mar $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}^{-1} x)$ pulsando dos veces la teclas [INV] [SEN] ? Si no es así, encuentre los valores de x para los que no aparecen mensajes de error.

54. ¿Hay cualquier número real x para el cual aparezca un mensaje de error cuando se oprimen las teclas [INV] [TAN] tres veces seguidas? Explique su respuesta.

55. En muchos lenguajes de programación, la única función trigonométrica inversa que aparece es $\tan^{-1}$. (Por ejemplo, en BASIC la función se denota por ATN(X).) Exprese $\operatorname{sen}^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ y $\cot^{-1} x$ en términos de $\tan^{-1}$ (véase el Ejercicio 29). ¿Son válidas estas fórmulas en todo el dominio de la función inversa?

8.6 DERIVADAS E INTEGRALES RELACIONADAS CON LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Esta sección se refiere principalmente a las funciones inversas del seno, el coseno, la tangente y la secante. En los tres teoremas siguientes se presentan las fórmulas para sus derivadas y las integrales que llevan a funciones trigonométricas inversas. En estos teoremas se supone que $u = g(x)$, donde g es una función derivable y x se restringe a los valores para los que las expresiones indicadas tienen sentido.

TEOREMA (8.27)

$$D_x \operatorname{sen}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u \qquad D_x \cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

$$D_x \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} D_x u \qquad D_x \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$$

Demostración Como las fórmulas para $u = g(x)$ se pueden obtener aplicando la Regla de la Cadena al caso especial en que $u = x$, basta considerar este caso.

Tomando $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$ en el Teorema (7.29), se obtiene que la función seno inverso g es derivable para $|x| < 1$. Se derivará implícitamente para encontrar $g'(x)$. Nótese primero que las ecuaciones

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} y = x$$

son equivalentes si $-1 < x < 1$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$. Derivando $\operatorname{sen} y = x$ implícitamente,

$$\cos y \, D_x y = 1$$

y por lo tanto,

$$D_x \operatorname{sen}^{-1} x = D_x y = \frac{1}{\cos y}.$$

Como $-\pi/2 < y < \pi/2$, $\cos y$ es positivo y por consiguiente,

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Entonces,

$$D_x \operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

para $|x| < 1$. La función inversa del seno no es derivable en ± 1. Este hecho resulta evidente de la Figura 8.22, pues en los extremos de la gráfica las rectas tangentes son verticales.

Análogamente, para encontrar la derivada de la función inversa del coseno, se empieza con las ecuaciones equivalentes

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{y} \quad \cos y = x$$

para $|x| < 1$ y $0 < y < \pi$. Derivando $\cos y = x$ implícitamente,

$$-\operatorname{sen} y\, D_x y = 1$$

y, por lo tanto, $D_x \cos^{-1} x = D_x y = -\dfrac{1}{\operatorname{sen} y}$.

Como $0 < y < \pi$, $\operatorname{sen} y$ es positivo y $\operatorname{sen} y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$. Entonces, si $|x| < 1$,

$$D_x \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Del Teorema (7.29) se deduce que la función inversa de la tangente es derivable en todos los números reales. Considerando las ecuaciones equivalentes

$$y = \tan^{-1} x \quad \text{y} \quad \tan y = x$$

para $-\pi/2 < y < \pi/2$. Derivando $\tan y = x$ implícitamente, se obtiene

$$\sec^2 y\, D_x y = 1.$$

Por lo tanto,

$$D_x \tan^{-1} x = D_x y = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

Usando el hecho de que $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$, se obtiene

$$D_x \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Finalmente, considerando las ecuaciones equivalentes

$$y = \sec^{-1} x \quad \text{y} \quad \sec y = x$$

para y en $(0, \pi/2)$ o en $(\pi, 3\pi/2)$ y derivando $\sec y = x$ implícitamente, se obtiene

$$\sec y \tan y\, D_x y = 1.$$

Como $0 < y < \pi/2$ o bien $\pi < y < 3\pi/2$, resulta que $\sec y \tan y \neq 0$ y, por lo tanto,

$$D_x \sec^{-1} x = D_x y = \frac{1}{\sec y \tan y}.$$

Aplicando el hecho de que $\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$,

$$D_x \sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

para $|x| > 1$. La función inversa de la secante no es derivable en $x = \pm 1$. La gráfica tiene rectas tangentes verticales en los puntos con estas abscisas (véase la Figura 8.26). • •

EJEMPLO 1 Evaluar dy/dx para $y = \operatorname{sen}^{-1} 3x - \cos^{-1} 3x$.

Solución Aplicando el Teorema (7.27) con $u = 3x$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}} - \frac{-3}{\sqrt{1 - 9x^2}} = \frac{6}{\sqrt{1 - 9x^2}}.$$

EJEMPLO 2 Evaluar $f'(x)$ para $f(x) = \tan^{-1} e^{2x}$.

Solución Usando (8.27) con $u = e^{2x}$,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (e^{2x})^2} D_x e^{2x} = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{4x}}.$$

EJEMPLO 3 Determinar y' para $y = \sec^{-1} (x^2)$.

Solución Aplicando el Teorema (8.27) con $u = x^2$,

$$y' = \frac{1}{x^2\sqrt{x^4 - 1}}(2x) = \frac{2}{x\sqrt{x^4 - 1}}.$$

FIGURA 8.28

EJEMPLO 4 Se dispara un cohete verticalmente hacia arriba y consume su combustible de manera que mantiene una aceleración constante de 50 pie/s^2 para $0 \le t \le 5$, donde el tiempo t se expresa en segundos. Como se ilustra en la Figura 8.28, un observador que se encuentra a 400 pie de la plataforma de lanzamiento, sigue con la vista el vuelo del cohete.

(a) Expresar el ángulo de elevación θ del cohete como una función de t.

(b) Al observador le parece que el cohete se eleva más rápidamente cuando $d\theta/dt$ es mayor. (Por supuesto, esto es sólo una ilusión, pues la velocidad crece uniformemente.) Calcular la altura del cohete en el momento en que alcanza su máxima velocidad aparente.

Solución

(a) Denotemos por $s(t)$ la altura del cohete al tiempo t (véase la Figura 8.28). Como la aceleración es siempre 50, obtenemos la ecuación diferencial $s''(t) = 50$. Las condiciones iniciales son $s'(0) = 0$ y $s(0) = 0$. Tomando la antiderivada dos veces seguidas (véase el Ejemplo 4 de la Sección 4.7) obtenemos $s(t) = 25t^2$. De la Figura 8.28, con $s(t) = 25t^2$,

$$\tan \theta = \frac{25t^2}{400} = \frac{t^2}{16} \quad \text{o bien} \quad \theta = \arctan \frac{t^2}{16}.$$

Por el Teorema (8.27), la rapidez de cambio de θ con respecto a t es

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + (t^2/16)^2}\left(\frac{2t}{16}\right) = \frac{32t}{256 + t^4}.$$

Como queremos encontrar el valor máximo de $d\theta/dt$, se buscan primero los números críticos de $d\theta/dt$. Usando la Regla del Cociente,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{(256 + t^4)(32) - 32t(4t^3)}{(256 + t^4)^2} = \frac{32(256 - 3t^4)}{(256 + t^4)^2}.$$

Poniendo $d^2\theta/dt^2 = 0$, obtenemos el número crítico $t = \sqrt[4]{256/3}$. Del Criterio de la Primera (o de la Segunda) Derivada se deduce que $d\theta/dt$ tiene un máximo en $t = \sqrt[4]{256/3} \approx 3.04$ segundos. La altura del cohete en este tiempo es

$$s(\sqrt[4]{256/3}) = 25(\sqrt[4]{256/3})^2 = 25\sqrt{256/3} \approx 230.9 \text{ pie.}$$ •

Usando las fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, se obtienen las siguientes fórmulas de integración.

TEOREMA (8.28)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\,du = \operatorname{sen}^{-1} u + C$$

$$\int \frac{1}{1 + u^2}\,du = \tan^{-1} u + C$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}\,du = \sec^{-1} u + C$$

EJEMPLO 5 Evaluar $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{4x}}}\,dx.$

Solución La integral puede expresarse como en la primera fórmula del Teorema (8.28) por medio de la sustitución

$$u = e^{2x}, \qquad du = 2e^{2x}\,dx.$$

Multiplicamos el integrando por 2 y se procede como sigue:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{4x}}}\,dx &= \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1 - (e^{2x})^2}}\,2e^{2x}\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\,du \\ &= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} u + C \\ &= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} e^{2x} + C.\end{aligned}$$ •

Las fórmulas del Teorema (8.28) pueden generalizarse para cualquier número real a diferente de cero.

TEOREMA (8.29)

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\, du = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + u^2}\, du = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}\, du = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C$$

Demostración Se demostrará solamente la segunda fórmula. Si $u = g(x)$ y g es derivable, entonces por el Teorema (8.27),

$$D_x\left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{g(x)}{a}\right] = \frac{1}{a}\frac{1}{1 + [g(x)/a]^2} D_x\left[\frac{1}{a} g(x)\right]$$

$$= \frac{1}{a}\frac{a^2}{a^2 + [g(x)]^2}\frac{1}{a} g'(x) = \frac{1}{a^2 + [g(x)]^2} g'(x).$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{1}{a^2 + [g(x)]^2} g'(x)\, dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{g(x)}{a} + C = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C.$$

Las otras dos fórmulas pueden verificarse de manera parecida. • •

EJEMPLO 6 Evaluar $\int \frac{x^2}{5 + x^6}\, dx$.

Solución La integral se puede escribir como en la segunda fórmula del Teorema (8.29) haciendo la sustitución

$$u = x^3, \qquad du = 3x^2\, dx.$$

Multiplicamos el integrando por 3 y procedemos como sigue:

$$\int \frac{x^2}{5 + x^6}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{5 + (x^3)^2} 3x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{(\sqrt{5})^2 + u^2}\, du$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{5}} + C$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{15}\tan^{-1}\frac{x^3}{\sqrt{5}} + C. \quad \bullet$$

EJEMPLO 7 Evaluar $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-9}}\,dx.$

Solución La integral puede expresarse en la forma apropiada mediante la sustitución

$$u = x^2, \qquad du = 2x\,dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-9}}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2\sqrt{(x^2)^2-9}}\,2x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-9}}\,du\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\sec^{-1}\frac{u}{3}+C\\ &= \frac{1}{6}\sec^{-1}\frac{x^2}{3} + C.\end{aligned}$$

EJERCICIOS 8.6

Ejercicios 1-24: Encuentre $f'(x)$ para la expresión $f(x)$ dada.

1. $\tan^{-1}(3x-5)$ **2.** $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3}x$

3. $\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}$ **4.** $\tan^{-1}x^2$

5. $e^{-x}\operatorname{arcsec} e^{-x}$ **6.** $\sqrt{\operatorname{arcsec} 3x}$

7. $x^2 \arctan x^2$ **8.** $\tan^{-1}\operatorname{sen} 2x$

9. $(1+\cos^{-1}3x)^3$ **10.** $x^2\sec^{-1}5x$

11. $\ln\arctan x^2$ **12.** $\operatorname{arcsen}\ln x$

13. $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^{-1}x}$ **14.** $\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$

15. $\sec^{-1}\sqrt{x^2-1}$ **16.** $\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{x}\right)^4$

17. $(\arctan x)/(x^2+1)$ **18.** $\cos^{-1}\cos e^x$

19. $\sqrt{x}\sec^{-1}\sqrt{x}$ **20.** $e^{2x}/(\operatorname{sen}^{-1}5x)$

21. $3^{\operatorname{arcsen} x^3}$ **22.** $x\arccos\sqrt{4x+1}$

23. $(\tan x)^{\arctan x}$ **24.** $(\tan^{-1}4x)e^{\tan^{-1}4x}$

Ejercicios 25-26: Determine y'.

25. $x^2 + x\operatorname{sen}^{-1}y = ye^x$

26. $\ln(x+y) = \tan^{-1}xy$

Ejercicios 27-42: Evalúe la integral.

27. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{x^2+16}\,dx$ **28.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

29. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ **30.** $\displaystyle\int_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x+1}\,dx$ **32.** $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{9-\operatorname{sen}^2 x}}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$ **34.** $\displaystyle\int \frac{1}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{16-e^{2x}}}\,dx$ **36.** $\displaystyle\int \frac{\sec x\tan x}{1+\sec^2 x}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^6-4}}\,dx$ **38.** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}\,dx$

39. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+9}\,dx$ **40.** $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$

41. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-25}}\,dx$ **42.** $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\,dx$

43. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = 4/\sqrt{16-x^2}$, $x = -2$, $x = 2$ y $y = 0$.

44. Sea $f(x) = x^2/(1+x^6)$. Calcule el área de la región bajo la gráfica de f entre $x = 0$ y $x = 1$.

45. El piso de un depósito tiene la forma de un triángulo rectángulo. El cateto opuesto a un ángulo θ mide 10 m y el adyacente, 7 m. Hay un error posible de 2 cm en la medición de los 10 m. Use la diferencial y una función trigonométrica inversa para estimar el error en el cálculo de θ.

46. Aplique diferenciales para estimar el cambio en arcsen x cuando x varía de 0.25 a 0.26.

47. Un avión vuela a una altura constante de 5 km y a una velocidad de 500 km/h y se aleja de un observador en tierra. Use las funciones trigonométricas inversas para calcular la rapidez con la que varía el ángulo de elevación cuando la aeronave vuela sobre un punto en tierra que se encuentra a 2 km del observador.

48. Un faro buscador se encuentra a $\frac{1}{8}$ de kilómetro del punto más cercano P de una carretera recta y apunta a un automóvil que viaja sobre la carretera a 50 km/h. Use funciones trigonométricas inversas para calcular la rapidez de giro del haz de luz cuando el automóvil se encuentra a $\frac{1}{4}$ de kilómetro de P.

49. Una cartelera de 6 m de alto se encuentra arriba de un edificio y su parte inferior se encuentra 20 m arriba del nivel de los ojos de un observador. Use las funciones trigonométricas inversas para calcular la distancia a la que se debe situar del edificio el observador para que sea máximo el ángulo entre las visuales a la parte de arriba y a la de abajo del cartel (véase el Ejemplo 65 de la Sección 8.3).

50. Dados los puntos $A(3, 1)$ y $B(6, 4)$ en un sistema de coordenadas rectangulares, encuentre la abscisa del punto P sobre el eje x para la que el ángulo APB toma su mayor valor.

51. Obtenga ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1}(x-1)$ en el punto $(\frac{3}{2}, \pi/6)$.

52. Halle los puntos de la gráfica de $y = \tan^{-1} 2x$ en los que la recta tangente es paralela a la recta $13y - 2x + 5 = 0$.

53. Halle los intervalos en los que la gráfica de $y = \tan^{-1} x$ tiene (a) concavidad hacia arriba, (b) concavidad hacia abajo.

54. La velocidad al tiempo t de un punto que se mueve sobre una recta coordenada es $(1 + t^2)^{-1}$ m/s. El punto está en el origen cuando $t = 0$. Encuentre su posición en el instante en que la aceleración y la velocidad tienen el mismo valor absoluto.

55. La región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = e^x$, $y = 1/\sqrt{x^2+1}$, y $x = 1$ gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

56. Utilice diferenciales para calcular aproximadamente la longitud de arco de la gráfica de $y = \tan^{-1} x$ de $A(0, 0)$ a $B(0.1, \tan^{-1} 0.1)$.

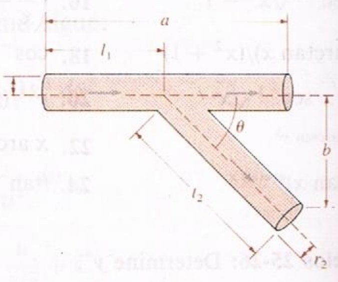
57. Un cohete se lanza verticalmente desde un punto a 5 km de una estación rastreadora que está a la misma altitud. Durante los primeros 20 s de vuelo, el ángulo de elevación aumenta con rapidez constante de 2° por segundo. Use funciones trigonométricas inversas para calcular la velocidad del proyectil cuando el ángulo de elevación es de 30° (véase el Ejercicio 64 de la Sección 8.3).

58. Cuando la sangre circula por las venas, hay una pérdida de energía debida a la fricción. La *Ley de Poiseuille* dice que la pérdida de energía E está dada por $E = kl/r^4$ para una vena de radio r y longitud l, donde k es una constante. Una vena de radio r_2 y longitud l_2 se aparta a un ángulo θ de otra vena de radio r_1 y longitud l_1, como se ilustra en la figura, donde las flechas indican el sentido del flujo sanguíneo. La pérdida de energía es entonces la suma de las pérdidas individuales de energía, es decir,

$$E = (kl_1/r_1^4) + (kl_2/r_2^4).$$

Exprese l_1 y l_2 en términos de a, b y θ, y calcule el ángulo para el cual la energía perdida es mínima.

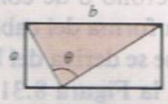
EJERCICIO 58



59. Demuestre que $\int_0^1 [4/(1 + x^2)]\, dx = \pi$ y luego aplique la Regla de Simpson con $n = 10$ para estimar π.

60. De un rectángulo de lados a y b se va a recortar un triángulo de base a y altura b, como se muestra en la figura. ¿Cómo se debe cortar el rectángulo para obtener el mayor ángulo θ posible?

EJERCICIO 60



8.7 FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Las expresiones exponenciales

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

aparecen en las aplicaciones avanzadas del cálculo. Sus propiedades son en muchos sentidos análogas a las de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Más adelante se explica por qué se llaman *seno hiperbólico* y *coseno hiperbólico* de x.

DEFINICIÓN (8.30) La función **seno hiperbólico**, que se denota por **senh**, y la función **coseno hiperbólico**, que se denota por **cosh**, se definen como

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

para todo número real x.

La gráfica de $y = \cosh x$ se puede obtener por el método de **suma de ordenadas**. Para utilizar el método, se trazan primero las gráficas de $y = \frac{1}{2} e^x$ y $y = \frac{1}{2} e^{-x}$ en un sistema coordenado, como se muestra en la Figura 8.29 con las líneas en tono gris. Luego se suman las ordenadas de los puntos de estas gráficas para obtener la gráfica de $y = \cosh x$. El contradominio de cosh es $[1, \infty)$.

La gráfica de $y = \operatorname{senh} x$ se obtiene sumando las ordenadas de las gráficas de $y = \frac{1}{2} e^x$ y $y = \frac{1}{2} e^{-x}$, como se muestra en la Figura 8.30.

La función coseno hiperbólico se puede usar para describir la forma de un cable flexible o una cadena uniforme cuyos extremos están fijos a la misma altura y penden por acción sólo de su peso. Como se ilustra en la Figura 8.31, los cables de líneas de

FIGURA 8.29

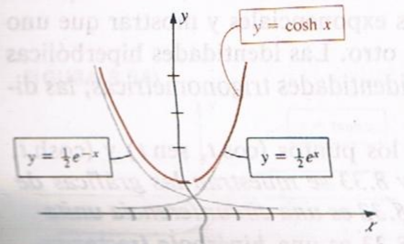


FIGURA 8.30

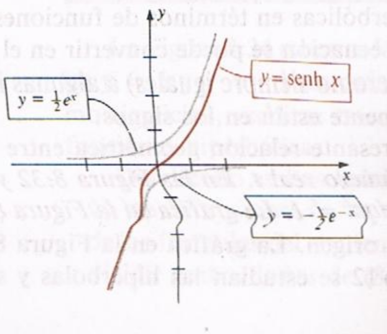
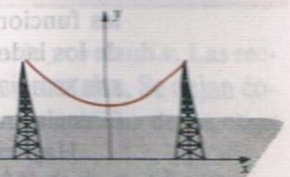


FIGURA 8.31



teléfono o de corriente eléctrica están suspendidos de torres o postes de esta manera. La forma del cable se parece a una parábola pero es en realidad una **catenaria** (palabra que se deriva del latín *catena*, cadena). Si se introduce un sistema de coordenadas como en la Figura 8.31, puede demostrarse que la forma asumida por el cable es la gráfica de la ecuación $y = a\cosh(x/b)$, para dos números reales a y b.

La función coseno hiperbólico aparece también en el análisis del movimiento en un medio que ofrece resistencia. Si un objeto se deja caer desde cierta altura y se desprecia la resistencia del aire, entonces la distancia y que recorre en t segundos es $y = \frac{1}{2}gt^2$, donde g es la aceleración de la gravedad. Sin embargo, no siempre puede despreciarse la resistencia del aire. A medida que la velocidad del objeto aumenta, la resistencia del aire puede afectar de manera importante el movimiento. Por ejemplo, si la resistencia del aire es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad, entonces la distancia y que el objeto ha recorrido a los t segundos, está dada por

$$y = A \ln(\cosh Bt)$$

donde A y B son constantes (véase el Ejercicio 56).

Hay muchas identidades semejantes a las de las funciones trigonométricas en el caso de las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico. Por ejemplo, si $\cosh^2 x$ y $\operatorname{senh}^2 x$ simbolizan $(\cosh x)^2$ y $(\operatorname{senh} x)^2$, respectivamente, se tiene la siguiente identidad.

TEOREMA (8.31)

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

Demostración De la Definición (8.30),

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{4}{4} = 1.
\end{aligned}$$

El Teorema (8.31) es análogo a la identidad $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. En los ejercicios se tratan otras identidades hiperbólicas. Para verificar una identidad, basta expresar las funciones hiperbólicas en términos de funciones exponenciales y mostrar que uno de los lados de la ecuación se puede convertir en el otro. Las identidades hiperbólicas son semejantes (pero no siempre iguales) a algunas identidades trigonométricas; las diferencias normalmente están en los signos.

Hay una interesante relación geométrica entre los puntos $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ y $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ para un número real t. En las Figura 8.32 y 8.33 se muestran las gráficas de $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 - y^2 = 1$. La gráfica en la Figura 8.32 es una circunferencia unitaria con centro en el origen. La gráfica en la Figura 8.33 es una *hipérbola* (rectangular. (En el Capítulo 12 se estudian las hipérbolas y sus propiedades.) Como $\cos^2 t +$

FIGURA 8.32 $x^2 + y^2 = 1$

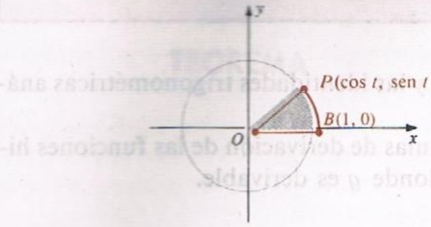
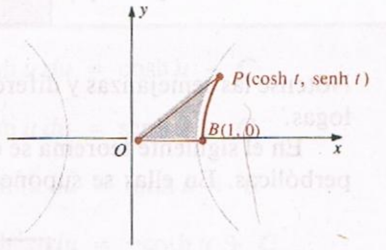


FIGURA 8.33 $x^2 - y^2 = 1$



$\text{sen}^2 t = 1$, el punto $P(\cos t, \text{sen}\, t)$ está en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Por otro lado, de acuerdo con el Teorema (8.31), $\cosh^2 t - \text{senh}^2 t = 1$, y por lo tanto, el punto $P(\cosh t, \text{senh}\, t)$ está en la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Ésta es la razón por la que cos y sen se llaman funciones *circulares*, mientras que cosh y senh se denominan funciones *hiperbólicas*.

