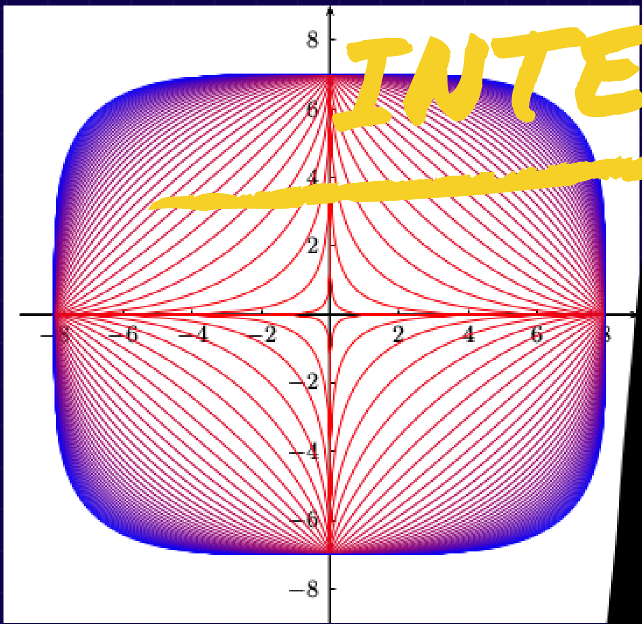
FACULTAD DE CIENCIAS

APUNTES DE CLASES DE CÁLCULO INTEGRAL



La única enseñanza que un profesor puede dar, en mi opinión, es la de pensar delante de sus estudiantes.
Henri Lebesgue

Temas:
Antiderivadas
La integral
Técnicas de integración
Las funciones logartimo y exponencial
Áreas y volúmenes
Coordenadas polares
Integrales impropias
Fórmula de Taylor

MSc. Johnny Valverde

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Apuntes de clases de Cálculo integral CM 132

Profesor: MSc. Johnny Valverde Montoro
Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Oficina R1-344
Delegada: Undg. Erika Cabrejos
mexxpre_15@hotmail.com
Número de celular: 986784892

1 de octubre del 2017

Dedicado a mis estudiantes de la Facultad de Ciencias.

Prefacio

"Por tanto, estudiantes estudien matemáticas y no construyan sin fundamentos."

— Leonardo Da Vinci *(1452-1519).*

Cálculo es un curso con un propósito. Describe el crecimiento y el descenso, y el cambio. La población tiene una tasa de crecimiento, el cual cambia. El valor de una divisa tiene un descenso, el cual puede aumentar. Todo lo que ocurre en la vida cambia, la única cosa segura es el cambio. Para entender y modelar esos cambios, que es donde el cálculo es necesitado y usado.

Las ideas centrales son firmemente establecidas. La responsabilidad del autor es explicarlos claramente, con ejemplos que vayan directamente al punto y *lo ilumine*. Con mucho, la mayor parte del esfuerzo detrás del libro se dedicó a expresiones claras y vivas. Debe ser sobre esta base primero, que un nuevo texto es juzgado. Las palabras deben atraer al lector y ayudar a que las ideas se fijen.

Este prefacio menciona algunos cambios en el énfasis. No es de extrañar que los cambios vengan (con cuidado). Pero comprenderán que ***este es un texto básico para el cálculo***. Es para todas las instituciones, y se escribe directamente al estudiante. Este es un libro de texto y no un banco de preguntas. También espero que los lectores verán el espíritu detrás de este libro. La mejor parte de las matemáticas es haciendo, y saltamos allí directamente. Con la enseñanza y la escritura, el inicio da el tono y queremos que la clase sea activa. Para todos los estudiantes, debe haber algo nuevo. En lugar de terminar cada sección con un resumen (lector pasivo), pedimos al estudiante que contribuya a las palabras clave. Eso refuerza la confianza que es esencial para el aprendizaje.

Este libro enfatiza, más en el pasado, la parte visual del aprendizaje de las matemáticas. Las fórmulas son conectados con los gráficos. Lo mejor que una computadora puede hacer es mostrar la función. Los gráficos son las "llaves" que nos permiten abrir las puertas del entendimiento de las matemáticas fuera del aula.

También enfatizamos, antes de lo usual, el significado de las ecuaciones diferenciales. Son modelos de la vida. Estamos interesados en el estudio de las ecuaciones diferenciales con retardo, estas expresan la derivada de una función que depende del tiempo en términos de los valores de las funciones en tiempos previos. Creo que es esencial conocer algunas ecuaciones reales en un curso de cálculo. No podemos depender de un curso posterior para dejar claro de qué se trata. Para más información, ver [**montoro2012splines**]. Espero que el texto se concentre en los puntos importantes. Es inútil incluir mucho más de lo que cualquiera puede leer. Estamos pidiendo a los estudiantes un verdadero esfuerzo, que no debemos derrochar. Es fácil perder el propósito del cálculo bajo un millón de ecuaciones. Es más difícil, pero correcto, permanecer con las ideas que más importan.

Sobre este principio de que menos es más, resumiré:

1. Practicar con funciones y gráficas es muy importante.

2. Los modelos de cálculo son ecuaciones diferenciales.

3. Los ejemplos no necesitan ser artificialmente complicados. Las matemáticas son bastante difíciles.

4. No se requiere cubrir cada tema.

5. No tiene sentido prepararse para problemas reales y nunca verlos.

El propósito de escribir estos apuntes de clases correspondientes al año académico 2017 es proporcionar un tratamiento claro y accesible del cálculo integral y sentar las bases matemáticas para los cursos de Cálculo diferencial e integral Avanzado, Análisis Real y los cursos de Introducción a las

Ecuaciones diferenciales Ordinarias e Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales, propios de la carrera de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería. Una buena formación en Cálculo diferencial es el único prerrequisito. Mediante el análisis combinado de teoría y práctica, hemos tratado de mostrar que la matemática tiene aplicaciones importantes además de ser un camino hermoso y emocionante por derecho propio.

MSc. Jhonny Valverde

Para el estudiante

NUESTRO CURSO ES LLAMADO “CÁLCULO INTEGRAL”

El cálculo integral es el curso que subyace y extiende la teoría del cálculo. Es un tema profundo y extenso que ha estado en desarrollo durante siglos. Se ha desarrollado a sí mismo en una serie de campos de estudio distintos, dos de los cuales se puede llamar *cálculo integral en la recta real* y *cálculo integral en el plano complejo*, de acuerdo con el sistema numérico se toma como el sistema de números reales $\mathbb{R}$ o el sistema de números complejos $\mathbb{C}$. En estas notas de clase nos centramos en el cálculo integral en la recta real, aunque la mayor parte de lo que discutimos encuentra uso en todas las áreas del cálculo.

Como el cálculo integral tiene su origen en el cálculo diferencial, te parecerá algo familiar. Sin embargo, usted estará explorando el tema a un nivel mucho más profundo que el de sus cursos de cálculo introductorio. Este curso le exigirá un pensamiento cuidadoso y crítico. De hecho, está diseñado para ayudarle a obtener lo que los matemáticos llaman “madurez matemática.”

LOS FUNDAMENTOS SÍ IMPORTAN

Ya está familiarizado con algunos de los poderosos resultados del análisis, usted los ha visto y los ha utilizado en su curso de Cálculo diferencial. Sin embargo, lo más probable es que no haya probado todos esos resultados a partir de un pequeño conjunto de supuestos. Por lo tanto, su comprensión del por qué son ciertos puede ser un poco nublado en el misterio. ¿Cómo puede estar seguro de que toda esta teoría es realmente “verdadera”? ¿En qué sentido pueden probarse estos resultados?

No podemos responder a estar preguntas mirando “adelante”. Debemos mirar hacia atrás y trazar el tema de nuevo a sus orígenes lógicos (pero no necesariamente histórica). Después de haber establecido una base segura para el curso, y haber construido un marco básico por la deducción lógica rigurosa, tendremos una nueva comprensión del análisis que una alguna vez pensamos que sabíamos. También avanzaremos hacia nuevos y más profundos resultados.

Por lo tanto, el curso trae un cambio de énfasis: desde el desarrollo de las técnicas matemáticas y aplicaciones, hasta la crítica del propio curso. Tomaremos un enfoque crítico, incluso escéptico. ¡La mera aceptación pasiva no se hará! De hecho, seremos tan críticos que no consideraremos ninguna proposición de análisis sea totalmente confiable hasta que tengamos una justificación firme de ella (lo que llamaremos “prueba”). Para esta justificación, nos vemos obligados a mirar hacia atrás a los fundamentos del cálculo. En este sentido, se le pide que no olvide lo que aprendió acerca de cálculo diferencial y construyamos juntos los nuevos fundamentos.

POR QUÉ LAS PRUEBAS SON IMPORTANTES

“Prueba” o “demostración” puede ser una palabra intimidante para muchos estudiantes de matemáticas que prefieren que se les diga lo que es verdad. La razón por la cual la prueba es tan importante en matemáticas se encuentra en la misma naturaleza de la “verdad matemática”, tal como se entiende en la tradición intelectual occidental. En esta tradición, el cuerpo de las matemáticas no es solo una colección de “hechos” desconectados que son aceptados porque parecen verdaderos. Más bien, estos hechos deben estar conectados entre sí y organizados de acuerdo con el “método deductivo”. Los matemáticos se esfuerzan mucho para aislar algunos de los hechos que pueden considerar básicos (viniendo desde el principio) y luego ir a mayores longitudes para demostrar que todos los hechos restantes pueden derivarse de los básicos por el proceso de la lógica deducción. Los “hechos” iniciales son entonces realmente suposiciones (axiomas). Los hechos restantes, como se deducen uno por uno de estas suposiciones, son llamados "teoremas". El proceso de deducir (o derivar) un teorema se llama "prueba".

Entonces, ¿qué hace válida una demostración? La respuesta no es tan obvia como puede parecer al principio. Un teorema se deriva en última instancia de los axiomas establecidos al principio de un tema matemático. Así, la verdad de un teorema es realmente contingente sobre la verdad de los axiomas. Si los axiomas son todos verdaderos, entonces cualquier teorema que sea derivado de ellos por la deducción lógica válida también debe ser verdad. Pero la prueba de un teorema no puede asegurar que los axiomas sobre los cuales descansa la prueba son verdaderos. Por lo tanto, una "prueba"no garantiza que un teorema sea verdadero. Una prueba solo garantiza que **si** los axiomas son todos verdaderos, entonces el teorema es verdadero. En otras palabras, *la demostración de un teorema prueba que los axiomas son suficientemente fuertes para garantizar la validez del teorema*. Por lo tanto, un teorema es realmente una declaración sobre los axiomas. Por esta razón los axiomas sirven como el fundamento de un curso matemático.

NUESTRO PLAN DE ATAQUE

De acuerdo al sílabo del curso en:
https://github.com/carlosal1015/Calculus-One-and-Several-Variables
En el capítulo o exponemos algunos resultados sobre límites, continuidad y diferenciabilidad sobre funciones reales de variable real que usted debió de comprender en su curso de Cálculo diferencial. En capítulo 4 se llega a un punto de culminación natural con el "Teorema fundamental del cálculo", se desea introducir a dos temas muy activos propios de la matemática aplicada como lo son los splines cuadráticos y el método de los elementos finitos para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Se mostrará la solución de ejemplos de facto de ecuaciones parabólicas, elípticas e hiperbólicas como lo son la ecuación de la onda, la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación biarmónica respectivamente.

PALABRAS DE CONSEJO DEL AUTOR: SIETE REGLAS PARA EL ÉXITO EN ESTE CURSO

Cálculo integral no es un curso sencillo. De hecho, es uno de los cursos más desafiantes en el plan de estudios de pregrado. Mientras que el cálculo diferencial es una de las áreas matemáticas más aplicables, el cálculo integral es altamente teórico en espíritu y hace demandas intransigentes de rigor. Los apuntes de clases de clases está orientado a los estudiantes. Fue diseñado para ser legible, y por lo tanto para ser leído. Representa mi mejor intento de hacer el curso tan comprensible como sea posible sin comprometer el rigor. Ofrezco estas palabras de consejo a aquellos que realmente quieren tener éxito.

1. Lea los apuntes de clases, palabra por palabra, página por página, excepto cuando su instructor puede trazar un mapa y un camino alternativo para usted. No salte sobre la lectura y se dirija directo a los ejercicios, ¡cómo usted pudo haber hecho en su curso de cálculo diferencial! Si lo hace, se perderá mucho del curso.

2. Parte del material está marcada con un asterisco, "*." Deje que su instructor decida cuánto de eso se cubrirá.

3. Estudie las pruebas. Sepárelo aparte y examínelos críticamente hasta que esté seguro de que usted los entiende por completo. Pida ayuda donde usted no entienda. Nadie puede pretender estudiar cálculo integral si no entiende sus teoremas y pruebas. Sirven como modelos del tipo de pensamiento necesario para desarrollar nuevos resultados en el análisis. Su instructor puede requerir que usted aprenda algunas de las pruebas lo suficientemente bien para explicarlas a sus compañeros de clase o para hacerlas en los exámenes.

4. Asegúrese de entender las definiciones. ¡Apréndalos! (Incluso memorice). Este es un tema mucho más grave de lo que la mayoría de los estudiantes se dan cuenta. Las definiciones son el punto de partida cuando se prueban resultados sobre un nuevo concepto.

5. ¡Aprender matemáticas no es un deporte de espectadores! Tú aprendes matemáticas haciendo matemáticas. Usted no puede esperar aprender cálculo integral leyendo estas notas de clase como usted leería un periódico o una novela. Este documento no reemplaza o sustituye de ninguna manera las clases y discusiones dentro del aula. Debe "leer" este libro con lápiz y papel. Escriba los pasos clave usted mismo a medida que progresa través del texto, elaborando los detalles a medida que avanza. (Esto se llama "lectura activa"). Mantendrá su atención enfocada y facilitará su aprendizaje.

6. Trate su lista de ejercicios de la práctica dirigida como la continuación del aprendizaje iniciado en clase o en el texto. Se clasifican cuidadosamente para que aprendas a medida que progresas a través de un conjunto de ejercicios. Hay un montón de ejercicios, generalmente usted puede continuar muy bien haciendo solamente alguno de ellos y omitiendo algunos de los últimos. Si no puedes ir a ninguna parte en un ejercicio después de mucho esfuerzo, averigua de alguien cómo hacerlo y luego hazlo varias veces hasta que puedas hacerlo solo, sin ayuda.

7. En matemáticas, como en otras ramas del conocimiento humano, la verdad se comunica en oraciones. Incluso en matemáticas, la oración debe tener un sujeto y un predicado y obedecer todas las leyes de la gramática. Por ejemplo, el *sujeto* de la oración $x^2 + 3x - 7 = 11$ es x y el *predicado* es "$=$." Por favor recuerde, cuando escriba sus propias pruebas o soluciones de ejercicios, exprese sus ideas claramente y en oraciones completas. La escritura descuidada es a menudo un signo de pensamiento descuidado. Una idea mal expresada es a menudo mal entendida.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Índice general

Consejos

1. **Nota mínima en cada práctica calificada: 13**.
2. En cada examen y práctica calificada el alumno debe identificarse con su Documento Nacional de Identidad (DNI), apagar su celular y guardar en su mochila respectiva.
3. Estudiar todos los cursos.
4. Para los químicos hay trabajo, para los matemáticos hay mucho más oportunidades para desarrollarse.
5. No colocar $+C$, C: constante puede costar un punto de alguna pregunta de la práctica calificada.
6. Para aprender a demostrar hay que leer [**hasser2009analisis**] y [**Denlinger**].
7. 48 horas.
8. Es importante para el profesor que el alumno logre contextualizar e interpretar los ejercicios.
9. Mis metas:

   * Resolver las prácticas dirigidas: Despejar mis dudas.

   ** Asistir a talleres de Cálculo integral, en caso de haberlo.

   - Gestión del tiempo.
   - Siempre es bueno la coordinación.
     Reclamo: $\neg$ 3 puntos más.

Capítulo 1

Preliminares matemáticos y análisis de errores

1.1. Repaso de precálculo

1.1.1. Conjuntos

Se denominará **conjunto** a una colección bien definida de objetos. Los conjuntos tienen elementos.
A continuación se presentan algunos axiomas de los conjuntos, el lector interesado puede estudiar la gran obra de [**Halmos**].

I) **Axioma de extensión**

Dos conjuntos son iguales sii tienen los mismos elementos.

II) **Axioma de especificación**

A todo conjunto A y a toda condición $S(x)$, corresponde un conjunto B cuyos elementos son precisamente aquellos elementos de A que cumplen $S(x)$.

Observación 1.1: Existencia del conjunto vacío $\emptyset$

Nótese que el axioma II) nos ayuda a construir subconjuntos de un conjunto dado.

