AFIRMO

$S(n) \in X$

$x^{2(S(n))-1} + y^{2(S(n))-1} = x^{2n+1} + y^{2n+1}$

$= x^{2n-1} \cdot x^2 + y^{2n-1} \cdot x^2 + y^{2n-1} \cdot y^2 + x^{2n-1} \cdot y^2$

$- y^{2n-1} x^2 - x^{2n-1} y^2$

$= x^2 (x^{2n-1} + y^{2n-1}) + y^2 (x^{2n-1} + y^{2n-1}) - x^{2n-1} y^2 - x^2 y^{2n-1}$

$\cancel{= (x^2+y^2)(x^{2n-1}+y^{2n-1})}$

De la hipótesis

$x^{2n-1} + y^{2n-1} = k(x+y)$

$= (x^2+y^2)(x^{2n-1}+y^{2n-1}) - (\{k(x+y) - y^{2n-1}\} y^2 + x^2 y^{2n-1})$

$= (x^2+y^2)(k)(x+y) - \left(k(x+y)y^2 + y^{2n-1}\underbrace{(x^2-y^2)}_{(x+y)(x-y)}\right)$

$\therefore\ x^{2n+1} + y^{2n+1}$ es divisible

por $x+y$.

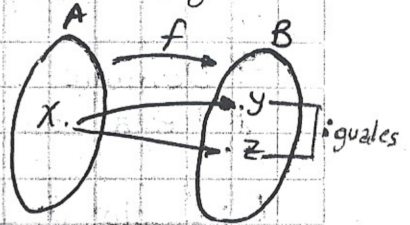
Funciones

Sean $A, B \subset \mathbb{R}$

Se dice que f es una función si:

① $f \subset A \times B$
(f es una relación)

② Si $(x,y) \in f$, $(x,z) \in f$
entonces $y = z$



③ $y = f(x)$

Donde: $f(x)$: Regla de correspondencia.

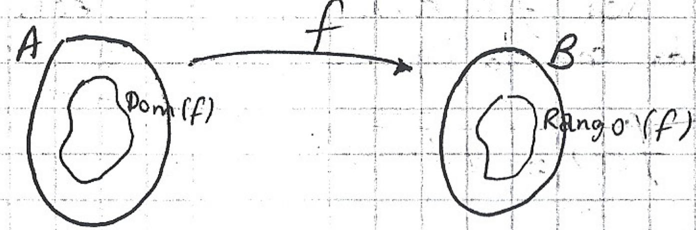
x: Variable independiente

y: Variable dependiente

Obs:

A: Conjunto de Partida

B: Conjunto de Llegada.



Dominio

$Dom(f) \subset A$

$Dom(f) = \{ x \,/\, \underbrace{(x,y) \in f}_{y = f(x)} \}$

Rango

$\text{Rango}(f) \subset B$

$\text{Rango}(f) = \{ f(x) / x \in \text{Dom}(f) \}$

Notamos que para definir una función nos basta:

* Dominio.
* Regla de Correspondencia.

Ejemplo ①

$f = \{ (1,3), (2,5), (3,8), (-7,12) \} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\text{Dom}(f) = \{ 1, 2, 3, -7 \}$; $\text{Rango}(f) = \{ 3, 5, 8, 12 \}$

Ejemplo

Sea $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la función está definida con la siguiente regla de correspondencia

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2}$$

Dominio:

$16 - x^2 \geq 0$

$x^2 - 16 \leq 0$

$x^2 \leq 16$

$-4 \leq x \leq 4$

$x \in [-4, 4]$

$\text{Dom}(f) = [-4; 4]$

Rango: $f(x) = \sqrt{16 - x^2} \geq 0$

Sabemos:

$x \in [-4, 4]$

$\longleftrightarrow -4 \leq x \leq 4$

$0 \leq x^2 \leq 16$

$-16 \leq -x^2 \leq 0$

$0 \leq 16 - x^2 \leq 16$

$0 \leq \sqrt{16 - x^2} \leq 4$

$\text{Rango}(f) = [0; 4]$

Obs: Cuando $\text{Dom}(f) = A$, la función se le conoce como **Aplicación**
donde A coincide con el dom.
para otros casos se le denomina solo como función

Imagen de Un Conjunto

Sea $A \subset \text{Dom}(f)$ se define.

