UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA CICLO 2016–II
PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA DE CÁLCULO DIFERENCIAL

---

1. Construir las tablas de verdad de las siguientes proposiciones
   (a) $[p \wedge (p \vee q)] \leftrightarrow p$.
   (b) $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.

2. Sean $A = \{1, 2, \ldots, 20\}$ y $B = \{x \in A / x < 5 \leftrightarrow x \geq 7\}$. Indicar el valor de verdad de las proposiciones siguientes
   (a) $\exists X \subset A, \exists Y \subset B$ tal que $X \cap Y = \emptyset$.
   (b) $\forall x \in A, \exists y \in B / x - y = 10$.

3. Considere $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hallar por extensión los siguientes conjuntos
   (a) $A_1 = \{x \in A : \exists y \in A$ tal que $x^2 + y \geq 2\}$.
   (b) $A_2 = \{x \in A : \forall y \in A$ tal que $x^2 + y \geq 5\}$.

4. Negar la proposición siguiente: existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq 3 \rightarrow x < 7$.

5. Considerando $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones
   (a) Existe $x \in P$ tal que $(2x + 1) \in P$.
   (b) $\forall x \in P, \exists y \in P$ tal que $x + y = 7$. F

para $x=7$

6. Sean p y q dos proposiciones. Se define el conectivo siguiente $p * q = \sim p \vee \sim q$. Expresar sólo en términos del conectivo $*$, cada una de las siguientes proposiciones
   (a) $p \rightarrow q$.
   (b) $p \leftrightarrow q$.

7. Simplifique la expresión siguiente $\sim [\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim q] \vee p$.

8. Sean p y q dos proposiciones lógicas. Si $p \wedge q \equiv p$ y $p \vee \sim q$ es una proposición tautológica. Pruebe que $p \equiv q$.

9. Usando las reglas de inferencia
   (a) Demostrar la siguiente conclusión $r \rightarrow \sim q$ a partir de las premisas:
   $$\begin{array}{l} \sim (r \wedge s) \\ q \rightarrow s \end{array}$$
   (b) Demostrar
   $$\begin{array}{l} p \vee \sim s \\ \sim r \rightarrow s \\ \hline \therefore \sim p \rightarrow r \end{array}$$
   (c) Demostrar
   $$\begin{array}{l} \sim A \rightarrow B \\ C \rightarrow B \\ c \vee \sim A \\ \sim B \vee D \\ \hline \therefore D \end{array}$$

10. Demostrar que se cumple $\sim N$ con las premisas
    $$\begin{array}{l} s \rightarrow \sim R \\ R \\ \sim s \rightarrow Q \\ Q \rightarrow \sim N \end{array}$$

11. Sean n un número entero. Demostrar que si $n^2 + 5$ es impar, entonces n es par.

12. Sean A, B subconjuntos de U. Demostrar que
    (a) $C(C(A) = A)$.
    (b) $A \subset B$ si y solo si $C(B) \subset C(A)$.
    (c) $A = B$ si y solo si $C(B) = C(A)$. Donde C representa el complemento de un conjunto.

13. Demostrar: Sea A un conjunto $A \subset A^c \leftrightarrow A = \emptyset$

14. Seab A, B dos subconjuntos de U. Demostrar que:

(a) $A \subset B$ si y solo si $A \cup B = B$.
(b) $A \subset B$ si y solo si $A \cap B = B$.
(c) $A \cap B = A$ y $A \cup B = A$ si y solo si $A = B$.

15. Demostrar de forma directa, que si n y m son enteros pares, entonces $\frac{n^2+m^2}{2}$ es par. ¿Se cumple también el recíproco?

16. Determine los siguientes conjuntos

    (a) $P = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 = 0 \leftrightarrow (x+2)^2 = 0\}$.

    (b) $N = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \leftrightarrow x = 0\}$.

17. Siendo p: José es estudioso y q: Juan es estudioso, escribir en forma simbólica:

    (a) No es cierto que Juan o José sean estudiosos.

    (b) José y Juan, no son estudiosos.

    (c) José no es estudioso y Juan es estudioso.

18. Sean A, B y C conjuntos. Demuestre que

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

19. Demostrar de dos formas la proposición siguiente: Si n^2 es par, entonces n es par.

20. Sean A, B y C conjuntos. Demuestre que: Si $A \times C = B \times C$ y $C \neq \emptyset$, entonces $A = B$.

21. Considere $A \subset B$. Demostrar Si $B = \emptyset$, entonces $A = \emptyset$.

22. Demostrar en forma indirecta, si $5n + 8$ es impar, entonces n es impar.

23. Sean A, B dos subconjuntos de un conjunto universal U. Demostrar que

$$P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$$

¿Es cierto que $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$?

24. Demostrar: Sabiendo que $3n - 1$ es un entero par, entonces n es un entero impar.

25. Demostrar: Sabiendo que n^2 es un entero impar, entonces n es impar.

26. Dados $A, B \subset E$. Pruebe que $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset$.

27. Demuestra poniendo un contraejemplo que las siguientes afirmaciones no son verdaderas:

    (a) Todo entero mayor que 17 es el cuadrado de un número entero.

    (b) Todo entero mayor que 6 es múltiplo de 2 y de 3.

    (c) $100n + 1 > n^2$ para todo entero n.

28. En los siguientes ejercicios demuestre que la proposición es falsa:

    (a) Si n es un número natural, entonces $2n^2 - 4n + 31$ es primo.

    (b) Si n es un número natural, entonces $n^2 + 17n + 17$ es primo.

    (c) Si $n^2 - n$ es par, entonces n es par.

    (d) Si n es un número entero, entonces $4|(n^2 - 3)$.

29. Demostrar que si n^2 es múltiplo de 7, entonces n es múltiplo de 7.

30. Sean A y B dos conjuntos. Demostrar que $A \cup B \neq \emptyset$, entonces $A \neq \emptyset$ o $B \neq \emptyset$.

31. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $n^3 - n$ siempre es múltiplo de tres.

32. Considere los conjuntos A, B en el universo U. Demuestre

    (a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

    (b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

33. Demostrar que $A \cup \emptyset = A$, donde A es un conjunto.

34. Demostrar que es condición necesaria y suficiente para que un conjunto A esté incluido en un conjunto B, es que la intersección de A y B sea igual al conjunto A.