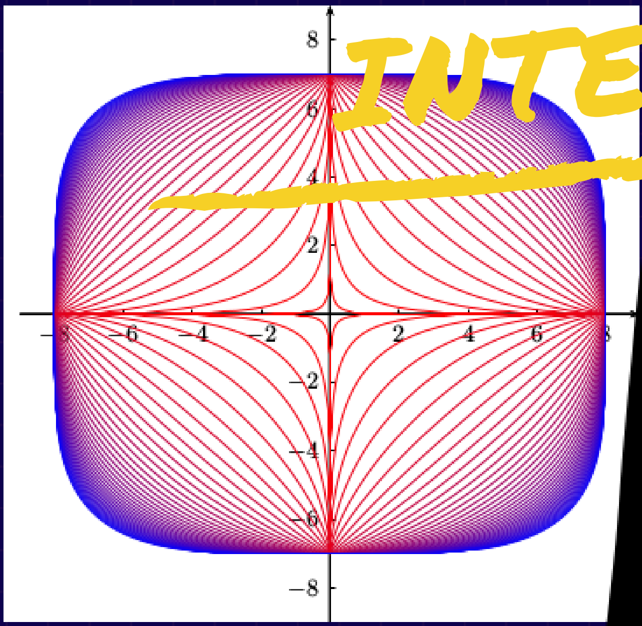
FACULTAD DE CIENCIAS

APUNTES DE CLASES DE CÁLCULO INTEGRAL



La única enseñanza que un profesor puede dar, en mi opinión, es la de pensar delante de sus estudiantes.
Henri Lebesgue

Temas:
Antiderivadas
La integral
Técnicas de integración
Las funciones logartimo y exponencial
Áreas y volúmenes
Coordenadas polares
Integrales impropias
Fórmula de Taylor

MSc. Johnny Valverde

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Apuntes de clase de Cálculo integral CM–132

Profesor: MSc. Johnny Valverde
Oficina R1-344
Delegada: Undg. Erika Cabrejos
mexxpre_15@hotmail.com
986784892

1 de septiembre del 2017

Índice general

Consejos

1. **Nota mínima en cada práctica calificada: 13**.
2. En cada examen y práctica calificada el alumno debe identificarse con su Documento Nacional de Identidad (DNI), apagar su celular y guardar en su mochila respectiva.
3. Estudiar todos los cursos.
4. Para los químicos hay trabajo, para los matemáticos hay mucho más oportunidades para desarrollarse.
5. No colocar $+C$, C: constante puede costar un punto de alguna pregunta de la práctica calificada.
6. Para aprender hay demostrar leer [3].
7. 48 horas.
8. Es importante para el profesor que el alumno logre contextualizar e interpretar los ejercicios.
9. Mis metas:
   - * Resolver las prácticas dirigidas: Despejar mis dudas.
   - ** Asistir a talleres de Cálculo integral, en caso de haberlo.
   - Gestión del tiempo.
   - Siempre es bueno la coordinación.
     Reclamo: ¬ 3 puntos más.

Capítulo 1

Capítulo 1

1.1. Antiderivada

Definición 1.1: Antiderivada

Se dice que una función $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *antiderivada* (también se le conoce como “primitiva”) de la función f en un intervalo $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ si $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathcal{I}$.

Ejemplo 1.1

Sean las funciones f, F dadas por

$$f(x) = 3x^2 + 1, \quad F(x) = x^3 + x$$

se tiene que $F'(x) = 3x^2 + 1 = f(x), \forall x \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$
luego F es antiderivada de f.

$\mathcal{I}$ es un intervalo.

Ejemplo 1.2

Se tienen las funciones f y F dadas por

$$f(x) = \cos x, \quad F(x) = \operatorname{sen} x$$

donde $F'(x) = \cos x = f(x), \forall x \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$
$\longrightarrow$ F es antiderivada de f.

Teorema 1.1

Las funciones F_1 y F_2 son antiderivadas de la función f sii $F_1(x) = F_2(x) + C,$ C: constante $\forall x \in \mathcal{I}$.
Demostración:
($\Longrightarrow$) F_1 y F_2 son antiderivadas de f

$$F_1'(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathcal{I}.$$
$$F_2'(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathcal{I}.$$

se cumple $F_1'(x) = f(x) = F_2'(x), \forall x \in \mathcal{I}$.

$$\Longrightarrow \; F_1'(x) = (F_2(x) + C)' \quad \forall x \in \mathcal{I}$$
$$\Longrightarrow \; F_1'(x) = F_2'(x) \quad \forall x \in \mathcal{I}$$
$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0$$
$$[F_1(x) - F_2(x) = 0]\,, \; \forall x \in \mathcal{I}$$

Por el teorema del cálculo diferencial, se tiene que

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \text{ C: constante }, \; \forall x \in \mathcal{I}$$

