UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICAS
[Código : CM132 Curso: Cálculo Integral]

$R \to R^2$

Quinta Práctica Dirigida

VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

1. Hallar el volumen de el elipsoide obtenido mediante la rotación de la región acotada por la curva $y = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ y el eje X, alrededor del eje X.

2. Se genera el volumen mediante la rotación del semiplano superior del área interior de la elipse
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$
sobre el eje X. Hallar tal volumen.

3. Dibujar la región finita acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ y el eje Y. Hallar el volumen V del sólido generado porla rotación de ésta región alrededor del eje X.

4. Sea R la región acotada por los eje, $x = 1$, y $y = (4-x^2)^{1/4}$. Hallar el volumen del sólido obtenido rotando R alrededor de
   (a) El eje X.
   (b) El eje Y.

5. Por el método de las capas cilindricas mostrar que el volumen del sólido generado cuando la región
$$R = \{(x, y)/\ 0 \le x \le y^{3/2},\ 0 \le y \le 3\}$$
es rotado 2π radianes sobre la recta $y = -1$ es $\frac{792\sqrt{3}\pi}{35}$.

6. Determine los volúmenes que generan:
   (a) La curva $y = e^x$, $1 \le x \le 2$, rotado alrededor de la recta $y = 1$.
   (b) La región acotada por los gráficos $f(x) = |x|$, y $g(x) = 2 - x^2$, gira alrededor del eje X.
   (c) El área acotada por la curva $y = \sqrt{x}e^{-x/2} (x \ge 0)$, $x = M(M > 0)$, y $y = 0$ rotado alrededor del eje X. (configurar la expresión de la integral que representa su volumen el cual depende de M y hallarlo cuando $M \to \infty$).

7. Un sólido de revolución se forma girando el área acotada por la parábola $y = 16 - x^2$ y el eje X, alrededor del eje Y. Hallar el radio del cilindro circular recto de volumen máximo el cual puede ser contenido en este sólido.

8. Expresar la ecuación $r = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$ en coordenadas rectangulares. ¿$(0, 0)$ es un punto de esta curva?

9. Pruebe que el volumen del cono esférico $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \le a^2, (a > 0)\ y\ 0 \le \cos^{-1}(x/\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \le \varphi\}$ es igual a $2\pi a^3(1 - \cos\varphi)/3$.

10. Sea $p, q, h \in \mathbb{R}$ con $0 < p < q$, y $h > 0$, y considerar el casquete cilíndrico
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ p \le \sqrt{x^2+y^2} \le q,\ 0 \le z \le h\}.$$

11. Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por los ejes coordenados y la curva de ecuación dada por $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $(a > 0)$ alrededor del eje OX.

12. Los semiejes positivos y un cuadrante de la astroide de ecuación $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$, delimitan una región de área A. Hallar el volumen que se genera cuando gira alrededor de OX.

13. Se considera el área S de la región limitada por un cuadrante de una circunferencia de radio R y las tangentes en sus extremos. Hallar el volumen que engendra S cuando gira en torno a una de las tangentes.

14. Calcular el volumen generado por un segmento circular de ángulo central 2α, con $\alpha < \pi/2$ y radio R al girar alrededor de su cuerda.

15. Volumen interior a la superficie de revolución cuyo meridiano es la astroide $x = a\cos^3\theta$, $y = a\operatorname{sen}^3\theta$, $z = \theta$. y el eje es la recta XY, $Z = 0$.

16. Hallar el volumen del toro de radios $R > r$.

17. Se considera el arco OAB de la parábola $y = x(x - a)$, con $OA = a > 0$ y $OC = c > a$. Determinar c de manera que el volumen de revolución generado por la región al girar en

Polar coordinate space

Change of variable

torno a OX, sea igual al volumen generado por el triángulo OCB girando en torno al mismo eje.

18. Determine el volumen del sólido onbtenido al girar alrededor del eje OY la región limitada por las parábolas $y = ax^2$, $y = b - cx^2$, con $a, b, c > 0$.

19. Se considera la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y la cuerda FC paralela al eje OX. Determinar $OA = h$ de manera que el volumen generado por la región al girar en torno a OX sea la mitad del volumen del elipsoide generado por el área que limita la elipse dada girando en torno al mismo eje.

20. Hallar el volumen del paraboloide de revolución cuya superficie es generada haciendo girar alrededor de su eje el arco de la parábola $y^2 = 2px$ comprendido entre el origen y el punto (x_1, y_1). Hallar ademas el volumen cuando gira alrededor del eje OY.

