Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática — Ciclo 2015-I

[Cod: CM 131 Curso: Cálculo Diferencial]

[Tema: Lógica y Demostraciones]

Práctica Dirigida N^o 1

---

1. Considere $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Hallar por extensión los siguientes conjuntos

   a) $A_1 = \{x \in A : \exists y \in A \text{ tal que } x^2 + y \geq 8\}$.

   b) $A_2 = \{x \in A : \forall y \in A \text{ tal que } x^2 + y \geq 8\}$

   c) $A_3 = \{x \in A : \exists! y \in A \text{ tal que}, x^2 + y \geq 8\}$.

2. Utilizando tablas de verdad verificar si es contingencia, tautología o contradicción?

   a) $(p \wedge q) \to r$ ≡ contingencia

   b) $\sim (p \wedge q) \vee r$

   c) $q \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

   d) $p \to \sim (q \wedge r)$

   e) $((p \to q) \to r) \leftrightarrow ((p \wedge q) \to r)$

3. Negar las proposiciones siguientes

   a) $\forall x, \forall y, \exists z, (x + y) = z$

   b) $\forall x, y / (xy \leq 2)$

   c) $\forall x, \forall y, \forall z, x + z < y$

   d) $\exists x, \exists y / \ xy < 2$

4. Construir la tabla de verdad para la siguiente proposición

$$[p \wedge (p \vee q)] \leftrightarrow p$$

5. Usando las reglas de inferencia

   a) Demostrar mediante el método directo que se cumple con $s \to \sim h$, utilizando las siguientes premisas:

$$\begin{array}{ccc} \sim p & \wedge & q \\ h & \to & \sim t \\ (q \vee \to r) & \to & (p \to t) \\ s & \to & p \end{array}$$

   b) Demostrar mediante el método indirecto que se cumple con $\sim N$, utilizando las premisas siguientes:

$$\begin{array}{ccc} s & \to & \sim r \\ r & & \\ \sim s & \to & q \\ q & \to & \sim N \end{array}$$

   c) Demostrar

$$\begin{array}{ccc} \sim A & \to & B \\ C & \to & B \\ c & \vee & \sim A \\ \sim B & \vee & D \\ \hline \therefore D & & \end{array}$$

6. Demostrar

$$\begin{array}{ccc} p & \wedge & q \\ p & \to & r \\ \hline \therefore r & \wedge & q \end{array}$$

7. Demostrar

$$\begin{array}{ccc} p & \vee & q \\ p & \to & r \\ \hline \therefore r & \vee & q \end{array}$$

8. Demostrar: Sea n un natural ta que si $5n + 3$ es par, entonces n es impar.

9. ¿Es cierto o falso que $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow [p \vee \sim q]$ es equivalente a $\sim p \vee \sim q$. (falso)

10. Pruebe que $\sim (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$ es una contradicción.

11. Se definen las proposiciones

$$p \heartsuit q \equiv \sim p \wedge q$$

$$p \clubsuit q \equiv p \vee \sim q$$

Además la proposición $\sim [(q \heartsuit p) \to (q \clubsuit r)]$ es una tautología. Determine los valores de verdad para p, q y r.

12. Si $A = \{1,2,3,\ldots,10\}, B = \{x \in A : x < 3 \leftrightarrow x \geq 6\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   a) $\forall x \in A, \exists y \in B$ tal que $x + y \leq 7$.

   b) $\forall x \in A, \exists y \in B$ de modo que $x + y \in B$.

   c) $\exists x \in A, \forall y \in B$ tal que $x + y \in A$.

13. Sean p y q dos proposiciones lógicas. Sabiendo que

   a) $\sim p \wedge q$ es contradicción.

   b) $p \wedge q \equiv p$.

   Pruebe que $p \equiv q$.

14. Para una proposición cualquiera p se define: $V(p) = \begin{cases} 1, & \text{si p es verdadera.} \\ 0, & \text{si p es falsa.} \end{cases}$.

   a) Pruebe que

   - $V(\sim p) = 1 - V(p)$.
   - $V(p \vee q) = V(p) + V(q) - V(p)V(q)$.

   b) Encuentre la formula de $V(p \to q)$.

15. Dados $A, B \subset E$. Pruebe que $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset$.

16. Sean A, B subconjuntos de U. Demostrar que

   a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

   b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

   c) $A \cap B = A$ y $A \cup B = A \Leftrightarrow A = B$.

17. Probar que $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

18. Sea $A = \{1, 2, \ldots, 20\}, B = \{x \in A : x < 5 \leftrightarrow x \geq 7\}$. Indagar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   a) $\forall X \subset A \to B \cap X = \emptyset$.

   b) $\exists X \subset A \wedge Y \subset B$ tal que $X \cap Y = \emptyset$.

   c) $\exists D \subset A$ tal que $B \cup D = A$.

   d) $\exists X \in A / \forall y \in B, x < y$.

   e) $\forall x \in A, \exists y \in A$ tal que $x - y \in B$.

19. Demuestra poniendo un contraejemplo que las siguientes afirmaciones no son verdaderas:

   a) Todo entero mayor que 17 es el cuadrado de un número entero.

   b) Todo entero mayor que 6 es múltiplo de 2 y de 3.

   c) $100n + 1 > n^2$ para todo entero n.

20. Demuestra por reducción al absurdo las siguientes afirmaciones:

   a) $\sqrt{2}$ no es racional.

   b) Si un x es un número racional, entonces $\pi + x$ no es racional.

21. Demostrar que si n^2 es múltiplo de 5, entonces n es múltiplo de 5.

22. Analice el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

   a) $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $\forall y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 = (x + y)^2$.

   b) $\exists\, x \in \mathbb{R}$ de modo que $2x - 4 = 4x - 2$.

23. Dados los conjuntos A y B. Sea X un conjunto con las siguientes característica

   a) $A \subset X, B \subset X$.

   b) si $A \subset Y, B \subset Y$, entonces $X \subset Y$.

   Probar que $X = A \cup B$.

24. Sean $A, B \subset E$. Pruebe que $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$, donde B^c es el complemento del conjunto B respecto a E.

25. Demostrar que $A \cup B = E \Leftrightarrow A^c \subset B$, siendo $A, B \subset E$.

26. Sean $A, X \subset E$ son conjuntos tales que $A \cap X = \emptyset$ y $A \cup X = E$. Pruebe que $X = A^c$.

27. Sean A y B dos conjuntos. Demostrar que $A \cup B \neq \emptyset$, entonces $A \neq \emptyset$ o $B \neq \emptyset$.

28. Sabiendo que $n \in \mathbb{Z}$. Probar que si n^2 es múltiplo de 3, entonces n es múltiplo de 3.

29. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $n^3 - n$ siempre es múltiplo de tres.

Uni, 30 de Marzo de 2015