Las gráficas de las Figuras 8.32 y 8.33 están relacionadas también de otra manera. Si $0 < t < \pi/2$, entonces t es la medida en radianes del ángulo BOP, indicado en la Figura 8.32. Por el Teorema (8.17), el área A del sector circular sombreado es $A = \frac{1}{2}(1)^2 t = \frac{1}{2}t$, y por lo tanto, $t = 2A$. Análogamente, si $P(\cosh t, \text{senh}\, t)$ es el punto indicado en la Figura 8.33 y A es el área del sector hiperbólico sombreado, entonces $t = 2A$ (véase el Ejercicio 53).

Las sorprendentes analogías entre el seno y el coseno trigonométricos y el seno y el coseno hiperbólicos se pueden aprovechar para definir otras funciones hiperbólicas correspondientes a las otras cuatro funciones trigonométricas. Las funciones **tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica, secante hiperbólica** y **cosecante hiperbólica**, que se denotan por **tanh, coth, sech** y **csch**, respectivamente, se definen como sigue.

DEFINICIÓN (8.32)

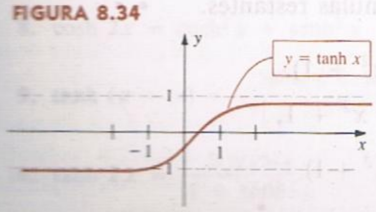
$$\tanh x = \frac{\text{senh}\, x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\text{senh}\, x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \qquad x \neq 0$$

$$\text{sech}\, x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{csch}\, x = \frac{1}{\text{senh}\, x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \qquad x \neq 0.$$

FIGURA 8.34



La Figura 8.34 muestra la gráfica de $y = \tanh x$. Las rectas $y = 1$ y $y = -1$ son asíntotas horizontales. Se dejan como ejercicios, verificar esto y trazar las gráficas de las otras funciones hiperbólicas.

Dividiendo ambos lados de (8.31) entre $\cosh^2 x$ y usando las definiciones de $\tanh x$ y $\text{sech}\, x$, se obtiene la primera de las fórmulas del siguiente teorema. La segunda resulta de dividir ambos lados de (8.31) entre $\text{senh}^2 x$.

TEOREMA (8.33) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x \qquad \coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

Nótense las semejanzas y diferencias entre (8.33) y las identidades trigonométricas análogas.

En el siguiente teorema se enuncian las fórmulas de derivación de las funciones hiperbólicas. En ellas se supone que $u = g(x)$, donde g es derivable.

TEOREMA (8.34)

$$\begin{aligned} D_x \operatorname{senh} u &= \cosh u \, D_x u \\ D_x \cosh u &= \operatorname{senh} u \, D_x u \\ D_x \tanh u &= \operatorname{sech}^2 u \, D_x u \\ D_x \coth u &= -\operatorname{csch}^2 u \, D_x u \\ D_x \operatorname{sech} u &= -\operatorname{sech} u \tanh u \, D_x u \\ D_x \operatorname{csch} u &= \operatorname{csch} u \coth u \, D_x u \end{aligned}$$

Demostración Como de costumbre, basta considerar el caso $u = x$. Como $D_x e^x = e^x$ y $D_x e^{-x} = -e^{-x}$,

$$D_x \operatorname{senh} x = D_x\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$D_x \cosh x = D_x\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x.$$

Para derivar $\tanh x$ se aplica la Regla del Cociente como sigue:

$$\begin{aligned} D_x \tanh x &= D_x \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \\ &= \frac{\cosh x \, D_x \operatorname{senh} x - \operatorname{senh} x \, D_x \cosh x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x. \end{aligned}$$

Se dejan al lector las demostraciones de las fórmulas restantes. • •

EJEMPLO 1 Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = \cosh(x^2 + 1)$.

Solución Aplicando el Teorema (8.34) con $u = x^2 + 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{senh}(x^2+1) \cdot D_x(x^2+1) \\ &= 2x \operatorname{senh}(x^2+1). \end{aligned}$$ •

Las fórmulas de integración correspondientes a las fórmulas de derivación en el Teorema (8.34), son las siguientes.

TEOREMA

$$\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$$

$$\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C.$$

EJEMPLO 2 Evaluar $\int x^2 \operatorname{senh} x^3\, dx$.

Solución Si tomamos $u = x^3$, entonces $du = 3x^2\, dx$, y

$$\begin{aligned}\int x^2 \operatorname{senh} x^3\, dx &= \tfrac{1}{3}\int (\operatorname{senh} x^3)\, 3x^2\, dx \\ &= \tfrac{1}{3}\int \operatorname{senh} u\, du = \tfrac{1}{3}\cosh u + C \\ &= \tfrac{1}{3}\cosh x^3 + C\end{aligned}$$

EJERCICIOS 8.7

Ejercicios 1-14: Verifique la identidad.

1. $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$
2. $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$
3. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$
4. $\cosh(-x) = \cosh x$
5. $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$
6. $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$
7. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$
8. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$
9. $\tanh(x + y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$
10. $\tanh 2x = \dfrac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$
11. $\cosh \dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cosh x}{2}}$
12. $\tanh \dfrac{x}{2} = \dfrac{\operatorname{senh} x}{1 + \cosh x}$
13. $\operatorname{senh} x + \operatorname{senh} y = 2 \operatorname{senh} \tfrac{1}{2}(x + y) \cosh \tfrac{1}{2}(x - y)$
14. $(\cosh x + \operatorname{senh} x)^n = \cosh nx + \operatorname{senh} nx$ para todo entero positivo n. (*Sugerencia:* Utilice el Ejercicio 1.)

Ejercicios 15-30: Encuentre $f'(x)$ para la expresión $f(x)$ dada.

15. $\operatorname{senh} 5x$
16. $\sqrt{4x^2 + 3}$
17. $\sqrt{x} \tanh \sqrt{x}$
18. $\operatorname{ch} e^{4x}$

19. $\dfrac{\operatorname{sech} x^2}{x^2 + 1}$

20. $\dfrac{\coth x}{\cot x}$

21. $\cosh x^3$

22. $\operatorname{senh}(x^2 + 1)$

23. $\cosh^3 x$

24. $\operatorname{senh}^2 3x$

25. $\ln \operatorname{senh} 2x$

26. $\arctan \tanh x$

27. $e^{3x} \operatorname{sech} x$

28. $\sqrt{\operatorname{sech} 5x}$

29. $\dfrac{1}{\tanh x + 1}$

30. $\dfrac{1 + \cosh x}{1 - \cosh x}$

31. Halle y' suponiendo que $\operatorname{senh} xy = ye^x$.

32. Encuentre y' suponiendo que $x^2 \tanh y = \ln y$.

Ejercicios 33-44: Evalúe la integral.

33. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{senh} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

34. $\displaystyle\int \frac{\cosh \ln x}{x}\, dx$

35. $\displaystyle\int \coth x\, dx$

36. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 3x}\, dx$

37. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x \cosh x\, dx$

38. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 x \tanh x\, dx$

39. $\displaystyle\int \tanh 3x \operatorname{sech} 3x\, dx$

40. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x \sqrt{\cosh x}\, dx$

41. $\displaystyle\int \tanh^2 3x \operatorname{sech}^2 3x\, dx$

42. $\displaystyle\int \tanh x\, dx$

43. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sech}^2 x}{1 - 2\tanh x}\, dx$

44. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{senh} x}}{\operatorname{sech} x}\, dx$

45. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $y = \operatorname{senh} 3x$, $y = 0$ y $x = 1$.

46. Calcule la longitud de arco de la gráfica de $y = \cosh x$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

47. Encuentre los puntos de la gráfica de $y = \operatorname{senh} x$ en los que la recta tangente tiene pendiente 2.

48. La región acotada por las gráficas de $y = \cosh x$, $x = -1$, $x = 1$ y $y = 0$ gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

49. Verifique que la gráfica de $y = \tanh x$ corresponde al croquis en la Figura 8.34 y demuestre que las rectas $y = 1$ y $y = -1$ son asíntotas horizontales.

Ejercicios 50-52: Trace la gráfica de la ecuación.

50. $y = \coth x$

51. $y = \operatorname{sech} x$

52. $y = \operatorname{csch} x$

53. Demuestre que si A es la región sombreada en la Figura 8.33, entonces $t = 2A$.

54. Trace la gráfica de $x^2 - y^2 = 1$ y demuestre que cuando t varía el punto $P(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ describe la parte de la gráfica que se encuentra en los cuadrantes I y IV.

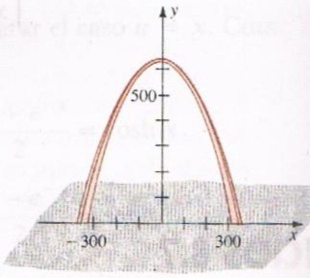
55. El Gateway Arch en San Luis, Missouri, Estados Unidos, posee la forma de una catenaria invertida. Tiene 630 pie de altura en el centro y 630 pie de anchura en la base. El perfil del arco corresponde a la fórmula

$$y = -127.7 \cosh(x/127.7) + 757.7$$

para $-315 \leq x \leq 315$.

(a) Calcule el área total bajo el arco.
(b) Calcule la longitud total del arco.

EJERCICIO 55



56. Si se deja caer una bola de acero en el agua, la distancia $s(t)$ que recorre a los t segundos, está dada por $s(t) = A \ln(\cosh Bt)$, donde A y B son constantes positivas.

(a) Evalúe la función de velocidad v y verifique que $v(0) = 0$. ¿Cuánto vale $\lim_{t\to\infty} v(t)$?
(b) Demuestre que si $A = m/k$ y $B^2 = gk/m$, entonces v satisface la ecuación diferencial

$$m\frac{dv}{dt} + kv^2 = mg$$

donde m es la masa, g la aceleración de la gravedad y $k > 0$.

57. Si una ola con longitud de onda L, se desplaza por una masa de agua que tiene una profundidad D (véase la figura), su velocidad de propa-

gación v, o *celeridad*, está relacionada con L y B por la fórmula

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi}\tanh\frac{2\pi D}{L}$$

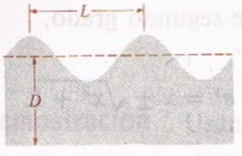
donde g es la aceleración de la gravedad.

(a) Determine $\lim_{D\to\infty} v^2$ para demostrar que $v = \sqrt{gL/2\pi}$ en agua profunda.

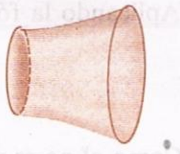
(b) Si f es una función continua y x es un número pequeño, entonces por el Teorema del Valor Medio (5.22), $f(x) - f(0) \approx f'(0)x$. Use este hecho para demostrar que $v \approx \sqrt{gD}$ si D/L es pequeño. Observe que esto demuestra que en agua poco profunda, la velocidad de la ola es independiente de su longitud de onda.

58. Una película de jabón se forma entre dos anillos paralelos concéntricos, como se muestra en la figura. Si los anillos no están muy separados, puede demostrarse que la función f cuya gráfica genera esta superficie de revolución, satisface la ecuación diferencial $yy'' = 1 + (y')^2$. Pruebe que si A y B son constantes positivas, $y = A\cosh Bx$ con $A > 0$ es una solución si y sólo si $AB = 1$. Observe que esto demuestra que la gráfica es una catenaria.

EJERCICIO 57



EJERCICIO 58



8.8 FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

La función seno hiperbólico es continua y creciente para todo x y, por lo tanto, según el Teorema (7.27), tiene una función inversa que también es continua y creciente. Esta función se denomina **seno hiperbólico inverso** y se denota por senh^{-1}. Como $\operatorname{senh} x$ está definida en términos de e^x, es de esperar que senh^{-1} pueda expresarse en términos de la inversa de la función exponencial natural, es decir, de logaritmo natural (ln). La primera de las fórmulas en el teorema siguiente muestra que así es.*

TEOREMA (8.36)

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \qquad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \qquad |x| < 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}, \qquad 0 < x \leq 1$$

* **(N. del R.)** Las funciones hiperbólicas inversas se denotan impropiamente a veces como arcsenh, arccosh, etcétera. En ocasiones se prefiere la simbolización argsenh, etc., que significa "argumento cuyo seno hiperbólico es", etcétera. La nomenclatura siguiente es más apropiada: senh^{-1} = seno hiperbólico inverso o **antiseno hiperbólico**, y así sucesivamente.

Demostración Para demostrar la fórmula de $\operatorname{senh}^{-1} x$, observamos primero que

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \operatorname{senh} y.$$

La ecuación $x = \operatorname{senh} y$ puede utilizarse para encontrar una forma explícita para $\operatorname{senh}^{-1} x$. De modo que si

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

entonces

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0.$$

Multiplicando ambos lados por e^y, se obtiene

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado,

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} \quad \text{o bien} \quad e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Como e^y no es nunca negativo, hay que descartar el signo menos. Haciendo esto y tomando el logaritmo natural a ambos lados de la ecuación,

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

es decir,

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Las fórmulas para las funciones inversas de las funciones hiperbólicas restantes se obtienen de manera parecida. Como en el caso de las funciones trigonométricas, algunas de ellas existen sólo si se restringe el dominio. Por ejemplo, si el dominio de cosh se restringe al conjunto de los números reales no negativos, entonces la función resultante es continua y creciente y su función inversa $\cosh^{-1}$ se define por medio de

$$y = \cosh^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad \cosh y = x, \quad y \geq 0.$$

Usando el mismo proceso que para $\operatorname{senh}^{-1} x$ se llega a la fórmula logarítmica de $\cosh^{-1} x$.

Análogamente, puede escribirse

$$y = \tanh^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad \tanh y = x \quad \text{para } |x| < 1.$$

Usando la Definición (8.32), $\tanh y = x$ se puede expresar

$$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x.$$

Despejando y resulta la forma logarítmica de $\tanh^{-1} x$.

Finalmente, si el dominio de sech se restringe a los números no negativos, se obtiene una función biunívoca y se define que

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad \operatorname{sech} y = x, \quad y \geq 0.$$

Escribiendo la última igualdad con exponenciales se llega a la cuarta fórmula del enunciado del teorema. • •

En el teorema siguiente se supone que $u = g(x)$, donde g es derivable, y que x está restringido de manera apropiada.

TEOREMA

$$D_x \operatorname{senh}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} D_x u$$

$$D_x \cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} D_x u, \qquad u > 1$$

$$D_x \tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} D_x u, \qquad |u| < 1$$

$$D_x \operatorname{sech}^{-1} u = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} D_x u, \qquad 0 < u < 1.$$

Demostración Usando el Teorema (8.36),

$$\begin{aligned} D_x \operatorname{senh}^{-1} x &= D_x \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

Esta fórmula se puede generalizar a $D_x \operatorname{senh}^{-1} u$ aplicando la Regla de la Cadena en la forma acostumbrada. Las demostraciones de las fórmulas restantes se dejan como ejercicio al lector. • •

EJEMPLO 1 Encontrar y' para $y = \operatorname{senh}^{-1}(\tan x)$.

Solución Usando el Teorema (8.37) con $u = \tan x$,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{\tan^2 x + 1}} D_x \tan x = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 x}} \sec^2 x \\ &= \frac{1}{|\sec x|} |\sec x|^2 = |\sec x| \end{aligned}$$

El siguiente teorema se puede demostrar derivando el lado derecho de cada fórmula. Como antes, $u = g(x)$, donde g es derivable.

TEOREMA (8.38)

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\, du = \operatorname{senh}^{-1} \frac{u}{a} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}} du = \cosh^{-1} \frac{u}{a} + C, \quad u > a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C, \quad a > 0, \ |u| < a$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 + u^2}} du = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1} \frac{|u|}{a} + C, \quad a > 0, \ 0 < |u| < a$$

Si se usa el Teorema (8.36), las fórmulas de integración del teorema anterior pueden expresarse en términos de la función logaritmo natural. Por ejemplo,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}} du = \operatorname{senh}^{-1} \frac{u}{a} + C = \ln \left(\frac{u}{a} + \sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2 + 1} \right) + C.$$

En el Ejercicio 29 se pide demostrar que si $a > 0$, esto se puede escribir también como

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}} du = \ln (u + \sqrt{a^2 + u^2}) + D$$

donde D es una constante arbitraria. En la Sección 9.3 se presenta otro método para evaluar las integrales del Teorema (8.38).

EJEMPLO 2 Evaluar $\int \frac{1}{\sqrt{25 + 9x^2}} dx$.

Solución Podemos expresar la integral como en la primera fórmula del Teorema (8.38) tomando $u = 3x$ y $du = 3dx$. Así,

$$\int \frac{1}{\sqrt{25 + 9x^2}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{5^2 + (3x)^2}} 3 \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{senh}^{-1} \frac{3x}{5} + C$$

EJEMPLO 3 Evaluar $\int \frac{e^x}{16 - e^{2x}} dx$.

Solución Tomando $u = e^x$, $du = e^x dx$ y aplicando el Teorema (8.38),

$$\int \frac{e^x}{16 - e^{2x}} dx = \int \frac{1}{4^2 - (e^x)^2} e^x dx = \int \frac{1}{4^2 - u^2} du$$

$$= \frac{1}{4} \tanh^{-1} \frac{u}{4} + C$$

$$= \frac{1}{4} \tanh^{-1} \frac{e^x}{4} + C$$

para $e^x < 4$. •

EJERCICIOS 8.8

1. Deduzca la fórmula para $\cosh^{-1} x$ en el Teorema (8.36).
2. Deduzca la fórmula para $\tanh^{-1} x$ en el Teorema (8.36).

Ejercicios 3-6: Verifique la fórmula.

3. $D_x \cosh^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} D_x u, \quad u > 1$
4. $D_x \tanh^{-1} u = \dfrac{1}{1 - u^2} D_x u, \quad |u| < 1$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}}\, du = \cosh^{-1} \frac{u}{a} + C, \quad u > a > 0$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C, \quad a > 0,\ |u| < a$

Ejercicios 7-10: Trace la gráfica de la ecuación.

7. $y = \operatorname{senh}^{-1} x$
8. $y = \cosh^{-1} x$
9. $y = \tanh^{-1} x$
10. $y = \operatorname{sech}^{-1} x$

Ejercicios 11-20: Encuentre $f'(x)$ para la expresión $f(x)$ dada.

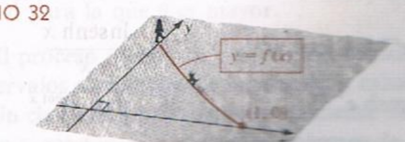
11. $\operatorname{senh}^{-1} 5x$
12. $\operatorname{senh}^{-1} e^x$
13. $\cosh^{-1} \sqrt{x}$
14. $\sqrt{\cosh^{-1} x}$
15. $\tanh^{-1} (x^2 - 1)$
16. $\tanh^{-1} \operatorname{sen} 3x$
17. $x \operatorname{senh}^{-1} (1/x)$
18. $1/(\operatorname{senh}^{-1} x^2)$
19. $\ln \cosh^{-1} 4x$
20. $\cosh^{-1} \ln 4x$

Ejercicios 21-28: Evalúe la integral.

21. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{81 + 16x^2}}\, dx$
22. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16x^2 - 9}}\, dx$
23. $\displaystyle\int \frac{1}{49 - 4x^2}\, dx$
24. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}\, dx$
25. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 16}}\, dx$
26. $\displaystyle\int \frac{2}{5 - 3x^2}\, dx$
27. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{9 - x^4}}\, dx$
28. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5 - e^{2x}}}\, dx$

29. Demuestre que si $a > 0$, entonces
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}}\, du = \ln (u + \sqrt{a^2 + u^2}) + C.$$
30. Demuestre que si $u > a > 0$, entonces
$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}}\, du = \ln (u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C.$$
31. Una partícula se mueve sobre la recta $x = 1$ en un plano coordenado y con una velocidad proporcional a su distancia al origen. Exprese la ordenada de la partícula como una función del tiempo t (en segundos) suponiendo que la posición inicial de la partícula es $(1, 0)$ y que la velocidad inicial es 3 m/s.
32. En la figura se muestra un diagrama del problema del perro que sigue a su amo. El perro, que inicialmente se encontraba en el punto $(1, 0)$, ve a su amo en el punto $(0, 0)$, el cual camina a lo largo del eje y con velocidad constante. El perro corre directamente hacia él en todo momento con el doble de la velocidad con que se desplaza el amo. La ecuación diferencial que satisface la ecuación $y = f(x)$ que describe la trayectoria del perro es
$$2xy'' = \sqrt{1 + (y')^2}.$$
Resuelva esta ecuación definiendo $z = dy/dx$. Esto lleva a la ecuación $2xz' = \sqrt{1 + z^2}$ que al resolverse da $z = \frac{1}{2}[\sqrt{x} - (1/\sqrt{x})]$. Finalmente, determine $y' = \frac{1}{2}[\sqrt{x} - (1/\sqrt{x})]$.

EJERCICIO 32



8.9 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Límites de las funciones trigonométricas.
2. Fórmulas de derivación para las funciones trigonométricas.

3. Movimiento armónico simple.
4. Fórmulas de integración para las expresiones trigonométricas.
5. Funciones trigonométricas inversas.
6. Derivadas e integrales relacionadas con las funciones trigonométricas inversas.
7. Funciones hiperbólicas.
8. Funciones hiperbólicas inversas.

EJERCICIOS 8.9

s 1-6: Calcule el límite si es que existe.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen} x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+\operatorname{sen}^2 x}{4x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} 2x}{3x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x+3x-2}{5x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x+1-\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$

Ejercicios 7-50: Encuentre $f'(x)$ para la expresión $f(x)$ dada.

7. $\cos\sqrt{3x^2+x}$
8. $x^2\cot 2x$
9. $(\sec x+\tan x)^5$
10. $\sqrt[3]{x^3+\csc 6x}$
11. $x^2\operatorname{arcsec} x^2$
12. $\tan^{-1}(\ln 3x)$
13. $\dfrac{(3x+7)^4}{\operatorname{sen}^{-1} 5x}$
14. $\dfrac{\operatorname{sen} 8x}{4x^2-x}$
15. $(\cos x)^{x+1}$
16. $5^{\tan 2x}$
17. $\sqrt{2x^2+\operatorname{sech} 4x}$
18. $x\sec^{-1} 4x$
19. $\ln(\csc^3 2x)$
20. $\log(\sec 2x)$
21. $\dfrac{1}{2x+\sec^2 x}$
22. $\cot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\cot x}$
23. $e^{\cos x}+(\cos x)^e$
24. $\dfrac{\ln\operatorname{senh} x}{x}$
25. $\cosh e^{-5x}$
26. $(\cos x)^{\cot x}$
27. $\tanh^{-1}(\tanh\sqrt[3]{x})$
28. $\sec(\sec x)$
29. $2^{\arctan 2x}$
30. $(1+\operatorname{arcsec} 2x)^{\sqrt{2}}$
31. $\operatorname{sen}^3 e^{-2x}$
32. $\ln\operatorname{sen}(\pi/3)$
33. $e^{-x^2}\cot x^2$
34. $\sec 5x\tan 5x$
35. $\ln\tan^{-1} x^2$
36. $\dfrac{1-x^2}{\arccos x}$
37. $\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{1-x^2}$
38. $\sqrt{\operatorname{sen}^{-1}(1-x^2)}$
39. $\tan(\operatorname{sen} 3x)$
40. $\tan^{-1}\sqrt{\tan 2x}$
41. $(\tan x+\tan^{-1} x)^4$
42. $e^{4x}\sec^{-1} e^{4x}$
43. $\tan^{-1}(\tan^{-1} x)$
44. $e^{x\cosh x}$
45. $e^{-x}\operatorname{senh} e^{-x}$
46. $\ln\tanh(5x+1)$
47. $\dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x-\operatorname{senh} x}$
48. $\dfrac{1}{x}\tanh\dfrac{1}{x}$
49. $\operatorname{senh}^{-1} x^2$
50. $\cosh^{-1}\tan x$

Ejercicios 51-88: Evalúe la integral.

