Quinta práctica calificada de Cálculo integral CM 132 Ciclo 2017-2

FACULTAD DE CIENCIAS | UNI

Undg. Carlos Alonso Aznarán Laos
E-mail: caznaranl@uni.pe
Science Department, National University of Engineering

Temas: Área entre curvas en coordenadas polares, rectificación de una curva, áreas de superficies de revolución.

---

1. (5 Puntos) Grafique y calcule el área de la región interior a la curva $r_1(\theta) = 4 + 4\operatorname{sen}\theta$ y exterior a $r_2(\theta) = 4$.

Solución:

En este ejercicio utilizaremos el siguiente teorema:

Teorema 1 (Área de una región acotada en coordenadas polares)**.** *Si α y β son las medidas de dos ángulos que satisfacen la ecuación*

$$\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$$

y si $r(\theta)$ es continua ya sea no negativo o no positivo para $\alpha \leq \theta \leq \beta$, entonces el área A de la región $\mathcal{R}$ encerrado por la curva polar $r = r(\theta)$ $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ y las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ es

$$\text{\textit{Área}} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[r(\theta)]^2 \,\mathrm{d}\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \,\mathrm{d}\theta. \tag{1}$$

La región es mostrada en la gráfica 1, nuestro problema consiste en determinar el área de la región de color verde.

Para que el radio vector barra la región, θ debe variar desde $\alpha = 0$ hasta $\beta = \pi$. Por lo tanto, de (1) con $\alpha = 0$ y $\beta = \pi$, obtenemos

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[r(\theta)]^2 \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [4(1+\operatorname{sen}\theta)]^2 \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^{\pi} \cancelto{8}{16} \left(1 + 2\operatorname{sen}\theta + (\operatorname{sen}\theta)^2\right) \mathrm{d}\theta \\
&= 8\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta + 16\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \,\mathrm{d}\theta + 8\int_0^{\pi} (\operatorname{sen}\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta \\
&= 8\,\theta\big|_0^{\pi} - 16\cos\theta\big|_0^{\pi} + \cancelto{4}{8}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{\cancel{2}} \,\mathrm{d}\theta \\
&= 8(\pi - 0) - 16(\cos\pi - \cos 0) + 4\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta - 4\int_0^{\pi} \cos 2\theta \,\mathrm{d}\theta \\
&= 8\pi - 16(-1-1) + 4\,\theta\big|_0^{\pi} - \cancelto{2}{4} \cdot \left.\frac{\operatorname{sen}2\theta}{\cancel{2}}\right|_0^{\pi} \\
&= 8\pi + 32 + 4(\pi - 0) - 2(\operatorname{sen}2\pi - \operatorname{sen}0) \\
&= 12\pi + 32 - 4(0-0) \\
&= (32 + 12\pi)\,\mathrm{u}^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[r(\theta)]^2 \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [4]^2 \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^{\pi} \cancelto{8}{16} \,\mathrm{d}\theta \\
&= 8\,\theta\big|_0^{\pi} \\
&= 8(\pi - 0) \\
&= 8\pi u^2.
\end{aligned}$$

La respuesta al ejercicio 1 es $A_1 - A_2 = (32 + 12\pi)u^2 - (8\pi)u^2 = (32 + 4\pi)u^2$

