Sexta práctica dirigida de Cálculo integral CM 132 Ciclo 2017-2

FACULTAD DE CIENCIAS | UNI

Undg. Carlos Alonso Aznarán Laos
E-mail: caznaranl@uni.pe
Science Department, National University of Engineering

Temas: Centroide de una región plana, modelos matemáticos basados en ecuaciones diferencias ordinarias, ecuaciones diferenciales lineales, convergencia de integrales impropias.

---

1. Halle el centroide del área acotada por las curvas $y = x^2, y = \sqrt{x}$.

   Para resolver satisfactoriamente los primeros tres ejercicios utilizaremos la siguiente definición:

   Definición 1 (Cálculo del centro de masa)**.** *Sea L la lámina homogénea cuya densidad de área constante es $k\,\mathrm{kg/m^2}$ y la cual se encuentra delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. La función f es continua en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$. Si $\mathscr{M}_y\,\mathrm{kg\,m}$ es el **momento de masa de la lámina L con respecto al eje y**, entonces*

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_y &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k_{\gamma_i} f(\gamma_i)\Delta_i x \\ &= k\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

   *$\mathscr{M}_x\,\mathrm{kg\,m}$ es el **momento de masa de la lámina L con respecto al eje x**, entonces*

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_x &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}k[f(\gamma_i)]^2\Delta_i x \\ &= \frac{1}{2}k\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

   *Si M kilogramos es la **masa total de la lámina** L, entonces*

$$\begin{aligned}M &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k f(\gamma_i)\Delta_i x \\ &= k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

   *Si $(\bar{x}, \bar{y})$ es **centro de masa de la lámina** L, entonces*

$$\bar{x} = \frac{\mathscr{M}_y}{M} \quad e \quad \bar{y} = \frac{\mathscr{M}_x}{M}.$$

   Sustituyendo las expresiones $\mathscr{M}_x, \mathscr{M}_y$ y M, se obtiene

$$\bar{x} = \frac{k\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x}{k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} \quad e \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}k\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x}{k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Al dividir el numerador y el denominador entre k, obtenemos

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} \quad y \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

En estas fórmulas, el denominador es el número de unidades cuadradas del área de la región y así hemos expresado un problema físico en términos de uno geométrico. Es decir, $\bar{x}$ y $\bar{y}$ pueden ser consideradas como la abscisa promedio y la ordenada promedio, respectivamente, de una región geométrica. En tal caso, $\bar{x}$ y $\bar{y}$ dependen solamente de la región y no de la masa de la lámina. Así nos referimos al centro de la masa de una región plana en lugar del centro de masa de una lámina homogénea. En tal caso, llamamos ***centroide*** *al centro de masa de la región. En lugar de momentos de masa, consideraremos ahora los momentos de la región.*

Solución:

Del gráfico (1), y de la definición (1), tenemos que:

$$\mathscr{M}_x = \frac{k}{2}\int_0^1 \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right)\mathrm{d}x$$
$$\mathscr{M}_x = \frac{k}{2}\int_0^1 \left(x - x^4\right)\mathrm{d}x$$
$$\mathscr{M}_x = \frac{k}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1$$
$$\mathscr{M}_x = \frac{3k}{20}\,\mathrm{kg\,m}.$$

$$\mathscr{M}_y = k\int_0^1 x\left(f(x) - g(x)\right)\mathrm{d}x$$
$$\mathscr{M}_y = k\int_0^1 x\left(x^{1/2} - x^2\right)$$
$$\mathscr{M}_y = k\left(\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1$$
$$\mathscr{M}_y = \frac{3k}{20}\,\mathrm{kg\,m}.$$

$$M = k\int_0^1 \left(x^{1/2} - x^2\right)\mathrm{d}x$$
$$M = k\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1$$
$$M = \frac{k}{3}\,\mathrm{kg}.$$

Entonces,

$$\bar{x} = \frac{\mathscr{M}_y}{M}$$
$$\bar{x} = \frac{\frac{3k}{20}\,\mathrm{kg\,m}}{\frac{k}{3}\,\mathrm{kg}}$$
$$\bar{x} = \frac{9}{20},\mathrm{m}.$$

$$\bar{y} = \frac{\mathscr{M}_x}{M}$$
$$\bar{y} = \frac{\frac{3k}{20}\,\mathrm{kg\,m}}{\frac{k}{3}\,\mathrm{kg}}$$
$$\bar{y} = \frac{9}{20},\mathrm{m}.$$

El centroide de la región se halla en el punto $P = \left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20}\right)$ en coordenadas cartesianas o $P = \left(\frac{9}{20}, \frac{\pi}{4}\right)$ en coordenadas polares.

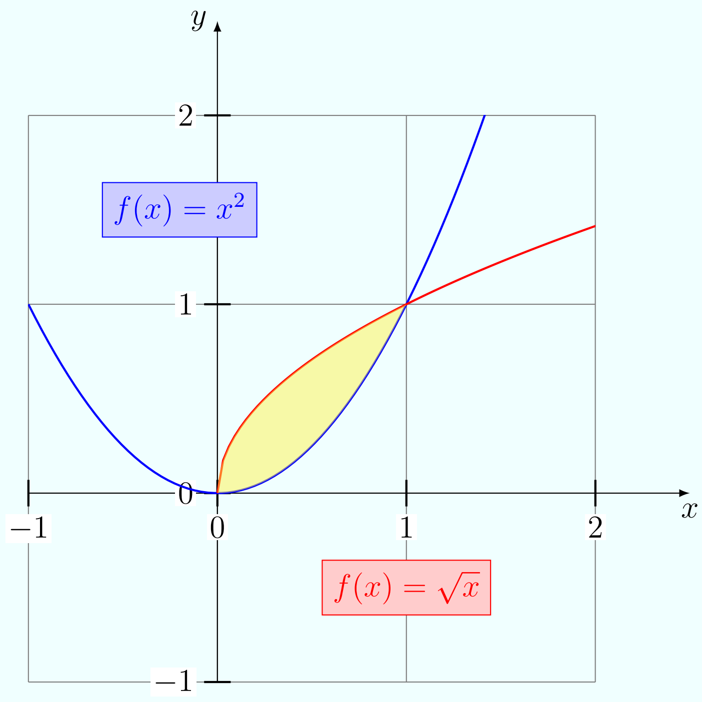

Figura 1: Área acotada por las curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

2. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del primer arco de la cicloide $x = a\,(t - \operatorname{sen} t)\,, y = a\,(1 - \cos t)$.

