Tercera práctica calificada de Cálculo integral CM 132 Ciclo 2017-2

Undg. Carlos Alonso Aznarán Laos
E-mail: caznaranl@uni.pe
Science Department, National University of Engineering

Temas: Integración numérica (Regla del Trapecio y regla de Simpson), función logaritmo y exponencial

---

1. (5 Puntos) Detalle el procedimiento de aproximación por la regla del trapecio de la siguiente integral

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\pi + x}$$

Solución:

Antes de resolver, tenemos que considerar los siguientes teoremas:

Teorema 1. ***Aproximación trapezoidal***

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx T_n = \left(\frac{b-a}{2n}\right)[y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n]$$

El nombre de "aproximación trapezoidal" resulta del hecho que en el caso donde f es no negativo en el intervalo de integración, la aproximación T_n es la suma de las áreas trapezoidales mostradas en la figura (1)

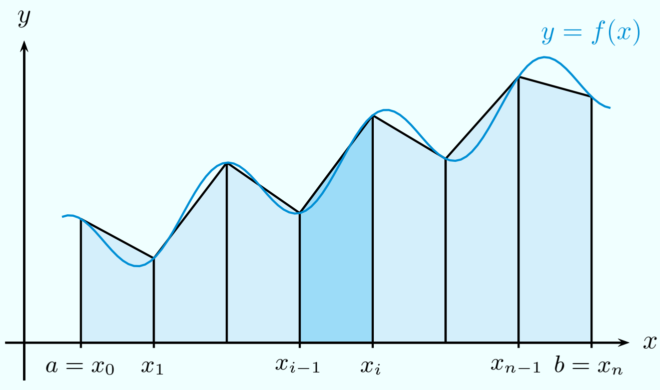

Figura 1: Ilustración de la aproximación trapezoidal de la función $f(x)$

Teorema 2. *Si f'' es continua en $[a, b]$ y si K_2 es el máximo valor de $|f''(x)|$ en $[a, b]$, entonces definimos el error absoluto*

$$|E_T| = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T_n\right| \leq \frac{(b-a)^3 K}{12n^2} \tag{1}$$

Los errores absolutos son no negativos y no se distinguen entre subestimaciones y sobreestimaciones.
Para obtener dos decimales de precisión, debemos de escoger el número de subintervalos de manera que

$$|E_T| \leq 0{,}01 = 1 \times 10^{-2} \tag{2}$$

De (1), con $f(x) = \dfrac{1}{\pi + x}$, $a = 0$, y $b = \pi$, una cota superior de $|E_T|$ es dado por

$$|E_T| \leq \frac{\pi^3 K}{12n^2} \tag{3}$$

donde $|K|$ es el máximo valor de $|f''|$ en el intervalo $[0, \pi]$. Sin embargo,

$$f'(x) = -\frac{1}{(\pi + x)^2} \qquad f''(x) = \frac{2}{(\pi + x)^3} \qquad f'''(x) = -\frac{6}{(\pi + x)^4}$$

por lo que

$$|f''(x)| = \left|\frac{2}{(\pi + x)^3}\right|$$

Podría ser tedioso encontrar el máximo valor de esta función en el intervalo $[0, \pi]$ (si no fuera monótona) .

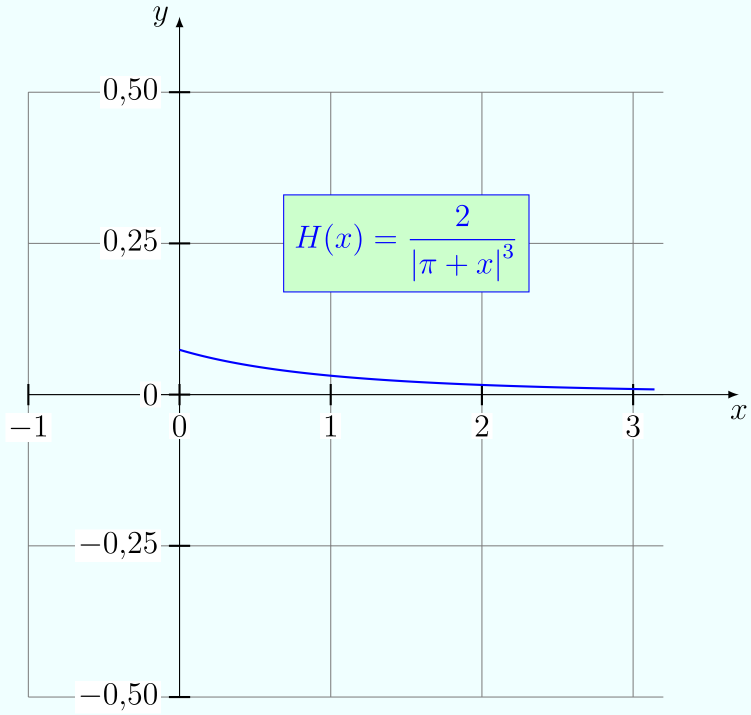

Figura 2: $H(x) = \dfrac{2}{|\pi + x|^3}$ es decreciente para $0 \leq x \leq \pi$.