En consecuencia

$$F_1(x) = F_2(x) + C, \text{ C: constante} \quad \forall x \in \mathcal{I}$$

($\Longleftarrow$) Como $F_1(x) = F_2(x) + C, \; \forall x \in \mathcal{I}$ y para concluir que son antiderivadas de cierta función en el intervalo $\mathcal{I}$, entonces F_1 y F_2 deben ser diferenciables en $\mathcal{I}$, luego

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \; \forall x \in \mathcal{I}.$$

Derivando ambos miembros respecto a x se obtiene:

$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0, \; \forall x \in \mathcal{I}$$

de esto

$$F_1'(x) = F_2'(x), \; \forall x \in \mathcal{I}$$

definiendo una función f en el intervalo $\mathcal{I}$.
Como $f(x) = F_1'(x), \; \forall x \in \mathcal{I}$.
De esto F_1 es antiderivada de f, del mismo modo F_2 es antiderivada de f. ■

---

si y solo si
$F_1 \wedge F_2$ en un intervalo común.
Diferenciabilidad $\not\Rightarrow$ derivabilidad en $\mathbb{R}^n$, pero sí en $\mathbb{R}$. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, donde Ω es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, será diferenciable si existe una transformación lineal T tal que $f(x_0 + h) = f(x_0) + T(h) + \theta(h)$ y $\theta(h)$ cumple que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\|\theta(h)\|}{\|h\|} = 0$.

A partir de esto, se observa que basta hallar una antiderivada de F y a partir de esta se obtiene una familia de antiderivadas.
Así, se obtiene la "Antiderivada General" de una función f: $\boxed{f(x) = F(x) + C, \text{ C: constante}}$
donde F es una antiderivada cualquiera de f.

Ejemplo 1.3

$f(x) = e^x$ luego $F(x) = e^x$ es antiderivada de f. Entonces , la antiderivada general es

$$H(x) = e^x + C, \text{ C: constante}$$

1.2. Integral indefinida

La integral indefinida de una función f, denotada por $\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x}$ es la representación de la familia de antiderivadas de f (**"antiderivadas generales de f"**), esto es

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \text{ C: constante}}$$

donde F es una antiderivada de f.

Ejemplo 2.1

① $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C, \text{ C: constante}$

② $\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C, \text{ C: constante}$

③ $\int \sec\tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + C, \text{ C: constante}$

A partir de esto se puede construir una "tabla de integrales indefinidas"

$$\boxed{\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C, \text{ C: constante}}$$

$$\boxed{\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ C: constante }, n \neq 1}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C, \text{ C: constante}}$$

$$\boxed{\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C, \text{ C: constante}}$$

$$\boxed{\int \csc x \cot x\,\mathrm{d}x = -\csc x + C, \text{ C: constante}}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C, \text{ C: constante}}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C, \text{ C: constante}}$$

Observación 2.1

Como se cumple que

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \text{ sii } F'(x) = f(x),\ \forall x \in \mathcal{I}$$

de esto, se obtiene las propiedades:

a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right] = f(x)$.

[0] f es el integrando, es decir la función y x es la variable o indeterminada.

[0] El teorema de la derivada de la función inversa nos dice que dado $f(g(x)) = x$ la regla de la cadena nos da $f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$. Escribiendo $y = g(x)$ y $x = f(y)$, la regla se ve mejor: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$ o $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x}$. La pendiente de $x = g^{-1}(y)$ veces la pendiente de $y = g(x)$ es igual a uno.

b) $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$ C: constante .

Ejemplo 2.2

① $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int \left(3x^2 + 5x - 7\right)\mathrm{d}x\right] = 3x^2 + 5x - 7$ (aplicando a)

② $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C,$ C: constante (aplicando b)

Propiedad: Dadas las funciones $f, g\colon \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se cumple:

① $\displaystyle(f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$

② $\displaystyle\int K \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = K\int f(x)\,\mathrm{d}x,\ K$: constante

Ejemplo 2.3

$$\begin{aligned}\int (e^x + \operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x &= \int e^x\,\mathrm{d}x + \int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x\\ &= e^x + C_1 - \cos x + C_2; C_1, C_2: \text{ constante}\\ &= e^x - \cos x + C,\ \text{C: constante}\end{aligned}$$

$C = C_1 + C_2$

1.3. Métodos de integración

1.3.1. Métodos por sustitución

Ejemplo 3.1

Integrar por ejemplo

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x$$

Recordando:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \implies \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \mathrm{d}(\operatorname{sen} 2x)\\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C,\ \text{C: constante}\end{aligned}$$

Observación 3.1

Haciendo el cambio $\boxed{u = 2x} \longrightarrow du = 2\,\mathrm{d}x \longrightarrow \boxed{\mathrm{d}x = \frac{1}{2}du}$

Así $\displaystyle\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C$

esto se conoce como el método de sustitución. Así:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C\right)\\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C,\ \text{C: constante}\end{aligned}$$

Observación:

