Práctica Dirigida $N°1$ de Cálculo integral CM 132

FACULTAD DE CIENCIAS | UNI

Undg. Carlos Alonso Aznarán Laos
E-mail: caznaranl@uni.pe
Science Department, National University of Engineering

Temas: Antiderivadas. Integral Indefinida. Propiedades básicas de la integral indefinida. Aplicaciones. Métodos de Integración: Sustitución, Integración por partes, Integrales indefinidas de funciones trigonométricas. Inducción Matemática.
Profesores: Roger Metzger, Richard Acuña, Angello Morante, Luis Roca, José Zamudio, Johnny Valverde, Maritza Moreno.

---

1. Determine si las siguientes funciones poseen antiderivadas. Justifique sus respuestas.

   a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \geq 0 \\ 1-x^2 & x < 0 \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} x^3+1 & x \geq 0 \\ 1-x^3 & x < 0 \end{cases}$

   d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

   e) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & x \geq 0 \\ \cos(x) & x < 0 \end{cases}$

Solución:

a) Supongamos que $f(x)$ posee antiderivada, es decir,

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 2x + a & x > 0 \\ b & x = 0 \\ -\dfrac{x^3}{3} + c & x < 0 \end{cases}$$

Es decir,

$$f(x) = F'(x)$$

$$\boxed{\text{Como F es derivable } \implies F \text{ es continua.}}$$

$$\implies \lim_{x\to 0^-} F(x) = \lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0)$$

$$c = a = b$$

$$\implies F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+2x+a & x>0\\ a & x=0\\ -\dfrac{x^3}{3}+a & x<0\end{cases}$$

Pero, • $F'_{-}(0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{F(0+h)-F(0)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\frac{h^3}{3}+\cancel{a}-\cancel{a}}{h}$$

$$=0.$$

• $F'_{+}(0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{F(0+h)-F(0)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{h^2}{2}+2h+\cancel{a}-\cancel{a}}{h}$$

$$=2.$$

$\implies F'_{-}(0)\neq F'_{+}(0) \quad (\implies\impliedby),$

ya que habíamos considerado que posee antiderivada. $\square$

b)

2. Encontrar una función F tal que

a) $F'(x)=\arctan(\sqrt{x})$ y $F(1)=1$.

b) $F'(x)=2x(\sqrt{16-x^2})$ y $F(1)=0$.

c) $F'(x)=\dfrac{\sec^2(\ln(x))}{2x}$ y $F(1)=0$.

Solución:

a) Emplearemos método de sustitución

$$\arctan\sqrt{x}=u \iff \sqrt{x}=\tan u$$
$$x=\tan^2 u \implies dx=d(\tan^2 u)$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned}F(x)=\int\arctan(\sqrt{x}) &= \int u\cdot d(\tan^2 u)\\
&= u\cdot\tan^2 u-\int\tan^2 u\,du\\
&= u\cdot\tan^2 u-\int(\sec^2 u-1)\,du\\
&= u\cdot\tan^2 u-\int\sec^2 u\,du+\int 1\,du\\
&= u\cdot\tan^2 u-\tan u+u+C,\ \text{C: constante}\\
&= \arctan\sqrt{x}\cdot x-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+C,\ \text{C: constante}\ .\end{aligned}$$

Además, $F(1) = 1$

$$\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} + C = 1. \implies C = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

$\therefore F(x) = \arctan(\sqrt{x}) \cdot x - \sqrt{x} + \arctan x + 2 - \dfrac{\pi}{2} \quad \square$

b) Muy bien, realizaremos la siguiente sustitución en la siguiente integral $\displaystyle\int 2x(\sqrt{16 - x^2})\,dx$.

$$\boxed{\begin{aligned} u^2 &= 16 - x^2 \\ 2u\,du &= -2x\,dx \end{aligned}}$$

Reemplazamos en la integral

$$\begin{aligned} F(x) = \int 2x(\sqrt{16 - x^2})\,dx = -\int 2u \cdot u\,du = -2\int u^2\,du \\ &= -2 \cdot \frac{u^3}{3} + C, \text{ C: constante} \\ &= -\frac{2}{3}(16 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C, \text{ C: constante .} \end{aligned}$$