$f(A) = \{ y / y = f(x), x \in A \}$

De forma equivalente.

$$y \in f(A) \leftrightarrow \exists x \in A / y = f(x)$$

Propiedades

① Sean $A, B \subset \text{Dom}(f)$

Si $A \subset B$ entonces $f(A) \subset f(B)$

Prueba: $y \in f(A) \leftrightarrow \exists x \in A / y = f(x)$

Sabemos $A \subset B$ $(x \in A \longrightarrow x \in B)$

$\longrightarrow \exists x \in B / y = f(x)$

$\leftrightarrow y \in f(B)$ ∎

② Sean $A, B \subset Dom(f)$

Se cumple:

$f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$

Prueba

AFIRMO $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

En efecto:

$A \subset A \cup B \xrightarrow{①} f(A) \subset f(A \cup B)$

$B \subset A \cup B \xrightarrow{①} f(B) \subset f(A \cup B)$

$\therefore f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$ ∎

AFIRMO $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

Sea $y \in f(A \cup B) \leftrightarrow \exists x \in (A \cup B) / y = f(x)$

$\leftrightarrow x \in A, y = f(x) \vee x \in B, y = f(x)$

$\leftrightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B)$

$\therefore y \in f(A) \cup f(B)$ ∎

③ Sean $A, B \subset Dom(f)$

Se cumple: $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Prueba

Sabemos:

$A \cap B \subset A \xrightarrow{①} f(A \cap B) \subset f(A)$

$A \cap B \subset B \xrightarrow{①} f(A \cap B) \subset f(B)$

$\therefore f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ ∎

Ejemplo: $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$* A = \{-1, 0\}$ $\quad * B = \{0, 1\}$

$f(A) = \{y / \underbrace{y = f(x)}_{y = x^2}, x \in A\}$

$f(A) = \{y / y = x^2, x \in \{-1, 0\}\}$

$f(A) = \{0, 1\}$

De forma análoga

$f(A) = \{0, 1\}$

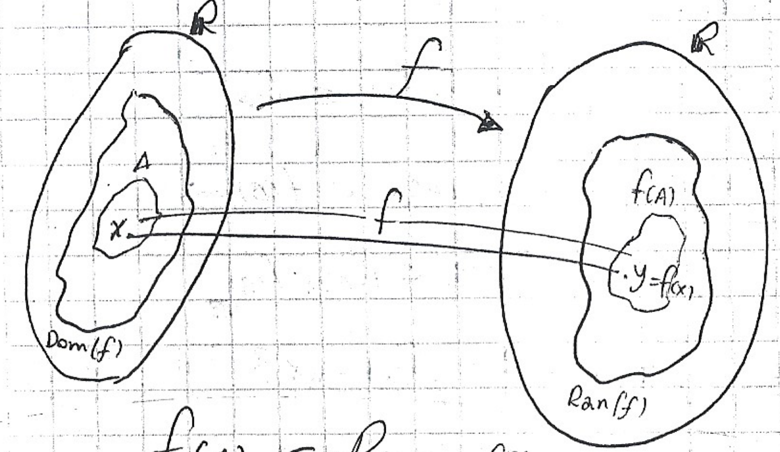
$f(A) \cap f(B) = \{0, 1\}$

Por otro lado

$A \cap B = \{0\}$

$f(A \cap B) = \{0\}$ $\Longrightarrow$ $\underset{\{0\}}{f(A \cap B)} \subset \underset{\{0,1\}}{f(A) \cap f(B)}$

Resumen:



$$f(A) \subset Rango(f)$$

Pre Imagen de un Conjunto

Sea $A \subset \mathbb{R}$, se define

$$f^{-1}(A) = \{x / f(x) \in A\}$$

"Preimagen de A"

En otras palabras:

$$x \in f^{-1}(A) \leftrightarrow f(x) \in A$$

Ejemplo:

Sea $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, con la regla de correspondencia.

$$f(x) = x^2$$

Calcular:

a) $f^{-1}(\langle -\infty, -1])$ b) $f^{-1}([0;4])$

Solución

(a) $f^{-1}(\langle -\infty, -1]) = \{x / \underbrace{f(x) \in \langle -\infty, -1]}_{x^2 \in \langle -\infty, -1]}\}$

$\nexists\, x \in \mathbb{R} / x^2 \leq -1$

$f^{-1}(\langle -\infty, -1]) = \phi$

(b) $f^{-1}([0;4]) = \{x / f(x) \in [0;4]\}$

$\leftrightarrow x^2 \in [0;4]$

$\leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 4$

$\leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

$f^{-1}([0;4]) = [-2;2]$

Propiedades: Sean $A, B \subset \mathbb{R}$

(1) Si $A \subset B$

entonces $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

Prueba

$x \in f^{-1}(A) \leftrightarrow f(x) \in A \subset B$

$\rightarrow f(x) \in B$

$\leftrightarrow x \in f^{-1}(B)$ ∎

(2) Se cumple:

$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

Prueba

AFIRMO $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$

Sabemos:

$A \subset A \cup B \xrightarrow{(1)} f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A \cup B)$

$B \subset A \cup B \xrightarrow{(1)} f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$