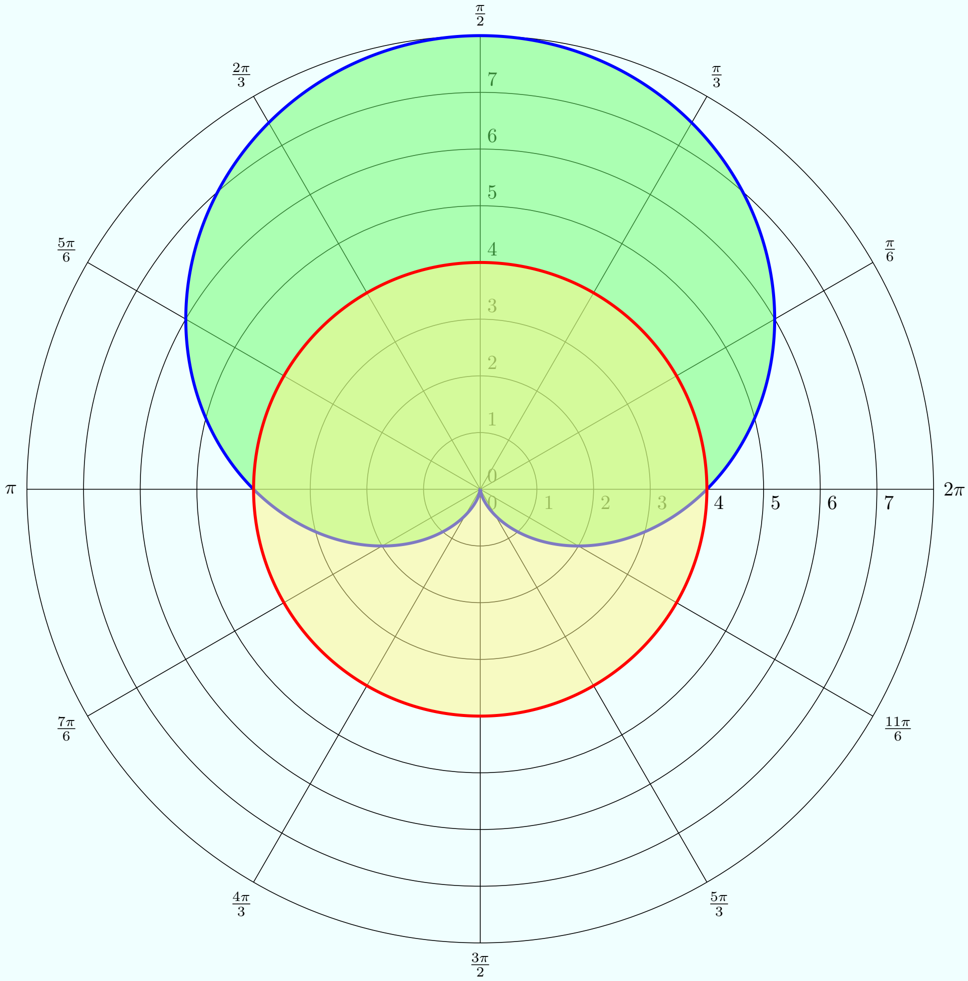

Figura 1: Gráfica del cardioide $r_1(\theta) = 4\,(1 + \operatorname{sen}\theta)$ y una circunferencia en coordenadas polares $r_2(\theta) = 4$.

2. (5 Puntos) Determine la longitud del arco de la curva $\mathcal{C}\colon\, y = e^{-x}, x \in [0, 1]$.

Solución:

En este ejercicio utilizaremos el siguiente teorema:

Teorema 2 (Rectificación de una curva dada por una función)**.** *Si* $\mathcal{C}\colon\, y = f(x)$ *es una curva suave en el intervalo* $[a, b]$, *entonces la longitud del arco* $\ell(\mathcal{C})$ *de esta curva sobre* $[a, b]$ *es*

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

En efecto, $y = e^{-x}$ es una curva suave, entonces reemplazando:

$$\begin{aligned}\ell(\mathcal{C}) &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left[(e^{-x})'\right]^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + [-e^{-x}]^2}\,\mathrm{d}x && \text{, ya que } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[e^{-x}] = e^{-x} \cdot -1 = -e^{-x} \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + e^{-2x}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Realizando la siguiente u- sustitución:

$$\boxed{u = \sqrt{1 + e^{-2x}} \implies \mathrm{d}u = \frac{\cancel{2}e^{-2x}\,\mathrm{d}x}{\cancel{2}\sqrt{1 + e^{-2x}}} = \frac{u^2 - 1\,\mathrm{d}x}{u} \iff \mathrm{d}x = \frac{u\,\mathrm{d}u}{u^2 - 1}}$$