Solución:

Del gráfico (2) y de la parametrización de la cicloide α:

$$\begin{aligned} \alpha\colon\ [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (a(t - \operatorname{sen} t), a(1 - \cos t)) \end{aligned}$$

Primero hallemos la longitud del primer arco de la cicloide, esto es, cuando $t \in [0, 2\pi]$, dada por la integral:

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, \mathrm{d}t$$
$$\ell(\mathcal{C}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1-\cos t)]^2 + [a(\operatorname{sen} t)]^2}\, \mathrm{d}t$$
$$\ell(\mathcal{C}) = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\, \mathrm{d}t$$
$$\ell(\mathcal{C}) = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\, \mathrm{d}t$$
$$\ell(\mathcal{C}) = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)}\, \mathrm{d}t$$
$$\ell(\mathcal{C}) = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t$$
$$\ell(\mathcal{C}) = -4a\sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$
$$\ell(\mathcal{C}) = -4a\sqrt{2}\left[\cancelto{-1}{\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)} - \cancelto{1}{\cos\left(\frac{0}{2}\right)}\right]$$
$$\ell(\mathcal{C}) = 8a\sqrt{2}$$

Ahora que hemos calculado la longitud del primer arco de la cicloide, determinemos la coordenada $\bar{x}$ del centro de gravedad:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{2\pi} x(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, \mathrm{d}t}{\ell(\mathcal{C})}$$
$$\bar{x} = \frac{\int_0^{2\pi} a(t - \operatorname{sen} t)\sqrt{[a(1-\cos t)]^2 + [a(\operatorname{sen} t)]^2}\, \mathrm{d}t}{\ell(\mathcal{C})}$$
$$\bar{x} = \frac{a^2\int_0^{2\pi}(t - \operatorname{sen} t)\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\, \mathrm{d}t}{\ell(\mathcal{C})}$$
$$\bar{x} = \frac{a^2\int_0^{2\pi}(t - \operatorname{sen} t)\sqrt{2(1-\cos t)}\, \mathrm{d}t}{\ell(\mathcal{C})}$$
$$\bar{x} = \frac{2a^2\int_0^{2\pi}(t - \operatorname{sen} t)\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)}\, \mathrm{d}t}{\ell(\mathcal{C})}$$
$$\bar{x} = \frac{2a^2\int_0^{2\pi}(t - \operatorname{sen} t)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t}{\ell(\mathcal{C})}$$
$$\bar{x} = \frac{2a^2\left[\int_0^{2\pi} t\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t\right]}{\ell(\mathcal{C})}$$

Resolviendo la **integral azul** por integración por partes:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{2\pi} t \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t \\
I_1 &= -2x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x \\
I_1 &= -2\left[2\pi\left(\cancelto{-1}{\cos\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}}\right) - 0\cancelto{1}{\cos\left(\frac{0}{2}\right)}\right] + 2\cdot 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} \\
I_1 &= -2\left[-2\pi - 0\right] + 4\left[\cancelto{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}\right)} - \cancelto{0}{\operatorname{sen}\left(\frac{0}{2}\right)}\right] \\
I_1 &= 4\pi + 4.
\end{aligned}
$$

Resolviendo la **integral roja** por método de la u- sustitución:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t \\
I_2 &= \int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}t \\
I_2 &= 2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Pero si $u = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \implies \mathrm{d}u = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}u$, y cuando $x = 0$ y $x = 2\pi$, el valor de u es 0 y 0 respectivamente.

$$
I_2 = \int_0^0 u^2\,\mathrm{d}u = \frac{u^3}{3}\Big|_0^0 = 0
$$

Reemplazando resulta:

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{2a^2\left[\int_0^{2\pi} t\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\operatorname{sen} t\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t\right]}{\ell(\mathcal{C})} \\
\bar{x} &= \frac{2a^{\cancel{2}}\left[4\pi + 4 - 0\right]}{8\cancel{a}\sqrt{2}} \\
\bar{x} &= \left(\frac{\pi + 1}{\sqrt{2}}\right)\ \mathrm{m}.
\end{aligned}
$$

Ahora, calculemos la coordenada $\bar{y}$ del centro de gravedad:

$$\bar{y} = \frac{\int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t}{\ell(\mathcal{C})}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{[a(1-\cos t)]^2 + [a(\operatorname{sen} t)]^2}\,\mathrm{d}t}{\ell(\mathcal{C})}$$

$$\bar{y} = \frac{a^2\int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t}{\ell(\mathcal{C})}$$

$$\bar{y} = \frac{a^2\int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t}{\ell(\mathcal{C})}$$

$$\bar{y} = \frac{2a^2\int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t}{\ell(\mathcal{C})}$$

$$\bar{y} = \frac{2a^2\int_0^{2\pi} (1-\cos t)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t}{\ell(\mathcal{C})}$$

$$\bar{y} = \frac{2a^2\left[\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\cos t\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t\right]}{\ell(\mathcal{C})}$$

Resolviendo la **integral azul** por integración directa:

$$I_3 = \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$$

$$I_3 = -2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$I_3 = -2\left[\cancelto{-1}{\cos\left(\frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{2}}\right)} - \cancelto{1}{\cos\left(\frac{0}{2}\right)}\right]$$

$$I_3 = 4$$

Resolviendo la **integral roja** por método de la u- sustitución:

$$I_4 = \int_0^{2\pi}\cos t\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi}\left[\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi}\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi}\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi}\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$$

$$I_4 = 2\int_0^{2\pi}\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$$

Pero si $u = \cos\left(\frac{t}{2}\right) \implies \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$, resulta:

$$
\begin{aligned}
I_4 &= -4\int_1^{-1} u^2\,\mathrm{d}u - \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t \\
I_4 &= 4\int_{-1}^{1} u^2\,\mathrm{d}u + 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} \\
I_4 &= 4\cdot\frac{u^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + 2\left[\cancelto{-1}{\cos\left(\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}\right)} - \cancelto{1}{\cos\left(\frac{0}{2}\right)}\right] \\
I_4 &= \frac{4}{3}\left[1^3 - (-1)^3\right] - 4 \\
I_4 &= -\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Reemplazando resulta:

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{2a^2\left[\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\cos t\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t\right]}{\ell(\mathcal{C})} \\
\bar{y} &= \frac{2a^{\cancel{2}}\left[4 - \frac{4}{3}\right]}{8\cancel{a}\sqrt{2}} \\
\bar{y} &= \frac{a\sqrt{2}}{3}\ \mathrm{m}.
\end{aligned}
$$

Así, obtenemos las coordenadas del centro de masa $(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{\pi+1}{\sqrt{2}}, \frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$.

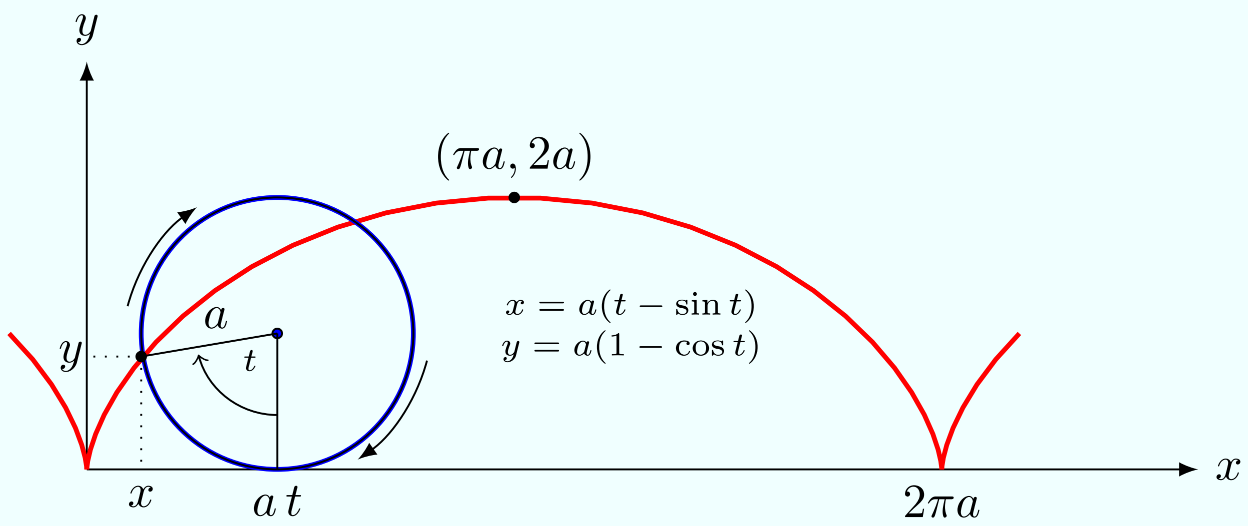

Figura 2: Primer arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ cuando $t \in [0, 2\pi]$.

