuadro 2: Operación de multiplicación en $\mathbb{Z}_2$

Se prueba, con mucha paciencia, cada uno de los axiomas que definen a un cuerpo, logrando así que

$$(\mathbb{Z}_2, +, .)$$

sea un campo, y como es un conjunto finito, diremos campo o cuerpo finito. A este cuerpo, también le denominaremos **el cuerpo de los enteros módulo 2**.

19. El conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$, juntamente con las operaciones de adición y multiplicación, definida por

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

verifica $(\mathbb{Q}, +, .)$ es un campo no finito.

20. Otro ejemplo importante de cuerpo no arqumediano, que más adelante lo definiremos, está dado por

$$\mathbb{Q}(t) = \{\frac{p(t)}{q(t)} : \text{ p y q son polinomios con coeficientes en } \mathbb{Q} \text{ , siendo q no identicamente nulo}\}$$

Así tenemos por ejemplo

$$\frac{2t^2+5t+2}{-t+2} \in \mathbb{Q}(t)$$

juntamente con las operaciones naturales, en este conjunto, se tiene que $(\mathbb{Q}(t), +, .)$ es cuerpo.

Problema 1 *Dados $a, b, c, d \in K$, donde K es un cuerpo con $b \neq 0, d \neq 0$. Probar que se cumple*

a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

b) $\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Prueba:

a) Recordemos, que por notación se tiene $a.b^{-1} = \frac{a}{b}$ luego

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = a.b^{-1} + c.d^{-1}$$

como b y d son no nulos, entonces existen b^{-1} y d^{-1}, luego se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}.\frac{c}{d} &= a.b^{-1}.1 + c.d^{-1}.1 \\
&= ab^{-1}(dd^{-1}) + cd^{-1}(bb^{-1}) \\
&= (ad)(b^{-1}d^{-1}) + (cd)(b^{-1}d^{-1}) \\
&= (ad+cb)(b^{-1}d^{-1}) \\
& \quad \text{en este punto probar que } b^{-1}d^{-1} = (bd)^{-1} \\
&= (ad+cb)(bd)^{-1} \\
& \quad \text{luego por notación se tiene} \\
&= \frac{ad+cb}{bd} \\
&= \frac{ad+bc}{bd}
\end{aligned}$$

b) Operando utilizando únicamente los axiomas de cuerpo y propiedades demostradas

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}.\frac{c}{d} &= (ab^{-1})(cd^{-1}) \\
&= (ac)(b^{-1}d^{-1}) \\
&= (ac)(bd)^{-1} \\
&= \frac{ac}{bd}
\end{aligned}$$

□

Problema 2 *Sabiendo que* $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$ *en un cuerpo* K*.*
probar que dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ *de modo que* $a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n \neq 0$*, se cumple*

$$\frac{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n}{a_1y_1 + \cdots + a_ny_n} = \frac{x_1}{y_1}$$

Demostración:

Consideremos $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n} = c$ luego se tiene

$$\forall i := 1, 2, \ldots, n : \frac{x_i}{y_i} = c$$

entonces $x_iy^{-1} = c$, por lo tanto

$$x_i = y_ic, \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

ahora sí reemplazando

$$\begin{aligned}
\frac{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}{a_1y_1+\cdots+a_ny_n} &= \frac{a_1(y_1c)+\cdots+a_n(y_nc)}{a_1y_1+\cdots+a_ny_n} \\
&= \frac{(a_1y_1)c+\cdots+(a_ny_n)c}{a_1y_1+\cdots+a_ny_n} \\
&= \frac{(a_1y_1+\cdots+a_ny_n)c}{a_1y_1+\cdots a_ny_n} \\
&= c \\
&= \frac{x_1}{y_1}
\end{aligned}$$

□

Problema 3 *Sean K y L dos cuerpos y $f : K \to L$ una función.*

$f$se llamara homomorfismo de cuerpos si y sólo si cumple con dos axiomas

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall\ x, y \in K$

(ii) $f(xy) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in K$

a) *dado un homomorfismo $f : K \to L$. Probar que se cumple $f(0) = 0$*

b) *Si $f : K \to L$ es un homomorfismo no nulo, demostrar que $f(1) = 1$ y también que f es inyectiva.*

Prueba:

a) Debido a (i) consideremos $x = y = 0$, entonces

$$f(0+0) = f(0) + f(0)$$

luego $f(0) = f(0) + f(0)$, por la propiedad de cancelación en un cuerpo se tiene $f(0) = 0$

b) En esta parte veamos que $f(1) = 1$:

por la hipótesis (ii) : $f(1.1) = f(1).f(1)$, luego $f(1) = f(1)f(1)$, ahora supongamos que $f(1) = 0$, si esto fuere cierto, necesariamente f sería nulo, ya que, sea $x \in K$ arbitrario

$$f(x) = f(x.1) = f(x).f(1) = f(x).0 = 0$$

luego, como es para todo x en K: $f = 0$ lo cual es incorrecto, ya que $f(1) = 1$.

Luego, se tiene que $f(1) \neq 0$, por lo tanto como $f(1) = f(1).f(1)$ se puede cancelar multiplicativamente, entonces

$$f(1) = 1$$

Solo resta probar, que f es una función inyectiva:

Considerando $f(x) = f(y)$ con $x, y \in K$, por demostrar que $x = y$

antes notemos algo: sea $b \neq$ en K, entonces $b.b^{-1} = 1$, luego

$$f(b.b^{-1}) = f(1)$$

por lo anterior

$$f(b).f(b^{-1}) = 1$$

ahora por la unicidad del inverso de $f(b)$, tenemos

$$\boxed{[f(b)]^{-1} = f(b^{-1})}$$

También se prueba que: Si $f(x) = 0$ entonces $x = 0$

en efecto, supongamos que $x \neq 0$ en K, entonces $f(x.x^{-1}) = f(1)$, luego

$$f(x).f(x^{-1}) = 1$$

por dato

$$0.f(x^{-1}) = 1$$

entonces $0 = 1$, la cual es imposible. Por lo tanto negando lo supuesto se obtiene $x = 0$.

Ahora sí volviendo al problema

En el caso en que $f(x) = f(y) = 0$, por lo tanto $x = 0 \wedge y = 0$, es decir $x = y$.

Si $f(x) = f(y) \neq 0$, por lo tanto

$$f(x).[f(y)]^{-1} = 1$$

y por lo demostrado

$$f(x).[f(y^{-1})]^{-1} = 1$$

luego por ser homomorfismo

$$f(x.y^{-1}) = 1 \tag{7}$$

En este punto, también notemos que se cumple: $f(-x) = -f(x), \forall x \in K$ (verificar)

También se tiene que: si se cumple $f(x) = 1$, entonces podemos concluir que $x = 1$

En efecto, como $f(x) = 1$, luego $f(x - 1 + 1) = 1$, por homomorfismo

$$f(x - 1) + f(1) = 1$$

luego

$$f(x-1)+1=1$$

esto quiere decir que $f(x-1)=0$, aplicando la propoiedad demostrada, se tiene $x-1=0$, luego $x=1$.

Finalmente en (7), tenemos $x.y^{-1}=1$, es decir $x=y$, basta con ello para haber probado que f es inyectiva.

2. Cuerpos ordenados

Definición 2 *Sea K un cuerpo.K es un cuerpo ordenado si y solo existe $P\subset K$ de tal manera que cumpla con dos condiciones:*

O1. $\forall x,y\in P,\ x+y\in P\wedge\ xy\in P$

O2. Dada $x\in K$ se cumple una y solamente una de las expresiones siguientes

$$x=0\vee x\in P\vee -x\in P$$

Observaciones:

1. Al conjunto P le llamaremos el **conjunto de los elementos positivos** del cuerpo K.

2. Si K es un cuerpo ordenado y P su conjunto de elementos positivos, entonces probar que

$$P\neq\emptyset$$

En efecto:
Como $1\in K$ bastaria probar que $1\in P$. Veamos ello:
Por $(O2)$: $1=0\vee 1\in P\vee -1\in P$, pero por axioma de cuerpo $1\neq 0$
luego se tiene

$$1\in P\vee -1\in P$$

supongamos que $-1\in P$, por $(O1)$ $\quad(-1)(-1)\in P$ entonces $1\in P$, pero tambien se tiene

$$-1\in P\vee 1\in P$$

por $(O1)$ $-1+1 \in P$, esto nos obliga a afirmar que $0 \in P$, pero esto es imposible, por $(O2)$, ya que se cumple una y solo una de dichas afirmaciones, por lo tanto $1 \in P$, entonces

$$P \neq \emptyset$$

3. *Generalizando*: Sea K un cuerpo ordenado.

   Si $a \in K$ no nulo, entonces se demuestra que $a^2 \in P$ *En efecto:*

   Considerando $a \in K$ no nulo, por el axioma $O2$ se tiene

   $$a \in P \vee -a \in P$$

   Caso 1: Si $a \in P$, entonces $a.a \in P$, luego por $a^2 \in P$

   Caso 2: En otro caso, es decir , si $-a \in P$ luego por $(O1)$ $(-a).(-a) \in P$, es decir $a^2 \in P$

4. Un buen ejemplo de cuerpo ordenado que utilizaremos es el cuerpo de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$, es decir el cuerpo $\mathbb{Q}(t)$, en ella definiremos

   $$P = \{\frac{p(t)}{q(t)} \in \mathbb{Q} : \ CP(p(t).q(t)) > 0\}$$

   donde CP(r(t)), es el coeficiente principal de $r(t)$, es decir el coeficiente no nulo de mayor grado $r(t)$.

   Probar que P ordenada al cuerpo $\mathbb{Q}(t)$.

Problema 4 ***Sea $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ un homomorfismo no nulo. Probar que f es la función identidad en $\mathbb{Q}$.***

Prueba:

Por el problema (3), podemos indicar que se cumple

$$f(0) = 0 \wedge \ f(1) = 1$$

Por otro lado también podemos afirmar que $\forall n \in \mathbb{N}, \ f(n) = n$

En efecto: Consideremos

$$X = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = n\}$$

- $1 \in X$, esto es directo de lo anterior
- Hipótesis inductiva (HI): $f(n) = n$

- Tesis: $f(n+1) = n+1$

  En efecto $f(n+1) = f(n) + f(1) = n+1$

Afirmamos 3: $f(-1) = -1$

En efecto: Como $1 + -1 = 0$, entonces $f(1 + -1) = f(0)$, luego $f(1) + f(-1) = 0$,por lo tanto

$$1 + f(-1) = 0 \Rightarrow f(1) = -1$$

Afirmación 4: $f(m) = m$, $\forall m \in \mathbb{Z}^-$

Basta ver que $m + -m = 0$, entonces $f(m + -m) = f(0)$, luego

$$f(m) + f(-m) = 0$$

como $-m \in \mathbb{N}$, luego se tiene $f(m) \neq -m = 0$, entonces

$$f(m) = m$$

Por último podemos afirmar que: Sea $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ arbitrario $f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}$

Veamos:

$$\begin{aligned} f(\frac{a}{b}) &= f(a.b^{-1}) \\ &= f(a).f(b^{-1}) \\ &= f(a).[f(b)]^{-1} \\ &= \frac{f(a)}{f(b)} \\ &= \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Luego podrá notar que como $b \neq 0$ entonces $f(b) \neq 0$ por el ejercicio anterior.

Problema 5 ***Verifique la propiedad asociativa de la adición en $\mathbb{Z}_2$***

Veamos:

Recordemos dicha adición pedida

me piden probar que

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \ (a+b)+c = a+(b+c)$$

como a,b y c pueden cada uno de ellos tomar dos valores, por lo tanto hay que verificar $2 \times 2 \times 2 = 8$ casos posibles.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Caso 1: $(0+0)+0=0+0=0$

pero también 0+(0+0) =0+0=0

por lo tanto se tiene $(0+0)+0=0+(0+0)$

Observación: aunque le parezca extraño, pero estas cosas son necesarias e importantes, para justificar muchos de los procedimientos matemáticos que vendrán.

Caso 2: $(1+0)+0=1+0=1$, igualmente $1+(0+0)=1+0=1$, por lo tanto se verifica que

$$(1+0)+0=1+(0+0)$$

Caso 3: $(0+1)+0=0+(1+0)$

Caso 4: $(0+0)+1=0+(0+1)$

Caso 5: $(1+1)+0=1+(1+0)$

Caso 6: $(0+1)+1=0+(1+1)$

Caso 7: $(1+0)+1=1+(0+1)$

Caso 8: $(1+1)+1=1+(1+1)$

estos últimos casos, se verifican de manera similar a los dos casos primeros.

Finalmente, se concluye que la *adición es asociativa.*

Nota: Una forma elegante para probar lo anterior, es utilizar homomorfismos, considere la función $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_2$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}0 & ,x=2k,\ k\in\mathbb{Z}\\ 1 & ,x=2k+1,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

es notorio que f está bien definida. Ahora como $f(0)=0$ y $f(1)=1$, se deduce que f es sobreyectivo.

Afirmación : $f(n+m)=f(n)+f(m)$

En efecto:

sean $n, m \in \mathbb{Z}$ arbitrariamente tomados, como existen cuatro posibilidades, veamos cada uno de ellos
Si $n = 2k_1 \wedge m = 2k_2$, entonces

$$f(n+m) = f(2k_1 + 2k_2) = f(2(k_1+k_2)) = 0$$

por otro lado

$$f(n) + f(m) = 0 + 0 = 0$$

por lo tanto se verifica.
Si $n = 2k_1 \wedge m = 2k_2 + 1$, entonces

$$f(n+m) = f(2(k_1+k_2)+1) = 1$$

por otro lado, también se tiene

$$f(n) + f(m) = 0 + 1 = 1$$

por lo tanto, en este segundo caso, también se verifica que

$$f(n+m) = f(n) + f(m)$$

En el caso en que $n = 2k_1 + 1 \wedge m = 2k_2$, se tiene igualmente que

$$f(n+m) = f(n) + f(m)$$

Por último $n = 2k_1 + 1 \wedge m = 2k_2 + 1$, luego $f(n+m) = f(2(k_1+k_2+1)) = 0$, pero también se tiene $f(n) + f(m) = 1 + 1 = 0$ $\square$

De manera similar, se cumple para el caso del producto, es decir

$$\forall n, m \in \mathbb{Z},\ f(nm) = f(n)f(m)$$

se sugiere al estudiante, su verificación.
Con todo ello, estamos comprobando que $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ es un homomorfismo de campos, sobreyectivo. Notamos que la asociatividad que se da en $\mathbb{Z}$ va a inducir mediante tal homomorfismo sobreyectivo, la asociatividad en $\mathbb{Z}_2$
En efecto: Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$ elementos arbitrarios, pero como f es sobre, entonces existe $m, n, p \in \mathbb{Z}$ de modo que

$$f(m) = a \wedge f(n) = b \wedge f(p) = c$$

Luego calculando

$$\begin{aligned}
(a+b)+c &= (f(m)+f(n))+f(p) \\
&= f(m+n)+f(p) \\
&= f((m+n)+p) \\
&= f(m+(n+p)) \\
&= f(m)+f(n+p) \\
&= f(m)+(f(n)+f(p)) \\
&= a+(b+c)
\end{aligned}$$

Note que se ha comprobado la asociatividad en $\mathbb{Z}_2$ con respecto a la adición.
¿Que pasará en el caso del producto? ©

3. Relación de orden en un cuerpo ordenado K

Definición 3 *SEa (K, P) un cuerpo ordenado, donde P es el conjunto de los positivos, $x, y \in P$*

$$x < y \Leftrightarrow y - x \in P$$

Notación: $x < y$: *se lee x es menor que y*

Usaremos la notación siguiente:

$$y > x \Leftrightarrow x < y$$

Problema 6 ***Sea K un cuerpo ordenado,*** $x, y, z \in K$***. Pruebe que*** $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$

Por demostrar:

como $y - x \in P \wedge z - y \in P$, luego por (O1)

$$(y - x) + (z - y) \in P$$

entonces $z - x \in P$, por lo tanto $x < z$ ©

Problema 7 *Sea $x, y \in K$ elementos de un cuerpo ordenado. Probar que se verifica una y solo una de los enunciados siguientes*

(i) $x = y$

(ii) $x < y$

(iii) $x > y$

Prueba: Consideremos $y - x \in K$, luego por $O2$: $y - x = 0 \vee y - x \in P \vee -(y - x) = x - y \in P$ luego se tiene $y = x \vee x < y \vee x > y$. Compruebe ahora su unicidad de la representación, es decir que solo uno de ellos se verifica, ver. ©

Problema 8 ***Sea K un cuerpo ordenado. Si*** $x < y$***, probar***

$$\forall z \in K, x + z < y + z$$

En efecto: Como se tiene $x < y$, entonces

$$y - x \in P \tag{8}$$

ahora como

$$\begin{aligned} y - x &= y + (-x) \\ &= y + 0 + (-x) \\ &= y + (z + -z) + -x \\ &= (y + z) + (-z) + (-x) \\ &= (y + z) + (-1)z + (-1)x \\ &= (y + z) - (x + z) \end{aligned}$$

de lo último reemplazamos en (8) tenemos $(y+z)-(x+z) \in P$, por lo tanto por definición $x+z < y+z$©

Problema 9 *Sea K un cuerpo ordenado. Si se sabe que* $x + z < y + z$. *Pruebe que* $x < y$

En efecto: Por hipótesis se tiene

$$(y + z) - (x + z) \in P$$

entonces

$$y + z + (-x) + (-z) \in P$$

luego, simplificando $y - x \in P$, por lo tanto $x < y$ ©

Problema 10 *Sea K un cuerpo ordenado, $x, y, z \in K$ y $x < y$*

a) Si $z > 0 \Rightarrow xz < yz$

b) Si $z < 0 \Rightarrow xz > yz$

Probando:´

a) Como $y - x \in P \wedge z \in P$ ya que $z > 0$, entonces

$$(y - x)z \in P$$

luego $yz - xz \in P$, por lo tanto

$$xz < yz$$

b) También se tiene $y - x \in P \wedge -z \in P$, ya que $z < 0$, luego por axioma de P

$$(y - x)(-z) \in P$$

entonces $y(-z) + (-x)(-z) \in P$, también $xz - yz \in P$, finalmente por definición

$$xz > yz$$

©

Problema 11 *Sea K un cuerpo ordenado. Demostrar que si $x < y$, $a < b$, entonces se concluye $x + a < y + b$*

En efecto: Es claro que $y - x \in P$ y $b - a \in P$, luego por $(O1)$ se tiene

$$(y - x) + (b - a) \in P$$

reordenando, gracias a la conmutativa y asociativa se obtiene

$$(y + b) - (x + a) \in P$$

entonces

$$x + a < y + b$$

©

Observación: Considerando $(K, +, ., P)$ un cuepo ordenado , $a, b \in K$ denotaremos lo siguiente

$$a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$$

Problema 12 *Sea K un cuerpo ordenado, $a \in K$. Si se tiene que: $\forall \epsilon > 0, a < \epsilon$.*
Probar que $a \leq 0$.

En efecto: Supongamos que $a > 0$, entonces en la hipótesis tomemos $\epsilon = a$ cumple con

$$\epsilon = a > 0$$

luego debería cumplir con $a < a$, ¿porqué? pero esto es imposible, debida a la unicidad de los enunciados en $(O2)$, por lo tanto negando lo supuesto, es decir

$$\sim (a > 0)$$

se obtiene el equivalente $a \leq 0$. ©

Problema 13 *Sea $(K, +, ., P)$ un cuerpo ordenado, $a \in K$.*
Por demostrar que: $a > 0$ es condición necesaria y suficiente para que $a^{-1} > 0$

Probando:
Veamos la condición de suficiencia, por $(O2)$ sobre $a^{-1} \in K$ se tiene una y solamente una de las afirmaciones siguientes:

$$a^{-1} = 0 \vee a^{-1} \in P \vee -a^{-1} \in P \tag{9}$$

En el caso que se cumpla con $a^{-1} = 0$, entonces

$$1 = a.a^{-1} = a.0 = 0$$

luego obtenemos que $1 = 0$ esto no se puede dar, por el axioma M3 de cuerpo que obliga a que $1 \neq 0$. Ahora bien, en el caso que se tenga $-a^{-1} \in P$, luego como $a \in P$, entonces

$$a.(-a^{-1}) \in P$$

esto quiere decir que $-1 \in P$, pero ya se probó que $1 \in P$, entonces debería cumplir con $1 + (-1) \in P$, es decir $0 \in P$, esto no se puede dar por $(O2)$ luego observando (9), no queda más posibilidad que asumir

$$a^{-1} \in P$$

Con respecto a la necesidad, basta considerar lo demostrado en la suficiencia y tendríamos $(a^{-1})^{-1} > 0$, es decir $a > 0$. ©

Problema 14 *Sea K un cuerpo ordenado. Si se tiene que $a > 0 > b$.*
Probar $ab < 0$

En efecto: Como $a > 0$ y $0 > b$, entonces

$$a \in P \wedge -b \in P$$

luego $a(-b) \in P$, se demostró que $-(ab) \in P$, luego $0 - (ab) \in P$, por definición de P

$$ab < 0$$

©

Problema 15 *Sea K un cuerpo ordenado.*
Por demostrar que $a > b > 0 \Leftrightarrow 0 < a^{-1} < b^{-1}$

Prueba:
($\Rightarrow$) como $a > 0 \wedge b > 0$, entonces $a^{-1} \wedge b^{-1} > 0$ y se tiene $a > b > 0$
entonces

$$aa^{-1} > ba^{-1} > 0$$

luego

$$1 > ba^{-1} > 0$$

por lo tanto,

$$b^{-1} > a^{-1} > 0$$

($\Leftarrow$) se sugiere al estudiante realizarlo. ©

Problema 16 *Sea K un cuerpo, se define $x \leq y \wedge x = y$.*
Probar que $\leq$ es una relación de orden en K, es decir

(i) *es reflexiva, es decir $x \leq x$.*

(ii) *es antisimétrica, es decir: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$.*

(iii) *es transitiva, esto es: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$*

Sugerencia: es una buena oportunidad, para ejercitarnos en demostrar utilizando únicamentes las definiciones.