51. $\int\cos(5-3x)\,dx$
52. $\int\csc\dfrac{x}{2}\cot\dfrac{x}{2}\,dx$
53. $\int\dfrac{\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
54. $\int\dfrac{\sec(1/x)}{x^2}\,dx$
55. $\int(\cot 9x+\csc 9x)\,dx$
56. $\int x\csc^2(3x^2+4)\,dx$
57. $\int e^x\tan e^x\,dx$
58. $\int\cot 2x\csc 2x\,dx$
59. $\int(\csc 3x+1)^2\,dx$
60. $\int\dfrac{\operatorname{sen} x+1}{\cos x}\,dx$
61. $\int\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\tan 4x}\,dx$
62. $\int x\cos x^2\,dx$
63. $\int x^2\cos(2x^3)\,dx$
64. $\int_0^{\pi/4}\operatorname{sen} 2x\cos^2 2x\,dx$
65. $\int_0^{\pi/2}\cos x\sqrt{3+5\operatorname{sen} x}\,dx$
66. $\int_0^{\pi/4}D_x(x\operatorname{sen}^2 x)\,dx$
67. $\int\dfrac{\cos 3x}{\operatorname{sen}^3 3x}\,dx$
68. $\int\dfrac{\cos 2x}{1-2\operatorname{sen} 2x}\,dx$
69. $\int\dfrac{x}{4+9x^2}\,dx$
70. $\int\dfrac{1}{4+9x^2}\,dx$
71. $\int\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$
72. $\int\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$

73. $\int \frac{x}{\operatorname{sech} x^2}\,dx$

74. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}\,dx$

75. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

76. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

77. $\int \sec^2 x\,(1+\tan x)^2\,dx$

78. $\int (1+\cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx$

79. $\int \frac{\csc^2 x}{2+\cot x}\,dx$

80. $\int (\operatorname{sen} x)e^{\cos x+1}\,dx$

81. $\int \frac{\operatorname{senh}(\ln x)}{x}\,dx$

82. $\int \operatorname{sech}^2(1-2x)\,dx$

83. $\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$

84. $\int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$

85. $\int \frac{1}{x\sqrt{9-4x^2}}\,dx$

86. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-9}}\,dx$

87. $\int \frac{x}{\sqrt{25x^2+36}}\,dx$

88. $\int \frac{1}{\sqrt{25x^2+36}}\,dx$

89. Halle los puntos de la gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1} 3x$ en los que la recta tangente es paralela a la recta que pasa por $A(2, -3)$ y $B(4, 7)$.

90. Encuentre una ecuación para la recta tangente a la gráfica de $y = \pi \tan(y/x) + x^2 - 16$ en el punto $(4, \pi)$.

91. Determine los máximos y mínimos locales de $f(x) = 8\sec x + \csc x$ en el intervalo $(0, \pi/2)$ y describa dónde es creciente y decreciente $f(x)$ en ese intervalo.

92. Encuentre los puntos de inflexión y analice la concavidad de la gráfica de $y = x\operatorname{sen}^{-1} x$.

93. La región entre la gráfica de $y = \tan x$ y el eje x, entre $x = 0$ y $x = \pi/4$, gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante. (*Sugerencia:* $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.)

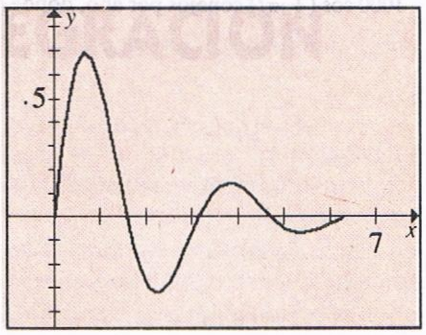
94. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $y = x/(1 + x^4)$, $x = 1$ y $y = 0$.

95. Las oscilaciones amortiguadas son oscilaciones en las que la amplitud disminuye debido a las fuerzas de fricción (véase la Sección 19.5). En la figura se muestra una gráfica generada por computadora de la oscilación amortiguada que se da por la ecuación $y = e^{-x/2}\operatorname{sen} 2x$.

(a) Encuentre las abscisas de los máximos y mínimos relativos para $0 \le x \le 2\pi$.

(b) Calcule aproximadamente las abscisas en la parte (a) con una precisión de dos decimales.

EJERCICIO 95



96. Use el Teorema del Valor Medio para demostrar que si u y v son dos números reales cualesquiera, entonces $|\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v| \le |u - v|$.

97. Una persona de pie en un suelo a nivel observa el ascenso vertical de un globo que se soltó desde un punto en tierra a 0.5 km del observador. El globo se eleva con velocidad constante de 2 m/s. Calcule la rapidez con la que el ángulo de elevación respecto al observador aumenta en el momento en que el globo se encuentra 100 m arriba del nivel de los ojos del observador.

98. Una pintura con forma cuadrada de 60 cm de largo, cuelga en una pared de manera que la base se encuentra a 1.8 m del suelo. Una persona cuyos ojos están a una altura de 1.5 m del piso, se acerca al cuadro a razón de 60 cm/s. Sea θ el ángulo entre las líneas visuales a la parte de abajo y a la parte de arriba del cuadro. Calcule (a) la rapidez con la que θ cambia cuando la persona está a 2.4 m de la pared y (b) la distancia a la pared para la que θ es mayor.

99. El proceso rítmico de respiración consta de intervalos alternantes de inhalación y exhalación. Un ciclo completo toma normalmente unos cinco segundos. Si V denota el volumen de aire en los pulmones al tiempo t, entonces dV/dt es el flujo del aire en la respiración.

(a) Suponga que la máxima rapidez de flujo es 0.6 L/s (litros por segundo) y encuentre una fórmula $dV/dt = a\operatorname{sen} bt$ que se ajuste a la información dada.

(b) Use la fórmula de la parte (a) para calcular la cantidad de aire inhalada en un ciclo.

100. Muchas poblaciones anuales tienen ciclos de fluctuación con un periodo de diez años. Suponga que la tasa de crecimiento de una población de ciertos conejos está dada por la fórmula $dN/dt = 1000 \cos\left(\frac{1}{5}\pi t\right)$ conejos por año, donde N denota el tamaño de la población al tiempo t (en años) y $t = 0$ corresponde al inicio del ciclo. Se estima que la población a los 5 años es de 3000 conejos. Encuentre una fórmula para N al tiempo t. Calcule la población máxima.

CAPÍTULO 9

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

En este capítulo se presentan métodos para evaluar integrales de muy diversos tipos. Se comienza con una lista de las integrales obtenidas previamente y que se usarán con frecuencia a lo largo del capítulo.

FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN

$$\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C, \quad n \neq -1 \qquad \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$$

$$\int e^u\,du = e^u + C \qquad \int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + C$$

$$\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C \qquad \int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C \qquad \int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C \qquad \int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C \qquad \int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$$

$$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C \qquad \int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\,du = \operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C \qquad \int \frac{1}{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C \qquad \int \frac{1}{u\sqrt{a^2-u^2}}\,du = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\frac{|u|}{a} + C$$

9.1 INTEGRACIÓN POR PARTES

El siguiente resultado es útil para simplificar ciertas integrales.

FÓRMULA DE INTEGRACIÓN POR PARTES (9.1)

Si $u = f(x)$, $v = g(x)$, y si f' y g' son continuas, entonces

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Demostración Por la Regla del Producto,

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

o, equivalentemente,

$$f(x)g'(x) = D_x[f(x)g(x)] - g(x)f'(x).$$

Integrando ambos lados de la ecuación anterior,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int D_x[f(x)g(x)]\,dx - \int g(x)f'(x)\,dx.$$

Por el Teorema (5.29) (ii), la primera integral del lado derecho es igual a $f(x)g(x) + C$. Como de la segunda integral se obtendrá otra constante de integración, se puede omitir C en esta fórmula, es decir,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx.$$

Puesto que $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$, esta fórmula puede escribirse como en (9.1). • •

Cuando se aplica la fórmula (9.1) a una integral, se empieza por hacer que una parte del integrando corresponda a dv. La expresión que se usa para dv debe incluir a la diferencial dx. Después de elegir dv, se toma u como el resto del integrando y se encuentra du. Como este procedimiento requiere partir en dos el integrando, la aplicación de (9.1) se llama **integración por partes**. Es muy importante elegir dv de manera apropiada. Normalmente se escoge la porción más complicada del integrando que se puede integrar directamente. Los siguientes ejemplos ilustran este método de integración.

EJEMPLO 1 Evaluar $\int xe^{2x}\,dx$.

Solución Hay cuatro elecciones posibles para dv, a saber, dx, $x\,dx$, $e^{2x}\,dx$ o $xe^{2x}\,dx$. Si tomamos $dv = e^{2x}\,dx$, entonces lo que queda del integrando debe ser u, es decir, $u = x$. Para encontrar v integramos dv, obteniendo $v = \frac{1}{2}e^{2x}$. Nótese que en este paso de la solución no se agrega una constante de integración. (En el Ejercicio 51 se pide demostrar que si se agregara una constante a v se obtendría el mismo resultado.) Como $u = x$, $du = dx$. Para referirnos a ellas fácilmente se muestran estas expresiones como sigue:

$$dv = e^{2x}\,dx \qquad u = x$$
$$v = \tfrac{1}{2}e^{2x} \qquad du = dx.$$

Sustituyendo lo anterior en la Fórmula (9.1), es decir, *integrando por partes*, obtenemos

$$\int xe^{2x}\,dx = x(\tfrac{1}{2}e^{2x}) - \int \tfrac{1}{2}e^{2x}\,dx.$$

La integral del lado derecho se puede evaluar usando el Teorema (7.22). Esto da

$$\int xe^{2x}\,dx = \tfrac{1}{2}xe^{2x} - \tfrac{1}{4}e^{2x} + C \quad \bullet$$

Se requiere mucha práctica para adquirir la habilidad de escoger apropiadamente dv. Por ejemplo, si se hubiese escogido $dv = x\,dx$ en el Ejemplo 1, habría sido necesario tomar $u = e^{2x}$, lo cual daría

$$dv = x\,dx \qquad u = e^{2x}$$
$$v = \tfrac{1}{2}x^2 \qquad du = 2e^{2x}\,dx.$$

Integrando por partes resulta

$$\int xe^{2x}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2e^{2x} - \int x^2e^{2x}\,dx.$$

Como el exponente de x aumentó, la integral del lado derecho es más complicada que la original. Esto indica que la elección de dv no es apropiada.

EJEMPLO 2 Evaluar $\int x \sec^2 x \, dx$.

Solución Como $\sec^2 x$ puede integrarse directamente, tomamos $dv = \sec^2 x \, dx$. El resto del integrando es x y, por lo tanto, debemos tomar $u = x$. Entonces,

$$dv = \sec^2 x \, dx \qquad u = x$$
$$v = \tan x \qquad du = dx.$$

e integrando por partes queda

$$\int x \sec^2 x \, dx = x \tan x - \int \tan x \, dx$$
$$= x \tan x - \ln |\sec x| + C. \quad \bullet$$

Si en el Ejemplo 2 se hubiese escogido $dv = x\,dx$ y $u = \sec^2 x$, entonces la fórmula de integración por partes (9.1) habría llevado a una integral más complicada. (Compruébelo.)

En el siguiente ejemplo se integra por partes para encontrar una antiderivada de la función logaritmo natural.

EJEMPLO 3 Evaluar $\int \ln x \, dx$.

Solución Sean

$$dv = dx \qquad u = \ln x$$
$$v = x \qquad du = \frac{1}{x}\, dx.$$

Integrando por partes:

$$\int \ln x \, dx = (\ln x)x - \int (x) \frac{1}{x} \, dx$$
$$= x \ln x - \int dx$$
$$= x \ln x - x + C. \quad \bullet$$

A veces, para resolver un problema, hay que integrar por partes más de una vez. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Determinar $\int x^2 e^{2x} \, dx$.

Solución Tomando

$$dv = e^{2x} \, dx \qquad u = x^2$$
$$v = \tfrac{1}{2} e^{2x} \qquad du = 2x \, dx$$

e integrando por partes:

$$\int x^2 e^{2x} \, dx = x^2(\tfrac{1}{2} e^{2x}) - \int (\tfrac{1}{2} e^{2x}) 2x \, dx$$
$$= \tfrac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} \, dx.$$

Para evaluar la integral del lado derecho de la ecuación anterior, debemos integrar por partes de nuevo. Procediendo como en el Ejemplo 1,

$$\int x^2e^{2x}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2e^{2x} - \tfrac{1}{2}xe^{2x} + \tfrac{1}{4}e^{2x} + C. \bullet$$

El siguiente ejemplo enseña un artificio muy útil para evaluar algunas integrales integrando por partes dos veces.

EJEMPLO 5 Evaluar $\int e^x \cos x\,dx$.

Solución Tomando

$$dv = \cos x\,dx \qquad u = e^x$$
$$v = \operatorname{sen} x \qquad du = e^x\,dx$$

e integrando por partes:

$$\text{(a)} \qquad \int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int (\operatorname{sen} x)e^x\,dx$$
$$= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Ahora integramos por partes la integral del lado derecho de la ecuación (a). Tomando

$$dv = \operatorname{sen} x\,dx \qquad u = e^x$$
$$v = -\cos x \qquad du = e^x\,dx$$

e integrando por partes,

$$\text{(b)} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x(-\cos x) - \int (-\cos x)e^x\,dx$$
$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx.$$

Sustituyendo ahora la ecuación (b) en el lado derecho de la ecuación (a), obtenemos

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx\right]$$

o bien $$\int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx.$$

Sumando $\int e^x \cos x\,dx$ a ambos lados,

$$2\int e^x \cos x\,dx = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x).$$

Finalmente, dividiendo ambos lados entre 2 y agregando la constante de integración,

$$\int e^x \cos x\,dx = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + C. \bullet$$

Al evaluar integrales como la del Ejemplo 5 hay que elegir con cuidado las sustituciones. Si al evaluar la integral del lado derecho de la ecuación (a) se hubiese usado

$$dv = e^x\,dx \qquad u = \operatorname{sen} x$$
$$v = e^x \qquad du = \cos x\,dx$$

al integrar por partes se habría obtenido

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = (\operatorname{sen} x)\, e^x - \int e^x \cos x\, dx$$

$$= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx.$$

Sustituyendo en (a),

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left[e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx\right]$$

lo que se reduce a

$$\int e^x \cos x\, dx = \int e^x \cos x\, dx.$$

Aunque esta igualdad es cierta, no es una solución del problema. Por cierto, la integral del Ejemplo 5 *puede* evaluarse usando $dv = e^x\, dx$ en las *dos* integraciones por partes.

EJEMPLO 6 Evaluar $\int \sec^3 x\, dx$. $uv - \int v\, du$

Solución Tomando

$$dv = \sec^2 x\, dx \qquad u = \sec x$$

$$v = \tan x \qquad du = \sec x \tan x\, dx$$

e integrando por partes:

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx.$$

En vez de integrar otra vez por partes, se cambia la forma de la integral del lado derecho aprovechando la identidad $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$. Esto da

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x\, (\sec^2 x - 1)\, dx$$

o bien $$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx.$$

Sumando $\int \sec^3 x\, dx$ a ambos lados de esta última ecuación obtenemos

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx.$$

Si ahora se evalúa $\int \sec x\, dx$ y se dividen entre 2 ambos miembros de la ecuación resultante (y luego se agrega la constante de integración) resulta

$$\int \sec^3 x\, dx = \tfrac{1}{2} \sec x \tan x + \tfrac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + C \quad \bullet$$

La integración por partes puede servir a veces para obtener **fórmulas de reducción** de algunas integrales. Dichas fórmulas pueden usarse para escribir una integral con alguna potencia de una cierta expresión, en términos de integrales con potencias menores de la misma expresión.

EJEMPLO 7 Encontrar una fórmula de reducción para $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$.

Solución Tomando

$$dv = \operatorname{sen} x\, dx \qquad u = \operatorname{sen}^{n-1} x$$

$$v = -\cos x \qquad du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x \cos x\, dx$$

e integrando por partes:

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\, dx.$$

Como $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, podemos escribir

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\, dx.$$

Por lo tanto,

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx + (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx.$$

El primer miembro de la ecuación anterior se reduce a $n \int \operatorname{sen}^n x\, dx$. Dividiendo ambos lados entre n,

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx \quad \bullet$$

EJEMPLO 8 Aplicar la fórmula de reducción del Ejemplo 7 para evaluar $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

Solución Usando la fórmula con $n = 4$ obtenemos

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = -\tfrac{1}{4}\cos x \operatorname{sen}^3 x + \tfrac{3}{4}\int \operatorname{sen}^2 x\, dx.$$

Aplicando la fórmula con $n = 2$ a la integral del lado derecho,

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\tfrac{1}{2}\cos x \operatorname{sen} x + \tfrac{1}{2}\int dx$$

$$= -\tfrac{1}{2}\cos x \operatorname{sen} x + \tfrac{1}{2}x + C.$$

Por tanto,

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = -\tfrac{1}{4}\cos x \operatorname{sen}^3 x - \tfrac{3}{8}\cos x \operatorname{sen} x + \tfrac{3}{8}x + D$$

donde $D = \tfrac{3}{4} C$. •

Es evidente que si se aplica suficientes veces la fórmula del Ejemplo 7, puede llegarse a evaluar $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ para cualquier entero positivo n, pues estas reducciones terminan en $\int \operatorname{sen} x\, dx$ o en $\int dx$; estas dos integrales se pueden evaluar directamente.

EJERCICIOS 9.1

Ejercicios 1-38: Evalúe la integral.

1. $\int xe^{-x}\, dx$

2. $\int x \operatorname{sen} x\, dx$

3. $\int x^2 e^{3x}\, dx$

4. $\int x^2 \operatorname{sen} 4x\, dx$

5. $\int x \cos 5x\, dx$

6. $\int xe^{-2x}\, dx$

7. $\int x \sec x \tan x\, dx$

8. $\int x \csc^2 3x\, dx$

9. $\int x^2 \cos x\,dx$ 10. $\int x^3 e^{-x}\,dx$

11. $\int \tan^{-1} x\,dx$ 12. $\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$

13. $\int \sqrt{x} \ln x\,dx$ 14. $\int x^2 \ln x\,dx$

15. $\int x \csc^2 x\,dx$ 16. $\int x \tan^{-1} x\,dx$

17. $\int e^{-x} \operatorname{sen} x\,dx$ 18. $\int e^{3x} \cos 2x\,dx$

19. $\int \operatorname{sen} x \ln \cos x\,dx$ 20. $\int_0^1 x^3 e^{-x^2}\,dx$

21. $\int \csc^3 x\,dx$ 22. $\int \sec^5 x\,dx$

23. $\int_0^1 \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ 24. $\int \operatorname{sen} \ln x\,dx$

25. $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} 2x\,dx$ 26. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} x \sec^2 x\,dx$

27. $\int x(2x+3)^{99}\,dx$ 28. $\int \dfrac{x^5}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$

29. $\int e^{4x} \operatorname{sen} 5x\,dx$ 30. $\int x^3 \cos(x^2)\,dx$

31. $\int (\ln x)^2\,dx$ 32. $\int x\,2^x\,dx$

33. $\int x^3 \operatorname{senh} x\,dx$ 34. $\int (x+4) \cosh 4x\,dx$

35. $\int \cos \sqrt{x}\,dx$ 36. $\int \cot^{-1} 3x\,dx$

37. $\int \cos^{-1} x\,dx$ 38. $\int (x+1)^{10}(x+2)\,dx$

Ejercicios 39-42: Use integración por partes para deducir la fórmula de reducción.

39. $\int x^m e^x\,dx = x^m e^x - m \int x^{m-1} e^x\,dx$

40. $\int x^m \operatorname{sen} x\,dx = -x^m \cos x + m \int x^{m-1} \cos x\,dx$

41. $\int (\ln x)^m\,dx = x(\ln x)^m - m \int (\ln x)^{m-1}\,dx$

42. $\int \sec^m x\,dx = \dfrac{\sec^{m-2} x \tan x}{m-1} + \dfrac{m-2}{m-1} \int \sec^{m-2} x\,dx$ para $m \neq 1$.

43. Use el Ejercicio 39 para evaluar $\int x^5 e^x\,dx$.

44. Emplee el Ejercicio 41 para evaluar $\int (\ln x)^4\,dx$.

45. Sea $f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x}$. Calcule el área de la región bajo la gráfica de f entre $x = 0$ y $x = \pi^2$.

46. La región entre la gráfica de $y = x\sqrt{\operatorname{sen} x}$ y el eje x, entre $x = 0$ y $x = \pi/2$, gira alrededor del eje x. Evalúe el volumen del sólido resultante.

47. La región acotada por las gráficas de $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = e$, gira alrededor del eje y. Calcule el volumen del sólido resultante.

48. La fuerza $f(x)$ que actúa en el punto con abscisa x de una recta coordenada l está dada por $f(x) = x^5\sqrt{x^3+1}$. Determine el trabajo realizado al mover un objeto de $x = 0$ a $x = 1$.

49. Los extremos de un abrevadero tienen la forma de la región que se encuentra entre la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y el eje x entre $x = \pi$ y $x = 2\pi$. Calcule la fuerza hidrostática total sobre uno de los lados cuando el abrevadero está lleno de agua.

50. La velocidad (al tiempo t) de un punto que se mueve sobre una recta coordenada es t/e^{2t} m/s. Calcule la posición al tiempo t si el punto se encuentra en el origen en $t = 0$.

51. Demuestre que cuando se aplica la Fórmula de Integración por Partes (9.1), se obtiene el mismo resultado si al integrar dv se toma $v + C$ en vez de v.