Pero, del dato $F(1) = 0$, de esta manera

$$F(1) = -\frac{2}{3}(16 - 1^2)^{\frac{3}{2}} + C = 0 \implies C = \frac{2}{3}\sqrt{3375}.$$

$\therefore F(x) = -\dfrac{2}{3}(16 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \dfrac{2}{3}\sqrt{3375} \quad \square$

c) Realizaremos la sustitución

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \ln x \\ du &= \frac{dx}{x} \end{aligned}}$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} F(x) = \frac{\sec^2(\ln(x))}{2x} &= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,du \\ &= \frac{1}{2}\tan u\,du + C, \text{ C: constante} \\ &= \frac{1}{2}\tan(\ln x) + C, \text{ C: constante} \end{aligned}$$

$F(1) = \dfrac{1}{2}\tan(\ln 1) + C,$ C: constante
$0 = C$
$\therefore F(x) = \dfrac{1}{2}\tan(\ln x)$

3. Calcule las siguientes integrales indefinidas

a) $\displaystyle\int x^{-3} + \frac{3}{4}x^4\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^4 + 5\sqrt[3]{x} - 3x\sqrt{x} - 2}{4x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+2}}$

e) $\displaystyle\int |1+x|+|1-x|\,dx$

f) $\displaystyle\int (x^3-x^{-3})\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$

Solución:

a) Dado que la integral indefinida es *lineal*, podemos expresar $\displaystyle\int x^{-3}+\frac{3}{4}x^4\,dx$ como

$$\begin{aligned}\int x^{-3}+\frac{3}{4}x^4\,dx &= \int x^{-3}\,dx+\frac{3}{4}\int x^4\,dx\\ &= \frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C_1+\frac{3}{4}\cdot\frac{x^{4+1}}{4+1}+C_2\\ &= -\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{20}x^5+C,\ \text{C: constante .}\end{aligned}$$

b) La integral pedida es igual

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+5\sqrt[3]{x}-3x\sqrt{x}-2}{4x}\,dx &= \frac{1}{4}\int\frac{x^4}{x}\,dx+\frac{5}{4}\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\,dx-\frac{3}{4}\int\frac{x\sqrt{x}}{x}\,dx-\frac{2}{4}\int\frac{dx}{x}\\ &= \frac{1}{4}\int x^3\,dx+\frac{5}{4}\int x^{-2/3}\,dx-\frac{3}{4}\int x^{1/2}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}\\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1}+C_1+\frac{5}{4}\cdot\frac{x^{-2/3+1}}{-\frac{2}{3}+1}+C_2-\frac{3}{4}\cdot\frac{x^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1}+C_3-\frac{1}{2}\ln|x|+C_4\\ &= \frac{1}{16}\cdot x^4+\frac{15}{4}\cdot x^{1/3}-\frac{1}{2}\cdot x^{1/3}-\frac{1}{2}\ln|x|+C,\ \text{C: constante .}\end{aligned}$$

c) La siguiente integral racional podemos expresarlo como

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+2}{x+1}\,dx &= \int\frac{x^2-1+3}{x+1}\,dx\\ &= \int\frac{\cancel{(x+1)}\cdot(x-1)}{\cancel{x+1}}\,dx+\int\frac{3}{x+1}\,dx\\ &= \int(x-1)\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}\\ &= \frac{x^2}{2}-x+C_1+3\ln|x+1|+C_2\\ &= \frac{x^2}{2}-x+3\ln|x+1|+C,\ \text{C: constante .}\end{aligned}$$

d) Realizamos la siguiente sustitución

$$\boxed{\begin{aligned}x&=\sqrt{2}\tan u\\ dx&=\sqrt{2}\sec^2 u\,du\end{aligned}}$$

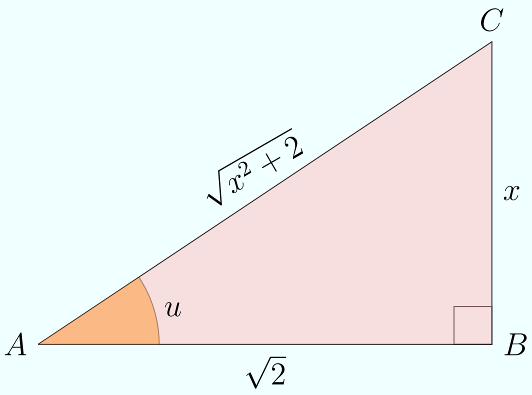
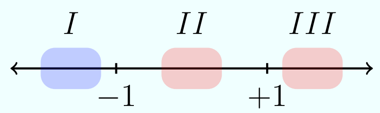