1. Aceptamos que existe un conjunto A con elementos.
2. Sea $B = \{x \in A \mid x \neq x\}$.

Como no hay elemento en A que no sea igual a si mismo, concluimos que B es un conjunto sin elementos que llamaremos el **conjunto vacío** y lo denotaremos por $\emptyset$. En el proceso de la construcción de los números naturales, y en consecuencia, los números reales, el conjunto vacío se considera como un número, el **cero** ($\mathbf{0}$). Como el cero existe, construimos el conjunto $\{\mathbf{0}\}$ y lo denotamos por $\mathbf{1}$. Para más información ver [**Labarca**].

III) **Axioma de la unión**

Para toda colección de conjuntos existe un conjunto que contiene a todos los elementos que pertenecen cuando menos a uno de los conjuntos de la colección dada.

Observación 1.2

Dado un conjunto A definimos el sucesor de A, denotado A^+, por $A^+ = A \cup \{A\}$. Es decir, A^+ se obtiene de añadir al conjunto A (como elemento) junto con todos elementos anteriores de A.

Definición 1.1

Un conjunto S se dirá de **sucesores** o un conjunto **sucesor** si $0 \in S$ y toda vez que $A \in S$, entonces $A^+ \in S$.

IV) **Axioma del infinito**

Existe un conjunto de sucesores.

Observación 1.3

Si A y B son conjuntos de sucesores, entonces $A \cap B$ es un conjunto de sucesores

Prueba: Como $0 \in A$ y $0 \in B$, entonces $0 \in A \cap B$.
Si ocurre que $n \in A \cap B$, entonces $n \in A$ y $n \in B$, pero como A y B son conjuntos sucesores, entonces $n^+ \in A$ y $n^+ \in B$,
$\therefore n^+ \in A \cup B$. ■

Definición 1.2: Conjunto de números naturales

La intersección $\bigcap_{A \in \mathcal{D}} A$ se le llamará el **conjunto de los números naturales** y lo denotaremos momentáneamente por ω.

V) **Axioma del apareamiento**

Dados dos conjuntos cualesquiera, existe un conjunto que contiene a ambos como elementos.

VI) **Axioma de la potencia**

Para cada conjunto existe una colección de conjuntos que contiene, como elementos, a todos los subconjuntos del conjunto dado.

Definición 1.3: Pareja ordenada

La **pareja ordenada** con primer elemento A y segundo elemento B denotada (A, B), es el conjunto (según la notación Kazimierz Kuratowski) $\{\{A\}, \{A, B\}\}$ o (según la notación de Norbert Wiener) $\{\{\{A\}, \emptyset\}, \{\{B\}\}\}$.

Definición 1.4: Producto cartesiano

El **producto cartesiano** de los conjuntos A y B, denotado $A \times B$, es el conjunto

$$A \times B = \{x \in P(P(A \cup B)); x = (a, b) \text{ con } a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Definición 1.5: Dominio y recorrido de una relación

Se definen los siguientes conjuntos, el dominio de una relación $\mathcal{R}$

$$\text{dom } \mathcal{R} = \{a \in A, \exists b \in B \mid (a, b) \in \mathcal{R}\},$$

y el recorrido de la relación $\mathcal{R}$

$$\text{rec}\,\mathcal{R} = \{b \in B, \exists\, a \in A \mid (a,b) \in \mathcal{R}\}.$$

Observación 1.4

Dado un conjunto R de parejas ordenadas, existen conjuntos A y B tales que $R \subset A \times B$.

Una relación es un conjunto de pares ordenados, o en otras palabras, es cualquier subconjunto $\mathcal{R} \subset A \times B$, donde A y B son conjuntos.

Definición 1.6: Función

Una **función** f de A en B es una relación $f \subset A \times B$ que satisface:

1. $\text{dom}(f) = A$ y
2. Para cada $a \in A$, existe un único $b \in B$ tal que $(a,b) \in f$.

1.2. Repaso de cálculo diferencial

1.2.1. Límites y continuidad

Los conceptos de límites y continuidad de una función son fundamentales para estudiar las integrales, en consecuencia, el Cálculo integral y forman la bases para estudiar el análisis de nuestro enfoque del curso.

Definición 2.1: ε-vecindad

Sea x un número real y $\varepsilon > 0$. El intervalo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ será llamado **ε-vecindad** de x y denotado por $N_\varepsilon(x)$. Geométricamente hablando, $N_\varepsilon(x)$ es el conjunto de todos los puntos que están dentro de la distancia de ε hacia x.

Observación 2.1: El uso de la palabra vecindad en el habla de los matemáticos

A menudo decimos simplemente "vecindad de x", pero queremos decir "ε-vecindad de x, para algún $\varepsilon > 0$." Veremos que el lenguaje de las vecindades es muy útil para expresar los conceptos del Cálculo integral.

Definición 2.2: Límite de una función real de variable real

Una función definida en un conjunto X de números reales tiene límite L en x_0, escrito como

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número real $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ cuando } x \in X \text{ y } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Definición 2.3: Continuidad de una función real de variable real

Sea f una función definida en un conjunto X de números reales y $x_0 \in X$. Entonces f es **continua** en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

La función f es **continua en el conjunto** X si este es continua en cada número en X.

Definición 2.4: Convergencia de una sucesión de números reales

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. La sucesión tiene límite L (converge a L) si, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo $N(\varepsilon)$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon$ cuando $n > N(\varepsilon)$. La notación

$$\lim_{n \to \infty} x_n = L, \text{ o } x_n \longrightarrow x \text{ cuando } n \longrightarrow \infty,$$

significa que la sucesión converge a L.

Observación 2.2: Parafraseo del significado de la convergencia de una sucesión

$\lim_{n \to \infty} x_n = L$ significa:

- x_n puede hacerse arbitrariamente cerca de L haciendo n suficientemente grande.
- $|x_n - L|$ puede hacerse arbitrariamente pequeño haciendo n suficientemente grande.
- Para cada ε positivo hay n_0 tal que $|x_n - L| < \varepsilon$ siempre que $n \geq n_0$.

Teorema 2.1: Criterio de sucesiones para límites de funciones

Si f es una función definida en un conjunto de números reales, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a. El $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

b. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión en $X \backslash \{x_0\}$ que converge a x_0, entonces $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Teorema 2.2: Criterio de sucesiones para la continuidad de f en x_0

Si f es una función definida en un conjunto de números reales y $x_0 \in X$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a. f es continua en x_0.

b. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión en X que converge a x_0, entonces $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Definición 2.5: Conjunto compacto

Un conjunto de números reales X se dice que es un **conjunto compacto** si este es cerrado y acotado.

Definición 2.6: Intervalo

Llamaremos a I un **intervalo** al conjunto de números reales que cumple la siguiente propiedad:

$$\forall x < y \text{ en } I, [x, y] \subseteq I.$$

Teorema 2.3: Heine-Borel

Cualquier intervalo cerrado y acotado de números reales es compacto.

Teorema 2.4: Existencia de un mínimo y un máximo en un conjunto compacto

Cualquier conjunto compacto no vacío tiene un máximo y un mínimo.

Teorema 2.5: Criterio de sucesiones para la compacidad

Un conjunto X de números reales es compacto si y solo si cualquier sucesión de puntos en X tiene una subsucesión que converge a un punto en X.

Teorema 2.6: La imagen continua de un conjunto compacto es un compacto

Esto es, si X es un conjunto compacto y f es de clase $C(X)$, entonces $f(A)$ es compacto.

Teorema 2.7: Teorema del valor extremo

Si X es un conjunto compacto no vacío y f es de clase $C(X)$, entonces f tiene la **propiedad de valor extremo en** X:

(a) $\exists u = \text{mín}\, f(A) = \text{mín}\{f(x) \colon x \in X\}$, y

(b) $\exists v = \text{máx}\, f(A) = \text{máx}\{f(x) \colon x \in X\}$.

Esto es, una función continua asume un valor máximo y un valor mínimo en cualquier conjunto compacto no vacío.

Teorema 2.8

Si f es de clase $C(I)$, entonces $f(I)$ es un intervalo.

Teorema 2.9: Teorema del valor intermedio

Sea I el intervalo cerrado de extremos a y b $(a < b)$. Cualquier función de clase $C(I)$ debe satisfacer la propiedad **propiedad del valor intermedio** en I:

$$\forall y \text{ entre } f(a) \text{ y } f(b), \exists c \in I \text{ tal que } f(c) = y.$$

Teorema 2.10: Principio de ubicación de las raíces

Si f es de clase $C[a,b]$, y si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe algún c en entre a y b de manera que $f(c)=0$.

Teorema 2.11: Teorema de la función inversa para funciones monótonas continuas

Suponga que I es un intervalo no vacío, y es de clase $C(I)$ y estrictamente monótona. Entonces $f^{-1}\colon f(I)\to I$ es continua y estrictamente monótona en el mismo sentido. ($f(I)$ es un intervalo, por el Teorema **??**.)

Teorema 2.12

Si f es de clase $C(I)$ e inyectiva, entonces f es estrictamente monótona en I.

Teorema 2.13

Si f es de clase $C[a,b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a,b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x)\leq N$ para todo x en $[a,b]$.

Teorema 2.14

Si f es de clase $C[a,b]$, entonces existe algún número y en $[a,b]$ tal que $f(y)\geq f(x)$ para todo x en $[a,b]$.

1.2.2. Diferenciabilidad

Este curso con énfasis en la matemática aplicada, estudia funciones sofisticadas que generalmente conducen a una mejor aproximación, más adelante estudiaremos la *Fórmula de Taylor* que aproxima muy bien *localmente* a una función diferenciable. Por ejemplo, una función con un gráfico liso normalmente se comportará de manera más predecible que uno con numerosas características dentadas. La condición de suavidad se basa en el concepto de la derivada.

Definición 2.7: Interior de un conjunto

Sea X un conjunto de números reales. Se dice que un número x es un **punto interior** de X si $\exists\ \varepsilon>0$ tal que $N_\varepsilon\subseteq X$. Esto es, un punto interior de X puede ser rodeado de vecindades contenidas enteramente en X.

El interior de X es el conjunto

$$A^{\mathrm{o}}=\{x\colon x \text{ es un punto interior de } X\}.$$

Definición 2.8: Derivada de una función real de variable real

Sea f una función definida sobre un intervalo abierto que contenga a x_0. La función es **diferenciable** en x_0 si

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existe. El número $f'(x_0)$ es llamado la **derivada** de f en x_0. Una función que tiene una derivada en cada número en el conjunto X es diferenciable en X.

La derivada de f en x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en $(x_0, f(x_0))$, como se muestra en la figura.

Teorema 2.15: Criterio de sucesiones para la diferenciabilidad

Si f es una función definida en un conjunto de números reales y x_0 es un punto interior allí, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a. f es diferenciable en x_0.

b. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión en $X \backslash \{x_0\}$ que converge a x_0, entonces el $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0)$.

Teorema 2.16: Diferenciabilidad implica continuidad

Si la función f es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.

Observación 2.3: La continuidad no garantiza nada la diferenciabilidad

Existen funciones que son continuas en x_0, pero no son diferenciables en x_0.

Pocas hazañas matemáticas han sido tan sorprendentes como la exposición de una función que es continua en cada valor y diferenciable en ninguno. Hasta bien entrado el siglo XIX, existía la creencia básica de que todas las funciones tenían derivadas, excepto posiblemente en algunos puntos aislados como en la función valor absoluto, $|x|$, en $x = 0$. En 1806, el matemático francés André-Marie Ampère trató de demostrar la existencia general de las derivadas. Su demostración es difícil de entender porque no está claro qué supuestos implícitos él estaba haciendo acerca de lo que constituye una función. En 1839, con la publicación del libro de Cálculo de J.L. Raabe "*Die Differential- und Integralrechnung*" el "teorema" de que cualquier función continua es diferenciable, con la posibilidad excepto en un número finito de puntos, iniciando de esta manera su camino en los libros de texto estándar.

Bolzano, Weierstraß y Riemann sabían que esto estaba mal. Hacia 1861 Riemann introdujo en sus conferencias ("lectures") la función

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k^2 x)}{k^2}$$

afirmando que es continua en cada x, pero no es diferenciable para infinitos valores de x. La convergencia de esta serie es uniforme (Por el M- test de Weierstrass, basta tomar $M_n = \dfrac{1}{n^2}$.) y por lo tanto es continua en todo x. En cambio la no diferenciabilidad es dificil de probar, no fue hasta 1916 que Godfrey Harold Hardy demostró que en cualquier intervalo finito, no importa cuán pequeño sea, habrá infinitos valores de x en el cual la derivada no existe. Se demostró en 1970 que también existe infinitos valores donde la derivada existe. Riemann, por ejemplo, aunque notable, no va tan lejos con la no diferenciabilidad para todos los x. La fe en la existencia de derivadas es ilustrado por la reacción en el artículo de Hermann Hankel llamado "*Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen*" en el que, entre otras cosas, describió un método general para crear funciones continuas con infinitos puntos de no diferenciabilidad. J. Hoüel aplaudió este resultado y expresó la esperanza de que cambiaría la actitud actual en la que "no hay matemático hoy en día que creería en la existencia de funciones continuas sin derivadas". Phillipe Gilbert se abalanzó sobre errores y omisiones del trabajo de Hankel y los mostraba para no dejar ninguna duda sobre la inanidad de las conclusiones.

Pero la marea había vuelto, Hankel respondió la observación del ejemplo de Riemann de una función integrable con un cantidad infinita de discontinuidades implicaba que la integral,

$$f(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nt)}{n^2} \,\mathrm{d}t \right),$$

es necesariamente continua en cada x, pero no puede ser diferenciable en cualquier de los infinitos puntos donde el integrando no es continuo. La gran sorpresa vino en 1872 cuando Karl Weierstraß mostró a la Academia de Ciencias de Berlín la serie trigonométrica:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x), \tag{1.1}$$

donde a es un número impar, $b \in [0, 1)$, y $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, es continua en $(-\infty, \infty)$ pero ¡no es diferenciable en ningún x real!

No solo eso, existe una función que es continua en todas partes y diferenciable en ninguna parte, esta función recibe el nombre de **Función de Weierstraß** en honor al matemático alemán Karl Weierstraß, que tuvo gran trascendencia en la dinámica del naciente análisis matemático en 1800. Su gráfica es la siguiente. Solo se informará la no diferenciabilidad, el estudiante responsable puede revisar la prueba completa en [**Bressoud**].

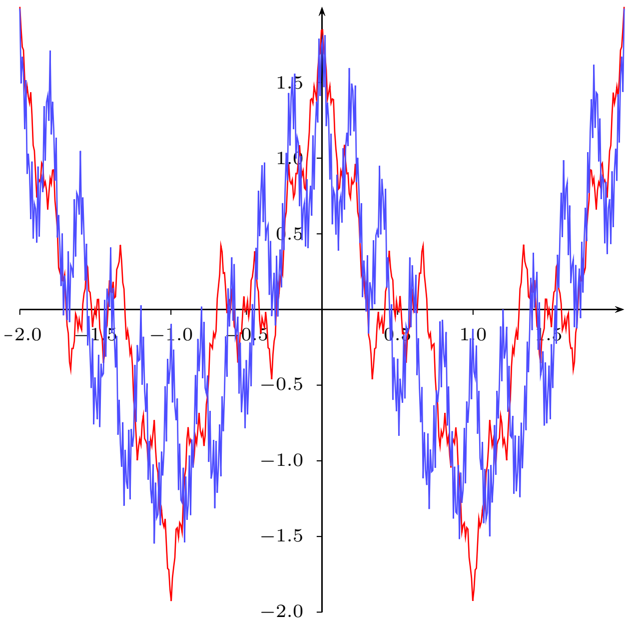


Figura 1.1: La función original de Weierstraß $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x)$

En muchas áreas del análisis avanzado, se obtiene un poder significativo al desplazar nuestra atención de secuencias, series y conjuntos de números de sucesiones, series y "espacio" de funciones. Comenzamos este cambio de atención aquí, considerando las familias de funciones, la convergencia de sucesiones de funciones y finalmente se definirá un tipo de convergencia más satisfactorio.

Definición 2.9: Sucesión de funciones

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto arbitrario. Cualquier función $f\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ se denomina función de valor real en $\mathcal{S}$. Consideraremos el conjunto de todas estas funciones,

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}) = \{ \text{ todas las funciones } f\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R} \}$$

En este conjunto $\mathcal{F}(\mathcal{S},\mathbb{R})$, definimos las operaciones algebraicas. Para cada par de funciones $f,g\in\mathcal{F}(\mathcal{S},\mathbb{R})$, y $\forall r\in\mathbb{R}$, definimos:

(a) **Adición** de f y g especificando que

$$\forall x\in\mathcal{S},(f+g)(x)=f(x)+g(x).$$

(b) **Multiplicación de f por un "escalar"** r especificando que

$$\forall x\in\mathcal{S},(rf)(x)=r\cdot f(x)$$

(c) **Multiplicación de** f y g especificando que

$$\forall x\in\mathcal{S},(fg)(x)=f(x)\cdot g(x).$$

(d) **División de** f por g especificando que

$$\forall x\in\mathcal{S},\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

(Observe que $\frac{f}{g}\in\mathcal{F}(\mathcal{S},\mathbb{R})$ solo si $\forall x\in\mathcal{S},g(x)\neq 0$.)

