Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2009-1

1^{ra} Práctica Dirigida de Cálculo Diferencial (CM131 A-B-C)

1. Simbolice las proposiciones matemáticas siguientes:

   (a) Si x es menor que cinco y mayor que 1 o x es igual a cero.

   (b) Si a la vez x es menor que cinco y mayor que 1, entonces x es igual a tres.

   (c) O x es mayor que tres y x es menor que siete ó x no es igual a seis.

2. Simbolice y niegue las proposiciones:

   (a) Para todo número racional r existe un número entero n tal que $n \leq r < n + 1$.

   (b) Es posible encontrar un número y entre 0 y 1, de modo que todo par de números $x, z \in \mathbb{R}$, también entre 0 y 1, satisfacen $z \leq y < x$.

   (c) Sea f una función con $\text{Dom} f = \mathbb{R}$. Para todo $\varepsilon > 0$, hay un número real positivo δ tal que para todo x entre los números $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$.

   (d) Ningun $x \in A$ satisfacerá $x^2 < y^2$, cuando $x < 3$.

   (e) Es suficiente que $\sqrt{x} < \pi$, para que todo $y \in \mathbb{R}$ con $y > \pi^2$ sea mayor que x.

3. Sean $A = \{-1, 0, 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{N} / |x - 1| \leq 1\}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   (a) $\forall\, y \in B,\ \exists x \in A\ /\ 2y - x = 1$.

   (b) $\exists\, y \in B\ /\ \forall\, x \in A\ x \leq y$

   (c) $\exists\, y \in A\ \exists\, z \in B\ /\ x - y = z$

   (d) $\exists\, y \in A\ /\ \forall\, y \in B\ /\ x + y \in A$.

4. Sean $A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2 \longrightarrow x < 6\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / x < 5 \longrightarrow x \geq 3\}$. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   (a) $\forall\, x \in A,\ \exists y \in B\ /\ x \leq y + 1$.

   (b) $\exists\, x \in A\ /\ \forall\, y \in B\ y > x - 1$.

5. Sean $A = \{x \in \mathbb{Z} / -50 \leq x \leq 50\}$ y las proposiciones:

$$\begin{aligned} p &: \quad \forall x \in A,\ \exists y \in A / x^2 > y - 52 \\ q &: \quad \exists x \in A / \forall y \in A,\ x + y = 0 \\ r &: \quad \forall x \in A, \forall y \in A,\ \frac{x^2 - y^2}{x + y} = x + y \end{aligned}$$

   Halle el valor de verdad de:

$$(p \wedge q) \longrightarrow \sim (r \longrightarrow \sim p).$$

6. Las siguientes proposiciones son equivalentes

   (a) $p : \forall n \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{R} / n < x$.

   (b) $q : \exists x \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N} : n < x$.

7. Sean las proposiciones

$$p_1 : x > 6 \quad \text{y} \quad p_2 : x^2 > 36$$

   (a) Diga que proposición es sufiente para la otra.

   (b) Diga que proposición es necesaria para la otra.

8. Sean las propocisiones

$$p_1 : x > 6 \quad \text{ó} \quad x < -6 \quad \text{y} \quad p_2 : x^2 > 36$$

   ¿Una es necesaria y suficiente para la otra?

9. Halle las tablas de los valores de verdad de las siguientes proposiciones

   (a) $\sim p \wedge q$.

   (b) $\sim (p \longrightarrow \sim q)$.

   (c) $(p \wedge q) \longrightarrow (p \vee q)$.

   (d) $\sim (p \wedge q) \vee \sim (q \leftrightarrow p)$.

10. Establezca las negaciones de:

    (a) $\forall x \in \mathbb{Z},\ x + 3 > x$.

    (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ / x^2 - y^2 = x + y$.

    (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ / x \geq y \vee x < y$.

    (d) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ / x > y \wedge y < x^2$.

    (e) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n (n > n_0 \rightarrow |a_n| < \varepsilon)$.

11. Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

    (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$.

    (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} / x^2 + y^2 = (x + y)^2$.

    (c) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \rightarrow \exists y / xy = 1$.

    (d) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y = 0$.

    (e) $\exists x \in \mathbb{R} /\ 3x - 2 = 4x + 1$.

12. Formalice la siguientes inferencias:

    (a) Los congresistas representan a la Nación, pero no estn sujetos a mandato imperativo. Luego, los congresistas representan a la Nación.

(b) Felipe no ser expulsado del club a menos que él cometa actos de traición e inmoralidad. No ha sido expulsado. En consecuencia, no ha cometido actos de traición ni de inmoralidad.

(c) Si el niño, el adolescente y el anciano son abandonados, enton- ces son protegidos por el Estado. Pero el niño es abandonado, también el anciano. Luego, tanto el niño como el anciano son protegidos por el Estado.

(d) Sin mandato judicial ni autorización de la persona que lo habita, no se puede ingresar en el domicilio, tampoco efectuar in- vestigación. Pero se ingresó al domicilio y efectuó investigación. En consecuencia, hubo mandato judicial y autorización de la per- sona que lo habita.

(e) Un número es divisible por 2 si la última cifra de dicho número es múltiplo de 2. Un número es divisible por 3 si la suma de las cifras de dicho número es múltiplo de 3. Pero dicho número no es divisible por 2 o no lo es por 3. Por tanto, la suma de las cifras de un número no es un múltiplo de 3 si la última cifra de un número es múltiplo de 2.

13. De las premisas, ¿qué concluye?

$$
\begin{array}{llll}
a) & \sim A \to C & b) & P \vee Q \\
 & C \to \sim M & & Q \to R \\
 & M \cup R & & P \wedge \sim R \to S \\
 & \sim R & & \sim R \\
 & ------ & & ------
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
c) & \sim A \vee B & d) & P \to Q & e) & A \to B \\
 & \sim A \to E & & \sim Q & & B \to C \\
 & \sim E & & \sim P \to R & & A \\
 & ------ & & ------ & & ------
\end{array}
$$

14. Demuestre que $y + 8 < 12$ si

(a) $x + 8 = 12 \vee x \neq 4$. (V)

(b) $x = 4 \wedge y < x$.

(c) $x + 8 = 12 \wedge y < x \to y + 8 < 12$

15. Demuestre que $x < 4 \wedge y < 6$

(a) $x + 2 < 6 \to x < 4$.

(b) $y < 6 \vee x + y \not< 10$.

(c) $x + y < 10 \wedge x + 2 < 6$.

16. Demuestre por inducción matemática:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

(b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$.

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

(d) $n < 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

(e) $2^n > n^2, \forall n \geq 5$.

(f) $3^n > n^3, \forall n \geq 4$.

(g) $n! \geq n^2, \forall n \geq 4$.

(h) $n(n+1)$ es multiplo de 2 para todo $n \in \mathbb{N}$.

(i) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos(2^{k-1}x) = \frac{\operatorname{sen}(2^n x)}{2^n \operatorname{sen}(x)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

17. Si n es un numero natural par, demuestre que su cuadrado también lo es.

18. Pruebe que todo natural n verifica la desigualdad $3^n > 2n$.

19. Demuestre por inducción que

(a) $m + n \leq m \cdot n$, para todo $m, n \geq 2$.

(b) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

20. Demuestre que si $x_0 \in \langle a, b\rangle$, entonces existe un $r > 0$ para el que se da la inclusion $\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \subset \langle a, b\rangle$.