Mayor Cota inf menor Cota sup

a b

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA CICLO 2016–II

TERCERA PRÁCTICA DIRIGIDA DE CÁLCULO DIFERENCIAL.
CM 131 A - B - C

1. Sea K un cuerpo ordenado y $X \subset K$, decimos que X está acotado inferiormente si y sólo si $\exists c \in K$ tal que $\forall x \in X,\ c \leq x$.
   a) ¿$\emptyset$ es un conujunto acotado inferiormente?
   b) ¿$\emptyset$ tiene ínfimo?

2. Dados $A, B \subset \mathbb{R}$, se define los conjuntos $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ y $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$ Demuestre que
   a) Si A y B estan acotados superiormente entonces $A+B$ también lo está y $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
   b) Si A y B estan acotados inferiormente entonces $A+B$ también lo está y $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.
   c) Si A y B estan acotados entonces $A - B$ también lo está, $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$ y $\inf(A - B) = \inf(A) - \sup(B)$.

3. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos tales que $B = \{x \in A : x > \alpha\}$. Pruebe que si A está acotado superiormente y B es no vacío entonces $\sup(B) = \sup(A)$.

4. Pruebe que el conjunto $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ está acotado inferiormente, pero no tiene elemento mínimo.

5. Probar que el conjunto $A = \langle 2, \infty\rangle$ no tiene supremo.

6. Sabiendo que se cumple la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, probar la densidad de $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$.

7. Si $A \subset B$, siendo A no vacío y acotado inferiormente, ¿Es cierto que $\inf(A) \leq \inf(B)$?

8. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $c - \epsilon < x \leq c$ entonces ¿ Podemos afirmar que $c = \sup(A)$?

9. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que
$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$$
¿Es cierto que $\sup(A) \leq b,\ \forall b \in B$?

10. Encontrar el supremo y el ínfimo, si existen del conjunto
$$A = \left\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

11. Probar que $\sqrt{3} + \sqrt{5} \in \mathbb{I}$.

12. Probar que si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son tales que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, entonces $ac + bd \leq 1$.

13. Dado un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}$, se define el diámetro de A, denotado por $\operatorname{diam}(A)$ como $\operatorname{diam}(A) = \sup(\{|x - y| : x, y \in A\}$. Determine el diámetro de los siguientes conjuntos:
   a) $[0, 1]$.
   b) $\langle 1, 2\rangle$.
   c) $\langle 1, 2\rangle \cup [3, 4]$.
   d) $\{5, 9\}$.

$x < \sqrt{2}$

$x \in \mathbb{Q}$

14. Sea $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 < 2\}$.
   a) Considerando $\mathbb{Q}$ como el cuerpo ordenado que contiene a A, pruebe que A está acotado superiormente.
   b) Suponiendo que $\beta = \sup(A)$ y que $\beta \in \mathbb{Q}$. Pruebe que al tomar $\gamma = \dfrac{\beta(\beta^2 + 6)}{3\beta^2 + 2}$ se tiene $\gamma \in A$ y $\gamma > \beta$.
   c) Identifique la contradicción en el razonamiento anterior.

15. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x > 0, y > 0$ y $nx \leq y,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Definamos el conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$.
   a) Pruebe que existe $\alpha = \sup(A)$.
   b) Pruebe que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m_0 x > \alpha$.

16. Sea el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x^2 \leq 2\}$.
   a) Pruebe que existe $\alpha = \sup(S)$.
   b) Pruebe que la suposición $\alpha^2 > 2$ conduce a una contradicción. (*Sugerencia: Tome* $\beta = \min\left\{\alpha, \dfrac{\alpha^2 - 2}{2\alpha}\right\}$, *luego pruebe que* $\beta > 0$, $\alpha - \beta \geq 0$ *y* $(\alpha - \beta)^2 > x^2, \forall x \in S$.

17. En cada ítem, hallar el mayor número m tal que
   a) $m \leq x^2 + 2x + 4,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
   b) $m \leq 4x^2 + 12x + 11,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

18. Determine el dominio de las funciones dadas por las siguientes reglas de correspondencia:

a) $f(x)=\sqrt{\text{máx}\{x^2-1,x-x^2\}}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{\text{mín}\{x^3-x,x^2\}}$

19. Sea la función $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ dada por

$$g(n)=\begin{cases}1 & \text{si } n=1\\ \varphi(n) & \text{si } n>1\end{cases}$$

donde $\varphi(n)$ representa la cantidad de primos de la descomposición canónica de n. Determine si g es creciente, inyectiva y sobreyectiva.

20. Sea la función $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ que asocia a cada $n\in\mathbb{N}$ el número $g(n)$ = menor número natural que es es el producto de n primos.