(e) **El valor absoluto de** f: $\forall x\in\mathcal{S},|f|(x)=|f(x)|$.

(f) **El máximo de** f y g:
$$\forall x\in\mathcal{S},\text{máx}\{f,g\}(x)=\text{máx}\{f(x),g(x)\}.$$

(g) **El mínimo de** f y g:
$$\forall x\in\mathcal{S},\text{mín}\{f,g\}(x)=\text{mín}\{f(x),g(x)\}.$$

Teorema 2.17: Álgebra de funciones

Si $\mathcal{S}$ es un conjunto arbitrario no vacío, entonces $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$, junto con las operaciones (a) y (b) especificadas en la definición superior, satisface las siguientes diez propiedades:

(1) $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), f + g \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$;

(2) $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), f + (g + h) = (f + g) + h$;

(3) $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), f + g = g + f$;

(4) $\exists 0 \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ tal que $\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), f + 0 = 0 + f = f$;

(5) $\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), \exists - f \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ tal que $f + (-f) = 0$;

(6) $\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), r \in \mathbb{R}, rf \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$;

(7) $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), \forall r \in \mathbb{R}, r(f + g) = rf + rg$;

(8) $\forall \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), \forall r, s \in \mathbb{R}, (r + s)(f) = rf + sf$;

(9) $\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), \forall r, s \in \mathbb{R}, r(sf) = (rs)f = s(rf)$;

(10) $\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), 1f = f$;

Tomando en cuenta la operación (c) de la definición anterior, $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ también satisface las siguientes cinco propiedades:

(11) $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), fg \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$;

(12) $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), f(gh) = (fg)h$;

(13) $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), fg = gf$;

(14) $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R}), f(g+h) = fg + fh$;

(15) $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$, y $\forall r \in \mathbb{R}, r(fg) = (rf)g = f(rg)$;

Definición 2.10: Espacio de funciones

Porque $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$, junto con las operaciones de adición y multiplicación por escalar, satisface las diez propiedades este es llamado un **espacio vectorial** de funciones, o simplemente un **espacio de funciones**. Cualquier subconjunto $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ que también satisface las diez propiedades relativas a esas dos operaciones es llamado un **subespacio** de $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$.

Definición 2.11: Álgebra de funciones

Porque $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$, junto con las operaciones de adición, multiplicación por escalar y multiplicación satisface las quince propiedades este es llamado un **álgebra** de funciones. Cualquier subconjunto $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ que también satisface las quince propiedades relativas a esas tres operaciones es llamado un **subálgebra** de $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$.

La siguiente colección de teoremas son de vital importancia en la deducción de los métodos de estimación de error.

Teorema 2.18: Teorema de Rolle

Supongamos que f es de clase $C[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un número x en (a, b) tal que $f'(x) = 0$.

Teorema 2.19: Teorema del valor medio

Si $f \in C[a, b]$ y f es diferenciable en (a, b), entonces existe un número de modo que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema 2.20: Teorema del valor extremo

Si $f \in C[a, b]$, entonces existen $c_1, c_2 \in [a, b]$ con $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$, para todo $x \in [a, b]$. Además, si f es diferenciable en (a, b), entonces los números c_1 y c_2

1.3. Sage, un software numérico muy poderoso

Capítulo 2

Antiderivadas

2.1. Antiderivadas

El matemático estadounidense, William Waterhouse, quien en 1966 corrigió la obra magna de Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae* escribió, “El cálculo en 1800 estaba en un estado curioso. No había duda de que era correcto. Los matemáticos de suficiente habilidad y perspicacia habían tenido éxito durante un siglo. Sin embargo, nadie podía explicar claramente por qué funcionaba... Entonces vino Cauchy.” En sus *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (Resúmenes de las lecciones de cálculo infinitesimal) de 1823, el prolifico matemático francés Augustin Cauchy proporcionó un desarrollo riguroso del cálculo y una prueba moderna del Teorema Fundamental del Cálculo, que une elegantemente las dos ramas principales del cálculo (diferencial e integral) en un solo marco.
Cauchy comienza su trabajo con una clara definición de derivada. Su mentor, el matemático francés Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), pensó en términos de gráfica de curvas y consideró la derivada como la tangente a una curva. A fin de determinar la derivada, Lagrange buscó deducir fórmulas como fuera necesario. Stephen Howkings dijo, “Cauchy fue mucho más allá que Lagrange y definió la derivada de f en x como el límite del cociente de las diferencias $\Delta y/\Delta x = [f(x+i) - f(x)]/i$” cuando se aproxima a cero, que es nuestra moderna y no geométrica definición de derivada. Similarmente, al aclarar la noción de la integral en cálculo, Cauchy demostró el *Teorema Fundamental del Cálculo*, que establece una manera en la cual podemos calcular la integral de $f(x)$ de $x = a$ a $x = b$ para cualquier función continua. Más particularmente, el Teorema Fundamental del Cálculo establece que si f es integrable en el intervalo $[a, b]$, y si $H(x)$ es la integral de $f(x)$ desde a hacia $x \leq b$, entonces la derivada de H' es idéntica a $f(x)$. En otras palabras, $H'(x) = f(x)$. Waterhouse concluye, “Cauchy realmente no estableció nuevos fundamentos, barrió todo el polvo para revelar el edificio del cálculo que ya estaba sobre el lecho rocoso....” Este capítulo es sobre la ***idea*** de integración, y también sobre la ***técnica*** de integración. Explicaremos las características intrínsecas de este principio de sumas integración a través de teoremas y el ejercicio de estas en ejemplosse hace en la práctica. Integración es el problema.

Definición 1.1: Antiderivada

Se dice que una función $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *antiderivada* (también se le conoce como “primitiva”) de la función f en un intervalo $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ si $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathcal{I}$.

Ejemplo 1.1: Función polinómica

Sean las funciones $f, F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = 3x^2 + 1, \quad F(x) = x^3 + x$$

se tiene que $F'(x) = 3x^2 + 1 = f(x), \forall x \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$

luego F es antiderivada de f.

$\mathcal{I}$ es un intervalo.

Ejemplo 1.1: Función $\cos x$

Se tienen las funciones $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$f(x) = \cos x, F(x) = \operatorname{sen} x$
donde $F'(x) = \cos x = f(x), \forall x \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$.
$\longrightarrow$ F es antiderivada de f.

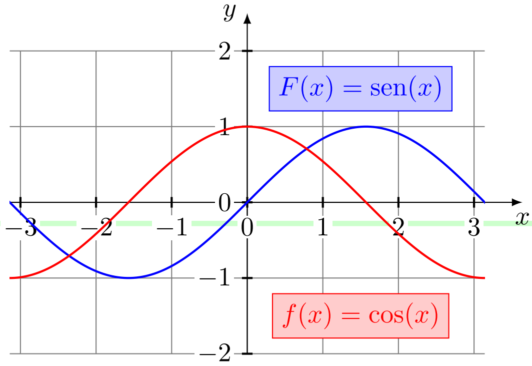


Figura 2.1: Funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$

Teorema 1.1: Sobre la constante de integración

Las funciones F_1 y F_2 son antiderivadas de la función f sii $F_1(x) = F_2(x) + C,$ C: constante $\forall x \in \mathcal{I}$.

Prueba. ($\Longrightarrow$) F_1 y F_2 son antiderivadas de f

$$F_1'(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathcal{I}.$$
$$F_2'(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathcal{I}.$$

se cumple $F_1'(x) = f(x) = F_2'(x), \forall x \in \mathcal{I}$.

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow F_1'(x) = (F_2(x) + C)' && \forall x \in \mathcal{I}. \\ &\Longrightarrow F_1'(x) = F_2'(x) && \forall x \in \mathcal{I}. \\ &F_1'(x) - F_2'(x) = 0 && \\ &[F_1(x) - F_2(x)] = 0 && \forall x \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Por el teorema del cálculo diferencial, se tiene que

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \text{ C: constante }, \forall x \in \mathcal{I}.$$

En consecuencia

$$F_1(x) = F_2(x) + C, \text{ C: constante} \quad \forall x \in \mathcal{I}.$$

($\Longleftarrow$) Como $F_1(x) = F_2(x) + C$, $\forall x \in \mathcal{I}$ y para concluir que son antiderivadas de cierta función en el intervalo $\mathcal{I}$, entonces F_1 y F_2 deben ser diferenciables en $\mathcal{I}$, luego

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \ \forall x \in \mathcal{I}.$$

Derivando ambos miembros respecto a x se obtiene:

$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0, \ \forall x \in \mathcal{I}.$$

de esto

$$F_1'(x) = F_2'(x), \ \forall x \in \mathcal{I}.$$

definiendo una función f en el intervalo $\mathcal{I}$.
Como $f(x) = F_1'(x), \ \forall x \in \mathcal{I}$.
De esto F_1 es antiderivada de f, del mismo modo F_2 es antiderivada de f. ■

si y solo si
$F_1 \wedge F_2$ en un intervalo común.
Diferenciabilidad $\nRightarrow$ derivabilidad en $\mathbb{R}^n$, pero sí en $\mathbb{R}$. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, donde Ω es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, será diferenciable si existe una transformación lineal T tal que $f(x_0 + h) = f(x_0) + T(h) + \theta(h)$ y $\theta(h)$ cumple que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\|\theta(h)\|}{\|h\|} = 0$.

A partir de esto, se observa que basta hallar una antiderivada de F y a partir de esta se obtiene una familia de antiderivadas.
Así, se obtiene la "Antiderivada General" de una función f: $\boxed{f(x) = F(x) + C, \text{ C: constante}}$
donde F es una antiderivada cualquiera de f.

Ejemplo 1.1: Función exponencial

$f(x) = e^x$ luego $F(x) = e^x$ es antiderivada de f.

Entonces , la antiderivada general es
$H(x) = e^x + C,$ C: constante .

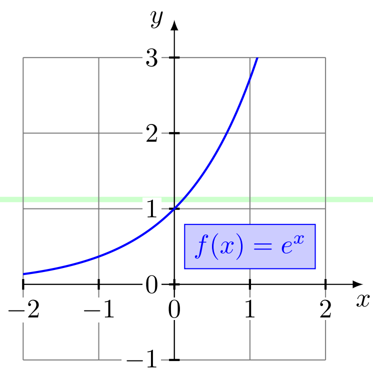


Figura 2.2: Representación de $y = e^x$

2.2. Integral indefinida

La integral indefinida de una función f, denotada por $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ es la representación de la familia de antiderivadas de f **("antiderivadas generales de f")**, esto es

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,\ \text{C: constante}$$

donde F es una antiderivada de f.

Ejemplo 2.1

① $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C,\ \text{C: constante}$

② $\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C,\ \text{C: constante}$

③ $\int \sec \tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + C,\ \text{C: constante}$

A partir de esto se puede construir una "tabla de integrales indefinidas"

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C,\ \text{C: constante}$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \text{C: constante}\ , n \neq 1$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C,\ \text{C: constante}$$

$$\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C,\ \text{C: constante}$$

$$\int \csc x \cot x\,\mathrm{d}x = -\csc x + C,\ \text{C: constante}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C,\ \text{C: constante}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C,\ \text{C: constante}$$

Observación 2.1

Como se cumple que

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \text{ sii } F'(x) = f(x),\ \forall x \in \mathcal{I}$$

de esto, se obtiene las propiedades:

[0] f es el integrando, es decir la función y x es la variable o indeterminada.

[0] El teorema de la derivada de la función inversa nos dice que dado $f(g(x)) = x$ la regla de la cadena nos da $f'(g(x))\cdot g'(x) = 1$. Escribiendo $y = g(x)$ y $x = f(y)$, la regla se ve mejor: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$ o $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x}$. La pendiente de $x = g^{-1}(y)$ veces la pendiente de $y = g(x)$ es igual a uno.

a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right] = f(x)$.

b) $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, C: constante .

Ejemplo 2.2

① $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\displaystyle\int \left(3x^2 + 5x - 7\right)\mathrm{d}x\right] = 3x^2 + 5x - 7$ (aplicando a)

② $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sen} x)\ \mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C$, C: constante (aplicando b)

Propiedad: Dadas las funciones $f, g\colon \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se cumple:

① $(f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$

② $\displaystyle\int K \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = K \int f(x)\,\mathrm{d}x$, K: constante

Ejemplo 2.3

$$\begin{aligned}\int (e^x + \operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x &= \int e^x\,\mathrm{d}x + \int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \\ &= e^x + C_1 - \cos x + C_2; C_1, C_2:\ \text{constante} \\ &= e^x - \cos x + C,\ \text{C: constante}\end{aligned}$$

Veamos la gráfica.

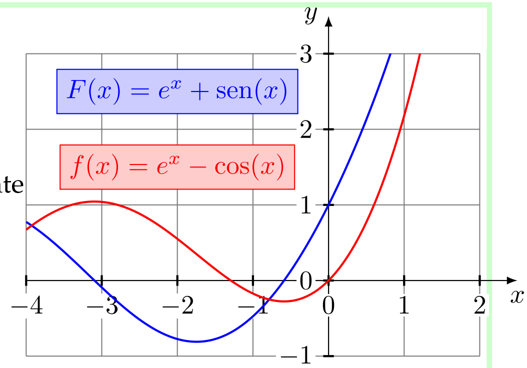


Figura 2.3: La función de color rojo es la derivada de la función de color azul.

$C = C_1 + C_2$
$C = C_1 + C_2$

2.3. Métodos de integración

2.3.1. Métodos de sustitución

Ejemplo 3.1

Evaluar $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$.

Recordemos las identidades de arco doble de las funciones seno y coseno.

$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x}$

$\boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}}$

Luego:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx \\ &= \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx \\ &= \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{4}\int d(\operatorname{sen} 2x) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C, \ \text{C: constante}\end{aligned}$$

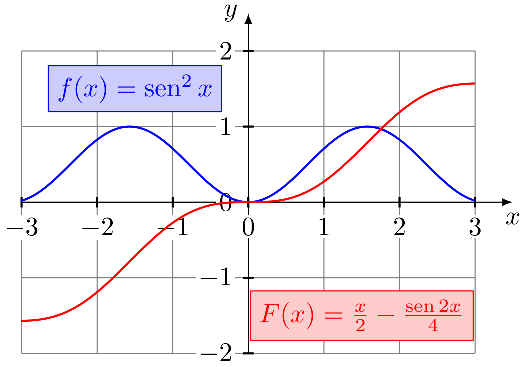


Figura 2.4: La función de color rojo es la derivada de la función de color azul.

Observación 3.1

Haciendo el cambio $\boxed{u = 2x} \longrightarrow du = 2\,dx \longrightarrow \boxed{dx = \frac{1}{2}du}$

Así $\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int \cos u \, du = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C$

esto se conoce como el método de sustitución. Así:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C\right) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C, \ \text{C: constante}\end{aligned}$$

Observación:

Teorema 3.1: Regla de la cadena para antiderivadas

Sea F una antiderivada de f en el intervalo I_x, φ es una función con derivada continua sobre el intervalo I_t, con $\varphi(I_t) \subset I_x$, entonces una primitiva de $f(\varphi(t) \cdot \varphi'(t))$ es $F(\varphi(t))$ en I_t.

Prueba. Basta probar que

$$[F(\varphi(t))]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \forall t \in I_t$$

Por la regla de la cadena

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), t \in I_t.$$

Como F es una antiderivada o primitiva de f en el intervalo I_x, entonces

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I_x$$

Si $x = \varphi(t)$, entonces $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$.
Luego:

$$[F(\varphi(t))]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

■

Observación 3.2

① Se impone que φ' sea continua en I_t para asegurar la existencia de

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

② $I = \displaystyle\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi^x \, \mathrm{d}x$

se hace el cambio $\boxed{u = \varphi(x)} \longrightarrow du = \varphi'(x)\, \mathrm{d}x$
entonces

$$I = \int f(u)\, du$$

Ejemplo 3.0: Integrar

$$I = \int \cos 4x \, \mathrm{d}x$$

Hacer $\boxed{u = 4x} \longrightarrow du = 4\, \mathrm{d}x \implies \boxed{\mathrm{d}x = \frac{1}{4} du}$

$$\longrightarrow \int \cos 4x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int \cos u \, \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{sen} u + C, \text{ C: constante}$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x + C, \text{ C: constante}$$

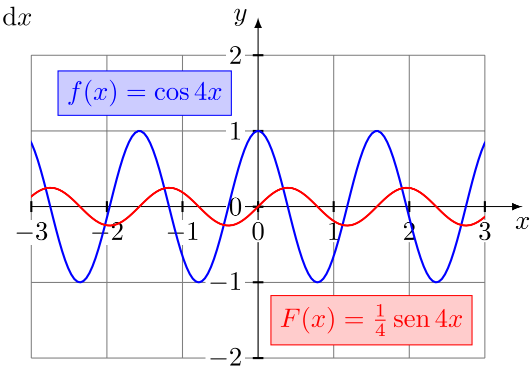


Figura 2.5: La función de color rojo es la derivada de la función de color azul.

Es necesario expresar la respuesta con la variable incial.

