FACULTAD DE CIENCIAS | UNI

Cuarta práctica dirigida de Cálculo integral CM 132 Ciclo 2017-2

Undg. Carlos Alonso Aznarán Laos
E-mail: caznaranl@uni.pe
Science Department, National University of Engineering

Temas: Áreas de regiones planas, volúmenes de sólidos de revolución, coordenadas polares.
Profesores: Fernando Zamudio, Angello Morante, Maritza Moreno, Ronald Mas, Juan Cribillero

---

1. Calcule el área de la región limitada por las siguientes curvas:

   (a) $y = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1$, $y = \dfrac{x}{3} + 1$, $y = -x + 5$.
   (b) $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje X.
   (c) $y = \sec^2 x$, $y = \tan^2 x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
   (d) $y = xe^{-x}$, $y = x^2 e^{-x}$, $x \geq 0$.
   (e) $y = \ln^2(x)$, $0 < x \leq e$.
   (f) $8y = x^3$ y $8y = 2x^3 + x^2 - 2x$.
   (g) $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ y el eje Y, en el primer cuadrante.
   (h) $y = -x^2 + 4x - 3$ y las tangentes a estar curva en los puntos: $(0, -3)$ y $(3, 0)$.
   (i) $y^3 = x^2$ y la cuerda que une los puntos $(-1, 1)$ y $(8, 4)$.

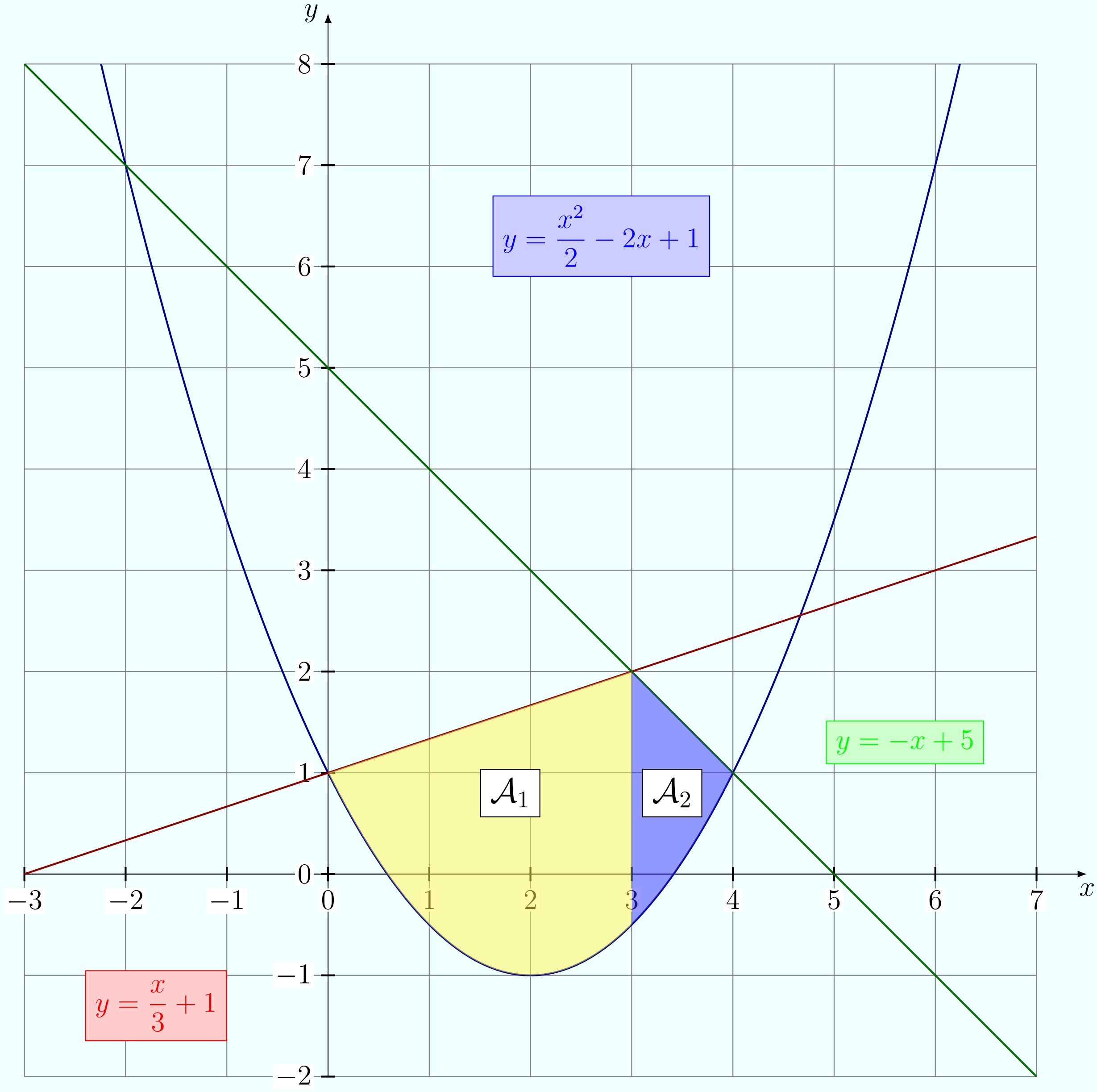
Solución:

a) Sea $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1$, $g(x) = \dfrac{x}{3} + 1$ y $h(x) = -x + 5$.
Para determinar las cotas de frontera apropiadas de la región, necesitamos conocer dónde las curvas $y = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1$ e $y = \dfrac{x}{3} + 1$ se intersectan, esto es, los $\tilde{x}$ que satisfacen la ecuación:

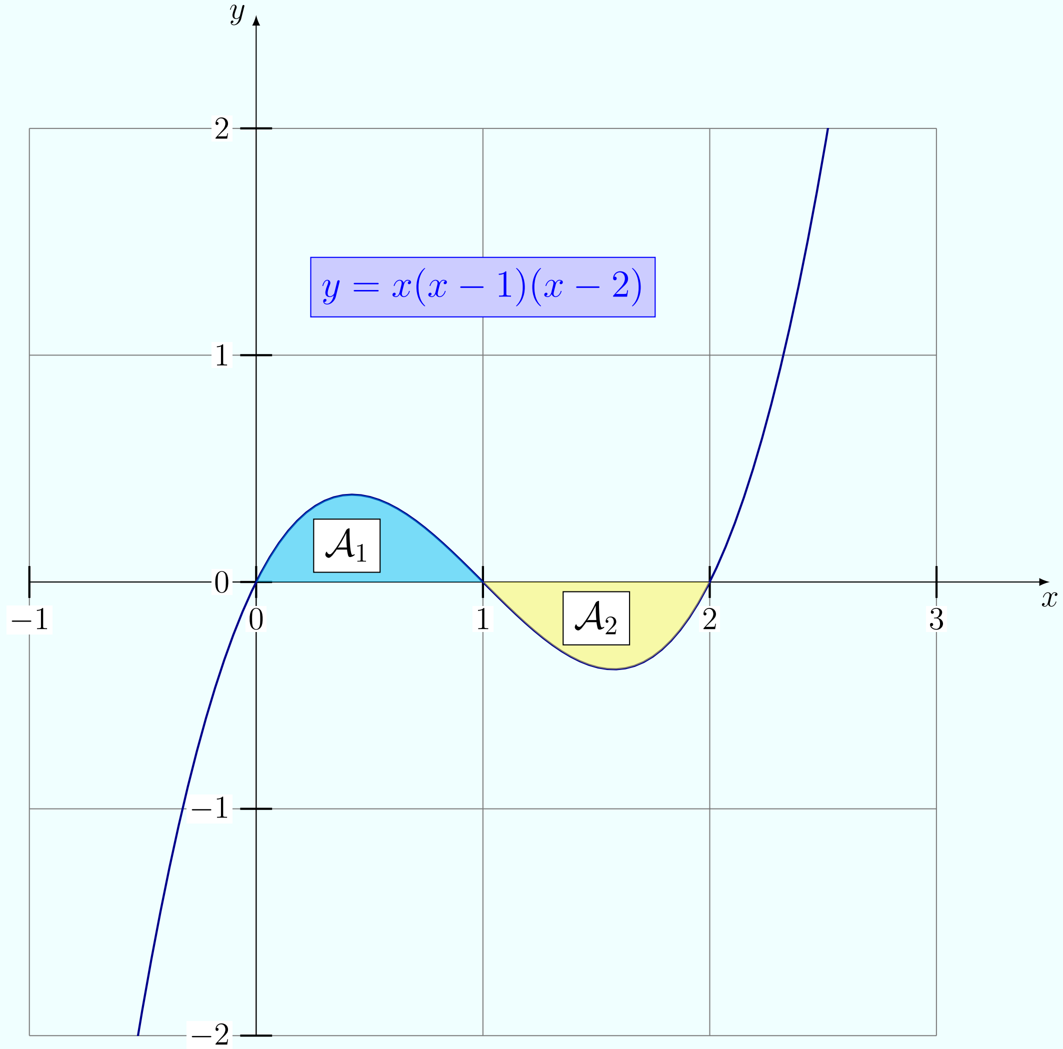
$$\boxed{\frac{x^2}{2} - 2x + 1 = \frac{x}{3} + 1 \implies \tilde{x} = 0 \quad \vee \quad \tilde{x} = \frac{14}{3}.}$$