21. Considere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases}|x| & \text{si } x\in[-1,2]\\ x^2 & \text{si } x<-1\end{cases}$$

Determine:

a) $f([-2,1])$.

b) $f^{-1}(\langle -1,2\rangle)$.

22. Encuentre una biyección entre los conjuntos A y B dados en cada ítem:

a) $A=[0,1]$ y $B=[5,8]$.

b) $A=[2,3]$ y $B=[\pi,2\pi]$.

c) $A=\langle 1,2]$ y $B=\langle 3,6]$.

d) $A=\langle 1,2]$ y $B=[3,6\rangle$.

e) $A=\langle 0,1\rangle$ y $B=\langle 1,\infty\rangle$.

f) $A=\langle 0,1\rangle$ y $B=\langle 0,\infty\rangle$.

g) $A=\langle -1,1\rangle-\{0\}$ y $B=\mathbb{R}-\{0\}$.

h) $A=\langle -1,1\rangle$ y $B=\langle -\infty,\infty\rangle$.

23. Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. En cada ítem determine valores para a y b tales que:

a) $f(\langle a,b\rangle)\subset[0,1]$.

b) $\langle a,b\rangle\subset f^{-1}(\langle 2,4\rangle)$.

c) $\langle 2-a,2-b\rangle\subset f^{-1}(\langle 2,5\rangle)$

d) $\langle 2-a,2+b\rangle\subset f^{-1}(\langle 4-\epsilon,4+\epsilon\rangle)$, donde $0<\epsilon<2$.

24. Juan sale de su casa ubicada en el distrito A hacia el distrito B en su auto con una aceleración constante. Si desde su casa hasta el distrio B la trayectoria es rectilínea y hay una distancia de 1 kilómetro, exprese el tiempo de llegada de Juan en función de la aceleración de su auto. ¿Cuál debe ser el rango de variación de la aceleración del auto de Juan para que su tiempo de llegada sea de entre 2 y 3 horas? (Asuma que su auto parte del reposo).

25. Sean las funciones $f:A\to B$ y $g:B\to C\subset\mathbb{R}$. ¿ Se cumplirá que $(g\circ f)^{-1}(X)=f^{-1}\left(g^{-1}(X)\right)$ para todo $X\subset\mathbb{R}$?

26. Una tienda de computadoras puede pedir cierta marca de ordenador a una distribuidora a un costo de 3 unidades monetarias la unidad. El precio máximo de venta de esta máquina es de 25 unidades monetarias, precio al cual la tienda la vende y en este caso se venden 2200 unidades por día. La tienda planea bajar el precio para estimular las ventas y estima que por cada reducción de una unidad monetaria en el precio, se venderán 100 unidades más por día. Exprese la ganancia diaria de la tienda por la venta de este ordenador como una función del precio de venta y use el gráfico de esta función para explicar si es conveniente o no ejecutar el plan mencionado.

27. Exprese el área de un terreno rectangular cuyas dimensiones suman 8 metros en función de uno de sus lados. Pruebe que existe $\delta>0$ tal que si la medida de uno de sus lados varía en el intervalo $\langle 4-\delta,4+\delta\rangle$ entonces el área del terreno rectangular será mayor que 15 y menor que 17 metros cuadrados.

28. Pruebe las siguientes implicaciones:

a) $|t+1|<1\Rightarrow|t^2-2|<2$.

b) $|t-1|<\dfrac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{(t-1)^2+(t-2)^2}<5$.

c) $|t-2|<1\Rightarrow\sqrt{(t-3)^2+(t-5)^2}<2\sqrt{5}$.

d) $\left(|t|<\dfrac{a}{2}\wedge|t|<1\right)\Rightarrow|\sqrt{t^4+t^2}|<a$, donde $a>0$.

e) $|t|<\text{mín}\left\{\dfrac{|a|}{2},1\right\}\Rightarrow|\sqrt{t^4+t^2}|<a$, donde $a>0$.

29. Sea $a>0$, pruebe las siguientes implicaciones:

a) $|t|<\text{mín}\left\{\dfrac{|a|}{5},\dfrac{1}{2}\right\}\Rightarrow|t|\left[\dfrac{2}{|t+1|}+1\right]<a$.

b) $|t-1|<\text{mín}\left\{\dfrac{|a|}{2\sqrt{2}},\dfrac{1}{2}\right\}\Rightarrow\sqrt{2}\dfrac{|t-1|}{|t+1|}<a$.

c) $|t|<\text{mín}\{|a|,1\}\Rightarrow\dfrac{t^4}{1+t^2}<a$.

UNI, 19 de setiembre del 2016.