Así,

$$\begin{aligned}\ell(\mathcal{C}) = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{-2x}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{-2}}} u\left(\frac{u\,\mathrm{d}u}{u^2 - 1}\right) \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{-2}}} \left(\frac{u^2}{u^2 - 1}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{-2}}} \left(1 + \frac{1}{u^2 - 1}\right)\mathrm{d}u && \text{, por división sintética}\end{aligned}$$

Por el método de fracciones parciales determinamos los coeficientes A y B en:

$$\boxed{\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{A}{u + 1} + \frac{B}{u - 1} \implies A = -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad B = \frac{1}{2}.}$$

Resulta

$$\begin{aligned}\ell(\mathcal{C}) &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{-2}}} \left(1 + \frac{1}{-2(u + 1)} + \frac{1}{2(u - 1)}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{-2}}} \mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{-2}}} \frac{\mathrm{d}u}{u + 1} + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{-2}}} \frac{\mathrm{d}u}{u - 1} \\ &= u\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{-2}}} + \frac{1}{2}\ln|u + 1|\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{-2}}} + \frac{1}{2}\ln|u - 1|\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{-2}}} \\ &= \left(\sqrt{1 + e^{-2}} - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1 + e^{-2}} + 1}{\sqrt{2} + 1}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1 + e^{-2}} - 1}{\sqrt{2} - 1}\right) \approx 1{,}19270\,\text{u.}\end{aligned}$$