Figura 1: Triángulo trigonométrico

Al reemplazar

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{2}\sec^2 u\, du}{2\tan^2 u \sqrt{2\sec^2 u}} \\
&= \int \frac{\sqrt{2}\sec^2 u\, du}{2\tan^2 u \sqrt{2}\sec u} \\
&= \frac{1}{2}\int \cot u \csc u\, du \\
&= -\frac{1}{2}\csc u + C, \ \text{C: constante} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot \frac{\sqrt{x^2+2}}{x} + C, \ \text{C: constante .} \quad \square
\end{aligned}
$$

e) Para resolver ejercicios con valor absoluto debemos de trabajar cada dominio del



Intervalos en $\mathbb{R}$

Figura 2: Intervalo en $\mathbb{R}$

Veamos

① Cuando $x < -1$, es decir, $x + 1 < 0$. Luego

$$
\begin{aligned}
\int |1+x| + |1-x|\, dx &= \int (-(1+x) + (1-x))\ dx \\
&= \int (-\cancel{1} - x + \cancel{1} - x)\ dx \\
&= \int -2x\, dx \\
&= -2\cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + C, \ \text{C: constante .} \\
&= -x^2 + C, \ \text{C: constante}
\end{aligned}
$$

② Cuando $x \in [-1,1]$, es decir, $x-1 \leq 0 \wedge 0 \leq x+1$. Luego

$$\begin{aligned}\int |1+x|+|1-x|\,dx &= \int ((1+x)+(1-x))\ dx\\ &= \int (1+\cancel{x}+1-\cancel{x})\ dx\\ &= 2\int dx\\ &= 2x+C,\ \text{C: constante .}\end{aligned}$$

③ Cuando $x>1$, es decir, $x-1>0$. Luego

$$\begin{aligned}\int |1+x|+|1-x|\,dx &= \int ((1+x)+(1-x))\ dx\\ &= \int (1+\cancel{x}+1-\cancel{x})\ dx\\ &= 2\int dx\\ &= 2x+C,\ \text{C: constante .}\end{aligned}$$

4. Calcule las siguientes integrales indefinidas:

   a) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 2x\sqrt{1+2\cos(2x)}\,dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{\tan^2(x)}{\sqrt{x}}\,dx$

   c) $\displaystyle\int x\cos^3 x\,dx$

   d) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arc\,sen}(x)\,dx$

   e) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+8}{x\sqrt{x-4}}\,dx$

   f) $\displaystyle\int \frac{1}{(5x+1)\sqrt{100x^2+40x-5}}\,dx$

   g) $\displaystyle\int \frac{5x+2}{\sqrt{3x}\sqrt{1-3x}}\,dx$

   h) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx$

   i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}\,dx$

   j) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\,dx$

   k) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}\,dx$

[0] Voy a consultar al profesor sobre este ejercicio.

l) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\operatorname{sen}^3(x)}\sqrt[3]{1+\operatorname{sen}^{3/4}(x)}}\,dx$

m) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5x^2-8x-1}}\,dx$

Solución:

a)

b) $$\int \frac{\tan^2(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\sec^2(x)-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\sec^2(x)}{\sqrt{x}}\,dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

La integral azul es sencilla de resolver, pues es del tipo $\displaystyle\int x^n\,dx,\ n\in\mathbb{Q}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C_2 = 2\sqrt{x} + C_2.$$

Ahora nos queda resolver la integral roja.

Si realizamos el siguiente intento de *integración por partes*:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x^{-\frac{1}{2}} & dv = \sec^2 x\,dx \\ du = -\frac{1}{2}x^{-3/2}\,dx & v = \tan x \end{array}}$$

$$\int \frac{\sec^2(x)}{\sqrt{x}}\,dx = x^{-1/2}\tan x - \int \tan x \cdot \left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)\,dx = x^{-1/2}\tan x + \frac{1}{2}\int \tan x \cdot x^{-3/2}\,dx$$

Ahora, tratemos de determinar la integral verde, quizá deberíamos de detenernos, pues la integral no es más sencilla de resolver, pero continuemos.