Problema 17 *Sea* $(K, +, .)$ *un cuerpo y* $\leq$ *una relación de orden en* K*, como en el ejercicio anterior, de modo que se cumpla:*

(i) $\forall x, y \in K : x \leq y \vee y \leq x$

(ii) $x \leq y \Rightarrow \forall z \in K, x + z \leq y + z$

(iii) $x \leq y \wedge 0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz$

Pruebe que K *es un cuerpo ordenado.*

Prueba: Aquí el problema es ¿cómo se verifica que es ordenado?, sabemos por defición que bastaría encontrar un $P \subset K$, de manera que se cumpla los dos axiomas de *cuerpo ordenado*. Luego la pregunta clave es ¿Quién es P?.

Consideremos

$$P = \{x \in K : \ x > 0\}$$

note que antes se debe definir cómo entender el símbolo $>$ o en $<$. Definamos luego

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$$

teniendo en cuenta por notación que $x < y \Leftrightarrow y > x$.

Veamos que se verifican los dos axiomas de **cuerpo ordenado**.

(i) Sea $x, y \in P \Rightarrow x > 0 \wedge y > 0$

Veamos que $x + y \in P$

como $x > 0$, entonces $0 \leq x \wedge x \neq 0$, entonces por (ii) tenemos

$$0 + y \leq x + y \Rightarrow y \leq x + y \tag{10}$$

pero como $y > 0$, entonces tenemos

$$y \geq 0 \tag{11}$$

de (9) y (11) y por ser $\leq$ transitiva, tenemos $0 \leq x + y$

en este punto, supongamos que

$$0 = x + y$$

pero como $-y = x$ y $x > 0$ se tiene $-y > 0$, luego $y + (-y) > y + 0$, esto implica que $y < 0$

$$y \leq 0 \tag{12}$$

ahora de, (11) y (12) y por ser antisimétrica $y = 0$, pero como $y > 0$, entonces $0 > 0$
pero ésto por definición es imposible, ya que si $0 > 0$, entonces
$0 \leq 0 \wedge 0 \neq 0$(**contradicción**)

También veamos que $\forall x, y \in P : xy \in P$
en efecto, considerando $x > 0 \wedge y > 0$, entonces

$$(x \geq 0 \wedge x \neq) \wedge (y \geq 0 \wedge y \neq 0) \tag{13}$$

ahora $0 \leq x \wedge y \geq 0$, pero por (ii) se tiene

$$0.y \leq xy \Rightarrow 0 \leq xy \tag{14}$$

en este punto, supongamos que $0 = xy$, pero por propiedad $x = 0 \vee y = 0$, pero ésto es imposible por (11), por lo tanto

$$xy \neq 0 \tag{15}$$

de (14) y (15) y por definición tenemos $0 < xy$, entonces

$$xy \in P$$

(ii) Sea $x \in K$ arbitrariamente tomado.
Por demostrar que

$$x = 0 \vee x \in P \vee -x \in P$$

veamos, en primer lugar es notorio que $0 \notin P$, ya que si $0 \in P$, entonces $0 < 0$, luego se debería tener la conjunción siguiente

$$0 \leq 0 \wedge 0 \neq 0.$$

ahora como $x, 0 \in K$ y por (i) de la hipótesis se tiene

$$0 \leq x \vee x \leq 0$$

Supongamos que se tenga $x \neq 0$

- Caso 1: Si $0 \leq x$, pero como $x \neq 0$ se tiene $0 < x$, por lo tanto $x \in P$
- Caso 2: si se tiene $x \leq 0$, pero como $x \neq 0$, se tiene $x < 0$, luego $0 < -x$, por lo tanto $-x \in P$.

por último, es importante ver que se da uno y solamente uno de los casos anteriores. Dejamos esto último para el lector interesado.

©

Problema 18 ***Demostrar que para todo*** $a, b \in K$***, donde K es un cuerpo ordenado, se cumple que***

$$a^2 + b^2 \Longleftrightarrow (a = b \vee a = -b)$$

Prueba:

$(\Rightarrow)$ como $a^2 = b^2$, entonces $a^2 - b^2 = 0$ luego

$$(a + b)(a - b) = 0$$

por lo tanto se tiene

$$a + b = 0 \vee a - b = 0$$

entonces

$$a = -b \vee a = b$$

$(\Leftarrow)$ si $a = b$, entonces $a^2 = b^2$

también si $a = -b$, tenemos $a^2 = a.a = (-b)(-b) = b.b = b^2$ ©

4. Conjuntos Inductivos

Definición 4 *Sea K un cuerpo,* $I \subset K$. *I es inductivo si y solo si*

$(i) 1 \in I$

$(ii) x \in I \Rightarrow x + 1 \in I.$

Es notorio que K es un conjunto inductivo en K.

Problema 19 *Sea* $\mathfrak{F} = \{I_\lambda\}_{\lambda \in J}$ *una familia no vacía de conjuntos inductivos en K. Probar que* $\bigcap_{\lambda \in J} I_\lambda$ *es un conjunto inductivo en K.*

Prueba: veamos que debe cumplir con los dos axiomas de conjuntos inductivos:

(i) $1 \in \bigcap_{\lambda \in J} I_\lambda$: es claro, ya que

$$1 \in I_\lambda, \forall \lambda \in J$$

(ii) sea $x \in \bigcap_{\lambda \in J} I_\lambda$, entonces

$$x \in I_\lambda, \forall \lambda \in J$$

como I_λ es inductivo, se tiene

$$x + 1 \in I_\lambda, \forall \lambda \in J$$

luego $x \in \bigcap I_\lambda$

©

Sea $\mathfrak{F}$ una familia no vacía de todos los conjuntos inductivos del cuerpo K, es claro además que $k \in \mathfrak{F}$. Luego por lo anterior la intersección de todos los elementos de dicha familia $\mathfrak{F}$, es un conjunto inductivo, denotemos a tal conjunto como M:

$$M = \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F$$

Problema 20 *Si $I \subset K$ es un conjunto inductivo. Probar que $M \subset I$.*
En otras palabras, si $I \subset M$, entonces $I = M$
Veamos: como I es inductivo

$$I \in \mathfrak{F}$$

donde $\mathfrak{F}$ es la familia de todos los conjuntos inductivos de K. Entonces

$$M = \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F \subset I$$

por lo tanto

$$M \subset I$$

Observación: *esto nos indica que M es el menor , con respecto a la inclusión, conjunto inductivo de K.*

©

Problema 21 *Si $n \in M, n \neq 0$. Demostrar que $n - 1 \in M$*

En efecto: supongase que existe

$$n \in M / \; n \neq 1 \wedge n - 1 \notin M$$

considere

$$I = M \setminus \{n\} \not\subset M$$

si probamos que I es inductivo en K, seria algo contradictorio con la minimalidad de M.
Veamos entonces ello:

1. como $1 \in M, n \neq 1$, entonces $1 \in M \setminus \{n\}$, luego

$$1 \in I$$

2. sea $x \in M \setminus \{n\}$, entonces

$$x \in M \neq n$$

luego $x + 1 \in M$, ya que M es inductivo. Supongamos que $x + 1 = n$, luego $x = n - 1$, por lo tanto $n - 1 \in M$, ésto no se puede dar por hipótesis, esto nos obliga a que

$$x + 1 \in M \setminus \{n\} = I$$

luego

$$x + 1 \in I$$

por lo tanto, por definición, I es inductivo sobre K.

©

Problema 22 ***Pruebe que*** $\forall n \in M, n \geq 1$

En efecto: antes veamos que

$$D = \{x \in K / \ x \geq 1\}$$

Afirmamos que D es un conjunto inductivo
se sugiere realizar el proceso de prueba.
Luego $D \in \mathfrak{F}$, donde $\mathfrak{F}$ es el conjunto de todos los inductivos en K.
Por lo tanto

$$M \subset D$$

entonces, sea $n \in M$ arbitrario, luego $n \in D$, por lo tanto $n \geq 1$. ©

Problema 23 *Sean $m, n \in M$ arbitrariamente tomados. Demostrar que*

(i) $m + n \in M$

(ii) $m.n \in M$

(iii) $m - n \in M$*, siempre que* $m > n$

Probando:

(i) Fijando $m \in M$, originamos el siguiente conjunto

$$A = \{n \in M : \ m + n \in M\} \tag{16}$$

Afirmamos: A es un conjunto inductivo.

Veamos

a) $1 \in A$: como $m \in M$ y M es inductivo, entonces $m + 1 \in M$, luego por definición del conjunto A se tiene

$$1 \in A$$

b) Sea $x \in A$ arbitrario, luego $m + x \in M$ ahora como M es inductivo

$$(m + x) + 1 \in M$$

luego

$$m + (x + 1) \in M$$

por la definición dada del conjunto M, tenemos

$$x + 1 \in A$$

□

Luego de (16) se tiene $A \subset M$, pero por ser M un conjunto inductivo minimal en K, se tiene

$$M \subset A$$

de lo anterior nos obliga a que $M = A$, ahora si.

Sea $n \in M$ arbitrario, como $n \in M = A$, entonces $n \in A$, luego $m + n \in M$ □

(ii) Fijemos $m \in M$, bien, ahora considerando

$$B = \{n \in M : \ m.n \in M\}$$

Podemos afirmar que B es inductivo:

En efecto

(a) $1 \in B$: en efecto como $m.1 = m \in M$ y $1 \in M$, entonces $1 \in B$

(b) Sea $x \in B$, entonces $x \in M \wedge m.x \in M$

ahora bien, como

$$m.x \in M \wedge m \in M$$

luego por (i) se tiene $m.x + m \in M$, luego

$$m.(x+1) \in M$$

ahora como $x \in M$ y M es inductivo $x + 1 \in M$, entonces

$$x + 1 \in B$$

□

de la definición de B se tiene que $B \subset M$ y por la minimalidad de M

$$M \subset B$$

luego $M = B$.

Finalmente, sea $n \in M$ arbitrario, luego

$$n \in M = B$$

entonces $n \in B$, para finalmente $m.n \in M$

(iii) Consideremos

$$\mathcal{C} = \{n \in M : m \in M, m > n \Rightarrow m - n \in M\}$$

afirmamos: $\mathcal{C}$ es inductivo

(a) $1 \in \mathcal{C}$: como $1 \in M$ y sea $m \in M$ con $m \neq 1$, entonces por propiedad se tiene $m - 1 \in M$, luego

$$1 \in \mathcal{C}$$

(b) sea $x \in \mathcal{C}$: luego existe $m \in M, x \in M$ de modo que $m > x$, entonces

$$m - x \in M$$

ahora

$$(m+1) - (x+1) = m - x \in M$$

con $m+1 \in M$ y $x+1 \in M($ ya que $m, x \in M$, entonces $x+1 \in \mathcal{C}$ $\square$

luego de lo anterior se tiene

$$\mathcal{C} = M$$

ahora sí para el problema, sea $m, n \in M$, como $n \in M$, entonces $n \in \mathcal{C}$, por lo tanto $m \in M, m > n$, implica que

$$m - n \in M$$

©

Problema 24 *Si se tiene que $n, x \in M$ con $n < x$. Probar que $n+1 \leq x$*

En efecto: como $x > n$ con $x \in M$, entonces por (iii) del problema anterior $x - n \in M$, luego por el problema 22, se tiene $x - n \geq 1$, por lo tanto

$$x \geq n+1$$

©

Problema 25 ***Probar que todo subconjunto no vacío A de M, posee un elemento mínimo.***

Demostremos:como $1 \leq m, \forall m \in M$, entonces se presentan dos casos

caso 1: si $1 \in A$, luego 1 sería el elemento buscado.

caso2: si $1 \notin A$, supongamos que A no tiene minímo, definimos

$$B = \{n \in M : \ n < x, \forall x \in A\}$$

como $1 \notin A$, entonces $1 < x, \forall x \in A$, por lo tanto

$$1 \in B$$

estamos buscando que B sea inductivo en K.

Ahora, sea $n \in B$ arbitrario, entonces

$$n < x, \forall x \in A$$

como A no tiene mínimo, entonces $n \notin A$, ya que en caso contrario, n sería el mínimo, luego $n < x, \forall x \in A$, de lo demostrado

$$n+1 \leq x, \forall x \in A$$

ahora como $n+1 \notin A$ ya que sino sería el mínimo, entonces $n+1 < x, \forall x \in A$, por lo tanto

$$n+1 \in B$$

hasta aquí B es inductivo.

Sea $a \in A$, es claro que su existencia está garantizada porque A es no vacío, entonces $a \in M = B$, luego $a \in B$, entonces

$$a < a$$

esto no se puede dar, luego es un hecho contradictorio. ©

Problema 26 ***Sea K un cuerpo. Pruebe que el conjunto*** $I = \{x \in K : x \geq 1\}$ ***es inductivo.***

Demostración: veamos ello por definición

(i) como $1 \geq 1$, entonces $1 \in I$

(ii) si $x \in I$, luego $x \geq 1$ pero como $x+1 > x$, se tiene

$$x+1 > x \geq 1$$

luego $x+1 > 1$, luego por definición $x+1 \geq 1$,entonces

$$x+1 \in I$$

©

Problema 27 ***Sea*** $I \subset K$ ***inductivo ,*** $a \in I$***. Probar que si*** $a \neq 1 \wedge a-1 \in I$***.*** ***Entonces*** $I \setminus \{a\}$ ***es inductivo.***

Desarrollo: veamos ello

(i) $1 \in I \setminus \{a\}$: como I es inductivo, entonces $1 \in I$, ahora como $1 \neq a$, luego

$$1 \in I \setminus \{a\}$$

(ii) sea $x \in I \setminus \{a\}$, luego

$$x \in I \wedge x \neq a$$

supongamos que $x+1 = a$, entonces $x = a-1$, como $x \in I$,

$$a-1 \in I$$

esto no se puede dar, luego

$$x + 1 \neq a$$

luego $x + 1 \in I \wedge x + 1 \neq a$

luego $x + 1 \in I \setminus \{a\}$.

©

Problema 28 ***Sea*** $p \in N$ ***fijado. Construya una función inyectiva*** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{p\}$

Desarrollo:

1. si $p = 1$, podemos definir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$, tal que $f(x) = x + 1$

   Afirmación: f está bien definida

   esto es claro, ya que supongamos que exista $x \in \mathbb{N}$, de modo que $f(x) = 1$, luego

   $$x + 1 = 1$$

   pero esto es imposible.

   afirmación: f es inyectiva.

   Veamos ello, si $f(a) = f(b)$, entonces $a + 1 = b + 1$, por lo tanto $a = b$.

2. si $p \neq 1$, definamos la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{p\}$

   $$f(x) = \begin{cases} x & , 1 \leq x < p \\ x + 1 & , p \leq x \end{cases}$$

   Afirmación 1: f está bien definida.

   basta ver que no exista $x \in \mathbb{N}$, tal que $f(x) = p$.

   Supongamos lo contrario, es decir que existe $x_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

   $$f(x_0) = p$$

   dividamos en dos casos

caso 1: si $1 \leq x_0 < p$, entonces $f(x_0) = p$,por lo tanto $x_0 = p$, esto no se puede dar, ya que $x_0 < p$

caso 2: si $p \leq x_0$, luego $f(x_0) = p$, entonces

$$x_0 + 1 = p$$

por lo tanto $x_0 < p$, es decir $p \leq x_0 < p$, por lo tanto $p < p$, no se puede dar o es un hecho contradictorio.

Afirmación 2: f es inyectivo.

Sea $f(a) = f(b)$, aquí podemos dividir en cuatro casos

caso 1: si $1 \leq a < p \wedge 1 \leq b < p$, entonces $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, luego cumple.

caso 2: si $1 \leq a < p \wedge p \leq b$ luego $f(a) = f(b)$, entonces $a = b + 1$, por lo tanto

$$b < a$$

esto último no se puede dar, ya que $1 \leq a < p \leq b$, por lo tanto $a < b$

caso 3: si $p \leq a \wedge 1 \leq b < p$, igual que en el caso 2.

caso 4: si $p \leq a \wedge p \leq b$

entonces $f(a) = f(b)$, entonces $a + 1 = b + 1$, finalmente $a = b$.

©

Problema 29 ***Sea*** $B \subset \mathbb{N}$ ***no vacío, supongamos que existe*** $a \in \mathbb{N}$***, tal que***

$$\forall x \in B, x \leq a$$

Pruebe que existe $b \in B$***, de modo que:*** $\forall x \in B, x \leq b$

Demostrando: considerando en conjunto siguiente

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \ \forall x \in B, x \leq n\}$$

como $a \in A$ por dato del problema, entonces por el PBO existe $b \in A$ elemento mínimo, es decir

$$\forall x \in B, x \leq b \tag{17}$$

Afirmamos 1: $b \in B$

En efecto, supongamos que $b \notin B$, como $\forall x \in B, x \leq b$, entonces

$$\forall x \in B, x < b$$

luego

$$\forall x \in B, x \leq b-1$$

pero esto último no se puede dar, ya que si fuese asi, $b-1 \in A$ lo cual contradice la minimalidad de b $\square$

AFIRMAMOS 2: $\forall x \in B, x \leq b$

Lo cual se demuestra por (17). ©

Problema 30 *Considere para cada $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq n\}$.*

Definamos: sea $A \subset I_n$

A es n-inductivo si y solo si

(i) $1 \in A$

(ii) $i+1 \in A$, *siempre que* $[i \in A \wedge i \neq n]$

Probar que si $A \subset I_n$ es n-inductivo, entonces $A = I_n$

Demostremos:

Supóngase que exista $m \in I_n$ de modo que $m \notin A$, note debido a que $1 in A$, entonces $1 < m \leq n$.

Considere $B = \{x \in I_n : x \notin A\}$, como $m \in B$, entonces $B \neq \emptyset$.

Ahora por el PBO, existe $x_0 = minB(x_0 \in I_n, x_0 \notin A)$, luego como $1 < x_0$ existe $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$a + 1 = x_0$$

luego

$$1 \leq a < x_0 \leq n \tag{18}$$

entonces $a \in I_n$, pero por la minimalidad de x_0 tenemos $a \notin B$, por lo tanto

$$a \in A$$

pero por la ecuación (18) : $a \neq n$, luego por definición $a+1 \in A$, lo cual implica $x_0 \in A$ esto es una proposición contradictoria.

Por lo tanto $A = I_n$ ©

Problema 31 ***Pruebe que no existen funciones inyectivas de $\mathbb{N}$ a I_n.***

DEMOSTRACIÓN:

Considere para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\mathfrak{F}_n = \{f : \mathbb{N} \to I_n : \ f \text{ es una función inyectiva}\}$$

Sea $I = \{n \in \mathbb{N} : \ \mathfrak{F}_n = \emptyset\}$.

Probaremos que I es un conjunto inductivo, veamos ello

(i) $1 \in I$: suponga que existe $f \in \mathfrak{F}_1$ es decir, existe $f : \mathbb{N} \to I_1$ una función inyectiva, entonces

$$f(1) = 1 \wedge f(2) = 1$$

pero ello no puede ser, por lo tanto $\mathfrak{F}_1 \neq \emptyset$, luego $1 \in I$

(ii) sabiendo que $n \in I$ es decir

$$\mathfrak{F}_n = \emptyset \tag{19}$$

Por demostrar que $n + 1 \in I$.

Supóngase que existe

$$f \in \mathfrak{F}_{n+1}$$

entonces existe $f : \mathbb{N} \to I_{n+1}$ inyectiva

Caso 1: si $n + 1 \notin f(\mathbb{N})$, entonces f siendo inyectiva, entonces $f \in \mathfrak{F}_n$ pero esto no está de acuerdo con (19)

Caso 2: si $n + 1 \in \mathfrak{F}(\mathbb{N})$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ de modo que

$$f(m) = n + 1$$

restrngiendo f :

$$f \setminus \{m\} : \mathbb{N} \setminus I_n$$

es inyectiva, pero por un problema resuelto, existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\setminus\{m\}$ es una función inyectiva, entonces considerando

$$h : f \setminus \{m\} \circ g : \mathbb{N} \to I_n$$

es inyectiva, esto no se puede dar, por (19)

entonces

$$n + 1 \in I$$

©

5. Intervalos en un cuerpo ordenado

Sea K un cuerpo ordenado y $a, b \in K$ con $a < b$, luego se define lo que es un intervalo en un cuerpo ordenado de nueve tipos posibles:

INTERVALOS FINITOS O LIMITADOS:

1. $[a, b] = \{x \in K : \; a \leq x \leq b\}$ (Intervalo cerrado)

2. $[a, b) = \{x \in K : \; a \leq x < b\}$

3. $(a, b] = \{x \in K : \; a < x \leq b\}$

4. $(a, b) = \{x \in K : \; a < x < b\}$(Intervalo abierto)

   INTERVALOS INFINITOS:

5. $(-\infty, b] = \{x \in K : \; x \leq b\}$

6. $(-\infty, b) = \{x \in K : \; x < b\}$

7. $[a, +\infty) = \{x \in K : \; a \leq x\}$

8. $(a, +\infty) = \{x \in K : \; a < x\}$

9. $(-\infty, +\infty) = K$

Problema 32 (CARACTERIZACIÓN DE UN INTERVALO)
Sea $I \subset \mathbb{R}$***. Mostrar que***
I es un intervalo $\Longleftrightarrow \quad a, b \in I / \; a < x < b \Longrightarrow x \in I$***.***

Probando:

$(\Longrightarrow)$ Sea I un intervalo, pero por definición existen nueve tipos de intervalos, luego tenemos que ingresar a cada una de ellas

1. si $I = [m, n]$
   entonces $m \leq a < x < b \leq n$, luego $m < x < n$ por lo tanto $m \leq x \leq n$, es decir $x \in I$
   Observación: aunque no se ha dicho, pero se supone que hemos tomado también como hipótesis que $a, b \in I, a < x < b$.

