FACULTAD DE CIENCIAS | UNI

Segunda práctica dirigida de Cálculo integral CM 132 Ciclo 2017-2

Undg. Carlos Alonso Aznarán Laos
E-mail: caznaranl@uni.pe
Science Department, National University of Engineering

Temas: Partición, Sumas superiores e inferiores, Integral superior e inferior, Integral definida, Aproximación de una integral y cota, Suma límite para el área de una región y Teoremas Fundamentales del Cálculo

---

1. Sean $f, g\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas. Pruebe que:

   a) $L(f,\mathcal{P}) + L(g,\mathcal{P}) \leq L(f+g,\mathcal{P})$ y

   b) $U(f+g,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}) + U(g,\mathcal{P})$

   para toda partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[a,b]$.

Solución:

2. Sea f una función acotada en el intervalo I y sean $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ particiones de I tal que $\mathcal{P}_2$ es un refinamiento de $\mathcal{P}_1$. Demuestre que:

   a) $\|\mathcal{P}_2\| \leq \|\mathcal{P}_1\|$

   b) $L(f,\mathcal{P}_2) - L(f,\mathcal{P}_1) \leq r\,(M-m)\,\|\mathcal{P}_1\|$ y $U(f,\mathcal{P}_1) - U(f,\mathcal{P}_2) \leq r\,(M-m)\,\|\mathcal{P}_1\|$, si $\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_1$ tiene r puntos. ($M = \sup(f)$ y $m = \inf(f)$).

Solución:

3. Sea $f\colon\ [-1,4] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 1+\sqrt{x}, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

   y $\mathcal{P} = \{-1, 0, 1, 3, 4\}$ una partición de $[-1,4]$.

   a) Halle $m_i(f)$ y $M_i(f)$ para cada $1 \leq i \leq 4$.

   b) Calcule $U(f,\mathcal{P})$ y $L(f,\mathcal{P})$.

   c) Halle una cota de error cometido al aproximar el valor de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ con la partición $\mathcal{P}$.

Solución:

4. Mediante particiones regulares y por un proceso de límite, hallar el valor exacto de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^3 (x^2 + 4x + 5)\,\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_1^2 (4x^3 - 3x^2)\,\mathrm{d}x.$

Solución:

a) Sea $f(x) = x^2 + 4x + 5$. Sabemos que f es integrable en $[0, 3]$, entonces es continua allí.
Sea $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ una partición que subdivide $[0, 3]$ en n subintervalos de igual longitud.
Entonces $\|\mathcal{P}_n\| = \dfrac{3-0}{n} = \dfrac{3}{n}$ y para cada $k = 1, 2, \cdots, n$.

$$x_i = 0 + \frac{3}{n} \cdot k \quad \text{y} \quad \Delta x_k = \frac{3}{n}$$

En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, escogemos la etiqueta $x_i^* = x_i$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(f, \mathcal{P}_n^*) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k. \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{3k}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{3k}{n}\right) + 5\right]\Delta x_k. \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{9k^2}{n^2} + \frac{12k}{n} + 5\right]\frac{3}{n}. \\
&= \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} \left[5 + \frac{12k}{n} + \frac{9k^2}{n^2}\right]. \\
&= \frac{3}{n}\left[5\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right]. \\
&= \frac{3}{n}\left[5 \cdot n + \frac{12}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} + \frac{9}{n^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}\right]. \\
&= 15 + 18 \cdot \frac{n+1}{n} + \frac{9}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n}.
\end{aligned}$$

Calculando el

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{R}(f, \mathcal{P}_n^*) = \lim_{n\to\infty} \left[15 + 18\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)\right] = 15 + 18 + \frac{9}{\cancel{2}} \cdot 1 \cdot \cancel{2} = 42.$$

b) Sea $f(x) = 4x^3 - 3x^2$. Sabemos que f es integrable en $[1, 2]$, entonces es continua allí.
Sea $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ una partición que subdivide $[1, 2]$ en n subintervalos de igual longitud.
Entonces $\|\mathcal{P}_n\| = \dfrac{2-1}{n} = \dfrac{1}{n}$ y para cada $k = 1, 2, \cdots, n$.

$$x_i = 1 + \frac{1}{n} \cdot k \quad \text{y} \quad \Delta x_k = \frac{1}{n}$$

En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, escogemos la etiqueta $x_i^* = x_i$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(f, \mathcal{P}_n^*) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k. \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[4\left(1+\frac{k}{n}\right)^3 - 3\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\right]\frac{1}{n}. \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[4\left(1^3 + 3\cdot 1^2\cdot\left(\frac{k}{n}\right) + 3\cdot 1\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \left(\frac{k}{n}\right)^3\right) - 3\left(1^2 + 2\cdot 1\cdot\left(\frac{k}{n}\right) + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right]. \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[1 + 6\left(\frac{k}{n}\right) + 9\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \left(\frac{k}{n}\right)^3\right]. \\
&= \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^3\right]. \\
&= \frac{1}{n}\left[n + \frac{6}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n}(n+1)}{2} + \frac{9}{n^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n^{\cancel{3}}}\cdot\frac{\cancel{n^2}(n+1)^2}{4}\right]. \\
&= 1 + 3\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\left(\frac{2n+1}{n}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^2
\end{aligned}
$$

5. Expresar los siguientes límites como una integral definida.

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{8i^2}{n^3}$

   b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\operatorname{sen}(\frac{i}{n})}{n+i}$

6. Expresar el límite de cada suma como una integral definida.

   a) $\displaystyle\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right)$, P partición de $[-3, 10]$.

   b) $\displaystyle\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(1 - x_i - x_{i-1})$, P partición de $[0, 1]$.

   c) $\displaystyle\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(a + \frac{i-1}{n}(b-a)\left[a + \frac{i}{n}(b-a)\right]\right)$, P partición de $[a, b]$.

