Práctica calificada de Cálculo Integral

Facultad de Ciencias - Universidad Nacional de Ingeniería - Lima - Perú
Descarga la versión actualizada en `http:/github.com/carlosal1015`

Actualizado al 13 de abril de 2017.

Ejercicio 0.1 Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x > 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

Determine si f tiene antiderivada, en caso que la tenga muestre una. Justifique su respuesta.

Ejercicio 0.2 Integrar

$$\int \sqrt{x}\sqrt{1+x\sqrt{x}}\,dx$$

Solución :
Sea

$$u = \sqrt{x}.$$

$$du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dx}{du}.$$

Entonces,

$$I = \int u\sqrt{1+u^2\cdot u}\,(2u\,du)$$

Sea

$$w = 1+u^3$$

$$dw = 3u^2\cdot du \implies \frac{dw}{3} = u^2\,du.$$

Entonces,

$$I = 2\int(\frac{dw}{3}\cdot\sqrt{w}) = \frac{2}{3}\int w^{1/2}\,dw = \frac{2}{3}\frac{w^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + K = (\frac{2}{3})^2\cdot w^{3/2} + K.$$

Reemplazando:

$$I = (\frac{2}{3})^2\,[(1+u^3)]^{3/2} + K.$$

Seguimos reemplazando,

$$I = (\frac{2}{3})^2\,[(1+\sqrt{x}^3)]^{3/2} + K. \blacksquare$$

Ejercicio 0.3 Halle la antiderivada de

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$$

tal que dicha antiderivada pasa por el punto $P(0, \frac{709}{280})$.
Solución :
Bien, nuestra estrategia será:

$$I = \int f(x) = \int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$$

Resolviendo la integral ***Naranja***

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x} dx}.$$

Integrando por partes:

$$u = x^2 \qquad dv = \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}}$$

$$du = 2x\ dx \qquad v = \frac{3}{2}(1+x)^{2/3}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x} dx} = x^2 \cdot \frac{3}{2}(1+x)^{2/3} - \int \frac{3}{2}(1+x)^{2/3} \cdot 2x\ dx = \frac{3}{2}x^2(1+x)^{2/3} - 3\int x(1+x)^{2/3}\ dx$$

Pero,

$$\int x(1+x)^{2/3}\ dx$$

$$u = (1+x)^{1/3} \implies u^6 = (1+x)^2, \text{ diferenciando}$$

$$6u^5\ du = 2(1+x)\ dx, \text{ pero } (1+x) = u^3$$

$$3u^2\ du = dx$$

⋆ Integral *Naranja*

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}\ dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

⋆ Integral *Celeste*

Figura 1: Integral

Ejercicio 0.4   Halle la antiderivada general de

$$f(x) = \arctan\sqrt{x}\,dx$$

Solución :
Usemos el método de sustitución:

$$u = \sqrt{x} \implies du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Y reemplazamos la variable u x:

$$I = \int \arctan u \cdot 2u\;du = 2\int u \arctan u\;du.$$

Empleamos la técnica de integración por partes:

$$\alpha = \arctan u \qquad d\beta = u\,du$$
$$d\alpha = \frac{du}{1+u^2} \qquad \beta = \frac{u^2}{2}$$

Entonces nos queda:

$$I = 2[\arctan u \cdot \frac{u^2}{2} - \int \frac{u^2}{2}\cdot\frac{du}{1+u^2}] = u^2 \arctan u - \int \frac{u^2\;du}{1+u^2}$$

Y sustituimos

$$u^2 = t \implies 2u\;du = dt.$$

Reemplazamos la variable de integración u por t y denominemos Ω a la siguiente integral:

$$\Omega = \int \frac{t\cdot\frac{dt}{2}}{1+t} = \frac{1}{2}\int\frac{t\;dt}{1+t}.$$

Pero por división sintética (ver figura 2): $\frac{t}{1+t} = 1 + \frac{-1}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ y nos quedaría:

$$\Omega = \frac{1}{2}\int\frac{t\;dt}{1+t} = \int dt - \int\frac{dt}{1+t} = t - \ln|1+t| + K = u^2 - \ln|1+u^2| + K_1.$$

Por último reemplazamos Ω en I y lo expresamos en la variable x:

$$I = \frac{1}{2}u^2\arctan u - \Omega = \frac{1}{2}u^2\arctan u - [u^2 - \ln|1+u^2| + K_1.]$$

$$I = \frac{1}{2}x\arctan\sqrt{x} - [x - \ln|1+x| + K_1.]$$

$$I = \frac{1}{2}x\arctan\sqrt{x} - x + \ln|1+x| + K. \blacksquare$$

Ejercicio 0.5   Calcule

$$\begin{array}{r|r} t & t+1 \\ \cline{2-2} -\quad t+1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

Figura 2: División sintética de $\dfrac{t}{1+t}$

$$I = \int e^{ax} \cos bx \; dx$$

Solución :
Usemos el método de integración por partes (IPP).

$$\begin{aligned} u &= e^{ax} & dv &= \cos(bx)\, dx \\ du &= e^{ax} a\, dx & v &= \frac{\sin(bx)}{b} \end{aligned}$$

Luego,

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin(bx).$$

Ahora vamos a integrar por partes a

$$\int e^{ax} \sin(bx)$$

$$\begin{aligned} u &= e^{ax} & dv &= \sin(bx)\, dx \\ du &= e^{ax} a\, dx & v &= -\frac{\cos(bx)}{b} \end{aligned}$$

Luego nos queda:

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \frac{a}{b} [e^{ax} \frac{-\cos(bx)}{b} - \int \frac{-\cos(bx)}{b} e^{ax} a\, dx]$$

$$I = \frac{e^{ax} \sin(bx)}{b} - \frac{a}{b} [e^{ax} \frac{-\cos(bx)}{b}] - (\frac{a}{b})^2 I$$

Despejando y simplificando nos quedará:

$$I = \frac{\frac{1}{b} [e^{ax} \sin(bx) + \frac{a}{b} e^{ax} \cos(bx)]}{1 + (\frac{a}{b})^2} + K.$$