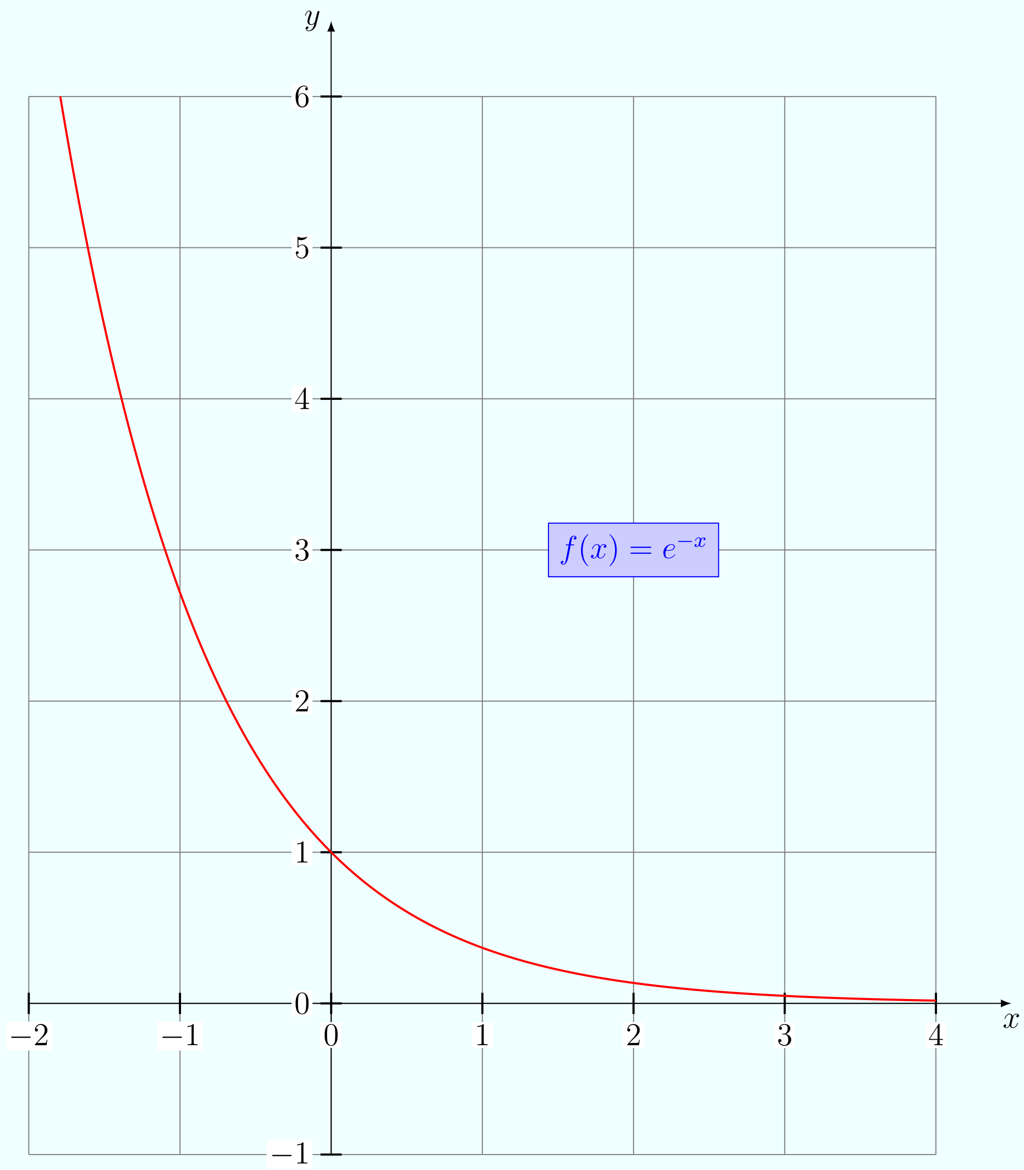

Figura 2: Función $y = e^{-x}$.

3. (5 Puntos) Obtenga el área de la superficie de revolución que se obtiene al rotar en torno al eje X, el arco de la curva $\mathcal{C}\colon\ y = \operatorname{sen} x, x \in [0, 2\pi]$.

Solución:

En este ejercicio emplearemos el siguiente teorema:

Teorema 3 (Área de la superficie de revolución respecto al eje X)**.** *Si f es una función suave no negativa en $[a, b]$, entonces el área de la superficie de revolución $A(S)$ que es generada girando la porción de la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ alrededor del eje X es*

$$\acute{A}rea(S) = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

En efecto, la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es suave en $x \in [0, 2\pi]$, entonces de (3):

$$
\begin{aligned}
\text{Área}(S) &= \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \\
\text{Área}(S) &= 4 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \sqrt{1 + \left[(\operatorname{sen} x)'\right]^2}\,\mathrm{d}x \\
\text{Área}(S) &= 8\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \sqrt{1 + (\cos x)^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Realizando la u-sustitución se tiene que:

$$\boxed{u = \cos x \implies \mathrm{d}u = -\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x.}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Área}(S) &= -8\pi \int_1^0 \sqrt{1 + u^2}\,\mathrm{d}u \\
\text{Área}(S) &= 8\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

Realizando una ω-sustitución, se tiene

$$\boxed{u = \tan\omega \implies \mathrm{d}u = \sec^2\omega.}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Área}(S) &= 8\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= 8\pi \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2\omega}\,\sec^2\omega\,\mathrm{d}\omega \\
&= 8\pi \int_0^{\pi/4} \sec^3\omega \\
&= \overset{4}{\cancel{8}}\,\pi \left(\frac{1}{\cancel{2}}\sec\omega\tan\omega + \frac{1}{\cancel{2}}\ln|\sec\omega + \tan\omega|\right)\Bigg|_0^{\pi/4} \\
&= 4\pi \left[\left(\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \ln\left|\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|\right) - \left(\sec(0)\tan(0) + \ln|\sec(0) + \tan(0)|\right)\right] \\
&= 4\pi \left[\left(\sqrt{2}\cdot 1 + \ln\left|\sqrt{2} + 1\right|\right) - (1 \cdot 0 + \ln|1 + 0|)\right] \\
&= 4\pi \left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) - 0 - \ln(1)\right] \\
&= 4\pi \left(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)\right) \approx 28{,}84719\,\mathrm{u}^2.
\end{aligned}
$$