Teorema 3.1: Regla de la cadena para antiderivadas

Sea F una antiderivada de f en el intervalo I_x, φ es una función con derivada continua sobre el intervalo I_t, con $\varphi(I_t) \subset I_x$, entonces una primitiva de $f(\varphi(t)\cdot\varphi'(t))$ es $F(\varphi(t))$ en I_t.
Demostrar: Basta probar que

$$[F(\varphi(t))]' = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t), \forall t \in I_t$$

Por la regla de la cadena

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t), t \in I_t.$$

Como F es una antiderivada o primitiva de f en el intervalo I_x, entonces

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I_x$$

Si $x = \varphi(t)$, entonces $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$.
Luego:

$$[F(\varphi(t))]' = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) \quad \square$$

Observación 3.2

① Se impone que φ' sea continua en I_t para asegurar la existencia de

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

② $I = \displaystyle\int f(\varphi(x))\cdot\varphi^x\,\mathrm{d}x$

se hace el cambio $\boxed{u = \varphi(x)} \longrightarrow du = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$
entonces

$$I = \int f(u)\,du$$

Ejemplo 3.0: Integrar

$$I = \int \cos 4x\,\mathrm{d}x$$

Hacer $\boxed{u = 4x} \longrightarrow du = 4\,\mathrm{d}x \implies \boxed{\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,du}$

$$\begin{aligned}\longrightarrow \int \cos 4x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \cos u\,du\\ &= \frac{1}{4}\operatorname{sen} u + C, \text{ C: constante}\\ &= \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + C, \text{ C: constante}\end{aligned}$$

Es necesario expresar la respuesta con la variable incial.

Ejemplo 3.3

$$I = \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Hacer $u = x^3 + 1$, entonces $du = 3x^2\,\mathrm{d}x$
Reemplazando

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}\int u^{-1/2}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C, \text{ C: constante}$$

$$I = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C, \text{ C: constante}$$

Ejemplo 3.4

$$J = \int x^2 e^{4x^3+1}\,\mathrm{d}x$$

hacemos $u = 4x^3 + 1 \implies du = 12x^2\,\mathrm{d}x$
Luego:

$$\begin{aligned}J = \frac{1}{12}\int e^u\,du &= \frac{1}{12}e^u + C, \text{ C: constante}\\ &= \frac{e^{4x^3+1}}{12} + C, \text{ C: constante}\end{aligned}$$

Nota:Si $a \neq 0$, $\int f(u)\,du = F(u) + C$
haciendo el cambio

$$\boxed{u = ax + b}$$

entonces:

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \text{ C: constante}$$

Ejemplo 3.5

1) $\displaystyle\int \sec^2(4x+5)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\tan(4x+5) + C, \text{ C: constante}$

Observación $\boxed{a = 4}$

2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{16+x^2} = \frac{1}{16}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x}{4}\right) + C, \text{ C: constante}$

Haciendo $u = \dfrac{x}{4}$

Observación 3.3

Si hace el cambio $\boxed{u = f(x)}$ en la integral

$$\int [f(x)]^a \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x, a \neq 1$$

igual a $\displaystyle\int u^a\,du = \frac{[f(x)]^{a+1}}{a+1} + C,$ C: constante

Ejemplo 3.6

$I = \displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\,\mathrm{d}x$

$$\text{Pero, } \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sen} x = \cos x}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{sen}^3 x \cdot d(\operatorname{sen} x) \\ &= \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + C, \text{ C: constante} \end{aligned}$$

1.3.2. Método de integración por partes

Como $d(uv) = v\,du + udv$
$\longrightarrow udv = d(uv) - vdu$
Integrando:

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

Luego:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Ejemplo 3.7

1) $I = \displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$
Empleamos la técnica de "integración por partes":
$$\begin{aligned} I &= x\ln x - \int x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= x\ln x - \int \mathrm{d}x \\ &= x\ln x - x + C, \text{ C: constante} \end{aligned}$$

2)
$$
\begin{aligned}
I &= \int x\cos x\,\mathrm{d}x\\
&= x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x\\
&= x\operatorname{sen} x - (-\cos x) + C, \text{ C: constante}
\end{aligned}
$$

3)
$$
\begin{aligned}
J &= \int x\arctan x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{x^2}{2}\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{x^2}{2}\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\int\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\\
&= \frac{x^2}{2}\cdot\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x + C, \text{ C: constante}
\end{aligned}
$$

1.3.3. Fórmulas recurrentes

Ejemplo 3.8

$$I_n = \int x^n e^x\,\mathrm{d}x$$

Integrando por partes

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x^n & du = (n-1)x^{n-1}\,\mathrm{d}x\\ dv = e^x\,\mathrm{d}x & v = e^x \end{array}}$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
I_n &= x^n e^x - (n-1)\int x^{n-1}e^x\,\mathrm{d}x\\
\therefore I_n &= x^n e^x - (n-1)I_{n-1}
\end{aligned}
$$

Aplicación: $\boxed{n = 2}$

$$
\begin{aligned}
\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x &= x^2 e^x - (2-1)\int xe^x\,\mathrm{d}x\\
&= x^2 e^x
\end{aligned}
$$

