Tercera práctica dirigida de Cálculo integral
CM 132 Ciclo 2017-2

FACULTAD DE CIENCIAS | UNI

Undg. Carlos Alonso Aznarán Laos
E-mail: caznaranl@uni.pe
Science Department, National University of Engineering

Temas: Integración numérica, la función logaritmo y la función exponencial

---

1. Aproxime con la Regla del Trapecio y de Simpson, con $n = 8$ subintervalos el valor de cada integral:

   (a) $\displaystyle\int_1^3 (x^3+1)\,\mathrm{d}x.$

   (b) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x.$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

   (d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}.$

   (e) $\displaystyle\int_0^2 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x.$

   (f) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\pi+x}\,\mathrm{d}x.$

Solución:

2. La longitud de una curva $C\colon y = g(x)$ para $x \in [a,b]$ está dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(g'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

   (a) Aproxime la longitud de la curva $C : y = \operatorname{sen}^2(x)$ para $x \in [0,\pi]$ usando la regla del trapecio con 6 subintervalos.

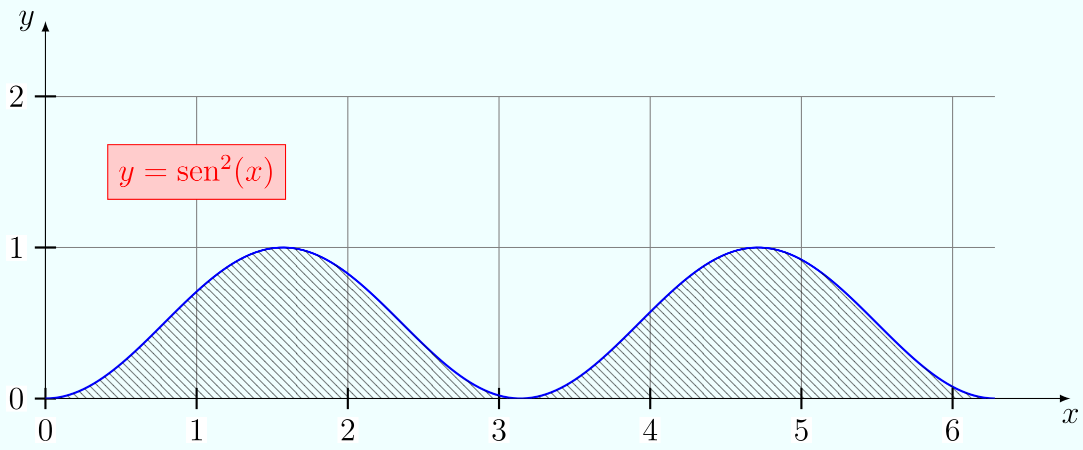
   (b) Estime el error cometido.

3. La función de densidad de una distribución normal de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2}.$$

La probabilidad de que x esté en el intervalo $[a,b]$ es $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Aproxime la probabilidad de que $0 \leq x \leq 1$ por el método de Simpson con $n = 6$.

Solución:



Sabemos que

$$\boxed{m_i = \text{ínf}\{f(x) \colon t \in [x_{i-1}, x_i]\}}$$

$$\boxed{M_i = \sup\{f(x) \colon t \in [x_{i-1}, x_i]\}}$$

4. Integración Elíptica: La longitud de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^{2(t)}}\, \mathrm{d}t$$

donde $e = \frac{b}{a}$ es la excentricidad de la elipse. La integral de la ecuación se denomina “Integrales elípticas”.

(a) Utilice la regla del trapecio con $n = 10$ para estimar la longitud de la elipse cuando $a = 1$, $e = 0{,}5$.

(b) Determine una cota superior para el error en la aproximación de la parte a).

5. Dada la función $f(x) = e^x - \mathrm{sen}(x)$.

(a) Encuentre el polinomio de Taylor $P(x)$ de orden 4 centrado en $x = 0$ y use este polinomio para calcular un valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\, \mathrm{d}x$.

(b) Pruebe que si $x \in [0, 1]$ entonces

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{x^5}{30}$$

y use este hecho para estimar el error en la aproximación efectuada en la parte a).

6. Sea la función $f(x) = (x^2 - 4)\, e^{2-x}$.

(a) Halle el polinomio de Taylor de orden 2 generado por la función f alrededor de $x_0 = 2$.

(b) Utilice el polinomio de Taylor hallado en a), para aproximar el valor de $f(2,1)$ y estime el error cometido en dicha aproximación. Considerar dos decimales.

7. Demuestre que para todo $x > 0, x \neq 1$:

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1.$$

Solución:

Hacemos

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(x) = x - 1 - \ln x & \Longrightarrow\ f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} \\ g(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} - 1 & \Longrightarrow\ g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \end{array}}$$