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \tan x & dv = x^{-3/2}\,dx \\ du = \sec^2 x\,dx & v = \dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -2x^{-1/2} \end{array}}$$

$$\frac{1}{2}\int \tan x \cdot x^{-3/2}\,dx = \frac{1}{2}\tan x \cdot -2x^{-1/2} - \int -2x^{-1/2}\sec^2 x\,dx = -\tan x \cdot x^{-1/2} + 2\int \sec^2 x \cdot x^{-1/2}\,dx$$

Y si integramos por partes de la otra manera, en realidad es más complicado ...
Pero con el aporte del profesor Ronald Mas se resuelve de inmediato. Veamos

$$I=\int \frac{\tan^2(x)}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \tan^2 x\, d(\sqrt{x}) \quad \text{ya que } \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right]=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Antes de continuar veamos una integración por partes y una sustitución "$u=\tan^2 x = \sec^2 x$":

$$\boxed{\begin{array}{ll} u=\tan^2 x & dv = d(\sqrt{x}) \\ du = 2\tan x\cdot \sec^2 x\, dx & v=\sqrt{x} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} du &= 2\sec x\cdot \boldsymbol{\sec x\cdot \tan x\, dx} \\ \int du &= 2\int \sec x\, \boldsymbol{d(\sec x)} \\ u &= 2\cdot \frac{\sec^{1+1} x}{1+1} = \sec^2 x \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
I &= 2\left[\tan^2 x\cdot\sqrt{x} - \int \sqrt{x}\cdot d(\tan^2 x)\, dx\right] && \text{por integración por partes.}\\
&= 2\left[\tan^2 x\cdot\sqrt{x} - \int \sqrt{x}\cdot d(\sec^2 x)\, dx\right] && \text{sustituyendo } \tan^2 x \text{ por } \sec^2 x\\
&= 2\left[\tan^2 x\cdot\sqrt{x} - \left(\sqrt{x}\sec^2 x - \int \sec^2 x\, d(\sqrt{x})\right)\right] && \text{integrando por partes}\\
&= 2\left[\tan^2 x\cdot\sqrt{x} - \sqrt{x}\sec^2 x + \int \sec^2 x\, d(\sqrt{x})\right] \\
&= 2\left[\tan^2 x\cdot\sqrt{x} - \sqrt{x}\sec^2 x + \int (1+\tan^2 x)\, d(\sqrt{x})\right] && \text{pero } \sec^2 x = 1+\tan^2 x\\
&= 2\left[\tan^2 x\cdot\sqrt{x} - \sqrt{x}\sec^2 x + \int d(\sqrt{x}) + \int \tan^2 x\, d(\sqrt{x})\right] \\
&= 2\tan^2 x\cdot\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\sec^2 x + \int d(\sqrt{x}) + 2I && \text{pero } \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+C_2.
\end{aligned}$$

$$\therefore I = 2\sqrt{x}\sec^2 x - 2\tan^2 x\cdot\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C_2. \quad \square$$

c)

$$\begin{aligned}
\int x\cos^3 x\, dx &= \int x\cdot\cos^2 x\cdot\cos x\, dx \\
&= \int x(1-\operatorname{sen}^2 x)\, d(\operatorname{sen} x) \\
&= \int x\, d(\operatorname{sen} x) - \int x\cdot\operatorname{sen}^2 x\, d(\operatorname{sen} x) \\
&= x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx - \frac{1}{3}\left[x\operatorname{sen}^3 x - \int \left(\frac{\operatorname{sen} 3x - 4\operatorname{sen} x}{3}\right) dx\right] \\
&= x\operatorname{sen} x + \cos x - \frac{x\operatorname{sen}^3 x}{3} + \frac{1}{9}\int \operatorname{sen}^3 x\, dx - \frac{4}{9}\int \operatorname{sen} x\, dx \\
&= x\operatorname{sen} x + \cos x - \frac{x\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\cos 3x}{27} + \frac{4}{9}\cos x + C, \ \text{C: constante .}
\end{aligned}$$

$$\therefore x\operatorname{sen} x + \frac{13}{9}\cos x - \frac{x\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\cos 3x}{27} + C, \ \text{C: constante .}$$