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^3 \left(\frac{x}{3} + \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + 2x - \cancel{1}\right) \mathrm{d}x$$
$$\mathcal{A}_1 = \int_0^3 \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{7x}{3}\right) \mathrm{d}x$$
$$\mathcal{A}_1 = \frac{-x^3}{6} + \frac{7x^2}{6}\bigg|_0^3$$
$$\mathcal{A}_1 = \left(\frac{-3^3}{6} + \frac{7\cdot 3^2}{6}\right) - \left(\cancelto{0}{\frac{-0^3}{6}} + \cancelto{0}{\frac{7\cdot 0^2}{6}}\right)$$
$$\mathcal{A}_1 = \frac{-27+63}{6} = \frac{36}{6} = 6u^2.$$

$$\mathcal{A}_2 = \int_3^4 \left(-x + 5 - \frac{x^2}{2} + 2x - 1\right) \mathrm{d}x$$
$$\mathcal{A}_2 = \int_3^4 \left(-\frac{x^2}{2} + x + 4\right) \mathrm{d}x$$
$$\mathcal{A}_2 = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 4x\bigg|_3^4$$
$$\mathcal{A}_2 = \left(-\frac{4^3}{6} + \frac{4^2}{2} + 4\cdot 4\right) - \left(-\frac{3^3}{6} + \frac{3^2}{2} + 4\cdot 3\right)$$
$$\mathcal{A}_2 = \frac{-64+27}{6} + \frac{16-9}{2} + 16 - 12$$
$$\mathcal{A}_2 = \frac{-37}{6} + \frac{7}{2} + 4 = \frac{4}{3}u^2.$$



b) El área mostrada por la gráfica de la función:



$$\mathcal{A}_1 = \int_0^1 \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right) \mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A}_1 = \frac{x^4}{4} - \cancel{3} \cdot \frac{x^3}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{2} \cdot x^2}{\cancel{2}} \Bigg|_0^1 \mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A}_1 = \left(\frac{1^4}{4} - \cancel{1^3} + \cancel{1^2}\right) - \left(\cancelto{0}{\frac{0^4}{4}} - \cancelto{0}{0^3} + \cancelto{0}{0^2}\right)$$

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{4} u^2.$$

$$\mathcal{A}_2 = \int_1^2 \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right) \mathrm{d}x$$

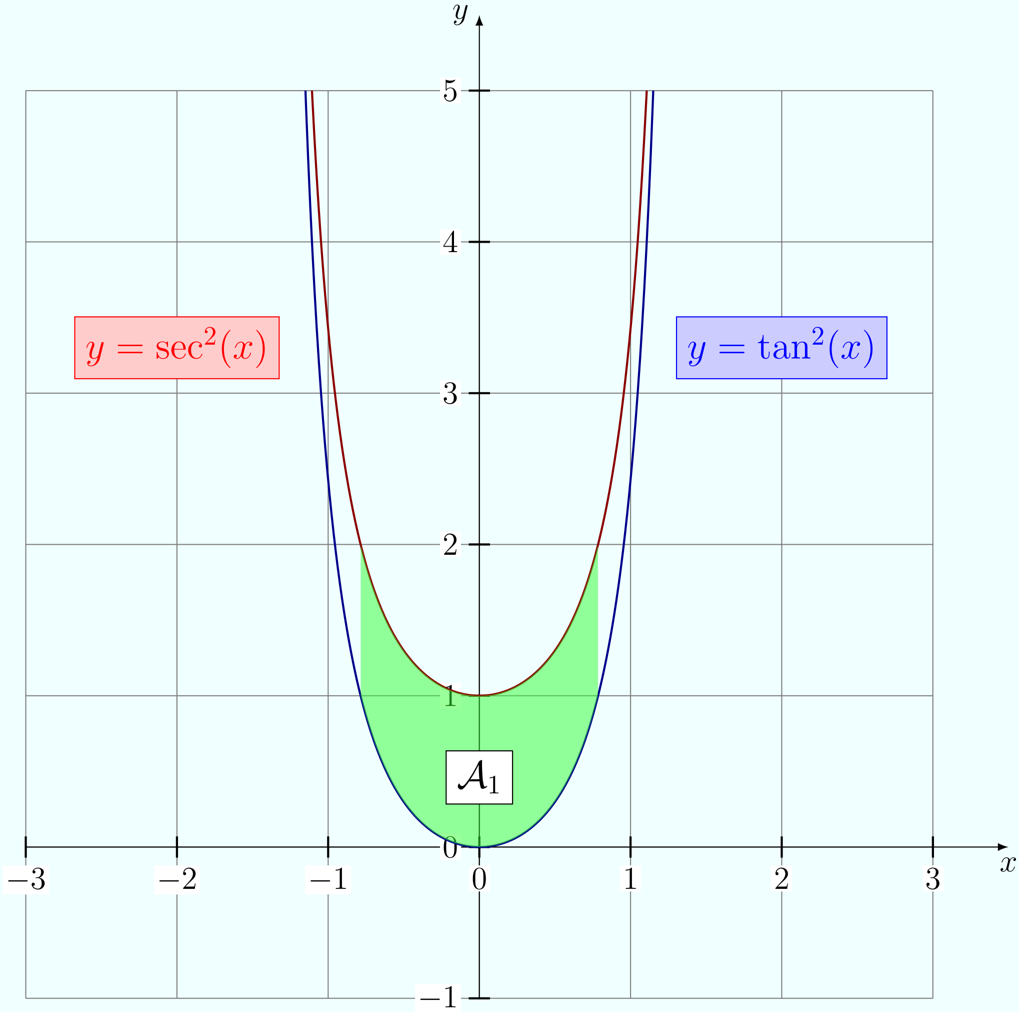
$$\mathcal{A}_1 = \frac{x^4}{4} - \cancel{3} \cdot \frac{x^3}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{2} \cdot x^2}{\cancel{2}} \Bigg|_1^2 \mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A}_2 = \left(\frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2\right) - \left(\frac{1^4}{4} - \cancel{1^3} + \cancel{1^2}\right)$$

$$\mathcal{A}_2 = (4 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\mathcal{A}_2 = -\frac{1}{4} u^2.$$

c) El área



$$\mathcal{A}_1 = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\sec^2 x - \tan^2 x\right) \mathrm{d}x$$

