Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2015-II

[Cod: CM131 Curso: Cálculo Diferencial]
[Tema: Lógica]
[Prof: R. Acuña, G. Marca, K. Venegas, J. Sotelo]

Práctica Dirigida N^o 1

---

1. Considere $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Hallar por extensión los siguientes conjuntos

   a) $A_1 = \{x \in A : \exists y \in A \,\text{tal que}\, x^2 + y \geq 8\}$.

   b) $A_2 = \{x \in A : \forall y \in A \,\text{tal que}\, x^2 + y \geq 8\}$

   c) $A_3 = \{x \in A : \exists! y \in A \,\text{tal que,}\, x^2 + y \geq 8\}$.

2. Negar la proposición siguiente: existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq 3 \to x < 7$.

3. Utilizando tablas de verdad verificar si es contingencia, tautología o contradicción?

   a) $(p \wedge q) \to r$ Contingencia

   b) $\sim (p \wedge q) \vee r$ Contingencia

   c) $q \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$ Contingencia

   d) $p \to \sim (q \wedge r)$ Contingencia

   e) $((p \to q) \to r) \leftrightarrow ((p \wedge q) \to r)$

4. Sean p y q dos proposiciones. Se define el conectivo siguiente $p * q = \sim p \vee \sim q$. Expresar sólo en términos del conectivo $*$, cada una de las siguientes proposiciones

   a) $\sim p$. $p*p$

   b) $p \wedge q$. $(p*q)*(p*q)$

   c) $p \vee q$. $(p*p)*(q*q)$

   d) $p \to q$. $p*(q*q)$

5. Simplifique la expresión siguiente:

$$\sim [\sim (p \wedge q) \to \sim q] \vee p$$

6. Negar las proposiciones siguientes

   a) $\forall x, \forall y, \exists z, (x + y) = z$

   b) $\forall x, \forall y / (xy \leq 2)$

   c) $\forall x, \forall y, \forall z, x + z < y$

   d) $\exists x, \exists y / \; xy < 2$

7. Construir la tabla de verdad para la siguiente proposición

$$[p \wedge (p \vee q)] \leftrightarrow p$$

8. Si definimos $p \bigtriangleup q = \sim (p \leftrightarrow q)$. Pruebe que

$$p \bigtriangleup (q \bigtriangleup r) \equiv (p \bigtriangleup q) \bigtriangleup r.$$

9. Usando las reglas de inferencia

   a) Demostrar mediante el método directo que se cumple con $s \to \sim h$, utilizando las siguientes premisas:

$$\begin{array}{ccc} \sim p & \vee & q \\ h & \to & \sim t \\ (q \vee r) & \to & (p \to t) \\ s & \to & p \end{array}$$

b) Demostrar mediante el método indirecto que se cumple con $\sim N$, utilizando las premisas siguientes:

$$\begin{array}{ccc} s & \rightarrow & \sim r \\ r & & \\ \sim s & \rightarrow & q \\ q & \rightarrow & \sim N \end{array}$$

c) Demostrar

$$\begin{array}{ccc} \sim A & \rightarrow & B \\ C & \rightarrow & B \\ C & \vee & \sim A \\ \sim B & \vee & D \\ \hline \therefore D & & \end{array}$$

10. Demostrar

$$\begin{array}{ccc} p & \wedge & q \\ p & \rightarrow & r \\ \hline \therefore r & \wedge & q \end{array}$$

11. Demostrar

$$\begin{array}{ccc} p & \vee & q \\ p & \rightarrow & r \\ \hline \therefore r & \vee & q \end{array}$$

12. Demostrar: $(A-C)\cap[A-(B\cap C)] = A-C$.

13. Sean A y B dos conjuntos. Demostrar que si $A\subset B$, entonces $B^c\subset A^c$.

14. Demostrar: Sea n un natural tal que si $5n+3$ es par, entonces n es impar.

15. Demuestre que para cada conjunto A se cumple con $\emptyset\subset A$.

16. ¿Es cierto o falso que $\sim(p\wedge q)\leftrightarrow[p\vee\sim q]$ es equivalente a $\sim p\vee\sim q$?.

17. Sean A y B dos conjuntos. Demostrar que si $A^c\cap B = A\cap B$, entonces $B=\emptyset$.

18. Pruebe que $\sim(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(\sim p\leftrightarrow\sim q)$ es una contradicción.

19. Demostrar en forma indirecta y por contradicción la siguiente afirmación: Si n^2 es par, entonces n es par.

20. Se definen las proposiciones

$$p\,\heartsuit q \equiv \sim p\wedge q$$

$$p\,\clubsuit q \equiv p\vee\sim q$$

Además la proposición $\sim[(q\,\heartsuit\, p)\rightarrow(q\,\clubsuit\, r)]$ es una tautología. Determine los valores de verdad para p, q y r.

