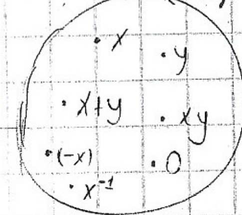
Resumen

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$



Obs:

Sean $x, y \in \mathbb{K}$

$$x - y = x + (-y)$$

$$y \neq 0, \quad \frac{x}{y} = x \cdot (y^{-1})$$

Ejemplo ①

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Donde:

$\mathbb{R}$: números reales

$+, \cdot$ suma usual y multiplicación usual.

Ejemplo ②

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

Suma

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{bd}$$

Multiplicación

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Elemento neutro aditivo (E.N.A.)

Sea $b \in \mathbb{K}$, $b \neq 0$

$$E.N.A. = \frac{0}{b}$$

Elemento Inverso Aditivo (E.I.A)

Sea $\frac{a}{b} \in \mathbb{K}$, $b \neq 0$

$$E.I.A. = -\frac{a}{b}$$

Elemento Neutro Multiplicativo (E.N.M.)

$$E.N.M = \frac{1}{1}$$

Elemento Inverso Multiplicativo (E.I.M.)

Sea $\frac{a}{b} \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$

$$E.I.M. = \frac{b}{a}.$$

Ejemplo ③

Sea $\mathbb{Z}$: Los números enteros

Defino la sgte relación

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$$a \bmod b \overset{def}{\equiv} a - b = kn, \exists k \in \mathbb{Z}$$

I) Reflexiva

$$a \bmod a \equiv \underbrace{a-a}_{0} = kn$$

II) Simetría

$$a \bmod b \equiv a - b = kn$$

$$b - a = (-k)n, \; (-k) \in \mathbb{Z}$$

$$\equiv b \bmod a.$$

III) Transitiva

Si $a \bmod b$

y

$b \bmod c$

Entonces $a \bmod c$

Si

$$a \bmod b \equiv a - b = k_1 n$$

$$b \bmod c \equiv b - c = k_2 n$$

$$a - c = \underbrace{(k_1 + k_2)}_{\in \mathbb{Z}} n$$

$a \bmod c$ //

$\mathbb{Z}/_{mod} = \mathbb{Z}_n$

$\mathbb{Z}_n = \{[0],[1],[2],\dots,[n-1]\}$

$[0] = \{\dots,-n,0,n,2n,\dots\}$

$[1] = \{\dots,1,n+1,2n+1,\dots\}$

$\boxed{z \in [a] \leftrightarrow a \text{ mod } z}$

$[2] = \{\dots,2,n+2,2n+2,\dots\}$

$(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$

Suma

$[a]+[b]=[a+b]$

suma usual

Multiplicación

$[a]\cdot[b]=[a\cdot b]$

multiplicación usual

Para $n=5$

$\mathbb{Z}_5 = \{[0],[1],[2],[3],[4]\}$

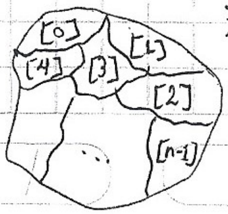
$*\ [3]+[4]=[3+4]=[7]=[2]$

Lema:

Sean $a,b \in \mathbb{Z}$

$[a]=[b] \longleftrightarrow a \text{ mod } b$

$\mathbb{Z}$



$\bigcup_{a\in\mathbb{Z}}[a] = \mathbb{Z}, [a]\cap[b]=\emptyset$
$(a\neq b)$

Cuerpo Ordenado

Sea $P \subset K$ donde P se le conoce como los elementos positivos de K.

Postulados

$P_1)$ $\forall x,y \in P \rightarrow x+y \in P,\ x.y \in P$

$P_2)$ Sea $x \in K$, cumple sólo una de las condiciones siguientes: $x \in P$ o $\underset{x\in -P}{\underline{-x\in P}}$ o $x=0$

$K = P \cup -P \cup \{0\},$

Ojo

$-A = \{-a / a \in A\}$

Donde

$-P$: Elementos negativos de K.

Obs: Si $a\in K$, $a\neq 0$ entonces $a^2 \in P$.

En efecto:

Por $P_2)$. $a \in K$.