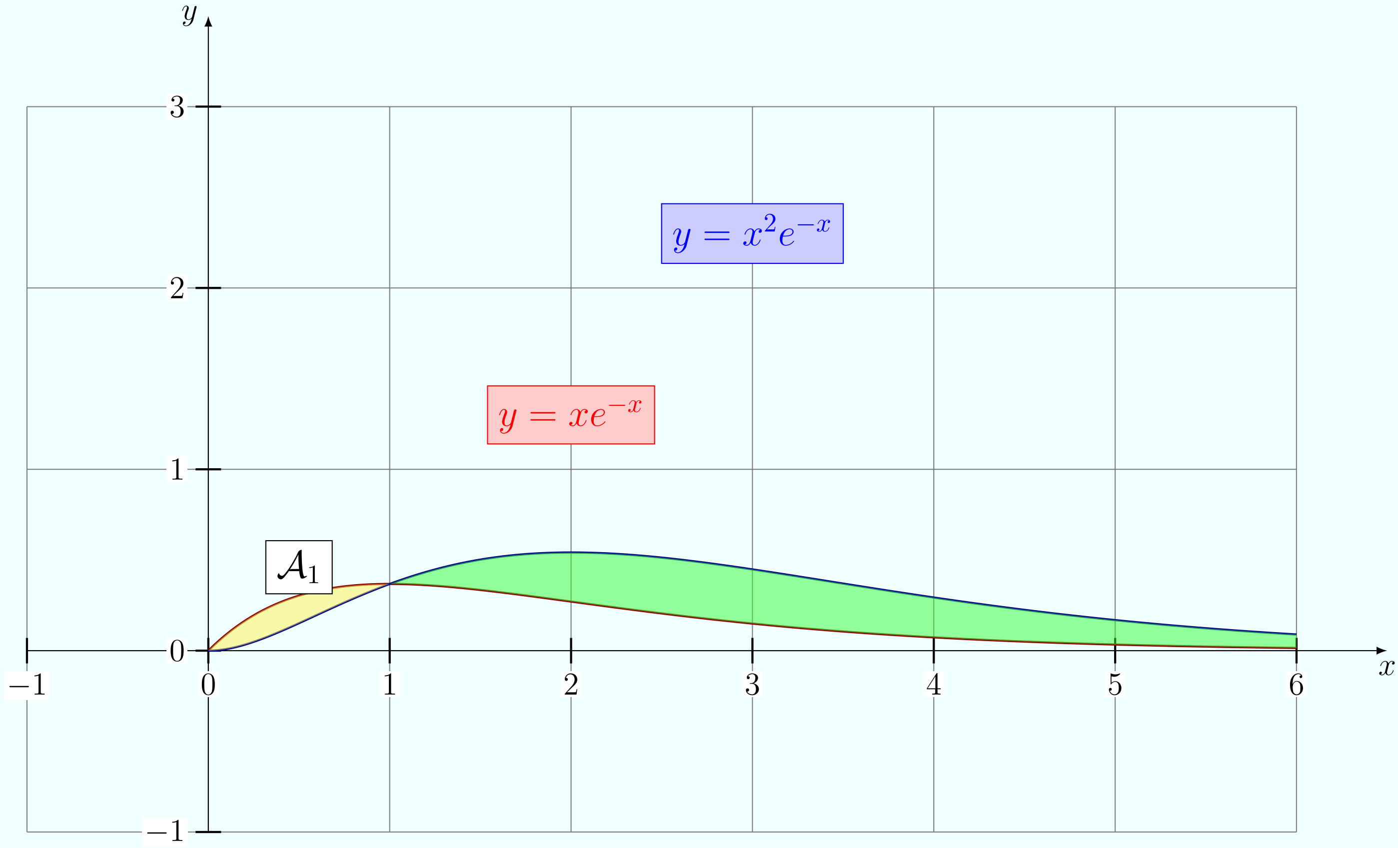
$$\mathcal{A}_1 = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cancel{\tan^2 x} - \cancel{\tan^2 x}) \, \mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A}_1 = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 1 \, \mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A}_1 = x|_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} u^2.$$

d) El área



$$\mathcal{A}_1 = \int_0^1 \left[xe^{-x} - x^2e^{-x}\right] \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left(x - x^2\right) e^{-x} \,\mathrm{d}x$$

Integrando por partes

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x - x^2 & \mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = (1-2x)\,\mathrm{d}x & v = -e^{-x} \end{array}}$$

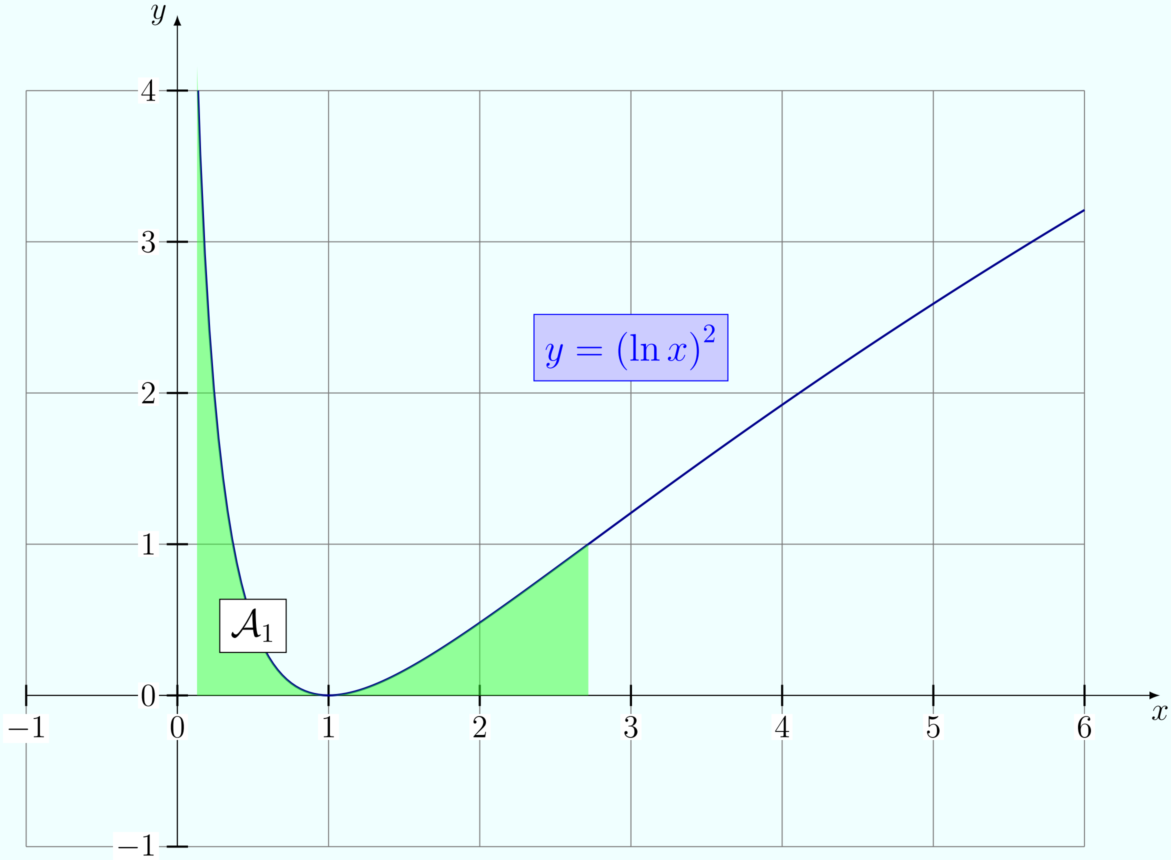
$$\mathcal{A}_1 = \left[(x^2 - x)e^{-x}\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}(1-2x)\,\mathrm{d}x$$
$$\mathcal{A}_1 = \left[(\cancel{1^2} - \cancel{1})e^{-1} - (\cancelto{0}{0^2} - \cancelto{0}{0})\cancelto{1}{e^{-0}}\right] + \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Integrando por partes $\int_0^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & \mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= -1 + \left[-e^{-x}\right]\Big|_0^1 - 2\left[-xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x\right]\\
\mathcal{A}_1 &= -1 + \left(-e^{-1} - (-\cancelto{1}{e^{-0}})\right) - 2\left[\left(-1\cdot e^{-1}\right) - \left(-\cancelto{0}{0\cdot e^{-0}}\right) + e^{-x}\Big|_0^1\right]\\
\mathcal{A}_1 &= \cancel{-1} - e^{-1} + \cancel{1} - 2\left[-e^{-1} + \left(e^{-1} - \cancelto{1}{e^{-0}}\right)\right]\\
\mathcal{A}_1 &= -3e^{-1} - 2.
\end{aligned}
$$