$\therefore f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$

AFIRMO : $f^{-1}(A\cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

$x \in f^{-1}(A\cup B) \leftrightarrow f(x) \in A\cup B$

$\leftrightarrow f(x)\in A \vee f(x) \in B$

$\rightarrow x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B)$ ∎

(3) Se cumple:

$f^{-1}(A\cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Prueba

AFIRMO $f^{-1}(A\cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Sabemos:

$A\cap B \subset A \xrightarrow{1} f^{-1}(A\cap B) \subset f^{-1}(A)$

$A\cap B \subset B \xrightarrow{1} f^{-1}(A\cap B) \subset f^{-1}(B)$

$\therefore f^{-1}(A\cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

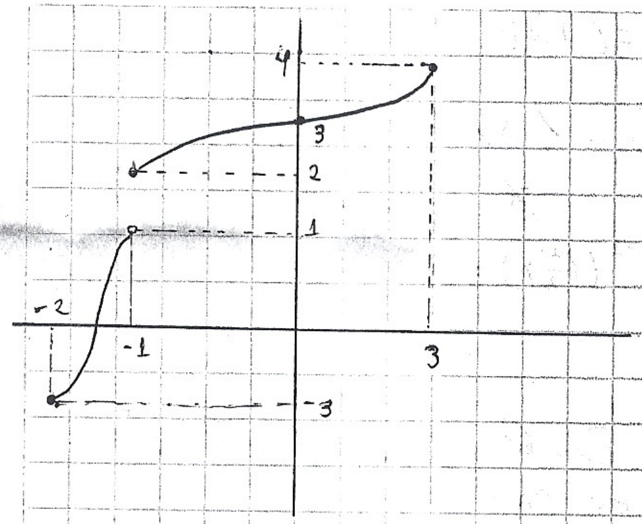
AFIRMO $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A\cap B)$

$x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \rightarrow x\in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B)$

$\rightarrow f(x) \in A \wedge f(x) \in B$

$\therefore f(x) \in A\cap B$

$x \in f^{-1}(A\cap B)$ ∎



Calcular:

a) $f(\langle -2,-1\rangle) = [-3,1\rangle$

b) $f([-2;-1\rangle \cup [0;3])$

$= f([-2;1\rangle) \cup f([0;3])$

$= [-3,1\rangle \cup [3,4]$

c) $f^{-1}([2,4\rangle) = [-1,3\rangle$

d) $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{ x / f(x) \in \mathbb{R} \}$

$f(x) \in \text{Rango}(f)$

$= \text{Dom}(f)$

$= [-2,3]$

e) $f^{-1}([1,3]) = [-1,0]$

f) $f^{-1}(\{\frac{3}{2}\}) = \{x / f(x) \in \{\frac{3}{2}\}\}$

$$\nexists x,\ f(x) = \frac{3}{2}$$

$$f^{-1}(\{\tfrac{3}{2}\}) = \phi$$

Función Par

Sea $f \subset D \times \mathbb{R}$, donde $D \subset \mathbb{R}$ la función f es par si:

I) $x \in D$, $-x \in D$ (D: simétrico)

II) $f(x) = f(-x)$

Ejemplo:

1) Sea $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

F. PAR.

2) Sea $f \subset [-2\pi, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

$f(x) = \cos(x)$; F. PAR

En efecto:

$f(x) = \cos(x) = \cos(-x) = f(-x)$

3) Sea $f \subset (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^2}{|x|} + \cos(x) \quad ; \quad \text{F. PAR}$$

Notamos:

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$= \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$

Además:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{|-x|} + \cos(-x) = \frac{x^2}{|x|} + \cos(x) = f(x)$$

Obs 1:

Se define.

$$\mathcal{P} = \{ f : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simétrico}}}{D} \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es una función par} \}$$

Además:

$$\mathcal{C} = \{ f : D \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es una función} \}$$

~~Veamos que $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$ y AFIRMO: $\mathcal{P}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}$. En efecto:~~

~~1) Sean $f, g \in \mathcal{P}$: $f(x) = f(-x)$, $g(x) = g(-x)$~~

Vemos que $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$ y notamos

$(\mathcal{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

$$\begin{cases} (f+g)_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)} \\ (\alpha \cdot f)_{(x)} = \alpha \cdot f_{(x)} \end{cases}$$

AFIRMO $\mathcal{P}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}$

En efecto:

① Sean $f, g \in \mathcal{P}$: $f_{(x)} = f_{(-x)}$ y

$g_{(x)} = g_{(-x)}$

Además

$$(f+g)_{(-x)} = f_{(-x)} + g_{(-x)} = f_{(x)} + g_{(x)} = (f+g)_{(x)}$$

$\therefore f+g \in \mathcal{P}$

② Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{P}$

$$(\alpha \cdot f)_{(-x)} = \alpha \cdot f_{(-x)}$$
$$= \alpha \cdot f_{(x)}$$
$$= (\alpha f)_{(x)}$$