21. Hallar el volumen del sólido de revolución haciendo girar alrededor del eje OX la superficie limitada por los siguientes lugares geométricos:

    (a) la parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$; $x = 0$, $y = 0$.

    (b) La hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

    (c) $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$.

    (d) La bruja $(x^2 + 4a^2)y = 8a^3$, $y = 0$.

    (e) $y^2(4 + x^2) = 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 8$.

22. Hallar el volumen del sólido que se engendra haciendo girar alrededor de OY, la superficie limitada por los siguientes lugares geométricos:

    (a) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$.

    (b) $2y^2 = x^3$, $y = 0$, $x = 0$.

    (c) $y^2 = 9 - x$, $y = 0$, $x = 0$.

23. Hallar el volumen del esferoide achatado que se engendra haciendo girar alrededor del eje de las Y la superficie limitada por la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

COORDENADAS POLARES

Internet

1. Hallar la expresión en coordenadas polares la distancia de dos puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2).

2. Sea la ecuación de una curva en coordenadas polares $\rho = f(\theta)$. Demostrar que si ϕ es el ángulo que forman el radio vector OP y la tangente a la curva en P, entonces

$$\tan(\phi) = \frac{\rho}{\rho'}, \quad \textit{siendo } \rho' = \frac{d\rho}{d\theta}.$$

3. Hallar en coordenadas cartesianas las ecuaciones de los puntos de: a) $r = a\operatorname{sen}\theta$, b) $r = \cos(2\theta)$, c) $r = \operatorname{sen}(3\theta)$.

4. Esbozar la gráfica de la lemniscata $r^2 = 2a^2\cos(2\theta)$. Hallar la ecuación en coordenadas cartesianas. Sea el punto P en el plano cartesiano, y las distancias d_1, de P al punto $(-a, 0)$ y d_2 de P al punto $(a, 0)$. Demostrar que la lemniscata esta formada por los puntos P que cumplen $d_1.d_2 = a^2$. ¿Qué forma van a tener los puntos P que satisfacen $d_1d_2 = b$, siendo en cada caso $b > a^2$ y $b < a^2$.

5. Hallar las pendientes de las siguientes curvas en el punto indicado: a) $\rho = a(1 - \cos\theta)$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, b)$\rho = a\sec\theta)$, $\rho = 2a$, c) $\rho^2 = a^2\operatorname{sen}(4\theta)$, en el origen. d) $\rho = a^\theta$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

6. Hallar el ángulo de intersección de los pares de curvas:

    a) $\rho^2\operatorname{sen}(2\theta) = 4$, $\rho^2 = 16\operatorname{sen}(2\theta)$;

    b) $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $\rho = (1 - \cos\theta)$;

    c) $\rho^2\operatorname{sen}(2\theta) = 8$, $\rho = 2\sec\theta$.

7. Demostrar que los siguientes pares de curvas se cortan en ángulo recto: a) $\rho = a\theta$, $\rho\theta = a$, b) $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $\rho = a(1 - \cos\theta)$. c) $\rho^2 = \operatorname{sen}2\theta = a^2$, $\rho^2\cos 2\theta = b^2$.

8. Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ dado $r = \dfrac{2}{1 - \operatorname{sen}\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$. ¿En qué puntos del gráfico tiene la curva tangente horizontal y/o vertical?

9. Grafique $r = 7$, $r = 4\cos\theta$ y $r = -7\operatorname{sen}\theta$ en el mismo sistema de ejes.

10. Grafique $r = 5 - 5\operatorname{sen}\theta$, $r = 7 - 6\cos\theta$ y $r = 2 + 4\cos\theta$.

11. Determine la ecuación de la recta tangente a $r = 3 + 8\operatorname{sen}\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{6}$.

12. Determine la gráfica de la región:

    Method intersection between two curves

    (a) $r = 4\operatorname{sen}\theta$.

    (b) $r = 1 + \cos\theta$.

    (c) $r = 2\cos 4\theta$.

    (d) $r = 3\operatorname{sen}4\theta$.

    (e) Región dentro de $r = 2\operatorname{sen}\theta$ y fuera de $r = 1$.

    (f) Dentro de $r = \cos\theta$ y fuera de $r = \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta$.

    (g) Dentro de $1 + \cos\theta$ y fuera de $r = \cos\theta$.

    (h) Dentro de $r^2 = \cos 2\theta$ y fuera de $r^2 = \operatorname{sen}2\theta$.

    (i) La región interior a las curvas $r = 3 + \cos 4\theta$ y $r = 2 - \cos 4\theta$.

6 de Junio (10p) (1h)