I) Si $a \in P$

$a^2 = \underbrace{a}_{\in P}\cdot\underbrace{a}_{\in P}$

Por $P_1)$ $a^2 \in P$

II) Si $-a \in P$

$a^2 = a.a = \underbrace{(-a)}_{\in P}\underbrace{(-a)}_{\in P}$

Por $P_1)$ $a^2 \in P$

Relación de Orden

Sean $a, b \in \mathbb{K}$

* $a < b$: a es menor que b.

* $a \leq b$: a es menor o igual que b.

$$a < b \overset{\text{definición}}{\equiv} b - a \in \mathbb{P}$$

De forma equivalente:

$$a < b \leftrightarrow \exists z \in \mathbb{P} \,/\, b = a + z$$

$$a \leq b \overset{\text{def}}{\equiv} a < b \text{ o } a = b$$

Propiedades

① **transitiva**:

Sean $a, b, c \in \mathbb{K}$.

si $a < b$ y $b < c$

entonces $a < c$

Prueba

$a < b \overset{\text{def}}{\equiv} b - a \in \mathbb{P}$

$b < c \overset{\text{def}}{\equiv} c - b \in \mathbb{P}$

Por P_1) $(c - b) + (b - a) \in \mathbb{P}$ ASOC.

$((c - b) + b) - a \in \mathbb{P}$ ASOC.

$(c + (-b + b)) - a \in \mathbb{P}$ EIA

$(c + 0) - a \in \mathbb{P}$ ENA

$c - a \in \mathbb{P}$

② **Tricotomía**

Sean $a, b \in \mathbb{K}$, se cumple solo una de las condiciones siguientes:

$a < b$ o $a = b$ o $b < a$.

Prueba

Defino $x = \underbrace{a}_{\in \mathbb{K}} + \underbrace{(-b)}_{\in \mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ (Axioma Cerradura)

Por P_2) $x \in \mathbb{P}$ o $-x \in \mathbb{P}$ o $x = 0$

$a - b \in \mathbb{P}$ o $b - a \in \mathbb{P}$ o $a - b = 0$

$b < a$ o $a < b$ o $a = b$

③ **Monotonía de la Suma**

Sean $x, y, z \in \mathbb{K}$

si $x < y$ entonces

$$x + z < y + z$$

Prueba

$x < y \overset{\text{def}}{\equiv} y - x \in \mathbb{P}$ E.N.A

$\equiv (y - x) + 0 \in \mathbb{P}$ E.I.A.

$\equiv (y - x) + (z + (-z)) \in \mathbb{P}$ ASOC. y Conmut.

$\equiv (y + z) - (x + z) \in \mathbb{P}$

$$x + z < y + z \quad \blacksquare$$

④ **Monotonía de la Multiplicación**

Sean $x, y, z \in \mathbb{K}$

a) si $x < y$, $0 < z$ entonces

$$x.z < y.z$$

b) Si $x<y$ y $z<0$ entonces

$$yz < xz$$

Prueba

a) $x<y \overset{def}{\equiv} y-x \in \mathbb{P}$

$0<z \overset{def}{\equiv} \underbrace{z-0}_{z} \in \mathbb{P}$

Por P_1) $(y-x)z \in \mathbb{P}$ } Distributiva

$yz-xz \in \mathbb{P}$

$xz < yz$

b) $x<y \overset{def}{\equiv} y-x \in \mathbb{P}$

$z<0 \overset{def}{\equiv} 0-z \in \mathbb{P}$

Por P_1)

$(y-x)(-z) \in \mathbb{P}$) Distrib. y ley de signos

$xz-yz \in \mathbb{P}$

$yz < xz$

⑤ Sea $x, y, a, b \in \mathbb{K}$

Si $x<y$ y $a<b$

entonces $x+a < y+b$

Prueba

$x<y \overset{def}{\equiv} y-x \in \mathbb{P}$

$a<b \overset{def}{\equiv} b-a \in \mathbb{P}$

Por P_1) $(y-x)+(b-a) \in \mathbb{P}$) Asoc. y Conmut.

$(y+b)-(x+a) \in \mathbb{P}$

$\therefore\ x+a < y+b$

⑥ Sea $x \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$

Si $0<x$ entonces $0<x^{-1}$.

Prueba

Como $x\neq 0 \rightarrow \exists x^{-1} \in \mathbb{K}$

Por P_2).

