UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

CURSO: Cálculo integral COD. CURSO: CM - 132

PRACTICA: Calificada N°2 SECCIÓN:

APELLIDOS Y NOMBRES (Alumno) — CODIGO — FIRMA

Lima, ... de Septiembre del 2017 N° Lista ....

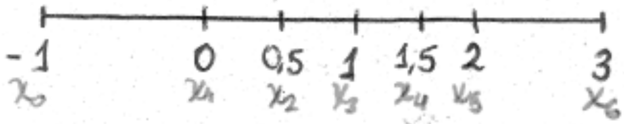
NOTA: 09 (En números) — (En letras) — Nombre del Profesor — Firma del Profesor

CALIFICACIÓN

Preg N°	Puntos
1	4
2	—
3	—
4	5
5	
6	
Total	9

1. Sea f una función acotada definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & , x \in [-1,1[\\ \sqrt{1-(x-1)^2} & , x \in [1,2[\\ x^2-1 & , x \in [2,3[\\ 7 & , x = 3 \end{cases};$$



i	x_{i-1}	x_i	Δx_k
1	-1	0	1
2	0	0,5	0,5
3	0,5	1	0,5
4	1	1,5	0,5
5	1,5	2	0,5
6	2	3	1

y $P = \{-1; 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 3\}$ una partición del intervalo $[-1,3]$. Definimos:

$$m_i := \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\} \qquad M_i := \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\} \quad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

En nuestro caso, para la partición escogida $n = 6$.

Calculemos los 'm_i' y 'M_i':

a) $m_1 = \inf\{f(x) : -1 \le x \le 0\} = \inf\{x+2 : -1 \le x \le 0\} = \inf[1,2] = 1.$

$m_2 = \inf\{f(x) : 0 \le x \le 0,5\} = \inf\{x+2 : 0 \le x \le 0,5\} = \inf[2, 2,5] = 2.$

$m_3 = \inf\{f(x) : 0,5 \le x \le 1\} = \inf\{x+2 : 0,5 \le x \le 1\} = \inf[2,5, 3] = 2,5$

$m_4 = \inf\{f(x) : 1 \le x \le 1,5\} = \inf\{\sqrt{1-(x-1)^2} : 1 \le x \le 1,5\} = \inf[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1] = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$m_5 = \inf\{f(x) : 1,5 \le x \le 2\} = \inf\{\sqrt{1-(x-1)^2} : 1,5 \le x \le 2\} = \inf[0, \frac{\sqrt{3}}{2}] = 0.$

$m_6 = \inf\{f(x) : 2 \le x \le 3\} = \inf\{x^2-1 : 2 \le x < 3 \vee 7 : x = 3\} = \inf[3, 8] = 3.$

b) $M_1 = \sup\{f(x); -1 \leq x \leq 0\} = \sup\{x+2; -1 \leq x \leq 0\} = \sup[1,2] = 2.$

$M_2 = \sup\{f(x): 0 \leq x \leq 0{,}5\} = \sup\{x+2 : 0 \leq x \leq 0{,}5\} = \sup[2; 2{,}5] = 2{,}5.$

$M_3 = \sup\{f(x): 0{,}5 \leq x \leq 1\} = \sup\{x+2 : 0{,}5 \leq x \leq 1\} = \sup[2{,}5; 3] = 3.$

$M_4 = \sup\{f(x): 1 \leq x \leq 1{,}5\} = \sup\{\sqrt{1-(x-1)^2} : 1 \leq x \leq 1{,}5\} = \sup[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1] = 1.$

$M_5 = \sup\{f(x): 1{,}5 \leq x \leq 2\} = \sup\{\sqrt{1-(x-1)^2} : 1{,}5 \leq x \leq 2\} = \sup[0, \frac{\sqrt{3}}{2}] = \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$

$M_6 = \sup\{f(x): 2 \leq x \leq 3\} = \sup\{x^2-1 : 2 \leq x < 3 \vee 7 : x = 3\} = \sup[3, 8] = 8.$

*La integral definida $\int_{-1}^{3} f$ podemos aproximarlo como $\frac{1}{2}[U(f,P) + L(f,P)]$.

Se define la suma superior e inferior respectivamente:

$$\boxed{U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i} \quad , \quad \boxed{L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i}.$$

$\therefore U(f,P) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + M_3 \Delta x_3 + M_4 \Delta x_4 + M_5 \Delta x_5 + M_6 \Delta x_6$

$= 2 \cdot 1 + 2{,}5 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}5 + 8 \cdot 1$

$\approx 13{,}68$ X 14,75

$\therefore L(f,P) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 + m_4 \Delta x_4 + m_5 \Delta x_5 + m_6 \Delta x_6$

$= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}5 + 2{,}5 \cdot 0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 1$

$\approx 6{,}68$ X 5,93

Luego, la integral definida $\int_{-1}^{3} f$ es aproximadamente igual a $\frac{1}{2}[13{,}68 + 6{,}68]$ es decir, a $10{,}18$.

