

Práctica calificada de Cálculo Integral

Facultad de Ciencias - Universidad Nacional de Ingeniería - Lima - Perú

Descarga la versión actualizada en <http://github.com/carlosal1015>

Actualizado al 13 de abril de 2017.

Ejercicio 0.1 Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

Determine si f tiene antiderivada, en caso que la tenga muestre una. Justifique su respuesta.

Ejercicio 0.2 Integrar

$$\int \sqrt{x} \sqrt{1 + x\sqrt{x}} \, dx$$

Solución :

Sea

$$u = \sqrt{x}.$$

$$du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dx}{du}.$$

Entonces,

$$I = \int u \sqrt{1 + u^2 \cdot u} (2u \, du)$$

Sea

$$w = 1 + u^3$$

$$dw = 3u^2 \cdot du \implies \frac{dw}{3} = u^2 \, du.$$

Entonces,

$$I = 2 \int \left(\frac{dw}{3} \cdot \sqrt{w} \right) = \frac{2}{3} \int w^{1/2} \, dw = \frac{2}{3} \frac{w^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + K = \left(\frac{2}{3} \right)^2 \cdot w^{3/2} + K.$$

Reemplazando:

$$I = \left(\frac{2}{3} \right)^2 [(1 + u^3)]^{3/2} + K.$$

Seguimos reemplazando,

$$I = \left(\frac{2}{3} \right)^2 [(1 + \sqrt{x}^3)]^{3/2} + K. \blacksquare$$

Ejercicio 0.3 Halle la antiderivada de

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$$

tal que dicha antiderivada pasa por el punto $P(0, \frac{709}{280})$.

Ejercicio 0.4 Halle la antiderivada general de

$$f(x) = \arctan \sqrt{x} \, dx$$

Solución :

Usemos el método de sustitución:

$$u = \sqrt{x}$$
$$du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

Luego:

$$I = \int \arctan u \cdot 2 \, du \cdot u$$
$$I = 2 \int u \arctan u \, du$$

Empleamos la técnica de integración por partes:

$$\alpha = \arctan u \quad d\beta = u \, du$$
$$d\alpha = \frac{du}{1+u^2} \quad \beta = \frac{u^2}{2}$$

Entonces nos queda:

$$I = \arctan u \cdot \frac{u^2}{2} - \int \frac{u^2}{2} \cdot \frac{du}{1+u^2}$$
$$I = \frac{1}{2} u^2 \arctan u$$

Ejercicio 0.5 Calcule

$$I = \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

Solución :

Usemos el método de integración por partes (IPP).

$$u = e^{ax} \quad dv = \cos(bx) \, dx$$
$$du = e^{ax} a \, dx \quad v = \frac{\sin(bx)}{b}$$

Luego,

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin(bx).$$

Ahora vamos a integrar por partes a

$$\int e^{ax} \sin(bx)$$

$$u = e^{ax} \quad dv = \sin(bx) \, dx$$

$$du = e^{ax} a \, dx \quad v = -\frac{\cos(bx)}{b}$$

Luego nos queda:

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \frac{a}{b} \left[e^{ax} \frac{-\cos(bx)}{b} - \int \frac{-\cos(bx)}{b} e^{ax} a \, dx \right]$$

$$I = \frac{e^{ax} \sin(bx)}{b} - \frac{a}{b} \left[e^{ax} \frac{-\cos(bx)}{b} \right] - \left(\frac{a}{b} \right)^2 I$$

Despejando y simplificando nos quedará:

$$I = \frac{\frac{1}{b} [e^{ax} \sin(bx) + \frac{a}{b} e^{ax} \cos(bx)]}{1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2} + K.$$