$x^{-1} \in \mathbb{P}$	o $-x^{-1} \in \mathbb{P}$
$x \in \mathbb{P}$	$x \in \mathbb{P}$
Por P_1) $x\cdot(x^{-1}) \in \mathbb{P}$	Por P_1) $(-x^{-1})(x) \in \mathbb{P}$
$\boxed{1 \in \mathbb{P}}$ ✓	$-1 \in \mathbb{P}$ (Falso)

⑦ Sean $x, y, a, b \in \mathbb{K}$

Si $0<x<y$ y $0<a<b$

Entonces $0< xa < yb$

Prueba

Como $x<y$, $0<a$

Por la monotonía de la mult.

$\rightarrow xa < ya \quad \ldots(\mathrm{I})$

Además $a<b$, $0<y$

por la monotonía de la mult.

$\rightarrow ay < by \quad \ldots(\mathrm{II})$

De (I) y (II) por la transitividad

$\therefore\ xa < yb$

Obs:

$z \in \mathbb{P} \leftrightarrow z - 0 \in \mathbb{P} \overset{def}{\equiv} 0 < z$

$\mathbb{P} = \{ z \in K / 0 < z \}$

Obs: Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{P} = \mathbb{R}^+$, $-\mathbb{P} = \mathbb{R}^-$

· $0 \in \mathbb{R}$ · $1 \in \mathbb{R}^+$

$1 < \underbrace{1+1}_{2} < \underbrace{1+1+1}_{3} < \dots$ $(\mathbb{N} \subset \mathbb{R})$

· $n \in \mathbb{N} \to n \in \mathbb{R}^+ \to -n \in \mathbb{R}^-$ $(\mathbb{N} \subset \underset{\mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \cup \{0\}}{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R})$

· $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \to n \in \mathbb{R}, n \neq 0, \exists n^{-1} \in \mathbb{R}$

$m \in \mathbb{R} \to \underset{\frac{m}{n}}{m \cdot n^{-1}} \in \mathbb{R}$ $\quad \underset{\{ \frac{m}{n} / m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \}}{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$

Valor Absoluto

Sea $x \in \mathbb{R}$

$|x| \overset{def}{\equiv} MÁX \{ x, -x \}$

Ejemplo:

* $|5| = MÁX \{5, -5\} = 5$
* $|-2| = MÁX \{-2, 2\} = 2$

Propiedades

① $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad -|x| \leq x \leq x$

Prueba

Por la definición:

$x \leq |x| \quad \dots (I)$

$-x \leq |x| \xrightarrow[x(-1)]{} -|x| \leq x \quad \dots (II)$

Monotonía de la Multiplicación

De (I) y (II)

$-|x| \leq x \leq |x|$ //

② Sea $x \in \mathbb{R}$

$|x|^2 = x^2$

Prueba

$x \in \mathbb{R}$, por la ley de la Tricotomía

a) $x = 0 \to |0|^2 = 0^2$ ✓

b) $x > 0 \to |x| = x$

$|x|^2 = x^2$

c) $x < 0 \to |x| = -x$

$|x|^2 = (-x)(-x)$ Por la ley de signos.

$|x|^2 = x^2$

③ "Desigualdad Triangular"

$\forall x, y \in \mathbb{R}$; $|x+y| \leq |x| + |y|$

Prueba

Por la Definición

$x \leq |x|$
$y \leq |y|$ $\downarrow (+)$ MONOTONÍA DE LA SUMA

$x+y \leq |x|+|y| \quad \cdots (I)$

Por otro lado:

$-x \leq |x|$
$-y \leq |y|$ $\downarrow (+)$ MONOTONÍA DE LA SUMA

$-x-y \leq |x|+|y|$

$\downarrow$ ley de signos

$-(x+y) \leq |x|+|y| \quad \cdots (II)$

De (I) y (II)

$\text{MÁX}\{x+y, -(x+y)\} \leq |x|+|y|$

$|x+y| \leq |x|+|y|$ ∎

④ $\forall x, y \in \mathbb{R}$; $|x.y| = |x|.|y|$

Prueba

✱ $\underbrace{|xy|^2 =}_{\text{Por prop. ②}} (xy)^2 = (xy)(xy)$ ASOC. y CONMU (.)

$= x^2.y^2 \quad \cdots (I)$

✱ $(|x|.|y|)^2 = (|x|.|y|).(|x|.|y|)$ ASOC. y CONMU.