Ejemplo 3.3

$$I = \int \frac{x^2 \, \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Hacer $u = x^3 + 1$, entonces $du = 3x^2 \, \mathrm{d}x$

Reemplazando

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{1}{3}\int u^{-1/2}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C,\ \text{C: constante}$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C,\ \text{C: constante}$$

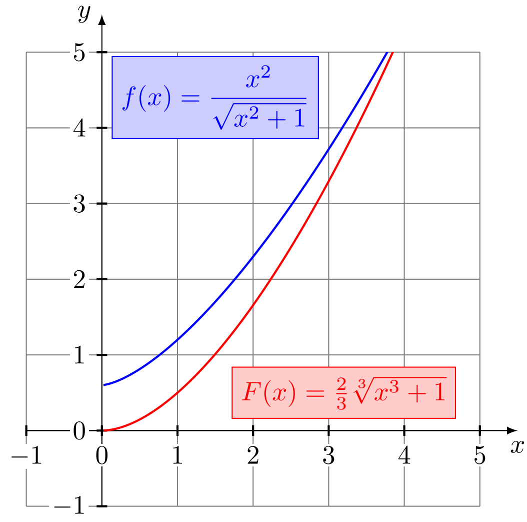


Figura 2.6: La función de color rojo es la derivada de la función de color azul.

Ejemplo 3.4

$$J = \int x^2 e^{4x^3+1}\,dx$$
hacemos $u = 4x^3+1 \implies du = 12x^2\,dx$

Luego:

$$J = \frac{1}{12}\int e^u\,du$$
$$= \frac{1}{12}e^u + C,\ \text{C: constante}$$
$$= \frac{e^{4x^3+1}}{12} + C,\ \text{C: constante}$$

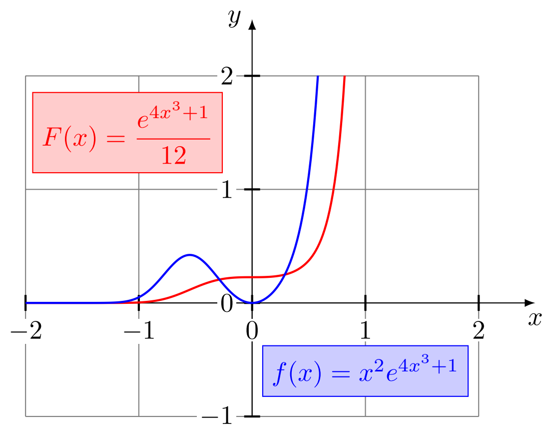


Figura 2.7: La función de color rojo es la derivada de la función de color azul.

Nota:Si $a \neq 0$, $\int f(u)\,du = F(u) + C$.

haciendo el cambio

$$\boxed{u = ax+b}$$

entonces:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,\ \text{C: constante}$$

Ejemplo 3.5

1) $\int \sec^2(4x+5)\,dx = \frac{1}{4}\tan(4x+5) + C,\ \text{C: constante}$

Observación $\boxed{a = 4}$

2) $\int \frac{dx}{16+x^2} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{1+(\frac{x}{4})^2} = \frac{1}{4}\arctan(\frac{x}{4}) + C,\ \text{C: constante}$

Haciendo $u = \frac{x}{4}$

Observación 3.3

Si hace el cambio $\boxed{u = f(x)}$ en la integral

$$\int [f(x)]^a \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x, a \neq 1$$

igual a $\displaystyle\int u^a\,du = \frac{[f(x)]^{a+1}}{a+1} + C,$ C: constante

Ejemplo 3.6

$$I = \int \operatorname{sen}^3 x \cos x\,\mathrm{d}x$$

Pero,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sen} x = \cos x}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{sen}^3 x \cdot \mathrm{d}(\operatorname{sen} x) \\ &= \int u^3\ \mathrm{d}u = \frac{u^4}{4} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + C, \text{ C: constante} \end{aligned}$$

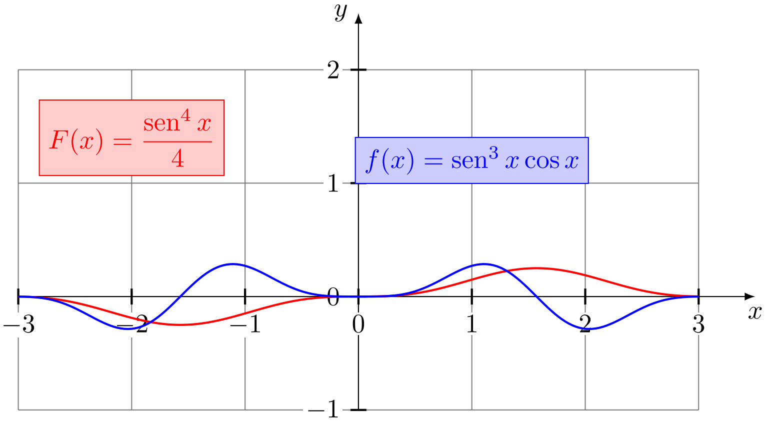


Figura 2.8: La función de color rojo es la derivada de la función de color azul.

2.3.2. Método de integración por partes

Prueba: Como

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(uv) &= v\ \mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v \\ \longrightarrow u\,\mathrm{d}v &= \mathrm{d}(uv) - v\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Integrando:

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

Luego:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

■

Ejemplo 3.0: Integración por partes

1) Determine $I = \displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

Empleamos la técnica de "integración por partes":

$$\begin{aligned} I &= x\ln x - \int x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= x\ln x - \int \mathrm{d}x \\ &= x\ln x - x + C, \text{ C: constante} \end{aligned}$$

2) Determine $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} I &= \int x \cos x \, \mathrm{d}x \\ &= x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \\ &= x \operatorname{sen} x - (-\cos x) + C, \ \text{C: constante} \end{aligned}$$

3) Calcule $\int x \arctan x \, \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} J &= \int x \arctan x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + C, \ \text{C: constante} \end{aligned}$$

2.3.3. Fórmulas recurrentes

Ejemplo 3.8

$$I_n = \int x^n e^x \, \mathrm{d}x$$

Integrando por partes

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x^n & du = (n-1)x^{n-1} \, \mathrm{d}x \\ dv = e^x \, \mathrm{d}x & v = e^x \end{array}}$$

Luego:

$$\begin{aligned} I_n &= x^n e^x - (n-1) \int x^{n-1} e^x \, \mathrm{d}x \\ \therefore I_n &= x^n e^x - (n-1) I_{n-1} \end{aligned}$$

Aplicación: $\boxed{n = 2}$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x \, \mathrm{d}x &= x^2 e^x - (2-1) \int x e^x \, \mathrm{d}x \\ &= x^2 e^x \end{aligned}$$

Aplicación de la geografía al cálculo integral

Desde hace dos mil años hasta la actualidad, el problema de representar la Tierra en un plano de la manera más fidedigna ha cautivado a muchos matemáticos como Carl Friedrich Gauss, Johann Heinrich Lambert, Gerardus Mercator, Charles Sanders Peirce, Hiparco de Nicea, Al-Biruni y Leonardo Da Vinci. Gerardus Mercator fue un matemático que nació en Rupelmundo, hoy forma parte de Bélgica. En esta ocasión narraremos el rol del calculo integral en la proyección de Mercator. Su sueño fue lograr proyectar con *transformaciones conformes*, es decir, que preserva el "ángulo". Estamos interesados en calcular

$$\mathrm{d}D = \sec\theta \, \mathrm{d}\theta$$

La integral de la secante surgió de la cartografía y la navegación y su solución fue una pregunta central de las matemáticas de mediados del siglo $XVII$. Fue descubierto en un accidente histórico cuando los matemáticos y cartógrafos intentaron entender la proyección del mapa de Mercator. Más información sobre su historia en **[V-1980]**.

$$\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x$$

Usemos la técnica de "integración por partes"

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \sec x & \mathrm{d}v = \sec^2 x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \sec x \tan x \, \mathrm{d}x & v = \tan x \end{array}}$$

Luego la expresión anterior resulta:

$$\begin{aligned} \int \sec^3 \mathrm{d}x &= uv - \int v \, \mathrm{d}u \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \tan x \cdot \sec x \tan x \, \mathrm{d}x \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot \tan^2 x \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

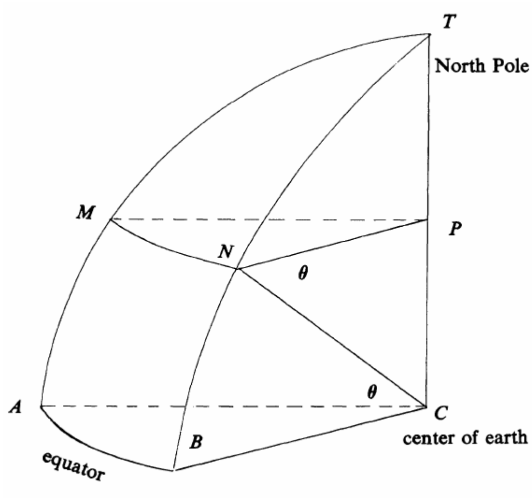


Figura 2.9: La distancia (geodésica) $D(\theta)$ en el mapa del ecuador al paralelo de latitud θ. $\mathrm{d}D$ representa el cambio infinitesimal resultado de un cambio infinitesimal $\mathrm{d}\theta$ en θ.

Pero

$$\boxed{1 + \tan^2 x = \sec^2 x}$$

Reemplazando en la integral:

$$\begin{aligned} \int \sec^3 \mathrm{d}x &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot (\sec^2 x - 1) \, \mathrm{d}x \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x^3 \, \mathrm{d}x + \int \sec x \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Finalmente debemos hallar la

$$\boxed{\int \sec x \, \mathrm{d}x} \tag{2.1}$$

Pero antes conozcamos la historia de esta integral tan importante. Ahora, si a la integral incial

$$\int \sec\theta \, d\theta = \int \frac{d\theta}{\cos\theta}$$

multiplicamos por el factor unitario $\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta} = 1$, obtendremos

$$\int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} \, d\theta,$$

[0]Esta pregunta fue motiva por nuestro compañero de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de Ingeniería.

[0]Nótese que las representaciones $\int f(z)\, dz$ o $\int f(\Omega)\, d\Omega$ son equivalentes.

pero por la propiedad pitagórica mencionada anteriormente tenemos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta &= \int \frac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta && \text{ya que } \operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x = 1\,\forall x\in\mathbb{R}\\
&= \int \frac{\cos\theta}{(1-\operatorname{sen}\theta)\,(1+\operatorname{sen}\theta)} && \text{por factorización en diferencia de cuadrados}\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\,d\theta && \text{por el método de “fracciones parciales”}\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\,d\theta+\frac{1}{2}\int\frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\,d\theta && \text{por la propiedad de linealidad de la integral}
\end{aligned}$$

Si realizamos las siguientes sustituciones para cada integral respectivamente

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_1 = 1-\operatorname{sen}\theta & du_1 = -\cos\theta\,d\theta \\ u_2 = 1+\operatorname{sen}\theta & du_2 = \cos\theta\,d\theta \end{array}}$$

Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \sec\,d\theta &= -\frac{1}{2}\int\frac{du_1}{u_1}+\frac{1}{2}\int\frac{du_2}{u_2} && \text{reemplazando } u_1 \text{ y } u_2 \text{ por } \theta\\
&= -\frac{1}{2}\ln|u_1|+\frac{1}{2}\ln|u_2|+C,\ \text{C: constante}\\
&= -\frac{1}{2}\ln|1-\operatorname{sen}\theta|+\frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{sen}\theta|+C,\ \text{C: constante} && \text{por propiedad de logaritmo}\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\right|+C,\ \text{C: constante}\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\right|+C,\ \text{C: constante} && \text{multiplicamos por el factor unidad}\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\operatorname{sen}\theta)^2}{\cos^2\theta}\right|+C,\ \text{C: constante}\\
&= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right|+C,\ \text{C: constante} && \text{por propiedad de logaritmo y simplificamos}
\end{aligned}$$

$$\therefore \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta|+C,\ \text{C: constante}$$

Pero nuestro problema inicial fue calcular

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x &= \sec x\cdot\tan x-\int \sec x^3 x+\int\sec x\,\mathrm{d}x\\
&= \sec x\cdot\tan x-\int\sec x^3 x+\ln|\sec x+\tan x|+C,\ \text{C: constante}
\end{aligned}$$

Despejando $\int \sec^3 x$ obtenemos:

$$\boxed{\therefore \int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec x\cdot\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+\frac{C}{2},\ \text{C: constante}}$$

Capítulo 3

La integral

Continuando con nuestro estudio de las antiderivadas, presentaremos un breve repaso de las sumatorias e inducción matemática.

3.1. Sumatoria

Una forma conveniente de escribir sumas utiliza la letra griega Σ (sigma mayúscula, correspondiente a nuestra S) y se llama **notación sigma**.

Definición 1.1: Notación sigma

Si $a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n$ son números reales y m y n son enteros tales que $m \leq n$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Con notación de funciones, la definición 1.1 se puede escribir como

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

De esta forma, el símbolo $\sum_{i=m}^{n}$ indica una suma en la que la letra i (llamado **índice de sumatoria**) toma valores enteros consecutivos que empiezan con m y terminan con n, es decir, $m, m+1, \ldots, n$. También se pueden usar otras letras como el índice de sumatoria.

Observación 1.1

$$\sum_{i=m}^{n} = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$$

Ejemplo 1.1

① $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}(2i+1) = (2(1)+1) + (2(2)+1) + (2(3)+1) + (2(4)+1)$

② $\displaystyle\sum_{i=5}^{8} \frac{i^2}{i+1} = \frac{5^2}{5+1} + \frac{6^2}{6+1} + \frac{7^2}{7+1} + \frac{8^2}{8+1}$

Ejemplo 1.2

Evalúe $\sum_{i=1}^{n} i(4i^2 - 3)$.

Solución. Utilizando los teoremas 2 y 3 tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i(4i^2-3) &= \sum_{i=1}^{n}(4i^3 - i) = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 3\sum_{i=1}^{n} i \\
&= 4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - 3\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)\left[2n(n+1)-3\right]}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n^2+2n-3)}{2}
\end{aligned}$$

■

Propiedad: Sea c una constante y n un número natural. Entonces

1) $\sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k = c \sum_{k=m}^{n} a_k$; k: constante.

2) $\sum_{k=m}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=m}^{n} a_k + \beta \sum_{k=m}^{n} b_k$.

3) $\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{m-1}$.

4) $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

Ejemplo 1.3

Determine la suma

$$S = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n \times (n+1).$$

[0]Conocida como propiedad telescópica

Solución:

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \\
S &= \sum_{k=1}^{n} (k^2+k) \\
S &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\
S &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2\cdot 3} + \frac{n(n+1)}{2} \\
S &= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}+1\right) && \text{factorizamos } \frac{n(n+1)}{2}. \\
S &= \frac{n(n+1)}{\cancel{2}}\cdot\left(\frac{\cancel{2}\cdot(n+2)}{3}\right) && \text{operamos el factor de la derecha.} \\
\therefore S &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.
\end{aligned}
$$

■

3.2. Inducción matemática

La inducción matemática es una de las técnicas de demostración de desarrollo más reciente en la historia de las matemáticas. Se utiliza para comprobar suposiciones acerca de los resultados de procesos que ocurren repetidamente y de acuerdo a patrones definidos. Se introduce la técnica con un ejemplo.

3.2.1. Principio de Inducción Matemática

Sea $A \subset \mathbb{N}$ se cumple que

I) $1 \in A$.

II) $(k+1) \in A$ siempre que $k \in A$.

Entonces $A = \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.0: Suma de los primeros n naturales

Demuestre la fórmula para la suma de los primeros n números naturales:

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solución. Esta fórmula se puede demostrar por inducción matemática (como es nuestro caso) o por el método empleado por el matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855) cuando tenía solo 10 años de edad.

I) $1 = \dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$

II) Supongamos que $1+2+3+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, es cierto para $k \in \mathbb{N}$.

Veamos que se cumple para $(k+1)$:

$$
\begin{aligned}
&= 1+2+\ldots+k+(k+1) && \\
&= (1+2+3+\ldots+k)+(k+1) && \text{Asociatividad} \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) && \text{por hipótesis inductiva} \\
&= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) && \\
&= \frac{(k+1)\left((k+1)+1\right)}{2} &&
\end{aligned}
$$

Esto significa que se cumple para $k+1$, por el *Principio de inducción matemática* de $i)$ y $ii)$ se tiene $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$. ■

Explorando

Veamos el **emocionante** ejemplo de la *Torre de Hanoi* en el programa C.

```c
#include <stdio.h>
void hanoi(char desde, char hacia, char otro, int n) {
    if(n > 0) {
        hanoi(desde, otro, hacia, n - 1);
        printf("%c -> %c\n", desde, hacia);
        hanoi(otro, hacia, desde, n - 1);
    }
}
int main() {
    int n;
    printf("Introduzca el número de discos:\n");
    scanf("%d", &n);
    hanoi('A', 'C', 'B', n);
    return 0;
}
```

El primer uso conocido de la inducción matemática ocurrió en el trabajo del científico italiano Francesco Maurolico en 1575. En el siglo $XVII$ tanto Pierre de Fermat como Blaise Pascal utilizaron la técnica, Fermat la llamó el "método de descenso infinito". Para saber más sobre esta técnica, ver el siguiente artículo [**casas230disea**]. En 1883 Augustus De Morgan (mejor conocido por las leyes de Morgan) describió el proceso cuidadosamente y le dio el nombre de inducción matemática. Para visualizar la idea de inducción matemática, imagine una colección infinita de fichas de dominó colocadas una detrás de la otra de tal manera que si alguna ficha de dominó cae hacia atrás, hace que la que está detrás caiga hacia atrás también (Vea la figura 3.1.) Después imagine que la primera ficha de dominó se cae hacia atrás. ¿Qué sucede? ...¡Se caen todas!