3. Encontrar el centroide de un arco de la catenaria $y = 4\cosh\left(\frac{x}{4}\right)$ desde $x = -4$ hasta $x = 4$.

Solución:

Del gráfico (3), y de la definición (1), tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{M}_x &= \frac{k}{2}\int_{-4}^{4} f^2(x)\,\mathrm{d}x\\
\mathscr{M}_x &= \frac{k}{2}\int_{-4}^{4} \left[4\cosh\left(\frac{x}{4}\right)\right]^2\mathrm{d}x\\
\mathscr{M}_x &= 8k\int_{-4}^{4} \cosh^2\left(\frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x\\
\mathscr{M}_x &= \cancelto{4}{8}\,k\int_{-4}^{4} \frac{1+\cosh(2x)}{\cancel{2}}\,\mathrm{d}x\\
\mathscr{M}_x &= 4k\left[\int_{-4}^{4}\mathrm{d}x + \int_{-4}^{4}\cosh(2x)\,\mathrm{d}x\right]\\
\mathscr{M}_x &= 4k\left[x\Big|_{-4}^{4} + \left.\frac{\operatorname{senh}(2x)}{2}\right|_{-4}^{4}\right]\\
\mathscr{M}_x &= 4k\left[(4+4) + \frac{(\operatorname{senh}(8)-\operatorname{senh}(-8))}{2}\right]\\
\mathscr{M}_x &= 4k\left[8+\operatorname{senh}(8)\right]\ \text{kg}\,\text{m}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{M}_y &= k\int_{-4}^{4} x\,(f(x))\,\mathrm{d}x\\
\mathscr{M}_y &= k\int_{-4}^{4} x\left[4\cosh\left(\frac{x}{4}\right)\right]\mathrm{d}x\\
\mathscr{M}_y &= 4k\left[(x\operatorname{senh}(x))\Big|_{-4}^{4} - \int_{-4}^{4}\operatorname{senh}(x)\,\mathrm{d}x\right]\\
\mathscr{M}_y &= 4k\left[(4\operatorname{senh}(4)+4\operatorname{senh}(-4)) - \cosh(x)\Big|_{-4}^{4}\right]\\
\mathscr{M}_y &= 4k\left[\cancelto{0}{-(\cosh(4)-\cosh(-4))}\right]\\
\mathscr{M}_y &= 0k\,\text{kg}\,\text{m}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M &= k\int_{-4}^{4}\left[4\cosh\left(\frac{x}{4}\right)\right]\mathrm{d}x\\
M &= 4k\cdot 4\operatorname{senh}\left(\frac{x}{4}\right)\Big|_{-4}^{4}\\
M &= 16k\left[\operatorname{senh}\left(\frac{4}{4}\right) - \operatorname{senh}\left(\frac{-4}{4}\right)\right]\\
M &= 32\operatorname{senh}(1)k\,\text{kg}.
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{\mathscr{M}_y}{M}\\
\bar{x} &= \frac{0\cancel{k}\,\text{kg}\,\text{m}}{32\operatorname{senh}(1)\cancel{k}\,\text{kg}}\\
\bar{x} &= 0\,\text{m}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{\mathscr{M}_x}{M}\\
\bar{y} &= \frac{\cancel{4}\cancel{k}\left[8+\operatorname{senh}(8)\right]\ \text{kg}\,\text{m}}{\cancelto{8}{32}\ \operatorname{senh}(1)\cancel{k}\,\text{kg}}\\
\bar{y} &= \frac{8+\operatorname{senh}(8)}{8\operatorname{senh}(1)}\ \text{m}.
\end{aligned}
$$

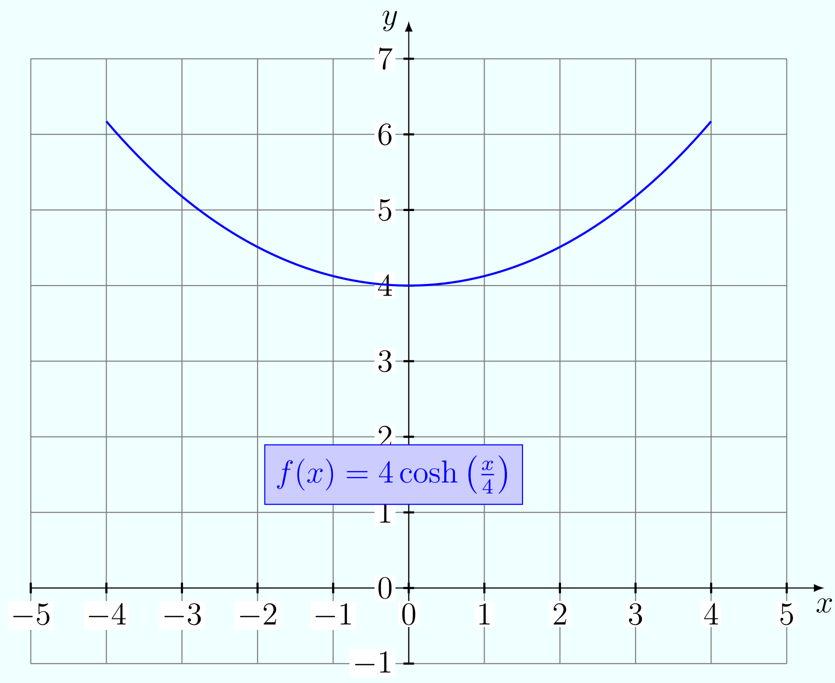

Figura 3: Catenaria de la forma $y = 4\cosh\left(\frac{x}{4}\right)$ en el intervalo $[-4, 4]$.

4. La elongación natural de un resorte es $10\,\mathrm{cm}$. Una fuerza de $90\,\mathrm{N}$ lo alarga hasta $11\,\mathrm{cm}$. Determine el trabajo requerido para alargarlo de $12\,\mathrm{cm}$ a $14\,\mathrm{cm}$.

   Utilizaremos la siguiente definición para resolver los ejercicios 4, 5 y 6.