$= |x|^2.|y|^2$ Por prop ②

$= x^2.y^2 \quad \cdots (II)$

De (I) y (II):

$|x.y|^2 = x^2.y^2 = (|x|.|y|)^2$

Entonces

$\boxed{|xy| = |x|.|y|} \vee |xy| = -|x|.|y|$

⑤ $\forall x \in \mathbb{R}$: $|x| \geq 0$

Prueba

Sea $x \in \mathbb{R}$, Por la Ley de la Tricotomía

a) $x = 0 \longrightarrow |0| = 0 \geq 0$ ✓

b) $x > 0 \longrightarrow |x| = \text{MÁX}\{x; -x\} = x > 0$

$\longrightarrow |x| = x \geq 0$

$x > 0 \longrightarrow x \geq 0 \quad \langle 0; \infty \rangle \subset [0; +\infty \rangle$

c) $x < 0 \longrightarrow |x| = \text{MÁX}\{x, -x\} = -x$

$x < 0 \longrightarrow -x > 0$

por (-1)

Monotonía de la Multiplicación

$|x| = -x > 0$

$\rightarrow |x| = -x \geq 0$ ∎

Teorema

Sea $a, x \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$

$|x-a| < \delta \leftrightarrow a-\delta < x < a+\delta$

Prueba: $|x-a| = \text{MÁX}\{x-a, a-x\}$

$|x-a| = \text{MÁX}\{x-a, a-x\} < \delta$

$\Leftrightarrow x-a<\delta \quad \wedge \quad a-x<\delta$

Monotonía de la suma $(+a)$ — Monotonía de la multiplicación $(\times -1)$ y de la suma $(+a)$

$x<a+\delta \quad \wedge \quad a-\delta<x$

$\Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta$ ∎

$\mathbb{R}$ ES UN CUERPO COMPLETO

Definición ① (Acotado Superiormente)

Sea $X\subset\mathbb{R}$, $X\neq\emptyset$, se dice que X es acotado superiormente si existe $b\in\mathbb{R}$ tal que:

$\forall x\in X$; $x\leq b$, donde b se le conoce como cota superior de X.

Ejemplo ①

$A=\langle -1,3]$ — Notamos que $3, 4, 11, 69$ son cotas superiores de A.

$\forall x\in A$: $x\leq 3$

Ejemplo ②

$$B=\left\{\frac{2n-1}{n} / n\in\mathbb{N}\right\}$$

En efecto:

$\forall x\in B$: $x\leq 2$ $\left(\frac{2n-1}{n}\leq 2 \leftrightarrow 2n-1\leq 2n\right)$

Notamos que $2, 3, \ldots$ son cotas superiores de B.

Definición ② (Acotado Inferiormente)

Sea $X\subset\mathbb{R}$, $X\neq\emptyset$, se dice que X es acotado inferiormente

Si existe $a\in\mathbb{R}$ tal que:

$\forall x\in X$: $a\leq x$, donde a se le conoce como cota inferior.

Ejemplo ①

$$C=\{-1\}\cup\langle 0,5\rangle$$

En efecto

$\forall x\in C$: $-1\leq x$

Notamos que $-1, -3, -20$ son cotas inferiores de C.

Ejemplo ②

$$D=\left\{\frac{1}{n} / n\in\mathbb{N}\right\}$$

Notamos que:

$\forall n\in\mathbb{N}$: $0\leq\frac{1}{n}\leq 1$

Además 0 y 1 son cotas inf y sup, respectivamente.

Definición ③ (Acotado)

Sea $X\subset\mathbb{R}$, $X\neq\emptyset$, se dice que X es un conjunto acotado si existe $k>0$ tal que $\forall x\in X$: $|x|\leq k$

De forma equivalente

$\exists a,b\in\mathbb{R} / a\leq x\leq b, \forall x\in X$

Obs: X es Acotado $\leftrightarrow$ X es acotado inferiormente y Superiormente

Ejemplo ①

Sea $A = \langle -2, 5]$

Notamos:

$\forall x \in A: -2 < x \le 5$

Por otro lado $x = 5$

$\forall x \in A: |x| \le 5$

Definición ④ (SUPREMO)

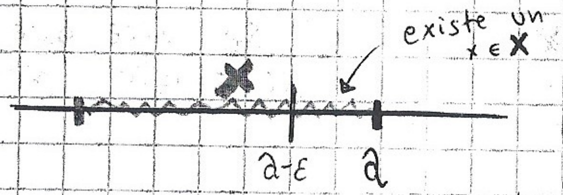
Sea $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, Se llama **SUPREMO** de X. $(\sup(X) = a)$