Pero debemos recordar las siguientes identidades trigonométricas de ángulo doble:

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \qquad \tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \qquad \cot(2\theta) = \frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}$$

Y de ángulo triple

$$\operatorname{sen}(3\theta) = -\operatorname{sen}^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta = -4\sin^3\theta + 3\operatorname{sen}\theta \qquad \tan(3\theta) = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \qquad \cot(3\theta) = \frac{3\cot\theta - \cot^3\theta}{1-3\cot^2\theta}$$

d) Realizamos el siguiente cambio

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{arc\,sen} x = u \\ &\qquad x = \operatorname{sen} u \longrightarrow \quad dx = \cos u\, du \end{aligned}}$$

Al reemplazar:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \operatorname{arc\,sen}(x)\, dx &= \int \operatorname{sen}^2 u \cdot u \cdot \cos u\, du \\
&= \int u \cdot \frac{d(\operatorname{sen}^3 u)}{3} \\
&= \frac{1}{3}\int u\, d(\operatorname{sen}^3 u) \\
&= \frac{1}{3}\left[u \operatorname{sen}^3 u - \int \operatorname{sen}^3 u\, du\right] \quad = \frac{u \operatorname{sen}^3 u}{3} - \frac{1}{3}\left(\int \frac{m}{n}\, du\right) \text{ Corregir}
\end{aligned}$$

5. La rapidez de cambio de temperatura T (en°C) de un cuerpo está dada por la expresión

$$\frac{dT}{dt} = (t+2)T^{3/4}$$

donde t es el tiempo (en minutos). Si $T = 0$ en $t = 0$, encuentre una fórmula para T en función de t.

Solución:

$$\frac{dT}{dt} = (t+2)T^{3/4}$$

$$\frac{dT}{T^{3/4}} = (t+2)\, dt$$

Integrando:

$$\int \frac{dT}{T^{3/4}} = \int (t+2)\, dt$$

$$\int T^{-3/4}\, dT = \int t\, dt + 2\int dt$$

$$\frac{T^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1} + C_1 = \frac{t^{1+1}}{1+1} + C_2 + 2t + C_3$$

$$4 \cdot T^{1/4} = \frac{1}{2}\cdot t^2 + 2t + C, \text{ C: constante .}$$

Pero tenemos que cuando $T = 0 \implies t = 0$, luego:

$$4 \cdot 0^{1/4} = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + C \implies C = 0.$$

$\therefore T(t) = \left(\frac{t^2}{8} + \frac{t}{2}\right)^4$

6. Si $f''(x) = -af(x)$ y $g''(x) = bf(x)$, en donde a y b son constantes, calcule $\int f(x)g''(x)\,dx$ en términos de f, g, f', g'.

7. Determine una antiderivada de $f(x) = \dfrac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$, de modo que la gráfica de dicha antiderivada contenga al punto $\left(0, \dfrac{709}{280}\right)$.

Solución:

Veamos el siguiente diagrama

$\star$ Integral *Naranja*

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

$\star$ Integral *Celeste*

Figura 3: Diagrama de ayuda

8. Use integración por partes para deducir las fórmulas siguientes:

   a) $\displaystyle\int e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)\,dx = \frac{e^{\alpha x}\left(\alpha \operatorname{sen}(\beta x) - \beta \cos(\beta x)\right)}{\alpha^2 + \beta^2} + C$

   b) $\displaystyle\int e^{\alpha x} \cos(\beta x)\,dx = \frac{e^{\alpha x}\left(\alpha \cos(\beta x) - \beta \operatorname{sen}(\beta x)\right)}{\alpha^2 + \beta^2} + C$

   c) $\displaystyle\int x^{\alpha} (\ln(x))^2\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\ln(x))^2 - 2 \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\ln(x) + 2 \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^3} + C,\ \alpha \neq 1$