   Definición 2 (Trabajo de una fuerza variable)**.** *Suponga que un objeto se mueve en una dirección positiva a lo largo de recta coordenada sobre el intervalo $[a, b]$ cuando está sujeta a una fuerza variable $F(x)$ que es aplicada en la dirección del movimiento. Entonces definimos el* ***trabajo*** *W realizado por la fuerza sobre el objeto por*

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

   La ***ley de Hooke*** *[Robert Hooke (1635-1703), físico inglés] declaró que bajo condiciones apropiadas un resorte que se estira $x\,\mathrm{m}$ más allá de su longitud natural se retrae con un fuerza*

$$F(x) = kx$$

   donde k es una constante (llamada la ***constante del muelle*** *o* ***rigidez del resorte****). El valor de k depende de factores tales como el espesor del resorte y el material utilizado en su composición. Como $k = \frac{F(x)}{x}$, la constante k tiene unidades de $\mathrm{N\,m^{-1}}$.*

Solución:

De la ley de Hooke,

$$F(x) = kx$$

A partir de los datos, $F(x) = 90\,\mathrm{N}$ cuando $x = 1\,\mathrm{cm}$, entonces $90 = k \cdot 1$. Por lo tanto, la constante de resorte es $k = 90\,\mathrm{N\,cm^{-1}}$. Esto significa que la fuerza $F(x)$ requerida para estirar el muelle $x\,\mathrm{cm}$ es

$$F(x) = 90x. \tag{1}$$

Coloque el resorte a lo largo de una línea de coordenadas como se muestra en la Figura 4. Queremos encontrar el trabajo W requerido para estirar el resorte en el intervalo de $x = 12\,\mathrm{cm}$ a $x = 14\,\mathrm{cm}$. De (2) y (1) el trabajo W requerido es

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{12}^{14} 90x = \left.\frac{90x^2}{2}\right|_{12}^{14} = 2{,}340\,\mathrm{J}$$

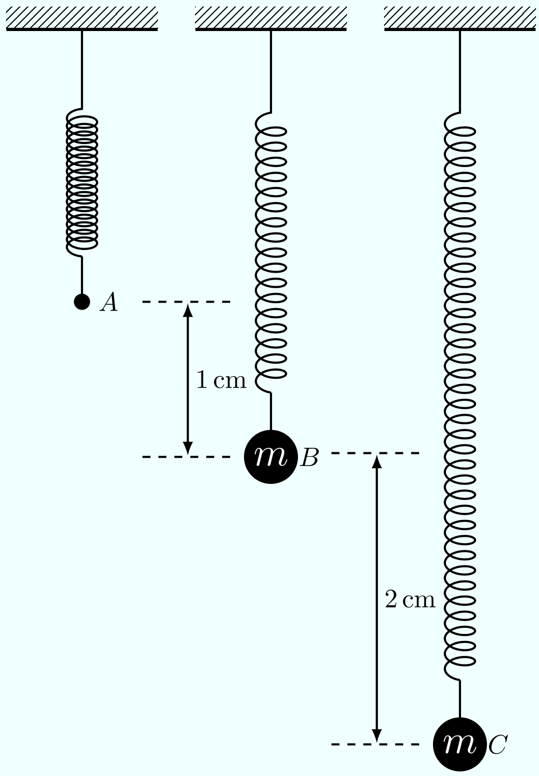

Figura 4: Al inicio se estiró $1\,\mathrm{cm}$ de su posición natural, después se pide el trabajo W para desplazarlo $2\,\mathrm{cm}$ desde $x = 12\,\mathrm{cm}$ hasta $x = 14\,\mathrm{cm}$.

5. Un contenedor en forma de cono circular recto invertido está lleno de agua. Si la altura del tanque es de $10\,\mathrm{pie}$ y el radio de la base es de $4\,\mathrm{pie}$. Encuentre el trabajo realizado al vaciar todo el agua del contenedor.

Solución:

Nuestra estrategia será dividir el agua en capas delgadas, aproximar el trabajo requerido para mover cada capa a la parte superior del contenedor, agregar las aproximaciones para las capas para obtener una suma de Riemann que se aproxime al trabajo total, y luego tomar el límite de las sumas de Riemann para producir una integral para el trabajo total.

Para implementar esta idea, introduzca un eje x como se muestra en la figura 5, y divida el agua en n capas con x_k que denota el grosor de la capa k. Esta división induce una partición del intervalo $[0, 10]$ en n subintervalos. Aunque las superficies superior e inferior de la capa k están a diferentes distancias desde la parte superior, la diferencia será pequeña si la capa es delgada, y podemos suponer razonablemente que toda la capa se concentra en un único punto x_k^* (Figura 5). Por lo tanto, el trabajo W_k requerido para mover la k-ésima capa a la parte superior del contenedor es aproximadamente

$$W_k \approx F_x x_k^* \tag{2}$$

donde F_k es la fuerza requerida para levantar la capa k. Pero la fuerza requerida para levantar la capa k es la fuerza necesaria para superar la gravedad, y esto es lo mismo que el peso de la capa. Si la capa es muy delgada, podemos aproximar el volumen de la capa k con el volumen de un cilindro de altura x_k y radio r_k, donde (mediante triángulos semejantes).

$$\frac{r_k}{x_k^*} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

o, de manera equivalente, $r_k = \frac{2}{5}x_k^*$ (Figura 6.6.4b). Por lo tanto, el volumen de la capa k de agua es aproximadamente

$$\pi r_k^2 \Delta x_k = \pi \left(\frac{2}{5}x_k^*\right)^2 \Delta x_k = \frac{4\pi}{25}(x_k^*)^2 \Delta x_k.$$

Como la densidad del peso del agua es de $62.4\,\mathrm{lb\,pie}^{-1}$, se deduce que

$$F_k \approx \frac{4\pi}{25} \cdot 62{,}4 (x_k^*)^2 \Delta x_k.$$

Por lo tanto, desde (2)

$$W_k \approx \left(\frac{4\pi}{25} \cdot 62{,}4 (x_k^*)^2 \Delta x_k\right) x_k^* = \frac{4\pi}{25} \cdot 62{,}4 (x_k^*)^3 \Delta x_k.$$

y por lo tanto, el trabajo W requerido para mover todas las n capas tiene la aproximación

$$W = \sum_{k=1}^{n} W_k \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{4\pi}{25} \cdot 62{,}4 (x_k^*)^3 \Delta x_k$$

Para encontrar el valor *exacto* del trabajo, tomamos el límite cuando el máximo $\Delta x_k \to 0$. Esto resulta

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\text{máx}\, \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{4\pi}{25} \cdot 62{,}4 (x_k^*)^3 \Delta x_k = \int_0^{10} \frac{4\pi}{25} \cdot 62{,}4 (x_k^*)^3 \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{4\pi}{25} \cdot 62{,}4 \left(\frac{x^4}{4}\right) = 24{,}960\pi \approx 78{,}414.15\,\mathrm{pie\,lb} \end{aligned}$$