Ejercicio reto

Veamos la siguiente integral solicitada por nuestro compañero de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de Ingeniería. Más información sobre su historia en [4].

$$\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x$$

Usemos la técnica de "integración por partes"

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \sec x & dv = \sec^2 x\,\mathrm{d}x\\ du = \sec x\tan x\,\mathrm{d}x & v = \tan x \end{array}}$$

Luego la expresión anterior resulta:

$$\begin{aligned}\int \sec^3 \mathrm{d}x &= uv - \int v\, du \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \tan x \cdot \sec x \tan x \, \mathrm{d}x \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot \tan^2 x \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Pero

$$\boxed{1 + \tan^2 x = \sec^2 x}$$

Reemplazando en la integral:

$$\begin{aligned}\int \sec^3 \mathrm{d}x &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot (\sec^2 x - 1)\, \mathrm{d}x \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x^3 x + \int \sec x \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Finalmente debemos hallar la

$$\boxed{\int \sec x \, \mathrm{d}x} \tag{1.1}$$

Pero antes conozcamos la historia de esta integral tan importante. Ahora, si a la integral incial

$$\int \sec\theta \, d\theta = \int \frac{d\theta}{\cos\theta}$$

multiplicamos por el factor unitario $\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta} = 1$, obtendremos

$$\int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta,$$

pero por la propiedad pitagórica mencionada anteriormente tenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta &= \int \frac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta && \text{ya que } \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1\, \forall x \in \mathbb{R} \\ &= \int \frac{\cos\theta}{(1-\operatorname{sen}\theta)(1+\operatorname{sen}\theta)} && \text{por factorización en diferencia de cuadrados} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\, d\theta && \text{por el método de “fracciones parciales”} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\, d\theta + \frac{1}{2}\int \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\, d\theta && \text{por la propiedad de linealidad de la integral}\end{aligned}$$

Si realizamos las siguientes sustituciones para cada integral respectivamente

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_1 = 1 - \operatorname{sen}\theta & du_1 = -\cos\theta\, d\theta \\ u_2 = 1 + \operatorname{sen}\theta & du_2 = \cos\theta\, d\theta \end{array}}$$

[0]Nótese que las representaciones $\int f(z)\, dz$ o $\int f(\Omega)\, d\Omega$ son equivalentes.

Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \sec\, d\theta &= -\frac{1}{2}\int \frac{du_1}{u_1} + \frac{1}{2}\int \frac{du_2}{u_2} && \text{reemplazando } u_1 \text{ y } u_2 \text{ por } \theta \\
&= -\frac{1}{2}\ln|u_1| + \frac{1}{2}\ln|u_2| + C, \text{ C: constante} \\
&= -\frac{1}{2}\ln|1-\operatorname{sen}\theta| + \frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{sen}\theta| + C, \text{ C: constante} && \text{por propiedad de logaritmo} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\right| + C, \text{ C: constante} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\right| + C, \text{ C: constante} && \text{multiplicamos por el factor unidad} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\operatorname{sen}\theta)^2}{\cos^2\theta}\right| + C, \text{ C: constante} \\
&= \cancel{\frac{1}{2}\cdot 2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right| + C, \text{ C: constante} && \text{por propiedad de logaritmo y simplificamos}
\end{aligned}$$

$$\therefore \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C, \text{ C: constante}$$

Pero nuestro problema inicial fue calcular

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x\, \mathrm{d}x &= \sec x\cdot\tan x - \int \sec x^3 x + \int \sec x\, \mathrm{d}x \\
&= \sec x\cdot\tan x - \int \sec x^3 x + \ln|\sec x + \tan x| + C, \text{ C: constante}
\end{aligned}$$

Despejando $\int \sec^3 x$ obtenemos:

$$\boxed{\therefore \int \sec^3 x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec x\cdot\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + \frac{C}{2}, \text{ C: constante}}$$

1.4. Sumatoria

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

Observación:

$$\sum_{i=m}^{n} = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$$

Ejemplo 4.1

① $\sum_{i=1}^{4}(2i+1) = (2(1)+1) + (2(2)+1) + (2(3)+1) + (2(4)+1)$

② $\sum_{i=5}^{8}\frac{i^2}{i+1} = \frac{5^2}{5+1} + \frac{6^2}{6+1} + \frac{7^2}{7+1} + \frac{8^2}{8+1}$

Propiedad:

1 $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k = c \sum_{k=m}^{n} a_k$; k: constante.

2 $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=m}^{n} a_k + \beta \sum_{k=m}^{n} b_k.$

3 $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{m-1}.$

4 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$

Ejemplo 4.2

Determine la suma

$$S = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n \times (n+1).$$

Solución:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \\
S &= \sum_{k=1}^{n} (k^2 + k) \\
S &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\
S &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3} + \frac{n(n+1)}{2} \\
S &= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} + 1\right) && \text{factorizamos } \frac{n(n+1)}{2}. \\
S &= \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} \cdot \left(\frac{\cancel{2} \cdot (n+2)}{3}\right) && \text{operamos el factor de la derecha.} \\
\therefore S &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \quad \square
\end{aligned}$$

1.4.1. Principio de Inducción Matemática

Sea $A \subset \mathbb{N}$ se cumple que

i $1 \in A$.

ii $(k+1) \in A$ siempre que $k \in A$.