$\therefore \alpha f \in \mathcal{P}$

Practica Dirigida #3

19/09/16

② $A+B = \{ a+b : a \in A ; b \in B \}$

a) Si A y B están acotados superiormente $\Longrightarrow$ $(A+B)$ está acotado sup. y

$$\mathrm{Sup}(A+B) = \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$$

i) $\mathrm{Sup}(A+B) \leq \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$:

ii) $\mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B) \leq \mathrm{Sup}(A+B)$

si A y B estan acotados sup. entonces existen c y d tales que:

$$+ \begin{array}{l} a \leq c \; ; \; \forall a \in A \\ b \leq d \; ; \; \forall b \in B \end{array}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{a+b}_{\in (A+B)} \leq \underbrace{c+d}_{\text{cota superior de } (A+B)} \; ; \; \forall (a+b) \in A+B$$

$\therefore$ $(A+B)$ está acotado sup.

Por demostrar que

$$\mathrm{Sup}(A+B) = \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$$

i) Como A y B están Acot. sup.

$\Longrightarrow$ Existe $\mathrm{Sup}(A)$ y $\mathrm{Sup}(B)$

$$+ \begin{array}{l} a \leq \mathrm{Sup}(A) \\ b \leq \mathrm{Sup}(B) \end{array}$$

$$\underbrace{a+b}_{\in (A+B)} \leq \underbrace{\mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)}_{\text{cota superior de } A+B}$$

$\Longrightarrow \{ \mathrm{Sup}(A+B) \leq \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B) \}$

:

$\ast$ Si $\forall \varepsilon > 0$

$x - \varepsilon < y$

$\longrightarrow x \leq y$

ii) Por Probar que

$$Sup(A) + Sup(B) \le Sup(A+B)$$

$\forall \varepsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que

$$Sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < a$$

$$Sup(B) - \frac{\varepsilon}{2} < b$$

$$Sup(A) + Sup(B) - \varepsilon < \underbrace{a+b}_{\in (A+B)} \le Sup(A+B)$$

$$\Longrightarrow Sup(A) + Sup(B) \le Sup(A+B) \quad \blacksquare$$

c) $A - B = \{a - b ; a \in A, b \in B\}$

$Inf(A-B) = Inf(A) - Sup(B)$

Si A y B estan acotados

$$\Longrightarrow c \le a \le d \Longrightarrow c \le Inf(A)$$

$$e \le b \le f \Longrightarrow e \le Inf(B)$$

$$\underbrace{c - e}_{\text{cota inf.}} \le \underbrace{a - b}_{\in (A-B)} \le d - f$$

Inf(A-B) — está acotado inferior

$$\Longrightarrow c - e \le Inf(A) + \underbrace{Inf(B)}_{¿-Sup(B)?}$$

$$c - e \le Inf(A-B) \le a - b$$

(6) Sabiendo que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Dados $x, z \in \mathbb{R}$ $(x < z)$

$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{Q}$ tal que:

$$x < \frac{m}{n} < z \quad \mathbb{R}$$

Por demostrar que $\mathbb{I}$ es denso en $\mathbb{R}$.

$$\sqrt{2} \cdot x < \frac{m}{n} \cdot \sqrt{2} < z\sqrt{2}$$

$\in \mathbb{R}$

Comentario: Para decir que $\mathbb{I}$ es denso en $\mathbb{R}$, debemos de mostrar que $\frac{m}{n} \cdot \sqrt{2}$ es $\mathbb{I}$ por contradicción: suponiendo que es $\mathbb{Q}$

(10) $A = \left\{\frac{n+1}{n} ; n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{2 ; \frac{3}{2} ; \frac{4}{3} ; \frac{5}{4} ; \ldots ; \frac{n+1}{n}\right\}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \longrightarrow \begin{cases} Sup(A) = 2 \\ Inf(A) = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z = Sup(A) \\ \forall x \in A,\ x \le z \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A \\ \text{tal que: } 2 - \varepsilon < x_0 = 2 \end{cases}$$

$¿\frac{n+1}{n} \le 2?$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Demostrar $Inf(A) = 1$

Como $n \in \mathbb{N} \rightarrow \frac{1}{n} > 0$

$$\underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\in A} = 1 + \frac{1}{n} > 1 \Rightarrow \underbrace{1}_{\text{cota inferior de } A} < \frac{n+1}{n} \in A$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 = \frac{3}{2} \in A$$

$$1 - \varepsilon < \frac{3}{2}$$

* Comentario: $¿\frac{n+1}{n} \le 2?$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Se demuestra por inducción