21. Considere $A\subset B$. Demostrar: Si $B=\emptyset$, entonces $A=\emptyset$.

22. Demostrar que si c es impar, entonces $x^2+x=c$ no tiene solución entera en x.

23. Demostrar en forma indirecta, si $3n+2$ es impar, entonces n es impar.

24. Si $A=\{1,2,3,\ldots,10\}, B=\{x\in A : x<3\leftrightarrow x\geq 6\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

    a) $\forall x\in A, \exists y\in B$ tal que $x+y\leq 7$. F

    b) $\forall x\in A, \exists y\in B$ de modo que $x+y\in B$. F

    c) $\exists x\in A, \forall y\in B$ tal que $x+y\in A$. V

25. Sean A y B dos conjuntos. Demostrar $A\subset B$ si y solo si $P(A)\subset P(B)$, donde $P(A)$ es el conjunto potencia del conjunto A.

26. Sean A, B dos conjuntos. Demostrar que

$$P(A)\cup P(B)\subset P(A\cup B)$$

27. Sean A, B dos conjuntos.
    ¿Es cierto que $P(A)\cap P(B) = P(A\cap B)$?

28. ¿Es cierto que para todo $n\in\mathbb{Z}^+$, n^2-n+41 es un entero primo?

29. Sean p y q dos proposiciones lógicas. Sabiendo que

    V F

    a) $\sim p\wedge q$ es contradicción.

    b) $p\wedge q\equiv p$.

Pruebe que $p \equiv q$.

30. Para una proposición cualquiera p se define: $V(p) = \begin{cases} 1, & \text{si p es verdadera.} \\ 0, & \text{si p es falsa.} \end{cases}$

   a) Pruebe que
      - $V(\sim p) = 1 - V(p)$.
      - $V(p \vee q) = V(p) + V(q) - V(p)V(q)$.

   b) Encuentre la formula de $V(p \to q)$.

31. Dados $A, B \subset E$. Pruebe que

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset$$

32. Sean A, B subconjuntos de U. Demostrar que

   a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

   b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

   c) $A \cap B = A$ y $A \cup B = A \Leftrightarrow A = B$.

33. Probar que $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

34. Sea $A = \{1, 2, \ldots, 20\}$, $B = \{x \in A : x < 5 \leftrightarrow x \geq 7\}$. Indagar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   a) $\forall X \subset A \to B \cap X = \emptyset$.

   b) $\exists\, X \subset A \wedge Y \subset B$ tal que $X \cap Y = \emptyset$.

   c) $\exists\, D \subset A$ tal que $B \cup D = A$.

   d) $\exists X \in A, \forall y \in B, x < y$.

   e) $\forall x \in A, \exists y \in A$ tal que $x - y \in B$.

35. Demuestra poniendo un contraejemplo que las siguientes afirmaciones no son verdaderas:

   a) Todo entero mayor que 17 es el cuadrado de un número entero.

   b) Todo entero mayor que 6 es múltiplo de 2 y de 3.

   c) $100n + 1 > n^2$ para todo entero n.

36. Demuestra por reducción al absurdo las siguientes afirmaciones:

   a) $\sqrt{2}$ no es racional.

   b) Si un x es un número racional, entonces $\pi + x$ no es racional.

37. Sabiendo que $n \in \mathbb{Z}$. Demostrar que si n^2 es múltiplo de 5, entonces n es múltiplo de 5.

38. Analice el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

   a) $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $\forall y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 = (x + y)^2$.

   b) $\exists\, x \in \mathbb{R}$ de modo que $2x - 4 = 4x - 2$.

39. Dados los conjuntos A y B. Sea X un conjunto con las siguientes características

   a) $A \subset X, B \subset X$.

   b) si $A \subset Y, B \subset Y$, entonces $X \subset Y$.

   Probar que $X = A \cup B$.

40. Sean $A, B \subset E$. Pruebe que $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$, donde B^c es el complemento del conjunto B respecto a E.

41. Demostrar que $A \cup B = E \Leftrightarrow A^c \subset B$, siendo $A, B \subset E$.

42. Sean $A, X \subset E$ conjuntos tales que $A \cap X = \emptyset$ y $A \cup X = E$. Pruebe que $X = A^c$.

43. Sean A y B dos conjuntos. Demostrar que $A \cup B \neq \emptyset$, entonces $A \neq \emptyset$ o $B \neq \emptyset$.

44. Sabiendo que $n \in \mathbb{Z}$. Probar que si n^2 es múltiplo de 3, entonces n es múltiplo de 3.

45. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $n^3 - n$ siempre es múltiplo de tres.

Uni, 31 de Agosto de 2015