7. ¿Cuán pequeño debe ser $|\mathcal{P}|$ para que el error en la aproximación de sea menor que …?

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(t)\,\mathrm{d}t$

   b) $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}t}{t}$

8. Sea f integrable sobre $[a, b]$. Pruebe que f es integrable sobre todo $[c, d] \subset [a, b]$.

9. Sea $f\colon\ [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, pruebe que

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \overline{\int_a^b}\,|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

10. Sea $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 1-x, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Analice la integrabilidad de f en $[0,1]$.

11. Sea $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$

    b) Si f es continua en $c \in [a,b]$, entonces $f(c) = 0$.

12. Sean f y g continuas sobre $[a,b]$ con $f(x) \le g(x), \forall x \in [a,b]$. Si existe algún $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) < g(x_0)$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

13. Demuestre que $\displaystyle\int_0^x |t|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x|x|, \forall x \in \mathbb{R}$.

14. Halle el valor de $c \in \mathbb{R}$ tal que si $f(x) = x^2 - 2x + 1$, se tiene que $f(c) = \displaystyle\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

15. Halle el área de la región limitada por la parábola $y = 6 + 4x - x^2$ y el segmento determinado por los puntos $P(-2,6)$ y $Q(4,6)$.

16. Sea $y = f(x)$ una función tal que bajo su gráfica y sobre el eje X determina una región de área:

$$A(x) = (1+3x)^{1/2} - 1, \quad \text{para cada} \quad x \ge 0.$$

Calcule el valor medio de $f(x)$ para cada $1 \le x \le 8$.

17. Calcular:

    a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_1^{x+1} \operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t - \int_1^x \operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t\right].$

    b) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_1^{x} \operatorname{sen}^2 t\,\mathrm{d}t - \int_1^{x+h} \cos^2 t\,\mathrm{d}t - x\right].$

18. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b f(xt)\,\mathrm{d}t = 0$. Mostrar que $f \equiv 0$.

19. Sea $f\colon\ [0,1] \longrightarrow [0,\infty[$ una función continua tal que

$$f^2(t) \le 1 + 2\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \quad ; \forall t \in [0,1].$$

Probar que $f(t) \le 1 + t, \quad \forall t \in [0,1]$.

20. Sea $f\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 1$ y

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$$

Probar que $\displaystyle\lim_{x\to\infty}$ existe y es menor que $1 + \dfrac{\pi}{4}$.

21. Sea $f\colon\ [0,a] \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que

$$\int_0^x \left(\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y = \int_0^x (x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

22. Probar que la función

$$I(t) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^4+t^4\right)^{1/4}} + \ln t$$

es tal que $I(t) \geq \ln(1+t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0$, y que $I'(t) \geq 0$.

23. Si f es una función continua, pruebe que

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x.$$

24. Sea f una función derivable en

$$f(1) = 1 = f'(1) = f''(1) = 1.$$

Se define la función

$$G(x) = \int_0^{f(x)} x f(u)\,\mathrm{d}u$$

Hallar $G''(1)$.

Solución:
Bien, del dato f es una función derivable en $x=1$. (¡Y continua también!).
Además, $G(x) = \int_0^{f(x)} x f(u)\,\mathrm{d}u$ es igual a $G(x) = x\int_0^{f(x)} f(u)\,\mathrm{d}u$, pues x es constante con respecto a la variable de integración u.
Derivamos la función G:

$$\begin{aligned}
G(x)' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^{f(x)} x f(u)\,\mathrm{d}u\right] && \text{Operador derivada}\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\int_0^{f(x)} f(u)\,\mathrm{d}u\right] && \text{De la primera observación}\\
&= x'\left[\int_0^{f(x)} f(u)\,\mathrm{d}u\right] + x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^{f(x)} f(u)\,\mathrm{d}u\right] && \text{Regla del producto para derivadas}\\
&= 1\cdot F(f(x)) + x\cdot f(f(x))\cdot f(x)'. && \text{Por el Teorema Fundamental del Cálculo}
\end{aligned}$$

Derivamos nuevamente:

$$\begin{aligned}
G(x)'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[G(x)'\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[F(f(x)) + x\cdot f(f(x))\cdot f(x)'\right]\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[F(f(x))\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\cdot f(f(x))\cdot f(x)'\right]\\
&= F'(f(x))\cdot f(x)' + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x]\,f(f(x))\cdot f(x)' + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(f(x))\right]f(x)' + x\cdot f(f(x))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)'\right]\\
&= F'(f(x))\cdot f(x)' + f(f(x))\cdot f(x)' + x\cdot f'(f(x))\cdot f(x)'\cdot f(x)' + x\cdot f(f(x))\cdot f(x)''.
\end{aligned}$$

Ahora evaluamos en $x = 1$.

$$
\begin{aligned}
G'(x)|_{x=1} &= F'(f(1)) \cdot f(1)' + f(f(1)) \cdot f(1)' + x \cdot f'(f(1)) \cdot f(1)' \cdot f(1)' + 1 \cdot f(f(1)) \cdot f(1)'' \\
&= F'(1) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + 1 \cdot f'(1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot f(1) \cdot 1 \\
&= F'(1) + f(1) + f'(1) + f(1) \\
&= f(1) + 1 + 1 + 1 \\
\therefore G'(x)|_{x=1} &= 1 + 1 + 1 = 4 \quad \square
\end{aligned}
$$

Facultad de Ciencias, 13 de septiembre del 2017.

Referencias

[1] Charles G Denlinger. *Elements of real analysis*. Jones & Bartlett Publishers, 2011.