e) Calculando el área de



Sea $y = \ln x \implies x = e^y \implies dx = e^y du$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \int_{0^+}^{e} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x\\
\mathcal{A}_1 &= \int_{-\infty}^{1} y^2 e^y\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Integrando por partes $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} y^2 e^y\,\mathrm{d}y$:

$$
\boxed{\begin{array}{ll} u = y^2 & \mathrm{d}v = e^y\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}u = 2y\,\mathrm{d}y & v = e^y \end{array}}
$$

$$\mathcal{A}_1 = \int_{-\infty}^{1} y^2 e^y \, \mathrm{d}y$$
$$\mathcal{A}_1 = y^2 e^y \Big|_{-\infty}^{1} - 2\int_{-\infty}^{1} y e^y \, \mathrm{d}y$$
$$\mathcal{A}_1 = \left(1^2 \cdot e^1\right) - \left(\cancelto{0}{\lim_{y\to-\infty} y^2 e^y}\right) - 2\int_{-\infty}^{1} y e^y \, \mathrm{d}y$$

Pero de la Regla de Lhopital:

$$\boxed{\begin{aligned}
\lim_{n\to-\infty} n^2 e^n &= \lim_{n\to-\infty} \frac{n^2}{e^{-n}} && \text{¡forma indeterminada! } \frac{\infty}{\infty}\\
&= \lim_{n\to-\infty} \frac{(n^2)'}{(e^{-n})'}\\
&= \lim_{n\to-\infty} \frac{2n}{-e^{-n}}\\
&= 2\lim_{n\to-\infty} \frac{-n}{e^{-n}} && \text{¡forma indeterminada! } \frac{\infty}{\infty}\\
&= 2\lim_{n\to-\infty} \frac{(-n)'}{(e^{n})'}\\
&= -2\lim_{n\to-\infty} \frac{1}{e^{n}} = -2\cdot 0 = 0.
\end{aligned}}$$

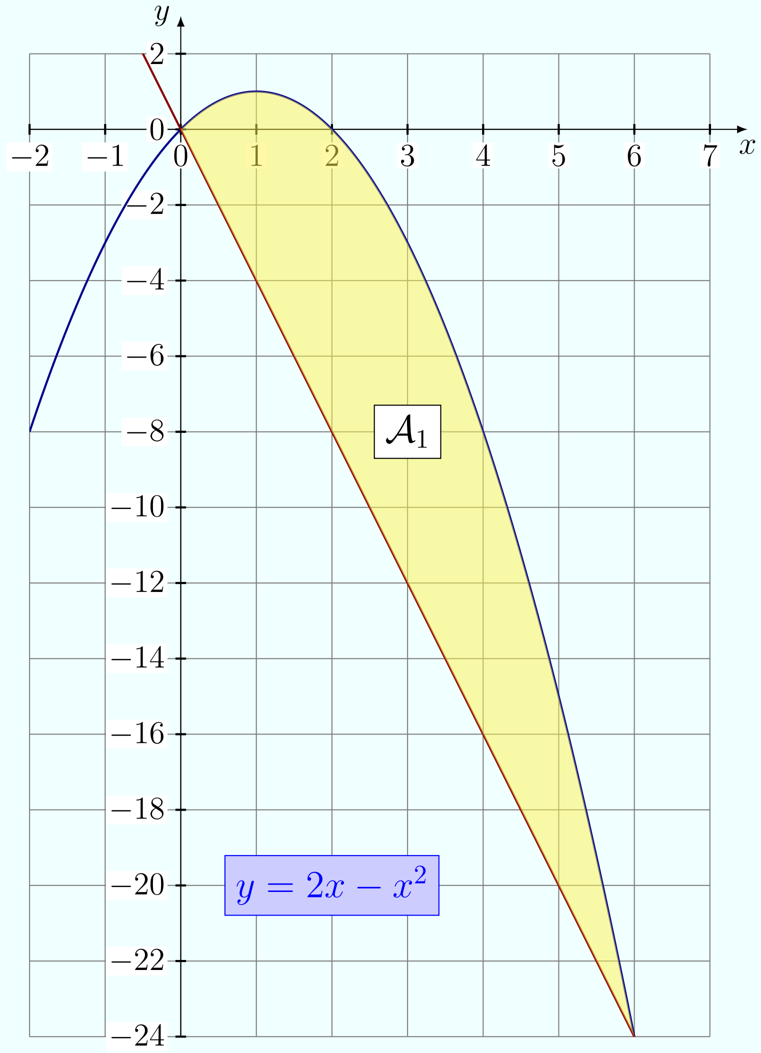
E integrando por partes $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} y e^y \, \mathrm{d}y$:

$$\boxed{\begin{array}{cc} u = y & \mathrm{d}v = e^y \, \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}y & v = e^y \end{array}}$$

$$\mathcal{A}_1 = e^1 - 0 - 2\left[y e^y \Big|_{-\infty}^{1} - \int_{-\infty}^{1} e^y \, \mathrm{d}y \right]$$
$$\mathcal{A}_1 = e^1 - 0 - 2\left[\left(1 \cdot e^1\right) - \left(\lim_{y\to-\infty} y e^y\right) - e^y\Big|_{-\infty}^{1} \right]$$
$$\mathcal{A}_1 = e - 2\left[e - 0 - \left(e^1 - \cancelto{0}{\lim_{y\to-\infty} e^y}\right)\right]$$
$$\mathcal{A}_1 = e - 2\left(\cancel{e} - \cancel{e}\right) = e$$

2. Calcule el valor de m tal que el área de la región determinada por la recta $y = mx$ y la parábola $y = 2x - x^2$ es igual a $36u^2$.

Solución:



Primero hallemos el punto de intersección, es decir algún $\tilde{x} \in \{x \in \mathbb{R} \mid y = 2x - x^2 \wedge y = mx\}$ que satisfaga:

$$2x - x^2 = mx \iff x(x+m-2) = 0 \implies x = 0 \vee x = 2-m$$

Por condición del ejercicio:

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^{2-m} \left(2x - x^2 - mx\right) \mathrm{d}x = 36u^2$$

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^{2-m} \left[-x^2 + (2-m)x\right] \mathrm{d}x = 36u^2$$

$$\mathcal{A}_1 = -\frac{x^3}{3} + (2-m)\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{2-m} = 36u^2$$

$$\mathcal{A}_1 = \left(-\frac{(2-m)^3}{3} + (2-m)\frac{(2-m)^2}{2}\right) - \left(\cancelto{0}{-\frac{0^3}{3}} + (2-m)\cancelto{0}{\frac{0^2}{2}}\right) = 36u^2$$