$S_1)$ $\forall x \in X: \ x \le a$

$S_2)$ $\forall x \in X: \ x \le c$ entonces

$a \le c$

$S_2')$



, $\varepsilon > 0$

$\forall \varepsilon > 0: \exists x_0 \in X \,/\, a - \varepsilon < x_0$

Definición ⑤ (INFIMO)

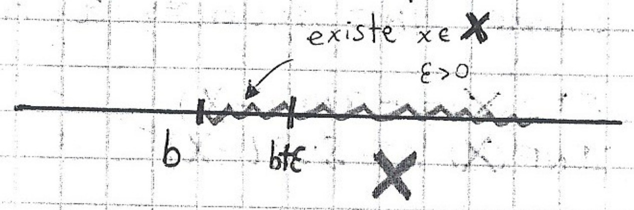
Sea $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, Se llama **INFIMO** de X a la mayor cota inferior de X $(INF(X) = b)$

$I_1)$ $\forall x \in X$, $b \le x$

$I_2)$ $\forall x \in X$, $d \le x$

$\rightarrow d \le b$

$I_2')$



$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in X \,/\, x_0 < b + \varepsilon$

AXIOMA (Completitud)

① Sea $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, si X es acotado Superiormente, entonces posee SUPREMO.

② Sea $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, si X es acotado inferiormente, entonces posee INFIMO.

OBS:

① Si X es acotado superiormente y $\sup(X) \in X$. El supremo sería el máximo Elemento de X.

2) si X es acotado inferiormente y $\text{Inf}(x) \in X$. El Ínfimo sería el menor elemento de X.

Ejemplo 1

Sea $A = \langle -1, 7]$

$\text{INF}(A) = -1 \notin A$

$\text{SUP}(A) = 7 \in A$

Notamos que 7 es el mayor elemento de A.

Proposición

Sea $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, es acotado, se cumple las siguientes afirmaciones:

a) $\text{SUP}(X) = -\text{INF}(-X)$

b) $\text{INF}(X) = -\text{SUP}(-X)$

c) Sea $c > 0$ (constante)

I) $\text{SUP}(cX) = -\text{INF}(-cX)$

II) $\text{INF}(cX) = -\text{SUP}(-cX)$

Prueba

a) Sabemos $-X = \{-x / x \in X\}$

Como X es acotado

$\exists a, b \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b, \forall x \in X$

$\exists -a, -b \in \mathbb{R} / -b \leq -x \leq -a, \forall -x \in -X$

$\therefore -X$ es acotado.

Sea $m = \text{Sup}(X)$

S1) $\forall x \in X : x \leq m$

$\forall x \in X : -m \leq -x$

$\forall -x \in -X : -m \leq -x$ (I_1)

Notamos que:

$-m$ es una cota inferior de $-X$

S2') $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in X / m - \varepsilon < x_0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in X / -x_0 < \varepsilon - m$

$\forall \varepsilon > 0, \exists -x_0 \in -X / -x_0 < \varepsilon + (-m)$ (I_2')

$\therefore -m = \text{Inf}(-X)$

$-\text{Sup}(X) = \text{Inf}(-X)$

$\text{Sup}(x) = -\text{Inf}(-X)$ ■

Ejemplo:

$A = \langle 2, 6]$

$\text{Inf}(A) = 2$, $\text{Sup}(A) = 6$

$-A = [-6, -2\rangle$

$\text{Sup}(-A) = -2$, $\text{Inf}(-A) = -6$

$\text{Sup}(-A) = -2 = -\text{Inf}(A)$

$\text{Sup}(A) = 6 = -\text{Inf}(-A)$

$cX = \{c.x / x \in X\}$

$4A = \langle 8, 24]$

$Sup(4A) = 24$, $Inf(4A) = 8$

$-4A = [-24, -8\rangle$

$Sup(-4A) = -8$, $Inf(-4A) = -24$

$Sup(4A) = 24 = -Inf(-4A)$

$Inf(4A) = 8 = -Sup(-4A)$

Preg. resolver (Parcial)

Ejercicio

Sean A y B conjuntos acotados.
Si $A \subset B$ entonces

$Inf(B) \leq Inf(A) \leq Sup(A) \leq Sup(B)$

/ /

$cX = \{c.x / x \in X\}$

$4A = \langle 8, 24]$

$Sup(4A) = 24$, $Inf(4A) = 8$

$-4A = [-24, -8\rangle$

$Sup(-4A) = -8$, $Inf(-4A) = -24$

$Sup(4A) = 24 = -Inf(-4A)$.