52. El razonamiento dado en el Capítulo 6 para justificar la fórmula para el cálculo de volúmenes por medio de envolventes cilíndricas (véase la Definición (6.7)) es incompleto porque no se demuestra que se obtiene el mismo resultado que cuando se usa el método de discos. Demuestre que si f es derivable y $f'(x) > 0$ en $[a, b]$ o $f'(x) < 0$ en $[a, b]$, entonces el volumen V del sólido que se obtiene al girar la región acotada por las gráficas de f, $x = a$ y $x = b$ alrededor del eje x que se obtiene usando el método de discos es igual al que se obtiene usando el método de envolventes o cortezas. (*Sugerencia:* Tome g como la función inversa de f e integre por partes $\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$.)

53. Analice la siguiente aplicación de la Fórmula (9.1).

Dada $\int (1/x)\,dx$, sea $dv = dx$ y $u = 1/x$, de manera que $v = x$ y $du = (-1/x^2)\,dx$. Entonces,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \left(\frac{1}{x}\right)x - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

o bien

$$\int \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx.$$

Por consiguiente, $0 = 1$.

54. Demuestre la fórmula

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du$$

de integración por partes para integrales definidas, análoga a la Fórmula (9.1), donde $u = f(x)$ y $v = g(x)$; a y b son los valores extremos de la variable x.

9.2 INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

En el Ejemplo 7 de la Sección 9.1 se obtuvo una fórmula de reducción para $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$. Algunas integrales de este tipo también se pueden evaluar sin integrar por partes. Si n es un entero positivo impar, se comienza escribiendo

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Como el entero $n - 1$ es par, se puede aplicar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para obtener una integral más fácil, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Evaluar $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$.

Solución Como se dijo en la discusión anterior,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x\,dx\\ &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x\,dx\\ &= \int (1-\cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\,dx\\ &= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\operatorname{sen} x\,dx.\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución

$$u = \cos x, \qquad du = -\operatorname{sen} x\,dx$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5 x\,dx &= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)(-\operatorname{sen} x)\,dx\\ &= -\int (1 - 2u^2 + u^4)\,du\\ &= -u + \tfrac{2}{3}u^3 - \tfrac{1}{5}u^5 + C\\ &= -\cos x + \tfrac{2}{3}\cos^3 x - \tfrac{1}{5}\cos^5 x + C\end{aligned}$$

Análogamente, para potencias impares de $\cos x$ se escribe

$$\int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x \cos x\,dx$$

y se utiliza el hecho de que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, para obtener una integral más sencilla.

Cuando el integrando es $\operatorname{sen}^n x$ o bien $\cos^n x$, para *n par*, las fórmulas para la mitad de un ángulo

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{o bien} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

pueden ayudar a simplificar el integrando.

EJEMPLO 2 Evaluar $\int \cos^2 x\, dx$.

Solución Usando la fórmula para la mitad de un ángulo,

$$\int \cos^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\, dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C \quad \bullet$$

EJEMPLO 3 Evaluar $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

Solución

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\, dx$$
$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx.$$

Aplicamos otra vez la fórmula para la mitad de un ángulo y escribimos

$$\cos^2 2x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 4x.$$

Sustituyendo en la última integral y simplificando queda

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \tfrac{1}{4}\int \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$
$$= \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C \quad \bullet$$

Las integrales en las que sólo aparecen productos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se pueden evaluar usando la siguiente guía.

GUÍA PARA EVALUAR INTEGRALES DE LA FORMA $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ (9.2)

1. Si m y n son ambos enteros pares, reducir los exponentes de $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ usando las fórmulas para la mitad de un ángulo.
2. Si n es impar, escribir la integral como

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-1} x \cos x\, dx$$

y expresar $\cos^{n-1} x$ en términos de $\operatorname{sen} x$ aprovechando la identidad trigonométrica $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Usar la sustitución $u = \operatorname{sen} x$ para evaluar la integral resultante.

3. Si m es un entero impar, escribir la integral como

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \int \operatorname{sen}^{m-1} x \cos^n x \sin x\, dx$$

y expresar $\operatorname{sen}^{m-1} x$ en términos de $\cos x$ aprovechando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$. Aplicar la sustitución $u = \cos x$ para evaluar la integral resultante.

EJEMPLO 4 Evaluar $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

Solución Usando el punto 2 de la Guía (9.2),

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \operatorname{sen}^4 x\, dx &= \int \cos^2 x \operatorname{sen}^4 x \cos x\, dx \\ &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}^4 x \cos x\, dx.\end{aligned}$$

Si tomamos $u = \operatorname{sen} x$, entonces $du = \cos x\, dx$ y la integral puede escribirse

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \operatorname{sen}^4 x\, dx &= \int (1 - u^2)u^4\, du = \int (u^4 - u^6)\, du \\ &= \tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{1}{7}u^7 + C \\ &= \tfrac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x - \tfrac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x + C\end{aligned}$$

GUÍA PARA EVALUAR INTEGRALES DE LA FORMA $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ (9.3)

1. Si n es un entero par, escribir la integral como
$$\int \tan^m x \sec^n x\, dx = \int \tan^m x \sec^{n-2} x \sec^2 x\, dx$$
y expresar $\sec^{n-2} x$ en términos de $\tan x$ aprovechando la identidad trigonométrica $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. Usar la sustitución $u = \tan x$ para evaluar la integral resultante.
2. Si m es un entero impar, escribir la integral como
$$\int \tan^m x \sec^n x\, dx = \int \tan^{m-1} x \sec^{n-1} x \sec x \tan x\, dx.$$
Como $m - 1$ es par, $\tan^{m-1} x$ puede expresarse en términos de $\sec x$ aprovechando la identidad trigonométrica $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$. Usar la sustitución $u = \sec x$ para evaluar la integral resultante.
3. Si m es par y n es impar, emplear otro método como, por ejemplo, integración por partes.

EJEMPLO 5 Evaluar $\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx$.

Solución Usando el punto 1 de la Guía (9.3),

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx &= \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx \\ &= \int \tan^2 x (\tan^2 x + 1) \sec^2 x\, dx.\end{aligned}$$

Si tomamos $u = \tan x$, entonces $du = \sec^2 x\, dx$, y

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx &= \int u^2(u^2 + 1)\, du = \int (u^4 + u^2)\, du \\ &= \tfrac{1}{5}u^5 + \tfrac{1}{3}u^3 + C = \tfrac{1}{5}\tan^5 x + \tfrac{1}{3}\tan^3 x + C.\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Evaluar $\int \tan^3 x \sec^5 x\, dx$.

Solución Usando el punto 2 de la Guía (9.3),

$$\int \tan^3 x \sec^5 x\, dx = \int \tan^2 x \sec^4 x (\sec x \tan x)\, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1) \sec^4 x (\sec x \tan x)\, dx.$$

Sustituyendo $u = \sec x$ y $du = \sec x \tan x\, dx$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \sec^5 x\, dx &= \int (u^2 - 1)u^4\, du \\ &= \int (u^6 - u^4)\, du \\ &= \tfrac{1}{7}u^7 - \tfrac{1}{5}u^5 + C \\ &= \tfrac{1}{7}\sec^7 x - \tfrac{1}{5}\sec^5 x + C. \bullet\end{aligned}$$

Las integrales de la forma $\int \cot^m x \csc^n x\, dx$ pueden evaluarse de manera parecida. Finalmente, las integrales de la forma $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx$, se pueden determinar usando las Fórmulas para Productos (8.13), como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7 Evaluar $\int \cos 5x \cos 3x\, dx$.

Solución Aplicando la Fórmula para Productos (8.13) a $\cos u \cos v$, obtenemos

$$\cos 5x \cos 3x = \tfrac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \cos 5x \cos 3x\, dx &= \tfrac{1}{2}\int (\cos 8x + \cos 2x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{16}\operatorname{sen} 8x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C \bullet\end{aligned}$$

EJERCICIOS 9.2

Ejercicios 1-30: Evalúe la integral.

1. $\int \cos^3 x\, dx$
2. $\int \operatorname{sen}^2 2x\, dx$
3. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$
4. $\int \cos^7 x\, dx$
5. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx$
6. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x\, dx$
7. $\int \operatorname{sen}^6 x\, dx$
8. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx$
9. $\int \tan^3 x \sec^4 x\, dx$
10. $\int \sec^6 x\, dx$
11. $\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx$
12. $\int \tan^5 x \sec x\, dx$
13. $\int \tan^6 x\, dx$
14. $\int \cot^4 x\, dx$
15. $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\, \cos^3 x\, dx$
16. $\int \dfrac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx$
17. $\int (\tan x + \cot x)^2\, dx$
18. $\int \cot^3 x \csc^3 x\, dx$
19. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^3 x\, dx$
20. $\int_0^1 \tan^2 (\tfrac{1}{4}\pi x)\, dx$
21. $\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x\, dx$
22. $\int_0^{\pi/4} \cos x \cos 5x\, dx$
23. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 3x \cos 2x\, dx$
24. $\int \operatorname{sen} 4x \cos 3x\, dx$
25. $\int \csc^4 x \cot^4 x\, dx$

26. $\int (1+\sqrt{\cos x})^2 \operatorname{sen} x\, dx$

27. $\int \dfrac{\cos x}{2-\operatorname{sen} x}\, dx$

28. $\int \dfrac{\tan^2 x - 1}{\sec^2 x}\, dx$

29. $\int \dfrac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}\, dx$

30. $\int \dfrac{\sec x}{\cot^5 x}\, dx$

31. La región acotada por el eje x y la gráfica de $y = \cos^2 x$ entre $x = 0$ y $x = 2\pi$, gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

32. La región acotada por las gráficas de $y = \tan^2 x$ y $y = 0$, entre $x = 0$ y $x = \pi/4$, gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

33. La velocidad (al tiempo t) de un punto que se mueve sobre una recta coordenada se expresa por $\cos^2 \pi t$ m/s. ¿Qué distancia recorre el punto en 5 s?

34. La aceleración (al tiempo t) de un punto que se mueve sobre una recta coordenada se expresa por $\operatorname{sen}^2 t \cos t$ m/s^2. En $t = 0$ el punto se encuentra en el origen y su velocidad es 10 m/s. Calcule su posición al tiempo t.

35. (a) Demuestre que si m y n son enteros positivos,

$$\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} - \dfrac{\operatorname{sen}(m+n)x}{2(m+n)} + C & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2mx}{4m} + C & \text{si } m = n \end{cases}$$

(b) Deduzca fórmulas análogas a las de la parte (a) para

$$\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx$$

y

$$\int \cos mx \cos nx\, dx.$$

36. (a) Use la parte (a) del Ejercicio 35 para demostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$$

(b) Evalúe

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx$

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx$

9.3 SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Si un integrando contiene una de las expresiones $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ o bien $\sqrt{x^2 - a^2}$, donde $a > 0$, se puede eliminar el radical haciendo una de las sustituciones trigonométricas de la siguiente lista.

SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS (9.4)

Expresión en el integrando	Sustitución trigonométrica
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$

Al hacer una sustitución de este tipo se supone que θ está en el contradominio de la función trigonométrica inversa correspondiente. Así, para la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$, se tiene que $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. En este caso, $\cos \theta \geq 0$ y

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \\ &= a \cos \theta. \end{aligned}$$

Si $\sqrt{a^2 - x^2}$ aparece en el denominador se agrega la restricción $|x| \neq a$, o equivalentemente, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

EJEMPLO 1 Evaluar $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{16 - x^2}}\,dx$.

Solución El integrando contiene $\sqrt{16 - x^2}$, que es de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$ con $a = 4$. Entonces por (9.4), tomamos

$$x = 4 \operatorname{sen} \theta \quad \text{para } -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

Resulta que

$$\sqrt{16 - x^2} = \sqrt{16 - 16 \operatorname{sen}^2 \theta} = 4\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} = 4\sqrt{\cos^2 \theta} = 4 \cos \theta.$$

Como $x = 4 \operatorname{sen} \theta$, $dx = 4 \cos \theta \, d\theta$. Reemplazando en la integral dada,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2\sqrt{16 - x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{(16 \operatorname{sen}^2 \theta) 4 \cos \theta}\, 4 \cos \theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{16} \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{16} \int \csc^2 \theta \, d\theta \\
&= -\frac{1}{16} \cot \theta + C.
\end{aligned}$$

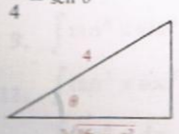
Ahora hay que expresar esto en términos de la variable de integración original x. Como $\theta = \operatorname{arcsen}(x/4)$, podríamos escribir $-\frac{1}{16} \cot \theta$ como $-\frac{1}{16} \cot \operatorname{arcsen}(x/4)$. Sin embargo, como el integrando contiene $\sqrt{16 - x^2}$ y no tiene funciones trigonométricas, es deseable que el resultado tampoco tenga funciones trigonométricas y que quede expresado en términos del radical. Hay un método geométrico sencillo para hacer esto. Si $0 < \theta < \pi/2$ y $\operatorname{sen} \theta = x/4$, el ángulo θ puede interpretarse como uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo con cateto opuesto e hipotenusa de longitudes x y 4, respectivamente (véase la Figura 9.1). Por el Teorema de Pitágoras, la longitud del cateto adyacente es $\sqrt{16 - x^2}$. Haciendo referencia al triángulo,

$$\cot \theta = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}.$$

Puede demostrarse que esta fórmula es válida también para $-\pi/2 < \theta < 0$. Entonces, la Figura 9.1 se puede utilizar para θ positivo o negativo.

FIGURA 9.1

$\frac{x}{4} = \operatorname{sen} \theta$



Substituyendo $\cot \theta$ por $\sqrt{16 - x^2}/x$ en la evaluación de la integral,

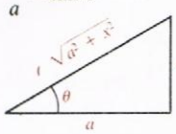
$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2\sqrt{16 - x^2}}\,dx &= -\frac{1}{16} \cdot \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} + C \\
&= -\frac{\sqrt{16 - x^2}}{16x} + C
\end{aligned}$$

Si un integrando contiene $\sqrt{a^2 + x^2}$, con $a > 0$, entonces la sustitución indicada en (9.4), $x = a \tan \theta$ elimina el radical. Cuando se emplea esta técnica se supone que θ está en el contradominio de la función inversa de la tangente, es decir, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. En tal caso, $\sec \theta > 0$ y

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + x^2} &= \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 + \tan^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} \\ &= a \sec \theta.\end{aligned}$$

FIGURA 9.2

$\dfrac{x}{a} = \tan \theta$



Después de hacer la sustitución y evaluar la integral trigonométrica resultante, hay que expresar el resultado en términos de la variable x. Las fórmulas anteriores muestran que

$$\tan \theta = \frac{x}{a} \quad \text{y} \quad \sec \theta = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}$$

Como en la solución del Ejemplo 1, la relación entre las funciones trigonométricas de θ y x pueden encontrarse haciendo referencia al triángulo de la Figura 9.2, tanto si θ es positivo como negativo.

EJEMPLO 2 Evaluar $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}\, dx.$

Solución El integrando contiene $\sqrt{4 + x^2}$, que es de la forma $\sqrt{a^2 + x^2}$ con $a = 2$. Entonces por (9.4), hacemos la sustitución:

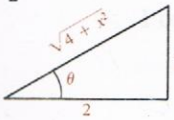
$$x = 2 \tan \theta, \qquad dx = 2 \sec^2 \theta\, d\theta$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{4 + x^2} = \sqrt{4 + 4 \tan^2 \theta} = 2\sqrt{1 + \tan^2 \theta} = 2\sqrt{\sec^2 \theta} = 2 \sec \theta$$

FIGURA 9.3

$\dfrac{x}{2} = \tan \theta$



$$\int \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}\, dx = \int \frac{1}{2 \sec \theta}\, 2 \sec^2 \theta\, d\theta$$

y

$$= \int \sec \theta\, d\theta$$

$$= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C.$$

Como $\tan \theta = x/2$, del triángulo de la Figura 9.3 se ve que

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2}$$

y por tanto,

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}\, dx = \ln \left| \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2} + \frac{x}{2} \right| + C.$$

La expresión del lado derecho se puede escribir

$$\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}+x}{2}\right| + C = \ln\left|\sqrt{4+x^2}+x\right| - \ln 2 + C.$$

Como $\sqrt{4+x^2} + x > 0$ para todo x, el símbolo de valor absoluto puede omitirse. Si se define también $D = -\ln 2 + C$, entonces

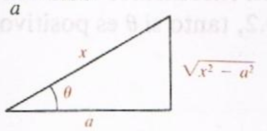
$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx = \ln\left(\sqrt{4+x^2} + x\right) + D \quad \bullet$$

Si un integrando contiene $\sqrt{x^2 - a^2}$, se efectúa el reemplazo indicado en (9.4) $x = a \sec\theta$, donde θ se escoge en el contradominio de la función inversa de la secante; es decir, $0 \le \theta < \pi/2$ o bien $\pi \le \theta < 3\pi/2$. En este caso, $\tan\theta \ge 0$ y

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}\\ &= \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)}\\ &= \sqrt{a^2\tan^2\theta}\\ &= a\tan\theta.\end{aligned}$$

FIGURA 9.4

$\frac{x}{a} = \sec\theta$



Como $\quad \sec\theta = \dfrac{x}{a} \quad$ y $\quad \tan\theta = \dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$

resulta que para cambiar de la variable θ a la x puede utilizarse el triángulo de la Figura 9.4.

EJEMPLO 3 Evaluar $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\, dx.$

Solución El integrando contiene $\sqrt{x^2 - 9}$, que es de la forma $\sqrt{x^2 - a^2}$ con $a = 3$. Hacemos la sustitución indicada en (9.4):

$$x = 3\sec\theta, \qquad dx = 3\sec\theta\tan\theta\, d\theta.$$

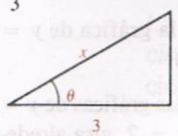
Por lo tanto,

$$\sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{9\sec^2\theta - 9} = 3\sqrt{\sec^2\theta - 1} = 3\sqrt{\tan^2\theta} = 3\tan\theta$$

y entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\, dx &= \int \frac{3\tan\theta}{3\sec\theta}\, 3\sec\theta\tan\theta\, d\theta\\ &= 3\int \tan^2\theta\, d\theta\\ &= 3\int (\sec^2\theta - 1)\, d\theta - 3\int \sec^2\theta\, d\theta - 3\int d\theta\\ &= 3\tan\theta - 3\theta + C.\end{aligned}$$

FIGURA 9.5
$\frac{x}{3} = \sec\theta$



Como $\sec\theta = x/3$, se tiene que $\theta = \sec^{-1}(x/3)$. Empleando el triángulo de la Figura 9.5 se ve también que $\tan\theta = \sqrt{x^2-9}/3$. Por lo tanto,

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx = 3\,\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} - 3\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

$$= \sqrt{x^2-9} - 3\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C \quad \bullet$$

Para simplificar ciertas integrales pueden usarse también las funciones hiperbólicas. Por ejemplo, $\cosh^2 u = 1 + \operatorname{senh}^2 u$ y por lo tanto, si un integrando contiene la expresión $\sqrt{a^2+x^2}$, la sustitución $x = a\operatorname{senh} u$ lleva a

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+x^2} &= \sqrt{a^2 + a^2\operatorname{senh}^2 u}\\ &= \sqrt{a^2(1+\operatorname{senh}^2 u)}\\ &= \sqrt{a^2\cosh^2 u}\\ &= a\cosh u.\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Evaluar $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$ usando funciones hiperbólicas.

Solución hiperbólica La integral es la misma que la del Ejemplo 2. Se realiza la sustitución

$$x = 2\operatorname{senh} u, \qquad dx = 2\cosh u\,du.$$

Resulta entonces que

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+4\operatorname{senh}^2 u} = \sqrt{4\cosh^2 u} = 2\cosh u$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{2\cosh u}\,2\cosh u\,du\\ &= \int du = u + C\\ &= \operatorname{senh}^{-1}(x/2) + C.\end{aligned}$$

Por el Teorema (8.36) vemos que esta solución es equivalente a la del Ejemplo 2. •

Estos nuevos métodos de integración no reemplazan a los anteriores, los cuales hay que tenerlos presentes siempre. Por ejemplo, la integral $\int (x/\sqrt{9+x^2})\,dx$ puede evaluarse por medio de la sustitución trigonométrica $x = 3\tan\theta$, pero es más fácil usar la sustitución algebraica $u = 9 + x^2$ y $du = 2x\,dx$, pues de esta manera la integral toma la forma $\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du$ que es posible integrar directamente por medio de la Regla de la Potencia. En los ejercicios siguientes hay algunas integrales que se pueden evaluar con métodos de integración más sencillos que el de sustitución trigonométrica.

EJERCICIOS 9.3

Ejercicios 1-22: Evalúe la integral.

1. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$
2. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$
3. $\int \frac{1}{x\sqrt{9+x^2}}\,dx$
4. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}\,dx$
5. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-25}}\,dx$
6. $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-25}}\,dx$
7. $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$
8. $\int \frac{x}{x^2+9}\,dx$
9. $\int \frac{1}{(x^2-1)^{3/2}}\,dx$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-25}}\,dx$
11. $\int \frac{1}{(36+x^2)^2}\,dx$
12. $\int \frac{1}{(16-x^2)^{5/2}}\,dx$
13. $\int \sqrt{9-4x^2}\,dx$
14. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$
15. $\int \frac{x}{(16-x^2)^2}\,dx$
16. $\int x\sqrt{x^2-9}\,dx$
17. $\int \frac{x^3}{\sqrt{9x^2+49}}\,dx$
18. $\int \frac{1}{x\sqrt{25x^2+16}}\,dx$
19. $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-3}}\,dx$
20. $\int \frac{x^2}{(1-9x^2)^{3/2}}\,dx$
21. $\int \frac{(4+x^2)^2}{x^3}\,dx$
22. $\int \frac{3x-5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

23.-28. Use sustituciones trigonométricas para obtener las fórmulas en los Teoremas (8.28) y (8.29).

29. La región acotada por las gráficas de $y = 0$, $x = 5$, $y = x(x^2+25)^{-1/2}$, gira alrededor del eje y. Calcule el volumen del sólido resultante.

30. Determine el área de la región acotada por la gráfica de $y = x^3(10-x^2)^{-1/2}$, el eje x y la recta $x = 1$.

31. Calcule la longitud de arco de la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$, entre $A(0, 0)$ y $B(2, 2)$.

32. La región que está acotada por las gráficas de $y = 1/(x^2+1)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 2$, gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

33. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x^2+4}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$.

34. Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de $4x^2 + y^2 = 16$.

35. Sean $y = f(x)$ y $x\,dy - \sqrt{x^2-16}\,dx = 0$. Encuentre $f(x)$ suponiendo que $f(4) = 0$.

36. Suponga que dos variables x y y están relacionadas de manera que $\sqrt{1-x^2}\,dy = x^3\,dx$. Exprese y como una función de x considerando que $y = 0$ cuando $x = 0$.

Ejercicios 37-40: Evalúe la integral mediante una sustitución hiperbólica.

37. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{25+x^2}}\,dx$

38. $\int \frac{x^2}{(x^2+9)^{3/2}}\,dx$

39. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (*Sugerencia:* Tome $x = \tanh u$ y use (8.33).)

40. $\int \frac{1}{16-x^2}\,dx$

Ejercicios 41-46: Use una sustitución trigonométrica para demostrar la fórmula de la Tabla de Integrales indicada (véase el Apéndice IV).