Entonces $A = \mathbb{N}$ Ejemplo: Demostrar que:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solución: Veamos que se cumple

i $1 = \dfrac{1 \cdot (1+1)}{2}$

ii Supongamos que $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, es cierto para $k \in \mathbb{N}$.

[0] Conocida como propiedad telescópica

Veamos que se cumple para $(k+1)$:

$$
\begin{aligned}
&1+2+\ldots+k+(k+1) && \\
&=(1+2+3+\ldots+k)+(k+1) && \text{Asociatividad}\\
&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1) && \text{por hipótesis inductiva}\\
&=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) && \\
&=\frac{(k+1)\left((k+1)+1\right)}{2} &&
\end{aligned}
$$

Esto significa que se cumple para $k+1$, por el *Principio de inducción matemática* de i y iise tiene $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}, \forall n\in\mathbb{N}$. $\square$ Observación: El Principio de Inducción Matemática se emplea para probar la validez de una proposición $P(n), \forall n\in\mathbb{N}$ de la siguiente manera

i $P(1)$ es cierto (¡verificado!).

ii Si $P(k)$ es cierto, entonces $P(k+1)$ es cierto.

Entonces $P(n)$ es cierto, $\forall n\in\mathbb{N}$.

1.5. Integral definida

En esta parte del curso intentaremos definir el área de algunas regiones especiales según figura.
Se quiere determinar el área de una región de la forma
y se puede lograr con la integral.
Para ello pasaremos a definir algunos conceptos importantes.

Definición 5.1: Partición de un intervalo

Un conjunto P de puntos $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se dice que es una *partición del intervalo* $[a,b]$, si se cumple que:

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

es decir $P=\{x_k; k=0,1,2,\ldots,n\}$.

Definición 5.2: Norma de una partición

La norma de una partición $P=\{x_i\}_{i=0}^{n}$ de $[a,b]$ denotado por $\|P\|$, se define como sigue:

$$\|P\|=\max\{|x_k-x_{k-1}| \mid k=1,\ldots,n\}$$

La norma de una partición nos mide la "finura" de la partición.

Observación 5.1

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (longitud de I_k).

Ejemplo 5.1

$P=\{1;2;4;4,5;4,8;5\}$ es una partición de $[1,5]$

$\|P\| = \text{máx}\{(2-1); (4-2); (4,5-4); (4,8-4,5); (5-4,8)\}$
$\|P\| = \text{máx}\{1; 2; 0{,}5; 0; 3; 0,2\}$
$\|P\| = 2.$

Observación 5.2

En $[a,b]$ se forman subintervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Observación 5.3

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Observación 5.4

Cuando Δx_k tiene la misma longitud para cada I_k, diremos que que la partición $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ de $[a,b]$ es "regular", y en tal caso

$$x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right), \Delta x_k = \frac{b-a}{n}, \forall k = 0, \ldots, n.$$

Ejemplo 5.2

Por ejemplo si seleccionamos $P = \{0, \frac{a}{n}; \frac{2a}{n}; \frac{3a}{n}, \ldots, \frac{(n-1)a}{n}, a\}$ es una partición regular de $[0,a]$

$$\|P\| = \frac{a}{n}$$

y en estos casos se tiene que:

$$\boxed{x_k = x_0 + k\Delta x_k}\text{ , donde } \Delta x_k = \frac{b-a}{n}$$

Definición 5.3

Se dice que una función $f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada en $[a,b]$, si existen m y M reales tales que

$$m \leq f(x) \leq M \quad ; \forall x \in [a,b] .$$

Ahora tomamos una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ de $[a,b]$.
Para cada $k = 1, \ldots, n$ definimamos

$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \quad \text{y} \quad M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

Por tanto es claro que $\forall k = 1, 2 \ldots, n$; $m_k \leq f(x) \leq M_k, \forall x \in [x_{k-1}, x_k]$. Propiedad:
Se cumple que:

$$m \leq m_k \leq f(x) \leq M_k \leq M, \forall x \in [x_{k-1}, x_k]\, \forall k = 1, 2, \ldots, n$$

Prueba: Sea $k = 1, 2, \ldots, n$ cualquiera. Como $[x_{k-1}, x_k] \subset [a,b]$
$\Longrightarrow\ m \leq \inf_{[a,b]} f \leq m_k \leq f(x) \leq \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \leq M_k \leq \sup_{[a,b]} f \leq M$
Por consiguiente
$m \leq m_k \leq f(x) \leq M_k \leq M$; $\forall x \in [x_{k-1}, x_k]$; $\forall k = 1, 2, \ldots, n \quad \square$.