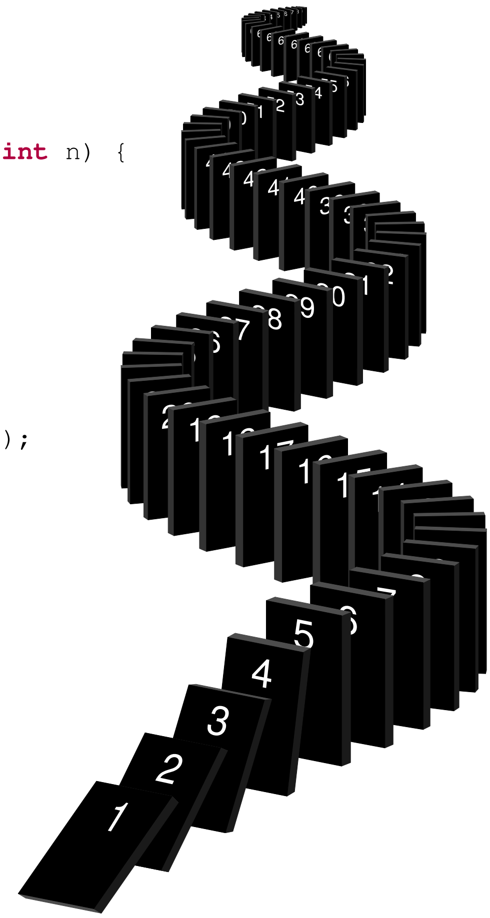


Figura 3.1: Si la k-ésima ficha de dominó cae hacia atrás, también empuja a la $(k+1)$-ésima ficha de dominó hacia atrás.

Observación 2.1: Principio de inducción matemática

El Principio de Inducción Matemática se emplea para probar la validez de una proposición $P(n), \forall n \in \mathbb{N}$ de la siguiente manera

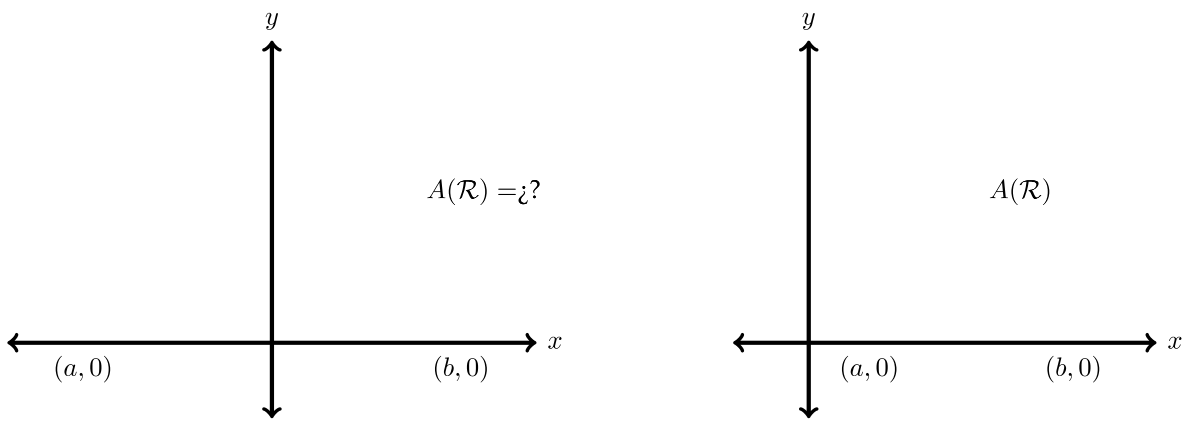
I) $P(1)$ es cierto (¡verificado!).

II) Si $P(k)$ es cierto, entonces $P(k+1)$ es cierto.

Entonces $P(n)$ es cierto, $\forall n \in \mathbb{N}$.

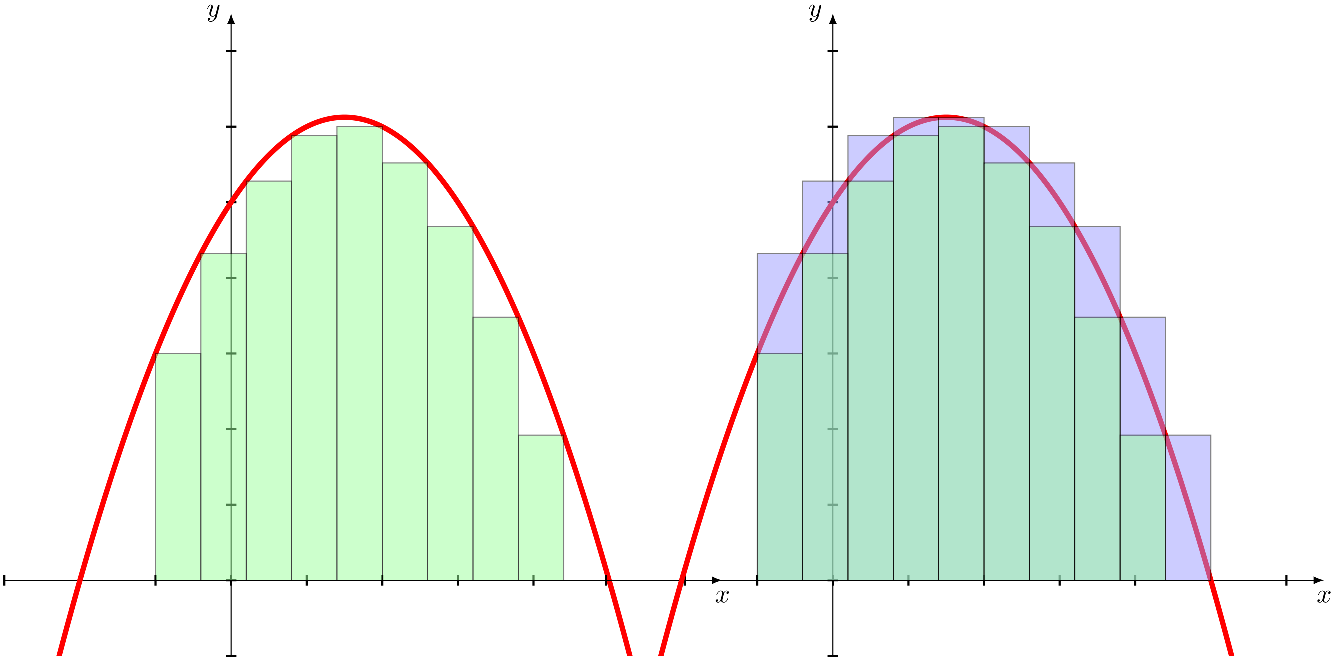
3.3. Integral definida

En esta parte del curso intentaremos definir el área de algunas regiones especiales según figura.



(a) Integral 1 **(b)** Integral 2

Figura 3.2: Combinación de Figura 3.2a and 3.2b.



(a) Sumas inferiores **(b)** Sumas superiores

Figura 3.3: Sumas de Riemann en Figura 3.3a y 3.3b.

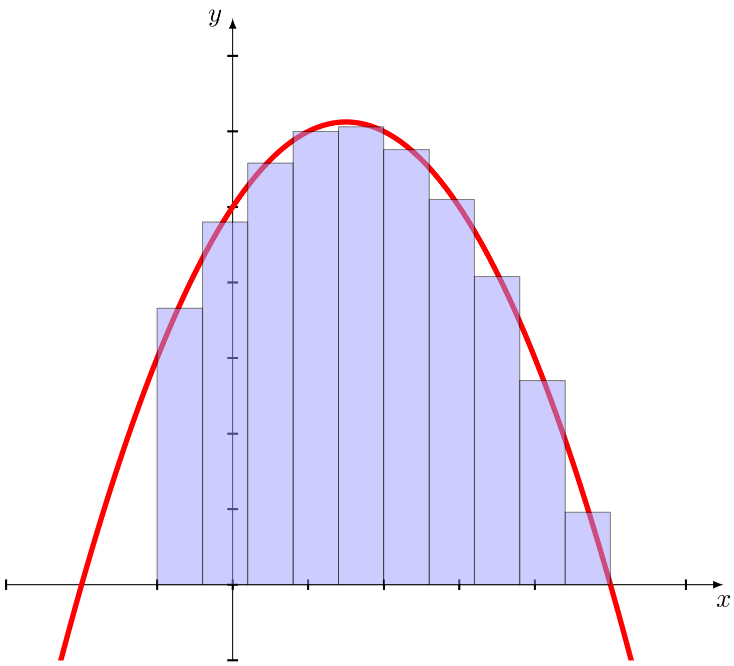


Figura 3.4: Sumas de Riemann en las imágnes de los puntos medios en la partición.

Para ello pasaremos a definir algunos conceptos importantes.

Definición 3.1: Partición de un intervalo

Un conjunto P de puntos $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se dice que es una *partición del intervalo* $[a, b]$, si se cumple que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

es decir $P = \{x_k; k = 0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Definición 3.2: Norma de una partición

La norma de una partición $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ de $[a, b]$ denotado por $\|P\|$, se define como sigue:

$$\|P\| = \text{máx}\{|x_k - x_{k-1}| \mid k = 1, \ldots, n\}$$

La norma de una partición nos mide la "finura" de la partición.

Observación 3.1

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (longitud de I_k).

Ejemplo 3.1

$P = \{1; 2; 4; 4,5; 4,8; 5\}$ es una partición de $[1, 5]$

$\|P\| = \text{máx}\{(2-1); (4-2); (4,5-4); (4,8-4,5); (5-4,8)\}$
$\|P\| = \text{máx}\{1; 2; 0{,}5; 0; 3; 0,2\}$
$\|P\| = 2$.

Observación 3.2

En $[a, b]$ se forman subintervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]\,, k = 1, 2, \ldots, n$.

Observación 3.3

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Observación 3.4

Cuando Δx_k tiene la misma longitud para cada I_k, diremos que que la partición $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ de $[a, b]$ es "regular", y en tal caso

$$x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right), \Delta x_k = \frac{b-a}{n}, \forall k = 0, \ldots, n.$$

Ejemplo 3.2

Por ejemplo si seleccionamos $P = \{0, \frac{a}{n}; \frac{2a}{n}; \frac{3a}{n}, \ldots, \frac{(n-1)a}{n}, a\}$ es una partición regular de $[0, a]$

$$\|P\| = \frac{a}{n}$$

y en estos casos se tiene que:

$$\boxed{x_k = x_0 + k\Delta x_k} \text{ , donde } \Delta x_k = \frac{b-a}{n}$$

Definición 3.3: Función acotada

Se dice que una función $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada en $[a,b]$, si existen m y M reales tales que

$$m \le f(x) \le M \quad ; \forall x \in [a,b] \,.$$

Ahora tomamos una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ de $[a,b]$.
Para cada $k = 1, \ldots, n$ definamos

$$m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \quad \text{y} \quad M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f$$

Por tanto, es claro que: $\forall k = 1, 2 \ldots, n$; $m_k \le f(x) \le M_k, \forall x \in [x_{k-1}, x_k]$.
Propiedad:
Se cumple que:

$$m \le m_k \le f(x) \le M_k \le M, \forall x \in [x_{k-1}, x_k] \, \forall k = 1, 2, \ldots, n.$$

Prueba. Sea $k = 1, 2, \ldots, n$ cualquiera. Como $[x_{k-1}, x_k] \subset [a,b]$
$\Longrightarrow \; m \le \inf_{[a,b]} f \le m_k \le f(x) \le \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \le M_k \le \sup_{[a,b]} f \le M$
Por consiguiente
$m \le m_k \le f(x) \le M_k \le M \;; \forall x \in [x_{k-1}, x_k] \,; \forall k = 1, 2, \ldots, n.$ ■

Definición 3.4: Conjunto de particiones

Siendo $\mathcal{P}\,[a,b] = \{$conjunto de particiones de $[a,b]\}$. Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\} \in \mathcal{P}\,[a,b]$, entonces

a) *La suma superior de f con respecto a la partición P* se denota por $U(f,P)$ y se define como:

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \left(x_k - x_{k-1}\right).$$

b) *La suma inferior de f con respecto a la partición P* se denota por $L(f,P)$ y se define como:

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k - x_{k-1}\right).$$

Propiedad: $\forall P \in \mathcal{P}\,[a,b] : L(f,P) \le U(f,P)$.

Prueba. Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ se tiene: $m_k \le M_k$.
Por tanto, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \le M_k(x_k - x_{k-1})$$

Sumando miembro a miembro

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})}_{L(f,P)} \le \underbrace{\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})}_{U(f,P)}$$

Por consiguiente

$$L(f,P) \le U(f,P).$$

■

Ejemplo 3.3

Sea la función $f\colon [1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, entonces f es acotada en $[1,3]$ porque $1 \leq f(x) \leq 9, \forall x \in [1,3]$.

Definición 3.5: m_k y M_k

Se tiene una función $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada, una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$. Se definen los números

$$m_k = \inf\{f(x) \mid x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k = \sup\{f(x) \mid x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]\}$$

Observación 3.5

Observación: En el caso de que f es creciente en $[a,b]$ con $f > 0$.
Se definen

$$\boxed{L(f;P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k} \text{ “suma inferior”}$$

$$\boxed{U(f;P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k} \text{ “suma superior”}$$

Propiedad: Se cumple que

$$m \leq m_k \leq M_k \leq M, \forall k = 1, 2, \ldots, n.$$

Sea $P\,[a,b]$ el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.
Propiedad: Se cumple que

$$\forall p \in P\,[a,b] \text{ se tiene que } m(b-a) \leq L(f;P) \leq U(f;P) \leq M(b-a).$$

Prueba. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}\,[a,b]$ cualquiera. De la propiedad 3.3 se tiene que:

$$m \leq m_k \leq M_k \leq M, \forall k = 1, 2, \ldots, n$$

multiplicando por Δx_k se obtiene

$$m\Delta x_k \leq m_k \Delta x_k \leq M_k \Delta x_k \leq M\Delta x_k, \forall k = 1, 2, \ldots, n$$

Sumando cada una de estas n desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n} m\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M\Delta x_k, \forall k = 1, 2, \ldots, n$$

■

Comentario: La suma superior a disminuir con respecto a la otra suma.
Cuando tienes un refinamiento la suma interior tiende a crecer.
Proposición: Sea $P, Q \in \mathcal{P}\,[a,b]$. Si $P \subset Q$, entonces

a) $L(f,P) \leq L(f,Q)$

b) $U(f,Q) \leq U(f,P)$

Demostración: Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Sea $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ en $[a,b]$ tal que $x_0 < c_1 < x_1 < c_2 < x_2 \cdots < x_{n-1} < c_n < x_n$ de este modo $Q = P \cup \{c_i\}_{i=1}^{n}$ es una partición de $[a,b]$ y $P \subset Q$; esto es Q es un refinamiento de P. Nota: Se cumple:

a) $\text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1},x_k]}\right)\cdot(x_k-x_{k-1})\leq \text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1},c_k]}\right)\cdot(c_k-x_{k-1})+\text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1},c_k]}\right)\cdot(c_k-x_{k-1})$

b) $\sup\left(f\big|_{[x_{k-1},c_k]}\right)\cdot(c_k-x_{k-1})+\sup\left(f\big|_{[c_k,x_k]}\right)\cdot(x_k-c_k)\leq \sup\left(f\big|_{[x_{k-1},x_k]}\right)\cdot(x_k-x_{k-1})$

Observación 3.6

$$\text{ínf}\left(f\big|_{[c,d]}\right)=\text{ínf}\{f(x)\mid x\in[c,d]\}$$

Aplicando a, en cada $I_k=[x_{k-1},x_k]\,,k=1,2,\ldots,n$.
Sumando las n desigualdades:

$$\sum_{k=1}^{n}\text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1},x_k]}\right)\cdot(x_k-x_{k-1})\leq\sum_{k=1}^{n}\left[\text{ínf}\left(f\big|_{[x_{k-1},c_k]}\right)(c_k-x_{k-1})+\text{ínf}\left(f\big|_{[c_k,x_k]}\right)(x_k-c_k)\right]$$

Entonces,

$$L(f,P)\leq L(f,Q)$$

De manera similar aplicando b (de la nota) se prueba la segunda.