41. Fórmula 21
42. Fórmula 27
43. Fórmula 31
44. Fórmula 36
45. Fórmula 41
46. Fórmula 44

9.4 INTEGRALES DE LAS FUNCIONES RACIONALES

Si q es una función racional, entonces $q(x) = f(x)/g(x)$, donde $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios. En esta sección se dan reglas para evaluar $\int q(x)\,dx$. Consideremos el ejemplo específico $q(x) = 2/(x^2-1)$. Puede verificarse fácilmente que

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}$$

La expresión al lado derecho de la ecuación se llama *descomposición en fracciones parciales* de $2/(x^2-1)$. Para evaluar $\int [2/(x^2-1)]\, dx$, basta integrar cada una de las fracciones de la descomposición, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x^2-1}\, dx &= \int \frac{1}{x-1}\, dx + \int \frac{-1}{x+1}\, dx \\ &= \ln|x-1| - \ln|x+1| + C \\ &= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.\end{aligned}$$

Teóricamente *cualquier* expresión racional $f(x)/g(x)$ se puede expresar como una suma de expresiones racionales cuyos denominadores son potencias de polinomios de grado menor o igual que 2. Concretamente, puede demostrarse que si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios *y el grado de* $f(x)$ *es menor que el de* $g(x)$, entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} = F_1 + F_2 + \cdots + F_r$$

donde cada término F_k de la suma es de la forma

$$\frac{A}{(px+q)^m} \quad \text{o bien} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$$

A y B son números reales, m y n son enteros no negativos y $ax^2 + bx + c$ es **irreducible**, en el sentido de que es un polinomio cuadrático que no tiene ceros reales; es decir, $b^2 - 4ac < 0$. En este caso, $ax^2 + bx + c$ no se puede expresar como un producto de dos polinomios de primer grado.

La suma $F_1 + F_2 + \cdots + F_r$ es la **descomposición en fracciones parciales** de $f(x)/g(x)$ y cada F_k se llama **fracción parcial**. No demostraremos este resultado algebraico pero sí se dará una guía para obtener tal descomposición.

La guía para obtener la descomposición en fracciones parciales de $f(x)/g(x)$ debe usarse sólo si $f(x)$ tiene grado menor que $g(x)$. Si no es así, hay que dividir un polinomio entre el otro hasta llegar a la forma apropiada. Por ejemplo, dada

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1}$$

dividiendo los polinomios se obtiene

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1} = x - 6 + \frac{6x - 9}{x^2 - 1}.$$

Realizado lo precedente se puede encontrar la descomposición en fracciones parciales de $(6x-9)/(x^2-1)$.

GUÍA PARA OBTENER LA DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES DE $f(x)/g(x)$ (9.5)

1. Si el grado de $f(x)$ no es menor que el de $g(x)$, dividir los polinomios para obtener la forma apropiada.
2. Expresar $g(x)$ como un producto de factores lineales $px + q$ o formas cuadráticas irreducibles $ax^2 + bx + c$, y agrupar los factores repetidos para que $g(x)$ quede expresado como un producto de factores *distintos* de la forma $(px + q)^m$ o bien $(ax^2 + bx + c)^n$, con m y n enteros no negativos.
3. Aplicar las siguientes reglas.

REGLA (a) Por cada factor de la forma $(px + q)^m$ con $m \geq 1$, la descomposición en fracciones parciales contiene una suma de m fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1}{px+q} + \frac{A_2}{(px+q)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(px+q)^m}$$

donde cada numerador A_k es un número real.

REGLA (b) Por cada factor $(ax^2 + bx + c)^n$, $n \geq 1$, donde $ax^2 + bx + c$, es irreducible, la descomposición en fracciones parciales contiene una suma de n fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

donde todos los A_k y B_k son números reales.

EJEMPLO 1 Evaluar $\displaystyle\int \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x}\,dx.$

Solución El denominador del integrando puede factorizarse como $x(x + 3)(x - 1)$. Cada factor tiene la forma apropiada para que se aplique la Regla (a) de (9.5), con $m = 1$. Entonces al factor x le corresponde una fracción parcial de la forma A/x. Análogamente, a los factores $x + 3$ y $x - 1$ les corresponden fracciones parciales $B/(x + 3)$ y $C/(x - 1)$, respectivamente. Entonces, la descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}.$$

Multiplicando por el mínimo común denominador (el del lado izquierdo), obtenemos

$$(*) \qquad 4x^2 + 13x - 9 = A(x+3)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+3),$$

donde el símbolo (*) servirá para referencia posterior. En un caso como éste, en que los factores son lineales y no se repiten, los valores de A, B y C pueden encontrarse sustituyendo x por valores que hagan que varios de los factores sean cero. Tomando $x = 0$ en (*), se tiene que

$$-9 = -3A \quad \text{o bien} \quad A = 3.$$

Tomando $x = 1$ en (*), obtenemos

$$8 = 4C \quad \text{o bien} \quad C = 2.$$

Finalmente, si $x = -3$ entonces

$$-12 = 12B \quad \text{o bien} \quad B = -1.$$

Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x(x+3)(x-1)} = \frac{3}{x} + \frac{-1}{x+3} + \frac{2}{x-1}.$$

Integrando y denotando por K la suma de las constantes de integración,

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2 + 13x - 9}{x(x+3)(x-1)}\,dx &= \int \frac{3}{x}\,dx + \int \frac{-1}{x+3}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx \\ &= 3\ln|x| - \ln|x+3| + 2\ln|x-1| + K \\ &= \ln|x^3| - \ln|x+3| + \ln|x-1|^2 + K \\ &= \ln\left|\frac{x^3(x-1)^2}{x+3}\right| + K\end{aligned}$$

Otro método para calcular A, B y C es comparar los coeficientes de las potencias de x. Si desarrollamos el lado derecho de (*) y agrupamos los términos con la misma potencia en x, obtenemos

$$4x^2 + 13x - 9 = (A + B + C)x^2 + (2A - B + 3C)x - 3A.$$

Ahora se utiliza el hecho de que si los dos polinomios son iguales, entonces los coeficientes de las mismas potencias son iguales. Así,

$$\begin{aligned} A + B + C &= 4 \\ 2A - B + 3C &= 13 \\ -3A &= -9 \end{aligned}$$

Podemos demostrar que la solución de este sistema de ecuaciones es $A = 3$, $B = -1$ y $C = 2$. •

EJEMPLO 2 Evaluar $\displaystyle\int \frac{3x^3 - 18x^2 + 29x - 4}{(x+1)(x-2)^3}\,dx.$

Solución Por la Regla (a) de (9.5), hay una fracción parcial de la forma $A/(x + 1)$ correspondiente al factor $x + 1$ en el denominador del integrando. Para el factor

$(x-2)^3$, se aplica la Regla (a) (con $m = 3$) y se obtiene la suma de tres fracciones parciales $B/(x-2)$, $C/(x-2)^2$ y $D/(x-2)^3$. Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{3x^3 - 18x^2 + 29x - 4}{(x+1)(x-2)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}.$$

Multiplicando ambos lados por $(x+1)(x-2)^3$,

$$(*) \qquad 3x^3 - 18x^2 + 29x - 4 = A(x-2)^3 + B(x+1)(x-2)^2 + C(x+1)(x-2) + D(x+1).$$

Dos de las constantes se pueden obtener fácilmente. Si tomamos $x = 2$ en (*), entonces

$$24 - 72 + 58 - 4 = 3D, \qquad 6 = 3D \qquad \text{y} \qquad D = 2.$$

Análogamente, tomando $x = -1$ en (*),

$$-3 - 18 - 29 - 4 = -27A, \qquad -54 = -27A \qquad \text{y} \qquad A = 2.$$

Es posible determinar las otras constantes comparando coeficientes. Desarrollando el lado derecho de (*) y agrupando las potencias iguales de x, vemos que el coeficiente de x^3 es $A + B$. Esto debe ser igual al coeficiente de x^3 en el lado izquierdo, es decir,

$$A + B = 3.$$

Como $A = 2$, resulta que $B = 3 - A = 3 - 2 = 1$. Finalmente, se comparan los términos constantes en (*) tomando $x = 0$. Esto da

$$-4 = -8A + 4B - 2C + D.$$

Sustituyendo los valores encontrados de A, B y D, se llega a

$$-4 = -16 + 4 - 2C + 2$$

que da la solución $C = -3$. Entonces, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{3x^3 - 18x^2 + 29x - 4}{(x+1)(x-2)^3} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{-3}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^3}.$$

Para evaluar la integral dada integramos cada una de las fracciones parciales del lado derecho de esta última ecuación y así

$$2 \ln|x+1| + \ln|x-2| + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + K$$

donde K es la suma de las cuatro constantes de integración. Lo anterior puede escribirse en la forma

$$\ln\left[(x+1)^2|x-2|\right] + \frac{3x-7}{(x-2)^2} + K \; •$$

EJEMPLO 3 Evaluar $\int \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}\,dx.$

Solución El denominador puede factorizarse como sigue:

$$2x^3 - x^2 + 8x - 4 = x^2(2x - 1) + 4(2x - 1) = (x^2 + 4)(2x - 1).$$

Aplicando la Regla (b) de (9.5) al factor cuadrático irreducible $x^2 + 4$, vemos que una de las fracciones parciales tiene la forma $(Ax + B)/(x^2 + 4)$. Por la Regla (a), también hay una fracción parcial $C/(2x - 1)$ correspondiente al factor $2x - 1$. Por lo cual,

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{2x - 1}.$$

Como en los ejemplos anteriores, esto lleva a

$$(*) \qquad x^2 - x - 21 = (Ax + B)(2x - 1) + C(x^2 + 4).$$

Sustituyendo $x = \frac{1}{2}$, obtenemos $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 21 = \frac{17}{4}C$, que tiene la solución $C = -5$. Las otras constantes se pueden encontrar comparando coeficientes. Reordenando el lado derecho de (*), obtenemos

$$x^2 - x - 21 = (2A + C)x^2 + (-A + 2B)x - B + 4C.$$

Al comparar los coeficientes de x^2 vemos que $2A + C = 1$. Como $C = -5$, resulta que $2A = 6$ y así $A = 3$. Análogamente, comparando los términos constantes, $-B + 4C = -21$ y por lo tanto, $-B - 20 = -21$ o bien $B = 1$. Entonces, la descomposición del integrando en fracciones parciales es

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 4} + \frac{-5}{2x - 1}$$

$$= \frac{3x}{x^2 + 4} + \frac{1}{x^2 + 4} - \frac{5}{2x - 1}.$$

La integral dada puede evaluarse ahora integrando el segundo miembro de la última ecuación. Esto da

$$\frac{3}{2}\ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} - \frac{5}{2}\ln|2x - 1| + K \quad \bullet$$

EJEMPLO 4 Evaluar $\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2}\,dx.$

Solución Aplicando la Regla (b) de (9.5) con $n = 2$,

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

y, por lo tanto,

$$5x^3 - 3x^2 + 7x - 3 = (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D$$

o bien

$$5x^3 - 3x^2 + 7x - 3 = Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D).$$

Comparando los coeficientes de x^3 y x^2, obtenemos $A = 5$ y $B = -3$. De los coeficientes de x resulta que $A + C = 7$ o bien $C = 7 - A = 7 - 5 = 2$. Finalmente, los términos constantes dan $B + D = -3$ o bien $D = -3 - B = -3 - (-3) = 0$. Por lo tanto,

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{5x - 3}{x^2 + 1} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{5x}{x^2 + 1} - \frac{3}{x^2 + 1} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Integrando resulta

$$\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2}\,dx = \frac{5}{2}\ln(x^2 + 1) - 3\tan^{-1} x - \frac{1}{x^2 + 1} + K \quad \bullet$$

EJERCICIOS 9.4

Ejercicios 1-32: Evalúe la integral.

1. $\int \frac{5x - 12}{x(x - 4)}\,dx$
2. $\int \frac{x + 34}{(x - 6)(x + 2)}\,dx$
3. $\int \frac{37 - 11x}{(x + 1)(x - 2)(x - 3)}\,dx$
4. $\int \frac{4x^2 + 54x + 134}{(x - 1)(x + 5)(x + 3)}\,dx$
5. $\int \frac{6x - 11}{(x - 1)^2}\,dx$
6. $\int \frac{-19x^2 + 50x - 25}{x^2(3x - 5)}\,dx$
7. $\int \frac{x + 16}{x^2 + 2x - 8}\,dx$
8. $\int \frac{11x + 2}{2x^2 - 5x - 3}\,dx$
9. $\int \frac{5x^2 - 10x - 8}{x^3 - 4x}\,dx$
10. $\int \frac{4x^2 - 5x - 15}{x^3 - 4x^2 - 5x}\,dx$
11. $\int \frac{2x^2 - 25x - 33}{(x + 1)^2(x - 5)}\,dx$
12. $\int \frac{2x^2 - 12x + 4}{x^3 - 4x^2}\,dx$
13. $\int \frac{9x^4 + 17x^3 + 3x^2 - 8x + 3}{x^5 + 3x^4}\,dx$
14. $\int \frac{5x^2 + 30x + 43}{(x + 3)^3}\,dx$
15. $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 63}{(x^2 - 9)^2}\,dx$
16. $\int \frac{1}{(x - 7)^5}\,dx$
17. $\int \frac{5x^2 + 11x + 17}{x^3 - 5x^2 + 4x + 20}\,dx$
18. $\int \frac{4x^3 - 3x^2 + 6x - 27}{x^4 + 9x^2}\,dx$
19. $\int \frac{x^2 + 3x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx$
20. $\int \frac{4x}{(x^2 + 1)^3}\,dx$
21. $\int \frac{2x^3 + 10x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

22. $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 4x + 1}{(x^2 + 1)^3}\, dx$

23. $\int \frac{x^3 + 3x - 2}{x^2 - x}\, dx$

24. $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 3}{x^3 - 4x}\, dx$

25. $\int \frac{x^6 - x^3 + 1}{x^4 + 9x^2}\, dx$

26. $\int \frac{x^5}{(x^2 + 4)^2}\, dx$

27. $\int \frac{2x^3 - 5x^2 + 46x + 98}{(x^2 + x - 12)^2}\, dx$

28. $\int \frac{-2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{x^2(x + 1)^3}\, dx$

29. $\int \frac{4x^3 + 2x^2 - 5x - 18}{(x - 4)(x + 1)^3}\, dx$

30. $\int \frac{10x^2 + 9x + 1}{2x^3 + 3x^2 + x}\, dx$

31. $\int \frac{2x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 5x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}\, dx$

32. $\int \frac{x^5 - x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 15x + 5}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)}\, dx$

Ejercicios 33-36: Use fracciones parciales para evaluar la integral (véanse las Fórmulas 19, 49, 50 y 52 de la Tabla de Integrales en el Apéndice IV).

33. $\int \frac{1}{a^2 - u^2}\, du$

34. $\int \frac{1}{u(a + bu)}\, du$

35. $\int \frac{1}{u^2(a + bu)}\, du$

36. $\int \frac{1}{u(a + bu)^2}\, du$

37. Sea $f(x) = x/(x^2 - 2x - 3)$. Calcule el área de la región bajo la gráfica de f entre $x = 0$ y $x = 2$.

38. La región delimitada por las gráficas de $y = 1/(x - 1)(4 - x)$, $y = 0$, $x = 2$ y $x = 3$ gira alrededor del eje y. Calcule el volumen del sólido resultante.

39. La región descrita en el Ejercicio 38 gira ahora alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

40. La velocidad (al tiempo t) de una partícula (punto) que se mueve sobre una recta coordenada es $(t + 3)/(t^3 + t)$ m/s. ¿Qué distancia recorre el punto durante el intervalo de tiempo $[1, 2]$?

41. Como una alternativa a las fracciones parciales, demuestre que una integral de la forma

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx}\, dx$$

puede evaluarse escribiéndola como

$$\int \frac{(1/x^2)}{a + (b/x)}\, dx$$

y usando la sustitución $u = a + (b/x)$.

42. Generalice el Ejercicio 41 a integrales de la forma

$$\int \frac{1}{ax^n + bx}\, dx.$$

43. Sea $g(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$, donde n es un entero positivo y $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son números reales diferentes entre sí. Demuestre que si $f(x)$ es un polinomio de grado menor que n, entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x - c_1} + \frac{A_2}{x - c_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - c_n}$$

donde $A_k = f(c_k)/g'(c_k)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. (Éste es un método para encontrar la descomposición en fracciones parciales cuando el denominador se puede factorizar en factores lineales distintos.)

44. Use el Ejercicio 43 para encontrar la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{2x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x + 7}{x^5 - 5x^3 + 4x}$$

9.5 INTEGRALES EN LAS QUE APARECEN EXPRESIONES CUADRÁTICAS

De la descomposición en fracciones parciales pueden resultar integrandos con expresiones cuadráticas irreducibles $ax^2 + bx + c$. Si $b \neq 0$, a veces es necesario completar el cuadrado como sigue:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

La sustitución $u = x + (b/2a)$ puede llevar a una integral inmediata.

EJEMPLO 1 Evaluar $\int \frac{2x-1}{x^2 - 6x + 13}\,dx$.

Solución Observamos que la expresión cuadrática $x^2 - 6x + 13$ es irreducible, pues $b^2 - 4ac = 36 - 52 = -16 < 0$. Completamos el cuadrado como sigue:

$$x^2 - 6x + 13 = (x^2 - 6x \qquad) + 13$$

$$= (x^2 - 6x + 9) + 13 - 9 = (x-3)^2 + 4.$$

Si se lleva a cabo la sustitución

$$u = x - 3, \qquad x = u + 3, \qquad dx = du$$

entonces

$$\int \frac{2x-1}{x^2 - 6x + 13}\,dx = \int \frac{2x-1}{(x-3)^2 + 4}\,dx$$

$$= \int \frac{2(u+3) - 1}{u^2 + 4}\,du$$

$$= \int \frac{2u + 5}{u^2 + 4}\,du$$

$$= \int \frac{2u}{u^2 + 4}\,du + 5\int \frac{1}{u^2 + 4}\,du$$

$$= \ln(u^2 + 4) + \frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{u}{2} + C$$

$$= \ln(x^2 - 6x + 13) + \frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{x-3}{2} + C \quad \bullet$$

Este método de completar el cuadrado también puede servir cuando aparece una expresión cuadrática bajo el radical.

EJEMPLO 2 Evaluar $\int \frac{1}{\sqrt{8 + 2x - x^2}}\,dx$.

Solución Podemos completar el cuadrado de la expresión cuadrática $8 + 2x - x^2$ como sigue:

$$8 + 2x - x^2 = 8 - (x^2 - 2x) = 8 + 1 - (x^2 - 2x + 1)$$

$$= 9 - (x-1)^2$$

Tomando

$$u = x - 1, \qquad du = dx,$$

obtenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{9-(x-1)^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{9-u^2}}\,du = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{3} + C$$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\frac{x-1}{3} + C \qquad \bullet$$

En el siguiente ejemplo se hará una sustitución trigonométrica después de completar el cuadrado.

EJEMPLO 3 Evaluar $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+25}}\,dx$.

Solución Completamos el cuadrado de la expresión cuadrática como sigue:

$$\begin{aligned} x^2+8x+25 &= (x^2+8x\qquad) + 25 \\ &= (x^2+8x+16) + 25 - 16 \\ &= (x+4)^2 + 9. \end{aligned}$$

Entonces, $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+25}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+4)^2+9}}\,dx.$

Si ahora se hace la sustitución trigonométrica

$$x+4 = 3\tan\theta,$$

resulta

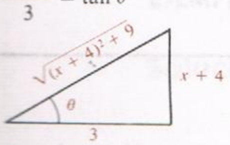
$$dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$$

y

$$\sqrt{(x+4)^2+9} = \sqrt{9\tan^2\theta+9} = 3\sqrt{\tan^2\theta+1} = 3\sec\theta.$$

FIGURA 9.6

$\dfrac{x+4}{3} = \tan\theta$



Por lo tanto

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+25}}\,dx = \int \frac{1}{3\sec\theta}\,3\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \int \sec\theta\,d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C.$$

Para expresar esto en términos de la variable x, usamos el triángulo de la Figura 9.6. Esto da

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+25}}\,dx = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+8x+25}}{3} + \frac{x+4}{3}\right| + C$$

$$= \ln\left|\sqrt{x^2+8x+25} + x + 4\right| + K$$

donde $K = C - \ln 3$.

Otra manera de evaluar la integral después de completar el cuadrado es utilizando el Teorema (8.38). Lo anterior conduce a

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+4)^2+9}}\,dx = \operatorname{senh}^{-1}\frac{x+4}{3} + C \quad \bullet$$

EJERCICIOS 9.5

Ejercicios 1-18: Evalúe la integral.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$ **2.** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{7+6x-x^2}}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$ **4.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{\sqrt{9-8x-x^2}}\,dx$ **6.** $\displaystyle\int \frac{x+5}{9x^2+6x+17}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$ **8.** $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3-1}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-4x^3+13x^2}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+6x+13)^{3/2}}\,dx$

12. $\displaystyle\int \sqrt{x(6-x)}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2-3x+9}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+2x+5)^2}\,dx$

15. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2-4x+6}{x^2-4x+5}\,dx$ **16.** $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2+3x-4}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$ **18.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$

19. Calcule el área de la región que está delimitada por las gráficas de $y = (x^3+1)^{-1}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

20. La región que está acotada por la gráfica de $y = 1/(x^2+2x+10)$, los ejes coordenados y la recta $x = 2$, gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

21. La región descrita en el Ejercicio 20 gira ahora alrededor del eje y. Calcule el volumen del sólido resultante.

22. La velocidad (al tiempo t) de una partícula que se mueve sobre una recta coordenada está dada por $(75+10t-t^2)^{-1/2}$ m/s. ¿Qué distancia recorre la misma durante el intervalo de tiempo $[0, 5]$?

9.6 SUSTITUCIONES DIVERSAS

En esta sección se presentan algunas sustituciones que son útiles para evaluar ciertas integrales. El siguiente ejemplo indica que si una integral contiene una expresión de la forma $\sqrt[n]{f(x)}$, entonces una de las sustituciones $u = \sqrt[n]{f(x)}$ o bien $u = f(x)$ puede simplificar la evaluación.

