Integración en polares, cambio de variable,
Cálculo de volúmenes: $\iint$ Pappus – Guldin $2\pi\bar{x}A$
Momento de inercia (Física)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA CICLO 2018–I

PRÁCTICA DIRIGIDA 9 DE CÁLCULO AVANZADO

1. Evalúe $\iint_D y^2dxdy$, si D está limitada por el eje de las abcisas y el primer arco de la cicloide $x = a(t - sent)$, $y = a(1 - cost)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
2. Calcule $\iint_D (x^2 + y^2)^{-3/2}dxdy$ donde $D : x^2 + y^2 \leq 1, \quad x + y \geq 1, \quad y \geq x$.
3. Calcule $\iint_D (x^2 - y^2)dxdy$, donde $D : x^2 + y^2 - 2x \leq 0,\ y^2 - x \leq 0$.
4. Obtenga el área encerrada en la lemniscata $r^2 = 4\cos(2\theta)$.
5. Usando integración polar, calcule el área de la región D en el plano xy encerrada en la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, arriba de la recta $y = 1$, y abajo de la recta $y = x$.
6. Calcule $\int_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$ donde D es el triángulo formado por $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$.

C.V 7. Considere la transformación $x = vcos(2\pi u)$, $y = vsen(2\pi u)$.
   (a) Describa la imagen D bajo la transformación T del cuadrado unitario $R = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$.
   (b) Calcule el área de D.

C.V. 8. Sea D el cuadrado con vértices $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ y $(0, -1)$. Reescriba la doble integral $\iint_D (x + y)^5\, dA$ como una integral con respecto a $dudv$ donde $u = x + y$ y $v = x - y$.

9. Sea $f(x, y) = e^{x+y}$ y sea D el paralelogramo en el plano xy limitado por las rectas $x - 2y = 0$, $x - 2y = 3$ y $2x - y = 3$. Use el cambio de variables lineal $u = x - 2y$, $v = 2x - y$ para evaluar $\iint_D f(x, y)\, dA$.

C.V 10. Calcule
   (a) $\iint_R y^2dA$ donde R es la región limitada por $xy = 1$, $xy = 2$, $xy^2 = 1$ y $xy^2 = 2$.
   (b) $\iint_R f(x, y)dA$ donde $f(x, y) = e^{\frac{x+y}{x-y}}$ y R es la región trapezoidal con vértices $(1, 0), (2, 0), (0, -2)$ y $(0, -1)$.

11. Encuentre el volumen bajo la superficie $z = x^2 + y^2$, sobre el plano $z = 0$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$.

12. Halle el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide $z = x^2 - y^2$ y los planos $z = 0$, $x = 3$.

13. Calcule el área de la region encerrada por la curva $x^2 + 4(y-1)^2 = 2x + 3$ por debajo de la recta $x = 2y + 1$

14. Encuentre el volumen del toro S generado por la rotación en torno al eje y, de la región circular limitada por $(x-2)^2 + y^2 = 1$ (Puede usar el teorema de Pappus).

15. Sea R una región plana limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y las líneas rectas $y = x$, $y = -\sqrt{3}x$ (la región queda en el primer y cuarto cuadrante). Usando integrales dobles calcule, el volumen del sólido obtenido por la rotación de la región R alrededor del eje OY.

16. Calcule el volumen del sólido obtenido al girar en torno al eje OX la región limitada por $y = x^2$, $y = 2$.

17. Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar en torno al eje x la región limitada por la gráficas de $y = x$, $y = 4$ y $x = 0$ en torno al eje x

18. Considere la región el interior de un cuadrilátero que une los puntos $(0,2)$, $(2,0)$, $(4,2)$, $(2,4)$. Halle el volumen generado por la rotación de esta región alrededor del eje x.

19. Calcule el volumen del sólido obtenido por la rotación de la región R limitada por las gráficas de $y = 2x$ y $y = x^2$ en torno de la recta $2x - y - 6 = 0$.

20. Calcule la masa de una lámina formada por $y = 3sen(\frac{2\pi x}{5})$, $y = 3cos(\frac{2\pi x}{5})$, $5 \leq 8x \leq 25$ cuya densidad de área es $\rho(x,y) = 2x + y$.

21. Encuentre la masa y el centro de masa de una región cuadrada de vertices $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$; y cuya densidad en el punto (x,y) viene dada por $\rho(x,y) = |x| + |y|$.

22. Calcule el centro de masa de la lámina homogénea D formada por $y = 2-3x^2$, $3x+2y = 1$.

23. Calcule el momento de inercia de la región encerrada por la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = (ab)^2$,
    (a) respecto del eje Y.
    (b) respecto del origen (momento polar).

24. Calcule el momento de inercia de la región encerrada por la hipérbola $xy = 4$ y la recta $x + y = 5$, respecto de la recta $y = x$.

25. Una lámina homogénea tiene forma de triángulo isósceles con base b y altura h. Calcule el radio de giro de dicha lámina respecto de su eje de simetría.

26. Calcule el radio de giro de una lámina semi-circular de radio a respecto de su diámetro sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional a la distancia de dicho punto al diámetro.

Los profesores[1]
Lima, 21 de Mayo del 2018.

[1]Hecho en LaTeX