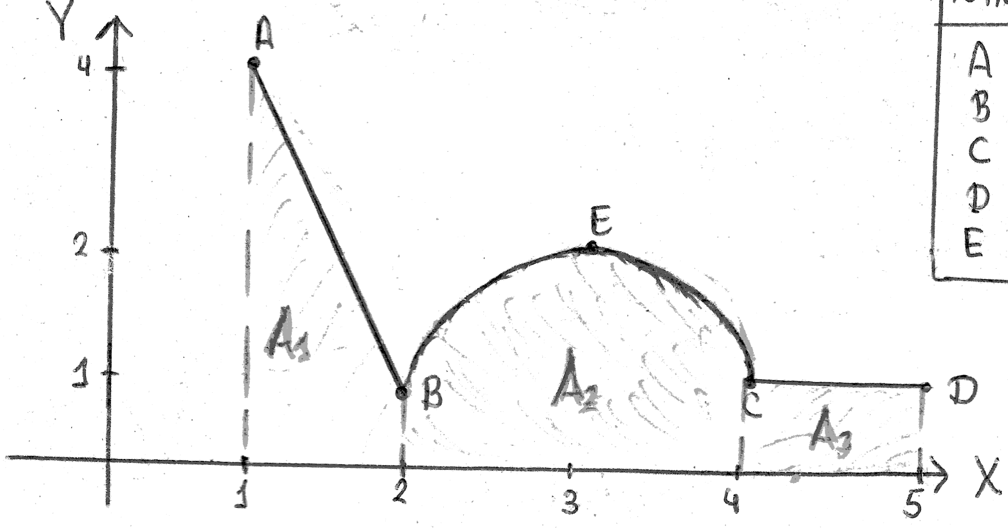
La cota de error de la integral definida $\int_{-1}^{3} f$ es $\frac{1}{2}[U(f,P) - L(f,P)]$, es decir, a $3{,}5$.

$$\boxed{\text{Respuesta: } \int_{-1}^{3} f \simeq 10{,}18. \qquad \text{Cota de error: } 3{,}5.}$$

D

4. De la gráfica:

a)



Punto	Coordenada X	Coordenada Y
A	1	4
B	2	1
C	4	1
D	5	1
E	3	2

Las ecuaciones de $\overline{AB}$, $\widehat{BEC}$, $\overline{CD}$ son:

$(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (1-t)(1,4)+t(2,1)$; $0\leq t\leq 1$.

$f_1: [1,2]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto -3x+7$

$(x,y)\in\mathbb{R}^2 /$ $x=\cos t+3$, $y=\operatorname{sen} t+1$; $0\leq t\leq 2\pi$.

$f_2: [2,4]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 1+\sqrt{1-(x-3)^2}$

$(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (1-t)(4,1)+t(5,2)$; $0\leq t\leq 1$.

$f_3: [4,5]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 1$

Pero el área de la región sombreada es igual $A_1+A_2+A_3$.

Sean P_1, P_2 y P_3 particiones regulares de los intervalos $[1,2]$, $[2,4]$ y $[4,5]$ respectivamente.

$P_1=\{1, 1+\frac{1}{n}, \ldots, 1+\frac{n-1}{n}, 1+n.\frac{1}{n}=2\}$ $\quad \Delta x_{P_1}=\frac{2-1}{n}=\frac{1}{n}$ $\quad x_k^*=1+\frac{k}{n}$

$P_2=\{2, 2+\frac{2}{n}, \ldots, 2+(n-1).\frac{2}{n}, 2+n.\frac{2}{n}=4\}$ $\quad \Delta x_{P_2}=\frac{4-2}{n}=\frac{2}{n}$ $\quad x_k^*=2+\frac{2k}{n}$

$P_3=\{4, 4+\frac{1}{n}, \ldots, 4+\frac{n-1}{n}, 4+\frac{n}{n}=5\}$ $\quad \Delta x_{P_3}=\frac{5-4}{n}=\frac{1}{n}$ $\quad x_k^*=4+\frac{k}{n}$

Pero $A_1=R(f,P_1)$, $A_2=R(f,P_2)$ y $A_3=R(f,P_3)$, donde

$$R(f,P_i)=\lim_{|P_i|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k,$$

en el cual $x_k^*\in[x_{k-1},x_k]$.

$$A_1 = R(f_1, P_1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_1(x_k^*)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-3x_k^* + 7)\cdot\frac{1}{n}, \text{ donde } x_k^* = 1 + \frac{k}{n}$$

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(-3 - \frac{3k}{n} + 7\right)\times\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(4 - \frac{3k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[4\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} k\right]$$

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[4\cdot n - \frac{3}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right] = \lim_{n\to\infty} 4 - \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right) = 4 - \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{5}{2}\, u^2$$

$$A_3 = R(f_3, P_3) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_3(x_k^*)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 1\cdot\frac{1}{n}, \text{ donde } x_k^* = 4 + \frac{k}{n}$$

$$A_3 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot n = 1\, u^2$$

$$A_2 = R(f_2, P_2) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_2(x_k^*)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \sqrt{1 - (x_k^* - 3)^2}\right)\cdot\frac{2}{n}, \text{ donde } x_k^* = 2 + \frac{2k}{n}$$

$$A_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}$$

b) Área $= A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{2}(4+1)\cdot 1 + \frac{\pi(1)^2}{2} + (2)(1) + (1)(1)$

$\simeq 7{,}07\, u^2$

2. Sea $f(x) = \int_0^{x^2-1} (4 + \operatorname{sen}(\pi\sqrt{t+1})\,dt$, $x>0$.

De la regla de la cadena, $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$.

Hallemos $f'(x)$:

$$f'(x) = 4 + \operatorname{sen}(\pi + \sqrt{x^2-1+1}) \cdot (x^2-1)' - 0$$
$$= 4 + \operatorname{sen}(\pi|x|) \cdot 2x$$
$$= 4 + \operatorname{sen}(\pi x) \cdot 2x$$

Falta