$Inf(4A) = 8 = -Sup(-4A)$.

Preg. resolver (Parcial)

Ejercicio

Sean A y B conjuntos acotados.
Si $A \subset B$ entonces

$Inf(B) \leq Inf(A) \leq sup(A) \leq Sup(B)$

Teorema (Intervalos Encajados)

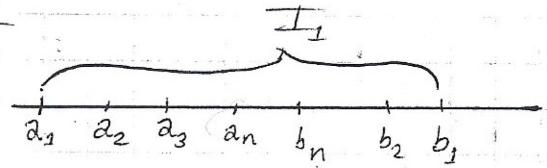
Sea $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ tal que

$I_n \supset I_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Entonces existe $c \in I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset\right)$$

Prueba



$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n$

Notamos

$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$

Defino $A = \{a_n / n \in \mathbb{N}\}$

Observamos que el conjunto A está acotado superiormente, entonces existe $sup(A)$.
Denotamos $sup(A) = c$

S1) $\forall x \in A : \; x \leq c$
$\forall n \in \mathbb{N}, \; a_n \leq c \; \ldots$ ①

Además $\{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$ son cotas superiores

$\therefore c \leq b_n, \; \forall n \in \mathbb{N} \; \ldots$ ②

De ① y ②

$\forall n \in \mathbb{N} : \; a_n \leq c \leq b_n$

$\forall n \in \mathbb{N}; \; c \in I_n$

Obs:

- Sabemos $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado y completo.

• Notamos que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado pero no completo.

En efecto:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q} \quad (\sup(A) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$$

Vemos que A está acotado superiormente

Teorema

Las siguientes afirmaciones son equivalentes

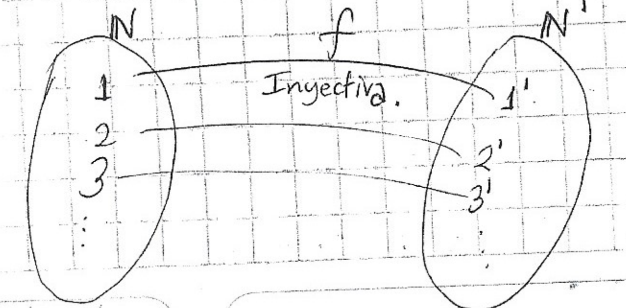
① $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ no está acotado superiormente

② Dado $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / a n_0 > b$

③ Dado $a > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \frac{1}{n_0} < a$

Obs:

$$\mathbb{N} \subset \underset{\text{"cuerpo"}}{\mathbb{K}} \longleftrightarrow \mathbb{N} \subset f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}'$$



f inmersión

Prueba

① → ② Por contradicción:

$\exists a, b \in \mathbb{R}, a > 0, \forall n \in \mathbb{N}, an \leq b \ldots (1)$

Tenemos $a > 0$ entonces $\exists a^{-1} \in \mathbb{R}^+ \ldots (2)$

De ① y ② por la monotonía de la multiplicación $\forall n \in \mathbb{N}: n \leq \frac{b}{a}$.

$\mathbb{N}$ está acotado sup. $(\longleftarrow\!\!\!\!\longleftarrow)$

② → ③

Para $b = 1$

Dado $a > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $a n_0 > 1$, Por la monotonía de la multiplicación

$a > \frac{1}{n_0}$

③ → ①

Sea $a = \frac{1}{b} > 0$, $b \in \mathbb{R}^+$

$\frac{1}{n_0} < \frac{1}{b} \longrightarrow b < n_0$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $b < n_0 \longleftrightarrow \mathbb{N}$ no está acotado Sup.