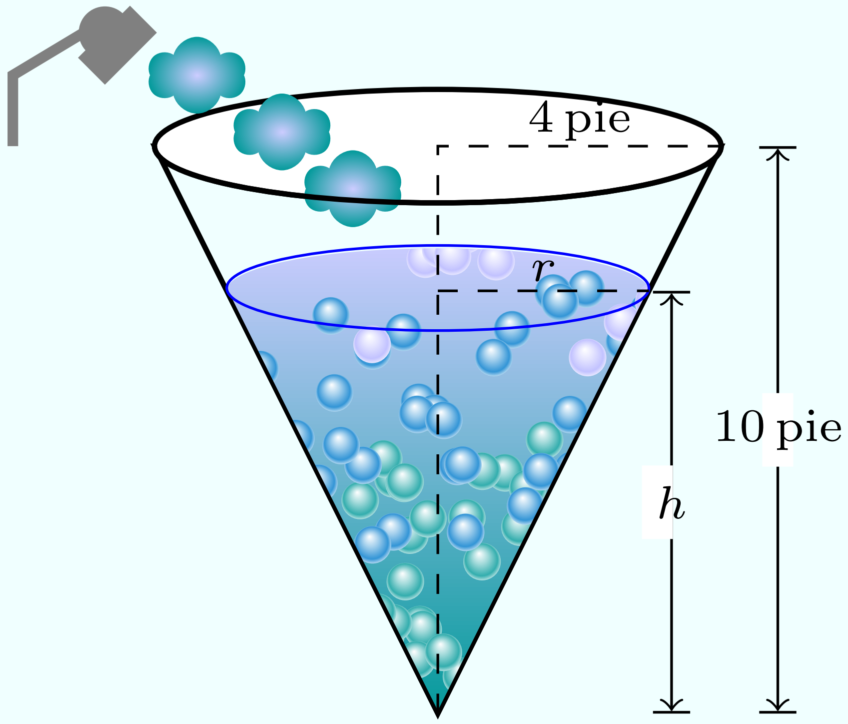

Figura 5: Contenedor en forma de cono circular recto instantes antes de que se llene de agua todo el recipiente de capacidad $V = \left(\frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 10\right) = \dfrac{160\pi}{3}\text{pie}^3$.

6. Un tanque tiene la forma de un cilindro circular recto de radio igual a $4\,\text{m}$ y una altura de $8\,\text{m}$. Suponiendo que está lleno de agua. Halle el trabajo efectuado para vaciar el tanque por la parte superior. Considere que el agua sea vaciada por medio de un tubo que parte de la base.

Solución:

Si la densidad del agua es $\rho_{\text{agua}} = \dfrac{m}{V} \implies \boxed{m = \rho_{\text{agua}} V}$. Además, $\boxed{\mathrm{d}V = \pi(4)^2\,\mathrm{d}y}$. La fuerza ejercida sobre el agua es:

$F = 16\pi\,\mathrm{d}y(1000) \times 10$

$F = 160000\pi\,\mathrm{d}y$

$$\implies W = \int_0^8 160000\pi y\,\mathrm{d}y = .$$

7. Determine el área S de la superficie de revolución generado por la rotación del primer arco de la cicloide $x = 1 - \operatorname{sen} t, y = 1 - \cos t, t \in [0, 2\pi]$ alrededor de la recta $L\colon\, y = x + \frac{4}{3}$.

8. Calcular el volumen del sólido S generado por la rotación de la región R limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$ entorno a esta última.

9. Sea R la región del plano limitado por la parábola $y = x^2 - 1$ y la recta $y = x - 1$.

Teorema 1 (Distancia (mínima) de un punto a una recta)**.** *Sea* $ax+by+c=0$ *la ecuación de la recta* $\mathcal{L}$ *en el plano* XY *con vector normal* $\boldsymbol{n}$*. Sea* $P_0(x_0,y_0)$ *un punto sobre esta recta y* $P_1(x_1,y_1)$ *un punto que no pertenece a* $\mathcal{L}$*. La distancia perpendicular de* P_1 *a* $\mathcal{L}$ *es*

$$d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot \overrightarrow{P_0P_1}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Teorema 2 (Teorema de Pappus para volúmenes de sólidos de revolución)**.** *Sea* $\mathcal{R}$ *la región limitada por las curvas* $y=f_1(x)$ *e* $y=f_2(x)$*. Si* A *es la medida del área de* $\mathcal{R}$ *y si* d *es la distancia del centroide de la región* R *con la recta sobre la cual gira el área. Entonces el volumen del sólido engendrado es:*

$$V=2\pi d\,A$$

En otras palabras: *Si una región plana se hace girar alrededor de una recta en su plano, la cual no corta a la región, entonces la medida del volumen del sólido de revolución generado es igual al producto de la medida del área de la región y la medida de la distancia recorrida por su centroide.*

Solución:

$$\mathscr{M}_x=\frac{k}{2}\int_0^1\left[(f(x))^2-(g(x))^2\right]\mathrm{d}x$$
$$\mathscr{M}_x=\frac{k}{2}\int_0^1\left[(x-1)^2-(x^2-1)^2\right]\mathrm{d}x$$
$$\mathscr{M}_x=\frac{k}{2}\int_0^1\left[(x^2+x-2)(x-x^2)\right]\mathrm{d}x$$
$$\mathscr{M}_x=\frac{k}{2}\int_0^1\left[\cancel{x^3}+x^2-2x-x^4-\cancel{x^3}+2x^2\right]\mathrm{d}x$$
$$\mathscr{M}_x=-\frac{k}{2}\int_0^1\left[2x-3x^2+x^4\right]\mathrm{d}x$$
$$\mathscr{M}_x=-\frac{k}{2}\left[\cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}-\cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}+\frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^1$$
$$\mathscr{M}_x=-\frac{k}{2}\left[\left(1^2-0^2\right)-\left(1^3-0^3\right)+\left(\frac{1^5}{5}-\frac{0^5}{5}\right)\right]$$
$$\mathscr{M}_x=-\frac{k}{2}\left[\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{5}\right]$$
$$\mathscr{M}_x=-\frac{k}{10}\,\mathrm{kg\,m}.$$

$$\mathscr{M}_y=k\int_0^1 x\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x$$
$$\mathscr{M}_y=k\int_0^1 x\left[(x-1)-(x^2-1)\right]\mathrm{d}x$$
$$\mathscr{M}_y=k\int_0^1\left[x^2-\cancel{x}-x^3+\cancel{x}\right]\mathrm{d}x$$
$$\mathscr{M}_y=k\int_0^1\left[x^2-x^3\right]\mathrm{d}x$$
$$\mathscr{M}_y=k\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_0^1$$
$$\mathscr{M}_y=k\left[\left(\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)-\left(\frac{1^4}{4}-\frac{0^4}{4}\right)\right]$$
$$\mathscr{M}_y=k\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]$$
$$\mathscr{M}_y=\frac{k}{12}\,\mathrm{kg\,m}$$

$$
\begin{aligned}
M &= k\int_0^1 \left[x-x^2\right]\mathrm{d}x\\
M &= k\cdot\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^1\\
M &= k\left[\left(\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)\right]\\
M &= k\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\\
M &= \frac{k}{6}\,\mathrm{kg}.
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{\mathscr{M}_y}{M}\\
\bar{x} &= \frac{\frac{\cancel{k}}{12}\,\mathrm{kg\,m}}{\frac{\cancel{k}}{6}\,\mathrm{kg}}\\
\bar{x} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{m}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{\mathscr{M}_x}{M}\\
\bar{y} &= \frac{-\frac{\cancel{k}}{10}\,\mathrm{kg\,m}}{\frac{\cancel{k}}{6}\,\mathrm{kg}}\\
\bar{y} &= -\frac{3}{5}\,\mathrm{m}.
\end{aligned}
$$