Observación 3.7

De a se nota que cuando se refinan una partición, la suma inferior crece. En cambio, de b se tiene que cuando se refina la suma superior decrece.
Así, se obtiene $\{L(f;P)\mid p\in\mathcal{P}\,[a,b]\}$ el cual es acotado superiormente porque $L(f;P)\leq M(b-a);\forall P\in\mathcal{P}\,[a,b]$ y no vacío. (¿Por qué?).
Entonces el conjunto $\{L(f,P)\mid P\in\mathcal{P}\,[a,b]\}$ posee supremo. De esto se define la “integral inferior de la función acotada f en $[a,b]$”, denotado por

$$\underline{\int_a^b} f=\sup\{L(f,P)\mid P\in\mathcal{P}\,[a,b]\}$$

De manera similar se obtiene el conjunto $\{U(f,P)\mid P\in\mathcal{P}\,[a,b]\}$, el cual es no vacío y acotado inferiormente porque $m(b-a)\leq U(f,P),\forall P\in\mathcal{P}\,[a,b]$. En consecuencia posee ínfimo.
De esta manera se define la “ntegral superior de la función acotada f en $[a,b]$”, denotado por $\overline{\int_a^b} f$, como

$$\overline{\int_a^b} f=\text{ínf}\{U(f,P)\mid P\in\mathcal{P}\,[a,b]\}$$

Definición 3.6

Sea la función acotada $f\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$ se dice que f es integrable según Riemann si $\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f$.

En este caso, se define la integral definida de la función f en $[a,b]$, denotada por $\int_a^b f$ como

$$\int_a^b f=\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f.$$

Como se cumple:

$$m(b-a)\leq L(f;P)\leq U(f;P)\leq M(b-a)$$

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq L(f,Q) \leq U(f;Q) \leq U(f,P) \leq M(b-a)\ \forall P,Q \in \mathcal{P}[a,b] \text{ con } P \subset Q.$$

Fijando la partición P, se tiene que

$$\{L(f,Q) \mid Q \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

está acotada superiormente por $U(f,P)$, esto es, $U(f,P)$ es una cota superior de $\{L(f,Q) \mid Q \in \mathcal{P}[a,b]\}$ entonces

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f \leq U(f,P)}$$

porque $\underline{\int_a^b} f$ es supremo o mínima cota superior. De esto último $\underline{\int_a^b} f$ es una cota inferior de $\{U(f,P) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\}$ pero el ínfimo de este conjunto es $\underline{\int_a^b} f$, entonces $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Así, se tiene el siguiente

Definición 3.7: Definición de Darboux de $\int_a^b f$

Una función definida y acotada en $[a,b]$ es **integrable** en $[a,b]$ si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso el valor común de $\underline{\int_a^b} f$ y $\overline{\int_a^b} f$ es llamado la (definida) **integral de Riemann** de f sobre $[a,b]$, y es simplemente denotada $\int_a^b f$.

Observación 3.8: Observación en la notación

En algunos libros de Análisis no es usada la notación común $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$, familiar del cálculo elemental porque en la definición de integral definida los símbolos x y $\mathrm{d}x$ no juegan un rol. La notación correcta indica que todo lo que necesitamos son la función y el intervalo. Sin embargo, en ejemplos concretos frecuentemente encontraremos más útil usar la notación familiar $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$.

Ejemplo 3.4

Una **función constante** $f(x) = c$ es integrable sobre $[a,b]$, y $\int_a^b f = c(b-a)$.

Prueba. Para cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$, y para cualquier $k = 1, 2, \cdots, n$,

$$m_k = c = M_i, \text{ entonces}$$

$$L(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_i \Delta_i = \sum_{k=1}^{n} c\Delta_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta_k = c(b-a),$$

y además, $\underline{\int_a^b} f = c(b-a)$. Similarmente, para cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$,

$$U(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k = \sum_{k=1}^{n} c\Delta_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta_k = c(b-a),$$

y además $\overline{\int_a^b} f = c(b-a)$. Por lo tanto, $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = c(b-a)$, de lo cual se sigue la conclusión deseada. ■

$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \text{ínf}\,(f, I_k)\,\Delta x_k$, pero $\text{ínf}\,(f; I_k) = 5$, entonces $L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} 5{\cdot}\Delta x_k = 5\left(\sum_{k=1}^{n} \Delta I_k\right) = 5(3-1) = 10, \forall P \in \mathcal{P} \in [1,3]$.
De esto $\underline{\int_1^3} f = 10$.
De manera similar

$$\sup\,(f, I_k) = 5$$

Entonces:

$$\begin{aligned} U(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} \sup\,(f, I_k)\cdot \Delta I_k \\ &= 5(3-1) = 10,\ \forall P \in \mathcal{P}\,[1,3]\,. \end{aligned}$$

De esto $\overline{\int_1^3} f = 10$.
Como $\underline{\int_1^3} f = \overline{\int_1^3} f = 10$.
Entonces f es integrable según Riemann
$\therefore \int_1^3 f = 10$.

Ejemplo 3.7: Una función no integrable

La **función de Dirichlet** dada por $f(x) = \begin{Bmatrix} 1 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{Bmatrix}$ es no integrable en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$, donde $a < b$.

Prueba. Supongamos que $a < b$. Para cualquier partición $\mathcal{P}\,[a,b]$, y para cualquier $k = 1, 2, \cdots, n$, tenemos $m_k = 0$, y $M_k = 1$, entonces

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k = \sum_{k=1}^{n} 0\Delta_k = 0, \text{ y por lo tanto, } \underline{\int_a^b} f = 0. \text{ Similarmente,}$$

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k = \sum_{k=1}^{n} 1\Delta_k = (b-a), \text{ y por lo tanto, } \overline{\int_a^b} f = (b-a).$$

Por lo tanto, $\underline{\int_a^b} f \neq \overline{\int_a^b} f$, de lo cual se sigue que f no es integrable en $[a,b]$. ■

$f\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ para una partición P de $[0,2]$ se tiene que

$$f(I_k) = \{0;1\} \text{ para cualquier partición } P \text{ de } [0,2]\,.$$

$$\sup\left(f\big|_{I_k}\right) = 1$$

entonces

$$L(f,P) = 0$$
$$S(f,P) = \sum 1 \cdot \Delta I_k = 1 \cdot \sum \Delta I_k = 2.$$

$\underline{\int_0^2} f = 0; \overline{\int_0^2} f = 2.$
Como

$$\underline{\int_0^2} f \neq \overline{\int_0^2} f$$

entonces f no es integrable según Riemann.

Ejemplo 3.7: Función característica de un intervalo cerrado

Consideremos la función característica de un intervalo cerrado, sea $f = \chi_{[1,3]}$, dada por $f(x) = \begin{Bmatrix} 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{Bmatrix}$. Pruebe que f es integrable en $[0,5]$ y encuentre $\int_0^5 f$.

Solución: Nuestra comprensión intuitiva de la integral como área nos lleva a esperar que $\int_0^2 f = 2$, entonces empecemos con esa expectativa.

a) Sea $\mathcal{P} = \{0,1,3,5\}$. Luego $\mathcal{P}$ es una partición de $[0,5]$, y

$$\begin{aligned} L(f,P) &= m_1\Delta_1 + m_2\Delta_2 + m_3\Delta_3 \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $\underline{\int_0^5} f$ es el supremo de todas las sumas inferiores, $\underline{\int_0^5} f \geq L(f,P) = 2$.

b) Sea $0 < \varepsilon < 1$, y sea $\mathcal{Q} = \{0, 1-\frac{\varepsilon}{2}, 3+\frac{\varepsilon}{2}, 5\}$. Entonces $\mathcal{Q}$ es una partición de $[0,5]$, y

$$\begin{aligned} U(f,P) &= M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2 + M_3\Delta_3 \\ &= 0(1-\frac{\varepsilon}{2}) + 1(2+\varepsilon) + 0(2-\frac{\varepsilon}{2}) \\ &= 2+\varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $\overline{\int_0^5} f$ es el ínfimo de todas las sumas superiores, $\overline{\int_0^5} f \leq U(f,\mathcal{Q}) = 2+\varepsilon$.
Además, $\forall \varepsilon > 0$, $\overline{\int_0^5} f \leq 2+\varepsilon$. Por lo tanto, por el principio de fuerza, $\overline{\int_0^5} f \leq 2$.

c) Tomando (a) y (b) juntos con el teorema,

$$2 \leq \underline{\int_0^5} f \leq \overline{\int_0^5} f \leq 2.$$

Esto es, $\underline{\int_0^5} f = \overline{\int_0^5} f = 2$. Por lo tanto, f es integrable en $[0,5]$, y $\int_0^5 f = 2$.

■

Recordando: Sea $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Si A es

a) $c = \sup(A) \iff \begin{array}{r} x \leq c, \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A \mid c < x_0 + \varepsilon \end{array}$

b) $d = \inf(A) \iff \begin{array}{r} d \leq x, \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A \mid x_0 - \varepsilon < d \end{array}$

Para una función acotada $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se definió:

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,P) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\}}$$

$$\boxed{\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f,P) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\}}$$

Propiedad: Sea la función $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es integrable sobre $[a,b]$, entonces para $\varepsilon > 0$, existen $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que se cumple:

$$\int_a^b f - \varepsilon < L(f,P_1) \leq \int_a^b f \leq U(f;P_2) < \int_a^b f + \varepsilon$$

Prueba. Aplicar las definiciones de supremo e ínfimo. ■

Propiedad: Sea la función $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable. Para $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que

$$\boxed{\int_a^b f - \varepsilon < L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P) < \int_a^b f + \varepsilon}$$

Prueba. De la anterior proposición tomar $P = P_1 \cup P_2$ (P es refinamiento de P_1 y P_2). De esto último

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &\leq \int_a^b +\varepsilon - \left(\int_a^b f - \varepsilon\right) \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

■

Así se obtiene:
Proposición: Sea $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que

$$U(f,P) - L(f,P)\varepsilon$$

Proposición:Sea $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}[a,b]$ de modo que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$, entonces f es integrable según Riemann en $[a,b]$.
Proposición: Para una función $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada las dos proposiciones son equivalentes.

3.4. Cotas para el error de aproximación de una integral definida

Ejemplo 4.0: Aproximación de la función $f(x) = x^2$

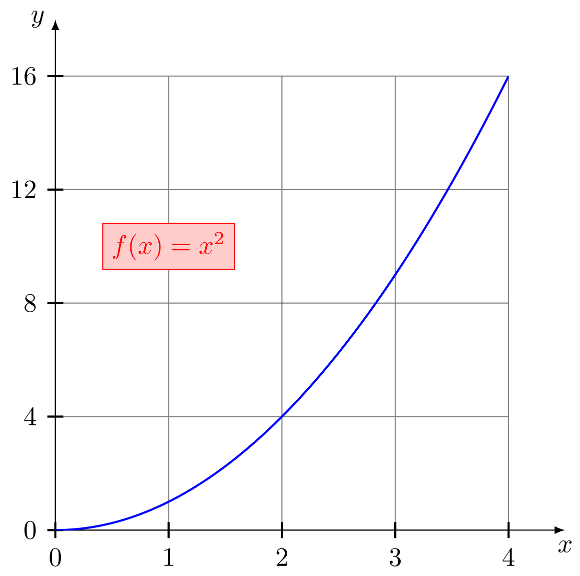
Sea la función f dada por $f(x) = x^2, x \in [0,4]$. Determine una aproximación de $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Solución: f es acotada en $[0,4]$. Tomando una partición $\mathcal{P} = \{0;1;2;3;4\}$ de $[0,4]$.

Determinando $L(f,\mathcal{P})$ y $U(f,\mathcal{P})$, donde

$$L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{3} m_i(x)\Delta x_i = 0(1-0) + 1(3-1) + 9(4-3) = 11.$$

$$U(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{3} M_i(x)\Delta x_i = 1(1-0) + 9(4-3) + 16(4-3) = 35.$$



$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\left[U(f,\mathcal{P}) + L(f,\mathcal{P})\right]$$

esto es

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\left[35 + 11\right] \approx 23$$

donde la cota de error de la aproximación por partición es

estos $\frac{1}{2}\left[35 - 11\right] = 12.$ ■

Recordar que toda función continua en conjunto compacto posee un máximo y un mínimo.

3.5. Existencia de funciones integrables

Teorema 5.1: Existencia de funciones integrables

Si f es una función continua en $[a,b]$ excepto en $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subsetneq [a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.

Observación 5.1: Entendiendo el significado de una función integrable

Decir que f es *integrable* en $[a,b]$ significa que existe $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. ¡No quiere decir que conozcamos como calcularlo! Veamos algunas integrales que existen pero no se pueden expresar en términos de funciones elementales.

1 $\displaystyle\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ 3 $\displaystyle\int x\tan x\,\mathrm{d}x$ 5 $\displaystyle\int \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$ 7 $\displaystyle\int \ln(x)e^{x}\,\mathrm{d}x$

2 $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x^2)\,\mathrm{d}x$ 4 $\displaystyle\int \tan(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ 6 $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$ 8 $\displaystyle\int \sqrt{x\pm\ln(x)}\,\mathrm{d}x$

Aunque algunas funciones no pueden integrarse con antiderivadas elementales, muchas de ellas pueden ser evaluadas en términos de constantes matemáticas bien conocidas para ciertas integrales definidas. Quizás los ejemplos más famosos sean las integrales

1 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$ 2 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{e^x}\,\mathrm{d}x=-\gamma$ 3 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Corolario: Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.

Ejemplo 5.0: Función $\operatorname{sen} x$

Sea la función dada por $f(x)=\operatorname{sen} x, x\in[0,\pi]$ entonces f es integrable en $[0,\pi]$.

Teorema 5.2

Si f es continua en $[a,b]$, entonces para $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tal que

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k\right|<\varepsilon$$

toda partición etiquetada $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ con $|\mathcal{P}|<\delta, \forall x_k^*\in[x_{k-1},x_k]$ elegido.

Observación 5.2

Si $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ es una partición de $[a,b]$ y se elige $x_k^*\in[x_{k-1},x_k]\,,k=1;2;\cdots;n$. A la siguiente suma:

$$\mathcal{S}(f,\mathcal{P},\mathcal{W})=\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

se le denomina *"suma de Riemann"* donde $\mathcal{W}=\{x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\}$

Corolario: Si f es continua en $[a,b]$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f=\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} f(x_k^*)\Delta x_k}$$

Observación 5.3

Cuando $|\mathcal{P}|\to 0$ equivale a $n\to\infty$.

Ejemplo 5.2

Sea f la función dada por $f(x)=x^2, x\in[0,4]$. Se tiene que f es continua en $[0,4]$, entonces f es integrable en $[0,4]$.

Tomando una partición regular de $[0,4]$ $\mathcal{P} = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ de la siguiente manera:

$$x_k = x_{k-1} + \Delta x_k; \quad \Delta x_k = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}.$$

de esto:

$$x_k = \underbrace{x_0}_{0} + k\Delta x_k, k = 1;2;\cdots;n \implies x_k = k \cdot \frac{4}{n}; k = 1;2;\cdots;n$$

En particular tomando $x_k^* = x_k = k \cdot \frac{4}{n}; k = 1;2;\cdots;n$ entonces la suma de Riemann sería

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(k \cdot \frac{4}{n}) \cdot \frac{4}{n} = \sum_{k=1}^{n} \left(k \cdot \frac{4}{n}\right)^2 \cdot \frac{4}{n} = \frac{4^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{4^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Luego, se tiene que

$$\int_0^4 x^2 \, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{4^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{64}{3}.$$

3.6. Área de una región acotada

Sea f una función continua en $[a,b]$. $f(x) > 0, \forall x \in [a,b]$. Se define la región

$$\mathcal{W} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x) \wedge a \leq x \leq b\}$$

Se define el área de la región $\mathcal{W}$ como

$$\boxed{\text{área } (\mathcal{W}) = \int_a^b f(x) \, dx}$$

Observación 6.1

El área es no negativa.

Ejemplo 6.1

Sea $\mathcal{W}$ ka región delimitada por la gráfica de la función dada por $f(x) = x^2$, el eje X y las rectas $x = 0, x = 4$. Así, entonces el área $(\mathcal{W}) = \int_0^4 f(x) \, dx = \int_0^4 x^2 \, dx$. Pero, del ejemplo anterior $\int_0^4 x^2 \, dx = \frac{64}{3}$. Esto es, el área $(\mathcal{W}) = \frac{64}{3} u^2$.

Propiedades de la integral definida:
1 Si f es una función acotada sobre $[a,b]$, $c \in [a,b]$ entonces:

a) $\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$

b) $\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f$

Pero en el caso de que f sea continua en $[a,b]$, $c \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Ejemplo 6.2

Sea la función f dada

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [-3, 0] \\ x^2 & ; x \in [0, 4] \end{cases}$$

se tiene que f es continua en $[-3, 4]$ entonces f es

Capítulo 4

Teoremas

4.1. Teorema fundamental del cálculo

4.1.1. Primer teorema fundamental del cálculo

Teorema 1.1: Primer teorema fundamental del cálculo

Sea la función f integrable en $[a, b]$ y se define la función F por $F(x) = \int_a^x f, x \in [a, b]$. Si f es continua en $[a, b]$, $c \in [a, b]$ entonces F es diferenciable en $[a, b]$, además, $F'(c) = f(c)$.