Definición 5.4: Conjunto de particiones

Siendo $\mathcal{P}[a,b] = \{$conjunto de particiones de $[a,b]\}$. Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\} \in \mathcal{P}[a,b]$, entonces

a) *La suma superior de f con respecto a la partición P* se denota por $U(f,P)$ y se define como:

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \left(x_k - x_{k-1}\right).$$

b) *La suma inferior de f con respecto a la partición P* se denota por $L(f,P)$ y se define como:

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k - x_{k-1}\right).$$

Propiedad: $\forall P \in \mathcal{P}[a,b] : L(f,P) \leq U(f,P)$.
Prueba: Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ se tiene: $m_k \leq M_k$. Por tanto, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq &\quad M_k(x_k - x_{k-1}) \\ \text{Sumando miembro a miembro} \quad \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq &\quad \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) \\ L(f,P) \leq &\quad U(f,P) \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$L(f,P) \leq U(f,P)$$

Ejemplo 5.3

Sea la función $f\colon\ [1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, entonces f es acotada en $[1,3]$ porque $1 \leq f(x) \leq 9, \forall x \in [1,3]$.

Definición 5.5

Se tiene una función $f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada, una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$. Se definen los números

$$m_k = \inf\{f(x) \mid x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]\}$$
$$M_k = \sup\{f(x) \mid x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]\}$$

Observación 5.5

Observación: En el caso de que f es creciente en $[a,b]$ con $f > 0$.
Se definen

$$\boxed{L(f;P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k} \quad \text{“suma inferior”}$$

$$\boxed{U(f;P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k} \quad \text{“suma superior”}$$

Propiedad: Se cumple que
$$m \leq m_k \leq M_k \leq M, \forall k = 1, 2, \dots, n.$$
Sea $P\,[a,b]$ el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.
Propiedad: Se cumple que
$$\forall p \in P\,[a,b] \text{ se tiene que } m(b-a) \leq L(f;P) \leq U(f;P) \leq M(b-a).$$
Prueba: Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}\,[a,b]$ cualquiera. De la propiedad 3.3 se tiene que:
$$m \leq m_k \leq M_k \leq M, \forall k = 1, 2, \dots, n$$
multiplicando por Δx_k se obtiene
$$m\Delta x_k \leq m_k \Delta x_k \leq M_k \Delta x_k \leq M\Delta x_k, \forall k = 1, 2, \dots, n$$
Sumando cada una de estas n desigualdades
$$\sum_{k=1}^{n} m\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M\Delta x_k, \forall k = 1, 2, \dots, n$$
Comentario: La suma superior a disminuir con respecto a la otra suma.
Cuando tienes un refinamiento la suma interior tiende a crecer.
Proposición: Sea $P, Q \in \mathcal{P}\,[a,b]$. Si $P \subset Q$, entonces

a) $L(f,P) \leq L(f,Q)$

b) $U(f,Q) \leq U(f,P)$

Demostración: Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Sea $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ en $[a,b]$ tal que $x_0 < c_1 < x_1 < c_2 < x_2 \cdots < x_{n-1} < c_n < x_n$ de este modo $Q = P \cup \{c_i\}_{i=1}^{n}$ es una partición de $[a,b]$ y $P \subset Q$; esto es Q es un refinamiento de P. Nota: Se cumple:

a) $\text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1},x_k]}\right) \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq \text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1},c_k]}\right) \cdot (c_k - x_{k-1}) + \text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1},c_k]}\right) \cdot (c_k - x_{k-1})$

b) $\sup\left(f\big|_{[x_{k-1},c_k]}\right) \cdot (c_k - x_{k-1}) + \sup\left(f\big|_{[c_k,x_k]}\right) \cdot (x_k - c_k) \leq \sup\left(f\big|_{[x_{k-1},x_k]}\right) \cdot (x_k - x_{k-1})$

Observación 5.6

$$\text{ínf}\left(f\big|_{[c,d]}\right) = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in [c,d]\}$$
Aplicando a, en cada $I_k = [x_{k-1}, x_k]\,, k = 1, 2, \dots, n$.
Sumando las n desigualdades:
$$\sum_{k=1}^{n} \text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1},x_k]}\right) \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} \left[\text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1},c_k]}\right)(c_k - x_{k-1}) + \text{ínf}\left(f\big|_{[c_k,x_k]}\right)(x_k - c_k)\right]$$
Entonces,
$$L(f,P) \leq L(f,Q)$$
De manera similar aplicando b (de la nota) se prueba la segunda.

Observación 5.7

De a se nota que cuando se refinan una partición, la suma inferior crece. En cambio, de b se tiene que cuando se refina la suma superior decrece.
Así, se obtiene $\{L(f;P) \mid p \in \mathcal{P}\,[a,b]\}$ el cual es acotado superiormente porque $L(f;P) \leq M(b-a); \forall P \in \mathcal{P}\,[a,b]$ y no vacío. (¿Por qué?).
Entonces el conjunto $\{L(f,P) \mid P \in \mathcal{P}\,[a,b]\}$ posee supremo. De esto se define la “integral inferior” de la

función acotada f en $[a,b]$, denotado por

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,P) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

De manera similar se obtiene el conjunto $\{U(f,P) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\}$, el cual es no vacío y acotado inferiormente porque $m(b-a) \leq U(f,P), \forall P \in \mathcal{P}[a,b]$. En consecuencia posee ínfimo.