EJEMPLO 1 Evaluar $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx.$

Solución 1 La sustitución $u = \sqrt[3]{x^2 + 4}$ lleva a las siguientes ecuaciones equivalentes:

$$u = \sqrt[3]{x^2 + 4}, \qquad u^3 = x^2 + 4, \qquad x^2 = u^3 - 4.$$

Tomando la diferencial en ambos lados de la última ecuación, obtenemos

$$2x\,dx = 3u^2\,du \qquad \text{o bien} \qquad x\,dx = \tfrac{3}{2}u^2\,du.$$

Ahora se reemplaza en la integral dada como sigue:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx &= \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2+4}} \cdot x\,dx \\
&= \int \frac{u^3 - 4}{u} \cdot \frac{3}{2}u^2\,du = \frac{3}{2}\int (u^4 - 4u)\,du \\
&= \tfrac{3}{2}(\tfrac{1}{5}u^5 - 2u^2) + C = \tfrac{3}{10}u^2(u^3 - 10) + C \\
&= \tfrac{3}{10}(x^2+4)^{2/3}(x^2 - 6) + C
\end{aligned}$$

Solución 2 Si sustituimos u en lugar de la expresión *bajo* el radical, entonces

$$u = x^2 + 4 \qquad x^2 = u - 4$$

$$2x\,dx = du \qquad x\,dx = \tfrac{1}{2}\,du.$$

En este caso podemos escribir

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx &= \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2+4}} \cdot x\,dx \\
&= \int \frac{u-4}{u^{1/3}} \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int (u^{2/3} - 4u^{-1/3})\,du \\
&= \tfrac{1}{2}[\tfrac{3}{5}u^{5/3} - 6u^{2/3}] + C = \tfrac{3}{10}u^{2/3}[u - 10] + C \\
&= \tfrac{3}{10}(x^2+4)^{2/3}(x^2 - 6) + C
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Evaluar $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\,dx.$

Solución Si se toma $u = \sqrt[6]{x}$, entonces

$$x = u^6, \qquad \sqrt{x} = u^3, \qquad \sqrt[3]{x} = u^2, \qquad dx = 6u^5\,du$$

y

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{1}{u^3 + u^2}\,6u^5\,du = 6\int \frac{u^3}{u+1}\,du.$$

Efectuando la división,

$$\frac{u^3}{u+1} = u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx = 6\int \left[u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}\right] du$$
$$= 6(\tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{2}u^2 + u - \ln|u+1|) + C$$
$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C \quad \bullet$$

Si un integrando es una expresión racional en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, entonces la sustitución $u = \tan(x/2)$ para $-\pi < x < \pi$ transforma el integrando en una expresión racional (algebraica) en u. Para demostrar esto, obsérvese primero que

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sec(x/2)} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x/2)}} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \tan\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = u\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 1 - \frac{2u^2}{1+u^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Además, como $x/2 = \tan^{-1} u$, se tiene que $x = 2\tan^{-1} u$ y entonces

$$dx = \frac{2}{1+u^2}\,du.$$

El siguiente teorema resume este análisis.

TEOREMA (9.6) Si un integrando es una expresión racional en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, las siguientes sustituciones lo transforman en una expresión racional en u:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

donde $u = \tan(x/2)$.

EJEMPLO 3 Evaluar $\displaystyle\int \frac{1}{4\operatorname{sen} x - 3\cos x}\,dx.$

Solución Aplicando el Teorema (9.6) y simplificando el integrando,

$$\int \frac{1}{4\operatorname{sen} x - 3\cos x}\,dx = \int \frac{1}{4\left(\dfrac{2u}{1+u^2}\right) - 3\left(\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du$$

$$= \int \frac{2}{8u - 3(1 - u^2)}\,du$$

$$= 2\int \frac{1}{3u^2 + 8u - 3}\,du$$

Mediante fracciones parciales,

$$\frac{1}{3u^2 + 8u - 3} = \frac{1}{10}\left(\frac{3}{3u - 1} - \frac{1}{u + 3}\right)$$

y así,

$$\int \frac{1}{4\,\mathrm{sen}\,x - 3\cos x}\,dx = \frac{1}{5}\int\left(\frac{3}{3u - 1} - \frac{1}{u + 3}\right)du$$

$$= \frac{1}{5}(\ln|3u - 1| - \ln|u + 3|) + C$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{3u - 1}{u + 3}\right| + C$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{3\tan(x/2) - 1}{\tan(x/2) + 3}\right| + C \quad \bullet$$

A veces son útiles otras sustituciones pero es imposible dar reglas para aplicar en todos los casos.

EJERCICIOS 9.6

Ejercicios 1-28: Evalúe la integral.

1. $\int x\sqrt[3]{x + 9}\,dx$

2. $\int x^2\sqrt{2x + 1}\,dx$

3. $\int \frac{x}{\sqrt[5]{3x + 2}}\,dx$

4. $\int \frac{5x}{(x + 3)^{2/3}}\,dx$

5. $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x} + 4}\,dx$

6. $\int_0^{25} \frac{1}{\sqrt{4 + \sqrt{x}}}\,dx$

7. $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}\,dx$

8. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}}\,dx$

9. $\int \frac{1}{(x + 1)\sqrt{x - 2}}\,dx$

10. $\int_0^4 \frac{2x + 3}{\sqrt{1 + 2x}}\,dx$

11. $\int \frac{x + 1}{(x + 4)^{1/3}}\,dx$

12. $\int \frac{x^{1/3} + 1}{x^{1/3} - 1}\,dx$

13. $\int e^{3x}\sqrt{1 + e^x}\,dx$

14. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{1 + e^x}}\,dx$

15. $\int \frac{e^{2x}}{e^x + 4}\,dx$

16. $\int \frac{\mathrm{sen}\,2x}{\sqrt{1 + \mathrm{sen}\,x}}\,dx$

17. $\int \mathrm{sen}\,\sqrt{x + 4}\,dx$

18. $\int \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx$

19. $\int_2^3 \frac{x}{(x - 1)^6}\,dx$

(*Sugerencia:* Tome $u = x - 1$.)

20. $\int \frac{x^2}{(3x + 4)^{10}}\,dx$

(*Sugerencia:* Tome $u = 3x + 4$.)

21. $\int \frac{1}{2 + \mathrm{sen}\,x}\,dx$

22. $\int \frac{1}{3 + 2\cos x}\,dx$

23. $\int \frac{1}{1 + \mathrm{sen}\,x + \cos x}\,dx$

24. $\int \frac{1}{\tan x + \mathrm{sen}\,x}\,dx$

25. $\int \frac{\sec x}{4 - 3\tan x}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x}\, dx$

27. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x - 8}\, dx$

(*Sugerencia:* Tome $u = \operatorname{sen} x$.)

28. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{5\cos x + \cos^2 x}\, dx$

(*Sugerencia:* Tome $u = \cos x$.)

Ejercicios 29-30: Demuestre la identidad para todos los números m y n, usando una sustitución apropiada.

29. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$

30. $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\, dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m\, dx$

31. Use una sustitución apropiada para demostrar que

$$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\, dt \quad \text{para } x > 0$$

y luego aplique este resultado para demostrar la identidad

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

(véase el Ejercicio 24 de la Sección 8.5).

32. Demuestre que

$$\int \frac{1}{(x+a)^{3/2} + (x-a)^{3/2}}\, dx$$

se puede transformar, mediante la sustitución $x = \frac{1}{2}a(t^2 + t^{-2})$, en la integral de una función racional.

Ejercicios 33-34: Use el Teorema (9.6) para verificar la fórmula.

33. $\displaystyle\int \sec x\, dx = \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{1}{2}x}{1 - \tan \frac{1}{2}x} \right| + C$

34. $\displaystyle\int \csc x\, dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right) + C$

9.7 TABLAS DE INTEGRALES

En matemáticas y en otras actividades científicas en las que se usan integrales, a veces hay que consultar las tablas de integrales. Muchas de las fórmulas que aparecen en esas tablas se pueden obtener con los métodos estudiados en este capítulo. En general, las tablas de integrales se deben usar cuando se haya adquirido experiencia con los métodos comunes de integración. Al evaluar integrales complicadas, a menudo se necesita efectuar sustituciones o utilizar fracciones parciales, integración por partes u otros métodos, para obtener los integrandos que aparecen en las tablas.

Los siguientes ejemplos ilustran cómo aplicar algunas de las fórmulas que figuran en la pequeña Tabla de Integrales del Apéndice IV. Para verificar que no se hayan cometido errores al usar la tabla, siempre hay que comprobar la respuesta por derivación.

EJEMPLO 1 Evaluar $\int x^3 \cos x\, dx$.

Solución Usamos primero la Fórmula 85 de la Tabla de Integrales con $n = 3$ y $u = x$ para reducir el exponente de x. Así,

$$\int x^3 \cos x\, dx = x^3 \operatorname{sen} x - 3\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx.$$

A continuación se aplica la Fórmula 84 con $n = 2$ y luego la Fórmula 83, obteniendo

$$\begin{aligned}\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx &= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx \\ &= -x^2 \cos x + 2[\cos x + x \operatorname{sen} x] + C.\end{aligned}$$

Sustituyendo en la primera expresión, obtenemos

$$\int x^3 \cos x\, dx = x^3 \operatorname{sen} x + 3x^2 \cos x - 6 \cos x - 6x \operatorname{sen} x + C \quad \bullet$$

EJEMPLO 2 Evaluar $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{3+5x^2}}\,dx$ para $x > 0$.

Solución El integrando sugiere usar la parte de la tabla en la que aparece la forma $\sqrt{a^2+u^2}$. Concretamente, la Fórmula 28 dice que

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2u} + C$$

(la diferencial *du* se coloca en el numerador en vez de a la derecha del integrando para hacer más compacta la notación). A fin de usar esta fórmula, debemos ajustar antes el integrando para que coincida *exactamente* con la fórmula. Si definimos

$$a^2 = 3 \quad \text{y} \quad u^2 = 5x^2$$

entonces la expresión bajo el radical queda ajustada, pero también necesitamos que aparezcan

(i) u^2 a la izquierda del radical.

(ii) *du* en el numerador.

Se puede lograr (i) escribiendo la integral como

$$5\int \frac{1}{5x^2\sqrt{3+5x^2}}\,dx.$$

Para (ii), notamos que

$$u = \sqrt{5}x \quad \text{y} \quad du = \sqrt{5}\,dx$$

y se expresa la integral anterior como

$$5 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{5x^2\sqrt{3+5x^2}}\sqrt{5}\,dx.$$

Esta última integral coincide exactamente con la de la Fórmula 28 y por lo tanto,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{3+5x^2}}\,dx = \sqrt{5}\left[-\frac{\sqrt{3+5x^2}}{3(\sqrt{5}x)}\right] + C$$

$$= -\frac{\sqrt{3+5x^2}}{3x} + C \quad \bullet$$

A veces, antes de recurrir a la tabla para evaluar una integral, es necesario hacer alguna sustitución, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Evaluar $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{3 - 5\cos x}}\,dx$.

Solución Comenzamos por escribir la integral como sigue:

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{3 - 5\cos x}}\,dx = \int \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{3 - 5\cos x}}\,dx$$

Puesto que no hay fórmulas en la tabla que tengan esta forma, consideramos la sustitución $u = \cos x$. Entonces, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$ y la integral puede escribirse como

$$2\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{3 - 5\cos x}}\,dx = -2\int \frac{\cos x}{\sqrt{3 - 5\cos x}}(-\operatorname{sen} x)\,dx$$

$$= -2\int \frac{u}{\sqrt{3 - 5u}}\,du.$$

Consultando la Tabla de Integrales, vemos que la Fórmula 55 dice que

$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a + bu}.$$

Usando este resultado con $a = 3$ y $b = -5$, resulta

$$-2\int \frac{u}{\sqrt{3 - 5u}}\,du = -2\left(\frac{2}{75}\right)(-5u - 6)\sqrt{3 - 5u} + C.$$

Finalmente, como $u = \cos x$,

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{3 - 5\cos x}}\,dx = \frac{4}{75}(5\cos x + 6)\sqrt{3 - 5\cos x} + C \quad \bullet$$

EJERCICIOS 9.7

Ejercicios 1-30: Use la Tabla de Integrales en el Apéndice IV para evaluar la integral.

1. $\int \frac{\sqrt{4 + 9x^2}}{x}\,dx$ **2.** $\int \frac{1}{x\sqrt{2 + 3x^2}}\,dx$

3. $\int (16 - x^2)^{3/2}\,dx$ **4.** $\int x^2\sqrt{4x^2 - 16}\,dx$

5. $\int x\sqrt{2 - 3x}\,dx$ **6.** $\int x^2\sqrt{5 + 2x}\,dx$

7. $\int \operatorname{sen}^6 3x\,dx$ **8.** $\int x\cos^5(x^2)\,dx$

9. $\int \csc^4 x\,dx$ **10.** $\int \operatorname{sen} 5x \cos 3x\,dx$

11. $\int x \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$ **12.** $\int x^2 \tan^{-1} x\,dx$

13. $\int e^{-3x} \operatorname{sen} 2x\,dx$ **14.** $\int x^5 \ln x\,dx$

15. $\int \frac{\sqrt{5x - 9x^2}}{x}\,dx$ **16.** $\int \frac{1}{x\sqrt{3x - 2x^2}}\,dx$

17. $\int \frac{x}{5x - 3}\,dx$ **18.** $\int \cos x\sqrt{\operatorname{sen}^2 x - 4}\,dx$

19. $\int e^{2x} \cos^{-1} e^x\,dx$ **20.** $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$

21. $\int x^3\sqrt{2 + x}\,dx$ **22.** $\int \frac{7x^3}{\sqrt{2 - x}}\,dx$

23. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{4 + 9\operatorname{sen} x}\,dx$ **24.** $\int \frac{\tan x}{\sqrt{4 + 3\sec x}}\,dx$

25. $\int \frac{\sqrt{9 + 2x}}{x}\,dx$ **26.** $\int \sqrt{8x^3 - 3x^2}\,dx$

27. $\int \frac{1}{x(4 + \sqrt[3]{x})}\,dx$ **28.** $\int \frac{1}{2x^{3/2} + 5x^2}\,dx$

29. $\int \sqrt{16 - \sec^2 x}\tan x\,dx$ **30.** $\int \frac{\cot x}{\sqrt{4 - \csc^2 x}}\,dx$

9.8 REPASO

Discuta lo siguiente:

1. Integración por partes.
2. Sustituciones trigonométricas.
3. Integrales de las funciones racionales.
4. Integrales en las que aparecen expresiones cuadráticas.

EJERCICIOS 9.8

Ejercicios 1-100: Evalúe la integral.

1. $\int x \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$

2. $\int \sec^3 (3x)\,dx$

3. $\int_0^1 \ln (1 + x)\,dx$

4. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$

5. $\int \cos^3 2x \operatorname{sen}^2 2x\,dx$

6. $\int \cos^4 x\,dx$

7. $\int \tan x \sec^5 x\,dx$

8. $\int \tan x \sec^6 x\,dx$

9. $\int \dfrac{1}{(x^2 + 25)^{3/2}}\,dx$

10. $\int \dfrac{1}{x^2\sqrt{16 - x^2}}\,dx$

11. $\int \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x}\,dx$

12. $\int \dfrac{x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

13. $\int \dfrac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3}\,dx$

14. $\int \dfrac{1}{x + x^3}\,dx$

15. $\int \dfrac{x^3 - 20x^2 - 63x - 198}{x^4 - 81}\,dx$

16. $\int \dfrac{x - 1}{(x + 2)^5}\,dx$

17. $\int \dfrac{x}{\sqrt{4 + 4x - x^2}}\,dx$

18. $\int \dfrac{x}{x^2 + 6x + 13}\,dx$

19. $\int \dfrac{\sqrt[3]{x + 8}}{x}\,dx$

20. $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 \cos x + 3}\,dx$

21. $\int e^{2x} \operatorname{sen} 3x\,dx$

22. $\int \cos (\ln x)\,dx$

23. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\,dx$

24. $\int \cot^2 3x\,dx$

25. $\int \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx$

26. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{9x^2 + 4}}\,dx$

27. $\int \dfrac{x^5 - x^3 + 1}{x^3 + 2x^2}\,dx$

28. $\int \dfrac{x^3}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27}\,dx$

29. $\int \dfrac{1}{x^{3/2} + x^{1/2}}\,dx$

30. $\int \dfrac{2x + 1}{(x + 5)^{100}}\,dx$

31. $\int e^x \sec e^x\,dx$

32. $\int x \tan x^2\,dx$

33. $\int x^2 \operatorname{sen} 5x\,dx$

34. $\int \operatorname{sen} 2x \cos x\,dx$

35. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^{1/2} x\,dx$

36. $\int \operatorname{sen} 3x \cot 3x\,dx$

37. $\int e^x\sqrt{1 + e^x}\,dx$

38. $\int x(4x^2 + 25)^{-1/2}\,dx$

39. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{4x^2 + 25}}\,dx$

40. $\int \dfrac{3x + 2}{x^2 + 8x + 25}\,dx$

41. $\int \sec^2 x \tan^2 x\,dx$

42. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x\,dx$

43. $\int x \cot x \csc x\,dx$

44. $\int (1 + \csc 2x)^2\,dx$

45. $\int x^2(8 - x^3)^{1/3}\,dx$

46. $\int x (\ln x)^2\,dx$

47. $\int \sqrt{x} \operatorname{sen} \sqrt{x}\,dx$

48. $\int x\sqrt{5 - 3x}\,dx$

49. $\int \dfrac{e^{3x}}{1 + e^x}\,dx$

50. $\int \dfrac{e^{2x}}{4 + e^{4x}}\,dx$

51. $\int \dfrac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x}}\,dx$

52. $\int \dfrac{\cos^3 x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}\,dx$

53. $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx$

54. $\int \dfrac{x}{25 - 9x^2}\,dx$

55. $\int \dfrac{1 - 2x}{x^2 + 12x + 35}\,dx$

56. $\int \dfrac{7}{x^2 - 6x + 18}\,dx$

57. $\int \tan^{-1} 5x\,dx$

58. $\int \operatorname{sen}^4 3x\,dx$

59. $\int \dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$

60. $\int \dfrac{x}{\csc 5x^2}\,dx$

61. $\int \dfrac{1}{\sqrt{7 + 5x^2}}\,dx$

62. $\int \dfrac{2x + 3}{x^2 + 4}\,dx$

63. $\int \cot^6 x\,dx$

64. $\int \cot^5 x \csc x\,dx$

65. $\int x^3\sqrt{x^2 - 25}\,dx$

66. $\int (\operatorname{sen} x)10^{\cos x}\,dx$

67. $\int (x^2 - \operatorname{sech}^2 4x)\,dx$

68. $\int x \cosh x\,dx$

69. $\int x^2 e^{-4x}\,dx$

70. $\int x^5\sqrt{x^3+1}\,dx$

71. $\int \frac{3}{\sqrt{11-10x-x^2}}\,dx$

72. $\int \frac{12x^3+7x}{x^4}\,dx$

73. $\int \tan 7x \cos 7x\,dx$

74. $\int e^{1+\ln 5x}\,dx$

75. $\int \frac{4x^2-12x-10}{(x-2)(x^2-4x+3)}\,dx$

76. $\int \frac{1}{x^4\sqrt{16-x^2}}\,dx$

77. $\int (x^3+1)\cos x\,dx$

78. $\int (x-3)^2(x+1)\,dx$

79. $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x^2}\,dx$

80. $\int \frac{4x^3-15x^2-6x+81}{x^4-18x^2+81}\,dx$

81. $\int (5-\cot 3x)^2\,dx$

82. $\int x(x^2+5)^{3/4}\,dx$

83. $\int \frac{1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})}\,dx$

84. $\int \frac{x}{\cos^2 4x}\,dx$

85. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx$

86. $\int \frac{4x^2-6x+4}{(x^2+4)(x-2)}\,dx$

87. $\int \frac{x^2}{(25+x^2)^2}\,dx$

88. $\int \operatorname{sen}^4 x\cos^3 x\,dx$

89. $\int \tan^3 x\sec x\,dx$

90. $\int \frac{x}{\sqrt{4+9x^2}}\,dx$

91. $\int \frac{2x^3+4x^2+10x+13}{x^4+9x^2+20}\,dx$

92. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^3}\,dx$

93. $\int \frac{(x^2-2)^2}{x}\,dx$

94. $\int \cot^2 x\csc x\,dx$

95. $\int x^{3/2}\ln x\,dx$

96. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$

97. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x+3}}\,dx$

98. $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cot x}\,dx$

99. $\int x^3 e^{(x^2)}\,dx$

100. $\int (x+2)^2(x+1)^{10}\,dx$

CAPÍTULO **10**

FORMAS INDETERMINADAS, INTEGRALES IMPROPIAS Y FÓRMULAS DE TAYLOR

En este capítulo se presentan algunos métodos que son útiles para investigar ciertos límites. También se estudian las integrales definidas con integrandos discontinuos o con extremos (o límites) de integración infinitos. La última sección contiene un método para aproximar funciones por medio de polinomios. Estos temas tienen muchas aplicaciones en física y en matemáticas; sin embargo, la más importante aplicación se pospone para el siguiente capítulo referente a ***series infinitas****.*

10.1 LAS FORMAS INDETERMINADAS 0/0 Y ∞/∞

Con frecuencia aparecen límites de la forma $\lim_{x\to c} f(x)/g(x)$, donde ambas funciones f y g tienen límite 0 cuando x tiende a c. Se dice que $f(x)/g(x)$ tiene la **forma indeterminada 0/0** en $x = c$. Quizá los ejemplos más importantes de la forma 0/0 aparecen al usar la fórmula para la derivada

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Si los límites de $f(x)$ y $g(x)$ son ∞ o bien $-\infty$ cuando x tiende a c, se dice que $f(x)/g(x)$ tiene la **forma indeterminada** ∞/∞ en $x = c$.

En el Capítulo 2 se estudió

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{5x^2 - 7x - 6}.$$

El cociente tiene la forma indeterminada 0/0; sin embargo, el límite se puede obtener como sigue:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{5x^2 - 7x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(2x - 1)(x - 2)}{(5x + 3)(x - 2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x - 1}{5x + 3} = \frac{3}{13}.$$

Otras formas indeterminadas requieren métodos más complicados. Por ejemplo en el Capítulo 8 se usó un razonamiento geométrico para demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

En esta sección se demuestra *la regla de L'Hôpital* y se aplica a las formas indeterminadas. La demostración utiliza la siguiente fórmula que lleva el nombre del famoso matemático francés A. Cauchy (1789-1857).

FÓRMULA DE CAUCHY (10.1)

> Si las funciones f y g son continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivables en el intervalo abierto (a, b) y si $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b), entonces existe un número w en (a, b) tal que
>
> $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(w)}{g'(w)}.$$

Demostración Nótese primero que $g(b) - g(a) \neq 0$, ya que si $g(a) = g(b)$, entonces por el Teorema de Rolle (4.10), existe un número c en (a, b) tal que $g'(c) = 0$, lo que contradice la hipótesis sobre g'.

Sea h una nueva función definida como sigue:

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

para todo x en $[a, b]$. Se deduce que h es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $h(a) = h(b)$. Por el Teorema de Rolle, existe un número w en (a, b) tal que $h'(w) = 0$; es decir;

$$[f(b) - f(a)]g'(w) - [g(b) - g(a)]f'(w) = 0.$$

Esto equivale a la Fórmula de Cauchy. • •

Tomando $g(x) = x$ en (10.1) se obtiene

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(w)}{1}$$

o, equivalentemente

$$f(b) - f(a) = f'(w)(b - a).$$

Lo anterior demuestra que la Fórmula de Cauchy es una generalización del Teorema del Valor Medio (4.12).

El siguiente resultado es el teorema más importante sobre formas indeterminadas.