Demostración: a) Sea $h > 0$, entonces $F(c+h) = \displaystyle\int_a^{c+h} f, F(c) = \int_a^c f$

de esto $F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} - \int_a^c$.

$= \displaystyle\int_a^c f + \int_c^{c+h} - \int_a^c$ entonces $F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f$.

Como f es integrable en $[a, b]$ y $[c, c+h] \subset [a, b]$ entonces f es integrable en $[c, c+h]$. Definamos

$m_h = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in [c, c+h]\}$
$M_h = \sup\{f(x) \mid x \in [c, c+h]\}$

y como f es integrable, por teorema (colocar el número que le corresponde), se cumple:

$$m_h \cdot h \leq \int_c^{c+h} \leq M_h \cdot h$$

diviendo entre h:

$$m_h \leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} \leq M_h$$

Cuando $h \to 0^+$ y como f es continua en $[c, c+h]$ se cumple que $m_h = M_h = f(c)$

de esto $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f = f(c)$ (Teorema del Sándwich).

esto es $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}[f(c+h) - F(c)] = f(c)$

Así $F'(c) = f(c)$.

b) Para $h < 0$ de manera análoga se obtiene lo anterior.

■

Límite especial:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f = f(c)}$$

Ejemplo 1.1

Calcule
$$\lim_{h\to 0}\int_{\pi}^{\pi+h} \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(\pi) = 0.$$

Corolario: Si f es continua en $[a,b]$ y $f = G'$ para alguna función G definida en $[a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f = G(b) - G(a)$

Demostración: Como f es continua en $[a,b]$ entonces f es integrable en $[a,b]$. Definamos la función F en (a,b) por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f, x\in[a,b]$. Luego, por el *Primer teorema fundamental del cálculo*

$$\begin{aligned}&F'(x) = f(x), x\in[a,b]\\ &f(x) = G'(x), x\in[a,b]\text{esto es G es antiderivada de f}\end{aligned}$$

entonces $F'(x) = G'(x), x\in[a,b]$.
De esto, se cumple por el teorema de diferenciabilidad

$$F(x) = G(x) + C,,\ \text{C: constante para} x\in[a,b]$$

En particular para $x = a$ se tiene que $F(a) = G(a) + C$.
Pero $F(a) = \displaystyle\int_a^a = 0$.
En lo anterior $0 = G(a) + C$ de esto $0 = -G(a)$.
Así $F(x) = G(x) - G(a); x\in[a,b]$ en particular $F(b) = G(b) - G(a)$ pero $\displaystyle\int_a^b f$ por lo tanto $\displaystyle\int_a^b f = G(b) - G(a)$. ■

4.1.2. Segundo teorema fundamental del cálculo

Teorema 1.2: Segundo teorema fundamental del cálculo

Si f es una función integrable en $[a,b]$ y $f = G'$ para alguna función G en $[a,b]$ entonces $\displaystyle\int_a^b f = G(b) - G(a)$.

Demostración: Como la función G es diferenciable en $[a,b]$, entonces G es continua en $[a,b]$. Tomando una partición $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ de $[a,b]$ en cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]\,, k = 1,2,\cdots,n$ se puede aplicar el *Teorema del valor medio* existe $x_k^* \in]x_{k-1}, x_k[$ tal que

$$G'(x_k) = \frac{G(x_k) - G(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

definamos

$$\begin{aligned}&m_k = \inf\{f(x) \mid x\in[x_{k-1}, x_k]\}\\ &M_k = \sup\{f(x) \mid x\in[x_{k-1}, x_k]\}\end{aligned}$$

Como $m_k \le f(x_k) \le M_k$ multiplicando por $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \ge 0$ entonces $m_k\Delta x_k \le f(x_k)\Delta x_k \le M_k\Delta x_k \quad k = 1,2,\cdots,n$.
Sumando estas "n" desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(x)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$$

entonces

$$L(f,\mathcal{P}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(x)\Delta x_k \leq U(f,\mathcal{P})$$

donde

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(x)\Delta x_k &= \sum_{k=1}^{n} [G(x_k) - G(x_{k-1})] \\ &= G(x_n) - G(x_0) \quad \text{Propiedad telescópica} \\ &= G(b) - G(a).\end{aligned}$$

Así

$$L(f,\mathcal{P}) \leq G(b) - G(a) \leq U(f,\mathcal{P}) \quad \text{, para cualquier partición de } [a,b]$$

luego $G(b) - G(a)$ es cota superior de $\{L(f,\mathcal{P}) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\}$ entonces $\underline{\int_a^b} f \leq G(b) - G(a)$.

Además, $(G(b) - G(a))$ es cota inferior de $\{U(f,\mathcal{P}) \mid P \in \mathcal{P}[a,b]\}$ entonces $G(b) - G(a) \leq \overline{\int_a^b} f$, y como f es integrable en $[a,b]$ se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = G(b) - G(a) = \int_a^b f.$$

■

4.2. Cálculo de integrales definidas

4.3. Teorema del valor medio para integrales

4.4. Integración numérica

Este es uno de mis temas favoritos, en el capítulo X dijimos, un tanto despreocupadamente, que las integrales podían ser calculadas con tanta precisión como se deseara por medio del cálculo de sumas superiores y sumas inferiores. Pero un matemático aplicado, quien realmente tiene que efectuar los cálculos en lugar de hablar solo de los mismos, tal vez no se entusiasme con la idea de calcular sumas inferiores para calcular una integral, hasta, por ejemplo, el tercer decimal (una precisión que fácilmente se requiere en muchas aplicaciones). Los siguientes tres problemas muestran cómo métodos más refinados permiten hacer los cálculos de forma mucho más eficiente.

Debemos mencionar, en primer lugar que el cálculo de las sumas superiores e inferiores ni siquiera podría ser realizable, ya que podría no ser posible calcular las cantidades m_i y M_i para cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Es mucho más razonable seleccionar simplemente puntos x_k en $[x_{i-1}, x_i]$ y considerar $\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$. Esto representa la suma las áreas de algunos rectángulos que se superponen parcialmente a la gráfica de f. Pero vamos a obtener un resultado mucho mejor si en lugar elegimos los trapecios que se muestran en la figura siguiente:

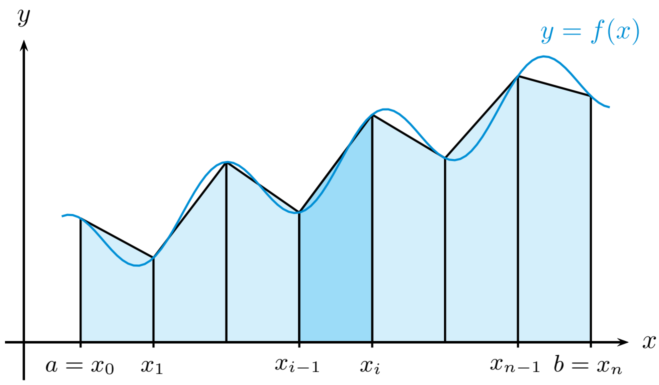


Figura 4.1: Ilustración de suma de trapecios de la función $f(x)$

Supongamos, en particular, que dividimos $[a, b]$ en n intervalos de igual longitud, por medio de puntos

$$x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right) = a + k\Delta x_k$$

Entonces el trapecio con base $[x_{k-1}, x_k]$ tiene un área de $\dfrac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot (x_k - x_{k-1})$ y la suma de todas estas áreas es simplemente

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_n &= h\left[\frac{f(x_1)+f(a)}{2} + \frac{f(x_2)+f(x_1)}{2} + \cdots + \frac{f(b)+f(x_{n-1})}{2}\right] \\ &= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b)\right], \qquad h = \frac{b-a}{n}.\end{aligned}$$

Este método aproximado para el cálculo de una integral se le denomina *regla del trapecio*.

Tenga en cuenta que para obtener $\sum_{2n}$ a partir de $\sum_n$ no es necesario volver a calcular de nuevos los antiguos $f(x_i)$, su contribución a la $\sum_{2n}$ es $\frac{1}{2}\sum_n$. Así que en la práctica es mejor calcular $\sum_2, \sum_4, \sum_8, \ldots$, para obtener aproximaciones a $\displaystyle\int_a^b f$. En el siguiente problema estimaremos $\displaystyle\int_a^b f - \sum\nolimits_n$. Veamos con un ejemplo cómo se maneja en la práctica. Suponga que f'' es continua. Sea P_i la función lineal que coincide con f en x_{k-1} y x_k. Demuestre que si n_k y N_k son el mínimo y el máximo de f'' en $[x_{k-1}, x_k]$ e

$$I = \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})\,\mathrm{d}x$$

entonces

$$\frac{n_k I}{2} \geq \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f - P_k) \geq \frac{N_k I}{2}$$

. Estime I para obtener

$$-\frac{n_k h^3}{12} \geq \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f - P_k) \geq \frac{N_k h^3}{12}.$$

Concluya que existe un c en (a, b) con

$$\int_a^b f = \sum\nolimits_n - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c).$$

Observe que el "error residual" $(b-a)^3 f''(c)/12n^2$ varia proporcionalmente a $1/n^2$ (mientras que el error obtenido empleando sumas superiores e inferiores ordinarias varia proporcionalmente a $1/n$).

Podemos obtener resultados aún más precisos si aproximamos f mediante funciones cuadráticas en vez de funciones lineales. En primer lugar, consideremos lo que ocurre cuando dividimos el intervalo $[a, b]$ en dos intervalos iguales. Ver la siguiente figura:

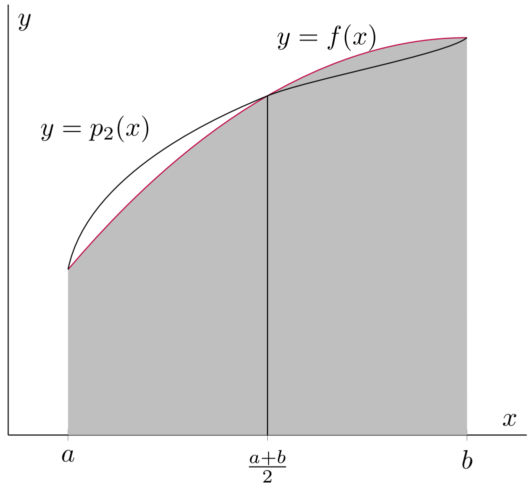


Figura 4.2: Ilustración de la regla de Simpson

Suponga en primer lugar que $a = 0$ y $b = 2$. Sea P el polinomio de grado ≤ 2 que coincide con f en $0, 1 y 2$. Demuestre que

$$\int_0^2 P = \frac{1}{3}\left[f(0) + 4f(1) + f(2)\right].$$

Concluya el caso general

$$\int_a^b P = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right]$$

Naturalmente $\int_a^b P = \int_a^b f$ si f es un polinomio de segundo grado. Pero, de forma remarcable, ¡la misma relación se cumple si f es un polinomio de tercer grado! Demuestre esto, utilizando el problema dos anterior, observe que f''' es una constante. El problema anterior demuestra que no hemos de hacer ningún nuevo cálculo para hallar $\int_a^b Q$ cuando Q es un polinomio cúbico que coincide con f en a, b, y $\frac{a+b}{2}$ todavía tenemos que

$$\int_a^b Q = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Pero hay muchos más casos en la elección Q, que podemos utilizar a nuestro favor:

(a) Demuestre que existe un polinomio de tercer grado Q tal que

$$Q(a) = f(a), \qquad Q(b) = f(b), \qquad Q\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$Q'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Indicación: Claramente $Q(x) = P(x) + A(x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$ para alguna función A.

(b) Demuestre que si $f^{(4)}$ está definida en $[a, b]$, entonces para cada x en $[a, b]$ tenemos

$$f(x) - Q(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)\frac{f^{(4)}}{4}$$

para algún ξ en (a, b).

(c) Concluya que si $f^{(4)}$ es continua, entonces

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(c)$$

para algún c en (a,b).

(d) Ahora divida $[a,b]$ en $2n$ intervalos mediantes los puntos

$$t_k = a + kh \qquad h = \frac{b-a}{2n}$$

Demuestre la regla de Simpson:

$$\int_a^b = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + \sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(b)\right) - \frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\hat{c})$$

para algún $\hat{c}$ en (a,b).

En esta sección nos concentraremos en las integrales definidas. Las entradas son $y(x)$ y dos puntos terminales a y b. La salida es la integral I. Nuestro objetivo es encontrar el número $\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x = I$, con precisión en un corto tiempo. Normalmente este objetivo se logra, tan pronto tengamos un buen método para calcular integrales. Nuestras dos aproximaciones son muy débiles. La búsqueda de una antiderivada ocurre en casos importantes, en el capítulo 7 extenderemos el rango, pero generalmente $f(x)$ no está disponible. La otra aproximación (por rectángulos) está en la dirección correcta, pero es muy tosca. La altura es el conjunto de $y(x)$ de derecha a izquierda para cada pequeño intervalo. La derecha a izquierda regla del rectángulo suma áreas (Δ veces y):

$$R_n = (\Delta x)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \quad \text{y} \quad L_n = (\Delta x)(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}).$$

El valor de $y(x)$ al final del intervalo j es y_j. El valor del extremo izquierdo $y_0 = y(a)$ ingresa a L_n. Con n intervalo de igual longitud

4.4.1. Aproximación del trapecio

4.4.2. Regla de Simpson

4.4.3. Teorema del cambio de variable de una integral definida

Capítulo 5

Técnicas de integración

Capítulo 6

El logaritmo y la exponencial

La tendencia en los últimos años ha sido la introducción de las funciones logaritmo y exponencial más temprano en cursos de cálculo diferencial de lo que se había acostumbrado en décadas anteriores. La motivación para esto viene de querer hacer estas funciones altamente útiles disponibles para el uso en ejemplos y aplicaciones tan pronto como sea posible. Esta situación se ha traducido en una situación ligeramente vergonzosa: estas funciones se introducen y utilizan antes de que se hayan definido rigurosamente. Se les pide a los estudiantes que crean afirmaciones sobre la existencia y continuidad de estas funciones, y los límites relacionados, sobre la base de argumentos de plausibilidad.
En este capítulo definiremos las funciones logaritmo, exponencial y las funciones trigonométricas. Pedimos pruebas rigurosas de sus propiedades, bien conocidas de su curso de cálculo diferencial y se utilizan rutinariamente a través del cálculo. La sección puede ser cubierta ligeramente en clase, asignada como un proyecto de lectura independiente, u omitida completamente. No hay ningún ejercicio establecido en esta sección; en su lugar, se le pedirá que rellene las pruebas de los resultados declarados, pero no se demostró en el texto. Seguramente está familiarizado con la definición de e^x como la inversa de la función $\ln x$, que se define en cursos de cálculo elemental por una integral. Pero puede que no esté familiarizado con la definición de $\operatorname{sen} x$ como la inversa de una función definida por una integral. De hecho, puede estar intrigado por el hecho de que en los cursos de cálculo diferencial parece que aceptamos la función trigonométrica sin definición. Es decir, parece que asumimos que están definidos en algún lugar fuera del cálculo. Estamos a punto de remediar esta situación.

6.1. La función logaritmo natural

En esta sección se muestra que, además de proporcionar definiciones de las funciones logarítmicas y exponenciales, la integral de Riemann nos permite dar definiciones de las funciones trigonométricas. Utilizaremos la integral para definir estas funciones y esbozar las pruebas de sus propiedades fundamentales. Llamamos a estas funciones "trascendentales", porque sus valores no pueden ser calculados como raíces de ecuaciones polinómicas con coeficientes racionales.

Definición 1.1: Función logaritmo natural

La función **logaritmo natural** $\ln x\colon\ (0,\infty)\to\mathbb{R}$ se define por

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad (\text{para } x > 0).$$

Observación 1.1

(a) $\ln x$ existe para todo $x > 0$.

(b) $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$; $\ln x = 0$ si $x = 1$; $\ln x > 0$ si $x > 1$.

(c) $\ln x$ es continua y estrictamente creciente en $(0, \infty)$.

(d) $\ln x$ es diferenciable en $(0, \infty)$ y $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \dfrac{1}{x}$.

(e) Se integra la función $f(t) = \dfrac{1}{t}$.

* Si $x > 1$: $A(\mathcal{R}) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x) - \ln(1)$.