2. si $I = [m, n)$
   luego $m \leq a < x < b < n$, por lo tanto $m < x < n$, esto implica por definicón de $\leq$, $m \leq x < n$, luego $x \in I$.

3. Si $I = (m, n]$

   entonces $m < a < x < b \leq n$, con ello se obtiene $m < x \leq n$, implica $x \in I$.

4. si $I = (m, n)$

   se obtiene

$$m < a < x < b < n$$

   por lo tanto $x \in I$.

5. si $I = [m, +\infty)$

   es decir $m \leq a < x < b$, ello nos lleva a $m < x$, luego $m \leq x$, por lo tanto $x \in I$.

   De manera similar se deja para su verificacion cada uno de los casos restantes, es decir

6. si $I = (m, +\infty)$

7. si $I = (-\infty, n]$

8. si $I = (-\infty, n)$

9. si $I = (-\infty, +\infty)$

$(\Longleftarrow)$

como $I \subset \mathbb{R}$.

Supongamos que I esté acotado inferiormente y también superiormente, luego existen

$$i = inf\ I\ ,\ s = Sup\ I$$

.

Y es aquí donde podemos dividirlo el problema dependiendo si estos elementos $i, s \in \mathbb{R}$ estén o no en I:

1. si $i \in I \wedge s \in I$

   Afirmamos: $I = [i, s]$

   En efecto:

   $(\subset)$ Sea $x \in I$, luego $i \leq x \leq s$, es decir $x \in [i, s]$

   $(\supset)$ Sea $x \in [i, s]$, entonces $i \leq x \leq s$

   Si $x = i \vee x = s$, entonces $x \in I$.

   Si $i < x < s$, luego por hipótesis $x \in I$

2. si $i \notin I \wedge s \in I$

   AFIRMAMOS: $I = (i, s]$

   En efecto:

   $(\subset)$ sea $x \in I$, luego $i < x \leq s$, entonces $x \in (i, s]$

   $(\supset)$ Sea $x \in (i, s]$, entonces $i < x \leq s$

   Si $x = s$, entonces $x \in I$

   si $x \neq s$, luego $i < x < s$

   ahora como $i = infI$, entonces existe $a \in I$ tal que $a < x < s$, ahora como $a, s \in I$ por hipótesis tenemos

   $$x \in I$$

3. si $i \in I \wedge s \notin I$

   AFIRMAMOS: $I = [i, s)$

   En efecto:

   $(\subset)$ ver.

   $(\supset)$ Sea $x \in [i, s)$, luego

   $$i \leq x < s$$

   si $x = i$, entonces se cumple $x \in I$

   si $x \neq i$, luego $i < x < s$, por lo tanto como $x < s = Sup\, I$, existe $b \in I$ tal que

   $$x < b$$

   luego

   $$i < x < b$$

   pero por hipótesis $x \in I$

4. si $i \notin I \wedge s \notin I$

   AFIRMAMOS: $I = (i, s)$

   En efecto:Dejamos para su verificación.

Ahora si I no está acotado inferiormente, pero si superiormente , luego existe $s = SupI$.

item si $s \in I$

5. Podemos afirmar que se cumple $I = (-\infty, s]$

   En efecto:

   $(\subset)$ directo.

   $(\supset)$ sea $x \in (-\infty, s]$, entonces $x \leq s$

   Si $x = s$, entonces $x \in I$.

   Si $x \neq s$, entonces $x < s$

   Como x no está acotado inferiormente de I, existe $a \in I$ tal que $a < x$

   entonces $a < x < s$ como $a, s \in I$, se puede aplicar la hipótesis concluyéndose que

$$x \in I$$

6. si $s \notin I$

   Afirmamos: $I = (-\infty, s)$ (verificar su prueba).

   Ahora si I está acotado inferiormente pero no superiormente, existe $i = inf\ I$

7. si $i \in I$

   Afirmamos: $I = [i, +\infty)$ verificar.

8. si $i \notin I$

   Afirmamos: $I = (i, +\infty)$ ver.

9. Finalmente si I no está acotado ni inferiormente ni superiormente.

   Afirmamos en este caso que : $I = (-\infty, +\infty)$(se deja para su verificación) ©

6. Valor absoluto en un cuerpo ordenado

Definición 5 *Sea K un cuerpo ordenado. Se define el valor absoluto de un elemento del cuerpo $x \in K$ de la manera siguiente:*

$$|x| = \begin{cases} x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

La noción de valor absoluto es de gran aplicación en el análisis matemático.

Ahora estudiaremos sus cualidades.

Problema 33 *Sea K un cuerpo ordenado y $x \in K$. Probar que*

$$|x| = max\{x, -x\}$$

Prueba:

(a) si $x > 0$, entonces $max\{x, -x\} = x$, ya que $-x < 0 < x$. Por otro lado $|x| = x$, ya que $x > 0$, por lo tanto

$$|x| = max\{x, -x\}$$

(b) si $x = 0$, verificar.

(c) si $x < 0$, ver.

©

Problema 34 ***Sea K un cuerpo ordenado. Probar que***

$$\forall x \in K : -|x| \leq x \leq |x|$$

*Veamos:*como $|x| = max\{-x, x\}$, entonces

$$|x| \geq x \wedge |x| \geq -x$$

entonces

$$|x| \geq x \wedge x \geq -|x|$$

luego tenemos

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

©

Problema 35 *Sea K un cuerpo ordenado. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $-a \leq x \leq a$

(ii) $x \leq a \wedge -x \leq a$

(iii) $|x| \leq a$

Prueba:

$(i) \Longrightarrow (ii)$ esto es directo, desde que

$$a \leq b \leq c \Longleftrightarrow a \leq b \wedge b \leq c$$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ veamos por casos

caso 1: si $x > 0$, entonces $|x| = x \leq a$, luego $|x| \leq a$

caso 2: si $x = 0$, luego $|x| = 0 \leq a$

caso 3: si $x < 0$, por lo tanto $|x| = -x \leq a$

$(iii) \Longrightarrow (i)$ ver este caso. ©

Problema 36 ***Probar que*** $|x - a| \leq b \Longleftrightarrow a - b \leq x \leq a + b$

©

Problema 37 *Sea K un cuerpo ordenado, se cumple*

(i) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(ii) $|xy| = |x||y|$

(iii) $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$

(iv) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ ©

Dejamos los problemas siguientes, para su verificación.

Problema 38 *Probar que si $x \neq 0$, entonces* $|\frac{1}{x}| = \frac{1}{|x|}$

©

Problema 39 *Probar que si $a, b \in K$ y $b \neq 0$, luego*

$$|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$$

©

Problema 40 *Probar que en un cuerpo ordenado se verifica*

$$|x| = a \Longleftrightarrow [a \geq 0 \wedge (x = a \vee x = -a)]$$

©

Problema 41 *Probar*

$$|a| = |b| \Longleftrightarrow [a = b \vee a = -b]$$

©

Problema 42 *Demostrar que se cumple*

$$|x| \leq a \Longleftrightarrow [a \geq 0 \wedge -a \leq x \leq a]$$

©

Problema 43 *Demuestre que en un cuerpo ordenado se tiene*

$$|x| \geq a \Longleftrightarrow [x \leq -a \vee x \geq a]$$

©

Problema 44 *Probar*

$$|a| \leq |b| \Longleftrightarrow (b-a)(b+a) \geq 0$$

©

7. Conjuntos acotados

Definición 6 *Sea $X \subset \mathbb{K}$, donde K es un cuerpo ordenado.*

(i) X es un conjunto acotado superiormente si y solo si existe $c \in K$ de modo que

$$\forall x \in X,\ x \leq c$$

(ii) X es un conjunto acotado inferiormente si y solo si existe $d \in K$ tal que

$$\forall x \in X,\ d \leq x$$

(iii) X es un conjunto acotado si y solo si X está acotado superiormente y inferiormente.

Observación: De la defnción se extrae lo siguiente: $X \subset K$ es un conjunto acotado si y solo si existen $d, c \in K$ tal que

$$d \leq x \leq c,\ \forall x \in X$$

Problema 45 ***Pruebe que el producto de dos funciones $f, g : X \to \mathbb{K}$ acotadas, es también acotada.***

Prueba: Como $f : X \to \mathbb{K}$ es acotada, luego existe $c \in K, c > 0$, tal que

$$\forall x \in X, |f(x)| < c$$

estamos utilizando el valor absoluto para este caso ya que nos va a facilitar en el proceso.
También existe $d \in K, d > 0$ tal que

$$|g(x)| < d,\ \forall x \in X$$

de lo anterior tenemos

$$|(fg)(x)| = |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < cd, \forall x \in X$$

luego $(fg)(X)$ es un conjunto acotado, luego, por la defnción de función acotada, se tiene que fg es acotada. ©

8. Cuerpo Arquimediano

Definición 7 *Sea K un cuerpo ordenado.*
K es arquimediano si y solo si para cada $k \in K$, existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $k < n$

NOTA: Esto equivale a decir:
K es arquimediano si y solo si $\mathbb{N} \subset K$ no está acotado superiormente en K.

Problema 46 ***Probar que $\mathbb{Q}$ es arquimediano.***

En efecto: Sea $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ un elemento arbitrario, con $b > 0$ luego

$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{b} < |a| + 1$$

considerando $n_0 = |a| + 1 \in \mathbb{N}$, luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{a}{b} < n_0$$

esto significa por definición que $\mathbb{Q}$ es arquimediano. ©

Problema 47 ***Probar que*** $\mathbb{Q}(t)$ ***no es arquimediano.***

VEAMOS: sabemos que $\mathbb{Q}(t)$ es un *cuerpo ordenado*. Pero no es arquimediano, ya que si consideramos

$$p(t) = t \in \mathbb{Q}(t)$$

entonces sea $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}(t)$, luego $t - n$ es positivo, entonces por definición

$$n < t, \forall n \in \mathbb{N}$$

luego t acota superiormente a $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}(t)$, esto hace que $\mathbb{Q}(t)$ sea no arquimediano. ©

Problema 48 *Sea K un cuerpo ordenado.*
K es arquimediano si y solo si dado $a, b \in K$***, con*** $a > 0$***, existe*** $n \in \mathbb{N}$ ***tal que*** $na > b$

Demostremos:

($\Longrightarrow$) como $a > 0$ consideremos

$$w = ba^{-1} \in K$$

como K es arquimediano, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > w$, por lo tanto $n > ba^{-1}$, luego como $a > 0$, entonces $a^{-1} > 0$, por lo tanto

$$na > (ba^{-1})a$$

implica $na > b$

($\Longleftarrow$) Sea $k \in K$ arbitrariamente tomado, consideremos en la hipótesis $a = 1 > 0, b = k$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$an > b$$

por lo tanto $1.n > k$, es decir $n > k$. Basta con ello para concluir que K es un cuerpo arquimediano.

©

Problema 49 *Sea K un cuerpo ordenado.*

Pruebe que K es arquimediano si y solo si, para cada $a > 0$ ***en K, existe*** $n \in \mathbb{N}$***, tal que*** $0 < \frac{1}{n} < a$

PRUEBA:

Consideremos la suficiencia, $a^{-1} \in K$, por ser arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $a^{-1} < n$, entonces como $a > 0$, luego $a^{-1} > 0$ por lo tanto

$$0 < a^{-1} < n$$

luego

$$0 < 1 < na$$

ahora como $\mathbb{N} \subset P$, entonces $n > 0$, luego $n^{-1} > 0$, por lo tanto

$$0 < \frac{1}{n} < a$$

Dejaremos la verificación de la necesidad. ©

Problema 50 *Sea* $r, p \in \mathbb{Q}$ *con* $r < 0$*. Mostrar que existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $nr < p$

Probando: Consideremos dos casos

(a) Si $p \geq 0$, basta considerar $n = 1$, ya que $nr = 1.r = r < 0 \leq p$, luego

$$nr < p$$

(b) Si $p < 0$, sabemos que $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente en $\mathbb{Q}$ luego $\frac{p}{-r} \in \mathbb{Q}$ no acota superiormente a $\mathbb{N}$ por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{p}{-r} < n$ por lo tanto

$$p > nr$$

©

Problema 51 ***Muestre que para todo*** $r \in \mathbb{Q}$***,*** $r > 0$***, existe*** $n \in \mathbb{N}$ ***tal que*** $r > \frac{n}{n^2+1}$

Prueba: Considerando el conjunto siguiente $A = \{n + \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\}$

Afirmamos que A no está acotado superiormente:

En efecto: sea $r \in \mathbb{Q}$ arbitrario, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $r < n_0$ y como

$$n_0 + \frac{1}{n_0} > n_0$$

luego

$$r < n_0 + \frac{1}{n_0}$$

□

Luego, considerando $r \in \mathbb{Q}$ y $r > 0$ en forma arbitraria, para $\frac{1}{r} \in \mathbb{Q}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{r} < n + \frac{1}{n}$$

luego $\frac{1}{r} < \frac{n^2+1}{n}$ para finalmente

$$\frac{n}{n^2 + 1} < r$$

©

9. Supremo de un conjunto

Definición 8 *Sea K un cuerpo ordenado, $X \subset K$ no vacío y acotado superiormente en K.*
$s \in \mathbb{R}$ es el supremo de X si y solo si

(i) $\forall x \in X, \ x \leq s$

(ii) si $\forall x \in X, x \leq b,$ *entonces* $s \leq b$

Observaciones:

1. La condición (i) nos indica que el supremo de X es una cota superior de X.

2. En cambio, la condición (ii) nos dice que el supremo de X es la menor con respecto a $\leq$ de las cotas superiores.

3. Debe notar que la definición obliga a que el conjunto X, debe ser no vacío. En el caso que queremos quitar esta condición de la definición el conjunto vacío $\emptyset$ al no tener elementos cualquier real es una cota superior, luego $\mathbb{R}$ es el conjunto de todas las cotas superiores de $\emptyset$, pero como este conjunto $\mathbb{R}$ no tiene mínimo, luego no tiene sentido hablar de supremo del conjunto vacío. Por lo tanto evitaremos entrar en esta situación.

4. debe notar que es necesario comprobar en primer lugar que el conjunto de análisis esta acotado superiormente.

5. Se deja al estudiante la comprobación acerca de la unicidad del supremo de un conjunto acotado superiormente. Por tal motivo se denotará en forma muy particular del modo siguiente

$$\sup A$$

6. Demostremos otra equivalencia:

Definición 9 *Sea $X \subset K$ no vacío y acotada superiormente.*
s= sup X si y solo si

(a) $\forall x \in X,\ x \leq s$

(b) Dado $c \in K$ tal que $c < s$, entonces existe $x \in X,\ c < x \leq s$

PROBANDO:
Probando la suficiencia:

(a) Esto se cumple por definición de supremo.

(b) Dada $c \in K$, tal que

$$c < s \tag{20}$$

supóngase que $\forall x \in X, x \leq c$, entonces por ser $s = \sup X$, luego $s \leq c$ pero esto es imposible por (20) con lo cual debería existir $x \in X$ tal que

$$c < x \tag{21}$$

pero por (20) se cumple

$$x \leq s \tag{22}$$

por lo tanto de (21) y (22) se tiene

$$c < x \leq s$$

Probemos la necesidad:
Para probar que $s = \sup X$, por definición ya cumple (i), la cual es igual a (a) solo falta ver que

cumpla con (ii) .
Si $\forall x \in X, x \leq b$ implica que

$$s \leq b \tag{23}$$

supongamos lo contrario, es decir $b < s$, entonces por hipótesis (b) , tenemos la existencia de $x \in X$ tal que

$$b < x \leq s$$

con lo cual $b < x$ pero esto no se puede dar por (23), con lo cual necesariamente se debe tener que

$$s \leq b$$

©

Problema 52 ***Supongamos que exista*** $s = \sup X$ ***supremo del conjunto X, entonces este elemento es único.***

En efecto: sea s y s' dos elementos que cumplan con los axiomas (i) y (ii) de la definición de supremo de un conjunto. En particula considerando (ii), como s es una cota superior de X, entonces

$$s' \leq s$$

ahora en forma inversa, como s' es una cota superior de X, luego

$$s \leq s'$$

de lo anterior se deduce que $s = s'$. ©

Observación:

El problema ahora a enfrentar es sobre su existencia. Sea $X \subset K$ no vacío y acotado superiormente. ¿Existe siempre el supremo de X?. Lamentablemente esto no es así, veamos un ejemplo, como ya sabemos acerca de la existencia de cuerpos ordenados no arquimedianos, consideremos en general uno de ellos que denotaremos por K.
Entonces $\mathbb{N} \subset K$ esta acotado superiormente, digamos por $c \in K$, entonces

$$n + 1 \leq c, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

supongamos que exista $s = sup\mathbb{N}$, entonces

$$n \leq s, \forall n \in \mathbb{N}$$

pero también se puede colocar

$$n \leq s - 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

luego $s - 1$ es una cota superior de $\mathbb{N}$, bien, ahora por definición de supremo $s \leq s - 1$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto no existe el supremo de $\mathbb{N}$en un K no arquimediano.

10. Ínfimo de un conjunto

Definición 10 *Sea K un cuerpo ordenado, $Y \subset K$ no vacío y acotado inferiormente.*
a es el infimo de Y si y solo si

(I_1) $\forall y \in Y, a \leq y$

(I_2) $\forall y \in Y, c \leq y,$ *entonces* $c \leq a$

Problema 53 *Sea K un cuerpo ordenado, $Y \subset K$ no vacío y acotado inferiormente. Pruebe que a es el ínfimo de Y si y solo si*

Problema 54

(I_1') $\forall y \in Y, a \leq y.$

(I_2') *si $c \in K$ tal que $a < c$, entonces existe $y \in Y$ tal que $a \leq y < c$*

11. Cuerpo completo

Definición 11 *Sea K un cuerpo ordenado.*
K es completo si y solo si todo subconjunto no vacío acotado superiormente de K, posee supremos en K.

Observación: Ya dijimo que no siempre existe el supremo en cualquier cuerpo ordenado, basta considerar K un cuerpo **no arquimediano**, luego K no es completo.

Problema 55 ***Si K es completo. Probar que K es arquimediano.***

En efecto: supongamos que K no es arquimediano, entonces $\mathbb{N} \subset K$ está acotado superiormente, luego como K es completo, existe $s = sup\mathbb{N}$. Por lo tanto

$$\forall n \in \mathbb{N}, n + 1 \leq s$$

entonces

$$n \leq s - 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

por lo tanto s ya deja de ser la menor de las cotas superiores de $\mathbb{N}$ en K y ello es contradictorio. Por lo tanto K debe ser arquimediano. ©

Problema 56 *¿Si K es arquimediano, entonces K es completo?*
No, basta considerar el arquimediano $\mathbb{Q}$ *y consideramos el conjunto*

$$X = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0 \wedge x^2 < 2\}$$

el cual es no vacío y acotado superiormente, pero no existe el supremo de X. ©

Problema 57 *Sea K un cuerpo ordenado.*
K es completo si y solo si todo subconjunto no vacío acotado inferiormente K, posee ínfimo en K.

Demostración:

($\Longrightarrow$) Sea $B \subset K$ no vacío y acotado inferiormente en K. Entonces existe $c \in K$ de modo que

$$c \leq b, \forall b \in B$$

considerando $A = -B$
Afirmamos 1: A es no vacío.
Esto se obtiene del hecho que B es no vacío.
Afirmación 2: A está acotado superiormente, en particular por $-c$.

Ahora como K es completo, entonces existe

$$s = supA$$

Afirmamos 3: $-s = infB$
($\Longleftarrow$) Se al lector su verificación. ©

Problema 58 ***¿Existen cuepos K completos?***

Felizmente la respuesta es afirmativa,habría que construir a partir de los axiomas de peano $\mathbb{N}$ obtener $\mathbb{Z}$ luego $\mathbb{Q}$ y finalmente el paso importante un cuepo completo que en este material lo denotaremos como $\mathbb{R}$, pero esta construcción no se desarrolla en este material. Luego podemos indicar que:

Proposición: Existe un cuerpo ordenado y completo que denotaremos por $\mathbb{R}$ y le llamaremos el cuerpo de los números reales.

Problema 59 ***Sea*** $A \subset B$ ***dos conjuntos no vacíos, acotados superiormente en*** $\mathbb{R}$***. probar que***

$$sup\ A \leq \sup\ B$$

PROBANDO: Está claro la existencia de dichos supremos.

Supongamos lo contrario, es decir $\sup B < \sup A$, observando el supremo de A, se tiene la existencia de $a \in A$ de modo que

$$supB < a \leq supA$$

por lo tanto se tiene

$$supB < a \tag{24}$$

pero como $a \in A \subset B$, entonces $a \in B$, por lo tanto

$$a \leq supB \tag{25}$$

por lo tanto de (24) y 25 tenemos

$$a \leq \sup B < a$$

luego $a < a$ esto es imposible. ©

Problema 60 ***Sea A un conjunto no vacío y acotado en*** $\mathbb{R}$***. Probar que se cumple***

$$\text{ínf}\, A \leq \sup A$$

PROBANDO: como $A \neq \emptyset$ entonces existe $a \in A$, luego

$$inf \leq a \wedge a \leq supA$$

por lo tanto

$$infA \leq \sup A$$

©

Nota: *se sugiere al estudiante que se realice también dicha prueba, por el método de contradicción, es decir suponiendo lo contrario*

$$supA < infA$$

y obtener una proposición falsa.