REGLA DE L'HÔPITAL* (10.2) Sea (a, b) un intervalo abierto que contiene a c. Sean f y g funciones definidas y derivables en (a, b), excepto posiblemente en c. Si $g'(x) \neq 0$ para $x \neq c$ y $f(x)/g(x)$ tiene la forma indeterminada 0/0 o bien ∞/∞ en $x = c$, entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que $\lim_{x \to c} [f'(x)/g'(x)]$ exista o en su caso $\lim_{x \to c} [f'(x)/g'(x)] = \infty$.

Demostración Supongamos que $f(x)/g(x)$ tiene la forma indeterminada 0/0 en $x = c$ y que $\lim_{x \to c} [f'(x)/g'(x)] = L$ para un número L. Se quiere demostrar que $\lim_{x \to c} [f(x)/g(x)] = L$. Sean F y G tales que

$$F(x) = f(x) \text{ si } x \neq c \quad \text{y} \quad F(c) = 0,$$

$$G(x) = g(x) \text{ si } x \neq c \quad \text{y} \quad G(c) = 0.$$

Como

$$\lim_{x \to c} F(x) = \lim_{x \to c} f(x) = 0 = F(c),$$

la función F es continua en c y por tanto es continua *en todo* el intervalo (a, b). Análogamente, G es continua en (a, b). Además, $F'(x) = f'(x)$ y $G'(x) = g'(x)$, siempre

* G. L'Hôpital (1661-1704) fue un noble francés que publicó el primer libro de Cálculo. La regla apareció en ese libro; sin embargo, fue descubierta realmente por su maestro, el matemático suizo Johann Bernoulli (1667-1748), quien participó el resultado a L'Hôpital en 1694.

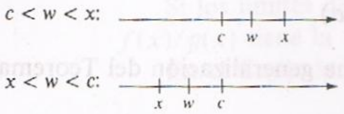
que $x \neq c$. Aplicando la Fórmula de Cauchy a uno de los intervalos $[c, x]$ o $[x, c]$ resulta que existe un número w entre c y x tal que

$$\frac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)} = \frac{F'(w)}{G'(w)} = \frac{f'(w)}{g'(w)}.$$

Aprovechando el hecho de que $F(x) = f(x)$, $G(x) = g(x)$ y $F(c) = G(c) = 0$, se obtiene que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(w)}{g'(w)}.$$

FIGURA 10.1



Como w se encuentra entre c y x (véase la Figura 10.1), resulta que

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(w)}{g'(w)} = \lim_{w \to c} \frac{f'(w)}{g'(w)} = L$$

que es lo que se quería demostrar.

En el caso en que $\lim_{x \to c} [f'(x)/g'(x)] = \infty$, se puede aplicar un razonamiento análogo. La demostración para la forma indeterminada ∞/∞ es más difícil. El lector podrá encontrarla en textos de Cálculo avanzado. •

Con frecuencia, al aplicar la regla de L'Hôpital se comete el error de derivar $f(x)/g(x)$. Nótese que en (10.2) se toman las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$ *por separado* y posteriormente se busca el límite de $f'(x)/g'(x)$.

EJEMPLO 1 Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x + 2x - 1}{3x}$.

Solución El cociente tiene la forma indeterminada $0/0$ en $x = 0$. Por la Regla de L'Hôpital (10.2),

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x + 2x - 1}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + 2}{3} = \frac{2}{3}.$$ •

Para hacer completamente rigurosa la solución del Ejemplo 1, se debería haber demostrado que $\lim_{x \to 0} (-\operatorname{sen} x + 2)/3$ existe *antes* de igualarlo a $2/3$; sin embargo, para simplificar las soluciones se supone que el límite existe y se procede como en este caso.

A veces es necesario aplicar la Regla de L'Hôpital varias veces en un mismo problema, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$.

Solución El cociente tiene la forma indeterminada $0/0$. Por la Regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2 \operatorname{sen} 2x}$$

suponiendo que el segundo límite existe. Como este último cociente tiene la forma indeterminada 0/0, aplicamos la Regla de L'Hôpital por segunda vez y obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2 \operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{4 \cos 2x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

De esto se deduce que el límite existe y es igual a $\frac{1}{2}$. •

La Regla de L'Hôpital también puede aplicarse a los límites unilaterales, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Calcular $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{4 \tan x}{1 + \sec x}$.

Solución La forma indeterminada es ∞/∞. Por la Regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{4 \tan x}{1 + \sec x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{4 \sec^2 x}{\sec x \tan x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{4 \sec x}{\tan x}.$$

Este último cociente tiene también la forma ∞/∞ en $x = \pi/2$; sin embargo, al volver a aplicar la Regla de L'Hôpital se obtiene otra vez la forma ∞/∞ (compruebe este hecho). En este caso el límite puede calcularse usando identidades trigonométricas para modificar el cociente como sigue:

$$\frac{4 \sec x}{\tan x} = \frac{4/(\cos x)}{(\operatorname{sen} x)/(\cos x)} = \frac{4}{\operatorname{sen} x}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{4 \tan x}{1 + \sec x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{4}{\operatorname{sen} x} = \frac{4}{1} = 4. \quad \bullet$$

Puede demostrarse otra forma de la Regla de L'Hôpital para los casos $x \to \infty$ y $x \to -\infty$. A continuación se presenta una demostración parcial de este hecho. Supongamos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Definiendo $u = 1/x$ y aplicando la Regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{f(1/u)}{g(1/u)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{D_u f(1/u)}{D_u g(1/u)}.$$

Por la Regla de la Cadena,

$$D_u f(1/u) = f'(1/u)(-1/u^2) \quad \text{y} \quad D_u g(1/u) = g'(1/u)(-1/u^2).$$

Sustituyendo en el límite anterior y simplificando,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{f'(1/u)}{g'(1/u)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

A esta fórmula también se la llama Regla de L'Hôpital. Los dos ejemplos siguientes muestran cómo se aplica esta regla a la forma ∞/∞.

EJEMPLO 4 Determinar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Solución La forma indeterminada es ∞/∞. Por la Regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})}.$$

Esta última expresión tiene la forma indeterminada 0/0. Al aplicar de nuevo la Regla de L'Hôpital se obtiene otra vez 0/0 (compruébese este hecho). En cambio, podemos obtener el límite simplificando algebraicamente la expresión como sigue:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0. \bullet$$

EJEMPLO 5 Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2}$, si es que existe.

Solución La forma indeterminada es ∞/∞. En este caso se debe aplicar la Regla de L'Hôpital dos veces:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{3x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9e^{3x}}{2} = \infty.$$

Por lo tanto, la expresión dada no tiene límite sino que tiende a infinito cuando x tiende a ∞. •

Antes de aplicar la Regla de L'Hôpital es muy importante comprobar que el cociente tiene una de las formas indeterminadas 0/0 *o bien* ∞/∞. Si se aplica la regla a una forma que no es indeterminada puede obtenerse un resultado incorrecto, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{x^2}$, si es que existe.

Solución El cociente *no* tiene ninguna de las formas indeterminadas 0/0 o bien ∞/∞ en $x = 0$. Para evaluar el límite escribimos

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} (e^x + e^{-x})\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

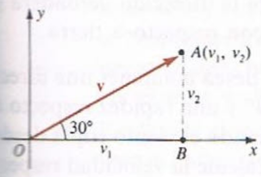
Como

$$\lim_{x\to 0} (e^x + e^{-x}) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

del Teorema (4.27) (ii) obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2} = \infty.$$

FIGURA 14.20



Solución Introducimos un sistema rectangular con el avión en el origen, el eje y sobre la recta norte-sur y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, como se ilustra en la Figura 14.20. En virtud de que $d(O, A) = \|\mathbf{v}\| = 200$, resulta que

$$v_1 = 200 \cos 30^\circ = 100\sqrt{3} \quad \text{y} \quad v_2 = 200 \operatorname{sen} 30^\circ = 100.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{v} = \langle 100\sqrt{3}, 100 \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \langle 40, 0 \rangle.$$

La suma resultante es

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle 100\sqrt{3} + 40, 100 \rangle$$

y la rapidez respecto a tierra es

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \sqrt{(100\sqrt{3} + 40)^2 + (100)^2} \approx 235 \text{ mi/hr}.$$

Si θ es el ángulo entre $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ y la parte positiva del eje x, entonces

$$\tan \theta = \frac{100}{100\sqrt{3} + 40} \approx 0.469 \text{ y así } \theta = \tan^{-1}(0.469) \approx 25^\circ.$$

Por lo tanto, la dirección verdadera del avión es aproximadamente $90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$. •

EJERCICIOS 14.1

1. Complete la demostración del Teorema (14.5).
2. Complete la demostración del Teorema (14.9).

Ejercicios 3-10: Dados $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, y un escalar c, demuestre la propiedad.

3. $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$
4. $(-c)\mathbf{a} = -c\mathbf{a}$
5. $-(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b}$
6. $c(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = c\mathbf{a} - c\mathbf{b}$
7. Si $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$
8. Si $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a}$, entonces $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.
9. Si $c\mathbf{a} = 0$ y $c \neq 0$, entonces $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.
10. Si $c\mathbf{a} = 0$ y $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, entonces $c = 0$.

Ejercicios 11-20: Encuentre $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $4\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$ y $4\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$.

11. $\mathbf{a} = \langle 2, -3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 4 \rangle$
12. $\mathbf{a} = \langle -2, 6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 3 \rangle$
13. $\mathbf{a} = -\langle 7, -2 \rangle$, $\mathbf{b} = 4\langle -2, 1 \rangle$
14. $\mathbf{a} = 2\langle 5, -4 \rangle$, $\mathbf{b} = -\langle 6, 0 \rangle$
15. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$
16. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$
17. $\mathbf{a} = -(4\mathbf{i} - \mathbf{j})$, $\mathbf{b} = 2(\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$
18. $\mathbf{a} = 8\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = (-3)(-2\mathbf{i} + \mathbf{j})$
19. $\mathbf{a} = 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i}$
20. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

Ejercicios 21-26: Encuentre el vector $\mathbf{a}$ en V_2 que corresponde a $\overrightarrow{PQ}$. Trace $\overrightarrow{PQ}$ y el vector de posición de $\mathbf{a}$.

21. $P(1, -4)$, $Q(5, 3)$
22. $P(7, -3)$, $Q(-2, 4)$
23. $P(2, 5)$, $Q(-4, 5)$
24. $P(-4, 6)$, $Q(-4, -2)$
25. $P(-3, -1)$, $Q(6, -4)$
26. $P(2, 3)$, $Q(-6, 0)$

Ejercicios 27-30: Trace los vectores de posición de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $2\mathbf{a}$ y $-3\mathbf{b}$.

27. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

28. $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

29. $\mathbf{a} = \langle -4, 6\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 3\rangle$

30. $\mathbf{a} = \langle 2, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 0\rangle$

Ejercicios 31-38: Calcule la magnitud del vector.

31. $\langle 3, -3\rangle$ **32.** $\langle -2, -2\sqrt{3}\rangle$

33. $\langle -5, 0\rangle$ **34.** $\langle 0, 10\rangle$

35. $-4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ **36.** $10\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$

37. $-18\mathbf{j}$ **38.** $0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$

Ejercicios 39-42: Encuentre un vector unitario que tenga (a) la dirección de **a**; (b) dirección opuesta a **a**.

39. $\mathbf{a} = -8\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$ **40.** $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

41. $\mathbf{a} = \langle 2, -5\rangle$ **42.** $\mathbf{a} = \langle 0, 6\rangle$

43. Encuentre un vector que tenga la misma dirección que $\langle -6, 3\rangle$ y (a) el doble de la magnitud; (b) la mitad de la magnitud.

44. Encuentre un vector que tenga dirección opuesta a $8\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ y (a) el triple de la magnitud; (b) un tercio de la magnitud.

45. Encuentre un vector de magnitud 6 que tenga la misma dirección que $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$.

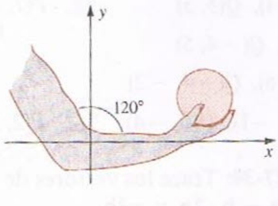
46. Encuentre un vector de magnitud 4 que tenga dirección opuesta a la de $\mathbf{a} = \langle 2, -5\rangle$.

Ejercicios 47-48: Encuentre las componentes horizontal y vertical del vector descrito.

47. Una niña tira de un trineo sobre la nieve ejerciendo una fuerza de 20 lbf (unos 10 kgf) a un ángulo de 45° con la horizontal.

48. El bíceps ejerce una fuerza de 100 kg para sostener el antebrazo y un peso en la mano. Como se muestra en la figura, el músculo forma un ángulo de 120° con el antebrazo.

EJERCICIO 48

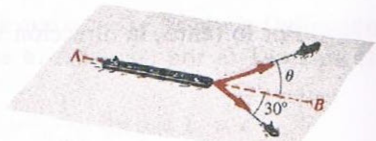


49. Un avión vuela en la dirección 150° con una velocidad relativa (respecto al aire) de 300 km/h y el viento sopla a 30 km/h en la dirección 60°. Calcule aproximadamente la dirección verdad[e]... la rapidez del avión con respecto a tierra.

50. El piloto de un avión desea mantener una d[i]rección verdadera de 240° y una rapidez respe[cto a] tierra de 600 km/h cuando el viento sopla d[el] norte a 75 km/h. Calcule la velocidad res[pec]to al aire que se requiere y la dirección en la [brú]jula, o sea, el **rumbo**.

51. Dos remolcadores llevan un barco grande [al] puerto, como se muestra en la figura. El re[mol]cador mayor ejerce una fuerza de 4000 lbf s[obre] su cable y el menor ejerce una fuerza de 320[0 lbf]. Calcule el ángulo θ que debe formar la direc[ción] del remolcador grande con respecto al segm[ento] AB para que el barco navegue a lo largo [de la] recta que va de A a B.

EJERCICIO 51

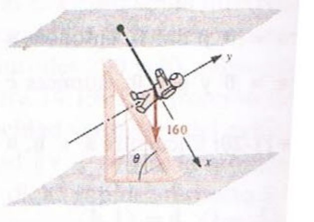


52. La figura muestra un aparato que se usa p[ara si]mular las condiciones de gravedad en otr[os pla]netas. Se ata una cuerda a un astronau[ta que] realiza maniobras sobre un plano inclinad[o un] ángulo de θ grados con la horizontal.

(a) El astronauta pesa 160 lb. Calcule la[s com]ponentes x y y de la fuerza hacia [abajo] (véanse los ejes en la figura).

(b) La componente y en la parte (a) es [el peso] del astronauta con respecto al plan[o incli]nado. El astronauta pesaría 27 lbf e[n la Lu]na y 60 lbf en Marte. Calcule los á[ngulos] (con una precisión de un centésimo [de gra]do) para que el aparato del plano i[nclinado] simule la gravedad en esos lugare[s].

EJERCICIO 52



53. ¿En qué condiciones $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|$

54. (a) Sea $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ cualquier vector diferente de cero y sea $\overline{OA}$ el vector de posición de $\mathbf{a}$. Demuestre que si θ es el menor ángulo no negativo de la parte positiva del eje x a $\overline{OA}$, entonces $\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|(\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j})$.

(b) Realice la demostración de que cualquier vector unitario en V_2 se puede expresar en la forma $\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ para un ángulo θ determinado.

55. Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ dos vectores no paralelos cualesquiera diferentes de cero, y sea $\mathbf{c}$ cualquier otro vector. Demuestre que existen escalares p y q tales que $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$. Interprete este hecho geométricamente.

56. Sea $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Encuentre todos los números reales c tales que

(a) $\|c\mathbf{a}\| = 3$; (b) $\|c\mathbf{a}\| = -3$; (c) $\|c\mathbf{a}\| = 0$.

57. Sean $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$, y $c > 0$. Describa el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ tales que $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| = c$.

58. Sean los vectores $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$, y $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle \neq \mathbf{0}$. Describa el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ tales que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{a}$.

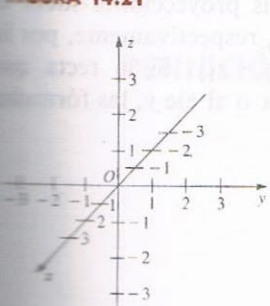
59. Realice la demostración de que si $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son puntos arbitrarios en un plano coordenado, entonces $\sum_{k=1}^{n-1} \overline{P_k P_{k+1}} + \overline{P_n P_1}$ es el vector cero. Ilustre gráficamente este hecho para $n = 5$.

60. Demuestre que si $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son los vértices de un polígono regular y O es el centro del polígono, entonces $\sum_{k=1}^{n} \overline{OP_k}$ es el vector cero.

14.2 VECTORES EN TRES DIMENSIONES

Para estudiar los vectores en el espacio se usan *ternas ordenadas* y un *sistema de coordenadas en tres dimensiones*. Una **terna ordenada** (a, b, c) es un conjunto $\{a, b, c\}$ de tres números de los cuales a se considera el primero, b el segundo y c el tercero. La colección de todas las ternas ordenadas se denota por $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Se dice que dos ternas ordenadas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) son **iguales**, y se escribe $(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)$, si y sólo si $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ y $a_3 = b_3$.

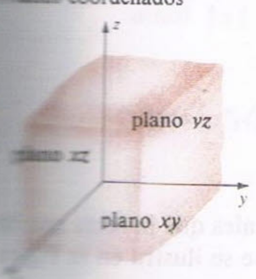
FIGURA 14.21



Para establecer un sistema de coordenadas en tres dimensiones, se escoge un punto fijo O (el **origen**) y tres rectas coordenadas perpendiculares entre sí (los ejes x, y, z) con un origen común O, como se ilustra en la Figura 14.21. Para visualizar esta construcción, puede considerarse que los ejes y y z se encuentran en el plano del papel y que el eje x apunta hacia afuera de la hoja. Las tres rectas coordenadas determinan tres planos coordenados que se indican en la Figura 14.22: el **plano** xy, el **plano** yz y el **plano** xz.

FIGURA 14.22

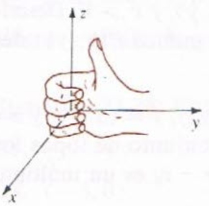
Planos coordenados



Los tres ejes de la Figura 14.22 determinan un sistema coordenado **derecho**. Si se intercambian los ejes x y y, se obtiene un sistema coordenado **izquierdo**. El calificativo *derecho* se debe a que si los dedos de la mano derecha se curvan en el sentido de un giro de 90° de los ejes en el plano xy (de manera que la parte positiva del eje x coincida con la parte positiva del eje y), entonces el pulgar extendido apunta en la dirección positiva del eje z, como se muestra en la Figura 14.23. Por lo general se usan sistemas coordenados derechos.

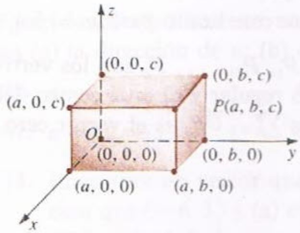
Si P es un punto en el espacio y su proyección (perpendi-

FIGURA 14.23
Sistema derecho



cular) sobre el eje x tiene coordenada a, entonces a se llama **coordenada x** (o *abscisa*) de P. Análogamente, las coordenadas b y c de las proyecciones de P sobre los ejes y y z, respectivamente, se denominan **coordenada y** (u *ordenada*) y **coordenada z** (o *elevación*) de P. El símbolo $P(a, b, c)$, o bien (a, b, c), denota el punto P con coordenadas a, b y c. Si P no se encuentra en un plano coordenado, entonces los tres planos que pasan por P y que son paralelos a los planos coordenados forman, junto con estos últimos, un prisma rectangular como el que se ilustra en la Figura 14.24.

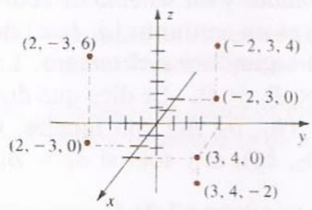
FIGURA 14.24



El concepto de ubicar puntos es análogo al de dos dimensiones. En la Figura 14.25 aparecen localizados varios puntos. Para ubicar $(3, 4, -2)$, se localiza primero $(3, 4, 0)$ en el plano xy y luego se mueve ese punto 2 unidades *hacia abajo*. Para situar $(-2, 3, 4)$, primero se localiza $(-2, 3, 0)$ en el plano xy y luego se mueve el punto 4 unidades *hacia arriba*, etcétera.

La correspondencia biunívoca entre puntos en el espacio y ternas ordenadas de números reales es un **sistema de coordenadas rectangulares en tres dimensiones.** Los tres planos coordenados dividen el espacio en ocho partes llamadas **octantes.** La parte que consta de todos los puntos $P(a, b, c)$ que tienen las tres coordenadas a, b y c positivas es el **primer octante.** No suelen numerarse los otros octantes.

FIGURA 14.25



Se puede efectuar la deducción de una fórmula para la distancia $d(P_1, P_2)$ entre dos puntos P_1 y P_2 en el espacio. Si P_1 y P_2 se encuentran en una recta paralela al eje z, como se ilustra en la Figura 14.26, y sus proyecciones sobre el eje z son $A_1(0, 0, z_1)$ y $A_2(0, 0, z_2)$, respectivamente, por lo cual $d(P_1, P_2) = d(A_1, A_2) = |z_2 - z_1|$. Si la recta que pasa por P_1 y P_2 es paralela al eje x o al eje y, las fórmulas son análogas.

FIGURA 14.26

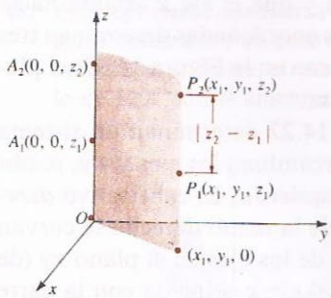
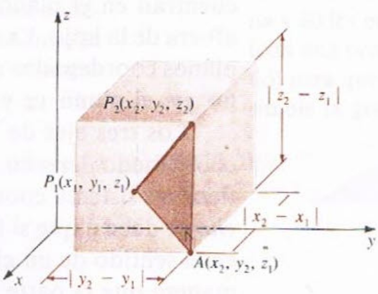


FIGURA 14.27



Si se desea calcular la distancia entre dos puntos P_1 y P_2 tales que la recta que los une no es paralela a un eje, se tiene una situación como la que se ilustra en la Figura

14.27. El triángulo P_1AP_2 es uno rectángulo y entonces, de acuerdo con el Teorema de Pitágoras,

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{[d(P_1, A)]^2 + [d(A, P_2)]^2}.$$

Como P_1 y A se encuentran en un plano paralelo al plano xy, la Fórmula de la Distancia (1.9) dice que $[d(P_1, A)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Según los comentarios anteriores, $[d(A, P_2)]^2 = (z_2 - z_1)^2$. Sustituyendo en la fórmula anterior para $d(P_1, P_2)$, se obtiene lo siguiente.

FÓRMULA DE LA DISTANCIA (14.13)

La distancia entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Obsérvese que si P_1 y P_2 están en el plano xy de manera que $z_1 = z_2 = 0$, entonces (14.13) se reduce a la Fórmula de la Distancia (1.9) en dos dimensiones.

