Cálculo Integral

Profesor: Mg. Johnny Valverde.
Oficina: R1-344
Miércoles: 16:00
jmvmfox@gmail.com
993734342
Delegado: Álvaro Plasencia
alvaroplasencia@outlook.com
926116842
Las clases duran $50'$ y $50'$. ¡Hasta las 7:40 p.m.!
Revisar los libros de Hasser La Salle, Armando Venero, James Stewart, Edwards, Cálculo aplicada a la economía.

Introducción

Cálculo diferencial: La función *derivada*.
Cálculo integral: Estudiar una operación inversa a la derivada $\longrightarrow$ Integral.
¿Cómo determinar la recta tangente a una curva?

$$f : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

f : posición de una partícula en el instante t.

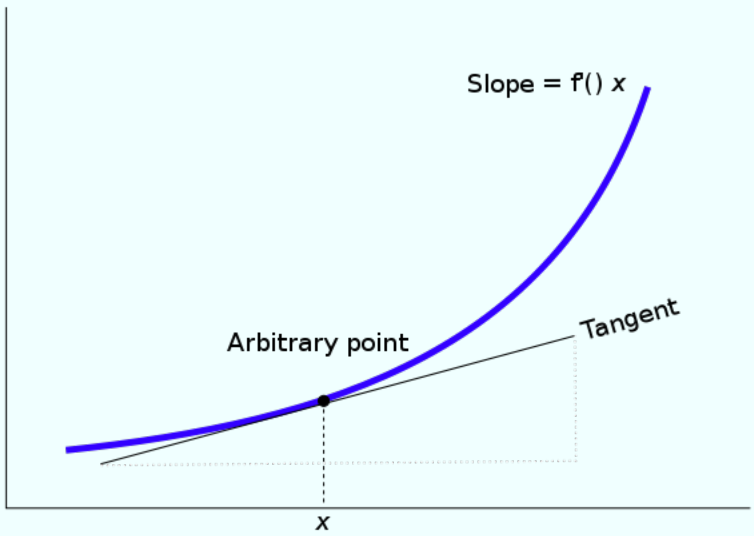

Figura 1: Derivada de una función

$f'(t)$: velocidad de la partícula en el instante t.

Capítulo 1

Antiderivadas

Sean las funciones F, G dadas por

$$F(x) = x^3,\ G(x) = x^3 + 7$$

se observa que

$$F'(x) = 3x^2 = G'(x), \forall x \in \mathcal{I}$$

Sea $f(x) = 3x^2$ e $\mathcal{I}$ un intervalo en $\mathbb{R}$.

Definición 1. *Una función $F\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ ($\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ intervalo) donde $f\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ la función $F(x)$ es denominada Antiderivada de una función $f\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$. Si $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathcal{I}$.*

Ejemplo 1. *Sean $F(x) = \sin(x)$, $G(x) = \sin(x) + \dfrac{1}{3}$. F y G son "antiderivadas" de la función f dada por $f(x) = \cos(x)$ porque $F'(x) = G'(x) = f(x), \forall x \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$.*

Ejemplo 2. *La función F dada por $F(x) = x^4 + 7$ es antiderivada de la función f dada por $f(x) = 4x^3$ porque $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$.*

Definición 2. *Sea la función $F\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ una antiderivada de la función $f\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$. La función $G\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\boxed{G(x) = F(x) + C,\ C \text{ constante } \forall x \in \mathcal{I}}$$

es denominada "antiderivada general de f".

Observación: El reto consiste en obtener una antiderivada de $f\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$. Para obtener la "antiderivada general" de una función $f\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ es suficiente hallar una "antiderivada"[1]de f.