Problema 61 *Sean A y B dos conjuntos no vacíos acotados superiormente en* $\mathbb{R}$*.*
Probar que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

Prueba: En este problema se está considerando la suma de dos conjuntos de la manera siguiente

$$A + B = \{a + b : \ a \in A, b \in B\}$$

Veamos ello, sea $x \in A + B$ arbitrario.
Entonces existen $a \in A, b \in B$ tal que

$$x = a + b$$

pero como

$$a \leq \sup A \wedge \ b \leq \sup B$$

entonces

$$a + b \leq supA + \sup B$$

por lo tanto se cumple que

$$\forall x \in A + B, \ x \leq \sup A + \sup B$$

esto significa que $A + B$ está acotado superiormente, luego existe $\sup(A + B)$, luego

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B \tag{26}$$

es en este punto de la demostración que, supóngase que se cumpla

$$\sup(A + B) < \sup A + \sup B \tag{27}$$

entonces

$$\sup(A + B) - \sup B < \sup A$$

considerando el $\sup A$, existe $a \in A$, de modo que

$$\sup(A + B) - \sup B < a$$

luego

$$\sup(A + B) - a < \sup B$$

ahora observando el $\sup B$, existe $b \in B$ de modo que se cumpla

$$\sup(A + B) - a < b$$

entonces se debe cumplir

$$\sup(A+B) < a+b$$

pero esto último es una proposición falsa, con lo cual negando lo supuesto en (27) con respecto a (26) se obtiene

$$\boxed{\sup(A+B) = \sup A + \sup B}$$

©

Problema 62 ***Sea*** $A \subset \mathbb{R}$ ***no vacío, limitado inferiormente.***
Sea $-A = \{-x : x \in A\}$***. Pruebe que*** $-A$ ***es limitada superiormente y que***

$$\sup\ (-A) = -\text{ínf}\ \ A.$$

Prueba:

AFIRMAMOS: $-A$ es acotado superiormente.
Como A es no vacío y acotada inferiormente, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ de manera que

$$c \leq a, \forall a \in A$$

entonces

$$\forall a \in A, -a \leq -c$$

luego por definición del conjunto $-A$, se tiene

$$x \leq -c,\ \forall x \in -A$$

luego $-A$ esta acotado superiormente por $-c$.

AFIRMAMOS: $\sup\ (-A) = -\text{ínf}\ \ A$
En efecto: como $\text{ínf}\ \ A \leq a, \forall a \in A$, entonces se tiene

$$-a \leq -\text{ínf}\ \ A, \forall a \in A$$

por lo tanto $-\text{ínf}\ \ A$ es una cota superior de $-A$
luego por definición de supremo

$$\sup\ (-A) \leq -\text{ínf}\ \ A$$

es en este punto de la demostración que utilizamos la suposición contraria, es decir consideremos

$$\sup(-A) < -\text{ínf } A$$

ahora busquemos la contradicción, de lo anterior se tiene

$$\text{ínf } A < -\sup(-A)$$

luego por definición de ínfimo de A, existe $a \in A$ de manera que

$$a < -\sup(-A)$$

entonces

$$\sup(-A) < -a$$

lo cual es incorrecto, por lo tanto se debe cumplir con

$$\sup(-A) = -\text{ínf } A$$

©

Problema 63 ***Sean A y B dos conjuntos no vacíos acotados superiormente en*** $\mathbb{R}$***. Probar***

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

Demostremos:

Notamos que se esta considerando el *conjunto suma* de la manera siguiente

$$A + B = \{a + b : \ a \in A \wedge b \in B\}$$

Sea $x \in A + B$ arbitrario, entonces existe $a \in A, b \in B$ tal que

$$x = a + b$$

pero como $a \leq sup\ A$ y $b \leq sup\ B$, entonces

$$a + b \leq sup\ A + sup\ B$$

luego

$$\forall x \in A + B,\ x \leq sup\ A + sup\ B$$

esto significa que $A + B$ está acotado superiormente, por lo tanto

$$\exists \; sup \; (A + B)$$

luego tenemos

$$\sup \; (A + B) \leq \sup \; A + \sup \; B \tag{28}$$

en esta parte de la demostración, supongamos que se tenga

$$\sup \; (A + B) < \sup \; A + \sup \; B \tag{29}$$

luego

$$\sup \; (A + B) - \sup \; B < \sup \; A$$

con lo cual con referencia al sup A tenemos que existe $a \in A$ de modo que

$$\sup \; (A + B) - \sup \; B < a$$

por lo tanto

$$\sup \; (A + B) - a < \sup \; B$$

ahora onservando el sup B tenemos la existencia de $b \in B$ tal que

$$\sup \; (A + B) - a < b$$

luego

$$\sup \; (A + B) < a + b$$

pero esta última expresión es una proposición falsa,por lo tanto hemos obtenido una contradicción, con lo cual negando lo supuesto en 29 con respecto a 28 se tiene que

$$\sup \; (A + B) = \sup \; A + \sup \; B$$

©

Problema 64 *Sean A y B dos conjuntos no vacíos, acotados superiormente en $\mathbb{R}$ donde $\forall a \in A, \forall b \in B, a, b > 0$. Probar que*

(i) AB está acotado superiormente.

(ii) $sup \; (AB) = sup \; A.sup \; B$

Prueba:

(i) Sea $w \in AB$ un elemento arbitrario, entonces $w = ab$, para algún $a \in A, b \in B$ pero como A y B son acotados superiormente, entonces

$$0 < a \leq sup\ A$$

$$0 < b \leq sup\ B$$

entonces $w = ab \leq sup\ A.sup\ B$, esto significa que AB está acotada superiormente.

(ii) De (i) se desprende que

$$sup\ (AB) \leq sup\ A.sup\ B$$

supongamos que se tenga

$$sup\ (AB) < sup\ A.sup\ B$$

ahora como $sup\ A > 0 \wedge sup\ B > 0$, luego

$$sup\ (AB).sup^{-1}\ B < sup\ A$$

por lo tanto existe $a_0 \in A$ de modo que $sup\ (AB).sup^{-1}\ B < a_0$
entonces

$$sup\ (AB).a_0^{-1} < sup\ B$$

luego existe $b_0 \in B$, tal que $sup\ (AB).a_0^{-1} < b_0$
por lo tanto

$$sup\ (AB) < a_0 b_0$$

la expresión anterior es una contradicción. ©

Problema 65 ***Sea*** $A \subset \mathbb{R}$ ***no vacío acotado superiormente con*** $\lambda > 0$***.Demostrar:***

(i) λA ***está acotado superiormente.***

(ii) $sup\ (\lambda A) = \lambda\ sup\ A$

Prueba:

(i) Por hipótesis, para todo $a \in A, a \leq c$, para algún $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\forall a \in A,\ \lambda a \leq \lambda c$$

esto significa que λA está acotado superiormente por λc

(ii) Ahora como A está acotada superiormente , entonces

$$\forall a \in A,\ a \leq sup\ A$$

como $\lambda > 0$, entonces

$$\forall a \in A,\ \lambda a \leq \lambda sup\ A$$

esto significa que

$$sup\ (\lambda A) \leq \lambda sup\ A$$

ahora, supongamos que se tenga $sup\ (\lambda A) < \lambda sup\ A$

como $\lambda > 0$, se tiene

$$sup\ (\lambda A).\lambda^{-1} < sup\ A$$

por lo tanto,existe $a \in A$ de manera que $sup\ (\lambda A).\lambda^{-1} < a$, por lo tanto

$$sup\ (\lambda A) < \lambda\ a$$

pero esto no se puede dar, es decir hemos obtenido una contradicción, por lo tanto **negando la proposición supuesta** se obtiene lo pedido. ©

Problema 66 *Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, $\beta < 0$. Pruebe que*

(i) βA está acotado inferiormente.

(ii) $inf\ (\beta A) = \beta sup\ A$

Prueba:

(i) Por hipótesis $\forall a \in A,\ a \leq c$, entonces como $\beta < 0$ luego

$$\beta c \leq \beta a$$

por lo tanto βA está acotado inferiormente por βc.

(ii) se tiene $a \leq sup\ A$, $\forall a \in A$, entonces

$$\beta sup\ A \leq \beta a$$

luego se tiene

$$\beta sup\ A \leq inf\ (\beta A)$$

Supongamos que se cumpla que $\beta sup\ A < inf\ (\beta A)$, entonces multiplicando por $\beta^{-1} < 0$ tendríamos

$$sup\ A > \beta^{-1} inf\ (\beta A)$$

esto significa que existe $a \in A$ de modo que $a > \beta^{-1} inf\ (\beta A)$, luego como $\beta^{-1} < 0$ se tiene

$$\beta a < inf\ (\beta A)$$

pero esto último no se puede dar, por lo tanto

$$\beta sup\ A = inf\ (\beta A)$$

©

Problema 67 *Halle el supremo del conjunto*

$$M = \{1 + 6x - x^2 :\ x \in \mathbb{R}\}$$

Veamos: antes notemos que

$$1 + 6x - x^2 = 10 - (x - 3)^2 \leq 10$$

por lo tanto podemos afirmar que 10 es una cota superior de M, pero para $x = 3$, se tiene que $1 + 6 \times 3 - 3^2 = 10$.

Por lo tanto esa cota superior se comvierte en **supremo** de manera muy especial es un *máximo.* ©

Problema 68 ***En un cuerpo ordenado K, pruebe que***

$$a^2 + b^2 \Longleftrightarrow a = b = 0$$

En efecto:

Considerando por hipótesis $a^2 + b^2 = 0$, me piden $a = b = 0$, supongamos que $a \neq 0$, entonces

$$a > 0 \vee a < 0$$

entonces

$$a^2 > 0 \vee a^2 > 0$$

por lo tanto $a^2 > 0$, luego $a^2 + b^2 > b^2 + 0$, por lo tanto $0 > b^2$, esto no es compatible con lo demostrado, ya que sabemos si $x \neq 0$ luego se debe tener $x^2 > 0$.

Por lo tanto, negando lo supuesto tenemos $a = 0$.

Por lo tanto, como $a^2 + b^2 = 0$, entonces $0^2 + b^2 = 0$, luego $b^2 = 0$ finalmente $b = 0$

Ahora considerando como dato $a = b = 0$, luego es directo que

$$a^2 + b^2 = 0$$

©

Observación: *Generalizando* la propiedad anterior tenemos:

Sea K un cuerpo ordenado y $n \in \mathbb{N}$

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0 \Longleftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

Problema 69 *Sea P el conjunto de los positivos de un cuerpo ordenado en K.*

(i) Sea $n \in \mathbb{N}$ fijado, $f : P \to P$ definida por $f(x) = x^n$.
Por demostrar que f es monótona creciente, es decir $x < y, x, y \in P$, entonces $f(x) < f(y)$

(ii) Muestre un ejemplo de f tal que no seauna función sobreyectiva.

(iii) Pruebe que $f(P)$ no es un subconjunto limitado o acotado superiormente en K.

Prueba:

(i) Sea $x, y \in P$ de modo que $x < y$.

Por demostrar: $x^n < y^n$

En efecto por inducción matemática.

Para $n = 1$ es claro que cumple.

HI: $x^n < y^n$

Tesis: $x^{n+1} < y^{n+1}$

como $x \in P$, entonces $x > 0$, luego

$$x^n.x < y^n.x \tag{30}$$

ahora como $x < y$, entonces

$$x.y^n < y.y^n \tag{31}$$

de (30) y (31) se tiene $x^{n+1} < y^{n+1}$, entonces $f(x) < f(y)$

(ii) Considerando $f : P \to P$ de modo que $f(x) = x + 1$.

supongamos que f es sobre, entonces debido a que $1 \in P$ existe $n \in P$ tal que $f(n) = 1$, entonces $n + 1 = 1$, luego $n = 0$, por lo tanto

$$0 \in P$$

con lo cual lo anterior es un hecho contradictorio.

(iii) supongamos que $f(P) \subset K$ es un conjunto acotado superiormente en K, entonces

$$f(x) \leq c, \forall x \in P \tag{32}$$

ahora como $f(2) = 2^n$ se tiene $2^n \leq c$, por lo tanto

$$1 < 2 \leq c$$

por lo tanto $1 < c$. Entonces se prueba que $c < c^n$ luego por (32) $f(x) \leq c < c^n$

para luego $x^n < c^n$.

En este punto de la demostración afirmamos que

$$\forall x \in P, x < c$$

supongamos que $c < x$ luego como $0 < c < x$ se tiene

$$c^n < x^n$$

esto último no se puede dar.

Por otro lado si $c = x$, entonces $c^n = x^n$ esto tampoco se puede dar. Por lo tanto necesariamente $x < c, \forall x \in P$

en particular $\mathbb{N} \subset P$: $\forall x \in \mathbb{N}, x < c$

Luego $\mathbb{N}$ está acotado superiormente en K , pero esto es imposible, por lo tanto $f(P)$ no puede ser acotado superiormente en K. ©

Problema 70 ***Sea*** $X = \{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\}$***. Probar que*** $infX = 0$

Prueba:

Primera parte:

Como $\mathbb{N} \subset P$, donde P es un cojunto de los elementos positivos, entonces $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$, luego $n^{-1} > 0$, por lo tanto

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} > 0$$

por lo tanto 0 es una cota inferior de X.

Segunda parte:

Sea $d \in \mathbb{R}$ tal que $d > 0$ arbitrario. Entonces como $\mathbb{R}$ es arquimediano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n_0} < d$$

entonces existe $x = \frac{1}{n_0} \in X$ tal que $0 < x < d$

es decir 0 es la mayor de las cotas inferiores.

Basta con esas dos partes para haber probado que $inf\ X = 0$. ©

Problema 71 *Sea* $X \subset \mathbb{R}$ *no vacío, acotado superiormente,* $c \in \mathbb{R}$*. Probar:*

$$c \leq sup\ X \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \textit{existe } x \in X \textit{ tal que } c - \epsilon < x$$

Prueba:

$(\Longrightarrow)$ sea $\epsilon > 0$ real arbitrario, entonces $c - \epsilon < sup\ X$, por lo tanto por definición del supremo existe $x \in X$ de manera que

$$c - \epsilon < x \leq sup\ X$$

es decir $c - \epsilon < x$

$(\Longleftarrow)$ supongamos que se cumpla:

$$sup\ X < c \tag{33}$$

es claro que ahora debemos obtener un hecho contradictorio, consideremos

$$\epsilon = c - sup\ X$$

pero por hopótesis existe $x \in X$ tal que $c - \epsilon < x$, entonces $c - (c - sup\ X) < x$, luego tenemos

$$sup\ X < x$$

pero esto es imposible, ya que $x \leq sup\ X$ por ser $sup\ X$ una cota superior de X, por lo tanto negando lo supuesto en (33) se obtiene

$$c \leq sup\ X$$

©

Problema 72 *Sea $Y \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente, $c \in \mathbb{R}$. Probar*

$$inf\ Y \leq c \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 \text{ real existe } y \in Y \text{ de modo que } y < c + \epsilon$$

Probando:

Probaremos la suficiencia, sea $\epsilon > 0$ arbitrario, busquemos el $y \in Y$, como

$$inf\ Y < c + \epsilon$$

entonces por definición de ínfimo de Y , existe $y \in Y$ tal que

$$inf\ \leq y < c + \epsilon$$

luego tenemos $y < c + \epsilon$.

Ahora demostraremos la necesidad, es decir $inf\ Y \leq c$.

Supóngase que se cumpla $c < inf\ Y$, luego podemos considerar $\epsilon = inf\ Y - c > 0$, luego por hipótesis existe $y_0 \in Y$ de tal forma que se cumpla

$$y_0 < c + \epsilon$$

por lo tanto $y_0 < c + inf\ Y - c$, entonces $y_0 < inf\ Y$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto negando lo supuesto obtenemos

$$inf\ Y \leq c$$

©

Problema 73 *Sean $a, b \in \mathbb{Q}^+$. Probar*

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow \sqrt{a}, \sqrt{b} \text{ ambos son racionales}$$

Probando:

$(\Rightarrow)$

considerando

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b \tag{34}$$

es claro que $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq 0$, pero como $a, b \in \mathbb{Q}^+$, es decir $a > 0, b > 0$ se tiene $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 0$ por lo tanto, existe $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-1}$, de la ecuación anterior y de (34) obtenemos

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = (a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-1}$$

pero sabemos $(a-b) \in \mathbb{Q}$ y $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-1}$, por lo tanto

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} \in \mathbb{Q} \tag{35}$$

ahora por hipótesis

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q} \tag{36}$$

de (35) y (36) se tiene $2\sqrt{a} \in \mathbb{Q}_{\sqrt{}}$, entonces

$$\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$$

también de (35) y (36) se tiene $2\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, por lo tanto

$$\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$$

$(\Leftarrow)$ directo. ©

Problema 74 *Pruebe que el conjunto K de los números reales*

$$a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}$$

juntamente con las operaciones de adición y multiplicación de números reales, es un cuerpo o campo.

Prueba:

Considerando

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} :\ a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Podríamos considerar dichas operaciones del modo siguiente:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

iniciemos con la operación de adición:

$A1$: + es de clausura:

Problema 75 *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Probar*

$$a+b\ \sqrt{2} = c+d\ \sqrt{2} \Longleftrightarrow a=c \wedge b=d$$

Probando:

La suficiencia , como $a+b\sqrt{2} = c+d\sqrt{2}$, entonces

$$a-c=(d-b)\sqrt{2}$$

supongamos que $d-b \neq 0$, entonces es posible despejar $\sqrt{2}$, gracias a que $d-b$ tiene inverso, entonces

$$(a-c)(d-b)^{-1} = \sqrt{2}$$

ahora, como $a-c \in \mathbb{Q}$ y $(d-b)^{-1} \in \mathbb{Q}$, entonces $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ pero esto es imposible, detallar esta última afirmación.

Luego necesariamente $d-b=0$, por lo tanto $d=b$, reemplazando en la ecuación original, se tiene

$$a+b\ \sqrt{2} = c+b\ \sqrt{2}$$

entonces $a=c$.

Ahora, con respecto a la necesidad es directo detallar este efecto. ©

Problema 76 *Sea $a \in \mathbb{Q}$ no nulo, $x \in \mathbb{I}$ es decir un número irracional. Pruebe que ax y $a+x$ son irracionales.*

Muestre un ejemplo de dos irracionales x e y de manera que xy y $x+y$ sean racionales.

Demostración:

Este es un buen ejemplo para utilizar el método de DEMOSTRACIÓN POR CONTRADICCIÓN o en FORMA INDIRECTA, es decir, supongamos que $ax \in \mathbb{Q}$, ahora como $a \neq 0$ entonces $a^{-1} \in \mathbb{Q}$.

Por lo tanto,

$$(ax)a^{-1} \in \mathbb{Q}$$

por lo tanto, $x \in \mathbb{Q}$, lo cual es imposible.

Realizando de manera similar para $a+x$, realizarlo.

Con respecto a la segunda parte, podríamos considerar

$$x = \sqrt{2} \ e \ y = \sqrt{2}$$

Ya se probó que $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$, luego se demuestra por contradicción que $-\sqrt{2} \in \mathbb{I}$

Por lo tanto

$$xy = (\sqrt{2})(-\sqrt{2}) = -2 \in \mathbb{Q}$$

$$x + y = (\sqrt{2}) + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$$

©

Problema 77 *Sea K un cuerpo ordenado. Probar: K es arquimediano si y solo si para cada $\epsilon > 0$ en K, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\frac{1}{2^n} < \epsilon$$

Demostración:

$(\Longrightarrow)$

Afirmación 1: $n \leq 2^n,\ n \in \mathbb{N}$

Para $n = 1$: basta notar que $1 < 2$, entonces $1 < 2^1$ luego $n \leq 2^n$

HI: $n \leq 2^n$

Tesis: $2^{n+1} = 2^n.2 \geq 2n = n + n \leq n + 1$, con lo cual se tiene

$$2^{n+1} \geq n + 1$$

□

Ahora sí, para el problema;

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario en K, luego como K es arquimediano existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{1}{n_0} < \epsilon \tag{37}$$

pero por la afirmación 1, tenemos

$$n_0 \leq 2^{n_0} \Longrightarrow \frac{1}{2^{n_0}} \leq \frac{1}{n_0} \tag{38}$$

comparando (37) y (38) se tiene

$$\frac{1}{2^{n_0}} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

luego por la propiedad de desigualdad, se tiene

$$\frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon$$

□

Observación: *note que el natural n_0 encontrado en (37) es justamente, el natural que estábamos buscando.*

($\Longleftarrow$)

Para probar que K es arquimediano, se puede utilizar cualquiera de las tres equivalencias anteriormente vistas, en esta parte usaremos la tercera de ellas.

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario, luego por hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon$$

Por lo tanto el natural buscado, lo tomamos de la menera siguiente :

$$m = 2^{n_0}$$

luego existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{m} < \epsilon$

Por lo tanto K es arquimediano. ©

12. Densidad en $\mathbb{R}$

Definición 12 *Sea $X \subset \mathbb{R}$ un subconjunto de los números reales.*
*X es **denso** en $\mathbb{R}$ si y solo si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, existe $x \in X$ de modo que*

$$a < x < b$$

Problema 78 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ *no es denso en* $\mathbb{R}$.

Veamos: basta tomar $a = 1, b = 2$ si fuese denso, debería existir $x \in \mathbb{Z}$ tal que $a < x < b$, es decir

$$1 < x < 2$$

pero se prueba que esto no es posible, para ello se utiliza el principio del Buen orden(PBO). ©

Problema 79 *Considerando $X = \mathcal{C}\mathbb{Z}$, es decir el complemento de $\mathbb{Z}$, es un conjunto denso en* $\mathbb{R}$.