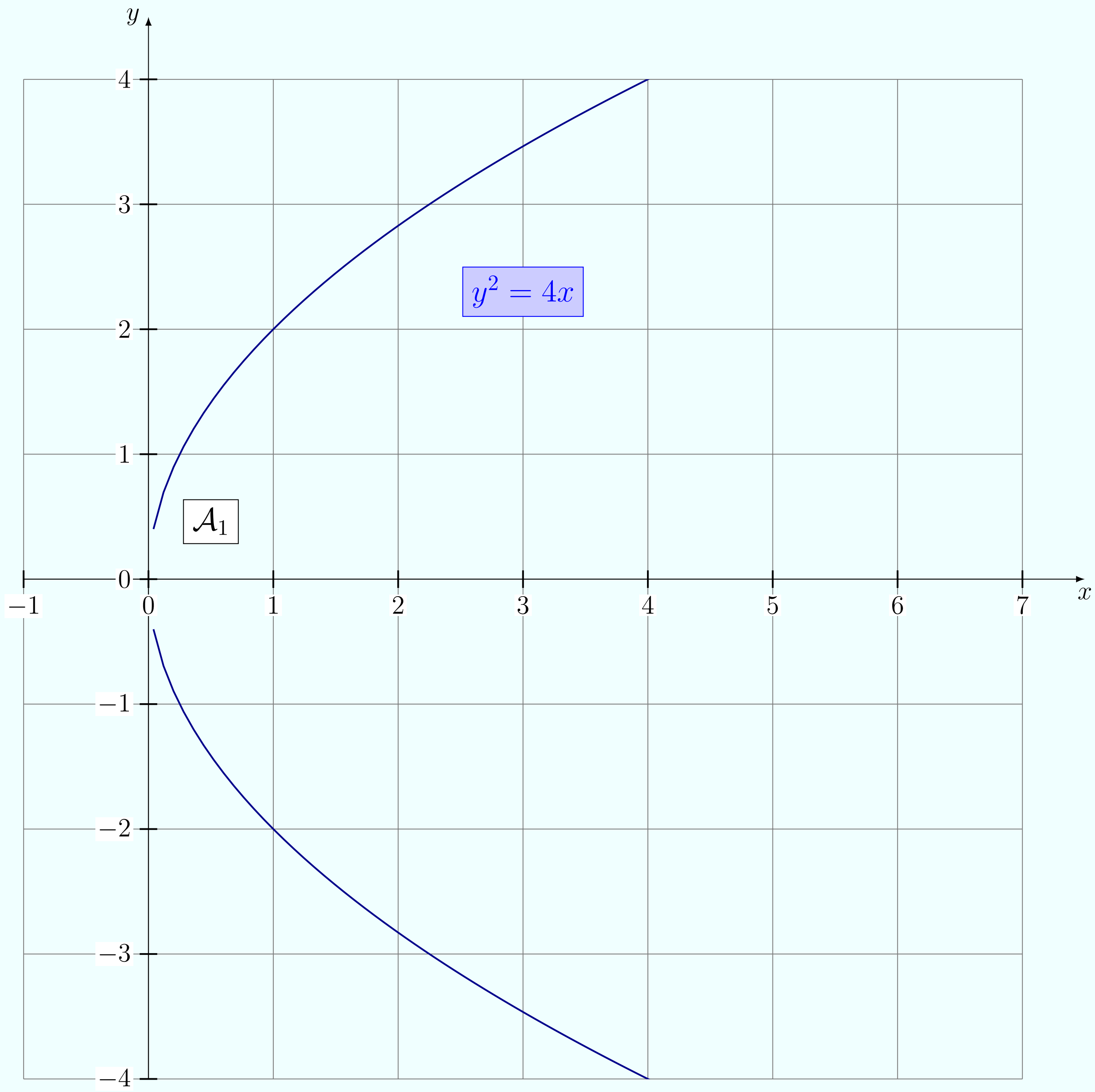
$$\mathcal{A}_1 = (2-m)^3\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = 36u^2$$

$$\therefore (2-m)^3 = 6 \cdot 36u^2$$

$$2 - m = 6 \implies m = -4.$$

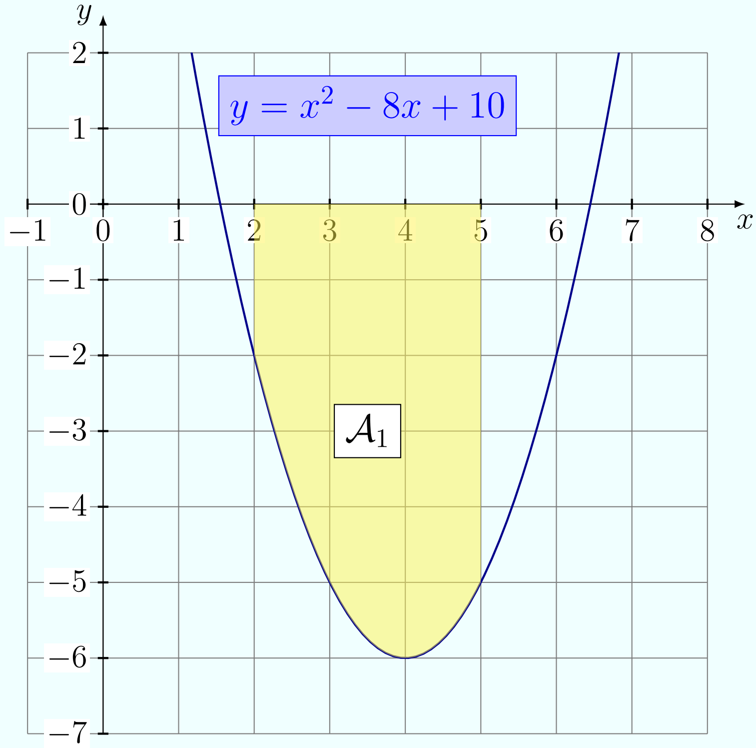
3. La parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = mx$, con $m > 0$, determinan una región de área $A(m)$. Calcule $\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}m}\right)(m)$.

Solución:



4. Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la curva $y = x^2 - 8x + 10$, el eje x y las rectas $x = 2$ y $x = 5$.

Solución:



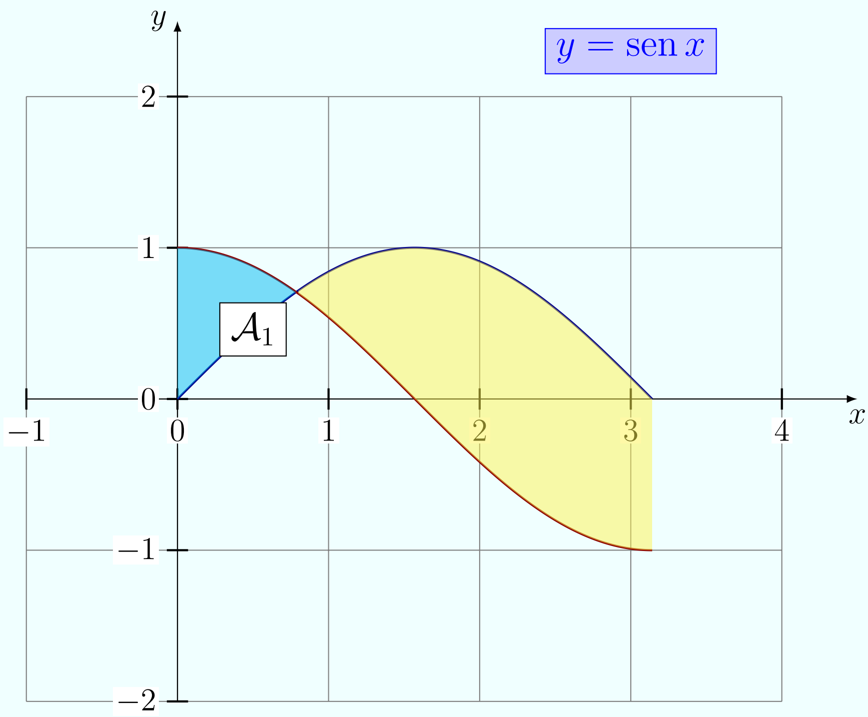
Nos piden calcular $\mathcal{A}_1$, para ello primero calcularemos puntos donde la curva se intersecta con el eje X, esto es:

$$x^2 - 8x + 10 = 0 \iff x = 4 + \sqrt{6} \quad \vee \quad x = 4 - \sqrt{6}.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 = -\int_2^5 \left(x^2 - 8x + 10\right) \mathrm{d}x &= -\left(\frac{x^3}{3} - 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 10x\right)\Bigg|_2^5 \\
&= -\left(\frac{5^3}{3} - 8 \cdot \frac{5^2}{2} + 10 \cdot 5\right) + \left(\frac{2^3}{3} - 8 \cdot \frac{2^2}{2} + 10 \cdot 2\right) \\
&= -\left(\frac{125}{3} - 100\right) + \left(\frac{8}{3} - 16 + 20\right) = 65u^2
\end{aligned}$$