Ejemplo 3. *Sea la función f dada por $f(x) = 2x$ una antiderivada es x^2. Luego, la antiderivada general de f será la función dada*

$$\boxed{F(x) = x^2 + C,\ C \text{ constante}}$$

Teorema 1. *Dos funciones F_1 y F_2 son antiderivadas de una función f si y solo si se cumple*

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \forall x \in \mathcal{I} \quad \mathcal{I}\colon \text{intervalo}$$

Demostración: $\Longrightarrow$ como F_1 y F_2 son antiderivadas de f, entonces F_1' y F_2' son antiderivadas de f, entonces

$$F_1' = f(x), \forall x \in \mathcal{I}$$

[1]Sinónimo de antiderivada general.

$$F_2' = f(x), \forall x \in \mathcal{I}.$$

Restando

$$F_1' - F_2' = 0, \forall x \in \mathcal{I}.$$

Entonces

$$\frac{d}{dx}[F_1(x) - F_2(x) = 0], \forall x \in \mathcal{I}.$$

Luego, se cumple por el teorema estudiado en Cálculo diferencial:

$$F_1(x) - F_2(x) = C,\ C \text{ constante}, \forall x \in \mathcal{I}.$$

$\Longleftarrow$ F_1 y F_2 son funciones en $\mathcal{I}$ tales que $F_1(x) - F_2(x) = C,\ C\text{constante}, \forall x \in \mathcal{I}$
Si F_1 y F_2 son diferenciables en $\mathcal{I}$, entonces

$$\frac{d}{dx}[F_1(x) - F_2(x)] = 0, \forall x \in \mathcal{I}.$$

Entonces $F_1' - F_2' = 0, \forall x \in \mathcal{I}$ de esto

$$\boxed{F_1'(x) = F_2'(x)}$$

definiendo la función f por

$$f(x) = F_1'(x) = F_2'(x), \forall x \in \mathcal{I}$$

con lo cual F_1 y F_2 son antiderivadasde f (por definición) $\blacksquare$.

Definición 3. *Sea la función $F\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ la antiderivada de la función $f\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$. La antiderivada general de f es la función G dada por $\boxed{G(x) = F(x) + C, C \text{ constante}}$ la cual se denota por*

$$G(x) = \int f(x)\, dx, \forall x \in \mathcal{I}$$

denominada "integral indefinida de f"[2].

Observación 1:

$$G(x) = \int f(x)dx\, dx = F(x) + C, \text{C constante}, \forall x \in \mathcal{I}$$

de esto se cumple que $G'(x) = \dfrac{d}{dx} \int f(x)\, dx = F'(x), \forall x \in \mathcal{I}$.
pero $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathcal{I}$
esto es:

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\textstyle\int f(x)\, dx] = f(x)} \text{ (propiedad)}$$

2. En 1, $f(x)$ es el integrando.
3 en 1 se tiene

$$\begin{aligned} \textstyle\int f(x)\, dx &= \textstyle\int F'(x)dx \\ &= \textstyle\int dF(x) \end{aligned}$$

la cual es igual a $\boxed{\int F(x) + C}$ (propiedad)
<u>Conclusión</u>

$$\int d[F(x)] = F(x) + C \text{ , C constante (propiedad)}$$

De estas propiedades se dice que la "integral" es la **operación inversa** de la "derivada".
<u>Ejemplos:</u>

[2]La integral indefinida es una antiderivada general.

1 $\int e^x dx = \int d(e^x) = e^x + C.$

2 $\int x^3 dx = \int d(\frac{x^4}{4}) = \frac{x^4}{4} + C.$

Observación:

$$\int x^n \, dx = \int d(\tfrac{x^{n+1}}{n+1}) = \tfrac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Otras propiedades:

1 $\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx.$

2 $\int [f(x) + g(x)\, dx] = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$

Tarea: Probar las otras propiedades y no olvidarnos de la constante.A partir de esto, se obtiene una tabla de integrales

1 $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, C constante. $\neq -1$.

2 $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$, C constante

3 $\int dx = x + C$, C constante.

4 $\int e^x \, dx = e^x + C$, C constante.

5 $\int \cos x \, dx = \sin x \, dx$

6 $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$, C constante.

7 $\int \sec \tan x \, dx = \sec x + C$, C constante.

8 $\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C = \ln |\sec x|$, C constante.

Ejemplo: Determine las siguientes integrales:

1 $\int (x^3 + 4x^2 - 7)\, dx = \int x^3 \, dx + 4 \int x^2 \, dx - 7 \int dx = \frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 - 7 + C$, C constante.

2 $\int (7e^x + 5\cos x) dx = 7 \int e^x \, dx + 5 \int \cos \, dx = 7e^x - 5\sin x + C$, C constante.