Resolución: Sean $a, b \in \mathbb{R}$,$a < b$, recordemos que no existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a < x_0 < b$$

consideremos $x_0 = \frac{a+b}{2}$ es claro que $a < x_0 < b$

1. Caso 1: si $x_0 \notin \mathbb{Z}$, entonces $x_0 \in X$ por lo tanto cumple.

2. Caso 2: si $x_0 \in \mathbb{Z}$, luego tomando $x_1 = x_0 + \frac{1}{2}$

   a) Si $x_1 \geq b$, luego considerando $y = \frac{x_0+b}{2}$, entonces $x_0 < y < b$, por lo tanto

   $$a < x_0 < y < b$$

   luego $y \in \langle a, b \rangle$ con $y \notin \mathbb{Z}$

   b) si $x_1 < b$, luego basta tomar $y = x_1$, por lo tanto

   $$a < x_0 < y = x_1 < b$$

   entonces $a < y < b$ con $y \notin \mathbb{Z}$, listo. ©

Observación: Otra forma es considerar que entre $\langle a, b \rangle$, existen un número finito de enteros.

Problema 80 *Pruebe que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$*

Veamos: Sea (a, b) un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Debemos probar que existe un racional $x \in \mathbb{Q}$ de modo que se tenga

$$a < x < b$$

Ahora como $b > a$, entonces $b - a > 0$, ahora como $\mathbb{Q}$ es arquimediano, entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{1}{p} < b - a \tag{39}$$

Considerando el conjunto siguiente

$$A = \{m \in \mathbb{Z} : \ \frac{m}{p} \geq b\}$$

sabemos que $p.b \in \mathbb{Z}$ no acota superiormente a $\mathbb{Z}$, entonces existe $m_1 \in \mathbb{Z}$ de modo que $p.b < m_1$, por lo tanto

$$b < \frac{m_1}{p}$$

entonces $b \leq \frac{m_1}{p}$, luego $m_1 \in A$, luego $A \neq \emptyset$. Por lo tanto podemos aplicar el PBO para $\mathbb{Z}$ logrando así obtener $m_0 \in \mathbb{Z}$ de modo que $m_0 = minA$, esto quiere decir que

1. $m_0 \in A$

2. $\forall a \in A, m_0 \leq a$

entonces $\frac{m_0}{p} \geq b$
aquí está la clave del problema: Afirmamos: $\frac{(m_0-1)}{p} > a$
Veamos ello: supongase lo contrario, es decir $a \geq \frac{m_0-1}{p}$, entonces

$$\frac{m_0-1}{p} \leq a < b \leq \frac{m_0}{p}$$

luego

$$b - a \leq \frac{m_0}{p} - \frac{(m_0-1)}{p} = \frac{1}{p}$$

la cual no es compatible con (39), por lo tanto como

$$a < \frac{m_0-1}{p} < b \wedge \frac{m_0-1}{p} \in \mathbb{Q}$$

cumple con lo que buscábamos. ©

Problema 81 *Pruebe que $\mathbb{I}$ es denso en $\mathbb{R}$*

Prueba: Sea (a, b) un intervalo, el objetivo es mostrar que existe $x_0 \in \mathbb{I}$ de modo que $a < x_0 < b$.
Sugerencia: como $\frac{b-a}{\sqrt{2}} > 0$, entonces existe $p \in \mathbb{N}$ de modo que

$$0 < \frac{1}{p} < \frac{b-a}{\sqrt{2}}$$

entonces podemos considerar

$$A = \{m \in \mathbb{Z} : \ m\frac{\sqrt{2}}{p} \geq b\}$$

luego mostrar que es no vacío, para luego aplicar el PBO para $\mathbb{Z}$, y seguir en paralelo el procedimiento anteriormente visto. ©

Problema 82 ***(Principio de los Intervalos encajados)***
Sea $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ una sucesión decreciente de intervalos acotados y cerrados, es decir que tiene la forma siguiente $I_n = [a_n, b_n]$.
Muestre que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$$

Veamos: considere $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, note que se prueba lo siguiente

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_1$$

Como A es acotado superiormente, entonces existe

$$sup\ A = a$$

de manera similar, sea $B = \{b_n :\ n \in \mathbb{N}\}$, se tiene igualmente

$$a_1 \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

B está acotado inferiormente, esto quiere decir que existe $b = inf\ B$.

Luego la clave esta que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = [a, b]$$

se sugiere probarlo por doble inclusión y con las deficiones de ínfimo y supremo. ©

Problema 83 *Considere* $D = \{\frac{m}{2^n} :\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. *Pruebe que D es denso en* $\mathbb{R}$.

Problema 84 *Sea* $A \subset \mathbb{R}$. *Pruebe que A es denso en* $\mathbb{R}$ *si y solo si* $\forall r \in \mathbb{R}$ *,existe* $\epsilon > 0$ *tal que*

$$|r - a| < \epsilon$$

Prueba:

$(\Longrightarrow)$ Sea $r \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ arbitrario. Busquemos el elemento $a \in A$.

Considerando $r - \epsilon < r + \epsilon$, entonces por densidad existe $a \in A$ tal que

$$r - \epsilon < a < r + \epsilon$$

por lo tanto

$$-\epsilon < a - r < \epsilon$$

esto implica que $|a - r| < \epsilon$, es decir $|r - a| < \epsilon$

$(\Longleftarrow)$ Sea $x, y \in \mathbb{R}$ de modo que $x < y$

considerando $r = \frac{x+y}{2}$ y $\epsilon = \frac{y-x}{2} > 0$

luego por hipótesis existe $a \in A$ de modo que $|r - a| < \epsilon$, luego

$$r - \epsilon < a < \epsilon + r$$

reemplazando sus valores, tenemos

$$x < a < y$$

listo con ello, A es denso en $\mathbb{R}$. ©

Problema 85 ***Definición : Sea*** $A \subset \mathbb{R}$***. A es un conjunto discreto si y solo si para cada*** $a \in A$***, existe*** $\epsilon > 0$ ***de tal forma que***

$$(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap A = \{a\}$$

Probar que el complemento de un conjunto discreto es denso en $\mathbb{R}$***.***

Prueba: Sea A un conjunto discreto y consideramos $X = \mathbb{R} \setminus A$ es decir el complemento de A. Demostremos que es denso por medio del equivalente dado en el problema anterior.
Sea $r \in \mathbb{R}$ arbitrario y $\epsilon > 0$, es una buena oportunidad para emplear casos

1. Caso 1: Si $r \in A$, luego existe $\epsilon_1 > 0$ tal que

$$(r-\epsilon_1, r+\epsilon_1) \cap A = \{r\}$$

consideremos

$$\epsilon_2 = min\{\epsilon, \epsilon_1\}$$

y tomamos el punto

$$x = \frac{r + (r+\epsilon_2)}{2}$$

es decir el punto medio de r y $r + \epsilon_2$ con lo cual se prueba que

$$x \in (r-\epsilon_2, r+\epsilon_2) \subset (r-\epsilon, r+\epsilon)$$

por lo tanto $|x-r| < \epsilon$ con $x \notin A$, luego $x \in X$
esto significa que X es denso en $\mathbb{R}$.

2. Caso 2: Si $r \notin A$, entonces $r \in X$ basta tomar $a = r$, con lo cual se tendría

$$|r-a| < \epsilon$$

con $r \in X$, por lo tanto A es denso en $\mathbb{R}$. ©

Problema 86 ***Probar que cualquier conjunto finito es discreto.***

Prueba: Sea A un conjunto finito arbitrario. Dividamos el problema en:

a) Si $A = \emptyset$, entonces por defínción es discreto ¿porqué esto es así ?.

b) Sea $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Veamos que A es discreto: Sea $a \in A$, sin perdida de generalidad podemos considerar que $a = x_1$ entonces tomando

$$\epsilon_j = |x_j - x_1|$$

para $j = 2, 3, \ldots, n$, claro está que en esta parte hay un pequeño problema, que pasaría si A tiene un solo elemento, entrariamos a la no existencia de ϵ_j, luego si consideramos trivial este caso, estariamos trabajando con más de un elemento. Sigamos con el proceso.

Entonces sea $\epsilon = min\{\epsilon_2, \epsilon_3, \ldots \epsilon_n\}$

Por demostrar que $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap A = \{a\}$

Se deja a cargo del lector su verificación.

©

En el siguiente problema, se muestra un conjunto discreto, pero ya no finito.

Problema 87 *Pruebe que* $\mathbb{N}$ *es discreto en* $\mathbb{R}$*.*

©

Problema 88 *Demostrar que* $D = \{x \in \mathbb{R} : \cos\ x = 0\}$ *es un conjunto discreto en* $\mathbb{R}$*.*

©

Problema 89 *Sea* $D \subset E \subset \mathbb{Q}$*.*

Mustre que si D *es denso en* $\mathbb{Q}$*, entonces* E *es denso en* $\mathbb{Q}$*.*

Prueba: Sea $a, b \in \mathbb{Q}$ arbitrarios de forma que $a < b$. Como D es denso en $\mathbb{Q}$ existe $x \in D$ de tal forma que

$$a < x < b$$

luego como $D \subset E$, se tiene que existe $x \in E$, tal que

$$a < x < b$$

©

Problema 90 ***El conjunto vacío*** $\emptyset$***, es denso en*** $\mathbb{R}$

©

Problema 91 *Si $D \subset \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{Q}$.*
Mostrar que $D \setminus \{a\}$ es denso en $\mathbb{Q}$, $\forall a \in D$.

Prueba: Sea $a \in D$ arbitrario, demostremos por la equivalencia, para ello sea $r \in \mathbb{Q}$ arbitrario y $\epsilon > 0$

(i) caso 1: si $r = a$, como $a \in D$ y D es denso en $\mathbb{Q}$, entonces a no es un punto aislado en D, luego existe $b \neq a$ tal que

$$b \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \cap D$$

por lo tanto $|b - a| < \epsilon$, entonces $|b - r| < \epsilon$

(ii) caso 2: Si $r \neq a$ podemos considerar que

$$\epsilon_1 = min\{|r - \epsilon|, \epsilon\}$$

por lo tanto existiría $b \in D$ de tal forma que

$$b \in (r - \epsilon_1, r + \epsilon_1)$$

esto nos está indicando que

$$|b - r| < \epsilon_1 \leq \epsilon$$

entonces $|b - r| < \epsilon$, pero como $b \neq a$,entonces $|a - r| < |r - a|$, lo cual es una proposición contradictoria. ©

Problema 92 *Si $F \subset D$ es un conjunto finito y D es denso en $\mathbb{Q}$.*
Pruebe que $D \setminus F$ es denso en $\mathbb{Q}$

©

Problema 93 ***Sea $D \subset \mathbb{R}$ denso en $\mathbb{R}$. Probar que para cada $a \in D$, a no es un punto aislado en D***

Prueba: Supongamos lo contrario, es decir que exista $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap D = \{a\}$$

ahora si consideramos $(a, a + \epsilon)$, como D es denso en $\mathbb{R}$, debera existir $d \in D$ tal que $d \in (a, a + \epsilon)$ note que $d \neq a$, luego

$$d \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \wedge d \in D$$

entonces

$$d \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$$

luego $d \in \{a\}$, entonces $d = a$, IMPOSIBLE. ©

13. Máximo entero en un cuerpo Completo

Una vez definido lo que significa un cuerpo completo, se dijo, que existe un cuerpo completo producto de la construcción desde los axiomas de peano de los números naturales $\mathbb{N}$ pasando por

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

obteniendo así un conjunto $\mathbb{R}$ que le llamaremos **El conjunto de los números reales**, dicha construcción no se da en este, material. Es más todavia, se tiene que esta es única via isomorfismo o por simplicidad existe un único cuerpo completo, es por ello a este único lo denotaremos por $\mathbb{R}$.

Definición 13 *Sea $x \in \mathbb{R}$ arbitrario.*
$n \in \mathbb{Z}$ es el máximo entero *de x si y solo si existe $n \in \mathbb{Z}$ de modo que $n \leq x < n+1$*

Problema 94 ***Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe el máximo entero de x.***

Prueba: Consideremos el conjunto siguiente

$$A = \{m \in \mathbb{Z} : \ x \leq m\}$$

como $\mathbb{Z}$ no está acotada superiormente por $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto existe $m_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x \leq m_0$, entonces $m_0 \in A$ con lo cual $A \neq \emptyset$.

Luego por el PBO para $\mathbb{Z}$ se tiene la existencia de

$$n_0 = min\ A$$

aqui podemos desdoblarlo en dos casos

1. Caso 1: si $x = n_0$, entonces como $n_0 < n_0 + 1$, luego $n_0 = x < n_0 + 1$, entonces

$$n_0 \leq x < n_0 + 1$$

2. Caso 2: si $x < n_0$, en este caso consideremos

$$n_1 = n_0 - 1$$

Afirmamos: $n_1 \leq x < n_1 + 1$

suponagase que $x < n_1$

entonces $n_1 \in A$, pero $n_1 < n_0$ esto no se puede dar, por la minimalidad de n_0, entonces negando lo supuesto se tiene

$$n_1 \leq x$$

entonces

$$n_1 \leq x < n_0 = n_1 + 1$$

luego

$$n_1 \leq x < n_1 + 1$$

©

Problema 95 ***Demostrar la únicadad del máximo entero de*** $x \in \mathbb{R}$

Prueba: Considere $n, m \in \mathbb{Z}$ dos enteros, de modo que se cumple

$$n \leq x < n + 1 \tag{40}$$

también

$$m \leq x < m + 1 \tag{41}$$

Por demostrar que $m = n$

Supongase que se tiene $m \neq n$, sin perdida de generalidad podemos considerar $n < m$, entonces

$$n + 1 \leq m \tag{42}$$

(42) en (40) se tiene

$$x < n + 1 \leq m$$

entonces $x < m$, por lo tanto $m \leq x < m$, entonces

$$m < m$$

Por lo tanto $m = n$. ©

Notación importante: Gracias a la unicidad del máximo entero de $x \in \mathbb{R}$, lo denotaremos de una forma muy especial

$$[\![x]\!]$$

Problema 96 ***Para cada*** $x \in \mathbb{R}$***,*** $[\![x]\!] \in \mathbb{Z}$***.***

Veamos: esto es cierto gracias a la existencia y unicidad. ©

Problema 97 ***Probar:*** $[\![x]\!] = x \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

Probando:

$(\Longrightarrow)$ como $[\![x]\!] = x$, luego por el problema anterior, $[\![x]\!] \in \mathbb{Z}$

$(\Longleftarrow)$ Como $x \in \mathbb{Z}$, entonces

$$x \leq x < x + 1$$

ahora por la unicidad del máximo entero se tiene que

$$[\![x]\!] = x$$

©

Problema 98 ***Demostrar:*** $[\![x+n]\!] = [\![x]\!] + n$

Prueba: consideremos $[\![x]\!] = m$, entonces

$$m \leq x < m + 1$$

entonces $m + n \leq x + n < (m + n) + 1$, como $m + n \in \mathbb{Z}$ y por la unicidad, necesariamente se debe cumplir que

$$\begin{aligned} [\![x+n]\!] &= m + n \\ &= [\![x]\!] + n \end{aligned}$$

©

Problema 99 ***Probar que***

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ [\![x]\!] \leq n \Longleftrightarrow x < n + 1$$

PROBANDO: Sea $n \in \mathbb{Z}$ arbitrario.

($\Longrightarrow$) consideremos $[\![x]\!] = p$, entonces

$$p \leq x < p + 1$$

ahora como $p \leq n$, luego $p + 1 \leq n + 1$, luego de lo anterior se tiene

$$x < p + 1 \leq n + 1$$

entonces $x < n + 1$.

($\Longleftarrow$) Supongamos lo contrario $n < [\![x]\!]$, pero también sabemos que $[\![x]\!] \leq x$, por lo tanto

$$n < x$$

entonces por propiedad $n + 1 \leq x$, pero esto es imposible por la hipótesis del problema. ©

Problema 100 ***Demostrar:*** $\forall n \in \mathbb{Z} : [\![x]\!] < n \Longleftrightarrow x < n$

PRUEBA:

($\Longrightarrow$) como $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$, entonces $[\![x]\!] < n$ entonces

$$[\![x]\!] + 1 \leq n$$

por lo tanto

$$[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1 \leq n$$

luego $x < n$.

($\Longleftarrow$) supongamos que $n \leq [\![x]\!]$, entonces

$$n \leq [\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1 \tag{43}$$

luego tendremos

$$x < n \tag{44}$$

por lo tanto de (43) y (44) tenemos

$$n \leq x < n$$

luego $n < n$, imposible o contradicción. ©

Problema 101 ***Pruebe que*** $[\![-x]\!] = -[\![x]\!] \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

Prueba:

($\Longrightarrow$) supongamos que $x \notin \mathbb{Z}$ entonces se debe cumplir

$$[\![x]\!] < x < [\![x]\!] + 1$$

también

$$-[\![x]\!] - 1 < -x < -[\![x]\!]$$

es notorio que por la definición del máximo entero de $-x$ $[\![-x]\!] = [\![x]\!] - 1$, pero por hipótesis

$$-[\![x]\!] = -[\![x]\!] - 1$$

esto implicaría que $0 = 1$ pero ello es imposible por axioma de cuerpo.

($\Longleftarrow$) como $x \in \mathbb{Z}$, entonces $-x \in \mathbb{Z}$, por lo tanto

$$[\![-x]\!] = -x = -[\![x]\!]$$

©

Problema 102 ***Pruebe que*** $[\![-x]\!] = -[\![x]\!] - 1 \Longleftrightarrow x \notin \mathbb{Z}$

Prueba:

($\Longrightarrow$) Supongamos lo contrario que $x \in \mathbb{Z}$, entonces se tiene

$$[\![-x]\!] = -[\![x]\!]$$

por lo tanto utilizando la hipótesis del problema se obtiene una contradicción.

($\Longleftarrow$) como $x \notin \mathbb{Z}$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n < x < n + 1$$

luego $[\![x]\!] = n$, también $-(n + 1) < -x < -n$,luego

$$(-n) - 1 < -x < -n$$

por lo tanto por definición de máximo entero

$$[\![-x]\!] = -n - 1$$

luego $[\![-x]\!] = -[\![x]\!] - 1$. ©

Problema 103 ***Probar que*** $[\![x + [\![x]\!]]\!] = 2[\![x]\!]$

Prueba: basta utilizar (98). ©

Problema 104 *Probar* $[\![x + y]\!] \geq [\![x]\!] + [\![y]\!]$

Veamos: como

$$[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$$

$$[\![y]\!] \leq y < [\![y]\!] + 1$$

entonces

$$[\![x]\!] + [\![y]\!] \leq x + y < [\![x]\!] + [\![y]\!] + 1 + 1$$

como $[\![x]\!] + [\![y]\!] \leq x + y$, pero sabemos que

$$\boxed{n \leq x \Longleftrightarrow n \leq [\![x]\!], n \in \mathbb{Z}}$$

entonces $[\![x]\!] + [\![y]\!] \leq [\![x + y]\!]$. ©

Problema 105 ***Probar que*** $a \leq b \Longrightarrow\ [\![a]\!] \leq [\![b]\!]$

Sugerencia: ver el problema anterior. ©

Problema 106 ***Probar*** $\forall n \in \mathbb{Z} :\ [\![x]\!] \geq n \Longleftrightarrow x \geq n$

*Prueba:*ver. ©

Problema 107 ***Pruebe que*** $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, n > 0 :\ [\![\frac{[\![x]\!]}{n}]\!] = [\![\frac{x}{n}]\!]$

Prueba: sea $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$, entonces

$$\frac{[\![x]\!]}{n} \leq \frac{x}{n} < \frac{[\![x]\!] + 1}{n}$$

luego

$$[\![\frac{[\![x]\!]}{n}]\!] \leq \frac{[\![x]\!]}{n} \leq \frac{x}{n}$$

por lo tanto $[\frac{[\![x]\!]}{n}] \leq \frac{x}{n}$, luego por propiedad

$$[\![\frac{[\![x]\!]}{n}]\!] \leq [\![\frac{x}{n}]\!] \tag{45}$$

Sobre $\frac{[\![x]\!]}{n}, [\![\frac{x}{n}]\!] \in \mathbb{R}$ se tiene dos casos:

1. Caso 1: si $\frac{[\![x]\!]}{n} \leq [\![\frac{x}{n}]\!]$ entonces tendríamos
$$\frac{[\![x]\!]}{n} \leq [\![\frac{x}{n}]\!] < \frac{x}{n}$$
entonces
$$[\![x]\!] \leq n.[\![\frac{x}{n}]\!] < x$$
como $[\![x]\!]$ es el mayor entero, luego $[\![x]\!] < x$ y $n.[\![\frac{x}{n}]\!]$ es entero, tenemos
$$[\![x]\!] = n.[\![\frac{x}{n}]\!]$$
luego $\frac{[\![x]\!]}{n} = [\![\frac{x}{n}]\!] \in \mathbb{Z}$, luego se cumple lo pedido.