Para $x \in [0, \pi]$, $|f''|$ es una función estrictamente decreciente, ya que su derivada es negativa en $[0, \pi]^{o}$ y su valor extremo máximo (toda función continua posee valores extremos) en $[0, \pi]$ es $|f''|(x = 0) = \dfrac{2}{|\pi + 0|^3}$. Es evidente del gráfico que

$$|f''(x)| \leq \frac{2}{\pi^3} \qquad \text{para } 0 \leq x \leq \pi.$$

Así, se deduce de (3) que

$$|E_T| \leq \frac{\pi^3 K}{12n^2} \leq \frac{2\cancel{\pi^3}}{12n^2\cancel{\pi^3}} = \frac{1}{6n^2}$$

y por lo tanto, podemos satisfacer (2), eligiendo n de modo que

$$\frac{1}{6n^2} < 1 \times 10^{-2}$$

el cual tomando recíproca, puede ser escrito como

$$n^2 > \frac{10^2}{6} \qquad \text{o} \qquad n > \frac{10^1}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{3} \approx 4{,}082$$

El menor valor entero que satisface esta desigualdad es $n = 5$. Por lo tanto, la aproximación trapezoidal T_5 usa 5 subintervalos que resultará con una precisión de 2 decimales.
El ancho de cada subintervalo es $\frac{b-a}{n} = \frac{\pi - 0}{5} = \frac{\pi}{5}$.

i	Punto extremo x_i	$y_i = f(x_i) = 1/(\pi + x_i)$	Multiplicador w_i	$w_i y_i$
0	0	$f(0) = 0{,}3183$	1	0,3183
1	$\pi/5$	$f(\pi/5) = 0{,}2652$	2	0,5305
2	$2\pi/5$	$f(2\pi/5) = 0{,}2273$	2	0,4547
3	$3\pi/5$	$f(3\pi/5) = 0{,}1989$	2	0,3978
4	$4\pi/5$	$f(4\pi/5) = 0{,}1768$	2	0,3536
5	π	$f(\pi) = 0{,}1591$	1	0,1591

Cuadro 1: Aproximación trapezoidal para $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\pi + x}$

Pero $\sum_{i=0}^{5} w_i y_i = 2{,}214$, entonces una aproximación de la $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\pi + x}$ por trapecios es:

$$T_n = \frac{\pi}{10}\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5\right] \approx 0{,}6955$$

De (1):

$$|E_T| = \left| \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\pi + x} - T_5 \right| \leq \frac{(\pi - 0)^3 K}{12 \cdot 5^2} = 6 \times 10^{-3}$$
$$|E_T| = |\ln 2 - T_5| \approx 0{,}0023 = 2 \times 10^{-3} \leq 6 \times 10^{-3}$$

donde $K = 2/\pi^3$, lo cual es cierto.

2. (5 Puntos) Calcule

(a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$.

(b) $\lim_{x \to \infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x+1}}$

Solución:

***Parte** (a).* El numerador y el denominador tienen como límite $-\infty$ e ∞ respectivamente, por lo que tenemos una forma indeterminada del tipo . Aplicando la regla de L'Hopital se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x} \tag{4}$$

Este último límite también tiene como indeterminación ∞/∞. El último límite (4) puede ser reescrito como el producto de los límites, ya que cada límite existe (la recíproca no necesariamente es verdad), esto es

$$\lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen}^2 x\right) = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x = -(1)(0) = 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = 0$$