De esta manera se define "Integral superior de la función acotada f en $[a,b]$", denotado por $\overline{\int_a^b} f$, como

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f,P) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

Definición 5.6

Sea la función acotada $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice que f es integrable según Riemann si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso, se define la integral definida de la función f en $[a,b]$, denotada por $\int_a^b f$ como

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Como se cumple:

$$m(b-a) \leq L(f;P) \leq U(f;P) \leq M(b-a)$$

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq L(f,Q) \leq U(f;Q) \leq U(f,P) \leq M(b-a)\ \forall P,Q \in \mathcal{P}[a,b] \text{ con } P \subset Q.$$

Fijando la partición P, se tiene que

$$\{L(f,Q) \mid Q \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

está acotada superiormente por $U(f,P)$, esto es, $U(f,P)$ es una cota superior de $\{L(f,Q) \mid Q \in \mathcal{P}[a,b]\}$ entonces

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f \leq U(f,P)}$$

porque $\underline{\int_a^b} f$ es supremo o mínima cota superior. De esto último $\underline{\int_a^b} f$ es una cota inferior de $\{U(f,P) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\}$ pero el ínfimo de este conjunto es $\underline{\int_a^b} f$, entonces $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Así, se tiene el siguiente

Teorema 5.1: Definición de Darboux de $\int_a^b f$

Una función definida y acotada en $[a,b]$ es **integrable** en $[a,b]$ si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso el valor común de $\underline{\int_a^b} f$ y $\overline{\int_a^b} f$ es llamado la (definida) **integral de Riemann** de f sobre $[a,b]$, y es simplemente denotada $\int_a^b f$.

Observación 5.8: Observación en la notación

En algunos libros de Análisis no es usada la notación común $\int_a^b \mathrm{d}x$, familiar del cálculo elemental porque en la definición de integral definida los símbolos x y $\mathrm{d}x$ no juegan un rol. La notación correcta indica que todo lo que necesitamos son la función y el intervalo. Sin embargo, en ejemplos concretos frecuentemente encontraremos más útil usar la notación familiar $\int_a^b \mathrm{d}x$.

Ejemplo 5.4

Una **función constante** $f(x) = c$ es integrable sobre $[a,b]$, y $\int_a^b f = c(b-a)$.
Prueba: Para cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$, y para cualquier $k = 1, 2, \cdots, n$,

$$m_k = c = M_i, \text{ entonces}$$

$$L(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_i \Delta_i = \sum_{k=1}^{n} c\Delta_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta_k = c(b-a),$$

y además, $\underline{\int_a^b} f = c(b-a)$. Similarmente, para cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$,

$$U(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k = \sum_{k=1}^{n} c\Delta_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta_k = c(b-a),$$

y además $\overline{\int_a^b} f = c(b-a)$. Por lo tanto, $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = c(b-a)$, de lo cual se sigue la conclusión deseada.
□

$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \text{ínf}\,(f, I_k)\,\Delta x_k$, pero $\text{ínf}\,(f; I_k) = 5$, entonces $L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} 5 \cdot \Delta x_k = 5\left(\sum_{k=1}^{n} \Delta I_k\right) = 5(3-1) = 10, \forall P \in \mathcal{P} \in [1,3]$.
De esto $\underline{\int_1^3} f = 10$.
De manera similar

$$\sup\,(f, I_k) = 5$$

Entonces:

$$\begin{aligned} U(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} \sup(f, I_k)\cdot \Delta I_k \\ &= 5(3-1) = 10,\ \forall P \in \mathcal{P}[1,3]. \end{aligned}$$

De esto $\overline{\int_1^3} f = 10$.
Como $\underline{\int_1^3} f = \overline{\int_1^3} f = 10$.
Entonces f es integrable según Riemann
$\therefore \int_1^3 f = 10$.

Ejemplo 5.6: Una función no integrable

La **función de Dirichlet** dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$ es no integrable en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$, donde $a < b$.
Prueba: Supongamos que $a < b$. Para cualquier partición $\mathcal{P}[a,b]$, y para cualquier $k = 1, 2, \cdots, n$, tenemos $m_k = 0$, y $M_k = 1$, entonces

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k = \sum_{k=1}^{n} 0\Delta_k = 0,\ \text{ y por lo tanto, } \underline{\int_a^b} f = 0. \text{ Similarmente,}$$

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k = \sum_{k=1}^{n} 1\Delta_k = (b-a),\ \text{ y por lo tanto, } \overline{\int_a^b} f = (b-a).$$

Por lo tanto, $\underline{\int_a^b} f \neq \overline{\int_a^b} f$, de lo cual se sigue que f no es integrable en $[a,b]$. $\square$
$f\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ para una partición P de $[0,2]$ se tiene que

$$f(I_k) = \{0;1\} \text{ para cualquier partición } P \text{ de } [0,2].$$

$$\sup\left(f\big|_{I_k}\right) = 1$$

entonces

$$\begin{aligned} L(f,P) &= 0 \\ S(f,P) &= \sum 1\cdot \Delta I_k = 1\cdot \sum \Delta I_k = 2. \end{aligned}$$

$\underline{\int_0^2} f = 0;\ \overline{\int_0^2} f = 2.$
Como

$$\underline{\int_0^2} f \neq \overline{\int_0^2} f$$

entonces f no es integrable según Riemann.