5. Calcule el área de la región limitada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

Solución:



El área pedida es:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x \\
&= \operatorname{sen} x + \cos x|_0^{\pi/4} \\
&= \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - (\operatorname{sen}(0) + \cos(0)) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0+1) \\
&= \sqrt{2} - 1u^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 &= \int_{\pi/4}^{\pi} (\operatorname{sen} x - \cos x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\cos x - \operatorname{sen} x|_{\pi/4}^{\pi} \\
&= (-\cos\pi - \operatorname{sen}\pi) - \left(-\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) \\
&= (1-0) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 1 + \sqrt{2}u^2
\end{aligned}
$$

6. Calcule el área limitada por el eje X y las curvas $y = \operatorname{arc\,sen} x$ y $\operatorname{arc\,cos} x$.

Solución:

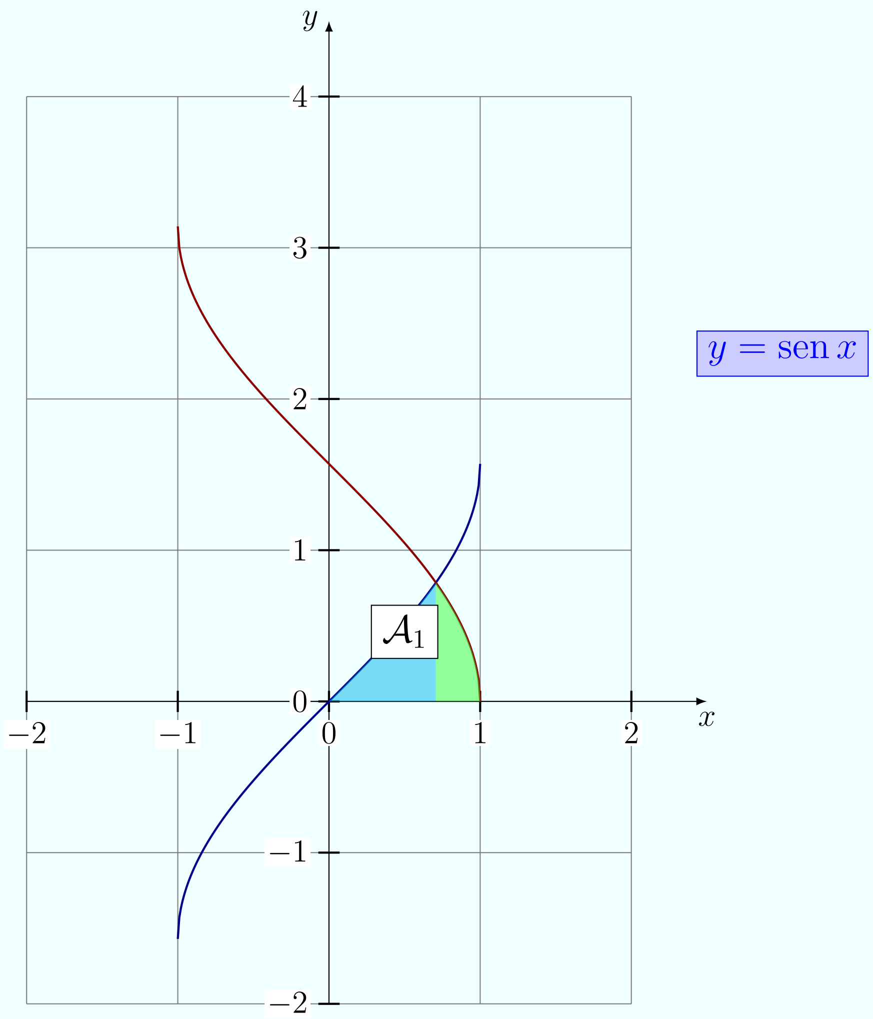
Para determinar apropiadamente la región acotada, necesitamos conocer donde las curvas $y = \operatorname{arc\,sen} x$ e $y = \arccos x$ se intersectan. Podemos encontrar las intersecciones igualando las expresiones para y. Aquí es fácil de escribir la última ecuación como $x = \operatorname{sen} y$ y la otra ecuación como $x = \cos y$ e igualar las expresiones para x, a saber,

$$x = \operatorname{sen} y \qquad \text{y} \qquad x = \cos y$$

Esto resulta:

$$\cos y = \operatorname{sen} y \qquad \text{o} \qquad 1 = \tan y \quad \forall \implies y = \frac{\pi}{4} \forall y \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

El punto de intersección es $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$



$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \int_0^{\pi/4} [\cos y - \operatorname{sen} y]\,\mathrm{d}y \\
&= \operatorname{sen} y + \cos y\big|_0^{\pi/4} \\
&= \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - (\operatorname{sen} 0 + \cos 0) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0+1) \\
&= (\sqrt{2} - 1)u^2
\end{aligned}$$

7. Calcule el área de la región limitada por la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y la recta $x = 2a$, donde $a > 0$ y $b > 0$.

Solución:

$$\mathcal{A}_1 = \frac{2}{a}\int_a^{2a} \sqrt{(b^2x^2 - a^2b^2)}\,\mathrm{d}x$$

Realicemos la sustitución hiperbólica:

$$x = a\cosh t \quad \wedge \quad y = b\,\mathrm{senh}\, t$$

Donde los nuevos límites de integración son los siguientes:

$$\begin{aligned} \cancel{a} &= \cancel{a}\cosh t \\ 1 &= \cosh t \\ \mathrm{arcCosh}\, 1 &= t \\ 0 &= t \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2\cancel{a} &= \cancel{a}\cosh t \\ 2 &= \cosh t \\ \mathrm{arcCosh}\, 2 &= t \\ \ln(2+\sqrt{3}) &= t \end{aligned}$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{2\cancel{a}b}{\cancel{a}} \int_0^{\ln(2+\sqrt{3})} \sqrt{\left(a^2\cosh^2 t - a^2\right)}\,\mathrm{senh}\, t\,\mathrm{d}t \\ &= 2ab \int_0^{\ln(2+\sqrt{3})} \mathrm{senh}^2\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Pero, $2\,\mathrm{senh}^2\,\omega = \cosh(2\omega) - 1 \implies \mathrm{senh}^2\,\omega = \dfrac{\cosh(2\omega)-1}{2}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= 2ab \int_0^{\ln(2+\sqrt{3})} \mathrm{senh}^2\,\mathrm{d}t \\ &= \cancel{2}ab \int_0^{\ln(2+\sqrt{3})} \left(\frac{\cosh(2t)-1}{\cancel{2}}\right)\mathrm{d}t \\ &= ab \int_0^{\ln(2+\sqrt{3})} (\cosh(2t)-1)\,\mathrm{d}t \\ &= ab\left[\frac{\mathrm{senh}(2t)}{2} - t\Big|_0^{\ln(2+\sqrt{3})}\right] \\ &= ab\left[\left(\frac{\mathrm{senh}(2\cdot\ln(2+\sqrt{3}))}{2} - \ln(2+\sqrt{3})\right) - \left(\cancelto{0}{\frac{\mathrm{senh}(2\cdot 0)}{2}} - 0\right)\right] \\ &= ab\left[\frac{21+17\sqrt{3}}{16} - \ln(2+\sqrt{3})\right] \end{aligned}$$

8. Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función f con el eje X, en el intervalo indicado.

   a) $f(x) = |x| - |x-1|$ en $[-1,2]$.
   b) $f(x) = x\ln^2(x)$ en $[1,e]$.
   c) $(x-1)(x-2)x$ en $[0,2]$.