9. En cada uno de los siguientes ítems, deduzca la fórmula de reducción que se da utlizando integración por partes.

a) $\displaystyle\int x^\alpha e^{\beta x}\,dx = \frac{x^\alpha e^{\beta x}}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1}e^{\beta x}\,dx.$

b) $\displaystyle\int x^\alpha \operatorname{sen}(\beta x)\,dx = -\frac{x^\alpha\cos(\beta x)}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1}\cos(\beta x)\,dx.$

c) $\displaystyle\int x^\alpha \cos(\beta x)\,dx = \frac{x^\alpha\operatorname{sen}(\beta x)}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1}\operatorname{sen}(\beta x)\,dx.$

d) $\displaystyle\int (\ln x)^\alpha\,dx = x(\ln x)^\alpha - \alpha\int (\ln x)^{\alpha-1}\,dx$

e) $\displaystyle\int \left(a^2-x^2\right)^\alpha dx = x\left(a^2-x^2\right)^\alpha + 2\alpha\int x^2\left(\alpha^2-x^2\right)^{\alpha-1}dx$

f) $\displaystyle\int \cos^\alpha(x)\,dx = \frac{\cos^{\alpha-1}(x)\operatorname{sen}(x)}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha}\int\cos^{\alpha-2}(x)\,dx.$

g) $\displaystyle\int \sec^n(x)\,dx = \frac{1}{n-1}\tan(x)\sec^{n-2}(x) + \frac{n-2}{n-1}\int\sec^{n-2}(x)\,dx, n\geq 2.$

Solución:

a)
$$\int x^\alpha e^{\beta x}\,dx = \int x^\alpha\,\frac{d(e^{\beta x})}{\beta} = \frac{1}{\beta}\left[x^\alpha\cdot e^{\beta x}\cdot d(x^\alpha)\right]$$
$$= \frac{x^{\alpha\cdot e^{\beta x}}}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\beta x}\cdot x^{\alpha-1}\,dx$$

10. Si $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\,dx$ entonces integre por partes $I_n - I_{n-1}$ para demostrar que

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)}\left[\frac{x}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}(x)\right].$$

11. Alabama Instruments Company ha montado una línea de producción para fabricar una calculadora nueva. La tasa de producción de estas calculadoras después de t semanas se modela con la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = 5000\left(1 - \frac{100}{\left(t+10\right)^2}\right) \text{ calculadoras/semana.}$$

Encuentre la cantidad de calculadoras producidas desde el principio de la tercera semana hasta el final de la cuarta.

12. En cada item, determine una función $y = y(x)$ derivable que cumpla la ecuación dada:

a) $y' = (1+x)(1+y).$

b) $y' = \dfrac{y^2+xy^2}{x^2y-x^2}.$

c) $y' = \dfrac{(1+x)y^2}{x^2(y-1)}.$

d) $xy' - y - -xy = 0.$

e) $y'\tan(x) = (4+y^2)\sec^2(x)$

13. Demuestre que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^2}{2}$ es un número entero positivo.

14. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} \cos\left((2k-1)x\right) = \dfrac{\operatorname{sen}(2nx)}{2\operatorname{sen}(nx)}$.

15. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p, q, a_i, b_i \in \mathbb{R}$,

$$2pq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq q^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + p^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

16. Si P es un polinomio de grado n, demuestre que

$$\int e^x P(x)\, dx = e^x \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{d^j P(x)}{dx^j}$$

. Use este resultado para evaluar $\displaystyle\int \left(3x^4 + 2x^2\right) e^x\, dx$.

Facultad de Ciencias, 31 de agosto del 2017.

No olvidar, si una función es diferenciable, entonces es continua.
¿Si una función es continua, entonces es diferenciable?

No, sea la función: $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ que es continua en 0, pero no es diferenciable allí.

Prueba

a) Continuidad en 0:
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\left(x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) \\ &= 0 \text{ ¿ ?} \\ &= f(0). \end{aligned}$$

Usaremos el *teorema de las funciones mayorantes y minorantes* o teorema del sándwich para funciones en su segunda versión que dice: "Suponga $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Si $|f(x) - L| \leq |g(x)|$, para todo x en alguna vecindad $N'_\varepsilon(x_0)$ *perforada* de x_0 , es decir, con $x_0 \notin N_\varepsilon(x_0)$, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$."