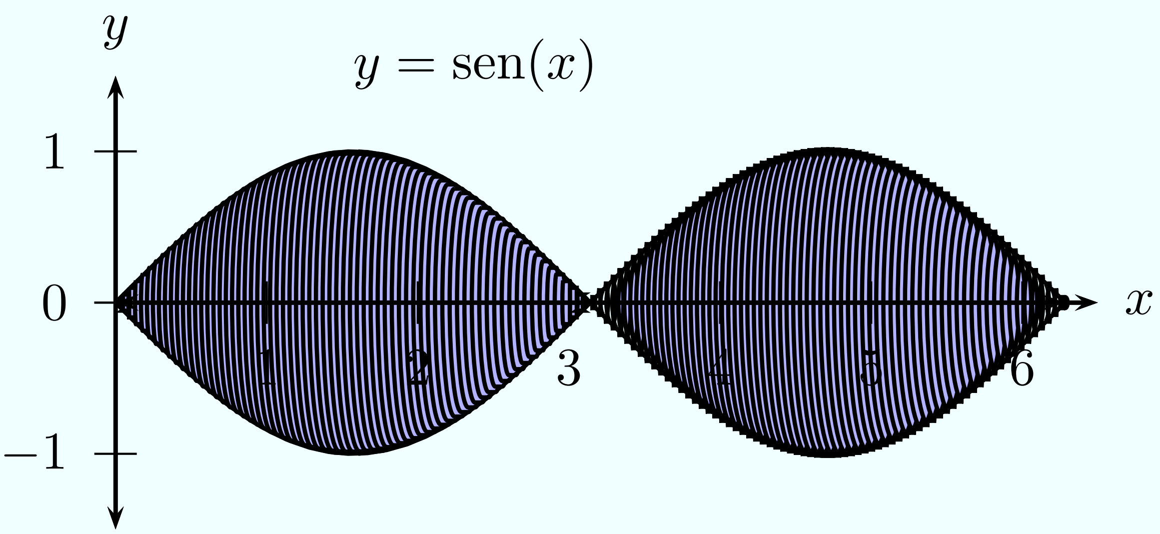

Figura 3: Superficie de revolución generado al rotar la curva $y = \operatorname{sen} x$

4. (5 Puntos) Sean $p, q \in \mathbb{R}$ con $0 \leq p < q$ y suponga que una curva diferenciable $\mathcal{C}$ es dada en coordenadas polares como:

$$\begin{aligned} \alpha\colon\ [p,q] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto \theta \end{aligned}$$

(a) Mostrar que la longitud de arco de $\mathcal{C}$ es igual a

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \int_p^q \sqrt{1 + [r\alpha'(r)]^2}\,\mathrm{d}r.$$

(b) Si se gira alrededor de una recta que pasa por el origen y que contiene a un rayo dado por $\theta = \gamma$, que no cruza la curva. Si S denota la superficie así generada, entonces mostrar que

$$\text{Área}(S) = 2\pi \int_p^q r\,|\operatorname{sen}(\alpha(r) - \gamma)|\,\sqrt{1 + [r\alpha'(r)]^2}\,\mathrm{d}r.$$

Sugerencia: Considere la parametrización dada por $x(r) = r\cos(\alpha r), y(r) = r\operatorname{sen}(\alpha r), t \in [p, q]$.

Solución:

En este ejercicio utilizaremos los siguientes teoremas:

Teorema 4 (Longitud de arco de una curva suave)**.** *Si un segmento de la curva suave es representada por las ecuaciones paramétricas*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (a \leq t \leq b)$$

se traza más de una vez cuando t aumenta de a hacia b, y si $\dot{x}$ y $\dot{y}$ son funciones continuas para $a \leq t \leq b$, entonces la longitud del arco $\ell(\mathcal{C})$ de la curva viene dada por

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2}\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

donde $\dot{x}(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t)]$ e $\dot{y}(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[y(t)]$.

Teorema 5 (Área de la superficie de revolución de una curva suave respecto al eje X). *Si un segmento de la curva suave es representada por las ecuaciones paramétricas*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (a \leq t \leq b)$$

se traza más de una vez cuando t aumenta de a hacia b, y si $\dot{x}$ y $\dot{y}$ son funciones continuas para $a \leq t \leq b$, entonces el área de la superficie de revolución Área(S) que se genera girando la porción de la curva alrededor del eje X viene dada por

$$\text{\textit{Área}}(S) = \int_a^b 2\pi\, |y(t)| \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2}\, \mathrm{d}t \tag{5}$$

donde $\dot{x}(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t)]$ *e* $\dot{y}(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[y(t)]$.