De (1), la distancia del centroide $(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{5}\right)$ a la recta $x-y-1=0$ es:

$$
d=\frac{\left|\frac{1}{2}+\frac{3}{5}-1\right|}{|1^2+1^2|}=\frac{\sqrt{2}}{20}
$$

Finalmente, el volumen pedido es:

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi\frac{\sqrt{2}}{20}\int_0^1\left[(x-1)-(x^2-1)\right]\mathrm{d}x\\
V &= \frac{\sqrt{2}\pi}{60}\,\mathrm{u}^3
\end{aligned}
$$

10. En un banco, el interés se compone continuamente. La tasa de interés aumenta, sin embargo, y se da en el tiempo t años con la fórmula $r(t)=\left[0.08+(0.015)\sqrt{t}\right]\,\%$. En particular, la tasa de interés ahora ($t=0$ años) es $0.08\,\%$ mientras que la tasa de interés dentro de un año ($t=1$ años) será de $0.095\,\%$. Si una persona deposita \$1000 en una cuenta ahora y lo deja solo, entonces la cantidad de dinero $\$y$ en la cuenta de ahorro en el tiempo t años satisface la ecuación diferencial

$$
\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0.08+(0.015)\sqrt{t}
$$

con $y=\$1{,}000$ cuando $t=0$ años.

a) Resuelva esta ecuación diferencial para obtener una fórmula para la cantidad de dinero y en la cuenta en cualquier momento t.

b) Encuentre la cantidad de dinero en la cuenta después de dos años.

c) Encuentre la tasa de interés promedio $R\,\%$ en el periodo de dos años, $0 < t < 2$, y compruebe que la fórmula $Y = Pe^{RT}$ da la misma respuesta que b) si R es la tasa de interés promedio durante el periodo de tiempo $T = 2$ años y $P = \$1000$ es capital principal.

Teorema 3 (Valor promedio de una función)**.** *Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$ el **valor promedio** (o **valor medio**) de f en $[a, b]$ es*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Solución:

a) La ecuación diferencial es separable, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= 0{,}08 + (0{,}015\sqrt{t})\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int 0{,}08 + (0{,}015\sqrt{t})\,\mathrm{d}t \\
\ln|y| &= 0{,}08t + 0{,}015\frac{2}{3}t^{3/2} + C \\
y &= Ke^{0{,}08t+0{,}01t^{3/2}}
\end{aligned}$$

Pero $y = \$1{,}000$ cuando $t = 0$ años, así:

$$y = Ke^{0{,}08\cdot 0+0{,}01\cdot 0^{3/2}} \implies 1000 = Ke^{0} \quad \therefore K = 1000.$$

La relación pedida es: $y(t) = 1000e^{0{,}08t+0{,}01t^{3/2}}$

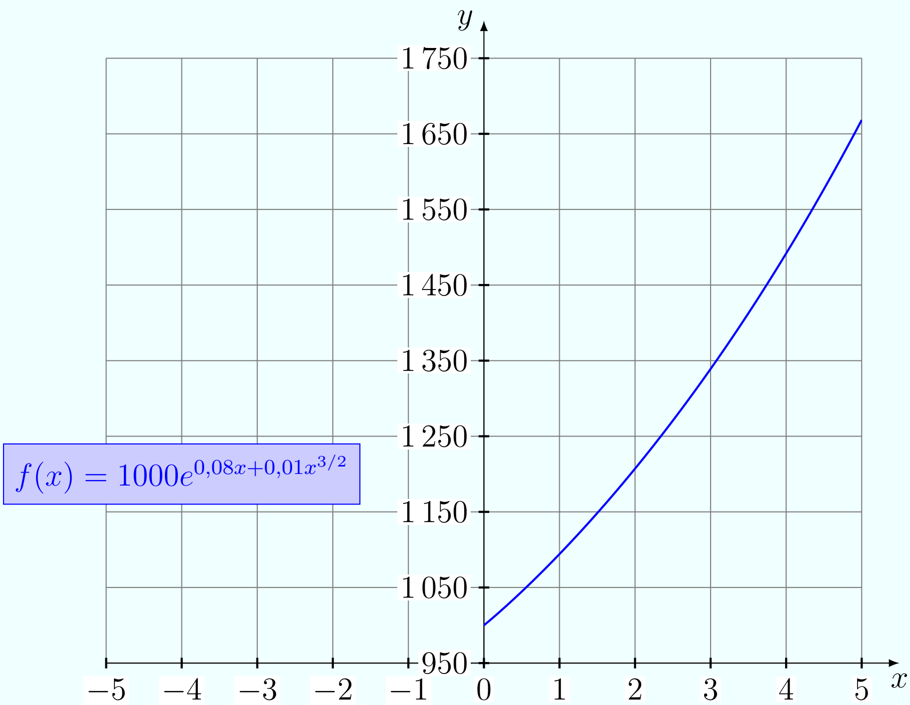

Figura 6: Gráfica de la función $y(x) = 1000e^{0{,}08x+0{,}01x^{3/2}}$.

b) Para $t = 2$ años, $y = \$1000e^{0{,}08\cdot 2+0{,}01\cdot 2^{3/2}} \approx \$1207{,}176$.

La cantidad de dinero es \$1207.176 (capital inicial más intereses).

c) $R\,\%$ es la tasa fija con la cual en un periodo de dos años hubiese producido los mismos intereses, esto es, \$207,76. Para ello calcularemos el valor promedio de la tasa:

$$\begin{aligned}
\text{tasa promedio} &= \frac{1}{T-0}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \\
\text{tasa promedio} &= \frac{1}{2-0}\int_0^2 \left(0{,}08 + 0{,}015\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t \\
\text{tasa promedio} &= \frac{1}{2}\left(0{,}08t + 0{,}015\frac{2}{3}t^{3/2}\right)\Big|_0^2 \\
\text{tasa promedio} &= \frac{1}{2}\left(0{,}08t + 0{,}01t^{3/2}\right)\Big|_0^2 \\
\text{tasa promedio} &= \frac{1}{2}\left[\left(0{,}08\cdot 2 + 0{,}01\cdot 2^{3/2}\right) - \cancelto{0}{\left(0{,}08\cdot 0 + 0{,}01\cdot 0^{3/2}\right)}\right] \\
\text{tasa promedio} &= 9.414\times 10^{-2}
\end{aligned}$$

En efecto, al comprobar que con la tasa anterior 9.414×10^{-2} se obtiene los mismos intereses:

$$Y = 1000e^{0{,}09414\cdot 2} = \$1207{,}17$$

11. La población tiende a crecer con el tiempo a una tasa aproximadamente proporcional a la población presente. De acuerdo con la Oficina del Censo, la población de los Estados Unidos en 1960 era aproximadamente 179 millones y en 1970 fue 205 millones.

    a) Use esta información para estimar la población en 1940.
    b) Predecir la población para el año 2000.