Empezaremos con la desigualdad, $|\operatorname{sen} t| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$. Luego $\forall x \neq 0$, $|\operatorname{sen}(\frac{1}{x})| \leq 1$. Multiplicando ambos lados $|x|$, obtenemos

$$\begin{aligned} |x||\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)| &\leq |x|; \text{ es decir,} \\ |x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)| &\leq |x|. \end{aligned}$$

Pero $\lim_{x\to 0} x = 0$, y por la segunda versión del teorema del Sándwich, $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$. $\square$

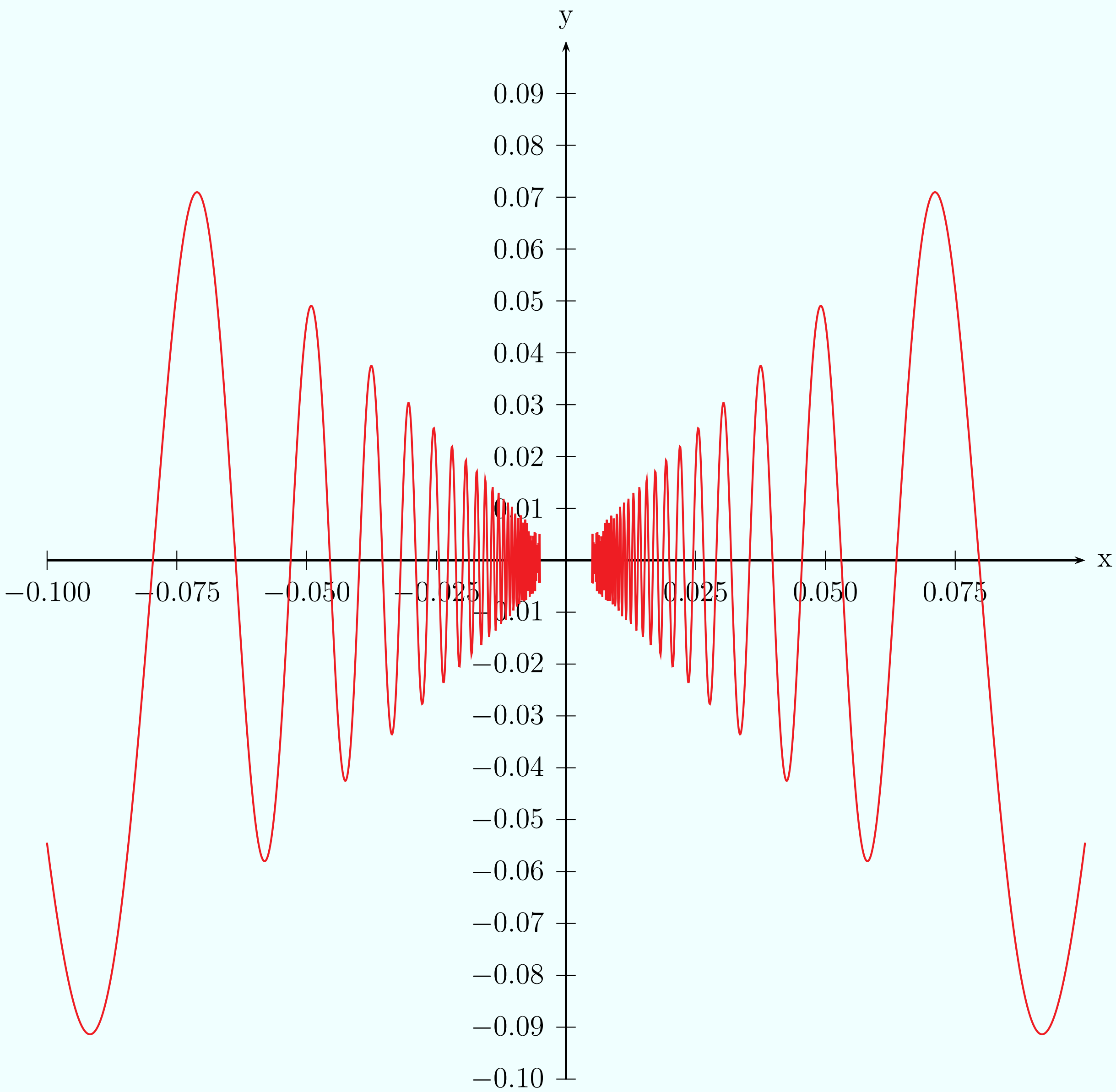


Figura 4: Gráfica de $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$