(a) Existe más de una manera de parametrizar la curva diferenciable α, pero emplearemos la parametrización dada por la sugerencia. Esto es,

$$x(r) = r\cos(\alpha r), \quad y(r) = r\,\mathrm{sen}(\alpha r), \quad r \in [p, q]\,.$$

Para un $r \in [p, q]$ fijo y arbitrario, $\exists\, \theta$ de modo que $\alpha(r) = \theta$. Derivando las coordenadas $x(r)$ e $y(r)$ respecto a r:

$$\dot{x(r)} = r'\cos(\alpha r) - r\,\mathrm{sen}(\alpha r)\alpha'(r) \qquad \dot{y}(r) = r'\,\mathrm{sen}(\alpha r) + r\cos(\alpha r)\alpha'(r)$$
$$\dot{x(r)} = \cos\theta - r\alpha'(r)\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \dot{y}(r) = \mathrm{sen}(\theta) + r\alpha'(r)\cos(\theta)$$

Ahora, hallando las expresiones $[\dot{x}(r)]^2$ y $[\dot{y}(r)]^2$:

$$[\dot{x}(r)]^2 = (\cos\theta)^2 + (-r\alpha'(r)\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 + 2\cos\theta(-r\alpha'(r)\,\mathrm{sen}\,\theta)$$
$$[\dot{x}(r)]^2 = \cos^2\theta + r^2(\alpha'(r))^2\,\mathrm{sen}^2\theta - 2r\alpha'(r)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$[\dot{y}(r)]^2 = (\mathrm{sen}\,\theta)^2 + (r\alpha'(r)\cos\theta)^2 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta(r\alpha'(r)\cos\theta)$$
$$[\dot{y}(r)]^2 = \mathrm{sen}^2\theta + r^2(\alpha'(r))^2\cos^2\theta + 2r\alpha'(r)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$

Sumando $[\dot{x}(r)]^2$ y $[\dot{y}(r)]^2$ resulta:

$$= \left(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta\right) + (r\alpha'(r))^2\left(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta\right) - 2r\alpha'(r)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + 2r\alpha'(r)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$
$$= 1 + (r\alpha'(r))^2.$$

Reemplazando en (4):

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_p^q \sqrt{[\dot{x}(r)]^2 + [\dot{y}(r)]^2}\,\mathrm{d}r$$
$$\ell(\mathcal{C}) = \int_p^q \sqrt{1 + (r\alpha'(r))^2}\,\mathrm{d}r.$$

(b) Para un $r \in [p,q]$ fijo y arbitrario, $\exists\, \theta$ de modo que $\alpha(r) = \theta$. También sea una recta $\theta = \gamma$ que *no cruza* a la curva diferenciable $\mathcal{C}$ parametrizada por:

$$x(r) = r\cos(\alpha r), \quad y(r) = r\operatorname{sen}(\alpha r), \quad r \in [p,q]\,.$$

Entonces, el punto (r,θ) se rotará γ en sentido horario, es decir, obtendremos el punto $(r, \theta - \gamma)$ obteniendo Reemplazando en (5):

$$\text{Área}(S) = \int_p^q 2\pi \left| r\operatorname{sen}(\theta-\gamma)\right| \sqrt{\left[\dot{x}(r)\right]^2 + \left[\dot{y}(r)\right]^2}\, \mathrm{d}r$$
$$\text{Área}(S) = 2\pi \int_p^q r \left|\operatorname{sen}(\alpha(r)-\gamma)\right| \sqrt{1 + \left(r\alpha'(r)\right)^2}\, \mathrm{d}r$$

Referencias

[1] Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis, and Thomas Polaski. *Calculus: early transcendentals*. Wiley, 2010.

Agradecimientos

Agradezco a mis compañeros que me brindaron más de una manera de resolver los ejercicios 2 y 3, a Luis Lévano por la corrección en las unidades de longitud y área; y también a nuestro profesor Ronald Mas por su sugerencia en la pregunta 4.

Facultad de Ciencias, 26 de noviembre del 2017.