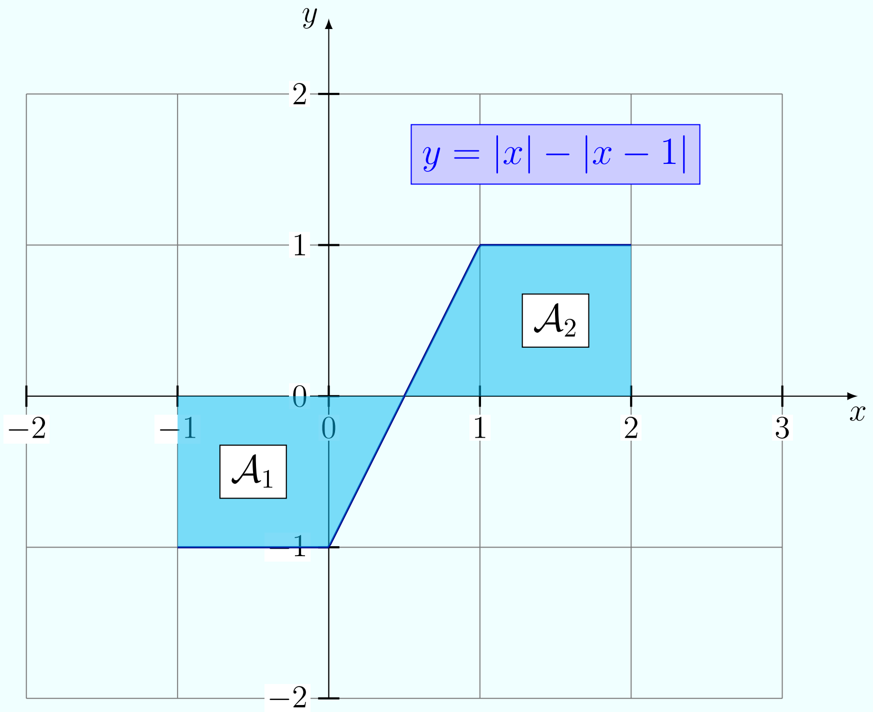
Solución:

a) Para determinar apropiadamente las regiones acotadas, necesitamos conocer donde la curva $y = |x| - |x-1|$ se intersecta con el eje X, esto es

$$|x| - |x-1| = 0 \implies x + (x-1) = 0 \implies x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= -\int_{-1}^{1/2} |x| - |x-1| \, \mathrm{d}x \\
&= -\int_{-1}^{0} |x| - |x-1| \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1/2} |x| - |x-1| \, \mathrm{d}x \\
&= -\int_{-1}^{0} (-\cancel{x} + \cancel{x} - 1) \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1/2} (x + x - 1) \, \mathrm{d}x \\
&= x\Big|_{-1}^{0} - \left[\cancel{2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} - x\right]\Bigg|_{0}^{1/2} \\
&= (0+1) + \left[(1^2 - 1) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] \\
&= \frac{5}{4} u^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 &= \int_{1/2}^{1} |x| - |x-1| \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{1/2}^{1} |x| - |x-1| \, \mathrm{d}x + \int_{1}^{2} |x| - |x-1| \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{1/2}^{1} (x + x - 1) \, \mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (\cancel{x} - \cancel{x} + 1) \, \mathrm{d}x \\
&= \cancel{2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} - x\Bigg|_{1/2}^{1} + x\Big|_{1}^{2} \\
&= \left[(1^2 - 1) - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right)\right] + (2-1) \\
&= \frac{5}{4} u^2
\end{aligned}$$



9. Calcule el área de la región limitada por el bucle de la curva $y^2 = x(x-1)^2$.

10. Halle la ecuación de la recta que pasa por el origen y determina en la región limitada por la curva $y = 6x - x^2$ y el eje X dos regiones equivalentes.

11. La región $\mathcal{R}$ limitada por la recta $y = x$, el eje X y la parábola $y = 2x - x^2$, $x \geq 1$, es la base de un sólido, considerando que las secciones transversales perpendiculares al eje X son regiones semielípticas con eje menor contenido en $\mathcal{R}$ y eje mayor de longitud dos veces la del menor.

12. La base de un sólido es un círculo de longitud de radio r y las secciones planas perpendiculares a un diámetro de la base están limitadas inferiormente por una cuerda del círculo y superiormente por una semielipse cuyo eje menor está contenido en la base del sólido y eje mayor de longitud dos veces la del menor. Calcule el volumen del sólido.

13. La base de un sólido es la región limitada por una circunferencia de radio $a > 0$. Calcule el volumen, si las secciones transversales paralelas al diámetro son triángulos rectángulos isósceles con hipotenusa sobre la base de dicho sólido.

14. Dos cilindros circulares rectos, ambos de longitud de radio igual a R, se intersectan tal que sus ejes son perpendiculares. Calcule el volumen del sólido determinado por los cilindros.

15. Calcule el volumen del sólido que se determina al intersectar dos cilindros circulares rectos ortogonales de longitudes de radio a y $2a$.

16. La base de un sólido es la región $\mathcal{R}$ limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$. Calcule el volumen del sólido, si las secciones transversales perpendiculares al eje Y son arcos parabólicos de altura fija h y contenidas en $\mathcal{R}$.

17. Hallar el volumen del elipsoide obtenido mediante la rotación de la región acotada por la curva $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$ y el eje X, alrededor del eje X.

18. Calcule el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por la elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ y el eje X, alrededor del eje X.

19. Por el método de las capas cilíndricas demuestre que el volumen del sólido generado por la región

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{y^3}, 0 \leq y \leq 3\}$$

al girar una vuelta alrededor de la recta $y = -1$ es igual a $\dfrac{792\sqrt{3}\pi}{35}u^3$.

20. Un sólido de revolución se genera por la rotación de la región limitada por la parábola $y = 16 - x^2$ y el eje X, alrededor del eje Y. Calcule la longitud del radio del cilindro circular recto de volumen máximo contenido en este sólido.

21. Una cuerda $\bar{AB}$ de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ paralela al eje X determina en la región limitada por la elipse y el eje X dos regiones tal que los sólidos de revolución generados al rotar las regiones alrededor del eje X son equivalentes. Calcule la distancia del centro de la elipse a la cuerda $\bar{AB}$.

22. Hallar el volumen del sólido de revolución haciendo girar alrededor del eje X la región limitada por los siguientes lugares geométricos (*locus*):

    a) La parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$.
    b) La hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
    c) $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$.
    d) La *bruja de Agnesi* $(x^2 + 4a^2)y = 8a^3$, $y = 0$.
    e) $y^2(4 + x^2) = 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 8$.

23. Calcule el volumen generado al rotar la región encerrada por la curva $x^{2/3}+y^{2/3} = 1$ llamada *astroide*, alrededor:

    a) Del eje Y.
    b) de la recta $x = 1$.
    c) de la recta $x = 4$.

24. Expresar la ecuación $r = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$ en coordenadas rectangulares. ¿$(0,0)$ es un punto de esta curva?

25. Determine en coordenadas cartesianas las ecuaciones de las curvas:

    a) $r = a\operatorname{sen}\theta$
    b) $r = \cos 2\theta$
    c) $r = \operatorname{sen} 3\theta$

26. Hallar la expresión en coordenadas polares de la distancia de dos puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2).

27. Grafique

    1. $r = 7$.
    2. $r = 4\cos\theta$.
    3. $r = -7\cos\theta$.
    4. $r = 5 - 5\operatorname{sen}\theta$.
    5. $r = 7 - 6\cos\theta$.
    6. $r = 7 - 6\cos\theta$.
    7. $r = 7 - 6\cos\theta$.
    8. $r = 2 + 4\cos\theta$.

28. Grafique las siguientes curvas:

    a) $r = 4\operatorname{sen}\theta$.
    b) $r = 1 + \cos\theta$.
    c) $r = 2\cos 4\theta$.
    d) $r = 3\operatorname{sen} 4\theta$.
    e) Región dentro de $r = 2\operatorname{sen}\theta$ y fuera de $r = 1$.
    f) Dentro de $r = \cos\theta$ y fuera de $r = \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta$.
    g) Dentro de $1 + \cos\theta$ y fuera de $r = \cos\theta$.
    h) Dentro de $r^2 = \cos 2\theta$ y fuera de $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$.
    i) La región interior a las curvas $r = 3 + \cos 4\theta$ y $r = 2 - \cos 4\theta$.