12. Un pesticida rociado en tomates se descompone en una sustancia inofensiva a una tasa proporcional a la cantidad $\mathrm{M}(t)$ lb aún sin cambios en el tiempo t días. Escriba una ecuación diferencial que describa este proceso y resuélvalo para $\mathrm{M}(t)$. Si una cantidad inicial de $10\,\mathrm{lb}$ rociadas sobre un acre se reduce a $5\,\mathrm{lb}$ en 6 días, ¿cuándo se descompondrá el 80 % del pesticida?

Solución:

Este ejercicio corresponde al modelo de decaimiento de sustancias.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t} &= -\mathrm{M}_0\, \mathrm{M}(t) && \mathrm{M}_0 > 0 \\
\frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{M}(t)} &= -\mathrm{M}_0\, \mathrm{d}t && \text{separando variables} \\
\int \frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{M}(t)} &= -\mathrm{M}_0 \int \mathrm{d}t && \text{integrando miembro a miembro} \\
\ln|M(t)| &= -\mathrm{M}_0\, t + C \\
\mathrm{M}(t) &= Ke^{-M_0 t}
\end{aligned}$$

Pero $\mathrm{M}_0 = 10\,\mathrm{lb}$, entonces $\mathrm{M}(t) = Ke^{-10t}$. Además, para $t = 6$ días la masa final $\mathrm{M}(t) = 5\,\mathrm{lb}$, esto es:

$$5\,\mathrm{lb} = Ke^{-10\cdot 6} \implies K =$$

13. El profesor Willard Libby de U.C.L.A fue galardonado con el Premio Nobel de Química por descubrir un método para determinar la fecha de muerte de un sujeto que alguna vez vivió. El profesor Libby hizo uso del hecho de que el tejido de un organismo vivo se compone de dos tipos de carbono, un carbono radioactivo A y un carbono B estable, en el que la relación entre la cantidad de A y la cantidad de B es aproximadamente constante. Cuando el organismo muere, la ley del decaimiento natural se aplica a A. Si se determina que la cantidad de A en una pieza de carbón es solo el 16 % de su cantidad original y la vida media media de A es 5500 años, ¿cuándo murió el árbol del cual vino el carbón?

14. a) La población del Salmón vive en las costas y crece de acuerdo a la ley Malthusiana:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}(t) = 0{,}03P(t)$$

donde t es el tiempo medido en años y $P(t)$ es el número de peces en el tiempo t. ¿Cuánto tiempo se tarda en duplicar el número de salmones?

b) Supongamos que en el momento $t = 0$, un grupo de depredadores se traslada a las aguas del salmón, y mata al salmón a razón de $0.000{,}1[P(t)]^2$ por año. Escriba la nueva ley de crecimiento de la población del salmón, ¿qué le sucede a la población cuando $t \to \infty$?

Uno de los primeros intentos de modelar el crecimiento de la población humana mediante las matemáticas fue realizado por el clérigo y economista inglés Thomas Malthus en 1798. Básicamente, la idea detrás del modelo maltusiano es la suposición de que la tasa a la que la población de un país crece en un momento determinado es proporcional a la población total del país en ese momento. En otras palabras, cuanta más gente haya en el momento t, más habrá en el futuro. En términos matemáticos, si $P(t)$ denota la población total en el tiempo t, entonces esta suposición puede expresarse como

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Este modelo simple, que no tiene en cuenta muchos factores que pueden influir en las poblaciones humanas, ya sea para crecer o disminuir (inmigración y emigración, por ejemplo), sin embargo, resultó ser bastante preciso para predecir la población de los Estados Unidos durante el años 1790–1860. Poblaciones que crecen a un ritmo descrito por (14) son raras; sin embargo, (14) todavía se usa para modelar *el crecimiento de pequeñas poblaciones en cortos intervalos de tiempo* (bacterias que crecen en una Place de Petri, por ejemplo).

Definición 3 (Ley de Thomas Robert Malthus para el caso discreto)**.**

$$P_{n+1} - P_n = (f - m)P_n$$

donde f es la tasa constante de fertilidad y m es la tasa constante de mortalidad

Definición 4 (Ley de Thomas Robert Malthus para el caso continuo)**.**

$$P' = rP_(t)$$

donde r es una constante típicamente positiva para poblaciones que no están condenadas a la extinción $(f > m)$. Se define la ***tasa de crecimiento*** *por*

$$\frac{P'(t)}{P(t)}.$$

La solución de la ecuación de Malthus es:

Solución:

15. Las toxinas en un medio de cultivo bacteriano matan a las bacterias a una tasa proporcional al producto de la cantidad de bacterias presentes y lA concentración de toxinas. En ausencia de toxinas, la cantidad de bacterias crecería a una tasa proporcional a la cantidad de bacterias presentes. Uno puede esperar controlar la cantidad de bacterias controlando la concentración de toxinas; por ejemplo, al introducir toxinas en el medio o al eliminar algunas de las toxinas del medio. Supongamos que la concentración de toxinas varía con el tiempo a una velocidad constante c. En el momento t, sea $y(t) > 0$ sea el número de bacterias y $T(t)$ la concentración de toxinas. Deje $y(0) = y_0$ y $T(0) = T_0$.

    a) Escribe y resuelve una ecuación diferencial satisfecha por y.

    b) ¿Qué sucede cuando $t \to \infty$? Discuta de acuerdo con el signo de c, indicando lo que significa concretamente.

    c) Muestre, de acuerdo con los valores de $c \neq 0$, que la población de bacterias posee un máximo o un mínimo. Encuentra el tiempo de estos extremos. Dibujar un gráfico que indica el comportamiento de $y(t)$. ¿Es cierto que si $c = 0$, la población es Malthusiana? Si lo fuera dar una razón de intercambio.

16. Se sabe que la velocidad de formulación de un determinado químico en una reacción es gobernado por la ecuación

    $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = (a - x)(b - x)$$

    donde x es la cantidad (masa) del químico presente en el tiempo t y a, b son las constantes de otros químicos presentes cuando $t = 0$, con $0 < b < a$. Para $t = 0$, $x(0) = \dfrac{1}{2}(a + b)$. Hallar x como una función del tiempo y determine $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$.

17. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

    a) $x(y + 1)\,\mathrm{d}x + (x^2 + 1)ye^y\,\mathrm{d}y = 0$.

    b) $y' = (x^2 + 1)(y^2 + y)$.

    c) $y' + 2xy = x$.

    d) $x^2y' = y - xy$.

Antes de comenzar presentaremos las siguientes definiciones:

Definición 5 (Ecuación separable)**.** *Una ecuación diferencial de primer orden de la forma*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y)$$

*se dice que es **separable** o tiene **variables separables**.*

Definición 6 (Ecuación diferencial exacta)**.** *Una expresión diferencial $M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y$ es una **diferencial exacta** en una región $\mathcal{R}$ del plano XY si este corresponde con el diferencial de alguna función $f(x, y)$ definida en $\mathcal{R}$. Una ecuación diferencial de primer orden de la forma*

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$$

*se dice que es una **ecuación exacta** si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta.*

Definición 7 (Simplemente conexo en $\mathbb{R}^2$)**.** *Cualquier región "sin agujeros".*

Teorema 4 (Criterio para una diferencial exacta)**.** *Sean $M(x, y)$ y $N(x, y)$ continuas y tengan derivadas parciales continuas en la región rectangular $\mathcal{R}$ definida por $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$. Entonces una condición necesaria y suficiente para $M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y$ sea una diferencial exacta es*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

La igualdad de las derivadas mixtas es una consecuencia de la continuidad de las primeras derivadas parciales de $M(x, y)$ y $N(x, y)$.