□

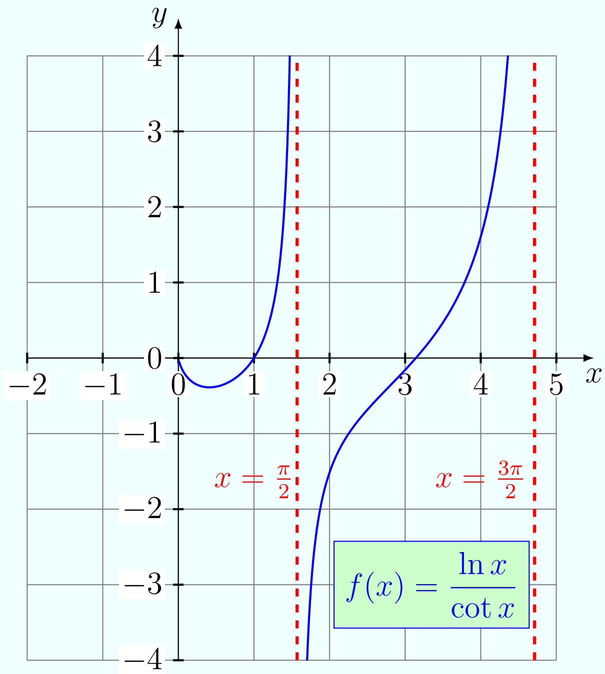

Figura 3: Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{\cot x}$

***Parte** (b).* El numerador y el denominador tienen como límite ∞, por lo que tenemos una forma indeterminada del tipo ∞/∞.

$$\boxed{\begin{array}{ll} a = 2^x & x \to \infty \\ \dfrac{2}{a} = 2^{-x} \cdot 2 & a \to \infty \end{array}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x+1}} = \lim_{a\to\infty} \frac{a + \overset{0}{\cancel{\frac{1}{a}}}}{a - \overset{0}{\cancel{\frac{2}{a}}}} = 1.$$