29. Considere la lemniscata $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$.

    a) Esbozar la gráfica.
    b) Determine la ecuación en coordenadas cartesianas.
    c) Sea el punto P en el plano cartesiano, y las distancias d_1, de P al punto $(-a, 0)$ y d_2 de P al punto $(a, 0)$. Demuestre que la lemniscata está formada por los puntos que cumplen $d_1 d_2 = a^2$.
    d) ¿Qué forma van a tener los puntos P que satisfacen $d_1 d_2 = b$, siendo en cada caso $b > a^2$ y $b < a^2$?

30. Relacione las ecuaciones polares con las gráficas I, II, III y IV. Dé razones para sus elecciones. (No utilice algún Sistema Computarizado Algebraico CAS).

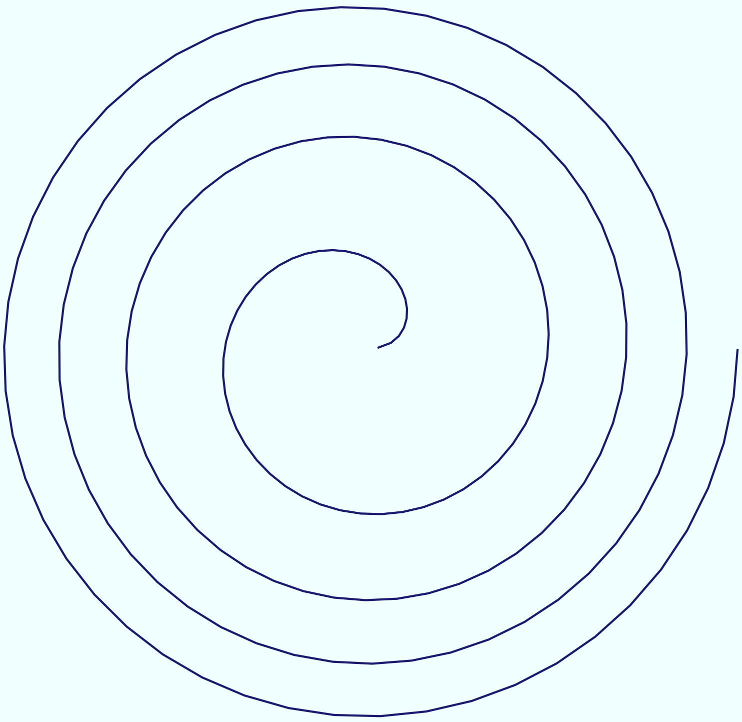
    a) $r = \sqrt{\theta}$, $0 \leq \theta \leq 16\pi$.
    b) $r = \theta^2$, $0 \leq \theta \leq 4\pi$.
    c) $r = \cos\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$.

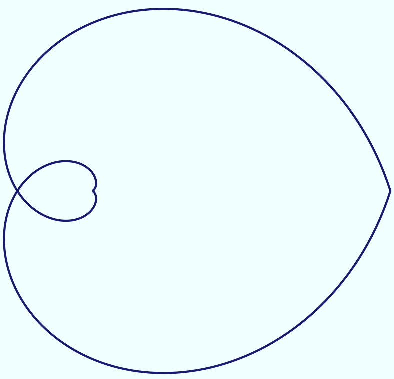
d) $r = 1 + 2\cos\theta$.

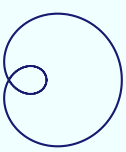
e) $r = 2 + \operatorname{sen} 3\theta$.

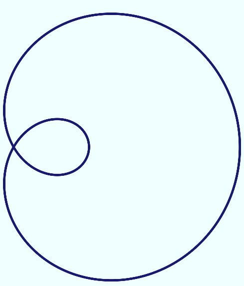
f) $r = 1 + 2\operatorname{sen} 3\theta$.

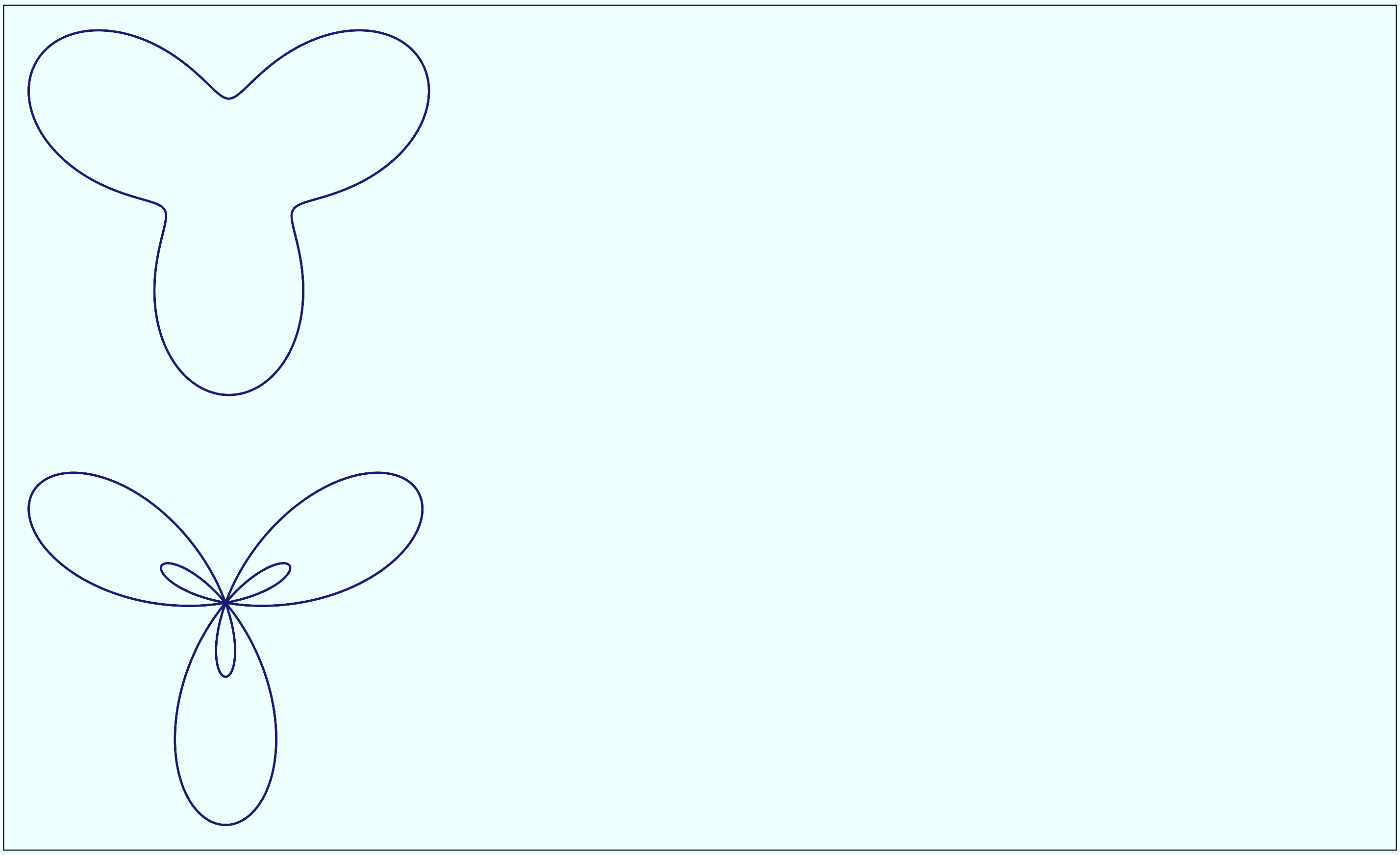
Solución:











Facultad de Ciencias, 3 de noviembre del 2017.

Referencias