EJEMPLO 1 Calcular la distancia entre $A(-1, -3, 1)$ y $B(3, 4, -2)$.

Solución Usando la Fórmula de la Distancia (14.13),

$$d(A, B) = \sqrt{(3 + 1)^2 + (4 + 3)^2 + (-2 - 1)^2}$$
$$= \sqrt{16 + 49 + 9} = \sqrt{74} \quad \bullet$$

La siguiente definición generaliza el concepto de vectores en V_2 a tres dimensiones.

DEFINICIÓN (14.14)

El **espacio vectorial V_3 de tres dimensiones** es el conjunto de todas las ternas ordenadas $\langle x, y, z\rangle$ de números reales, llamadas **vectores**, tales que si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ y c es un escalar, entonces

(i) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\rangle$

(ii) $c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2, ca_3\rangle$

Los números a_1, a_2 y a_3 son las **componentes** del vector $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$. Siguiendo el mismo procedimiento que en V_2, se define el **vector cero 0**, el **negativo $-\mathbf{a}$** de $\mathbf{a}$, la **magnitud $\|\mathbf{a}\|$** de $\mathbf{a}$ y la **diferencia $\mathbf{a} - \mathbf{b}$** como sigue.

DEFINICIÓN (14.15)

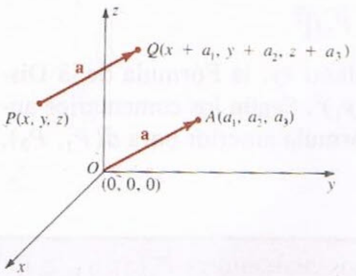
(i) $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0\rangle$

(ii) $-\mathbf{a} = -\langle a_1, a_2, a_3\rangle = \langle -a_1, -a_2, -a_3\rangle$

(iii) $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

(iv) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\rangle$

FIGURA 14.28



Las propiedades de los vectores en dos dimensiones se pueden generalizar sin ninguna dificultad a V_3. Sólo hay que tomar en cuenta la tercera componente. En particular, es fácil demostrar las propiedades enunciadas en los Teoremas (14.5) y (14.9).

Un vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ en V_3 se puede representar por un segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ con punto inicial arbitrario $P(x, y, z)$ y punto final $Q(x + a_1, y + a_2, z + a_3)$, como se ilustra en la Figura 14.28. La magnitud de **a** es $d(P, Q)$. Además, $\|\mathbf{a}\| \geq 0$, y $\|\mathbf{a}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Como en el caso de dos dimensiones, puede demostrarse que $\|c\mathbf{a}\| = |c|\,\|\mathbf{a}\|$.

El vector $\overrightarrow{OA}$ en la Figura 14.28 es el *vector de posición* para $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y el del punto $A(a_1, a_2, a_3)$. La interpretación geométrica de la suma de vectores es exactamente la misma que en dos dimensiones.

EJEMPLO 2 Sean $\mathbf{a} = \langle 2, 5, -3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -4, 1, 7 \rangle$. Encontrar $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ y $\|\mathbf{a}\|$.

Solución

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 2, 5, -3 \rangle + \langle -4, 1, 7 \rangle = \langle -2, 6, 4 \rangle$$

$$\begin{aligned} 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} &= 2\langle 2, 5, -3 \rangle - 3\langle -4, 1, 7 \rangle = \langle 4, 10, -6 \rangle - \langle -12, 3, 21 \rangle \\ &= \langle 16, 7, -27 \rangle \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(2)^2 + (5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{38}$$

Como en el caso de dos dimensiones, se dice que dos vectores **a** y **b** diferentes de cero en V_3 tienen la **misma dirección** si $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para un escalar $c > 0$, o que tienen **direcciones opuestas** si $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para $c < 0$. Los vectores **a** y **b** son **paralelos** si $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para un escalar c.

EJEMPLO 3 Sean

$$\mathbf{a} = \langle 15, -6, 24 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 5, -2, 8 \rangle, \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = \langle -\tfrac{15}{2}, 3, -12 \rangle.$$

Demostrar que **a** y **b** tienen la misma dirección y que **a** y **c** tienen direcciones opuestas.

Solución Por inspección vemos que

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{b} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{b} = \tfrac{1}{3}\mathbf{a}.$$

Como el escalar 3 (o bien $\frac{1}{3}$) es positivo, **a** y **b** tienen la misma dirección.

También por inspección,

$$\mathbf{a} = -2\mathbf{c} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{c} = -\tfrac{1}{2}\mathbf{a}.$$

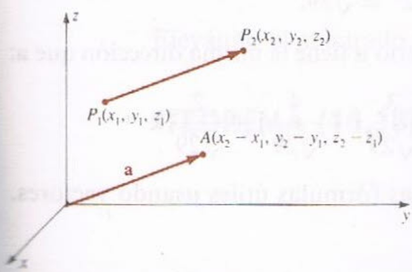
Como el escalar -2 (o bien $-\frac{1}{2}$) es negativo, **a** y **c** tienen direcciones opuestas.

El siguiente teorema y su demostración son análogos al Teorema (14.4).

TEOREMA (14.16)

> Si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos cualesquiera, entonces el vector **a** en V_3 que corresponde a $\overrightarrow{P_1P_2}$ es
>
> $$\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle.$$

FIGURA 14.29



El Teorema (14.16) se ilustra en la Figura 14.29, en la que $\overrightarrow{OA}$ es el vector de posición de **a**.

EJEMPLO 4 Si se tienen dados los puntos $P_1(5, 6, -2)$ y $P_2(-3, 8, 7)$, encontrar el vector **a** en V_3 correspondiente a $\overrightarrow{P_1P_2}$.

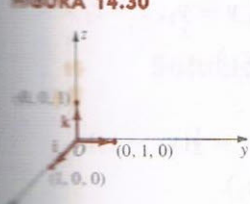
Solución Por (14.16),

$$\mathbf{a} = \langle -3 - 5, 8 - 6, 7 + 2 \rangle = \langle -8, 2, 9 \rangle \quad \bullet$$

Se dice que dos vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma dirección (o direcciones opuestas) si sus vectores correspondientes en V_3 tienen la misma dirección (o direcciones opuestas). Si la magnitud $\|\overrightarrow{PQ}\|$ se define como la distancia entre P y Q, entonces $PQ = \overrightarrow{RS}$ significa que ambos vectores tienen la misma magnitud y la misma dirección. Si **a** es el vector en V_3 correspondiente a PQ, y c es un escalar, entonces el vector $c\mathbf{a}$ tiene la representación geométrica $c\overrightarrow{PQ}$. Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma dirección si $\overrightarrow{PQ} = c\overrightarrow{RS}$ para $c > 0$ o bien direcciones opuestas si $\overrightarrow{PQ} = c\overrightarrow{RS}$ para $c < 0$. En cualquiera de estos casos se dice que $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ son *paralelos*.

Un vector **a** es un **vector unitario** si $\|\mathbf{a}\| = 1$. Los vectores unitarios especiales

FIGURA 14.30

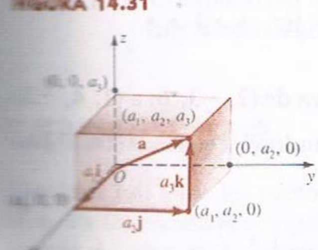


$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \qquad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

son importantes porque cualquier vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ puede expresarse como una combinación lineal de **i**, **j** y **k**. Concretamente,

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

FIGURA 14.31



En la Figura 14.30 aparecen los vectores de posición de **i**, **j** y **k**. La Figura 14.31 muestra cómo puede considerarse al vector de posición para $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ como la suma de los tres vectores correspondientes a $a_1\mathbf{i}$, $a_2\mathbf{j}$ y $a_3\mathbf{k}$.

Las reglas para la adición, sustracción y multiplicación por escalares pueden traducirse fácilmente a la notación con **i**, **j**, **k**, como se hizo en la Sección 14.1 para el caso de dos dimensiones. A menudo resulta conveniente considerar a V_2 como un subconjunto de V_3, identificando el vector $\langle a_1, a_2 \rangle$

con $\langle a_1, a_2, 0\rangle$. En este sentido, los vectores $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ son esencialmen los mismos que $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$.

EJEMPLO 5 Expresar $\mathbf{a} = \langle 3, -4, 2\rangle$ en términos de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ y encontrar un vect unitario $\mathbf{u}$ que tenga la misma dirección que $\mathbf{a}$.

Solución Puede escribirse

$$\mathbf{a} = \langle 3, -4, 2\rangle = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

La magnitud de $\mathbf{a}$ es

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{29}.$$

Como en el Teorema (14.12), el siguiente vector unitario $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{29}}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \frac{3}{\sqrt{29}}\mathbf{i} - \frac{4}{\sqrt{29}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{k} \quad \bullet$$

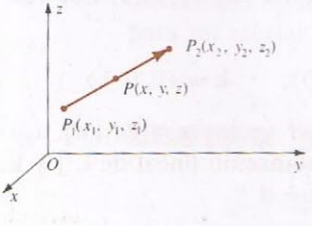
Para terminar esta sección, se deducirán algunas fórmulas útiles usando vector La primera se enuncia como sigue.

FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO (14.17)

El punto medio del segmento que va de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

FIGURA 14.32



Demostración Sea $P(x, y, z)$ el punto medio del segr to P_1P_2 (véase la Figura 14.32). El hecho de que P esté a dia distancia entre P_1 y P_2 se puede expresar en términ vectores como sigue:

$$\overrightarrow{P_1P} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} \quad \text{o bien} \quad \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1\rangle$$
$$= \tfrac{1}{2}\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$$

Igualando las componentes,

$$x - x_1 = \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1), \qquad y - y_1 = \tfrac{1}{2}(y_2 - y_1),$$
$$z - z_1 = \tfrac{1}{2}(z_2 - z_1).$$

Despejando de estas ecuaciones x, y, z se obtienen las coordenadas del punto me

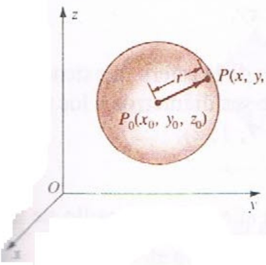
$$x = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \qquad y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad z = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2) \quad \bullet\ \bullet$$

EJEMPLO 6 Encontrar el punto medio del segmento que va de $(2, -3, 6)$ a $(3,$

Solución Los puntos se tienen en la Figura 14.25. Usando el Teorema (14 sultan las coordenadas del punto medio:

$$\left(\frac{2+3}{2}, \frac{-3+4}{2}, \frac{6+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \quad \bullet$$

FIGURA 14.33



La **gráfica de una ecuación** en tres variables x, y, z es el conjunto de todos los puntos $P(a, b, c)$ en un sistema de coordenadas rectangulares, tales que la terna ordenada (a, b, c) es solución de la ecuación; es decir, que al sustituir x, y, z en la ecuación por a, b y c, respectivamente, se obtiene una igualdad. La gráfica de una ecuación tal es una **superficie**. Es fácil obtener una ecuación que tenga como gráfica a la esfera de radio r con centro en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Como se ilustra en la Figura 14.33, un punto $P(x, y, z)$ está en la esfera si y sólo si $\|\overrightarrow{P_0P}\| = r$. Equivalentemente,

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r.$$

Elevando al cuadrado ambos lados de esta ecuación se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA (14.18)

La esfera de radio r y centro $P_0(x_0, y_0, z_0)$ tiene por ecuación

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Desarrollando los cuadrados en la expresión (14.18) y simplificando, se ve que esta ecuación de la esfera puede escribirse en la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

donde a, b, c y d son números reales. Inversamente, si se empieza con una ecuación de esta forma y la gráfica existe, completando cuadrados puede llegarse a la forma (14.18) y, por lo tanto, la gráfica es una esfera o un punto.

EJEMPLO 7 Describir la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 4z + 4 = 0.$$

Solución Completamos cuadrados como sigue:

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) + (z^2 + 4z) = -4$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) + (z^2 + 4z + 4) = -4 + 9 + 16 + 4$$

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (z + 2)^2 = 25$$

Comparando la última ecuación con (14.18), vemos que la gráfica es una esfera de radio 5 con centro (3, −4, −2). •

EJERCICIOS 14.2

Ejercicios 1-6: Sitúe los puntos A y B, y (a) calcule $d(A, B)$; (b) encuentre el punto medio de AB; (c) encuentre el vector en V_3 correspondiente a $\overrightarrow{AB}$.

1. $A(2, 4, -5)$, $B(4, -2, 3)$
2. $A(1, -2, 7)$, $B(2, 4, -1)$

3. $A(-4, 0, 1)$, $B(3, -2, 1)$

4. $A(0, 5, -4)$, $B(1, 1, 0)$

5. $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 1)$

6. $A(0, 0, 0)$, $B(-8, -1, 4)$

7. Demuestre el Teorema (14.5) para V_3.

8. Demuestre el Teorema (14.9) para V_3.

Ejercicios 9-14: Determine $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $5\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$, $\|\mathbf{a}\|$, $\|3\mathbf{a}\|$, $\|-3\mathbf{a}\|$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ y $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$.

9. $\mathbf{a} = \langle -2, 6, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, -3, -1\rangle$

10. $\mathbf{a} = \langle 1, 2, -3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -4, 0, 1\rangle$

11. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

12. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$

13. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{j} + \mathbf{k}$

14. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{k}$

Ejercicios 15-16: Trace los vectores de posición para $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $2\mathbf{a}$, $-3\mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

15. $\mathbf{a} = \langle 2, 3, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, -2, 2\rangle$

16. $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Ejercicios 17-18: Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que $\mathbf{a}$.

17. $\mathbf{a} = 2\langle -2, 5, -1\rangle$ **18.** $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

Ejercicios 19-20:

(a) Encuentre un vector que tenga la misma dirección y el doble de la magnitud que $\mathbf{a}$.

(b) Halle un vector que tenga la dirección opuesta y un tercio de la magnitud de $\mathbf{a}$.

(c) Encuentre un vector de magnitud 2 que tenga la misma dirección que $\mathbf{a}$.

19. $\mathbf{a} = 14\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ **20.** $\mathbf{a} = \langle -6, -3, 6\rangle$

Ejercicios 21-24: Encuentre una ecuación de la esfera con centro C y radio r.

21. $C(3, -1, 2)$, $r = 3$

23. $C(-5, 0, 1)$, $r = \frac{1}{2}$

22. $C(4, -5, 1)$, $r = 5$

24. $C(0, -3, -6)$, $r = \sqrt{3}$

25. Encuentre una ecuación de la esfera con centro $(-2, 4, -6)$ que sea tangente (a) al plano yz; (b) al plano xz; (c) al plano xy.

26. Encuentre una ecuación de la esfera que tiene como extremos de uno de sus diámetros a los puntos $A(1, 4, -2)$ y $B(-7, 1, 2)$.

Ejercicios 27-32: Determine el centro y el radio de la esfera que tiene la ecuación dada.

27. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z + 2 = 0$

28. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 10y + 6z + 34 = 0$

29. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 8z + 16 = 0$

30. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x + 8y - 3 = 0$

31. $x^2 + y^2 + z^2 + 4y = 0$

32. $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$

Ejercicios 33-36: Describa la región R en un sistema de coordenadas en tres dimensiones.

33. $R = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

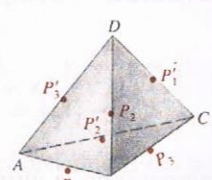
34. $R = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$

35. $R = \{(x, y, z): |x| \leq 1, |y| \leq 2, |z| \leq 3\}$

36. $R = \{(x, y, z): 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$

37. Demuestre que los segmentos P_1P_1', P_2P_2', P_3P_3' que unen los puntos medios de las aristas opuestas de un *tetraedro*, se cortan en un mismo punto P que divide en dos a cada segmento (vea la figura). (*Sugerencia:* Coloque el vértice D sobre el eje z y el triángulo ABC en el plano xy.)

EJERCICIO 37

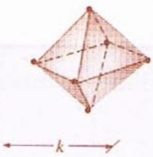


38. Un cubo tiene lados de longitud k. Los centros de las seis caras del cubo son los vértices de un *octaedro*, como se muestra en la figura.

(a) Halle las coordenadas de todos los vértices del octaedro.

(b) Calcule la longitud de las aristas del octaedro en términos de k.

EJERCICIO 38

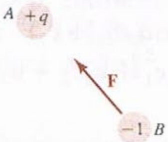


39. La *ley de Coulomb* afirma que la magnitud de la fuerza de atracción entre dos cargas eléctricas de signos opuestos, es proporcional al producto de las magnitudes q_1 y q_2 de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d que las separa. Demuestre que si una partícula con carga $+q$ se encuentra en un punto A y otra partícula con carga -1 se coloca en B (véase la figura), entonces la fuerza de atracción $\mathbf{F}$ sobre ésta última está dada por

$$\mathbf{F} = \frac{kq}{\|\overrightarrow{BA}\|^3}\overrightarrow{BA},$$

donde k es una constante positiva.

EJERCICIO 39



40. Consulte el Ejercicio 39. Se fijan partículas de carga eléctrica $+q$ en los tres puntos (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1) y se coloca otra carga -1 en $P(x, y, z)$.
   (a) Sea $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$. Demuestre que la fuerza total $\mathbf{F}$ sobre la partícula con carga negativa está dada por

$$\mathbf{F} = kq\left[\frac{\mathbf{v}-\mathbf{i}}{\|\mathbf{v}-\mathbf{i}\|^3} + \frac{\mathbf{v}-\mathbf{j}}{\|\mathbf{v}-\mathbf{j}\|^3} + \frac{\mathbf{v}-\mathbf{k}}{\|\mathbf{v}-\mathbf{k}\|^3}\right]$$

   (b) Se desea colocar la partícula con carga negativa en un punto $P(x, y, z)$ que equidiste de las tres cargas positivas de manera que la fuerza total que actúe sobre la partícula sea $\mathbf{0}$. Encuentre las coordenadas de P.

14.3 PRODUCTO ESCALAR

Dos de los conceptos importantes relacionados con dos vectores **a** y **b** son el *producto escalar*, que es desde luego escalar, y el *producto vectorial*, que es un vector. En esta sección se define el producto escalar y se aplica a varios problemas importantes de la física y las matemáticas. El producto vectorial se discute en la siguiente sección.

DEFINICIÓN (14.19) El **producto escalar** $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ de $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ es $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

El símbolo $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ se lee "**a** punto **b**". El producto escalar se llama asimismo **producto punto** (o **de punto**), o bien **producto interior**. Es importante tener presente que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ es un escalar y no un vector.

EJEMPLO 1 Calcular $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ para

(a) $\mathbf{a} = \langle 2, 4, -3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 5, 2\rangle$.

(b) $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Solución

(a) $\langle 2, 4, -3\rangle\cdot\langle -1, 5, 2\rangle = (2)(-1) + (4)(5) + (-3)(2) = 12$

(b) $(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})\cdot(4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = (3)(4) + (-2)(5) + (1)(-2) = 0$ •

En el siguiente teorema se enuncian algunas de las propiedades del producto escalar para cualesquiera vectores **a**, **b** y **c**, y cualquier escalar c.

TEOREMA (14.20)

(i) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$

(ii) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$

(iii) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$

(iv) $(c\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = c(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot(c\mathbf{b})$

(v) $\mathbf{0}\cdot\mathbf{a} = 0.$

Demostración Se demostrará (iii) y se dejan al lector las demostraciones de las otras propiedades. Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$, entonces

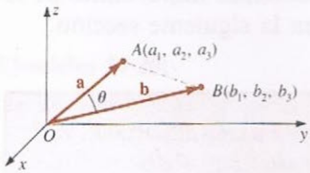
$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2, a_3\rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3\rangle \\
&= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\
&= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}
\end{aligned}$$

• •

El producto escalar y el ángulo entre dos vectores están estrechamente relacionados.

DEFINICIÓN DEL ÁNGULO ENTRE a Y b (14.21)

FIGURA 14.34



Sean **a** y **b** dos vectores diferentes de cero.

(i) Si **b** no es un múltiplo escalar de **a** y si $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son los vectores de posición de **a** y **b**, respectivamente, entonces **el ángulo** θ **entre a y b** (o entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$) es el ángulo AOB del triángulo determinado por los puntos A, O y B (véase la Figura 14.34).

(ii) Si $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para un escalar c (es decir, si **a** y **b** son paralelos), entonces $\theta = 0$ si $c > 0$ y $\theta = \pi$ si $c < 0$.

Se dice que dos vectores **a** y **b** son **ortogonales** (o **perpendiculares**), si $\theta = \pi/2$. Por convención, se dice que el vector cero **0** es paralelo y también perpendicular a todo vector **a**.

TEOREMA (14.22)

Si θ es el ángulo entre dos vectores **a** y **b** diferentes de cero, entonces

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta$$

Demostración Si $\mathbf{b} \neq c\mathbf{a}$, se tiene una situación como la que se ilustra en la Figura 14.34. Aplicando la Ley de los Cosenos al triángulo AOB,

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 \\ = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2\,\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\theta\end{aligned}$$

y simplificando,

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3 = -2\,\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\theta.$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación anterior entre -2 se obtiene lo que se quería demostrar.

Si $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$, entonces por las propiedades (iv) y (i) del Teorema (14.20),

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(c\mathbf{a}) = c(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) = c\,\|\mathbf{a}\|^2.$$

También

$$\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\theta = \|\mathbf{a}\|\,\|c\mathbf{a}\| \cos\theta = |c|\,\|\mathbf{a}\|^2 \cos\theta.$$

Si $c > 0$, entonces $|c| = c$, $\theta = 0$ y $|c|\,\|\mathbf{a}\|^2 \cos\theta$ se reduce a $c\|\mathbf{a}\|^2$. Por lo tanto, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\theta$. Si $c < 0$, entonces $|c| = -c$, $\theta = \pi$ y $|c|\,\|\mathbf{a}\|^2 \cos\theta$ otra vez se reduce a $c\|\mathbf{a}\|^2$. Esto completa la demostración del teorema. • •

Dividiendo entre $\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$ ambos lados de la fórmula en el Teorema (14.22) se obtiene lo siguiente.

COROLARIO (14.23) Si θ es el ángulo entre dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ diferentes de cero, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}.$$

EJEMPLO 2 Calcular el ángulo entre $\mathbf{a} = \langle 4, -3, 1\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -1, -2, 2\rangle$.

Solución Aplicando el Corolario (14.23),

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|} = \frac{(4)(-1) + (-3)(-2) + (1)(2)}{\sqrt{16+9+1}\sqrt{1+4+4}}$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{26}} = \frac{4\sqrt{26}}{78} = \frac{2\sqrt{26}}{39}$$

o bien $\qquad \theta = \arccos\,(2\sqrt{26}/39) \approx \arccos\,(0.2615).$

Usando una calculadora o consultando las tablas, se obtiene la aproximación

$$\theta \approx 74.84^\circ \approx 1.31 \text{ radianes}.$$ •

El siguiente teorema es consecuencia inmediata del Teorema (14.22).

TEOREMA (14.24) Dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales si y sólo si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.