2. Caso 2: si $[\![\frac{x}{n}]\!] < \frac{[\![x]\!]}{n}$ de (45) se tiene
$$[\![\frac{[\![x]\!]}{n}]\!] \leq [\![\frac{x}{n}]\!] < \frac{[\![x]\!]}{n}$$
entonces por definición y la unicidad se tiene lo pedido. ©

Problema 108 ***Sea*** $x \in \mathbb{R}$ ***tal que*** $x = y + n$ ***con*** $0 \leq n < 1$**.**
Pruebe que $[\![y]\!] = [\![x]\!]$

Prueba: como $0 \leq n < 1$, entonces $0 \leq x - y < 1$, luego
$$y \leq x < y + 1$$
por lo tanto $[\![y]\!] \leq [\![x]\!] \leq [\![y+1]\!] = [\![y]\!] + 1$, por lo tanto $[\![y]\!] \leq [\![x]\!] \leq [\![y]\!] + 1$,de esto se deduce que
$$[\![x]\!] = [\![y]\!]$$
©

14. Aplicaciones diversas

Problema 109 ***Dados*** a, b, ϵ ***en un cuerpo ordenado K. Probar que***
$$|a - b| < \epsilon \Longrightarrow |b| - \epsilon < |a| < |b| + \epsilon$$
Concluya que
$$|a - b| < \epsilon \Longrightarrow a < |b| + \epsilon$$

Demostración:

En el proceso de la demostración necesitamos una característica importante del valor absoluto en K, la cual es:

Sea $a, b \in K$. Se prueba que

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

Ahora sí, por la condición del problema

$$|a - b| < \epsilon$$

entonces

$$||a| - |b|| \leq |a - b| < \epsilon$$

por lo tanto

$$||a| - |b|| < \epsilon \Longrightarrow -\epsilon < |a| - |b| < \epsilon$$

por lo tanto

$$|b| - \epsilon < |a| < |b| + \epsilon$$

Con respecto a la segunda parte, es una aplicación directa de lo demostrado. ©

Problema 110 ***Probar que en un cuerpo ordenado K, las siguientes afirmaciones son equivalentes:***

(i) ***K es*** **arquimediano.**

(ii) $\mathbb{Z}$ ***no es acotada ni superiormente ni inferiormente en K.***

(iii) $\mathbb{Q}$ ***es ilimitado superiormente e inferiormente, es lo mismo a decir que no es acotado superior ni inferiormente.***

Prueba:

¿Como demostraremos que son equivalentes? la estrategia natural es seguir los condicionamientos

$$\begin{aligned}(i) &\Longrightarrow (ii)\\ (ii) &\Longrightarrow (iii)\\ (iii) &\Longrightarrow (i)\end{aligned}$$

Comencemos: $(i) \Longrightarrow (ii)$

Es una buena oportunidad, para **demostrar por contradicción**, es decir: supongamos que $\mathbb{Z} \subset K$ fuese acotada superiormente, entonces

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ x \leq c$$

para algún $c \in K$, pero como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ en particular, se tiene

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq c$$

luego $\mathbb{N}$ está acotada superiormente en K, lo cual es imposible, ya que K por hipótesis es arquimediano. Por lo tanto, negando lo supuesto, tenemos $\mathbb{Z}$ no está acotada superiormente.

En otro caso pedido, supóngase que $\mathbb{Z}$ esta acotada inferiormente, luego existe $c \in K$ tal que

$$c \leq x,\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

pero en particular, tenemos para $x = -n$ considerando $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$c \leq -n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

por lo tanto

$$n \leq -c, \forall n \in \mathbb{N}$$

esto último, nos obliga a afirmar que $\mathbb{N}$ está acotada superiormente, lo cual no puede darse, por lo tanto, $\mathbb{Z}$ tampoco es limitada inferiormente. $(ii) \Longrightarrow (iii)$

Supóngase que $\mathbb{Q}$ es acotada superiormente, entonces

$$\forall q \in \mathbb{Q}, q \leq c$$

para algún $c \in K$, pero como $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, se tiene en particular que

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ m \leq c$$

con lo cual se tendría que $\mathbb{Z}$ está acotada superiormente en K, lo cual es imposible, por hipótesis.

$(iii) \Longrightarrow (i)$

Para poder probar que K es *arquimediano*, basta probar que $\mathbb{N}$ no está acotada superiormente, supongase que si lo está, luego existe $c \in K$ de manera que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n < c \tag{46}$$

Ahora $c \in K$ no acota a $\mathbb{Q}$ por hipótesis, esto nos obliga a que existan $a, b \in \mathbb{Z}$ de modo que

$$c < \frac{a}{b} \tag{47}$$

Note que sin perdida de generalidad podemos considerar que $c > 1$, note también que se puede tomar $a, b \in \mathbb{N}$
luego reemplazando en (46) se tiene

$$a < c \tag{48}$$

luego de (47) y (48) tenemos

$$a < c < \frac{a}{b}$$

entonces $ba < a$, luego $b < 1$ como $b > 0$ se tiene $0 < b < 1$, pero se probó que es imposible que exista un natural $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < b < 1$$

Por lo tanto $\mathbb{N}$ no debe ser acotado superiormente, con lo cual se tiene que K es arquimediano. ©

Problema 111 ***Sea*** $A \subset \mathbb{R}$ ***no vacío, acotado. Dado*** $c > 0$ ***y consideramos***

$$cA = \{cx : \ x \in A\}$$

Probar que cA ***es un conjunto limitado y*** $sup\ (cA) = c.sup\ A$***,*** $inf\ (cA) = c.inf\ A$

Prueba:

AFIRMAMOS: cA es acotado.

En efecto, como el conjunto A es acotado, entonces existe $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\forall x \in A, \ a \leq x \leq b$$

ahora como $c > 0$ se tiene

$$\forall x \in A, \ ac \leq cx \leq cb$$

esto nos está indicando que cA es acotado.

AFIRMACIÓN: $sup\ (cA) = c.sup\ A$

Prueba: como para todo $x \in A$ se tiene

$$x \leq sup\ A$$

entonces

$$\forall x \in A, cx \leq c.sup\ A$$

esto significa que $c.sup\ A \in \mathbb{R}$ es una cota superior de cA, entonces

$$sup\ (cA) \leq c.sup\ A$$

en este punto , está la clave para pasar a la igualdad.

Supóngase que se cumpla

$$sup\ (cA) < c.sup\ A$$

como $c > 0$ se tiene

$$c^{-1} sup\ (cA) < sup\ A$$

luego por definición de **supremos de A**existe $x_0 \in A$ tal que

$$c^{-1} sup\ (cA) < x_0$$

luego $sup\ (cA) < cx_0$, con $x_0 \in A$.

Pero esto último es imposible o es un hecho contradictorio ¿porque?.

Luego negando lo supuesto, obtenemos la igualdad pedida

$$sup\ (cA) = c.sup\ A$$

□

Observación: para probar la segunda parte $inf\ (cA) = c.inf\ A$ creemos que la metodología empleada anteriormente, nos brinda un proceso para realizarlo. ©

Problema 112 *Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y acotados.*

Considere $A + B = \{x + y :\ x \in A, y \in B\}$.

Probar

(i) *$A + B$ está acotado.*

(ii) $sup\ (A + B) = sup\ A + sup\ B$

(iii) $inf\ (A + B) = inf\ A + inf\ B$

Prueba:

(i) *Como A y B son no vacíos y acotados, entonces existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\forall x \in A,\ a \leq x \leq b$$

$$\forall y \in B,\ c \leq y \leq d$$

de lo anterior es natural obtener

$$a + c \leq x + y \leq b + d$$

y esto se cumple para todo $x \in A$, $x \in B$, entonces $A + B$ está acotada.(supuestamente nos referimos tanto superiormente como inferiormente).

(iii) *como A y B son no vacíos y acotados inferirmente, entonces se tiene*

$$inf\ A \leq x, \forall x \in A$$

$$inf\ B \leq y,\ \forall y \in B$$

entonces $inf\ A + inf\ B \leq inf\ (A + B)$, supongase que no se verifica la igualdad, es decir se tiene

$$inf\ A + inf\ B < inf\ (A + B)$$

luego $inf\ A < inf\ (A+B) - inf\ B$, luego por definición de ínfimo del conjunto A, se tiene la existencia de $x_0 \in A$ de modo que

$$x_0 < inf\ (A + B) - inf\ B$$

luego utilizando desigualdades, se tiene

$$inf\ B < inf\ (A + B) - x_0$$

de manera similar, ingresando al infimo de B, tenemos la existencia de $y_0 \in B$ de modo que

$$y_0 < inf\ (A + B) - x_0$$

por lo tanto $x_0 + y_0 < inf\ (A + B)$, para algún $x_0 \in A$, $y_0 \in B$, pero esto último es contradictorio, por lo tanto finalmente se tiene

$$inf\ (A + B) = inf\ A + inf\ B$$

(ii) *Dejamos este item para su verificación.* ©

Problema 113 *Sea $a > 1$en un cuerpo arquimediano K. Considere la función $f : \mathbb{Z} \to K$ definida por $f(n) = a^n$. Probar que*

(i) $f(\mathbb{Z})$ no está acotado superiormente.

(ii) $inf\ (f(\mathbb{Z})) = 0$

Prueba:

(i) Para probar que $f(\mathbb{Z})$ no está acotado superiormente, consideremos $r \in K$ arbitrario y sin perdida de generalidad podemos considerar $r > 1$ ¿porque esto es válido?. Como $a > 1$ existe $h \in P$(P el conjunto de los positivos de K), tal que

$$a = 1 + h \tag{49}$$

ahora consideremos $w = \frac{r-1}{h}$ como $w \in K$ no acota superiormente a $\mathbb{N}$, ya que K es arquimediano, luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $w < n_0$ es decir $\frac{r-1}{h} < n_0$ por lo tanto

$$r < 1 + n_0 h \tag{50}$$

en este punto recordemos la desigualdad de Bernoulli, como se tiene $a = 1 + h$ con $h \geq -1$ luego

$$an_0 = (1 + h)^{n_0} \geq 1 + hn_0 \tag{51}$$

ahora de (50) y (51) se tiene

$$a^{n_0} \geq 1 + hn_0 > r \tag{52}$$

de (52) y teniendo en cuenta que si $a \geq b > c$, implique $a > c$, por lo tanto tenemos

$$a^{n_0} > r$$

entonces tendríamos $r < f(n_0)$, listo basta ello para haber probado lo pedido.

(ii) Afirmamos: $inf\ (f(\mathbb{Z})) = 0$
Sabemos que para probar un ínfimo es necesario pasar previamente por el filtro de dos axiomas.
PRIMERO:0 *es una cota inferior de $f(\mathbb{Z})$.*
Sea $m \in \mathbb{Z}$ arbitrario, luego por propiedad podemos dividirlo en tres formas

caso 1: si $m > 0$, entonces $a^m > 0$ esto último se sugiere probarlo por inducción matemática (PIM).

caso 2: si $m = 0$, luego $a^m = a^0 = 1$ esto se justifica por definición.

caso 3: si $m < 0$, entonces $-m > 0$, luego por el caso 1 tenemos

$$a^{-m} > 0$$

por propiedad del inverso

$$(a^{-m})^{-1} > 0$$

simplificando tenemos $a^m > 0$, por lo tanto en cualquier caso, se tiene

$$\forall m \in \mathbb{Z}, f(m) = a^m > 0$$

por lo cual 0 es una cota inferior de $f(\mathbb{Z})$.

SEGUNDO:*0 es la máxima cota inferior.*

Como $a > 1$, luego existe $h \in P$ de modo que $a = 1 + h$, considerando

$$w = \frac{\frac{1}{c} - 1}{h} > 0$$

entonces w no acota superiormente a $\mathbb{N}$, por lo tanto debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $w < n_0$

$$\frac{\frac{1}{c} - 1}{h} < n_0 \Longrightarrow \frac{1}{c} < 1 + n_0 h \tag{53}$$

por otro lado se tiene

$$a = 1 + h \Longrightarrow a^{n_0} = (1 + h)^{n_0} \geq 1 + n_0 h \tag{54}$$

luego de (53) y (54) se concluye que

$$\frac{1}{c} < 1 + n_0 h \leq (1 + h)^{n_0} = a_0^n$$

por lo tanto $\frac{1}{c} < a^{n_0}$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces $0 < a_0^n < c$ luego

$$0 < f(-n_0) < c$$

basta con ello para haber probado que el 0 es la máxima cota inferior de $f(\mathbb{Z})$ $\square$ concluyendo de las dos partes que $inf\ (f(\mathbb{Z})) = 0$ ©

Problema 114 *Sean A y B dos subconjuntos de los números reales, definamos el producto de ellos*

$$AB = \{ab \in \mathbb{R} : \ a \in A, b \in B\}$$

sabiendo que A y B son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^+$ y acotados *(i)* AB *es acotado.*

(ii) *Probar que* $sup\ (AB) = sup\ A.sup\ B$

(iii) *Demostrar* $inf\ AB = inf\ A.inf\ B$

Prueba:

(i) *Una forma de enfrentar el acotamiento de conjuntos, es utilizar para ello el valor absoluto, nos sustentaremos en la propiedad siguiente:*
Sea $M \subset \mathbb{R}$ *un conjunto no vacío.*
M *está acotada si y solo si existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $|x| \leq c, \forall x \in M$.
Para el ejercicio, como A *y* B *son acotados, luego existen* $c, d \in \mathbb{R}^+$ *tal que*

$$|x| \leq c, \forall x \in A$$

$$|y| \leq d, \forall y \in B$$

ahora $|xy| = |x||y| \leq c.d, \forall x \in A, \forall y \in B$, *luego de la definición se concluye que* AB *está acotada.*

(ii) *como* $x \leq sup\ A, \forall x \in A$ *también* $y \leq sup\ B, \forall y \in B$
es claro que $x > 0 \wedge y > 0$, *luego* $xy \leq sup\ A.sup\ B$, *por lo tanto*

$$sup\ (AB) \leq sup\ A.sup\ B \tag{55}$$

supongase que se tenga

$$sup\ (AB) < sup\ A.sup\ B \tag{56}$$

como $A \neq \emptyset$, *entonces existe* $x_0 \in A$ *y como* $A \subset \mathbb{R}^+$, *entonces* $sup\ A > 0$ *por lo tanto aplicando a* (56) *se tiene*

$$(sup\ A)^{-1} < sup\ B$$

ahora por la caracterización del supremo, existe $y_0 \in B$ *de modo que* $(sup\ A)^{-1}.sup\ (AB) < y_0$, *entonces debido a que* $y_0 > 0$, *se tiene*

$$y_0^{-1}.sup\ (AB) < sup\ A$$

luego debe existir $x_0 \in A$ *de modo que* $y_0^{-1}.sup\ (AB) < x_0$ *la cual quere decir que*

$$sup\ (AB) < x_0 y_0$$

lo cual es una proposición incorrecta, por lo tanto negando lo supuesto en (56) *se concluye que*

$$sup\ (AB) = sup\ A.sup\ B$$

(iii) Dejamos este item para el fortalecimiento del método anteriormente expuesto. ©

Problema 115 *Considere $B \subset A$ conjunto no vacío de números reales. Supóngase además que A es acotado inferiormente y para cada $x \in A$, existe $y \in B$ de manera que $y \leq x$. Demuestre que $inf\ A = inf\ B$*

*Demostrando:*como A está acotado inferiormente, entonces

$$\forall a \in A,\ inf\ A \leq a \tag{57}$$

por otro lado, sea $b \in B$ arbitrario, como $B \subset A$, entonces $b \in A$ cumpliéndose (57)

$$inf\ A \leq b, \forall b \in B$$

luego el $inf\ A$ es una cota inferior del conjunto B, por lo tanto

$$inf\ A \leq inf\ B$$

ya que el ínfimo de B es la mayor de las cotas inferiores. En este punto de la demostración por todo lo visto, es natural pensar en la suposición contraria al objetivo, luego supongamos que

$$inf\ A < inf\ B$$

entonces existe $x_0 \in A$ tal que $x_0 < inf\ B$
ahora por hipótesis necesariamente existe $y_0 \in B$ de modo que $y_0 \leq x_0$ lográndose obtener la proposición

$$y_0 < inf\ B$$

la cual es falsa. Concluyendose que

$$inf\ A = inf\ B$$

©

Problema 116 *Sea $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ una función.*
Se dirá que f es acotada si y solo si $f(X)$ es un conjunto acotado, en este caso denotaremos por

$$sup\ f = supf(X)\ \wedge\ inf\ f = inf\ f(X)$$

a) *Probar que $f+g$ la suma de dos funciones acotadas $f,g : X \to \mathbb{R}$, es también acotada.*

b) *Mostrar que para dos funciones $f,g : X \to \mathbb{R}$ acotadas se cumple:*

(i) $sup\ (f+g) \leq sup\ f + sup\ g$

(ii) $inf\ (f+g) \geq inf\ f + sup\ g$

c) *Muestre dos funciones $f,g : X \to \mathbb{R}$ de modo que*

$$sup\ (f+g) < sup\ f + sup\ g$$

y

$$inf\ (f+g) > inf\ f + sup\ g$$

Prueba:

a) como $f : X \to \mathbb{R}$ es una función acotada, existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que

$$a \leq f(x) \leq b, \forall x \in X$$

también sobre $g : X \to \mathbb{R}$ existen $c, d \in \mathbb{R}$

$$c \leq g(x) \leq d, \forall x \in X$$

luego

$$a + c \leq f(x) + g(x) \leq b + d, \forall x \in X$$

ahora por definición de $f+g$

$$a + c \leq (f+g)(x) \leq b + d, \forall x \in X$$

esto nos obliga a decir que $(f+g)(X)$ es un conjunto acotado, luego por la definición expuesta en el texto del problema $f+g$ es acotado.

b) (i) como $f(x) \leq sup\ f(X) = sup\ f, \forall x \in X$ y $g(x) \leq sup\ g(X) = sup\ g, \forall x \in X$, entonces

$$f(x) + g(x) \leq sup\ f + sup\ g$$

por lo tanto

$$(f+g)(x) \leq sup\ f + sup\ g, \forall x \in X$$

esto significa que

$$sup(f+g)(X) \leq sup\ f + sup\ g$$

luego por notación se tiene

$$sup(f+g) \leq sup\ f + sup\ g$$

(ii) se deja al estudiante para su verificación.

c) consideremos $f, g : [-1;1] \to \mathbb{R}$ de modo que

$$f(x) = x,\ g(x) = -x, \forall x \in [-1;1]$$

ahora como

$$f([-1;1]) = [-1;1]$$

luego tenemos $sup\ f = 1 \wedge inf\ f = -1$.

También se tiene

$$g([-1;1]) = [-1;1]$$

por lo tanto $sup\ g = 1 \wedge inf\ g = -1$

ahora operando $f + g : [-1;1] \to \mathbb{R}$ de modo que $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0$

luego

$$(f+g)([-1;1]) = \{0\}$$

por lo tanto

$$sup(f+g) = 0 \wedge inf(f+g) = 0$$

de todo lo anterior tenemos

$$sup(f+g) = 0 < sup\ f + sup\ g = 2$$

también

$$inf(f+g) = 0 > inf\ f + inf\ g = -2$$

©

Problema 117 *Sean x, y números reales positivos. Probar que se cumple con*

$$\sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}$$

Probando: en efecto como $x > 0 \wedge y > 0$, entonces existen $\sqrt{x} > 0, \sqrt{y} > 0$ luego es válido que

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 > 0$$

entonces operando $x + y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} > 0$, por lo tanto

$$x + y > 2\sqrt{xy}$$

luego

$$\sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}$$

©

Problema 118 *Considere un conjunto no vacío A, la cual esta acotada. Se sabe que*

$$inf\ A \geq sup\ A$$

¿Que se podría deducir de ello?

Prueba: Todo parece ser que A es un conjunto unitario y que $A = \{a\}$ donde

$$a = inf\ A = sup\ A$$

En efecto: Sea $a \in A$ un elemento arbitrario, note que su existencia está garantizada, ya que $A \neq \emptyset$.

Luego $a \leq sup\ A \wedge inf\ A \leq a$, por lo tanto

$$a \leq sup\ A \leq inf\ A \leq a$$

de lo anterior se tiene

$$a = sup\ A = inf\ A$$

©

Problema 119 *Sea K un cuerpocompleto. Considere el conjunto siguiente*

$$A = \{x \in K : \ |x - \frac{b}{2}| < 5b\}$$

Descubra el sup A

Veamos: antes de desarrollarlo formalmente mostraremos el intento para llegar al resultado, como $|x - \frac{b}{2}| < 5b$, entonces

$$-5b < x - \frac{b}{2} < 5b$$

por lo tanto

$$-\frac{9b}{2} < x < \frac{11b}{2}$$

por lo tanto podemos indicar que

Afirmamos: sup $A = \frac{11b}{2}$

Demostremos: Se sabe que para ello es necesario trabajarlo en dos partes

(i) Veamos que $\frac{11b}{2}$ es una cota superior de A:

sea $x \in A$ arbitrario, entonces por definición de A

$$|x - \frac{b}{2}| < 5b$$

operando logramos

$$x < \frac{11b}{2}$$

luego se cumple.

(ii) $\frac{11b}{2}$ es la mínima de las cotas superiores:

Sea $c < \frac{11b}{2}$ arbitrariamente tomado, sin perdida de generalidad podemos considerar que $-\frac{9b}{2} < c < \frac{11b}{2}$ entonces es claro que existe $a_0 \in K$ de modo que $c < a_0 < \frac{11b}{2}$, claro basta considerar

$$a_0 = \frac{c + \frac{11b}{2}}{2}$$

entonces como $-\frac{9b}{2} < a_0 < \frac{11b}{2}$ luego

$$|a_0 - \frac{b}{2}| < 5b$$

por lo tanto $a_0 \in A$, luego $c < a_0 < \frac{11b}{2}$

Por lo tanto $c \in A$. ©

Problema 120 *Sea* $A \subset \mathbb{R}$ *no vacío, acotado superiormente,* $k \in \mathbb{R}$ *fijo. Si consideramos*

$$B = \{-x + k : x \in A\}$$

Probar que

a) B tiene ínfimo.

b) $inf\ B = (-sup\ A) + k$

Demostremos:

a) por dato del problema $\forall x \in A,\ x \leq sup\ A$, entonces $-sup\ A \leq -x$,por lo tanto

$$\forall x \in A, (-sup\ A) + k \leq -x + k$$

Luego los elementos de B estan acotados inferiormente por $(-sup\ A) + k$

b) por la parte (i), tenemos

$$\forall x \in B, -sup\ A + k \leq x$$

entonces $-sup\ A + k \leq inf\ B$, supongase que se cumpla que

$$-sup\ A + k < inf\ B$$

entonces

$$-inf\ B < sup\ A$$

luego existe $a_0 \in A$ de modo que

$$-inf\ B + k < a_0$$

por lo tanto $-a_0 + k < inf\ B$, pero esto último es una contradicción.