Ejemplo 5.6: Función característica de un intervalo cerrado

Consideremos la función característica de un intervalo cerrado, sea $f = \chi_{[1,3]}$, dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$.

Pruebe que f es integrable en $[0,5]$ y encuentre $\int_0^5 f$.
Solución:
Nuestra comprensión intuitiva de la integral como área nos lleva a esperar que $\int_0^2 f = 2$, entonces empecemos con esa expectativa.

a) Sea $\mathcal{P} = \{0,1,3,5\}$. Luego $\mathcal{P}$ es una partición de $[0,5]$, y

$$\begin{aligned} L(f,P) &= m_1\Delta_1 + m_2\Delta_2 + m_3\Delta_3 \\ &= 0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $\underline{\int_0^5} f$ es el supremo de todas las sumas inferiores, $\underline{\int_0^5} f \geq L(f,P) = 2$.

b) Sea $0 < \varepsilon < 1$, y sea $\mathcal{Q} = \{0, 1-\frac{\varepsilon}{2}, 3+\frac{\varepsilon}{2}, 5\}$. Entonces $\mathcal{Q}$ es una partición de $[0,5]$, y

$$\begin{aligned} U(f,P) &= M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2 + M_3\Delta_3 \\ &= 0(1-\frac{\varepsilon}{2}) + 1(2+\varepsilon) + 0(2-\frac{\varepsilon}{2}) \\ &= 2+\varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $\overline{\int_0^5} f$ es el ínfimo de todas las sumas superiores, $\overline{\int_0^5} f \leq U(f,\mathcal{Q}) = 2+\varepsilon$. Además, $\forall \varepsilon > 0$, $\overline{\int_0^5} f \leq 2+\varepsilon$. Por lo tanto, por el principio de fuerza, $\overline{\int_0^5} f \leq 2$.

c) Tomando (a) y (b) juntos con el teorema,

$$2 \leq \underline{\int_0^5} f \leq \overline{\int_0^5} f \leq 2.$$

Esto es, $\underline{\int_0^5} f = \overline{\int_0^5} f = 2$. Por lo tanto, f es integrable en $[0,5]$, y $\int_0^5 f = 2$. $\square$

Recordando: Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Si A es

a) $c = \sup(A) \iff \begin{array}{r} x \leq c, \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A \mid c < x_0 + \varepsilon \end{array}$

b) $d = \text{ínf}(A) \iff \begin{array}{r} d \leq x, \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A \mid x_0 - \varepsilon < d \end{array}$

Para una función acotada $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se definió:

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,P) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\}}$$

$$\boxed{\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{U(f,P) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\}}$$

Propiedad: Sea la función $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es integrable sobre $[a,b]$, entonces para $\varepsilon > 0$, existen $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que se cumple:

$$\int_a^b f - \varepsilon < L(f,P_1) \leq \int_a^b f \leq U(f;P_2) < \int_a^b f + \varepsilon$$

Demostración
Aplicar definición de supremo e ínfimo.
Propiedad: Sea la función $f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable. Para $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}\,[a,b]$ tal que

$$\boxed{\int_a^b f - \varepsilon < L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P) < \int_a^b f + \varepsilon}$$

Demostración: De la anterior proposición tomar $P = P_1 \cup P_2$ (P es refinamiento de P_1 y P_2).
De esto último

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &\leq \int_a^b +\varepsilon - \left(\int_a^b f - \varepsilon\right) \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

Así se obtiene:
Proposición: Sea $f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}\,[a,b]$ tal que

$$U(f,P) - L(f,P)\varepsilon$$

Proposición:Sea $f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}\,[a,b]$ de modo que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$, entonces f es integrable según Riemann en $[a,b]$.
Proposición: Para una función $f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada las dos proposiciones son equivalentes.

Bibliografía

[1] Charles G Denlinger. *Elements of real analysis*. Jones & Bartlett Publishers, 2011.

[2] A. D. Fitt and G. T. Q. Hoare. The closed-form integration of arbitrary functions. *The Mathematical Gazette*, 77(479):227–236, 1993.

[3] Norman B Hasser, J La Salle, and J Sullivan. Análisis matemático vol. 1. *Editorial Trillas*, 2009.

[4] V. Frederick Rickey and Philip M. Tuchinsky. An application of geography to mathematics: History of the integral of the secant. *Mathematics Magazine*, 53, 05 1980.