La suficiencia consiste en mostrar que existe alguna función f para el cual $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$ siempre que se cumpla igualdad de las derivadas cruzadas.

La construcción de la función f en realidad refleja un procedimiento básico para resolver ecuaciones exactas

Definición 8 (Función homogénea)**.** *Si una función f posee la propiedad $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ para algún número real α, entonces se dice que f es una **función homogénea** de grado α.*

Definición 9 (Ecuación homogénea)**.** *Una ecuación diferencial de primer orden en forma diferencial*

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$$

*se dice que es **homogénea** si los coeficientes de ambas funciones M y N son funciones homogéneas del mismo grado. En otras palabras, (9) es homogénea si*

$$M(tx, ty) = t^\alpha M(x, y) \qquad y \qquad N(tx, ty) = t^\alpha N(x, y).$$

En síntesis, si M y N son funciones homogéneas de grado α, podemos también escribirlo como

$$M(x, y) = x^\alpha M(1, u) \qquad y \qquad N(x, y) = x^\alpha N(1, u) \quad , \text{ donde } u = \frac{y}{x},$$

y

$$M(x, y) = y^\alpha M(v, 1) \qquad y \qquad N(x, y) = y^\alpha N(v, 1) \quad , \text{ donde } v = \frac{x}{y}.$$

Solución:

a) Veamos si la expresión es una diferencial exacta. Por lo tanto calculemos las primeras derivadas parciales de $M(x,y) = x(y+1)$ y $N(x,y) = (x^2+1)ye^y$.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x(y+1)]$$
$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[(x^2+1)ye^y]$$
$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2xye^y$$

Notamos que $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ y concluimos que la ecuación diferencial no es exacta (tampoco lo podemos llevar a la forma de una diferencial exacta).

Veamos si la expresión es una ecuación homogénea. Si inspeccionamos $M(x,y) = x(y+1)$ y $N(x,y) = (x^2+1)ye^y$

$$M(tx,ty) = (tx)(ty+1) = \ldots \text{no es una función homogénea.}$$

Pero sí es separable, esto quiere decir que $y' = H(x)G(y)$.

En efecto,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{y+1}{y\cdot e^y}\right)\left(\frac{-x}{x^2+1}\right)$$

donde $H(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}$ y $G(y) = \dfrac{y+1}{y\cdot e^y}$.

Ahora:

$$\frac{y\cdot e^y}{y+1}\,\mathrm{d}y = -\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$
$$\int \frac{y\cdot e^y}{y+1}\,\mathrm{d}y = \int -\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Integrando el lado izquierdo de la ecuación:

$$I_1 = \int \frac{y\cdot e^y}{y+1}\,\mathrm{d}y$$

Sustitución: $\boxed{u = y+1 \implies \mathrm{d}u = \mathrm{d}y}$

$$I_1 = \int \frac{(u-1)e^{u-1}}{u}\,\mathrm{d}u$$
$$I_1 = e^{-1}\int \left(e^u - \frac{e^u}{u}\right)\mathrm{d}u$$
$$I_1 = \frac{1}{e}\int e^u\,\mathrm{d}u - \int \frac{e^u}{u}\,\mathrm{d}u$$
$$I_1 = e^{u-1} + \mathrm{Ei}(u)$$
$$I_1 = e^y + \mathrm{Ei}(y+1) + C_1$$

Integrando el lado derecho de la ecuación:

$$I_2 = \int -\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Sustitución: $\boxed{u = x^2+1 \implies \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x}$

$$I_2 = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u}$$
$$I_2 = -\frac{1}{2}\ln|u| + C_2$$
$$I_2 = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_2$$
$$I_2 = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + C_2$$

De I_1 e I_2:

$$e^y + \mathrm{Ei}(y+1) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + C$$

b) La ecuación $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x^2+1)(y^2+y)$ es equivalente a:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{y^2+y} &= (x^2+1)\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y(y+1)} &= \int (x^2+1)\,\mathrm{d}x \\
\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right)\mathrm{d}y &= \frac{x^3}{3} + x + \mathrm{C} && \text{descomponiendo en fracciones parciales} \\
\ln|y| - \ln|y+1| &= \frac{x^3}{3} + x + \mathrm{C} \\
\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| &= \frac{x^3}{3} + x + \mathrm{C} \\
\frac{y}{y+1} &= Ke^{\frac{x^3}{3}+x}
\end{aligned}$$

c) La ecuación $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy = x$ es equivalente a la siguiente ecuación separable $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x(1-2y)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x(1-2y) \\
\frac{\mathrm{d}y}{1-2y} &= x\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{1-2y} &= \int x\,\mathrm{d}x \\
-\frac{\ln|1-2y|}{\cancel{2}} &= \frac{x^2}{\cancel{2}} + \frac{C}{\cancel{2}} \\
\ln\left|\frac{1}{1-2y}\right| &= x^2 + C \\
\frac{1}{1-2y} &= Ke^{x^2} \\
1-2y &= K_1 e^{-x^2} \\
\therefore y &= \frac{1}{2} + \frac{-K_2}{2}e^{-x^2}
\end{aligned}$$

d) Dividiendo la ecuación original resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) y \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \\
\ln|y| &= -\left(\frac{1}{x} + \ln|x|\right) + C \\
\ln|x| + \ln|y| &= -\left(\frac{1}{x}\right) + C \\
\ln|xy| &= -\left(\frac{1}{x}\right) + C \\
xy &= Ke^x \\
\therefore y &= K\left(\frac{e^x}{x}\right)
\end{aligned}$$

18. Determine si las siguientes integrales son convergentes o divergentes.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x \, \mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} \, \mathrm{d}x.$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x} \, \mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, \mathrm{d}x.$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} \, \mathrm{d}x;\ a \in \mathbb{R}.$

f) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^8} \, \mathrm{d}x.$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{x - e^{-x}} \, \mathrm{d}x.$

h) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x.$

i) $\displaystyle\int_{a}^{\infty} x^n \, \mathrm{d}x \; a > 0;\ n \in \mathbb{R}.$

19. Demuestre que las siguientes integrales son convergentes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}} \, \mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^6 + 1}} \, \mathrm{d}x.$

20. Demuestre que las siguientes integrales son divergentes.

a) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4 + 1}} \, \mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}^3} \, \mathrm{d}x.$

Referencias

[1] Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis, and Thomas Polaski. *Calculus: early transcendentals*. Wiley, 2010.

Agradecimientos

No hay que olvidar que la inacción es un poderoso enemigo y que, como el apetito o el sexo, es de orden exponencial, o sea, que cuanto menos hace uno menos quiere hacer.

Fragmento de la novela, Un estado del malestar, de Joaquín Berges.

Facultad de Ciencias, 3 de diciembre del 2017.