Por lo tanto

$$inf\ B = (-sup\ A) + k$$

©

Problema 121 *Si A y B son dos conjuntos no vacíos y acotados. Probar que*

$$Sup(A \cup B) = max\ \{SupA, SupB\}$$

Demostrando: consideremos $w = max\{SupA, SupB\}$, note que dichos supremos existen porque A y B son acotados superiormente. Es claro que

$$SupA \leq w \wedge SupB \leq w \tag{58}$$

Probando que $Sup(A \cup B) = w$

veamos:

1. **w es cota superior de $A \cup B$:** Sea $w \in A \cup B$ arbitrario, entonces

$$x \in A \vee x \in B$$

caso 1: si $x \in A$, entonces $x \leq SupA \leq w$, luego

$$x \leq w$$

caso 2: si $x \in B$, luego $x \leq SupB \leq w$, por lo tanto

$$x \leq w$$

luego $\forall x \in A \cup B,\ x \leq w$, entonces w es cota superior del conjunto $A \cup B$.

2. **w es la mínima de las cotas superiores:** Sea $c < w$ arbitrario, con $c \in \mathbb{R}$, como

$$w = max\{SupA, SupB\}$$

hay dos casos posibles, si $w = SupA$, entonces $c < w = SupA$, entonces $c < SupA$, luego existe $a \in A$ de modo que $c < a$ con $a \in A \subset A \cup B$, luego existe $a \in A \cup B$ de modo que $c < a$.
De manera similar , si es el caso que $w = SupB$, detallar tal procedimiento. ©

Problema 122 *Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función positiva y acotada. Considere $f^2 : X \to \mathbb{R}$ tal que*

$$(f^2)(x) = [f(x)]^2$$

Probar que $Sup(f^2) = [Supf]^2$

Prueba:
Como $0 < f(x) \leq Supf, \forall x \in X$, entonces

$$[f(x)]^2 \leq [Supf]^2, \forall x \in X$$

luego por la definición de f^2, se tiene

$$(f^2)(x) \leq [Supf]^2$$

entonces

$$sup(f^2) \leq [Supf]^2$$

bien, en este punto, supondremos que se cumple

$$Sup(f^2) < [Supf]^2 \tag{59}$$

ahora, como $Supf > 0$, entonces $[Supf]^{-1}.Sup(f^2) < Supf$, considerando al supremo, deberá existir $x_0 \in X$ de modo que

$$[Supf]^2.Sup(f^2) < f(x_0)$$

como $f(x_0) > 0$ por ser f positiva se tiene

$$[f(x_0)]^{-1}.Sup(f^2) < Supf$$

entonces existe $x_1 \in X$ tal que $[f(x_0)]^2.Sup(f^2) < f(x_1)$, luego tendremos

$$Sup(f^2) < f(x_0).f(x_1) \tag{60}$$

ahora, con respecto a $f(x_0)$ y $f(x_1)$ se puede tener únicamente dos casos

1. Caso1:si $f(x_0) = f(x_1) > 0$, entonces $Sup(f^2) < f(x_0).f(x_0) = [f(x_0)]^2$, luego

   $$Sup(f^2) < (f^2)(x_0)$$

   esto último es imposible.

2. caso 2: si $f(x_0) \neq f(x_1)$, sin pérdida de generaridad supondremos que

   $$f(x_1) > f(x_0)$$

   de (60)

   $$(f^2)(x_1) \leq Sup(f^2) < f(x_0).f(x_1)$$

   luego $[f(x_1)]^2 < f(x_0).f(x_1)$, entonces

   $$f(x_1) < f(x_0)$$

   lo cual es un hecho contradictorio , luego es imposible en cualquier caso, llegando así a una contradicción de (59) .

   Por lo tanto tendremos

   $$Sup(f^2) = [Supf]^2$$

©

Problema 123 *Sea $B \subset A$ conjuntos no vacíos de números reales. Suponga que A es acotado superiormente y que para cada $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $x \leq y$.*
Probar que sup B = sup A

Demostración: Como A es acotado superiormente, entonces

$$\forall a \in A,\ a \leq sup\ A \tag{61}$$

por otro lado, sea $b \in B$ un elemento totalmente arbitrario, como $B \subset A$, entonces $b \in A$ y por (61)

$$b \leq sup\ A$$

esta última expresión es $\forall b \in B$, luego

$$Sup\ B \leq Sup\ A \tag{62}$$

de lo anterior se desprende dos posibilidades

$$Sup\ B < Sup\ A \vee Sup\ B = Sup\ A$$

Supóngase que se cumpla

$$Sup\ B < Sup\ A$$

observando al supremo de A tenemos existe $x_0 \in A$ tal que

$$Sup\ B < x_0 \tag{63}$$

ahora por hipótesis del problema, existe $y_0 \in B$, entonces

$$x_0 < y_0 \tag{64}$$

de (63) y (64) tenemos $Sup\ B < y_0$ esto es imposible. ©

Problema 124 *Considere conjuntos A y B acotados inferiormente, tal que $A \cap B \neq \emptyset$. Pruebe que $inf(A \cap B) \geq max\{inf\ A, inf\ B\}$*

Prueba: Si denotamos por

$$w = max\{inf\ A, inf\ B\}$$

entonces

$$inf\ A \leq w \wedge inf\ B \leq w \tag{65}$$

Por demostrar que $inf(A \cap B) \geq w$

Sea $x \in A \cap B$ arbitrario. Por demostrar que $x \geq w$

1. si $w = inf\ A$, entonces como $x \in A$, luego $x \geq infA$, luego

$$x \geq w$$

2. si $w = inf\ B$, entonces como $x \in B.$, se tiene $x \geq inf\ B$, por lo tanto

$$x \geq w$$

□

Luego para todo $x \in A \cap B$, $x \geq w$, lo cual implica que

$$inf(A \cap B) \geq w$$

©

Nota: Se sugiere para complementar lo demostrado, crear dos conjuntos A y B de modo que se cumpla

$$inf(A \cap B) > max\{infA, infB\}$$

Problema 125 *Dado el conjunto A cuyos elementos tienen la forma siguiente:*

$$\frac{n^2}{n+2}, si\ n \in \mathbb{Z}^+\ ,\ \frac{n+2}{n^2}, si\ n \in \mathbb{Z}^-$$

Probar que

(a) A no posee supremo.

(b) $inf\ A = -\frac{1}{8}$

Prueba:

(a) Supóngase que A está acotada superiormente, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{n^2}{n+2} < c, \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

luego

$$n - 2 + \frac{4}{n+2} < c,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+ \tag{66}$$

por otro lado como c no acota a $\mathbb{N}$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$c < n_0$$

en (66) considerando $n = n_0 + 2$, ya que es para todo natural. Luego

$$n_0 + \frac{4}{n_0 + 2 + 2} < c < n_0$$

luego $\frac{4}{n_0+4} < 0$, entonces $4 < 0$ lo cual es imposible. Luego A no está acotada superiormente, por lo tanto no existe el supremo de A.

(b) Sea $n \in \mathbb{Z}^-$, es claro que $(n+4)^2 \geq 0$, entonces

$$n^2 + 8n + 16 \geq 0$$

luego $8(n+2) \geq -n^2$, entonces

$$\frac{n+2}{n^2} \geq -\frac{1}{8}, \forall n \in \mathbb{Z}^-$$

pero como $\frac{n^2}{n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$, luego

$$inf\ A = -\frac{1}{8}$$

©

Problema 126 ***Sea K un cuerpo ordenado completo , expresar el conjunto siguiente***

$$A = \{x \in K : \ |x-3| + |x+3| < 8\}$$

Utilizando intervalos.

Veamos: previamente notemos que la recta con los puntos especiales de discusión $x = -3, x = 3$

1. Caso 1: si $x < -3$

   entonces $|x-3| + |x+3| < 8$, implica $-x + 3 + (-x) - 3 < 8$, luego $-2x < 8$, por lo tanto intersectando

   $$x < -3 \wedge -4 < x$$

   implica

   $$x \in (-4, -3)$$

2. caso 2: si $-3 \leq x < 3$

   luego $|x-3| + |x+3| < 8$, entonces $-x + 3 + x + 3 < 8$, luego $x < 8$, esto me indica que

   $$x \in (-3, 3)$$

3. caso 3: si $3 \leq x$

   veamos como $|x-3|+|x+3|<8$, entonces $x-3+x+3<8$, por lo tanto

   $$2x < 8$$

   es decir $x<4$, por lo tanto

   $$x \in [3,4)$$

   Finalmente el conjunto solución final es

   $$CS = (-4,-3) \cup [-3,3) \cup [3,4)$$

   por lo tanto

   $$CS = (-4,4)$$

   Luego podemos afirmar que $A=(-4,4)$

   Observación importante: se sugiere demostrar esta última expresión para dar por finalizado lo que me piden, por doble inclusión, ya que en el proceso solo se tiene una inclusión.

©

Problema 127 *Resolver la inecuación en un cuerpo completo K.*

$$|x^2-2| \leq 1$$

©

Problema 128 ***Sean A y B dos conjuntos acotados superiormente de modo que*** $A \cap B \neq \emptyset$***. Probar que***

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$$

Demostremos: consideremos $m = \min\{\sup A, \sup B\}$ es claro que

$$m \leq \sup A m \leq \sup B \tag{67}$$

Por demostrar que: $\sup(A \cap B) \leq m$

como A y B son conjuntos acotados, entonces $A \cap B \subset A$, como todo subconjunto no vacío de un conjunto acotado, es acotado.

Sea $x \in A \cap B$ arbitrario, entonces

$$x \in A \wedge x \in B$$

si consideramos $m = \sup A$, entonces $x \leq \sup A$, luego $x \leq m$.

Si $m = \sup B$, ahora como $x \in B$ entonces $x \leq \sup B$, luego $x \leq m$

luego en cualquier caso

$$\forall x \in A \cap B,\ x \leq m$$

entonces

$$\sup(A \cap B) \leq m$$

©

Observación: Es necesario considerar los casos extremos, es decir:

1. Generar A y B de modo que $\sup(A \cap B) < \min\{\sup A, \sup B\}$

   Veamos: Sea $A = [0, 1),\ B = \{0, 2\}$, entonces $\sup(A \cap B) = 0$

   mientras que

   $$\min\{\sup A, \sup B\} = \min\{1, 2\} = 1$$

2. Muestre dos conjuntos A y B de modo que

   $$\sup(A \cap B) = \min\{\sup A, \sup B\}$$

   basta tomar

   $$A = B = (0, 1)$$

©

Problema 129 ***Sean A y B dos conjuntos no vacíos y acotados inferiormente. Demostrar que***

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

Demostrando: Consideremos $m = \min\{\inf A, \inf B\}$, es claro que

$$m \leq \inf A \wedge m \leq \inf B \tag{68}$$

Por demostrar que $\inf(A \cup B) = m$

Veamos:

(i) **m es una cota inferior de** $A \cup B$:

   Sea $x \in A \cup B$, entonces

   $$x \in A \vee x \in B$$

luego de (68) se tiene

$$m \leq \text{ínf}\, A \leq x \vee m \leq \text{ínf}\, B \leq x$$

luego tenemos $m \leq x \vee m \leq x$, pero sabemos que $p \vee p \equiv p$ (*lógica proposicional*

entonces

$$\forall x \in A \cup B$$

luego m es cota inferior del conjunto $A \cup B$.

(ii) **m es la mayor de las cotas inferiores**:

Sea $m < c$ arbitrario, ahora como

$$m = \text{ínf}\, A \vee m = \text{ínf}\, B$$

entonces $m = \text{ínf}\, A < c \vee m = \text{ínf}\, B < c$.

Si $m = \text{ínf}\, A < c$, entonces existe $a \in A$ tal que $a < c$, es decir existe $a \in A \cup B$ tal que $a < c$.

Si $m = \text{ínf}\, B < c$, entonces existe $b \in B$ tal que $b < c$, como $B \subset A \sup B$, entonces existe $b \in A \cup B$ tal que

$$b < c$$

©

Problema 130 ***Sea p un número natural, con $p > 1$. Demuestre que***

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n < p^n$$

En efecto: Sea el conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N} :\ n < p^n\}$$

1. $1 \in X$: como $1 < p$ entonces $1 < p^1$, luego $1 \in X$

2. Hipótesis inductiva (HI): $n \in X$ es decir $n < p^n$

3. Tesis: $s(n) = n + 1 \in X$

   como $p^n > n$ entonces

$$p^{n+1} > np \tag{69}$$

   como $p > 1$ entonces

$$np > n \tag{70}$$

de (69) y (70) se tiene

$$p^{n+1} > np > n \tag{71}$$

luego $p^{n+1} > n$, luego $p^{n+1} \geq n + 1$

si suponemos que $p^{n+1} = n + 1$, entonces de (71) tendríamos

$$n + 1 > np > n$$

esto último es imposible, ya que se probó que entre dos naturales consecutivos no existe otro entero, lo cual nos abliga a afirmar que

$$p^{n+1} > n + 1$$

©

Problema 131 ***Dada un número natural*** $p > 1$***. Probar que los números racionales de la forma*** $\frac{m}{p^n}$ ***con*** $m \in \mathbb{Z}$ ***y*** $n \in \mathbb{Z}$ ***constituye un conjuto denso en*** $\mathbb{R}$***.***

Resolución: ¿Cómo se prueba que un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$? basta considerar $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y demostrar que existe $x_0 \in X$ tal que $a < x_0 < b$. Por lo tanto para nuestro caso, sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ debemos encontrar $m_0 \in \mathbb{Z}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$a < \frac{m_0}{n_0} < b$$

Veamos ello, como $b - a > 0$ por ser $\mathbb{R}$ arquimediano existe $n_1 \in \mathbb{N}$, de modo que

$$0 < \frac{1}{n_1} < b - a \tag{72}$$

pero por lo demostrado anteriormente se tiene

$$n_1 < p_1^n \Longrightarrow \frac{1}{p_1^n} < \frac{1}{n_1} \tag{73}$$

de (72) y (73) tenemos

$$0 < \frac{1}{p_1^n} < b - a \tag{74}$$

ya fijado n_1, podemos particionar a todo $\mathbb{R}$ en porciones de longitud $\frac{1}{p_1^n}$ logrando así obtener

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [\frac{m}{p_1^n}; \frac{m+1}{p_1^n}]$$

Ahora considere el siguiente conjunto

$$A = \{m \in \mathbb{Z}/ \ \frac{m}{p_1^n} \geq b\}$$

como el conjunto A es acotado inferiormente en $\mathbb{R}$ $(m \geq bp_1^n)$, entonces por el PBO para $\mathbb{Z}$, existe $m_1 = \min A$.

Ahora, sea $n_0 = m_1 - 1$ es claro por la minimalidad de m_1 que

$$\frac{n_0}{p_1^n} < b$$

todo parece ser que estelemento $\frac{n_0}{p_1^n}$ es el que buscabamos, bastaria probar que

$$a < \frac{n_0}{p_1^n} < b$$

supongamos que

$$\frac{n_0}{p_1^n} \leq a$$

pero

$$\frac{n_0}{p_1^n} \leq a < b \leq \frac{m_1}{p_1^n}$$

entonces

$$b - a < \frac{m_1}{p_1^n} - \frac{n_0}{p_1^n}$$

como $n_0 = m_1 - 1$ entonces

$$b - a < \frac{1}{p_1^n}$$

lo cual es incompatible con (74). □

entonces necesariamente $a < \frac{n_0}{p_1^n}$, basta con ello para concluir que el conjunto dado es denso en $\mathbb{R}$. ©

Problema 132 ***Dé un ejemplo de una sucesión decreciente de intervalos carrados no acotados cuya intersección sea vacía.***

Prueba: Considere para cada $n \in \mathbb{N}$ los intervalos siguientes

$$A_n = [n; +\infty)$$

es claro que es decreciente

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

También no esta acotada superiormente *Afirmamos:* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$

Prueba: Una manera muy eficaz de trabajar con el vacío es por medio de contradicciones.

Supongamos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$

entonces existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$r \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

entonces

$$\forall n \in \mathbb{N},\ r \in A_n \tag{75}$$

pero $\mathbb{R}$ es arquimediano, luego $r \in \mathbb{R}$ no acota superiormente a $\mathbb{N}$, entonces necesariamente debe existir $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$r < m$$

luego $r \notin [m; +\infty)$, es decir $r \notin A_m$ pero esto último no es cierto por (75), entonces ¿dónde está el problema?. El problema está en lo supuesto inicialmente, luego negándolo se tiene

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$$

©

Problema 133 ***Muestre una sucesión decreciente de intervalos abiertos y acotados cuya intersección sea vacía.***

Prueba: Seguramente después de varios intentos, muchas veces fallidos podemos considerar para cada $n \in \mathbb{N}$

$$B_n = (1 - \frac{1}{n}; 1)$$

es notorio que para cada $n \in \mathbb{N}$, B_n es abierto.

Afirmamos: $B_n \supset B_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

En efecto: Sea $x \in B_{n+1}$ arbitrario, entonces

$$x \in (1 - \frac{1}{n+1}; 1)$$

luego

$$1 - \frac{1}{n+1} < x < 1 \tag{76}$$

pero $n < n+1$, luego $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, entonces $-\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$ por lo tanto

$$1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} \tag{77}$$

de (76) y (77) se tiene

$$1 - \frac{1}{n} < x < 1$$

luego $x \in (1 - \frac{1}{n}; 1)$, entonces $x \in B_n$ □

Afirmamos: $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$

Supongamos lo contrario, es decir $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$, entonces existe $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ luego

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x \in B_n \tag{78}$$

como $x \in B_2 = (\frac{1}{2}; 1)$, entonces $x < 1$ luego $1 - x > 0$, luego por ser $\mathbb{R}$ arquimediano, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m_0} < 1 - x$$

entonces $x < 1 - \frac{1}{m_0}$, logrando así que

$$x \notin (1 - \frac{1}{m_0}; 1)$$

entonces $x \notin B_{m_0}$ esto es un hecho contradictorio. Por lo tanto se verifica con lo pedido. ©

Problema 134 ***Sean a y b dos enteros positivos. Pruebe que $\sqrt{2}$ está entre las dos fracciones siguientes***

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{a+2b}{a+b}$$

.

Prueba: Considere $\frac{a}{b}, \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ luego por propiedad se tiene que se debe cumplir uno y solo uno de los casos siguientes

$$\frac{a}{b} < \sqrt{2} \vee \frac{a}{b} = \sqrt{2} \vee \frac{a}{b} > \sqrt{2}$$

es claro que si $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ entonces $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ pero esto es imposible (Justifique)
luego tenemos solo dos casos

$$\frac{a}{b} < \sqrt{2} \vee \frac{a}{b} > \sqrt{2}$$

1. Caso 1: si $\frac{a}{b} < \sqrt{2}$ entonces

$$\begin{aligned} a < \sqrt{2}b &\implies (\sqrt{2}-1)a < (\sqrt{2}-1)\sqrt{2}b \\ &\implies \sqrt{2}a - a < 2b - \sqrt{2}b \\ &\implies \sqrt{2}a + \sqrt{2}b < a + 2b \\ &\implies \sqrt{2}(a+b) < a + 2b \\ &\implies \sqrt{2} < \frac{a+2b}{a+b} \end{aligned}$$

   pero también se tiene $\frac{a}{b} < \sqrt{2}$
   de lo anterior se tiene

$$\frac{a}{b} < \sqrt{2} < \frac{a+2b}{a+b}$$

2. caso 2: si $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$ luego trabajandolo se llega a obtener

$$\frac{a+2b}{a+b} < \sqrt{2} < \frac{a}{b}$$

©

Problema 135 ***Pruebe que el conjunto K de los números reales***

$$a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}$$

juntamente con la operación de adición y multiplicación de números reales, es un cuerpo

Prueba:

Consideremos

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} :\ a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Podríamos considerar dichas operaciones del modo siguiente

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \\ (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) &= ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2}\end{aligned}$$

Comencemos con la operación de Adición:

A_1 : + es de clausura

sean $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

como $a + c, b + d \in \mathbb{Q}$ luego

$$(a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

entonces por definición $(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

se ha probado que dados dos elementos arbitrarios de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ la suma de ellos, vuelve a estar en $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

A_2 : + es conmutativa.

veamos ello:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

por la conmutatividad de la adición en $\mathbb{Q}$ se tiene

$$= (c + a) + (d + b)\sqrt{2}$$

luego por definición

$$= (c + d\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2})$$

A_3 : + es asociativa

$$\begin{aligned}
((a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2}))+(m+n\sqrt{2}) &= ((a+c)+(b+d)\sqrt{2})+(m+n\sqrt{2}) \\
&= [(a+c)+m]+[(b+d)+n]\sqrt{2} \\
\text{ahora utilizaremos la asociatividad en } \mathbb{Q} & \\
&= [a+(c+m)]+[b+(d+n)]\sqrt{2} \\
\text{luego por definición} & \\
&= (a+b\sqrt{2})+[(c+m)+(d+n)\sqrt{2}] \\
&= (a+b\sqrt{2})+[(c+d\sqrt{2}+(m+n\sqrt{2})]
\end{aligned}$$

A_4 : existencia del elemento neutro aditivo o del cero

basta considerar $0+0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

A_5 : existencia del opuesto aditivo.

sea $a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, consideremos

$$(-a)+(-b)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

será el opuesto buscado.

Nota: *observece que las cualidades buscadas en $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ como: asociatividad, conmutatividad existencias, se ha requerido las mismas pero en $\mathbb{Q}$.*

M_1 : Clausura de la multiplicación

Sean $a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, como

$$ac+2bd, ad+bc \in \mathbb{Q}$$

tenemos

$$(ac+2bd)+(ad+bc) \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

entonces $(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

M_2 : El producto es conmutativo. Justificar.