* Si $x < 1$: $A(\mathcal{R}) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} = -\int_1^x \frac{dt}{t} = -\ln(x)$

Teorema 1.1: Leyes de logaritmos

$\forall x, y \in (0, +\infty)$, y $\forall n \in \mathbb{N}$,

(a) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

(b) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

(c) $\ln(x^n) = n \ln x$

(d) $\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x$

(e) $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$

(f) $\ln(x^r) = r \ln x, \forall x \in \mathbb{Q}$

Demostración de (a): Sea $y > 0$ fijo. Por el teorema **??**, $\forall x > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x},$$

y por la regla de la cadena,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(xy) = \frac{1}{xy} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy) = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}.$$

Dado que $\ln x$ y $\ln(xy)$ tienen la misma derivada, ellas deben diferenciarse por una constante. Esto es, $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x > 0, \ln(xy) = \ln x + C. \tag{6.1}$$

Tomando $x = 1$, encontramos que $\ln y = C$. Conectando este resultado dentro de 6.1, tenemos $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. ■

Demostración de (f): Sea $r \in \mathbb{Q}$ fijo. Por la regla de la cadena, $\forall x > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x^r) = \frac{1}{x^r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r) = \frac{1}{x^r} \cdot r x^{r-1} = \frac{r}{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} r \ln x.$$

Dado que $\ln(x^r)$ y $r \ln x$ tienen la misma derivada, ellas deben diferir por una constante. Esto es, $\exists C \in \mathcal{R}$ tal que

$$\ln(x^r) = r \ln x + C. \tag{6.2}$$

Tomando $x = 1$, encontramos que $0 = C$. Conectando con 6.2, tenemos $\ln(x^r) = r \ln x$. ■

Observación 1.2: El número e

En cálculo, definimos e como el número que satisface la ecuación $\ln x = 1$.

En cursos de cálculo usualmente justificamos la existencia de este número apelando al teorema del valor intermedio. Dado que $\ln x$ es continua en $(0, \infty)$, y el $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, y $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, concluimos del teorema del valor intermedio que debe existir un número real x tal que $\ln x = 1$. Para justificar la unicidad de tal número, observamos que $\ln x$ es estrictamente creciente, así que debe ser $1-1$ (inyectiva). Sin embargo, no podemos tomar este enfoque aquí. Esto se debe a que ya hemos definido e por un procedimiento diferente en cálculo diferencial. Eso es lo que hacemos a continuación.

Teorema 1.2

$\ln e = 1$, donde $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ de la definición en cálculo diferencial.

Demostración. Por la definición de e, $\ln e = \ln\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$. La función $\ln x$ es continua en $(0,+\infty)$, por lo tanto es continua en e. La sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ converge a e. Así, por el criterio de sucesiones para continuidad implica que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$. Esto es,

$$\begin{aligned}\ln e &= \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

Ahora, por la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el criterio de sucesiones para límites de funciones al ∞

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1. \tag{6.3}$$

Conectando el resultado 2.1 en 1.2, tenemos $\ln e = 1$. ■

Corolario

(a) $\forall r\in\mathbb{Q}, \ln(e^r) = r$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$;

(d) El rango de $\ln\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ es $\mathbb{R}$; el gráfico es como se muestra en la figura 6.1.

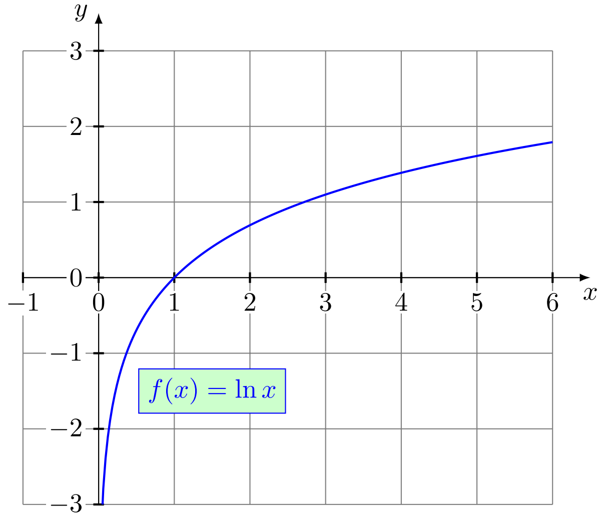


Figura 6.1: Funcion logaritmo natural

6.1.1. Derivadas e integrales

6.1.2. Logaritmo en otras bases

6.2. La función exponencial

Definición 2.1: La función $\exp(x)$

Dada la función $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es continua, estrictamente creciente, $1-1$ (inyectiva) y sobre. De cálculo diferencial conocemos el siguiente "*Teorema de la función inversa para funciones monótonas continuas*" que nos asegura que tiene una inversa $\ln^{-1}\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ que es continua, estrictamente creciente, $1-1$ y sobre. Denotaremos la inversa (temporalmente) por

$$\mathbf{exp(x)} = \ln^{-1} x.$$

Esto es, $y = \exp(x)$ si y solo si $x = \ln y$.

Teorema 2.1: Teorema de la función inversa para funciones monótonas continuas

Suponga que I es un intervalo no vacío y $f\colon I \to \mathbb{R}$ es continua y estrictamente monótona. Entonces $f^{-1}\colon f(I) \to I$ es continua y estrictamente monótona en el mismo sentido. ¡$(f(I) es un intervalo)$!

Demostración. Supongamos que I es un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$ es continua y estrictamente creciente. Entonces $f\colon I \to f(I)$ es una correspondencia $1-1$ y por lo tanto tiene inversa, $f^{-1}\colon f(I) \to I$, cual es también $1-1$ y sobre. Por otro lema de cálculo diferencial, f^{-1} es estrictamente creciente en $f(I)$. Por lo tanto, por el teorema que versa: si f es monótona en un intervalo y su imagen es un intervalo, entonces f es continua; $f^{-1}\colon f(I) \to I$ es continua en $f(I)$. ■

Observación 2.1

(a)

$$\begin{aligned} \exp x &> 1, \ \text{si } x > 0. \\ \exp x &= 1, \ \text{si } x = 0. \\ 0 < \exp x &< 1, \ \text{si } x < 0. \end{aligned}$$

(b) $\forall r \in \mathbb{Q}, \exp(r) = e^r$.

(c) Para cualquier sucesión $\{r_n\}$ de números racionales que convergen a x, $\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \exp(r_n) = \lim_{n\to\infty} e^{r_n}$.

Definición 2.2: La función e^x

Ahora llegamos al problema de definir e^x, para números reales arbitrarios x (en particular, para números irracionales x) de tal manera que nuestra definición sea consistente con las definiciones previamente acordadas.
Extendemos esto a todos los números reales x definiendo

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \exp(x).$$

Como hemos señalado anteriormente, para cualquier número racional r, $e^r = \exp(r)$. Por lo tanto, e^x y $\exp(x)$ son continuas en todas partes en $\mathbb{R}$ y como $\mathbb{Q}$ es un conjunto denso allí, es decir, de acuerdo al teorema de "Cálculo diferencial". Independientemente de si estudiamos o no el teorema en mención, vemos que la función e^x y $\exp(x)$ son idénticas. Por consiguiente, ya no utilizaremos la notación $\exp(x)$; usaremos exclusivamente e^x.

Teorema 2.2: Densidad de conjuntos

Supongamos que f y g son continuas en un conjunto A y $f(x) = g(x)$ para todo x en un subconjunto denso de A. Probar que $f(x) = g(x)$ para todo x en A.

6.2.1. Derivadas e integrales

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}, \quad x > 0.$$

(1) $\ln(1) = \displaystyle\int_1^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0.$

(2) Se tiene que probar que

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \quad a > 0, b > 0.$$

Sea $f(x) = \ln(ax)$, derivando $f'(x) = \dfrac{1}{ax} \cdot a = \dfrac{1}{x}$ donde $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \dfrac{1}{x}$,
entonces $f(x) = \ln(x) + C$, C: constante (Por teorema de cálculo diferencial).
Reemplazando:

$$\ln(ax) = \ln x + C$$

tomando $x = 1$:

$$\ln(a \cdot 1) = \ln(1) + C$$

$$\ln(a) = 0 + C \implies c = \ln(a)$$

Así, $\ln(ax) = \ln x + \ln a$ haciendo $x = b$:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

(3) $\ln(a^n) = n\ln(a), n \in \mathbb{N}$ Demostración por inducción.

(4) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

Definición 2.3: Número e

Se define un número e tal que se cumple

$$1 = \ln e = \int_1^e \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Probar que: $e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$

Demostración. $D_x = \ln x = \frac{1}{x}, x > 0$
$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-h(x)}{h} = \frac{1}{x}$.
Para $x = 1$, se define:

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}\\
1 &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\ln\left(\frac{1+h}{1}\right)\\
1 &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\ln(1+h)\\
1 &= \lim_{h\to 0}\ln(1+h)^{1/h}\\
1 &= \ln\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}\right)
\end{aligned}$$

entonces

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$$

■

Además

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t < 1(2-1) = 1 = \ln(e) = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\Big|_1^1 \tag{6.4}$$

Una suma superior para una partición $\{1,2\}$ de $[1,2]$.
Una suma inferior para una partición $\{1,2,4\}$ de $[1,4]$ se tiene

$$\frac{1}{2}(2-1)+\frac{1}{4}(4-2) < \int_1^4 \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

esto es,

$$1 < \int_1^4 \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

entonces

$$1 = \ln(e) = \int_1^e \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t < \int_1^4 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \tag{6.5}$$

De (6.4) y (6.5)

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t < \int_1^e \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t < \int_1^4 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

entonces $2 < e < 4$. Como la función $\ln$ es creciente en todo $\mathbb{R}$, entonces la función $\ln$ es inyectiva. De esto, la función $\ln$ tiene una función inversa.

Definición 2.4: Función exponencial

Se define la función exponencial $\exp$ como la función inversa de la función logaritmo.

$$\exp(x) = \ln^{-1}(x)$$

1 dom (exp) = Ran (ln) = $\mathbb{R}$.

2 Ran (exp) = Dom (ln) = $(0, \infty)$.

3 $\exp(\ln(x)) = x, x > 0$.

4 $\ln(\exp(x)) = x, x \in \mathbb{R}$.

Propiedad:

$$\boxed{D_x(\exp(x)) = \exp(x)}$$

Demostración. Aplicando el teorema de la función inversa

$$\begin{aligned} D_x(\exp(x)) &= \frac{1}{D_x(\ln(x))|_{x=\exp}} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)|_{x=\exp}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} \\ &= \exp(x) \end{aligned}$$

de esto

$$\int \exp(x)\,\mathrm{d}x = \exp(x) + C.$$

Como $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\exp(x)) = \exp(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
entonces la función exp es creciente en $\mathbb{R}$. ■

Teorema 2.3: Propiedad

$$\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$$

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} x &= \exp(a) \quad \text{entonces} \quad a = \ln(x). \\ y &= \exp(b) \quad \text{entonces} \quad b = \ln(y). \end{aligned}$$

Luego $\exp(a + b) = \exp(\ln(x) + \ln(y) = \exp(\ln(x \cdot y)) = x \cdot y = \exp(a) \cdot \exp(b)$ ■

Como se definió la cantidad e como $1 = \ln(e)$, entonces $\exp(e) = 1$, de esto

$$\begin{aligned} \exp(r) &= \exp(\underbrace{1 + 1 + 1 \cdots + 1 + 1}_{\text{´}r\text{ˇ veces}}) \\ &= \underbrace{(\exp(1) \cdot \exp(1)\exp(1) \cdots \exp(1) \cdot \exp(1))}_{\text{´}r\text{ˇ veces}} \\ &= \exp(1)^r \\ &= e^r, \quad r \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

de esto, se extiende a

$$\boxed{\exp(x) = e^x, x \in \mathbb{R}}$$

Gráfica de la función exponencial
De esto se observa que:

$y = 0$ es asíntota horizontal a la gráfica de las funciones exp.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^x = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty}$$

Para $a > 0, a \neq 1$, se define la función $f(x) = a^x$, donde

$$\begin{aligned} a^x &= \exp\left(\ln(a^x)\right) \\ &= \exp\left(\exp(x \ln(a))\right) \\ a^x &= e^{x \ln a} \end{aligned}$$

donde su dominio es $\mathbb{R}$ y su rango es $(0, +\infty)$.
De todo lo anterior, se obtiene:

$$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C, \text{ C: constante}$$

$$\int_a^b e^x \, \mathrm{d}x = e^b - e^a.$$

$$\boxed{\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C, \text{ C: constante}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = \ln(a) \cdot a^x}$$

Ejemplos:

(1) $\int 3^x \, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln(3)} 3^x + C$, C: constante

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5^x)) = \ln(5)5^x$.

Veamos que:

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Ejemplo:

(1) $2^x = e^{x \ln 2}$

(2) $3^x = e^{x \ln 3}$

(3) Gráfica

Observación 2.2: Sobre la función a^x

$f(x) = a^x$ se tiene que f es creciente para $a > 0$ pero decreciente para $a \in (0, 1)$.

Definición 2.5: Función exponencial generalizada

Dadas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

6.2.2. Función exponencial generalizada

6.3. Funciones hiperbólicas directas e inversas

6.3.1. Derivadas e integrales

Capítulo 7

Área y volúmenes

7.1. Área de regiones planas (coordenadas cartesianas)

7.2. Volúmenes de sólidos con secciones planas paralelas

7.3. Volumen de sólidos de revolución

7.3.1. Método del disco

7.3.2. Método de las capas cilíndricas

Capítulo 8

Coordenadas polares, longitud de arco y áreas de superficies de revolución

8.1. Sistema de coordenadas polares

8.1.1. Fórmulas de transformación

8.1.2. Gráficas en coordenadas polares

8.1.3. Intersección de gráficas en coordenadas polares

8.1.4. Tangentes a curvas polares

8.1.5. Cálculo de áreas en coordenadas polares

8.2. Longitud de arco de una curva paramétrica en coordenadas cartesianas

8.2.1. Aeiou

Apéndice A

Tabla de integrales

Apéndice B

Una introducción a la interpolación con splines cúbicos

El ajuste de curvas que pase por puntos especificados en el plano es un problema común que se encuentra en el análisis de datos experimentales, al establecer las relaciones entre las variables, y en el trabajo de diseño.

B.1. Interpolación con splines cúbicos

Dados n puntos $(x_1, y_1), \ldots,$

Apéndice C

Una introducción al Método de los Elementos Finitos (MEF)

En este capítulo estudiaremos la *Teoría de las ecuaciones en Derivadas Parciales*, tendremos en cuenta que la simulación nunca contradice el modelo (solo reproduce lo que **está en el modelo**), mientras que el experimento no depende del modelo, sino de la realidad.
Los tres pilares de la ciencia.

	Computación vs Experimentos
Costos	Se pueden probar con diferentes materiales. Por ejemplo el precio de la antimateria es de $\$62.5\,\mathrm{B}/$gramo.
Experimentos peligrosos	Por ejemplo dentro del cuerpo humano.
Imposibilidad	Por ejemplo a escalas muy pequeñas.
Variedad	Te permite estudiar diferentes modelos/parámetros de optimización.
Control del error	Controlo el error, error de la medida.

C.1. Problema bien propuesto

C.1.1. Condiciones de Newmann

C.1.2. Condiciones de Dirichlet

C.1.3. Condiciones de Robin

C.2. Formulación variacional

C.3. Derivadas débiles y espacios de Sobolev

C.4. Lema de Lax-Milgram

C.5. Desigualdad de Poincaré

C.6. Condiciones de frontera

C.7. Ecuación de Laplace

Las ecuaciones diferenciales parciales son las ecuaciones diferenciales que contienen las derivadas de las funciones desconocidas con respecto a varias variables (temporales o espaciales). En particular, si denotamos por u la función desconocida en $d+1$ variables independientes $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_d)^T$ y t, denotaremos por

$$\mathcal{P}(u,g) = F\left(\boldsymbol{x}, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_d}, \ldots, \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_d+p_t} u}{\partial {x_1}^{p_1} \ldots \partial {x_d}^{p_d} \partial t^{p_t}}, g\right) = 0 \qquad \text{(C.1)}$$

una EDP genérica, g será el conjunto de datos en el cual la EDP dependa, cuando $p_1, \ldots, p_d, p_t \in \mathbb{N}$.

Diremos que es el *orden* q si q es el máximo valor tomado por el entero $p_1 + p_2 + \cdots + p_d + p_t$.

Ejemplo 7.0: Ecuación de transporte

Una ecuación lineal de primer orden es la *ecuación de transporte*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\beta u) = 0, \qquad \text{(C.2)}$$

denotado por

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \qquad \boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_d)^T,$$

el *operador divergencia*. Integrado sobre una región $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, expresa la conservación de masa de un sistema material (un medio continuo) ocupando la región Ω. La variable u es la densidad del sistema, cuando $\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ es la velocidad de una partícula en el sistema que ocupa la posición $\boldsymbol{x}$ en el tiempo t.

Ejemplo 7.2

Las ecuación de segundo orden incluyen:
la *ecuación potencial*

$$-\Delta u = f, \qquad \text{(C.3)}$$

que describe la difusión de un fluido en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ homogénea e isotrópica, pero también el desplazamiento vertical de una membrana elástica;
la *ecuación de calor* (o *difusión*)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f; \qquad \text{(C.4)}$$

la *ecuación de la onda*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0. \qquad \text{(C.5)}$$

Denotaremos por

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

al *operador de Laplace* (*Laplaciano*).

Índice