$\left(\begin{array}{l}\mathbb{N} \text{ está} \\ \text{acotado sup}\end{array} = \exists b \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, n \leq b\right)$

$\sim(\quad) = \forall b \in \mathbb{R} / \exists n_0 \in \mathbb{N}; b < n_0$

* Si se cumple algunas de las afirmaciones del teorema anterior, al conjunto $K=\mathbb{R}$ se le conoce como cuerpo ARQUIMEDIANO

$\forall a>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \frac{1}{n_0}<a$ (Propiedad ARQUIMEDIANO)

Teorema (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$)

Para todo intervalo no degenerado posee un número racional, es decir,

Sea $a,b\in\mathbb{R}$ $(a<b)$

$\exists q \in \mathbb{Q} \;/\; a<q<b$

Prueba

Sea $I=\langle a,b\rangle$, $a<b$

Notamos: $0<b-a$

$\rightarrow \exists p\in\mathbb{N} \;/\; \frac{1}{p}<b-a$

Defino:

$$A=\{m\in\mathbb{Z} \;/\; \underbrace{\frac{m}{p}\geq b}_{m\geq pb}\}$$

$\forall m\in A: \; \overset{\in\mathbb{R}}{pb}\leq m$

Notamos que A está ACOTADO INFERIORMENTE
Existe Inf (A).

¿A posee un menor elemento?

I) si $pb\in\mathbb{Z}$ ✓

II) si $pb\notin\mathbb{Z}$

$[\![pb]\!]\leq bp<[\![pb]\!]+1$

$\therefore$ A posee menor elemento.

$m_0=\text{MÍN}(A)\in A$.

$\rightarrow m_0\geq pb \quad \cdots(\text{I})$

$\rightarrow m_0-1<pb \rightarrow \boxed{\frac{m_0-1}{p}<b}$

AFIRMO

$$a<\frac{m_0-1}{p}<b$$

$a<\frac{m_0-1}{p}$:

Por Contradicción

$\frac{m_0-1}{p}\leq a \quad \cdots(\text{II})$

De (I) y (II)

$$\frac{m_0 - 1}{p} \leq a < b \leq \frac{m_0}{p}$$

$$\Rightarrow b - a < \frac{1}{p} \quad (\rightarrow\leftarrow)$$

Densidad de $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$

Para todo intervalo NO DEGENERADO posee un número irracional, es decir,

Sea $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$\exists s \in \mathbb{I} / \quad a < s < b$

Prueba

Sea $I = \langle a, b \rangle$, $a < b$

Notemos: $0 < b - a$

$\rightarrow \exists p \in \mathbb{N} / \frac{1}{p} < b - a$

Defino:

$$A = \{ m \in \mathbb{Z} / \underbrace{\frac{\sqrt{2}\, m}{p} \geq b}_{\sqrt{2}\, m \geq p b} \}$$

De forma análoga

$$a < \underbrace{\left(\frac{m_0 - 1}{p}\right) \sqrt{2}}_{\in \mathbb{I}} < b$$

Práctica Dirigida #2

Probar Sea $x, y \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ es divisible por $x + y$.

PIM:

$X = \{ n \in \mathbb{N} / x^{2n-1} + y^{2n-1}$ es div. por $x+y \}$

(I) $1 \in X \leftrightarrow x+y$ es div. por $x+y$ ✓

(II) Hipótesis

$n \in X \leftrightarrow x^{2n-1} + y^{2n-1}$ es div. por $x+y$.

AFIRMO

$$S(n) \in X$$

$$x^{2(S(n))-1} + y^{2(S(n))-1} = x^{2n+1} + y^{2n+1}$$

$$= x^{2n-1} \cdot x^2 + y^{2n-1} \cdot x^2 + y^{2n-1} \cdot y^2 + x^{2n-1} \cdot y^2$$

$$- y^{2n-1} x^2 - x^{2n-1} y^2$$

$$= x^2 (x^{2n-1} + y^{2n-1}) + y^2 (x^{2n-1} + y^{2n-1}) - x^{2n-1} y^2 - x^2 y^{2n-1}$$

$$\cancel{= (x^2+y^2)(x^{2n-1} + y^{2n-1})}$$

De la hipótesis

$$x^{2n-1} + y^{2n-1} = k(x+y)$$

$$= (x^2+y^2)(x^{2n-1} + y^{2n-1}) - ((k(x+y) - y^{2n-1}) + x^2 y^{2n-1})$$

$$= (x^2+y^2)(k)(x+y) - (k(x+y) y^2 + y^{2n-1} \underbrace{(x^2-y^2)}_{(x+y)(x-y)})$$

$\therefore$ $x^{2n+1} + y^{2n+1}$ es divisible por $x+y$.