□

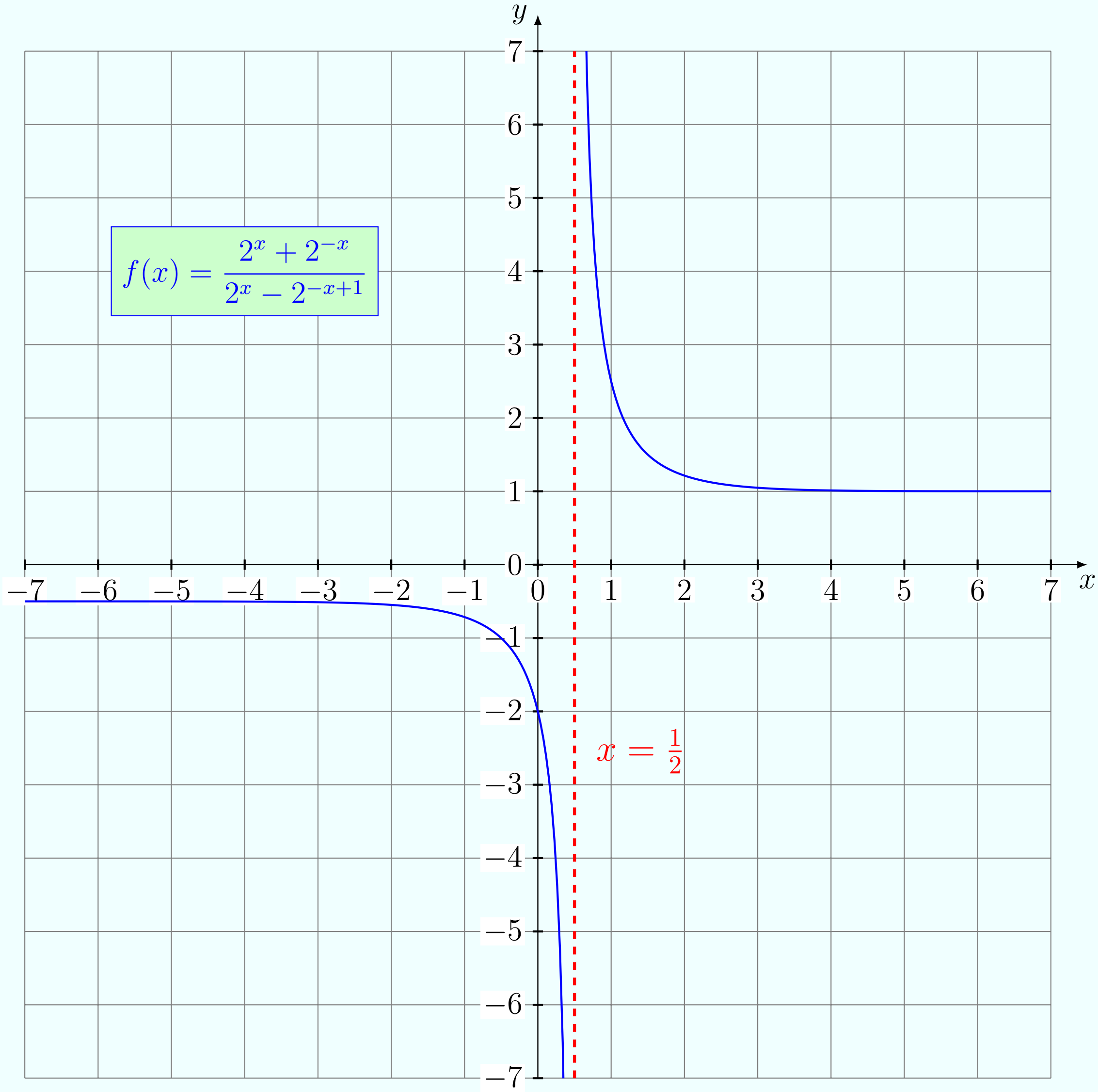

Figura 4: Una asíntota vertical de $\dfrac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x+1}}$ es $x = \dfrac{1}{2}$.

3. (5 Puntos) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \pi$.

   Calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x)e^{f(x)}\,\mathrm{d}x$

Solución:

Como f es derivable, entonces

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{f(x)} + f(h) - \cancel{f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \pi.$$

$\therefore f'(x) = \pi$. Del *Primer Teorema Fundamental del Cálculo*:

$f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \pi\,\mathrm{d}x = \pi x + C,$ C: constante

Nos piden $\displaystyle\int_0^1 f(x)e^{f(x)}\,\mathrm{d}x$, por lo cual se integrará por partes:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \pi x & du = \pi\,\mathrm{d}x \\ dv = e^{\pi x}\,\mathrm{d}x & v = \dfrac{e^{\pi x}}{\pi} \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \pi x e^{\pi x}\,\mathrm{d}x &= \cancel{\pi} x \cdot \frac{e^{\pi x}}{\cancel{\pi}}\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{\pi x}}{\cancel{\pi}}\cancel{\pi}\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot e^{\pi x}\big|_0^1 - \int_0^1 e^{\pi x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(1 \cdot e^{\pi \cdot 1} - \cancelto{0}{0 \cdot e^{\pi \cdot 0}}\right) - \frac{e^{\pi x}}{\pi}\bigg|_0^1 \\ &= e^{\pi} - \left(\frac{e^{\pi \cdot 1}}{\pi} - \frac{\cancelto{1}{e^{\pi \cdot 0}}}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(e^{\pi}(\pi - 1) + 1\right) \quad \square \end{aligned}$$

4. Sean $\lambda, x \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda < 1 < x$. Probar que

$$\ln x < 2\left(\sqrt{x} - \lambda\right)$$

Solución:

Se define la función $H(x) = 2\left(\sqrt{x} - \lambda\right) - \ln x$. La derivada de $H(x)$ es:

$$\aleph_0 = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[2\left(\sqrt{x} - \lambda\right) - \ln x\right] = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}. \tag{5}$$

De (5), afirmo que $\aleph_0$ es positiva.

Prueba de Oromion. En efecto, basta tomar la función logaritmo natural, esto es,

$$\begin{aligned} &\omega = \ln x > 0 && \text{la función logaritmo es positiva } \forall x > 1 \\ &\omega = \frac{1}{2}\ln x > 0 && \text{multplicamos por } \frac{1}{2} \\ &\omega = \ln\left(x^{1/2}\right) > 0 && \text{por propiedad de logaritmo} \\ &\omega = \ln\left(x^{1-1/2}\right) > 0 && \text{operación aritmética} \\ &\omega = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right) > 0 && \text{por propiedad de logaritmo} \\ &\omega = \ln\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}\right) > 0 && \text{por propiedad de fracciones} \\ &\omega = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) > 0 && \text{por propiedad de logaritmo} \\ &\omega = \ln(\aleph_0) > 0 && \text{reemplazando de nuestra hipótesis} \end{aligned}$$

$\therefore \aleph_0 > 0$. y $H(x)$ es una función creciente, es decir, $\forall x > 1\colon 2\left(\sqrt{x} - \lambda\right) - \ln x > 0$, es decir,

$$\ln x < 2\left(\sqrt{x} - \lambda\right)$$

$\square$

Facultad de Ciencias, 3 de octubre del 2017.