Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2018-1**

Práctica Calificada de Cálculo Diferencial e Integral Avanzado - CM-211 **Mayo 15, 2018**

1. Determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

   (a) La función $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida como

   $$f(x,y,z) = \begin{cases} \left(\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}; (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x+y+z}\right)\right) & ; si\ xy \neq 0 \text{ ó } z \neq 0 \\ (0;0) & ; si\ xy = 0\ y\ z = 0 \end{cases}$$

   posee derivada direccional en $(0,0,0)$ en cualquier dirección. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

   (b) Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una función diferenciable. Si escribimos $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$, donde f_1, f_2 denotan las funciones coordenadas de f, entonces

   $$Jf(1,0,2).(x,y,z) = \nabla f_1(1,0,2).(x,y,z) + \nabla f_2(1,0,2).(x,y,z)$$

   (c) Toda función constante es diferenciable y su diferencial en cualquier punto es la transformación lineal nula.

   (d) En toda función f diferenciable tal que su diferencial en cualquier punto es ella misma, entonces f es una transformación lineal.

2. Determinar los puntos críticos de la función $f(x,y) = 25 - x^2 - y^2$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 - 4y = 0$. Luego, indique en cual o en cuales de estos, f alcanza un mínimo o un máximo.

   $x^2 + (y^2 - 2(2)(y) + 2^2) = 2^2$

   $x^2 + (y-2)^2 = 2^2$

3. Sea, en cada caso, $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

   (a) Si

   $$f(x,y) = \left(\frac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}}; \frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

   pruebe que es continua y aplica $\mathbb{R}^2$ sobre el disco abierto unitario $x^2+y^2 < 1$. Concluya que f tiene inversa.

   (b) Si $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, muestre que f es continua pero no inyectiva.

4. Supuesto que $0 < b < a$, se define la función $f : [0,2\pi] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ como $\nabla f = \lambda \nabla g$

   $$f(x,y) = ((a + b\cos x)\cos y; (a + b\cos x)\sin y; b\sin x)$$

   Si x_0 y y_0 son fijos, verifique que $f(x_0,y)$ y $f(x,y_0)$ son circunferencias. Esboce el rango de f.

5. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dos campos vectoriales definidos del modo siguiente:

   $$f(x,y) = (e^{x+2y}, sen(y+2x)), \quad g(u,v,w) = (u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2).$$

   (a) Determine la función compuesta $h(u,v,w) = f(g(u,v,w))$.

   (b) Calcule la matriz jacobiana de $Jh(1,-1,1)$ usando la regla de la cadena.

Los profesores*

Lima, May 14, 2018.

*Hecho en LaTeX