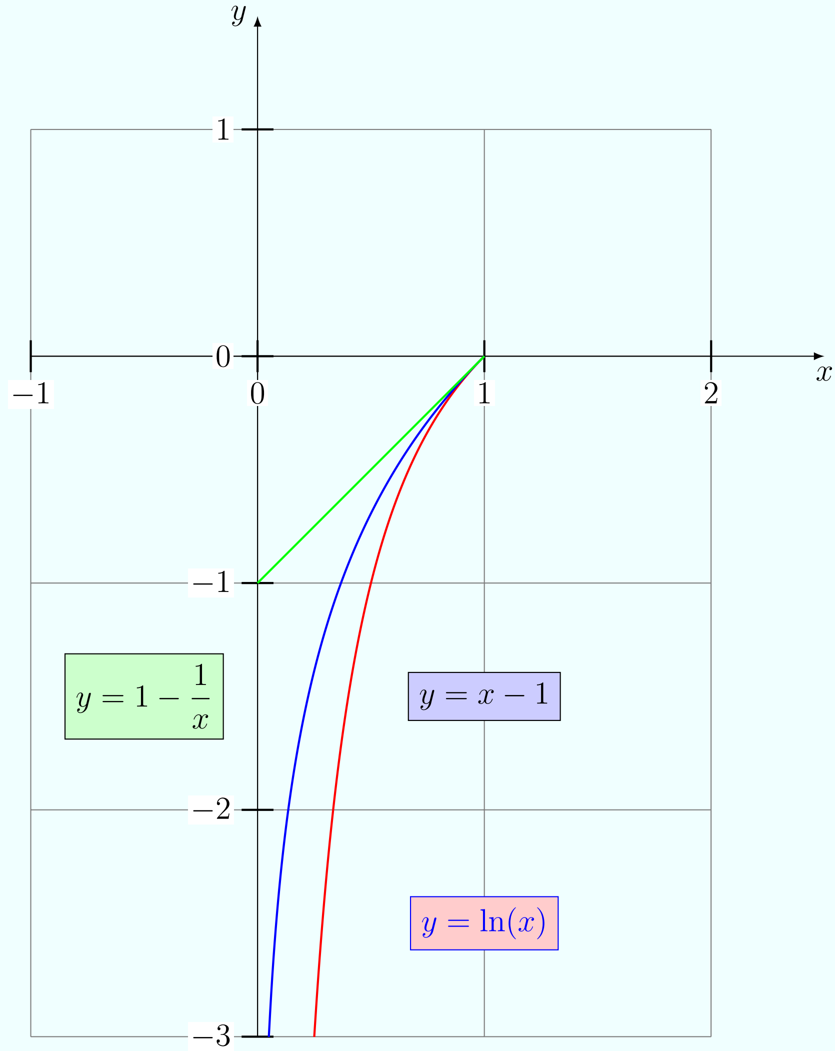
1° Cuando $x \in]1, +\infty[$

$$\begin{array}{rr} 0 < \dfrac{1}{x} < 1 & \text{pues } 1 < x < \infty \\ -1 < -\dfrac{1}{x} < 0 & \text{multiplicamos por } -1 \\ 0 < \underbrace{1 - \dfrac{1}{x}}_{f'(x)} & \text{sumamos } 1 \\ \Longrightarrow\ 0 < \underbrace{\displaystyle\int_0^x f't\,\mathrm{d}t}_{f(x)} & \text{obtenemos } f' \\ \Longrightarrow\ 0 < x - 1 - \ln x & \text{por el Primer T.F.C.} \end{array}$$

$\therefore \ln x < x - 1.$

2° Para $x \in]1, +\infty[\Longrightarrow \dfrac{1}{x} \in]0, 1[$.

$$\begin{array}{rr} 0 < \dfrac{1}{x} < 1 & \text{pues } 1 < x < \infty \\ -\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2} & \text{restamos } -\dfrac{1}{2} \\ 0 < \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 < \dfrac{1}{4} & \text{elevamos al cuadrado} \\ -\dfrac{1}{4} < \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 < 0 & \text{multplicamos por } -1 \\ 0 < \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 < \dfrac{1}{4} & \text{sumamos } \dfrac{1}{4} \end{array}$$



8. Demuestre que

   a) $\ln|\sec x| = -\ln|\cos x|$.
   b) $\ln|\cos x| = -\ln|\operatorname{sen} x|$.
   c) $\ln|\csc x - \cot x| = -\ln|\csc x + \cot x|$.
   d) $\ln|\sec x + \tan x| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right)$.

9. Demuestre que
$$\ln(x+\sqrt{x^2-1}) = -\ln(x-\sqrt{x^2-1})$$

10. Si $y = A\operatorname{sen} x(\ln x) + B\cos x(\ln x)$, pruebe que
$$x^2y''(x) + xy'(x) + y = 0$$

11. Evalúe las integrales

   a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}$.
   b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x$.
   c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\ln(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x$.

12. Demuestre que
$$\int \frac{1}{u^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

   a) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\ln(x)) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.
   b) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\ln(1-x)) = -\frac{(n-1)!}{1-x^n}$.

13. Evalúe las integrales

   a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.
   b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\ln\left(\frac{x}{x^2}+1\right)\right)$
   c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
   d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}$

14. Calcule las siguientes integrales

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x$
   b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\ln(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x$
   c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cot x\,\mathrm{d}x$
   d) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sec^2 x\,\mathrm{d}x$

15. Demuestre que
$$\ln x \leq \sqrt{x} - (1-\sqrt{x}), \quad \forall x \geq 1.$$

16. Demuestre que la ecuación $x2^x = 1$ tiene por lo menos una raíz positiva no mayor que 1.

17. Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

(b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x+1}}$.

(c) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\csc x}$.

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + 6x)}{x}$.

18. Evalúe

a) $\displaystyle\int x \ln x \, \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \ln \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int x \sec^2 x \, \mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \operatorname{arcsec} x \, \mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + e^x} \, \mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \ln(x + \sqrt{x}) \, \mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4^x - 1}} \, \mathrm{d}x$

19. Halle todas las constantes a y b tales que

$$e^x = b + \int_a^x e^{t \, \mathrm{d}t}$$

20. Evalúe $\displaystyle\int_{-8}^{-4\sqrt{2}} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 16}}$.

21. Halle una función $f(x)$ tal que $f'(x) = 4f(x)$, $f(1) = -e$.

Facultad de Ciencias, 26 de septiembre del 2017.

Referencias