M_3 : El producto es asociativo.

en efecto, operando por definición

$$\begin{aligned}
[(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})](m+n\sqrt{2}) &= [(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}](m+n\sqrt{2}) \\
&= (ac+2bd)m+2(ad+bc)n+[(ac+2bd)n+m(ad+bc)]\sqrt{2} \\
&= acm+2bdm+2adn+2bcn+(acn+2bdn+mad+mbc)\sqrt{2}
\end{aligned}$$

ahora efectuamos pero asociando los dos últimos terminos y se espera que ambos resultados sean iguales.

$$\begin{aligned}
(a+b\sqrt{2})[(c+d\sqrt{2})(m+n\sqrt{2})] &= (a+b\sqrt{2})[(cm+2dn)+(cn+dm)\sqrt{2}] \\
&= a(cm+2dn)+2b(cn+dm)+[a(cn+dm)+b(cm+2dn)]\sqrt{2} \\
&= acm+2adn+2bcn+2bdm+(acn+adm+bcm+2bdn)\sqrt{2}
\end{aligned}$$

comparando ambos resultados es notorio que se da la asociatividad.

M_4 : Existencia del elemento neutro multiplicativo o uno.

basta tomar $1 = 1+0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ y cumple con su axioma.

El detalle más interesante está en hallar el inverso de cada elemento no nulo de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

Sea $a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ no nulo, esto significa que

$$a \neq 0 \vee b \neq 0$$

consideremos

$$w = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} = \frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$$

lo primero es verificar la buena definición.

basta notar que $a^2-2b^2 \neq 0$

supongamos que sea cero, es decir $a^2-2b^2=0$, entonces $a^2=2b^2$, ahora si suponemos que $b=0 \Longrightarrow a=0$ esto resulta imposible, luego $b \neq 0$ por lo tanto

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

pero esto no se puede dar, justificarlo.

luego $a^2-2b^2 \neq 0$, luego operando

$$(a+b\sqrt{2}.w = 1$$

$D:$ solo resta la distributividad.(Verificar).

Con todo lo probado $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}],+,.)$ es un cuerpo. ©

Problema 136 ***Sea*** $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ ***un polinomio con coeficientes en los enteros, es decir*** $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$***.***
Sabiendo que se cumple que el racional $\frac{p}{q}$ ***con p y q primos entre sí es tal que*** $f(\frac{p}{q})=0$***.***
Probar que $p|a_0 \wedge q|a_n$***, donde*** $|$ ***significa divide.***

Prueba: como $\frac{p}{q}$ es una raíz de $f(x)=0$, entonces

$$a_0+a_1\frac{p}{q}+\cdots+a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+a_n\frac{p^n}{q^n}=0$$

multiplicando por q^n se obtiene

$$a_0q^n+a_1pq^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p^{n-1}q+a_np^n=0 \tag{79}$$

como $n\geq 1$ entonces

$$q(a_0q^{n-1}+a_1pq^{n-2}+\cdots a_{n-1}p^{n-1}=-a_np^n$$

entonces

$$q|(a_np^n)$$

pero como $MCD(p,q)=1$ entonces $q \not| p^n$, luego por propiedad de primos, se tiene

$$q|a_n$$

Observación: la propiedad utilizada es: Sea $a,b\in\mathbb{Z}$ no nulos con $MCD(a,b)=1$.
Si $a|(bc)\Longrightarrow a|c$.
¿como haremos para probar que $p|a_0$?
de (79) también podemos tener

$$a_1pq^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p^{n-1}q+a_np^n=-a_0q^n$$

entonces

$$p(a_1q^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p^{n-2}q+a_np^{n-1}=-a_0q^n$$

luego tenemos

$$p|(a_0q^n)$$

luego

$$p|a_0$$

©

15. Problema de reforzamiento

1. Considere $A \subset \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$. Probar que sup $(b + A) = b +$ sup A.

2. Calcule el supremos e infimo de los conjuntos siguientes:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n})$$

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n})$$

3. Dado el conjunto

$$B = \{\frac{6(-1)^n + 8n}{3n + 8} \; : \; n \in \mathbb{N}\}$$

   ¿Existe el supremo e infimo de B?. si su respuesta es afirmativa, determínelos

4. Sean a y b dos números reales tales que $0 < a < b$. Demuestre que

   (i) $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$

   (ii) $a < \sqrt{ab} < b$

   (iii) $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

5. Pruebe que para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$a = b \Longleftrightarrow |a - b| < \epsilon, \; \forall \epsilon > 0.$$

6. Pruebe: si p es un número primo, entonces $\sqrt{p}$ es un número irracional en $\mathbb{R}$.

   ¿El reciproco es cierto, es decir: si $\sqrt{p}$ es irracional, entonces p es primo?.

7. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_k$, $k \in \mathbb{N}$ subconjuntos de los números reales acotadas superiormente. Se define

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_k = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_k : \; \forall \; 1 \leq i \leq k, \; a_i \in A_i\}$$

   Pruebe que

$$sup \; (A_1 + A_2 + \ldots + A_k) = sup \; A_1 + sup \; A_2 + \cdots + sup \; A_k$$

   .

8. Sea $b > 0$.Pruebe que para cada $x \in \mathbb{R}$, existe y en forma única $n \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$nb \leq x \leq (n+1)b$$

9. Considere la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = \frac{(-1)^n + n}{n^2+1}$. Pruebe que

   (a) $sup\ (Imagen(f)) = \frac{5}{6}$

   (b) $inf\ (Imagen(f)) = 0$

   Sugerencia: si $n \in \mathbb{N}$ luego n es par o impar.

10. Probar que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se cumple

$$a^3b + ab^3 \leq a^4 + b^4$$

11. Demuestre

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

12. Sabiendo que $a, b, c \in \mathbb{R}$ de modo que $a + b + c = 6$. Pruebe

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$$

13. sabiendo que $a + b + c = 1$. Demostrar que $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc$.

14. Si $a + b = 1$. Pruebe que $4ab \leq 1$

15. Considere $S = \{x \in \mathbb{R} :\ |x| + |x+1| < 2\}$. Determine el supremo e ínfimo, sies que existe.

16. Sea A y B dos conjuntos acotados, tales que para todo $a \in A$ y $b \in B$ se tiene $a \leq b$.
    Sean $A' \subset A$ y $B' \subset B$ tales que $sup\ A' = inf\ B'$. Probar que $sup\ A = inf\ B$.

17. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente y sea $a \in \mathbb{R}$. Definimos

$$a + A = \{a + x :\ x \in A\}$$

   Demuestre que $Sup(a + A) = a + SupA$.

18. Sea A un conjunto no vacío tal que existe $Inf\ A > 0$. Pruebe que el conjunto

$$B = \{\frac{1}{a} : a \in A\}$$

   es acotado superiormente y $SupB = \frac{1}{InfA}$.

19. Sean A y B dos conjuntos acotados y no disjuntos. Pruebe que

    (a) $Sup(A \cap B) \leq Inf\{SupA, SupB\}$

    (b) $Inf(A \cap B) \geq Sup\{InfA, InfB\}$

20. Dado el conjunto
$$A = \{\frac{3n + 4 - (-1)^n n}{n + (-1)^n + 1} : \ n \in \mathbb{N}\}$$

    (i) Pruebe que A es un conjunto acotado.

    (ii) Halle el $InfA$ y el $SupA$

21. Dado el conjunto $A = \{1 - \frac{(-1)^n}{n} : \ n \in \mathbb{N}\}$.

    Determinar el $InfA$ y el $SupA$.

22. Daso el conjunto $B = \{\frac{2}{n} : \ n \in \mathbb{N}\}$.

    Demuestre que $InfB = 0$ y $SupB = 2$.

23. Sean a, b, c y d números reales positivos tales que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Pruebe que se cumple
$$\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}$$

24. Sea $a \in \mathbb{Q}$ y $b, c \in \mathbb{I}$, donde $\mathbb{I}$ es el conjunto de los irracionales. Demuestre que

    a) $a + b$ es irracional.

    b) $a.b$ es irracional, siempre que $a \neq 0$.

25. Indique el *valor de verdad* de las proposiciones siguientes, Justificando su respuesta

    a) Los números naturales son cuerpos.

    b) $\mathbb{Z}$ es un cuerpo ordenado.

    c) $\mathbb{Q}$ es completo.

26. Si $a > 0, x > 0$. Probar que $\sqrt{a} \leq \frac{ax^2+1}{2x}$.

    SUGERENCIA: $(\sqrt{ax^2} - 1)^2 \geq 0$.

27. Si A y B son subconjuntos no vacíos en $\mathbb{R}$ tal que $\forall a \in A, b \in B, a \leq b$.

    Probar que existe $x \in \mathbb{R}$ de manera que $\forall a \in A, b \in B : \ a \leq x \leq b$.

28. Pruebe que $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ no es un número racional.

29. Sea K un cuerpo y $a \in K$. Sea $a \geq 0$. Si para cada $\epsilon > 0:\ 0 \leq a < \epsilon$. Probar que
$$a = 0$$

30. Sea K un cuerpo y $a, b \in K$. Sabiendo que para cualquier $\epsilon > 0$ se tiene $a - \epsilon < b$.
Probar que $a \leq b$.

31. Sabiendo que tres números reales a, x e $y > 0$ satisfacen las desigualdades
$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}$$
Probar que $x = a$.

32. Pruebe por el absurdo que ningún número racional al cuadrado es 5.

33. Probar por el método indirecto que
$$\forall a, b, n \in \mathbb{N},\ a + n = b + n \Longrightarrow a = b$$

34. Sabiendo que $a, b, r \in K$, donde K es un cuerpo ordenado. Usando los aximas y las definiciones pruebe que

    (a) si $a > 0, b < 0$, entonces $\frac{a}{b} < \frac{a}{b-a}$

    (b) si $a < b, r > 0$, entonces
$$a < \frac{a + br}{1 + r} < b$$

35. Probar que $\forall a \in \mathbb{Z}$, existe un único $b \in \mathbb{Z}$ de modo que
$$a < b < a + 2$$

36. Consideren $A, B \subset \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos y acotados en $\mathbb{R}$, de modo que
$$\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$$
Pruebe que el *sup* $A \leq$ *sup* B

37. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq a < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Pruebe que $a = 0$.

38. Pruebe que existe un real $b > 0$ de modo que $b^2 = 2$.

39. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ entonces demuestre que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$-\frac{1}{2} < x - m < \frac{1}{2}$$

40. Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{N}$. Probar que existe un número racional m/n tal que

$$-\frac{1}{2n} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n}$$

41. Diremos que un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es *algebraico* si y solo si α es raíz de una ecuación polinomial de la forma:

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$$

donde todos los coeficientes c_j son números enteros.

Pruebe que todo número racional, es algebraico.

42. Halle un número algebraico no racional.

43. ¿$\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ es un número algebraico?

44. Un número real α que no es algebraico le llamaremos *trascendente*.

¿ $\sqrt[100]{2}$ es trascendente?

Nota complementaria: como los algebraicos contienen a los racionales, se deduce que los algebraicos estan dentro de los irracionales.

J. Liouville (1851) exhibe y prueba que el número

$$\beta = 0,110001000\ldots$$

donde los 1 están en las posiciones $1!, 2!, 3!, \ldots, n!, \ldots$ y el resto de las cifras son ceros, es decir

$$\beta = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \cdots + \frac{1}{10^{n!}} + \cdots$$

En 1873, Hermite demuestra que el número e es trascendente y en 1882 Lindemann prueba que π tambien lo es.

45. Determine y justifique si las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas:

(a) si X es denso en $\mathbb{R}$, entonces $\mathbb{R} \setminus X$ tambien es denso en $\mathbb{R}$

(b) Si X e Y son conjuntos densos en los reales, entonces $X \cup Y$ es denso en $\mathbb{R}$.

46. Pruebe que $\sqrt{p}$ es un número irracional, siempre que p sea número primo.

47. Sean A y B dos conjuntos no vacíos y acotados.

    ¿Es cierto que $sup\ (AB) = sup\ A.sup\ B$?

48. Probar que los reales mostrados no son racionales:

    (i) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

    (ii) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$

49. Sea $A = \{-\frac{1}{x-x^2} :\ x \in (0,1)\}$. ¿A es un conjunto acotado inferiormente en $\mathbb{R}$?.

50. Sea Y un conjunto no vacío de números reales. Si $m = inf\ Y, M = sup\ Y$.

    Probar que
$$M - m = sup\ \{|x-y| :\ x, y \in Y\}$$

51. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Compruebe que

    a) $\max\{x, y, z\} = \max\ \{x, max\{y, z\}\}$

    b) $\min\{x, y, z\} = min\{x, min\{y, z\}\}$

    c) $\max\{x, y\} = \frac{(x+y)+|x-y|}{2}$

    d) $min\{x, y\} = \frac{(x+y)+|x-y|}{2}$

52. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números no menores que -1. Pruebe que
$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$$

53. Sea $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y acotados tal que $A \subset B$. Pruebe que
$$infB \leq infA \leq supA \leq supB$$

54. Halle el supremo e ínfimo, si es que existen, del conjunto siguiente
$$\{\frac{(-1)^n - 6n}{3n + 4} :\ n \in \mathbb{N}\}$$

55. Sea $x, y \in \mathbb{R}$ donde $0 < x < y$. Probar que

$$x < \frac{2xy}{x+y} < \frac{x+y}{2} < y$$

56. Determine el supremo delconjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ |x| + |1-x| < 2\}$$

57. Probar que $\mathbb{Q}$ no satisface la propiedad de intervalos encajados.

58. Dado un número natural $p > 1$. Demuestre que los números racionales de la forma $\frac{m}{p^n}$, donde $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, constituyen un *subconjunto denso* en $\mathbb{R}$.

59. Pruebe que $\mathbb{R} \setminus \{b\}$ no es un completo, para todo $a \in \mathbb{R}$.

60. ¿Existe algún cuerpo K en el cúal el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, esta acotado?, Justifique su respuesta.

61. Sea $A, B \in \mathbb{Q}$ no vacíos y $A \cup B = \mathbb{Q}$. Sabiendo además que

$$x \in A, \ y \in B \Longrightarrow \ x < y$$

Probar que $inf \ B = Sup \ A$

62. ¿El Principio de los intervalos encajados, será válido también para intervalos abiertos $I_n = (a_n, b_n)$?

63. Muestre que $(1, 4)$ no es numerable, mediante el principio de los intervalos encajados.

64. Determine el supremo e ínfimo del conjunto siguiente, si es que existen tales elementos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 3 \to x < 4\}$$

65. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $M = \{y \in \mathbb{R} : \ y < a\}$. Muestre que no existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ tal que $k = Sup \ M$

66. Podría determinar conjuntos A que cumplan con las caracteristicas siguientes, en cada uno de los casos

   (i) $\forall B \subset \mathbb{Q}, \ A \cap B = \emptyset$

   (ii) $Sup \ A = inf \ A$

(iii) Para cada $a \in A$, existe $b \in A$ tal que $a < b$

(iv) $\forall a, b \in A$, $a < b$

67. Definamos: Sea $A \subset \mathbb{R}$.

A esta acotado superiormente $\Longleftrightarrow$ existe $c \in \mathbb{R}/\ \forall x \in A:\ x \leq c$

A esta acotado inferiormente $\Longleftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{R}/\ \forall x \in A:\ d \leq x$

Muestre un conjunto A de modo $a \in \mathbb{R}$ sea una cota superior y $a+1 \in \mathbb{R}$ una cota inferior.

68. Dado el conjunto $A = \{\frac{3n+1}{n+1}:\ n \in \mathbb{N}\}$, se pide

(a) Muestre que A es un conjunto acotado.

(b) Encuentre el ínfimo y supremo de A.

(c) ¿Tiene máximo y/o mínimo?

69. Sea $B \subset A$ donde A es un conjunto acotado inferiormente. Muestre que

(a) $infA \leq infB$

(b) Si para cada $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $b \leq a$. Pruebe que

$$infB = infA$$

70. Definamos: Sea $A \subset \mathbb{R}$. A es un conjunto abierto si y solo si para cada $x \in A$, existe $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, tal que

$$x \in (a,b) \subset A$$

(i) Muestre que $(a,b) \subset \mathbb{R}, a < b$ es un conjunto abierto.

(ii) ¿$\emptyset$ es abierto?.

(iii) Muestre que

$$(c,d) \subsetneqq (a,b) \Longleftrightarrow [(a < c \wedge d \leq b) \vee (a \leq c \wedge d < b)]$$

(iv) Muestre que $[1,2)$ no es un conjunto abierto.

71. Definamos:(Homomorfismo de cuerpos) Sea $f: K \to L$ una función de un cuerpo K hacia el cuerpo L.

f es un homomorfismo de K en L si y solo si

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in K$.

(ii) $f(xy) = f(x).f(y), \forall x, y \in K$

Considere $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ un homomorfismo no nulo.

Pruebe que $f = id_{\mathbb{Q}}$, es decir $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}$.

72. Sea el polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,\ a_i \in \mathbb{Z} \subset K$, donde K es un cuerpo ordenado.

    Probar que si el número racional irreducible $\frac{p}{q}$ cumple con $p(\frac{p}{q})$ entonces p divide a a_0 y q divide a a_n.

73. Sea $\mathfrak{F} = (F, +, ., <)$ un cuerpo ordenado completo.

    Considere $x_1, x_2, \ldots x_n \in F$ tal que

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{k-1} < x_k \leq x_{k+1} \leq \ldots \leq x_n$$

    Pruebe que $x_1 < x_n$

74. Dar una familia infinita de intervalos abiertos cuya interseccion sea solo un conjunto unitario.

75. Demostrar que $\forall a, b \in \mathbb{R} : [a^2 = b^2 \iff (a = b \lor a = -b)]$

76. Hallar el $Sup\ \{1 + 6x - x^2 :\ x \in \mathbb{R}\}$

77. Halle el $inf\{x^2 - 4x + 29 :\ x \in \mathbb{R}\}$

78. Demostrar que $\{n + \frac{(-1)^n}{n} :\ n \in \mathbb{N}\}$ es acotado inferiormente, pero no está acotado superiormente.

79. Demostrar la veracidad o falsedad de la siguiente proposición

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{Z}^+ /\ x < a\ \ln(n)$$

80. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ arbitrario. Probar que existe un único $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$(m-1)a \leq b < ma$$

81. ¿Si $A \subset \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$ y $f : A \to B$ es una biyección, entonces B es denso en $\mathbb{R}$?

82. Sea $c \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $a \in \mathbb{Q}$ tal que $|a - c| < \epsilon$.

83. Probar que si $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y dado $\epsilon > 0$, existe $y \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|y - w| < \epsilon$$

84. Indique el valor de verdad de

   (a) si $A \subset B$ y B es denso en $\mathbb{R}$, entonces A es denso en $\mathbb{R}$.

   (b) si A es denso en $\mathbb{R}$, entonces A^c es decir el complemento de A es también denso.

   (c) si $A \subset \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, entonces $A = \mathbb{Q}$.

85. Pruebe que cualquier solución racional de $x^k + a_{k-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$, donde $a_i \in \mathbb{Z}$, debe ser entera.

86. Pruebe que en un cuerpo K no siempre se cumple la propiedad:

$$a^2 + b^2 = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0$$

87. Sea $E(x) = sup\{p \in \mathbb{Z}/\ p \leq x\}$ donde $x \in \mathbb{R}$.
   Probar que $E(x) \leq x < E(x+1)$

88. Sea $S = \{x \in \mathbb{R}/\ |\frac{3x-2}{x+1}| < 4\}$.

   (i) ¿S es un conjunto acotado inferiormente?

   (ii) ¿S es un conjunto acotado superiormente?

89. Sea C el cuerpo de los complejos. ¿Por qué C no es un cuerpo completo?

90. Sea F un cuerpo en el cual verifica que $1 + 1 = 0$. Mostrar que

$$\forall x \in F :\ x + x = 0$$

91. Sea F un cuerpo. Sabiendo que se cumple $a + a = 0$ para algun $a \in F, a \neq 0$. Mostrar que

$$\forall x \in F :\ x + x = 0$$

92. Demostrar que en un cuerpo ordenado K. Si $|a - b| < \epsilon$, entonces $|a| < |b| + \epsilon$.

93. Sea la familia de intervalos $I_n = [n, +\infty), \forall n \in \mathbb{N}$. Halle

$$H = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

94. Sea $x > 1$. Probar que

$$Inf\{x^{\frac{1}{n}} :\ n \in \mathbb{N}\} = 1$$

95. Sabiendo que $\forall n \in \mathbb{N} : I_n = (2 - \frac{1}{n}, 2)$. Halle

$$L = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

96. Sabiendo que $n \in \mathbb{N} : I_n = [0, \frac{1}{n}]$ y $x > 0$ arbitrario. Pruebe que

$$x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

97. Sea el intervalo abierto $I = (a, b)$ y $x_0 \in I$.

    Probar que existe $r > 0$ de tal forma que $(x_0 - r, x_0 + r) \subsetneq I$

98. Sea $F \subset \mathbb{R}$ un conjunto finito no vacío. Probar que $D = \mathbb{R} \setminus F$ es un conjunto denso a $\mathbb{R}$.

99. Si $D \subset \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$. ¿Es cierto que el complemento de D, es un conjunto discreto?

100. Sean $A \subset B$ y $B \subset D \subset \mathbb{R}$. Si se sabe que A es denso en B y B es denso en D es denso en $\mathbb{R}$.

     Pruebe que A es denso en $\mathbb{R}$.

16. Obras del mismo autor:

[1] Teoría de los números naturales: Los axiomas de Peano. 2011, Lima.

[2] Introducción a la teoría de funciones. 2011, Lima.

Índice alfabético

conjuntos acotados, 44

Conjuntos inductivos, 27

Cuerpo arquimediano, 45

Cuerpo completo, 51

Cuerpo o campo, 5

Cuerpos ordenados, 15

Densidad en los números reales, 68

función monótona creciente, 61

Homomorfismo de cuerpos, 13, 120

Infimo de un conjunto, 51

intervalos, 38

Máximo entero, 75

Número algebraico, 117

Opuesto aditivo, 5

Relación de orden, 20

supremo de un conjunto, 48

Valor absoluto, 41